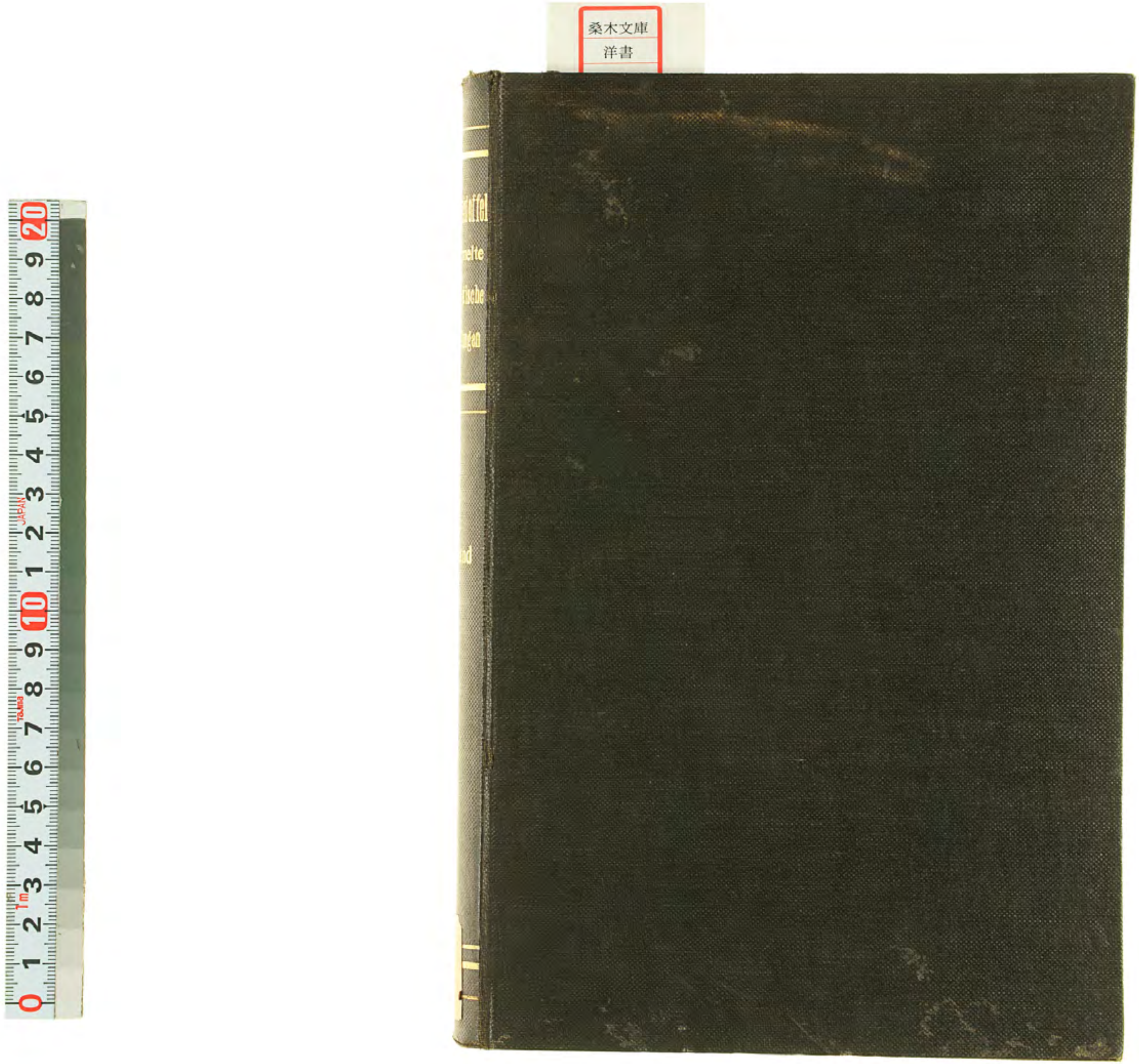

桑木文庫
洋書

E. B. CHRISTOFFEL

GESAMMELTE
MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

A. KRAZER UND **G. FABER**

HERAUSGEGEBEN VON

L. MAURER

ZWEITER BAND

MIT 18 FIGUREN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

INHALT.

Seite

XX.

Sopra un problema proposto da Dirichlet.[1])

(Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Bd. 4, 1871, S. 1—9.)

I.

Da una comunicazione verbale, che debbo al sig. Heine, ho appreso che Dirichlet, verso l'anno 1840, ha ripetutamente invocata l'attenzione dei suoi scolari d'allora sul problema delle temperature stazionarie, mettendo particolarmente in rilievo, come una specie di problemi che meritava d'essere studiata di preferenza per la sua difficoltà, la distribuzione delle temperature su quelle superficie piane, e in quegli spazii a tre dimensioni, che si ottengono togliendo via una figura finita in ogni senso da un piano infinito, o dallo spazio infinito.

Ogni problema di questa specie è visibilmente associato ad un altro problema determinato, del genere di quelli già trattati; ma mentre, per es., la determinazione delle temperature stazionarie sopra una superficie rettangolare F non offre alcuna difficoltà, il problema associato delle temperature stazionarie sulla superficie complementare F' è rimasto completamente inaccessibile ai metodi adoperati finquì. Lo stesso può dirsi di tutti gli altri problemi di questa specie, tranne di quelli che riguardano le figure complementari del circolo e della sfera; ed io credo quindi di poter fare assegnamento sull'interesse dei lettori di questi Annali esponendo, in connessione col mio precedente lavoro, i principii che possono servire di base alla soluzione del problema di Dirichlet per la figura complementare F' di un poligono piano.

Riflettendo che la superficie F' si estende all'infinito, e, adottando una generalizzazione indispensabile per ben penetrare nella quistione analitica, il problema dev'essere formulato come segue:

In ogni punto della superficie F' riferita alle coordinate rettangole x, y, la funzione U è monodroma e continua in-

---

[1]) Addizione alla Memoria inserita in questi Annali, tom. I (2ª serie), pag. 89, im vorhergehenden Bande S. 245.

sieme colle sue derivate prime, che si annullano all'infinito. Sul contorno di questa superficie si ha

$$U = \psi(x, y)$$

e nell'interno di essa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \varphi(x, y);$$

con queste condizioni si deve determinare U in ogni punto *o* di F'. Ponendo $\varphi = 0$, si ha il problema proposto da Dirichlet. Ma è per ogni riguardo preferibile, come ho già notato nel mio precedente lavoro, introdurre un termine indipendente, e ciò vale per tutte le equazioni differenziali lineari, sì ordinarie che parziali. La questione delle restrizioni che risultano per φ e ψ dalle restanti condizioni non è nel caso presente che di secondaria importanza.

Tenendo il debito conto di tutte le condizioni relative all'infinito, si riconosce facilmente che all'attuale problema si possono applicare tutti i principii stabiliti negli art. I—IV del mio precedente lavoro, nella supposizione d'una superficie F d'estensione finita. Passo dunque senz'altro alla soluzione del problema seguente, al quale, come ho ivi dimostrato, il precedente può essere rivocato.

È dato un altro piano riferito a coordinate rettangole X, Y, di cui E è la parte sulla quale $Y > 0$. Si deve rappresentare la superficie E sopra F'.

II.

Siano distese sui piani delle $Z = X + iY$ e $z = x + iy$ due superficie Φ, φ a un solo strato e semplicemente connesse. Affinchè queste superficie siano rappresentate l'una sull'altra per mezzo d'un'equazione fra Z e z, bisogna e basta che quest'equazione soddisfaccia alle condizioni seguenti:

1.° Ad un giro positivo intorno ad una delle due superficie deve corrispondere, in virtù di quest'equazione, un giro positivo intorno all'altra.

2.° Nell'interno delle due superficie, — ciò che non sempre sarebbe possibile sul loro contorno, — deve sussistere una perfetta eguaglianza degli angoli corrispondenti.

In luogo dell'eguaglianza degli angoli si può ancora prescrivere che ad ogni punto dell'una superficie corrisponda un unico punto dell'altra, variabile con continuità insieme col primo. Le condizioni a ciò necessarie e sufficienti sono le seguenti. Se Φ si estende all'infinito e se il punto infinitamente lontano di Φ viene rappresentato sopra φ da un punto a distanza finita, bisogna che in questo punto $\frac{dz}{dZ}$ diventi

infinitesima come $\frac{a}{Z^2}$, dove a è una costante diversa da zero. Se φ si estende all'infinito e se il punto infinitamente lontano di φ viene rappresentato sopra Φ da un punto Γ a distanza finita, bisogna che in questo punto $\frac{dz}{dZ}$ diventi discontinua come $\frac{b}{(Z-\Gamma)^2}$, o più esattamente, che la differenza di queste due quantità resti continua in tal punto; b è parimenti una costante diversa da zero. In ogni altro punto di φ o di Φ la derivata $\frac{dz}{dZ}$ non deve diventare nè polidroma, nè nulla, nè infinita.

Prendiamo per Φ il mezzo piano E e per φ una delle due superficie F, F'. Il contorno di φ è formato in ambedue i casi del poligono P, che separa F da F'; indichiamo con $z_1, z_2, \ldots z_n$ i vertici di P, presi nell'ordine in cui sono percorsi durante un giro positivo intorno ad F, e con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ gli angoli corrispondenti a questi vertici e rivolti verso l'interno della superficie F.

Siano ora $a_1, a_2, \ldots a_n$ quei punti dell'asse delle X che nella rappresentazione di E sopra la superficie F vengono rappresentati dai vertici di P. Poichè ad un giro positivo intorno ad F corrisponde un giro positivo intorno ad E, le quantità a si presentano in quest'ultimo giro nell'ordine $a_1 a_2 \ldots a_n a_1 a_2 \ldots$, talchè per es. se il punto infinitamente lontano di E viene rappresentato sul lato $z_p z_{p+1}$ di P, si ha

$$a_{p+1} < a_{p+2} < \cdots < a_n < a_1 < a_2 < \cdots < a_p.$$

Ciò posto, dall'art. V della mia precedente Memoria si ricava, per la rappresentazione di E sopra F, la formola

$$f(Z)\frac{dz}{dZ} = \chi,$$

dove il fattore

$$f(Z) = (a_1 - Z)^{\frac{\pi-\lambda_1}{\pi}} (a_2 - Z)^{\frac{\pi-\lambda_2}{\pi}} \ldots (a_n - Z)^{\frac{\pi-\lambda_n}{\pi}}$$

è scelto in modo che durante un giro positivo intorno ad E il suo argomento decresca di tanto, di quanto cresce l'argomento di dz durante un giro simultaneo intorno ad F. Conseguentemente lungo l'asse delle X, dove $dZ = dX$, l'argomento di χ, ovvero la parte imaginaria di $\log \chi$, è costante; dal chè nel luogo citato si è dedotto che la stessa quantità χ è costante. Indicandola con α si ha così, per la rappresentazione di E sopra F, l'equazione

$$f(Z)\,dz = \alpha\, dZ.$$

III.

Per conseguire, rispetto alla superficie complementare F', lo stesso intento che per mezzo del fattore $f(Z)$ si è raggiunto rispetto alla superficie F, bisogna innanzi tutto surrogare gli angoli λ, che ora diventano angoli esterni, con $2\pi - \lambda$, con chè l'esponente $\frac{\pi - \lambda}{\pi}$ diventa $\frac{\lambda - \pi}{\pi}$, mutando solo il segno. Ma ciò non basta; poichè essendosi, insieme col giro positivo intorno a P, invertita la successione dei vertici, la stessa cosa ha luogo per i punti dell'asse delle X in cui questi sono rappresentati. Quindi le quantità reali $a_1, a_2, \ldots a_n$ devono essere surrogate da altre $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$ che in un giro positivo intorno ad E devono succedersi nell'ordine $a'_n, a'_{n-1}, \ldots a'_2, a'_1, a'_n$. Indicando con $g(Z)$ il valore reciproco dell'espressione in cui si converte per tal modo $f(Z)$, cioè ponendo

$$(a'_1 - Z)^{\frac{\pi-\lambda_1}{\pi}} (a'_2 - Z)^{\frac{\pi-\lambda_2}{\pi}} \ldots (a'_n - Z)^{\frac{\pi-\lambda_n}{\pi}} = g(Z)$$

si ottiene così, per la rappresentazione di E sopra F', l'equazione

$$\frac{1}{g(Z)} \frac{dz'}{dZ} = \chi,$$

dove i punti di F' sono designati con z', e dove χ deve soddisfare alle seguenti condizioni:

1.° Lungo l'asse delle X è costante la parte imaginaria di $\log \chi$.

Inoltre siccome il punto infinitamente lontano di E viene rappresentato sul contorno di F', cioè in un punto a distanza finita, bisogna che in questo punto la derivata $\frac{dz'}{dZ}$ diventi infinitesima come $\frac{a}{Z^2}$, e quindi, poichè $g(Z)$ diventa nello stesso punto infinita del secondo ordine, bisogna che χ diventi infinitesima del quarto: dunque

2.° Nel punto infinitamente lontano di E la quantità $\chi \cdot Z^4$ resta finita e diversa da zero.

Ora se $\Gamma = A + iB$ è quel punto di E nel quale viene rappresentato il punto infinitamente lontano di F', si ha in esso

$$\chi \cdot g(Z) = \frac{dz'}{dZ} = \frac{b}{(Z - \Gamma)^2} + \text{funz. cont.},$$

e poichè $g(Z)$ è monodroma, continua e diversa da zero in Γ, si deve avere in questo punto

$$\chi = \frac{c}{(Z - \Gamma)^2} + \frac{d}{Z - \Gamma} + \text{funz. cont.}$$

Di qui segue che in prossimità di Γ dev'essere

$$\left[\frac{c}{(Z-\Gamma)^2} + \frac{d}{Z-\Gamma} + \text{funz. cont.}\right]\left[g(\Gamma) + g'(\Gamma)(Z-\Gamma) + \cdots\right]$$
$$= \frac{b}{(Z-\Gamma)^2} + \text{funz. cont.},$$

al chè è necessario e sufficiente che sia $d \cdot g(\Gamma) + c \cdot g'(\Gamma) = 0$. Dunque

3.° Nel punto Γ di E la funzione χ diventa discontinua come

$$c\left[\frac{1}{(Z-\Gamma)^2} - \frac{g'(\Gamma)}{g(\Gamma)} \frac{1}{Z-\Gamma}\right].$$

E dopo ciò finalmente:

4.° In ogni altro punto di E la funzione χ è monodroma, continua e diversa da zero.

È facile formare un'espressione che soddisfaccia alle condizioni trovate per χ. Indicando con $\Gamma' = A - iB$ il punto conjugato di Γ e ponendo

$$\varphi(Z) = (Z - \Gamma)(Z - \Gamma') = (Z - A)^2 + B^2,$$

l'espressione

$$\psi = \frac{1}{\varphi^2}$$

soddisfa manifestamente alle condizioni 1, 2 e 4. In prossimità di Γ si ha

$$\psi = \frac{1}{(\Gamma - \Gamma')^2}\left[\frac{1}{(Z-\Gamma)^2} - \frac{2}{\varphi'(\Gamma)} \frac{1}{Z-\Gamma}\right] + \text{funz. cont.};$$

quindi assoggettando Γ alla condizione

$$\frac{2}{\varphi'(\Gamma)} = \frac{g'(\Gamma)}{g(\Gamma)},$$

la funzione ψ acquista tutte le proprietà volute per χ, epperò non resta che esaminare se, oltre ψ, possano esistere altre funzioni dotate delle stesse proprietà.

Ora dall'espressione di ψ e dalle condizioni per χ emerge che il quoziente $\frac{\chi}{\psi}$ è monodromo, continuo e diverso da zero in ogni punto di E, epperò che il suo logaritmo è monodromo e continuo. Inoltre sul contorno di E la parte imaginaria di $\log \frac{\psi}{\chi}$ è costante, epperò essa è tale anche su tutta la superficie E, donde segue che lo stesso ha luogo per la parte reale e quindi finalmente per la stessa quantità $\frac{\chi}{\psi}$. Abbiamo dunque in generale $\chi = \beta\psi$, indicando con β una costante, e possiamo così formulare il seguente teorema:

La rappresentazione di E nei punti z e z' del poligono F e della superficie complementare F' è data dalle equazioni:

$$dz = \alpha(a_1 - Z)^{\frac{\lambda_1-\pi}{\pi}}(a_2 - Z)^{\frac{\lambda_2-\pi}{\pi}}\dots(a_n - Z)^{\frac{\lambda_n-\pi}{\pi}}\,dZ,$$

$$dz' = \beta(a'_1 - Z)^{\frac{\pi-\lambda_1}{\pi}}(a'_2 - Z)^{\frac{\pi-\lambda_2}{\pi}}\dots(a_n' - Z)^{\frac{\pi-\lambda_n}{\pi}}\,\frac{dZ}{[\varphi(Z)]^2},$$

$$\varphi(Z) = (Z - A)^2 + B^2,$$

dove le quantità costanti reali A e B sono determinate dalla condizione che la quantità

$$\frac{2}{\varphi'(Z)} - \frac{g'(Z)}{g(Z)}$$

si annulli insieme con $\varphi(Z)$, riservando in ambedue i casi le opportune determinazioni circa i parametri e circa il significato delle potenze fratte.

Che l'espressione

$$\frac{2}{\varphi'(Z)} - \frac{g'(Z)}{g(Z)} = \frac{1}{Z-A} - \sum\frac{\pi-\lambda}{\pi}\,\frac{1}{Z-a'}$$

debba annullarsi non solo per $Z = \Gamma$, ma anche per $Z = \Gamma'$, risulta dalla circostanza che all'infuori di Z essa non contiene che quantità reali.

Se la condizione per Γ si pone sotto la forma

$$\Sigma(\pi - \lambda)\,\frac{\Gamma' - a'}{\Gamma - a'} = 0,$$

si può facilmente rilevarne il significato geometrico. Si imagini uno qualunque dei poligoni Π, che possono essere costruiti coi valori assoluti dei numeri

$$\pi - \lambda_1,\ \pi - \lambda_2, \dots \pi - \lambda_n$$

assunti in ordine qualsivoglia come lunghezze dei lati, e si scelga come positiva la direzione di un giro arbitrario intorno al medesimo. Ciò posto, considerando la direzione di un lato come eguale a quella di un giro positivo o di un giro negativo intorno a Π, secondo che il corrispondente numero $\pi - \lambda$ è positivo o negativo, l'equazione precedente prescrive che i raggi $a'_1\Gamma, a'_2\Gamma, \dots a'_n\Gamma$ siano paralleli alle bissettrici degli angoli che l'asse positivo delle X fa colle direzioni dei lati $\pi - \lambda_1, \pi - \lambda_2, \dots \pi - \lambda_n$.

IV.

Se supponiamo che gli angoli di F abbiano rapporti razionali, le derivate $\frac{dz}{dZ}$ e $\frac{dz'}{dZ}$ sono funzioni algebriche di Z, la cui classe comune

può essere facilmente determinata in ciascun caso particolare. Sia infatti T la superficie ad N strati che rappresenta il modo di diramazione di queste funzioni, e di cui E è un mezzo strato. Primieramente si vede che z è un integrale di prima specie coordinato a questa superficie. Rispetto a z' convien riflettere che nel punto Γ di E si ha

$$\frac{dz'}{dZ} = \frac{b}{(Z-\Gamma)^2} + \text{funz. cont.};$$

ora la condizione mediante la quale venne rimosso da questo sviluppo il termine contenente $\frac{1}{Z-\Gamma}$, e quindi esclusa una diramazione logaritmica di z', non sussiste per il solo punto Γ di E, ma venendo soddisfatta anche da $Z = \Gamma'$ ed essendo inoltre razionale, dà luogo allo stesso risultato per tutti i punti di T in cui Z è $= \Gamma$, oppure $= \Gamma'$. Conseguentemente $\frac{dz'}{dZ}$ diventa in tutti questi punti discontinua, come nel suddetto punto Γ di E, e poichè z' rimane continua in tutti gli altri punti di T, ne risulta che z' è la somma di $2N$ integrali di seconda specie, ciascuno dei quali ha la sua discontinuità in uno dei detti punti.

Quindi se F è, per esempio, un rettangolo, z diventa un integrale ellittico di prima specie e z' la somma di quattro integrali ellittici di seconda specie, secondo la classificazione di Riemann.

V.

Indicando ora con x'_0, y'_0 le coordinate di un punto o di F', cui corrisponda in E il punto Z_0, con Z_0' il conjugato di Z_0 e ponendo inoltre $z' = x' + iy'$, dai teoremi degli articoli I e IV della citata Memoria, immediatamente applicabili al caso presente, si deduce il seguente valore di U nel punto o:

$$U_0 = \frac{1}{2\pi}\Big[\int\psi(x', y')\,\frac{2\,Y_0\,dX}{(X - X_0)^2 + Y_0^2}$$
$$+ \int\varphi(x', y')\cdot\log\operatorname{mod}\left(\frac{Z - Z_0}{Z - Z_0'}\right)\cdot\operatorname{mod}\left(\frac{dz'}{dZ}\right)^2\cdot dX\,dY\Big],$$

dove il secondo integrale si deve estendere a tutti gli elementi $dX\,dY$ della superficie E, il primo a tutti gli elementi dX del suo contorno. Questa equazione si ottiene senza difficoltà dalla formola finale dell'art. I, facendo uso delle formole (b) e (c) dell'art. IV, ed osservando, in quanto alla trasformazione dell'elemento di superficie dF', che nella rappresentazione sopra E i suoi lati vengono amplificati nel rapporto di $\operatorname{mod}\cdot dz'$ a $\operatorname{mod}\cdot dZ$.

In virtù di quest'equazione, valevole anche per la superficie F, e dei risultati dell'art. III, il problema di Dirichlet è risoluto per tutte le superficie F, F' terminate da poligoni, fin dove un tal problema è suscettibile di soluzione senza che vengano mutati i termini della quistione. Se si volesse andar più oltre e prescrivere che U_0 sia espresso in funzione di $x_0' \, y_0'$ ed i parametri a (od a' rispettivamente), in funzione dei lati del poligono P, bisognerebbe esprimere Z in funzione di z (o di z' rispettivamente), e una tale espressione, se si vuole che sia valida senza limitazione può essere ottenuta soltanto per le quattro superficie F menzionate nell'art. VI del mio precedente lavoro, e per nessuna superficie complementare. In base a ciò non deve far meraviglia che i metodi anteriori, conducendo sempre ad espressioni di tal natura, non potessero dare alcun risultato, fuorchè nei quattro casi d'eccezione.

Berlino, aprile 1870.

XXI.

Ueber die Abbildung einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen. 1870. S. 283—298.)

Ich habe die Ehre, der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften nebst einer im Folgenden enthaltenen Mittheilung zwei Abhandlungen zu überreichen, von denen die erste schon vor längerer Zeit, die zweite als Nachtrag zu jener so eben in den Annali di matematica der Herrn Brioschi und Cremona erschienen ist.

Dieselben behandeln verschiedene Klassen von besondern Fällen der durch ihre Beziehung zur gegenwärtigen Functionentheorie merkwürdigen Aufgabe, die stationäre Temperaturvertheilung innerhalb einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche $\mathfrak{P}$ zu bestimmen.

Diese Aufgabe habe ich in der ersten Abhandlung für alle von einem Polygon begrenzten Flächen $\mathfrak{P}$ gelöst, und sie allgemein auf die der Functionentheorie angehörige Aufgabe zurückgeführt, die Fläche $\mathfrak{P}$ auf einer geradlinigt begrenzten Halbebene E in den kleinsten Theilen ähnlich und zwar so abzubilden, dass jedem Puncte der einen Fläche ein und auch nur ein einziger, mit ihm sich allenthalben stetig ändernder Punct der andern entspricht.

Nennt man die nach allen Richtungen ins Unendliche reichende Fläche $\mathfrak{P}_1$, welche von einer Ebene übrig bleibt, wenn aus dieser ein einfach zusammenhängendes, endliches Stück $\mathfrak{P}$ herausgeschnitten wird, die Ergänzungsfläche von $\mathfrak{P}$, so kann man die vorhin erwähnten Aufgaben auch auf solche Ergänzungsflächen ausdehnen, und gelangt dann zu einer merkwürdigen Gattung von Problemen, welche so auffallende Schwierigkeiten darbietet, dass die Lösung einer Aufgabe dieser Art ungeachtet aller Anstrengungen bisher nur in dem einzigen, durchaus elementaren Falle gelungen war, wo die Begrenzung von $\mathfrak{P}_1$ ein Kreis ist. Namentlich sind, was im Folgenden seine Erklärung finden wird, alle Versuche gescheitert, irgend einen der besondern, vorzugsweise interressanten Fälle zu behandeln, wo $\mathfrak{P}_1$ von einer geradlinigten Figur begrenzt ist.

Diese zweite Gattung von Aufgaben rührt von Dirichlet her, welcher sie, wie Herr Professor Heine mir vor Kurzem mittheilte, zu Anfange der vierziger Jahre seinen damaligen Schülern empfohlen hat. Der Wunsch, dass eine von meinem grossen Lehrer gestellte und, wie zu erwarten war und der Erfolg bestätigt hat, sich selbst heute noch als fruchtbar bewährende Aufgabe nicht ungelöst bleibe, veranlaßte mich, nach einer Lösung derselben zu suchen, welche ich auch für die Ergänzungsflächen $\mathfrak{P}_0$ der in meiner ersten Arbeit erledigten Polygone $\mathfrak{P}$ sofort auffand.

Diese Lösung bildet den Gegenstand der zweiten, so eben erschienenen Abhandlung, so dass gegenwärtig die in Rede stehende physikalische Aufgabe und das ihr in der Functionentheorie entsprechende Abbildungsproblem für alle ebenen Flächen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ gelöst ist, welche äusserlich oder innerlich von einem Polygon begrenzt sind.

Ich habe schon in meiner ersten Abhandlung bemerklich gemacht, dass, wenn man will, an die Lösung der physikalischen Aufgabe noch Ansprüche erhoben werden können, von denen dort Abstand genommen ist. In der That liefern meine Formeln unmittelbar die Abbildung der Halbebene E auf $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_1$, während die Bestimmung der Temperaturvertheilung, wenn sie eine omnibus numeris ausgeführte sein soll, umgekehrt die Abbildung von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ auf E verlangt. Dazu ist die auf die Fläche $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ beschränkte und in diesem Umfange stets mögliche Inversion des Integrales einer algebraischen Function erforderlich, wenn für die gegenwärtige Erörterung Polygone mit irrationalen Winkelverhältnissen als Grenzfälle ausgeschlossen werden; und zwar ist dieses Integral für eine Fläche $\mathfrak{P}$ stets von der ersten Gattung, für ihre Ergänzungsfläche $\mathfrak{P}_1$ stets ein lineares Aggregat von gleichverzweigten Integralen zweiter Gattung, und die Klasse p derselben nur in vier Fällen $= 1$, in allen übrigen > 1. Folglich ist die unbeschränkte Inversion dieses Integrales nur bei vier Flächen $\mathfrak{P}$, aber bei keiner einzigen Ergänzungsfläche $\mathfrak{P}_1$ möglich.

Diese vier Flächen $\mathfrak{P}$ sind das Rechteck, das gleichseitige Dreieck und die beiden rechtwinkligen Dreiecke, in denen einer der Winkel 45^0, 30^0 vorkommt. Für diese Flächen ist die Lösung der physikalischen Aufgabe den Herrn Lamé und Ostrogradski durch die scharfsinnigste Handhabung der von Fourier geschaffenen Methoden gelungen, und es ist sehr bemerkenswerth, dass auf diese Weise die Theorie der partiellen Differentialgleichungen schon frühe im Stande gewesen ist, mit selbständigen Hülfsmitteln Aufgaben zu lösen, welche

thatsächlich der Lehre von den elliptischen Functionen angehören, während allerdings bei der grossen Complication der Resultate diese interessante Beziehung sich nicht zu erkennen gab.

Zugleich ist aus dem Vorangehenden ersichtlich, weshalb die bisherigen Versuche zur Lösung dieser Aufgabe bei keinem andern Polygon $\mathfrak{P}$ und keiner einzigen Ergänzungsfläche $\mathfrak{P}_1$ eines Polygons zum Ziele führen konnten; sie mussten nothwendig an dem Umstande scheitern, dass die dabei zur Verwendung gebrachten Methoden thatsächlich, wenn auch unbewusst, die unbeschränkte Lösung eines in diesem Umfange unstatthaften Inversionsproblems anstrebten, welche sie in den erwähnten vier Ausnahmefällen auch wirklich geleistet haben.

Die Resultate, welche ich für die Polygone gefunden habe, lassen sich auf sehr allgemeine Voraussetzungen übertragen. Ich erlaube mir, diese Untersuchung hier auszuführen, weil sie einen Schritt zur tiefern Ergründung des Abbildungsproblems bildet, für welche seit der Inauguraldissertation Riemanns so gut wie gar nichts geschehen ist, obgleich die Theorie der Abbildung, wegen ihres unmittelbaren Zusammenhanges mit dem Fundamentalsatze der von Riemann geschaffenen Functionentheorie im höchsten Grade verdient, weiter ausgebildet zu werden.

In einer auf rechtwinklige Coordinaten x, y bezogenen Ebene sei eine geschlossene Kurve K gegeben, welche die Ebene in zwei Theile zerlegt, einen endlichen Theil Π und seine Ergänzungsfläche Π_1. Ausserdem sei eine zweite, auf rechtwinklige Coordinaten X, Y bezogene Ebene vorhanden, und E derjenige Theil derselben, auf welchem $Y > 0$ ist. Es soll E auf jeder der beiden Flächen Π, Π_1 in den kleinsten Theilen ähnlich und zwar so abgebildet werden, dass jedem Puncte der einen Fläche ein und auch nur ein einziger, mit ihm sich allenthalben stetig ändernder Punct der andern entspricht.

Zur Lösung dieser beiden Aufgaben nehme ich auf K n Puncte $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)}$ an, welche in der nämlichen Ordnung bei einem positiven Umlaufe um Π aufeinanderfolgen, und verbinde jeden mit dem nächstfolgenden durch eine Gerade, wodurch ein K eingeschriebenes Polygon $\mathfrak{K}$ entsteht, welches die Ebene in eine endliche Fläche $\mathfrak{P}$ und ihre Ergänzungsfläche $\mathfrak{P}_1$ zerlegt. Lässt man die Anzahl n der K eingeschriebenen Ecken von $\mathfrak{K}$ ohne Ende wachsen und zugleich jede Seite von $\mathfrak{K}$ ohne Ende abnehmen, so gehen schliesslich $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ in K, Π, Π_1 über.

Sind nun $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die der Fläche $\mathfrak{P}$ zugewandten Winkel an den Ecken von $\mathfrak{K}$, und z, Z die Werthe von $x + iy$, $X + iY$ in entsprechenden Puncten von $\mathfrak{P}$ und E, so wird nach art. V meiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand die Abbildung von E auf $\mathfrak{P}$ durch die Gleichung

$$\log \frac{dZ}{dz} = \sum_s \log (A^{(s)} - Z) \frac{\pi - \lambda_s}{\pi} + \text{const.}$$

geleistet, wo allgemein $A^{(s)}$ das auf der X-axe liegende Bild der Polygonecke $\zeta^{(s)}$ bedeutet, so dass auch diese Bilder bei einem positiven Umlaufe um E aufeinanderfolgen wie ihre Indices.

Nun kann man, wenn K stetig gebogen ist, auf dem Bogen $\zeta^{(n)}\zeta^{(1)}$ einen Punkt ζ_1 so auswählen, dass die Tangente von K in diesem Puncte zur Sehne dieses Bogens parallel wird, ebenso zwischen $\zeta^{(1)}$ und $\zeta^{(2)}$ einen Punct ζ_2 so, dass dort die Tangente von K parallel wird zur Sehne des Bogens $\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}$, u. s. w.

Um dies weiter auszuführen, sei ζ ein unbestimmter Punct von K, $d\zeta$ die Zunahme von ζ, welche während eines positiven Umlaufs um Π stattfindet, φ das Azimuth von $d\zeta$. Werden alsdann die Azimuthe in $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ bezeichnet, so wird $\pi - \lambda_1 = \varphi_2 - \varphi_1$, $\pi - \lambda_2 = \varphi_3 - \varphi_2, \ldots \pi - \lambda_n = \varphi_1' - \varphi_n$, unter φ_1' das nach einem positiven Umlaufe um 2π grösser gewordene Azimuth in ζ_1 verstanden, und es folgt:

$$\log \frac{dZ}{dz} = \log (A^{(1)} - Z) \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} + \log (A^{(2)} - Z) \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\pi} + \cdots + \text{const.}$$

Diese Formel gilt für jedes n und reducirt mit Hinzuziehung der auf das Innere von $\mathfrak{P}$, E bezüglichen Einändrigkeits- und Stetigkeitsbedingungen die Abbildung dieser Flächen aufeinander auf die Ermittlung der Puncte $A^{(s)}$, in denen die Polygonecken abzubilden sind.

Nun wollen wir die Puncte der X-axe, welche diesen nämlichen Puncten $\zeta^{(s)}$ und dem unbestimmten Puncte ζ von K bei der Abbildung von Π auf E entsprechen, durch $\mathrm{Z}^{(s)}$ und Z bezeichnen, so dass allgemein $\mathrm{Z}^{(s)}$ als die Grenze angesehen werden kann, gegen die $A^{(s)}$ beim Uebergange vom Polygon $\mathfrak{K}$ zur Kurve K convergirt. Dann convergirt beim nämlichen Grenzübergange die vorstehende Summe gegen dieselbe Grenze wie die Summe

$$\log (\mathrm{Z}^{(1)} - \mathrm{Z}) \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} + \log (\mathrm{Z}^{(2)} - Z) \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\pi} + \cdots + \text{const.},$$

und diese Grenze wird auch nicht geändert, wenn man die Puncte ζ_1, $\zeta_2, \ldots$, durch welche die Azimuthsänderungen bestimmt sind, nicht in der oben vorgeschriebenen, sondern in irgend einer andern Weise zwischen die Polygonecken einschaltet.

Bezeichnet daher $d\varphi$ die Zunahme, welche φ erlangt, wenn während eines positiven Umlaufes um Π ζ um $d\zeta$ wächst, so ergeben sich die **Bedingungen für die Abbildung von Π auf E** in der Form:

$$\log \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{\pi} \int \log (\mathrm{Z} - Z)\, d\varphi + \text{const.},$$

wobei noch hinzuzufügen ist, dass innerhalb E, Π jede der Variabeln z, Z einwerthige und stetige Function der andern sein muss. Schafft man die additive Constante durch Differeutiiren weg, so folgt:

1. $$\frac{d}{dZ} \log \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{\pi} \int \frac{-d\varphi}{\mathrm{Z} - Z}$$

und zugleich

1a. $$\int d\varphi = 2\pi,$$

wenn beide Male in einem positiven Umlaufe um Π integrirt wird.

Bei diesem Resultate ist nicht zu übersehen, dass eine aus dem Wesen der Sache geschöpfte Verification desselben, da sie sich doch auf die Bedeutung der vorstehenden bestimmten Integrale stützen müsste, nichts als eine Wiederholung des Vorangehenden sein könnte.

Zugleich bemerke ich, dass diese Formel, obgleich sie nur für stetig gebogene Kurven K abgeleitet ist, dennoch auch den Fall umfasst, wo K Ecken hat. Richtet man nämlich das eingeschriebene Polygon $\mathfrak{K}$ so ein, dass es diese Ecken mit K gemein hat, so bleibt in der ursprünglichen Formel ausser den beim Uebergange von $\mathfrak{K}$ zu K abnehmenden Summanden noch für jede Ecke $\zeta^{(s)}$ ein Summand $\log (\mathrm{Z}^{(s)} - Z) \frac{\varphi_{s+1} - \varphi_s}{\pi}$ übrig, welcher der dort stattfindenden plötzlichen Azimuthsänderung $\varphi_{s+1} - \varphi_s$ entspricht. Aber man darf diese plötzliche Zunahme des Azimuths nur als Summe stetiger Zunahmen $d\varphi$ einführen, um die Gleichung 1. auch auf diesen Fall anwendbar zu machen.

Soll die zweite Aufgabe, E und die Ergänzungsflächen $\mathfrak{P}_1$, Π_1 in der oben verlangten Weise auf einander abzubilden, einen Sinn haben, so muss letztern der nämliche Zusammenhang beigelegt werden, den E besitzt, also im Unendlichen $\mathfrak{P}_1$ ebenso wie Π_1 als geschlossen angesehen werden. Sei hiernach Γ derjenige Punct von E, welcher dem unendlich entfernten Puncte der z-ebene entspricht, Γ^1 die Conjugierte von Γ. Wird alsdann das Product

2. $$(Z - \Gamma)(Z - \Gamma^1) = \psi(Z)$$

gesetzt, und ein Paar entsprechender Puncte zur Unterscheidung des gegenwärtigen Falles vom vorigen durch z_1, Z_1 bezeichnet, so ergibt sich aus meiner zweiten Abhandlung für die Abbildung von E auf $\mathfrak{P}_1$:

$$\log\left(\frac{dz_1}{dZ_1}(\psi Z_1)^2\right) = \sum_s \log(A_1^{(s)} - Z_1)\frac{\pi-\lambda_s}{\pi} + \text{const.},$$

und es ist zunächst zu beachten, dass, weil die Richtung eines positiven Umlaufs über $\mathfrak{K}$ für die Fläche $\mathfrak{P}_1$ die umgekehrte ist wie für $\mathfrak{P}$, die Ecken von $\mathfrak{K}$ und ihre gegenwärtigen Bilder $A_1^{(s)}$ bei einem positiven Umlaufe um $\mathfrak{P}_1$ und E umgekehrt auf einander folgen wie ihre Indices. Derselbe Umstand hat zur Folge, dass, wenn $d\zeta$ jetzt einem positiven Umlaufe um $\mathfrak{P}_1$ entspricht, und auch diesmal durch $d\varphi$ die gleichzeitige Zunahme des Azimuths von $d\zeta$ bezeichnet wird, beide genau den entgegengesetzten Werth haben wie im vorigen Falle, so dass also diesmal $\pi - \lambda$ an der Grenze nicht $= d\varphi$, sondern $= -d\varphi$ wird. Da alle übrigen Schlüsse ungeändert bleiben, so erhalten wir für die verlangte Abbildung von Π_1 auf E:

3. $$\frac{d}{dZ_1}\log\left(\frac{dz_1}{dZ_1}(\psi Z_1)^2\right) = \frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Z}_1 - Z_1}$$

und zugleich

3a. $$\int d\varphi = -2\pi,$$

wenn jedesmal in einem positiven Umlaufe um Π_1 integrirt wird.

Hierzu gehört aber, wie am angeführten Orte nachgewiesen ist, eine die Constanten einschränkende Bedingung, welche dazu dient, die ohne sie nothwendig eintretenden logarithmischen Verzweigungen von z_1 im Puncte Γ von E zu beseitigen. Für das Polygon lautet sie:

$$\sum\frac{\Gamma^1 - A_1^{(s)}}{\Gamma - A_1^{(s)}}\cdot\frac{\pi-\lambda_s}{\pi} = 0,$$

also in unserm Falle

4. $$\int\frac{\Gamma^1 - \mathrm{Z}_1}{\Gamma - \mathrm{Z}_1}\,d\varphi = 0.$$

Für die Anwendungen ist es gut zu bemerken, dass diese Gleichung bestehen bleibt, wenn die conjugierten Grössen Γ, Γ^1 vertauscht werden, weil ausser ihnen nur reelle Grössen in der Formel vorkommen.

Bei der vorangehenden Untersuchung war der Grenzfall ausgeschlossen, wo die Kurve K sich bis ins Unendliche erstreckt. Tritt dieser Fall ein, so ist es gleichgültig, ob man die beiden Flächen, in welche die z-ebene zerlegt ist, den Flächen Π oder Π_1 zuordnet, nur muss man berücksichtigen, dass jetzt der unendlich entfernte Punct der Ebene mit zur Begrenzung gehört, sich also auch auf der Begrenzung von E abbildet, so dass auf diesen Punkt allein der ganze Beitrag zum $\int d\varphi$ als plötzliche Azimuthsänderung kommt, den die Kurve K selbst nicht liefert.

Dies festgestellt, wirft sich die Frage auf, was durch die vorstehenden Formeln für die wirkliche Lösung unserer Aufgaben gewonnen ist. In der That setzen dieselben, so wie sie gefunden worden sind, voraus, dass φ als Function von Z resp. Z_1 bekannt sei oder was auf das nämliche hinauskommt, dass man die Abbildung von K auf dem Rande von E kenne. Denn wenn φ als Function von Z gegeben ist, so darf man nur noch aus der Gleichung von K einen zweiten Ausdruck für $tg\,\varphi$ ableiten, um zwei Gleichungen zu erhalten, aus denen an K entlang ζ als Function von Z folgt.

Es hat demnach den Anschein, als könnten die gefundenen Resultate die Abbildung von E auf Π oder Π_1 nur in denjenigen Fällen liefern, wo die dazu gehörigen Abbildungen der Begrenzungen aufeinander bereits bekannt sind.

Hier tritt nun ein wesentlicher Umstand ein, der diese Schwierigkeit, welche sich in ähnlicher Weise auch in der Theorie der Minimalflächen darbietet, in zahlreichen Flächen vollständig beseitigt, und sie in allen Fällen auf ihren wahren Ursprung zurückführt.

Sei $\zeta = \xi + i\eta$ und die Kurve K durch irgend eine unzerfällbare Gleichung zwischen ξ und η gegeben. Ist ζ^1 die Conjugirte von ζ, so ist $2\xi = \zeta + \zeta^1$, $2i\eta = \zeta - \zeta^1$, also kann man die Gleichung von K darstellen als Gleichung zwischen ζ und ζ^1. Zugleich wird

$$\frac{d\zeta}{d\zeta^1} = e^{2i\varphi},\ d\varphi = -\frac{1}{2i}\,d\log\frac{d\zeta^1}{d\zeta}.$$

Nunmehr setze man in der Gleichung von K für ξ den Ausdruck

$$\frac{z+s}{2},$$

an Stelle von η den Ausdruck

$$\frac{z-s}{2i};$$

dann wird s eine durch die Gestalt der Kurve K und die Lage der Coordinatenaxen völlig bestimmte Function von z, und umgekehrt K der Ort aller derjenigen Puncte z, in denen s und z conjugirte Werthe haben.

Bezeichnen wir den Werth dieser Function im Puncte ζ, ζ_1 durch σ, σ_1, so gehen die oben gefundenen Formeln über in

I. $$\frac{d}{dZ}\log\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\log\frac{d\sigma}{d\zeta}}{\mathrm{Z} - Z}$$

II. $$\frac{d}{dZ_1}\log\left(\frac{dz_1}{dZ_1}(\psi Z_1)^2\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\log\frac{d\sigma_1}{d\zeta_1}}{\mathrm{Z}_1 - Z_1}$$

III. $$\int\frac{\Gamma^1 - \mathrm{Z}_1}{\Gamma - \mathrm{Z}_1}\,d\log\frac{d\sigma_1}{d\zeta_1} = 0,$$

wo jedesmal in einem positiven Umlaufe um E oder im ersten Falle um Π, im zweiten um Π_1 zu integriren ist. In der nämlichen Bedeutung genommen folgt:

$$\text{IV.}\qquad \begin{cases} \int d\log\frac{d\sigma}{d\zeta} = -4\pi i \\ \int d\log\frac{d\sigma_1}{d\zeta_1} = 4\pi i. \end{cases}$$

Die weitere Ausführung dieser Resultate setzt voraus, dass der bis jetzt auf die Kurve K beschränkten Variable ζ alle complexen Werthe eingeräumt werden. Wenn unter dieser Voraussetzung der unter dem Integralzeichen vorkommende Factor

$$\omega = \frac{d}{d\zeta}\log\frac{d\sigma}{d\zeta}$$

zu einer mehrwerthigen Function von ζ wird, so tritt die Nothwendigkeit ein, den hier vorausgesetzten Zweig dieser Function in bestimmter Weise von allen übrigen zu trennen.

Ist T die mehrblättrige Fläche, welche in dem angegebenen Falle die Verzweigungsart von ω darstellt, so ist die zu erledigende Frage die, welches Blatt von T in den obigen Formeln für die Ebene der z, ζ, d. h. der Flächen Π, Π_1 zu nehmen ist.

Nun hat derjenige Zweig von $\frac{d\sigma}{d\zeta}$, welcher bei unserer Untersuchung vorausgesetzt wurde und in allen Fällen existirt, die Eigenschaft, nach einem einmaligen Umlaufe um K zu seinem ursprünglichen Werthe $e^{-2i\varphi}$ zurückzukehren, das nämliche gilt daher auch von dem hier zu bestimmenden Zweige von ω. Man kann daher den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Blättern von T so einrichten, dass mindestens auf einem Blatte, nämlich demjenigen, welches diesem Zweige von ω entspricht, ein Umlauf um K möglich ist, ohne dass dabei ein Uebergang von diesem Blatte auf ein anderes nöthig wird. Dieses Blatt hat also die wichtige Eigenschaft, dass keine von den Linien, an denen entlang dasselbe mit andern zusammenhängt, durch die Kurve K hindurchgeht.

Nur auf diesem Blatte kann die Gleichung von K die Form $\sigma = \zeta^1$ annehmen; denn wäre dies auch noch für ein anderes Blatt von T die Gleichung der auf demselben verzeichneten Kurve K, so stimmten die beiden Zweige von σ, also die beiden diesen Blättern zugeordneten Zweige von ω an einer Linie entlang, mithin allenthalben überein.

Fügen wir jetzt noch die für unsern Zweck nothwendige Bedingung hinzu, dass jedes Blatt von T eine ganze Ebene, aber keinen Theil derselben mehrfach bedecken soll, so ist das von uns auszuwählende Blatt völlig bestimmt und von allen übrigen unterschieden durch die Bedingung, dass auf ihm an K entlang der Werth von σ mit dem Werthe des eindeutigen Ausdrucks ζ^1 zusammenfallen soll, und hierdurch ist zugleich die Bedeutung von σ und ω für die ganze Ausdehnung dieses Blattes festgelegt.

Dieses Blatt nehme man zur ζ-ebene und betrachte die Linien, an denen entlang es ursprünglich mit andern Blättern von T zusammenhing, als Schnitte derselben. Jede solche Schnittlinie geht also von einem Verzweigungspuncte bis zu einem andern und ist im Uebrigen willkürlich bis auf die als zulässig nachgewiesene Bedingung, durch K nicht hindurchzugehen.

