XXX.

Bemerkungen zur Invariantentheorie.

(Mathematische Annalen, Bd. 19, 1882, S. 280—290.)

Ich erlaube mir im Folgenden einen Beitrag zu derjenigen Begründung der Invariantentheorie vorzulegen, welche von der Transformation homogener Formen ausgeht. Die Frage ist seit der grundlegenden Abhandlung des Herrn Aronhold[1]) bekannt und bedarf keiner Erläuterung. Auch auf Vergleiche mit früheren Darstellungen bin ich nicht eingetreten, da sie durch die Uebereinstimmung der Bezeichnungen nahe genug liegen. Dagegen darf ich nicht unerwähnt lassen, dass dasjenige Princip, welches sich als das entscheidende erweist, — die Aequivalenz zweier Formen $f(ax)$ und $f(by)$ von der Aequivalenz beider mit einer dritten abhängig zu machen, schon in der interessanten Abhandlung des Herrn Gram[2]) auftritt. Meine eigenen Untersuchungen in dieser Richtung reichen bis zum Ende der 60er Jahre zurück; die ursprünglich beabsichtigte Veröffentlichung derselben ist unterblieben, nicht dass ich auf fremde Arbeiten gewartet hätte, um aus ihnen die den meinigen beizulegende Tragweite zu entnehmen, sondern weil meine Beschäftigung mich immer mehr zu Fragen führte, bei denen das Interesse ausschliesslich in der Anwendung der Formenbildung liegt. Wenn ich mich nach so langer Zeit gleichwohl zur folgenden kurzen Veröffentlichung entschlossen habe, so habe ich den Anlass dazu in einigen Publicationen der letzten Jahre gefunden, welche mir zeigten, dass eine unten folgende Berichtigung (§ 1. 2.) noch heute nöthig ist, nachdem ich sie seit langer Zeit als augenfällig für überflüssig gehalten hatte.

Die vollständige Durchführung des Princips, auf welches nach Herrn Aronhold die Invariantentheorie zu gründen ist, führt zur Einsicht, dass die Erscheinung der „Invarianz" mehr auf den Eigen-

1) Borchardt's Journal LXII.
2) Diese Annalen VII, 230.

schaften der Substitutionen, als auf Eigenschaften der zu transformirenden Formen beruht, und dies führt dann zum Begriffe der „invariantiven" Substitutionen und derjenigen Formen, welche einer solchen, wenn auch nicht jeder Substitution gegenüber „vollständige" sind.

1.

Ich bezeichne durch f eine Form p^{ter} Ordnung mit n Variabeln, ihre Gliederzahl durch t; $f(ax)$ bedeute dann eine Form f mit den Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_n$ und den Coefficienten $a_1 a_2 \ldots a_t$ in einer beliebig festzusetzenden Reihenfolge.

Die Formen $f(ax)$ und $f(by)$ heissen äquivalent, wenn jede von ihnen in die andere durch eine lineare und umkehrbare Substitution transformirt werden kann. Dafür ist es ebenfalls nothwendig und ausreichend, dass beide zur nämlichen dritten Form $f(cz)$ äquivalent sind. Diese Festsetzung hat Gauss zu arithmetischen Zwecken gegeben, wenigstens nur diese betont: seine Untersuchungen über die Compositionstheorie, die ternären Formen, sein zweiter Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra und seine Theorie des Linienelementes liefern den Beweis, dass Gauss auch, und zwar in den mannigfaltigsten Richtungen, auf dem Gebiete der Formenbildung thätig gewesen ist.

Geht durch eine lineare Substitution, deren Coefficienten $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s$ heissen, während s ihre Anzahl nn bedeutet, $f(ax)$ in $f(a'y)$ über, so lauten die Bedingungen, damit dies $= f(by)$ wird:

$$b_1 = a_1', \; b_2 = a_2', \ldots, b_t = a_t'. \tag{I}$$

Die eigentlichen Aequivalenzbedingungen ergeben sich hieraus durch eine Operation, welche ich als die systematische Elimination von $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s$ bezeichnen möchte.

Die systematische Elimination von x zwischen m algebraischen Gleichungen

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0, \quad \varphi_3(x) = 0, \ldots, \varphi_m(x) = 0 \tag{a}$$

setzt voraus, dass man 1. die Resultante der beiden ersten Gleichungen, $R(\varphi_1 \varphi_2) = 0$ setzt, 2. den nunmehr existirenden grössten gemeinsamen Theiler φ_2' von φ_1 und φ_2 aufsucht, und nun zunächst zum Gleichungssystem

$$\varphi_2' = 0, \quad \varphi_3 = 0, \ldots, \varphi_m = 0$$

übergeht. Mit diesem wird das nämliche Verfahren wiederholt, indem man $R(\varphi_2' \varphi_3) = 0$ setzt und, wenn φ_3' den nun vorhandenen grössten gemeinsamen Theiler von φ_2' und φ_3 bedeutet, das Gleichungssystem

$$\varphi_3' = 0, \quad \varphi_4 = 0, \ldots, \varphi_m = 0$$

bildet. Fährt man so fort, so erhält man, bei hinreichend erläuterter Bezeichnung, die Resultanten

$$\text{(b)} \qquad R(\varphi_1\varphi_2)=0, \quad R(\varphi_2'\varphi_3)=0, \quad \ldots, \quad R(\varphi'_{m-1}\varphi_m)=0$$

und die Schlussgleichung

$$\text{(c)} \qquad \varphi'_m(x)=0;$$

und es ist klar, dass diese $m-1$ Gleichungen (b) die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen ausdrücken, damit wenigstens ein Werth von x existirt, welcher allen Gleichungen (a) genügt, während (c) alle diese Werthe von x und nur sie liefert.

In den Gleichungen (I) ist die systematische Elimination der Substitutionscoefficienten in irgend einer Reihenfolge zu leisten, etwa wie folgt. Angenommen die systematische Elimination von α_1 lasse noch α_2 übrig; die hierauf folgende systematische Elimination von α_2 lasse noch α_3 übrig u. s. w., aber mit der systematischen Elimination von α_σ gehen auch alle folgenden $\alpha_{\sigma+1}, \alpha_{\sigma+2}, \ldots, \alpha_s$ heraus, soweit sie nicht schon früher ausgefallen sind. Dann erhält man aus (I) offenbar $t-\sigma$ Aequivalenzbedingungen von der Form

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} &F_{\sigma+1}(a|b_1b_2\ldots b_{\sigma+1})=0,\\ &F_{\sigma+2}(a|b_1b_2\ldots b_{\sigma+2})=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &F_t\ (a|b_1b_2\ldots b_t)\ =0,\end{aligned}$$

und σ Schlussgleichungen

$$F_1'(a|b|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s)=0, \quad F_2'(a|b|\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_s)=0, \quad F_\sigma'(a|b|\alpha_\sigma\alpha_{\sigma+1}\ldots\alpha_s)=0$$

mit folgenden Zusätzen:

1) Ich betrachte die Werthe $a_1a_2\ldots a_t$ als zu gebende, $b_1b_2\ldots b_t$ als gesucht, so dass zu einer gegebenen Form $f(ax)$ alle äquivalenten Formen $f(by)$ gesucht sind.

2) Es ist leicht zu beweisen, dass die Zahl σ von der Reihenfolge unabhängig ist, in welcher die Substitutionscoefficienten eliminirt wurden, weshalb ich σ als die *Ordnung der systematischen Elimination* bezeichne. Ebenso leicht ist es aber auch einzusehen, dass diese Ordnung σ von den Werthen der zu gebenden Zahlen $a_1a_2\ldots a_t$ abhängt, und zwar in der Weise, dass, wenn durch numerische Specialisirung einiger von diesen Zahlen $\sigma=\sigma_1$ geworden ist, durch weitere, zu dieser kommende Specialisirungen nicht mehr $\sigma>\sigma_1$ werden kann.

Es giebt also einen höchsten Werth von σ, und derselbe ist $=s=nn$. Derselbe tritt, wie Herr Aronhold bewiesen hat[1]), in

1) Borchardt's Journal, LXIX, 187.

allen denjenigen Fällen $p>2$ ein, wo die ersten Derivirten von $f(ax)$ nicht zugleich verschwinden können, so lange nicht alle Variabeln $=0$ werden. Ein Beweis, den ich selbst von dem Satze zu geben versucht hatte, dass bei unabhängig variabeln Werthen $a_1a_2\ldots a_t$ die Zahl $\mu=s-\sigma=0$ ist, $p>2$ vorausgesetzt, scheitert an dem Umstande, dass ein von mir durch $f(\Pi_1',\ldots)$ bezeichneter Ausdruck (Borchardt's Journal 68, pag. 250*)) noch andere Argumente als die angezeigten $\Pi_1',\ldots$ enthalten kann, was ich hiermit ein für allemal berichtigt haben will, da auf diese Arbeit neuerdings mehrere Mal Bezug genommen worden ist.

3) Die Schlussgleichung $F_k'=0$ enthält α_k, aber nicht $\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \ldots \alpha_1$: durch die Schlussgleichungen sind also $\alpha_\sigma, \alpha_{\sigma-1}, \ldots \alpha_1$ bestimmt, die übrigen Substitutionscoefficienten $\alpha_{\sigma+1}, \ldots \alpha_s$, deren Anzahl $\mu=s-\sigma$ ist, bleiben willkürlich.

4) Die Aequivalenzbedingung $F_i=0$ enthält b_i, aber nicht $b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_t$; durch die Aequivalenzbedingungen sind also $b_{\sigma+1}, b_{\sigma+2}, \ldots, b_t$ bestimmt, während $b_1b_2\ldots b_\sigma$ willkürlich bleiben.

5) Werden nun $b_1b_2\ldots b_\sigma$ willkürlich, aber $b_{\sigma+1}, \ldots, b_t$ den Gleichungen (II) gemäss angenommen, so ist $f(by)$ stets zu $f(ax)$ äquivalent, und es ergeben sich auf diesem Wege auch alle zu $f(ax)$ äquivalenten Formen $f(by)$.

6) In jedem solchen Falle ergeben sich die Substitutionen, welche $f(ax)$ in $f(by)$ transformiren, wenn man $\alpha_{\sigma+1}, \alpha_{\sigma+2}, \ldots, \alpha_s$ willkürlich, aber $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\sigma$ den Schlussgleichungen gemäss annimmt, und dann ist identisch

$$\text{(I)} \qquad b_1=a_1', \quad b_2=a_2', \quad \ldots, \quad b_t=a_t'.$$

7) Wenn es sich daher nur um das Aequivalenzproblem handelt, so sind demnach nur die Gleichungen

$$\text{(II)} \qquad F_i(a|b_1b_2\ldots b_i)=0, \quad (i=\sigma+1, \sigma+2, \ldots, t)$$

zu berücksichtigen.

2.

Diese Bedingungen (II) werden nun vollständig vertreten durch die Forderung, dass $f(ax)$ und $f(by)$ beide zu $f(cz)$ äquivalent sein sollen. Die Bedingungen für das erstere lauten

$$\text{(IIa)} \qquad F_i(a|c_1c_2\ldots c_i)=0, \quad (i=\sigma+1, \ldots, t)$$

und, *unter einer sofort nachzuweisenden Voraussetzung*, für die zweite Aequivalenz:

$$\text{(IIb)} \qquad F_i(b|c_1c_2\ldots c_i)=0, \quad (i=\sigma+1, \ldots, t).$$

*) Im ersten Bande dieser Abhandlungen S. 274.

Wir betrachten, wie oben festgestellt wurde, die Zahlen $a_1 a_2 \dots a_t$ als zu gebende, $b_1 b_2 \dots b_t$ dagegen als gesuchte, ebenso $c_1 c_2 \dots c_t$. Während also der Fall vorzusehen ist, dass die Zahlen $a_1 a_2 \dots a_t$ bereits numerisch specialisirt vorliegen, sind für die Zahlen b ebenso wie für die Zahlen c alle Beschränkungen vorbehalten.

Geht man nun auf die ursprünglichen Transformationsbedingungen zurück, welche den drei vorstehenden Fällen entsprechend lauten:

$$\text{(I)} \qquad b_1 = a_1', \quad b_2 = a_2', \quad \dots, \quad b_t = a_t',$$

$$\text{(Ia)} \qquad c_1 = a_1'', \quad c_2 = a_2'', \quad \dots, \quad c_t = a_t'',$$

$$\text{(Ib)} \qquad c_1 = b_1''', \quad c_2 = b_2''', \quad \dots, \quad c_t = b_t''',$$

so springt in die Augen, dass die Ordnung der systematischen Elimination für die Gleichungen (Ib) ihren höchsten Wert hat: hat sie in den Gleichungen (I) einen kleineren Werth, und sind dann 1. in (II) die dazu gehörigen Aequivalenzbedingungen vereinigt, so bilden allerdings die Gleichungen (IIa) auch die richtigen Aequivalenzbedingungen zu (Ia), *aber die Gleichungen* (IIb) *sind nicht mehr das Resultat der systematischen Elimination von* $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s$ *aus* (Ib), weil ihre Anzahl zu gross ist; und wenn umgekehrt 2. in diesem Falle die Gleichungen (IIb) richtig aus (Ib) hergeleitet sind, *also* σ *seinen höchsten Werth bedeutet,* so stehen in (II) resp. (IIa) *nicht mehr die richtigen Bedingungen zu* (I) *resp.* (Ia), da ihre Anzahl zu klein ist.

In allen denjenigen Fällen, wo, vermöge der Specialisirung von $f(ax)$, die Ordnung σ der systematischen Elimination von $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s$ aus dem Gleichungssystem

$$\text{(I)} \qquad b_1 = a_1', \quad b_2 = a_2', \quad \dots, \quad b_t = a_t'$$

kleiner ist als bei unabhängig veränderlichen Werthen von $a_1 a_2 \dots a_t$, können die Gleichungen (II) *niemals ersetzt werden durch zwei der Anzahl und Form nach übereinstimmende Gleichungssysteme* (IIa) *und* (IIb).

3.

Ich setze von hier ab voraus, dass auch die Coefficienten von $f(ax)$ willkürlich sind, und benutze neben (II) und (IIa) auch die Gleichungen (IIb).

Dann sind in den Resultaten alle, aber auch nur diejenigen Specialisirungen von $a_1 a_2 \dots a_t$ statthaft, bei denen die Ordnung der Elimination auch für die Gleichungen (I) ihren höchsten Werth behält (z. B. bei der ternären cubischen Form nicht die Specialisirung $f(ax) = x_1^3 + 3x_2^2 x_3$).

Um nun die Folgerungen zu entwickeln, welche sich aus der *Forderung* ergeben, dass *jede* Lösung $c_1 c_2 \dots c_t$ eines der beiden Gleichungssysteme (IIb) und (IIa) stets auch dem andern genüge, bedarf es vor allem einer Discussion dieser Gleichungssysteme.

A) Man ordne jede Gleichung (IIb) nach ihrer letzten Unbekannten, was

$$\text{(IIb)} \quad F_i(b \mid c_1 \dots c_i) = \mathsf{A}_i c_i^\mu + \mathsf{B}_i c_i^{\mu-1} + \cdots = 0, \quad (i = \sigma + 1, \dots, t)$$

gebe. Alle Coefficienten sind frei von $c_i, c_{i+1}, \dots, c_t$, und rationale ganze Functionen von $b_1 b_2 \dots b_t$ und $c_1 \dots c_{i-1}$, ausserdem frei von einem ihnen allen gemeinsamen Factor. Angenommen, der leitende Coefficient A_i bleibe von Null verschieden für alle Lösungen $c_{i-1}, c_{i-2}, \dots, c_{\sigma+1}$ der vorangehenden Gleichungen $F_\varkappa = 0 \, (\varkappa = i-1, i-2, \dots \sigma+1)$.

Dann giebt es — wenn $M_\varkappa$ eine ganze Function von $c_\varkappa, c_{\varkappa-1}, \dots, c_{\sigma+1}$ bedeutet, die in $b_1 \dots b_t$ und $c_1 \dots c_\sigma$ wenigstens rational ist — einen Factor M_{i-1}, so dass $M_{i-1} \mathsf{A}_i$ mittelst der Gleichung $F_{i-1} = 0$ von c_{i-1} unabhängig wird[1]), hierauf einen Factor M_{i-2} so dass das Product $M_{i-2} M_{i-1} \mathsf{A}_i$ mittelst der Gleichung $F_{i-2} = 0$ auch von c_{i-2} unabhängig wird, u. s. w. D. h. dann giebt es einen Factor P_i, welcher ganze Function derselben Argumente wie A_i selbst ist, von der Beschaffenheit, dass das Product $P_i \mathsf{A}_i$ mittelst der Gleichungen $F_\varkappa = 0 \, (\varkappa < i)$ von $c_{i-1}, c_{i-2}, \dots, c_{\sigma+1}$ frei wird. Dann werden die Producte $P_i \mathsf{B}_i, \dots$ ganze Functionen von $c_{\sigma+1}, \dots, c_{i-1}$, welche man mittelst der vorangehenden Gleichungen auf möglichst kleine Grade bringen kann. Hebt man hierauf mit dem vereinfachten leitenden Coefficienten weg, so wird die Gleichung $F_i = 0$ ersetzt durch eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{F}_i(b \mid c_1 \dots c_i) = c_i^\mu + \mathfrak{B}_i c_i^{\mu-1} + \mathfrak{C}_i c_i^{\mu-2} + \cdots = 0,$$

wo nun 1. jeder Coefficient, für $k = i-1, i-2, \dots, \sigma+1$, ganze Function von c_k und von kleinerem Grade wie $\mathfrak{F}_\varkappa$ ist, und 2. alle Coefficienten rationale Functionen von $b_1 \dots b_t, c_1 \dots c_\sigma$ sind.

B) Angenommen ferner, im System (IIb) habe *jeder* leitende Coefficient A_i die Eigenschaft, für keine Lösung $c_{i-1}, \dots, c_{\sigma+1}$ der vorangehenden Gleichungen zu verschwinden.

Dann findet die vorstehende Umformung für alle Gleichungen des Systemes (IIb) statt, und nun ergeben sich die folgenden Schlüsse.

1) Unsere Aufgabe fordert zunächst, dass jede Lösung $c_{\sigma+1}$ einer der beiden Gleichungen

$$(\sigma+1) \qquad \mathfrak{F}_{\sigma+1}(b \mid c_1 \dots c_{\sigma+1}) = 0, \quad \mathfrak{F}_{\sigma+1}(a \mid c_1 \dots c_{\sigma+1}) = 0$$

1) Gauss, Dem. nova altera, 2. IV.

auch der andern genüge. Dies findet stets und nur dann statt, wenn beide Gleichungen in den Coefficienten übereinstimmen, und dies führt zu einer Anzahl Gleichungen von der Form

$$\text{(III)} \qquad R(b \mid c_1 c_2 \dots c_\sigma) = R(a \mid c_1 c_2 \dots c_\sigma),$$

wo jedes R rationale Function und beiderseits die nämliche Function seiner Argumente ist.

2) So oft $c_{\sigma+1}$ Lösung der nunmehr übereinstimmenden Gleichungen $(\sigma+1)$ ist, sollen auch die beiden Gleichungen

$$(\sigma+2) \qquad \mathfrak{F}_{\sigma+2}(b \mid c_1 \dots c_{\sigma+2}) = 0, \quad \mathfrak{F}_{\sigma+2}(a \mid c_1 \dots c_{\sigma+2}) = 0$$

in den Wurzeln, also den Coefficienten übereinstimmen. Das giebt Relationen von der Form $S(b \mid c_1 \dots c_{\sigma+1}) - S(a \mid c_1 \dots c_{\sigma+1}) = 0$, wo S ganze Function von $c_{\sigma+1}$ aber von kleinerem Grade als $F_{\sigma+1}$ ist. Diese Gleichung muss also in $c_{\sigma+1}$ identisch sein, d. h. die Polynome $(\sigma+2)$ müssen, nach $c_{\sigma+2}$ *und* $c_{\sigma+1}$ geordnet, in den Coefficienten übereinstimmen, was wieder zu Relationen der Form (III) führt.

3) Setzt man diese Schlüsse fort, so folgt:

> Wenn in den Gleichungen (IIb) kein leitender Coefficient A_i durch eine Lösung $c_{i-1}, c_{i-2}, \dots, c_{\sigma+1}$ der vorangehenden Gleichungen $F_\varkappa = 0$ $(\varkappa = i-1, i-2, \dots, \sigma+1)$ zum Verschwinden gebracht wird, lassen sich alle Bedingungen, damit die Gleichungssysteme (IIa), (IIb) in ihren Lösungen $c_{\sigma+1}, c_{\sigma+2}, \dots, c_t$ ganz und gar übereinstimmen, *vollständig* ausdrücken durch eine Anzahl Relationen von der Form
>
> $$\text{(III)} \qquad R(b_1 b_2 \dots b_t \mid c_1 c_2 \dots c_\sigma) = R(a_1 a_2 \dots a_t \mid c_1 c_2 \dots c_\sigma),$$
>
> wo jedes R rational und beiderseits die nämliche Function der angezeigten Argumente ist.

C) Der Nachweis, dass die Bedingungen dieses Satzes sich stets erfüllen lassen, ist leicht zu führen.

a) Wir sind befugt, vorauszusetzen, dass im System (IIb) jede Gleichung $F_i = 0$ mittelst der ihr vorangehenden auf ihren niedrigsten Grad in c_i gebracht ist, und ausserdem die Coefficienten $\mathsf{A}_i, \mathsf{B}_i, \dots$ keinen ihnen allen gemeinsamen Factor haben.

b) Ich behaupte, dass dieses Gleichungssystem irreductibel ist, dass also kein Polynom F_i desselben mittelst der vorangehenden Gleichungen rational zerfällbar wird.

Zum Beweise ist zu beachten, dass $c_1 \dots c_\sigma$ willkürlich bleiben, mithin als unabhängige Variabeln auftreten, von denen $c_{\sigma+1} \dots c_t$ algebraische Functionen sind. Es ist also nach bekannten Principien nur zu beweisen, dass durch geeignete Wege der unabhängigen Variabeln $c_1 \dots c_\sigma$ jedes Lösungssystem $c'_{\sigma+1} \dots c'_t$ in jedes andere $c''_{\sigma+1} \dots c''_t$ übergeführt werden kann.

Aber dieses ist sicher; denn jedes Werthsystem $c_1 c_2 \dots c_t$, welches den Gleichungen (IIb) genügt, macht $f(cz)$ äquivalent zu $f(by)$, also giebt es zu jedem solchen Werthsystem eine Substitution, so dass (Ib) $c_1 = b_1'''$, $c_2 = b_2'''$, $\dots$, $c_t = b_t'''$ wird. Dies umfasst, wenn alle Substitutionscoefficienten unabhängig variabel sind, alle Lösungen $c_1 c_2 \dots c_t$ von (IIb), also auch $c_1 = b_1', \dots, c_\sigma = b'_\sigma, c'_{\sigma+1} = b'_{\sigma+1}, \dots c'_t = b'_t$ und $c_1 = b_1'', \dots, c_\sigma = b''_\sigma, c''_{\sigma+1} = b''_{\sigma+1}, \dots, c''_t = b''_t$; also kann jede von diesen beiden in die andere durch geeignete Aenderungen der Substitutionscoefficienten, also auf den dadurch bestimmten Wegen von $c_1 = b_1''', \dots, c_t = b_t'''$ übergeführt werden, ohne dass dies aufhört, Lösung von (IIb) zu sein.

c) Ich behaupte endlich, dass unter der Voraussetzung a) kein leitender Coefficient A_i durch Lösungen der vorangehenden Gleichungen zum Verschwinden kommt.

Seien $c_\varkappa, c_{\varkappa-1}, \cdots$ die Variabeln, von denen A_i wirklich abhängt, so dass, wenn $\varkappa < i-1$ ist, A_i von $c_{i-1}, \cdots, c_{\varkappa+1}$ frei ist. Sodann seien $c_{\varkappa-1}, \cdots, c_{\sigma+1}$ an die Gleichungen $F_{\varkappa-1} = 0, \cdots, F_{\sigma+1} = 0$ gebunden, $c_\varkappa$ dagegen sei unabhängig variabel, also $F_\varkappa$ nicht $= 0$. Würde nun $\mathsf{A}_i = 0$ für alle Lösungen der vorangehenden Gleichungen, so wäre A_i durch $F_\varkappa$ theilbar und F_i mit zu hohem Grade angesetzt. Würde $\mathsf{A}_i = 0$ zwar nicht für alle, aber für einige Lösungen der vorangehenden Gleichungen, so hätte A_i mit $F_\varkappa$ einen gemeinsamen Factor, ohne durch $F_\varkappa$ selbst theilbar zu sein, aber dann wäre $F_\varkappa$ rational zerfällbar.

Also wird A_i für keine Lösung der vorangehenden Gleichungen Null, w. z. b. w.

d) Daraus folgt, dass, wofern nur jede Gleichung $F_i = 0$ in c_i auf ihren niedrigsten Grad gebracht ist, die Bedingungen des Satzes B) erfüllt sind, d. h. wir haben den Satz:

> Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit die Gleichungen (IIa) und (IIb) in ihren sämmtlichen Lösungen $c_{\sigma+1}, \cdots, c_t$ übereinstimmen, lassen sich durch eine geeignete Anzahl Gleichungen von der Form
>
> $$\text{(III)} \qquad R(b_1 b_2 \cdots b_t \mid c_1 \cdots c_\sigma) = R(a_1 a_2 \cdots a_t \mid c_1 \cdots c_\sigma)$$
>
> ausdrücken, wo jedes R rational und beiderseits die nämliche Function der angezeigten Argumente ist.

D) Aber das Aequivalenzproblem fordert ausserdem noch, dass diese Uebereinstimmung der Lösungen $c'_{\sigma+1}, \cdots c_t$, also das Gleichungssystem (III), ohne irgend eine Beschränkung der Argumente $c_1 \cdots c_\sigma$ stattfindet.

Aus (III) erhält man also die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für die Aequivalenz von $f(by)$ und $f(ax)$, wenn man noch bewirkt, dass jede Gleichung (III) in $c_1 \cdots c_\sigma$ identisch wird. Ist R ganze Function dieser Argumente, so kommt man zum Schlusse durch Vergleichung der Coefficienten; ist die rationale Function R eine gebrochene, so bedarf es nur der Wiederholung des elementaren Satzes, dass zwei rationale Ausdrücke mit dem Argumente c in den Coefficienten übereinstimmen, wenn sie 1. für jedes c gleiche Werthe annehmen, 2. in beiden der Zähler zum Nenner relativ prim ist und 3. etwa in beiden Nennern der leitende Coefficient $= 1$ ist. Dies letztere hat zur Folge, dass entsprechende Coefficienten in $R(b_1 \cdots | c_1 \cdots)$ und $R(a_1 \cdots | c_1 \cdots)$ der eine aus $b_1 \cdots b_t$, der andere aus $a_1 \cdots a_t$ in der gleichen Weise zusammengesetzt sind. Bezeichnen wir solche Coefficienten durch B und A, so haben wir den Satz:

Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit $f(by)$ zu $f(ax)$ äquivalent wird, lassen sich vollständig ausdrücken durch eine Anzahl Gleichungen von der Form

$$\text{(IV)} \qquad \mathsf{B}_1 = \mathsf{A}_1, \quad \mathsf{B}_2 = \mathsf{A}_2, \ldots$$

wo jedesmal B_μ eine rationale Function von $b_1 \cdots b_t$ und A_μ die nämliche Function von $a_1 \ldots a_t$ ist.

Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die Ordnung der systematischen Elimination für das Gleichungssystem

$$\text{(I)} \qquad b_1 = a_1', \quad b_2 = a_2', \cdots, \ b_t = a_t'$$

ihren höchsten Werth hat; in jedem andern Falle ist der vorstehende Satz unrichtig,

wie aus dem Schlusse des § 2. folgt.

Ersetzt man jedes b durch seinen Werth a', so muss jede Gleichung (IV) identisch werden; also sind $\mathsf{B}_1 \mathsf{B}_2 \ldots$ (rationale) absolute Invarianten von $f(by)$.

4.

Wir halten an der Bedingung fest, dass die Ordnung σ der systematischen Elimination für das Gleichungssystem (I) ihren höchsten Werth hat. Dann geschieht den Gleichungen (IV) nicht blos Genüge durch *jede* Lösung $b_1 \ldots b_t$ des Aequivalenzproblems, sondern es ist auch umgekehrt *dieses* Gleichungssystem frei von allen fremden Lösungen, d. h. solchen, für welche $f(by)$ nicht zu $f(ax)$ äquivalent ist.

Aber die Gleichungen (II) zeigen, dass $b_1 \ldots b_\sigma$ willkürlich bleiben, während $b_{\sigma+1} \ldots b_t$ durch sie und $a_1 a_2 \ldots a_t$ bestimmt sind.

Welches nun auch die *Anzahl* der Gleichungen (IV) sein mag, so müssen sich hiernach aus ihnen $t - \sigma$ Gleichungen

$$\text{(IVa)} \qquad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_2, \ldots, \quad \mathfrak{B}_{t-\sigma} = \mathfrak{A}_{t-\sigma}$$

ausheben lassen, welche jene Bestimmung von $b_{\sigma+1} \ldots b_t$ leisten, so dass $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{t-\sigma}$ in Bezug auf diese Variabeln von einander unabhängig sind.

Sei $J(b)$ irgend eine andere absolute Invariante (es ist *nur* von rationalen die Rede).

Nun genügen den Gleichungen (IVa) auf alle Fälle 1. sämmtliche Lösungen $b_{\sigma+1}, \ldots, b_t$ des Aequivalenzproblems, aber möglicherweise ausserdem noch 2. fremde Lösungen, aber beide zusammen genommen nur in endlicher Anzahl, wenn wir, um abzuzählen, $b_1 \ldots b_\sigma$ als feste Werthe betrachten.

Jede Lösung der ersten Art giebt $J(b) = J(c)$; diese Gleichung hat also mit (IVa) Lösungen gemein, in denen $b_1 \ldots b_\sigma$ willkürlich bleiben; eliminirt man $b_{\sigma+1}, \ldots, b_t$, so müssen also $b_1 \ldots b_\sigma$ von selbst ausfallen. Zwischen $J(b)$ und $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$ besteht also eine algebraische Gleichung; jede andere (rationale) absolute Invariante $J(b)$ ist also algebraische Function von $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$.

Angenommen, $J(b)$ sei keine rationale Function von $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$

Das heisst dann, dass 1. ein jedes Werthesystem $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{t-\sigma}$, dessen $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$ überhaupt fähig sind, hervorgeht aus verschiedenen Werthesystemen $b_1 b_2 \ldots b_t$, aber 2. diese letztern nicht alle *denselben* Werth des rationalen Ausdruckes $J(b)$ liefern. Aber alle Werthsysteme $\beta_1 \ldots \beta_{t-\sigma}$ der verlangten Art ergeben sich aus (IVa), wenn man $a_1 a_2 \ldots a_t$ unabhängig von einander variiren lässt. Die zugehörigen Werthegruppen $b_1 \ldots b_t$ zerfallen also 1. in Lösungen des Aequivalenzproblems, und diese geben alle $J(b) = J(a)$, 2. in die hinzukommenden fremden Lösungen, und nur solche können es sein, für welche $J(b)$ nicht ebenfalls $= J(a)$ wird.

Ist also $J(b)$ nicht rationale Function von $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$, so enthält das System (IVa) nothwendig fremde Lösungen $b_1 b_2 \ldots b_t$ und unter diesen nothwendig solche, welche durch Hinzufügung der Gleichung $J(b) = J(a)$ ausgeschlossen werden.

Sei $\mathfrak{B}_{t-\sigma+1}$ eine solche rationale absolute Invariante. Dann haben die Gleichungen

$$\text{(IVb)} \qquad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1, \ldots, \quad \mathfrak{B}_{t-\sigma} = \mathfrak{A}_{t-\sigma}, \quad \mathfrak{B}_{t-\sigma+1} = \mathfrak{A}_{t-\sigma+1}$$

noch alle Aequivalenzlösungen, aber die Anzahl der fremden Lösungen ist kleiner als in (IVa).

Sei $\mathfrak{B}_{t-\sigma+2}$ eine neue rationale absolute Invariante. Sie ist algebraische Function von $\mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$, und ihr Ausdruck lässt sich durch Einführung von $\mathfrak{B}_{t-\sigma+1}$ auf mannigfaltige Art abändern. Angenommen, $\mathfrak{B}_{t-\sigma+2}$ sei durch $\mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$ und $\mathfrak{B}_{t-\sigma+1}$ auf keine Weise rational darstellbar. Dann folgt wie vorhin, dass das System (IVb) nothwendig noch fremde Lösungen hat, und darunter nothwendig solche, welche durch die Bedingung $\mathfrak{B}_{t-\sigma+2} = \mathfrak{A}_{t-\sigma+2}$ ausgeschlossen werden. Um diese ist also die Anzahl aller Lösungen des Systemes

(IVc) $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{B}_{t-\sigma} = \mathfrak{A}_{t-\sigma}, \mathfrak{B}_{t-\sigma+1} = \mathfrak{A}_{t-\sigma+1}, \mathfrak{B}_{t-\sigma+2} = \mathfrak{A}_{t-\sigma+2}$

kleiner wie in (IVb), während die Aequivalenzlösungen unverkürzt bestehen bleiben.

Da aber die Anzahl aller Lösungen in (IVa) eine endliche ist, so muss dieser Process einmal abschliessen mit einem Gleichungssystem

(V) $$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_2, \dots, \quad \mathfrak{B}_{t-\sigma+\varrho} = \mathfrak{A}_{t-\sigma+\varrho},$$

wo $\varrho \gtreqless 0$ ist, in der Weise, dass

1) keine von den Invarianten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_{t-\sigma+\varrho}$ durch *die vorangehenden* rational darstellbar ist, aber

2) jede andere rationale absolute Invariante $J(b)$ die rationale Darstellung durch jene gestattet, und

3) falls das System (V) auch noch fremde Lösungen enthalten sollte, sie durch Invariantengleichungen $J(b) = J(a)$ nicht mehr ausgeschlossen werden können.

Ist nun eine der vorstehenden Invarianten, etwa $\mathfrak{B}_\mu$, zwar nicht durch die vorangehenden, aber durch diese und die folgenden rational darstellbar, so ist 1. $\mathfrak{B}_\mu$ entbehrlich für die Darstellung von $J(b)$, und 2. die Gleichung $\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{A}_\mu$ aus (V) zu entfernen, weil sie keine fremden Lösungen ausschliesst und durch die übrigen identisch erfüllt wird. Also haben wir das Theorem:

Es giebt eine endliche Anzahl rationaler absoluter Invarianten

$$\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_{t-\sigma+\varrho},$$

durch welche jede andere rational darstellbar ist, während keine von ihnen rationale Function der übrigen ist.

Durch diese stelle man nun jede Invariante $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \dots$ des Gleichungssystems (IV) dar. Dann folgt, dass *jede* Lösung des Systems

(V) $$\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{A}_\mu \ (\mu = 1, 2, \dots \tau - \sigma + \varrho)$$

auch Lösung von (IV), also Lösung des Aequivalenzproblems ist. Das ist der Satz:

Die im vorigen Satze nachgewiesenen Invarianten $\mathfrak{B}$ reichen aus, um in den Gleichungen (V) die Bedingungen für die Aequivalenz von $f(by)$ mit $f(ax)$ vollständig und frei von fremden Lösungen auszudrücken, so oft in (I) die Ordnung der Elimination ihren höchsten Werth hat, aber auch nur in diesem Falle.

Ich breche hiermit ab, indem ich auch die Uebertragung des Vorstehenden auf gewöhnliche Invarianten und auf Formensysteme unterlasse. Der unzweifelhaft richtige Satz, dass es für jedes Formensystem eine endliche Anzahl von Invarianten giebt, durch welche alle übrigen als *ganze* Functionen derselben ausgedrückt werden können, scheint der eigentlichen Formenbildung anzugehören, zu deren grossen Zielen er namentlich seit den Entdeckungen des Herrn Gordan gehört. Wenigstens habe ich selbst in den *ausschliesslich* auf Transformationstheorie fussenden Untersuchungen keinen rechten Anhaltspunkt für den Beweis dieses Theorems gefunden.

Strassburg, 18. October 1881.

XXXI.

Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen.

(Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Bd. 15, 1888, S. 253—276.)

Da die Irrationalzahlen demnächst abgeschafft werden sollen, scheint es mir nicht unbillig, doch noch einmal zu erwägen, ob das, was bis auf heutigen Tag über diese Zahlen ans Tageslicht gekommen ist, wirklich von solcher Art ist, daß ihnen nunmehr die Existenzberechtigung aberkannt werden muss.

Um in Kürze die entscheidenden Momente zu gewinnen, möchte ich zunächst an die Zahl e, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, erinnern. Liouville*) hat zuerst die Frage aufgeworfen, ob e selbst das Verhältniss zweier ganzen Zahlen ist, ob irgend eine (ganzzahlige) Potenz von e dieser Darstellung fähig ist, oder ob e Wurzel irgend einer andern algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten ist. Dem Scharfsinne Liouville's ist es gelungen, zu beweisen, dass der Zahl e alle diese Eigenschaften fehlen.

Das Gleiche ist in neuester Zeit durch Herrn Lindemann von der aus der Integralrechnung (auch aus der Geometrie) so wohlbekannten Zahl π bewiesen worden.

Mit dergleichen Zahlen *operiren* wir nun, *auf Grund ihrer Begriffsbestimmung*, mit vollkommener Sicherheit.[1]) Aber wir scheitern beim *Ausrechnen* solcher Zahlen, das Wort Ausrechnen in dem bis auf Weiteres allein zulässigen Sinne der gewöhnlichen Ziffernrechnung verstanden. Nimmt man das Wort in dieser Bedeutung, so kann Niemand in Wahrheit sagen, dass man Zahlen wie $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\pi\sqrt{2}$, $e^{-\pi}$ wirklich ausrechnen könne, ebenso wenig, wie die so häufig benutzten Zahlen $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ Begrifflich bildet jede von diesen Zahlen, ebenso wie z. B. jede Zahl der Reihe $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots$ eine neue Irratio-

1) Z. B. $(\sqrt{2})^2 = 2$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

*) Hier liegt ein Schreibfehler vor. Gemeint ist Hermite. M.

nalität, deren Natur durch den Umstand, dass sie ein Vielfaches der ersten ist, zwar festgelegt, aber bei Weitem nicht aufgedeckt ist.

Es ist wohl nicht nöthig, diese Schilderung noch weiter auszuführen, da sie die augenblickliche Lage der Dinge genügend zu erkennen gibt. Dieselbe charakterisirt sich in ihren Hauptmomenten dahin, dass:

1) Das einzige Positive, was wir von den Irrationalzahlen wissen, in dem *auf die Möglichkeit unbegrenzter Annäherung gegründeten Existenzbeweise* und der Gewissheit besteht, dass wir mit den Irrationalzahlen *auf Grund ihrer Begriffsbestimmung* ohne irgend eine Unsicherheit *operiren* können, dass dies *für die reine Mathematik* vollständig ausreicht und sie über alle Beschreibung gefördert hat.

2) Dass dagegen die vom *Operiren mit Zahlen* durchaus zu unterscheidende *numerische Rechnung*, so weit sie uns ausgebildet vorliegt, bei diesen Zahlen versagt, und nur für solche Anwendungen ausreicht, welche *ausserhalb der reinen Mathematik* liegen.[1])

3) Dass diesen Zahlen solche arithmetische Eigenschaften fehlen, nach denen wir zu fragen gelernt haben und zu fragen gewöhnt sind, während

4) Irgend eine *arithmetische* Eigenschaft, welche diese Zahlen wirklich besitzen, bis auf heutigen Tag in den betheiligten Kreisen nicht wahrgenommen worden ist.

Alles dies läuft darauf hinaus, dass die *arithmetische* Natur der Irrationalzahlen noch in das vollkommenste Dunkel gehüllt ist.

Dasselbe wird sich ohne ernsthafte Untersuchungen nicht lüften lassen.

Aber diese müssen, wenn es sich um etwas mehr als um blosse Disputationen handelt, mit mathematischen Hülfsmitteln geführt werden und auf positive Ziele mathematischer Natur gerichtet sein, selbst wenn diese Ziele fürs Erste nur sehr bescheidene sind. Hat doch auch *die rationale Arithmetik* in fernen Zeiten ihre bescheidenen Anfänge gehabt, bevor sie durch Fermat, Euler, Gauss zu ihrer *wahren* Entwicklung gebracht worden ist.

Es ist leichter, die vorhin ausgesprochene Forderung aufzustellen, als Hülfsmittel aufzufinden, mit denen man wenigstens von irgend einer Seite an die Irrationalzahlen herankommen kann, oder sich auch nur eine Vorstellung von Fragen zu bilden, die zu wirklichen Eigenschaften dieser Zahlen führen müssen, nämlich nicht zu solchen, die

1) Z. B. $\pi = \frac{22}{7}$, was in vollem Ernste für sehr ernstliche Zwecke vollkommen ausreicht.

ihnen fehlen, sondern zu solchen Eigenschaften, welche sie wirklich besitzen *können*. Weder für das Eine noch für das Andere liefert die rationale Arithmetik irgend einen Anhaltspunkt, und es beruht auf einem Irrthume, wenn in sichtbarer Anlehnung an meine frühere Publikation[1]) der Versuch gemacht worden ist, Untersuchungen, wie sie hier in grösserer Ausführlichkeit mitgetheilt werden sollen, schon im Voraus als eine Verallgemeinerung der Gaussischen Congruenzen zu kennzeichnen.

Mathematische Resultate, welche dazu nöthigen, den Irrationalzahlen den Charakter als Zahlen abzusprechen und sie aus der Reihe der Objecte zu streichen, mit denen die reine Arithmetik sich zu beschäftigen hat, liegen zur Zeit nicht vor.

Dazu müsste erst *eine arithmetische, im Begriff der Irrationalzahl enthaltene, aber dem Zahlenbegriff zuwiderlaufende gemeinsame Eigenschaft der Irrationalzahlen* nachgewiesen werden.

Ich finde im *Gegensatze hierzu, dass nicht bloss die* (positive) *ganze Zahl der Ausdruck für das Ergebniss einer echten*[2]) *Abzählung ist, sondern dass diese Grundeigenschaft auch den rationalen und den Irrationalzahlen zukommt*, so wie ich es am Schlusse der erwähnten Note für die erstern ausdrücklich ausgesprochen und, wenn man die Stelle aufmerksam ansieht, für die letztern angekündigt habe.

Freilich wird diese Abzählung, für deren Ergebniss ich den Ausdruck in einer (positiven) Irrationalzahl erblicke, wenig Anklang finden bei denen, die nicht über 3 hinaus zählen, und auch nicht weiterlernen wollen. Aber diese Abzählung ist möglich, denn sie ist geleistet: ihr Ausdruck ist das Theorem, von welchem hier die Rede ist. Sie schreitet nach klaren Gesetzen fort, und kommt auch zum Abschluss, freilich nicht wie beim Zählen bis 3, sondern durch diese Gesetze und nur vermöge der Unterstützung, welche sie beim Zählen leisten.

Wenn das fremd klingt, so muss dagegen bemerkt werden, dass man sich in Angelegenheiten der Irrationalzahlen nicht beim Hergebrachten wird beruhigen können. Man wird sich zu Fortschritten bequemen müssen, und nicht auf dem Standpunkte beharren dürfen, auf welchem ein neues Wort als eine Störung empfunden wird und man nur auf das hören will, was man zu hören gewohnt ist. —

Indem ich meine Untersuchungen über Irrationalzahlen in grösserer Ausführlichkeit der Oeffentlichkeit übergebe, bin ich mir wohl bewusst, welchen Bedenken ein solches Unternehmen ausgesetzt ist. Dass

1) Diese Annalen, Band VI, 148—152 (S. 38 dieses Bandes).

2) Was ich unter einer echten Abzählung verstehe, ist l. c. im Schlusssatze angegeben.

Resultate, die nach Form und Inhalt in keiner Verwandtschaft zu irgend etwas stehen, wonach man bisher zu fragen gelernt hat, sich leicht Eingang verschaffen werden, ist nicht zu erwarten.

Meine Untersuchungen sind zum Theil vor langer Zeit und alle nur mit langen Unterbrechungen entstanden. Die ersten Anfänge fallen in den Herbst 1863; von da an bin ich ab und zu in meinen Herbstferien auf den Gegenstand zurückgekommen, so wie es der Reiz, den die Erforschung des merkwürdigen Gebildes darbietet, welches ich Charakteristik nenne, und die fortschreitende Einsicht, was auf dem betretenen Wege das nächste Ziel bilden könne, es mit sich brachte. Einen Lehrsatz habe ich im VI. Bande dieser Annalen veröffentlicht, und bald nachher, im Herbste 1878, das sehr interessante und die Lage der Sache gut charakterisirende Urtheil der beiden hervorragenden Mathematiker kennen gelernt, welche als die Hauptvertreter der philosophischen Untersuchungen über Irrationalzahlen anzusehen sind.

Wer die folgenden Sätze liest, wird sofort erkennen, wieviele Fragen nicht erledigt, nicht einmal erwähnt sind. Um auch meinerseits eine Frage beizusteuern, die noch ihrer Erledigung harrt und derselben würdig ist, erlaube ich mir hiermit die Aufmerksamkeit auf die *wirkliche* Addition (oder Subtraction) zweier Irrationalzahlen zu lenken.

I. Ursprung der Charakteristik einer Irrationalzahl und erläuternde Beispiele.

1. Da im Folgenden nur von positiven Zahlen die Rede sein wird, so möge es erlaubt sein, dieselben kurzweg als Zahlen zu bezeichnen.

Bildet man die Vielfachen einer Rationalzahl, so gibt es darunter solche, die selbst ganze Zahlen sind. Den Irrationalzahlen fehlt diese Eigenschaft, und dies ist das wesentliche Merkmal, durch welches sie sich von den rationalen unterscheiden.

Es besteht die Aufgabe, von diesem negativen Merkmal überzugehen zu einer gemeinsamen Eigenschaft, welche die Irrationalzahlen wirklich besitzen und welche sie ebenfalls von den rationalen Zahlen unterscheidet.

2. Ist n ganze, j irgend eine Zahl, so zerlege man das Product nj in seinen ganzzahligen Theil $[nj]$ und den Rest (nj), so dass:

$$nj = [nj] + (nj),$$

und

$$0 \leqq (nj) < 1$$

wird. Jenachdem es Werthe von n gibt oder nicht gibt, für welche $(nj) = 0$ ist, ist j selbst rational oder irrational.

Die Untersuchung wirft sich demnach ausschliesslich auf diese Reste, und es ist aus diesem Grunde überflüssig, bei derselben auf solche Zahlen Rücksicht zu nehmen, welche selbst einen ganzzahligen Theil besitzen. Ist $j < 1$, so benutze ich von hier ab für den ganzzahligen Theil nj ein anderes Zeichen:

$$[nj] = G(n),$$

so dass

$$nj = G(n) + (nj),$$

und, weil $0 < j < 1$ ist,

$$G(1) = 0$$

ist.

Die Aufgabe lautet jetzt wie folgt:

Welche wirkliche Eigenschaften der Zahl j ergeben sich aus der Voraussetzung, dass j selbst zwischen Null und Eins liegt und kein Rest (nj) gleich Null ist?