Jetzt kann man in den obigen Gleichungen den geschlossenen Integrationsweg nach Belieben erweitern oder zusammenziehen, so lange nur kein Unstetigkeitspunkt oder eine Schnittlinie überschritten wird. Dabei ist aber zu bemerken, dass diese auszuschliessenden Stellen nur für den Factor ω in der ganzen ζ-ebene bekannt sind, für den Factor $\frac{1}{Z - Z}$ nur innerhalb Π, für $\frac{1}{Z_1 - Z_1}$ nur innerhalb Π_1, und zwar ist jener innerhalb Π einändrig und bis auf den Punkt $\zeta = z$, wo er zur ersten Ordnung unendlich wird, auch stetig. Aehnliches gilt von $\frac{1}{Z_1 - Z_1}$ innerhalb Π_1.

Eine wirkliche Vereinfachung unserer Gleichungen kann also nur dadurch erreicht werden, dass man in I. den Integrationsweg auf die innerhalb Π vorhandenen Schnittlinien und Unstetigkeitspuncte zusammenzieht, dagegen in II. III. denselben erweitert, bis er sich um die Schnittlinien und Unstetigkeitspuncte auf der Fläche Π_1 zusammengezogen hat.

In beiden Fällen lassen sich die auf blosse Unstetigkeitspuncte bezüglichen Integrale sofort ausführen, wenn man, abgesehen von den Unstetigkeitspuncten $\zeta = z$, z_1, die Bilder Z dieser Puncte als Parameter einführt, und somit ist es klar, dass, die nähere Bestimmung dieser Parameter vorbehalten, die von uns gestellte Aufgabe für alle diejenigen Flächen Π, Π_1 gelöst ist, welche Unstetigkeits- aber keine Verzweigungspuncte von ω enthalten.

In allen übrigen Fällen lassen die obigen Formeln eine der oben erörterten analoge Schwierigkeit bestehen, nur dass nicht mehr die Abbildung der beiderseits völlig gegebenen Begrenzungen aufeinander, sondern die Abbildung jeder, nur an feste Endpuncte gebundenen

Schnittlinie auf einer in jeder Beziehung unbekannten Linie innerhalb E verlangt ist.

Ich behalte mir vor, auf diese Frage bei einer andern Gelegenheit zurückzukommen, und bemerke zum Schlusse der gegenwärtigen Mittheilung nur noch den Satz, dass die obigen Gleichungen auch die Abbildung von Π, Π_1 auf einer Kreisfläche liefern. Die einzige Aenderung, deren es ausser der entsprechenden Beschränkung der Variabeln Z, Z_1 für diesen Zweck bedarf, ist diese, dass man für Γ, welches dem unendlich entfernten Puncte von Π_1 entspricht, irgend einen Punct dieser Kreisfläche, und für Γ^1 statt der Conjugirten von Γ denjenigen mit Γ auf demselben Durchmesser liegenden äussern Punct zu nehmen hat, dessen Polare durch Γ geht.

Man beweist diesen Satz, indem man z. B. mittelst der, auch auf Z, Γ, Γ^1 anzuwendenden Substitution $r\,[Z-i]=(Z)[Z+i]$, welche einer Abbildung von E auf der Kreisfläche $(X)^2+(Y)^2<r^2$ entspricht, die Gleichungen I. II. III. transformirt, wobei die Gleichungen IV. zu berücksichtigen sind, und nachher bei den neuen Variabeln die Klammern weglässt, wodurch die ursprünglichen Gleichungen wieder zum Vorschein kommen, und nur die Beziehung zwischen Γ und Γ^1 in der angegebenen Weise geändert worden ist.

XXII.

Ueber die Abbildung einer n-blättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise.

(Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen, 1870, S. 359—369.)

Im Anschluss an die in Nr. 13 dieser Nachrichten erschienene Abhandlung*) werde ich jetzt das allgemeine Abbildungsproblem behandeln, dessen Lösbarkeit Riemann aus dem Dirichlet'schen Prinzip gefolgert hat.

Durch Π bezeichne ich eine über die x, y-ebene ausgebreitete n-blättrige, einfach zusammenhängende, ebene Fläche, deren Begrenzung hiernach aus einer in sich zurückkehrenden Kurve K besteht.

Der Einfachheit wegen schliesse ich aus die beiden Grenzfälle, 1) wo K bis ins Unendliche reicht, 2) wo die begrenzte Fläche Π unendlich entfernte Verzweigungspuncte enthält.

Dagegen ist 3) durch die Natur der Sache der Fall ausgeschlossen, dass ein Verzweigungspunct a von Π auf K selbst liegt; denn wenn dies der Fall ist, so wird an der geometrischen Einrichtung von Π nicht das Mindeste geändert, wenn auf der n- oder mehrblättrigen Fläche T, von welcher Π ein einfach zusammenhängendes Stück ist, der Verzweigungspunct, so weit er K angehört, über Π hinausgerückt wird.

Die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte von Π bezeichne ich durch w, die Anzahl der ins Unendliche reichenden Blätter von Π durch t, so dass also, da die einfach zusammenhängende Fläche Π als im Unendlichen geschlossen aufgefasst werden muss, t auch die Anzahl der unendlich entfernten Puncte von Π bedeutet.

Zwischen diesen Zahlen w, t und der Anzahl der Windungen, welche K macht, besteht eine der Analysis situs angehörige Relation, welche der von Riemann (Theorie der Abel'schen Functionen, Art. 7) für endlich ausgedehnte Flächen gegebenen Relation analog ist.

*) Dieser Band S. 1.

Seien z, ζ die Werthe, welche $x + iy$ in einem unbestimmten Punkte von Π, K annimmt; $d\zeta$ entspreche einem positiven Umlaufe um Π, φ sei das Azimuth von $d\zeta$. Dann nimmt während eines positiven Umlaufes um Π das Azimuth φ um ein ganzes Vielfaches,

$$q \cdot 2\pi$$

von 2π zu, und die positive oder negative ganze Zahl q soll, wie am angeführten Orte, bezeichnet werden als die Anzahl der Umdrehungen, welche die Richtung der Begrenzungslinie K macht.

Ist also q positiv, so macht ein mit der Ortsänderung $d\zeta$ fortwährend gleichgerichteter Zeiger q Umdrehungen in der Richtung der wachsenden Azimuthe, wenn ζ einen positiven Umlauf um Π vollbringt; ist q negativ, so macht der Zeiger unter derselben Voraussetzung $-q$ Umdrehungen in der Richtung der abnehmenden Azimuthe.

Dies festgestellt, lautet die oben erwähnte und ohne Schwierigkeit zu beweisende Relation:

1. $$q = w + 1 - 2t,$$

und es folgt weiter

2. $$\int d\varphi = 2\pi(w + 1 - 2t),$$

wenn, wie im Folgenden überhaupt, die Integration in einem positiven Umlaufe um Π oder seine Abbildung ausgeführt wird.

Was die wirkliche Verzweigungsart von Π betrifft, so setze ich fest, dass die w einfachen Verzweigungspuncte sich auf die folgenden s:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_s$$

in der Weise vertheilen, dass in diesen beziehungsweise:

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ \mu_s$$

Blätter von Π zusammenhängen, woraus:

$$w = \sum_\sigma (\mu_\sigma - 1)$$

folgt.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, diese Fläche Π auf einem Kreise, zunächst auf einer Halbebene E abzubilden.

I.

In einer zweiten Ebene der X, Y sei E derjenige Theil, auf welchem $Y > 0$ ist. Unter der Voraussetzung, dass die Abbildung von Π auf E geleistet sei, sollen

Z, Z die Bilder von z, ζ,

$A_1, A_2, \ldots A_s$ die Bilder von $a_1, a_2, \ldots a_s$,

$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_t$ die Bilder der t unendlich entfernten Puncte von Π bedeuten. Die Puncte A sowohl wie die Puncte Γ liegen demnach im Innern, nicht auf dem Rande von E.

Nun betrachte ich die durch meine oben erwähnte Abhandlung eingeführten Ausdrücke

$$P = \log \frac{dz}{dZ},$$

$$Q = \frac{1}{\pi}\int \log(\mathrm{Z} - Z)\, d\varphi,$$

und verfolge die gleichzeitigen Aenderungen, welche diese Grössen erfahren, wenn Z, z in positiver Richtung eine gegebene Strecke der Begrenzung durchlaufen.

1. Alsdann ist $dZ = dX$, also positiv, und sein Azimuth constant $= 0$; das Azimuth von dz dagegen ist $= \varphi$, und es folgt, wenn in seine reellen Bestandtheile zerlegt $P = P_1 + iP_2$ ist:

Die Zunahme von P_2 ist gleich der Zunahme von φ.

2. Sei ebenso $Q = Q_1 + iQ_2$, und es durchlaufe Z auf der X-axe den Weg von X_1 bis zur grösseren Abscisse X_2.

Ist nun Z ein unbestimmter Punct der X-axe, so sind folgende drei Fälle zu unterscheiden. Solange Z sich dem Puncte Z nähert, bleibt das Azimuth von $\mathrm{Z} - Z$, also der imaginäre Theil des $\log(\mathrm{Z} - Z)$ ungeändert. Dasselbe findet statt, nachdem Z den Punct Z überschritten hat, und sich von ihm entfernt: dagegen nimmt in dem Augenblicke, wo Z den Punct Z überschreitet, also einen halben negativen Umlauf um Z macht, der imaginäre Theil von $\log(\mathrm{Z} - Z)$ zu um $-\pi i$, der imaginäre Theil von $\frac{1}{\pi}\log(\mathrm{Z} - Z)\, d\varphi$ zu um $-i d\varphi$, und daraus folgt, dass unter der obigen Voraussetzung Q_2 zunimmt um das

$$\int - d\varphi \text{ von } X_1 \text{ bis } X_2,$$

d. h.:

Die Zunahme von Q_2 ist der Zunahme von φ entgegengesetzt gleich.

3. Setzen wir daher:

$$\log \frac{dz}{dZ} + \frac{1}{\pi}\int \log(\mathrm{Z} - Z)\, d\varphi = u_1 + iv_1,$$

so folgt, dass v_1 ungeändert bleibt, wenn Z, z gleichzeitig die Begrenzungen von E, Π durchlaufen. Setzen wir ferner:

$$\frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ} - \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Z} - Z} = u + iv,$$

so haben wir das Resultat, daß v auf der Begrenzung $= 0$ ist.

II.

Nun untersuchen wir den Verlauf von $u+iv$ in den Puncten A, den Puncten Γ, und in den übrigen Puncten im Innern von E.

1. Ist $z=b$ ein Punct im Innern von Π, der weder Verzweigungspunct ist, noch im Unendlichen liegt, B sein Bild auf E, so ist von verschwindenden bis zu endlichen Moduln von $Z-B$:

$$z = b + b'(Z-B) + \tfrac{1}{2}b''(Z-B)^2 + \cdots,$$

und b' von Null verschieden. Also folgt:

$$\frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ} = \frac{b''+\cdots}{b'+\cdots}$$

d. h. diese Grösse ist in B einändrig und stetig. Das Integral:

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{Z-Z}$$

hat diese Eigenschaft in der ganzen Fläche E, und braucht bei der Untersuchung der Unstetigkeiten von $u+iv$ oder seiner Verzweigungen gar nicht berücksichtigt zu werden. Also folgt:

> Die Grösse $u+iv$ ist einändrig und stetig in allen Puncten von E, in denen weder Verzweigungs-, noch unendlich entfernte Puncte von Π abgebildet sind.

2. Sei a ein $(\mu-1)$-facher Verzweigungspunkt von Π, A sein Bild auf E. Da für $Z=A$ z stetig und $\mu\log(Z-A)-\log(z-a)$ einändrig ist, so folgt bis zu endlichen Moduln von $Z-A$:

$$z = a + (Z-A)^{\mu}[a' + a''(Z-A) + \cdots],$$

wo a' von Null verschieden ist, und hieraus im gleichen Umfange:

$$\frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ} = \frac{\mu-1}{Z-A} + \text{funct. cont. monodr.},$$

also:

> Die Grösse $u+iv$ ist einändrig auch in solchen Puncten A von E, welche die Bilder von Verzweigungspuncten a der Fläche Π sind, aber sie ist dort nicht stetig.

Ist a ein $(\mu-1)$-facher Verzweigungspunct von Π, so ist in A:

$$(u+iv) - \frac{\mu-1}{Z-A} = \text{funct. cont.}$$

3. Sei Γ das Bild eines der unendlich entfernten Puncte von Π. Da in letzterm ebenso wie in Γ eine Verzweigung nicht stattfindet, so ist bis zu endlichen Moduln von $Z-\Gamma$:

$$z = \frac{\gamma}{Z-\Gamma} + \gamma' + \gamma''(Z-\Gamma) + \cdots,$$

und γ von Null verschieden, mithin dort

$$\frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ} = -\frac{2}{Z-\Gamma} + \text{funct. cont. monodr.}$$

Also folgt:

> Die Grösse $u+iv$ ist einändrig auch in denjenigen Puncten Γ von E, in denen sich unendlich entfernte Puncte von Π abbilden; aber sie ist dort unstetig, und zwar so, daß dort:
>
> $$(u+iv) + \frac{2}{Z-\Gamma} = \text{funct. cont.}$$
>
> wird.

4. Zur völligen Darstellung der Grösse $u+iv$, welche durch die gefundenen Eigenschaften bis auf eine additive Constante definirt ist, wollen wir nur noch bemerken, dass im unendlich entfernten Puncte von E

$$u+iv = 0$$

wird.

In der That entspricht diesem ein endlicher Werth von z, so daß $\frac{dz}{dZ}$, $\frac{d^2z}{dZ^2}$ in diesem Puncte unendlich klein werden, und zwar letzteres von einer um eine Einheit höhern Ordnung wie jenes.

III.

Fassen wir alle Bedingungen zusammen, so folgt: $u+iv$ ist auf E allenthalben einändrig und mit Ausnahme der Puncte A, Γ auch stetig. In diesen Puncten ist:

$$(u+iv) - \sum_{\sigma}\frac{\mu_\sigma-1}{Z-A_\sigma} + \sum_{\tau}\frac{2}{Z-\Gamma_\tau}$$

stetig. Sodann ist auf der Begrenzung von E

$$v = 0,$$

und im Unendlichen auch

$$u = 0.$$

Nichts ist leichter, als einen diesen Bedingungen genügenden Ausdruck darzustellen. Seien allgemein A'_σ, Γ'_τ die Conjugirten von A_σ, Γ_τ; dann ist z. B.

$$\frac{1}{Z-A} + \frac{1}{Z-A'} = \frac{2Z-(A+A')}{(Z-A)(Z-A')}$$

der Ausdruck einer Function, deren imaginärer Theil für $Y=0$ verschwindet, und die auch selbst $=0$ wird für $Z=\infty$. Dieselbe wird ausserdem auf E unstetig nur im Puncte $Z=A$, und so erkennt man sofort, dass wir setzen können:

$$u+iv = \sum_{\sigma}(\mu_\sigma-1)\left(\frac{1}{Z-A_\sigma}+\frac{1}{Z-A'_\sigma}\right) - \sum_{\tau}2\left(\frac{1}{Z-\Gamma_\tau}+\frac{1}{Z-\Gamma'_\tau}\right),$$

wo, wie oben, bei der Summation $\sigma = 1, 2, \ldots s$ und $\tau = 1, 2, \ldots t$ zu nehmen ist.

Nun beweist man nachträglich, dass es ausser der vorstehenden Lösung unserer Aufgabe keine andere giebt. Ist nämlich $u_1 + iv_1$ ebenfalls eine solche, so sind $u_1 - u$, $v_1 - v$ auf E allenthalben einändrig und stetig und letzteres, weil es auf dem Rande $= 0$ ist, ist überhaupt $= 0$. In Folge dessen ist $u_1 - u$ constant, also $= 0$, da es im Unendlichen verschwindet.

IV.

Um die Uebersicht zu erleichtern, setzen wir

$$\Pi_{(\tau)} (Z - \Gamma_\tau)(Z - \Gamma'_\tau) = \psi(Z)$$

$$\Pi_{(\sigma)} [(Z - A_\sigma)(Z - A'_\sigma)]^{\mu_\sigma - 1} = \theta(Z),$$

und erhalten dann:

$$u + iv = \frac{d}{dZ} \log \frac{\theta(Z)}{[\psi(Z)]^2},$$

mithin als Lösung unseres Abbildungsproblems die Gleichung

A. $$\frac{d}{dZ} \log \left(\frac{dz}{dZ} \frac{(\psi(Z))^2}{\theta(Z)} \right) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\varphi}{Z - Z},$$

wozu noch die aus 2. und 3. folgende Gleichung

B. $$\int d\varphi = 2\pi \left[\sum_\sigma (\mu_\sigma - 1) + 1 - 2t \right]$$

und die Bedingung kommt, dass jede der Variabeln z, Z innerhalb der Fläche, welche die Werthe der andern repräsentiert, einwerthige und stetige Function derselben sein muss.

In Bezug auf die weitere Behandlung dieser Integrale verweise ich auf meine vorige Abhandlung, und bemerke nur noch den Satz:

> dass durch die vorstehenden Formeln auch die Abbildung von Π auf einer Kreisfläche geleistet wird, sobald man unter A'_σ, Γ'_τ statt der Conjugirten von A_σ, Γ_τ die mit diesen Puncten auf demselben Durchmesser liegenden harmonischen Pole derselben versteht.

Der Beweis ergiebt sich mit Hülfe der Relationen 1. und 3. wie am Schlusse meiner vorigen Abhandlung.

V.

Hiermit ist eine der wichtigsten Aufgaben gelöst, welche die allgemeine Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse darbietet, und ich glaube es nicht bedauern zu dürfen, wenn meine

vier auf diese Frage bezüglichen Abhandlungen zugleich den Weg erkennen lassen, den meine Untersuchungen genommen haben.

Ich lege auf meine Resultate, deren Wichtigkeit auf ihrem Zusammenhange mit dem Fundamentalsatze der von Riemann gegründeten Functionentheorie beruht und für Kenner dieser Theorie keiner Erörterung bedarf, um so grösseren Werth, weil dieser Fundamentalsatz selbst, wie Herr Heine in seinen neuesten Mittheilungen (Borchardt's Journal 71) bezeugt, Gegenstand der Discussion geworden ist.

Den scharfsinnigen Forschern, welche sich mit der Ermittelung der Schwierigkeiten beschäftigen, die dem Beweise dieses Satzes anhaften, ist jetzt die Möglichkeit gegeben, zu vergleichen, ob die von ihnen entdeckten Schwierigkeiten mit den wirklich vorhandenen übereinstimmen, nämlich denjenigen, welche für die wirkliche Behandlung der nunmehr zum Ansatze gebrachten allgemeinen Aufgabe zu überwinden sind.

Anmerkung.

Mit den vorstehenden drei Abhandlungen XX—XXII beschäftigen sich Bemerkungen von H. A. Schwarz in einem Nachtrage seiner Abhandlung: Über einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren (Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 15. Jahrgang. Ges. Mathem. Abhandlungen 2. Band, S. 140).

Kr.

XXIII.

Ueber die Integration von zwei partiellen Differentialgleichungen.

(Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen. 1871. S. 435—453.)

Sei F eine einfach zusammenhängende, über die Ebene der rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgebreitete ebene Fläche, K ihre Randcurve, $x + iy = z$.

Ferner sei von einer zweiten, auf rechtwinklige Coordinaten X, Y bezogenen Ebene E derjenige Theil, auf welchem $Y > 0$ ist, und $X + iY = Z$.

Wenn es alsdann gelingt, die beiden Flächen F und E in den unendlich kleinen Theilen ähnlich und zwar so aufeinander abzubilden, dass jedem Puncte der einen ein und auch nur ein einziger, mit jenem sich allenthalben stetig ändernder Punct der andern entspricht, so sind, auf das Innere beider Flächen beschränkt, die Grössen Z und z völlig bestimmte Functionen voneinander, deren, einem Puncte m von F zugeordnete Werthe Z_m und z_m heissen mögen.

Ist nun o ein zweiter Punct von F und Z_0' die Conjugirte von Z_0, so ist

$$w(m/o) = \frac{Z_m - Z_0}{Z_m - Z_0'}$$

eine Function von z_m, die innerhalb F nur im Puncte o, und dort zur ersten Ordnung $= 0$, aber in keinem Puncte m von F unstetig wird, letzteres weil einem Puncte von F stets nur ein Punct von E, also niemals der ausserhalb E liegende Punct Z_0' entsprechen kann. Nähert sodann m sich einem Puncte μ von K, so nähert sich sein Bild M auf E dem entsprechenden Punkte M auf dem Umfange dieser Fläche, d. h. es wird $Y = 0$, mithin im Ausdrucke von w der Nenner die Conjugirte des Zählers, also Mod $w(\mu/o) = 1$.

Sind daher ξ, η die reellen Bestandtheile von $\log w$,

$$\log w(m/o) = \xi(m/o) + i \cdot \eta(m/o),$$

so hat $\xi(m/o)$ die in meiner ersten Abhandlung über die stationären Temperaturen (Brioschi's Annalen I. pag. 91 und art. IV) geforderten Eigenschaften und stellt zugleich die einzige Function dar, welche diese Eigenschaften besitzt.

Wird daher wie am angeführten Orte eine Function v angenommen, welche nebst ihren ersten Derivirten in F bis an K hinan einwerthig und stetig ist, und berechnet man nun die Grösse

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = \varphi,$$

und bezeichnet den Werth, welchen v in einem Punkte μ von K erlangt, durch ψ_μ, so folgt, wie in jener Arbeit (art. I) nachgewiesen ist,

$$v_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int \psi_\mu \frac{d\xi(\mu/o)}{dp_\mu} ds_\mu + \int \varphi_m \xi(m/o) dF_m\right),$$

wo ds_μ das den Punct μ enthaltende Element von K, dp_μ zu ds_μ senkrecht und aus F hinausgerichtet ist.

Subtrahirt man $\xi(m/o)$ vom Logarithmus der positiven Entfernung (mo) der beiden Puncte m, o, so erhält man eine Function G_m^0 von x, y welche, wenn F einblättrig ist[1]), innerhalb F stetig und an ihrem Rande K entlang jenem Logarithmus gleich ist. Diese Function hat Herr Neumann in seiner schönen Abhandlung im 59. Bande des Borchardt'schen Journals als Green'sche Function bezeichnet und zur Grundlage seiner Untersuchungen gemacht, welche zunächst nicht einfach-, sondern zweifach zusammenhängende einblättrige Flächen F voraussetzen.

Für einfach zusammenhängende und einblättrige Flächen stehen also beide Functionen $\xi(m/o)$, G_m^0 in einer sehr einfachen Beziehung zueinander, indem

$$\xi(m/o) = \log \operatorname{Mod}\left(\frac{Z_m - Z_0}{Z_m - Z_0'}\right),$$

$$G_m^0 = \log \operatorname{Mod}\left((z_m - z_0)\frac{Z_m - Z_0'}{Z_m - Z_0}\right)$$

ist. Aber es tritt ein tiefgreifender Unterschied zwischen beiden hervor, wenn die Lösung der obigen Aufgabe direct, also nicht durch Vermittelung meiner Function ξ, an die Bestimmung von G geknüpft wird.

In der That werden zu diesem Zwecke statt der Variabeln x, y die neuen Variabeln X, Y eingeführt, und nun zeigt sich sofort, dass die Schwierigkeiten, welche die Ermittelung von G auf diesem Wege

1) Ist nämlich F mehrblättrig, so ist zwar noch immer an K entlang $G_m^0 = \log(mo)$, aber G ist nicht stetig innerhalb F.

darbietet, nur davon herrühren können, dass man den log Mod $(z_m - z_0)$ als Function von X_m, Y_m, X_0, Y_0 suchen oder doch wenigstens untersuchen muss. Ist $z_m - z_0 = F(Z_m/Z_0)$, so folgt

$$G_m^0 = \log \operatorname{Mod}\left(F(Z_m/Z_0)\frac{Z_m - Z_0'}{Z_m - Z_0}\right),$$

und dies, nicht die obige Form ist es, in welcher man den Ausdruck der Green'schen Function G mit der von mir eingeführten Function ξ vergleichen muss, wenn man die Beziehung zwischen beiden vollständig erkennen will.

In der letzten Zeit ist mehrfach Werth darauf gelegt worden, den Ausdruck von v für den Fall zu verificiren, wo F eine einblättrige Kreisfläche und nicht v gegeben ist, sondern $\varphi = 0$ und ψ am Rande K entlang einwerthig, allenthalben endlich und nur in einzelnen Puncten unstetig, im Uebrigen willkürlich gegeben ist[1]).

Eine solche Verification ist schon im Jahre 1851—52 von Dirichlet in seinen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen gegeben worden; ich selbst habe sie mit Angabe der Quelle, ebenso wie andere Verificationen ähnlicher Art, die zum Theil von Dirichlet, zum Theil von mir selbst herrühren, in denjenigen Vorlesungen, die ich zur Einleitung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu halten pflege, wiederholt vorgetragen; zuerst während der Jahre 1860—62 an der Berliner Universität, dann bis zum Wintersemester 1866—67 am Züricher Polytechnikum. Von da an habe ich die Behandlung des noch einfachern Falles vorgezogen, wo F selbst eine Halbebene ist, weil dieser meiner oben erwähnten Abhandlung, welche damals erschienen ist, unmittelbar zu Grunde liegt.

Halten wir an der Voraussetzung, dass $\varphi = 0$, also

$$v = \frac{1}{2\pi}\int \psi \frac{d\xi}{dp}\,ds$$

ist, fest, wo dann alles, was zu verificiren ist, bis auf die Grenzbedingung $v = \psi$ in die Augen springt, so gestaltet sich diese Verification, conform der von Dirichlet herrührenden Darstellung, wie folgt.

Statt K bloss in positive Elemente ds zu zerlegen, zählen wir an K entlang Bögen s wie Abscissen, welche in der sogenannten positiven Umlaufsrichtung wachsen, so dass, wenn alle Zunahmen positiv sind,

1) H. A. Schwarz: Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für die Fläche eines Kreises. (Züricher Vierteljahrsschrift, XV. Jahrgang, 1870.)

F. E. Prym: Zur Integration der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. (Borchardt's Journal 73.)

dp zu ds liegt wie dx zu dy und wie dX zu dY. Dann ist an K entlang

$$\frac{d\xi}{dp}\,ds = \frac{d\eta}{ds}\,ds = d\eta = \frac{d\eta}{dX}\,dX = -\frac{d\xi}{dY}\,dX,$$

also da $Y = 0$ zu setzen ist:

$$\frac{d\xi}{dp}\,ds = \frac{2\,Y_0\,dX}{(X - X_0)^2 + Y_0^2} = 2\,d\,\operatorname{arctg}\frac{X - X_0}{Y_0},$$

wie am Schlusse des art. IV. meiner oben erwähnten Arbeit. Ist daher, als Function von X aufgefasst,

$$\psi = \Psi(X),$$

so wird

$$v_0 = \frac{1}{\pi}\int \Psi(X)\,d\,\operatorname{arctg}\frac{X - X_0}{Y_0},$$

erstreckt von $X = -\infty$ bis $X = +\infty$.

Sei r der Punct von K, in den o eintreten soll, R sein Bild auf der X-axe. Wir beschränken uns auf den Fall, wo o längs der Normale in K eintritt, nicht der Vereinfachung wegen, für welche hierdurch nichts gewonnen wird, sondern um die folgende Untersuchung so wiederzugeben, wie sie seit Jahren gegeben worden ist. Es ist also zu untersuchen, was aus v_0 wird, wenn, während Y_0 durch positive Werthe gegen Null convergirt, X_0 ungeändert bleibt. Zu dem Zwecke werden die folgenden Intervalle gebildet:

$$-\infty < X < X_0 - \delta, \quad X_0 - \delta < X < X_0,$$
$$X_0 < X < X_0 + \varepsilon, \quad X_0 + \varepsilon < X < \infty.$$

Werden die über diese Intervalle erstreckten Integrale der positiven Grösse

$$\frac{d\eta}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\,d\,\operatorname{arctg}\frac{X - X_0}{Y_0}$$

durch a, b, c, d; geeignete Zwischenwerthe von Ψ innerhalb derselben durch A, B, C, D bezeichnet, so folgt $v_0 = Aa + Bb + Cc + Dd$. Nimmt man aber den arcus stetig, und, was am bequemsten ist, zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ an, so wird

$$a = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\delta}{Y_0}\right)$$
$$b = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{Y_0}$$
$$c = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{Y_0}$$
$$d = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{Y_0}\right).$$

Wenn man nun das positive Y_0 abnehmen lässt, so steht nichts im Wege, die willkürlich angenommenen positiven Grössen δ, ε ebenfalls abnehmen zu lassen. Richtet man dies aber so ein, dass $\frac{\delta}{Y_0}$, $\frac{\varepsilon}{Y_0}$ über alle Grenzen wachsen, so wird an der Grenze:

$$a = 0,\quad b = \tfrac{1}{2},\quad c = \tfrac{1}{2},\quad d = 0$$

und

$$B = \Psi(X_0 - 0),\quad C = \Psi(X_0 + 0).$$

Da ferner nach Voraussetzung ψ niemals unendlich wird, so gibt es endliche Grenzen, unter denen A, D bleiben, also wird $Aa = 0$, $Dd = 0$, mithin

$$\lim v_0 = \tfrac{1}{2}(\Psi(X_0 - 0) + \Psi(X_0 + 0)),$$

d. h. $= \psi_r$ selbst, wenn ψ in r stetig bleibt, sonst gleich dem arithmetischen Mittel aus den letzten Werthen ψ_r^+, ψ_r^-, welche ψ_μ, bevor es unstetig wird, erlangt, wenn μ in der Richtung eines negativen oder eines positiven Umlaufes in r eintritt. —

Die Abhandlung des Herrn Prym erledigt diese Frage aus einem allgemeinern Gesichtspuncte, indem die Eintrittsrichtung von o willkürlich gelassen wird. Ist zunächst $RO = R$, und der Neigungswinkel von R gegen die positive X-axe $= \Theta$, so findet man, wenn R bei unveränderlichem Θ gegen Null convergirt,

$$\lim R\frac{dv}{dR} = 0$$
$$\lim \quad \frac{dv}{d\Theta} = \frac{1}{\pi}(\psi_r^- - \psi_r^+).$$

Wenn daher in der Fläche F die Strecke $ro = \varrho$ und θ der Winkel ist, den die Richtung eines positiven Umlaufes in r mit ϱ bildet, so ist nach den allgemeinen Abbildungsgesetzen $\frac{dR}{R}$ proportional zu $\frac{d\varrho}{\varrho}$ und, wenn K in r eine Ecke besitzt, die nach F hin den Winkel α fasst, $\frac{d\Theta}{\pi} = \frac{d\theta}{\alpha}$, mithin ist, wenn ϱ bei unveränderlichem θ gegen Null convergirt:

$$\lim \varrho\frac{dv}{d\varrho} = 0$$
$$\lim \quad \frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{\alpha}(\psi_r^- - \psi_r^+).$$

Solange ψ stetig ist, ist an K entlang $v = \psi$. Wird ψ in r unstetig, so ist v in r unbestimmt. Lässt man nämlich den Punct o einen um r mit dem unendlich kleinen Halbmesser ϱ beschriebenen Kreisbogen durchlaufen, der über F von den grössern zu den kleinern s führt, so durchläuft v, weil es innerhalb F stetig ist, alle Werthe von ψ_r^+ bis

ψ_r^-; der Ausdruck von $\frac{dv}{d\theta}$ lehrt, dass, wenn o den Winkel θ zurückgelegt hat,

$$\psi = \psi_r^+ + \frac{\theta}{\alpha}(\psi_r^- - \psi_r^+)$$

geworden ist, was mit dem eleganten, von Herrn Prym für eine Kreisfläche F gefundenen Resultate übereinstimmt.

Die ersten Derivirten

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\varrho}\cdot\frac{x - x_r}{\varrho} - \frac{dv}{\varrho d\theta}\cdot\frac{y - y_r}{\varrho}$$
$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{d\varrho}\cdot\frac{y - y_r}{\varrho} + \frac{dv}{\varrho d\theta}\cdot\frac{x - x_r}{\varrho}$$

werden in r stets unendlich, wenn ψ in r unstetig ist; damit sie in andern Puncten von K nicht unendlich werden, reicht die Stetigkeit von ψ allein nicht hin.

Dass dieselben an K entlang im Allgemeinen aufhören zu existiren, hat, wie ich aus der Abhandlung des Herrn Schwarz ersehe, zuerst Herr Weierstrass bemerkt. —

Ich habe die vorangehende Untersuchung nicht so sehr darum ausführlich mitgetheilt, um in dieser Frage den historischen Thatbestand herzustellen; meine Hauptabsicht war vielmehr diese, wozu ich im Folgenden übergehe, an der Frage nach dem Umfange der Bedingungen, welche man der Function v auferlegen kann, den heutigen Standpunct der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen nachzuweisen und die nothwendige Uebersicht durch die Gegenüberstellung mit einer Aufgabe aus älterer Zeit zu erleichtern.

Will man nämlich von Untersuchungen der vorliegenden Art den vollen Nutzen für die Einsicht in die Lehre von den Functionen $u + iv$ einer veränderlichen Grösse $x + iy$ ziehen, so ist es nothwendig, die Willkür, mit welcher über die an K entlang zu gebende Function ψ verfügt werden kann, ihrem vollen Umfange nach festzustellen.

Dies wird durch die obige Verification nicht erreicht, da z. B. die Beschränkung, dass ψ nicht unendlich werden dürfe, offenbar aufgehoben werden kann, wofern nur das Unendlichwerden von ψ auf einzelne Puncte und in diesen so beschränkt wird, dass $\psi\,d\eta$ nicht aufhört, die Integration zu gestatten. Es ist also sicher, dass wenigstens ein Theil der Beschränkungen, die sich bei der obigen Verification als notwendig herausgestellt haben, nur aus den dabei benutzten Hülfsmitteln entspringt.

Dahin gehört auch die Bedingung, dass ψ in keinem messbaren Theile von K überall unstetig sein darf; diese Einschränkung ist bei

Riemann (art. 19 seiner Inauguraldissertation) mit Rücksicht auf seine vorangehenden Untersuchungen zwar geboten, aber dennoch nicht wesentlich.

Endlich gehört hierhin die Voraussetzung, dass v zweite Derivirten habe, was, wenn $u + iv$ als Function von $x + iy$ definirt wird, nicht gefordert ist und eine Folge aus weniger weit gehenden Bedingungen ist.

In der That findet der folgende Satz statt, dessen Beweis ich einer andern Gelegenheit vorbehalte:

Erster Lehrsatz.

1) In Bezug auf die Fläche F wird vorausgesetzt, dass die complexen Variabeln Z, z in eine solche Abhängigkeit von einander versetzt werden können, vermöge deren die Flächen F und E in der oben verlangten Weise aufeinander abgebildet werden.

2) Sodann wird für die ganze Ausdehnung der Fläche F eine Function v von x, y verlangt, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

A. Die Function v ist innerhalb F einwerthig und bleibt bis zum Eintritt in K stetig.

B. Innerhalb F hat v erste Derivirten

$$\frac{dv}{dx}, \quad \frac{dv}{dy};$$

dieselben sind einwerthig und stetig bis zu jedem noch messbaren, wenn auch noch so kleinen Abstande von K.

C. Innerhalb F existiren zwei, stetige oder unstetige Functionen von x, y:

$$v''_x, \quad v''_y$$

mit den folgenden Eigenschaften:

α. Beide gestatten die Integration über jeden messbaren Theil von F.

β. Jede von ihnen gestattet innerhalb F allenthalben die Integration nach der als Index angehängten Variable, und zwar ist:

$$\int_a^m v''_x \, dx = \left(\frac{dv}{dx}\right)_m - \left(\frac{dv}{dx}\right)_a$$

$$\int_b^m v''_y \, dy = \left(\frac{dv}{dy}\right)_m - \left(\frac{dv}{dy}\right)_b.$$

γ. Die Summe

$$v''_x + v''_y = \varepsilon$$

nimmt in jedem messbaren, wenn auch noch so kleinen Theile von F sowohl positive als auch negative Werthe an, wenn sie in demselben nicht allenthalben $= 0$ ist.

D. An K entlang ist eine stetige oder unstetige, aber einwerthige Function ψ gegeben. Die Differenz

$$v - \psi = \delta$$

gestattet die Integration über jedes messbare Stück von K, aber das Resultat dieser Integration ist stets $= 0$.

3) I. **Wenn alsdann auch die Function ψ die Integration über jeden messbaren Theil von K gestattet, so giebt es eine und auch nur eine Function v, welche den vorstehenden Bedingungen genügt, und ihr Werth im Puncte o von F ist**

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \int \psi_\mu \frac{d\xi(\mu/o)}{dp_\mu} \, ds_\mu.$$

II. **Wenn dagegen ψ die Integration über keinen, oder doch nicht über jeden Theil von K gestattet,** — z. B. wenn jeder noch so kleine, messbare Theil von K Puncte enthält, in denen ψ unendlich wird — **so ist die Function v selbst dann, wenn eine solche existirt, durch die oben gestellten Bedingungen nicht mehr genügend definirt, und es kann daher in einem solchen Falle nicht mehr die Rede davon sein, mit *diesen* Bedingungen allein, und von *diesen* bekannten Werthen ψ aus, eine *bestimmte* Function v durch stetige Fortsetzung mittelst der *partiellen Differentialgleichung* C. γ. entstehen zu lassen.**

Durch den Satz I. ist für alle Fälle, wo ψ der Integration über K fähig ist, die Darstellung von v **wirklich** zurückgeführt auf die Lösung des zuerst erwähnten Abbildungsproblems in der Weise, dass, so oft die Lösung des letztern für eine Fläche F gefunden ist, die Darstellung von v durch die obige Formel wirklich gesichert ist, und z. B. die Existenz zweiter und aller höhern Derivirten innerhalb F unmittelbar folgt. Wie der Ausdruck von v zu modificiren ist, wenn dieser Function innerhalb F solche Unstetigkeiten vorgeschrieben werden, deren die Functionen von $x + iy$ oder ihre reellen Bestandtheile fähig sind, bedarf keiner Auseinandersetzung.

In der gleichen Weise lässt sich die in der letzten Nummer[1]) von

1) Nro. 16 vom 16. August.

Herrn **Heine** besprochene Frage, welche **Dirichlet** durch Zurückführung auf eine Minimumsaufgabe behandelte, mittelst der **Green**'schen Function auf eine wesentlich einfachere Aufgabe zurückführen, und zwar in der bestimmten Weise, dass stets mit der Lösbarkeit der letztern zugleich die der allgemeinsten Aufgabe dargethan ist, und die directe Untersuchung dieser, welche selbst dem **Dirichlet**'schen Princip nicht mehr zugänglich sein würde, überflüssig wird. Diese Reduction, welche für einfachere Voraussetzungen längst bekannt ist, beruht auf dem folgenden, alle Fälle umfassenden Satze:

Zweiter Lehrsatz.

1) Es sei J ein einfacher beliebig zusammenhängender, auf rechtwinklige Coordinaten x, y, z bezogener Raum, S seine Oberfläche. In Bezug auf die Gestalt derselben wird vorausgesetzt, dass jedem Puncte o von J eine (sogenannt einfache) Belegung von S zugeordnet werden kann, welche im äussern Raume nach dem **Newton**'schen Gesetze überall die nämliche Anziehung ausübt, wie eine in o concentrirte Masseneinheit. Das Potential dieser von der Lage des Punctes o abhängigen Belegung sei in einem Puncte $m = W(m/o)$ und, wenn die positive Entfernung beider Puncte durch (mo) bezeichnet wird,

$$w(m/o) = W(m/o) - \frac{1}{(mo)}.$$

Dies ist diejenige Function, welche in der Lehre vom Potential als die **Green**'sche bezeichnet wird.

2) Es wird für die ganze Ausdehnung des Raumes J eine Function v verlangt, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

A. Die Function v ist innerhalb J einwerthig und bleibt bis zum Eintritt in S stetig.

B. Innerhalb J hat v erste Derivirten

$$\frac{dv}{dx},\quad \frac{dv}{dy},\quad \frac{dv}{dz};$$

dieselben sind einwerthig und stetig bis zu jedem noch messbaren, wenn auch noch so kleinen Abstande von S.

C. Innerhalb J existiren drei stetige oder unstetige Functionen

$$v_x'',\quad v_y'',\quad v_z''$$

mit den folgenden Eigenschaften:

α. Jede von ihnen gestattet die Integration über jeden messbaren Theil von J.

β. Innerhalb J gestattet allenthalben v_x'' die Integration nach x, v_y'' die nach y, v_z'' die nach z, und zwar ist:

$$\int_a^m v_x''\,dx = \left(\frac{dv}{dx}\right)_m - \left(\frac{dv}{dx}\right)_a$$

$$\int_b^m v_y''\,dy = \left(\frac{dv}{dy}\right)_m - \left(\frac{dv}{dy}\right)_b$$

$$\int_c^m v_z''\,dz = \left(\frac{dv}{dz}\right)_m - \left(\frac{dv}{dz}\right)_c.$$

γ. Die Summe

$$v_x'' + v_y'' + v_z'' = \varepsilon$$

nimmt in jedem messbaren, wenn auch noch so kleinen Theile von J sowohl positive als auch negative Werthe an, wenn sie in demselben nicht allenthalben $= 0$ ist.

D. An S entlang ist eine stetige oder unstetige, aber einwerthige Function ψ gegeben. Die Differenz

$$v - \psi = \delta$$

gestattet die Integration über jedes messbare Stück von S, aber das Resultat dieser Integration ist stets $= 0$.

3) Wenn alsdann die Function ψ die Integration über jeden messbaren Theil von S gestattet, so giebt es eine und auch nur eine einzige Function v, welche den vorstehenden Bedingungen genügt, und ihr Werth in einem beliebigen Puncte o von J ist:

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\int \psi_\mu \frac{dw(\mu/o)}{dp_\mu}\,dS_\mu.$$

In dieser unter einfacheren Voraussetzungen längst bekannten Formel bedeutet dS_μ ein den Punkt μ enthaltendes Element von S, dp_μ das Element der über dS_μ nach Aussen errichteten Normale; die Integration ist über alle Elemente von S zu erstrecken.

Wenn ψ die Integration nicht über jeden Theil von S gestattet, so wird der vorstehende Ausdruck illusorisch. Für diesen Fall gelten Bemerkungen wie im vorigen Satze unter II. Die ersten und bis jetzt einzigen Beispiele, welche diesem Falle analog sind und eine Vorstellung von Bedingungen gewähren können, welche in diesem Falle zu den obigen hinzukommen können, sind in den art. X und namentlich XI meiner Abhandlung über die einwerthigen Potentiale behandelt worden (Borchardt's Journal 64).*)

Die oben gegebene Definition von $W(m/o)$ ist nur eine Umschreibung, um an andere bekannte Sätze zu erinnern. In Wirklichkeit ist, wie man weiss, $W(m/o)$ derjenige besondere Fall von v, wo auch die Bedingung B bis an S selbst hinan erstreckt, C durch die Gleichung

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

für's Innere von J, und D durch die Bedingung ersetzt wird, dass in jedem Puncte μ von S:

$$v_\mu = \frac{1}{(\mu\, o)}$$

sein soll. Wenn also die Lösbarkeit dieser speciellen Aufgabe dargethan ist, so ist auch unter den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes die Existenz und der Ausdruck von v sicher gestellt.

Abgesehen von dem Interesse, welches Untersuchungen über die Zulässigkeit von Beweismitteln gewähren können, ist es daher nach den vorstehenden Sätzen nicht mehr nothwendig, die Frage nach der Existenz der Functionen v in möglichster Allgemeinheit zu behandeln.

Es genügt vielmehr, zunächst bei den Potentialen, die Existenz der Function W zu untersuchen, oder, was genau das nämliche leistet, die Möglichkeit der im zweiten Satze geforderten Belegung von S darzuthun. (Vergl. Gauss, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die Kräfte u. s. w. artt. 29 bis 34 und art. 36.)

Da ferner auch die Green'sche Function G_m^0 des Herrn Neumann, nach der in dessen Abhandlung zu Grunde gelegten Auffassung, und wie man auch aus ihrer Definition leicht findet, für eine einblättrige Fläche F angesehen werden kann als Potential einer Anziehung, die von einer Belegung der Randkurve K herrührt und zwischen zwei Puncten ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist, so ist für solche Flächen die Frage nach der Existenz der Functionen v unter den Voraussetzungen I des ersten Satzes erledigt, wenn man entweder die Lösbarkeit des Abbildungsproblems, oder die Existenz einer der Functionen ξ, G, oder endlich die Möglichkeit beweist, einem jeden Puncte o im Innern von F eine Belegung der Randcurve K zuzuordnen, welche nach jenem Anziehungsgesetze ausserhalb F gerade so wirkt, wie eine in o concentrirte Masseneinheit.

*) Im ersten Bande dieser Abhandlungen S. 207 f.

In beiden Fällen ist also die Frage nach der Existenz der Function v und der Lösbarkeit der secundären Probleme, auf welchen die Darstellung von v beruht, zurückgeführt auf die Frage nach der Existenz einer Belegung der Grenzkurve oder Grenzfläche, welche auf der Begrenzung ein vorgeschriebenes Potential erzeugt, also einer Function, welche nur an der Begrenzung entlang existirt und auszuwählen ist aus der Gesammtheit aller derjenigen Functionen, welche die Integration über jeden Theil der Begrenzung gestatten, ohne irgend einer andern Einschränkung zu unterliegen.

Berlin, 31. August 1871.

Anmerkung.

Zu vorstehender Abhandlung vergl. die Bemerkungen von A. H. Schwarz am Ende seiner Abhandlung: Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 74, Ges. Abhandlungen, 2. Band, S. 210). Kr.

XXIV.

Observatio Arithmetica.

(Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Bd. 6, 1875, S. 148—152.)

1. Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint $r_1, r_2, r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, $2a$, $3a, \ldots$ secundum modulum b, quem numero a majorem esse supponimus.

Haec series residuorum

$$(r.) \qquad r_1 r_2 r_3 \ldots$$

e repetitione indefinita periodi

$$r_1 r_2 \ldots r_b$$

oritur, quae ipsa praeter ordinem cum numeris $0, 1, 2, \ldots b-1$ congruit, exstante primo residuo $r_1 = a$, ultimo $= 0$.

Iam in disquisitione valde diversa nuper observationem facere contigit, quae indolem arithmeticam talis seriei residuorum singulariter illustrare videtur.

Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augetur. Ad hanc quaestionem decidendam, ubi series $(r.)$ ipsa in promptu est, nil faciendum est nisi ut inspiciatur, utrum residuo r_m succedat numerus major vel minor r_{m+1}.

2. Quae tali modo, perlustrando seriem $(r.)$, de valoribus ipsius r_m crescentibus vel decrescentibus observantur, ad nostrum scopum egregie exprimuntur; si continua serie notatur litera c vel d, prout r_m crescit vel decrescit, i. e. prout post r_m invenitur numerus major vel minor r_{m+1}.

Hoc modo nova series nascitur, e duabus tantum literis c, d, sed certo quodam ordine composita: cujus terminos, si ad locum respicere oportet, quem in serie illa obtinent, per

$$(g.) \qquad g_1 g_2 g_3 \ldots$$

exhibemus, ita ut sit

$$g_\mu = c \text{ quoties } r_\mu < r_{\mu+1},$$
$$g_\mu = d \quad \text{,,} \quad r_\mu > r_{\mu+1}$$

est.

Haec series $(g.)$ erit ipsa periodica sicut series $(r.)$ residuorum, et quidem

$$g_1 g_2 \ldots g_b = P$$

ejus periodus. Qua in re notandum est, ultimos terminos periodi semper fore $g_{b-1} = d$, $g_b = c$, quum propter $r_b = 0$ necessario sit $r_{b-1} > r_b < r_{b+1}$.

Rejectis igitur duobus ultimis terminis g_{b-1}, g_b, qui quum in quavis periodo iidem inveniantur, partem priorem

$$g_1 g_2 \ldots g_{b-2} = \Pi$$

vocabimus partem principalem periodi P. Quum autem sit $r_{\mu+1} - r_\mu = r_{b-\mu} - r_{b-\mu-1}$, oportet esse $g_\mu = g_{b-\mu-1}$, i. e. $g_1 = g_{b-2}$, $g_2 = g_{b-3}$, e. i. p. ideoque pars principalis periodi semper est symmetrica, unde ipsum Π immutatum redit, si ordo literarum omnino invertitur.

Exemplum I. Sit $a = 4$, $b = 11$, erit series $(r.)$ notis c, d ornata

$$\begin{array}{ccccccccccc|l} 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 & 0 & 4\ 8 \ldots \\ c & d & c & c & d & c & c & d & c & d & c & c \ldots \end{array}$$

et inde periodus

$$P = cdccdccdcdc$$

et ejus pars principalis

$$\Pi = cdcc|d|ccdc.$$

Exemplum II. Ut adsit exemplum latioris ambitus, sit $a = 7$, $b = 24$, erit periodus seriei $(r.)$

7 14 21 4 11 18 1 8 15 22 5 12 19 2 9 16 23 6 13 20 3 10 17 0

inde periodus seriei $(g.)$

$$P = ccdccdcccdccdcccdccdccdc$$

et ejus pars principalis

$$\Pi = ccdccdcccdc|cdcccdccdcc.$$

3. Periodus P igitur b literas continet et inter illas, quod e primis notionibus circa residua sequitur, literam d in a locis.

Dato igitur numero a et modulo b, prorsus determinata est periodus P, et vice versa, data periodo P prorsus determinatus est numerus a una cum modulo b.

Inde patet ordinem, quo literae c, d in periodo P distribuuntur, non esse arbitrarium, sed certis illum legibus premi, adeo ut aggregatum, quod e vera periodo literis c, d quocunque modo permutatis prodit, nequeat esse periodus ullius numeri a adjecto qualicunque modulo b.

Quamobrem ipsam seriem $(g.)$ vocabimus characteristicam numeri a secundum modulum b vel si placet characteristicam numeri fracti $\frac{a}{b}$.

4. Inter has ipsas leges circa characteristicam referenda sunt, quae summus Gauss de residuis quadraticis docuit (Theorematis arithmetici demonstratio nova) unde vix dubitari potest, in characteristica latere proprietates vel maxime intimas inter numeros a et b locum habentes.

Sed quae nobis hac occasione exponenda sunt, non tam alte spectant, nec ultra numerationem versantur.

Invenimus autem theorema, omnes periodos sub una sola forma, eademque simplicissima contineri, ita ut una eademque lex distributionem literarum c, d in omnibus characteristicis amplectatur.

5. Qua in re notatione utemur, quae quidem symmetriam ipsius Π modo commemoratam non sub ipsos oculos ponit, sed e vera fonte harum quaestionum petita ideoque pro utiliori ducenda est.

Si in characteristica litera c bis vel ter vel pluries continua serie notanda est, scribimus c^2, c^3 loco cc, ccc et ita porro, unde c^0 significabit, literam c tali loco omnino esse omittendam.

In secundo exemplo erit igitur $\Pi = c^2dc^2dc^3dc^2dc^3dc^2dc^2$.

Eodem modo ipsa aggregata colligimus, scribendo $(c^n d)^2$ loco $c^n dc^n d$, et ita generaliter.

Hinc erit $P = \Pi dc$, si literarum ordo diligenter observatur, et ipsa characteristica numeri a secundum modulum b haec:

$$\Pi dc \Pi dc \ldots = (\Pi dc)^\infty = P^\infty.$$

6. His ita positis, habetur sequens

Theorema.

Sint $s, s_1, s_2, \ldots s_n$ numeri positivi integri, quorum ultimus s_n unitate major est, et formentur aggregata

$$\begin{array}{lll}
c^{s-1} = \gamma & c^{s-1}d = c_1 & c^s d = d_1 \\
c_1^{s_1-1} = \gamma_1 & c_1^{s_1-1}d_1 = c_2 & c_1^{s_1}d_1 = d_2 \\
c_2^{s_2-1} = \gamma_2 & c_2^{s_2-1}d_2 = c_3 & c_2^{s_2}d_2 = d_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

tunc erit ipsius Π forma generalis haec:

$$\Pi = c_1 c_2 \ldots c_{n-1} \gamma_n \gamma_{n-1} \cdots \gamma_2 \gamma_1 \gamma,$$

atque inde sequitur

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 \, \ddots + \cfrac{1}{s_n}}}}.$$

7. In exemplo secundo erat $\Pi = c^2dc^2dc^3dc^2dc^3dc^2dc^2$. Inde sequitur esse debere $\gamma = c^2$, $c_1 = c^2 d$, itaque $s = 3$, $d_1 = c^3 d$, $\gamma_1 = c_1^{s_1-1}$ atque

$$\Pi = c_1 \cdot c_1 d_1 c_1 d_1 c_1 \cdot \gamma.$$

Porro sequitur $\gamma_1 = c_1$, ergo $s_1 = 2$, $c_2 = c_1 d_1$, $d_2 = c_1^2 d_1$, $\gamma_2 = c_2^{s_2-1}$ atque $\Pi = c_1 c_2^2 \gamma_1 \gamma$; denique $\gamma_2 = c_2^2$, $s_2 = 2$, unde $\Pi = c_1 \gamma_2 \gamma_1 \gamma$ et

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{7}{24},$$

sicut esse debet.

8. Ita patet:

I. quomodo pars principalis periodi ex evolutione fractionis $\frac{a}{b}$ in fractionem continuam ope numerorum positivorum integrorum $s, s_1, s_2, \ldots s_n$ obtinetur, quorum tamen ultimus debet esse > 1;

II. quomodo vice versa e vera periodo non solum numerus a una cum modulo b obtinetur, sed etiam numerorum $s, s_1, \ldots s_n$ series integra, ideoque fractio $\frac{a}{b}$ in fractionem continuam evoluta;

III. Denique patet, cognitis a et b, ex ipsa characteristica etiam residua r protinus resultare. Si enim terminorum $g_1, g_2, \ldots g_\mu$ inveniuntur m esse $= d$, reliqui autem $= c$, erit $r_\mu = \mu a - mb$.

9. Quae modo exposuimus, latius patent et attentione satis digna esse videntur. Nam series nostra P^∞ per solam numerationem literarum c, d numerum fractum $\frac{a}{b}$ determinat, et numerationibus succedentibus, si placet, ejus evolutionem in fractionem continuam praebet.

Quod ita pronunciari potest, per characteristicam etiam notionem numerorum fractorum ad solam et veram numerationem reduci, quae quidem res numerabiles sed qualescunque postulat, sine ulla notione divisionis, quae res divisibiles, id est quantitates sibi poscit.

Strassburg, 18/1/74.

XXV.

Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues.

(Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Bd. 8, 1877, S. 1—10.)

Les belles recherches, que Mr. Hermite a publié dans le Journal de Mr. Borchardt (t. LXXIX, p. 324) et dans le dernier cahier des Annales fondées par Clebsch (t. X, p. 287) m'ont fait penser qu'il y aura peut-être quelque intérêt de présenter brièvement une suite de théorèmes sur un genre de questions, dont j'ai traité le cas le plus simple dans un ancien Mémoire (Journal de Mr. Borchardt, t. LV. p. 61)*) sur la méthode de Gauss pour l'intégration approchée numérique.

Ce qui suit se rattache encore à l'intégration numérique (prop. VII), mais d'un point de vue très-étendu; aussi l'un des exemples, que j'indiquerai à la fin de cette communication, fera voir qu'entre les fonctions, dont je vais démontrer l'existence et les principales propriétés, il y a des espèces, qui sont dignes d'être étudiées même sous un point de vue purement analytique.

Posons l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{\lambda(x)\,dx}{u-x} = L(u),$$

le module de u surpassant l'unité, et $\lambda(x)$ désignant une fonction de x, soumise aux deux conditions:

A) d'admettre l'intégration entre les limites -1 et $+1$,

B) de rester réelle entre ces limites sans y changer de signe.

Ces conditions remplies, la fonction $\lambda(x)$ peut-être choisie arbitrairement. Mon ancien Mémoire suppose $\lambda(x) = 1$.

Maintenant soit

$$\Pi_n(x)$$

*) Im 1. Bande dieser Abhandlungen S. 65.

une fonction entière de x, du degré n,

$$P_n(u) = \int_{-1}^{1} \frac{\Pi_n(u) - \Pi_n(x)}{u-x}\,\lambda(x)\,dx$$

$$X_n(u) = \int_{-1}^{1} \frac{\Pi_n(x)\,\lambda(x)\,dx}{u-x},$$

donc

$$\Pi_n(u)\,L(u) = P_n(u) + X_n(u).$$

Evidemment la fonction $P_n(u)$ est entière et du degré $n-1$, et comme les développements de $L(u)$, $X_n(u)$ suivant les puissances de la variable u ne peuvent contenir que les termes en $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \ldots$, p. e.

$$L(u) = \frac{A}{u} + \frac{A_1}{u^2} + \frac{A_2}{u^3} + \cdots,$$

on voit qu'en formant le produit de la fonction entière $\Pi_n(u)$ avec le développement de $L(u)$, $P_n(u)$ en sera la partie entière et $X_n(u)$ le reste. Il est bon d'observer que dans le développement de $\Pi_n(u)\,L(u)$ le coefficient de $\frac{1}{u}$ est toujours

$$= \int_{-1}^{1} \Pi_n(x)\,\lambda(x)\,dx.$$

Ayant égard aux conditions pour la fonction $\lambda(x)$ et aux notations précédentes, on peut énoncer les théorèmes suivants:

I. La condition, que dans le développement de la fonction $X_n(u)$ les $n+1$ premiers termes disparaissent, donne identiquement $\Pi_n = 0$, $P_n = 0$, $X_n = 0$.

Ou autrement: le déterminant des $n+1$ premiers coefficients dans le développement de la fonction $X_n(u)$, pris suivant les coefficients de $\Pi_n(u)$, est différent de zéro.

II. On peut demander une fonction entière Π_n du degré n telle, que dans le développement de la fonction correspondante X_n seulement les n premiers termes disparaissent. La fonction Π_n existe toujours, elle est déterminée à un facteur constant près, et son degré est précisement le nombre proposé n.

Soit

$$\Pi_n(u) = a_n u^n + a'_n u^{n-1} + a''_n u^{n-2} + \cdots$$

cette fonction, et soient

$$P_n(u) = b_n u^{n-1} + b'_n u^{n-2} + \cdots$$

$$X_n(u) = \frac{B_n}{u^{n+1}} + \frac{B'_n}{u^{n+2}} + \cdots$$

les fonctions correspondantes. Le coefficient a_n reste arbitraire; lorsqu'on en dispose convenablement, les trois fonctions Π_n, P_n, X_n sont complètement déterminées.

Par cette proposition, chaque fonction $\lambda(x)$ qui vérifie les conditions A), B), donne naissance à une suite indéfinie de fonctions entières Π_0, Π_1, Π_2, ... avec les fonctions correspondantes P et X, qui ont les proprietés suivantes:

III. Lorsque m, n désignent deux nombres inégaux entiers et positifs, on a

$$\int_{-1}^{1} \Pi_m(x)\Pi_n(x)\lambda(x)\,dx = 0$$

et pour $m = n$

$$\int_{-1}^{1} [\Pi_n(x)]^2\lambda(x)\,dx = a_n B_n.$$

IV. Toute fonction entière $F(u)$ peut être développée dans la forme

$$F(u) = C_0\Pi_0(u) + C_1\Pi_1(u) + C_2\Pi_2(u) + \cdots$$

et cela d'une seule manière. Lorsque le développement du produit $F(u)L(u)$ ne contient pas les termes en $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \ldots \frac{1}{u^v}$, on a $C_0 = 0$, $C_1 = 0, \ldots C_{v-1} = 0$.

V. L'équation

$$\Pi_n(u) = 0$$

n'admet que des racines simples, qui sont toutes réelles, comprises entre les limites -1 et $+1$, et différentes de ces limites.

VI. Soient

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

les racines de cette équation, et de même

$$\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_{n-1}$$

les racines de l'équation précédente $\Pi_{n-1}(u) = 0$. Ces racines convenablement rangées, on aura l'inégalité

$$-1 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \beta_{n-1} < \alpha_n < 1.$$

VII. L'équation

$$\int_{-1}^{1} F(x)\lambda(x)\,dx = \sum_{\alpha} F(\alpha)\frac{P_n(\alpha)}{\Pi_n'(\alpha)},$$

approchée en général, est exacte pour toute fonction entière $F(x)$, dont le degré ne surpasse pas le nombre $2n-1$.

VII. Entre les fonctions entières Π, P subsistent les relations identiques

$$\Pi_{n-1}(u)P_n(u) - \Pi_n(u)P_{n-1}(u) = a_n B_{n-1},$$

$$\frac{\Pi_n(x)\Pi_{n-1}(y) - \Pi_n(y)\Pi_{n-1}(x)}{x-y} = a_n B_{n-1}\sum_{0}^{n-1}\frac{\Pi_m(x)\Pi_m(y)}{a_m B_m}.$$

IX. Lorsque le module de u surpasse l'unité, on a le développement en fraction continue

$$L(u) = \cfrac{L_0}{u-\mathfrak{A}_0 - \cfrac{L_1 : L_0}{u-\mathfrak{A}_1 - \cfrac{L_2 : L_1}{u-\mathfrak{A}_2 - \cdots}}}$$

et faisant, pour en former les réduites,

$$Z_0 = 0 \quad Z_1 = L_0 \qquad Z_{n+1} = (u-\mathfrak{A}_n)Z_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}Z_{n-1}$$

$$N_0 = 1 \quad N_1 = u-\mathfrak{A}_0 \qquad N_{n+1} = (u-\mathfrak{A}_n)N_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}N_{n-1}$$

on a

$$\Pi_n(u) = a_n N_n, \quad P_n(u) = a_n Z_n.$$

Dans ces formules on doit mettre

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{A_1}{A_0}, \quad \mathfrak{A}_n = \frac{a_n'}{a_n} - \frac{a_{n+1}'}{a_{n+1}} = \frac{a_n'}{a_n} + \frac{B_n'}{B_n}$$

$$L_0 = \frac{B_0}{a_0} = A_0, \quad L_n = \frac{B_n}{a_n}.$$

La prop. I peut être démontrée ou par la méthode de mon ancien Mémoire, ou en formant le déterminant en question. On le trouve

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(\int_{-1}^{1}\right)^{n+1}[\Pi(xx_1\ldots x_n)]^2\lambda(x)\lambda(x_1)\ldots\lambda(x_n)\,dx\,dx_1\ldots dx_n,$$

ce qui est bien différent de zéro, λ ne changeant pas de signe pendant l'intégration. De là découlent immédiatement les prop. II et IV.

Dans la prop. III la première intégrale est le coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de $\Pi_m(u)\Pi_n(u)L(u) = \Pi_m(u)[P_n(u) + X_n(u)]$, donc $= 0$ pour $m < n$, ce qui suffit pour démontrer la formule pour m différent de n; la même observation donne sa valeur pour $m = n$.

Quant au théorème V on démontre d'abord que, a_n étant choisi réel, les autres coefficients de Π_n sont réels aussi. Pour cela on décompose $\Pi_n(u)$ en $\psi + i\chi$, ψ et χ ayant les coefficients réels; χ sera donc d'un degré inférieur à n. Les coefficients de $L(u)$ étant réels, les termes en $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots \frac{1}{u^n}$ disparaissent non seulement du développement de $\Pi_n \cdot L$, mais aussi dans $\chi \cdot L$. Par conséquent on a $\chi = 0$ identiquement, prop. I.

Pour achever la démonstration du théorème V, des prop. III et IV nous tirons l'équation

$$(y) \qquad \int_{-1}^{1} y \, \Pi_n(x) \lambda(x) dx = 0$$

pour toute fonction entière y de x d'un degré inférieur à n.

Lorsqu'on suppose l'équation $\Pi_n(x) = 0$ avoir des racines α égales à une des limites -1 et $+1$, ou non comprises entre elles, soit z le produit de tous les facteurs $x - \alpha$ correspondants de $\Pi_n(x)$. Alors dans l'équation (y) on peut prendre

$$y = \frac{\Pi_n(x)}{z};$$

mais c'est une contradiction, le produit $y \Pi_n \lambda = \frac{\Pi_n^2}{z} \cdot \lambda$ restant réel et ne changeant pas de signe pendant l'intégration.

Lorsque α serait racine multiple de Π_n, comprise entre les limites -1 et $+1$, on prendrait

$$y = \frac{\Pi_n(x)}{(x-\alpha)^2},$$

pour tomber dans la même contradiction. Par conséquent l'équation $\Pi_n = 0$ a toutes ses racines réelles, différentes entre elles et des limites -1 et $+1$ et comprises entre ces limites.

La prop. VII est évidente par la théorie des intégrations numériques.

La première formule du th. VIII se déduit en chassant $L(u)$ des deux équations

$$\Pi_n(u) L(u) \quad = P_n(u) \quad + X_n(u)$$
$$\Pi_{n-1}(u) L(u) = P_{n-1}(u) + X_{n-1}(u),$$

ce qui donne

$$\Pi_{n-1}(u) P_n(u) - \Pi_n(u) P_{n-1}(u) = \Pi_n(u) X_{n-1}(u) - \Pi_{n-1}(u) X_n(u);$$

l'expression à droite étant après cela fonction entière de u, il n'en reste que le terme $a_n B_{n-1}$, les autres termes devant se détruire. Cette formule fait voir, que pour le th. VII la connaissance de la fonction P_n n'est pas nécessaire.

La seconde formule du th. VIII se démontre aisément par la méthode de mon ancien Mémoire ou par les formules récurrentes auxquelles nous passerons de suite; dans ce dernier cas on doit chasser le dénominateur $x - y$. En faisant dans cette formule $y = x$ et met-

tant pour x deux racines consécutives de l'équation $\Pi_n = 0$, on prouve que les valeurs correspondantes de $\Pi_{n-1}(x)$ sont de signes opposés. En effet, dans la formule

$$\Pi_n'(\alpha) \Pi_{n-1}(\alpha) = a_n B_{n-1} \sum_0^{n-1} \frac{[\Pi_m(\alpha)]^2}{a_m B_m},$$

qu'on trouve pour une racine α, on peut supposer tous les a positifs, alors les B le seront aussi, prop. III où l'on supposera λ positif pour un instant. La quantité à droite étant donc positive, les deux facteurs à gauche ont le même signe. Mais Π_n' changeant de signe d'une racine α à l'autre, la même chose a lieu pour Π_{n-1}, prop. VI.

Pour démontrer enfin le th. IX nous remarquons d'abord, que le développement de $u \Pi_n(u) L(u)$ manque des termes en $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots \frac{1}{u^{n-1}}$, donc le produit $u \Pi_n(u)$, ordonné suivant les fonctions Π, ne donne que les trois derniers termes. Ainsi on est conduit aux formules

$$u \Pi_n = \alpha \Pi_{n+1} + \beta \Pi_n + \gamma \Pi_{n-1}$$
$$u P_n = \alpha P_{n+1} + \beta P_n + \gamma P_{n-1}$$
$$u X_n = \alpha X_{n+1} + \beta X_n + \gamma X_{n-1}.$$

En égalant les coefficients, dans la première de u^{n+1} et de u^n, dans la dernière de $\frac{1}{u^n}$ et $\frac{1}{u^{n+1}}$, on trouve

$$\alpha = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \gamma = \frac{B_n}{B_{n-1}}, \quad \beta = \frac{a_n'}{a_n} - \frac{a_{n+1}'}{a_{n+1}} = \frac{B_n'}{B_n} - \frac{B_{n-1}'}{B_{n-1}}.$$

Pour la seconde valeur de $\beta = \mathfrak{A}_n$, donnée dans le th. IX, il faut récourir à la formule

$$\Pi_n X_{n-1} - \Pi_{n-1} X_n = a_n B_{n-1};$$

le coefficient de $\frac{1}{u}$ donne $a_n B_{n-1}' + a_n' B_{n-1} = 0$.

Des formules récurrentes pour les fonctions X_n, savoir

$$(u - \mathfrak{A}_0) X_0 = \frac{a_0}{a_1} X_1 + \frac{a_0}{a_1} A$$

$$(u - \mathfrak{A}_n) X_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} X_{n+1} + \frac{B_n}{B_{n-1}} X_{n-1}$$

on passe immédiatement au développement de $L(u) = \frac{X_0}{a_0}$ en fraction continue.

Pour en démontrer la convergence, lorsque mod $u > 1$, nous avons

$$L(u) - \frac{P_n(u)}{\Pi_n(u)} = \frac{X_n(u)}{\Pi_n(u)}.$$

Mais comme les racines de l'équation $\Pi_n = 0$ sont toutes comprises entre les limites -1 et $+1$, les fonctions $\frac{P_n}{\Pi_n}$ et $\frac{1}{\Pi_n}$ peuvent être développées suivant les puissances descendantes de u, toutefois qu'on a mod $u > 1$. Alors le développement de $\frac{X_n}{\Pi_n}$ commencera par le terme $\frac{B_n}{a_n u^{2n+1}}$, par conséquent le développement de $\frac{P_n}{\Pi_n}$ a les $2n$ premiers termes communs avec la série L. Soit donc

$$L(u) = \frac{A}{u} + \frac{A_1}{u^2} \cdots + \frac{A_{2n-1}}{u^{2n}} + \varrho$$

$$\frac{P_n(u)}{\Pi_n(u)} = \frac{A}{u} + \frac{A_1}{u^2} \cdots + \frac{A_{2n-1}}{u^{2n}} + \sigma;$$

les deux développements étant convergents, il suit que les restes ϱ et σ, et de même la quantité

$$\frac{X_n}{\Pi_n} = \varrho - \sigma$$

convergent vers zéro, lorsque n croit indéfiniment. Donc nous avons pour $n = \infty$

$$\lim \frac{P_n(u)}{\Pi_n(u)} = L(u),$$

ce qui démontre la convergence de la fraction continue pour toute valeur de u, dont le module surpasse l'unité.

Ajoutons quelques exemples.

Ex. 1. Prenant $\lambda(x) = 1$, on retombe sur les résultats de mon ancien Mémoire*)

$$\Pi_n(x) = \mathfrak{P}_n(x)$$
$$P_n(x) = R_n(x) = 2\left[\frac{2n-1}{1 \cdot n}\mathfrak{P}_{n-1} + \frac{2n-5}{3 \cdot n-1}\mathfrak{P}_{n-3} + \frac{2n-9}{5 \cdot n-2}\mathfrak{P}_{n-5} + \cdots\right],$$

$\mathfrak{P}_n$ étant la fonction de Legendre.

Ex. 2. Soit $\lambda(x) = x$; la condition B) n'est pas vérifiée. Aussi on trouve

$$\Pi_{2m}(x) = \Pi_{2m+1}(x) = \frac{1}{x}\mathfrak{P}_{2m+1}(x);$$

donc pour n impair Π_n n'est pas du degré n.

Ex. 3. Soit $\lambda(x)$ la valeur absolue de x, on trouve

$$\Pi_{2m}(x) = \mathfrak{P}_m(2x^2 - 1)$$
$$\Pi_{2m+1}(x) = \frac{1}{2x}[\mathfrak{P}_m(2x^2-1) + \mathfrak{P}_{m+1}(2x^2-1)].$$

*) Im 1. Bande dieser Abhandlungen S. 73.

Ex. 4. Pour $\lambda(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, a réel, on a $\Pi_0(x) = 1$, $\Pi_1(x) = x$,

$$\Pi_{n+2}(x) = \begin{vmatrix} \mathfrak{P}_{n+2}(x) & R_{n+2}(ai) + 2i\mathfrak{P}_{n+2}(ai) \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{a} \\ \mathfrak{P}_n(x) & R_n(ai) + 2i\mathfrak{P}_n(ai) \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{a} \end{vmatrix}.$$

Ex. 5. Dans le Journal de Mr. Borchardt (t. LXIII, p. 152) Mr. Mehler s'est dejà occupé du cas qui résulte en prenant

$$\lambda(x) = (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0;$$

le cas spécial $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, traité par des considérations directes, fait l'objet de la communication élégante de Mr. Hermite, Ann. de Clebsch, t. X.

La question posée par Mr. Mehler se traite facilement par les méthodes de mon ancien Mémoire.

On trouve les équations différentielles

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{\lambda}\frac{d\lambda\Pi_n}{dx}\right] = (n+1)(n+\alpha+\beta-2)\Pi_n$$
$$\lambda\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{\lambda}\frac{dX_n}{dx}\right] = (n+1)(n+\alpha+\beta-2)X_n$$
$$\lambda\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{\lambda}\frac{dP_n}{dx}\right] = (n+1)(n+\alpha+\beta-2)P_n - 2(\alpha+\beta-1)A\frac{d\Pi_n}{dx},$$

étant

$$A = 2^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma\alpha\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

L'expression de Π_n est la suivante (voir le Mémoire de Mr. Mehler)

$$\Pi_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n\lambda(x)}{2^n n!\lambda(x)dx^n}.$$

Lorsque $\alpha + \beta = 1$, ce qui suit souffre, pour $n = 0$, une legère modification. Mettant à côté ce cas, on obtient

$$(x - \mathfrak{A}_n)\Pi_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}\Pi_{n+1} + \frac{B_n}{B_{n-1}}\Pi_{n-1},$$

$$\mathfrak{A}_n = \frac{\beta-\alpha \cdot \alpha+\beta-2}{\alpha+\beta+2n-2 \cdot \alpha+\beta+2n}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 2 \cdot \frac{n+1 \cdot \alpha+\beta+n-1}{\alpha+\beta+2n-1 \cdot \alpha+\beta+2n}$$

$$\frac{B_n}{B_{n-1}} = 2 \cdot \frac{\alpha+n-1 \cdot \beta+n-1}{\alpha+\beta+2n-2 \cdot \alpha+\beta+2n-1}.$$

Par là on connait encore le développement de

$$L(u) = \int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}}{u-x}dx$$

en fraction continue pour mod $u > 1$, parceque, dans le th. IX on a $L_0 = A$, $\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{B_{n+1}}{B_n}$.

Ex. 6. Soit enfin

$$\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \cdot 1-k^2x^2}}, \quad 0 < k < 1,$$

et

$$w = \int_0^x \lambda(x)\,dx;$$

nous trouvons le résultat mémorable, qu'il existe une suite de fonctions $\Pi_n(x)$ doublement périodiques de w, qui donnent la relation

$$\int_{-K}^{K} \Pi_m(x)\,\Pi_n(x)\,dw = 0$$

toutefois que les entiers m, n sont inégaux, K désignant comme à l'ordinaire l'intégrale entière ou la valeur réelle de w pour $x = 1$.

Du reste on voit bien que dans tout ce qui précède, les limites -1 et $+1$ de l'intégration ne sont choisies que pour simplifier les formules et l'énoncé de quelques propositions. Si $\lambda(x)$ admet l'intégration de $x = a$ jusqu'à $x = b$, et que $\lambda(x)$ reste réel entre ces limites sans y changer de signe, tous ces résultats sont appliquables au cas, où l'on prendrait

$$L(u) = \int_a^b \frac{\lambda(x)\,dx}{u-x},$$

avec les modifications convenables. Par conséquent le dernier exemple donne encore lieu à une seconde série de fonctions Π_n de w, en prenant $a = 1$, $b = \frac{1}{k}$ au lieu des limites -1 et $+1$.

Strassburg, 7 juin 1876.

XXVI.

Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten.

(Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Bd. 8, 1877, S. 81—112.)

Ich erlaube mir, den Lesern der Annali in dieser und einer folgenden Abhandlung Untersuchungen über eine Gattung von Problemen vorzulegen, welche mit der Lehre von den integrirenden Factoren der linearen partiellen Differentialgleichungen im genauesten Zusammenhange stehen, und zwar so, dass neue Fortschritte in dieser Theorie sich nur auf die Kenntniss jener Probleme und der Hülfsmittel für ihre Lösung gründen können.

In den gegenwärtigen Abhandlungen sind indessen Erörterungen nach dieser Richtung nicht beabsichtigt. Die Untersuchung der mit linearen partiellen Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten empfiehlt sich, auch abgesehen von den angegebenen Zwecken, zunächst dadurch, dass sie eine tiefere Einsicht in die Natur der zu untersuchenden Differentialgleichungen gewährt, ausserdem aber in manchen Fällen durch den reichen Inhalt ihrer Resultate.

Ich halte es daher für angemessen, vor allen Dingen an einigen Beispielen zu zeigen, worin die Aufgabe solcher Untersuchungen besteht und wie dieselben durchzuführen sind, aber auf die Fragen, durch welche ich ursprünglich zu meinen Untersuchungen veranlasst worden bin, bei dieser Gelegenheit nicht einzutreten.

Die Aufgaben, welche ich behandeln werde, sind der Mechanik entnommen, und betreffen die Fortpflanzung von Stössen durch continuirliche Mittel von beliebiger Begrenzung. In der Mechanik wird bewiesen, dass die Wirkung eines Stosses auch durch stetig beschleunigende Kräfte hervorgebracht werden kann, welche nur kurze Zeit hindurch, aber während derselben sehr heftig wirken. Auf Grund dieses einleuchtenden Resultates pflegt man auf Untersuchungen über Stoss-kräfte zu verzichten, ohne sich jedoch mit den an ihre Stelle gesetzten, so ausserordentlich wirksamen Kräften weiter zu beschäftigen. Damit wird eines der fruchtbarsten Gebiete der Mechanik unbemerkt bei Seite gesetzt, und zugleich mit einem Anschein von Berechtigung die Uebung eingeführt, dass man bei mechanischen Problemen, selbst wenn offenbare Unstetigkeiten vorliegen, sich nicht um die Bedingungen kümmert, zu denen dieselben Veranlassung geben.

Ein sehr nahe liegendes Beispiel hierfür findet sich in der Lehre von den gespannten Saiten. Die Formeln, welche sich für die Transversalbewegung einer Saite unter der Voraussetzung ergeben, dass die Saite allenthalben stetig gebogen ist, werden unbedenklich auf den Fall angewandt, wo die Saite Ecken darbietet (Theorie der gezupften Saite); wenn man sich überhaupt auf Gründe hierfür einlässt, werden dieselben in den Eigenschaften der Fourier'schen Reihen gefunden. Und doch hat diese Frage mit den Fourier'schen Reihen gar nichts zu thun, indem sie vielmehr von zwei neuen Bedingungen abhängt, einer mechanischen für den Stoss, welchen ein von der Ecke überschrittenes Element der Saite erleidet, und einer phoronomischen, welche die beim Stosse eintretenden Unstetigkeiten so beschränkt, dass sie den Zusammenhang der Saite nicht aufheben[1]). Mit Hülfe dieser Bedingungen kann man, wie ich es seit einer Reihe von Jahren in meinen Vorlesungen zu thun pflege, beweisen, dass allerdings das Vorhandensein von Ecken auf die Schlussformeln für die Transversalbewegung keinen Einfluss hat, aber dies beruht nicht auf den Eigenschaften der Fourier'schen Reihen, sondern darauf, dass die erwähnten Unstetigkeiten solche sind, welche sich mit dem Fortbestehen der seit Euler so oft behandelten linearen partiellen Differentialgleichung vertragen.

Ich verzichte auf die Ausführung dieses sehr einfachen Beispiels, und behandle in der vorliegenden Arbeit die Fortpflanzung von Stössen durch eine Flüssigkeit, selbstverständlich unter den vereinfachenden Voraussetzungen, durch welche alle Bedingungsgleichungen linear werden. Die Anwendung der nachfolgenden Principien auf die vollständigen Grundgleichungen der Hydrodynamik führt zu Resultaten, welche darauf hinzudeuten scheinen, dass bei der üblichen Beurtheilung der in bewegten Flüssigkeiten wirkenden Kräfte principielle Fehler vorliegen.

1) Unter den gewöhnlichen vereinfachenden Voraussetzungen und in den üblichen Zeichen (Poisson, Méc., II., N°. 484) fordert die erste Bedingung, dass $c\frac{\partial y}{\partial t}+a^2\frac{\partial y}{\partial x}$, die andere, dass $c\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}$ zu beiden Seiten der Ecke denselben Werth haben soll; c ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Ecke zu grössern x fortrückt.

I.

Die mechanischen Bedingungen für den Stoss zwischen Flüssigkeitstheilchen.

1.

Das Verfahren, durch welches man zu den mechanischen Bedingungen für den Stoss zwischen Flüssigkeitstheilchen gelangt, verdanken wir Riemann, welcher diese Aufgabe in seiner Abhandlung über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite gelöst hat.

Sei Σ eine Unstetigkeitsfläche innerhalb einer Flüssigkeit, also eine Fläche, zu deren beiden Seiten der Druck p, die Dichtigkeit ϱ und die, nach den zueinander senkrechten Richtungen der wachsenden xyz geschätzten Geschwindigkeitscomponenten uvw verschiedene Werthe haben.

Wir unterscheiden die beiden Seiten von Σ, indem wir die eine als die positive $\overset{+}{\Sigma}$, die andere als die negative $\overset{-}{\Sigma}$ bezeichnen. Dieselbe Bezeichnung soll auch für die angrenzenden Werthe $u, v, \ldots$ benützt werden.

Ueber einem Elemente $\partial\Sigma$ dieser Fläche wird die Normale errichtet; wir zählen in ihr Abscissen N, die von der negativen nach der positiven Seite hin wachsen, und bezeichnen die Winkel, welche der positive Schenkel dieser Normale mit den positiven Axen der xyz bildet, durch $\alpha\beta\gamma$.

Wenn die Unstetigkeitsfläche Σ keine stehende ist, sondern im Raume fortschreitet, mit oder ohne Gestaltsänderung, so ist dadurch allein weder die Gestaltsänderung eines Theiles von Σ, noch die Bewegung eines einzelnen Punktes μ von Σ bestimmt; wir wählen letztere so, dass die Normale von Σ in dem mit Σ fortschreitenden Punkte μ fortwährend zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, und μ selbst seinen Ort nach der Stetigkeit ändert. Dann ist die Bewegung und Gestaltsänderung eines Elementes $\partial\Sigma$ dieser Fläche unzweideutig bestimmt: sie geht so von Statten, dass (1) die Ortsänderung eine stetige ist und (2) die an $\partial\Sigma$ entlang vorhandenen Normalenrichtungen unverändert bleiben.

Wenn $\partial\Sigma$ fortschreitet, wird es entweder die auf seiner positiven Seite angrenzenden Flüssigkeitstheilchen überholen, oder von den auf der negativen Seite befindlichen überholt werden. Der Fall, wo beide Flüssigkeitsschichten nur längs $\partial\Sigma$ gleiten, kann nach Belieben dem ersten oder zweiten Falle als Grenzfall zugeordnet werden.

Ist

$$\omega$$

die positive oder negative Geschwindigkeit, mit welcher $\partial\Sigma$ zu grössern N fortschreitet,

$$\Omega = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma$$

die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit in der nämlichen Richtung strömt, so tritt der erste oder der zweite Fall ein, jenachdem $\omega - \overset{+}{\Omega}$ positiv oder negativ ist

Im ersten Falle überholt $\partial\Sigma$ in der Zeit ∂t die Flüssigkeitsmenge $\overset{+}{\varrho}(\omega - \overset{+}{\Omega})\partial t\,\partial\Sigma$; dieselbe bleibt hinter $\partial\Sigma$ zurück und berechnet sich dort $= \overset{-}{\varrho}(\omega - \overset{-}{\Omega})\partial t\,\partial\Sigma$, wenn sie das Volumen $(\omega - \overset{-}{\Omega})\partial t\,\partial\Sigma$ ganz ausfüllt, d. h. sich nicht spaltet.

Im zweiten Falle dringt in derselben Zeit durch $\partial\Sigma$ von der negativen Seite her die Masse $\overset{-}{\varrho}(\overset{-}{\Omega} - \omega)\partial t\,\partial\Sigma$; dieselbe eilt $\partial\Sigma$ voran und drückt sich dann aus durch $\overset{+}{\varrho}(\overset{+}{\Omega} - \omega)\partial t\,\partial\Sigma$, vorausgesetzt, dass die Flüssigkeitstheilchen bei $\partial\Sigma$ nicht ausser Berührung treten.

In beiden Fällen haben wir

$$\overset{+}{\varrho}(\overset{+}{\Omega} - \omega) = \overset{-}{\varrho}(\overset{-}{\Omega} - \omega) \qquad (1)$$

als Bedingung für die Continuität der Flüssigkeit.

Im ersten Falle hat die von $\partial\Sigma$ überschrittene Flüssigkeitsmenge in der Richtung der wachsenden x vorher die Geschwindigkeit $\overset{+}{u}$, nachher die Geschwindigkeit $\overset{-}{u}$; diese Componente erleidet also eine plötzliche Vermehrung $\overset{-}{u} - \overset{+}{u}$. Im zweiten Falle ist $\overset{-}{u}$ die Componente vor, $\overset{+}{u}$ dieselbe nach dem Stosse, also $\overset{+}{u} - \overset{-}{u}$ die Zunahme der Componente. In beiden Fällen ist das Product aus der Masse und der Zunahme der Geschwindigkeitscomponente während der Zeit ∂t gleich $\overset{-}{\varrho}(\overset{-}{\Omega} - \omega)\partial t\,\partial\Sigma(\overset{+}{u} - \overset{-}{u})$, also das Mass der beschleunigenden Kraft

$$\overset{-}{\varrho}(\overset{-}{\Omega} - \omega)(\overset{+}{u} - \overset{-}{u})\partial\Sigma.$$

Von den zwischen den Flüssigkeitstheilchen wirkenden Kräften berücksichtigen wir nur den hydraulischen Druck p. Dann wirkt auf diese Masse, abgesehen von Kräften, die einander bis auf unendlich kleine Differenzen aufheben, (1) in $\partial\overset{+}{\Sigma}$ der Druck $\overset{+}{p}\partial\Sigma$ gegen die

Richtung der wachsenden N; seine Componente nach grössern x ist also $-\overset{+}{p}\cos\alpha\,\partial\Sigma$; (2) in $\partial\overset{-}{\Sigma}$ wirkt der Druck $\overset{-}{p}\partial\Sigma$ zu grössern N, was die Componente $\overset{-}{p}\cos\alpha\,\partial\Sigma$ gibt. Die Componente des Ueberdrucks ist also

$$(\overset{-}{p} - \overset{+}{p})\cos\alpha\,\partial\Sigma,$$

und dies ist dem vorigen Ausdrucke gleich.

Für den Stoss, den die von $\partial\Sigma$ überschrittenen Flüssigkeitstheilchen im nämlichen Augenblicke erfahren, erhalten wir also die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \overset{-}{\varrho}(\overset{-}{\Omega} - \omega)(\overset{+}{u} - \overset{-}{u}) + (\overset{+}{p} - \overset{-}{p})\cos\alpha &= 0 \\ \overset{-}{\varrho}(\overset{-}{\Omega} - \omega)(\overset{+}{v} - \overset{-}{v}) + (\overset{+}{p} - \overset{-}{p})\cos\beta &= 0 \\ \overset{-}{\varrho}(\overset{-}{\Omega} - \omega)(\overset{+}{w} - \overset{-}{w}) + (\overset{+}{p} - \overset{-}{p})\cos\gamma &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

es bedarf keiner Erläuterung, welche Glieder noch hinzukommen, wenn man ausser dem Drucke p noch andere Kräfte berücksichtigen will.

2.

Unsere nächste Aufgabe ist nun diese, die vorstehenden Bedingungsgleichungen durch geeignete Vernachlässigungen auf lineare zu reduciren, da die hier beabsichtigten Untersuchungen lineare Bedingungen fordern. Es wird sich zeigen, dass hierbei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind, die sich nach den Werthen von ω richten.

Sei ϱ_0 die constante Dichtigkeit im ungestörten Zustande und

$$\varrho = \varrho_0(1 + s),$$

also s die Condensation. Unter der Voraussetzung, dass s sehr klein bleibt, setze ich wie üblich

$$p = p_0 + \varrho_0 a^2 s,$$

wo p_0 den Druck im ungestörten Zustande bedeutet. Hier ist a eine positive Constante und erfahrungsmässig von sehr beträchtlicher Grösse. Die Bedingungsgleichungen des vorigen art. gehen über in:

$$\omega(\overset{+}{s} - \overset{-}{s}) = (1 + \overset{+}{s})\overset{+}{\Omega} - (1 + \overset{-}{s})\overset{-}{\Omega} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} (1 + \overset{-}{s})(\overset{-}{\Omega} - \omega)(\overset{+}{u} - \overset{-}{u}) + a^2(\overset{+}{s} - \overset{-}{s})\cos\alpha &= 0 \\ (1 + \overset{-}{s})(\overset{-}{\Omega} - \omega)(\overset{+}{v} - \overset{-}{v}) + a^2(\overset{+}{s} - \overset{-}{s})\cos\beta &= 0 \\ (1 + \overset{-}{s})(\overset{-}{\Omega} - \omega)(\overset{+}{w} - \overset{-}{w}) + a^2(\overset{+}{s} - \overset{-}{s})\cos\gamma &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

während

$$\Omega = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma \tag{3}$$

ist.

Ich vernachlässige alle Grössen von der Ordnung $\frac{1}{a}$, und beschränke die Untersuchung auf den Fall, wo s, su, sv, sw, also auch $s\Omega$ solche Grössen sind. Es ist hiernach nicht gefordert, dass auch u, v, w sehr klein bleiben; ausgeschlossen sind nur sehr beträchtliche Geschwindigkeiten, z. B. solche, die mit der Zahl a vergleichbar sind.

Unter diesen Voraussetzungen lehrt die Gleichung (1), dass ω eine Grösse von der Ordnung a ist, wenn es nicht $= 0$ und $\overset{+}{\Omega}$ nicht $= \overset{-}{\Omega}$ ist. Bei der Reduction der vorstehenden Bedingungen auf lineare müssen also drei Fälle unterschieden werden:

α) der Hauptfall, wo weder $\omega = 0$ noch $\overset{+}{\Omega} = \overset{-}{\Omega}$ ist; dann ist ω von der Ordnung a;
β) der Fall, wo ω nicht $= 0$ aber $\overset{+}{\Omega} = \overset{-}{\Omega}$, und
γ) der Fall, wo $\omega = 0$ ist.

α) Im ersten Falle gibt die Gleichung (1)

$$\omega(\overset{+}{s} - \overset{-}{s}) = \overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega},$$

die erste Gleichung (2) kann geschrieben werden

$$(1 + \overset{-}{s})\left(1 - \frac{\overset{-}{\Omega}}{\omega}\right) \cdot \omega(\overset{+}{u} - \overset{-}{u}) = a^2(\overset{+}{s} - \overset{-}{s})\cos\alpha,$$

und gibt also

$$\omega(\overset{+}{u} - \overset{-}{u}) = a^2(\overset{+}{s} - \overset{-}{s})\cos\alpha.$$

Wir schreiben von hier an:

$$\overset{+}{u} - \overset{-}{u} = U, \quad \overset{+}{v} - \overset{-}{v} = V, \quad \overset{+}{w} - \overset{-}{w} = W, \quad \overset{+}{s} - \overset{-}{s} = S, \tag{A}$$

und nennen S den Condensationsstoss, UVW die Componenten des Geschwindigkeitsstosses. Die Bedingungsgleichungen reduciren sich auf die folgenden:

$$\omega S = U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma \tag{B}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega U &= a^2 S\cos\alpha \\ \omega V &= a^2 S\cos\beta \\ \omega W &= a^2 S\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

3.

Bevor wir zu den Folgerungen aus diesen Bedingungen übergehen, müssen wir noch die beiden andern, minder wichtigen Fälle erledigen.

β) Ist ω von Null verschieden, aber

$$\overset{+}{\Omega} = \overset{-}{\Omega},$$

so folgt aus (2) mittelst der Factoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

$$\overset{+}{s} = \overset{-}{s}$$

oder in der ursprünglichen Form $\overset{+}{p} = \overset{-}{p}$, also weiter $(1 + \overset{-}{s})(\overset{-}{\Omega} - \omega)(\overset{+}{u} - \overset{-}{u}) = 0$, u. s. w., mithin, wenn überhaupt Unstetigkeiten stattfinden, $\overset{-}{\Omega} = \omega$.

In diesem Falle ist also die zu Σ senkrechte Geschwindigkeit Ω der angrenzenden Flüssigkeit zu beiden Seiten dieselbe, und dies ist zugleich die Geschwindigkeit ω, mit welcher Σ in der nämlichen Richtung fortschreitet. Druck und Dichtigkeit sind stetig, nur die Componenten der Tangentialgeschwindigkeit haben zu beiden Seiten von Σ ungleiche Werthe.