3. Der Angriffspunkt, den ich für die Behandlung dieser Aufgabe gefunden habe, und durch welchen der Gang meiner Untersuchungen vollständig bestimmt worden ist, ergibt sich durch folgende einfache Ueberlegung. Eliminirt man j aus den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} mj &= G(m) \qquad + (mj) \\ nj &= G(n) \qquad + (nj) \\ (m+n)j &= G(m+n) + ((m+n)j), \end{aligned}$$

und setzt

$$(mj) + (nj) - ((m+n)j) = g_{m,n},$$

so folgt

$$G(m+n) - G(m) - G(n) = g_{m,n}.$$

Der erste Ausdruck lehrt, dass $g_{m,n}$ über -1 und unter 2 liegt, der zweite, dass es ganze Zahl ist, beides zusammen beweist, *dass $g_{m,n}$ entweder $= 0$ oder $= 1$ ist, und keinen andern Werth annehmen kann.*

Das ist die Grundlage, von welcher meine Untersuchung ihren Ausgang genommen hat; dieselbe hat sich darauf beschränkt, diese einfache Grundlage weiter zu entwickeln. Da aber hierbei alle fremdartigen Hülfsmittel ausgeschlossen wurden, habe ich die Gewissheit, dass die Folgerungen, zu denen ich gelangt bin, *nothwendige Glieder in der Arithmetik der Irrationalzahlen* sind.

4. Ich halte an der Bedingung fest, dass $j < 1$ ist, und nehme im Vorangehenden $m = 1$. Für diesen Fall bezeichne ich $g_{m,n}$ einfacher durch g_n, und erhalte, weil $G(1) = 0$ ist:

$$j + (nj) - ((n+1)j) = g_n \tag{1}$$

$$G(n+1) - G(n) \qquad = g_n, \tag{2}$$

und den Zusatz:

$$\text{dass auch } g_n \text{ nur } = 0 \text{ oder } = 1 \text{ sein kann.} \tag{3}$$

Zunächst gibt dies:

$$G(n) = g_1 + g_2 \cdots + g_{n-1}, \tag{4}$$

wobei dann freilich zu ergänzen ist, dass $G(1) = 0$ sein soll, und nun folgt für ein beliebiges m und n:

$$g_{m,n} = g_m + g_{m+1} \cdots + g_{m+n-1} - (g_1 + g_2 \cdots + g_{n-1}), \tag{5}$$

so dass der in der vorigen Nummer ausgesprochene Satz wie folgt lautet:

Hebt man aus der Zahlenreihe

$$g_1 g_2 g_3 \cdots \tag{6}$$

irgendwo n aufeinanderfolgende Glieder heraus, und subtrahirt von ihrer Summe die Summe der $n - 1$ Anfangsglieder, so hat die Differenz stets einen der beiden Werthe 0 oder 1.

Diese Zahlenreihe ist es nun, auf welche sich von hier ab das Interesse concentrirt.

5. Die Gleichung (1), nämlich:

$$((n+1)j) = (nj) + j - g_n,$$

lehrt, dass 1) wenn $g_n = 0$ ist, $(nj) < ((n+1)j)$, dagegen wenn 2) $g_n = 1$ ist, $(nj) > ((n+1)j)$ ist. Das gilt auch umgekehrt. Ist $(nj) < ((n+1)j)$, so kann in der Gleichung (1) nicht $g_n = 1$ sein, also ist dann $g_n = 0$; ist $(nj) > ((n+1)j)$, so muss $g_n = 1$ sein, da $g_n = 0$ der Voraussetzung widersprechen würde.

Der Werth von g_n entscheidet also darüber, ob beim Uebergange von (nj) zu $((n+1)j)$ eine Zu- oder eine Abnahme erfolgt, und umgekehrt entscheidet dies vollständig über den Werth von g_n.

Aus diesem Grunde ziehe ich bei dieser Untersuchung statt der Zahlzeichen 0, 1 die Zeichen c, d vor, und werde, wenn $g_n = 0$ ist, schreiben $g_n = c$, dagegen $g_n = d$, wenn $g_n = 1$ ist, so dass umgekehrt, wenn die *Zahlenwerthe* dieser Zeichen in Betracht kommen,

$$c = 0, \qquad d = 1$$

zu setzen ist.

6. An dieser Stelle möge mir eine grössere Ausführlichkeit gestattet sein. Die Restenreihe von j und die Reihe der Zahlen g ordne ich auch räumlich zueinander, indem ich die Reste, so wie sie aufeinander folgen, nebeneinander geschrieben denke, und unter jedem Reste (nj) die zugehörige Zahl g_n. Das gibt also eine Tabelle:

$$\begin{array}{lllllll} R\colon & j \;\; (2j) \;\; (3j) & (4j)\ldots & ((n-1)j) & (nj) & ((n+1)j)\ldots \\ C\colon & g_1 \;\; g_2 \;\; g_3 & g_4 \cdots & g_{n-1} & g_n \cdots & \end{array}$$

und wenn sich hier $g_n = c$ findet, so hat man auf (nj) zunächst einen grössern, wenn $g_n = d$ ist, einen kleinern Rest $((n+1)j)$ zu erwarten.

Dass im ersten Falle dieser nächstfolgende Rest $((n+1)j) = (nj) + j$, im andern $((n+1)j) = (nj) + j - 1$ ist, versteht sich nunmehr von selbst.

Diese, aus den Elementen $c = 0$, $d = 1$ in bestimmter Aufeinanderfolge gebildete Reihe

$$C = g_1 g_2 g_3 \cdots$$

nenne ich *die Charakteristik der Restenreihe R oder einfacher der Zahl j selbst.*

7. Um hiervon wenigstens eine vorläufige Vorstellung zu geben, sei

$$j = \sqrt{2} - 1,$$

die Quadratwurzel positiv verstanden, also annähernd ausgerechnet,

$$j = 0{,}414213562.$$

Werden die Reste (nj) auf *eine zur Formation der Charakteristik hinreichende Stellenzahl* berechnet, so ergibt sich bis $n = 10$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(nj)	0,4	0,8	0,2	0,6	0,1	0,5	0,9	0,3	0,7	0,1
g_n	c	d	c	d	c	c	d	c	d	

Setzt man die Rechnung etwas weiter fort, etwas bis $n = 2 + 5 + 12 + 29$, so ergibt sich als Anfang der Charakteristik:

$$C = cd\ cdccd\ cdccdcdcdccd\ cdccdcdcdccdcdccdcdccdcdcdccd\ldots,$$

so dass wenigstens zu ersehen ist, wie eine solche Charakteristik aussehen kann, wenn man sie in primitiver Weise hinzuzuschreiben versucht.

8. Hier tritt nun der merkwürdige Umstand ein, *dass dieses eigenthümliche Gebilde, die Charakteristik von j, die Zahl j selbst und ihre ganze Restenreihe vollkommen ersetzt,* sogar in Bezug auf die numerische, angenäherte Ausrechnung derselben, wie für j selbst schon aus den Formeln

$$j = \frac{G(n) + (nj)}{n}, \qquad \frac{G(n)}{n} < j < \frac{1 + G(n)}{n}$$

ersichtlich ist. Ich werde dies an einer Reihe von Beispielen ausführen, welche zugleich die Nothwendigkeit darthun, die Gesetze zu erforschen, welche in einer Charakteristik herrschen.

9. Die Anwendungen der Charakteristik setzen *Abzählungen* in derselben voraus, von denen ich diejenigen, auf denen die folgenden Beispiele beruhen, hier zusammenstelle. Es sind dies die folgenden.

Zunächst bilde man, für ein gegebenes n, die Summe der $n-1$ Anfangsglieder $g_1 g_2 \cdot\cdot g_{n-1}$, und von da ab, immer von Neuem, die Summe der nächstfolgenden n Glieder. Dies gebe:

$$\begin{aligned} g_1 + g_2 \cdots + g_{n-1} &= \sigma_1^{(n)} \\ g_n + g_{n+1} \cdots + g_{2n-1} &= \sigma_2^{(n)} \\ g_{2n} + g_{2n+1} \cdots + g_{3n-1} &= \sigma_3^{(n)} \\ g_{3n} + g_{3n+1} \cdots + g_{4n-1} &= \sigma_4^{(n)} \end{aligned}$$

u. s. w. Dann ist nur noch nöthig, aus diesen Summen die Zahlenreihe

$$g_1^{(n)} = \sigma_2^{(n)} - \sigma_1^{(n)}, \quad g_2^{(n)} = \sigma_3^{(n)} - \sigma_1^{(n)}, \ldots \quad g_p^{(n)} = \sigma_{p+1}^{(n)} - \sigma_1^{(n)}, \ldots$$

abzuleiten, in welcher nach N.º 4 jedes $g_p^{(n)}$ entweder 0 oder 1 sein wird.

10. Als erste Anwendung möge die Aufgabe gestellt werden, die Zahl j mit der ganzen Zahl n *wirklich* zu multiplizieren. Wir erhalten zunächst

$$nj = G(n) + (nj);$$

da der ganzzahlige Theil des Productes $= \sigma_1^{(n)}$ ist, so ist man auf die wirkliche Ermittelung von (nj) verwiesen, und nun lautet die gestellte Aufgabe wie folgt:

Aus der Charakteristik C von j selbst die Charakteristik von (nj) abzuleiten.

Wenigstens verstehe ich die wirkliche Multiplikation von j mit n so, und vermag ihr keine andere Bedeutung beizulegen.

Benutzt man die Bezeichnungen der Nr. 9, so findet man sehr leicht, dass:

$$C^{(n)} = g_1^{(n)} g_2^{(n)} g_3^{(n)} \cdots$$

die verlangte Charakteristik von (nj) ist.

Die Abzählungen, welche hier gefordert sind, bieten ersichtliche Schwierigkeiten dar. Das kann zwar ein Grund sein, die Aufgabe abzulehnen, aber kein Grund, die Aufgabe oder die Fragestellung zu leugnen; es gibt vielmehr in sehr deutlicher Weise zu erkennen, was es heisst, sich mit Irrationalzahlen im Ernst und nicht mit blossen Disputationen einzulassen.

Ebenso, wie die Summe der $p-1$ Anfangsglieder von C durch $G(p)$ bezeichnet wurde, möge sie für $C^{(n)}$ durch $G^{(n)}(p)$ bezeichnet werden, so dass:

$$G^{(n)}(p) = g_1^{(n)} + g_2^{(n)} + \cdots + g_{p-1}^{(n)}$$

wird. Das gibt nach No. 9 sofort:

$$G^{(n)}(p) = G(pn) - pG(n),$$

und wie in Nr. 8 für j, jetzt:

$$\frac{G(pn) - pG(n)}{p} < (nj) < \frac{1 + G(pn) - pG(n)}{p}.$$

Es ist daher möglich, durch blosse Abzählungen in der Charakteristik von j nicht bloss j selbst, sondern auch einen vorgeschriebenen Rest (nj) mit beliebiger Annäherung zu berechnen, nämlich wohlverstanden, wenn man die Theorie dieser Zahl j soweit gebracht hat, dass man die hier verlangten Abzählungen wirklich leisten kann.

11. Nach dem Vorstehenden ist der Ausdruck:

$$G(pn) - pG(n) = G^{(n)}(p)$$

nur der Werthe $0, 1, \ldots p-1$ fähig.

Ist K einer derselben, so hat die Gleichung:

$$G(pn) - pG(n) = K$$

für n unendlich viele Lösungen: es sind diejenigen Werthe von n, für welche der Rest (nj) zwischen die Grenzen:

$$\frac{K}{p} \quad \text{und} \quad \frac{K+1}{p}$$

fällt.

12. Sind die Zahlen $g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots g_{p-1}^{(n)}$ alle $= 0$, so ist also $(nj) < \frac{1}{p}$. Ist ausserdem $g_{np-1} = d$, so ist:

$$(nj) < \frac{j}{p},$$

und es folgt:

$$\frac{G(n)}{n} < j < \frac{G(n)}{n - \frac{1}{p}}.$$

13. Man kann die Zahl n auf unendlich viele Arten so auswählen, dass in der Charakteristik von j das Aggregat:

$$g_1 g_2 \ldots g_{n-2}$$

der $n-2$ Anfangsglieder zu seiner Mitte symmetrisch angeordnet ist.

Das sind diejenigen Werthe von n, für welche die Reste:

$$j \quad (2j) \quad (3j) \ldots \quad ((n-1)j)$$

entweder alle grösser oder alle kleiner sind als:

$$(nj).$$

Der erste Fall tritt ein, wenn $g_{n-1} = d$, der zweite, wenn $g_{n-1} = c$ ist.

Es sind zugleich diejenigen Werthe von n, für welche im ersten Falle:

$$j, \ \frac{(2j)}{2}, \ \frac{(3j)}{3}, \ldots \ \frac{((n-1)j)}{n-1} \ \text{sämmtlich grösser als} \ \frac{(nj)}{n},$$

im zweiten Falle:

$$1 - j, \ \frac{1-(2j)}{2}, \ \frac{1-(3j)}{3}, \ldots \ \frac{1-((n-1)j)}{n-1}$$

$$\text{sämmtlich grösser als} \ \frac{1-(nj)}{n}$$

sind.

Im ersten Falle ist unter allen Rationalzahlen, die $< j$ und deren Nenner nicht $> n$ sind,

$$\frac{G(n)}{n}$$

die beste Annäherung an j; im zweiten Falle ist:

$$\frac{1 + G(n)}{n},$$

die beste Annäherung an j unter allen Rationalzahlen, die $> j$ und deren Nenner nicht $> n$ sind.

14. Um hierauf nicht noch einmal zurückkommen zu müssen, will ich die ausgeführten Werthe dieser Annäherungen an dieser Stelle angeben. Man findet sie aus der Charakteristik von j in der angegebenen Weise, wozu aber die Kenntniss dieser Charakteristik erforderlich ist. Sei, in einen Kettenbruch entwickelt,

$$j = \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{s_1 \ldots}} = (s\, s_1\, s_2 \ldots),$$

und:

$$\begin{array}{llll} Z_{-2} = 1 & Z_{-1} = 0 & Z = sZ_{-1} + Z_{-2} \ldots & Z_k = s_k Z_{k-1} + Z_{k-2} \ldots \\ N_{-2} = 0 & N_{-1} = 1 & N = sN_{-1} + N_{-2} \ldots & N_k = s_k N_{k-1} + N_{k-2} \ldots \end{array}$$

so sind alle diese Annäherungswerthe gegeben durch die Formel:

$$\frac{\sigma Z_{m-1} + Z_{m-2}}{\sigma N_{m-1} + N_{m-2}},$$

für $\sigma = 1, 2, \ldots s_m$ und $m = 0, 1, 2, \ldots$ Sie ergibt obere Grenzen:

$$\frac{1 + G(n)}{n},$$

für j, so oft m gerade, dagegen untere Grenzen:

$$\frac{G(n)}{n},$$

so oft m ungerade ist. In beiden Fällen ist $n = \sigma N_{m-1} + N_{m-2}$ zu setzen.

Die Annäherung steigt, für das nämliche m, mit dem Werthe von σ. Unter diesen besten Annäherungswerthen sind also die allerbesten diejenigen, die man für $\sigma = s_m$ erhält, das sind die längst bekannten Brüche:

$$\frac{Z_m}{N_m}.$$

15. Ich schliesse hiermit diese Reihe von Beispielen, die nur dazu bestimmt sind, einen vorläufigen Ueberblick über das Wesen einer Charakteristik zu gewähren, und wende mich nun zu den hauptsächlichsten Gesetzen, welche ich in diesem merkwürdigen Gebilde aufgefunden habe.

II. Die Charakteristik der Irrationalzahlen.

16. Zu jeder Reihe reeller Zahlen $r_1 r_2 r_3 r_4 \dots$ (R) gehört eine Charakteristik $g_1 g_2 g_3 \dots$ (C) in dem Sinne, dass, wenn $g_n = c$ ist, auf r_n eine grössere, wenn $g_n = d$ ist, auf r_n eine kleinere Zahl folgt. Im Allgemeinen wird aber noch ein drittes Symbol nöthig, nämlich wenn die auf r_n folgende Zahl $= r_n$ ist, was in einer Restenreihe nicht vorkommen kann. Ich benutze dann für g_n das Zeichen l.

Offenbar kann durch geeignete Wahl der Zahlenreihe R jedes beliebige, aus den drei Symbolen c, d, l zusammengesetzte Aggregat C als Charakteristik hervorgehen, und es ist klar, dass, sobald erst zu C eine Zahlenreihe R angegeben ist, deren beliebig viele angegeben werden können, zu denen C ebenfalls gehört.

Unter allen diesen Charakteristiken zeichnet sich nun diejenige aus, welche ich oben als Charakteristik einer Irrationalzahl j eingeführt habe; wo es nöthig ist, sie von andern zu unterscheiden, nenne ich sie eine *echte* Charakteristik, jede andere eine *unechte*.

Auch eine echte Charakteristik gehört zu beliebig viel Zahlenreihen, aber sie bestimmt eine von diesen vollständig, nämlich die Restenreihe der Irrationalzahl, zu der sie gehört, einschliesslich der Irrationalzahl selbst, bis auf ihren ganzzahligen Theil, wenn ein solcher vorhanden ist.

Man kann dies auch so aussprechen, dass zwei Irrationalzahlen, welche die nämliche Charakteristik haben, abgesehen von ihren ganzzahligen Theilen einander gleich sind.

Im Folgenden ist nur von solchen Irrationalzahlen die Rede, die zwischen Null und Eins liegen, also einen ganzzahligen Theil nicht haben.

17. Sei also j eine solche Irrationalzahl,

$$C = g_1 g_2 g_3 \dots$$

ihre Charakteristik. *Das Grundgesetz*, welches dieselbe beherrscht, und aus welchem sie gefunden wird, ist der Satz aus Nr. 4.

Hebt man aus C an irgend einer Stelle irgend eine Anzahl n aufeinanderfolgender Elemente heraus, und subtrahirt von ihrer Summe die $n-1$ Anfangselemente, so erhält man als Differenz stets entweder Null oder Eins.

18. Daraus folgt für $n = 2$ ohne Weiteres, dass 1) wenn in C irgendwo d auf d folgt, auch $g_1 = d$ ist und nirgendwo c auf c folgen kann; dass dagegen 2) wenn in C irgendwo c auf c folgt, auch $g_1 = c$ ist, und nun kann nirgendwo d auf d folgen.

Es gibt also zwei Arten von Charakteristiken, die erste, welche mit c beginnt und in welcher niemals d auf d, und die zweite, welche mit d beginnt und in welcher niemals c auf c folgen kann. Dieselben stehen in einer sehr einfachen Beziehung zu einander.

Sei j' eine zweite Irrationalzahl, und zwar sei:

$$j + j' = 1,$$

ausserdem sei:

$$C' = g_1' g_2' g_3' \dots$$

die Charakteristik von j'. Dann findet sich sofort, dass auch für jedes n:

$$(nj) + (nj') = 1,$$

und dass hiernach:

$$g_n + g_n' = 1$$

ist.

Ebenso wie j und j' als complementär bezeichnet werden können, weil sie sich zur Einheit ergänzen, nenne ich ihre Charakteristiken C und C' complementär.

Zwei Charakteristiken heissen also complementär, wenn überall, wo in der ersten c steht, die andere das Symbol d, und überall, wo in der ersten d steht, die andere das Symbol c hat.

Ist C eine echte Charakteristik und j die zugehörige Irrationalzahl, so ist auch die complementäre Charakteristik C' eine echte, und sie gehört zur Irrationalzahl $j' = 1 - j$.

Kennt man das Bildungsgesetz der Charakteristiken erster Art, so ist es für die Charakteristiken zweiter Art ebenfalls gefunden.

19. Um dieses Bildungsgesetz ausführen zu können, sind Bezeichnungen nöthig, welche auf dem Bedürfniss beruhen, deutlich anzugeben, wie oft ein Element oder ein Aggregat von Elementen continua serie hingeschrieben werden soll. Ich benutze dazu die Exponenten, so dass z. B.:

c^5	das Aggregat	$ccccc$
$c^4 d^2$	„	$ccccdd$
$(c^2 d)^3$	„	$ccdccdccd$

bedeuten soll, was leicht verständlich ist.

20. Dies festgestellt, sei s eine positive ganze Zahl, und $s-1$ gebe an, wie oft das Element c zu Anfange von C auftritt. Mit andern Worten, s sei so gewählt, dass die s Anfangselemente von C das Aggregat:

$$g_1 g_2 \cdots g_s = c^{s-1} d,$$

ergeben. Es wird also C eine Charakteristik I. oder II. Art sein, jenachdem $s > 1$ oder $s = 1$ ist.

Aus dem Grundgesetze (Nr. 17) zieht man nun sofort den Schluss, dass:

1) In C nirgendwo mehr als s Elemente c aufeinander folgen können, und dass:

2) Auf jedes d mindestens $s-1$ mal c folgt.

Da aber C mit der Gruppe $c^{s-1}d$ beginnt, so muss auf diese eine Gruppe derselben Art oder eine Gruppe $c^s d$ folgen, und dies muss sich nun so fortsetzen. Also ist C selbst in irgend einer Aufeinanderfolge aus den Gruppen:

$$c_1 = c^{s-1} d \quad \text{und} \quad d_1 = c^s d$$

zusammengesetzt. Man beweist ferner

3) aus der Irrationalität von j, dass beide Gruppen wirklich vorkommen, und von keiner Stelle ab nur noch Gruppen derselben Art oder die nämlichen Aggregate solcher Gruppen periodisch auftreten können.

Es gibt also eine Reihe positiver ganzer Zahlen:

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \ldots \tag{A}$$

von solcher Beschaffenheit, dass:

$$C = c_1^{A_1} d_1^{A_2} c_1^{A_3} d_1^{A_4} c_1^{A_5} \ldots$$

ist, und diese Reihe bricht nicht ab und wird auch von keiner Stelle ab periodisch.

Meine ersten Untersuchungen haben sich, wie das ersichtlich zunächst liegt, auf die Erforschung der Zahlenreihe (A) gerichtet, und sind auch zum Ziele gelangt. Erheblich leichter gestaltet sich die Ermittelung von C auf dem folgenden Wege.

21. Die Voraussetzung, dass:

$$g_1 g_2 \cdots g_s = c^{s-1} d,$$

sein soll, heisst nichts anderes, als es soll s so gewählt werden, dass:

$$sj < 1 < (s+1)j$$

wird. Das gibt:

$$\frac{1}{s-1} < j < \frac{1}{s};$$

setzt man daher:

$$j = \frac{1}{s+j_1},$$

so ist vorausgesetzt, dass auch j_1 zwischen Null und Eins liegt.

Dann aber ist j_1 eine neue Irrationalzahl, und ich führe auch ihre Charakteristik:

$$\Gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots$$

in die Untersuchung ein. Sei

$$\Gamma(k) = \gamma_1 + \gamma_2 \cdots + \gamma_{k-1},$$

und $\Gamma(1) = 1$. Es folgt:

$$kj_1 = \Gamma(k) + (kj_1).$$

Jetzt erhalte ich:

$$(ks + \Gamma(k))j = \frac{k(s+j_1) - (kj_1 - \Gamma(k))}{s+j_1} = k - j(kj_1), \tag{1}$$

also:

$$(ks + 1 + \Gamma(k))j = k + j(1 - (kj_1)). \tag{2}$$

Wird daher, für $k = 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt:

$$ks + \Gamma(k) = n_k, \tag{3}$$

so erhalten wir:

$$G(n_k) = k - 1 \tag{4}$$

$$G(1 + n_k) = k, \tag{5}$$

also:

$$g_{n_k} = 1 = d. \tag{6}$$

An dieser Stelle ist die Irrationalität von j benutzt, denn wenn (kj_1) Null werden kann, erleidet die Gleichung (4) eine Ausnahme.

Zunächst wird für $k = 1$: $G(n_1) = 0$, d. h. $g_1 + g_2 \cdots + g_{n_1 - 1} = 0$, also $g_1 g_2 \cdots g_{n_1-1} = c^{n_1 - 1}$; dazu kommt $g_{n_1} = d$, also ist:

$$g_1 g_2 \cdots g_{n_1} = c^{n_1 - 1} d.$$

Für $k = 2$ folgt $G(n_2) = 1$. Nun ist $G(1 + n_1)$ auch $= 1$, also $G(n_2) - G(1 + n_1) = 0$, d. i. $g_{n_1+1} + g_{n_1+2} \cdots + g_{n_2-1} = 0$, also $g_{n_1+1} g_{n_1+2} \cdots g_{n_2-1} = c^{n_2 - 1 - n}$; dazu kommt $g_{n_2} = d$, also ist:

$$g_{n_1+1} g_{n_1+2} \cdots g_{n_2} = c^{n_2 - n_1 - 1} d.$$

Allgemein ist $G(n_{k+1}) = k$, aber auch $G(1 + n_k) = k$, also $G(n_{k+1}) - G(1 + n_k) = 0$, d. i. $g_{n_k+1} + \cdots + g_{n_{k+1}-1} = 0$, also $g_{n_k+1}\, g_{n_k+2} \cdots g_{n_{k+1}-1} = c^{n_{k+1}-1-n_k}$; dazu kommt $g_{n_{k+1}} = d$, also ist:

$$g_{n_k+1}\, g_{n_k+2} \cdots g_{n_{k+1}} = c^{n_{k+1}-n_k-1} d.$$

So erhalten wir, in Gruppen geordnet, nach und nach alle Elemente von C. Da $n_1 = s$, $n_{k+1} - n_k = s + \gamma_k$ ist, so folgt:

$$C = c^{s-1}d\ c^{s+\gamma_1-1}d\ c^{s+\gamma_2-1}d\ c^{s+\gamma_3-1}d \ldots$$

Die Charakteristik von j_1, nämlich:

$$\Gamma = \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3 \cdots$$

liefert also ohne Weiteres die Charakteristik von j, wenn man in ihr, für jedes n, das Element γ_n ersetzt durch das Aggregat $c^{s+\gamma_n-1}d$, und dem Ganzen noch $c^{s-1}d$ vorsetzt.

Wenn $\gamma_n = c$ ist, wird es hiernach ersetzt durch $c^{s-1}d = c_1$, und wenn $\gamma_n = d$ ist, wird statt seiner das Aggregat $c^s d = d_1$ gesetzt. Vor das Ganze tritt zum Schlusse nochmals c_1.

Deuten wir daher beide Charakteristiken an durch:

$$C = C(c|d) \quad \text{und} \quad \Gamma = C_1(c|d),$$

so sagt unser Resultat aus, dass:

$$C(c|d) = c_1 C_1(c_1|d_1),$$

ist.

22. Damit ist die Lösung unserer Aufgabe gegeben, denn man erkennt nun sofort folgende Resultate:

I. Es gibt wirklich ein gemeinsames Bildungsgesetz für alle echten Charakteristiken.

II. Für jede Irrationalzahl j knüpft sich dasselbe durchaus an die Kettenbruchentwicklung von j, und liefert die Bedeutung dieser Entwicklung bis in die letzten Einzelnheiten bezüglich j selbst und seiner sämmtlichen Reste (nj).

III. Ist, in einen Kettenbruch entwickelt,

$$j = (s s_1 s_2 s_3 \ldots),$$

so lehrt die Schlussformel der vorigen Nummer durch Wiederholung, dass man nur die Aggregate:

$$\begin{array}{llll} c_1 = c^{s-1}d & c_2 = c_1^{s_1-1}d_1 & c_3 = c_2^{s_2-1}d_2 & c_4 = c_3^{s_3-1}d_3 \ldots, \\ d_1 = c^s d & d_2 = c_1^{s_1}d_1 & d_3 = c_2^{s_2}d_2 \ldots & \end{array}$$

einzuführen hat, dann ist $C(c|d) = c_1 C_1(c_1|d_1) = c_1 c_2 C_2(c_2|d_2) = \cdots$, d. h.:

$$C = c_1 c_2 c_3 c_4 \cdots$$

die Charakteristik von j.

23. Das gilt sowohl für $s > 1$ als auch für $s = 1$. Aber im letztern Falle, wo (N.º 18) C eine Charakteristik II. Art ist, treten Vereinfachungen ein, welche noch nachgewiesen werden mögen. Dieselben kann man direct erreichen, wenn man zunächst benutzt, dass

$$c_1 c_2 = d_2,\ c_3 c_4 = d_4 \ldots,$$

also auch:

$$C = d_2 d_4 d_6 \ldots$$

ist; einfacher ist folgendes Verfahren. Ist $s = 1$, so wird:

$$j' = 1 - j = (1 + s_1\ s_2\ s_3 \ldots);$$

wir wissen, dass die Charakteristiken von j und j' complementär sind. Für die letztere sind folgende Aggregate zu bilden:

$$\begin{array}{llll} c_1 = c^{s_1}d & c_2 = c_1^{s_2-1}d_1 & c_3 = c_2^{s_3-1}d_2 & c_4 = c_3^{s_4-1}d_3 \ldots \\ d_1 = c^{1+s_1}d & d_2 = c_1^{s_2}d_1 & d_3 = c_2^{s_3}d_2 \ldots & \end{array}$$

also erhalten wir in der andern die Aggregate:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{c}_1 = d^{s_1}c & \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_1^{s_2-1}\vartheta_1 & \mathfrak{c}_3 = \mathfrak{c}_2^{s_3-1}\vartheta_2 & \mathfrak{c}_4 = \mathfrak{c}_3^{s_4-1}\vartheta_3 \ldots \\ \vartheta_1 = d^{1+s_1}c & \vartheta_2 = \mathfrak{c}_1^{s_2}\vartheta_1 & \vartheta_3 = \mathfrak{c}_2^{s_3}\vartheta_2 \ldots & \end{array}$$

und

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{c}_3 \ldots$$

ist die Charakteristik von j, wenn $s = 1$ ist.

24. Der Anblick von C zeigt, dass nicht bloss die Zusammensetzung einer echten Charakteristik durch die Zahlen $s s_1 s_2 \ldots$, sondern auch umgekehrt diese durch jene vollkommen bestimmt ist, mit ihr aber auch der Kettenbruch $(s s_1 s_2 \ldots) = j$; und daraus folgt, *dass auch umgekehrt jede, nach obigem Gesetze gebildete Charakteristik C eine Irrationalität j bestimmt, zu deren Restenreihe sie gehört.*

Dieses Bildungsgesetz folgt also daraus, dass der Zahl j die Eigenschaft fehlt, irgend einen Rest (nj) zu besitzen, welcher $= 0$ ist, und zieht umgekehrt die Irrationalität von j nach sich. Es stellt selbst die erste bis jetzt entdeckte wirkliche Eigenschaft aller Irrationalzahlen dar.

Damit ist die Annahme, als ob auf diesem Gebiete Nichts zu finden sei, vollkommen widerlegt. Ganz anders verhält es sich mit der Frage, ob auf diesem Gebiete nichts Ansprechenderes zu finden ist.

Abgesehen davon, dass die Beschäftigung mit der Charakteristik ganz ausserordentlichen Reiz darbietet, muss diese Frage füglich denjenigen vorbehalten bleiben, denen es gelingt, für die *arithmetische* Untersuchung der Irrationalzahlen einen neuen, von dem meinigen verschiedenen Angriffspunkt zu entdecken, oder denen wenigstens auf dem von mir eröffneten Wege etwas einfällt.

III. Die Charakteristik einer Rationalzahl.

25. Ist $\frac{a}{b}$ eine auf die kleinste Benennung gebrachte Rationalzahl, so ist ihre, bis ins Unbegrenzte fortgesetzte Restenreihe periodisch, und ihre Periode umfasst b Reste. Folglich ist auch die zugehörige Charakteristik eine periodische, und sie besteht aus einer ununterbrochenen Wiederholung der b Anfangselemente $g_1 g_2 \dots g_b$. Da aber der b^{te} Rest $= 0$ ist, so ist er kleiner als die beiden Reste, die ihn einschliessen, also ist $g_{b-1} = d$, $g_b = c$. Das vorangehende Aggregat $g_1 g_2 \cdots g_{b-2}$ bezeichne ich durch Π und nenne es den Hauptttheil der Periode; die vollständige Charakteristik lautet:

$$\Pi dc \quad \Pi dc \quad \Pi dc \dots \quad = (\Pi dc)^{\infty}.$$

Der Haupttheil Π ist aus den Elementen c, d zu seiner Mitte symmetrisch angeordnet. Das folgt aus den elementarsten Begriffen über die Reste von $\frac{a}{b}$, hat aber hier seine Bedeutung, und ist in meiner oben erwähnten Arbeit an einem Beispiel sichtbar gemacht worden.

Die Charakteristik einer rationalen Zahl ist demnach keine echte, aber der einfachste Weg, um zu ihr zu gelangen, bleibt ihre Herleitung aus der echten Charakteristik.

Des Folgenden wegen muss ich das Resultat aus meiner früheren Arbeit hier wiederholen, werde aber einen Theil der dort eingeführten Bezeichnungen hier aufgeben.

Ist, in einen Kettenbruch entwickelt,

$$\frac{a}{b} = (s s_1 s_2 \dots s_n),$$

so wird:

$$\Pi = c_1 c_2 \dots c_{n-1} c_n^{s_n - 1} c_{n-1}^{s_{n-1} - 1} \dots c_2^{s_2 - 1} c_1^{s_1 - 1} c^{s-1},$$

was ich durch:

$$\Pi(s s_1 s_2 \dots s_n),$$

bezeichnen will; $c_1 c_2 \dots c_n$ haben die in N.⁰ 22 festgesetzte Bedeutung.

An der erwähnten Stelle ist dies an die Bedingung geknüpft, dass $s_n > 1$ sein soll; dieselbe ist überflüssig, wie ich hiermit ausdrücklich constatirt haben will[1]).

26. Dieses Aggregat ist also aus c und d symmetrisch zusammengesetzt. Um dies zum Ausdruck zu bringen, ordnen wir die Gruppen, aus denen Π zusammengesetzt ist, umgekehrt. Ist für diesen Zweck:

$$\begin{array}{llll} \gamma = c & \gamma_1 = \delta \gamma^{s-1} & \gamma_2 = \delta_1 \gamma_1^{s_1 - 1} & \gamma_3 = \delta_2 \gamma_2^{s_2 - 1} \dots \\ \delta = d & \delta_1 = \delta \gamma^{s} & \delta_2 = \delta_1 \gamma_1^{s_1} \dots & \end{array}$$

so folgt das nämliche Aggregat:

$$\Pi(s s_1 s_2 \dots s_n) = \gamma^{s-1} \gamma_1^{s-1} \gamma_2^{s_2 - 1} \dots \gamma_n^{s_n - 1} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \cdots \gamma_2 \gamma_1,$$

was eine durchgreifende Aenderung, nicht in der Aufeinanderfolge der Elemente c, d, an der nichts geändert ist, sondern in ihrer Gruppirung bedeutet.

Es ist nicht schwer, die Uebereinstimmung beider Ausdrücke für Π, also seine Symmetrie, direct zu verificiren; man kommt dabei auf sehr interessante, ebenfalls symmetrische Grundgebilde, wobei ich indessen nicht verweile.

27. Dagegen mag eine Anwendung folgen. Wenn zwei Kettenbrüche $(s s_1 s_2 \dots)$ und $(\sigma \sigma_1 \sigma_2 \dots)$ in den ersten n Nennern, aber nicht darüber hinaus übereinstimmen, so dass:

$$\sigma = s \quad \sigma_1 = s_1 \dots \quad \sigma_{n-1} = s_{n-1},$$

aber σ_n nicht $= s_n$ ist, und es ist dann:

$$\sigma_n > s_n,$$

so stimmen auch die Charakteristiken beider Kettenbrüche zu Anfang überein, und zwar ist der gemeinsame Anfang beider:

$$c_1 c_2 \dots c_{n-1} c_n^{s_n} c_{n-1}^{s_{n-1} - 1} \dots c_1^{s_1 - 1} c^{s-1} = \Pi(s, s_1, \dots s_{n-1}, 1 + s_n),$$

nichts Anderes, als der Haupttheil in der Periode der Charakteristik von $(s, s_1, s_2, \dots s_{n-1}, 1 + s_n)$, und das zunächst folgende Element ist in der einen Charakteristik c, in der andern d.

1) Seite 152 Zeile 5 steht in Folge eines Schreibfehlers g_{μ} statt $g_{\mu-1}$. (S. 40/41 dieses Bandes.)

IV. Ueber die Anordnung einer echten Charakteristik.

28. Zu dem in N.⁰ 22 gefundenen Bildungsgesetze:

I. $$C = c_1 c_2 c_3 \ldots$$

der Charakteristik liefert der in N.⁰ 26 gegebene Ausdruck für Π sofort ein neues, nämlich:

II. $$C = \gamma^{s-1}\gamma_1^{s_1-1}\gamma_2^{s_2-1}\gamma_3^{s_3-1}\ldots$$

Ein drittes Bildungsgesetz besteht in folgendem. Sei:

$$\begin{aligned} \Pi_0 cd &= c^{s-1}d \\ \Pi_1 dc &= (\Pi_0 cd)^{s_1} c \\ \Pi_2 cd &= (\Pi_1 dc)^{s_2}\Pi_0 cd \\ \Pi_3 dc &= (\Pi_2 cd)^{s_3}\Pi_1 dc, \end{aligned}$$

u. s. w., so ist:

III. $$C = \lim \Pi_n,$$

wenn n über alle Grenzen wächst, und, von $n = 1$ an:

IV. $$\Pi_n = \Pi(ss_1 \ldots s_n),$$

d. h. Π_n der Haupttheil in der Periode der Charakteristik von $(ss_1 \ldots s_n)$, was, wenn $s > 1$ ist, auch für $n = 0$ gültig bleibt.

29. Wir fanden bereits oben, dass man aus der Charakteristik von $j_1 = (s_1 s_2 \ldots)$ die Charakteristik von $j = (ss_1 s_2 \ldots)$ erhält, wenn man c durch c_1, d durch d_1 ersetzt, und dem Ganzen c_1 vorsetzt. Dies hängt mit allgemeinern Sätzen zusammen. Sei allgemein:

$$\begin{aligned} j_n &= (s_n s_{n+1} s_{n+2} \ldots) \\ I_n &= (ss_1 \ldots s_n), \end{aligned}$$

und wiederum in der Charakteristik von I_n der Haupttheil ihrer Periode Π_n, wie in Formel IV. Dann finden folgende Sätze statt.

V. Ordnet man die Charakteristik von

$$j_{2\mu+1}$$

nach ihren Elementargruppen

$$c^{s_{2\mu+1}-1}d \quad \text{und} \quad c^{s_{2\mu+1}}d,$$

und ersetzt überall die erstere durch $\Pi_{2\mu+1}dc$, letztere überall durch $\Pi_{2\mu+1}dc\,\Pi_{2\mu}dc$, so erhält man die Charakteristik von j selbst.

VI. Man erhält C auch, wenn man die Charakteristik von:

$$j_{2\mu}$$

nach ihren Elementargruppen:

$$c^{s_{2\mu}-1} \quad \text{und} \quad c^{s_{2\mu}}d$$

ordnet und dann erstere durch $\Pi_{2\mu}cd$, letztere durch $\Pi_{2\mu}cd\,\Pi_{2\mu-1}cd$ ersetzt.

VII. Man erhält C wiederum, wenn man in der Charakteristik von

$$j_{2\mu+1},$$

überall c durch $\Pi_{2\mu}cd$, dagegen d durch $\Pi_{2\mu}cd\,\Pi_{2\mu-1}cd$ ersetzt, dann aber dem Ganzen nochmals $\Pi_{2\mu}cd$ vorsetzt.

VIII. Man erhält endlich C aus der Charakteristik von

$$j_{2\mu+2},$$

wenn man überall c durch $\Pi_{2\mu+1}dc$, aber d durch $\Pi_{2\mu+1}dc\,\Pi_{2\mu}dc$ ersetzt, und dem Ganzen noch $\Pi_{2\mu+1}dc$ vorsetzt,

wobei zu bemerken ist, daß VII. und VIII. im Wesentlichen die Sätze VI. und V. sind, nur in etwas geänderter Form.

Der Satz VII. wird für $\mu = 0$ illusorisch. Aber dies ist derjenige Fall, welcher in N.⁰ 21 erledigt wurde. Aus der Charakteristik von j_1 ergibt sich diejenige von j, wenn man c durch c_1, d durch d_1 ersetzt und dann noch c_1 voranschickt. Hier ist $c_1 = \Pi_0 cd$, wie es in VII. gefordert ist, aber das Zeichen $\Pi_{2\mu}cd\,\Pi_{2\mu-1}cd$ gibt für $\mu = 0$ keinen im Vorangehenden erläuterten Sinn.

Diese Compositionsgesetze werden offenbar in eigenthümlicher Weise wirksam, wenn der Kettenbruch für j ein periodischer ist oder von irgend einer Stelle an periodisch wird. Auf diesen Fall gedenke ich bei einer andern Gelegenheit zurückzukommen.

V. Ueber die Restenperioden einer Irrationalzahl j.

30. Alle diese Anordnungen der Charakteristik C, mit Ausnahme von II. und III., sind ebensoviel Ausdrücke für die Periodicität, welche die Restenreihe von j bezüglich der Zu- und Abnahme beim Uebergange von einem Reste zum nächsten darbietet.

Ebenso wie C nach Elementargruppen c_1, d_1 geordnet werden kann, ordne man die Restenreihe in entsprechende Gruppen, nämlich in der Weise, dass, so oft in einer Gruppe

$$c_1 = g_{\mu+1}\, g_{\mu+2} \cdots g_{\mu+s}$$

auftritt, aus dieser die Restengruppe:

$$((\mu+1)j), \quad ((\mu+2)j), \ldots \quad ((\mu+s)j),$$

und so oft in jener die Gruppe:

$$d_1 = g_\nu\, g_{\nu+1} \cdots g_{\nu+s}$$

auftritt, aus dieser die Restengruppe:

$$(\nu j),\quad ((\nu+1)j),\ldots\quad ((\nu+s)j),$$

ausgehoben wird.

Mit Benutzung einer, ohne Erläuterung noch weiter auszudehnenden Ausdrucksweise werde ich jene als eine *Restenperiode* c_1, diese als eine *Restenperiode* d_1 bezeichnen.

Innerhalb einer solchen Periode ist der erste Rest von allen der kleinste, jeder folgende größer als der vorangehende, der letzte also von allen der größte.

In jeder Restenperiode wachsen also die Reste von Anfang bis zu Ende, aber nicht darüber hinaus, denn die Periode schließt mit d, also ist der Anfangsrest der neuen Periode kleiner als der vorige Schlussrest.

Dabei kann es nicht anstößig erscheinen, wenn nur der Vorgang selbst periodisch ist, nicht der Umfang, in welchem er stattfindet; wo es nöthig wird, werde ich die Restenperioden c_1 und d_1 als kleinere und größere Perioden unterscheiden.

31. Auf diese Weise zerfällt die Restenreihe von j zunächst in Elementarperioden c_1, d_1. Unterdrückt man aber die erste von ihnen, und dem entsprechend in C die erste Elementargruppe, so bleibt von C übrig $c_2 c_3 c_4 \ldots$; und hier ist

$$c_3 = c_2^{s_2-1} d_2,\quad d_3 = c_2^{s_2} d_2,\quad c_4 = c_3^{s_3-1} d_3,\ldots,$$

d. h. dies ordnet sich nach Gruppen c_2, d_2.

Unterdrückt man in der Restenreihe die Anfangsperiode c_1, so ordnen sich demnach die folgenden Reste zu Perioden c_2, d_2 von Elementarperioden, und es wiederholen sich nun die nämlichen Vorgänge bezüglich des Zu- und Abnehmens der Reste zwar nicht übereinstimmend in zwei verschiedenen Perioden c_2 und $d_2 = c_1 c_2$ zweiter Stufe, wohl aber in allen Perioden c_2 ebenso wie in allen Perioden d_2.

Unterdrückt man nun auch die Anfangsperiode c_2 der zweiten Stufe, so ordnet sich, was folgt, nach Perioden c_3, d_3 dritter Stufe. In allen Perioden c_3, ebenso wie in allen Perioden d_3, richtet sich die Zu- und Abnahme der Reste durchaus nach dem nämlichen Gesetze, wenn auch in $d_3 = c_2 c_3$ nicht nach dem gleichen Gesetze, wie in c_3.

So setzt sich das fort bis ins Unbegrenzte.

32. Hat man in solcher Weise die Charakteristik von $j_{2\mu+1}$ nach kleinern und grössern Elementarperioden geordnet, so hat man aus V. damit die Anordnung der aus j selbst hervorgehenden Restenreihe nach kleinern Perioden $\Pi_{2\mu+1} dc$ und grössern $\Pi_{2\mu+1} dc\, \Pi_{2\mu} dc$.

Da in jeder echten Charakteristik eine kleinere Elementarperiode den Anfang bildet, und erst später die grössere auftritt, so beginnt C in unserm Falle mit $\Pi_{2\mu+1} dc$, das wiederholt sich in infinitum, aber so, daß an bestimmten Stellen sich $\Pi_{2\mu+1} dc\, \Pi_{2\mu} dc$ einschaltet, so wie die Charakteristik von $j_{2\mu+1}$ das vorschreibt. Folglich kann man auch, wie auch μ angenommen wird, C und die Restenreihe von j in aufeinanderfolgende Perioden $\Pi_{2\mu+1} dc$ und $\Pi_{2\mu} dc$ zerlegen, und diese Folge beginnt mit $\Pi_{2\mu+1} dc$.

Aber es ist allgemein $\Pi_n dc$ die Periode in der Charakteristik von

$$I_n = (s s_1 \ldots s_n),$$

und I_n unter allen Rationalzahlen, die auf der gleichen Seite von j liegen und keinen grössern Nenner haben, die beste Annäherung an j.

Innerhalb jeder Periode $\Pi_{2\mu+1}$ richtet sich demnach die Zu- und Abnahme der Reste von j absolut nach dem gleichen Gesetze, welches die Restenperiode des Annäherungswerthes $I_{2\mu+1}$ darbietet.

Zwischen diese schalten sich an bekannten Stellen kleinere Restenperioden $\Pi_{2\mu} dc$ ein; sie stimmen bezüglich der Zu- und Abnahme völlig überein mit der Restenperiode des Annäherungswerthes $I_{2\mu}$.

Dass die Charakteristik von j *zu Anfange, bis zu irgend einer Stelle*, mit der Charakteristik eines Annäherungswerthes I übereinstimmen muss, liegt auf der Hand, da ein Rest (nI), *falls n nicht zu gross ist*, auch Annäherungswerth von (nj) sein wird (vgl. hierzu das numerische Beispiel in N.º 7).

Ebenso ist klar, dass die anfängliche Übereinstimmung beider Charakteristiken sich um so weiter erstrecken muss, je genauer I sich an j anschliesst, weil hiermit zugleich die Grenzen für n hinausgeschoben werden, unterhalb deren (nI) noch als Annäherung an (nj) zu gebrauchen ist. Aber wie es über solche Grenzen hinaus stehen wird, ist auf solchem Wege eben nicht zu erkennen.

Wir wissen jetzt durch den V. Satz, wie weit die Charakteristiken von j und $I_{2\mu+1}$ von Anfang an übereinstimmen; die Übereinstimmung reicht zunächst bis zu Ende einer vollständigen Restenperiode von $I_{2\mu+1}$. Von da ab wiederholt sich dieses Gesetz beim Annäherungswerthe $I_{2\mu+1}$ ohne Ende, bei j ebenfalls mit der Abweichung, dass zwischen die nach der Restenperiode von $I_{2\mu+1}$ geordneten sich noch kleinere Restenperioden $I_{2\mu} dc$ einschalten, welche also den gleichen Gang einhalten, den die Restenperiode von $I_{2\mu}$ aufweist; die Stellen, wo diese einzuschalten sind, ergeben sich aus der Charakteristik oder der Kettenbruchentwicklung von $j_{2\mu+1}$.

Ganz ähnliche Resultate ergibt der folgende Satz VI.

33. So erkennen wir nun, dass und wie man in jeder echten Charakteristik, nöthigenfalls nach Ausscheidung einer Anzahl von Anfangselementen (I), auf beliebig viele Arten eine erste, nach einem *Rationalgesetze* geordnete Restenperiode so abgrenzen kann, dass dieses Gesetz nicht bloss zu Anfange besteht, sondern sich von da ab ohne Ende wiederholt, und nur an bestimmten Stellen unterbrochen wird, für welche dann aber wiederum ein Rationalgesetz, und zwar jedesmal das nämliche eintritt. Beide Rationalgesetze ordnen sich so, dass ihre Wiederholungen neue (grössere und kleinere) Perioden höherer Stufen bilden.