Da hiernach kein Flüssigkeitstheilchen durch Σ hindurchtritt, so findet auch kein Stoss zwischen Flüssigkeitstheilchen statt; Σ ist die Grenze zwischen zwei Flüssigkeitsmassen, die in ihrer Bewegung einander folgen und, solange dieser Vorgang dauert, längs einander gleiten, ohne sich zu vermischen.

γ) Wenn dagegen $\omega = 0$, also die Unstetigkeitsfläche eine stehende ist, so haben wir zunächst

$$(1 + \overset{+}{s})\overset{+}{\Omega} = (1 + \overset{-}{s})\overset{-}{\Omega} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} (1 + \overset{-}{s})\overset{-}{\Omega} U + a^2 S\cos\alpha &= 0 \\ (1 + \overset{-}{s})\overset{-}{\Omega} V + a^2 S\cos\beta &= 0 \\ (1 + \overset{-}{s})\overset{-}{\Omega} W + a^2 S\cos\gamma &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

mithin wegen der drei letzten Gleichungen auch

$$(1 + \overset{-}{s})\overset{-}{\Omega}(\overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega}) + a^2 S = 0. \tag{3}$$

Setzt man nun, um (1) zu befriedigen,

$$\overset{+}{\Omega} = \mu\sqrt{\frac{1 + \overset{-}{s}}{1 + \overset{+}{s}}}, \qquad \overset{-}{\Omega} = \mu\sqrt{\frac{1 + \overset{+}{s}}{1 + \overset{-}{s}}},$$

so folgt

$$(1+\overset{-}{s})\,\overset{-}{\Omega} = \mu\sqrt{1+\overset{+}{s}\cdot 1+\overset{-}{s}}, \qquad \overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega} = -\frac{\mu S}{\sqrt{1+\overset{+}{s}\cdot 1+\overset{-}{s}}},$$

also aus (3)

$$(\mu^2 - a^2)\,S = 0.$$

Ist nun (1) $S = 0$, aber μ, also auch $\overset{-}{\Omega}$ nicht $= 0$, so folgt $U = 0$ $V = 0$ $W = 0$, d. h. dann finden längs Σ gar keine Unstetigkeiten statt. Ist (2) $S = 0$ und $\mu = 0$, so ist $\overset{+}{\Omega} = \overset{-}{\Omega} = 0$, und dann verhält sich Σ wie eine unbewegliche, undurchdringliche Wand, an welcher die Flüssigkeit zu beiden Seiten vorbeiströmt. Ist (3) S nicht $= 0$, so folgt $\mu = \pm a$; $\overset{+}{\Omega}$ und $\overset{-}{\Omega}$ werden von der Ordnung a, also strömt die Flüssigkeit durch die ruhende Fläche Σ mit einer Normalgeschwindigkeit, welche verhältnismässig nur wenig von a verschieden ist. Geschwindigkeiten von solcher Grösse müssen bei unsern Untersuchungen ausgeschlossen werden.

Der einzige mit unsern Untersuchungen verträgliche Fall einer stehenden Unstetigkeitsfläche ist also der, wo $S = 0$, d. h. Druck und Dichtigkeit stetig, und die Normalgeschwindigkeit Ω zu beiden Seiten der Fläche $= 0$ ist. Diese Bedingungen ergeben sich für $\omega = 0$ auch aus (B) und (C).

4.

Schafft man aus (B) die Grössen $U\,V\,W$ weg, so bleibt $S(\omega^2 - a^2) = 0$. Ist $S = 0$, so geben die Gleichungen (C) entweder $\omega = 0$, und dann ist Σ eine stehende Unstetigkeitsfläche und wegen (B) $\overset{+}{\Omega} = \overset{-}{\Omega}$, oder es folgt $U = 0$ $V = 0$ $W = 0$, und dann finden längs Σ gar keine Unstetigkeiten statt.

Ist aber S von Null verschieden, so folgt

$$\omega^2 = a^2 \tag{1}$$

und nun folgt aus (C)

$$\left.\begin{aligned} U &= \omega S \cos\alpha \\ V &= \omega S \cos\beta \\ W &= \omega S \cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Der Stoss, den ein von $\partial\Sigma$ überschrittenes Flüssigkeitstheilchen erleidet, ist demnach senkrecht zu $\partial\Sigma$ und, nach den wachsenden N geschätzt, $= \omega S$. Um seine Richtung auf die in der Flüssigkeit selbst herrschenden Verhältnisse zu beziehen, sei für einen Augenblick die

Richtung der wachsenden N diejenige, in welcher $\partial\Sigma$ wirklich fortschreitet, also $\omega = a$; dann folgt aus (2) $\overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega} = aS$. Sodann ist bei unsern Untersuchungen Ω numerisch kleiner als a, also überholt $\partial\Sigma$ die auf seiner positiven Seite liegenden Flüssigkeitstheilchen. Dieselben treten also während des Stosses aus der Normalgeschwindigkeit $\overset{+}{\Omega}$ und dem Drucke $\overset{+}{p} = p_0 + \varrho_0 a^2 \overset{+}{s}$ über in die Normalgeschwindigkeit $\overset{-}{\Omega}$ und den Druck $\overset{-}{p} = p_0 + \varrho_0 a^2 \overset{-}{s}$; sie erlangen also nach der Richtung der wachsenden N die Geschwindigkeitsvermehrung $\overset{-}{\Omega} - \overset{+}{\Omega} = \frac{1}{\varrho_0 a}(\overset{-}{p} - \overset{+}{p})$. Ist $\overset{-}{p}$ der grössere Druck, so ist dieser Stoss positiv, also zu grössern N, mithin von $\overset{-}{p}$ nach $\overset{+}{p}$ gerichtet; ist umgekehrt $\overset{+}{p}$ der grössere Druck, so wirkt der Stoss nach den kleinern N, also von $\overset{+}{p}$ nach $\overset{-}{p}$ hin. Beides zusammen gibt den Satz:

Wird ein Flüssigkeitstheilchen von $\partial\Sigma$ überschritten, so erleidet es im nämlichen Augenblicke einen Stoss ωS; derselbe ist senkrecht zu $\partial\Sigma$ und wirkt stets vom grössern nach dem kleinern Drucke hin.

5.

Für die Unstetigkeitsfläche Σ hat sich nur das in der Gleichung $\omega^2 = a^2$ ausgesprochene Gesetz ergeben; dasselbe lehrt, dass jede Tangentialebene von Σ nach der Richtung ihrer Normale mit der constanten Geschwindigkeit $\pm a$ fortschreitet.

Die Anfangslage Σ_0 von Σ kann daher willkürlich angenommen werden, und jede spätere Lage von Σ gibt sich als Parallelfläche von Σ_0 zu erkennen.

Um dies näher zu begründen, und zugleich für die folgenden Untersuchungen die nöthigen Vorbereitungen zu treffen, sei

$$t = f(\xi\eta\zeta) \tag{Σ}$$

die Gleichung der Unstetigkeitsfläche zur Zeit t, indem wir von hier an die Coordinaten eines der Fläche Σ angehörigen, also mit t sich ändernden Punktes μ stets durch $\xi\eta\zeta$ bezeichnen werden, während xyz die Coordinaten eines beliebigen Punktes bedeuten. Für unsere Untersuchung brauchen wir die partiellen Derivirten dieser Function t von ξ, η, ζ.

Da, bei passender Wahl von k, $\frac{\partial f}{\partial\xi} = k\cos\alpha$, $\frac{\partial f}{\partial\eta} = k\cos\beta$,

$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = k \cos\gamma$ ist, so ist das vollständige Differential von $t: \partial t = k(\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta)$. Die Grösse k bestimmt sich aus einem besondern Falle. Lässt man nämlich μ in der Richtung der wachsenden N, also mit der Geschwindigkeit ω fortrücken, und sind dann $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ die Zunahmen der Coordinaten während der Zeit ∂t, so ist die entsprechende Zunahme von N gleich

$$\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta = \omega\,\partial t;$$

folglich ist $k = \frac{1}{\omega}$, und allgemein

$$\partial t = \frac{1}{\omega}(\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta),$$

mithin

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega},$$

von welchen Formeln im Folgenden vielfacher Gebrauch gemacht werden wird.

Mittelst derselben nehmen die Gleichungen (B) (C) des art. 2 die Form an

$$S = U\frac{\partial t}{\partial \xi} + V\frac{\partial t}{\partial \eta} + W\frac{\partial t}{\partial \zeta} \tag{B}$$

$$\left.\begin{aligned} U &= a^2 S\frac{\partial t}{\partial \xi} \\ V &= a^2 S\frac{\partial t}{\partial \eta} \\ W &= a^2 S\frac{\partial t}{\partial \zeta} \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

und geben, weil S von Null verschieden sein soll,

$$a^2\left[\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2\right] = 1 \tag{t}$$

als partielle Differentialgleichung der Fläche Σ; sie ist nichts Anderes, als die Gleichung $\omega^2 = a^2$, in anderer Form geschrieben.

Es ist nunmehr leicht zu verificiren, dass Σ Parallelfläche zu Σ_0 ist; dazu reicht es aus, dass das Normalensystem von Σ während der Fortbewegung dieser Fläche ungeändert bleibt. Sei Σ_1 die Fläche, in welche Σ bis zur Zeit $t + \partial t$ übergegangen ist, μ_1 der Punkt, in welchem Σ_1 von der über Σ in μ errichteten Normale N geschnitten wird, N_1 die Normale von Σ_1 in μ_1; es soll verificirt werden, dass N_1 mit N identisch ist.

Von μ bis μ_1 nehmen die Coordinaten zu um $\delta\xi = \omega\,\partial t \cdot \cos\alpha$, $\delta\eta = \omega\,\partial t \cdot \cos\beta$, $\delta\zeta = \omega\,\partial t \cdot \cos\gamma$; sind also $\cos\alpha_1 = \cos\alpha + \delta\cos\alpha$,

$\cos\beta_1 = \cos\beta + \delta\cos\beta$, $\cos\gamma_1 = \cos\gamma + \delta\cos\gamma$ die Cosinus zwischen N_1 und den positiven Axen, so folgt

$$\begin{aligned} \delta\cos\alpha &= \frac{\partial\cos\alpha}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial\cos\alpha}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\cos\alpha}{\partial\zeta}\delta\zeta \\ &= \omega\,\partial t\left[\cos\alpha\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\xi} + \cos\beta\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\eta} + \cos\gamma\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\zeta}\right]. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\cos\alpha = \omega\frac{\partial t}{\partial\xi}, \quad \cos\beta = \omega\frac{\partial t}{\partial\eta}, \quad \cos\gamma = \omega\frac{\partial t}{\partial\zeta},$$

und in unserm Falle ω constant; also folgt weiter

$$\delta\cos\alpha = \omega^3\partial t\left[\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial^2 t}{\partial\xi^2} + \frac{\partial t}{\partial\eta}\frac{\partial^2 t}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial t}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 t}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right]$$

oder

$$\delta\cos\alpha = \frac{1}{2}\omega^3\partial t \cdot \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\frac{\partial t}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right)^2\right],$$

mithin $\delta\cos\alpha = 0$ und ebenso $\delta\cos\beta = 0$, $\delta\cos\gamma = 0$. Jede Normale von Σ ist also auch Normale von Σ_1, also folgt der Satz:

Solange die Unstetigkeitsfläche Σ im Innern der Flüssigkeit fortschreitet, bleibt sie orthogonale Trajectorie eines festen Normalensystems $\mathfrak{N}$, in welchem sie sich zu grössern N mit der unveränderlichen Geschwindigkeit $\omega = \pm a$ fortbewegt. Dieses Normalensystem ist bestimmt durch die Anfangslage Σ_0 von Σ, und diese kann willkürlich angenommen werden.

Ein Element $\Delta\Sigma$ der Unstetigkeitsfläche durchläuft also ein unveränderliches, unendlich dünnes Normalenbündel $\Delta\mathfrak{N}$, dessen senkrechter Querschnitt es bleibt.

Jeder Punkt μ von Σ durchläuft endlich einen Strahl des Normalensystems $\mathfrak{N}$.

Der vorstehende Satz enthält die vollständige Integration der Differentialgleichung (t) für einen unbegrenzten Raum, und zwar in der vollkommensten Form, nämlich frei von den Nebenumständen, welche eintreten, wenn man sich nicht mit der Integration dieser Gleichung begnügt, sondern ausserdem noch die Hülfsmittel vorschreibt, mit denen dieselbe durchgeführt werden soll. In der That setzt die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für einen unbegrenzten Raum voraus, dass man eine durchaus verfügbare Fläche Σ_0 annimmt, welche der Zeit t_0 entspricht, und dann auf jeder Normale von Σ_0 in vorgewählter Richtung von ihrem Fusspunkte aus die Strecke $a(t - t_0)$ abträgt. Der Ort aller Endpunkte $\xi\eta\zeta$ ist die gesuchte Fläche Σ, und durch die Gesammtheit aller Flächen Σ wird der unbegrenzte Raum so nach den Werthen von t geordnet, wie es die Differentialgleichung (t) verlangt. Die Darstellung der hiermit gefundenen Lösung in analytischer Form setzt voraus, dass man diese Construction ausserdem noch in Formeln überträgt und aus diesen die Gleichung von Σ herleitet. Diese Aufgabe wird in der analytischen Geometrie vielfach besprochen, und hat mit der Integration der Gleichung (t) offenbar nichts zu thun.

In den art. 10, 11 werden wir die Integration dieser Gleichung auch für begrenzte Räume mit Berücksichtigung der durch unsere Aufgabe geforderten Grenzbedingung ausführen.

II.

Die mit dem Fortbestehen der partiellen Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten.

6.

Damit sind die Folgerungen erschöpft, welche sich aus den nach Riemann hergeleiteten mechanischen Unstetigkeitsbedingungen ergeben. Für die vollständige Kenntnis der Gesetze, nach denen sich ein Stoss durch das Innere der Flüssigkeit fortpflanzt, bedarf es noch der Bestimmung von S, für welche die vorangehenden Bedingungen nicht ausreichen.

Dieselbe kann sich nur aus dem Umstande ergeben, dass die hydrodynamischen Grundgleichungen ausserhalb der Unstetigkeitsfläche Σ und jederzeit zu beiden Seiten derselben bis an sie hinan gelten.

Um diese Gleichungen auf lineare reduciren zu dürfen, reicht es aus, dass auch noch die nach den Coordinaten xyz genommenen Derivirten von $uvws$ Grössen erster Ordnung sind. Dann erhält man, wie bekannt, für die von uns beabsichtigte erste Annäherung die linearen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(d)$$

Hier tritt nun der merkwürdige Umstand ein, dass die Ermittlung von $S=\overset{+}{s}-\overset{-}{s}$ nicht die Integration dieser Differentialgleichungen erfordert, sondern sich daraus ergibt, dass dieselben beiderseits bis an Σ hinan bestehen bleiben müssen.

Ist $U=\overset{+}{u}-\overset{-}{u}$ längs Σ nicht constant, so ist es unmöglich, dass die ersten Derivirten von u dort alle stetig sind; dasselbe gilt von v, w und s. Für unsere Zwecke ist es unerlässlich, für die Unstetigkeiten der Derivirten einer Function eine Bezeichnung einzuführen, welche es möglich macht, mit solchen Grössen zu rechnen. Ich schreibe, indem alle Variabeln auf die Fläche Σ bezogen werden,

$$\frac{\partial\overset{+}{u}}{\partial t}-\frac{\partial\overset{-}{u}}{\partial t}=\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right],\quad \frac{\partial\overset{+}{u}}{\partial x}-\frac{\partial\overset{-}{u}}{\partial x}=\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right],\quad \frac{\partial\overset{+}{u}}{\partial y}-\frac{\partial\overset{-}{u}}{\partial y}=\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right],\quad \frac{\partial\overset{+}{u}}{\partial z}-\frac{\partial\overset{-}{u}}{\partial z}=\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right],$$

ebenso für höhere Derivirten und jede andere Function.

Dann lauten die Bedingungen, denen die längs Σ nothwendig eintretenden Unstetigkeiten der ersten Derivirten von $uvws$ genügen müssen, damit durch sie das Fortbestehen der Differentialgleichungen (d) nicht aufgehoben werde, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]=0\\
&\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+a^2\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]=0\\
&\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]+a^2\left[\frac{\partial s}{\partial y}\right]=0\\
&\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]+a^2\left[\frac{\partial s}{\partial z}\right]=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(D)$$

und das vorhin erwähnte merkwürdige Resultat besteht nun darin, dass diese Bedingungen (D) die Bestimmung von S liefern, ohne dass hierzu die Integration des Systems (d) erforderlich ist.

7.

Aber dies setzt die Kenntnis einer Klasse von Unstetigkeitsbedingungen voraus, welche ich als die phoronomischen bezeichne, und die ich, durch rein geometrische Betrachtungen geleitet, zuerst für die transversal schwingende Saite, dann für Aufgaben der hier vorliegenden Art entdeckt habe.

Dieselben werden am befriedigendsten auf folgendem Wege hergeleitet, der ihre wahre Bedeutung vollständig erkennen lässt und mit den nöthigen Modificationen stets zum Ziele führt.

Sei p irgend eine Function von $txyz$, welche an Σ entlang unstetig ist, und sei dort

$$\overset{+}{p} - \overset{-}{p} = P. \tag{1}$$

Um diese Gleichung richtig zu verstehen, muss man bemerken, dass sie nicht bloss längs einer einzelnen Fläche Σ, sondern in dem ganzen Grössengebiete $(\Sigma\Sigma)$ gilt, welches von Σ im Laufe der Zeit t der Gleichung

$$t = f(\xi\eta\zeta) \tag{$\Sigma\Sigma$}$$

gemäss erzeugt wird.

Dieses Grössengebiet $(\Sigma\Sigma)$ kann aufgefasst werden als ein geometrischer Raum von drei Dimensionen $\xi\eta\zeta$, aber schichtenweise nach den Werthen von t geordnet; es ist der Inbegriff aller Werthsysteme $t\xi\eta\zeta$, welche der Gleichung der fortschreitenden Unstetigkeitsfläche genügen, und trennt in demjenigen Gebiete G von vier Dimensionen, dessen Punkte die vier unabhängigen Variabeln $txyz$ repräsentiren, die beiden Theile $\overset{+}{G}$ und $\overset{-}{G}$ von einander, in denen p durch $\overset{+}{p}$ und $\overset{-}{p}$ bezeichnet wurde. In dem von der Flüssigkeit erfüllten geometrischen Raume kommen die hier zu untersuchenden Vorgänge nicht auf einmal zur Anschauung, sondern nach den Werthen von t geordnet; im Gebiete G ist die Erscheinung ihrem ganzen Verlaufe nach abgeschlossen vorhanden.

Das Gebiet $(\Sigma\Sigma)$, innerhalb dessen die Gleichung (1) stattfindet, bildet also einen Schnitt durch G; an demselben entlang ist t Function von $\xi\eta\zeta$, aber letztere sind unabhängig variabel. Die Grösse P hat eine Bedeutung nur längs dieses Schnittes, und ist daher Function von $\xi\eta\zeta$; die Grössen $\overset{+}{p}$ und $\overset{-}{p}$ sind Functionen von $txyz$, und längs $(\Sigma\Sigma)$ ex- und implicite Functionen von $\xi\eta\zeta$, vermöge der Substitution

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad t = f(\xi\eta\zeta).$$

Spart man diese bis zuletzt auf, so ergibt sich aus (1), indem man z. B. nach ξ differentiirt,

$$\frac{\partial \overset{+}{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overset{-}{p}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \overset{+}{p}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{-}{p}}{\partial t}\right) \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \xi}.$$

Dies ist eine von den in Rede stehenden, phoronomischen Unstetigkeitsbedingungen; die übrigen ergeben sich auf dieselbe Weise, so dass wir mit Anwendung der im vorigen art. festgestellten Bezeichnung zum folgenden, sehr einfachen Princip gelangen.

Ist eine Function p von $txyz$ längs Σ unstetig und, indem P eine Function von $\xi\eta\zeta$ allein bedeutet, dort

$$\overset{+}{p} - \overset{-}{p} = P,$$

so bestehen zwischen den Unstetigkeiten der ersten Derivirten von p die Relationen

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \eta}$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial z}\right] + \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\partial P}{\partial \zeta}.$$

Nimmt man also z. B. $P = 0$, so erhält man ohne Weiteres die Bedingungen für die mit der Stetigkeit einer Function verträglichen Unstetigkeiten ihrer ersten Derivirten.

8.

Nun hatten wir [art. 2 (A)] gesetzt

$$\overset{+}{u} - \overset{-}{u} = U, \quad \overset{+}{v} - \overset{-}{v} = V, \quad \overset{+}{w} - \overset{-}{w} = W, \quad \overset{+}{s} - \overset{-}{s} = S.$$

Betrachten wir $UVWS$ als Functionen von $\xi\eta\zeta$, so erhalten wir die folgenden zwölf phoronomischen Unstetigkeitsbedingungen:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right] = \frac{\partial P}{\partial \xi} - \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi}, \quad \left[\frac{\partial p}{\partial y}\right] = \frac{\partial P}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta}, \quad \left[\frac{\partial p}{\partial z}\right] = \frac{\partial P}{\partial \zeta} - \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta} \tag{1}$$

für $p, P = u, U; v, V; w, W; s, S$; zu ihnen kommen die vier Bedingungen (D)

$$\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0 \tag{2}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] + a^2\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right] + a^2\left[\frac{\partial s}{\partial y}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial t}\right] + a^2\left[\frac{\partial s}{\partial z}\right] = 0. \tag{3}$$

Benutzt man hier die Gleichungen (1) für $p = s$, $P = S$, so gehen die drei letzten Gleichungen über in

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi} - a^2\frac{\partial S}{\partial \xi}$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right] = a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta} - a^2\frac{\partial S}{\partial \eta}$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right] = a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta} - a^2\frac{\partial S}{\partial \zeta}.$$

Die Gleichungen (1) und (3) liefern also die Unstetigkeiten aller ersten Derivirten von $uvws$ ausgedrückt durch $\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]$. Insbesondere wird

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial U}{\partial \xi} + a^2 \frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \xi} - a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right] = \frac{\partial V}{\partial \eta} + a^2 \frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \eta} - a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial z}\right] = \frac{\partial W}{\partial \zeta} + a^2 \frac{\partial S}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \zeta} - a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2.$$

Führt man dies in die allein noch zu berücksichtigende Gleichung (2) ein, so folgt

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} + a^2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial S}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)$$
$$+\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\left\{1 - a^2\left[\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2\right]\right\} = 0.$$

Aber hier verschwindet der Factor von $\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]$ vermöge der mechanischen Bedingungen unserer Aufgabe, also ergibt sich nichts über den Werth der unbekannten Grösse $\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]$, welche durch die gegenwärtigen Bedingungen nicht bestimmt wird, sondern statt dessen die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} + a^2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial S}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) = 0$$

als einzige, für das Fortbestehen der partiellen Differentialgleichungen (d) erforderliche Beschränkung der Unstetigkeiten von uvw und s.

9.

In diese Gleichung führen wir nun die Werthe [art. 5 (C)]

$$U = a^2 S\frac{\partial t}{\partial \xi}, \quad V = a^2 S\frac{\partial t}{\partial \eta}, \quad W = a^2 S\frac{\partial t}{\partial \zeta}$$

ein, dann ergibt sich, mit Weglassung des Factors a^2, für S die Differentialgleichung

$$2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial S}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) + S\left(\frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \zeta^2}\right) = 0.$$

Für die Integration dieser Gleichung ist es am zweckmässigsten, wieder die Werthe

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega}$$

einzuführen. Beachtet man, dass ω constant und

$$\frac{\partial S}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial S}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial S}{\partial \zeta}\cos\gamma = \frac{\partial S}{\partial N}$$

ist, so ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$2\frac{\partial S}{\partial N} + S\left(\frac{\partial \cos\alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \cos\beta}{\partial \eta} + \frac{\partial \cos\gamma}{\partial \zeta}\right) = 0,$$

zu deren Integration nur erforderlich ist, den Factor von S in seiner Abhängigkeit von N darzustellen. Sei zur Abkürzung

$$\frac{\partial \cos\alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \cos\beta}{\partial \eta} + \frac{\partial \cos\gamma}{\partial \zeta} = P.$$

Sodann sei $\mathfrak{B}$ ein beliebiges Volumen innerhalb des Normalensystems $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$ seine Oberfläche, $\lambda\mu\nu$ seien die Winkel, welche die über dem Elemente $\partial\mathfrak{S}$ dieser Fläche nach Aussen errichtete Normale n mit den positiven Axen bildet. Dann ist nach bekannten Sätzen:

$$\int P\partial\mathfrak{B} = \int \cos\theta \cdot \partial\mathfrak{S},$$

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

also θ der Winkel zwischen n und der Richtung der wachsenden N in einem durch $\partial\mathfrak{S}$ gehenden Strahle des Normalensystems $\mathfrak{N}$.

Sei $\Delta\mathfrak{N}$ ein Theil dieses Normalensystems und $\mathfrak{B}$ das Volumen, durch welches $\Delta\mathfrak{N}$ von Σ_0 bis Σ dringt. Sind $\Delta\Sigma_0$, $\Delta\Sigma$ die Schnitte von $\Delta\mathfrak{N}$ mit diesen beiden Flächen, so besteht $\mathfrak{S}$ aus $\Delta\Sigma$, $\Delta\Sigma_0$ und der zwischen ihnen liegenden geradlinigten Oberfläche M des Normalenbündels $\Delta\mathfrak{N}$. Der Theil des $\int\cos\theta\,\partial\mathfrak{S}$, welcher von M herrührt, ist $= 0$, da in jedem Elemente dieser Fläche $\theta = 90^0$ ist. In jedem Elemente von $\Delta\Sigma$ fällt n mit der Richtung der wachsenden N zusammen, also ist dort $\theta = 0$ und der von $\Delta\Sigma$ herrührende Theil des Integrals $= \Delta\Sigma$ selbst. In $\Delta\Sigma_0$ fällt überall n mit der Richtung der abnehmenden N zusammen; dort ist also $\theta = 180^0$, mithin der entsprechende Theil des Integrals $= -\Delta\Sigma_0$.

Ueber dieses Volumen erstreckt, ist also das

$$\int P\partial\mathfrak{B} = \Delta\Sigma - \Delta\Sigma_0.$$

Lassen wir nun N variiren, aber das Normalenbündel $\Delta\mathfrak{N}$ ungeändert, so ist $\Delta\Sigma$ in seiner Abhängigkeit von N vollkommen bestimmt, und es folgt, indem man nach N differentiirt:

$$\int P\partial\Delta\Sigma = \frac{\partial\Delta\Sigma}{\partial N}.$$

Nun gibt es innerhalb $\Delta\Sigma$ einen Mittelwerth (P) von P, so dass dieses Integral $= (P)\Delta\Sigma$ wird; dann folgt

$$(P) = \frac{\partial \log \Delta\Sigma}{\partial N}.$$

Dieser Mittelwerth wird vollkommen bestimmt, wenn wir $\Delta\Sigma$ in ein Element der Fläche Σ übergehen lassen, und dann wird

$$P = \frac{\partial \log \Delta\Sigma}{\partial N}.$$

Ist also $\xi\eta\zeta$ derjenige Punkt, in welchem ein bestimmter Strahl des Normalensystems $\mathfrak{N}$ die Fläche Σ trifft, und $\Delta\mathfrak{N}$ ein unendlich dünnes, jenen Strahl enthaltendes und unveränderlich festgelegtes Normalenbündel, $\Delta\Sigma$ sein Querschnitt mit Σ, so ist für jenen Punkt

$$\frac{\partial \cos\alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \cos\beta}{\partial \eta} + \frac{\partial \cos\gamma}{\partial \zeta} = \frac{\partial \log \Delta\Sigma}{\partial N}.$$

Man kann hier an Stelle des unendlich kleinen Querschnitts $\Delta\Sigma$ endliche Grössen, die Hauptkrümmungshalbmesser von Σ einführen; aber dies nimmt den nächstfolgenden Untersuchungen ihre Anschaulichkeit, während es sich später (art. 14) als geradezu zweckwidrig heraus stellt.

Die Differentialgleichung für S lautet jetzt:

$$2\frac{\partial S}{\partial N} + S\frac{\partial \log \Delta\Sigma}{\partial N} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \log S\sqrt{\Delta\Sigma}}{\partial N} = 0.$$

Also fordert sie, dass $S\sqrt{\Delta\Sigma}$ längs $\Delta\mathfrak{N}$ constant bleiben soll, ohne irgend eine Vorschrift darüber zu enthalten, wie S sich von einem unendlich dünnen Normalenbündel zu einem unendlich benachbarten ändern soll.

Ist demnach $\Delta\Sigma_0$ der Querschnitt von $\Delta\mathfrak{N}$ auf Σ_0, S_0 der Werth von S in $\Delta\Sigma_0$, so folgt

$$S\sqrt{\Delta\Sigma} = S_0\sqrt{\Delta\Sigma_0},$$

während S_0 an Σ_0 entlang willkürlich angenommen werden kann.

Damit sind nun auch

$$U = \omega S\cos\alpha, \quad V = \omega S\cos\beta, \quad W = \omega S\cos\gamma$$

bestimmt, und es zeigt sich, was bei der Berücksichtigung von Anfangsbedingungen (art. 15) massgebend ist, dass nur über die Anfangslage Σ_0 der Unstetigkeitsfläche, das Vorzeichen von $\omega = \pm a$, nämlich

die Fortpflanzungsrichtung und den Anfangswerth S_0 von S nach Belieben verfügt werden kann.

Ausserdem können wir das folgende Resultat aussprechen:

Es sei $\Delta\mathfrak{N}$ ein unendlich dünnes Normalenbündel der Unstetigkeitsfläche, $\Delta\Sigma$ sein Querschnitt mit Σ. Solange $\Delta\Sigma$, während es dieses Normalenbündel durchläuft, auf keinen Begrenzungstheil der Flüssigkeit trifft, bleibt der Stoss, den ein Flüssigkeitstheilchen in dem Augenblicke erleidet, wo es von $\Delta\Sigma$ überschritten wird, zur Quadratwurzel aus $\Delta\Sigma$ umgekehrt proportional.

III.

Reflection des Stosses an starren Wänden von beliebiger Gestalt.

10.

Bis auf die Berücksichtigung von Anfangsbedingungen, für welche die Hülfsmittel im Vorangehenden enthalten sind, ist hiermit die Untersuchung für eine unbegrenzte Flüssigkeit abgeschlossen. Um zu zeigen, wie Grenzbedingungen bei Untersuchungen dieser Art zu behandeln sind, setze ich nun voraus, dass die Flüssigkeit in beliebiger Weise an starre, d. h. unbewegliche und undurchdringliche Wände grenzt, und bemerke nur noch, dass den hier zu entwickelnden Hülfsmitteln auch solche Fälle zugänglich sind, wo die Flüssigkeit mit elastischen festen Körpern in Berührung stehen würde.

Sei $\mathfrak{S}$ eine starre Wand, an welche die Flüssigkeit grenzt, $\lambda\mu\nu$ seien die Winkel, welche die über $\mathfrak{S}$ von der Flüssigkeit abwärts errichtete Normale n mit den positiven Axen der xyz bildet.

Die Grenzbedingung, damit die Flüssigkeitstheilchen, welche an $\mathfrak{S}$ grenzen, weder durch diese Fläche dringen noch sich von ihr abheben können, lautet

$$u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu = 0.$$

Erleidet also ein solches Flüssigkeitstheilchen eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung, deren vollständige Componenten UVW sind, so folgt für diese die Grenzbedingung

$$U\cos\lambda + V\cos\mu + W\cos\nu = 0.$$

Zerlegt man daher den Stoss, den ein solches Theilchen erleidet, in eine zu $\mathfrak{S}$ normale und eine tangentiale Componente, so muss erstere $= 0$ sein.

Sei $\Delta\mathfrak{S}$ das Flächenelement, in welchem das Normalenbündel $\Delta\mathfrak{N}$ die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ trifft. Wenn $\Delta\Sigma$ bei $\Delta\mathfrak{S}$ eintrifft, so erleiden die an $\Delta\mathfrak{S}$ grenzenden Theilchen einen zu $\Delta\Sigma$ senkrechten Stoss, dessen zu $\Delta\mathfrak{S}$ senkrechte Componente nur dann $= 0$ ist, wenn $\Delta\mathfrak{S}$ von $\Delta\Sigma$ senkrecht geschnitten wird.

In allen übrigen Fällen kann die obige Grenzbedingung nur befriedigt werden, wenn durch den einfallenden Stoss mindestens ein neuer, reflectirter Stoss hervorgerufen wird, und diese sämmtlichen Stösse gleichzeitig erfolgen, damit ihre zu $\Delta\mathfrak{S}$ senkrechten Componenten einander aufheben können.

Bevor wir aus der obigen Grenzbedingung weitergehende Folgerungen ziehen können, müssen wir die Anzahl und Richtung der reflectirten Stösse ermitteln.

Unsere nächste Aufgabe besteht also darin, zu untersuchen, wie viel Unstetigkeitsflächen aus einer einfallenden durch Reflection erzeugt werden und nach welchen Gesetzen dies geschieht. Diese Aufgabe ist identisch mit der Integration der für die Unstetigkeitsflächen gefundenen Differentialgleichung

$$a^2\left[\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2\right] = 1 \qquad (t)$$

für einen Raum mit festen Begrenzungen, also unter Hinzufügung der nunmehr zu entwickelnden Grenzbedingung.

Sei Σ die einfallende, Σ' eine reflectirte Unstetigkeitsfläche. Da ein an $\mathfrak{S}$ grenzender materieller Punkt die Stösse, welche diesen Unstetigkeitsflächen entsprechen, gleichzeitig erleiden muss, so folgt, dass Σ und Σ' die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ in derselben Kurve schneiden müssen. Sei l diese Kurve,

$$t = f(\xi\eta\zeta) \qquad (\Sigma)$$

die Gleichung der einfallenden,

$$t' = f'(\xi\eta\zeta) \qquad (\Sigma')$$

die Gleichung einer reflectirten Unstetigkeitsfläche.

Nimmt man für $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten eines Punktes von l, so müssen diese Gleichungen für t und t' denselben Werth liefern; längs l erhalten wir also $t = t'$. Aber dies gilt nicht bloss für eine einzelne Kurve l, sondern für das ganze Stück der Grenzfläche $\mathfrak{S}$, welches von l im Verlaufe der Zeit überstrichen wird, d. h. durch welches Strahlen des Normalensystems $\mathfrak{N}$ dringen.

Die Grenzbedingung für die Reflection einer Unstetigkeitsfläche lautet also

$$t - t' = 0 \qquad (\mathfrak{S})$$

oder $f(\xi\eta\zeta) - f'(\xi\eta\zeta) = 0$, in dem Sinne, dass dies entweder die Glei-

chung der vollständigen Grenzfläche $\mathfrak{S}$, oder doch wenigstens des von l überstrichenen Stückes derselben sein muss. Die Functionen t und t' müssen ausserdem der Gleichung (t) genügen.

Um die Folgerungen aus dieser Grenzbedingung zu ziehen, brauchen wir die vollständigen Differentiale von t und t'; ersteres ist

$$\partial t = \frac{1}{\omega}(\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta),$$

und ω ist $= +a$ oder $= -a$, jenachdem Σ in der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ der wachsenden N oder in der umgekehrten Richtung fortschreitet.

Um für t' die analoge Formel ohne Zweideutigkeit aufstellen zu können, müssen wir auch bei Σ' eine positive und eine negative Seite unterscheiden. Die Winkel, welche die auf der positiven Seite errichtete Normale mit den positiven Axen der xyz bildet, heissen $\alpha'\beta'\gamma'$; in dieser Normale werden Abscissen N' gezählt, die von der negativen Seite der Fläche nach der positiven hin wachsen.

Welche Seite von Σ' man als die positive betrachten will, steht frei; ich wähle sie so, dass Σ' und Σ ihre Normalensysteme im nämlichen Sinne durchlaufen, so dass N' mit N zugleich zu- oder abnimmt. Dann wird

$$\partial t' = \frac{1}{\omega}(\cos\alpha'\,\partial\xi + \cos\beta'\,\partial\eta + \cos\gamma'\,\partial\zeta)$$

und zwar hat ω hier dieselbe Bedeutung wie in ∂t.

Soll nun der Punkt $\xi\eta\zeta$ eine unendlich kleine Verschiebung längs der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ ausführen, so müssen die Zunahmen seiner Coordinaten der Gleichung

$$\cos\lambda\,\partial\xi + \cos\mu\,\partial\eta + \cos\nu\,\partial\zeta = 0$$

genügen; die Grenzbedingung $t - t' = 0$ gibt vermöge der vorstehenden Formeln

$$(\cos\alpha - \cos\alpha')\partial\xi + (\cos\beta - \cos\beta')\partial\eta + (\cos\gamma - \cos\gamma')\partial\zeta = 0.$$

Da beide Gleichungen dieselbe Beziehung zwischen $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ ausdrücken, so gibt es einen Factor $2k$, so dass

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = 2k\cos\lambda, \quad \cos\beta - \cos\beta' = 2k\cos\mu, \quad \cos\gamma - \cos\gamma' = 2k\cos\nu$$

wird.

Wenn nun N_1 die auf der negativen Seite von Σ' errichtete Normale bedeutet, und mit den Axen die Winkel $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ bildet, so sind dies die Nebenwinkel von $\alpha'\beta'\gamma'$, und dann folgt

$$k\cos\lambda = \frac{\cos\alpha + \cos\alpha_1}{2}, \quad k\cos\mu = \frac{\cos\beta + \cos\beta_1}{2}, \quad k\cos\nu = \frac{\cos\gamma + \cos\gamma_1}{2},$$

also liegen N, N_1 und die Normale n der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ in derselben Ebene, und n halbirt den Winkel zwischen N und N_1. Dies ist das gewöhnliche Reflectionsgesetz für Strahlen.

Bezeichnen wir daher durch

$$\theta$$

den Einfallswinkel, d. i. den Winkel zwischen N und n, so geben die letzten Formeln durch Multiplication mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$

$$k = \cos\theta.$$

Also ist

$$\cos\alpha' = \cos\alpha - 2\cos\theta\cos\lambda$$

$$\cos\beta' = \cos\beta - 2\cos\theta\cos\mu$$

$$\cos\gamma' = \cos\gamma - 2\cos\theta\cos\nu.$$

Durch die Normale N der einfallenden Unstetigkeitsfläche Σ und die Normale n der reflectirenden Fläche $\mathfrak{S}$ ist also die Normale N' der reflectirten Unstetigkeitsfläche vollkommen bestimmt und es wird daher nur eine einzige Unstetigkeitsfläche Σ' durch Reflection erzeugt.

11.

Aber dies beruht auf einer Voraussetzung, welche noch zu verificiren ist, nämlich auf dem Satze von Malus:

> Wird ein Normalensystem $\mathfrak{N}$ an einer Fläche $\mathfrak{S}$ nach dem gewöhnlichen Gesetze reflectirt, so bilden die reflectirten Strahlen stets ein neues Normalensystem $\mathfrak{N}'$.

D. h. ist das einfallende Strahlensystem $\mathfrak{N}$ so beschaffen, dass es eine Fläche Σ gibt, welche alle Strahlen des Systems senkrecht schneidet, so hat das reflectirte Strahlensystem $\mathfrak{N}'$ dieselbe Eigenschaft.

Zur Verification dieses schönen Lehrsatzes stellen wir die Formeln zusammen, welche die Gleichung der Fläche Σ' ersetzen. Sei Σ_0 eine Fläche des einfallenden Systems, $\mu_0(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ ein beliebiger Punkt derselben, zu welchem die Winkel $\alpha\beta\gamma$ der Normale gehören. Diese treffe $\mathfrak{S}$ im Punkte $p(xyz)$ und im Abstande N von μ_0, so dass

$$x = \xi_0 + N\cos\alpha, \quad y = \eta_0 + N\cos\beta, \quad z = \zeta_0 + N\cos\gamma$$

wird.

Die Normale n von $\mathfrak{S}$ im Punkte p bilde mit den Axen die Winkel $\lambda\mu\nu$. Dann gelten für die Richtungswinkel $\alpha'\beta'\gamma'$ des aus N durch Reflection entstehenden Strahles die Formeln des vorigen art.

Trägt man auf diesem Strahle in der Reflectionsrichtung die Strecke $p\mu' = N'$ auf, so hat der Endpunkt μ' die Coordinaten

$$\xi = x + N'\cos\alpha', \quad \eta = y + N'\cos\beta', \quad \zeta = z + N'\cos\gamma'.$$

Fügt man zu diesen Formeln die Bedingung, dass für alle Lagen des Punktes μ_0

$$N + N' = \omega t$$

sein soll, so ersetzen diese Formeln mit Hinzuziehung der Gleichungen von Σ_0 und $\mathfrak{S}$ offenbar die Gleichung der reflectirten Fläche Σ', nur ist zu verificiren, dass diese alle reflectirten Strahlen senkrecht schneidet.

Benutzen wir zur Abkürzung Bezeichnungen wie die folgende

$$\cos\alpha'\partial\xi + \cos\beta'\partial\eta + \cos\gamma'\partial\zeta = \Sigma\cos\alpha'\partial\xi,$$

so ist

$$\Sigma\cos\alpha\partial\xi_0 = 0 \tag{1}$$

weil N auf Σ_0,

$$\Sigma\cos\lambda\partial x = 0 \tag{2}$$

weil n auf $\mathfrak{S}$ senkrecht ist, und es ist zu beweisen, dass aus $\partial t = 0$ die Relation $\Sigma\cos\alpha'\partial\xi = 0$ folgt.

Nun erhalten wir

$$\Sigma\cos\alpha'\partial\xi = \Sigma\cos\alpha'\partial x + \partial N',$$

ferner wegen (2)

$$\Sigma\cos\alpha'\partial x = \Sigma\cos\alpha\partial x,$$

und wegen (1)

$$\Sigma\cos\alpha\partial x = \partial N,$$

also schliesslich

$$\Sigma\cos\alpha'\partial\xi = \partial N + \partial N' = \omega\partial t,$$

woraus der zu bestätigende Satz folgt.

Für unsere Untersuchung haben wir also den Satz:

> Trifft die Unstetigkeitsfläche Σ auf eine unbewegliche und für die Flüssigkeit undurchdringliche Wand $\mathfrak{S}$, so entsteht durch Reflection eine und auch nur eine einzige Unstetigkeitsfläche Σ', welche $\mathfrak{S}$ in derselben Kurve schneidet wie Σ. Sie ist bestimmt durch die Eigenschaft, dass ihr Normalensystem $\mathfrak{N}'$ aus dem Normalensystem $\mathfrak{N}$ von Σ durch Reflection an $\mathfrak{S}$ hervorgeht: die Reflection erfolgt nach dem gewöhnlichen Gesetze.

Man kann dieses Resultat auch in der folgenden Form aussprechen.

Soll die partielle Differentialgleichung

$$a^2\left[\left(\frac{\partial t}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right)^2\right] = 1 \tag{t}$$

für das Innere eines Raumes $(\xi\eta\zeta)$ integrirt werden, an und in welchem Grenzflächen $\mathfrak{S}$ vorhanden sind, und zwar in der Weise, dass (1) die Integration bis an eine solche Fläche hinan, aber nie über dieselbe hinaus fortschreitet, und (2) die Werthe von t an einer solchen Fläche stetig in einander übergehen, ohne abzubrechen, so entspricht der allgemeinen Lösung eine durch diesen Raum fortschreitende Fläche Σ, welche in folgender Weise entsteht. Man nehme innerhalb jenes Raumes eine Fläche Σ_0 nach Belieben an, bilde ihr Normalensystem bis an die Flächen $\mathfrak{S}$, setze dasselbe dort durch Reflection nach dem gewöhnlichen Gesetze fort, und wiederhole dies, so oft Strahlen eines solchen Normalensystems auf eine Fläche $\mathfrak{S}$ treffen. Dann entsteht ein durch die Fläche Σ_0 und die Grenzflächen $\mathfrak{S}$ bestimmtes, gebrochnes Normalensystem $\mathfrak{N}$, und die Fläche Σ entsteht, indem man die orthogonale Trajectorie des Sytems $\mathfrak{N}$ dasselbe mit der Geschwindigkeit a bis zur Zeit t durchlaufen lässt.

12.

Es wirft sich nun die Frage auf, ob specielle Eigenschaften des einfallenden Normalensystems $\mathfrak{N}$ sich bei jeder Annahme über die reflectirende Fläche $\mathfrak{S}$ auf das reflectirte Normalensystem $\mathfrak{N}'$ übertragen, z. B. die Frage, ob durch Reflection eines gewöhnlichen Strahlenbüschels nur eine bestimmte Klasse von Normalensystemen erzeugt werden könne. Wenn solche Beziehungen zwischen dem einfallenden und dem reflectirten Normalensystem stattfänden, was nicht der Fall ist, so würden sie zu den Reflectionsgesetzen gehören.

Sei unter der Voraussetzung, dass Σ das Normalensystem $\mathfrak{N}$ in einer bestimmten Richtung durchlaufe und Σ_0 die der Zeit $t = 0$ entsprechende Anfangslage von Σ ist, $at = \varphi(\xi\eta\zeta)$ die Gleichung von Σ, also die Function φ Lösung der Gleichung

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2 = 1.$$

Dann gehört das nämliche Normalensystem $\mathfrak{N}$ auch zur Unstetigkeitsfläche

$$\omega(t - t_0) = \varphi(\xi\eta\zeta); \tag{Σ}$$

nur entspricht die specielle Lage Σ_0 jetzt dem Zeitpunkte $t = t_0$, und Σ durchläuft $\mathfrak{N}$ in der frühern oder der umgekehrten Richtung, jenachdem $\omega = +a$ oder $= -a$ genommen wird.

Sei ebenso ein zweites Normalensystem $\mathfrak{N}'$ gegeben durch seine Trajectorie Σ' und, bei bestimmter Fortschrittsrichtung, die Gleichung

der letztern $at' = \varphi'(\xi\eta\zeta)$, mithin auch φ' Lösung der obigen Differentialgleichung; Σ_0' sei die Anfangslage von Σ'.

Dann gehört das Normalensystem $\mathfrak{N}'$ auch zur Unstetigkeitsfläche

$$\omega'(t' - t_0') = \varphi'(\xi\eta\zeta); \tag{Σ'}$$

nur ist Σ_0' die Lage derselben zur Zeit $t' = t_0'$, und Σ' schreitet fort in der ursprünglichen oder der umgekehrten Richtung, jenachdem man $\omega' = a$ oder $= -a$ nimmt.

Soll nun $\mathfrak{N}'$ aus $\mathfrak{N}$ durch Reflection an einer Fläche $\mathfrak{S}$ hervorgehen, so müssen t und t' als Functionen von $\xi\eta\zeta$ längs dieser Fläche der Grenzbedingung $t' = t$ genügen, d. h. dies ist die Gleichung einer solchen Fläche $\mathfrak{S}$.

Wenn also das Normalensystem $\mathfrak{N}$ an der Fläche

$$t_0' + \frac{\varphi}{\omega'} = t_0 + \frac{\varphi}{\omega} \tag{$\mathfrak{S}$}$$

nach dem gewöhnlichen Gesetze reflectirt wird, so entsteht das Normalensystem $\mathfrak{N}'$. Schreibt man diese Gleichung in der Form $\varphi' - \frac{\omega'}{\omega}\varphi = \omega'(t_0 - t_0')$, so erkennt man, dass es zwei Schaaren von Flächen $\mathfrak{S}$ gibt, welche $\mathfrak{N}'$ durch Reflection von $\mathfrak{N}$ erzeugen. In der ersten ist $\omega' = \omega$, in der andern $\omega' = -\omega$; die Gleichungen der beiden Flächenschaaren lauten

$$\varphi' - \varphi = \tau_1 \tag{$\mathfrak{S}_1$}$$

$$\varphi' + \varphi = \tau_2, \tag{$\mathfrak{S}_2$}$$

wo τ_1, τ_2 Parameter sind. Wo eine Fläche $\mathfrak{S}_1$ von einer Fläche $\mathfrak{S}_2$ geschnitten wird, reflectiren sie die dort einfallende Unstetigkeitsfläche, also den dort einfallenden Strahl nach entgegengesetzten Richtungen; also wird $\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{S}_2$ senkrecht geschnitten, wie man mittelst der Gleichungen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ auch direct verificirt. Wir haben also den folgenden Satz:

> Jedes Normalensystem kann aus jedem andern, soweit sie einander durchdringen, dadurch erzeugt werden, dass man das eine an einer geeigneten Fläche $\mathfrak{S}$ nach dem gewöhnlichen Gesetze reflectiren lässt[1]).
>
> Es gibt zwei Schaaren $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ reflectirender Flächen, welche dies leisten. Zwei Flächen derselben Schaar reflectiren die Trajectorie des einfallenden Normalensystems nach derselben Rich-

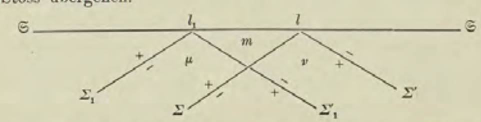
1) Diesen Theil des Satzes hat Herr Kummer mir schon im Jahre 1861 mitgetheilt; auf welchem Wege Herr Kummer zu demselben gelangt war, habe ich nicht in Erfahrung gebracht.

tung, aber zu verschiedenen Zeiten; für die Flächen der zweiten Schaar ist die Reflectionsrichtung die umgekehrte wie für die Flächen der ersten Schaar. Eine Fläche der ersten Schaar wird von einer Fläche der andern Schaar nie anders als orthogonal geschnitten.

Wendet man die Grenzbedingung $t' = t$ auf den Fall an, wo die Unstetigkeitsflächen Σ, Σ' in zwei durch $\mathfrak{S}$ getrennten Räumen mit ungleichen Geschwindigkeiten a, a' fortschreiten, so ergibt sich zunächst der Satz von Malus, dass auch durch Brechung nach dem gewöhnlichen Gesetze aus einem Normalensystem $\mathfrak{N}$ stets ein Normalensystem $\mathfrak{N}'$ hervorgeht; sodann erhält man den Satz, dass zwei beliebig gewählte Normalensysteme $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, soweit sie einander durchdringen, auf unendlich viele Arten durch Brechung nach dem gewöhnlichen Gesetze auseinander hervorgehen. Mit Benutzung der oben angewandten Bezeichnungen lautet die Gleichung der brechenden Fläche $\varphi' - \lambda\varphi = \mu$ wo μ und $\lambda = \pm\frac{a'}{a}$ willkürliche Parameter sind. In der Dioptrik würde also der Zahlenwerth von λ durch die Farbe des Lichtes bestimmt sein, welches nach den Normalensystemen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ fortschreiten soll, sein Zeichen durch die Richtung, nach welcher es in das System $\mathfrak{N}'$ gebrochen werden soll.

13.

Hiermit sind die geometrischen Gesetze für die Reflection der Unstetigkeitsfläche Σ an der starren Wand $\mathfrak{S}$ vollständig ermittelt, und wir können nun zu den mechanischen Gesetzen für den dort erfolgenden Stoss übergehen.



Gehen die einfallende und die reflectirte Unstetigkeitsfläche während der Zeit ∂t aus der Lage Σ, Σ' über in die Lage Σ_1, Σ_1', so erleiden folgende in unendlicher Nähe von $\mathfrak{S}$ befindliche Flüssigkeitstheilchen plötzliche Aenderungen ihrer Geschwindigkeit.

1) Solche Theilchen μ, welche von Σ, aber nicht von Σ' überschritten werden. Dieselben erleiden einen Stoss, für den die früher entwickelten Gesetze gelten.

2) Dasselbe gilt von denjenigen Theilchen ν, welche von Σ', aber nicht von Σ überschritten werden.

3) Ganz anders verhält es sich mit den die Fläche $\mathfrak{S}$ berührenden Theilchen m, über welche Σ und Σ' hinweggegangen sind. Ein solches Theilchen hat zwei Stösse nacheinander erfahren, den ersten als es von Σ, den zweiten als es von Σ' überschritten wurde.

Sei längs Σ':

$$\overset{+}{u} - \overset{-}{u} = U', \quad \overset{+}{v} - \overset{-}{v} = V', \quad \overset{+}{w} - \overset{-}{w} = W', \quad \overset{+}{s} - \overset{-}{s} = S'.$$

Befand m sich ursprünglich auf der positiven Seite von Σ, so befindet es sich nach Ablauf der Zeit ∂t auf der negativen Seite von Σ'; in Folge des ersten Stosses hat es also parallel zur x-axe die Geschwindigkeitsvermehrung $\overset{-}{u} - \overset{+}{u} = -U$, in Folge des zweiten Stosses die Geschwindigkeitsvermehrung $-U'$ erlangt. Beide Stösse zusammengenommen geben für die plötzlichen Zunahmen seiner Geschwindigkeitscomponenten die Werthe $-(U+U')$, $-(V+V')$, $-(W+W')$; und da der hieraus resultirende Stoss senkrecht zur Grenzfläche $= 0$ sein muss, so folgt:

$$(U + U')\cos\lambda + (V + V')\cos\mu + (W + W')\cos\nu = 0.$$

Befand m sich vor dem Stosse auf der negativen Seite von Σ, so sind alle Geschwindigkeitsvermehrungen mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen, was an der vorstehenden Formel nichts ändert.

Nun haben wir

$$U = \omega S\cos\alpha, \quad V = \omega S\cos\beta, \quad W = \omega S\cos\gamma$$
$$U' = \omega S'\cos\alpha', \quad V' = \omega S'\cos\beta', \quad W' = \omega S'\cos\gamma'$$

und $\Sigma\cos\alpha\cos\lambda = \cos\theta$, $\Sigma\cos\alpha'\cos\lambda = -\cos\theta$. Führt man diese Werthe ein, so folgt $\omega(S - S')\cos\theta = 0$, also ist an der Grenzfläche $\mathfrak{S}$:

$$S' = S.$$

Der Condensationsstoss S überträgt sich demnach ohne Unstetigkeit vom einfallenden auf das reflectirte Normalensystem, und dadurch ist die Fortpflanzung des Stosses in letzterm völlig bestimmt.

14.

Um dieses Resultat vollständig auszuführen, sei wieder $\Delta\mathfrak{N}$ das einfallende, $\Delta\mathfrak{N}'$ das aus ihm durch Reflection hervorgehende unendlich dünne Normalenbündel. Ihre Querschnitte sollen im Allgemeinen $\Delta\Sigma$, $\Delta\Sigma'$, an der Grenzfläche $\Delta\Sigma_1$, $\Delta\Sigma_1'$ heissen. Sind S_1, S_1' die Werthe von S, S' in $\Delta\Sigma_1$, $\Delta\Sigma_1'$, so haben wir

$$S_1' = S_1; \qquad (1)$$

und weil nach dem Reflectionsgesetze $\Delta\Sigma_1$, $\Delta\Sigma_1'$ mit $\Delta\mathfrak{S}$, dessen senkrechte Projectionen sie sind, denselben Winkel θ bilden,

$$\Delta\Sigma_1' = \Delta\Sigma_1, \tag{2}$$

also $S_1'\sqrt{\Delta\Sigma_1'} = S_1\sqrt{\Delta\Sigma_1}$.

Nun ist längs $\Delta\mathfrak{N}$

$$S = S_0\sqrt{\frac{\Delta\Sigma_0}{\Delta\Sigma}},$$

also $S_1\sqrt{\Delta\Sigma_1} = S_0\sqrt{\Delta\Sigma_0}$; ferner ist längs $\Delta\mathfrak{N}'$: $S'\sqrt{\Delta\Sigma'} = S_1'\sqrt{\Delta\Sigma_1'}$, also $= S_1\sqrt{\Delta\Sigma_1} = S_0\sqrt{\Delta\Sigma_0}$, mithin

$$S' = S_0\sqrt{\frac{\Delta\Sigma_0}{\Delta\Sigma'}},$$

Dies ist dieselbe Formel wie für S, und so haben wir, wenn wir alles zusammen fassen, den Satz:

Sei $\mathfrak{N}$ das gebrochne Normalensystem, welches aus dem Normalensystem der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche Σ_0 durch wiederholte Reflectionen an den starren Wänden $\mathfrak{S}$ hervorgeht. Die Unstetigkeitsfläche Σ durchläuft dieses Normalensystem $\mathfrak{N}$ als orthogonale Trajectorie desselben mit der constanten Geschwindigkeit a, indem ihre Theile an den Grenzflächen zugleich mit $\mathfrak{N}$ reflectirt werden. Wenn ein Element $\Delta\Sigma$ dieser Fläche ein Flüssigkeitstheilchen überschreitet, so erleidet dasselbe einen Condensationsstoss S und einen vom grössern zum kleinern Drucke wirkenden, zu $\Delta\Sigma$ senkrechten Geschwindigkeitsstoss aS. Beide Stösse bleiben längs des nämlichen unendlich dünnen (gebrochenen) Normalenbündels zur Quadratwurzel aus seinem Querschnitte $\Delta\Sigma$ umgekehrt proportional, indem der Proportionalitätsfactor auch bei der Reflection nicht geändert wird.

Das Wesen dieses Satzes beruht darauf, dass für S' dieselbe Formel gilt wie für S, dass also beide demselben Gesetze folgen. Dies würde nicht mehr zu erkennen sein, wenn man in art. 9 und von da ab statt des allerdings unendlich kleinen Querschnittes $\Delta\Sigma$ eines unveränderlichen Normalenbündels die Hauptkrümmungshalbmesser von $\Delta\Sigma$ eingeführt hätte.

15.

Es bedarf zum Abschlusse unserer Untersuchung nur noch des Nachweises, welche Unstetigkeiten sich aus einem willkürlich gewählten Anfangszustande entwickeln, da der weitere Verlauf derselben ermittelt ist.

Seien für $t = 0$ längs Σ_0 die Werthe von $\overset{+}{u} - \overset{-}{u}$, $\overset{+}{v} - \overset{-}{v}$, $\overset{+}{w} - \overset{-}{w}$, $\overset{+}{s} - \overset{-}{s}$ willkürlich gegeben und gleich

$$U_0\, V_0\, W_0\, S_0.$$

Ich zerlege diese Werthe in folgender Weise

$$\begin{aligned} U_0 &= U_1 + U_2 + U_3 \\ V_0 &= V_1 + V_2 + V_3 \\ W_0 &= W_1 + W_2 + W_3 \\ S_0 &= S_1 + S_2 + S_3, \end{aligned}$$

und wähle die einzelnen Summanden so, dass

$$U_1 = \quad aS_1\cos\alpha \qquad V_1 = \quad aS_1\cos\beta \qquad W_1 = \quad aS_1\cos\gamma \tag{1}$$

$$U_2 = -aS_2\cos\alpha \qquad V_2 = -aS_2\cos\beta \qquad W_2 = -aS_2\cos\gamma \tag{2}$$

$$U_3\cos\alpha + V_3\cos\beta + W_3\cos\gamma = 0, \qquad S_3 = 0 \tag{3}$$

wird; $\alpha\beta\gamma$ bedeuten die Winkel der Normale auf der positiven Seite von Σ_0, und bestimmen für das ganze gebrochne Normalensystem $\mathfrak{N}$ die Richtung der wachsenden N. Dies gibt

$$\begin{aligned} a(S_1 - S_2)\cos\alpha + U_3 &= U_0 \\ a(S_1 - S_2)\cos\beta + V_3 &= V_0 \\ a(S_1 - S_2)\cos\gamma + W_3 &= W_0. \end{aligned}$$

Wenn daher

$$U_0\cos\alpha + V_0\cos\beta + W_0\cos\gamma = P_0 \tag{4}$$

gesetzt wird, so folgt $a(S_1 - S_2) = P_0$, mithin

$$U_3 = U_0 - P_0\cos\alpha, \quad V_3 = V_0 - P_0\cos\beta, \quad W_3 = W_0 - P_0\cos\gamma, \tag{5}$$

und

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\left(S_0 + \frac{P_0}{a}\right), \quad S_2 = \tfrac{1}{2}\left(S_0 - \frac{P_0}{a}\right), \tag{6}$$

wodurch nun auch $U_1 V_1 \ldots W_2$ bestimmt sind.

Aus diesem Anfangszustande entwickeln sich also drei Unstetigkeiten.

Den Unstetigkeitswerthen $U_1 V_1 W_1 S_1$ entspricht eine von Σ_0 ausgehende und zu grössern N, den Werthen $U_2 V_2 W_2 S_2$, ebenso eine zu kleinern N fortschreitende Unstetigkeitsfläche. Es gehen also von Σ_0 in entgegengesetzten Richtungen zwei Unstetigkeitsflächen Σ_1, Σ_2 aus, deren Anfangslage Σ_0 ist, und für welche die Anfangswerthe S_1, S_2

von S gegeben sind; die Erscheinungen, welche an ihnen im Laufe der Zeit erfolgen, sind durch den letzten Lehrsatz bestimmt.

Ausserdem aber findet noch eine Unstetigkeit statt, welche den Anfangswerthen $U_3\,V_3\,W_3\,S_3$ entspricht. Wegen (3) gibt dies den im art. 3 (β) behandelten Fall, wo zwei aneinander grenzende Flüssigkeitsmassen sich mit einander fortbewegen, aber so, dass die eine längs der andern gleitet, ohne dass Flüssigkeitstheilchen von der einen zur andern übergehen; Σ_0 ist die Grenzfläche zwischen beiden Massen zur Zeit $t = 0$. Der weitere Verlauf dieser Erscheinung hängt von der ganzen Flüssigkeitsbewegung, also von den Differentialgleichungen (d) (art. 6) und den Bedingungen (D) für die mit ihnen verträglichen Unstetigkeiten ab. Die Untersuchung der letztern allein liefert in diesem Falle keine Bestimmungen über die Umgestaltung der Fläche Σ_0.

Strassburg, 18. August 1876.

XXVII.

Ueber die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper.

(Annali di Matematica pura ed applicata. Ser. II, Bd. 8, 1877, p. 193—243.)

I. Die vollständigen Bedingungen für die Bewegungen im Innern eines elastischen festen Körpers.

1.

In der gegenwärtigen Abhandlung werde ich die in meiner vorigen Arbeit (S. 81 d. B.)*) entwickelten Principien auf die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper anwenden. Ich beginne mit einigen Vorbemerkungen darüber, wie die hier zu entwickelnden Erscheinungen zu verstehen sind, da die folgenden Untersuchungen keine Unklarheit über diesen Punkt vertragen.

Ich denke mir einen homogenen elastischen Körper ohne Einwirkung äusserer Kräfte im Gleichgewichte, und bezeichne für diesen Fall durch xyz die rechtwinkligen Coordinaten eines seiner Theilchen m, durch ϱ seine constante Dichtigkeit, durch $\mathfrak{R}$ den von ihm erfüllten Raum, durch $\mathfrak{S}$ seine Oberfläche.

Wird das Gleichgewicht dieses Körpers gestört, so bezeichne ich wie üblich durch $x + u$, $y + v$, $z + w$ die Coordinaten des nämlichen Theilchens m zur Zeit t. Die Grössen uvw, die Verschiebungscomponenten von m, werden als Functionen von $txyz$ aufgefasst, d. h. sie werden den Punkten xyz des ruhenden Raumes $\mathfrak{R}$ zugeordnet, so dass sie für jeden Zeitpunkt t die wirkliche Lage desjenigen Theilchens m bestimmen, welches xyz zu Gleichgewichtscoordinaten hat.

Wir reduciren demnach sämmtliche hier zu untersuchenden Erscheinungen auf diesen ruhenden Raum $\mathfrak{R}$ und seine Oberfläche $\mathfrak{S}$. Insbesondere wird, bei der Fortpflanzung von Stössen, als Unstetigkeitsfläche zur Zeit t nicht die wirkliche, zu dieser Zeit stattfindende Unstetigkeitsfläche bezeichnet, sondern diejenige Fläche Σ, welche zwar die nämlichen Massentheilchen wie jene, aber in ihrer Gleichgewichts-

*) S. 51 dieses Bandes.

lage von einander trennt. Aus der Gestalt dieser letztern und ihrer Fortpflanzung im homogen ausgefüllten Raume $\mathfrak{R}$ kann man, wenn uvw bekannt sind, sofort auch die Gestalt jener und ihre Fortpflanzung durch den in Vibration befindlichen elastischen Körper finden.

2.

Die elastischen festen Körper bieten zwei Erscheinungen dar, welche auf Unstetigkeiten beruhen, die Spaltung und die Fortpflanzung von Stössen.

Bei der Spaltung bildet sich im Raume $\mathfrak{R}$ eine Fläche, längs welcher die Verschiebungscomponenten uvw selbst unstetig sind, und diese Fläche breitet sich, der fortschreitenden Spaltung entsprechend, im Raume $\mathfrak{R}$ immer weiter aus. Ich schliesse diesen Fall von den gegenwärtigen Untersuchungen aus; er betrifft in erster Linie die Lehre von den Spaltflächen der Krystalle, erfordert aber eine Vervollständigung der Hypothesen über die Constitution der elastischen festen Körper.

Ich setze also für die folgenden Untersuchungen voraus, dass uvw, welche nach dem Begriffe der Masse sich mit t stetig ändern, auch stetige Functionen von xyz sind. Die einzigen Unstetigkeiten, welche in Betracht zu ziehen sein werden, sind in Folge dessen Unstetigkeiten der ersten und höhern Derivirten von uvw; ihnen entspricht die Fortpflanzung von Stössen.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die Untersuchung in üblicher Weise auf solche Erscheinungen beschränkt ist, bei denen das Princip der Superposition stattfindet, also alle Bedingungen in den Werthen von uvw linear werden.

3.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich bekanntlich die Spannungen, welche an einem Theilchen m auftreten, wenn die Einrichtung des elastischen Körpers gestört wird, aus einer Kräftefunction herleiten. Dieselbe ist eine quadratische Form der sechs Variabeln

$$\theta_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \theta_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \theta_3 = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\theta_4 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \theta_5 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \theta_6 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

und soll im Folgenden durch

$$\Pi = \Sigma a_{\mu\nu}\theta_\mu\theta_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots 6)$$

bezeichnet werden.

Seien $\overset{+}{m}, \overset{-}{m}$ Theilchen, welche einander berühren, und sei $\Delta\Sigma$ das Flächenelement, welches sie in der Gleichgewichtslage voneinander trennt. Ueber $\Delta\Sigma$ wird auf der Seite von $\overset{+}{m}$ die Normale errichtet; die Winkel, welche sie mit den positiven Axen bildet, heissen $\alpha\beta\gamma$. Zwischen $\overset{-}{m}$ und $\overset{+}{m}$ wirken Spannkräfte; sind

$$\varrho X \Delta\Sigma, \quad \varrho Y \Delta\Sigma, \quad \varrho Z \Delta\Sigma$$

die an $\overset{-}{m}$ wirkenden Componenten derselben, so ist

$$\begin{aligned} X &= \Pi_1 \cos\alpha + \Pi_6 \cos\beta + \Pi_5 \cos\gamma \\ Y &= \Pi_6 \cos\alpha + \Pi_2 \cos\beta + \Pi_4 \cos\gamma \\ Z &= \Pi_5 \cos\alpha + \Pi_4 \cos\beta + \Pi_3 \cos\gamma, \end{aligned}$$

und hier ist allgemein

$$\Pi_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_\mu}.$$

Man nimmt an, dass die quadratische Form Π eine vollständige und stets positive ist, d. h. dass sie die Eigenschaft besitzt, bei reellen Werthen der sechs Variabeln θ nur dann $= 0$ zu werden, wenn alle Variabeln zugleich verschwinden, und in allen übrigen Fällen positive von Null verschiedene Werthe anzunehmen (vergl. die Abhandlung des Herrn **Kirchhoff** in **Borchardt's** Journal 56, pag. 290—291).

In besondern Fällen vereinfacht sich der Ausdruck für die Kräftefunction Π (vergl. unten art. 14 B und art. 15 zu Ende); für unsern Zweck ist es vortheilhafter, die obige allgemeine Form beizubehalten.

4.

Wird der elastische Körper ausschliesslich den zwischen seinen Theilchen wirkenden Spannungen überlassen, so gelten für das Innere des Raumes $\mathfrak{R}$ die linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_6}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_5}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Pi_6}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_4}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Pi_5}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_3}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

solange die ersten Derivirten von uvw nicht unstetig werden. Wo dieser Ausnahmefall eintritt, gelten andere Bedingungen, welche wir nun entwickeln wollen.

Sei, immer auf den Raum $\mathfrak{R}$ reducirt, das Flächenelement $\Delta\Sigma$ des vorigen art. Element einer Unstetigkeitsfläche Σ, und mit Beibehaltung der dort gewählten Bezeichnungen, diejenige Seite von Σ, über welcher die Normale errichtet worden ist, die positive. Sodann sei T die Ebene, von welcher Σ in diesem Elemente berührt wird.

Mit Σ zugleich schreiten auch die Tangentialebenen von Σ im Raume fort. Ist Σ' eine spätere Lage von Σ, so kann man das Gesetz, nach welchem die einzelnen Tangentialebenen sich fortbewegen, so wählen, dass T nach diesem Gesetze in eine beliebige Tangentialebene T' von Σ' übergeht.

Wir wählen dieses Gesetz, wie in der vorigen Abhandlung, so, dass jede Tangentialebene T ihre Lage nur nach der Stetigkeit ändert und zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt. Die Bahn σ ihres Berührungspunktes heisst dann der zur festen Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ gehörige Strahl, und die positive oder negative Geschwindigkeit, mit welcher T nach der nämlichen Richtung fortschreitet, wird durch

$$\omega$$

bezeichnet.

Ist ω positiv, so ist $\varrho\omega\Delta t\Delta\Sigma$ die Masse m, welche $\Delta\Sigma$ im Raume $\mathfrak{R}$ während der Zeit Δt überstreicht. Diese Masse geht während der Zeit Δt aus den Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial \overset{+}{u}}{\partial t}, \frac{\partial \overset{+}{v}}{\partial t}, \frac{\partial \overset{+}{w}}{\partial t}$ über in die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}$, was die Geschwindigkeitsvermehrungen

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{+}{u}}{\partial t}=-\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right],\quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{+}{v}}{\partial t}=-\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right],\quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{+}{w}}{\partial t}=-\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]$$

gibt. Sie erleidet also in der Zeit Δt einen Stoss, und die Componenten der Stosskraft sind

$$-\varrho\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\Delta\Sigma,\quad -\varrho\omega\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]\Delta\Sigma,\quad -\varrho\omega\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]\Delta\Sigma.$$

Diese Ausdrücke bleiben auch richtig, wenn $\Delta\Sigma$ in entgegengesetzter Richtung fortschreitet, also ω negativ ist, weil dann die Ausdrücke für die gestossene Masse und ihre Geschwindigkeitsänderungen mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen sind.

Diese Masse hat die Gestalt eines Cylinders, dessen Grundflächen zu $\Delta\Sigma$ parallel und $=\Delta\Sigma$ sind. Bedeuten $\overset{+}{X}\overset{+}{Y}\overset{+}{Z}$ die Werthe der im vorigen art. gegebenen Ausdrücke XYZ in derjenigen Grundfläche, welche während der Zeit Δt auf der positiven Seite von $\Delta\Sigma$ liegt, $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ ihre Werthe in der andern, so wirken auf die Masse m, während sie von $\Delta\Sigma$ durchlaufen wird, (1) an den beiden Grundflächen die Componenten $\varrho\overset{+}{X}\Delta\Sigma$, $\varrho\overset{+}{Y}\Delta\Sigma$, $\varrho\overset{+}{Z}\Delta\Sigma$ und $-\varrho\bar{X}\Delta\Sigma$, $-\varrho\bar{Y}\Delta\Sigma$, $-\varrho\bar{Z}\Delta\Sigma$, (2) ausserdem nur noch Kräfte, welche einander bis auf unendlich kleine Differenzen aufheben. Also folgt z. B.

$$-\varrho\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\Delta\Sigma=\varrho\overset{+}{X}\Delta\Sigma-\varrho\bar{X}\Delta\Sigma,$$

mithin

$$\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+\overset{+}{X}-\bar{X}=0,\quad \omega\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]+\overset{+}{Y}-\bar{Y}=0,\quad \omega\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]+\overset{+}{Z}-\bar{Z}=0.$$

Nun sind X, Y, Z in $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots$ linear und homogen; also ist $\overset{+}{X}-\bar{X}$ aus $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right], \ldots$ genau ebenso gebildet, wie X selbst aus $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots$ zusammengesetzt ist. Setzen wir daher

$$\begin{array}{lll}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\theta_1' & \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\theta_2' & \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]=\theta_3' \\ \left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]+\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]=\theta_4' & \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\theta_5' & \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]=\theta_6',\end{array}$$

und

$$\Pi'=\Sigma a_{\mu\nu}\theta_\mu'\theta_\nu',\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\Pi'}{\partial\theta_\mu'}=\Pi_\mu',$$

so wird

$$\overset{+}{X}-\bar{X}=\Pi_1'\cos\alpha+\Pi_6'\cos\beta+\Pi_5'\cos\gamma,$$

u. s. w., also haben wir für den Stoss, den die von Σ überschrittenen Theilchen erleiden, die mechanischen Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+\Pi_1'\cos\alpha+\Pi_6'\cos\beta+\Pi_5'\cos\gamma=0\\ \omega\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]+\Pi_6'\cos\alpha+\Pi_2'\cos\beta+\Pi_4'\cos\gamma=0\\ \omega\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]+\Pi_5'\cos\alpha+\Pi_4'\cos\beta+\Pi_3'\cos\gamma=0,\end{aligned}\right\}\qquad(\delta)$$

während längs Σ wegen der Continuität der Masse

$$\overset{+}{u}-\bar{u}=0,\quad \overset{+}{v}-\bar{v}=0,\quad \overset{+}{w}-\bar{w}=0\qquad(\varepsilon)$$

bleiben muss.

Dies ist, für das Innere eines elastischen Körpers, das vollständige System aller aus mechanischen Gründen zu schöpfenden Bedingungen, wenn der Fall, wo dieser Körper sich spaltet, ausgeschlossen bleibt.

II. Die Fortpflanzung der Unstetigkeiten im Innern eines elastischen Körpers.

5.

Wir bezeichnen auch in dieser Abhandlung die Coordinaten eines Punktes durch $\xi\eta\zeta$ oder durch xyz, jenachdem er der Unstetigkeitsfläche Σ angehört oder im Innern des Raumes $\mathfrak{R}$ nach Belieben angenommen werden kann. Dann hat t für alle Punkte einer Unstetigfläche denselben Werth, und ist durch die Fortpflanzung dieser Fläche so als Function von $\xi\eta\zeta$ bestimmt, dass

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega} \tag{1}$$

ist. In der That ist (vergl. meine vorige Abh. art. 5) das vollständige Differential von t proportional zu $\cos\alpha\partial\xi + \cos\beta\partial\eta + \cos\gamma\partial\zeta$; nimmt man, zur Bestimmung des Proportionalitätsfactors, für $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ die Componenten des Weges $\omega\partial t$, welcher in der Zeit ∂t in der Richtung der positiven Normale zurückgelegt wird, so ergibt sich

$$\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta = \omega\partial t,$$

also gilt diese Gleichung allgemein. Setzen wir nun

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = U, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right] = V, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial t}\right] = W, \tag{2}$$

so ergeben sich aus (ε) die Relationen

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] + U\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 \quad && \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] + U\frac{\partial t}{\partial \eta} = 0 \quad && \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right] + U\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \\
&\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right] + V\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 && \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right] + V\frac{\partial t}{\partial \eta} = 0 && \left[\frac{\partial v}{\partial z}\right] + V\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \\
&\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right] + W\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 && \left[\frac{\partial w}{\partial y}\right] + W\frac{\partial t}{\partial \eta} = 0 && \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right] + W\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

als die Bedingungen für die mit der Stetigkeit von uvw verträglichen Unstetigkeiten ihrer ersten Derivirten.

Diese Werthe müssen nun in (δ) eingeführt werden. Benutzt man die Relationen (1) und (2), so folgt zunächst:

$$\left.\begin{aligned}
U + \Pi'_1\frac{\partial t}{\partial \xi} + \Pi'_6\frac{\partial t}{\partial \eta} + \Pi'_5\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \\
V + \Pi'_6\frac{\partial t}{\partial \xi} + \Pi'_2\frac{\partial t}{\partial \eta} + \Pi'_4\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \\
W + \Pi'_5\frac{\partial t}{\partial \xi} + \Pi'_4\frac{\partial t}{\partial \eta} + \Pi'_3\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{δ_1}$$

Nun folgt aus (3)

$$\left.\begin{aligned}
&\theta'_1 = -U\frac{\partial t}{\partial \xi} && \theta'_2 = -V\frac{\partial t}{\partial \eta} && \theta'_3 = -W\frac{\partial t}{\partial \zeta} \\
&\theta'_4 = -\left(V\frac{\partial t}{\partial \zeta} + W\frac{\partial t}{\partial \eta}\right) \quad && \theta'_5 = -\left(W\frac{\partial t}{\partial \xi} + U\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) \quad && \theta'_6 = -\left(U\frac{\partial t}{\partial \eta} + V\frac{\partial t}{\partial \xi}\right);
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

bedeutet daher

$$P$$

den Ausdruck, in welchen Π' durch diese Substitution übergeht, so ist P quadratische Form von UVW und, weil U nur in θ'_1, θ'_6, θ'_5 vorkommt,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial U} = -\Pi'_1\frac{\partial t}{\partial \xi} - \Pi'_6\frac{\partial t}{\partial \eta} - \Pi'_5\frac{\partial t}{\partial \zeta};$$

ähnlich verhält es sich mit den Ausdrücken für die Derivirten von P nach V und W. Die Gleichungen (δ_1) geben also

$$U = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial U}, \quad V = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial V}, \quad W = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial W}, \tag{5}$$

und es handelt sich zunächst um den Ausdruck und die Eigenschaften von P.

6.

Die folgenden Rechnungen sind ohne Anwendung symbolischer Formen schwer durchführbar. Sei

$$\Theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3 + a_4\theta_4 + a_5\theta_5 + a_6\theta_6,$$

so ist Θ^2 die symbolische Form für Π. Setzt man nun

$$\begin{aligned}
a_1\frac{\partial t}{\partial \xi} + a_6\frac{\partial t}{\partial \eta} + a_5\frac{\partial t}{\partial \zeta} = \Lambda_1 \quad & a_1U + a_6V + a_5W = M_1 \\
a_6\frac{\partial t}{\partial \xi} + a_2\frac{\partial t}{\partial \eta} + a_4\frac{\partial t}{\partial \zeta} = \Lambda_2 \quad & a_6U + a_2V + a_4W = M_2 \\
a_5\frac{\partial t}{\partial \xi} + a_4\frac{\partial t}{\partial \eta} + a_3\frac{\partial t}{\partial \zeta} = \Lambda_3 \quad & a_5U + a_4V + a_3W = M_3
\end{aligned}$$

und

$$Q = \Lambda_1U + \Lambda_2V + \Lambda_3W = M_1\frac{\partial t}{\partial \xi} + M_2\frac{\partial t}{\partial \eta} + M_3\frac{\partial t}{\partial \zeta},$$

so wird vermöge der Gleichungen (4)

$$\Sigma a_\mu\theta'_\mu = -Q,$$

also ist symbolisch

$$P = Q^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial U} = \Lambda_1Q, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial V} = \Lambda_2Q \quad \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial W} = \Lambda_3Q.$$

Hierzu bilden wir die Effectivwerthe

$$A_\mu A_\nu = A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu},$$

so dass ausgerechnet

$$P = A_{11} U^2 + A_{22} V^2 + A_{33} W^2 + 2 A_{23} V W + 2 A_{31} W U + 2 A_{12} U V$$

wird; die Ausdrücke dieser Coefficienten ergeben sich aus folgender Tabelle:

	$\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2$	$\left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2$	$\left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2$	$\frac{\partial t}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}$	$\frac{\partial t}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \xi}$	$\frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \eta}$
A_{11}	a_{11}	a_{66}	a_{55}	$2a_{65}$	$2a_{51}$	$2a_{16}$
A_{22}	a_{66}	a_{22}	a_{44}	$2a_{24}$	$2a_{46}$	$2a_{62}$
A_{33}	a_{55}	a_{44}	a_{33}	$2a_{43}$	$2a_{35}$	$2a_{54}$
A_{23}	a_{65}	a_{24}	a_{43}	$a_{23} + a_{44}$	$a_{45} + a_{63}$	$a_{64} + a_{25}$
A_{31}	a_{51}	a_{46}	a_{35}	$a_{45} + a_{63}$	$a_{31} + a_{55}$	$a_{56} + a_{41}$
A_{12}	a_{16}	a_{62}	a_{54}	$a_{64} + a_{25}$	$a_{56} + a_{41}$	$a_{12} + a_{66}$

Dies sind die Formeln, deren wir für die Behandlung der Gleichungen (5) bedürfen. Was die Eigenschaften von P als quadratische Form betrifft, so erinnere man sich, dass Π' eine vollständige und stets positive quadratische Form von $\theta_1', \theta_2', \dots \theta_6'$ ist. Solange die in (4) stehenden Werthe dieser Argumente reell sind, ist also P stets positiv, und nur in dem Falle $= 0$, wo alle Argumente zugleich verschwinden. Da aber z. B. $\theta_4'^2 - 4\theta_2'\theta_3' = \left(V\frac{\partial t}{\partial \zeta} - W\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2$ ist, so können die sechs Argumente von P nur dann gleichzeitig verschwinden, wenn

$$\begin{array}{lll} U\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 & U\frac{\partial t}{\partial \eta} = 0 & U\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \\ V\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 & V\frac{\partial t}{\partial \eta} = 0 & V\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \\ W\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 & W\frac{\partial t}{\partial \eta} = 0 & W\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0, \end{array}$$

d. h. wenn gleichzeitig $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ wird, da wegen der Gleichung

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2}$$

die ersten Derivirten von t nicht zugleich verschwinden können.

Also folgt, dass P positiv und von Null verschieden bleibt, solange U, V, W nicht zugleich verschwinden, d. h. P ist eine vollständige und stets positive quadratische Form von UVW.

7.

Die Gleichungen (5) gehen nunmehr über in

$$\left.\begin{array}{l} A_{11} U + A_{12} V + A_{13} W = U \\ A_{21} U + A_{22} V + A_{23} W = V \\ A_{31} U + A_{32} V + A_{33} W = W. \end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Ist

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) = \begin{vmatrix} A_{11} - 1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - 1 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - 1 \end{vmatrix}$$

die Determinante dieser Gleichungen, und werden die Unterdeterminanten in üblicher Weise durch $\Delta_{\mu\nu}$ bezeichnet, so folgt, wenn der Fall, wo gar keine Unstetigkeiten stattfinden, ausgeschlossen bleibt,

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) = 0 \qquad \text{(II)}$$

als **Differentialgleichung der Unstetigkeitsflächen** und, abgesehen von den besondern Fällen, wo mit Δ zugleich alle Unterdeterminanten verschwinden

$$\frac{U^2}{\Delta_{11}} = \frac{V^2}{\Delta_{22}} = \frac{W^2}{\Delta_{33}} = \frac{VW}{\Delta_{23}} = \frac{WU}{\Delta_{31}} = \frac{UV}{\Delta_{12}} = \frac{P}{\Delta'} \qquad \text{(III)}$$

wenn

$$\Delta' = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}$$

gesetzt wird. In der That sind die Glieder dieser continuirlichen Gleichung $= (U^2 + V^2 + W^2) : (\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33})$, und aus (I) ergibt sich

$$P = U^2 + V^2 + W^2.$$

Abgesehen von den Grenzfällen, wo in (III) alle Nenner verschwinden, sind also UVW durch P allein ausgedrückt, während es zur Bestimmung von P neuer Bedingungsgleichungen bedarf. Die weitere Untersuchung mit Einschluss der in Rede stehenden Grenzfälle hängt von der Integration der Gleichung (II) ab, zu welcher wir nun übergehen.

III. Die Unstetigkeitsfläche Σ und das zugehörige Strahlensystem.

8.

Zur Integration der Gleichung

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) = 0 \qquad \text{(II)}$$

führen wir wieder die Werthe

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega} \tag{1}$$

ein, wodurch sie in

$$\Delta\left(\frac{\cos\alpha}{\omega}, \frac{\cos\beta}{\omega}, \frac{\cos\gamma}{\omega}\right) = 0 \tag{IIa}$$

übergeht. In dieser Form lehrt sie, dass die Gleichung (II) weiter nichts enthält als die Vorschrift, mit welcher Geschwindigkeit ω eine jede Tangentialebene T von Σ nach der zu ihr senkrechten Richtung $\alpha\beta\gamma$ der positiven Normale fortschreiten soll.

Es ist demnach klar, dass die Fläche Σ in ihren spätern Lagen nur dann bestimmt sein kann, wenn eine Anfangslage derselben feststeht, und dass diese letztere willkürlich angenommen werden kann, soweit ihrer Normalenrichtung durch die Gleichung (IIa) ein reelles ω zugeordnet wird. Sei Σ_0 die der Zeit $t = 0$ entsprechende Anfangslage von Σ.

Um die spätern Lagen von Σ zu ermitteln, hat man nur nöthig, zu jedem Punkte $m_0(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ von Σ_0 die Lage $m(\xi\eta\zeta)$ desjenigen Punktes von Σ zu bestimmen, in welchem die Tangentialebene T parallel ist zur Tangentialebene T_0 von Σ_0 in m_0. Sei $X\cos\alpha + \cdots = p$ die Gleichung von T, also p das, nach der positiven Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ hin wachsende Loth aus dem Ursprunge auf T, mithin $\frac{\partial p}{\partial t} = \omega$. Da ω von t unabhängig und (art. 4) p stetige Function von t ist, so folgt $p - p_0 = \omega t$, wenn p_0 den Werth von p in T_0 bedeutet. Ausserdem folgt für $t = 0$, weil T_0 durch m_0 geht, $p_0 = \xi_0\cos\alpha + \cdots$, also erhalten wir als Gleichung von T:

$$(X - \xi_0)\cos\alpha + (Y - \eta_0)\cos\beta + (Z - \zeta_0)\cos\gamma = \omega t. \tag{T}$$

Um die Coordinaten $\xi\eta\zeta$ des Berührungspunctes m zu finden, müssen wir $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ variiren, während t und ebenso $X = \xi$, $Y = \eta$, $Z = \zeta$ ungeändert bleiben. Dann folgt

$$(\xi - \xi_0)\cos\alpha + (\eta - \eta_0)\cos\beta + (\zeta - \zeta_0)\cos\gamma = \omega t \tag{a}$$

ferner

$$(\xi - \xi_0)\,\delta\cos\alpha + (\eta - \eta_0)\,\delta\cos\beta + (\zeta - \zeta_0)\,\delta\cos\gamma$$
$$- (\cos\alpha\,\delta\xi_0 + \cos\beta\,\delta\eta_0 + \cos\gamma\,\delta\zeta_0) = t\,\delta\omega,$$

oder weil

$$\cos\alpha\,\delta\xi_0 + \cos\beta\,\delta\eta_0 + \cos\gamma\,\delta\zeta_0 = 0 \tag{b}$$

ist,

$$(\xi - \xi_0)\,\delta\cos\alpha + (\eta - \eta_0)\,\delta\cos\beta + (\zeta - \zeta_0)\,\delta\cos\gamma = t\,\delta\omega. \tag{c}$$

Um für $\delta\omega$ einen passenden Ausdruck zu gewinnen, setze ich folgendes

fest. Sind p, q, r unabhängige Variabeln, so bestimmt die Gleichung

$$\Delta\left(\frac{p}{\Omega}, \frac{q}{\Omega}, \frac{r}{\Omega}\right) = 0$$

Ω als homogene Function ersten Grades von p, q, r; im Folgenden soll unter

$$\omega, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}$$

das verstanden werden, was aus

$$\Omega, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial p}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial q}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

wird, wenn man $p = \cos\alpha$, $q = \cos\beta$, $r = \cos\gamma$ setzt. Es soll mit andern Worten ω als homogene Function ersten Grades von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aufgefasst werden; dann steht die Bedeutung seiner Derivirten nach diesen Grössen vollkommen fest, und es wird

$$\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\cdot\cos\beta + \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\cdot\cos\gamma = \omega, \tag{d}$$

während die Gleichung (c) in

$$\left(\xi - \xi_0 - t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\right)\delta\cos\alpha + \left(\eta - \eta_0 - t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\right)\delta\cos\beta$$
$$+ \left(\zeta - \zeta_0 - t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right)\delta\cos\gamma = 0$$

übergeht. Dies gilt für alle Werthe der Variationen, welche $\cos\alpha\,\delta\cos\alpha + \cos\beta\,\delta\cos\beta + \cos\gamma\,\delta\cos\gamma = 0$ geben, also folgt

$$\xi - \xi_0 - t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha} = h\cos\alpha, \quad \eta - \eta_0 - t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta} = h\cos\beta,$$
$$\zeta - \zeta_0 - t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma} = h\cos\gamma.$$

Führt man diese Werthe in (a) ein, und berücksichtigt die Relation (d), so folgt $h = 0$, also sind

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha} \\ \eta &= \eta_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta} \\ \zeta &= \zeta_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{m}$$

die Coordinaten desjenigen Punktes m, in welchem Σ von T berührt wird.

Es ist nur noch zu verificiren, dass dies bei jeder Annahme über Σ_0 die Lösung der vorgelegten Differentialgleichung (II) ist.

9.

Denkt man sich zu den Gleichungen (m) noch die Gleichung von Σ_0 (zwischen $\xi_0\eta_0\zeta_0$) gefügt, und die aus ihr folgenden Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in (m) eingesetzt, so hat man vier Gleichungen zwischen $t\xi\eta\zeta$ einer- und $\xi_0\eta_0\zeta_0$ andererseits. Für $t = 0$ sind die Gleichungen (m) voneinander unabhängig in Bezug auf $\xi_0\eta_0\zeta_0$; sie können daher in Bezug auf diese Variabeln nicht für ein unbestimmtes t voneinander abhängig sein. Die in Rede stehenden vier Gleichungen gestatten also die Elimination von $\xi_0\eta_0\zeta_0$ und liefern dann eine Relation zwischen $t\xi\eta\zeta$, welche für $t = 0$ in die Gleichung von Σ_0 übergeht, und von welcher zu verificiren ist, dass sie der partiellen Differentialgleichung (II) genügt.

Genauer gesprochen ist durch die Annahme einer bestimmten Fläche Σ_0 und ihre Beziehung zu den Formeln (m) in diesen letztern eine Abhängigkeit zwischen $t\xi\eta\zeta$ allein festgelegt, vermöge deren t Function von $\xi\eta\zeta$ wird, und es ist zu verificiren, dass diese Function der Differentialgleichung (II) genügt, wie auch immer Σ_0 angenommen werden mag.

Entnimmt man aber den Gleichungen (m) die Differentiale von $\xi\eta\zeta$, so wird, mit Berücksichtigung von (b) und (d)

$$\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta = \omega\,\partial t + t\cdot\varepsilon,$$

wo

$$\varepsilon = \cos\alpha\,\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\right) + \cos\beta\,\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\right) + \cos\gamma\,\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right)$$

ist. Dies gibt

$$\varepsilon = \partial\left(\cos\alpha\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha} + \cos\beta\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta} + \cos\gamma\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\partial\cos\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\partial\cos\beta + \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\partial\cos\gamma\right),$$

also

$$\varepsilon = 0,$$

da Minuend and Subtrahend $= \partial\omega$ ist.

Das vollständige Differential von t ist also

$$\partial t = \frac{\cos\alpha}{\omega}\partial\xi + \frac{\cos\beta}{\omega}\partial\eta + \frac{\cos\gamma}{\omega}\partial\zeta,$$

mithin

$$\frac{\partial t}{\partial\xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial\eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial\zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega}.$$

Wenn daher, wie wir voraussetzen, ω als homogene Function ersten Grades von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ der Gleichung

$$\varDelta\left(\frac{\cos\alpha}{\omega}, \frac{\cos\beta}{\omega}, \frac{\cos\gamma}{\omega}\right) = 0 \tag{IIa}$$

gemäss angenommen wird, so folgt, dass in der That die Derivirten von t der Gleichung

$$\varDelta\left(\frac{\partial t}{\partial\xi}, \frac{\partial t}{\partial\eta}, \frac{\partial t}{\partial\zeta}\right) = 0 \tag{II}$$

genügen, w. z. v. w.