Dies alles gilt von sämmtlichen Irrationalzahlen j, von jeder in ihrer eigenen Weise, und dies zeigt deutlich, dass auch auf diesem Gebiete eine vollendete Ordnung und Harmonie herrscht, im stärksten Gegensatze zu dem wirren Eindrucke, den der Versuch, diesen Zahlen mit den Anschauungen der Ziffernrechnung näher zu treten, unvermeidlich hinterlässt.

Interlaken, 2. September 1887.

XXXII.

Die Convergenz der Jacobi'schen ϑ-Reihe mit den Moduln Riemanns.

(Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 41. Jahrg., 1896, 2. Teil, S. 3—6.)

In der p-fach unendlichen Reihe Jacobi's:

$$\vartheta = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\cdots\sum_{m_p} e^{\Phi((m)) + 2(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_p v_p)},$$

$$\Phi((m)) = \sum_{\mu}\sum_{\nu} a_{\mu,\nu} m_\mu m_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p),$$

wo die Summationen nach $m_1, m_2, \ldots m_p$ über alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken sind, substituiert Riemann für die p Argumente $v_1, v_2, \ldots v_p$ seine Normalintegrale I. G. und für die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Moduln $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ ihre Periodicitätsmoduln an den Querschnitten $b_1, b_2, \ldots b_p$. Von diesen beweist er den Satz:

Sind $x_1, x_2, \ldots x_p$ reelle Variabeln und ist, durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$\Phi((x)) = -\varphi((x)) + i\psi((x)),$$

so wird die quadratische Form $\varphi((x))$ nur in dem Falle $= 0$, wo die p Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_p$ alle zugleich verschwinden. In allen übrigen Fällen ist sie von Null verschieden und positiv.

Diese Voraussetzung über die Moduln $a_{\mu\nu}$ oder die quadratische Form φ werden wir beibehalten. Dann ist die Convergenz der Jacobi'schen Reihe eine so augenfällige, dass aus einem Beweise derselben, wenn er allen berechtigten Anforderungen genügen soll, hauptsächlich hervorgehen muss, aus welchem Grunde die Convergenz sich sozusagen von selbst versteht. —

Werden die (reellen) Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_p$ zunächst so beschränkt, dass die Summe ihrer Quadrate: $\Sigma x^2 = 1$ bleibt, so können sie nicht alle $= 0$ werden, also kann φ nicht unter jede positive Zahl sinken. Folglich hat φ bei dieser Beschränkung einen kleinsten Wert α, was $\varphi((x)) \geqq \alpha$ gibt für $\Sigma x^2 = 1$, und dieser niedrigste Wert α von φ ist eine von Null verschiedene, positive Zahl, auf deren genauen Wert es hier nicht ankommt.

Sind sodann $x_1, x_2, \dots x_p$ irgend welche reelle Werte, und bezeichnet man die Summe ihrer Quadrate durch r^2, so ist:
$\sum \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$, also folgt auch $\varphi\left(\left(\frac{x}{r}\right)\right) \geqq \alpha$, d. i. $\varphi((x)) \geqq \alpha r^2$.

Jeder reellen quadratischen Form $\varphi((x))$ mit p reellen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_p$, welche die im obigen Satze ausgesprochenen Eigenschaften besitzt, ist eine von Null verschiedene, positive Zahl α in der Weise zugeordnet, dass für jedes System reeller Argumente $x_1, x_2, \dots x_p$

$$\varphi((x)) \geqq \alpha(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2)$$

ist,

was sich, beiläufig bemerkt, auch umkehren lässt.

Die Anwendung auf obige Convergenzfrage ist sehr einfach. Setzt man noch $v_\mu = \xi_\mu + i\eta_\mu$ für $\mu = 1, 2, \dots p$, so wird:

$$\vartheta = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\dots\sum_{m_p} e^{-\varphi((m)) + i\psi((m)) + 2\sum_\mu m_\mu(\xi_\mu + i\eta_\mu)},$$

die zugehörige Modulreihe ist:

$$\Theta = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\dots\sum_{m_p} e^{-\varphi((m)) + 2\sum_\mu m_\mu \xi_\mu},$$

und:

$$\operatorname{Mod} \vartheta < \Theta.$$

Aber nun ist $\varphi((m)) \geqq \alpha\Sigma m^2$, $-\varphi((m)) \leqq -\alpha\Sigma m^2$, das gibt:

$$\Theta \leqq \sum_{m_1}\sum_{m_2}\dots\sum_{m_p} e^{-\alpha(m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2) + 2(m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \cdots + m_p\xi_p)},$$

und wenn die Summe der convergenten Reihe:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha m^2 + 2m\xi} = f(\xi)$$

gesetzt wird,

$$\Theta \leqq f(\xi_1) f(\xi_2) \dots f(\xi_p).$$

Da aber, wie sofort bewiesen werden soll, für jedes reelle ξ:

$$0 < f(\xi) < f\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{\xi^2}{\alpha}}$$

ist, so folgt endlich:

$$\operatorname{Mod} \vartheta < \Theta < \left[f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^p e^{\frac{1}{\alpha}[\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_p^2]},$$

also das Resultat:

Solange von keinem der p Argumente $v_1, v_2, \dots v_p$ der reelle Teil unendlich wird, ist unter den, über die Moduln $a_{\mu\nu}$ oder die quadratische Form φ gemachten Voraussetzungen 1) die zu ϑ gehörige Modulreihe Θ convergent, also 2) auch die ϑ-Reihe selbst, und zwar ist ihre Summe nicht bedingt durch die Anordnung der Summation. Sie ist durch den vorstehenden Beweis sichergestellt für alle diejenigen Fälle, wo man berechtigt ist, jedem einzelnen Gliede der ϑ-Reihe einen exacten Wert zuzuschreiben.

Für die Theorie der Abel'schen Funktionen reicht dieser Convergenzbeweis — bis auf die angedeutete Schlussfrage — aus: ich übergehe daher den ebenso einfachen Beweis, dass die ϑ-Reihe in allen denjenigen Fällen divergiert, wo φ nicht die im Riemann'schen Falle vorhandenen Eigenschaften besitzt, also entweder φ negativer Werte fähig ist, oder zwar eine stets positive, aber keine vollständige Form ist. —

Die obere Grenze für $f(\xi)$, welche wir benutzt haben, ergibt sich wie folgt. Bleibt ξ auf reelle Werte beschränkt, so ist

$$\omega(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{\alpha}} f(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left[m - \frac{\xi}{\alpha}\right]^2}$$

stets positiv, außerdem eine gerade, periodische Funktion von ξ, mit der Periode $\varDelta\xi = \alpha$. Wenn daher $\omega(\xi) \leqq \beta$ ist von $\xi = 0$ bis $\xi = \frac{\alpha}{2}$, so gilt diese Ungleichheit für alle reellen Werte von ξ, und mit ihr die andere: $f(\xi) = \omega(\xi) e^{\frac{\xi^2}{\alpha}} \leqq \beta e^{\frac{\xi^2}{\alpha}}$. Aber

$$f(\xi) = 1 + \sum_1^{\infty} e^{-\alpha m^2}[e^{2m\xi} + e^{-2m\xi}]$$

bleibt ebenfalls stets positiv, und zwar nimmt $f(\xi)$ ununterbrochen zu, wenn ξ von Null an wächst. Folglich ist

für $0 \leqq \xi < \frac{\alpha}{2}$: $f(\xi) < f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, aber für $\xi = \frac{\alpha}{2}$: $f(\xi) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, ferner

" " $e^{-\frac{\xi^2}{\alpha}} \leqq 1$, " " $e^{-\frac{\xi^2}{\alpha}} < 1$,

also ist

$$\text{für } 0 \leqq \xi \leqq \frac{\alpha}{2}: \; e^{-\frac{\xi^2}{\alpha}} f(\xi) = \omega(\xi) < f\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Nehmen wir daher $\beta = f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, so folgt, für jedes reelle ξ, $\omega(\xi) < f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ und:

$$f(\xi) < f\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{\xi^2}{\alpha}},$$

was oben benutzt wurde. —

Es erübrigt nur noch, ein Wort über die Bedeutung der Zahl α hinzuzufügen. Sie ergibt sich aus der Lehre von den Maxima und Minima. Ist $\varDelta(t)$ die Determinante $\varDelta(t) = \mathrm{Det}\,(\varphi(\!(x)\!) - t\Sigma x^2)$, so hat die Gleichung $\varDelta(t) = 0$ nach bekannten Sätzen nur von Null verschiedene positive Wurzeln, und α ist die kleinste derselben. Die Ungleichheit für φ und mit ihr die für Θ und Mod ϑ gefundene wird nur verstärkt, wenn man diesen genauen Wert von α durch einen kleinern ersetzt, wofern auch dieser von Null verschieden und positiv ist. Solche Zahlen ergeben sich leicht, wenn man $\frac{\partial}{\partial t} \log\left(\frac{1}{\varDelta(t)}\right) = \frac{1}{E(t)}$ aus der Faktorenzerfällung von $\varDelta(t)$ berechnet: man erkennt dann sofort, dass (auch wenn α mehrfache Wurzel ist) für $t < \alpha$ 1) $\frac{1}{\alpha - t} < \frac{1}{E(t)}$ also 2) $E(t) > 0$ und 3) $t + E(t) < \alpha$, d. h. 4) $t < t + E(t) < \alpha$ ist. Geht man von dem, sicher unter α liegenden Werte $t = 0$ aus, so bildet sich eine Zahlenreihe $\alpha_1 = E(0)$, $\alpha_2 = \alpha_1 + E(\alpha_1)$, $\alpha_3 = \alpha_2 + E(\alpha_2), \ldots$, und es folgt $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha$, womit Zahlen nachgewiesen sind, die an die Stelle von α treten können. —

XXXIII.

Ueber die Vollwerthigkeit und die Stetigkeit analytischer Ausdrücke.

(Mathematische Annalen, Bd. 53, 1900, S. 465—492.)

1.

Sei f ein analytischer Ausdruck mit n Variabeln

$$(\!(x)\!) \quad x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Wir setzen ein für alle mal fest,

A. Dass $x_1 x_2 \ldots x_n$ nur reelle Zahlen im gewöhnlichen Sinne (ganze, positive oder negative, rationale, irrationale) bedeuten sollen, mit Ausschluss complexer Werthe und namentlich anderer Begriffe, welche, der Zählkunst fremd, in übertragenem Sinne Zahlen genannt werden, um damit auszudrücken, dass sie ihre massgebenden Eigenschaften mit den Zahlen gemein haben.

B. Ebenso lassen wir das Functionszeichen

$$f \quad \text{oder} \quad f(x_1 x_2 \ldots x_n) \quad \text{oder} \quad f(\!(x)\!)$$

nur soweit zu, als es ebenfalls eine Werthbestimmung leistet.

Diese beiden Einschränkungen sind nicht ganz unabhängig voneinander. Um zu ermitteln, wie weit sie miteinander bestehen können, muss für jeden analytischen Ausdruck f die Frage beantwortet werden:

C. Unter welchen Bedingungen der Ausdruck f eine in diesem Sinne zulässige Bedeutung hat, d. h. unter welchen Bedingungen für ein ohne Unbestimmtheit zu gebendes Argumentensystem

$$(\!(x^0)\!) \quad \text{oder} \quad x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0$$

auch der Ausdruck f einen von jeder Unbestimmtheit freien Zahlenwerth ergiebt.

2.

Zur Beantwortung dieser Frage muss die Rechnung, welche den Werth von f liefern soll, falls er existirt, auf ihren Erfolg geprüft werden.

Diese Rechnung ist als eine *rein numerische* zu denken; ihr Gang ist bestimmt durch den Ausdruck von f mit sinngemässer Berücksichtigung solcher Umstände, welche erst bei der Umsetzung der in f vorgelegten *Buchstabenrechnung* in die hier zu prüfende *numerische Rechnung* hervortreten.

Das betrifft den arithmetischen Charakter der Argumente $((x^0))$, welcher auf die Einrichtung der numerischen Rechnung den grössten Einfluss hat, während die Buchstabenrechnung auf ihn keine Rücksicht nimmt, und mit allen Zahlen wie mit vollendeten operirt. Es scheiden sich dabei zwei Fälle voneinander.

Den ersten Fall bilden solche Argumente, mit deren exacten Werthen die *im Audruck f* geforderten Operationen ohne Weiteres ausgeführt werden können; ich werde sie *numerisch verwendbare* nennen, und vorübergehend durch $((x'))$ bezeichnen.

Den zweiten Fall bilden diejenigen Argumente, welche *in die numerische Rechnung* nur durch numerisch verwendbare Annäherungswerthe von stufenweise und unbegrenzt steigender Genauigkeit eingeführt werden können, sie mögen Argumente zweiter Art heissen und vorübergehend durch $((x''))$ bezeichnet werden.

Aus jedem dieser beiden Hauptfälle entspringen für die Auswerthung von f zwei andere, je nachdem f ein sogenannter endlicher oder ein unendlicher Ausdruck ist, was im Ganzen vier Classen von Algorithmen ergiebt.

Dass die Einführung der Argumentwerthe $((x''))$, so wie der zweite Hauptfall sie verlangt, im Buchstabenausdrucke f nicht vorgesehen ist, kann kein Grund sein, die Prüfung der beiden, diesem Hauptfalle entsprechenden numerischen Algorithmen in irgend einer Form abzulehnen.

3.

Wir gehen weiter. Abgesehen von den beiden Fällen, die beim Ausdrucke f zu unterscheiden sind, können wir die beiden Hauptfälle auch so ausdrücken, dass im ersten die Argumente $((x'))$ direct einzusetzen, im zweiten die Argumente $((x''))$ durch Annäherungen einzuführen sind. Man erkennt jetzt, dass hier eine unvollständige Abzählung vorliegt; denn während das sogenannte Einsetzen der Argumente sich auf die Classe $((x'))$ beschränkt, ist das Annäherungsverfahren nicht bloss bei der Classe $((x''))$, sondern bei beiden Classen anwendbar. Soll die zur Beantwortung von C. geforderte Prüfung alle Algorithmen umfassen, welche zur Auswerthung von f dienen können, so muss ein dritter Hauptfall hinzugenommen werden, nämlich die Anwendung des Annäherungsverfahrens auch bei den Argumenten erster Classe $((x'))$.

Beide Fälle vereinigen sich zu einem einzigen in der Weise, dass der zweite Hauptfall nicht auf die Argumente $((x''))$ beschränkt bleibt, sondern auf alle Argumente $((x))$ ohne Unterschied ausgedehnt wird.

So erkennen wir, dass zur vollständigen Beantwortung der Frage C.

1) der Erfolg des Annäherungsverfahrens für alle Argumente $((x))$ ohne Ausnahme zu prüfen ist, aber
2) für die Classe $((x'))$ der numerisch verwendbaren Argumente noch ein zweites Auswerthungsverfahren besteht und auf seinen Erfolg zu prüfen ist, nämlich das sogenannte Einsetzen der Argumente.

4.

Die Algorithmen, welche für die numerische Auswerthung von f zur Verfügung stehen, und aus deren Prüfung die Beantwortung der Frage C. hervorgehen muss, zerfallen demnach in folgende vier Classen:

1. Das vorgelegte Argumentensystem $((x^0))$ ist ein numerisch verwendbares, und direct einzuführen; f ist
   a) ein endlicher,
   b) ein unendlicher Ausdruck.
2. Das Argumentensystem $((x^0))$ ist von beliebiger Art, und soll durch numerisch verwendbare Annäherungen von stufenweise unbegrenzt steigender Genauigkeit eingeführt werden; f ist
   a) ein endlicher,
   b) ein unendlicher Ausdruck.

5.

Ich werde nun vor allen Dingen versuchen, diese vier Algorithmen und namentlich die Art, wie sie fortschreiten, durch Rechnungsschemata vorstellig zu machen. Dazu gehören folgende Bezeichnungen:

1) *Endliche und unendliche Ausdrücke.* Der Ausdruck f heisst ein endlicher oder unendlicher, je nachdem die Anzahl der von ihm geforderten Operationen mit den Argumenten $((x))$ eine endliche ist oder nie abbricht. Was unter einer solchen Operation zu verstehen ist, wird durch den Ausdruck f an die Hand gegeben, kann aber unter Umständen auch vom Ermessen des Rechners abhängen. In diese Frage mischt sich die zweite nach der Reihenfolge der Operationen; auch sie kann vorgeschrieben oder der Wahl des Rechners überlassen sein. Irgend eine Entscheidung über diese Doppelfrage muss vor Beginn der Rechnung getroffen sein.

Dies so verstanden bezeichnen wir allgemein durch

$$f_m((x))$$

einen endlichen Ausdruck mit den Argumenten $(\!(x)\!)$, welcher die Ausführung der ersten m Operationen vorschreibt. Dies giebt, je nachdem die Rechnung mit der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots m^{\text{ten}} \ldots$ Operation abgebrochen wird, die Folge endlicher Ausdrücke

$$(\!(f)\!) \quad f_1 f_2 \cdots f_m \cdots$$

und f ist ein endlicher oder ein unendlicher Ausdruck, jenachdem diese Folge abbricht oder sich ohne Ende fortsetzt.

2) *Bezeichnungen für stufenweise Annäherungen von unbegrenzt zunehmender Genauigkeit.* Die unbegrenzte Annäherung an eine reelle Zahl x kann erreicht werden durch wachsende Zahlen, oder durch abnehmende, oder endlich durch Abwechslung zwischen Zahlen der einen und der andern Art.

So kann man z. B. für $x = 2$ als wachsende Annäherungen benutzen 1,9; 1,99; 1,999; ... und als abnehmende 2,1; 2,01; 2,001; ...

Für das Argument x_μ^0 sei

$$x_\mu^{(1)}\; x_\mu^{(2)} \ldots x_\mu^{(p)}\; x_\mu^{(p+1)} \ldots$$

irgend eine derartige Folge von immer genauern, aber zugleich numerisch verwendbaren Annäherungswerthen, und diese Bezeichnung gelte für $\mu = 1, 2, \ldots n$. Dann ist

$$(\!(X)\!) = x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\mu)}, x_3^{(\nu)}, \ldots x_n^{(\varrho)}$$

der allgemeine Ausdruck für ein numerisch verwendbares Annäherungssystem an $(\!(x^0)\!)$, und seine Genauigkeit steigt unbegrenzt, wenn man jeden der Indices $\lambda, \mu, \nu, \ldots \varrho$ für sich nach irgend einem Gesetze unbegrenzt wachsen lässt.

Eine unendliche Folge numerisch verwendbarer und sich immer genauer an $(\!(x^0)\!)$ anschliessender Argumentensysteme werde durch

$$\|X\| \quad (\!(X')\!)\,(\!(X'')\!) \ldots (\!(X)\!)\,(\!(X_1)\!)\,(\!(X_2)\!) \ldots$$

bezeichnet, was für die erste Uebersicht ausreicht. Dass es solcher Folgen soviele giebt als man will, kommt erst später in Betracht.

6.

Bei diesen Bezeichnungen ergiebt sich folgende Uebersicht über den Verlauf der vier Grundalgorithmen.

I. Das Argumentensystem $(\!(x^0)\!)$ ist ein numerisch verwendbares, und in den Ausdruck f direct einzuführen.

a. Ist f ein endlicher Ausdruck, so ist

$$f(\!(x^0)\!)$$

auszurechnen.

b. Ist f ein unendlicher Ausdruck, so sind Anfang und Fortsetzung der Rechnung durch die Folge

$$f_1(\!(x^0)\!),\; f_2(\!(x^0)\!), \ldots f_m(\!(x^0)\!) \ldots$$

ausgedrückt, aber diese bricht nicht ab.

II. Das Argumentensystem $(\!(x^0)\!)$ ist ein beliebiges, und soll durch die unendliche Folge von Annäherungswerthen

$$\|X\| \quad (\!(X')\!)\,(\!(X'')\!) \ldots (\!(X)\!)\,(\!(X_1)\!)\,(\!(X_2)\!) \ldots$$

eingeführt werden.

a. Ist f ein endlicher Ausdruck, so ist die Rechnung nach folgendem Schema fortzusetzen

$$f(\!(X')\!),\; f(\!(X'')\!), \ldots f(\!(X)\!),\; f(\!(X_1)\!),\; f(\!(X_2)\!), \ldots$$

was nicht abbricht.

b. Ist f ein unendlicher Ausdruck, so ist die Fortsetzung der Rechnung eine zweifach unendliche:

$$\begin{array}{llll}
f_1(\!(X')\!) & f_2(\!(X')\!) & \ldots f_m(\!(X')\!) & \ldots \\
f_1(\!(X'')\!) & f_2(\!(X'')\!) & \ldots f_m(\!(X'')\!) & \ldots \\
\text{—} & \text{—} & \quad\text{—} & \\
f_1(\!(X)\!) & f_2(\!(X)\!) & \ldots f_m(\!(X)\!) & \ldots \\
f_1(\!(X_1)\!) & f_2(\!(X_1)\!) & \ldots f_m(\!(X_1)\!) & \ldots \\
\text{—} & \text{—} & \quad\text{—} &
\end{array}$$

In diesem letzten Falle bildet jede Zeile einen besondern Fall von I. b, jede Spalte einen besondern Fall von II. a, so dass diese beiden unendlichen Rechnungen sich zu einer neuen, von jenen durchaus verschiedenen verbinden.

7.

Für die Beantwortung der Frage C. scheidet der Fall I. a. aus; die Möglichkeit, in diesem Falle den Ausdruck $f(\!(x^0)\!)$ so, wie er sich darbietet, numerisch exact auszurechnen, ist Postulat unserer Untersuchung, und dasselbe überträgt sich auf jedes einzelne Glied der unendlichen Folgen von Ausdrücken, auf welche die Untersuchung in den drei folgenden Fällen zu richten ist.

8.

Diese drei Fälle aber fordern unendliche Rechnungen, jeder eine andere. Das sind also Rechnungen, die, so wie sie verlangt sind, wohl angefangen, aber nie zu Ende gebracht werden können, und deren Erfolg von ihrer *Convergenz* abhängt.

Die zu I. b. gehörige Convergenzfrage ist die bekannte und, meines Wissens, bisher allein zugelassene: sie betrifft *die Convergenz eines unendlichen Ausdruckes f bei festen Werthen seiner Argumente* $(\!(x)\!)$. Als geeignetes Beispiel verweise ich auf Dirichlet's Theorie der Fourier'schen Entwicklungen.

Der Nachweis der Convergenz von f in diesem Sinne reicht nicht aus zur Entscheidung derjenigen Fragen, welche an Stelle fester Argumente $(\!(x)\!)$ die unbegrenzte Annäherung an dieselben voraussetzen.

Die beiden hierauf bezüglichen Convergenzfragen zu II. a. und II. b. sind von tieferer Anlage; ihre Untersuchung erweist sich als der gerade Weg zur Einsicht in eine massgebende allgemeine Eigenschaft eines analytischen Ausdruckes, und zu Kriterien für den Ort und die Beschaffenheit seiner Singularitäten.

Dass die Convergenz eines unendlichen Ausdruckes f bei festen Argumenten $(\!(x)\!)$ nicht ausreicht, um zu beweisen, dass diesem Ausdruck für *jedes* Argumentensystem im Convergenzgebiete ein völlig bestimmter Werth zukommt, ist erst in der neuern Zeit erkannt worden. Dieser wichtige Fortschritt in den Grundlagen der Analysis hat sich an die Erscheinungen geknüpft, welche eine Fourier'sche Reihe $f(x)$ an einer Sprungstelle x^0 der in diese Reihe entwickelten Function $\varphi(x)$ darbietet, wenn man versucht, die von Dirichlet für das Argument x^0 selbst geleistete Summation der Reihe $f(x)$ (obiger Fall I. b) durch einseitige unbegrenzte Annäherung an x^0 zu bewirken. Man hat dann einen besondern Fall von II. b., und zwar einen solchen, *wo dieser Algorithmus divergirt, während der Algorithmus* I. b. *sich* (unter den zu ihm gehörigen Voraussetzungen) *als convergent erweist.*

Die scharfsinnigen Mathematiker, deren Aufmerksamkeit wir diese folgenreichen Aufklärungen verdanken, sind von diesen aus zu andern Fragen übergegangen, welche hier nicht zu erörtern sind.

9.

Eine unendliche Rechnung ist convergent, wenn sie zu einem geeigneten, aber ausführbaren Anfange A durch weitere Fortsetzung nur noch Schwankungen S von beliebig, aber ohne Unbestimmtheit vorzuschreibender Kleinheit: Mod. $S < \varepsilon$, liefert.

Ist eine unendliche Rechnung convergent, so ist demnach ihr Ergebniss ein völlig bestimmtes, dem man durch eine ausführbare Rechnung beliebig nahe kommen kann.

Unendliche Rechnungen, welche nicht convergiren, ohne Unterschied in eine einzige Klasse (der divergenten Rechnungen) zu zählen, kann misslich werden. (Man vergl. die interessante Abhandlung von P. Dubois-Reymond über die trigonometrischen Reihen in den Abhandlungen der Münchener Ak. II. Cl., XII. Bd., I. Abth.) Im Uebrigen kann man von einer solchen Rechnung aussagen, dass, wie weit sie auch fortgesetzt werden mag, immer noch Schwankungen übrig bleiben, welche verhindern, dass die Rechnung „zu stehenden Resultaten" führt. Das Ergebniss der ins Unbestimmte fortgesetzten Rechnung ist also selber unbestimmt, wozu auch das Unendlichwerden gehört.

10.

Der Algorithmus I. b. setzt voraus, dass $f(\!(x)\!)$ ein unendlicher Ausdruck ist, welcher für ein System $x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0$ numerisch verwendbarer Argumente ausgewerthet werden soll, und zwar soll dies durch directes Einsetzen der Argumente geschehen.

Diese Rechnung kommt darauf hinaus, dass die endlichen Ausdrücke

$$\text{(I. b.)} \qquad f_1(\!(x^0)\!),\ f_2(\!(x^0)\!),\ \dots f_m(\!(x^0)\!),\ \dots$$

einer nach dem andern ausgerechnet werden, was man anfangen, aber nicht zu Ende führen kann.

Als ausführbar hat $f_m(\!(x^0)\!)$ zu gelten, so lange m ohne Unbestimmtheit gegeben ist. Zu diesem ausführbaren Anfange der Rechnung liefert die weitere Fortsetzung Schwankungen, deren allgemeiner Ausdruck

$$S = f_p(\!(x^0)\!) - f_m(\!(x^0)\!) \quad (\text{für } p > m)$$

ist.

Ich will nun ein für allemal festsetzen, dass im Folgenden unter

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \dots$$

nur Zahlen verstanden werden sollen, welche unter allen Umständen *von Null verschieden, positiv und ohne Unbestimmtheit zu geben sind.*

Die Convergenz von $f(\!(x^0)\!)$ fordert, dass, wie klein auch ε sein mag, für ein geeignetes m und jedes $p > m$ der Mod. $S < \varepsilon$ wird, und dann kann man ε gewissermassen als ein Mass für die Genauigkeit von $f_m(\!(x^0)\!)$ benutzen.

Soll die Rechnung I. b. convergiren, so ist dafür erforderlich und hinreichend, dass sich für jedes noch so kleine ε aus den Ungleichheiten

$$(\varepsilon) \qquad \text{Mod.}\, |\, f_p(\!(x^0)\!) - f_m(\!(x^0)\!)\, | < \varepsilon, \quad m < p$$

für m wenigstens ein von jeder Unbestimmtheit freier Werth ergiebt, und dann ist

$$f_m(\!(x^0)\!)$$

ein ausführbarer numerischer Ausdruck, welcher den verlangten

Werth von f bis auf eine Correction vom Genauigkeitsmasse ε ergiebt.

Unter diesen Bedingungen hat also der, mit den Argumenten $(\!(x^0)\!)$ formirte Ausdruck f einen völlig bestimmten Werth.

Ist C das Gesammtgebiet, in welchem diese Bedingungen, wenn auch nicht überall mit demselben Werthe von m, erfüllt sind, so heisst C *das Convergenzgebiet von f*. Innerhalb dieses Gebietes C ist die Convergenz von f durch die Ungleichheiten (ε) nur dargethan für die numerisch verwendbaren Argumente $(\!(x^0)\!)$ innerhalb C.

11.

Dies vorausgeschickt, stellen wir aus Nr. 6 nochmals die beiden Hauptfälle einander gegenüber, um unsere Aufgabe für den noch rückständigen Hauptfall vollständig und genau aufstellen zu können.

Das erste Hauptverfahren kommt bei allen Argumenten $(\!(x^0)\!)$ ohne Ausnahme zur Anwendung: es besteht darin, dass die Argumente $(\!(x^0)\!)$ zur Auswerthung von f nicht selber in diesen Ausdruck eingeführt werden, sondern statt ihrer eine unendliche Folge numerisch verwendbarer Annäherungswerthe von unbegrenzt steigender Genauigkeit benutzt werden soll.

Solcher Folgen giebt es unendlich viele. Wir stellen die

Aufgabe I, *die Bedingungen zu ermitteln, damit der so begründete Algorithmus für jede Folge von Annäherungswerthen convergirt, und jede Folge zum nämlichen Grenzwerth für f führt. Diesen werden wir durch G bezeichnen.*

Das zweite Hauptverfahren findet nur statt, wenn die Argumente $(\!(x^0)\!)$ numerisch verwendbar sind, und besteht darin, dass diese Argumente zur Auswerthung von f selber in diesen Ausdruck eingesetzt werden. Was hierüber im Allgemeinen zu sagen ist, ist im Vorangehenden erledigt.

Auf die numerisch verwendbaren Argumente sind also beide Hauptverfahren zur Auswerthung von f anwendbar, es folgt aber keineswegs, dass sie auch beide denselben Werth für f ergeben.

Mit Rücksicht hierauf werden wir unbedingt daran festhalten:

Zusatz I. 1) *dem Ausdrucke f für bestimmte Argumente $(\!(x^0)\!)$ nur dann einen Werth zuzuschreiben, wenn das erste Hauptverfahren einen solchen ergiebt, und*

2) *diesen als den Werth von f für jene Argumente zu erklären,* und dies namentlich auch in solchen Fällen, wo auch das zweite Hauptverfahren statt hat, aber für f einen andern Werth ergiebt wie das erste.

Wie das zusammenhängt (hebbare Unstetigkeiten), und daß die vorstehende Festsetzung dem, was in der Analysis üblich ist, genau entspricht, wird sich aus den Bedingungen ergeben, unter denen das erste Hauptverfahren den in vorstehender Aufgabe I. geforderten Erfolg hat.

12.

Auch beim ersten Hauptverfahren scheiden sich die beiden Fälle, je nachdem

a. f ein endlicher oder

b. f ein unendlicher Ausdruck ist.

Wir erledigen zunächst, was beiden Fällen gemeinsam ist, und knüpfen an die Bezeichnungen und Voraussetzungen der Nr. 6 an.

In der Argumentenfolge $\|X\|$ wird $(\!(X)\!)$ so gewählt, dass $f(\!(X)\!)$ im Falle a., $f_m(\!(X)\!)$ im Falle b. einen ausführbaren Anfang der Rechnung vorstellt. Zu letzterem gehört, dass m einen endlichen, von jeder Unbestimmtheit freien Werth hat; auf $(\!(X)\!)$ kommen wir später zurück.

Schreitet die Rechnung nach dieser linearen Argumentenfolge $\|X\|$ fort, so erhalten wir als Ausdruck für sämtliche Schwankungen, welche zu diesem Anfangsergebniss kommen können,

im Falle a.: $S = f(\!(X_\mu)\!) - f(\!(X)\!)$ für $\mu \geqq 1$,

" " b.: $S = f_p(\!(X_\mu)\!) - f_m(\!(X)\!)$ für $\mu \geqq 0$, $p \geqq m$.

Dabei darf nicht aus dem Auge gelassen werden, dass die Werthe von f, f_p, f_m *durch das zweite Hauptverfahren* zu ermitteln sind, so wie dass zwar bei wachsendem μ sich $\lim (\!(X_\mu)\!) = (\!(x^0)\!)$ ergibt, *aber das Argument $(\!(x^0)\!)$ selbst in diesen Ungleichheiten nicht vorkommt.*

Wird die Untersuchung auf diese specielle Folge $\|X\|$ von Annäherungswerthen beschränkt, so müssen für ein beliebig kleines ε sämmtliche Mod. $S < \varepsilon$ werden, und zwar durch geeignete Wahl von $(\!(X)\!)$ allein im Falle a, von $(\!(X)\!)$ und m im Falle b.

Aber unsere Aufgabe I fordert dies für jede Folge $\|X\|$ von Annäherungswerthen. Um dies zum Ausdruck zu bringen, verfahren wir wie folgt.

Für jede Variable $x_\mu (\mu = 1, 2, \ldots n)$ wird ein, den Werth x_μ^0 enthaltendes Schwankungsgebiet ΔE_μ eingeführt und

1) x_μ auf die numerisch verwendbaren Werthe innerhalb ΔE_μ beschränkt.

2) ΔE_μ wird durch die Ungleichheit

$$x_\mu^0 - \alpha_\mu < x_\mu < x_\mu^0 + \beta_\mu$$

gegeben, wo α_μ, β_μ positiv, mindestens nicht negativ sind.

3) Die Grösse des Spielraums für x_μ oder seine Maximalschwankung ist dann

$$\alpha_\mu + \beta_\mu = \Delta x_\mu.$$

Wenn es sich um f oder um das vollständige Argumentensystem $(\!(x)\!)$ handelt, werde ich diese n Schwankungsgebiete $\Delta E_1, \Delta E_2 \ldots \Delta E_n$ zusammen als ein einziges auffassen, und dieses ΔE nennen.

Zu den vorstehenden Festsetzungen bezüglich ΔE gehört nun noch eine, welche davon herrührt, dass ΔE ein Argumentensystem $(\!(X)\!)$ enthalten muss, für welches $f(\!(X)\!)$ oder $f_m(\!(X)\!)$ einen ausführbaren Anfang der Rechnung bildet. Da aber die Ausführbarkeit dieser Rechnung mit steigender Annäherung von $(\!(X)\!)$ an $(\!(x^0)\!)$ eine zunehmende Verzögerung erfährt (man denke sich x^0_μ, X_μ durch Decimalbrüche ausgedrückt), so kommt die verlangte Eigenschaft den Argumenten $(\!(X)\!)$ nur zu, so lange sie von den vorgelegten $(\!(x^0)\!)$ nicht bloss unendlich wenig verschieden sind.

Demnach müssen die Schwankungsgebiete $\Delta E_1 \ldots \Delta E_n$ so eingerichtet werden, dass sie ausser beliebig genauen Annäherungen an $x^0_1 x^0_2 \ldots x^0_n$ auch solche enthalten, die von ihnen nicht bloss unendlich wenig verschieden, und ausserdem numerisch verwendbar sind. Um dem zu genügen, muss noch festgesetzt werden

4) dass die Maximalschwankungen $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$, wenn auch noch so klein, aber ohne jede Unbestimmtheit angenommen werden müssen.

Ist diese Bedingung für die Abgrenzungen von ΔE erfüllt, so folgt, dass es wirklich in ΔE numerisch verwendbare Argumente $(\!(X)\!)$ von solcher Beschaffenheit giebt, dass $f(\!(X)\!)$ im Falle a., $f_m(\!(X)\!)$ im Falle b. einen ausführbaren Anfang der Rechnung bildet.

Für unsere Aufgabe I. bedürfen wir zu diesen Anfangsergebnissen der zugehörigen Schwankungen bei beliebiger Fortsetzung der Rechnung. In obigen Ausdrücken für S sind also für $(\!(X_\mu)\!)$, d. i. für $(\!(X_1)\!)$, $(\!(X_2)\!) \ldots$ *alle in ΔE enthaltenen Argumentensysteme, mit einziger Ausnahme von $(\!(x^0)\!)$ selbst, einzuführen, soweit sie zu den numerisch verwendbaren gehören.* Wir bezeichnen sie durch

$$(\!(x')\!),\ (\!(x'')\!), \ldots$$

und erhalten, als allgemeinen Ausdruck für alle Schwankungen, welche

1) im Falle a. zum Anfangsergebniss $f(\!(X)\!)$ kommen können,

$$S' = f(\!(x')\!) - f(\!(X)\!),$$

oder auch

$$S'' = f(\!(x'')\!) - f(\!(X)\!),$$

was

$$S = f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!) = S' - S''$$

giebt.

2) Im Falle b. zum Anfangsergebniss $f_m(\!(X)\!)$ die Schwankungen:

$$S' = f_p(\!(x')\!) - f_m(\!(X)\!) \quad \text{für} \quad p \geqq m,$$

oder

$$S'' = f_q(\!(x'')\!) - f_m(\!(X)\!) \quad \text{für} \quad q \geqq m,$$

was

$$S = f_p(\!(x')\!) - f_q(\!(x'')\!) = S' - S'' \quad \text{für} \quad p \geqq m,\ q \geqq m$$

giebt.

In beiden Fällen soll, mit den nöthigen Zusätzen, Mod. $S' < \varepsilon$ oder, was dasselbe ist, Mod. $S'' < \varepsilon$ werden. Es ist also unerlässlich, dass Mod. $S < 2\varepsilon$ wird. Aber das reicht auch aus. Denn wenn Mod. $S < 2\varepsilon$ ist, so ist für den Mod. S ein höchster Werth sichergestellt, da S nicht unendlich werden kann, und dieser höchste Werth des Mod. S kann mit ε nach Belieben verkleinert werden. Das überträgt sich auf seine übrigen Werthe, zu denen Mod. S' und Mod. S'' gehören. Ersetzen wir 2ε durch ε', so folgt:

Für die Aufgabe I ist erforderlich und ausreichend, dass für alle in ΔE enthaltenen, von $(\!(x^0)\!)$ verschiedenen und numerisch verwendbaren Argumente $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ der

$$\text{Mod. } S < \varepsilon'$$

wird, wo im Falle a.:

$$S = f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!),$$

im Falle b.:

$$S = f_p(\!(x')\!) - f_q(\!(x'')\!) \quad \text{und} \quad p \geqq m,\ q \geqq m$$

ist; und zwar muss sich das für ein beliebig klein gegebenes ε' erreichen lassen, ohne dass eine der Schwankungen $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$ unendlich klein wird, wozu im Falle b. noch kommt, dass die Zahl m eine endliche sein muss.

13.

Sei f ein endlicher Ausdruck. (Fall a.)

A. Für die Aufgabe I ist erforderlich und hinreichend, dass, *nach Ausscheidung des Punktes $(\!(x^0)\!)$ selbst,* die Maximalschwankung von f in ΔE:

$$\text{(a)} \qquad \text{Mod. } |f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!)| < \varepsilon'$$

wird, und zwar für ein beliebig klein gegebenes ε', und ohne dass eine der Maximalschwankungen $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$ unter jede Grenze sinkt. Dabei sind $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ beschränkt auf die numerisch verwendbaren Argumente innerhalb ΔE (mit Ausschluss von $(\!(x^0)\!)$), und bezüglich der Werthe von f ist vorausgesetzt, dass sie nach dem zweiten Hauptverfahren berechnet sind.

Sei

$$G(\!(x^0)\!)$$

der Werth, welchen alsdann das erste Hauptverfahren für f zum Punkte $(\!(x^0)\!)$ ergiebt.

In dem besondern Falle, wo auch $(\!(x^0)\!)$ zu den numerisch verwendbaren Argumenten gehört, liefert das zweite Hauptverfahren ebenfalls einen Werth für f, welcher durch

$$f(\!(x^0)\!)$$

zu bezeichnen ist. In den Ungleichheiten (a) kommt er nicht vor.

Um auch diesen Fall zu erledigen, nehme ich an Stelle dieses ausgeschlossenen Punktes $(\!(x^0)\!)$ einen andern, etwa $(\!(x')\!)$. Dann dürfen in (a) für $(\!(x'')\!)$ alle Annäherungsfolgen genommen werden, welche in $(\!(x')\!)$ auslaufen; es folgt, dass für $(\!(x')\!)$ an Stelle von $(\!(x^0)\!)$ ebenfalls die in der Aufgabe I geforderte Convergenz stattfindet. Sei $G(\!(x')\!)$ der Werth, den das erste Hauptverfahren ergiebt, mithin $G(\!(x')\!) = \lim f(\!(x'')\!)$, während $f(\!(x')\!)$ durch das zweite Verfahren gewonnen wird. Wir erhalten

$$\text{(a}'\text{)} \qquad \text{Mod.}\, |f(\!(x')\!) - G(\!(x')\!)| < \varepsilon',$$

also $f(\!(x')\!) - G(\!(x')\!) = 0$, weil andernfalls sein Modul nicht mit ε' nach Belieben verkleinert werden könnte. Dass dies nicht folgt, wenn man an Stelle der, die Ungleichheit (a) befriedigenden Zahl $f(\!(x')\!)$ eine andere nimmt, springt in die Augen. Auf $(\!(x^0)\!)$ übertragen, heisst dies:

B. In dem besondern Falle, wo auch $(\!(x^0)\!)$ zu den numerisch verwendbaren Argumenten gehört, liefern beide Hauptverfahren zum Punkte $(\!(x^0)\!)$ stets und nur dann denselben Werth

$$G(\!(x^0)\!) = f(\!(x^0)\!),$$

wenn die Ungleichheit (a) auch noch nach Hinzuziehung des Punktes $(\!(x^0)\!)$ erfüllt bleibt.

Nun sei $(\!(y')\!)$ ein beliebiges Argument innerhalb ΔE. Ist es ein numerisch verwendbares, so ist $f(\!(y')\!) = G(\!(y')\!)$, auf alle Fälle aber ist $\lim f(\!(x')\!) = G(\!(y')\!)$, wenn $(\!(x')\!)$ eine Annäherungsfolge durchlaufend, gegen $(\!(y')\!)$ convergirt. Dann also kann durch Annäherung von $(\!(x')\!)$ an $(\!(y')\!)$ erreicht werden, dass $f(\!(x')\!) - G(\!(y')\!)$ numerisch unter alle Grenzen sinkt. Dabei bleibt die Ungleichheit (a) bestehen, da $f(\!(x')\!)$ nur solche Werthe durchläuft, wie sie in (a) vorausgesetzt werden, und der Uebergang zu

$G(\!(y')\!)$ am Maximalmodul nichts ändert. Gehören ebenso $(\!(y'')\!)$ und $G(\!(y'')\!)$ als Grenzen zu $(\!(x'')\!)$ und $f(\!(x'')\!)$, so geht (a) über in

$$\text{(a}''\text{)} \qquad \text{Mod}\, |G(\!(y')\!) - G(\!(y'')\!)| < \varepsilon',$$

und dies gilt für alle Argumente $(\!(y')\!)$, $(\!(y'')\!)$ innerhalb ΔE.

C. Unter den Voraussetzungen des Satzes A erklären wir $G(\!(x^0)\!)$ als den Werth von f im Punkte $(\!(x^0)\!)$, gleichviel ob für diesen Punkt auch das zweite Hauptverfahren statthat, und namentlich auch, wenn dieses für f einen von $G(\!(x^0)\!)$ verschiedenen Werth ergeben sollte. In Folge dessen dehnt sich die Ungleichheit

$$\text{(a)} \qquad \text{Mod.}\, |f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!)| < \varepsilon'$$

von den numerisch verwendbaren Argumenten aus auf alle Argumente $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ innerhalb ΔE,

wie aus (a″) folgt, wenn man $(\!(y')\!)$, $(\!(y'')\!)$ durch $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ ersetzt und nun benutzt, dass G der Werth von f ist.

D. Das überträgt sich auf alle Theile ΔE eines Grössengebietes E, wenn die Bedingungen des Satzes A in jedem Theile ΔE von E erfüllt sind, und der Werth von f für jeden Punkt $(\!(x^0)\!)$ von E nach vorstehendem Princip, also stets durch das erste Hauptverfahren bestimmt wird (Nr. 11, Zus. II). Sind aber diese Bedingungen verletzt in irgend einem Punkte (oder einer Linie u. s. w.) von E, so ist das ein *singulärer* Punkt (oder eine singuläre Linie u. s. w.) von f.

E. Wenn ein endlicher Ausdruck f in jedem Punkte $(\!(x^0)\!)$ eines Grössengebietes E einen völlig bestimmten Werth besitzt, und dieser Werth sich aus den Nachbarwerthen von f durch das erste Hauptverfahren ergiebt, so werde ich f als *vollwerthig in E* bezeichnen.

F. Für die Vollwerthigkeit eines endlichen Ausdruckes f in einem Gebiete E ist eine Eigenschaft dieses Ausdruckes erforderlich und hinreichend, welche darin besteht, dass für jeden Theil ΔE von E der grösste Schwankungsmodul von f, also seine Maximalschwankung, unter eine beliebig kleine Grenze ε sinkt, wenn die Maximalschwankungen seiner Argumente unter völlig bestimmte, von Null verschiedene und aus ε zu berechnende Grenzen gebracht werden.

14.

Die Stetigkeit analytischer Ausdrücke. Dass diese Eigenschaft von f mit der *Stetigkeit* von f in Beziehung steht, braucht nicht erst gesagt zu werden.

Sie bedarf aber eines Namens, da sie — zunächst bei den endlichen Ausdrücken — das Kriterium für die Convergenz des Annäherungsalgorithmus IIa im Sinne der Aufgabe I enthält, mithin jedesmal erwähnt werden muss, wo es sich um diese Convergenz oder die auf die Vollwerthigkeit von f bezüglichen Folgerungen aus ihr handelt.

Von der *Continuität* Cauchy's, als einer Beziehung zwischen den *gleichzeitigen* Aenderungen der Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_n$ und des Ausdruckes f ist diese Eigenschaft durchaus verschieden: als Continuität von f wird sie demnach nicht bezeichnet werden dürfen.

Aber sie selbst, nämlich ihr im Vorstehenden nachgewiesenes Kriterium leistet — wenigstens vorläufig für die endlichen Ausdrücke f — genau das, wofür man sich auf die Stetigkeit von f zu berufen gewöhnt hatte, wobei der Irrthum nur darin bestand, dass man glaubte, es reiche aus, als Stetigkeit von f seine Continuität nachzuweisen, während es richtig gewesen wäre *zu untersuchen, was man für den angegebenen Zweck unter dem Worte Stetigkeit verstehen müsse.*

Diese Untersuchung ist im Vorangehenden für die endlichen Ausdrücke f geleistet, und ich bezeichne die bezügliche Eigenschaft (F) von f als seine Stetigkeit, da in sprachlicher Beziehung nichts vorliegt, was zur bisher üblichen, irreleitenden Auslegung dieses Wortes nöthigen könnte.

G. Ich nenne allgemein einen Ausdruck f mit den Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_n$, oder auch eine Function dieser Variabeln stetig in einem $\left|\begin{array}{c}\text{Punkte } (\!(x^0)\!)\\ \text{Gebiete } E\end{array}\right|$, wenn für jedes $\left|\begin{array}{c}(\!(x^0)\!) \text{ einschliessende}\\ \text{in } E \text{ enthaltene}\end{array}\right|$ engere Grössengebiet ΔE 1) f keiner unendlichen Schwankung unterliegt und 2) seine Maximalschwankung unter eine beliebige Grenze ε gebracht werden kann, indem man die Maximalschwankungen der Variabeln in ΔE unter Grenzen bringt, die alle von Null verschieden sind und sich aus ε ohne Unbestimmtheit ergeben.