Die Gleichungen (m) liefern also, wie auch immer Σ_0 angenommen werden mag, die Fläche Σ so, dass ihre Fortpflanzung und Umgestaltung der Differentialgleichung (II) gemäss von Statten geht, und Σ_0 ihre Anfangslage ist.

10.

Wir betrachten nun die Bahn des Punktes m oder den zur festen Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ gehörigen Strahl σ (art. 4). Seine Gleichungen ergeben sich aus (m), wenn man $\xi_0\eta_0\zeta_0$ und $\alpha\beta\gamma$ ungeändert, aber t variiren lässt.

Die Gleichungen (m) zeigen, dass jeder Strahl σ geradlinigt ist, und vom Punkte m mit den constanten Geschwindigkeitscomponenten

$$\Xi = \frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \qquad H = \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \qquad Z = \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma} \tag{$\varDelta$}$$

durchlaufen wird.

Diese Formeln, oder die Gleichungen (m) selbst, bestimmen also zu jedem Punkte m_0 der Fläche Σ_0 einen von ihm ausgehenden Strahl σ nebst den Geschwindigkeiten, mit welchen m denselben durchlaufen soll.

Auf diese Weise entsteht ein **Strahlensystem** $(\sigma\sigma)$, in welchem die Fläche Σ so fortschreitet, dass die Ebene T, von welcher sie im Schnittpunkte m mit ein und demselben Strahl σ berührt wird, zu ihrer Anfangslage T_0 fortwährend parallel bleibt.

Ist also $\Delta\Sigma_0$ ein Element von Σ_0, so geht von dort ein unendlich dünnes Strahlenbündel aus, und wenn dasselbe auf Σ das Element $\Delta\Sigma$ bestimmt, so durchläuft $\Delta\Sigma$ dieses Strahlenbündel mit den Geschwindigkeitscomponenten $\Xi H Z$, indem es dabei fortwährend zu $\Delta\Sigma_0$ parallel bleibt. Ich nenne $\Delta\Sigma$ den **Querschnitt** des unendlich dünnen Strahlenbündels; derselbe wird nur ausnahmsweise von den Strahlen dieses Bündels senkrecht geschnitten.

11.

Ein einzelner Strahl σ des Systems $(\sigma\sigma)$ hängt nicht von der Gestalt der ganzen Fläche Σ_0 ab, sondern nur von der Lage seines Ausgangspunktes m_0 und der Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ in demselben.

Zwei verschiedene Flächen Σ_0 geben also, wofern nicht eine von ihnen Anfangslage der andern ist, zu verschiedenen Strahlensystemen

$(\sigma\sigma)$ Veranlassung, aber in allen ist die Zuordnung der Strahlen zur Normalenrichtung dieselbe.

Um für diese Art der Zuordnung die einfachste Darstellung zu gewinnen, nehmen wir für Σ_0 einen einzigen Punkt m_0, indem wir denselben etwa als Grenzfall einer Kugelfläche von abnehmendem Halbmesser auffassen.

Dann bestimmen die Gleichungen

$$\xi - \xi_0 = t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \quad \eta - \eta_0 = t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \quad \zeta - \zeta_0 = t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}, \qquad (m)$$

wenn t constant bleibt, und die Normalenrichtung variirt, eine Fläche C_t, welche wir als die zum Punkte m_0 gehörige **Centralfläche** bezeichnen, während m_0 ihr **Centralpunkt** heissen soll.

Ist m_0 derselbe Punkt wie im vorigen art., so sind $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten von m; also hat Σ mit C_t den Punkt m gemein. Auch führt in beiden Fällen derselbe Strahl σ von m_0 nach m. Ergänzen wir ihn in beiden Fällen zu unendlich dünnen Strahlenbündeln, so werden beide von parallelen, nämlich zu derselben Richtung $\alpha\beta\gamma$ senkrechten Querschnitten und mit den nämlichen Geschwindigkeiten $\Xi H Z$ durchlaufen; so weit beide Strahlenbündel einander durchdringen, decken beide Querschnitte einander. Dies findet also stets im gemeinsamen Schnittpunkte mit σ statt. Ist dieser Punkt in m angelangt, so sind die beiden Querschnitte Elemente von Σ und C_t, also folgt, dass Σ von C_t in m berührt wird.

Legt man also um jeden Punkt m_0 von Σ_0 als Centralpunkt die Centralfläche C_t, so ist Σ die Einhüllende aller dieser Centralflächen, und zwar derjenige Theil der vollständigen Einhüllenden, in welchem die von Σ_0 ausgehenden Strahlen münden.

12.

Diejenige Centralfläche, welche dem speciellen Werthe $t = 1$ entspricht, bezeichnen wir als die **Wellenfläche** Δ. Die Gleichungen (m) zeigen, dass man aus der Wellenfläche Δ die Centralfläche C_t erhält, wenn alle vom Centralpunkte ausgehenden Leitstrahlen im Verhältnisse von 1 zu t vergrössert werden.

Für die in Rede stehende Zuordnung der Strahlen und der Normalenrichtung reicht es aus, die Wellenfläche zu betrachten und ihren Centralpunkt in den Coordinatenursprung zu verlegen. Dann erhält man für die Wellenfläche die Gleichungen

$$\Xi = \frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \quad H = \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \quad Z = \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}, \qquad (\Delta)$$

und nach art. 8 (T) (wo $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ und $t = 1$ zu nehmen ist) lautet die Gleichung ihrer Tangentialebene T in dem hierdurch bestimmten Punkte $\Xi H Z$:

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = \omega. \qquad (T)$$

Legt man also an die Wellenfläche Δ eine Tangentialebene T so, dass ihre Normale mit den Axen die Winkel $\alpha\beta\gamma$ bildet, so ist das Loth aus dem Centralpunkte auf T die Geschwindigkeit ω, mit welcher die parallele Tangentialebene der Unstetigkeitsfläche Σ fortschreitet; der Leitstrahl aus dem Centralpunkte nach dem Berührungspunkte $\Xi H Z$ bestimmt die Richtung des zugehörigen Strahls und zugleich die Geschwindigkeitscomponenten $\Xi H Z$, mit welchen derselbe durchlaufen wird.

Die ganze Untersuchung der Differentialgleichung

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial\xi}, \frac{\partial t}{\partial\eta}, \frac{\partial t}{\partial\zeta}\right) = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

concentrirt sich also in der Theorie der Wellenfläche Δ.

Die Gleichung dieser Fläche in Punktcoordinaten $\Xi H Z$ würde sich durch Elimination von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aus den Gleichungen (Δ) ergeben; in geeigneten Plancoordinaten kann man sie ohne Weiteres hinschreiben.

Als Coordinaten einer Ebene führen wir ihre reciproken Axensegmente ein, die wir durch p, q, r bezeichnen. Die Coordinaten von T sind also

$$p = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \quad q = \frac{\cos\beta}{\omega}, \quad r = \frac{\cos\gamma}{\omega},$$

also folgt, dass

$$\Delta(p, q, r) = 0 \qquad (\mathrm{II}b)$$

die Gleichung der Wellenfläche in diesen Plancoordinaten ist.

Alles dies gilt für jede Differentialgleichung von der Form (II), und lässt sich auch umkehren. Ist nämlich die Wellenfläche Δ vorgeschrieben, und gelingt es, ihre Gleichung in den Plancoordinaten p, p, r auszuführen, so hat man ohne Weiteres auch die partielle Differentialgleichung (II) derjenigen Klasse von Unstetigkeitsflächen und zugehörigen Strahlensystemen, welche zu dieser nämlichen Wellenfläche gehört.

13.

Es handelt sich nun darum, diese allgemeinen Resultate für den besondern Fall weiter auszuführen, wo

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial\xi}, \frac{\partial t}{\partial\eta}, \frac{\partial t}{\partial\zeta}\right) = \begin{vmatrix} A_{11} - 1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - 1 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - 1 \end{vmatrix}$$

ist, und die Ausdrücke $A_{\mu\nu}$ die im art. 6 angegebene Bedeutung haben. Durch die Substitution

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega} \tag{1}$$

werde

$$A_{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}}{\omega^2}.$$

Ist alsdann

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \cos\alpha + a_6 \cos\beta + a_5 \cos\gamma \\ A_2 &= a_6 \cos\alpha + a_2 \cos\beta + a_4 \cos\gamma \\ A_3 &= a_5 \cos\alpha + a_4 \cos\beta + a_3 \cos\gamma, \end{aligned}$$

so hat man in symbolischer Form

$$A_{\mu\nu} = A_\mu A_\nu.$$

Wir setzen nun

$$\begin{vmatrix} A_{11}-x & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-x & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-x \end{vmatrix} = D(x),$$

und bezeichnen die Unterdeterminanten durch $D_{\mu\nu}$. Dann haben wir für ω die Gleichung sechsten Grades $D(\omega^2) = 0$, um deren Wurzeln es sich vor allen Dingen handelt. In dieser Beziehung finden folgende beiden Sätze statt:

1. Die Wurzeln der Gleichung $D(x) = 0$ sind alle positiv und von Null verschieden.

2. Ist $x = a$ mehrfache Wurzel dieser Gleichung und $(x-a)^\alpha$ die höchste Potenz von $x - a$, durch welche $D(x)$ ohne Rest theilbar ist, so sind alle Unterdeterminanten $D_{\mu\nu}$ durch $(x-a)^{\alpha-1}$, aber nicht alle durch $(x-a)^\alpha$ theilbar.

Beide Sätze sind besondere Fälle von sehr allgemeinen Theoremen, von denen das zweite von Herrn Weierstrass (Monatsberichte der Berliner Akademie vom 4. März 1858), das erste, von allen überflüssigen Bedingungen befreit, von mir herrührt (Borchardt's Journal 63, pag. 257 und 264)*). In Bezug auf beide Theoreme ist auch eine Abhandlung des Herrn Somof zu erwähnen (Mém. de l'Ac. de St. Pétersbourg vom Jahre 1859), welche mir selbst zu meinem Bedauern erst in der letzten Zeit zugänglich geworden ist, und deren sehr interessante Schlussweise sich leicht zu einer grössern Vollendung bringen lässt.

Den Beweis des ersten Satzes muss ich vollständig nach meiner so eben erwähnten Arbeit reproduciren, indem dort nur die Realität von ω^2 bewiesen ist. Dieser Beweis gründet sich darauf, dass (art. 6

*) Band I, S. 131 und 137.

zu Ende) P eine vollständige und stets positive quadratische Form von UVW ist; dasselbe gilt also auch von

$$\eta = A_{11} U^2 + A_{22} V^2 + A_{33} W^2 + 2A_{23} VW + 2A_{31} WU + 2A_{12} UV.$$

Nun ist $D(x) = 0$ die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass man den drei in UVW linearen Gleichungen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\eta}{\partial U} = xU, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\eta}{\partial V} = xV, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\eta}{\partial W} = xW$$

genügen kann, ohne U, V, W alle $= 0$ zu setzen. Sei also x Wurzel dieser Gleichung und, indem man nöthigenfalls das Reelle vom Imaginären trennt, seien $U = U_1 + iU_2$, $V = V_1 + iV_2$, $W = W_1 + iW_2$ die entsprechenden Werthe von UVW; die sechs Grössen $U_1, U_2, \dots W_2$ sind also nicht alle $= 0$. Sind nun η_1, η_2 die Werthe, in welche η übergeht, wenn UVW den Index 1 oder 2 erhalten, und ist

$$U_1^2 + U_2^2 + V_1^2 + V_2^2 + W_1^2 + W_2^2 = p,$$

so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen durch Multiplication mit $U_1 - iU_2$, $V_1 - iV_2$, $W_1 - iW_2$

$$\eta_1 + \eta_2 = xp.$$

Hier ist p positiv und von Null verschieden, ebenso $\eta_1 + \eta_2$, da weder η_1 noch η_2 negativ ist, also ihre Summe nur in dem Falle $= 0$ werden kann, wo η_1 und η_2 einzeln, also $U_1, V_1, \dots W_2$ sämmtlich verschwinden. Also ist jede Wurzel x der Gleichung $D(x) = 0$ positiv und von Null verschieden. Zugleich ist aus der Form des Ausdrucks D ersichtlich, dass es keine Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ gibt, für welche eine Wurzel dieser Gleichung unendlich wird.

Den Beweis des zweiten, in allgemeinerer Form von Herrn Weierstrass herrührenden Satzes kann man für den vorliegenden Fall auf die leicht zu beweisende identische Gleichung

$$D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2D_{23}^2 + 2D_{31}^2 + 2D_{12}^2 = D'^2 - DD''$$

gründen, wo $D = D(x)$ und D' die erste, D'' die zweite Derivirte ist. Hat D den Wurzelfactor $x - a$ genau α mal, so ist $D'^2 - DD''$ durch ihn $2\alpha - 2$ mal und nicht öfter theilbar; a ist nach dem vorigen Satze reell. Lässt man also $x - a$ abnehmen, so wird die ganze Funktion zur Linken an der Grenze unendlich klein zur Ordnung $2\alpha - 2$; bleibt während dessen x reell, was unmöglich sein würde, wenn a imaginär wäre, so bleibt jedes einzelne Glied positiv, also wird jedes Glied unendlich klein mindestens zur Ordnung $2\alpha - 2$, aber nicht jedes Glied zu höherer Ordnung unendlich klein; dies ist der zweite von den obigen Sätzen.

14.

Es sind demnach bei der cubischen Gleichung $D(x) = 0$ drei Fälle zu unterscheiden.

A) Soll ω^2 dreifache Wurzel, also

$$D(x) = (\omega^2 - x)^3$$

sein, so folgt aus dem Satze des Herrn Weierstrass, dass die in x linearen Functionen D_{23}, D_{31}, D_{12} identisch $= 0$ sein müssen, was

$$A_{23} = 0, \quad A_{31} = 0, \quad A_{12} = 0$$

gibt, und dann, dass D_{11}, D_{22}, D_{33} reine Quadrate und $= (\omega^2 - x)^2$ sein müssen, was

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \omega^2$$

gibt.

Für die Normalenrichtungen $\alpha\beta\gamma$, denen eine dreifache Wurzel ω^2 entsprechen soll, gibt dies fünf Bedingungsgleichungen

$$A_{11} = A_{22} = A_{33}; \quad A_{23} = 0 \quad A_{31} = 0 \quad A_{12} = 0; \qquad (A1)$$

wählt man die Coordinatenaxen so, dass $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90^0$ wird, so überzeugt man sich leicht, dass dieser Fall mit der Bedingung vereinbar ist, dass die Kräftefunction Π eine vollständige und stets positive quadratische Form sei.

Dagegen ist mit dieser unerlässlichen Eigenschaft von Π die Forderung unverträglich, dass für jede Normalenrichtung eine dreifache Wurzel stattfinde.

Die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_{11}U + A_{12}V + A_{13}W &= \omega^2 U \\ A_{21}U + A_{22}V + A_{23}W &= \omega^2 V \\ A_{31}U + A_{32}V + A_{33}W &= \omega^2 W, \end{aligned}\right\} \qquad (U)$$

die sich für U, V, W ergeben haben, sind identisch erfüllt.

B) Soll D einen Doppelfactor haben, also

$$D(x) = (\omega_1^2 - x)^2(\omega_3^2 - x)$$

sein, wo ω_1^2 von ω_3^2 verschieden ist, so müssen alle Unterdeterminanten durch $\omega_1^2 - x$ theilbar sein. Aus den Ausdrücken für D_{23}, D_{31}, D_{12} folgt

$$\omega_1^2 = A_{11} - \frac{A_{31}A_{12}}{A_{23}} = A_{22} - \frac{A_{12}A_{23}}{A_{31}} = A_{33} - \frac{A_{23}A_{31}}{A_{12}}, \qquad (B1)$$

wenn der Kürze wegen von dem besondern Falle Abstand genommen wird, wo zwei von den Grössen A_{23}, A_{31}, A_{12} verschwinden. Setzt

man die hieraus folgenden Werthe von A_{11}, A_{22}, A_{33} ein, so wird

$$D = (\omega_1^2 - x)^2\left[\omega_1^2 - x + \frac{A_{31}A_{12}}{A_{23}} + \frac{A_{12}A_{23}}{A_{31}} + \frac{A_{23}A_{31}}{A_{12}}\right],$$

d. h. die in ($B1$) enthaltenen Bedingungen reichen für den vorliegenden Fall aus. Der Ausdruck für die Summe der Wurzeln gibt

$$\omega_3^2 = A_{11} + A_{22} + A_{33} - 2\omega_1^2.$$

Benutzt man die Bedingungsgleichungen ($B1$) auch in (U), so folgt

$$\begin{aligned} A_{31}A_{12}U + A_{12}A_{23}V + A_{23}A_{31}W &= (\omega^2 - \omega_1^2)A_{23}U \\ &= (\omega^2 - \omega_1^2)A_{31}V = (\omega^2 - \omega_1^2)A_{12}W. \end{aligned}$$

Versieht man die Componenten UVW mit demselben Index wie ω, so folgt

1. wenn für ω^2 die Doppelwurzel ω_1^2, genommen wird,

$$\frac{U_1}{A_{23}} + \frac{V_1}{A_{31}} + \frac{W_1}{A_{12}} = 0,$$

2. dagegen für $\omega^2 = \omega_3^2$

$$U_3 : V_3 : W_3 = \frac{1}{A_{23}} : \frac{1}{A_{31}} : \frac{1}{A_{12}}.$$

Damit der vorliegende Fall eintrete, sind für die entsprechende Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ nur zwei Bedingungen erforderlich, die sich aus ($B1$) ergeben. Sind diese beiden Bedingungen identisch erfüllt, so findet für jede Normalenrichtung eine Doppelwurzel ω_1^2 und eine einfache ω_3^2 statt. Ich habe die Untersuchung dieses Falles vollständig durchgeführt, und finde, ausser einem nicht hierher gehörigen Falle[1]), wo Π zwar eine vollständige Form aber nicht von unveränderlichem Zeichen ist, nur den folgenden Fall, wo bei passender Wahl der Coordinatenaxen

$$\begin{aligned} \Pi = k^2(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2 + \theta_5^2 + \theta_6^2 - 2\theta_2\theta_3 - 2\theta_3\theta_1 - 2\theta_1\theta_2) \\ + (a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3)^2 \end{aligned}$$

ist. Die Constanten sind alle reell und der Bedingung unterworfen, dass 1) $a_2 + a_3$, $a_3 + a_1$, $a_1 + a_2$ von Null verschieden sein müssen und 2) $a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2 > k^2$ ist. Dann wird für jede Normalenrichtung $\omega_1^2 = k^2$, $\omega_3^2 = k^2 + a_1^2\cos\alpha^2 + a_2^2\cos\beta^2 + a_3^2\cos\gamma^2$. Die Wellen-

1) Bei geeigneter Wahl der Coordinatenaxen ist in diesem Falle

$$\Pi = A^2[(\theta_2 - \theta_3)^2 + \theta_4^2] + B^2[\theta_5^2 + \theta_6^2 - 2\theta_1(\theta_2 + \theta_3)] + \Gamma^2\theta_1^2$$

und $\omega_1^2 = A^2\sin\alpha^2 + B^2\cos\alpha^2$, $\omega_3^2 = B^2\sin\alpha^2 + \Gamma^2\cos\alpha^2$. Der Ausdruck Π wird $= 0$ z. B. für $\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$, $\theta_3 = \theta_2$, $\theta_1 = 2\frac{B^2}{\Gamma^2}\theta_2$, also ohne dass alle $\theta = 0$ werden.

fläche zerfällt also in eine doppelt gelegte Kugel vom Halbmesser k und ein dieselbe einschliessendes concentrisches Ellipsoid, in dessen Hauptaxen die Coordinatenaxen gelegt sind. Die Quadrate der Halbaxen sind $a_1^2 + k^2$, $a_2^2 + k^2$, $a_3^2 + k^2$; sind a_1, a_2, a_3 einander gleich, so entspricht der vorstehende Ausdruck den Medien von constanter Elasticität.

C) Mit Ausnahme dieses besondern Falles hat also die Gleichung $D(x) = 0$ im Allgemeinen drei ungleiche Wurzeln ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2, und dieselben fallen nur für besondere Normalenrichtungen zusammen. Wir beschränken unsere Untersuchung auf diese Voraussetzung, da der hiermit ausgeschlossene Fall, wo für jede Normalenrichtung eine Doppelwurzel stattfindet, keinerlei Schwierigkeiten darbietet.

Bedeutet D' die Derivirte von D, so folgt für $x = \omega^2$

$$\frac{U^2}{D_{11}} = \frac{V^2}{D_{22}} = \frac{W^2}{D_{33}} = \frac{VW}{D_{23}} = \frac{WU}{D_{31}} = \frac{UV}{D_{12}} = -\frac{P}{D'},$$

wodurch die Componenten des Stosses auf seine Resultante $\sqrt{P}$ als allein übrigbleibende Unbekannte reducirt werden (art. 7, III), und zur Bestimmung des zur Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω gehörigen Strahls σ

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \frac{\partial \omega}{\partial \cos\alpha} = -\frac{1}{2\omega D'} \sum_\mu \sum_\nu D_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\alpha} \\ H &= \frac{\partial \omega}{\partial \cos\beta} = -\frac{1}{2\omega D'} \sum \sum D_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\beta} \\ Z &= \frac{\partial \omega}{\partial \cos\gamma} = -\frac{1}{2\omega D'} \sum \sum D_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (\sigma)$$

oder wegen der vorangehenden Gleichung

$$\Xi = \frac{1}{2\omega P}\left[U^2 \frac{\partial A_{11}}{\partial \cos\alpha} + \cdots + 2VW \frac{\partial A_{23}}{\partial \cos\alpha} + \cdots\right] \text{ u. s. w.} \qquad (\sigma_1)$$

Einer gegebenen Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ entsprechen hiernach im Allgemeinen 6 Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm\omega_3$, also 6 Punkte $\Xi H Z$ der Wellenfläche Δ, welche paarweise zum Ursprunge symmetrisch liegen. Die Wellenfläche besteht also aus 3 Schalen, und ihr Centralpunkt ist auch ihr Mittelpunkt.

15.

In den Fällen (A) und (B) werden die in (σ) stehenden Ausdrücke von $\Xi H Z$ unbestimmt; die Gleichungen (σ_1) zeigen, dass diese Unbestimmtheit gehoben wird, sobald es gelingt, auch für diese Fälle die Verhältnisse von UVW zur $\sqrt{P}$ zu bestimmen. Ist N die Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$, für welche einer von diesen Fällen eintritt, N_1 eine unendlich benachbarte Normalenrichtung $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, so muss man UVW und die zugehörigen Werthe $\Xi H Z$ als die Grenzen ansehen, gegen welche die zu N_1 gehörigen Werthe convergiren, wenn N_1 mit N zusammenfällt.

Was die Durchführung dieser Untersuchung betrifft, so muss ich mich der Uebersichtlichkeit wegen begnügen, im Wesentlichen den Gang derselben nebst den Resultaten anzugeben. Um die Bedingung, dass N_1 von N nur unendlich wenig abweiche, so auszudrücken, dass zugleich ersichtlich wird, nach welcher Richtung die Abweichung stattfindet, führt man noch zwei zueinander und zu N senkrechte Richtungen $N'(\alpha'\beta'\gamma')$ und $N''(\alpha''\beta''\gamma'')$ ein. Ist dann ε (in Bogenmass) der unendlich kleine Winkel, den N_1 mit N bilden soll, und φ der von N' nach N'' hin wachsende Winkel von der Ebene NN' bis zur Ebene NN_1, so erhält man sofort

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \cos\alpha\cos\varepsilon + (\cos\alpha'\cos\varphi + \cos\alpha''\sin\varphi)\sin\varepsilon \\ \cos\beta_1 &= \cos\beta\cos\varepsilon + (\cos\beta'\cos\varphi + \cos\beta''\sin\varphi)\sin\varepsilon \\ \cos\gamma_1 &= \cos\gamma\cos\varepsilon + (\cos\gamma'\cos\varphi + \cos\gamma''\sin\varphi)\sin\varepsilon. \end{aligned}$$

Seien $U_1 V_1 W_1 \omega_1$ die Werthe, welche der Normalenrichtung N_1 entsprechen; für $\varepsilon = 0$ gehen sie über in $UVW\omega$, während ω^2 mehrfache Wurzel ist. Sodann sei

$$\begin{aligned} B_1 &= a_1\cos\alpha_1 + a_6\cos\beta_1 + a_5\cos\gamma_1 \\ B_2 &= a_6\cos\alpha_1 + a_2\cos\beta_1 + a_4\cos\gamma_1 \\ B_3 &= a_5\cos\alpha_1 + a_4\cos\beta_1 + a_3\cos\gamma_1 \end{aligned}$$

und, nach ε und φ geordnet,

$$B_\mu = A_\mu\cos\varepsilon + (A_\mu'\cos\varphi + A_\mu''\sin\varphi)\sin\varepsilon,$$

endlich ausgerechnet

$$(B_1 U_1 + B_2 V_1 + B_3 W_1)^2 = G.$$

Dann haben wir (vergl. art. 5)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial U_1} = \omega_1^2 U_1, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial V_1} = \omega_1^2 V_1, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial W_1} = \omega_1^2 W_1,$$

wo man, wenn man will, für $U_1 V_1 W_1$ auch die Cosinus der Winkel setzen darf, nach denen der Stoss erfolgt.

Für $\varepsilon = 0$ erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_{11} U + A_{12} V + A_{13} W &= \omega^2 U \\ A_{21} U + A_{22} V + A_{23} W &= \omega^2 V \\ A_{31} U + A_{32} V + A_{33} W &= \omega^2 W \end{aligned}$$

wieder. Sodann differentiiren wir nach ε und setzen dann wieder $\varepsilon = 0$. Diese Operation gebe

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon} = \omega', \quad \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon} = U', \quad \frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon} = V', \quad \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} = W'.$$

Dann wird, für $\varepsilon = 0$

$$\lim (B_1 U_1 + B_2 V_1 + B_3 W_1) = A_1 U + A_2 V + A_3 W$$

$$\lim \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(B_1 U_1 + B_2 V_1 + B_3 W_1) = (A_1 U' + A_2 V' + A_3 W')$$
$$+ (A_1' U + A_2' V + A_3' W) \cos\varphi + (A_1'' U + A_2'' V + A_3'' W) \sin\varphi,$$

also, wenn die Effectivwerthe

$$(A_1 U + A_2 V + A_3 W)(A_1' U + A_2' V + A_3' W) = G'$$
$$(A_1 U + A_2 V + A_3 W)(A_1'' U + A_2'' V + A_3'' W) = G''$$

sind, und

$$G' \cos\varphi + G'' \sin\varphi = \Gamma$$

gesetzt wird, immer für $\varepsilon = 0$

$$\lim \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} = A_{11} U U' + \cdots + A_{23}(V W' + W V') + \cdots + \Gamma$$

und

$$\lim \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varepsilon \partial U_1} = A_{11} U' + A_{12} V' + A_{13} W' + \frac{\partial \Gamma}{\partial U},$$

da $U_1 = U + \varepsilon U' \ldots$ ist. Da ausserdem noch für $\varepsilon = 0$

$$\lim \frac{\partial \omega_1{}^2 U_1}{\partial \varepsilon} = \omega^2 U' + 2\omega\omega' U$$

ist, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} (A_{11} - \omega^2) U' + A_{12} V' + A_{13} W' + \frac{\partial \Gamma}{\partial U} &= 2\omega\omega' U \\ A_{21} U' + (A_{22} - \omega^2) V' + A_{23} W' + \frac{\partial \Gamma}{\partial V} &= 2\omega\omega' V \\ A_{31} U' + A_{32} V' + (A_{33} - \omega^2) W' + \frac{\partial \Gamma}{\partial W} &= 2\omega\omega' W, \end{aligned}\right\} \qquad (U')$$

indem die beiden letzten Gleichungen aus der ersten durch Vertauschungen folgen.

Nun ist im Falle (A) des vorigen art. $A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0$, $A_{11} = A_{22} = A_{33} = \omega^2$; die Gleichungen (U) werden also identisch erfüllt, aber aus (U') erhalten wir

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial U} = 2\omega\omega' U, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial V} = 2\omega\omega' V \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial W} = 2\omega\omega' W.$$

Dies gibt für ω' eine kubische Gleichung, deren Wurzeln stets reell sind; ausserdem bestimmen diese drei Gleichungen die Verhältnisse

von $U : V : W$, und liefern also mittelst der Formeln (σ_1) des art. 14 vollkommen bestimmte Lagen für diejenigen Punkte $\Xi H Z$ der Wellenfläche, in denen die singuläre Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ stattfindet, und in denen Δ von der Ebene $X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma = \omega$ berührt wird.

Die Werthe $\Xi H Z$ hängen im Allgemeinen von φ ab; die genauere Untersuchung zeigt, dass der Ort aller Punkte $\Xi H Z$, in denen Δ von der singulären Tangentialebene berührt wird, eine vollständige, ganz im Endlichen verlaufende Kurve dritter Klasse ist. Wenn sie nicht in Oerter niederer Klassen zerfällt, ist sie vom 6. oder vom 4. Grade. In beiden Fällen ist sie frei von Doppel- und Wendepunkten. Im ersten Falle besteht sie aus einem Kurvendreieck, dessen Ecken Rückkehrpunkte sind, und einem dasselbe einschliessenden Oval. Das Loth aus dem Centrum der Wellenfläche auf die Ebene der Kurve trifft dieselbe innerhalb der vom Oval eingeschlossenen Fläche. Im zweiten Falle hat die Kurve eine Gestalt, ähnlich wie die Cardioïden, die von derselben Ordnung und Klasse sind; sie ist Grenzfall der vorigen Kurve, und ergibt sich, wenn zwei Rückkehrpunkte derselben zu Punkten des Ovals werden, wobei die Bögen zwischen diesen beiden Punkten in eine doppeltgelegte, geradlinigte Strecke, ein Stück der Doppeltangente ausarten.

Im Falle (B) des vorigen art. gehen die Gleichungen (U) über in die einzige

$$\frac{U}{A_{23}} + \frac{V}{A_{31}} + \frac{W}{A_{12}} = 0; \qquad (U)$$

nimmt man in (U') für ω^2 den dort $(B1)$ gegebenen Werth von ω_1^2, und setzt zur Abkürzung $A_{31} A_{12} U' + \cdots = K$, so erhält man

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial U} = 2\omega\omega' U + \frac{K}{A_{23}}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial V} = 2\omega\omega' V + \frac{K}{A_{31}}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial W} = 2\omega\omega' W + \frac{K}{A_{12}} \cdot (U')$$

Diese Gleichungen bestimmen $U V W$ proportional zu K; setzt man ihre Werthe in (U) ein, so erhält man für ω' eine quadratische Gleichung, von welcher man durch das in art. 13 mitgetheilte Verfahren beweist, dass ihre Wurzeln stets reell sind.

Für $\Xi H Z$ erhält man wieder völlig bestimmte, im Allgemeinen von φ abhängige Werthe. Der Ort aller Punkte $\Xi H Z$, in denen die Wellenfläche Δ von der singulären Tangentialebene berührt wird, ist in diesem Falle eine vollständige, ganz im Endlichen verlaufende Kurve zweiter Klasse, also entweder das System von zwei getrennten oder zusammenfallenden Punkten, oder eine vollständige Ellipse.

Für die Lehre von den singulären Punkten der Wellenfläche bedarf es nicht ihrer Gleichung in Punktcoordinaten; man kann dieselbe ebenfalls direkt an die Gleichung $D(\omega^2) = 0$ knüpfen. Durch die Substitution

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma, \\ \cos\alpha = \frac{x-\xi}{s}, &\quad \cos\beta = \frac{y-\eta}{s}, \quad \cos\gamma = \frac{z-\zeta}{s} \end{aligned}\right\} \qquad (S)$$

werde

$$\omega = \frac{q}{s}, \quad A_{\mu\nu} = \frac{(x\xi)_{\mu\nu}}{ss},$$

was

$$q = \xi(x-\xi) + \eta(y-\eta) + \zeta(z-\zeta)$$

gibt. Sodann sei

$$\vartheta = \begin{vmatrix} (x\xi)_{11} - q^2 & (x\xi)_{12} & (x\xi)_{13} \\ (x\xi)_{21} & (x\xi)_{22} - q^2 & (x\xi)_{23} \\ (x\xi)_{31} & (x\xi)_{32} & (x\xi)_{33} - q^2 \end{vmatrix},$$

also vermöge der Substitution (S)

$$\vartheta = \frac{1}{s^6} D(\omega^2).$$

Die Gleichung $\vartheta = 0$ bestimmt für jede Lage des Punktes $\xi\eta\zeta$ einen Kegel 6. Grades ϑ_6, dessen Scheitel der Punkt $\xi\eta\zeta$ ist. Sind $\alpha\beta\gamma$ die Richtungswinkel einer Kante dieses Kegels, so erhält man $D(\omega^2) = 0$ für $\omega = \frac{q}{s} = \xi\cos\alpha + \cdots$; folglich ist die Ebene $X\cos\alpha + \cdots = \omega$, welche durch den Scheitel geht und zu dieser Kante senkrecht ist, Tangentialebene der Wellenfläche $\varDelta$ (art. 12 T).

Der Ort aller Tangentialebenen T der Wellenfläche $\varDelta$, welche durch den Scheitel von ϑ_6 gehen, ist also ein Kegel D_6 der 6. Klasse, und beide Kegel sind zu einander supplementär, d. h. sie haben denselben Scheitel und jede Kante des einen ist senkrecht zu einer Tangentialebene des andern.

Damit xyz Punkt einer Doppelkante von ϑ_6 sei, muss gleichzeitig sein

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial z} = 0;$$

führt man diese Gleichungen aus, und macht dann wieder die Substitution (S), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{2\omega D'} \sum_\mu \sum_\nu D_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\alpha} \\ \eta &= -\frac{1}{2\omega D'} \sum \sum D_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\beta} \\ \zeta &= -\frac{1}{2\omega D'} \sum \sum D_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\gamma}. \end{aligned}$$

Aber dies sind (art. 14 $C\sigma$) die Gleichungen der Wellenfläche $\varDelta$ und es folgt, dass der Kegel ϑ_6 stets und nur dann eine Doppelkante hat, wenn sein Scheitel $\xi\eta\zeta$ Punkt der Wellenfläche ist, und zwar ist in einem solchen Falle die Doppelkante von ϑ_6 die Normale der Wellenfläche in jenem Punkte. Die entsprechende Doppelberührebene des Supplementärkegels D_6 ist die Tangentialebene T der Wellenfläche im nämlichen Punkte.

Soll daher $\xi\eta\zeta$ ein singulärer Punkt von $\varDelta$ und der Berührungskegel d_μ von $\varDelta$ in diesem Punkte von der Klasse μ sein, so muss der Supplementärkegel ϑ_μ vom μ^{ten} Grade und jede Kante desselben mehrfache, also mindestens Doppelkante von ϑ_6 sein. Alo muss ϑ_6 zerfallen in den mindestens zweimal gelegten Kegel ϑ_μ und einen zweiten Kegel ϑ'_ν, so dass, wenn $\vartheta = \vartheta_\mu^m \vartheta'_\nu$ wird, $m \overline{\gtrless} 2$ und $\mu m + \nu = 6$ ist. Der Supplementärkegel d'_ν von ϑ'_ν hat dann ebenfalls seinen Scheitel im singulären Punkte $\xi\eta\zeta$, aber er berührt $\varDelta$ ausserhalb desselben. Dies gibt drei Fälle

$$\vartheta = \vartheta_2^2 \vartheta'_2 \qquad (a)$$

$$\vartheta = \vartheta_3^2 \qquad (b)$$

$$\vartheta = \vartheta_2^3, \qquad (c)$$

und es wird durch die in diesen Formeln geforderten Zerfällungen von ϑ, soweit sie statt haben, der singuläre Punkt $\xi\eta\zeta$ von $\varDelta$ sowie das Gleichungspolynom ϑ_μ des Normalenkegels in demselben völlig bestimmt.

Ein ohne grosse Schwierigkeiten ausführbares Beispiel dieses, auch durch Rechnung leicht zu bestätigenden Satzes bietet der bekannte Fall dar, welcher in der Krystalloptik behandelt wird, und in welchem $\varDelta$ in die Fresnel'sche Fläche und eine sie einschliessende Kugel zerfällt. Bei passender Wahl der Coordinatenaxen ist unter den Voraussetzungen der Krystalloptik die Kräftefunction

$$\Pi = k^2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)^2 + a^2(\theta_4^2 - 4\theta_2\theta_3) + b^2(\theta_5^2 - 4\theta_3\theta_1) + c^2(\theta_6^2 - 4\theta_1\theta_2);$$

die Constanten sind der Bedingung unterworfen, dass aus a, b, c als Seiten ein Dreieck gebildet werden könne, und k grösser ist wie der Halbmesser des umschriebenen Kreises.

IV. Die mit den partiellen Differentialgleichungen $(d.)$ verträglichen Unstetigkeiten.

16.

Setzen wir wieder

$$\Theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \cdots + a_6\theta_6,$$

und symbolisch

$$\Pi = \Theta^2,$$

so wird in den Differentialgleichungen (d) des art. 4 allgemein $\Pi_\mu = a_\mu \Theta$, also kann man dieselben in symbolischer Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + a_6 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + a_5 \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_6 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + a_4 \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_5 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + a_4 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + a_3 \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Für die mit diesen Gleichungen verträglichen Unstetigkeiten haben wir also

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = a_1 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right] + a_6 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right] + a_5 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right]$$
$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] = a_6 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right] + a_2 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right] + a_4 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right]$$
$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = a_5 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right] + a_4 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right] + a_3 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right].$$

Den Ausdruck für $\overset{+}{\Theta} - \overset{-}{\Theta} = a_1 \theta_1' + a_2 \theta_2' + \cdots$ haben wir bereits im art. 6 umgeformt; es war

$$Q = \Delta_1 U + \Delta_2 V + \Delta_3 W = M_1 \frac{\partial t}{\partial \xi} + M_2 \frac{\partial t}{\partial \eta} + M_3 \frac{\partial t}{\partial \zeta},$$

und

$$\overset{+}{\Theta} - \overset{-}{\Theta} = -Q.$$

Da längs der Unstetigkeitsfläche Σ t Function von $\xi\eta\zeta$ ist, so können auch, wie von hier ab geschehen soll, UVW und Q als solche aufgefasst werden. Dann liefert die vorstehende Gleichung sofort

$$\left[\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right] \frac{\partial t}{\partial \xi} = -\frac{\partial Q}{\partial \xi}, \quad \left[\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right] \frac{\partial t}{\partial \eta} = -\frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad \left[\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right] + \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right] \frac{\partial t}{\partial \zeta} = -\frac{\partial Q}{\partial \zeta},$$

also erhalten wir

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = -\Delta_1 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right] - \left(a_1 \frac{\partial Q}{\partial \xi} + a_6 \frac{\partial Q}{\partial \eta} + a_5 \frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)$$
$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] = -\Delta_2 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right] - \left(a_6 \frac{\partial Q}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial Q}{\partial \eta} + a_4 \frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)$$
$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = -\Delta_3 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right] - \left(a_5 \frac{\partial Q}{\partial \xi} + a_4 \frac{\partial Q}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right).$$

Es handelt sich nur noch um $\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right]$. Aus dem Ausdrucke für $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ folgt zunächst

$$\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right] = a_1 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right] + a_6 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}\right] + a_5 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z}\right]$$
$$+ a_6 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}\right] + a_2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y}\right] + a_4 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z}\right]$$
$$+ a_5 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right] + a_4 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y}\right] + a_3 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}\right].$$

Zugleich ist längs Σ

$$\frac{\partial \overset{+}{u}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{-}{u}}{\partial t} = U, \quad \frac{\partial \overset{+}{v}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{-}{v}}{\partial t} = V, \quad \frac{\partial \overset{+}{w}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{-}{w}}{\partial t} = W,$$

also

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right] = \frac{\partial U}{\partial \xi} - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] \frac{\partial t}{\partial \xi} \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}\right] = \frac{\partial U}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] \frac{\partial t}{\partial \eta} \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z}\right] = \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] \frac{\partial t}{\partial \zeta}$$
$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}\right] = \frac{\partial V}{\partial \xi} - \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] \frac{\partial t}{\partial \xi} \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y}\right] = \frac{\partial V}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] \frac{\partial t}{\partial \eta} \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z}\right] = \frac{\partial V}{\partial \zeta} - \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] \frac{\partial t}{\partial \zeta}$$
$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right] = \frac{\partial W}{\partial \xi} - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] \frac{\partial t}{\partial \xi} \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y}\right] = \frac{\partial W}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] \frac{\partial t}{\partial \eta} \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}\right] = \frac{\partial W}{\partial \zeta} - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] \frac{\partial t}{\partial \zeta}.$$

Führt man diese Werthe ein und ordnet die Minuenden nach den Vertikal-, die Subtrahenden nach den Horizontalreihen, so wird

$$\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right] = \frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + \frac{\partial M_3}{\partial \zeta} - \Delta_1 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] - \Delta_2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] - \Delta_3 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right].$$

Dies ist oben einzusetzen. Werden zur Abkürzung die Effectivwerthe von

$$\Delta_1 \left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + \frac{\partial M_3}{\partial \zeta}\right) + a_1 \frac{\partial Q}{\partial \xi} + a_6 \frac{\partial Q}{\partial \eta} + a_5 \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = \Xi_1$$
$$\Delta_2 \left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + \frac{\partial M_3}{\partial \zeta}\right) + a_6 \frac{\partial Q}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial Q}{\partial \eta} + a_4 \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = \Xi_2$$
$$\Delta_3 \left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + \frac{\partial M_3}{\partial \zeta}\right) + a_5 \frac{\partial Q}{\partial \xi} + a_4 \frac{\partial Q}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = \Xi_3$$

gesetzt, so folgt

$$(\Delta_{11} - 1) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + \Delta_{12} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + \Delta_{13} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = \Xi_1$$
$$\Delta_{21} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + (\Delta_{22} - 1) \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + \Delta_{23} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = \Xi_2$$
$$\Delta_{31} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + \Delta_{32} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + (\Delta_{33} - 1) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = \Xi_3.$$

Aber die Determinante dieser Gleichungen ist $= 0$, da wir eine den mechanischen Bedingungen entsprechende Unstetigkeitsfläche Σ voraussetzen. Also lassen sich die Unstetigkeiten der Accelerationen eliminiren, wobei jedoch die nämlichen Fälle wie im art. 14 zu unterscheiden sind.

17.

Im allgemeinen Falle (C), wo die Gleichung $D = 0$ nur ungleiche Wurzeln hat, verschwindet die Determinante der vorstehenden Gleichungen, aber nicht jede Unterdeterminante. Als Multiplicatoren nehmen wir nicht Unterdeterminanten, was zu nichts führen würde, sondern mit Rücksicht auf die Gleichungen (I) art. 7 die Grössen UVW selbst; dann erhalten wir

$$U\Xi_1 + V\Xi_2 + W\Xi_3 = 0,$$

was selbstverständlich auch in den andern Fällen passt. Führt man die Werthe von $\Xi_1 \Xi_2 \Xi_3$ ein, so erhält man sofort

$$Q\left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + \frac{\partial M_3}{\partial \zeta}\right) + M_1 \frac{\partial Q}{\partial \xi} + M_2 \frac{\partial Q}{\partial \eta} + M_3 \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = 0$$

oder

$$\frac{\partial Q M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Q M_2}{\partial \eta} + \frac{\partial Q M_3}{\partial \zeta} = 0.$$

Um von den symbolischen zu den Effectivformen zurückzukehren, setzen wir wieder

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega},$$

ausserdem

$$X = A_1 U + A_2 V + A_3 W = M_1 \cos\alpha + M_2 \cos\beta + M_3 \cos\gamma;$$

dann wird

$$Q = \frac{X}{\omega}, \quad M_1 = \frac{\partial X}{\partial \cos\alpha}$$

also

$$Q M_1 = \frac{X}{\omega} \frac{\partial X}{\partial \cos\alpha} = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial XX}{\partial \cos\alpha},$$

wo aber in

$$XX = A_{11} U^2 + \cdots + 2 A_{23} V W + \cdots$$

nur auf die homogenen Coefficienten zu operiren ist. Dies gibt

$$\frac{\partial XX}{\partial \cos\alpha} = U^2 \frac{\partial A_{11}}{\partial \cos\alpha} + \cdots + 2 V W \frac{\partial A_{23}}{\partial \cos\alpha} + \cdots$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln (σ) (σ_1) am Schlusse des art. 14

$$\frac{\partial XX}{\partial \cos\alpha} = 2\omega P \Xi = 2\omega P \frac{\partial \omega}{\partial \cos\alpha},$$

wo wieder $P = U^2 + V^2 + W^2$ ist. Also erhalten wir

$$Q M_1 = P \frac{\partial \omega}{\partial \cos\alpha}, \quad Q M_2 = P \frac{\partial \omega}{\partial \cos\beta}, \quad Q M_3 = P \frac{\partial \omega}{\partial \cos\gamma},$$

so dass unsere Differentialgleichung die folgende sehr einfache Form annimmt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(P \frac{\partial \omega}{\partial \cos\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(P \frac{\partial \omega}{\partial \cos\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(P \frac{\partial \omega}{\partial \cos\gamma}\right) = 0,$$

also zur Bestimmung von P verhilft. Es möge erlaubt sein zu bemerken, dass jede Specialisirung der Kräftefunction Π die Herleitung dieser Gleichung in der vorstehenden, naturgemässen Form derselben in hohem Grade erschwert.