Diese Definition der Stetigkeit für die einfachern Fälle $n = 1, 2, 3$ habe ich meinen Vorlesungen über Functionentheorie und, seit mehr als 30 Jahren, meinen Vorlesungen über bestimmte Integration zu Grunde gelegt. Ich bin zu derselben ursprünglich veranlasst worden durch eine empfindliche Lücke in der überkommenen Begründung des bestimmten Integrals als Grenzwerth einer Summe, welche von der oben erwähnten ungenügenden Vorstellung vom Wesen der Stetigkeit herrührte.

In seinen *Vorlesungen über die einfachen und vielfachen Integrale* (Seite 28) hat Herr Kronecker eine andere Definition der Stetigkeit gegeben, deren wesentlicher Unterschied von der vorstehenden darauf beruht, dass sie (für $n = 2$) den zu $(\!(x^0)\!)$ gehörigen Werth $f(\!(x^0)\!)$ (an

der angegebenen Stelle $f(x, y)$) voraussetzt, während es sich hier um die Frage nach seiner Existenz handelt. Dass die obige Definition der Stetigkeit diesem grossen Mathematiker nicht unbekannt gewesen ist, er sie aber abgelehnt hat, scheint aus einer andern Stelle des erwähnten Werkes hervorzugehen (Seite 6, Zeile 14—11 v. u.).

Im Uebrigen findet sich obige Definition der Stetigkeit auch schon bei P. Dubois-Reymond, ich erinnere mich aber nicht, daß er angegeben hätte, was ihn zu derselben nöthigte.

H. Ist ein endlicher Ausdruck f mit den Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_n$ stetig in einem Punkte $(\!(x^0)\!)$, so hat er in diesem Punkte einen völlig bestimmten Werth, und kann demselben durch numerisch ausführbare Annäherungsrechnungen nach Belieben genähert werden.

Ist f stetig in allen Punkten oder allen Theilen ΔE eines Grössengebietes E, so gilt dieser Satz von jedem Punkte dieses Gebietes, und f heisst vollwerthig in E.

Enthält E eine Stelle (Punkt, Linie, . . .), wo die Stetigkeit von f aussetzt, so bezeichnet man diese als eine singuläre Stelle von f.

Wir schliessen an die Untersuchung des Falles II. a., in welcher bereits der Kernpunkt der hier vorliegenden allgemeinen Frage vollständig zur Erörterung gekommen ist, zwei Beispiele nebst einer Bemerkung über das Wesen der numerisch verwendbaren Argumente.

15.

Zunächst zwei Beispiele einfachster Art. Ich nehme $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, setze $x + iy = z$ bei geometrischer Repräsentation von x, y, z, und nehme für f die Ausdrücke z^p, $\frac{1}{z-a}$, wo p eine positive ganze Zahl, a eine Constante ist.

Unter ΔE verstehe ich ein Stück der Zahlenebene, welches den Punkt z^0 enthält, und bezeichne durch z', z'' beliebige Werthe von z innerhalb ΔE.

1. Für $f = z^p$ wird der Ausdruck für seine Schwankungen innerhalb ΔE:

$$S = z'^p - z''^p = (z' - z'')(z'^{p-1} + z'^{p-2}z'' + \cdots + z''^{p-1}).$$

Um den Punkt $z = 0$ lege ich ein Kreisgebiet

$$E. \qquad \text{Mod. } z < \varrho,$$

welches ΔE enthält. Dann ist für jede Lage von ΔE innerhalb E

$$\text{Mod. } |z'^{p-1} + z'^{p-2}z'' + \cdots + z''^{p-1}| < p \cdot \varrho^{p-1}.$$

Ist ferner $\Delta\xi$ die grösste Sehne von ΔE, so ist

$$\text{Mod.}\,(z'-z'') \leqq \Delta\xi,$$

und für die Maximalschwankung von f innerhalb ΔE folgt:

$$\text{Mod.}\, S < p\varrho^{p-1}\Delta\xi.$$

Soll diese $< \varepsilon$ werden, so muss

$$\Delta\xi < \frac{\varepsilon}{p\cdot\varrho^{p-1}}$$

genommen werden, und das genügt allen Bedingungen, so lange es nicht unendlich klein, d. h. so lange ϱ nicht unendlich gross wird.

Der Ausdruck z^p ist stetig und vollwerthig, so lange der Mod. z nicht alle ohne Unbestimmtheit angebbaren Grenzen überschreitet.

2. Für $f = \frac{1}{z-a}$ wird

$$S = \frac{1}{z'-a} - \frac{1}{z''-a} = \frac{z''-z'}{z'-a\cdot z''-a}, \qquad \text{Mod.}\, S = \frac{\text{Mod.}\,(z''-z')}{r'r''},$$

wenn r', r'' die Entfernungen von a bis z', z'' sind.

Enthält nun 1) ΔE den Punkt $z = a$, so gehört es zu den Voraussetzungen unserer Untersuchung, dass z', z'' dem Werthe a beliebig nahe kommen können. Bei der Annäherung von z'' an a wächst der Mod. S über alle Grenzen, f ist nicht stetig im Punkte a. Wenn dagegen 2) a ausserhalb ΔE liegt, so können r', r'' nicht unter jede Grenze sinken, und wenn $\Delta\xi$ die vorige Bedeutung hat, so ergibt sich für die Maximalschwankung von f in ΔE

$$\text{Mod.}\, S < \frac{\Delta\xi}{r'r''}$$

bei möglichst kleinen Werthen von r' und r'', woraus die Stetigkeit und Vollwerthigkeit von f ausserhalb a folgt. Als numerisch verwendbar hat im ersten Beispiel jede rationale Zahl $z = R_1 + iR_2$, im zweiten jede Zahl von der Form $z = a + R_1 + iR_2$ zu gelten. Dies zeigt zur Genüge, dass die numerische Verwendbarkeit der Argumente zwar von ihrem arithmetischen Charakter abhängt, aber dieser Charakter sich nach der Beschaffenheit von f richtet.

3. Es ist noch ein Fall zu erwähnen, in welchem scheinbar weder das erste noch das zweite Hauptverfahren anwendbar ist. Dieser Fall kann wirklich vorkommen, nämlich wenn der Ausdruck f ausser den n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ noch Irrationalzahlen $j_{n+1} \ldots j_p$ so enthält, dass es für $x_1 \ldots x_n$ überhaupt gar keine numerisch verwendbaren Werthe gibt.

Die Ausnahme ist nur eine scheinbare, denn die Auswerthung von f für einen Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ ist ohnehin nicht anders möglich, als dass

auch $j_{n+1} \cdots j_p$ durch Annäherungswerthe eingeführt werden. Dies kommt darauf hinaus, dass in f an Stelle von $j_{n+1} \cdots j_p$ zunächst Variable $x_{n+1} \cdots x_p$ eingeführt werden, wodurch $f(x_1 \ldots x_n)$ in $f(x_1 \ldots x_p)$ übergehe, und dann die Auswerthung von f für den Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ $j_{n+1} \cdots j_p$ eintritt, wozu *nur* das erste Hauptverfahren dienen kann, weil $j_{n+1} \cdots j_p$ irrational sind, aber numerisch verwendbare Argumente, nämlich die rationalen Zahlen, zur Verfügung stehen.

Dass man ebenso, von allereinfachsten Beispielen abgesehen, in jedem Falle verfährt, wo f Irrationalzahlen enthält, versteht sich von selbst.

16.

Die unendlichen Ausdrücke f. In Nr. 12 ist alles vorbereitet, was auf diesen Fall Bezug hat. Die Aufgabe I (Nr. 11) fordert

(S) dass für $S = f_p(\!(x')\!) - f_q(\!(x'')\!)$ und $p \geqq m$, $q \geqq m$ der Mod. $S < \varepsilon'$

wird, für alle in ΔE enthaltenen, von $(\!(x^0)\!)$ verschiedenen und numerisch verwendbaren Argumente $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$, und zwar muss sich dies für jedes beliebig klein gegebene ε' erreichen lassen, ohne dass m, die untere Grenze von p und von q, unendlich gross, oder eine der Schwankungen $\Delta x_1 \ldots \Delta x_n$ unendlich klein wird. Alle hier vorkommenden Werthe von f_p, f_q sind nach dem zweiten Hauptverfahren zu berechnen.

Wir beginnen mit zwei besonderen Fällen, und nehmen zuerst $(\!(x'')\!) = (\!(x')\!)$ und für q die gemeinsame untere Grenze von p und von q, nämlich die Zahl m. Das giebt

$$S = f_p(\!(x')\!) - f_m(\!(x')\!) \quad \text{und} \quad \text{Mod.}\, S < \varepsilon'$$

für den grössten Mod. S, mithin für alle Moduln S.

Das ist gefordert für $p \geqq m$ und alle numerisch verwendbaren Argumente $(\!(x')\!)$ innerhalb ΔE, mit Ausnahme von $(\!(x^0)\!)$, nebst dem Zusatze bezüglich m und $\Delta x_1 \ldots \Delta x_n$. Es ist die Bedingung für die Convergenz des unendlichen Ausdruckes $f(\!(x')\!)$ *bei festem Argumente* $(\!(x')\!)$, was dem Falle I.b. entspricht, aber mit einem Zusatze, welcher sich auf die verschiedenen Argumente bezieht, welche für $(\!(x')\!)$ sollen zugelassen werden. Der Zusatz besteht darin, dass Mod. $S < \varepsilon'$ gefordert ist für alle Argumente $(\!(x')\!)$, und zwar zum nämlichen ε' und zur nämlichen unteren Grenze m von p und von q.

In Folge dessen erweist sich für ein und dasselbe m, $f_m(\!(x')\!)$ als ausführbares Anfangsergebniss der Rechnung zu jedem $(\!(x')\!)$ innerhalb ΔE, mit Ausnahme von $(\!(x^0)\!)$, und ein und dasselbe ε' als Mass der Genauigkeit für die hinzutretenden Correctionen (Schwankungen):

(α) Der gegenwärtige besondere Fall sagt also aus, dass innerhalb ΔE der unendliche Ausdruck f nicht nur für jedes feste, von $(\!(x^0)\!)$ verschiedene, numerisch verwendbare Argument $(\!(x')\!)$ convergiren muss, sondern dass er für alle diese Argumente $(\!(x')\!)$ gleichmässig convergiren muss. Und das Criterium für die gleichmässige Convergenz von f bei festen Argumenten $(\!(x')\!)$ innerhalb ΔE besteht darin dass, wenn die Ungleichheit

$$\text{Mod.}\,|f_p(\!(x')\!) - f_m(\!(x')\!)| < \varepsilon'$$

für jedes $p \geqq m$ gefordert wird, man ihr für alle diese Argumente $(\!(x')\!)$ durch das nämliche m genügen kann, und zwar, ohne dass von den Schwankungen $\Delta x_1 \dots \Delta x_n$ irgend eine unendlich klein wird.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so convergiren $f_p(\!(x')\!)$ bei wachsendem p, $f_q(\!(x'')\!)$ bei wachsendem q gegen feste Grenzen, die aus dem zweiten Hauptverfahren entspringenden Werthe $f(\!(x')\!)$, $f(\!(x'')\!)$ von f zu den von $(\!(x^0)\!)$ verschiedenen, numerisch verwendbaren Argumenten $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$. Die Ungleichheit (S) geht dabei über in

$$\text{Mod.}\,|f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!)| < \varepsilon',$$

das ist dieselbe Ungleichheit, und mit denselben Zusätzen, welche der Untersuchung über die endlichen Ausdrücke f zu Grunde liegt (Nr. 13. A.), und demnach auch zu denselben Folgerungen führt. Wir werden sie weiter unten auf anderm Wege wiederfinden.

Ein zweiter besonderer Fall ist der, wo $q = p$ genommen wird, was

$$S = f_p(\!(x')\!) - f_p(\!(x'')\!)$$

und Mod. $S < \varepsilon'$ giebt für $p \geqq m$ und alle numerisch verwendbaren Argumente $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ innerhalb ΔE, mit Ausnahme von $(\!(x^0)\!)$. Das ist ein besonderer Fall zu II. a. und sagt aus, dass f_p bis auf den Punkt $(\!(x^0)\!)$ innerhalb ΔE stetig sein muss, und zwar für $p \geq m$.

(β) Unsere gegenwärtige Aufgabe fordert auch, dass bei der in (α) festgestellten Bedeutung von m die sämmtlichen Ausdrücke

$$f_m f_{m+1} \cdots f_p \cdots$$

innerhalb ΔE mit Ausschluss des Punktes $(\!(x^0)\!)$ stetig sein müssen.

Diese Bedingungen (α) und (β) sind demnach für unsere Aufgabe unerlässlich, sie reichen aber auch aus. In der That ist der allgemeine Ausdruck von S:

$$S = f_p(\!(x')\!) - f_q(\!(x'')\!)$$
$$= [f_p(\!(x')\!) - f_p(\!(x'')\!)] + [f_p(\!(x'')\!) - f_m(\!(x'')\!)] - [f_q(\!(x'')\!) - f_m(\!(x'')\!)],$$

und das giebt, unter Voraussetzung von (α) und (β)

$$\text{Mod.}\, S < 3\varepsilon'.$$

Wenn das nun auch nicht $< \varepsilon'$ ist, wie ursprünglich (in (S)) verlangt wurde, so beweist es doch, dass ein Maximalwerth des Mod. S existirt, und dieser unter den Bedingungen (α) (β) nach Belieben verkleinert werden kann, was der wahre Sinn der Ungleichheit (S) ist.

Aber die Bedingungen (α) und (β) sind nicht unabhängig von einander, sondern wenn (α) erfüllt ist, kann (β), und wenn (β) erfüllt ist, kann (α) durch eine viel einfachere Bedingung ersetzt werden.

Sei die Bedingung (β) *erfüllt.* Wir nehmen für $(\!(X)\!)$ ein von $(\!(x^0)\!)$ verschiedenes, numerisch verwendbares Argument innerhalb ΔE, und zerlegen S wie folgt:

$$S = f_p(\!(x')\!) - f_q(\!(x'')\!)$$
$$= [f_p(\!(x')\!) - f_p(\!(X)\!)] - [f_q(\!(x'')\!) - f_q(\!(X)\!)] + [f_p(\!(X)\!) - f_q(\!(X)\!)]$$

oder

$$S = \sigma + \tau, \text{ für } \sigma = f_p(\!(X)\!) - f_q(\!(X)\!),\ \tau = [f_p(\!(x')\!) - f_p(\!(X)\!)] - [f_q(\!(x'')\!) - f_q(\!(X)\!)].$$

Werden p, q auf die Werthe $\geqq m$ beschränkt, so folgt aus (β), dass Mod. $\tau < 2\varepsilon'$ ist, das giebt Mod. $S < 2\varepsilon' +$ Mod. σ, Mod. $\sigma < 2\varepsilon' +$ Mod. S. Unsere Aufgabe (S) fordert Mod. $S < \varepsilon'$, also Mod. $\sigma < 3\varepsilon'$. Und wenn umgekehrt Mod. $\sigma < 3\varepsilon'$ ist, so wird Mod. $S < 5\varepsilon'$. Das ist nicht die ursprüngliche Ungleichheit Mod. $S < \varepsilon'$, aber sie sagt dasselbe aus, nämlich dass ein höchster Werth des Mod. S existirt, und dieser unter den gegenwärtigen Voraussetzungen nach Belieben verkleinert werden kann, was sich auf seine übrigen Werthe überträgt. Aber die hiernach nothwendige und ausreichende Bedingung Mod. $\sigma < 3\varepsilon'$ fordert nur die Convergenz des unendlichen Ausdruckes f für das feste Argument $(\!(X)\!)$, und dieses mit (β) zusammen bildet hiernach ebenso wie (α) mit (β) zusammen ein System von Bedingungen, welche für die Aufgabe (S) nothwendig sind und ausreichen. Wir heben für's Erste nur folgendes Resultat heraus:

(γ) Wir schliessen den Punkt $(\!(x^0)\!)$ von ΔE aus. Sind dann (β)

$$f_m f_{m+1} \cdots f_p \cdots$$

stetig innerhalb ΔE, und ist f selbst convergent für irgend ein numerisch verwendbares, festes Argument $(\!(X)\!)$ innerhalb ΔE, so ist es innerhalb ΔE bei festen Argumenten gleichmässig convergent,

und allen Bedingungen der Aufgabe (S) ist genügt.

Nun sei umgekehrt die Bedingung (α) *erfüllt.* Wenn der unendliche Ausdruck f *für ein festes Argument* $(\!(x)\!)$ convergirt, so heisst dies, dass 1) in der unendlichen Folge $f_1 f_2 \cdots f_p \cdots$ die spätern Glieder sich, ihrem Werthe nach, immer weniger von dem, *durch die Convergenz nachgewiesenen* Werthe von f zum Argumente $(\!(x)\!)$ unterscheiden, und dass 2) dieser Werth von f dem zweiten Hauptverfahren entspringt, da sein Argument nicht durch Annäherungen einzuführen ist. Man könnte versucht sein, dies dadurch zur Anschauung zu bringen, dass man diese Folge ohne Rücksicht darauf, *dass sie kein Ende hat*, gleichwohl mit f als Schlussglied schreibt: $f_1 f_2 \dots f_p \dots f$.

Aus (α) erhalten wir nun, unter $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ feste numerisch verwendbare Argumente innerhalb ΔE, mit Ausschluss von $(\!(x^0)\!)$ verstanden,

$$\begin{aligned} &\text{Mod.}\, |f_p(\!(x')\!) - f_m(\!(x')\!)| < \varepsilon', \qquad &&\text{Mod.}\, |f_q(\!(x'')\!) - f_m(\!(x'')\!)| < \varepsilon', \\ &\text{Mod.}\, |f(\!(x')\!) - f_m(\!(x')\!)| < \varepsilon', &&\text{Mod.}\, |f(\!(x'')\!) - f_m(\!(x'')\!)| < \varepsilon'. \end{aligned}$$

Sodann ist

$$\begin{aligned} S = f_p(\!(x')\!) - f_q(\!(x'')\!) &= [f_p(\!(x')\!) - f_m(\!(x')\!)] - [f_q(\!(x'')\!) - f_m(\!(x'')\!)] \\ &\quad - [f(\!(x')\!) - f_m(\!(x')\!)] + [f(\!(x'')\!) - f_m(\!(x'')\!)] + \sigma \end{aligned}$$

für

$$\sigma = f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!),$$

und wenn wir das, was rechts zu σ kommt, durch τ bezeichnen, $S = \sigma + \tau$, $\sigma = S - \tau$.

Für $p \gtreqq m$, $q \gtreqq m$ folgt aus dem Vorangehenden Mod. $\tau < 4\varepsilon'$, also Mod. $\sigma < 4\varepsilon' +$ Mod. S, Mod. $S < 4\varepsilon' +$ Mod. σ. Wenn nun, wie verlangt, Mod. $S < \varepsilon'$ ist, so gibt das Mod. $\sigma < 5\varepsilon'$; und wenn umgekehrt dies erreicht ist, so wird Mod. $S < 9\varepsilon'$; es gibt dann einen höchsten Werth des Mod. S, und er so wie alle übrigen können mit Einhaltung aller Bedingungen unserer Aufgabe nach Belieben verkleinert werden, was einzig und allein gefordert ist.

Ist (α) erfüllt, so reicht es für die Aufgabe (S) aus, dass

$$\text{Mod.}\, \sigma = \text{Mod.}\, |f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!)| < 5\varepsilon'$$

wird, d. h. dass auf numerisch verwendbare Argumente mit Ausschluss von $(\!(x^0)\!)$ beschränkt, f innerhalb ΔE stetig ist.

(δ) Der unendliche Ausdruck f werde auf die numerisch verwendbaren Argumente innerhalb ΔE, mit Ausnahme von $(\!(x^0)\!)$ beschränkt. Ist alsdann f innerhalb ΔE bei festen Argumenten gleichmässig convergent, und ausserdem stetig, so sind die Ausdrücke $f_m f_{m+1} \cdots f_p \cdots$ ebenfalls stetig innerhalb ΔE,

und allen Bedingungen der Aufgabe (S) ist genügt.

Dazu kommt noch ein Zusatz. Im Ausdrucke für S nehme man $q = p$, so dass S übergeht in

$$\sigma_p = f_p(\!(x')\!) - f_p(\!(x'')\!).$$

Wird das Zeichen τ zur Abkürzung beibehalten, so folgt

$$\sigma_p = \sigma + \tau, \quad \sigma = \sigma_p - \tau, \quad \text{Mod.}\, \sigma_p < 4\varepsilon' + \text{Mod.}\, \sigma, \quad \text{Mod.}\, \sigma < 4\varepsilon' + \text{Mod.}\, \sigma_p.$$

Die Verkleinerung des einen der beiden Moduln Mod. σ, Mod. σ_p zieht also die Verkleinerung des andern nach sich und ist umgekehrt durch sie bedingt: immerhin unter der Voraussetzung dass die Bedingung (α) erfüllt ist.

(ε) Ist die Bedingung (α) erfüllt, d. h. f innerhalb ΔE bis auf den Punkt $(\!(x^0)\!)$ gleichmässig convergent, so ist für die Stetigkeit von f und sämmtlicher Ausdrücke $f_m f_{m+1} \cdots f_p \cdots$ im gleichen Umfange erforderlich und hinreichend, dass irgend einer von diesen endlichen Ausdrücken f_p dort stetig ist.

Bei massgebenden Ausdrücken f der Analysis, namentlich den Potenzreihen innerhalb ihres Convergenzgebietes für feste Argumente, ist diese letzte Bedingung identisch erfüllt; für solche Ausdrücke folgt dann aus (γ), dass ihre Convergenz die locale gleichmässige Convergenz nach sich zieht. Einen Anhaltspunkt für die Annahme, dass nicht bloss für ausgewählte Ausdrucksformen f, sondern allgemein, aus ihrer *gleichmässigen Convergenz bei festen Argumenten* ihre Stetigkeit folge, habe ich in der hier vorgelegten Darstellung nicht finden können.

Wir haben folgende Resultate:

A. Auch einem unendlichen Ausdrucke f schreiben wir für ein gegebenes Argument $(\!(x^0)\!)$ nur dann einen Werth zu, wenn das erste Hauptverfahren für diesen Punkt convergirt und bei jeder Anordnung zum nämlichen Grenzwerthe führt (Nr. 11, Aufgabe I. und Zusatz II.). Diesen erklären wir als den Werth von f zum Punkte $(\!(x^0)\!)$ und bezeichnen ihn durch

$$G(\!(x^0)\!).$$

B. Damit die Convergenz des ersten Hauptverfahrens in dieser Weise statthabe, ist erforderlich und hinreichend, dass in einem den Punkt $(\!(x^0)\!)$ enthaltenden Schwankungsgebiete ΔE, abgesehen von diesem Punkte selbst, eine der drei Doppelbedingungen erfüllt ist:

entweder (α) und (β)
oder (γ),
oder (δ),

und zwar, ohne dass von den Schwankungen $\Delta x_1 \dots \Delta x_n$ irgend eine unendliche klein wird.

Für die unendlichen Ausdrücke f liegen jetzt, wenn auch aus andern Gründen, im Wesentlichen dieselben Verhältnisse vor, wie oben (Nr. 13, 14) für die endlichen. Die Eigenschaft, in ΔE für jedes numerisch verwendbare Argument $(\!(x')\!)$ (abgesehen von $(\!(x^0)\!)$) seinen völlig bestimmten Werth $f(\!(x')\!)$ zu besitzen, der nach dem zweiten Hauptverfahren zu berechnen ist, besitzen die endlichen Ausdrücke f selbstverständlich, die unendlichen wegen der geforderten Convergenz bei festen Argumenten. Die Eigenschaft der Stetigkeit ist ebenfalls übereinstimmend, nämlich für die gleichen Argumente $(\!(x')\!)$ gefordert. In Folge dessen wiederholen sich alle Schlüsse, die wir bei den endlichen Ausdrücken aus diesen beiden Eigenschaften und der Convergenz des ersten Hauptverfahrens gezogen haben.

C. Soweit die Bedingung (δ) der Convergenz und der Stetigkeit von f für die numerisch verwendbaren Argumente $(\!(x)\!)$ erfüllt ist, liefern beide Hauptverfahren zu diesen Argumenten für f denselben Werth

$$G(\!(x)\!) = f(\!(x)\!)\,.$$

Dies gilt auch für den Punkt $(\!(x^0)\!)$: für die Existenz von $G(\!(x^0)\!)$ ist weder die Convergenz noch die Stetigkeit von f *in* diesem Punkte erforderlich; wohl aber bedarf es der Convergenz von f, wenn das zweite Hauptverfahren anwendbar sein und einen Werth $f(\!(x^0)\!)$ von f ergeben, und dazu der Stetigkeit, wenn er $= G(\!(x^0)\!)$ sein soll.

D. Wo f, auf die numerisch verwendbaren Argumente beschränkt, bei festen Argumenten gleichmässig convergirt und zugleich stetig ist, ist es stetig für alle Argumente ohne Ausnahme und für alle $= G$. Besteht zwar die Convergenz, aber nicht zugleich die Stetigkeit von f auch noch im Punkte $(\!(x^0)\!)$, so wird die Stetigkeit von f auch in diesem Punkte hergestellt, wenn man $f(\!(x^0)\!)$ als seinen Werth verwirft und durch den von ihm verschiedenen Werth $G(\!(x^0)\!)$ ersetzt.

Diese Unstetigkeit von f erweist sich demnach als Beispiel einer hebbaren Unstetigkeit im Sinne Riemann's, und sie wird gehoben, indem man auch für das Argument $(\!(x^0)\!)$ den vom zweiten Hauptverfahren gelieferten Werth von f durch $G(\!(x^0)\!)$ ersetzt, d. h. *die Auswerthung von f ausschliesslich auf das erste Hauptverfahren gründet.*

E. Sind die Bedingungen des Satzes B. nicht erfüllt, so ist das Annäherungsverfahren II. b. nicht convergent im Sinne der Aufgabe I, und bei der Annäherung seiner Argumente an $(\!(x^0)\!)$ convergirt f nicht gegen eine feste Grenze, mindestens nicht stets gegen dieselbe Grenze.

Damit ist nicht ausgeschlossen, dass unter geeigneten Umständen das zweite Hauptverfahren zu diesem Punkte einen völlig bestimmten Werth für f ergibt.

Hierhin gehört das bereits in Nr. 8 erwähnte Beispiel, welches die Fourier'schen Reihen liefern, wenn die in eine solche Reihe f entwickelte Function φ für das Argument x^0 eine Discontinuität besitzt.

F. Sind die Bedingungen des Satzes B. erfüllt in allen Theilen eines Gebietes E, so hat f auf Grund des Uebereinkommens A. in jedem Punkte $(\!(x^0)\!)$ von E einen völlig bestimmten Werth, dem es sich bei jeder unbegrenzten Annäherung seiner Argumente an diesen Punkt ohne Ende nähert; f heisst *vollwerthig* innerhalb E, seine Stetigkeit umfasst alle Argumente in E ohne Ausnahme, und zu numerisch verwendbaren Argumenten liefert das zweite Hauptverfahren stets denselben Werth für f wie das erste.

G. Enthält E eine Stelle (Punkt, Linie, ...), in welcher die Bedingungen des Satzes B. ganz oder zum Theil aussetzen, so bezeichnet man diese als eine singuläre Stelle von f.

Statt, wie in B., zu fordern, dass, bei festen Argumenten, f in jedem hinlänglich kleinen Theile ΔE von E gleichmässig convergiren soll, kann man bündiger verlangen, dass, immer bei festen Argumenten, innerhalb E unendliche Schwankungen in der Convergenz von f ausgeschlossen sein sollen. Bei der Prüfung der Frage, ob oder in wie weit das der Fall ist, wird man aber auf das in (α) zu Grunde gelegte Criterium für die locale gleichmässige Convergenz von f bei festen Argumenten zurückgreifen müssen.

17.

Ich stelle nun aus dem Vorangehenden die Hauptpunkte zusammen, welche auf die Vollwerthigkeit von f Bezug haben.

An der Spitze steht die Frage, unter welchen Bedingungen ein Ausdruck f für gegebene Argumente $(\!(x^0)\!)$ einen einzigen, von jeder Unbestimmtheit freien Werth hat, dazu kommt die zweite Frage, unter welcher Bedingung f diese Eigenschaft in allen Punkten $(\!(x)\!)$ eines Grössengebietes E besitzt.

Die Beantwortung der ersten Frage wirft sich auf die numerische Auswerthung von f für die vorgeschriebenen Argumente $(\!(x^0)\!)$. Für diese stehen zwei Wege zur Verfügung.

Das erste Hauptverfahren setzt voraus, dass in den Ausdruck f, behufs Ausrechnung desselben, nicht die vorgeschriebenen Argumente $(\!(x^0)\!)$ selbst eingeführt werden, sondern an ihrer Stelle numerisch verwendbare Annäherungswerthe, aber diese in unbegrenzter Folge und mit unbegrenzt steigender Genauigkeit.

Unsere *Aufgabe* besteht für diesen Fall darin, *zu ermitteln, unter welchen Bedingungen dieser unendliche Algorithmus convergirt und bei jeder Anordnung zum nämlichen Grenzwerthe G für f führt. Ist ein solcher vorhanden, so wird G als Werth von f im gegebenen Punkte $(\!(x^0)\!)$ erklärt.*

Geschieht dem in einem Gebiete E allenthalben Genüge, so heisst f, auf Grund dieser Bestimmung seiner Werthe, *vollwerthig in E.*

Das zweite Hauptverfahren ist beschränkt auf numerisch verwendbare Argumente $(\!(x^0)\!)$; es setzt voraus, dass behufs Auswerthung von f, die vorgeschriebenen Argumente selber in diesen Ausdruck eingesetzt werden, wodurch $f = f(\!(x)\!)$ in den rein numerischen Ausdruck $f(\!(x^0)\!)$ übergeht.

Ist f ein endlicher Ausdruck, so liegt dieses zweite Hauptverfahren auch dem ersten zu Grunde, und es ist Postulat unserer Untersuchung, dass nicht bloss die Ausrechnung von $f(\!(x^0)\!)$ für numerisch verwendbare Argumente $(\!(x^0)\!)$ im Allgemeinen durchgeführt werden kann, sondern auch die Hülfsmittel vorhanden sind um zu ermitteln, für welche Argumente die numerische Rechnung an Singularitäten des Ausdruckes f scheitert.

Ist f ein unendlicher Ausdruck, so hängt die Frage, ob $f(\!(x^0)\!)$ einen bestimmten Werth vorstellt, ab von der Convergenz des Ausdruckes f bei festen Argumenten. Im Falle der Convergenz kann $f(\!(x^0)\!)$ je nach Umständen $= G$ oder aber auch von G verschieden sein. Im letztern Falle wird nicht $f(\!(x^0)\!)$, sondern G als Werth von f zum Punkte $(\!(x^0)\!)$ angenommen.

Dies so festgestellt, fanden wir folgendes:

Soll beim ersten Hauptverfahren der von unserer Aufgabe geforderte Grenzwerth G existiren, also f nach Uebereinkunft in $(\!(x^0)\!)$ diesen völlig bestimmten Werth haben, so muss

1) f, falls dies ein unendlicher Ausdruck ist, in einem den Punkt $(\!(x^0)\!)$ enthaltenden, hinlänglich kleinen Schwankungsgebiete ΔE stetig sein und, bei festen Argumenten, gleichmässig convergiren, beides, ohne dass eine der Schwankungen $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ unendlich klein wird.

2) Wenn dagegen f ein endlicher Ausdruck ist, so reicht seine Stetigkeit in ΔE aus.

3) Soll f vollwerthig sein in E, so müssen diese Bedingungen erfüllt sein in jedem Theile ΔE von E, und dann liefert das zweite Hauptverfahren, wo es anwendbar ist, stets denselben Werth für f wie das erste.

4) Sind diese Bedingungen in E im Allgemeinen erfüllt, aber so, dass sie an einzelnen Stellen (Punkte, Linien, ...) alle oder zum Theil aussetzen, so bezeichnet man diese als singuläre Stellen von f, und es ist nur ausgeschlossen, dass f an einer solchen beim ersten Hauptverfahren einen einzigen, völlig bestimmten Werth erlangt.

5) Das erste Hauptverfahren führt also seiner Natur nach auf den *Begriff der Singularitäten von f und ihre Kriterien*, während das zweite,

auf gleiche Allgemeinheit beschränkt, nur zur Prüfung der *Convergenz bei festen Argumenten* Anlass gibt, was dann zum Begriff *des Convergenzgebietes C und seiner Grenzen*, aber nicht auf den Begriff der Singularitäten führt.

Es versteht sich, dass dies sich sofort ändern kann, wenn man von dieser Untersuchung, welche alle Ausdrücke f umfassen soll, aufsteigt zur Untersuchung völlig charakterisierter Ausdrucksformen f.

18.

Die Singularitäten von f. Die Criterien dafür sind folgende:

1. Ist f ein endlicher Ausdruck, so findet eine Singularität statt, wo f nicht stetig ist.
2. Ist f ein unendlicher Ausdruck, so findet eine Singularität statt, wo
   entweder f nicht stetig ist,
   oder f in einem abnehmenden Schwankungsgebiete ΔE nicht bei festen Argumenten gleichmässig convergirt,
   oder wo beide Eigenschaften aussetzen.

Damit muss die allgemeine Untersuchung abbrechen; der Versuch, vollständig nachzuweisen, worin nun die so localisirten Singularitäten bestehen können, dürfte wohl völlig aussichtslos sein.

Wir stehen hier derjenigen Classe von Eigenthümlichkeiten analytischer Ausdrücke gegenüber, welche in einem berühmten Werke (Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen, Vorrede) als unbekannte Möglichkeiten bezeichnet sind. In jedem gegebenen Falle wird, wie in der Lehre von den Functionen einer einzigen, complexen Variablen, das Studium der wirklich möglichen Singularitäten von f zu den Hauptaufgaben der Theorie von f gehören.

19.

Die Umformung eines analytischen Ausdruckes. Sei der Ausdruck f durch eine einwandsfreie Rechnung in einen andern Ausdruck G umgeformt worden. *Es fragt sich, in welchem Umfange und aus welchen Gründen hieraus auf die Gleichheit beider Ausdrücke, also auf die Gleichung*

$$G = f$$

geschlossen werden darf.

Bei unserer Beschränkung der Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_n$ auf wirkliche Zahlenwerthe, und der analytischen Ausdrücke auf diejenigen Fälle, wo sie wirkliche Werthsbestimmungen leisten, springt in die Augen, dass nach der Gleichheit zwischen f und G nur gefragt werden kann, soweit sie beide zugleich den Charakter einer Werthsbestimmung besitzen, also z. B. wenn einer von beiden Ausdrücken ein unendlicher ist, sicher nicht ausserhalb seines Convergenzgebietes C bei festen Argumenten.

Aber dies reicht zur vollständigen Begründung der Gleichung $G = f$ nicht aus: denn durch die Umformungsrechnung allein, ohne Hinzuziehung anderer Beweisgründe, ist der Nachweis der Gleichheit zwischen f und G beschränkt auf diejenigen Argumente $((x))$, mit deren Zahlenwerthen die zur Umformung von f erforderliche Buchstabenrechnung numerisch exact ausgeführt werden kann, das sind die (bei f) numerisch verwendbaren Argumente. Setzen wir

$$f - G = h,$$

so ist also für diese Argumente die Gleichung $h = 0$ gesichert, zunächst aber auch nur für sie allein.

Nach der Gleichheit oder Ungleichheit zwischen f und G für die übrigen Argumente kann nur gefragt werden in einem solchen Grössengebiete, in welchem auch zu diesen übrigen Argumenten Werthe von f und G sicher gestellt sind, also *in demjenigen Gebiete $\mathfrak{E}$, in welchem f und G zugleich die Eigenschaft der Vollwerthigkeit besitzen*, wozu unbedingt die Stetigkeit beider in $\mathfrak{E}$ gehört.

Dann aber ist in jedem hinlänglich kleinen Theile $\Delta\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{E}$

$$\text{Mod.}\,|f((x')) - f((x''))| < \varepsilon', \qquad \text{Mod.}\,|G((x')) - G((x''))| < \varepsilon'',$$

für alle Argumente $((x'))$, $((x''))$ innerhalb $\Delta\mathfrak{E}$ ohne Ausnahme. Daraus folgt

$$\text{Mod.}\,|h((x')) - h((x''))| < \varepsilon' + \varepsilon'',$$

und wenn wir nun für $((x''))$ ein bei f numerisch verwendbares Argument nehmen, was $h((x'')) = 0$ gibt, für alle übrigen Argumente $((x'))$ innerhalb $\Delta\mathfrak{E}$: $\text{Mod.}\,h((x')) < \varepsilon' + \varepsilon''$. Daraus aber folgt $h((x')) = 0$. Denn wäre das nicht der Fall, so müsste es in $\Delta\mathfrak{E}$ Argumente $((x'))$ geben, für welche der $\text{Mod.}\,h((x'))$ über einer von Null verschiedenen und, wenn auch kleinen, aber ohne Unbestimmtheit angebbaren Grenze liegt, und h wäre nicht stetig, da seine Schwankungen innerhalb $\Delta\mathfrak{E}$ durch Verkleinerung von $\Delta\mathfrak{E}$ nicht *nach Belieben* verkleinert werden könnten. Also ist auch $h((x')) = 0$, also $h = 0$ in jedem Theile von $\mathfrak{E}$:

Die Umformung eines analytischen Ausdruckes in einen andern ist gültig in demjenigen Gebiete $\mathfrak{E}$, in welchem beide Ausdrücke vollwerthig sind.

Wo aber einer von beiden Ausdrücken, oder der eine und der andere zugleich einen singulären Punkt hat, versagen die Schlüsse, welche zu $h((x')) = 0$ führten.

Da jede Rechnung, welche im Ausdrucke f mit den Buchstaben $x_1 x_2 \ldots x_n$ ausgeführt wird, auf eine Umformung hinauskommt, so können wir auch den folgenden Satz aussprechen:

Wo ein analytischer Ausdruck f vollwerthig ist, ist die Buchstabenrechnung mit seinen Argumenten numerisch gültig ohne Beschränkung auf besondere Categorien derselben, d. h. dort rechnet man mit seinen Argumenten wie mit vollendeten Zahlen.

Ohne den Nachweis der gleichzeitigen Vollwerthigkeit von f und G entbehrt der Schluss $(h((x')) = 0)$ auf die Gleichheit beider der ausreichenden Begründung. Es müsste denn sein, dass man die Aufgabe der Analysis dahin abänderte, dass analytische Ausdrücke nicht als Werthsbestimmungen zu gelten haben.

Zum Verzicht auf die numerische Verwendbarkeit der Analysis wird man sich wohl nicht entschliessen. Soll sie aber zu den Anwendungen *berechtigen*, welche man in dieser Beziehung von ihr erwartet, so darf sie nicht ausschliesslich auf Umformungen begründet werden, da auch bei diesen nur eine Stetigkeitsuntersuchung den Ausschlag für die Gültigkeit der Umformung geben kann, wofern für f und G zugleich der Charakter als Werthsbestimmungen *gesichert* bleiben soll.

Strassburg, 25. Januar 1900.

INHALT.

Anmerkung.

Gegen den vorstehenden Versuch Christoffels, unter Ablehnung der jetzt üblichen Zugänge zur Theorie der Irrationalzahlen und der Funktionen reeller Veränderlicher sich einen eigenen Weg in dieses Gebiet zu bahnen, hat A. Pringsheim Einwände erhoben: Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. **12** (1903) S. 591. Außerdem leidet die vorstehende Abhandlung an einem mehrfach wiederkehrenden Fehlschluß; so folgt z. B. aus der Ungleichung (a') von S. 254 nicht die dort behauptete Gleichung $f(\!(x')\!) - G(\!(x')\!) = 0$, weil bei Verkleinerung von ε' auch das Gebiet ΔE kleiner werden kann und die Stelle $(\!(x')\!)$ schließlich nicht mehr zu enthalten braucht. Durch das nämliche Versehen wird der ganze art. 16 beeinflußt; insbesondere ist Satz B von S. 263 nicht richtig. F.

XXXIV.

Vollständige Theorie der Riemann'schen ϑ-Function.

(Mathematische Annalen, Bd. 54, 1901, S. 347—399.)

Einleitung.

Die vorliegende Darstellung der Lehre von der ϑ-Function geht nicht den üblichen Weg. In der Theorie, so wie sie bis jetzt ausgebildet vorliegt, richtet sich die Untersuchung ausschliesslich auf die Summe der Jacobi'schen Reihe mit den Moduln und Argumenten Riemann's; sie liefert Lehrsätze über die Fälle, wo diese Summe identisch Null und wo sie es nicht ist, und über ihr Verhalten im letztern Falle, ohne grundsätzliche Scheidung der beiden Voraussetzungen, unter denen die ϑ-Function zur Verwendung kommen kann.

Ein solches Bedürfniss macht sich sofort geltend, wenn man über die Darstellung der algebraischen Functionen und ihrer Integrale hinausgehend, die ϑ-Function benutzt, um die Existenz ausgezeichneter Functionen darzuthun*). Das erste Beispiel, welches in dieser Beziehung aufgestellt worden ist, zeigt klar, um was es sich hierbei handelt.

Man bilde mit Riemann**) einen Ausdruck von der Form

$$\tau = e^{\Sigma \alpha_\mu u_\mu} \frac{\vartheta(\!(u_\mu - f_\mu)\!)}{\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)},$$

und bestimme den Nenner so, dass τ in p vorgeschriebenen Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ zur ersten Ordnung unendlich wird, und hierauf die Constanten im Exponenten von e und die Parameter $f_1 f_2 \cdots f_p$ des Zählers so, dass τ an den Querschnitten vorgeschriebene Einheitswurzeln ausscheidet.

Die Existenz einer solchen Function τ ist dann für diejenigen Fälle gesichert, wo keiner der beiden Ausdrücke $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$, $\vartheta(\!(u_\mu - f_\mu)\!)$ identisch Null ist, was beim ersten von der Wahl seiner Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ab-

*) Riemann, Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, Borchardt's Journal 65, Seite 172.

**) Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, art. 27, Borchardt's Journal 54.

hängt, beim andern von den Werthen der durch die Aufgabe geforderten Parameter $f_1 f_2 \cdots f_p$. Dies sind zwei durchaus verschiedene Fragen; ihre Entscheidung gründet sich auf Kriterien, im einen Falle für die Lagerung der Nullpunkte, im andern für die Werthe der Parameter, und in beiden Fällen kommt es sehr darauf an, ob die Kriterien, welche für die Prüfung beider Fragen geboten werden, diese Prüfung auch gestatten.

Ich ziehe daraus vor allen Dingen den Schluß, dass die Theorie der ϑ-Functionen, wofern ihr eine unbeschränkte Verwendbarkeit gesichert werden soll, nach zwei Richtungen ausgebildet werden muss, einmal indem man die Function durch ihre Nullpunkte, das anderemal, indem man sie durch ihre Parameter bestimmt denkt.

Für eine lückenfreie Ausführung der Theorie in diesem Sinne dürfte es noch nicht zu spät sein. Dass eine solche auch die bekannten Resultate liefern muss, versteht sich von selbst; ich finde aber auch Resultate, welche darüber hinausgehen, unter Anderm den folgenden Zusatz:

> Wird der Begriff einer ϑ-Function nicht an ihre Ausdrucksform geknüpft, sondern an ihre massgebenden Eigenschaften, nämlich ihr Verhalten an den Querschnitten und im Innern der einfach zusammenhängenden Fläche T'', der sie zugeordnet ist, so existirt eine solche Function unter allen Umständen, wie auch immer ihre Nullpunkte oder ihre Parameter vorgeschrieben werden mögen.

Daraus folgt z. B., dass die oben beschriebene *algebraische* Function τ unter allen Umständen existirt, auch wenn vermöge der Wahl ihrer Unstetigkeitspunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ oder der durch die Aufgabe geforderten Parameter $f_1 f_2 \cdots f_p$ der Riemann'sche Ausdruck für die betreffende ϑ-Function versagt, nämlich identisch Null wird.

Freilich wird man bei dieser Auffassung der Function ϑ sich nicht an eine bevorzugte Ausdrucksform für dieselbe binden dürfen. Soll sie durch die Normalintegrale $u_1 u_2 \ldots u_p$ ausgedrückt werden, was in allen Fällen möglich ist, so wechselt in der That ihr Ausdruck durch eine unendliche Reihe je nach der Lagerung ihrer Nullpunkte oder der Wahl ihrer Parameter; verzichtet man aber darauf, sie in Function von $u_1 u_2 \cdots u_p$ auszudrücken, so kann man, wie das Alles im Folgenden ausgeführt werden wird, sie auch durch einen Ausdruck darstellen, welcher in allen Fällen dieselbe Form behält.

Dies führt zu unserm Ausgangspunkte zurück. Zum Zweck von Existenzbeweisen kann man über die ϑ-Function in dieser freilich nicht durch eine bevorzugte Ausdrucksform beschränkten Auffassung verfügen; für die wirkliche Darstellung algebraischer Functionen und ihrer

Integrale dagegen verwende ich ausschliesslich die Riemann'sche Reihe, da diese Darstellung die einzige ist, in welche keine überflüssigen Irrationalitäten und namentlich nur einerlei Irrationalitäten, nämlich die Werthe der Normalintegrale I. G. (nebst Differenzen derselben, den Periodicitätsmoduln) eingehen.

Nach dem Gesagten, wird eine kurze Übersicht genügen, um den Gang meiner Untersuchungen darzulegen. Die Arbeit zerfällt in fünf Abschnitte.

Nach einer Vorbemerkung über die Convergenz der ϑ-Reihe so wie über die Stetigkeit und die Vollwerthigkeit ihrer Summe wird im I. Abschnitte der Fall vorgesehen, dass die Summe der Riemann'schen Reihe $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ vermöge der Wahl der Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ identisch Null ist, und für diesen Fall ein Ausdruck $\vartheta_\varrho(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ nachgewiesen, welcher, ohne identisch zu verschwinden, eine ϑ-Function mit diesen Parametern darstellt. Dieser Ausdruck ist aber durch die Parameter nicht völlig bestimmt, da er ausser diesen noch andere verfügbare Constanten enthält. Im angegebenen Falle, wo $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ identisch Null ist, gibt es also für die nämlichen Parameter mehr als eine ϑ-Function, und es tritt nun die Frage auf, ob der Ausdruck ϑ_ϱ alle ϑ-Functionen mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$ umfasst. Dies muss fürs Erste dahingestellt bleiben, aber der Nachweis, dass die Function für jedes Parametersystem existirt, ist damit bereits geleistet.

In Folge dessen gewinnen die bekannten Sätze über die Anzahl der Nullpunkte und ihre Beziehungen zu den Parametern bezüglich der letztern ganz unbeschränkte Gültigkeit, ebenso der, sonst nur mit anderweitigen Hülfsmitteln vollständig zu begründende Satz von der Möglichkeit, durch geeignete Wahl von p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ die p Summen

$$u_\mu(\varepsilon_1) + u_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + u_\mu(\varepsilon_p) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

einem beliebigen Werthesysteme $\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p$ (im Sinne Riemann's) congruent zu machen.

Mit diesen Sätzen beginnt der II. Abschnitt, und dann wird mittelst der Nullpunkte irgend einer besondern, durch ihre Parameter gegebenen ϑ (oder ϑ_ϱ) ein Ausdruck

$$\log \vartheta = \log C + P(o \,|\, \varepsilon_1) + P(o \,|\, \varepsilon_2) + \cdots + P(o \,|\, \varepsilon_p) - L(o)$$

(oder $\vartheta = C r(\varepsilon_1) r(\varepsilon_2) \cdots r(\varepsilon_p)$; vergl. die Note zu Nr. 8) für dieselbe hergeleitet, von welchem sich sofort herausstellt, dass er für jede beliebige Lagerung der Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ eine ϑ-Function darstellt.

Damit ist der Nachweis vollendet, dass die ϑ-Funktion, charakterisirt durch ihr Verhalten in der einfach zusammenhängenden Fläche

T' und an den Querschnitten, stets existiert, mögen ihr die Parameter oder die Nullpunkte vorgeschrieben werden, und wie auch immer das geschehen mag.

Nur bezüglich der Ausdrucksformen für den ersten von diesen beiden Fällen ist noch eine Lücke auszufüllen, da die Frage, ob die Reihenausdrücke ϑ, ϑ_ϱ alle ϑ-Functionen umfassen, im I. Abschnitte nicht erledigt werden konnte.

Dies geschieht im III. Abschnitte. Als Ausdruck einer ϑ-Function findet sich die Riemann'sche Reihe ϑ, und wenn diese versagt, stets eine Secundärreihe ϑ_ϱ. Letztere tritt ein, wenn unter den p Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ sich ϱ nothwendige befinden, in welchem Falle ich $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ in erweitertem Sinne ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten*) nenne. Das führt sofort zu einer *Schaar von ϑ-Functionen, welche alle die gleichen Parameter haben, also an den Querschnitten alle die gleichen Factoren ausscheiden.* Jede Function dieser Schaar hat zu Nullpunkten ein mit $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduales System $o_1 o_2 \cdots o_p$, darunter also jedesmal ϱ nothwendige Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$. Diese können nach Belieben vorgeschrieben werden; durch sie und die Parameter der Schaar ist der Ausdruck der besondern Function ϑ_ϱ bestimmt, welche in diesen ϱ nothwendigen und den übrigen $p-\varrho$ durch sie bestimmten Punkten des zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresidualen Systems Null wird.

Den Schluss dieses Abschnittes bildet eine Vervollständigung des Satzes aus Abschnitt II, Nr. 6, über die Erzeugung von p Parametern $\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p$ durch die Simultanwerthe der Normalintegrale II. G. in p geeigneten Punkten.

Der IV. Abschnitt weist die analytische Bedingung dafür nach, dass $u_1 u_2 \cdots u_p$ Simultanwerthe sind; sie ist nichts anderes, als die bekannte Gleichung Riemann's

$$\vartheta \left(\!\left(- \sum_{\varkappa=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu \right)\!\right) = 0,$$

von welcher zu Anfange des III. Abschnittes zwei einwandfreie Beweise gegeben werden.

Der V. Abschnitt beginnt mit der directen Auswerthung der Riemann'schen Constanten $K_1 K_2 \cdots K_p$ für die ultraelliptischen Functionen aller Genera $p > 1$, und entwickelt im Anschlusse hieran die allgemeinen

*) Vergl. unten die Note zu Nr. 10. Den Begriff des Punktsystems I. G. im engern Sinne habe ich in meiner Abhandlung: Ueber die canonische Form der Riemann'schen Integrale I. G. auseinandergesetzt. Brioschi's Ann. di Matematica 9, zu Anfang der Nr. 3; in diesem Bande S. 132.

Hülfsmittel zur Bestimmung dieser Constanten, welche wir durch Herrn Prym kennen gelernt haben, vervollständigt durch gehörige Berücksichtigung der Punktsysteme I. G. und die Secundärreihen ϑ_ϱ. —

Die Darstellung, welche Riemann selbst von seinen Entdeckungen gegeben hat, enthält Lücken; dieselben sind auch von anderer Seite bemerkt und, für die Theorie der Riemann'schen Reihe selbst, ausgefüllt worden*).

Dazu kommt ein anderer Punkt, den ich für wesentlicher halte. Man mag an die Lehre vom Verschwinden der ϑ-Function herantreten, von welcher Seite man will, überall greifen in dieselbe Bedingungen hinein, welche sich auf gewisse Lagerungen der Punkte beziehen, die an Stelle von Parametern eingeführt werden. Das betrifft in allen Fällen die Punktsysteme I. G., d. h. die Gruppen der Null- oder der Unstetigkeitspunkte der Funktionen I. G. $\frac{dw_1}{dw_2}$, welche den eigentlichen Gegensatz zwischen den hier allein zu berücksichtigenden Fällen $p \gtreqless 2$ und den beiden Elementarfällen $p=0$ und $p=1$ begründen. Die einschlägigen Sätze über diese Punktsysteme, d. h. über die Gleichungen ersten Grades, welche bewirken, dass der allgemeine Integrand I. G. in einem solchen System von Punkten verschwinde, ergeben sich mit der grössten Leichtigkeit, wenn man sie an der rechten Stelle (Abel'sches Theorem, Riemann-Roch'scher Satz) aufsucht und sie auf ihren *algebraischen* Inhalt beschränkt. Statt sie aus der Lehre von der ϑ-Function zu schöpfen, sind sie ihr zu Grunde zu legen, und liefern dann die Schlüssel für die merkwürdigen Erscheinungen, welche der Reihenausdruck dieser Funktion darbietet.

Die Theorie der Riemann'schen ϑ-Reihe allein wird mit diesen Hülfsmitteln sehr einfach: die Nummern 1, 2, 5 und 10—16 enthalten alle wesentlichen Punkte derselben. Ich habe mich nicht entschliessen können, meine Darstellung mit dieser, auf die ϑ-Reihe beschränkten Theorie zu beginnen, und dann erst die Untersuchungen folgen zu lassen, welche ich darüber hinaus für nöthig gehalten habe; die vorangehende Uebersicht lässt den Grund für die gewählte Anordnung deutlich erkennen.

Es ist hier am Orte, zwei Bezeichnungen vorauszuschicken, deren ich mich bediene und die ich für zweckmässig halte. Die eine betrifft die quadratische Form im Exponenten der allgemeinen Glieder der ϑ-Reihe; ich schreibe da

*) Carl Neumann, Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen. Leipzig 1883.

$$\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu = \Phi(m_1 \mid m_2 \mid \cdots \mid m_p) = \Phi(\!(m)\!).$$

Die andere betrifft die Simultanperioden der Normalintegrale I. G. $u_1 u_2 \cdots u_p$. Ich schreibe

$$\begin{aligned}
g_1 \pi i + a_{11} h_1 + a_{12} h_2 + \cdots + a_{1p} h_p &= (gh)_1, \\
g_2 \pi i + a_{21} h_1 + a_{22} h_2 + \cdots + a_{2p} h_p &= (gh)_2, \\
&\;\;\vdots \\
g_\mu \pi i + a_{\mu 1} h_1 + a_{\mu 2} h_2 + \cdots + a_{\mu p} h_p &= (gh)_\mu, \\
&\;\;\vdots \\
g_p \pi i + a_{p1} h_1 + a_{p2} h_2 + \cdots + a_{pp} h_p &= (gh)_p,
\end{aligned}$$

so dass $(gh)_1, (gh)_2, \cdots (gh)_p$ für ganzzahlige Werthe von $g_1 g_2 \cdots g_p h_1 h_2 \cdots h_p$ die allgemeinen Ausdrücke für die Simultanperioden von $u_1 u_2 \cdots u_p$ sind.

Die übrigen Bezeichnungen Riemann's bezüglich der Fläche T und ihrer Querschnitte, sowie der verschiedenen Integralfunctionen werde ich ungeändert beibehalten.

Ich schliesse diese Einleitung mit einer Vorbemerkung über

Die Convergenz der Jacobi'schen ϑ-Reihe mit den Moduln Riemann's und die Stetigkeit und die Vollwerthigkeit ihrer Summe.

Den Ausdruck der p-fach unendlichen Jacobi'schen Reihe mit den Argumenten $w_1 w_2 \cdots w_p$ schreibe ich wie folgt

$$\vartheta = \sum e^{\Phi(\!(m)\!) + 2\Sigma m w},$$

wo $\Sigma m w = m_1 w_1 + m_2 w_2 + \cdots + m_p w_p$ ist, und $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ die Riemann'schen Moduln sind. Die Summationen nach $m_1 m_2 \cdots m_p$ gehen, jede für sich, durch alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$.

Um die zu ϑ gehörige Modulreihe zu bilden, trennen wir im Exponenten des allgemeinen Gliedes das Reelle vom Imaginären:

$$w_\mu = u_\mu + i v_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \cdots p$$

und, wenn $x_1 x_2 \cdots x_p$ auf reelle Werthe beschränkt werden:

$$\Phi(\!(x)\!) = -\varphi(\!(x)\!) + i\psi(\!(x)\!).$$

Dann lautet die verlangte Modulreihe:

$$\Theta = \sum e^{-\varphi(\!(m)\!) + 2\Sigma m u},$$

und wo sie convergirt, ist bekanntlich die ursprüngliche Reihe nicht

bloss convergent, sondern ihre Summe überdies unabhängig von der Anordnung der Summationen. —

Bezüglich der reellen quadratischen Form $\varphi(\!(x)\!)$ beweist Riemann den Satz, dass (bei reellen Argumenten) φ eine vollständige positive Form ist, d. h. so lange sie nicht verschwindet, bleibt sie positiv, und sie wird $= 0$ nur in dem Falle, wo alle Argumente zugleich verschwinden.

Solange die Summe der Quadrate dieser letztern, also die $\Sigma x^2 = 1$ bleibt, kann demnach φ nicht auf Null rücken. Ist α die untere Grenze für φ, oder eine kleinere positive Zahl, so bleibt $\varphi(\!(x)\!) > \alpha$. Nimmt man nun $x_\mu = \frac{m_\mu}{r}$ für $\mu = 1, 2, \cdots p$ und $r^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2$, so folgt $\varphi\left(\!\left(\frac{m}{r}\right)\!\right) > \alpha$, und durch Multiplication mit r^2:

$$\varphi(\!(m)\!) > \alpha \sum m^2 \quad \text{und} \quad \alpha > 0$$

für jede beliebige Gruppe reeller Zahlen $m_1 m_2 \cdots m_p$, also:

$$e^{-\varphi(\!(m)\!)} < e^{-\alpha \Sigma m^2},$$

endlich

$$\Theta < \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2) + 2(m_1 u_1 + m_2 u_2 + \cdots + m_p u_p)}.$$

Dies ist das Produkt aus p Reihen der Form

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha m^2 + 2 m u};$$

diese Reihe convergirt, solange u nicht unendlich wird. Um dies auszuschliessen, beschränke ich u auf endliche Grenzen $\pm\,\omega$, dann sei

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha m^2 + 2 m u} = f(u) \quad \text{für} \quad -\omega < u < \omega,$$

während ω positiv ist und von beliebiger Grösse sein kann, wofern es nur ohne Unbestimmtheit angegeben wird. Es folgt

$$\Theta < f(u_1)\, f(u_2) \cdots f(u_p)$$

wofern

$$-\omega_1 < u_1 < \omega_1,\; -\omega_2 < u_2 < \omega_2, \cdots -\omega_p < u_p < \omega_p$$

ist. Wir haben also das Resultat:

Die Jacobi'sche Reihe

$$\vartheta = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m w}$$

mit den Riemann'schen Moduln $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ convergirt und ihre Summe ist von der Anordnung der Summationen unabhängig, solange die Argumente $w_1 w_2 \cdots w_p$ ($w_\mu = u_\mu + iv_\mu$) einem durch die Ungleichheiten

$$-\omega_1 < u_1 < \omega_1, \ -\omega_2 < u_2 < \omega_2, \cdots -\omega_p < u_p < \omega_p$$

bestimmten Grössengebiete E angehören.

Diesen Convergenzbeweis habe ich im Sommer 1890 in einer Vorlesung über die ultraelliptischen Functionen (aller Genera $p > 2$) vorgetragen: um die nämliche Zeit (ich glaube etwas später) erschien die elegante Arbeit des Herrn Krazer über die Transformationen der allgemeinen ϑ-Reihe, in welcher (gleich zu Anfange) als Grundlage zu einem einfachen Convergenzbeweise das aus dem Riemann'schen Satze ebenfalls leicht folgende Princip mitgetheilt wurde, dass die quadratische Form (bei reellen Argumenten) unter allen Umständen unendlich wird, sobald nicht alle Argumente bei endlichen Werthen bleiben. Wie der Beweis sich gestaltet, wird nicht ausgeführt, mit dem obigen kann er nicht identisch sein. —

Setzen wir

$$e^{2w_1} = \zeta_1, \ e^{2w_2} = \zeta_2, \cdots e^{2w_p} = \zeta_p,$$

so verwandelt ϑ sich in eine p-fache Potenzreihe

$$\vartheta = \sum e^{\Phi((m))} \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \cdots \zeta_p^{m_p}$$

mit dem Convergenzgebiete

$$E. \quad e^{-2\omega_1} < \text{Mod.}\, \zeta_1 < e^{2\omega_1}, \cdots e^{-2\omega_p} < \text{Mod.}\, \zeta_p < e^{2\omega_p}.$$

Nach der Lehre von den Potenzreihen ist daher ϑ innerhalb E stetige Function von $\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_p$, und das Gleiche gilt von jedem endlichen Ausdrucke

$$A = \sum_{-q_1}^{r_1} \sum_{-q_2}^{r_2} \cdots \sum_{-q_p}^{r_p} e^{\Phi((m))} \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \cdots \zeta_p^{m_p}.$$

Die Stetigkeit wird aber hierbei so verstanden, dass z. B. A innerhalb E stetige Function von ζ_1 heisst, wenn in jedem Theile ΔE von E die Maximalschwankung an A (sein grösster Schwankungsmodul) unter jede beliebig kleine vorzuschreibende Grenze ε gebracht werden kann, indem man die Maximalschwankung von ζ_1 unter eine, aus ε zu berechnende Grenze bringt, wofern diese letztere Grenze nicht unendlich klein gefordert ist.

In diesem Sinne ist dann weiter $\zeta_1 = e^{2w_1}$ als Summe einer Potenzreihe stetige Function von w_1, mithin auch A stetige Function von w_1.

Der Beweis springt in die Augen: Schwindet die Mschw. von A zugleich mit der Mschw. von ζ_1, und diese zugleich mit derjenigen von w_1, so schwindet die Mschw. von A zugleich mit der Mschw. von w_1.

Es folgt

Innerhalb E sind ϑ und sämmtliche Ausdrücke A stetige Functionen von w_1, von $w_2, \cdots$ und von w_p,

wofern die Stetigkeit so verstanden wird, wie soeben auseinandergesetzt wurde.

Und nun folgt aus den Sätzen meiner Abhandlung über Stetigkeit und Vollwerthigkeit analytischer Ausdrücke (Ann. Bd. 53, S. 465)*) dass ϑ innerhalb E vollwerthige Function von $w_1 w_2 \cdots w_p$ ist.

D. h. Zu jedem Argumentensystem $w_1 w_2 \cdots w_p$ innerhalb E gehört ein völlig bestimmter Werth von ϑ, den man durch einen ausführbaren Anfang der Rechnung mit beliebiger Genauigkeit gewinnen kann, gleichviel ob man die Argumente $w_1 \cdots w_p$ durch Annäherungen einführt oder, wenn ihr arithmetischer Charakter das zulässt, sie direct einsetzt. Innerhalb E wird durch eine einwandfreie Buchstabenrechnung mit dem Ausdrucke der ϑ-Reihe der Charakter des Ergebnisses als eine Werthbestimmung auf keiner Stufe aufgehoben oder in anfechtbarer Weise abgeändert, mit andern Worten, innerhalb E rechnet man mit den Argumenten von ϑ wie mit vollendeten Zahlen.

I.

Die ϑ-Function, bestimmt durch ihre Parameter; die primäre Reihe und die Secundärreihen.

1. Ich knüpfe an Riemann's Abhandlung über die Theorie der Abel'schen Functionen an. Durch z bezeichne ich die unabhängige Variable, durch s die grundlegende Irrationalität der Classe, durch T die aus n z-Ebenen zusammengesetzte Fläche, welcher s eindeutig und zugleich der Stetigkeit gemäss zugeordnet ist; durch $c_\lambda a_\lambda b_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \cdots p$) bezeichne ich die p Querschnittbündel, durch welche die Fläche in

*) In diesem Bande S. 243.

eine einfach-zusammenhängende T' verwandelt wird, durch $u_1 u_2 \cdots u_p$ die hierzu gehörigen Normalintegrale I. G.

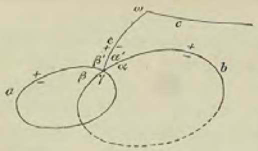


Fig. 1.

Die Schnittpaare a_λ, b_λ $(\lambda = 1 \cdots p)$ werden zuerst angelegt, und die Ränder so als $\overset{+}{a}\ \overset{-}{a},\ \overset{+}{b}\ \overset{-}{b}$ bezeichnet, dass ein positiver Umlauf um die Fläche von $\overset{+}{a}$ auf $\overset{+}{b}$, und von $\overset{-}{a}$ auf $\overset{-}{b}$ hinüber führt. Zu diesen Schnittpaaren führen dann noch die Schnitte c_λ $(\lambda = 1 \cdots p)$ aus einem beliebigen Punkte ω nach einer beliebigen Stelle, wofür wir wie üblich die von $\overset{+}{a}_\lambda\ \overset{+}{b}_\lambda$ gebildete Ecke nehmen. Dort bilden sich also fünf Ecken $\alpha' \beta \gamma \alpha \beta'$ so, dass ein positiver Umlauf um T' dort dem Wege

$$(\overset{-}{c})\, \alpha'\, (\overset{+}{b})\, \beta\, (\overset{-}{a})\, \gamma\, (\overset{-}{b})\, \alpha\, (\overset{+}{a})\, \beta'\, (\overset{+}{c})$$

folgt.

Auf diese Fläche beschränkt sind dann die Integrale $u_1 u_2 \cdots u_p$ eindeutig und stetig, und es ist

$$\text{an } a_\lambda\colon\ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = \binom{\lambda}{\mu} \pi i; \quad \text{an } b_\lambda\colon\ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = a_{\lambda\mu}; \quad \text{an } c_\lambda\colon\ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = 0$$

Sodann ist

$$\vartheta(v_1 | v_2 | \cdots | v_p) = \vartheta(\!(v_\mu)\!) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu v_\mu},$$

wo nach jedem m über alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summiren ist. Ersetzt man hier jedes v_μ durch $v_\mu + g_\mu \pi i$, wo g_μ, und jedes m_λ durch $m_\lambda + h_\lambda$, wo jedes h_λ ganze Zahl ist, so ändert das die Summe der Reihe nicht, und giebt die Formel

$$e^{\Phi((h)) + 2\Sigma h_\mu v_\mu}\, \vartheta(\!(v_\mu + (gh)_\mu)\!) = \vartheta(\!(v_\mu)\!),$$

wo die in der Einleitung erläuterten Bezeichnungen beide benutzt sind.

2. Durch o bezeichne ich den veränderlichen Punkt z, s in der Fläche T, und durch $u_\mu(o)$ den Werth des auf die Fläche T' beschränkten μ^{ten} Normalintegrals I. G. in diesem Punkte. Mit Hinzuziehung von p Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$ wird die unendliche Reihe

$$\vartheta(\!(u_\mu(o) - e_\mu)\!) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu (u_\mu(o) - e_\mu)}$$

gebildet; ist ihre Summe nicht Null für alle Lagen des Punktes o, so

stellt diese Reihe eine Function ϑ von z dar, welche die folgenden Eigenschaften hat:

(1) ϑ ist in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig;

(2) an a_λ ist: $\overset{+}{u}_\mu = \overset{-}{u}_\mu + \binom{\lambda}{\mu} \pi i$ also $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$,

„ b_λ „ : $\overset{+}{u}_\mu = \overset{-}{u}_\mu + a_{\lambda\mu}$ „ $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta} \cdot e^{-a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2e_\lambda}$,

„ c_λ „ : $\overset{+}{u}_\mu = \overset{-}{u}_\mu$ „ $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$.

3. Zum Ausgangspunkte nehme ich mit Riemann*) den Satz, dass es unter allen Umständen Parameter $f_1 f_2 \cdots f_p$ giebt, bei denen $\vartheta_1 = \vartheta(\!(u_\mu - f_\mu)\!)$ nicht identisch Null ist und in Folge dessen, falls $\vartheta_0 = \vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ vermöge der Wahl seiner Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ identisch Null ist, seine partiellen Derivirten von einer endlichen, durch die Parameter völlig bestimmten Ordnung an, nicht alle identisch Null sind.

Dabei gelten als partielle Derivirten von ϑ_0 die Werthe der partiellen Derivirten von $\vartheta(\!(v_\mu)\!)$ für $v_1 = u_1 - e_1,\ v_2 = u_2 - e_2, \cdots, v_p = u_p - e_p$.

Der erste Theil des Satzes folgt daraus, dass in der Entwicklung von ϑ_1 nach Potenzen von $e^{f_1}, e^{f_2}, \cdots e^{f_p}$ nicht alle Coefficienten $= 0$ sind, der zweite daraus, dass in Folge dessen auch in der Entwicklung von ϑ_1 nach Potenzen von $e_1 - f_1,\ e_2 - f_2, \cdots, e_p - f_p$ die Coefficienten, nämlich die partiellen Derivirten von ϑ_0, nicht alle $= 0$ sein können.

Um dies weiter zu verfolgen, bilde man die neuen Parameter

$$e_1' = e_1 - \zeta x_1, \quad e_2' = e_2 - \zeta x_2, \cdots, e_p' = e_p - \zeta x_p$$

für

$$x_1 = e_1 - f_1, \quad x_2 = e_2 - f_2, \quad \cdots, x_p = e_p - f_p,$$

und den Ausdruck

$$\vartheta' = \vartheta(\!(u_\mu - e_\mu')\!) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m(u-e)} \cdot e^{2\zeta \sum_\mu m_\mu x_\mu}.$$

Die Form dieses Ausdruckes zeigt, dass ϑ' als Function von ζ einwerthig und, so lange ζ endlich bleibt, auch stetig ist. Sie ist nicht identisch Null, da sie für $\zeta = 1$, also ohne Unstetigkeit in ϑ_1 übergeht. Aber für $\zeta = 0$ wird auch $\vartheta' = 0$, abermals ohne Unstetigkeit, also zu endlicher Ordnung, welche r heissen möge.

In der Entwicklung von ϑ' nach Potenzen von ζ:

$$\vartheta' = A_0 + 2\zeta \cdot A_1 + \frac{(2\zeta)^2}{1 \cdot 2} A_2 + \cdots,$$

---

*) Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, art. 2. Crelle's Journal 65.

wo

$$A_\varkappa = \sum e^{\Phi(\!(m)\!)+2\sum m(u-e)}(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_px_p)^\varkappa$$

ist, fehlt das Anfangsglied $A_0 = \vartheta_0$ nach Voraussetzung. Ausserdem sind $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ gleich Null, *wenigstens bei den vorstehenden Werthen* von $x_1x_2\cdots x_p$, aber A_r ist nicht $=0$. Daraus folgt zunächst, dass die partiellen Derivirten r^{ter} Ordnung von ϑ_0 nicht alle $=0$ sind. Ist ferner $n<r$, also $A_n=0$, so folgt nicht, dass die partiellen Derivirten n^{ter} Ordnung alle $=0$ sind; denn wenn sie es nicht alle sind, so kann A_n gleichwohl vermöge der Werthe von $x_1x_2\cdots x_p$ gleich Null sein. Aber eins ist sicher, dass es eine Ordnung $\leqq r$ gibt, bis zu welcher alle partiellen Derivirten $=0$ sind, während die Derivirten dieser Ordnung selbst es nicht oder doch nicht alle sind.

Sei

$$\varrho$$

die niedrigste Ordnung, für welche nicht alle partiellen Derivirten von ϑ_0 verschwinden, so dass, falls $\varrho>1$ ist, alle partiellen Derivirten von der ersten bis zur $(\varrho-1)^{\text{ten}}$, aber nicht alle von der ϱ^{ten} Ordnung gleich Null sind, und letzteres auch gilt, wenn $\varrho=1$ ist. Es ist sicher gestellt, dass ϱ, welches durch die Parameter $e_1e_2\cdots e_p$ bestimmt ist, einen endlichen Werth hat, d. h. in keinem Falle unendlich gross vorausgesetzt werden darf.

Jetzt bilde man ϑ' für *willkürliche* Werthe von $x_1x_2\cdots x_p$; in seiner Entwicklung sind $A_0A_1\cdots A_{\varrho-1}$ alle $=0$, aber A_ϱ ist es nicht, es bleibt

$$\vartheta' = \frac{(2\zeta)^\varrho}{\varrho!}A_\varrho + \frac{(2\zeta)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}A_{\varrho+1} + \cdots .$$

Ordnet man A_ϱ nach Potenzen von $x_1x_2\cdots x_p$, so sind, worauf von hier an zu achten ist, die Coefficienten bis auf den fehlenden Factor 2^ϱ die partiellen Derivirten ϱ^{ter} Ordnung von ϑ_0, und sie sind nicht alle $=0$.

Wir untersuchen sie als Functionen von z. Der Reihenausdruck von A_ϱ (oben $A_\varkappa$) zeigt, dass A_ϱ als Function von z der Fläche T' eindeutig zugeordnet und in ihr von jeder Unstetigkeit frei ist. Sodann ist

$$\text{an } a_\lambda\colon \overset{+}{\vartheta'} = \overset{-}{\vartheta'};\quad \text{an } b_\lambda\colon \overset{+}{\vartheta'} = \overset{-}{\vartheta'}\cdot e^{-a_{\lambda\lambda}-2\bar{u}_\lambda+2e_\lambda};\quad \text{an } c_\lambda\colon \overset{+}{\vartheta'} = \overset{-}{\vartheta'};$$

ausserdem für $\zeta=0$:

$$\lim\frac{\varrho!\,\vartheta'}{(2\zeta)^\varrho} = A_\varrho,\quad \text{und}\quad \lim e_\lambda' = e_\lambda.$$

Also ist

$$\text{an } a_\lambda\colon \overset{+}{A}_\varrho = \overset{-}{A}_\varrho;\quad \text{an } b_\lambda\colon \overset{+}{A}_\varrho = \overset{-}{A}_\varrho\cdot e^{-a_{\lambda\lambda}-2\bar{u}_\lambda+2e_\lambda};\quad \text{an } c_\lambda\colon \overset{+}{A}_\varrho = \overset{-}{A}_\varrho,$$

d. h., wenn man dies mit Nr. 2 vergleicht, A_ϱ hat für alle Werthe von

$x_1x_2\cdots x_p$ die charakteristischen Eigenschaften einer ϑ-Function mit den Parametern $e_1e_2\cdots e_p$, also gilt das von allen partiellen Derivirten ϱ^{ter} Ordnung von ϑ_0, soweit sie nicht identisch Null sind. Das ist zunächst der folgende Lehrsatz:

I. Versteht man unter einer, der Fläche T zugeordneten ϑ-Function nicht ausschliesslich die Summe der Riemann'schen Reihe, sondern, *mit Ausschluss identisch verschwindender Ausdrücke*, jede Function ϑ von z, welche

A. in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig ist, und

B. an a_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$; an b_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}\cdot e^{-a_{\lambda\lambda}-2\bar{u}_\lambda+2e_\lambda}$; an c_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$

giebt, und nennt dies eine ϑ-Function mit den Parametern $e_1e_2\cdots e_p$, so existirt eine solche Function stets, wie auch ihre Parameter vorgeschrieben werden mögen.

4. Diese Eigenschaften behält A_ϱ auch, wenn die Producte aus Potenzen von $x_1x_2\cdots x_p$, mit denen im Ausdrucke von A_ϱ die Derivirten von ϑ_0 multiplicirt sind, durch willkürliche Constanten ersetzt werden. Dann tritt in der Reihenentwicklung von A_ϱ an die Stelle der Potenz

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_px_p)^\varrho$$

eine ganze homogene Function ϱ^{ter} Ordnung von $m_1m_2\cdots m_p$, deren Coefficienten nach z constant sind, und welche

$$G_\varrho(m_1\,|\,m_2\,|\cdots|\,m_p) = G_\varrho(\!(m)\!)$$

heissen möge. An die Stelle von A_ϱ tritt der Ausdruck

$$\vartheta_\varrho(\!(u_\mu - e_\mu)\!) = \sum e^{\Phi(\!(m)\!)+2\sum m(u-e)}\,G_\varrho(\!(m)\!);$$

ich nenne ihn eine *Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung*, und im Gegensatze dazu $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ *die Primärreihe.* Das giebt den folgenden Satz:

II. Giebt es Parameter $e_1e_2\cdots e_p$, für welche die Summe der Primärreihe $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ als Function von z identisch Null ist, so bestimmt ein solches Parametersystem eine Ordnung ϱ in der Weise, dass die partiellen Derivirten ϱ^{ter} Ordnung von $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ nicht alle identisch Null sind, wohl aber, wenn $\varrho>1$ ist, alle partiellen Derivirten der vorangehenden Ordnungen es sind. In diesem Falle kann man die Homogenform ϱ^{ter} Ordnung $G_\varrho(\!(m)\!)$ so wählen, dass die Summe der Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung

$$\vartheta_\varrho(\!(u_\mu - e_\mu)\!) = \sum e^{\Phi(\!(m)\!)+2\sum m(u-e)}\,G_\varrho(\!(m)\!)$$

als Function von z nicht identisch verschwindet, und dann ist ϑ_ϱ eine ϑ-Function mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$.

Es muss zunächst dahingestellt bleiben, ob auch umgekehrt jede ϑ-Function mit solchen Parametern sich durch eine Secundärreihe ausdrücken lässt, wozu vor allen Dingen der Nachweis gehört, dass der hier vorgesehene Fall, wo ϑ_0 identisch Null ist, wirklich vorkommt. Dass die unter dieser Voraussetzung nachgewiesenen Ausdrucksformen ϑ, ϑ_ϱ für alle Fälle ausreichen, wird sich in der Folge durch die wirkliche Bestimmung von G_ϱ aus vorgeschriebenen Bedingungen ergeben. Dabei stellt sich dann auch die wahre Bedeutung der Ordnung ϱ heraus, nebst einem ausführbaren Kriterium zur Ermittelung dieser Zahl, wofür die directe Untersuchung von ϑ_0 und seinen partiellen Derivirten nicht gelten kann.

Es erübrigt an dieser Stelle nur noch, zwei Eigenschaften der Secundärreihen einzuschalten, von denen die eine für beliebige Argumente $v_1 v_2 \cdots v_p$, die andere nur für die speciellen Werthe $u_1 - e_1$, $u_2 - e_2, \cdots, u_p - e_p$ derselben gilt.

Haben $e_1' e_2' \cdots e_p'$ dieselbe Bedeutung wie in den vorangehenden Nummern, so ist

$$\vartheta((u_\mu - e'_\mu + (gh)_\mu)) = \vartheta((u_\mu - e'_\mu))\, e^{-\Phi((h)) - 2\Sigma h_\mu (u_\mu - e'_\mu)}.$$

Schreibt man nun $A_\varrho((u_\mu - e_\mu))$ an Stelle von A_ϱ, so giebt dies, mit $\frac{\varrho!}{(2\zeta)^\varrho}$ multiplicirt, für $\zeta = 0$:

$$A_\varrho((u_\mu - e_\mu + (gh)_\mu)) = A_\varrho((u_\mu - e_\mu)) \cdot e^{-\Phi((h)) - 2\Sigma h_\mu (u_\mu - e_\mu)},$$

also, wenn man hier $(m_1 x_1 + \cdots + m_p x_p)^\varrho$ als symbolische Form für $G_\varrho((m))$ benutzt:

(a) $$\vartheta_\varrho((u_\mu - e_\mu + (gh)_\mu)) = \vartheta_\varrho((u_\mu - e_\mu))\, e^{-\Phi((h)) - 2\Sigma h_\mu (u_\mu - e_\mu)},$$

genau wie bei der Primärreihe für beliebige Argumente v_μ an Stelle von $u_\mu - e_\mu$. Da ferner die Summe der Reihe

$$\vartheta_\varkappa((v_\mu)) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m v}\, G_\varkappa((m))$$

sich nicht ändert, wenn jedes m durch $-m$ ersetzt wird, so folgt:

(b) $$(-1)^\varkappa \vartheta_\varkappa((-v_\mu)) = \vartheta_\varkappa((v_\mu)).$$

II.

Die ϑ-Function, bestimmt durch ihre Nullpunkte.

5. Nun habe ϑ, welches auch sein Ausdruck sein möge, die im Lehrsatze I, Nr. 3 zusammengestellten Eigenschaften. Da ϑ in der Fläche T' von jeder Unstetigkeit frei ist, so kann es, wenn es überhaupt

verschwindet, nur zu endlichen Ordnungen Null werden. In Folge dessen ist die Summe der Ordnungen, zu denen ϑ in der Fläche T' Null wird, das positiv um T' erstreckte Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(T')} d\log\vartheta$, was sich wie bekannt $= p$ findet.

III. Die Anzahl der vereinigt oder getrennt liegenden Punkte von T', in denen die Function ϑ zur ersten Ordnung Null wird, ist p.

Seien $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ diese Punkte. Wir bilden das Integral $P = \int u_\mu(o)\, d\log\vartheta$ und beschränken, um einen eindeutigen Integranden zu erhalten, die Veränderlichkeit von z auf die Fläche T'. In dieser Fläche hat dann P nur logarithmische Unstetigkeiten, sie finden statt in den Nullpunkten von ϑ und ihre Gewichte sind die Werthe von u_μ in diesen Punkten. Die Summe dieser Gewichte ist also

$$u_\mu(\varepsilon_1) + u_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + u_\mu(\varepsilon_p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(T')} u_\mu\, d\log\vartheta.$$

Nun folgt aus Lehrs. I. B., wenn alle g, h ganze Zahlen sind*):

$$\begin{array}{ll} \text{an } a_\lambda\text{:}\ \lg\overset{+}{\vartheta} - \lg\overset{-}{\vartheta} = 2h_\lambda \pi i, & d\lg\overset{+}{\vartheta} - d\lg\overset{-}{\vartheta} = 0, \\ \text{„ } b_\lambda\text{:}\ \lg\overset{+}{\vartheta} - \lg\overset{-}{\vartheta} = -2g_\lambda \pi i - a_{\lambda\lambda} - 2\overset{-}{u}_\lambda + 2e_\lambda; & d\lg\overset{+}{\vartheta} - d\lg\overset{-}{\vartheta} = -2\,du_\lambda, \\ \text{„ } c_\lambda\text{:}\ \lg\overset{+}{\vartheta} - \lg\overset{-}{\vartheta} = 2\pi i, & d\lg\overset{+}{\vartheta} - d\lg\overset{-}{\vartheta} = 0. \end{array}$$

Die Rechnung wird am besten so ausgeführt, dass man überall $\overset{-}{u}_\mu$ durch $\overset{+}{u}_\mu$ und den Periodicitätsmodul ersetzt, und die Integrationen $(\lambda = \mu)$, welche sich ausführen lassen, auch bewerkstelligt. Dann ergiebt sich

$$\sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) = e_\mu - (gh)_\mu + \frac{1}{2}[\pi i + a_{\mu\mu}] + \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \gtrless \mu} \int \left|\begin{matrix}\alpha \\ b \\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{u}_\mu\, du_\lambda,$$

also der Satz:

IV. Zwischen den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$ der Function ϑ und ihren Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ bestehen die p Relationen

*) Der Periodicitätsmodul des $\lg\vartheta$ an c_λ setzt voraus, dass die Ränder von c_λ so als $\overset{-}{c}$, $\overset{+}{c}$ bezeichnet sind, dass bei einem positiven Umlauf um T' der Weg von $\overset{-}{c}_\lambda$ aus zunächst über die vier Ränder von a_λ, b_λ führt und sich dann auf $\overset{+}{c}_\lambda$ fortsetzt. Dann ist an c_λ der Periodicitätsmodul des $\lg\vartheta$ gleich

$$\int \left|\begin{matrix}\beta \\ a \\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (d\lg\overset{+}{\vartheta} - d\lg\overset{-}{\vartheta}) + \int \left|\begin{matrix}\alpha \\ b \\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (d\lg\overset{-}{\vartheta} - d\lg\overset{+}{\vartheta}) = 2\pi i,$$

gleichviel in welcher Ecke von a_λ, b_λ der Schnitt c_λ mündet.

C. $$e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

wo 1) $K_1 K_2 \cdots K_p$ die Riemann'schen Constanten

D. $$K_\mu = \tfrac{1}{2}[\pi i + a_{\mu\mu}] + \tfrac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \bar{u}_\mu \, du_\lambda$$

bedeuten, und 2) die $2p$ ganzen Zahlen g, h dadurch gegeben sind, dass

E. an a_λ: $\log \overset{+}{\vartheta} - \log \overset{-}{\vartheta} = 2 h_\lambda \pi i$,

„ b_λ: $\log \overset{+}{\vartheta} - \log \overset{-}{\vartheta} = -2 g_\lambda \pi i - a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2 e_\lambda$

ist.

6. Eine ϑ-Function mit den, für die vorstehenden Sätze erforderlichen Eigenschaften A. B. Lehrs. I existirt aber stets, wenigstens in einer der Ausdrucksformen ϑ, ϑ_ϱ, wie auch immer die p Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ vorgeschrieben werden mögen.

Folglich lässt sich jedes Parametersystem $e_1 e_2 \cdots e_p$ in die vorstehende Form C. bringen.

Setzt man aber $e_\mu + K_\mu = v_\mu$, für $\mu = 1, 2, \cdots p$, so sind $v_1 v_2 \cdots v_p$ ebenso willkürlich, wie $e_1 e_2 \cdots e_p$, die man aus ihnen berechnen kann; es folgt:

V. Durch geeignete Wahl von p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ in der Fläche T' und den Simultanperioden $(gh)_1$, $(gh)_2$, $\cdots$, $(gh)_p$ können die p Ausdrücke

$$\sum_1^p u_1(\varepsilon_\varkappa) + (gh)_1; \; \sum_1^p u_2(\varepsilon_\varkappa) + (gh)_2; \cdots \sum_1^p u_p(\varepsilon_\varkappa) + (gh)_p$$

jedes beliebige Werthesystem

$$v_1 v_2 \cdots v_p$$

hervorbringen.

Eine Vervollständigung dieses Satzes wird sich weiter unten ergeben (Abschnitt III, Nr. 20).

7. Das Vorstehende gilt unabhängig von jeder Voraussetzung über die Ausdrucksform, durch welche die hier benutzte Function ϑ darzustellen ist. Wir führen zur Vereinfachung an ihrer Stelle eine andere ϑ-Function ein, welche für den Augenblick durch Θ bezeichnet werden möge, und zwar so, dass

$$\lg \Theta = \lg \vartheta - 2 \sum_\mu h_\mu u_\mu + \text{const.}$$

wird. Das ändert nur die Querschnittseigenschaften, es wird nämlich

an a_λ: $\log \overset{+}{\Theta} - \log \overset{-}{\Theta} = 0$,

„ b_λ: $\log \overset{+}{\Theta} - \log \overset{-}{\Theta} = -2 g_\lambda \pi i - a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2 e_\lambda - 2 \sum_\mu h_\mu a_{\lambda\mu}$,

während

an c_λ: $\log \overset{+}{\Theta} - \log \overset{-}{\Theta} = 2\pi i$

bleibt. Führt man aus C. den Werth von e_λ ein, so wird das, was in der zweiten Formel rechts steht,

$$= -a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2\left[\sum_1^p u_\lambda(\varepsilon_\varkappa) - K_\lambda\right],$$

so dass die auf die neue Function Θ bezüglichen Formeln aus denen des IV. Satzes erhalten werden, wenn man dort die ganzen Zahlen g, h unterdrückt.

Ist insbesondere die hier benutzte Function ϑ durch die Primär- oder eine Secundärreihe ϑ gegeben, also, für $v_\mu = u_\mu - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu$,

$$\vartheta = \vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!) = \vartheta(\!(v_\mu - (gh)_\mu)\!),$$

so folgt aus a. Nr. 4

$$\vartheta = e^{-\Phi((h)) + 2\sum h_\mu v_\mu} \vartheta(\!(v_\mu)\!),$$

also

$$\log \vartheta(\!(v_\mu)\!) = \log \vartheta - 2 \sum h_\mu u_\mu + \text{const.},$$

mithin ist dann Θ die Primär- oder Secundärreihe $\vartheta(\!(v_\mu)\!)$, d. h.

$$\Theta = \vartheta(\!(u_\mu - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!).$$

8. War also ϑ ursprünglich durch die Primär- oder eine Secundärreihe $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ gegeben, so tritt jetzt an seine Stelle der vereinfachte Ausdruck

$$\vartheta = \vartheta(\!(u_\mu - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!),$$

und es ist

$$\text{an } a_\lambda\colon \log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta} = 0,$$

$$\text{„ } b_\lambda\colon \log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta} = -a_{\lambda\lambda} - 2[\overset{-}{u}_\lambda - \sum_1^p u_\lambda(\varepsilon_\varkappa) + K_\lambda],$$

$$\text{„ } c_\lambda\colon \log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta} = 2\pi i.$$

Hier sind an Stelle der Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ der ϑ-Function ihre Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ eingeführt, aber es darf nicht außer Acht gelassen werden, daß, während jene ganz nach Belieben vorausgesetzt werden dürfen, Bestimmungen ähnlicher Art über die Lagerung der letztern noch ausstehen. Aber das, was hier vorliegt, reicht aus zur Herleitung eines Ausdrucks, welcher zunächst die vorstehende Function, dann aber für beliebig vorzuschreibende Lagen der p Nullpunkte eine ϑ-Function darstellt. Ist im Nullpunkte $\varepsilon_\varkappa$ der vorstehenden ϑ-Function $z = \zeta_\varkappa$, so ist dort $\log\vartheta = \log(z - \zeta_\varkappa) +$ funct. cont., und es sind $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ die einzigen Punkte der Fläche T', in denen $\log\vartheta = \infty$ wird.

Diese nämliche Unstetigkeit für einen beliebigen Punkt ε, und ausser ihr nur noch solche, die von der Lage des Punktes ε unabhängig sind, besitzt die von mir eingeführte Integralfunction $R(o \mid \varepsilon)$[1]), welche folgende Eigenschaften hat: Ist ζ der Werth von z im Punkte ε, und sind $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$ die unendlich fernen Punkte (Gebiete) der n-blättrigen Fläche T, so ist

$$(1)\qquad \text{in } \varepsilon\colon \qquad R = \log(z - \zeta) + \text{funct. cont.},$$

$$\text{in } \infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n\colon\; R = \frac{1}{n}\log z + \text{funct. cont.}$$

$$= \frac{1}{n}\log(z - \zeta) + \text{funct. cont.},$$

und das sind die einzigen Punkte, in denen $R = \infty$ wird.

2) Um R eindeutig zu machen, zieht man in T' aus einem beliebigen Punkte Ω Schnitte $l l_1 \ldots l_n$ nach $\varepsilon \infty_1 \ldots \infty_n$. In der so modificirten Fläche T'' ist R eindeutig und stetig; werden bei jedem Schnitte l die Ränder so als $\overset{+}{l}$ und $\overset{-}{l}$ bezeichnet, daß ein positiver Umlauf um den Endpunkt vom $-$ Rande zum $+$ Rande führt, so ist

$$\begin{array}{c|llllc} \text{an} & a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda & l & l_1 l_2 \ldots l_n, \\ \overset{+}{R} - \overset{-}{R} & \mathfrak{A}_\lambda & \mathfrak{B}_\lambda & 0 & 2\pi i & -\frac{2\pi i}{n}, \end{array}$$

1) Vergl. Brioschi, Annali di Mat. X, Seite 97 u. f., wo ich zwei Ausdrücke für $R(\varepsilon) = -R(o \mid \varepsilon)$ mitgetheilt habe; in diesem Bande S. 200 u. f.

wo $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ constante Periodicitätsmoduln sind, zwischen denen die p Relationen

$$\mathfrak{B}_\mu = \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda a_{\lambda\mu} + 2u_\mu(\varepsilon) - \frac{2}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} u_\mu(\infty_\varkappa)$$

bestehen. Nun seien $o_1 o_2 \ldots o_n$ die n Punkte der Fläche T, die zum Argumente z gehören. Aus den Unstetigkeiten von R findet sich, daß die einwerthige Function von z:

$$\frac{d}{dz}\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa \mid \varepsilon) = \frac{1}{z - \zeta}$$

ist, also ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa \mid \varepsilon) = \log(z - \zeta) + C,$$

und C constant, so lange es stetig ist.

Für unsern Zweck ist ein genaues Verständnis dieser Formel unerläßlich. Während in der Fläche T, jedesmal dem gehörigen Blatte entlang, aber nicht durch alle n Blätter zugleich, die Schnitte $c, a, b, l l_1 \ldots l_n$ geführt werden, führe man die gleichen Schnitte noch aus in einer einfachen z-Ebene, der Hülfsebene H. Die Fläche T verwandelt sich in eine (zweifach) zusammenhängende Fläche T'', H dagegen zerfällt in Stücke, und in jedem dieser Stücke hat C überall denselben Werth, aber beim Uebergange aus einem Stücke in ein anderes ändert C seinen Werth um den Periodicitätsmodul des Ausdruckes

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa \mid \varepsilon) - \log(z - \zeta) = C.$$

Nun enthält R sowie jedes Normalintegral I. G. u_μ noch eine additive verfügbare Constante, und es handelt sich um eine geeignete Wahl dieser Constanten.

Die Schnitte $l_1 l_2 \ldots l_n$, welche für alle Functionen R die gleichen sind, führe man so, dass sie von hinreichender Ferne an bis in's Unendliche einander bedecken. Von dort an ergiebt das in der Hülfsebene H nur noch einen einzigen Schnitt, und an diesem ist C stetig, da beim Uebergange über denselben alle

$$R(o_\varkappa \mid \varepsilon) = \frac{1}{n}\log(z - \zeta) + \text{funct. cont.}$$

sich um gleichviel vermehren, und die Vermehrung des Subtrahenden $\log(z - \zeta)$ n-mal so gross ist.

Bei dieser Wahl der Schnitte $l_1 l_2 \ldots l_n$ hat also C in den fernen Gebieten von H überall den gleichen Werth, und nun wähle ich (bei gehöriger Deutung von $\log(z-\xi)$) *die additive Constante von R so, dass dort $C = 0$ wird.* Dann folgt *für diesen Theil* der Hülfsebene H:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa \mid \varepsilon) = \log(z-\xi),$$

also für $z=\infty$

$$\lim \left[\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa \mid \varepsilon) - \log z \right] = 0. \tag{1}$$

Ebenso wähle ich für jedes Normalintegral I. G. u_μ die additive Constante so, dass

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} u_\mu(\infty_\varkappa) = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{2}$$

wird, was

$$2u_\mu(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^{p} \mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon) a_{\lambda\mu}$$

giebt. Sodann führe ich statt R das Normalintegral P ein:

$$P(o \mid \varepsilon) = R(o \mid \varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\mu} \mathfrak{A}_\mu \cdot u_\mu(o); \tag{3}$$

es folgt

α) P wird unendlich nur in $\varepsilon, \infty_1 \infty_2 \ldots \infty_n$ und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon\text{: } P = \log(z-\xi) + \text{funct. cont.};$$

$$\text{in } \infty_1 \infty_2 \ldots \infty_n \text{ ist: } P = \frac{1}{n} \log z + \text{funct. cont.}$$

β) In der Fläche T'' ist P eindeutig und stetig, aber es ist

an	a_λ	b_λ	c_λ	l	$l_1 l_2 \ldots l_n$,
$\overset{+}{P} - \overset{-}{P}$	0	$2u_\lambda(\varepsilon)$	0	$2\pi i$	$-\frac{2\pi i}{n}$.