Die Integration dieser Gleichung ist überaus einfach. Auf der Unstetigkeitsfläche Σ_0 nehme man ein Stück $\Delta\Sigma_0$ an und lege durch jeden Punkt m_0 desselben den zugehörigen Strahl σ. Das so entstehende Strahlenbündel durchdringe bis zur Fläche Σ das Volumen $\mathfrak{V}$ und auf Σ das Flächenstück $\Delta\Sigma$; sei M die Mantelfläche von $\mathfrak{V}$. Wird ein unbestimmtes Element der Gesammtoberfläche von $\mathfrak{V}$ durch $\partial\mathfrak{S}$ bezeichnet, und sind lmn die Winkel, welche die über $\partial\mathfrak{S}$ nach Aussen errichtete Normale mit den Axen bildet, so liefert die vorstehende Gleichung, über alle Elemente von $\mathfrak{V}$ integrirt:

$$\int P\left[\frac{\partial \omega}{\partial \cos\alpha} \cos l + \frac{\partial \omega}{\partial \cos\beta} \cos m + \frac{\partial \omega}{\partial \cos\gamma} \cos n\right] \partial\mathfrak{S} = 0.$$

Den Factor von $P\partial\mathfrak{S}$ erhält man, indem man die Geschwindigkeit, mit welcher σ durchlaufen wird, senkrecht auf die Normale über $\partial\mathfrak{S}$ projicirt; er ist also $= 0$ für alle Elemente von M, $= \omega$ in $\Delta\Sigma$ und $= -\omega$ in $\Delta\Sigma_0$; also bleibt

$$\int P\omega\partial\Delta\Sigma - \int P_0\omega\partial\Delta\Sigma_0 = 0,$$

unter P_0 den Anfangswerth von P verstanden. Wenn daher für die entsprechenden Flächenstücke $\Delta\Sigma_0$, $\Delta\Sigma$ die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels genommen werden (art. 10), so ergibt sich

$$P\Delta\Sigma = P_0\Delta\Sigma_0;$$

es ist nicht zweckmässig, das Verhältnis der beiden Flächenelemente in endlichen Zahlen auszudrücken.

Nun ist $\sqrt{P}$ die Resultante aus UVW; sind $\lambda\mu\nu$ die Winkel, welche die Richtung dieses Stosses mit den Axen der xyz bildet, so folgt, wenn wir R statt $\sqrt{P}$ schreiben:

$$\frac{\cos\lambda^2}{D_{11}} = \frac{\cos\mu^2}{D_{22}} = \frac{\cos\nu^2}{D_{33}} = \frac{\cos\mu\cos\nu}{D_{23}} = \frac{\cos\nu\cos\lambda}{D_{31}} = \frac{\cos\lambda\cos\mu}{D_{12}} \tag{1}$$

$$U = R\cos\lambda, \quad V = R\cos\mu, \quad W = R\cos\nu \tag{2}$$

$$R\sqrt{\Delta\Sigma} = R_0\sqrt{\Delta\Sigma_0}. \tag{3}$$

Während die Unstetigkeitsfläche Σ durch das Innere des elastischen Körpers fortschreitet, bleibt für ein und dasselbe unendlich dünne Strahlenbündel die Richtung $\lambda\mu\nu$ des Stosses constant und die Stärke R desselben umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus dem Querschnitte des Strahlenbündels mit der Unstetigkeitsfläche.

Gehören zur Normale von $\Delta\Sigma_0$ drei ungleiche Werthe von ω^2, so gehen von $\Delta\Sigma_0$ drei Strahlenbündel aus. Wird also gegen $\Delta\Sigma_0$ ein Stoss ausgeführt, so bilden sich drei Stosswellen, die sich nach jenen Strahlenbündeln fortpflanzen. Die Stossrichtungen sind durch (1) bestimmt und bilden, wie man aus den Gleichungen (U) art. 14 in bekannter Weise schliesst, ein orthogonales System. Zerlegt man den anfänglichen, gegen $\Delta\Sigma_0$ ausgeübten Stoss nach diesen drei Richtungen, so hat man für jede der drei Stosswellen den Werth von R_0, also UVW selbst.

Wenn ferner diejenigen Theile von Σ_0, zu deren Normale eine mehrfache Wurzel ω gehört, nur als Grenzlagen solcher Flächentheile auftreten, innerhalb deren dieser Ausnahmefall nicht vorkommt, so gelten die Schlussformeln für UVW nicht bloss für letztere, sondern auch noch für jene.

18.

Für die Bestimmung der Stösse, die aus einem vorgeschriebenen Anfangszustande hervorgehen, reichen die Resultate des vorigen art. also nur in dem Falle nicht aus, wo ein *endlicher* Theil von Σ_0 oder kürzer Σ_0 selbst eben und zu einer singulären Tangentialebene von Δ parallel ist. In einem solchen Falle ergeben sich die fehlenden Bedingungen aus art. 16. Da $\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}$ unter den gegenwärtigen Voraussetzungen constant sind, so kann man die Schlussgleichungen des art. 16 in die Form setzen:

$$\Xi_1 = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial QM_1}{\partial U}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial QM_2}{\partial U}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial QM_3}{\partial U}\right)$$
$$\Xi_2 = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial QM_1}{\partial V}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial QM_2}{\partial V}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial QM_3}{\partial V}\right)$$
$$\Xi_3 = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial QM_1}{\partial W}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial QM_2}{\partial W}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial QM_3}{\partial W}\right),$$

da die weggelassenen Glieder im vorliegenden Falle verschwinden; ausserdem folgt:

$$(A_{11} - \omega^2)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + A_{12}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + A_{13}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = \omega^2 \Xi_1$$
$$A_{21}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + (A_{22} - \omega^2)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + A_{23}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = \omega^2 \Xi_2$$
$$A_{31}\left[\frac{d^2 u}{\partial t^2}\right] + A_{32}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + (A_{33} - \omega^2)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = \omega^2 \Xi_3.$$

Im *Falle* (A) des art. 14, wo ω^2 dreifache Wurzel der Gleichung $D = 0$ ist, und wir aus den Gleichungen (U) gar keine Bestimmungen über UVW erhielten, liefern die vorstehenden Formeln die partiellen Differentialgleichungen

$$\Xi_1 = 0, \quad \Xi_2 = 0, \quad \Xi_3 = 0;$$

dieselben enthalten nur die ersten Derivirten von UVW und sind in denselben linear und homogen, mit constanten Coefficienten.

Im *Falle* (B) sei ω^2 die Doppelwurzel; wird ihr Werth in die obigen Gleichungen eingeführt und

$$A_{31}A_{12}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + A_{12}A_{23}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + A_{23}A_{31}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = K$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\frac{K}{A_{23}} = \omega^2 \Xi_1, \quad \frac{K}{A_{31}} = \omega^2 \Xi_2, \quad \frac{K}{A_{12}} = \omega^2 \Xi_3,$$

indem wir wieder von dem ebenfalls sehr leicht zu behandelnden Falle Abstand nehmen, wo zwei von den Grössen A_{23}, A_{31}, A_{12} verschwinden.

Im vorliegenden Falle erhalten wir also zwischen UVW nur zwei Differentialgleichungen

$$A_{23}\Xi_1 = A_{31}\Xi_2 = A_{12}\Xi_3,$$

aber dazu kommt noch die Relation

$$\frac{U}{A_{23}} + \frac{V}{A_{31}} + \frac{W}{A_{12}} = 0,$$

so dass auch hier die nöthige Anzahl von Bedingungsgleichungen vorhanden ist, um UVW aus ihrem längs Σ_0 vorgeschriebenen Verlaufe für die übrigen Theile des Raumes zu bestimmen.

Im besondern Falle der Krystalloptik ist die Integration der Differentialgleichungen, die man mutatis mutandis für den vorliegenden Fall findet, mit keinen Schwierigkeiten verbunden.

V. Ueber die Modification der Unstetigkeiten an der Grenzfläche zweier Mittel.

19.

Seien $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ die Räume, welche zwei einander berührende elastische feste Körper in ihrer Gleichgewichtslage ausfüllen, und $\mathfrak{S}$ die Grenzfläche zwischen beiden Räumen; die auf $\mathfrak{R}'$ bezüglichen Grössen werden wir mit einem Accent versehen, im Uebrigen alle bisherigen Bezeichnungen beibehalten. Sollen die nämlichen Körpertheilchen, welche während des Gleichgewichtes einander längs $\mathfrak{S}$ berührten, auch während der Bewegung in Berührung bleiben, so muss längs $\mathfrak{S}$

$$u' = u, \quad v' = v, \quad w' = w \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}(\varrho' \Pi_1' - \varrho \Pi_1)\cos\lambda + (\varrho' \Pi_6' - \varrho \Pi_6)\cos\mu + (\varrho' \Pi_5' - \varrho \Pi_5)\cos\nu = 0\\ (\varrho' \Pi_6' - \varrho \Pi_6)\cos\lambda + (\varrho' \Pi_2' - \varrho \Pi_2)\cos\mu + (\varrho' \Pi_4' - \varrho \Pi_4)\cos\nu = 0\\ (\varrho' \Pi_5' - \varrho \Pi_5)\cos\lambda + (\varrho' \Pi_4' - \varrho \Pi_4)\cos\mu + (\varrho' \Pi_3' - \varrho \Pi_3)\cos\nu = 0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

bleiben, wenn $\lambda\mu\nu$ die Richtungswinkel der Normale über $\mathfrak{S}$ bedeuten.

Die Bedingungen (1) gelten ununterbrochen, die Bedingungen (2) solange die ersten Derivirten der Verschiebungscomponenten nicht unstetig werden, also falls dies eintritt, vor und nach dem Stosse. Die Gleichungen (2) und diejenigen, welche sich aus (1) durch Differentiiren ergeben, liefern ohne Weiteres die Grenzbedingungen für die Reflection und Brechung eines auf die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ einfallenden Stosses, sobald die Anzahl und Beschaffenheit der neu entstehenden Unstetigkeitsflächen ermittelt ist.

20.

Sei

$$t = f(\xi\eta\zeta) \tag{Σ}$$

eine aus $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{S}$ einfallende Unstetigkeitsfläche Σ, d. h. t Lösung der Differentialgleichung

$$\varDelta\left(\frac{\partial t}{\partial\xi}, \frac{\partial t}{\partial\eta}, \frac{\partial t}{\partial\zeta}\right) = 0.$$

Ebenso sei

$$t' = f'(\xi\eta\zeta) \tag{Σ'}$$

eine durch Reflection oder durch Brechung an $\mathfrak{S}$ aus Σ hervorgehende Unstetigkeitsfläche, d. h.

$$\varDelta'\left(\frac{\partial t'}{\partial\xi}, \frac{\partial t'}{\partial\eta}, \frac{\partial t'}{\partial\zeta}\right) = 0,$$

wo $\varDelta'$ im ersten Falle den auf $\mathfrak{R}$, im andern den auf $\mathfrak{R}'$ bezüglichen

Ausdruck bedeutet. In beiden Fällen lautet die Grenzbedingung

$$t' = t, \tag{3}$$

weil die sämmtlichen Stösse, zu denen Σ Veranlassung gibt, einen der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ angehörigen materiellen Punkt gleichzeitig treffen müssen. Schneidet also Σ die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ zur Zeit t in der Kurve l, so muss l zur nämlichen Zeit $t' = t$ auch der Schnitt von $\mathfrak{S}$ mit Σ' sein. Für jeden Punkt $\xi\eta\zeta$ des von l überschrittenen Theiles von $\mathfrak{S}$ muss sich also für t' derselbe Werth ergeben wie für t, was die Grenzbedingung ist.

Aus (3) folgt sofort, dass an $\mathfrak{S}$ entlang

$$\frac{\partial t'}{\partial\xi} - \frac{\partial t}{\partial\xi} : \frac{\partial t'}{\partial\eta} - \frac{\partial t}{\partial\eta} : \frac{\partial t'}{\partial\zeta} - \frac{\partial t}{\partial\zeta} = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$$

ist; wir setzen

$$\frac{\partial t'}{\partial\xi} - \frac{\partial t}{\partial\xi} = \frac{k}{\omega}\cos\lambda, \quad \frac{\partial t'}{\partial\eta} - \frac{\partial t}{\partial\eta} = \frac{k}{\omega}\cos\mu, \quad \frac{\partial t'}{\partial\zeta} - \frac{\partial t}{\partial\zeta} = \frac{k}{\omega}\cos\nu; \tag{4}$$

die Form, in welcher wir den Proportionalitätsfactor angenommen haben, wird sich in der Folge rechtfertigen. Wenn daher

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial\xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial\eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \quad \frac{\partial t}{\partial\zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega}\\ \frac{\partial t'}{\partial\xi} = \frac{\cos\alpha'}{\omega'}, \quad \frac{\partial t'}{\partial\eta} = \frac{\cos\beta'}{\omega'}, \quad \frac{\partial t'}{\partial\zeta} = \frac{\cos\gamma'}{\omega'}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

gesetzt wird, so folgt auch

$$\frac{\cos\alpha'}{\omega'} = \frac{\cos\alpha + k\cos\lambda}{\omega}, \quad \frac{\cos\beta'}{\omega'} = \frac{\cos\beta + k\cos\mu}{\omega}, \quad \frac{\cos\gamma}{\omega'} = \frac{\cos\gamma + k\cos\nu}{\omega}; \tag{6}$$

wir setzen ω und ω', wie immer, als homogene Functionen ersten Grades der drei Cosinus voraus, von denen sie abhängen, so dass ihre partiellen Derivirten nach denselben eine völlig bestimmte Bedeutung haben.

Dann sind (art. 8 m) die Gleichungen des Strahls σ die folgenden

$$\xi = \xi_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \quad \eta = \eta_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \quad \zeta = \zeta_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}; \tag{m}$$

derselbe geht zur Zeit $t = 0$ vom Punkte $m_0(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ der Fläche Σ_0 aus; trifft er die Fläche $\mathfrak{S}$ im Punkte $p(xyz)$ und zur Zeit τ, so folgt

$$x = \xi_0 + \tau\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \quad y = \eta_0 + \tau\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \quad z = \zeta_0 + \tau\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}. \tag{pm_0}$$

Zum Ausgangspunkte m_0 und dem Einfallspunkte p berechnen wir einen Punkt $m_0'(\xi_0'\eta_0'\zeta_0')$ so, dass auch

$$x = \xi_0' + \tau\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}, \quad y = \eta_0' + \tau\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}, \quad z = \zeta_0' + \tau\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'} \tag{pm_0'}$$

wird.

Dieser Punkt m_0' heisst Bild von m_0; der Ort aller Punkte m_0' ist eine Fläche Σ_0', welche man Bild von Σ_0 nennen kann.

Wenn, wie wir sogleich beweisen werden, $\alpha'\beta'\gamma'$ die Richtungswinkel der Normale von Σ_0' im Punkte m_0' sind, und dies für alle Punkte dieser Fläche gilt, so ist sie die Anfangslage einer der Gleichung $\Delta' = 0$ entsprechenden Unstetigkeitsfläche Σ':

$$\xi = \xi_0' + t'\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}, \quad \eta = \eta_0' + t'\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}, \quad \zeta = \zeta_0' + t'\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'}, \qquad (m')$$

wie aus der in art. 9 für Σ gegebenen Verification folgt, und zwar ist dann Σ' diejenige Unstetigkeitsfläche, welche der Grenzbedingung $t' = t$ unserer Aufgabe genügt. Denn nimmt man, um die Zeitpunkte t, t' zu bestimmen, wo Σ und Σ' auf $\mathfrak{S}$ zusammentreffen, in den Gleichungen (m) (m') für $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten xyz des nämlichen Punktes p von $\mathfrak{S}$, so erhält man aus (m') und (pm_0')

$$0 = (t'-\tau)\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}, \quad 0 = (t'-\tau)\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}, \quad 0 = (t'-\tau)\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'},$$

also $t' = \tau$, und ebenso $t = \tau$ aus (m) und (pm_0), also aus beiden zusammen $t' = t$, wie die Grenzbedingung es fordert.

Der noch zu beweisende Hülfssatz ergibt sich wie folgt. Aus (pm_0') hat man, mit leicht verständlicher Bezeichnung

$$\Sigma\cos\alpha'\delta\xi_0' + \omega'\delta\tau + \tau\varepsilon' = \Sigma\cos\alpha'\delta x;$$

hier ist

$$\varepsilon' = \cos\alpha'\delta\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}\right) + \cos\beta'\delta\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}\right) + \cos\gamma'\delta\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'}\right),$$

also nach art. 9 $\varepsilon' = 0$. Dies gibt zunächst

$$\Sigma\cos\alpha'\delta\xi_0' = \Sigma\cos\alpha'\delta x - \omega'\delta\tau.$$

Sodann folgt aus 6, weil

$$\Sigma\cos\lambda\delta x = 0$$

ist:

$$\Sigma\cos\alpha'\delta x = \frac{\omega'}{\omega}\Sigma\cos\alpha\delta x,$$

mithin weiter

$$\Sigma\cos\alpha'\delta\xi_0' = \frac{\omega'}{\omega}(\Sigma\cos\alpha\delta x - \omega\delta\tau).$$

Endlich folgt aus (pm_0)

$$\Sigma\cos\alpha\delta x = \Sigma\cos\alpha\delta\xi_0 + \omega\delta\tau + \tau\varepsilon = \omega\delta\tau,$$

da ε dieselbe Bedeutung hat wie in art. 9, also $\varepsilon = 0$, und nach Voraussetzung auch

$$\Sigma\cos\alpha\delta\xi_0 = 0$$

ist. Es folgt

$$\Sigma\cos\alpha'\delta\xi_0' = 0,$$

also sind $\alpha'\beta'\gamma'$ in der That die Richtungswinkel der Normale von Σ_0' im Punkte m_0', w. z. v. w.

21.

Wir erhalten für die Fortpflanzung der Unstetigkeitsflächen durchaus die nämlichen Gesetze, welche aus der Optik für die Fortpflanzung der Lichtwellen bekannt sind, und wo das, wie im gegenwärtigen art., in der Natur der Sache liegt, auch durch dieselben Methoden. Es dürfte daher nicht überflüssig sein, solchen Berührungspunkten gegenüber auch den wesentlichen Unterschied zwischen beiden Theorien hervorzuheben. Ich erblicke denselben keineswegs darin, dass die vorliegenden Untersuchungen für jede Wellenfläche gültig sind; man kann sie in derselben Allgemeinheit auf die Lehre vom Lichte übertragen, wenn man die Gesichtspunkte der Undulationstheorie zu Grunde legt und dann, wie das nicht anders möglich ist, die beiden Huyghens'schen Principien zu Hülfe nimmt, um die Begriffe der Lichtwellen und der Wellenfläche aufeinander zurückzuführen und aus einem von ihnen den Begriff des Lichtstrahls abzuleiten. Der wesentliche Unterschied, auf den wir aufmerksam zu machen wünschen, ist der, dass die Theorie der Unstetigkeiten auf alle diese Begriffe direct und mit Nothwendigkeit führt, ohne sie auf Umwegen einführen zu müssen oder für diesen Zweck secundärer Principien zu bedürfen.

Seien T, T' $\mathfrak{T}$ die Tangentialebenen von Σ, Σ', $\mathfrak{S}$ in den Punkten m, m', p. Das Gleichungspolynom der Ebene T ist (art. 8 T)

$$T = (X - \xi_0)\cos\alpha + (Y - \eta_0)\cos\beta + (Z - \zeta_0)\cos\gamma - \omega t$$

und kann mittelst der Gleichungen (pm_0) in die Form

$$T = (X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma - \omega(t - \tau)$$

gebracht werden. Legt man um $p(xyz)$ als Centralpunkt die Centralfläche $C_{t-\tau}$, so ist m Punkt derselben und, wie die zweite Form von T zeigt, $T = 0$ ihre Tangentialebene in m.

Wird daher für jeden Punkt p einer beliebigen Fläche $\mathfrak{S}$ (vergl. art. 11) die Zeit τ bestimmt, in welcher die Unstetigkeitsfläche Σ von Σ_0 aus dort eintrifft, und dann um ihn als Centralpunkt die Centralfläche $C_{t-\tau}$ gelegt, so hüllt die zur Zeit t stattfindende Unstetigkeitsfläche Σ diese Schaar von Centralflächen ein. Dieser Satz entspricht dem Princip der Erregungscentra in der Huyghens'schen Theorie des Lichtes.

Dieselbe Construction gilt auch für die, von Σ_0' aus fortschreitende Unstetigkeitsfläche Σ', wofern man nur die aus der entsprechenden Wellenfläche $\varDelta'$ hervorgehende Centralfläche $C'_{t-\tau}$ benutzt.

Die Gleichungspolynome der Ebenen T' und $\mathfrak{T}$ lauten

$$T' = (X-x)\cos\alpha' + (Y-y)\cos\beta' + (Z-z)\cos\gamma' - \omega'(t-\tau)$$
$$\mathfrak{T} = (X-x)\cos\lambda + (Y-y)\cos\mu + (Z-z)\cos\nu;$$

die Formeln (6) des vorigen art. lehren also, dass identisch

$$\frac{T'}{\omega'} - \frac{T}{\omega} = \frac{k}{\omega}\mathfrak{T}$$

ist, d. h. dass die drei Ebenen T', T und $\mathfrak{T}$ durch die nämliche Gerade G gehen. Um G zu construiren, legt man also in bekannter Weise (1) an $\mathfrak{S}$ die Tangentialebene $\mathfrak{T}$ im Einfallspunkte p von σ, (2) an $C_{t-\tau}$ die Tangentialebene T in demjenigen Punkte m dieser Fläche, in welchem σ mündet; dann ist G der Durchschnitt beider und die gesuchte Ebene T' ergibt sich als eine durch G an $C'_{t-\tau}$ zu legende Tangentialebene. Ist σ' der Strahl aus p nach dem Berührungspunkte von T', so ist seine Richtung so wie die Geschwindigkeit, mit welcher er durchlaufen wird, unabhängig von t und τ; beide ergeben sich also insbesondere auch, wenn man $t-\tau=1$ nimmt, also für jeden Einfallspunkt p die Centralflächen $C_{t-\tau}$, $C'_{t-\tau}$ durch die Wellenflächen $\varDelta$, $\varDelta'$ ersetzt.

22.

Wir erhalten demnach für die Brechung und Reflection der Unstetigkeitsflächen die nämlichen Constructionen, welche Huyghens für das Licht gefunden hat.

Handelt es sich um die Reflection einer aus $\mathfrak{R}$ einfallenden Unstetigkeitsfläche Σ, so ist $\varDelta'$ die dem Raume $\mathfrak{R}$ eigenthümliche Wellenfläche, also mit $\varDelta$ identisch. Die aus G an $\varDelta$ zu legende Tangentialebene T' liefert indess nur dann eine Lösung unserer Aufgabe, wenn der aus p nach dem Berührungspunkte von T' führende Strahl bei p zunächst in den Raum $\mathfrak{R}$ zurückkehrt.

Bei der Brechung aus $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{R}'$ ist $\varDelta'$ die dem Raume $\mathfrak{R}'$ eigenthümliche Wellenfläche; durch G werden alle Tangentialebenen an $\varDelta'$ gelegt, und diejenigen Strahlen aus p nach den Berührungspunkten, welche von p aus zunächst in den Raum $\mathfrak{R}'$ eindringen, sind die gebrochnen Strahlen im engern Sinne.

Nun wissen wir aus den art. 11 und 12, dass die hier auftretenden Strahlensysteme wesentlich durch die Wellenfläche charakterisirt

sind, zu welcher sie gehören, indem diese in geometrischer Form die Strahlen- und Normalenrichtungen einander zuordnet und gleichzeitig die entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten angibt.

Andererseits gehört zu jeder Wellenfläche $\varDelta$ ein bestimmtes Reflectionsgesetz, welches durch die erste, und zu jedem Paar von Wellenflächen $\varDelta$, $\varDelta'$ ein bestimmtes Brechungsgesetz, welches durch die zweite Huyghens'sche Construction ausgedrückt ist.

Lässt man als reflectirte Strahlen alle gelten, welche sich aus der ersten, und als gebrochne alle, die sich aus der zweiten Construction ergeben, so folgt aus der im art. 20 geleisteten Verification der Satz:

Wird ein zur Wellenfläche $\varDelta$ gehöriges Strahlensystem an einer beliebigen Fläche $\mathfrak{S}$ nach den in den Huyghens'schen Constructionen enthaltenen Gesetzen reflectirt und der Wellenfläche $\varDelta'$ gemäss gebrochen, so gehört jedes reflectirte Strahlensystem zur nämlichen Wellenfläche $\varDelta$ und jedes gebrochne zur Wellenfläche $\varDelta'$.

Und wenn man sich der Grenzbedingung $t'=t$ als Gleichung von $\mathfrak{S}$ erinnert und bedenkt, dass mit t zugleich auch $t-\text{const.}$ Lösung der Differentialgleichung $\varDelta=0$ ist, während beiden Lösungen das nämliche, zur Wellenfläche $\varDelta$ gehörige Strahlensystem entspricht, so erkennt man den Satz:

Sind zwei Strahlensysteme im Raume vorhanden, welche zu beliebigen Wellenflächen $\varDelta$, $\varDelta'$ gehören, so gibt es, soweit beide einander durchdringen, unzählig viel Flächen $\mathfrak{S}$, an denen das eine aus dem andern durch Brechung nach der für diese Wellenflächen geltenden Huyghens'schen Construction hervorgeht.

Sind die Wellenflächen $\varDelta$, $\varDelta'$ so beschaffen, dass die Huyghens'sche Construction für einen einzigen einfallenden Strahl mehrere reflectirte Strahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ und mehrere gebrochne Strahlen $\sigma', \sigma'', \ldots$ liefert, so entspringen aus einem einzigen einfallenden Strahlensystem $(\sigma\sigma)$ mehrere reflectirte Strahlensysteme $(\sigma_1\sigma_1)$, $(\sigma_2\sigma_2), \ldots$ und mehrere gebrochne Strahlensysteme $(\sigma'\sigma')$, $(\sigma''\sigma''), \ldots$; für jedes einzelne von ihnen gelten die vorstehenden Sätze.

Diesen reflectirten und gebrochnen Strahlensystemen entsprechen ebensoviel reflectirte und gebrochne Unstetigkeitsflächen $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ und $\Sigma', \Sigma'', \ldots$ Das im vorigen art. gefundene Resultat zeigt, dass auch für diese Flächen eine der von Huyghens gefundenen Constructionen gilt. Sollen sie für die Zeit t dargestellt werden, so ermittle man für jeden Punkt p der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ die von Σ_0 abhängige Zeit τ, wann Σ dort anlangt; legt man dann um ihn als Centralpunkt die

Centralflächen $C_{t-\tau}$, $C'_{t-\tau}$, so sind Σ_1, Σ_2, ... Einhüllende der ersten, Σ', Σ'', ... Einhüllende der zweiten Schaar von Centralflächen, und zwar sind sie diejenigen Theile der vollständigen einhüllenden Flächen, in denen beziehungsweise die Strahlensysteme $(\sigma_1\sigma_1)$, $(\sigma_2\sigma_2)$, ... $(\sigma'\sigma')$, $(\sigma''\sigma'')$, ... münden.

Alle diese Constructionen zusammengenommen sind der geometrische Ausdruck für die Lösung der Aufgabe, zwei längs einer Fläche $\mathfrak{S}$ aneinander grenzende Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ stetig nach Werthen von t so zu ordnen, dass in jenem

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) = 0,$$

in diesem

$$\Delta'\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) = 0$$

wird, wo die Grenzbedingung $t' = t$ durch die Bedingung ersetzt ist, dass t nicht bloss innerhalb $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, sondern auch beim Durchgange durch $\mathfrak{S}$ stetig bleiben soll.

Sie leisten durch Wiederholung die vollständige Lösung dieser Aufgabe, soweit die Anfangsbedingungen die verlangte Ordnung des Raumes nach Werthen von t überhaupt nach sich ziehen, auch für den Fall, wo man sich den unbegrenzten Raum in beliebige Theile $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, ... zerlegt, und jedem derselben eine bestimmte Differentialgleichung obiger Form oder eine bestimmte Wellenfläche Δ, Δ', Δ'', ... zugeordnet denkt, immer in geometrischer Form und bei ausschliesslich geometrischer Deutung der Differentialgleichungen. Die Frage nach der Lösbarkeit dieser Aufgabe durch analytische Ausdrücke würde in die Eliminationstheorie gehören.

23.

Es fragt sich nun, wie die reflectirten und gebrochnen Strahlen im engern Sinne sich analytisch voneinander unterscheiden. Lassen wir, um wieder beide Fälle zu vereinigen, dahingestellt, ob der Ausdruck Δ' mit Δ übereinstimmt oder nicht, so haben wir für den aus σ durch Reflection oder Brechung hervorgehenden Strahl σ' aus art. 20

$$\frac{\cos\alpha'}{\omega'} = \frac{\cos\alpha + k\cos\lambda}{\omega}, \quad \frac{\cos\beta'}{\omega'} = \frac{\cos\beta + k\cos\mu}{\omega}, \quad \frac{\cos\gamma'}{\omega'} = \frac{\cos\gamma + k\cos\nu}{\omega}, \qquad (\alpha)$$

ausserdem

$$\Delta'\left(\frac{\cos\alpha'}{\omega'}, \frac{\cos\beta'}{\omega'}, \frac{\cos\gamma'}{\omega'}\right) = 0,$$

also

$$\Delta'\left(\frac{\cos\alpha + k\cos\lambda}{\omega}, \frac{\cos\beta + k\cos\mu}{\omega}, \frac{\cos\gamma + k\cos\nu}{\omega}\right) = 0. \qquad (\beta)$$

Jede reelle Wurzel k dieser Gleichung liefert, in (α) eingesetzt, einen reellen Werth für ω', und mit Zugrundelegung desselben eine unzweideutig bestimmte Richtung $\alpha'\beta'\gamma'$ für die Normale der neu erzeugten, nach dieser Richtung mit der Geschwindigkeit ω' fortschreitenden Unstetigkeitsfläche. Unsere Aufgabe ist diese, zu unterscheiden, ob dies eine nach $\mathfrak{R}$ zurückkehrende oder eine in den Raum $\mathfrak{R}'$ übergehende Fläche ist, d. h. ob der neu erzeugte Strahl σ' vom Einfallspunkte aus zunächst nach $\mathfrak{R}$ zurückführt oder nach $\mathfrak{R}'$ übergeht.

Die Geschwindigkeitscomponenten, mit denen σ' durchlaufen wird, sind

$$\Xi' = \frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}, \qquad H' = \frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}, \qquad Z' = \frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'};$$

zerlegt man nach der Normale von $\mathfrak{S}$ und zwei dazu senkrechten Richtungen, so ist

$$\mathfrak{N}' = \frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}\cos\lambda + \frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}\cos\mu + \frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'}\cos\nu$$

die Componente nach der Normale, und zwar nach der durch $\lambda\mu\nu$ bestimmten Richtung derselben.

Im Vorangehenden war keine Veranlassung vorhanden, in dieser Hinsicht genauere Bestimmungen zu treffen; ich setze nunmehr fest, es sollen $\lambda\mu\nu$ oder ihre Cosinus so gewählt werden, dass die durch sie bestimmte Richtung von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{R}'$ führt.

Dann ist σ' ein gebrochner oder ein reflectirter Strahl, jenachdem $\mathfrak{N}'$ positiv oder negativ ist.

Dieses Kriterium muss nun auf die Gleichung (β) übertragen werden. Sei

$$\frac{\cos\alpha'}{\omega'} = p, \quad \frac{\cos\beta'}{\omega'} = q, \quad \frac{\cos\gamma'}{\omega'} = r, \qquad (1)$$

also

$$\Delta'(pqr) = 0. \qquad (\beta)$$

Ist das vollständige Differential

$$\partial\Delta'(pqr) = P\partial p + Q\partial q + R\partial r,$$

ferner

$$Pp + Qq + Rr = N, \quad P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu = Z,$$

so folgt aus (β)

$$N\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'} = P, \quad N\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'} = Q, \quad N\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'} = R,$$

also

$$\mathfrak{N}' = \frac{Z}{N}.$$

Setzen wir nun für pqr ihre Werthe aus (α) ein, mithin

$$p = \frac{\cos\alpha + k\cos\lambda}{\omega}, \quad q = \frac{\cos\beta + k\cos\mu}{\omega}, \quad r = \frac{\cos\gamma + k\cos\nu}{\omega}, \qquad (2)$$

und betrachten in der Gleichung (β) k und ω als Variable, so folgt auch

$$Z\partial k - N\partial\omega = 0,$$

also haben wir unter dieser Voraussetzung

$$\mathfrak{R}' = \frac{\partial\omega}{\partial k}.$$

Um zu untersuchen, ob einer reellen Wurzel k der Gleichung (β) ein nach $\mathfrak{R}'$ oder ein nach $\mathfrak{R}$ führender Strahl σ' entspricht, muss man also in dieser Gleichung ω als Function von k betrachten; dann findet der erste oder der zweite Fall statt, jenachdem

$$\frac{\partial\omega}{\partial k}$$

positiv oder negativ ist, vorausgesetzt, dass die Normalenrichtung $\lambda\mu\nu$ von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{R}'$ führt.

24.

Die Anwendung dieses Kriteriums auf die Wellenfläche der homogenen elastischen Körper liefert die folgende Eigenschaft derselben, welche vielen, aber nicht allen Mittelpunktsflächen zukommt:

Die Anzahl der Tangentialebenen, welche durch eine Gerade G an die Wellenfläche Δ' eines homogenen elastischen Körpers gelegt werden können, ist stets eine gerade Zahl $2m$, und m eine der Zahlen 0, 1, 2, 3.

Legt man eine Ebene $\mathfrak{T}$ durch G und den Mittelpunkt der Fläche Δ', und zieht aus letzterm die Strahlen nach den $2m$ Berührungspunkten, so erhält man auf der einen Seite von $\mathfrak{T}$ ebenso viel Strahlen wie auf der andern, also auf jeder Seite m Strahlen.

Ist

$$\begin{vmatrix} \Delta'_{11} - 1 & \Delta'_{12} & \Delta'_{13} \\ \Delta'_{21} & \Delta'_{22} - 1 & \Delta'_{23} \\ \Delta'_{31} & \Delta'_{32} & \Delta'_{33} - 1 \end{vmatrix} = 0$$

die Differentialgleichung $\Delta' = 0$ und, wenn für die Derivirten von t' ihre Werthe aus (α) eingesetzt werden:

$$\Delta'_{\mu\nu} = \frac{A'_{\mu\nu}}{\omega'^2} = \frac{\mathfrak{A}_{\mu\nu}}{\omega^2},$$

so dass

$$\mathfrak{A}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + 2B_{\mu\nu}k + C_{\mu\nu}k^2$$

von ω frei und ganze Function zweiten Grades von k ist, so können wir statt der Gleichung (β) die folgende nehmen

$$K = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11} - \omega^2 & \mathfrak{A}_{12} & \mathfrak{A}_{13} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} - \omega^2 & \mathfrak{A}_{23} \\ \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{32} & \mathfrak{A}_{33} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0;$$

dann entsprechen die aus G an Δ' zu legenden Tangentialebenen den reellen Wurzeln k dieser Gleichung, vorausgesetzt dass man für ω denjenigen festen Werth nimmt, welcher dem einfallenden Strahl σ entspricht.

Um die Bedingung zur Geltung zu bringen, dass nur reelle Werthe von k und ω in Betracht kommen, stellen wir k als Abscisse, ω als Ordinate in einem rechtwinkligen Axensystem dar. Dann ist K eine Kurve 6. Grades, und die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden $\omega = \text{const.}$ eine der Zahlen 6, 4, 2, 0, was der erste Theil des obigen Satzes ist. Ist $2m$ die Anzahl der Schnittpunkte, so behauptet der zweite Theil des Satzes, dass $\frac{\partial\omega}{\partial k}$ in m von ihnen positiv, in den m übrigen negativ ist. Der Beweis hiervon ergibt sich wie folgt.

Für jedes reelle k sind alle Wurzeln ω reell, paarweise entgegen gesetzt gleich, und keine von ihnen wird jemals $= 0$ (art. 13). Die Kurve hat also 6 reelle Zweige, die sich von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ erstrecken; drei von ihnen, ω_1, ω_2 und ω_3, verlaufen auf der Halbebene $\omega > 0$, die drei andern sind zu ihnen in Bezug auf die Axe der k symmetrisch. Diese Axe wird von keinem Zweige geschnitten.

Solange k endlich bleibt, ändern ω_1, ω_2, ω_3 sich stetig mit k. Werden, während k sich ununterbrochen in der nämlichen Richtung ändert, zwei Wurzeln ω_1, ω_2 einander gleich, so trennen sie sich darüber hinaus wieder, ohne imaginär zu werden; also kehrt die Kurve dort nicht zu frühern Werthen von k zurück, sondern es bildet sich ein Doppelpunkt.

Wenn also, während k fortwährend zunimmt, zwei Zweige ω_1 und ω_2 zum nämlichen Punkte führen, so gehen von dort zwei Zweige weiter zu grössern k; welchen von beiden man als Fortsetzung von ω_1 betrachten will, ist für unsern Zweck gleichgültig. Hat man aber hierüber für jeden Doppelpunkt verfügt, so hat jeder Zweig der Kurve die wesentliche Eigenschaft, dass ein Punkt, welcher ihn von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ durchläuft, während dessen niemals zu kleinern k zurückkehrt, sondern ununterbrochen zu grössern k fortschreitet. Dies ist die erste Eigenschaft der Kurvenzweige, welche hier in Betracht kommt.

Die zweite, welche mit dieser zusammen den Beweis unserer Behauptung liefert, besteht darin, dass sowohl für $k = -\infty$ wie für $k = +\infty$ drei Wurzeln $\omega = +\infty$ die drei andern $= -\infty$ werden.

Aus beiden zusammen folgt, dass ein Punkt, welcher auf der Halbebene $\omega > 0$ einem Kurvenzweige von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ folgt, stets zu grössern k fortschreitet, aber Anfangs von unendlich grossen zu endlichen Werthen von ω sinkt, und schliesslich wieder von endlichen zu unendlich grossen Werthen von ω steigt. Wenn aber ein solcher Zweig von einer Geraden $\omega = \text{const.}$ überhaupt geschnitten wird, so muss er durch diese Gerade ebenso oft von grössern zu kleinern, wie von kleinern zu grössern ω gehen. Da er jedesmal zu grössern k fortschreitet, so ist $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ im ersten Falle negativ, im andern positiv. Beide Fälle treten für jeden einzelnen Zweig gleich oft ein, also gilt dies auch von allen Zweigen zusammengenommen, w. z. b. w.

Die Huyghens'sche Construction liefert jedenfalls eine Tangentialebene an Δ, diejenige, welche dem nach $\mathfrak{R}'$ hinein sich fortsetzenden Strahl σ entspricht, also auch mindestens eine, welcher ein reflectirter Strahl entspricht. Die Anzahl der reflectirten Strahlen ist also 1, 2 oder 3, die der gebrochnen 0, 1, 2 oder 3, was im Ganzen 12 verschiedene Fälle gibt.

Nur in einem von diesen Fällen, nämlich wenn beide Zahlen = 3 sind, reichen die Grenzbedingungen allein hin, um die entstehenden Unstetigkeiten völlig zu bestimmen; in den 11 übrigen Fällen bedarf es hierfür der Integration der Differentialgleichungen (d) art. 4.

25.

Es handelt sich nur noch um den Nachweis dieses Satzes, nicht um ausgeführte Rechnungen, deren Resultate wenig lohnend sein würden.

Sei wieder l die Kurve, in welcher die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ zur Zeit t von Σ geschnitten wird. Wird ein an $\mathfrak{S}$ grenzender Punkt von l überschritten, so möge die Gesammtzunahme, welche ein ihm zugeordneter Werth, z. B. $\frac{\partial u}{\partial t}$ oder Π_1' erlangt, durch

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \qquad (\Pi_1')$$

bezeichnet werden.

Nun bleibt sowohl vor- wie nachher in einem solchen Punkte [(1) art. 19] $u' = u$, $v' = v$, $w' = w$ also auch $\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$ u. s. w., also folgt weiter

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad \left(\frac{\partial v'}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right), \quad \left(\frac{\partial w'}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right), \tag{I}$$

und aus demselben Grunde folgt aus (2) art. 19

$$\left.\begin{aligned} \varrho'(\Pi_1'\cos\lambda + \Pi_6'\cos\mu + \Pi_5'\cos\nu) &= \varrho(\Pi_1\cos\lambda + \Pi_6\cos\mu + \Pi_5\cos\nu) \\ \varrho'(\Pi_6'\cos\lambda + \Pi_2'\cos\mu + \Pi_4'\cos\nu) &= \varrho(\Pi_6\cos\lambda + \Pi_2\cos\mu + \Pi_4\cos\nu) \\ \varrho'(\Pi_5'\cos\lambda + \Pi_4'\cos\mu + \Pi_3'\cos\nu) &= \varrho(\Pi_5\cos\lambda + \Pi_4\cos\mu + \Pi_3\cos\nu). \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Es ist für unsern Zweck wünschenswerth, noch ein Formelsystem abzuleiten. Da an $\mathfrak{S}$ vor und nach dem Durchgange von l

$$\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} : \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial u}{dz} = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$$

ist, was ebenso für v' und v sowie für w' und w gilt, so ist

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu,$$

oder, wenn $\alpha\beta\gamma\omega$ sich nur auf die einfallende Unstetigkeitsfläche Σ beziehen, wegen (I)

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\alpha}{\omega}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\alpha}{\omega}\right) : \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\beta}{\omega}\right)$$

$$- \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\beta}{\omega}\right) : \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right) = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu.$$

Die hier eingehenden Gesammtzunahmen erhält man auch wie folgt. Man lege um den Einfallspunkt p in der Normalebene von l einen unendlich kleinen Kreis und nenne R den Halbkreis, welcher in den Raum $\mathfrak{R}$ fällt, den andern R'. Sodann wähle man zur positiven Seite einer Unstetigkeitsfläche jedesmal diejenige, welche der wirklichen Fortschrittsrichtung von l zugewandt ist. Dann ist z. B. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ die Summe aller stetigen vermehrt um die Summe aller plötzlichen Zunahmen, welche $\frac{\partial u}{\partial x}$ erlangt, wenn R von der positiven nach der negativen Seite durchlaufen wird. Die unstetigen Zunahmen treten ein beim Durchgange durch Σ und die verschiedenen reflectirten Unstetigkeitsflächen, die stetigen beim Durchgange durch die Winkelräume zwischen $\mathfrak{S}$ und den Unstetigkeitsflächen. Ebenso verhält es sich auf der andern Seite von $\mathfrak{S}$.

Ich bezeichne nun die Summen der plötzlichen Zunahmen für die Minuenden der vorstehenden Formel durch $A'B'C'$, für die Subtrahenden durch ABC, und behaupte, dass identisch

$$A : B : C = A' : B' : C' = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$$

ist. Ist dies bewiesen, so ergibt sich, dass aus der Grenzbedingung $u' = u$, abgesehen von (I), nur noch zu schliessen ist, dass die vorstehende Proportion für die Summen der stetigen Zunahmen der in sie eingehenden Ausdrücke gilt.

Es nehmen aber

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\cos\alpha}{\omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\cos\beta}{\omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\cos\gamma}{\omega}$$

zu: (1) beim Durchgange durch Σ um Null, da diese Zunahme

$$-\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] \frac{\cos\alpha}{\omega} = 0$$

u. s. w. ist; (2) beim Durchgange durch Σ_1 um

$$-\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_1 - \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1 \frac{\cos\alpha}{\omega} = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1 = \frac{k_1 \cos\lambda}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1,$$

$$\frac{k_1 \cos\mu}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1, \quad \frac{k_1 \cos\nu}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1;$$

und da dies für jede reflectirte Unstetigkeitsfläche Σ_1 gilt, so folgt für die Summen aller plötzlichen Zunahmen $A : B : C = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$, und offenbar gilt dieser Nachweis, der sich allein auf die Formeln (3) art. 5 und (6) art. 20 gründet, auch für A'; B' und C'.

Bezeichnen wir also durch $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_c$, $\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_c$ u. s. w. die Summe aller stetigen Zunahmen, welche $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u'}{\partial x}$ u. s. w. erlangen, wenn R, R' von der positiven nach der negativen Seite durchlaufen werden, so reducirt sich unsere Proportion auf

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\alpha}{\omega}\right)_c - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\alpha}{\omega}\right)_c : \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\beta}{\omega}\right)_c \\ -&\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\beta}{\omega}\right)_c : \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right)_c - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right)_c = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

nebst der gleichen Proportion für v' und v so wie für w' und w, und es ist bewiesen, dass ausser (I) sich aus der Grenzbedingung $u' = u$ u. s. w. keine andern mehr ergeben. —

Wenn die Linie l in unendlicher Nähe umkreist wird und eine veränderliche Grösse sich dabei stetig, aber so ändert, dass sie endliche Zunahmen erlangt, nachdem die Umkreisung um einen endlichen

Winkel fortgeschritten ist, so ist sie in der Linie l selbst unbestimmt. Wenn daher die ersten Derivirten von u, v, w, u', v', w' in l nicht unbestimmt werden, so sind auf der linken Seite von (III) alle Glieder $= 0$. Wir werden sehen, dass letzteres nicht immer der Fall sein kann, und dann schliessen müssen, dass die in Rede stehenden Derivirten an l unbestimmt und von der Eintrittsrichtung abhängig werden.

Ich beginne mit dem Falle, wo sowohl durch Reflection wie durch Brechung drei Unstetigkeitsflächen entstehen; derselbe tritt ein, so lange die in $\mathfrak{T}$ liegende Gerade G weder Δ noch Δ' schneidet. Nimmt man an, dass in diesem Falle die ersten Derivirten von $u\, v \ldots w'$ an l nicht unbestimmt werden, so bleiben nur die Grenzbedingungen (I) (II) übrig, und die dort eingehenden Gesammtzunahmen drücken sich aus durch die Unstetigkeiten der Derivirten. Diese reduciren sich durch die Formeln (3) art. 5 auf die Componenten UVW, während diese sich (art. 14 C und art. 15 AB) in allen Fällen durch eine einzige Hülfsgrösse ausdrücken. Die Anzahl der Unbekannten ist also $= 6$, gleich der Anzahl der Gleichungen (I) (II).

Wir halten uns bei einer Theorie dieser Gleichungen nicht auf, und gehen zur Schlussuntersuchung über, dem Nachweise, dass die noch übrigen 11 Fälle eine neue nicht mehr hierhin gehörige Klasse von Problemen bilden, insofern die im vorigen Falle vorhandene Möglichkeit, die gesuchten Unstetigkeiten unabhängig vom stetigen Verlaufe der mit ihnen behafteten Functionen, also ohne Kenntniss dieser Funktionen selbst zu finden, in den noch übrigen Fällen nicht mehr stattfindet.