γ) Für $z = \infty$ wird

$$\lim \left[\sum_{1}^{n} P(o_\varkappa \mid \varepsilon) - \log z \right] = 0.$$

Hieraus folgt, daß das Integral III. Gattung

$$\Pi(o) = P(o \mid o_1) - P(o \mid o_2) \tag{4}$$

im Unendlichen stetig bleibt und die

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \Pi(\infty_\varkappa) = 0 \tag{5}$$

ist. —

Dies vorausgeschickt, bilde ich die Function

$$L(o) = \sum_{\varkappa=1}^{p} P(o \mid \varepsilon_\varkappa) - \log \vartheta; \tag{6}$$

es folgt

1) L wird unendlich nur in $\infty_1 \infty_2 \ldots \infty_n$, und zwar ist dort

$$L = \frac{p}{n} \log z + \text{funct. cont.}$$

2) Um L eindeutig zu machen, betrachte man es als das Integral des in T' eindeutigen Ausdruckes $\frac{dL}{dz}$; man hat dann T' nur in eine einfach zusammenhängende Fläche T_1' zu verwandeln, in welcher die fortgesetzte Umkreisung derjenigen Punkte gesperrt ist, in denen das Integral, nämlich L selbst, eine logarithmische Unstetigkeit besitzt. Das wird erreicht, indem man die nach $\infty_1 \infty_2 \ldots \infty_n$ führenden und zuletzt einander bedeckenden Schnitte $l_1 l_2 \ldots l_n$ statt in einem beliebigen Punkte Ω, von hier an im Ausgangspunkte ω der p Querschnittbündel c, a, b beginnen läßt.

3) In dieser Fläche T_1' ist also $L(o)$ eindeutig und stetig, und da

an	a_λ	b_λ	c_λ	$l_1 l_2 \ldots l_n$
$\overset{+}{P}(o \mid \varepsilon_\varkappa) - \overset{-}{P}$	0	$2u_\lambda(\varepsilon_\varkappa)$	0	$-\frac{1}{n} \cdot 2\pi i$
$\log \overset{+}{\vartheta} - \log \overset{-}{\vartheta}$	0	$-a_{\lambda\lambda} - 2\overset{-}{u}_\lambda - 2K_\lambda + 2\sum_{1}^{p} u_\lambda(\varepsilon_\varkappa)$	$2\pi i$	0

ist, so ist an den gleichen Schnitten

$\overset{+}{L} - \overset{-}{L}$	0	$a_{\lambda\lambda} + 2\overset{-}{u}_\lambda + 2K_\lambda$	$-2\pi i$	$-\frac{p}{n} 2\pi i$.

Um hiervon sofort Anwendung zu machen, sei ϑ_1 irgend eine andere ϑ-Function mit den Nullpunkten $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_p$ und

$$L_1 = \sum P(o \mid \delta_\varkappa) - \log \vartheta_1;$$

die Differenz $L_1 - L$ ist der Fläche T selbst eindeutig zugeordnet und nie unstetig, also eine Constante. *Folglich ist die Function L selbst bis auf* *eine additive Constante für jede Lagerung der Nullpunkte von ϑ, also für alle ϑ-Functionen dieselbe.*

Berechnet man daher für *p beliebig angenommene Punkte* $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ eine Function Θ aus der Formel $L(o) = \Sigma P(o\,|\,\varepsilon_\lambda) - \log\Theta$, so erweist Θ sich als eine der Fläche T zugeordnete ϑ-Function mit den Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$; eine solche Function existirt also stets, wie auch ihre Nullpunkte vorgeschrieben werden mögen.

Das reicht für den Beweis dieses wichtigen Satzes aus; wir ziehen es vor, den Ausdruck der Function L in eine solche Form zu bringen, dass die entscheidende Eigenschaft, von der Lagerung der Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$, genauer von der ihrem ursprünglichen Ausdrucke (6) zu Grunde liegenden Function ϑ nur in einer additiven Constante abzuhängen, an ihm selber sichtbar wird.

Sei $\Pi = \Pi(o)$ das obige Integral III. G. und z_1, z_2 seien die Werthe von z in seinen Unstetigkeitspunkten o_1, o_2, ferner sei

$$\mathsf{P} = \int L(o)\,d\Pi,$$

wo wir z auf die Fläche T_1' beschränken, um einen eindeutigen Integranden zu erhalten. Innerhalb dieser Flache wird $\mathsf{P} = \infty$ nur in o_1 und o_2, und zwar ist

$$\text{in } o_1\colon \lim (z - z_1)\frac{d\mathsf{P}}{dz} = L(o_1), \qquad \text{in } o_2\colon \lim (z - z_2)\frac{d\mathsf{P}}{dz} = -L(o_2);$$

also sind die Unstetigkeiten von P in diesen Punkten logarithmische mit den Gewichten $L(o_1)$ und $-L(o_2)$. Es folgt

$$L(o_1) - L(o_2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(T_1')} L\,d\Pi.$$

Bezeichnet man durch $(a_\lambda), (b_\lambda), \ldots$ die Beiträge, welche die einzelnen Schnitte liefern, so dass die auszuführende Formel lautet:

$$L(o_1) - L(o_2) = \frac{1}{2\pi i}\Big\{\sum [(a_\lambda) + (b_\lambda) + (c_\lambda)] + \sum (l_\varkappa)\Big\},$$

und beachtet man, dass $\frac{d\Pi}{dz}$ wie T verzweigt, also an jedem Schnitte $d\overset{+}{\Pi} = d\overset{-}{\Pi} = d\Pi$ ist, so ergiebt sich

$$\alpha)\quad (a_\lambda) = \int \left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (\overset{+}{L} - \overset{-}{L})\,d\Pi = 0,$$

$$\beta)\quad (b_\lambda) = \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (\overset{-}{L} - \overset{+}{L})\,d\Pi = \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (-a_{\lambda\lambda} - 2K_\lambda - 2\overset{-}{u}_\lambda)\,d\Pi.$$

Aber an a_λ ist $\overset{+}{\Pi} - \overset{-}{\Pi} = 0$, also $\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda d\Pi = 0$, es bleibt:

$$(b_\lambda) = -2\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{-}{u}_\lambda\,d\Pi = -2\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda [d(\overset{-}{u}_\lambda\overset{+}{\Pi}) - \overset{+}{\Pi}\,du_\lambda],$$

d. i.

$$(b)_\lambda = -2[u_\lambda(\alpha_\lambda)\Pi(\alpha_\lambda') - u_\lambda(\gamma_\lambda)\Pi(\beta_\lambda)] + 2\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{\Pi}\,du_\lambda.$$

Nun ist $\Pi(\beta_\lambda) = \Pi(\alpha_\lambda')$, $u_\lambda(\alpha_\lambda) - u_\lambda(\gamma_\lambda) = \pi i$, also

$$u_\lambda(\alpha_\lambda)\Pi(\alpha_\lambda') - u_\lambda(\gamma_\lambda)\Pi(\beta_\lambda) = [u_\lambda(\alpha_\lambda) - u_\lambda(\gamma_\lambda)]\Pi(\alpha_\lambda') = \pi i\,\Pi(\alpha_\lambda'),$$

und so folgt

$$(b_\lambda) = 2\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{\Pi}\,du_\lambda - 2\pi i\,\Pi(\alpha_\lambda').$$

$$\gamma)\qquad (c_\lambda) = \int \left|\begin{matrix}\alpha'\\ c\\ \omega\end{matrix}\right|_\lambda (\overset{-}{L} - \overset{+}{L})\,d\Pi = 2\pi i[\Pi(\alpha_\lambda') - \Pi(\omega)].$$

Das giebt für's Erste

$$\sum [(a_\lambda) + (b_\lambda) + (c_\lambda)] = 2\sum \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{\Pi}\,du_\lambda - p\cdot 2\pi i\,\Pi(\omega).$$

Dazu kommt

$$\delta)\qquad (l_\varkappa) = \int \left|\begin{matrix}\infty\\ l\\ \omega\end{matrix}\right|_\varkappa (\overset{+}{L} - \overset{-}{L})\,d\Pi = -\frac{p}{n}\cdot 2\pi i[\Pi(\infty_\varkappa) - \Pi(\omega)].$$

Nun ist

$$(5)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \Pi(\infty_\varkappa) = 0,$$

also folgt

$$\sum (l_\varkappa) = p\cdot 2\pi i\,\Pi(\omega).$$

Führt man die Werthe beider Summen in die auszuführende Formel ein, so hebt $\Pi(\omega)$ sich weg, und es bleibt

$$L(o_1) - L(o_2) = \frac{1}{\pi i}\sum \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{\Pi}\,du_\lambda,$$

Hier wird für Π sein Ausdruck $P(o\,|\,o_1) - P(o\,|\,o_2)$ aus (4) eingesetzt; ist dann, für einen Augenblick,

$$L(o) - \frac{1}{\pi i}\sum \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_{\lambda} P(\overset{+}{\omega} \,|\, o) du_{\lambda}(\omega) = \Delta(o),$$

so haben wir $\Delta(o_1) = \Delta(o_2)$, also hat die Function $\Delta(o)$ in der Fläche T_1' überall denselben Werth. Bezeichnet man diesen durch $-\log C$, so ist C eine Constante. Jetzt giebt die Formel (6)

$$\log \vartheta = \sum_{\varkappa=1}^{p} P(o \,|\, \varepsilon_{\varkappa}) + \log C - \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^{p} \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_{\lambda} P(\overset{+}{\omega} \,|\, o) du_{\lambda}(\omega);$$

ich schreibe, mit etwas geänderter Bezeichnung:

$$L(o) = \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^{p} \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_{\lambda} P(\overset{+}{\omega} \,|\, o) du_{\lambda}(\omega), \tag{7}$$

und erhalte den Satz

(8) Diese Function von z wird unendlich nur in $\infty_1 \infty_2 \ldots \infty_n$, jedesmal ist

$$L = \frac{p}{n} \log z + \text{funct. cont.}$$

In der einfach zusammenhängenden Fläche T_1' ist sie eindeutig und stetig, und es ist

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} \text{an} & a_{\lambda} & b_{\lambda} & c_{\lambda} & l_1 l_2 \ldots l_n \\ \overset{+}{L} - \overset{-}{L} & 0 & a_{\lambda\lambda} + 2\overset{-}{u}_{\lambda} + 2K_{\lambda} & -2\pi i & -\frac{p}{n} \cdot 2\pi i. \end{array}$$

Weiter folgt, zunächst für die vorgelegte ϑ-Function und die *aus ihrem Ausdrucke zu ermittelnden Nullpunkte* $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ *derselben:*

$$\vartheta = C e^{\Sigma P(o \,|\, \varepsilon_{\varkappa}) - L(o)}; \tag{9}$$

aber nun erkennt man auf den ersten Blick aus den Eigenschaften der Function P und der, mit Hülfe der speciellen Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ gewonnenen, aber von ihnen ganz unabhängigen Function L[1]), dass der vorstehende Ausdruck (9) *für alle Lagerungen der Punkte* $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ die charakteristischen Eigenschaften der ϑ-Function hat, nämlich

1) Setzt man $\log r = P(o \,|\, \varepsilon) - \frac{1}{p}[L(o) + L(\varepsilon)]$, so ist r als Function von z in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig, außerhalb ε von Null verschieden und in ε Null zur ersten Ordnung. Dies ist die Function, welche vermöge ihrer ausgezeichneten Querschnittseigenschaften den Uebergang zwischen den algebraischen Functionen der Classe und den ϑ-Functioneu *wirklich* vermittelt. Vergl. auch Riemann's Th. d. A. F. Artikel 3.

1) dass ϑ in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig ist, und nur in $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ verschwindet, jedesmal zur ersten Ordnung;

2) dass

$$\begin{array}{c||c|c|c} \text{an} & a_{\lambda} & b_{\lambda} & c_{\lambda} \\ \log \overset{+}{\vartheta} - \log \overset{-}{\vartheta} & 0 & -a_{\lambda\lambda} - 2[\overset{-}{u}_{\lambda} - \sum_{1}^{p} u_{\lambda}(\varepsilon_{\varkappa}) + K_{\lambda}] & 2\pi i \end{array}$$

also

3) an a_{λ}: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$; an b_{λ}: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta} \cdot e^{-a_{\lambda\lambda} - 2\overset{-}{u}_{\lambda} + 2e_{\lambda}}$; an c_{λ}: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$

ist, für

$$e_{\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{p} u_{\lambda}(\varepsilon_{\varkappa}) - K_{\lambda}.$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

VI. Die Riemann'sche ϑ-Function existirt stets, wie auch ihre p Nullpunkte vorgeschrieben werden mögen, und sie ist durch diese bis auf einen constanten Factor bestimmt. Sind es die Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$, so kann man die ϑ-Function stets durch den Ausdruck

$$\vartheta = C e^{P(o \,|\, \varepsilon_1) + P(o \,|\, \varepsilon_2) + \cdots + P(o \,|\, \varepsilon_p) - L(o)}$$

darstellen, wo C von z unabhängig ist, und dann ist, für $\mu = 1, 2, \ldots p$

$$e_{\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{p} u_{\mu}(\varepsilon_{\varkappa}) - K_{\mu}$$

der μ^{te} Parameter dieser Function.

9. Fassen wir dies mit dem Lehrsatze I der Nr. 3 zusammen, so haben wir den

1. Fundamentalsatz.

VII. Die Riemann'sche ϑ-Function existirt stets, sei es dass ihr die Parameter $e_1 e_2 \ldots e_p$ oder die Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ vorgeschrieben werden, und wie das auch immer geschehen mag. Zwischen jenen und diesen besteht unter allen Umständen die Beziehung, dass für $\mu = 1, 2, \ldots p$

$$e_{\mu} = u_{\mu}(\varepsilon_1) + u_{\mu}(\varepsilon_2) + \cdots + u_{\mu}(\varepsilon_p) - K_{\mu} + (gh)_{\mu}$$

ist, wo alle g, h ganze Zahlen, und $K_1 K_2 \ldots K_p$ die Riemannschen Constanten sind.

Von hier an handelt es sich nur noch um geeignete Ausdrucksformen für die ϑ-Function. Sie ergeben sich durch die Ausscheidung derjenigen Fälle, wo die Summe der primären Reihe identisch Null ist, und den vollständigen Nachweis derjenigen Reihenausdrücke (Secundärreihen), welche dann an ihre Stelle treten.

III.

Die Reihenentwicklungen der ϑ-Function.

10. Die nun folgende Untersuchung bezieht sich zunächst auf Ausdrücke von der Form:

$$\vartheta(o|\varepsilon) = \vartheta(\!(u_\mu(o) - \sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!),$$

unter ϑ die Primärreihe, also die Riemann'sche Reihe selbst verstanden. Aus dem Vorangehenden geht fürs Erste nur hervor, dass es Parameter, also auch Punktgruppen $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ giebt, für welche dieser Ausdruck als Function von z nicht identisch Null ist, und für diesen Fall kennen wir den Ausdruck jedes Parameters $\Sigma u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu$ durch die p Nullpunkte der Function. Der Fall, wo dieser Ausdruck identisch Null ist, ist im I. Abschnitte vorgesehen worden; dass er wirklich vorkommt, muss noch bewiesen werden.

Hülfssatz. Bilden die p Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ kein Punktsystem I. G.*), so ist der Ausdruck $\vartheta(o|\varepsilon)$ entweder identisch Null, oder $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ sind seine Nullpunkte.

Ist nämlich ϑ nicht identisch Null, und sind dann $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_p$ seine Nullpunkte, so ist der μ^{te} Parameter $= \Sigma u_\mu(\delta_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu$, also ist für $\mu = 1, 2, \dots p$

$$\sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) = \sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\delta_\varkappa) + (gh)_\mu.$$

Wären $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_p$ andere Punkte als $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$, so wären beides Punktsysteme I. G., was bei $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ ausgeschlossen wurde. Also sind letztere, falls ϑ nicht identisch Null ist, die Nullpunkte von ϑ. Lässt man o mit ε_p zusammenfallen, so folgt in beiden Fällen

$$(1) \qquad \vartheta(\!(- \sum_{\varkappa=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!) = 0.$$

*) Man bilde die q Gleichungen, welche bewirken, dass der allgemeine Integrand I. G. in q Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_q$ zur Ordnung Eins verschwindet. Diese Punkte heissen im Folgenden ein Punktsystem I. G., wenn unter diesen q Gleichungen sich 1) überzählige befinden und 2) die Anzahl der wesentlichen $\overline{\gtrless} p-1$ ist. Jene entsprechen den „nothwendigen", diese den „wesentlichen" Punkten des Systems.

Das ist unter der Voraussetzung bewiesen, dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}$ mit ε_p zusammen kein Punktsystem I. G. bilden; es reicht aus, zu fordern, dass sie für sich allein kein solches bilden sollen. Denn wenn w' der unter dieser Voraussetzung bis auf einen constanten Factor völlig bestimmte Integrand I. G. ist, welcher in $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}$ verschwindet, so darf man für ε_p nur einen Punkt nehmen, in welchem w' nicht $= 0$ wird, um die ursprüngliche Voraussetzung zu erfüllen.

11. Es ist nun zu beweisen, das die vorstehende Gleichung (1) auch noch gilt, wenn sich unter diesen $p-1$ Punkten nothwendige befinden, also $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}$ ein Punktsystem I. G. bilden.

Die Wichtigkeit dieses Lehrsatzes wird es rechtfertigen, wenn wir zwei Beweise desselben geben. Sind $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\alpha \dots \varepsilon_{p-\varrho-1} \varepsilon'_{p-\varrho} \dots \varepsilon'_\beta \dots \varepsilon'_{p-1}$ ein Punktsystem I. G. mit den $p - \varrho - 1$ wesentlichen Punkten ε_α und den ϱ nothwendigen Punkten ε_β', so möge für jedes Punktsystem dieser Art

$$\vartheta(\!(- \sum_{1}^{p-\varrho-1} u_\mu(\varepsilon_\alpha) - \sum_{p-\varrho}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_\beta') + K_\mu)\!) \text{ als eine } E_\varrho$$

bezeichnet werden.

Es ist also bewiesen, dass jede $E_0 = 0$ ist. Ich werde voraussetzen, dass jede $E_{\varrho-1} = 0$ ist, was für $\varrho = 1$ richtig ist, und zeigen, dass daraus auch jede $E_\varrho = 0$ folgt: das ist der erste Beweis des Satzes. Zu diesem Zweck bilde ich, unter ϑ stets *die Primärreihe* verstanden,

$$\vartheta = \vartheta(\!(u_\mu(o) - u_\mu(\omega) - \sum_{1}^{p-\varrho-1} u_\mu(\varepsilon_\alpha) - \sum_{p-\varrho}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_\beta') + K_\mu)\!),$$

wo ω ebenso wie o ein variabler Punkt ist, so dass ϑ, wenn o mit ω zusammenfällt, in die vorgelegte E_ϱ, aber wenn o mit einem der ϱ Punkte ε_β' zusammenfällt, in eine $E_{\varrho-1}$ übergeht, also nach Voraussetzung $= 0$ wird. Dies letztere setzt voraus, dass die $p - \varrho - 1$ Punkte ε_α auch mit ω zusammen ein System wesentlicher Punkte bilden; bei der Wahl von ω sind also diejenigen Lagen auszuschliessen, in denen ω selbst ein zu den Punkten ε_α gehöriger nothwendiger Punkt sein würde. Nun findet der Hülfssatz statt, dass ϑ als Function von z entweder identisch Null ist, oder $\omega\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-\varrho-1} \varepsilon'_{p-\varrho} \dots \varepsilon'_{p-1}$ seine Nullpunkte sind: in beiden Fällen folgt die zu beweisende Gleichung $E_\varrho = 0$, wenn man o mit ω zusammenfallen lässt.

Ist nämlich ϑ nicht identisch Null, so hat es ausser den bereits nachgewiesenen ϱ Nullpunkten ε_β' noch $p - \varrho$ andere, welche $\eta_1 \dots \eta_\varkappa \dots \eta_{p-\varrho}$ heissen mögen, und dann ist der μ^{te} Parameter

$$u_\mu(\omega)+\sum u_\mu(\varepsilon_\alpha)+\sum u_\mu(\varepsilon'_\beta)-K_\mu=\sum u_\mu(\varepsilon'_\beta)+\sum u_\mu(\eta_\varkappa)-K_\mu+(gh)_\mu,$$

also folgt

$$u_\mu(\omega)+\sum u_\mu(\varepsilon_\alpha)=\sum u_\mu(\eta_\varkappa)+(gh)_\mu,$$

für $\mu=1,2,\ldots p$. Wären $\eta_1\ldots\eta_{p-\varrho}$ andere Punkte als $\omega\ \varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-\varrho-1}$, so wären beide Gruppen Punktsysteme I. G., was bei letzteren ausgeschlossen ist.

Also wird in allen Fällen $\vartheta=0$, wenn o mit ω zusammenfällt, d. h. ist jede $E_{\varrho-1}=0$, so ist auch die vorgelegte $E_\varrho=0$. Da aber jede $E_0=0$ ist, so ist es auch jede E_1, jede E_2 u. s. w. bis zur grössten Anzahl nothwendiger Punkte, die unter $p-1$ Punkten vorkommen können; die Gleichung (1) gilt also auch, wenn $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{p-1}$ irgend ein Punktsystem I. G. bilden, so haben wir den

2. Fundamentalsatz.

VIII. Dass für jede Lagerung der $p-1$ Punkte $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{p-1}$ der Ausdruck

$$\vartheta(\!(-\sum_{\varkappa=1}^{p-1}u_\mu(\varepsilon_\varkappa)+K_\mu)\!)=0$$

ist.

Dieser Satz hat eine tiefere Bedeutung, die wir im IV. Abschnitte nachweisen werden.

12. Nach dem vorstehenden formalen Beweise halte ich es für unerlässlich zu zeigen, dass und wie die Richtigkeit des vervollständigten Satzes aus der Stetigkeit der Reihensumme ϑ folgt.

Um den Werth von E_ϱ zu finden, schliesse man jeden nothwendigen Punkt ε'_β in ein endliches Gebiet (ε'_β) ein, welches ausser ihm keinen zweiten nothwendigen Punkt enthält, und nehme beim Ausdrucke E_0 den entsprechenden Punkt ε_β in diesem Gebiete (ε'_β) an. Lässt man nun jeden Punkt ε_β in diesem Gebiete (ε'_β) schwanken, so bleibt $E_0=0$, so lange kein Punkt ε_β mit dem zugeordneten ε'_β zusammenfällt; wäre E_ϱ nicht $=0$, so wäre E_0 unstetig, weil seine Maximalschwankung in diesen Gebieten nicht $=0$ würde, wenn für jeden derselben die grösste Ortsänderung von ε_β, d. h. die Maximalschwankung des zugehörigen Wertes von z zum Verschwinden gebracht wird.

13. Daraus folgt nun, dass $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p$ unter allen Umständen Nullpunkte des Ausdruckes $\vartheta(o|\varepsilon)$ sind. Bilden sie aber ein Punktsystem I. G., so giebt es auch noch andere Gruppen von p Punkten $\delta_1\delta_2\ldots\delta_p$, so dass für $\mu=1,2,\ldots p$

$$\sum_{\varkappa=1}^{p}u_\mu(\varepsilon_\varkappa)=\sum_{\varkappa=1}^{p}u_\mu(\delta_\varkappa)+(gh)_\mu$$

wird, und dann ist $\vartheta(o|\varepsilon)$ proportional zu $\vartheta(o|\delta)$, also wird $\vartheta(o|\varepsilon)$ auch $=0$ in $\delta_1\delta_2\ldots\delta_p$, und ist demnach identisch Null, da es andernfalls nicht mehr als p Nullpunkte besitzt.

IX. Bilden $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G., so ist die Summe der Primärreihe

$$\vartheta(\!(u_\mu(o)-\sum_{\varkappa=1}^{p}u_\mu(\varepsilon_\varkappa)+K_\mu)\!)$$

identisch Null.

14. Damit ist bewiesen, dass der im I. Abschnitte vorgesehene Fall, wo die Summe $\vartheta(\!(u_\mu-e_\mu)\!)$ der Primärreihe identisch Null ist, wirklich vorkommt, und es folgt zugleich, dass die einzigen Fälle, wo dies nicht eintritt, unter denjenigen zu suchen sind, wo die Parameter sich in die Form

$$e_\mu=\sum_{\varkappa=1}^{p}u_\mu(\varepsilon_\varkappa)-K_\mu+(gh)_\mu$$

bringen lassen, ohne dass $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. bilden.

15. Zum ursprünglichen Satze, dass es (Parameter, also auch) Punktgruppen (ε) giebt, für welche $\vartheta(o|\varepsilon)$ nicht identisch Null ist, kommt also jetzt der Satz hinzu, dass es auch solche giebt, für welche $\vartheta(o|\varepsilon)$ identisch verschwindet. Sei

$$\vartheta(o|\varepsilon)=\vartheta(\!(u_\mu(o)-\sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa)+K_\mu)\!)$$

identisch Null, aber

$$\vartheta(o|\delta)=\vartheta(\!(u_\mu(o)-\sum_1^p u_\mu(\delta_\varkappa)+K_\mu)\!)$$

sei es nicht.

Wir sind nach dem Vorangehenden sicher, dass $\delta_1\delta_2\ldots\delta_p$ kein Punktsystem I. G. bilden, sodann kann es sein, dass $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p$ ein solches bilden, wir werden jetzt beweisen, dass letzteres wirklich der Fall ist.

Mit Benutzung eines Riemann'schen Gedankens*) bilde ich folgende Reihe von Ausdrücken:

*) Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, art. 3.

$$\Delta_0 = \vartheta(\!(u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!),$$

$$\Delta_1 = \vartheta(\!(u_\mu(o) + u_\mu(o_1) - u_\mu(\delta_{i_1}) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!),$$

$$— \quad — \quad — \quad —$$

$$\Delta_q = \vartheta(\!(\sum_0^q u_\mu(o_\varkappa) - \sum_1^q u_\mu(\delta_{i_\varkappa}) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!),$$

$$— \quad — \quad — \quad —$$

$$\Delta_p = \vartheta(\!(\sum_0^p u_\mu(o_\varkappa) - \sum_1^p u_\mu(\delta_\varkappa) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!).$$

Bei der Bildung von Δ_q ist für $\delta_{i_1}\delta_{i_2}\dots\delta_{i_q}$ irgend eine Gruppe von q Punkten aus $\delta_1\delta_2\dots\delta_p$ zu nehmen; das ist auf p_q Arten möglich, und so gross ist die Anzahl verschiedener Ausdrücke, welche unter Δ_q zu verstehen sind. Dann ist noch zu bemerken, dass $oo_1\dots o_p$ unabhängig variable Punkte bedeuten.

Der erste Ausdruck Δ_0 ist nach Voraussetzung $= 0$. Sodann ist klar, dass man aus einer Gruppe Δ_q die vorangehende Δ_{q-1} erhält, wenn man den letzten variablen Punkt o_q in jeder einzelnen Δ_q nacheinander mit $\delta_{i_1}\dots\delta_{i_q}$ zusammenfallen lässt. Sind also sämmtliche Δ_q identisch Null, so sind es auch alle vorangehenden Gruppen $\Delta_{q-1}, \Delta_{q-2}\dots\Delta_1, \Delta_0$.

*Aber nicht alle folgenden sind es**), denn Δ_p ist nicht identisch Null, wie sofort folgt, wenn man $o_1o_2\dots o_p$ mit $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_p$ zusammenfallen lässt, wodurch Δ_p ohne Unstetigkeit in den nicht identisch verschwindenden Ausdruck $\vartheta(o|\delta)$ übergeht.

Daraus folgt, dass es in der Reihe $1, 2, \dots p$ *eine völlig bestimmte Zahl* ϱ giebt derart, dass 1) für $q < \varrho$ alle Ausdrücke Δ_q identisch Null sind, aber 2) nicht sämmtliche Functionen der Gruppe Δ_ϱ identisch verschwinden. Sei insbesondere

$$\Delta_\varrho = \vartheta(\!(\sum_0^\varrho u_\mu(o_\varkappa) - \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_\varkappa) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!)$$

nicht identisch Null. Dann wird es, wenn jetzt o der variable Punkt ist, $= 0$ in $\delta_1\delta_2\dots\delta_\varrho$, weil es, wenn o mit einem von diesen Punkten zusammenfällt, sich auf eine $\Delta_{\varrho-1}$ reduciert.

Seien $o_{\varrho+1}\dots o_p$ die übrigen Nullpunkte von Δ_ϱ. *Sie sind durch den Ausdruck von* Δ_ϱ *völlig bestimmt*, d. h. soweit dieser unmittelbar zu

*) Vergleiche den § 2 in der Abhandlung des Herrn C. Neumann.

erkennen giebt, bestimmt durch die Lagerung von $\delta_1\delta_2\dots\delta_\varrho$, von $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_p$ und $o_1o_2\dots o_\varrho$, *und diese letztern sind frei wählbar.*

Für die Parameter von Δ_ϱ ergiebt sich

$$-\sum_1^\varrho u_\mu(o_\varkappa) + \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_\varkappa) + \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu$$

$$= \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_\varkappa) + \sum_{\varrho+1}^p u_\mu(o_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu;$$

zur Bestimmung von $o_{\varrho+1}\dots o_p$ erhält man also die Gleichungen des Abel'schen Theorems

$$\text{(a)} \qquad \sum_{\varkappa=1}^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) = \sum_{\varkappa=1}^p u_\mu(o_\varkappa) + (gh)_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, \dots p)$$

die gesuchten Punkte $o_{\varrho+1}\dots o_p$ erweisen sich als unabhängig von der Lage der Punkte $\delta_1\delta_2\dots\delta_\varrho$.

Durch diese p Gleichungen sind also, wie wir ausdrücklich wiederholen müssen, die $p - \varrho$ Punkte $o_{\varrho+1}\dots o_p$ völlig bestimmt, während $o_1o_2\dots o_\varrho$ verfügbar bleiben. Denn sie geben

$$\Delta_\varrho = \vartheta(\!(u_\mu(o) + \sum_1^\varrho u_\mu(o_\varkappa) - \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_\varkappa) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!)$$

proportional zu

$$\vartheta(\!(u_\mu(o) - \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_\varkappa) - \sum_{\varrho+1}^p u_\mu(o_\varkappa) + K_\mu)\!);$$

könnte man $o_{\varrho+1}\dots o_p$ auf mehr als eine Art so wählen, dass den Gleichungen (a) Genüge geschieht, so hätte Δ_ϱ mehr als p Nullpunkte ohne identisch Null zu sein.

Nun ist die Gruppe $o_1o_2\dots o_p$ nicht identisch mit der Gruppe $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_p$; denn selbst wenn beide Gruppen einzelne Punkte mit einander gemein haben, so enthält die erstere doch auch solche Punkte, die in der andern fehlen, nämlich $o_1o_2\dots o_\varrho$.

1) Also sind beide Gruppen Punktsysteme I. G., sie sind corresidual, und die eine enthält demnach ebensoviel nothwendige Punkte wie die andere.

2) Aber von der ersten Gruppe können wir die nothwendigen Punkte selber nachweisen, das giebt dann für die andere Gruppe die Anzahl ihrer nothwendigen Punkte. Da nämlich die p Gleichungen (a) ϱ Punkte der ersten Gruppe $(o_1o_2\dots o_\varrho)$ unabhängig variabel lassen, und durch sie die $p - \varrho$ übrigen $(o_{\varrho+1}\dots o_p)$ völlig bestimmen, so sind

diese letzteren wesentliche Punkte und zu ihnen gehören jene als nothwendige. D. h. unterwirft man den allgemeinen Integranden I. G. w' der Bedingung, in den $p-\varrho$ Punkten $o_{\varrho+1}\dots o_p$ zur ersten Ordnung zu verschwinden, so sind diese $p-\varrho$ Gleichungen von einander unabhängig, aber sie ziehen das Verschwinden von w' in $o_1 o_2 \dots o_\varrho$ als nothwendige Folge nach sich.

3) Unter den obigen Voraussetzungen über die Functionengruppen $\Delta_{\varrho-1}$ und Δ_ϱ bilden also auch $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G., welches aus $p-\varrho$ wesentlichen und ϱ nothwendigen Punkten besteht[1]).

Beschränken wir uns für einen Augenblick auf das, was unsern nächsten Zweck betrifft, so haben wir aus 1) den Satz:

X. Ist der Ausdruck

$$\vartheta(\!(u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!)$$

identisch Null, so bilden $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G.

16. Aber das ist die Umkehrung des Satzes IX, Nr. 13; beide vereinigt geben den

3. Fundamentalsatz.

XI. Damit

$$\vartheta(\!(u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!)$$

identisch verschwinde, ist erforderlich und hinreichend, dase $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. bilden.

Oder auch der

4. Fundamentalsatz.

XII. Der Ausdruck

$$\vartheta(\!(u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!)$$

ist stets und nur dann nicht identisch Null, wenn sich unter den p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ kein nothwendiger befindet, und dann sind dies die Nullpunkte der ϑ-Function.

17. Nun lässt sich (Nr. 6) jedes Parametersystem $e_1 e_2 \dots e_p$ in die Form

1) Ich muss es einer andern Gelegenheit vorbehalten, auf die hier benutzten und, nachdem ich den wahren Inhalt herausgestellt habe, sehr leicht zu beweisenden Sätze über Punktsysteme I. G. im Zusammenhange (Abel'sches Theorem, Riemann-Roch'scher Satz) zurückzukommen.

$$e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \dots p)$$

bringen. Bilden $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ kein Punktsystem I. G., so ist $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ nach dem Vorstehenden nicht identisch Null, und $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ sind seine Nullpunkte. Bilden sie ein solches, so tritt der in den Nummern 3 und 4 vorgesehene Fall ein, wo $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ identisch Null ist, und es Secundärreihen zu einer durch die Parameter völlig bestimmten, an der angeführten Stelle durch ϱ bezeichneten Ordnung giebt, welche eine ϑ-Function mit diesen Parametern darstellen. Die Nullpunkte $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_p$ einer solchen bilden dann (Nr. 10) ein mit $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ corresiduales System. So oft also vermöge der Wahl der Parameter Secundärreihen statthaben, bilden ihre Nullpunkte stets ein Punktsystem I. G.

Aber es findet auch der umgekehrte Satz statt, dass zu jedem Punktsystem I. G. $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ eine Secundärreihe gehört, von welcher jenes die Nullpunkte sind, und wir sind jetzt im Stande, diese Reihe wirklich herzustellen.

Sei

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$$

ein gegebenes Punktsystem I. G., und ϱ die Anzahl seiner nothwendigen Punkte, also $\varrho \geqq 1$.

An Stelle der Reihe von $p+1$ Functionengruppen Δ der Nr. 15 bilde ich folgende $p+1$ Primärreihen:

$$F_q = \vartheta(\!(\sum_{\varkappa=0}^{q} u_\mu(o_\varkappa) - \sum_{\varkappa=1}^{q} u_\mu(\omega_\varkappa) - \sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!)$$

für $q = 0, 1, \dots p$. Wie am angegebenen Orte sind $o o_1 \dots o_p$ unabhängig variable Punkte; aber während dort die Punkte $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_p$ noch in fester Lage vorausgesetzt werden mußten, sind sie hier durch unabhängig variable Punkte $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_p$ ersetzt.

Wiederum ist der erste Ausdruck F_0, in der Reihe $F_0 F_1 \dots F_p$, identisch Null; ist es auch F_q, so sind es alle vorangehenden; aber nicht alle folgenden sind es, denn F_p ist nicht für alle Lagen der $2p+1$ variabeln Punkte $o o_1 \dots o_p\ \omega_1 \dots \omega_p$ Null, da es, wenn $o_1 o_2 \dots o_p$ nach $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ rücken, sich in eine Primärreihe verwandelt, deren Summe nach XII. nicht identisch Null ist. Daraus folgt, wie in Nr. 15 der Schluss, dass es zwischen 0 und p eine Zahl σ giebt, so dass F_σ nicht identisch Null ist, wohl aber $F_{\sigma-1}$ und jedes vorangehende F_q. Die Resultate, welche dort gefunden wurden, liefern jetzt den Werth von σ und damit die Umkehrung jener Sätze.

In der That verschwindet F_σ als Function von z in $\omega_1\omega_2\dots\omega_\sigma$ und nach Nr. 15 in denjenigen völlig bestimmten $p-\sigma$ Punkten $o_{\sigma+1}\dots o_p$, welche durch $o_1\dots o_\sigma$ zu einem mit $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_p$ corresidualen System ergänzt werden; in diesem sind aber $o_1 o_2\dots o_\sigma$ und nur diese willkürlich wählbar, also sind sie die nothwendigen Punkte dieses Systems. Da aber die Anzahl der nothwendigen Punkte für beide corresiduale Systeme die nämliche ist, folgt $\sigma=\varrho$.

Wir müssen alles, was hiermit bewiesen ist, zusammenstellen.

Vorausgesetzt ist, dass $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten bilden. Es folgt

1) dass, unter ϑ die Primärreihe verstanden,

$$F_\varrho=\vartheta\left(\!\!\left(\sum_0^\varrho u_\mu(o_\varkappa)-\sum_1^\varrho u_\mu(\omega_\varkappa)-\sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa)+K_\mu\right)\!\!\right)$$

nicht identisch Null, sondern eine ϑ-Function ist;

2) dass es als Function von z Null wird in den ϱ unabhängig variabeln Punkten $\omega_1\omega_2\dots\omega_\varrho$ und denjenigen $p-\varrho$ Punkten $o_{\varrho+1}\dots o_p$, welche vermöge der Gleichungen

$$\text{(a)}\qquad \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa)=\sum_1^p u_\mu(o_\varkappa)+(gh)_\mu \qquad (\mu=1,2,\dots p)$$

durch die ϱ Punkte $o_1 o_2\dots o_\varrho$ zu einem mit $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_p$ corresidualen System ergänzt werden;

3) dass ferner $F_\varrho=0$ wird, wenn irgend einer der ϱ variabeln Punkte $\omega_1\omega_2\dots\omega_\varrho$ mit irgend einem der $\varrho+1$ Punkte $o o_1\dots o_\varrho$ zusammenfällt und

4) dass F_ϱ in allen diesen Fällen nur zur ersten Ordnung Null wird.

Es handelt sich um die Folgerungen, welche sich aus diesen vier Grundeigenschaften der ϑ-Function F_ϱ ergeben. Dabei möge der Werth von z für den Punkt $o_\varkappa$ durch $z_\varkappa$, für den Punkt $\omega_\varkappa$ durch $\zeta_\varkappa$ bezeichnet werden.

Wir entwickeln F_ϱ als Function von ζ_ϱ nach Potenzen von $\zeta_\varrho-z_\varrho$, indem wir dabei in der Fläche T den Punkt o_ϱ zum Entwicklungszentrum nehmen. Da F_ϱ in demselben zur ersten Ordnung verschwindet, so hat die Entwicklung die Form

$$F_\varrho=2(z_\varrho-\zeta_\varrho)F'_{\varrho-1}+\frac{(2(z_\varrho-\zeta_\varrho))^2}{1\cdot 2}F''_{\varrho-1}+\cdots,$$

und es ist $F'_{\varrho-1}$ als Function der übrigen Variabeln $z z_1\dots z_\varrho\ \zeta_1\dots\zeta_{\varrho-1}$ nicht identisch Null. Schreiben wir zur Abkürzung

$$v_\mu=\sum_0^{\varrho-1}u_\mu(o_\varkappa)-\sum_1^{\varrho-1}u_\mu(\omega_\varkappa)-\sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa)+K_\mu,$$

also

$$F_\varrho=\sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m_\mu v_\mu}\cdot e^{2\Sigma m_\mu[u_\mu(o_\varrho)-u_\mu(\omega_\varrho)]},$$

so folgt

$$F'_{\varrho-1}=\sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m_\mu v_\mu}\cdot\sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho),$$

wenn $u'_\mu(o)$ den Werth von $\frac{du_\mu}{dz}$ im Punkte o bedeutet.

Das ist eine Secundärreihe erster Ordnung mit den Argumenten $v_1 v_2\dots v_p$:

$$F'_{\varrho-1}=\vartheta_1((v_\mu))=\vartheta_1\left(\!\!\left(\sum_0^{\varrho-1}u_\mu(o_\varkappa)-\sum_1^{\varrho-1}u_\mu(\omega_\varkappa)-\sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa)+K_\mu\right)\!\!\right),$$

und es ist nun zunächst festzustellen, dass dies in Ansehung seiner Argumente, also vom Punkte o_ϱ abgesehen, eine ϑ-Function ist. In der That folgen die hierzu erforderlichen Eigenschaften (A. B. Lehrs. I, Nr. 3) innerhalb der Fläche T'' aus der Form des Reihenausdrucks und wie in Nr. 3 für A_ϱ, die Querschnittseigenschaften aus denen von F_ϱ, wenn man beachtet, dass

$$F'_{\varrho-1}=\lim\frac{F_\varrho}{2(z_\varrho-\zeta_\varrho)}$$

ist, wenn ω_ϱ nach o_ϱ rückt.

Es handelt sich nun um den Nachweis, dass auch diese ϑ-Function die oben zusammengestellten vier Grundeigenschaften besitzt, nur dass $\varrho-1$ an die Stelle von ϱ tritt.

Die erste derselben, dass $F'_{\varrho-1}$ ϑ-Function und nicht identisch Null ist, wurde bereits bewiesen. Sodann hat $F'_{\varrho-1}$, ebenso wie jeder andere Entwicklungscoefficient $F''_{\varrho-1},\dots$ als Function von z mit F_ϱ alle diejenigen Nullpunkte gemein, die von ζ_ϱ unabhängig sind, und dasselbe gilt von $F'_{\varrho-1}$ als Function einer der übrigen Variabeln $z_1\dots z_{\varrho-1}\ \zeta_1\dots\zeta_{\varrho-1}$.

In allen diesen Fällen wird die Reihensumme F_ϱ nur zur ersten Ordnung Null, unter den Entwicklungscoefficienten $F'_{\varrho-1}$, $F''_{\varrho-1},\dots$ muss es also in jedem einzelnen Falle solche geben, die ebenfalls nur zu dieser niedrigsten Ordnung verschwinden. Dass $F'_{\varrho-1}$ in jedem Falle zu diesen letztern gehört, ist eine der übrigen Grundeigenschaften und muss bewiesen werden.

Als Function von z hat die ϑ-Function $F'_{\varrho-1}$ die Parameter

$$-\sum_1^{\varrho-1} u_\mu(o_\varkappa) + \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_\varkappa) + \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu,$$

was mit Benutzung der Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) = \sum_1^{p} u_\mu(o_\varkappa) + (gh)_\mu$$

in

$$\sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_\varkappa) + \sum_\varrho^{p} u_\mu(o_\varkappa) + (gh)_\mu - K_\mu$$

übergeht. Sodann ist von den p Nullpunkten $\omega_1 \dots \omega_\varrho\ o_{\varrho+1} \dots o_p$ der Function F_ϱ nur einer von ζ_ϱ abhängig, nämlich der Punkt ω_ϱ; die $p-1$ übrigen sind also auch Nullpunkte aller Entwicklungscoefficienten, also auch von $F'_{\varrho-1}$ als Function von z.

Ist η der noch fehlende, so ist der vorstehende μ^{te} Parameter von $F'_{\varrho-1}$ auch

$$-\sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_\varkappa) + u_\mu(\eta) + \sum_{\varrho+1}^{p} u_\mu(o_\varkappa) - K_\mu + (g'h')_\mu,$$

es folgt

$$u_\mu(\eta) = u_\mu(o_\varrho) + (g - g' \,|\, h - h')_\mu,$$

für $\mu = 1, 2, \dots p$. Also ist der gesuchte Punkt η kein anderer als der Punkt o_ϱ selber, weil es sonst eine wie die Fläche T verzweigte Function erster Ordnung von z gäbe, die nämlich in η Null, in o_ϱ unendlich zur Ordnung 1 wird und sonst stetig bleibt, was nur für $p=0$ möglich ist, und die Existenz von Integralen I. G. ausschließt.

Wir finden, dass $F'_{\varrho-1}$ als Function von z Null wird in den $\varrho - 1$ unabhängig variabeln Punkten $\omega_1\,\omega_2 \dots \omega_{\varrho-1}$, dem Punkt ω_ϱ und den $p-\varrho$ Punkten $o_{\varrho+1} \dots o_p$, wenn diese so bestimmt werden, dass $o_\varrho\, o_{\varrho+1} \dots o_p$ mit den $\varrho - 1$ Punkten $o_1\, o_2 \dots o_{\varrho-1}$ vermöge der Gleichungen (a) ein mit $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ corresiduales System bilden, und es ist zu beachten, dass hierbei die Anzahl der nothwendigen Punkte beider Systeme nicht in Betracht gekommen ist. Da dies p getrennt liegende Nullpunkte sind, so wird $F'_{\varrho-1}$ in ihnen nur zur ersten Ordnung Null.

Jetzt folgt ohne Weiteres, dass $F'_{\varrho-1}$ auch verschwindet, wenn umgekehrt einer der $\varrho - 1$ Punkte $\omega_1 \dots \omega_{\varrho-1}$ mit einem der ϱ Punkte $o\, o_1 \dots o_{\varrho-1}$ zusammenfällt also, wie soeben für den Fall, dass einer der letztern variabel ist, bewiesen wurde, jedesmal nur zur ersten Ordnung verschwindet. Bei der ϑ-Function

$$F'_{\varrho-1} = \vartheta_1\Big(\!\Big(\sum_0^{\varrho-1} u_\mu(o_\varkappa) - \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_\varkappa) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K \Big)\!\Big)$$

sind also die gleichen Grundeigenschaften vorhanden, wie bei der ursprünglichen ϑ-Function F_ϱ, nur dass in ihren Argumenten die Anzahl der variabeln Punkte o von $\varrho + 1$ auf ϱ, der Punkte ω von ϱ auf $\varrho - 1$ gesunken ist.

Bei der Uebertragung der Grundeigenschaften von F_ϱ auf

$$F'_{\varrho-1} = \lim \frac{F_\varrho}{2\,(z_\varrho - \zeta_\varrho)}$$

ist bezüglich der Punktsysteme $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ und $o_1\, o_2 \dots o_p$ nur die, durch die Gleichungen (a) ausgedrückte Corresidualität derselben, nicht die Anzahl ihrer nothwendigen Punkte benutzt worden. In Folge dessen übertragen sie sich auch von der ϑ-Funktion $F'_{\varrho-1}$ auf

$$F''_{\varrho-2} = \lim \frac{F'_{\varrho-1}}{2(z_{\varrho-1} - \zeta_{\varrho-1})},$$

wenn $\omega_{\varrho-1}$ nach $o_{\varrho-1}$ rückt. Das giebt, wenn jetzt zur Abkürzung

$$v_\mu = \sum_0^{\varrho-2} u_\mu(o_\varkappa) - \sum_1^{\varrho-2} u_\mu(\omega_\varkappa) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu$$

geschrieben wird,

$$F''_{\varrho-2} = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu v_\mu} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_{\varrho-1}),$$

dies ist also eine Secundärreihe zweiter Ordnung mit den Argumenten $v_1\, v_2 \dots v_p$:

$$F''_{\varrho-2} = \vartheta_2((v_\mu)) = \vartheta_2\Big(\!\Big(\sum_0^{\varrho-2} u_\mu(o_\varkappa) - \sum_1^{\varrho-2} u_\mu(\omega_\varkappa) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu \Big)\!\Big);$$

das ist nicht identisch Null, drückt in Ansehung seiner Argumente, also abgesehen von den beiden Punkten o_ϱ und $o_{\varrho-1}$, eine ϑ-Funktion aus, als Function von z wird $F''_{\varrho-2} = 0$ in den $\varrho - 2$ variabeln Punkten $\omega_1\, \omega_2 \dots \omega_{\varrho-2}$ und denjenigen $p - \varrho + 2$ Punkten $o_{\varrho-1}\, o_\varrho \dots o_p$, welche bei der vorgeschriebenen Lage von $o_{\varrho-1}$ und o_ϱ, vermöge der Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) = \sum_1^{p} u_\mu(o_\varkappa) + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \dots p)$$

mit $o_1\, o_2 \dots o_{\varrho-2}$ zusammen ein zu $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ corresiduales System bilden, ferner wird diese Function $=0$, so oft einer der Punkte $\omega_1 \dots \omega_{\varrho-2}$ mit einem der Punkte $o\, o_1 \dots o_{\varrho-2}$ zusammenfällt, und in allen diesen Fällen wird sie $=0$ zur Ordnung Eins.

Diese Schlussweise setzt sich fort, und führt schließlich zum Ausdrucke

$$F_0^{(\varrho)} = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m_\mu v_\mu} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_{\varrho-1}) \ldots \sum m_\mu u'_\mu(o_1)$$

für

$$v_\mu = u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu;$$

das ist eine Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung mit den Argumenten $v_1 v_2 \ldots v_p$:

$$F_0^{(\varrho)} = \vartheta_\varrho(\!(v_\mu)\!) = \vartheta_\varrho(\!(u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!)$$

und den Parametern

$$e_\mu = \sum_{\varkappa=1}^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p).$$

Ihre Summe ist Function einer einzigen Variablen z und nicht identisch Null. Sie drückt, als Function von z, eine ϑ-Function aus, und $o_1 o_2 \ldots o_p$ sind ihre Nullpunkte. Diese Punkte repräsentiren jedes zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ corresiduale System, da die ϱ nothwendigen Punkte $o_1 o_2 \ldots o_\varrho$ unabhängig variabel sind.

Nimmt man für $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ zunächst diese p Punkte $o_1 o_2 \ldots o_p$ selber, so ergiebt sich der Satz

XIII. Auch wenn die Nullpunkte $o_1 o_2 \ldots o_p$ der ϑ-Function ein Punktsystem I. G. bilden, kann man diese Function in Reihenform ausdrücken. Ist ϱ die Anzahl der nothwendigen Punkte dieses Systems, und sind das die Punkte $o_1 o_2 \ldots o_\varrho$, so erhält man als Ausdruck für die verlangte ϑ-Function die Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung:

$$\vartheta_\varrho = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m_\mu [u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(o_\varkappa) + K_\mu]} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_1)$$
$$\cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_2) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho),$$

wo im algebraischen Factor unter dem Summenzeichen jeder Integrand I. G. u'_μ auch durch die Function φ_μ ersetzt werden darf, welche seinen Zähler bildet.

18. Führt man aber im Ausdrucke von $F_0^{(\varrho)}$ an Stelle der Punkte ε Parameter ein:

$$e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p),$$

und beachtet bezüglich der Simultanperioden $(gh)_\mu$ die Formel (a) Nr. 4, so ergiebt sich der folgende Satz:

XIV. Kann man die p Constanten $e_1 e_2 \ldots e_p$ auf irgend eine Art in die Form bringen

$$e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p),$$

so dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten bilden, so giebt es unendlich viele ϑ-Functionen mit den Parametern $e_1 e_2 \ldots e_p$. Ihr allgemeiner Ausdruck ist die Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung

$$\vartheta_\varrho(\!(u_\mu - e_\mu)\!) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m_\mu (u_\mu - e_\mu)} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_1)$$
$$\cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_2) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho),$$

welche ausser dem Punkte o noch von ϱ unabhängig variabeln Punkten $o_1 o_2 \ldots o_\varrho$ abhängt. Die Nullpunkte dieser Function bilden dasjenige zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ corresiduale System, dessen ϱ nothwendige Punkte $o_1 o_2 \ldots o_\varrho$ sind.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass alle diese corresidualen Systeme von p Punkten einzelne Punkte mit einander gemein haben, dann sind dies gemeinsame Nullpunkte aller ϑ-Functionen der Schaar. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn es in der Classe gar keine Function von der Ordnung p giebt. Benutzt man ϑ-Functionen dieser Art, so stellt der Quotient zweier ϑ-Functionen mit den gleichen Parametern eine algebraische Function τ der Classe dar, was niemals möglich ist, wenn nur primäre Reihen zur Verwendung kommen.*)

19. Setzen wir allgemein

$$\vartheta_\sigma = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m_\mu (u_\mu - e_\mu)} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_1) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_2) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_\sigma)$$

wo $e_1 e_2 \ldots e_p$ dieselbe Bedeutung haben wie im vorigen Satze, so lässt sich leicht zeigen, dass unter den Voraussetzungen dieses Satzes nicht bloss $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!) = \vartheta_0$, sondern auch $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_{\varrho-1}$ gleich Null sind, und zwar für alle Lagen der Punkte $o o_1 \ldots o_{\varrho-1}$, während ϑ_ϱ nicht identisch Null ist. In der That geht

*) Vergl. Riemann, Theorie d. Ab. F. art. 27; der vorstehende Ausdruck ϑ_ϱ tritt auch schon bei Riemann auf, aber in ganz anderem Zusammenhange und mit andern Argumenten r_μ statt $u_\mu - e_\mu$. Ueber d. V. s. art. 5 Formel 4.

$$F^{(\sigma)}_{\varrho-\sigma} = \sum e^{\Phi((m))+2\sum m_\mu e_\mu} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_{\varrho-1}) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_{\varrho+1-\sigma}),$$

für

$$v_\mu = u_\mu(o) + \sum_{\varkappa=1}^{\varrho-\sigma} [u_\mu(o_\varkappa) - u_\mu(\omega_\varkappa)] - e_\mu$$

in einen Ausdruck von der Form ϑ_σ über, wenn man $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{\varrho-\sigma}$ nach $o_1 o_2 \dots o_{\varrho-\sigma}$ rücken lässt, nur dass die variabeln Punkte $o_1 o_2 \dots o_\sigma$ von ϑ_σ hier durch $o_\varrho o_{\varrho-1} \dots o_{\varrho+1-\sigma}$ ersetzt sind. Aber für $\sigma = 1, 2, \dots \varrho-1$ ist von diesem Ausdrucke $F^{(\sigma)}_{\varrho-\sigma}$ bewiesen, dass er verschwindet, wenn ein Punkt ω mit einem Punkte o zusammenfällt, also sind $\vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_{\varrho-1}$ alle identisch Null, während ϑ_ϱ es nicht ist.

Der Umstand, dass dies nicht bloss für alle Lagen von o, sondern auch von $o_1 o_2 \dots o_{\varrho-1}$ gilt, führt nun zum Beweise des Satzes, dass unter den obigen Voraussetzungen über die Parameter $e_1 e_2 \dots e_p$ für

$$v_1 = u_1 - e_1,\ v_2 = u_2 - e_2, \dots v_p = u_p - e_p$$

ausser der Summe $\vartheta(\!(v_\mu)\!)$ der Primärreihe auch ihre sämmtlichen partiellen Derivirten von der 1^{ten} bis zur $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, aber nicht alle Derivirten ϱ^{ter} Ordnung verschwinden, was die Umkehrung der Sätze aus Nr. 3, 4 und 6 liefert.

Ist nämlich $\varrho > 1$, so ist $\vartheta_1 = 0$ für alle Lagen von o_1. Aber $u'_1(o_1), u'_2(o_1), \dots u'_p(o_1)$ sind linear unabhängig*) und ϑ_1 ist in ihnen linear und homogen, also sind ihre Coefficienten $= 0$, das sind bis auf den fehlenden Factor 2 die partiellen Derivirten erster Ordnung von ϑ_0. Ist $1 < \sigma < \varrho$, so sind im Ausdrucke von ϑ_σ aus dem nämlichen Grunde $= 0$: 1) die Coefficienten von $u'_1(o_1), u'_2(o_1), \dots u'_p(o_1)$; 2) in ihnen die Coefficienten von $u'_1(o_2), u'_2(o_2), \dots u'_p(o_2)$, u. s. w., d. h. für die vorstehenden Werthe von $v_1 v_2 \dots v_p$ verschwinden auch alle partiellen Derivirten σ^{ter} Ordnung von $\vartheta(\!(v_\mu)\!)$. Dass die Derivirten ϱ^{ter} Ordnung nicht alle $= 0$ sind, versteht sich von selbst, da sonst $\vartheta_\varrho = 0$ wäre.

20. Dies mit den Sätzen der Nummern 3 und 4 zusammengehalten zeigt, dass, wenn $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ identisch Null ist, die Ordnung ϱ der Secundärreihe, welche dann an die Stelle der Primärreihe tritt, sich auf zwei Arten bestimmt, einmal durch das Verhalten der partiellen Derivirten von $\vartheta(\!(v_\mu)\!)$ für die speciellen Argumente $v_\mu = u_\mu - e_\mu$, andererseits aus der Beschaffenheit irgend einer Gruppe von p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$, für welche

*) Vergl. Riemann, Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, art. 4.

C. $$e_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \dots p)$$

ist.

In Folge dessen sind wir in der Lage, den wichtigen Lehrsatz der Nr. 6, dass jedes System von p Zahlen $e_1 e_2 \dots e_p$ sich in die vorstehende Form C. bringen lässt. durch folgende Zusätze zu vervollständigen.

1) Befindet sich unter den p Punkten ε kein nothwendiger, d. h. lassen $e_1 e_2 \dots e_p$ sich nur auf eine Art in die vorstehende Form C. bringen, so ist die Summe der Primärreihe $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ nicht identisch Null, und $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ sind ihre Nullpunkte.

Ist umgekehrt $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ nicht identisch Null, so lassen sich ihre Parameter nur auf eine Art in die obige Form bringen, unter den Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ befindet sich kein nothwendiger und sie sind die Nullpunkte von ϑ.

2) Bilden die p Punkte ε ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten, so ist die Summe der Primärreihe $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ nebst ihren ersten bis $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ partiellen Derivirten identisch Null, die ϱ^{ten} Derivirten sind es nicht alle, und bei diesen Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ tritt an die Stelle der Primärreihe eine Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung (Lehrs. XIII).

Ist umgekehrt $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ nebst seinen ersten bis $(\varrho-1)^{\text{ten}}$, aber nicht allen ϱ^{ten} partiellen Derivirten identisch Null, so lassen sich die Parameter $e_1 e_2 \dots e_p$ auf unendlich viel Arten in die obige Form C. bringen, indem man ϱ von den Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ beliebige Lagen $o_1 o_2 \dots o_\varrho$ vorschreiben kann, wodurch dann die Lagen $o_{\varrho+1} \dots o_p$ der $p - \varrho$ übrigen bestimmt sind. Solche p Punkte bilden ein Punktsystem I. G. vom Ueberschusse ϱ, und $o_1 o_2 \dots o_\varrho$ sind die nothwendigen Punkte desselben. Alle diese, zu den gleichen Parametern gehörigen Punktsysteme sind corresidual. Zu solchen Parametern gehört eine Schaar von ϑ-Functionen, nämlich zu jeder Lagerung der nothwendigen Punkte $o_1 o_2 \dots o_\varrho$ eine, von welcher diese und die zugehörigen $o_{\varrho+1} \dots o_p$ die Nullpunkte sind. Ihr Ausdruck ist durch die Parameter $e_1 e_2 \dots e_p$ und die nothwendigen Punkte $o_1 o_2 \dots o_\varrho$ bestimmt (Lehrs. XIV).

Wie sich das auf die Constanten

$$\nu_1 = e_1 + K_1,\ \nu_2 = e_2 + K_2, \cdots \nu_p = e_p + K_p$$

des V. Lehrsatzes Nr. 6 überträgt, braucht nicht weiter ausgeführt zu werden.

IV.

Analytische Bedingung dafür, dass $u_1 u_2 \dots u_p$ Simultanwerthe sind.

21. Dies alles gründet sich auf den 2. Fundamentalsatz (Nr. 11) dass, unter ϑ die Primärreihe verstanden, der Ausdruck

$$E = \vartheta(\!(-\sum_{\varkappa=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)\!)$$

stets $= 0$ ist. Aber dieser Satz haftet an folgenden Voraussetzungen:

1) dass $u_1(o), u_2(o), \dots u_p(o)$ *für jede Lage* des Punktes o *Simultanwerthe* bedeuten, d. h. dass sie mit irgend welchen Anfangswerthen zunächst der einfach zusammenhängenden Fläche T' zugeordnet sind, und von dieser aus über das Querschnittsystem hinweg nur auf demselben Integrationswege fortgesetzt werden, wodurch sich für denselben Punkt o die ursprünglichen Werthe $u_1 u_2 \dots u_p$, vermehrt um *Simultanperioden* $(gh)_1, (gh)_2, \dots (gh)_p$ ergeben.

2) Dass die Riemann'schen Constanten (Nr. 5, Lehrs. IV)

$$K_\mu = \frac{1}{2}[\pi i + a_{\mu\mu}] + \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{u}_\mu \, du_\lambda$$

aus diesen Simultanwerthen $\overset{+}{u}_\mu$ berechnet sind.

Als nächste Folgerung hieraus ergiebt sich, dass die Argumente

$$v_\mu = - u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(\varepsilon_2) \cdots - u_\mu(\varepsilon_{p-1}) + K_\mu$$

von E von den Anfangswerthen der Integrale $u_1 u_2 \dots u_p$ unabhängig sind. Vermehrt man nämlich u_μ um eine *Constante* c_μ, so vermehrt K_μ sich um

$$\frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda c_\mu \, du_\lambda = (p-1)c_\mu,$$

also wird v_μ dadurch nicht geändert*).

Aendert man insbesondere die Normalintegrale um Simultanperioden, so hat das auf die Argumente von E gar keinen Einfluss.

Riemann benutzt dies zu einer endgültigen Bestimmung des Integrals I. G., indem er an ihrer Stelle die Differenzen $u_\mu - \frac{K_\mu}{p-1}$ einführt, so dass, wenn man diese durch $w_1 w_2 \dots w_p$ bezeichnet,

$$E = \vartheta(\!(- w_\mu(\varepsilon_1) - w_\mu(\varepsilon_2) \cdots - w_\mu(\varepsilon_{p-1}))\!)$$

wird.

*) Riemann, Theorie der Ab. F. art. 22.

Für die folgende Ueberlegung ist eine Aenderung der Voraussetzungen nöthig und um diese deutlicher hervortreten zu lassen, ist es besser, die Constanten $K_1 K_2 \dots K_p$ in Evidenz zu erhalten.

Ich setze voraus

a. dass $u_1 u_2 \dots u_p$ Simultanwerthe und zwar diejenigen sind, aus denen $K_1 K_2 \dots K_p$ ein für allemal genau oder bis auf Simultanperioden berechnet sind, was für die Formation der ϑ-Reihe ausreicht. Diese Aufgabe, in welcher sich alles concentrirt, was in der Lehre von den ϑ-Functionen an Schwierigkeiten noch zu überwinden übrig bleibt, ist für die ultraelliptischen Functionen aller Genera p von Herrn Prym*) gelöst worden.

b. Dagegen werden wir bei den Werthen der Normalintegrale in den Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}$ die Beschränkung auf Simultanwerthe aufheben. Zu dem Zweck mögen, von Simultanwerthen $u_1 u_2 \dots u_p$ aus, die Integrationen bis zu irgend einem Punkte ε fortgesetzt werden, der zur Verfügung bleibt. Verlaufen diese p Wege bei allen Normalintegralen in der Fläche T', so liefern sie Simultanwerthe, nämlich $u_1(\varepsilon), u_2(\varepsilon), \dots u_p(\varepsilon)$; überschreiten sie das Querschnittsystem, so kommen zu diesen Simultanwerthen Perioden, und zwar sind das 1) Simultanperioden $(gh)_1, (gh)_2, \dots (gh)_p$, wenn die p Integrale auf demselben Wege über T' hinaus fortgesetzt werden, sind es dagegen 2) für $u_1 u_2 \dots u_p$ wesentlich verschiedene Wege, so liefern diese p Integrationen zwar wieder die Simultanwerthe $u_1(\varepsilon), u_2(\varepsilon), \dots u_p(\varepsilon)$, vermehrt um Perioden, aber das sind dann nicht mehr nothwendig Simultanperioden. Zur Unterscheidung will ich sie, wenn diese p Wege aus T' nach dem Punkte ε führen, durch $P_1(\varepsilon), P_2(\varepsilon), \dots P_p(\varepsilon)$ bezeichnen. Dann sind die Werthe der Normalintegrale, zu denen man durch diese Integrationen gelangt, folgende:

$$v_1(\varepsilon) = u_1(\varepsilon) + P_1(\varepsilon),\ v_2(\varepsilon) = u_2(\varepsilon) + P_2(\varepsilon), \dots v_p(\varepsilon) = u_p(\varepsilon) + P_p(\varepsilon),$$

diese additiven Perioden drücken sich *mittelst ganzer Zahlen* g, h wie folgt aus:

$$P_\mu(\varepsilon) = g_\mu \pi i + h_1^{(\mu)} a_{1\mu} + h_2^{(\mu)} a_{2\mu} + \cdots + h_p^{(\mu)} a_{p\mu},$$

wo aber für die ganzen Zahlen h alle Beschränkungen aufgehoben sind, nämlich 1) die Beschränkung, dass $h_1^{(\mu)} h_2^{(\mu)} \dots h_p^{(\mu)}$ für jedes μ dieselbe Zahlenreihe sein soll, und 2) die Beschränkung, dass diese Zahlen für $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}$ an Stelle von ε dieselben sein sollen. Die Werthe g_μ kommen nicht in Betracht, da πi Periode zu jedem Argument ist.

*) Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Seite 35 und 18. Zürich 1866.

c. Wird nun in dieser Weise bei den Argumenten von E die Beschränkung der Normalintegrale auf Simultanwerthe für alle Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}$ aufgehoben, während die Bedeutung von $u_1 u_2 \dots u_p$ als Simultanwerthe und die Werthe der aus ihnen ein für allemal berechneten Riemann'schen Constanten $K_1, K_2, \dots K_p$ beibehalten werden, so tritt an die Stelle von E der Ausdruck

$$E' = \vartheta\left(\!\left(-\sum_{\varkappa=1}^{p-1} v_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu\right)\!\right)$$

d. i.

$$E' = \vartheta\left(\!\left(-\sum_{1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu - P_\mu(\varepsilon_1) - P_\mu(\varepsilon_2) \dots - P_\mu(\varepsilon_{p-1})\right)\!\right),$$

und wir untersuchen nun was daraus folgt, wenn dieser Ausdruck für alle Lagen von $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}$ verschwindet.

Ich nehme noch einen Punkt ε_p hinzu und bilde

$$\vartheta = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(0) - u_\mu(\varepsilon_p) - \sum_{1}^{p-1} v_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu\right)\!\right)$$

d. i.

$$\vartheta = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(0) - \sum_{1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu - P_\mu(\varepsilon_1) - P_\mu(\varepsilon_2) \cdots - P_\mu(\varepsilon_{p-1})\right)\!\right).$$

Ist das 1) nicht identisch Null, so folgt, dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ seine Nullpunkte sind, mithin seine Parameter

$$\sum_{1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu + P_\mu(\varepsilon_1) + P_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + P_\mu(\varepsilon_{p-1}) = e_\mu$$

sich mittelst Simultanperioden $(gh)_\mu$ in der Form

$$\sum_{1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu$$

ausdrücken. Das giebt $P_\mu(\varepsilon_1) + P_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + P_\mu(\varepsilon_{p-1}) = (gh)_\mu$ für $\mu = 1, 2, \dots p$. 2) Die Bedingung, dass ϑ nicht identisch verschwinde, kann man aber stets erfüllen, da die p Punkte $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p$ durchaus zur Verfügung stehen. In der That kann man nach Lehrsatz V der Nr. 6 durch geeignete Wahl dieser Punkte bewirken, dass vorstehende Ausdrücke $e_1 e_2 \dots e_p$ beliebig vorgeschriebenen Parametern $v_1 v_2 \dots v_p$ gleich werden, insbesondere also auch so, dass ϑ nicht identisch Null wird.

Ist also $E' = 0$ bei jeder Annahme über die Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}$, so sind die p Ausdrücke

$$P_\mu(\varepsilon_1) + P_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + P_\mu(\varepsilon_{p-1}) \qquad (\mu = 1, 2, \dots p)$$

stets Simultanperioden $(gh)_\mu$.

Um auf dem kürzesten Wege zum Schlusse zu kommen, lassen wir $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}$ in einem Punkte ε zusammenfallen, es folgt für $\mu = 1, 2, \dots p$

$$(p-1)\, P_\mu(\varepsilon) = (gh)_\mu.$$

Da aber alle $P_\mu(\varepsilon) = g_\mu \pi i + h_1^{(\mu)} a_{1\mu} + h_2^{(\mu)} a_{2\mu} + \cdots + h_p^{(\mu)} a_{p\mu}$ ganzzahlige Coefficienten haben, so geht die Division mit $p-1$ in jedes einzelne g, h auf. Ist

$$g_\mu = (p-1)\, G_\mu, \quad h_\mu = (p-1)\, H_\mu,$$

so folgt

$$P_\mu(\varepsilon) = (GH)_\mu,$$

d. h. $P_1(\varepsilon)\, P_2(\varepsilon) \dots P_p(\varepsilon)$ sind Simultanperioden, und zwar für jede Lage des Punktes ε, mithin sind $v_1(\varepsilon)\, v_2(\varepsilon) \dots v_p(\varepsilon)$ für jede Lage von ε Simultanwerthe, wenn auch nicht mehr beschränkt auf die einfach zusammenhängende Fläche T'.

Wir haben demnach den folgenden Satz, welcher eine Ergänzung des 2. Fundamentalsatzes bildet:

> XV. Für jedes Normalintegral u_μ werde über die in ihm enthaltene additive Constante ein für allemal verfügt, und aus irgend einem System von Simultanwerthen dieser Integrale seien auch die Riemann'schen Constanten $K_1 K_2 \dots K_p$ ein für allemal berechnet. Unter diesen Voraussetzungen darf man fordern, dass der Ausdruck
>
> $$\vartheta\left(\!\left(-u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(\varepsilon_2) - \cdots - u_\mu(\varepsilon_{p-1}) + K_\mu\right)\!\right)$$
>
> für alle Lagen der $p-1$ Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1}$ verschwinde, und hat dann die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass $u_1 u_2 \dots u_p$ stets Simultanwerthe sind.

Diese Bedingungen sind nothwendig, denn wenn $u_1 u_2 \dots u_p$ Simultanwerthe sind, darf man den Ausdruck nach dem 2. Fundamentalsatze nicht von Null verschieden voraussetzen, und nach dem, was soeben bewiesen wurde, reicht sie auch aus, damit $u_1 u_2 \dots u_p$ Simultanwerthe sind, was dann, durch Addition von Simultanperioden, zu Systemen von Simultanwerthen führt.

V.

Die Riemann'schen Constanten.

22. Die vollständige Herstellung des Ausdruckes einer (primären oder secundären) ϑ-Reihe bei vorgeschriebenen Nullpunkten ist nun auf die Ermittelung der Riemann'schen Constanten

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \overset{+}{u_\mu}\, du_\lambda \quad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

zurückgeführt.

Es ist mir (1889) gelungen, die hier verlangten Integrationen für die ultraelliptischen Functionen aller Genera $p > 1$ direct auszuführen. Dadurch wurde es mir möglich, in der bereits oben (Einleitung, Convergenzbeweis) erwähnten Vorlesung vom Jahre 1890 die Theorie der ultraelliptischen Functionen aller Genera vollständig durchzuführen, ohne dafür irgend einen Satz aus der allgemeinen Theorie der Abel'schen Functionen heranziehen zu müssen.

Ich beginne mit diesem besonderem Falle, und lasse dann erst die allgemeinen Hülfsmittel folgen, welche, an einen Riemann'schen Gedanken[1]) anknüpfend, es Herrn Prym möglich gemacht haben, schon vor 35 Jahren die gleiche Aufgabe für die ultraelliptischen Functionen $p > 1$ zu lösen. Ich kann diese Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne die unbeschreiblichen Verdienste in Erinnerung zu bringen, welche Herr Prym sich durch seine damaligen Publicationen um das Verständniss Riemann's erworben hat.

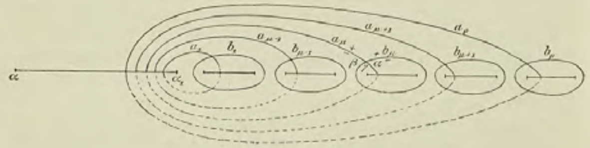


Fig. 2.

23. *Die Riemann'schen Constanten für die ultraelliptischen Functionen; Querschnittsystem Neumanns.*[2]) Die Irrationalität dieser Theorie sei

$$S = \sqrt{f(z)}, \quad f(z) = z - \alpha \cdot z - \alpha_1 \cdot z - \alpha_2 \cdots z - \alpha_{2p+1},$$

$\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{2p+1}$ seien die $2p+2$ Verzweigungspunkte, $\Delta\Delta_1 \ldots \Delta_p$ die Doppellinien der Fläche T, und zwar reiche Δ von α bis α_1, Δ_1 von α_2 bis $\alpha_3, \ldots \Delta_\lambda$ von $\alpha_{2\lambda}$ bis $\alpha_{2\lambda+1}, \ldots \Delta_p$ von α_{2p} bis α_{2p+1}. Die

1) Theorie d. Ab F. Art. 23.

2) Carl Neumann: Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Leipzig 1865. VIII. Vorlesung, 5. Abschnitt. Die vorstehende Skizze entspricht *im Wesentlichen* dem Schnittsystem Neumann's.

Fläche T besteht aus zwei Blättern E_1 und E_2: sie sind in den Doppellinien über Kreuz aneinander geheftet.

Das Neumann'sche Querschnittsystem, an welches sich erhebliche Vereinfachungen knüpfen, entsteht wie folgt. Zuerst werden über E_1 Ringschnitte $b_1 b_2 \ldots b_p$ um $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_p$ gelegt, dann einer nach dem andern, zu jedem ein Querschnitt $a_1 a_2 \ldots a_p$ in der Weise, dass zunächst a_1, dann $a_2, \ldots$, dann $a_\lambda, \ldots$ und zuletzt a_p über E_1 hinweg von Δ durch $b_1 b_2 \ldots b_\lambda \ldots b_p$ nach $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_\lambda \ldots \Delta_p$ führt, und dann auf E_2 übergehend, dort zum ringförmigen Abschluss gebracht wird.

Um eine einfach zusammenhängende Fläche zu erhalten, bedarf es noch eines Schnittsystems c, welches sich aber für unsern augenblicklichen Zweck als überflüssig erweist.

Bei den Integralen I. G. nehme ich zur untern Grenze den Verzweigungspunkt α: in der durch das Schnittsystem a, b begrenzten Fläche T ist dann jedes Integral I. G. eindeutig und stetig, und die Summe der Werthe, die es auf E_1 und E_2 im Unendlichen annimmt, gleich Null. Die Normalintegrale I. G. bezeichne ich wie folgt:

$$u_\mu(o) = \int_\alpha^z \frac{\Phi_\mu(z)\, dz}{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p).$$

o ist der veränderliche Punkt z, s und $\Phi_\mu(z)$ eine ganze Function von z, deren Grad $\overline{\gtrless}\, p - 1$ ist. Was die Periodicitätsmoduln betrifft, braucht nicht wiederholt zu werden.

Dazu kommt nun die Function $R(o \mid \varepsilon)$, welche ich an Stelle des Riemann'schen Integrals III. G. in die allgemeine Theorie der Abelschen Functionen eingeführt habe. Haben z, s im Punkte ε die Werthe ζ, σ, so ist für den Fall der ultraelliptischen Functionen

$$R(o \mid \varepsilon) = \int \frac{s + \sigma}{z - \zeta} \cdot \frac{dz}{2s},$$

und wenn $\mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon), \mathfrak{B}_\lambda(\varepsilon)$ seine Periodicitätsmoduln an a_λ, b_λ sind,

$$\mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon) = \int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \frac{s + \sigma}{z - \zeta} \cdot \frac{dz}{2s}, \quad \mathfrak{B}_\lambda(\varepsilon) = \int \begin{vmatrix} \beta \\ a \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \frac{s + \sigma}{z - \zeta} \cdot \frac{dz}{2s}$$

mit der Beschränkung, dass kein Integrationsweg b_λ, a_λ durch den Punkt ε gehen darf. Das giebt für $\mu = 1, 2, \ldots p$:

$$\mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) = 2u_\mu(\varepsilon) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\nu(\varepsilon).$$

Dies benutze ich umgekehrt, um einen völlig ausgeführten Ausdruck für die Normalintegrale I. G. zu gewinnen:

$$2u_\mu(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\nu(\varepsilon)$$

oder

$$2u_\mu(\varepsilon) = \int\left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{2s} - \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\nu \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{2s}.$$

Vergleicht man dies mit dem ursprünglichen Ausdrucke

$$u_\mu(\varepsilon) = \int_\alpha^\zeta \frac{\Phi_\mu(\zeta)\,d\zeta}{\sigma},$$

so sieht man, dass die Variable ζ hier obere Grenze der Integration ist, während sie im neuen, völlig ausgeführten Ausdrucke *Parameter unter dem Integralzeichen ist.*

Der neue Ausdruck für $u_\mu(\varepsilon)$ setzt aber voraus, dass kein Querschnitt a_μ, b_ν durch ε geht, oder dass der Punkt ε keinem Integrationswege a_μ, b_ν angehört; der Ausdruck für K_μ:

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda \lesseqgtr \mu}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda 2\overset{+}{u}_\mu\,du_\lambda$$

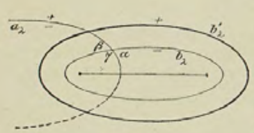


Fig. 3.

dagegen fordert, dass der variable Punkt dem + Rande von b_λ folgt. Beiden zugleich genügen wir, indem wir im Ausdrucke für K_μ jeden Integrationsweg $b_\lambda(\lambda \lesseqgtr \mu)$ zu einem *ihn einschliessenden* b_λ' erweitern, und ihn bei der Integration vom Punkte ε durchlaufen lassen.

Das giebt dann

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda \lesseqgtr \mu}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda 2u_\mu(\varepsilon)\,du_\lambda(\varepsilon)$$

d. i.

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda \lesseqgtr \mu}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda \left\{\int\left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{s}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\nu \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{s}\right\} du_\lambda(\varepsilon),$$

wo die Reihenfolge der Integrationen umkehrbar ist, da beim Integranden jede Unstetigkeit ausgeschlossen ist. Dabei fällt ins Gewicht, dass b_μ' als Integrationsweg nicht vorkommt.

Da

$$\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{z-\zeta} + \sigma\cdot\frac{1}{s(z-\zeta)} \quad \text{und} \quad du_\lambda(\varepsilon) = \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\sigma}$$

ist, so ist auch

$$\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{s}\,du_\lambda(\varepsilon) = du_\lambda(\varepsilon)\cdot\frac{dz}{z-\zeta} - \frac{dz}{s}\cdot\frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

und das giebt

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda \lesseqgtr \mu}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda du_\lambda(\varepsilon)\int\left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{dz}{z-\zeta}$$

$$- \frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda \lesseqgtr \mu}\int\left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{dz}{s}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

$$- \frac{1}{4\pi i\cdot\pi i}\sum_{\lambda \lesseqgtr \mu}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda du_\lambda(\varepsilon)\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\nu \frac{dz}{z-\zeta}$$

$$+ \frac{1}{4\pi i\cdot\pi i}\sum_{\lambda \lesseqgtr \mu}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\nu \frac{dz}{s}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}.$$

Neben der zweiblättrigen Fläche T benutze ich noch eine einfache z-Ebene, die Hülfsebene H, in welcher oben der Plan des Querschnittssystem vorgezeichnet ist.

Dort erweist sich das

$$\int\left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{dz}{z-\zeta} = -2\pi i \quad \text{oder} \quad = 0,$$

jenachdem ζ von a_μ ein- oder ausgeschlossen ist. Es ist aber ζ Punkt von b_λ', d. h., weil b_μ' fehlt, von $b_1' \ldots b_{\mu-1}' b_{\mu+1}' \ldots b_p'$. Von a_μ eingeschlossen ist ζ, also ε nur für $\lambda = 1, 2, \ldots \mu - 1$, es folgt

$$\frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda \lesseqgtr \mu}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda du_\lambda(\varepsilon)\int\left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{dz}{z-\zeta} = -\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\mu-1}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda du_\lambda$$

$$= -\frac{\pi i}{2}(\mu - 1).$$

In der zweiten Summe ist z Punkt von a_μ, also, weil $\lambda \lesseqgtr \mu$ ist, niemals von b_λ' eingeschlossen. Die zweite Summe im Ausdrucke K_μ ist also $= 0$. Das nämliche folgt für die dritte Summe, da ζ als Punkt von b_λ' niemals von b_ν eingeschlossen sein kann. Es bleibt nur die vierte Summe. Dort ist z Punkt von b_ν, und von b_λ' nur eingeschlossen, wenn $\nu = \lambda$ ist. Die vierte Summe ist also

$$= \frac{1}{4\pi i \cdot \pi i} \sum_{\lambda \lesseqgtr \mu} a_{\mu\lambda} \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda \frac{dz}{s} \int \left| \begin{matrix} \alpha' \\ b' \\ \gamma' \end{matrix} \right|_\lambda \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\lambda \lesseqgtr \mu} a_{\mu\lambda} \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda \frac{\Phi_\lambda(z)\, dz}{s} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \lesseqgtr \mu} a_{\mu\lambda}.$$

Alles zusammengenommen haben wir

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) - \frac{\pi i}{2}(\mu - 1) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda \lesseqgtr \mu} a_{\mu\lambda}$$

oder endlich

$$K_\mu = \pi i - \frac{1}{2} \mu \pi i + \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\mu\lambda},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$K_\mu = (1 - \mu)\pi i + \frac{1}{2}(GH)_\mu,$$

wenn

$$G_\mu = \mu \quad \text{und} \quad H_1 = H_2 = \cdots = H_p = 1$$

gesetzt wird.

24. *Allgemeine Theorie der Riemann'schen Constanten.* Sei

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2p-2}$$

ein vollständiges Punktsystem I. G. Dasselbe lässt sich auf mindestens eine Art in zwei Gruppen, jede von $p-1$ Punkten so zerfällen, dass jede Gruppe für sich allein nur wesentliche Punkte enthält, und dann enthält jede von beiden Gruppen alle diejenigen Punkte, welche zur andern als nothwendige gehören. Sei $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\alpha \cdots \varepsilon_{p-1}$ die eine, $\varepsilon_p \cdots \varepsilon_\beta \cdots \varepsilon_{2p-2}$ die andere Gruppe und

$$\vartheta = \vartheta(\!(u_\mu(o) - u_\mu(\omega) - \sum_\alpha u_\mu(\varepsilon_\alpha) + K_\mu)\!)$$

eine Primärreihe, ω ebenso wie o ein variabler Punkt. Dieser Ausdruck ist als Function von z nicht identisch Null, er wird es aber, so oft ω mit einem Punkte ε_β der andern Gruppe zusammenfällt. Da ϑ

ausserdem verschwindet, wenn ω und o zusammenfallen, so sind, wenn jetzt ω als variabler, o als fester Punkt betrachtet wird, $o\, \varepsilon_p \cdots \varepsilon_\beta \cdots \varepsilon_{2p-2}$ die Nullpunkte von

$$\vartheta = \vartheta(\!(u_\mu(\omega) - u_\mu(o) + \sum_\alpha u_\mu(\varepsilon_\alpha) - K_\mu)\!),$$

und der μ^{te} Parameter $u_\mu(o) - \sum_\alpha u_\mu(\varepsilon_\alpha) + K_\mu$ drückt sich also aus $= u_\mu(o) + \sum_\beta u_\mu(\varepsilon_\beta) - K_\mu + (g'h')_\mu$. Das giebt die Riemann'sche Formel[1])

$$(1) \qquad 2K_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + (g'h')_\mu. \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

Nun sei w' derjenige Integrand I. G., dessen Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2p-2}$ sind. Ausser diesen Punkten wird w' wie jeder Integrand I. G. $= 0$ nur noch in $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$, jedesmal zur Ordnung 2, und es wird $w' = \infty$, und zwar zur ersten Ordnung, in den $2p - 2 + 2n$ (einfachen) Verzweigungspunkten der Fläche T. Werden diese durch

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2p-2+2n}$$

bezeichnet, so giebt das Abel'sche Theorem die p Gleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + 2 \sum_{\varkappa=1}^{n} u_\mu(\infty_\varkappa) - \sum_{\nu=1}^{2p-2+2n} u_\mu(\alpha_\nu) = -(gh)_\mu,$$

und hier sind die ganzen Zahlen g, h durch die Formeln

$$(2) \qquad g_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int \left| \begin{matrix} \gamma \\ a \\ \beta \end{matrix} \right|_\lambda d \log w', \quad h_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda d \log w'$$

bestimmt: ich nenne sie *die zu w' associirten Zahlen.*

Aber nach unserer definitiven Bestimmung der Normalintegrale [(2) Nr. 8] ist

$$(3) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} u_\mu(\infty_\varkappa) = 0,$$

es folgt

$$(4) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) = \sum_\nu u_\mu(\alpha_\nu) - (gh)_\mu.$$

Dies in (1) eingeführt, gebe

$$(5) \qquad 2K_\mu = \sum_\nu u_\mu(\alpha_\nu) + (\mathfrak{G}\mathfrak{H})_\mu,$$

1) Theorie der Abel'schen Functionen art. 23, wo die Formel als Congruenz geschrieben ist.

dann mögen die $2p$ ganzen und von der Wahl des Integranden w' völlig unabhängigen Zahlen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *die Fundamentalzahlen* heissen.

Schafft man hier die Verzweigungspunkte mittels (4) weg, so kommt

$$(6) \qquad 2K_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + (\mathfrak{G} + g \,|\, \mathfrak{H} + h)_\mu;$$

hier sind also $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die Fundamentalzahlen, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2p-2}$ sind die Nullpunkte eines beliebigen Integranden I. G. w' und g, h die zu w' associirten Zahlen.

25. Die weitern Ausführungen setzen die Lösungen der Aufgabe voraus, w' so zu bestimmen, dass seine Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2p-2}$ zu zwei und zwei zusammenfallen.

A. Seien $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{p-1}$ die $p-1$ Punkte, in denen w' jetzt zur zweiten Ordnung Null wird und

B. wiederum seien g, h die zu w' associirten Zahlen.

Aus (6) folgt

$$\text{C.} \qquad K_\mu = \sum_1^{p-1} u_\mu(\delta_\varkappa) + \tfrac{1}{2} (\mathfrak{G} + g \,|\, \mathfrak{H} + h)_\mu,$$

während zugleich

$$\text{D.} \qquad 2K_\mu = \sum_\nu u_\mu(\alpha_\nu) + (\mathfrak{G}\mathfrak{H})_\mu$$

ist, wo $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die von w' ganz unabhängigen Fundamentalzahlen bedeuten.

Zu o nehme man noch einen zweiten variablen Punkt ω, und führe diejenige ϑ-Function ein, deren Nullpunkte $\omega \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{p-1}$ sind. Ist

E. $\varrho \geqq 0$ die Anzahl der nothwendigen Punkte im System $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{p-1}$, so ist nach Lehrs. XIII, Nr. 17 eine Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung oder wenn $\varrho = 0$ ist eine Primärreihe

$$\vartheta_\varrho(\!(u_\mu(o) - u_\mu(\omega) - \sum_1^{p-1} u_\mu(\delta_\varkappa) + K_\mu)\!)$$

zu bilden, und ihre Summe ist demnach 1) nicht identisch Null, aber sie wird 2) Null zur Ordnung Eins, wenn o und ω zusammenfallen. Mit Hülfe von C. wird das

$$= \vartheta_\varrho(\!(u_\mu(o) - u_\mu(\omega) + \tfrac{1}{2} (\mathfrak{G} + g \,|\, \mathfrak{H} + h)_\mu)\!).$$

Hier kommen die Formeln (a), (b) am Schlusse der Nr. 4 zur Anwendung. Die erste giebt, wenn $e_1 \cdots e_p$ die Parameter einer ϑ_ϱ sind,

$$\vartheta_\varrho(\!(u_\mu - e_\mu - (g'h')_\mu)\!) = \vartheta_\varrho(\!(u_\mu - e_\mu)\!)\, e^{-\Phi((h')) + 2\Sigma h'_\mu (u_\mu - e_\mu)}.$$

Wir nehmen

$$u_\mu - e_\mu = u_\mu(o) - u_\mu(\omega) + \tfrac{1}{2} (\mathfrak{G} + g \,|\, \mathfrak{H} + h)_\mu$$
$$(g'h')_\mu = (\mathfrak{G} + g \,|\, \mathfrak{H} + h)_\mu$$

und setzen zur Vereinfachung der Formeln

$$u_\mu(o) - u_\mu(\omega) = v_\mu; \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

eine kleine Reduction giebt dann

$$\vartheta_\varrho(\!(v_\mu - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}+g \,|\, \mathfrak{H}+h)_\mu)\!) = \vartheta_\varrho(\!(v_\mu + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}+g \,|\, \mathfrak{H}+h)_\mu)\!) \cdot (-1)^M \cdot e^{2\Sigma(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu) v_\mu}$$

für

$$M = \sum_\mu (\mathfrak{G}_\mu + g_\mu)(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu).$$

Nun ist nach (6) Nr. 4

$$\vartheta_\varrho(\!(+ w_\mu)\!) = (-1)^\varrho \vartheta_\varrho(\!(- w_\mu)\!).$$

Wenden wir dies auf der linken Seite der vorstehenden Formel an und setzen

$$e^{\Sigma(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu) v_\mu} \vartheta_\varrho(\!(v_\mu + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G} + g \,|\, \mathfrak{H} + h)_\mu)\!) = F(\!(v_\mu)\!),$$

so folgt

$$(-1)^\varrho F(\!(-v_\mu)\!) = (-1)^M F(\!(v_\mu)\!).$$

Entwickelt man nun $F(\!(v_\mu)\!)$ nach ganzen homogenen Functionen $V_0, V_1, V_2, \cdots$ der Argumente $v_1 v_2 \cdots v_p$, so muss das constante Glied V_0 fehlen, da $F(\!(v_\mu)\!) = F(\!(u_\mu(o) - u_\mu(\omega))\!)$ verschwindet, wenn o mit ω zusammenfällt, aber der lineare Theil V_1 kann nicht fehlen, weil F im angegebenen Falle nur zur ersten Ordnung verschwindet. Die Entwicklung hat also die Form

$$F(\!(v_\mu)\!) = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots,$$

wo V_1 nicht fehlt, und nun folgt

$$(-1)^{\varrho+1} \,|\, V_1 - V_2 + V_3 - \cdots \,| = (-1)^M \,|\, V_1 + V_2 + V_3 + \cdots \,|.$$

Das giebt

$$(-1)^M = (-1)^{\varrho+1},$$

d. h. M ist mit $\varrho + 1$ zugleich gerade oder ungerade.

26. Damit ist das hier in Aussicht genommene Ziel erreicht; wir haben den folgenden Satz:

XVI. Jeder Integrand I. G. w', dessen $2p-2$ Nullpunkte zu zwei und zwei zusammenfallen, liefert zur Bestimmung der

Fundamentalzahlen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ oder ihrer Reste modulo 2 eine Congruenz

$$\sum_{\mu=1}^{p} (\mathfrak{G}_\mu + g_\mu)(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu) \equiv \varrho + 1 \pmod{2},$$

und hier sind

1) g, h die zu w' associirten Zahlen

$$g_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int \left|\begin{matrix}\gamma\\ a\\ \beta\end{matrix}\right|_\lambda d\log w', \quad h_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda d\log w'.$$

2) Sind $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{p-1}$ die $p-1$ Punkte, in denen — abgesehen von den unendlich fernen Nullpunkten zweiter Ordnung — die Nullpunkte von w' sich paarweise vereinigen, so giebt ϱ an, wie viel nothwendige sich unter jenen befinden.

3) Hat man aus einer genügenden Anzahl solcher Congruenzen die Reste gefunden, welche die Fundamentalzahlen bei der Division durch 2 lassen, so liefert die Formel

$$2K_\mu = \sum_\nu u_\mu(\alpha_\nu) + (\mathfrak{G}\mathfrak{H})_\mu,$$

wenn die Summation über alle $2p - 2 + 2n$ einfachen Verzweigungspunkte α_ν erstreckt wird, die Riemann'schen Constanten bis auf Simultanperioden, was für die Formation aller ϑ-Reihen ausreicht.

Anmerkung.

Zu der vorstehenden Abhandlung vergleiche man die Anmerkungen von G. Rost zu seiner Habilitationsschrift: Theorie der Riemann'schen ϑ-Function. Würzburg 1901. Kr.

XXXV.

Querschnittstheorie.

(Mathematische Annalen, Bd. 55, 1902, S. 497—515.)

Die Lehre von den Schnitten durch die Fläche T ist veranlasst durch die Frage, unter welchen Bedingungen jeder ringförmige Integrationsweg ein Stück dieser Fläche einschliesst, also der ihm entlang durch die Fläche geführte Schnitt ein Stück der Fläche ablöst. Sie erfordert vor allem Andern eine genaue Classification der Schnitte durch eine solche Fläche.

I.

Der Ringschnitt, der Punktschnitt, die Querschnitte I. und II. Art; Randcurven der Fläche.

Die Fläche T ist eine zusammenhängende, d. h. man kann in ihr von jeder Stelle zu jeder andern gelangen. In ihrem ursprünglichen Zustande fehlt ihr jede Begrenzung; eine solche erlangt sie erst durch Schnitte, welche in ihr ausgeführt werden, und bei diesen und ihrer Classification handelt es sich wesentlich um die Anzahl und die Beschaffenheit der Randcurven, welche sie der Fläche ertheilen.

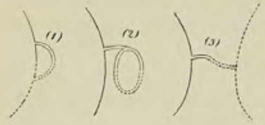
Ein Schnitt durch die ursprüngliche Fläche T kann nur in der Fläche selbst ansetzen; wird er so weit fortgesetzt, bis er zu einer frühern Stelle zurückkehrt, so heisst er *Ringschnitt*; solange das nicht eingetreten ist, *Punktschnitt*.

Durch einen Ringschnitt erhält die Fläche zwei Randcurven, durch einen Punktschnitt nur eine, aber das sind in allen Fällen *geschlossene Curven*, d. h. man darf einer solchen auf der Fläche nur nachgehen um sicher zu sein, dass man zu jeder beliebigen Stelle derselben und nöthigenfalls zur Ausgangsstelle zurückgelangen wird.

Hat nun die Fläche T durch Punkt- und Ringschnitte Ränder erhalten, welche, wie wir nochmals betonen, lauter geschlossene Curven sind, so wird eine dritte und letzte Kategorie von charakteristischen Schnitten möglich, die *Querschnitte* der verschiedenen Arten.

Jeder Querschnitt setzt in einem Rande an und endigt in einem solchen.

Zu einem Querschnitte gehört also, dass er nicht bloss in einem Rande beginnt, sondern auch, dass er in einem solchen endigt. Ein Schnitt, der bloss einen Rand öffnet, aber in der Fläche endigt, ohne zum zweiten Male einen Rand zu treffen, führt keinen besonderen Namen, da er weiter nichts leistet, als den Rand zu erweitern, von dem er ausgegangen ist.



Endigt ein Querschnitt im nämlichen Rande, von dem er ausgeht (1) oder in sich selbst (2), so heisst er *Querschnitt I. Art*, endigt er in einer andern Randcurve (3), so heisst er *Querschnitt II. Art.*

Die Ränder eines fertigen Querschnitts I. Art liefern mit dem Rande, von welchem der Querschnitt ausgeht, zusammen *zwei Randcurven* der Fläche, *beides geschlossene Curven*; die Ränder eines Querschnittes II. Art vereinigen sich mit den durch den Querschnitt verbundenen Randcurven zu *einer einzigen, abermals geschlossenen Randcurve.*

Es springt in die Augen, dass jedes beliebige Schnittsystem in der Fläche T sich aus Schnitten der hier aufgezählten Arten zusammensetzen lässt.

II.

Die Flächen I. und II. Art.

Dies vorausgeschickt, möge eine zusammenhängende Fläche als eine Fläche I. Art bezeichnet werden, wenn sie durch jeden Ringschnitt zerstückelt wird; andernfalls heisse sie Fläche II. Art.

Die Frage, welche hier zu beantworten ist, betrifft dann die Kriterien, aus denen sich erkennen lässt, ob eine vorgelegte Fläche von der I. oder II. Art ist; es werden sich dabei von selbst die Hülfsmittel ergeben, um eine Fläche T der II. Art in eine den Bedürfnissen der Integralrechnung entsprechende Fläche T' der I. Art zu verwandeln.

Die vorstehende Classification der Flächen und der Schnitte durch dieselben führt nun zu folgenden Sätzen:

a) *Durch einen Querschnitt II. Art wird eine zusammenhängende Fläche nie zerstückelt;*

denn Verbindungen in der Fläche, welche durch ihn zerstört sind, können durch Einschaltung von Umwegen wieder hergestellt werden, indem man nämlich, an einem Querschnittrande angelangt, zunächst

diesem und dann einer Randcurve bis zum andern Querschnittrande folgt, um von dort den unterbrochenen Weg weiter fortzusetzen.

b) *Wird eine zusammenhängende Fläche durch einen Ringschnitt oder einen Querschnitt I. Art überhaupt zerstückelt, so zerfällt sie in zwei Stücke;*

denn die Anzahl dieser Stücke kann nicht grösser sein als die Anzahl der Ränder, an denen entlang sie von einander abgelöst sind.

c) *Wird eine Fläche I. Art durch irgend welche Schnitte in Stücke zerlegt, so sind das lauter Flächen I. Art;*

denn wenn eines dieser Stücke durch einen Ringschnitt R nicht zerstückelt würde, so würde dieser auch die ursprüngliche Fläche nicht in Stücke zerfällen, also wäre dies eine Fläche II. Art.

d) *Eine Fläche I. Art wird nicht bloss durch jeden Ringschnitt, sondern auch durch jeden Querschnitt I. Art in Stücke zerlegt;*

denn wäre das nicht der Fall, so hätte man, nach Ausführung des Querschnittes, eine zusammenhängende Fläche mit zwei, vom Querschnitt herrührenden Randcurven; von diesem Querschnittrande gäbe es also durch die Fläche einen Weg l zum gegenüberliegenden Punkte des andern Querschnittrandes, also l entlang einen Querschnitt II. Art L, welcher die Fläche auch nicht zerstückelt, also würde L für sich allein die ursprüngliche Fläche um so weniger zerstückeln; sie wäre also eine Fläche, welche durch diesen Ringschnitt L nicht zerstückelt wird, also keine Fläche I. Art. Aus b), c), d) zusammengenommen folgt

e) *Jeder Ringschnitt und jeder Querschnitt I. Art zerfällt eine Fläche I. Art in zwei Stücke, und beides sind wieder Flächen I. Art.*

III.

Fortsetzung.

Die Umkehrung des vorstehenden Satzes e) führt nun zu einer Umformung des Kriteriums für Flächen I. und II. Art.

f) *Eine zusammenhängende Fläche τ werde durch einen Ringschnitt Q oder einen Querschnitt I. Art Q in zwei Stücke, E und τ_1 zerlegt. Sind dies Flächen I. Art, so ist τ selbst ebenfalls Fläche I. Art.*

Seien also E und τ_1 von der I. Art; es ist zu beweisen, dass τ nicht von der II. Art sein kann.

1) Jeder Ringschnitt durch E oder τ_1 allein schneidet aus dieser Fläche, also aus τ selbst ein Stück heraus; es ist also nur zu beweisen, dass τ auch durch jeden Ringschnitt zerfällt wird, welcher über Q hinweg alternirend durch E und τ_1 verläuft.

2) Sei R ein solcher Ringschnitt. Folgt man ihm, etwa von E aus, so kommt eine Stelle, wo er über Q hinweg in τ_1 eintritt, und auf jede solche Eintrittsstelle folgt eine, wo er aus τ_1 wieder austritt. Ist, in dieser Weise gezählt,

$$\alpha$$

die Anzahl der Ein- also auch der Austrittsstellen, so wird R durch Q in 2α Abtheilungen zerlegt, von denen α durch E und ebensoviel durch τ_1 führen. Jeder von ihnen beginnt auf einem Rande von Q und endigt auf demselben Rande von Q, weil er sonst eine Verbindung zwischen E und τ_1 herstellen würde, während diese durch Q von einander abgelöst sind. Wenn zwei von diesen Abtheilungen sich etwa in E kreuzen würden, so ergäben sie zusammen drei Querschnitte für E. Aber das ist ausgeschlossen, da alle diese Abtheilungen Stücke eines einzigen Ringweges R sind. Also wird R durch Q in α Querschnitte I. Art von E, und ebensoviel Querschnitte I. Art von τ_1 zerlegt.

Bringt man diese für E in irgend eine Reihenfolge, so zerlegt der erste E in zwei Stücke I. Art (e); der zweite führt durch eines dieser Stücke und zerlegt dieses in zwei Stücke I. Art. So setzt sich das fort, und es folgt, daß E, mithin auch τ_1, in $\alpha + 1$ Stücke zerfällt.

Bei den vorliegenden Voraussetzungen wird also τ durch Q und R zusammen in $2\alpha + 2$ Stücke zerlegt. Dass dies Stücke I. Art sind, kommt nicht mehr in Betracht.

3) Dieselben Stücke erhält man auch, wenn man zuerst den Ringschnitt R und dann erst Q ausführt.

Sei τ' die Fläche, in welche τ durch den Ringschnitt R verwandelt wird und

$$x$$

die Anzahl der Stücke, aus denen τ' besteht, also entweder $x = 1$ oder (nach b)) $x = 2$. Ist $x = 1$, so ist τ' eine zusammenhängende Fläche, τ Fläche II. Art; der zu beweisende Satz behauptet, dass $x = 2$ ist.

In der ursprünglichen Fläche τ war Q ein Ringschnitt oder ein Querschnitt I. Art; in τ' wird Q von R 2α-mal gekreuzt. Ist Q ein Ringschnitt, so zerfällt er in 2α Querschnitte von τ'; ist Q ein Querschnitt I. Art, so ist $2\alpha + 1$ die Anzahl der Querschnitte von τ', in welche Q zerfällt. Um beide Fälle zu umfassen, bezeichnen wir diese Anzahl durch

$$2\alpha + q,$$

so dass $q = 1$, wenn Q ein Querschnitt, und $q = 0$, wenn Q ein Ringschnitt von τ ist.

Wir zählen die Anzahl der Stücke, in welche τ' jetzt zerfällt, von Neuem ab. Dafür ist es nothwendig zu bemerken, dass im ersten Falle sich unter den Querschnitten, in welche Q zerfällt, mindestens Ein Querschnitt II. Art befindet, nämlich die Abtheilung, welche von einem Rande der ursprünglichen Fläche τ bis zu einem Rande von R reicht. Sei

$$\lambda + q$$

die wirkliche Anzahl aller Querschnitte II. Art unter jenen, so folgt, mag Q Quer- oder Ringschnitt sein,

$$\lambda \geqq 0,$$

und es bleiben $2\alpha - \lambda$ Querschnitte I. Art von τ' übrig. Aber da über die Beschaffenheit der Fläche τ' nichts feststeht, so ist der Fall in Aussicht zu nehmen, dass auch einzelne von diesen keine Zerstückelung von τ' nach sich ziehen. Sei μ ihre Anzahl, also auch

$$\mu \geqq 0,$$

so bleiben $2\alpha - \lambda - \mu$ wirklich zerstückelnde Querschnitte I. Art übrig, und diese machen aus den x Stücken, aus denen τ' besteht, deren

$$x + 2\alpha - \lambda - \mu.$$

Aber das sind die nämlichen $2\alpha + 2$ Stücke, die wir in Nr. 2 fanden, also ist $2\alpha + 2 = x + 2\alpha - \lambda - \mu$, d. i. $\lambda + \mu = x - 2$. Dazu kommt $\lambda + \mu \geqq 0$, das giebt $x \geqq 2$. Aber wir wissen, dass x entweder $= 1$ oder $= 2$ ist, also folgt $x = 2$, $\lambda + \mu = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$.

Beschränken wir uns auf das, was wir brauchen, so folgt, dass τ durch jeden Ringschnitt R zerstückelt wird, auch wenn er nicht bloss durch E oder τ_1 allein führt, also ist, wie behauptet, τ eine Fläche I. Art.

Nehmen wir hierzu noch den selbstverständlichen Satz, dass

g) *wenn zwar E von der I., aber τ_1 von der II. Art ist, nothwendig τ selbst auch von der letztern Art sein wird,*

so ergiebt sich durch Vereinigung beider der

Lehrsatz A. *Von einer zusammenhängenden Fläche τ werde durch einen Ringschnitt oder einen einzigen Querschnitt ein Stück E abgelöst und sei τ_1 die Fläche, welche dann noch übrig bleibt. Ist E eine Fläche I. Art, so sind stets τ und τ_1 Flächen derselben Art.*

Um diesen Satz fruchtbar zu machen, bedarf es des Nachweises der charakteristischen Flächenstücke I. Art E; zuvor wollen wir aber die verlangte Umformung der Kriterien für Flächen I. Art zu Ende bringen.

Sei τ eine zusammenhängende Fläche, Q ein Querschnitt II. Art in τ; er verwandle τ in eine Fläche I. Art, welche τ' heissen möge. Es folgt: 1) Jeder Ringschnitt von τ' schneidet ein Stück aus τ', also das nämliche Stück aus τ heraus, also wird τ durch jeden Ringschnitt zerfällt, welcher Q nicht überschreitet. 2) Sei R ein Ringschnitt von τ, welcher, wenn man Q ausführt, von diesem geschnitten wird. Durch diesen Ringschnitt wird τ in eine Fläche τ'' verwandelt, welche entweder noch zusammenhängt, oder aus zwei Stücken besteht. Sei

$$y$$

die Anzahl der Stücke, aus denen τ'' besteht, und

$$\alpha$$

die Anzahl der Punkte, in denen Q und R einander kreuzen. Wir zählen nun auf zwei Arten die Anzahl der Stücke ab, in welche τ durch Q und R zerlegt wird.

1) Das sind zunächst die Stücke, in welche τ' durch R zerfällt. Es ist aber nach Voraussetzung τ' eine Fläche I. Art, die beiden Ränder von Q, als Querschnitt II. Art, haben sich mit den durch Q verbundenen Rändern von τ zu einer einzigen Randcurve ϱ von τ' vereinigt. Der ursprüngliche Ringschnitt R wird durch Q in α Abtheilungen zerlegt, die einander nicht kreuzen, jede beginnt und endigt in einem Rande von Q, also auf derselben Randcurve ϱ von τ': sie sind hiernach sämmtlich Querschnitte I. Art von τ' und zerfällen demnach τ' in $\alpha + 1$ Stücke.

Durch R und Q zusammen wird also τ in $\alpha + 1$ Stücke zerlegt.

2) Das aber sind auch die Stücke, in welche τ'' durch Q zerfällt. Aber in dieser Fläche löst Q sich in $\alpha + 1$ Querschnitte auf, darunter mindestens zwei von der II. Art, nämlich der erste und der letzte, da die Randcurve von τ, in welcher einer von diesen beginnt, verschieden ist von dem Rande von R, in welchem er sein Ende erreicht. Sei

$$\lambda + 2$$

unter jenen die genaue Anzahl von Querschnitten II. Art, und unter den noch übrigen $\alpha - \lambda - 1$ Querschnitten I. Art

$$\mu$$

die Anzahl derjenigen, welche keine Zerstückelung nach sich ziehen; es bleiben $\alpha - \lambda - \mu - 1$ zerstückelnde Querschnitte übrig, und diese machen aus den y Stücken, aus denen τ'' besteht, deren $y + \alpha - \lambda - \mu - 1$. Das sind also die $\alpha + 1$ vorigen; es folgt $y + \alpha - \lambda - \mu - 1 = \alpha + 1$, also $\lambda + \mu = y - 2$. Wiederum ist $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$, also $\lambda + \mu \geqq 0$, $y \geqq 2$,

während y nur $= 1$ oder $= 2$ sein kann. Es folgt $y = 2$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$.

Beschränken wir uns auf das, was für unsere Zwecke ausreicht, so haben wir den Satz:

h) *Wird eine zusammenhängende Fläche durch einen Querschnitt II. Art in eine Fläche I. Art verwandelt, so ist sie selbst eine Fläche dieser Art.*

Die Umkehrung dieses Satzes liegt auf der Hand:

i) *Wenn eine Fläche I. Art überhaupt einen Querschnitt II. Art gestattet, so wird sie durch denselben in eine neue Fläche I. Art verwandelt;*

denn ein Ringschnitt, welcher letztere nicht zerstückelt, würde auch die ursprüngliche Fläche nicht in Stücke zerlegen.

Beide Sätze zusammengenommen zeigen weiter, dass eine Fläche II. Art durch einen Querschnitt II. Art niemals in eine Fläche I. Art, also, da sie durch ihn nicht zerstückelt wird, stets in eine neue Fläche II. Art verwandelt wird.

Folglich wird durch einen Querschnitt II. Art der Gattungscharakter einer zusammenhängenden Fläche niemals geändert. Und da dies bestehen bleibt, wenn zu jenem ein Querschnitt II. Art nach dem andern kommt, so haben wir den

Lehrsatz B. *Durch Querschnitte II. Art wird die Art einer zusammenhängenden Fläche niemals geändert.*

Dazu kommt noch eine Schlussbemerkung.

Riemann nennt *einfachzusammenhängend* jede zusammenhängende Fläche, welche durch jeden Querschnitt zerstückelt wird. Eine solche darf also keinen Querschnitt II. Art gestatten, also nicht mehr als eine Randcurve haben. Sie darf auch nicht unter den Flächen II. Art gesucht werden, denn eine (durch eine Randcurve) begrenzte Fläche, welche durch einen Ringschnitt R nicht zerstückelt wird, wird auch nicht zerfällt durch den Querschnitt I. Art, welcher sich zusammensetzt aus R und einem vom Rande nach R führenden Querschnitt II. Art. Dazu gehört der Satz

k) *Die einfach zusammenhängenden Flächen sind nichts anderes als diejenigen Flächen I. Art, welche nur eine einzige Randcurve haben.*

Dass sie nur unter den Flächen dieser Art zu suchen sind, wurde soeben bewiesen; dass auch umgekehrt jede Fläche I. Art, die nur eine Randcurve hat, im Sinne Riemann's einfach zusammenhängend ist, folgt daraus, dass nach d) eine Fläche I. Art durch jeden Querschnitt I. Art zerstückelt wird und, wenn sie nur eine Randcurve hat, keinen Querschnitt II. Art, sondern nur Querschnitte I. Art gestattet, also durch jeden Querschnitt überhaupt zerlegt wird.

IV.

Die Stücke E und W erster Art einer Fläche T.

Um von diesen Lehrsätzen Anwendung machen zu können, ist nur noch nöthig, die charakteristischen Stücke einer Fläche T nachzuweisen, welche zu den Flächen I. Art gehören und deren successive Ablösung, wenn sie für jedes Stück durch einen einzigen Ring- oder einen einzigen Querschnitt erreicht wird, die Art der Fläche ungeändert lässt.

Das sind nur zwei verschiedene Gattungen von Flächenstücken. Die Stücke der ersten Gattung sind solche, die sich auch aus einer Ebene herausschneiden lassen, also ebene Stücke von T; wo eine Bezeichnung wünschenswerth ist, mögen sie als

Stücke E von T

bezeichnet werden. Dass ein solches durch jeden Ringschnitt zerfällt, versteht sich von selbst, und liegt der complexen Integration in der Ebene zu Grunde.

Ein Stück der andern Gattung fällt aus T heraus, wenn ein Ringschnitt in einem vollständigen Umlauf um einen Verzweigungspunkt α, aber nicht um mehr als einen, ausgeführt wird. Ein solches gewundenes Stück von T soll als ein

Stück W oder $W(\alpha)$ von T

bezeichnet werden. Dass es eine Fläche I. Art ist, beweist man am einfachsten, indem man durch dasselbe vom Verzweigungspunkte α aus eine genügende Anzahl radialer Schnitte nach seinem Umfange führt. Die beiden ersten Schnitte zusammen und alsdann jeder folgende für sich allein sind lauter Querschnitte I. Art; jeder von ihnen löst von W ein Stück E ab, also ein Stück I. Art nach dem andern; was übrig bleibt, ist selbst ein Stück E und von derselben Art wie W, mithin W von der I. Art.

Mit diesen ebenen Stücken E und den gewundenen Stücken W sind aber alle charakteristischen Stücke I. Art von T erschöpft, indem T selbst und jeder Theil von T durch eine hinreichende Anzahl von Ring- und Querschnitten in solche Stücke E und W aufgelöst werden kann, und die Frage nach dem Gattungscharakter von T nur davon abhängt, wieviel solcher Schnitte zur Ablösung eines solchen Stückes erforderlich sind.

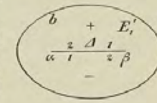
V.

Die zweiblättrige Fläche T mit einer einzigen Doppellinie.

Wir beginnen mit der einfachsten Riemann'schen Fläche, der zweiblättrigen Fläche mit einer einzigen Doppellinie. Es ist nach dem

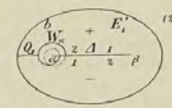
Vorangehenden sehr leicht zu beweisen, dass sie von der I. Art ist: aber der Beweis selbst und einige Nebenumstände, die sich dabei ergeben, liefern uns die Hülfsmittel, mit denen wir auch in allen folgenden Fällen ausreichen. Eine gewisse Ausführlichkeit an dieser Stelle wird dem Folgenden zu Gute kommen.

Seien also zwei Ebenen E_1 und E_2 in einer einzigen Doppellinie Δ aneinander geheftet; die Endpunkte α, β von Δ sind dann die Verzweigungspunkte der so entstandenen Fläche T.



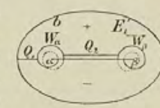
(1)

1) Ein Ringschnitt b zerlegt die Ebene E_1 in zwei Theile, einen äusseren und einen innern E_1'; führt b in der Fläche T um Δ herum, so fällt jener ab, dieser bleibt an E_2 haften, und bildet mit E_2 zusammen eine Fläche gleicher Art wie T.



(2)

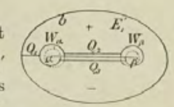
2) In dieser Fläche führen wir von b aus, also in E_1' beginnend, einen Querschnitt I. Art Q_1 so aus, dass er zuletzt um α kreist, bis er sich schliesst. Er schneidet aus der Fläche ein Stück W_α heraus, was von der Fläche übrig ist, ist von der frühern Art.



(3)

3) In dieser Fläche führen wir einen zweiten Querschnitt I. Art Q_2 aus. Er beginnt in E_1' auf dem Rande von W_α, folgt dann dem Rande von $\overset{+}{E}_1'$ und endigt mit einem vollständigen Umlauf um β. Er schneidet aus der vorigen Fläche ein Stück W_β heraus, lässt also die Art der Fläche ungeändert.

In dieser Fläche ist $\overset{+}{E}_1'$ völlig abgelöst von $\bar{E}_2$, aber es haftet noch $\bar{E}_1'$ an $\overset{+}{E}_2'$ von W_α bis W_β.



(4)

4) Nun führe man noch einen Querschnitt I. Art Q_3 aus, er folge dem Rande von $\bar{E}_1'$ und führe von W_α bis W_β. Er löst das, was von E_1' nach Ausscheidung von W_α und W_β noch übrig geblieben ist, von E_2 völlig ab: von T ist nur noch E_2, mit einer sofort zu erwähnenden Modification übrig, das ist eine Fläche I. Art, also ist auch T von der I. Art.

Was hier vorgegangen ist, wird sich im Folgenden stets wiederholen. Wir werden dann nöthigenfalls b als einen zur Doppellinie Δ gehörigen Ringschnitt und Q_1, Q_2, Q_3 als die drei zu b, Δ gehörigen Querschnitte bezeichnen.

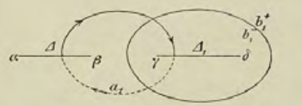
Abgesehen vom äussern Theile des Blattes E_1, bezüglich dessen sich bei den folgenden Aufgaben andere Verhältnisse einstellen werden, leisten die drei zu b, Δ gehörigen Querschnitte folgendes: 1) dass der innere Theil E_1' von E_1 nebst Stücken von E_2 ohne Aenderung der Flächenart abgelöst werden, und 2) in E_2 eine *Lücke* entsteht, indem die zu W_α, W_β gehörigen Stücke von E_2 ausgefallen sind, aber ihre Ränder sind durch die von Q_2 und Q_3 herrührenden Schnittränder von $\overset{-}{E}_2$ und von $\overset{+}{E}_2$ zu einer einzigen Randcurve vereinigt.

Das sind die Operationen und die dabei aufzufassenden Umstände, auf welche wir im Folgenden Bezug nehmen werden.

VI.

Die Fläche T der elliptischen Functionen.

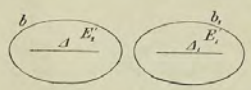
Sei T wieder eine zweiblättrige Fläche aber mit zwei Doppellinien Δ und Δ_1 also vier Verzweigungspunkten $\alpha\beta\gamma\delta$; Δ reiche von α bis β, Δ_1 von γ bis δ.



(τ)

Diese Fläche ist nicht von der I. Art. Man führe über das erste Blatt von T, welches wieder E_1 heissen möge, einen Ringschnitt b_1 um Δ_1, so entsteht eine Fläche τ, von welcher wir beweisen werden, dass sie eine zusammenhängende ist. Daraus folgt dann, dass T selbst von der II. Art ist.

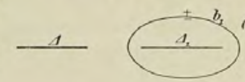
Seien $\overset{-}{b}_1$, $\overset{+}{b}_1$ die beiden Ränder von b_1, und zwar $\overset{-}{b}_1$ derjenige, welcher Δ_1 zugewandt ist. Alle Wege durch T, welche zu $\overset{-}{b}_1$ führen und von $\overset{+}{b}_1$ aus weiter fortzusetzen sind, sind unterbrochen; aber man kann ihre Verbindung durch einen Umweg a_1 wieder herstellen, der von $\overset{-}{b}_1$ durch Δ_1, dann über E_2 nach Δ und durch die Doppellinie hindurch wieder über E_1 nach $\overset{+}{b}_1$ führt. Man kann also in der Fläche τ noch von jeder Stelle aus jede beliebige von T erreichen, τ ist also eine zusammenhängende Fläche, T selbst eine Fläche II. Art.



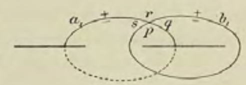
Aber τ ist eine Fläche I. Art. Zum Beweise führe man über E_1 zunächst den zu Δ gehörigen Ringschnitt b aus; alles, was vom Blatte E_1 ausserhalb b und b_1 liegt, fällt ab; was übrig ist, ist von derselben Art wie τ und besteht aus E_2 und

den von b bis Δ und von b_1 bis Δ_1 reichenden innern Theilen E_1' von E_1. Diese werden durch die drei zu b, Δ und die drei zu b_1, Δ_1 gehörigen Querschnitte $Q_1\,Q_2\,Q_3$ abgelöst, wieder ohne Aenderung des Flächencharakters. Was übrig bleibt, ist E_2 mit den beiden von Δ, Δ_1 herrührenden Lücken, also eine Fläche I. Art; also ist auch τ eine Fläche I. Art, wie behauptet wurde.

Aber diese Fläche I. Art τ hat zwei Randcurven, $\overset{-}{b}_1$ und $\overset{+}{b}_1$, sie gestattet also einen Querschnitt II. Art, ohne zu zerfallen und ohne ihre Art zu ändern. Dafür nehmen wir den Schnitt längs des vorhin benutzten Umweges a_1; τ verwandelt sich in eine Fläche I. Art T', die vier Schnittränder $p\overset{-}{b}_1q$, $q\overset{+}{a}_1r$, $r\overset{+}{b}_1s$, $s\overset{-}{a}_1p$ vereinigen sich zu einer einzigen Randcurve, also folgt, *dass diese Fläche T' eine einfach zusammenhängende ist.*



(τ)



(T')

Während also τ durch jeden Ringschnitt, aber nicht durch jeden Querschnitt (z. B. a_1) zerstückelt wird, wird T' durch jeden Ring- und jeden Querschnitt in Stücke zerlegt.

Es ist wohl zu beachten, dass diese Untersuchung nur den Zwecken der Integralrechnung dient. Wir treten in diese Frage sofort ein, um so mehr als das, was sich im vorliegenden Falle noch mit genügender Einfachheit herausstellen wird, vollkommen ausreicht, um die nöthige Aufklärung in die folgenden, wenn auch noch so verwickelten Eälle zu bringen. Sei

$$s = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}$$

die Irrationalität, welche der vorliegenden Fläche T eindeutig zugeordnet ist,

$$w = \int \frac{dz}{s}$$

das zugehörige Integral I. G. Auf diesen Fall beschränkt, besteht die der Integralrechnung angehörige Frage, welche den Anlass zur Flächentheorie giebt, darin, ob und unter welchen Umständen zwei verschiedene Wege al_1z, al_2z durch T denselben Werth für w liefern; allgemeiner in der Aufgabe, wenn w_1, w_2 die Werthe sind, welche sich auf diesen Wegen für w ergeben, den Werth von $w_1 - w_2$ zu ermitteln. Das ist der Werth, den das $\int dw$ auf dem Wege al_1zl_2a erlangt, als Ringweg heisse er R.

Die Frage lässt sich beantworten, sobald R ein Stück der Fläche abgrenzt. In der Fläche T ist das nicht bei jedem Ringwege R der Fall, wohl in der Fläche τ. Für diese soll also $w_1 - w_2$ ermittelt werden.

Sei demnach R Ringweg durch τ; er zerfällt τ in zwei Stücke E und F, und sei E dasjenige von beiden, welches bei der beabsichtigten Integration in *positiver* Richtung umlaufen wird.

Bezüglich E sind nun folgende drei Fälle herstellbar, also möglich: erstens der Fall, wo E von R allein begrenzt ist; zweitens der Fall, wo R und ein Rand von b_1, etwa $\overset{+}{b}_1$ die Begrenzung von E bilden; und drittens der Fall, wo die Begrenzung von E aus R, $\overset{+}{b}_1$ und $\overset{-}{b}_1$ besteht.

In allen Fällen ist das über die ganze Begrenzung von E in positiver Richtung erstreckte $\int dw = 0$:

$$\int\limits_{(E)} dw = 0.$$

Zu ihm liefert R in allen Fällen den Beitrag $w_1 - w_2$; seien $\overset{+}{B}$, $\overset{-}{B}$ die Beiträge, welche $\overset{+}{b}_1$, $\overset{-}{b}_1$ in den übrigen Fällen liefern, so haben wir in den drei aufeinanderfolgenden Fällen

$$(1)\ w_1 - w_2 = 0, \quad (2)\ w_1 - w_2 + \overset{+}{B} = 0, \quad (3)\ w_1 - w_2 + \overset{+}{B} + \overset{-}{B} = 0.$$

Aber da im dritten Falle $\overset{-}{b}_1$ mit denselben Werthen von s wie $\overset{+}{b}_1$ aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, so ist $\overset{-}{B} = -\overset{+}{B}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} &\text{in den Fällen (1) und (3):} && w_2 = w_1, \\ &\text{im zweiten Falle:} && w_2 = w_1 + \overset{+}{B}. \end{aligned}$$

Die Frage nach der Beziehung zwischen w_2 und w_1 lässt sich also in der Fläche τ beantworten, und insofern löst die Fläche τ die Aufgabe so, wie sie ursprünglich gelautet hat.

Aber die Lösung, welche wir finden, zeigt, daß man die ursprüngliche Aufgabe vervollständigen kann und an ihre Stelle, so weit sie das Integral I. G. betrifft, die Frage stellen kann, ob sich die Fläche τ so modificiren lässt, dass der zweite Fall unmöglich wird, denn dann liefern alle Wege zwischen denselben Endpunkten denselben Werth für w, und *w ist eindeutig geworden.*

Das ist erreicht, wenn man bewirken kann, dass entweder kein Rand von b_1 oder beide zur Begrenzung von E gehören. *Dies leistet der Querschnitt a_1*, da a_1 und b_1 zusammen nur eine einzige Randcurve ergeben. Ist E Stück von T', so ist entweder R allein seine Begrenzung, oder diese besteht aus R und der genannten vollständigen Randcurve; zum $\int\limits_{(E)} dw$ liefert R den Beitrag $w_1 - w_2$, die Integration über gegenüberliegende Theile der Randcurve hebt sich überall auf; es folgt $w_1 - w_2 = 0$, d. h. $w_2 = w_1$, *also ist w, auf die einfach zusammenhängende Fläche T' beschränkt, eindeutig.*

Und das rührt, wie man deutlich erkennt, einzig und allein davon her, dass die Ränder des Schnittpaares a_1, b_1 eine einzige Randcurve bilden, dass sie also entweder ganz oder gar nicht zur Begrenzung von E gehören, und dass die Integrationen über diese Randcurve einander aufheben.

Dies ist also der Grund, weshalb man schon im vorliegenden Falle die Fläche τ aufgiebt, und zu Zwecken der Integralrechnung sich der einfach zusammenhängenden Fläche T' bedient, obgleich auch τ die ursprüngliche Frage der Integralrechnung löst.

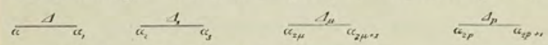
VII.

Die allgemeine Fläche T der ultraelliptischen Functionen.

Der Lehre von den ultraelliptischen Functionen von beliebigem Genus p liegt die Irrationalität

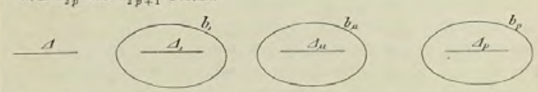
$$s = \sqrt{(z-\alpha)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{2p+1})}$$

zu Grunde, wo unter dem Wurzelzeichen das Product aus $2p+2$ ungleichen Wurzelfactoren steht, also die $2p+2$ Werthe $\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{2p+1}$ ungleich sind. Um sie eindeutig zu machen, bedarf es einer zweifachen z-Ebene T, deren Blätter E_1 und E_2 in $p+1$ Doppellinien $\Delta\Delta_1\ldots\Delta_p$ zusammenhängen. Man kann diese, ohne an der Zuordnung der Werthe



(T)

von s zu den Punkten der Fläche etwas zu ändern, so anlegen, dass Δ von α bis α_1, Δ_1 von α_2 bis $\alpha_3, \ldots \Delta_\mu$ von $\alpha_{2\mu}$ bis $\alpha_{2\mu+1} \ldots$ und Δ_p von α_{2p} bis α_{2p+1} reicht.



(τ)

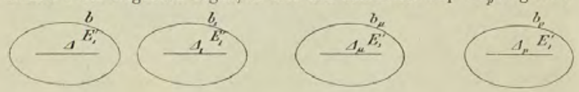
Dass diese Fläche von der II. Art ist, ergiebt sich wie im vorigen Falle, indem man durch E_1 um jede der p Doppellinien $\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_p$

einen zugehörigen Ringschnitt $b_1 b_2 \ldots b_p$ legt. Dann entsteht eine neue Fläche τ, von der man wie im vorigen Falle beweist, dass sie eine zusammenhängende ist.

Aber diese Fläche τ ist von der I. Art, d. h. sie wird durch jeden Ringschnitt in Stücke zerlegt.

Der Beweis wird geleistet, indem wir von dieser Fläche τ ein Stück I. Art nach dem andern ablösen, und zwar das erste durch einen Ringschnitt, jedes folgende durch einen Querschnitt I. Art, und zwar so lange, bis als Fläche gleicher Art wie τ ein ebenes Stück übrig bleibt.

Diesen Ringschnitt führen wir durch E_1 um Δ: es ist der Ringschnitt b der folgenden Figur; er löst den ausserhalb $b\, b_1 \ldots b_p$ liegenden

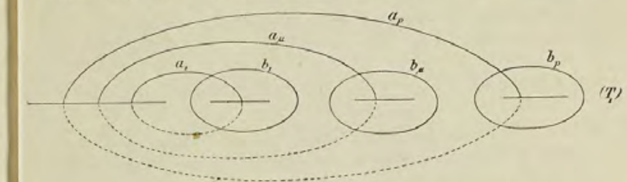


Theil von E_1 ab und lässt übrig eine Fläche, welche aus E_2 und den inneren Theilen E_1' von E_1 besteht. Diese nebst zugehörigen Stücken von E_2 lösen wir ab durch die drei zu b, Δ, zu b_1, Δ_1, ... zu b_p, Δ_p gehörigen Querschnitte $Q_1 Q_2 Q_3$: was übrig bleibt, hat den ursprünglichen Flächencharakter, ist aber nichts anderes als E_2 mit den von $\Delta \Delta_1 \ldots \Delta_p$ herrührenden Lücken, also eine Fläche I. Art: folglich ist auch τ selbst von dieser Art, wie behauptet.

Sei wieder w ein Integral I. G., um es an dieser Stelle wieder bei diesem einfachsten und wichtigsten Falle zu lassen, und seien w_1, w_2 die Werthe, welche w auf den durch τ führenden Wegen al_1z, al_2z erlangen, mithin $w_1 - w_2$ der Werth, den das $\int dw$ auf dem Ringwege al_1zl_2a, den wir R nennen, erhält. Dieser Weg zerlegt τ in zwei Stücke E und F; sei wieder E dasjenige, an welchem diese Integration in positiver Richtung vorbeiführt. Gehören beide Ränder eines Ringschnittes b_μ zur Begrenzung von E, so hat das, wie beim elliptischen Integral w, auf den Werth von $w_1 - w_2$ gar keinen Einfluss; welchen Werth $w_1 - w_2$ hat, hängt nur davon ab, ob von einigen dieser Ringschnitte nur ein Rand zur Begrenzung von E gehört, und welche das sind. Das richtet sich, wenn der Weg l_1 gegeben ist, ganz und gar nach der Wahl von l_2; in jedem Falle kann man $w_1 - w_2$ ermitteln, aber nicht in jedem Fall findet sich dies $= 0$.

Begnügt man sich nicht mit der Reduction von w_2 auf w_1, so ist der Weg gewiesen um w eindeutig zu machen, so nämlich, dass stets $w_1 - w_2 = 0$ wird. Man darf, um das zu erreichen, die Fläche nur so einrichten, dass, *so oft irgend ein Schnittrand zur Begrenzung von E gehört, der gegenüberliegende Rand ihr auch angehört.*

Für b_1 leistet das der Querschnitt II. Art a_1, den wir bei der Fläche der elliptischen Functionen benutzten, und zwar leistet er dies zugleich für sich selbst, weil die Ränder von a_1, b_1 zusammen eine einzige Curve bilden, die hiernach entweder ganz oder gar nicht zur Begrenzung von E gehört. Für b_2 ergiebt das nach dem nämlichen



Muster einen Querschnitt II. Art a_2, u. s. w. bis b_p, zu dem sich ein Querschnitt II. Art a_p ergiebt.

So erhält man jetzt p Schnittpaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... $a_p b_p$, und die Fläche T_1, in welche sie T verwandeln, ist eine zusammenhängende Fläche I. Art. Auf sie beschränkt, ist jedes Integral I. G. eindeutig.

Aber diese Fläche hat p Randcurven, ist also keine einfach zusammenhängende. Fordert die Aufgabe eine solche, was bei den Integralen der Classe nie der Fall ist, so hat man nur zu bewirken, dass alle Randcurven sich zu einer einzigen vereinigen. Das erreicht man durch Querschnitte II. Art: einen von der ersten Randcurve zur zweiten; seine Ränder vereinigen sich mit beiden Randcurven zu einer einzigen; von dieser führt man, mit dem gleichen Erfolge, einen zweiten Querschnitt II. Art zur dritten Randcurve von T_1, fährt man so fort, so erreicht man das vorgesteckte Ziel durch $p - 1$ Querschnitte II. Art. Diese kann man, nach dem, was soeben ausgeführt wurde, so anlegen, dass man auf einem Rande des ersten einen Punkt ω annimmt, und von diesem die $p - 2$ folgenden alle ausgehen lässt.

Dann lassen die $p - 1$ Querschnitte II. Art sich auch ansehen als ein Bündel von p Schnitten $c_1 c_2 \ldots c_p$, die alle von ω ausgehen und, ohne einander zu schneiden, durch die Fläche T_1' nach den Rändern von $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... $a_p b_p$ führen.

Dann entsteht ein Schnittnetz, welches aus p Querschnittbündeln $c_1 a_1 b_1$, $c_2 a_2 b_2$, ... $c_p a_p b_p$ besteht und die Fläche T in eine einfach zusammenhängende T' verwandelt.

VIII.

Die allgemeine n-blättrige Fläche T.

Diese Principien erledigen auch den Fall, welcher der allgemeinen Lehre von den Abel'schen Functionen zu Grunde liegt, und bei dem die Fläche T aus beliebig viel Blättern besteht, aber der Zusammenhang zwischen denselben nur durch Doppellinien zwischen je zwei Blättern vermittelt wird. Seien also $E_1 E_2 \dots E_n$ die Blätter von T,

$$n$$

ihre Anzahl und

$$d$$

die Anzahl ihrer Doppellinien. Zunächst ist die Vorfrage zu erledigen, wie man es sich zu denken hat, dass n Ebenen durch d Doppellinien in Zusammenhang gebracht sind.

An E_1 muss wenigstens ein anderes Blatt angeheftet sein, weil E_1 sonst mit T nicht zusammenhinge. Sei E_2 an E_1 angeheftet. Dazu ist eine Doppellinie erforderlich und hinreichend; sei

$1 + a_1$ die wirkliche Anzahl aller Doppellinien zwischen E_1 und E_2,

$$\text{also } a_1 \gtreqless 0.$$

Eine von diesen, D_1, wähle man als für den Zusammenhang zwischen E_1 und E_2 wesentlich heraus; die a_1 übrigen sind dann entbehrlich 1) für den Zusammenhang zwischen E_1 und E_2, also 2) für den Zusammenhang von T selbst.

Mit diesen $1 + a_1$ Doppellinien bilden E_1 und E_2 eine zusammenhängende Fläche, welche wir E_{12} nennen werden.

An E_{12} muss mindestens ein anderes Blatt E_3 angeheftet sein, sei

$1 + a_2$ die wirkliche Anzahl aller Doppellinien zwischen E_{12} und E_3,

$$\text{also } a_2 \gtreqless 0.$$

Unter diesen wähle man eine, D_2, als für den Zusammenhang zwischen E_{12} und E_3 wesentlich heraus; die a_2 übrigen sind dann für diesen und für den Zusammenhang von T selbst entbehrlich. Mit diesen $1 + a_2$ Doppellinien bilden E_{12} und E_3 zusammen eine Fläche E_{123}.

Mit dieser muss irgend ein Blatt E_4 in $1 + a_3$, $a_3 \gtreqless 0$, Doppellinien zusammenhängen, von denen irgend eine, D_3, wesentlich ist die a_3 übrigen überzählig sind. Zusammen bilden E_{123} und E_4 eine Fläche E_{1234}.

So setzt sich die Schlussweise fort bis zu einer aus den $n - 1$ Blättern $E_1 E_2 \dots E_{n-1}$ gehefteten Fläche $E_{12\dots n-1}$; an sie muss E_n geheftet sein; ist $1 + a_{n-1}$ die Anzahl der Doppellinien, welche das

leisten, so ist irgend eine von ihnen, D_{n-1}, für den angegebenen Zweck wesentlich, die a_{n-1} übrigen sind entbehrlich.

So erhalten wir 1) $n - 1$ Doppellinien $D_1 D_2 \dots D_{n-1}$, welche für den Zusammenhang der n Blätter ausreichen aber auch unentbehrlich sind, und 2) wenn $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = p$, also $p \gtreqless 0$ ist, noch p andere Doppellinien, welche für den Zusammenhang von T entbehrlich sind. Dies giebt als Anzahl aller Doppellinien von T

$$d = n - 1 + p.$$

Ist also eine n-blättrige, zusammenhängende Fläche T nur in Doppellinien geheftet, so ist die Anzahl derselben

$$d \gtreqless n - 1.$$

Ist insbesondere $d > n - 1$ und

$$d = n - 1 + p,$$

so kann man aus diesen Doppellinien auf mindestens eine Art eine Gruppe von $n - 1$ Doppellinien

$$D_1 D_2 \dots D_{n-1}$$

herausheben, welche die n Blätter der Fläche in Zusammenhang bringen, und dann bleiben p Doppellinien

$$\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_p$$

übrig, welche für den Zusammenhang der Blätter entbehrlich sind. Jene werden wir als die wesentlichen, diese als die überzähligen Doppellinien der Fläche T bezeichnen.

Die Untersuchung dieser Fläche T gründet sich auf ihre Beziehung zu der einfacheren Fläche, welche entsteht, wenn zur Heftung von $E_1 E_2 \dots E_n$ nur die wesentlichen Doppellinien $D_1 D_2 \dots D_{n-1}$ verwendet werden; wir wollen dieselbe als eine T_n^0 bezeichnen, so dass, wenn bei der obigen Entstehungsweise von T ebenfalls nur diese Doppellinien, aber nicht die überzähligen benutzt werden, E_1 eine T_1^0, E_{12} eine T_2^0, ... $E_{12\dots n-1}$ eine T_{n-1}^0 heissen wird.

α. Diese Fläche T_n^0 ist von der I. Art.

Sie entsteht, indem E_n mittelst der Doppellinie D_{n-1} an eine T_{n-1}^0 geheftet wird. Man führe durch E_n einen Ringschnitt b um D_{n-1}; er löst den äussern Theil von E_n ab, den innern löse man ab durch die drei zu b, D_{n-1} gehörigen Querschnitte $Q_1 Q_2 Q_3$; was übrig bleibt, ist von derselben Art wie T_n^0. Aber was übrig bleibt, ist T_{n-1}^0 bis auf eine von D_{n-1} herrührende Lücke, vermöge deren an T_{n-1}^0 ein ebenes Stück fehlt, und ist aus diesem Grunde von derselben Art wie die vollständige Fläche T^0_{n-1}. Also sind T^0_n, T^0_{n-1}, T^0_{n-2}, ... T^0_2, T^0_1 alle von derselben, mithin alle von der I. Art.

β. Führt man in der Fläche T um jede überzählige Doppellinie $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_p$ in einem der beiden Blätter, zu denen sie gehört, einen Ringschnitt $b_1 b_2 \ldots b_p$ aus, so erhält man eine Fläche τ, welche noch zusammenhängt und von der I. Art ist.

Dass die Fläche τ eine zusammenhängende ist, ergiebt sich sofort, wenn man für jeden Ringschnitt b den äußeren Theil des Blattes, auf dem er ausgeführt ist, unterscheidet vom innern, welcher von b bis zur zugehörigen Doppellinie Δ reicht. Der Zusammenhang zwischen allen äussern Theilen ist durch die wesentlichen Doppellinien gesichert, an ihnen haften die innern Theile in den überzähligen Doppellinien.

Um die Art der hiernach zusammenhängenden Fläche τ zu ermitteln, löse man diese innern Theile ab durch je drei zu $b_1 \Delta_1$, zu $b_2 \Delta_2$, ... und zu $b_p \Delta_p$ gehörige Querschnitte $Q_1 Q_2 Q_3$, was den Charakter der Fläche nicht ändert. Übrig bleibt dann T^0_n mit p ebenen Lücken, also eine Fläche I. Art, mithin ist auch τ eine Fläche I. Art.

Bei jedem Ringschnitte b unterscheiden wir seine beiden Ränder, indem wir den einen $\overset{-}{b}$, den andern $\overset{+}{b}$ nennen. In der zusammenhängenden Fläche τ führt ein Weg von $\overset{-}{b}_1$ nach dem gegenüberliegenden Punkte von $\overset{+}{b}_1$; schneidet man ihn durch, so hat man einen Querschnitt II. Art a_1; die neue Fläche ist 1) eine zusammenhängende und 2) von der früheren, also der ersten Art. Die Ränder von a_1, b_1 vereinigen sich zu einer einzigen Randcurve, welche $a_1 b_1$ heissen möge. In dieser neuen Fläche führt auch ein Weg von $\overset{-}{b}_2$ zum gegenüberliegenden Punkte von $\overset{+}{b}_2$: durchgeschnitten, liefert er einen Querschnitt II. Art a_2, seine Ränder vereinigen sich mit $\overset{-}{b}_2$ und $\overset{+}{b}_2$ zu einer einzigen Randcurve $a_2 b_2$, und die Fläche ist noch immer eine zusammenhängende von der I. Art. Diese Schlussweise setzt sich fort, und es folgt:

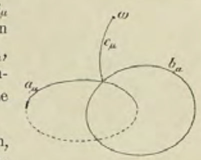
γ. In der Fläche τ kann man, ohne ihren Zusammenhang zu zerstören, die Ränder jedes Ringschnittes b_μ durch einen Querschnitt II. Art a_μ verbinden. Dann erhält man für die ursprüngliche Fläche T p Schnittpaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... $a_p b_p$, welche sie in eine zusammenhängende Fläche T_1 verwandeln, und diese ist von der I. Art. Auf sie beschränkt ist jedes Integral I. G. eindeutig.

Aber diese Fläche hat p Randcurven $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... $a_p b_p$, ist also keine einfach zusammenhängende.

δ. Um diese Fläche T_1 in eine einfach zusammenhängende T' zu verwandeln, ist es ausreichend, von irgend einem Punkte ω aus durch T_1 nach jeder Randcurve einen Schnitt zu führen, c_1 nach $a_1 b_1$, c_2 nach $a_2 b_2$, ... c_p nach $a_p b_p$, aber so, dass diese Schnitte $c_1 c_2 \ldots c_p$ ausser ω einander nicht mehr kreuzen.

Denn unter dieser Voraussetzung bilden $c_1 c_2$ zusammen einen Querschnitt II. Art zwischen $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$, mit diesen zusammen also eine einzige Randcurve; diese wird durch c_3 mit $a_3 b_3$ zu einem einzigen Rande vereinigt u. s. w., so dass T', weil nur Querschnitte II. Art zur Verwendung kamen, eine zusammenhängende Fläche I. Art, und weil sie nur noch eine Randcurve hat, eine einfach zusammenhängende Fläche ist.

Das Schnittsystem dieser Fläche ist sehr leicht zu übersehen. Führt man, wie üblich ist, jeden Schnitt c_μ nach einer Ecke des Schnittpaares $a_\mu b_\mu$, so bilden diese drei Schnitte ein Querschnittbündel $c_\mu a_\mu b_\mu$, und aus p vom nämlichen Punkt ω ausgehenden Querschnittbündeln setzt sich das ganze Schnittsystem zusammen.



Lässt man es in der Reihenfolge entstehen, dass man in der Fläche T zuerst die p Schnitte $c_1 c_2 \ldots c_p$ anlegt, so bilden diese zusammen einen *Punktschnitt*, und an seine Aeste $c_1 c_2 \ldots c_p$ sind dann die Querschnittpaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... $a_p b_p$ angehängt.

Die Anzahl

$$p = d - (n - 1)$$

dieser Querschnittpaare ist durch die Zahl der Blätter und der Doppellinien der Fläche T völlig bestimmt und heisst *das Genus der Fläche T selbst und der ihr zugeordneten Classe von algebraischen Functionen.*

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

借用者科姓名印	借用期間	返納月日
Koku科 Shimizu	自 14年12月6日 至 年 月 日	15年6月3日
科	自 年 月 日 至 年 月 日	年 月 日
科	自 年 月 日 至 年 月 日	年 月 日
科	自 年 月 日 至 年 月 日	年 月 日
科	自 年 月 日 至 年 月 日	年 月 日
科	自 年 月 日 至 年 月 日	年 月 日