Ich vergleiche miteinander drei Fälle der vorliegenden Aufgabe, welche a, b, c heissen mögen, und unendlich benachbarten Lagen der Geraden G entsprechen: im Falle a schneidet die Gerade G weder Δ noch Δ', im Falle b berührt sie Δ', im Falle c wird Δ' von G in zwei unendlich benachbarten Punkten geschnitten.

Im Falle a existiren also alle Unstetigkeitsflächen; derselbe wird demnach durch die vorhin erörterten Gleichungen (I) (II) erledigt. Im Falle c existiren nur noch zwei gebrochne Unstetigkeitsflächen; folgen dieselben im Falle a von der positiven nach der negativen Seite hin in der Reihenfolge Σ', Σ'', Σ''' aufeinander, so möge im Falle c Σ' und Σ''' noch reell vorhanden, aber Σ'' imaginär geworden sein.

Im Falle a findet also zwischen $\bar{\Sigma}'$ und $\overset{+}{\Sigma}'''$ noch eine Unstetigkeit statt, aber nicht mehr im Falle c. Zu beiden gehört b als Grenzfall. Die Werthsvertheilungen in den Fällen a und c können also von der im Falle b stattfindenden, folglich voneinander nur unendlich wenig abweichen. Während aber die Derivirten von $u'v'w'$ im Falle a beim

Durchgange durch Σ'' plötzliche Werthsänderungen erleiden, ist an Stelle dieser Unstetigkeiten im Falle c eine davon nur wenig abweichende, aber stetige Aenderung um die gleichen Beträge getreten.

Im Falle a bedeutet hiernach z. B. $\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)$ die Summe von 3 plötzlichen Aenderungen, welche beim Durchgange durch Σ', Σ'', Σ''' stattfinden; im Falle c bedeutet dieses Zeichen, bei nahezu gleichem Werthe, die Summe der plötzlichen Aenderungen beim Durchgange durch Σ' und Σ''', vermehrt um die von Null verschiedene, aber auf stetigem Wege erfolgende Zunahme beim Uebergange von $\bar{\Sigma}'$ bis $\overset{+}{\Sigma}'''$.

Von den Unbekannten, die im Falle a aus (I) und (II) bestimmt werden, sind also im Falle c deren 12 nicht mehr vorhanden: es sind dies die Unstetigkeiten der ersten Derivirten von $u'v'w'$ an Σ'', welche sich durch phoronomische und mechanische Relationen auf eine einzige Unbekannte reduciren. An ihre Stelle sind im Falle c die stetigen Zunahmen getreten, welche diese 12 Derivirten beim Uebergange von $\bar{\Sigma}'$ bis $\overset{+}{\Sigma}'''$ erlangen. Für diese stetigen Zunahmen besitzen wir in den Gleichungen (III) (welche sich vereinfachen) phoronomische Relationen, durch welche diese 12 Unbekannten auf 6 reducirt werden. Gäbe es noch mehr mechanische oder phoronomische Relationen, z. B. solche, die aus dem Begriffe der Unbestimmtheit einer Function in einer Linie l entspringen, und zwar im Ganzen so viele, dass durch sie diese 12 stetigen, unbekannten Zunahmen auf eine einzige Unbekannte reducirt würden, so würden die Gleichungen (I) (II) wieder nur 6 Unbekannte enthalten, und auch die vorliegende Aufgabe würde ohne die Kenntniss der Functionen uvw selbst lösbar sein.

Aber ein solches System von phoronomischen und mechanischen Relationen gibt es in diesem Umfange nicht. Denn wenn dasselbe existirte, so würde das nämliche System der so beschaffenen Relationen die erwähnten 12 stetigen Zunahmen auch in dem Falle auf eine einzige Unbekannte reduciren, wo z. B. zwei gebrochne Unstetigkeitsflächen imaginär geworden sind, während die Grenzbedingungen (I) (II) für den Raum $\mathfrak{R}'$ drei Unbekannte fordern.

Ich schliesse daraus, dass in allen denjenigen Fällen, wo gebrochne oder reflectirte Unstetigkeitsflächen imaginär werden, die stetigen Zunahmen der ersten Derivirten von $u'v'w'$ oder uvw in den frei werdenden Winkelräumen nicht durch phoronomische und mechanische Grenzbedingungen allein, sondern nur durch Integration der partiellen Differentialgleichungen (d) (art. 4) auf diejenige Anzahl von Unbekannten reducirt werden können, welche für die Befriedigung der Grenzbedingungen (I) (II) erforderlich ist.

Strassburg, 20. März 1877.

XXVIII.

Ueber die canonische Form der Riemannschen Integrale erster Gattung.

(Annali di Matemetica pura ed applicata, Serie II, Bd. 9, 1879, S. 240—301.)

I. Gegenstand der Untersuchung und Hülfssätze.

1.

Seit Riemann den Begriff des Integrals I. G. allgemein festgestellt und einen Ausdruck für die zu integrirende algebraische Function, den Integranden I. G. gegeben hat, ist die Frage nach der vollständigen Ausführung dieses Ausdruckes oder einer andern, aber endgültigen Ausdrucksform für den Integranden I. G. nicht mehr weiter verfolgt worden. In der That würde diese Frage als abgeschlossen gelten müssen, wenn es unmöglich wäre, die Schwierigkeiten, welche sie darbietet, entweder in ihrer gegenwärtigen Gestalt zu überwinden, oder sie auf einem andern Wege zu vermeiden.

Soll die irreductible Gleichung

$$F(\overset{n}{S}, \overset{m}{Z}) = 0$$

zum Geschlechte p gehören, so müssen ihre Coefficienten so bestimmt sein, dass S als Function von Z genau $r = (m-1)(n-1) - p$ Doppelpunkte (die r Werthepaare γ, δ Riemanns) hat, und dann gehören zu ihr p linearunabhängige im Ausdrucke

$$w = \int \Phi(\overset{n-2}{S} \mid \overset{m-2}{Z}) \frac{dZ}{F'}$$

enthaltene Integrale I. G., wenn F' die nach S genommene partielle Derivirte des Polynoms F bedeutet, und die ganze Function Φ so bestimmt ist, dass sie in den Doppelpunkten verschwindet.

Diese Aufgabe, (1) das Polynom F so zu bestimmen, dass S als Function von Z eine vorgeschriebene Anzahl r von Doppelpunkten erlangt, und (2) diese Doppelpunkte wenigstens so weit zu ermitteln, als für die geforderte Bestimmung von Φ nöthig ist, will ich das Problem der Doppelpunkte S, Z nennen.

Die obige Darstellung von dw kann also nur in den besondern Fällen als ausführbar gelten, wo man im Stande ist, das Problem der Doppelpunkte S, Z in ausreichender Weise zu lösen. Für alle übrigen Fälle ist durch die vorstehenden Resultate[1]) nur erreicht, dass (1) die Existenz der Function w sichergestellt und (2) bewiesen ist, dass die Anzahl der linearunabhängigen Functionen dieser Art $= p$ ist. Für die weitere Durchführung der Lehre von den Abelschen Functionen ist damit die nothwendige und genügende Grundlage gewonnen, aber nicht für die Lösung der Aufgabe, eine endgültige Ausdrucksform für dw zu finden.

Die Schwierigkeiten dieser Aufgabe werden nur geändert, nicht vermindert, wenn man statt Z, S ein anderes Variabelnpaar zur Darstellung von dw wählt. Sind z, s zwei algebraische wie S verzweigte Functionen von Z, von den Ordnungen μ und ν[2]), und so gewählt, dass wenigstens nicht jedem Werthe der einen zusammenfallende Werte der andern entsprechen, so sind nicht bloss s, z durch S, Z, sondern auch umgekehrt diese durch jene rational darstellbar; das nämliche gilt also auch von dw. Zwischen s, z besteht eine irreductible Gleichung

$$f(\overset{\mu}{s} \mid \overset{\nu}{z}) = 0,$$

deren Grad in jeder Variable gleich der Ordnung der andern ist; mit Benutzung derselben nimmt das Integral I. G. die Form an

$$w = \int \varphi(\overset{\mu-2}{s} \mid \overset{\nu-2}{z}) \frac{dz}{f'},$$

wo f' die nach s genommene partielle Derivirte des Polynoms f bedeutet. Aber diese Darstellung von w setzt die Lösung der Aufgabe voraus, (1) das Polynom f so zu bestimmen, dass die Anzahl der Doppelpunkte s, z gleich $(\mu - 1)(\nu - 1) - p$ wird, und (2) zu bewirken, dass φ in diesen Punkten verschwindet.

1) Diese Resultate, ebenso wie die übrigen bekannten Sätze, die im Folgenden erwähnt werden, kann man aus rein algebraischen Betrachtungen ableiten. Die gegenwärtigen Hülfsmittel reichen überhaupt aus, um in der Lehre von den Abelschen Functionen alle indirecten Existenzbeweise dadurch überflüssig zu machen, dass man, wie ich es in meinen Vorlesungen zu thun pflege, alle in Betracht kommenden Functionen ohne Ausnahme, nicht bloss die algebraischen, zunächst durch S und Z wirklich darstellt.

2) Als Ordnung einer algebraischen wie S verzweigten Function von Z bezeichne ich die Zahl, welche angibt, in wie viel getrennten oder zusammenfallenden Punkten S, Z die Function zur ersten Ordnung unendlich wird.

Es ist demnach klar, dass man auf diesem Wege dem Kern der hier vorliegenden Frage nicht näher kommt. Die Function w und ihr Differential dw sind absolut unabhängig sowohl von den Doppelpunkten S, Z, wie von den Doppelpunkten s, z. Der wirklichen Darstellung von dw tritt die Frage nach jenen nur in den Weg, wenn man Functionen S, Z von den Ordnungen m, n, die Frage nach diesen nur dann, wenn man z, s, nämlich Functionen von den Ordnungen μ, ν zur Darstellung von dw wählt.

Wenn man dies erwägt und hinzunimmt, dass eine Function dw, die von jeglicher Irrationalität frei ist, überhaupt gar nicht existiert, so erkennt man, dass die im Problem der Doppelpunkte liegenden Schwierigkeiten bestehen bleiben, solange man nicht auf die Darstellung von dw als rationale Function zweier, gegenseitig irrationaler Argumente verzichtet, und dass diese Art von Schwierigkeiten nur dadurch vermieden werden kann, dass man dw als Function eines einzigen Argumentes z auffasst, d. h. statt zu z irgend eine gleichverzweigte, aber sonst nicht näher bestimmte Irrationalität s zu fügen, um dw durch beide rational auszudrücken, die Function

$$\frac{dw}{dz} = s$$

selbst als unbekannte Irrationalität einführt.

Dies ist die Aufgabe, mit welcher die vorliegende Abhandlung sich beschäftigt; aber sie ist in dieser Form nicht hinreichend begrenzt, da für z jede beliebige Function aus der zu untersuchenden Klasse gleich verzweigter algebraischer Functionen genommen werden kann, und die Ordnung μ dieser Function den Grad bestimmt, bis zu welchem die zwischen s und z stattfindende Gleichung in s ansteigt.

Wir werden finden, dass die verschiedenen Voraussetzungen, die man über z machen kann, in zwei Gattungen zerfallen. Als Hauptfall wird sich der herausstellen, wo die Ordnung μ von z in gewissem Sinne (art. 3, art. 6 θ, und art. 12) eine möglichst niedrige ist. In diesem Falle ergibt sich für $s = \frac{dw}{dz}$ eine merkwürdige Form, welche ich die canonische nenne, und welche nur in diesem Falle stattfindet; bei dieser Form von s verwandelt sich die Aufstellung der Gleichung zwischen s und z in ein vollkommen geschlossenes Problem der Invariantentheorie, welches zwar schwierig ist, für dessen Behandlung aber auch alle Hülfsmittel dieser Theorie flüssig werden.

Ausserdem ergibt sich im Gegensatze zu dem, was oben erläutert wurde, das Resultat, dass mit der Herstellung dieser Gleichung auch das Problem ihrer Doppel- und Verzweigungspunkte gelöst ist.

2.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle eine gedrängte Uebersicht meiner Untersuchung voranzuschicken. Nach den erläuternden Vorbemerkungen dieses I. Abschnittes weise ich im II. Abschnitte nach, dass, wenn für z eine geeignete Function der zu untersuchenden Klasse ausgewählt wird, und μ ihre Ordnung bedeutet, $\frac{dw}{dz} = s$ stets in die Form

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \dots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1} \tag{1}$$

gebracht werden kann, wo (1) $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$ ganze Functionen von z mit durchaus willkürlichen Coefficienten $x_1 x_2 \dots x_p$, und ihre Grade $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ (vergl. auch den Anfang des Abschn. III.) so gewählt sind, dass die Anzahl aller Glieder von s, nämlich $a_1 + a_2 \dots + a_{\mu-1} + \mu - 1 = p$ wird; (2) $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{\mu-1}$ sind Integranden I. G., die für unendliche Werthe von z stets zu den Ordnungen $a_1 + 2$, $a_2 + 2, \dots a_{\mu-1} + 2$ verschwinden.

Diese Form von s heisst die canonische; das Wesentliche bei derselben, und was ihre Wichtigkeit begründet, ist, dass sie aus $\mu - 1$ Gliedern besteht, nämlich einem weniger, als die Ordnung von z beträgt.

Im III. Abschnitte wird die Gleichung untersucht, deren Wurzel s ist; sie hat die Form

$$A s^\mu + A_2 s^{\mu-2} + A_3 s^{\mu-3} \dots + A_\mu = 0, \tag{2}$$

indem das zweite Glied immer fehlt; hier ist allgemein A_i ganze homogene Function i^{ten} Grades von $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$, deren Coefficienten ganze Functionen von z von angebbaren Graden sind. Die Theorie dieser Gleichung wird unter der erleichternden, aber keinen Fall wirklich ausschliessenden Voraussetzung weiter geführt, dass s als Function von z nur einfache und getrennte Singularitäten hat (art. 8). Setzt man, unter $s_1 s_2 \dots s_\mu$ die Zweige von s verstehend,

$$\varDelta = A^{\frac{2\mu-3}{2}} \Pi(s_1 s_2 \dots s_\mu),$$

so ergibt sich, dass $\varDelta$ eine rationale ganze Function von z ist; und wenn man diese letztere durch $\mathfrak{A}$, die Discriminante der Gleichung (1) durch D bezeichnet (art. 10), so folgt

$$\varDelta = \mathfrak{A},$$
$$D = \mu h A \mathfrak{A}^2,$$

in den Verzweigungspunkten wird $A = 0$, in den Doppelpunkten von s dagegen $\mathfrak{A} = 0$, h ist eine Constante.

Im IV. Abschnitte werden $A_2 A_3 \dots A_\mu$ als homogene Formen mit den $\mu - 1$ Variabeln $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$ untersucht. Aus der Lehre von den Gleichungen liegen canonische Formen $A_2' A_3' \dots A_\mu'$ derselben bereits vor, indem sie sich durch $s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}$, also abermals durch $\mu - 1$ Argumente unmittelbar ausdrücken lassen. Wendet man die obige Gleichung (1) auf diese Zweige $s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}$ von s an, so ergibt sich eine Substitution, durch welche diese vorgeschriebenen canonischen Formen $A_2' A_3' \dots A_\mu'$ in die zu ermittelnden Ausdrücke $A_2 A_3 \dots A_\mu$ übergeführt werden. Die Untersuchung hat es demnach in erster Linie mit dieser Substitution zu thun; es findet sich, dass dieselbe eine umkehrbare, und ihre Determinante

$$\frac{\partial(s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \dots y_{\mu-1})} = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

ist.

Mittelst dieses Satzes ergibt sich sofort eine canonische, durch unser Problem geforderte Form auch für jede Invariante und jede Covariante des Formensystems $A_2 A_3 \dots A_\mu$, wovon im art. 14. Beispiele ausgeführt werden; insbesondere aber findet sich der Ausdruck für die rationale Function $\varDelta = \mathfrak{A}$, welche in den Doppelpunkten von s verschwindet, nämlich

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial(A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial(y_1 y_2 \dots y_{\mu-1})}.$$

Im V. Abschnitte wird umgekehrt bewiesen, dass die Gleichung (2) allen Bedingungen der Aufgabe genügt, und in der That s als Integranden I. G. in der canonischen Form (1) bestimmt, wenn bei den vorgeschriebenen Graden ihrer Coefficienten ihre Discriminante $D = \mu h A \mathfrak{A}^2$ ist, unter $\mathfrak{A}$ den vorstehenden Ausdruck verstanden. Dabei erledigen sich auch die Fälle, wo vermöge der Wahl von z eine canonische Form von s nicht stattfindet.

Im VI. Abschnitte wird nachgewiesen, dass die verschiedenen Klassen gleichverzweigter algebraischer Functionen einer einzigen Variabeln nicht nach Geschlechtern p, sondern nach Systemen μ von Geschlechtern p klassificirt werden müssen, oder, was dasselbe ist, dass jedes Geschlecht p von Functionenklassen in verschiedenen Systemen μ vertreten ist, und demgemäss in Familien μ zerfällt. Damit ist eine wesentliche Lücke ausgefüllt, welche die Theorie der Moduln bisher in ihren Grundbegriffen darbot.

Bei dieser Klassification gibt es keine Ausnahmefälle; die ultraelliptischen Functionen, welche wohl als ein solcher bezeichnet worden sind, bilden mit den elliptischen zusammen das System $\mu = 2$. Als Beispiel der allgemeinen Theorie wird das System $\mu = 3$ ausgeführt.

Der VII. Abschnitt endlich ist der Theorie der Function A_2 gewidmet. In der Substitution, durch welche A_2 in seine adjungirte Form gebracht wird, lassen sich die Coefficienten in einer sehr merkwürdigen Weise durch irrationale Grössen ausdrücken, und diese Form der Substitution ermöglicht es, u. A. zu beweisen, dass A_2 selbst die Adjuncte, $\frac{1}{\mu} A$ die Discriminante einer quadratischen Form ist, deren Coefficienten ebenfalls ganze Functionen von z, aber von weit niedrigern Graden wie in A_2 sind. Die nämliche Substitution liefert auch noch Eigenschaften der übrigen Functionen A_i.

3.

Ich stelle nun die Hülfssätze zusammen, deren ich mich im Folgenden bediene.

Innerhalb einer Klasse gleichverzweigter algebraischer Functionen einer Variable bezeichne ich als **Functionen erster Gattung** diejenigen, welche als Quotienten zweier Differentiale I. G. dw_1, dw_2, oder als Quotienten zweier Functionen φ darstellbar sind, alle übrigen als **Functionen zweiter Gattung**. Im Folgenden kommen einige bekannte Sätze über Functionen I. G. zur Anwendung, welche ich der bessern Uebersicht wegen hier zusammenstelle. Bei Abzählungen werden mehrfache Nullpunkte stets in einfache aufgelöst; in diesem Sinne bezeichne ich das System aller Nullpunkte einer Function I. G. als ein **Punktsystem erster Gattung**. Sei

$$z = \frac{dw_1}{dw_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

eine Function I. G. und von der Ordnung

$$\mu.$$

Stellt man z durch ein bestimmtes Paar gleichverzweigter Variabeln, Z, S dar, so gehört dazu eine bestimmte Fläche $\mathfrak{T}$, welche die Werthe von Z der Verzweigungsart von S gemäss repräsentirt; in dieser Fläche ergibt sich also eine bestimmte Gruppe von μ Punkten zur Repräsentation des Punktsystems I. G., in welchem z verschwindet. Wählt man statt Z, S ein anderes Variabelnpaar, so erhält man auch eine andere Fläche $\mathfrak{T}$, also eine räumlich anders geordnete Gruppe von μ Punkten zur Repräsentation des nämlichen Punktsystems. Für das Folgende ist es wesentlich, dass die zu erwähnenden Sätze zwar mit Bezug auf

eine einzelne von diesen Flächen ausgesprochen werden, aber für alle gelten.

Da eine Function φ, abgesehen von den Doppelpunkten, in $2p-2$ Punkten verschwindet, so ist die Ordnung von z, nämlich

$$\mu \leqq 2p - 2.$$

Ist nun die Aufgabe gestellt, die allgemeine Function φ so zu bestimmen, dass sie in den nämlichen Punkten verschwindet wie z, so ergeben sich zwischen den p Constanten, von denen φ lineare und homogene Function ist, μ Bedingungsgleichungen; es findet zunächst der Satz statt, dass **unter allen Umständen wenigstens eine von diesen Gleichungen aus den übrigen folgt.** Ist

$$\varrho$$

die genaue Anzahl der überzähligen Bedingungsgleichungen, also $\varrho \geqq 1$ und $\mu - \varrho$ die Anzahl der voneinander unabhängigen, so kann $\mu - \varrho$ nicht $> p - 1$ sein, weil sonst φ identisch $= 0$ sein müsste, während entweder φ selbst oder eine Specialisirung von φ den Zähler φ_1 von z bildet. Sei also

$$p - \lambda - 1$$

die Anzahl dieser von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen, mithin die Anzahl aller

$$\mu = p - \lambda - 1 + \varrho,$$

so nenne ich λ den **Defect**, ϱ den **Ueberschuss** jenes Punktsystems I. G.

Die ganzen Zahlen λ, ϱ können ihrer Natur nach nie negativ werden; aber während stets $\varrho \geqq 1$ ist, ist λ auch des Werthes Null fähig.

Wenn also λ der Defect eines Punktsystemes I. G. ist, so reducirt sich der allgemeine Ausdruck derjenigen Function φ oder desjenigen Integranden I. G., welcher in diesem Punktsystem verschwindet, auf $\lambda + 1$ linear unabhängige Glieder, von denen jedes einzelne die verlangte Eigenschaft hat; die Coefficienten dieser Glieder sind willkürliche Constanten. (Vergl. den folgenden art. 4.)

Die Nullpunkte von z zerfallen bei unsern gegenwärtigen Voraussetzungen in zwei Gruppen; die erste enthält diejenigen $p - \lambda - 1$ Punkte, denen die von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$ entsprechen, die zweite die ϱ übrigen, nothwendigen Nullpunkte.

Ist $\varrho > 1$, so gibt es auch eine Function I. G., welche in den sämmtlichen $p - \lambda - 1$ Punkten der ersten Gruppe, aber

ausserdem nur noch einmal, nämlich in einem willkürlich wählbaren Punkte der zweiten Gruppe verschwindet. Die Ordnung dieser Function ist also

$$p - \lambda,$$

und dies ist die niedrigste Ordnung, zu welcher, für den gegebenen Defect λ, Functionen I. G. existiren.

Solange die $3p-3$ Moduln der Klasse alle verfügbar sind, ist $\left[\frac{p}{2}\right]-1$ der grösste Wert von λ, wenn $\left[\frac{p}{2}\right]$ die grösste in $\frac{p}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet. In diesem Falle erhält man also die niedrigste Ordnung μ, zu welcher überhaupt Functionen I. G. existiren, für $\varrho = 1$ und $\lambda = \left[\frac{p}{2}\right]-1$, und sie ist also $\mu = p - \left[\frac{p}{2}\right]+1 = \left[\frac{p+3}{2}\right]$, was umgekehrt $p = 2\mu - 3$ oder $p = 2\mu - 2$ gibt. Auf alle Fälle gilt der *Satz, dass für diejenigen Functionen I. G., deren Ordnung bei gleichem Defect λ die möglichst niedrige ist, stets der Ueberschuss $\varrho = 1$ ist.*

Die niedrigste Ordnung einer Function II. G. ist $p+1$. Bestimmt man eine Function φ oder einen Integranden I. G. so, dass er mit irgend einer Function II. G. alle Nullpunkte gemein hat, so wird er identisch Null; eine solche Function φ oder ein solcher Integrand I. G. existirt also nicht.

Die hier angewandte Ausdrucksweise ist bei vollständigern Untersuchungen über algebraische Functionen und das Abelsche Theorem fast unentbehrlich; zu ihrer Rechtfertigung erwähne ich nur noch die beiden folgenden Sätze, von denen der erste, auf corresiduale Systeme bezügliche, allgemein bekannt ist; beide können auch als Sätze über algebraische Kurven ausgesprochen werden. Nennt man ein Punktsystem I. G. vollständig, wenn es aus $2p-2$ Punkten besteht, so folgt:

Werden zwei Punktsysteme I. G. durch die nämlichen Punkte zu vollständigen ergänzt, so haben sie gleichen Defect und gleichen Ueberschuss.

Ergänzen zwei Punktsysteme I. G. einander zu einem vollständigen, so ist der Defect des einen gleich dem Ueberschuss des andern.

Der erste von diesen Sätzen zeigt, dass man ohne Missverständniss die oben besprochene Function I. G. z bezeichnen kann als eine Function vom Defect λ und dem Ueberschusse ϱ. Sind a, b, c Constanten, so haben nach diesem Satze die Functionen $z-c$, $\frac{az+b}{z-c}$ die gleichen charakteristischen Zahlen λ, ϱ.

II. Die canonische Form des Integranden I. Gattung.

4.

Diese Lehrsätze führen zu einer merkwürdigen Form für den Integranden I. G., welche ich als die canonische Form desselben bezeichne. Sind $w_1 w_2 \ldots w_p$ linearunabhängige Integrale I. G., und

$$x_1 \quad x_2 \ldots \quad x_p$$

Parameter, so ist

$$dw = x_1 dw_1 + x_2 dw_2 \cdots + x_p dw_p$$

der allgemeine Ausdruck, in welchem alle Differentiale I. G. enthalten sind.

Dieser Ausdruck ist zweier Transformationen fähig. Die erste besteht in einer linearen und umkehrbaren Substitution mit constanten Coefficienten, durch welche statt der Parameter $x_1 x_2 \ldots x_p$ andere eingeführt werden, die zweite in der Darstellung von dw durch verschiedene Functionen z der Klasse. Beide Transformationen werden zugleich ausgeführt, wenn man nachweist, welche Folgen es für den Ausdruck von dw nach sich zieht, wenn für z eine der Klasse angehörige Function von bestimmten Eigenschaften gewählt wird.

Den Fall, wo für z eine Function II. G. genommen wird, schliesse ich vorläufig aus, da er, wie schon der Vergleich mit dem Folgenden leicht zeigt, zu keiner Vereinfachung im Ausdrucke von dw führt; einen besondern Fall werden wir später (art. 12) berücksichtigen. (Vergl. auch art. 22.)

Sei also, wie im vorigen art.,

$$z$$

eine Function I. G. mit dem Defect λ und dem Überschusse ϱ, also von der Ordnung

$$\mu = p - \lambda - 1 + \varrho,$$

indem über λ und namentlich ϱ fürs Erste keine nähern Voraussetzungen gemacht werden. Wir betrachten w als Function von z, so dass

$$s = \frac{dw}{dz}$$

der allgemeine Integrand I. G. wird.

Ist σ irgend eine andere Function der Klasse und so gewählt, dass wenigstens einmal einem gegebenen z nur ungleiche Werthe von σ entsprechen, so ist durch σ und z jede andere Function der Klasse, also auch s rational darstellbar. Zwischen σ und z besteht eine irreductible Gleichung, die in σ vom Grade μ ist, und zu dieser Gleichung gehört eine μ blättrige, zusammenhängende Fläche

$$T,$$

welche die Werthe von z der Verzweigungsart der Klasse (zunächst von σ) gemäss repräsentirt.

Alle Functionen der Klasse sind also eindeutige Functionen des Ortes in dieser Fläche; da die Anzahl der zugehörigen Integrale I. G. gleich p ist, so ist

$$2(p+\mu-1)$$

die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte dieser Fläche T.

In dieser Fläche wird das Punktsystem I. G., in welchem z verschwindet, durch μ einander bedeckende Punkte repräsentirt; diese μ Punkte bilden also ein Punktsystem I. G. mit dem Defect λ und dem Ueberschusse ϱ.

Bestimmt man also den allgemeinen Integranden I. G.

$$s = x_1 w_1' + x_2 w_2' \cdots + x_p w_p'$$

so, dass er für $z=0$ auf jedem Blatte von T verschwindet, so gibt dies μ Bedingungsgleichungen für die p Parameter, aber darunter nur $p-\lambda-1$ voneinander unabhängige. Ebensoviel Parameter werden durch die übrigen bestimmt, während diese, deren Anzahl $\lambda+1$ ist, willkürlich bleiben. Sind es die Parameter $x_1 x_2 \ldots x_{\lambda+1}$, und wird $s = x_1 v_1' + \cdots + x_{\lambda+1} v_{\lambda+1}'$, so ist allgemein v_i' gleich w_i' vermehrt um einen aus $w_{\lambda+1}' \ldots w_p'$ linear zusammengesetzten Ausdruck, woraus die Linearunabhängigkeit von $v_1' v_2' \ldots v_{\lambda+1}'$ ohne Weiteres folgt.

Diese Functionen v' verschwinden also für $z=0$ auf jedem Blatte von T. Setzt man daher $\frac{v_i'}{z} = \sigma_i$, so bleibt diese Function für $z=0$ auf jedem Blatte von T stetig[1]), die Ordnung ihrer Unstetigkeit in einem Verzweigungspunkte ist immer dieselbe wie für v_i', aber im Unendlichen verschwindet σ_i auf jedem Blatte zur dritten Ordnung. Daraus folgt, dass das $\int \sigma_i dz$ niemals unstetig wird, also ein Integral I. G. ist; σ_i ist also ein Integrand I. G.

Wir haben also bewiesen, dass im gegenwärtigen Falle $\lambda+1$ linearunabhängige Integranden I. G.

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \ldots \quad \sigma_{\lambda+1}$$

1) Der Fall, dass für $z=0$ ein Verzweigungspunkt stattfindet, also σ_i unstetig werden könnte, braucht nicht berücksichtigt zu werden, da man nöthigenfalls statt z die Function $z_1 = z - c$ einführen kann, deren charakteristische Zahlen λ, ϱ die nämlichen sind.

existiren, die im Unendlichen auf jedem Blatte von T zur dritten Ordnung verschwinden.

Durch diese kann jede andere Function dieser Art ausgedrückt werden. Denn wenn ein Integrand I. G. w' im Unendlichen stets zur dritten oder einer höhern Ordnung verschwindet, so ist auch noch zw' ein Integrand I. G., aber ein solcher, der für $z=0$ auf jedem Blatte verschwindet. Also ist zw' in der Form $x_1 v_1' + x_2 v_2' \cdots = z(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 \cdots)$, mithin w' in der Form $x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 \ldots$ darstellbar:

a) Ist also z Function I. G. mit dem Defect λ, und betrachtet man das Integral I. G. als Function von z, so gibt es

$$\lambda + 1$$

linearunabhängige Integranden I. G.

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \ldots \quad \sigma_{\lambda+1},$$

die im Unendlichen auf jedem Blatte von T zu einer höhern als der zweiten Ordnung verschwinden, und durch diese ist jede andere Function dieser Art linear darstellbar.

Dies läßt sich auch umkehren.

b) Gibt es einen Integranden I. G. w', der im Unendlichen auf jedem Blatte von T zur Ordnung $2+k$ verschwindet, so sind $z^k, z^{k-1}, \ldots z$ Functionen I. G.

In der That sind dann auch $zw' = w_1'$, $z^2 w' = w_2'$, $\ldots$ $z^k w' = w_k'$ Integranden, also $w_1' : w'$, $w_2' : w'$, $\ldots$ $w_k' : w'$ Functionen I. G.

5.

Bevor wir die Untersuchung über die canonische Form von dw oder s in ihrer Allgemeinheit aufnehmen, wollen wir sie für den besondern Fall zu Ende führen, wo zwar z, aber nicht auch z^2 Function I. G. ist.

Wir erhalten ausser

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \ldots \quad \sigma_{\lambda+1} \tag{1}$$

noch eine zweite Gruppe linearunabhängiger Integranden I. G., nämlich

$$z\sigma_1 \quad z\sigma_2 \ldots \quad z\sigma_{\lambda+1}, \tag{2}$$

und es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem die $2(\lambda+1)$ Functionen (1) (2) auch noch zusammengenommen linearunabhängig sind oder es nicht sind. In dieser Beziehung finden folgende Sätze statt.

c) Sind die $2(\lambda+1)$ Functionen (1) (2) zusammengenommen linearabhängig, so ist auch z^2 Function I. G. Bezeichnen nämlich A, B lineare homogene Functionen von $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\lambda+1}$ mit constanten Coefficienten, so findet n. V. eine identische Gleichung $A - Bz = 0$ statt.

Hier kann weder A noch B identisch Null sein, da die Functionen (1) für sich allein linearunabhängig sind. Also ist $B = \frac{A}{z}$ ein Integrand I. G., der im Unendlichen auf jedem Blatte zur vierten Ordnung verschwindet, mithin nach dem Satze *b*) des vorigen art. z^2 Function I. G.

d) Ist umgekehrt z^2 Function I. G., so sind die Functionen (1) (2) linearabhängig.

Man kann nämlich in diesem Falle die Function s, ohne dass sie identisch verschwindet, so bestimmen, dass sie alle einfachen Nullpunkte mit z^2 gemein hat, d. h. dass sie für $z = 0$ auf jedem Blatte von T zur zweiten Ordnung verschwindet. Dividirt man sie dann durch z^2, so erhält man einen Integranden I. G. w', der im Unendlichen auf jedem Blatte $= 0^4$ wird. Also kann man nach *a*) (voriger art.) w' und zw' durch die Functionen (1) ausdrücken; ergibt sich $w' = B$, $zw' = A$, so folgt identisch $A - Bz = 0$; die Functionen (1) (2) zusammengenommen sind also linearabhängig. Beide Sätze vereinigt, geben den folgenden:

e) Damit die Functionen (1) (2) zusammengenommen linearunabhängig sind, ist erforderlich und hinreichend, dass zwar z, aber nicht auch z^2 Function I. G. ist.

Fälle, wo diese letztere Bedingung nicht erfüllt ist, lassen sich leicht nachweisen; es findet nämlich der Satz statt:

f) Jede Function I. G., deren Defect λ grösser ist, als er es bei unbeschränkten Moduln sein könnte, hat die Eigenschaft, dass auch ihr Quadrat eine Function I. G. ist.

Dieser Satz ist, wie das Vorhergehende zeigt, gleichbedeutend mit dem folgenden:

g) Die Functionen (1) (2) sind stets linearabhängig, wenn $\lambda > \left[\frac{p}{2}\right] - 1$ ist.

Sei nämlich $\lambda = \left[\frac{p}{2}\right] - 1 + \eta$, $\eta \geqq 1$, dann ist die Anzahl der Functionen (1) (2) zusammengenommen $2(\lambda + 1) = 2\left[\frac{p}{2}\right] + 2\eta$, also ist $2(\lambda + 1) - p = 2\eta - \left(\left[\frac{p+1}{2}\right] - \left[\frac{p}{2}\right]\right)$ gleich $2\eta - 1$ oder gleich 2η, mithin jedenfalls $2(\lambda + 1) > p$ mit Ausschluss der Gleichheit. Wir haben also in (1) (2) mehr als p Integranden I. G., während es nur p linearunabhängige gibt.

Der besondere Fall, den wir hier vorläufig erledigen wollen, setzt nun voraus, dass z, aber nicht z^2 Function I. G. ist; es muss also auf jeden Fall $\lambda \leqq \left[\frac{p}{2}\right] - 1$ sein; sei

$$\lambda = \left[\frac{p}{2}\right] - 1 - \omega, \qquad \omega \geqq 0,$$

also

$$\mu = p - \lambda - 1 + \varrho = \left[\frac{p+1}{2}\right] + \omega + \varrho.$$

Die Anzahl der nunmehr linear unabhängigen Functionen (1) (2) ist $2(\lambda + 1) = 2\left[\frac{p}{2}\right] - 2\omega$; setzen wir

$$\left[\frac{p+1}{2}\right] - \left[\frac{p}{2}\right] = \varepsilon,$$

was Null oder Eins ist, jenachdem p eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, so fehlen also zu einem vollständigen System von p linearunabhängigen Integranden I. G. noch $l = p - 2(\lambda + 1) = p - 2\left[\frac{p}{2}\right] + 2\omega$, d. i.

$$l = 2\omega + \varepsilon$$

Functionen; diese mögen durch

$$\sigma_{\lambda+2} \quad \sigma_{\lambda+3} \cdots \quad \sigma_{\lambda+l+1} \tag{3}$$

bezeichnet werden. Aber es ist $\lambda + l + 1 = p - \lambda - 1 = \mu - \varrho$, so dass wir auch

$$\sigma_{\lambda+l+1} = \sigma_{\mu-\varrho}$$

schreiben können. Der allgemeine Ausdruck für den Integranden I. G. wird

$$s = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 \cdots + x_{\lambda+1}\sigma_{\lambda+1} + x_{\lambda+2}\sigma_{\lambda+2} \cdots$$
$$+ x_{\mu-\varrho}\sigma_{\mu-\varrho} + z(x_{\mu-\varrho+1}\sigma_1 \cdots + x_p\sigma_{\lambda+1}),$$

da $\mu - \varrho + \lambda + 1 = p$, $x_{\mu-\varrho+\lambda+1} = x_p$ ist.

Setzen wir daher

$$y_1 = x_1 + zx_{\mu-\varrho+1}, \quad y_2 = x_2 + zx_{\mu-\varrho+2}, \cdots \quad y_{\lambda+1} = x_{\lambda+1} + zx_p$$
$$y_{\lambda+2} = x_{\lambda+2}, \cdots \quad y_{\mu-\varrho} = x_{\mu-\varrho},$$

so folgt

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \cdots + y_{\mu-\varrho}\sigma_{\mu-\varrho}.$$

Hier sind also $\lambda + 1$ Coefficienten y lineare Functionen von z, die $l = 2\omega + \varepsilon$ übrigen sind constant.

Dieser Ausdruck von s geht in die Form, welche wir für den vorliegenden Fall als die canonische bezeichnen, über, wenn $\varrho = 1$ ist.

h) Wenn also in einer Klasse algebraischer gleichverzweigter Functionen eine Function I. G. z existirt, deren Quadrat Function II. G. ist und der Ueberschuss ϱ dieser Function $= 1$, ihr Defect $\lambda = \left[\frac{p}{2}\right] - 1 - \omega$, $\omega \geqq 0$, also ihre Ordnung $\mu = \left[\frac{p+1}{2}\right] + \omega + 1$ ist, und man betrachtet das Integral I. G. w als Function von z, so lässt sich

$$s = \frac{dw}{dz}$$

in die canonische Form setzen:

$$s = y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 \cdots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1},$$

und hier sind $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\mu-1}$ Integranden I. G., von denen die $\lambda + 1$ ersten im Unendlichen auf jedem Blatte zur dritten, die übrigen nur zur zweiten Ordnung verschwinden, während die Coefficienten y jener in z linear, die Coefficienten der letztern constant sind.

Ob es aber Functionen z gibt, welche alle Bedingungen dieses Satzes verificiren, lässt sich auf dem hier eingeschlagenen Wege in keiner Weise entscheiden. Resultate, die nur an solche Bedingungen geknüpft sind, deren Zulässigkeit a priori feststeht, können sich nur auf einer hinreichend allgemeinen Grundlage ergeben (folgender art. θ).

6.

α) Ist i irgend eine positive ganze Zahl, und z^i Function I. G., so bilden ihre μi Nullpunkte ein Punktsystem I. G., dessen Defect und Ueberschuss ich durch λ_i und ϱ_i bezeichne, so dass $\mu i = p - \lambda_i - 1 + \varrho_i$ und stets $\varrho_i \overline{>} 1$ ist.

Es gibt in diesem Falle $1 + \lambda_i$ linearunabhängige Integranden I. G., welche für $z = 0$ auf jedem Blatte zur i^{ten} Ordnung verschwinden, und durch welche jede andere Function dieser Art sich linear darstellen lässt. Dividirt man durch z^i, so erhält man ebensoviel Integranden I. G., welche im Unendlichen auf jedem Blatte zur Ordnung $2 + i$ verschwinden; sie sind linearunabhängig, und jede andere Function dieser Art ist lineare homogene Function jener mit constanten Coefficienten.

Diese $1 + \lambda_i$ Functionen bezeichne ich als die Fundamentalintegranden i^{ter} Ordnung.

β) Ich nehme an, dass

$$z^k$$

die höchste Potenz von z ist, die noch zu den Functionen I. G. gehört, so dass auch $z^{k-1}, \ldots z$ zu dieser Gattung gehören, aber z^{k+1} Function zweiter Gattung ist.

γ) Setzen wir nun

$$1 + \lambda_k = L_k,$$

so ergeben sich für $i = k$ im Ganzen L_k Fundamentalintegranden k^{ter} Ordnung

$$\sigma_{k,\nu} \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots L_k,$$

und aus ihnen leitet man $k + 1$ Gruppen, jede von L_k Integranden I. G. ab:

$$(k) \qquad \begin{array}{ll} (k,\ 0) & \sigma_{k,\nu} \\ (k,\ 1) & z\sigma_{k,\nu} \\ \cdots & \cdots \\ (k,\ k) & z^k \sigma_{k,\nu} \end{array} \qquad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots L_k,$$

welche zusammengenommen das System (k) oder die Functionen (k) heissen sollen.

Dies sind im Ganzen

$$(k+1) L_k$$

Functionen, und ich behaupte, sie sind **linearunabhängig**.

Beweis. Ausdrücke von der Form $c_1 \sigma_{i1} + c_2 \sigma_{i2} + \cdots$, in denen alle Coefficienten constant sind, sollen im Folgenden durch $A_i, B_i, \ldots E_i$ bezeichnet werden. Da die Functionen $(k, 0)$ linearunabhängig sind, so kann ein Ausdruck von der Form A_k nur dann identisch verschwinden, wenn jeder Coefficient $= 0$ ist. Wären nun die Functionen (k) linearabhängig, so müsste eine identische Gleichung von der Form

$$A_k + z B_k + z^2 C_k \cdots + z^k E_k = 0$$

stattfinden, in welcher nach dem soeben Gesagten mindestens zwei Glieder vorkommen. Sodann darf man voraussetzen, dass das erste Glied, welches nicht mit einer Potenz von z multiplicirt ist, wirklich vorhanden ist; denn wenn es fehlt, so darf man nur mit der niedrigsten Potenz von z wegheben, um die angegebene Voraussetzung zu verwirklichen. Ist aber A_k nicht identisch $= 0$, so würde aus vorstehender Gleichung folgen, dass

$$\frac{A_k}{z}$$

einem Integranden I. G. gleich ist. Aber da im Unendlichen auf jedem Blatte $A_k = 0^{2+k}$ wird, so würde folgen, dass dort dieser neue Integrand I. G. zur Ordnung $3 + k$ verschwindet, also wäre (art. 4 b) z^{k+1} Function I. G., was ausgeschlossen ist. Also können die Functionen (k) nicht linearabhängig sein, w. z. b. w.

δ) Für $i = k - 1$ ergeben sich $1 + \lambda_{k-1}$ Fundamentalintegranden von der Ordnung $k - 1$, aber zu ihnen gehören die Functionen $(k, 0)$, $(k, 1)$. Scheidet man diese aus, so bleiben

$$L_{k-1} = 1 + \lambda_{k-1} - 2 L_k$$

Fundamentalintegranden $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\sigma_{k-1,\nu} \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots L_{k-1}$$

übrig, welche mit $(k, 0)$ $(k, 1)$ zusammen linearunabhängig sind. Aus ihnen leitet man k Gruppen, jede von L_{k-1} Integranden I. G. ab:

$$(k-1)\quad \begin{array}{ll} (k-1,\ 0) & \sigma_{k-1,\nu} \\ (k-1,\ 1) & z\sigma_{k-1,\nu} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (k-1,\ k-1) & z^{k-1}\sigma_{k-1,\nu} \end{array} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots L_{k-1},$$

welche zusammengenommen das System $(k-1)$ oder die Functionen $(k-1)$ heissen sollen.

Dies sind im Ganzen

$$k L_{k-1}$$

neue Integranden I. G., und ich behaupte, dass sie mit den Functionen (k) zusammen linearunabhängig sind.

Beweis. Die Gruppen $(k, 0)$ $(k, 1)$ $(k-1, 0)$ sind linearunabhängig, also kann eine Gleichung $A_k + zB_k + A_{k-1} = 0$ nur dann identisch bestehen, wenn alle Coefficienten $= 0$ genommen werden. Es folgt hieraus, dass kein Ausdruck von der Form

$$\frac{A_k + A_{k-1}}{z}$$

ein Integrand I. G. sein kann.

Wäre nun unser Satz nicht richtig, so müsste eine identische Gleichung von der Form

$$(A_k + A_{k-1}) + z(B_k + B_{k-1}) \cdots + z^{k-1}(D_k + D_{k-1}) + z^k E_k = 0$$

stattfinden, in welcher wir wie im vorigen Falle voraussetzen oder erzwingen können, dass das erste Glied, $A_k + A_{k-1}$, nicht fehlt, und in welcher dann nothwendig noch eines der folgenden Glieder vorkommen muss. Also wäre

$$\frac{A_k + A_{k-1}}{z}$$

ein Integrand I. G., was unmöglich ist.

ε) Für $i = k-2$ ergeben sich $1 + \lambda_{k-2}$ Fundamentalintegranden von der Ordnung $k-2$, aber zu ihnen gehören alle Functionen $(k, 0)$ $(k, 1)$ $(k, 2)$ $(k-1, 0)$ $(k-1, 1)$; scheidet man diese aus, so bleiben

$$L_{k-2} = 1 + \lambda_{k-2} - 2L_{k-1} - 3L_k$$

Fundamentalintegranden $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\sigma_{k-2,\nu} \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots L_{k-2}$$

übrig, welche mit $(k, 0)$ $(k, 1)$ $(k, 2)$ $(k-1, 0)$ $(k-1, 1)$ linearunabhängig sind. Aus ihnen leitet man $k-1$ Gruppen, jede von

L_{k-2} Integranden I. G. ab:

$$(k-2)\quad \begin{array}{ll} (k-2,\ 0) & \sigma_{k-2,\nu} \\ (k-2,\ 1) & z\sigma_{k-2,\nu} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (k-2,\ k-2) & z^{k-2}\sigma_{k-2,\nu} \end{array} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots L_{k-2},$$

welche zusammengenommen das System $(k-2)$ oder die Functionen $(k-2)$ heissen sollen.

Dies sind im Ganzen

$$(k-1) L_{k-2}$$

neue Integranden I. G., und ich behaupte, sie sind mit den Functionen (k), $(k-1)$ zusammen linearunabhängig.

Beweis. Die Gruppen $(k, 0)$ $(k, 1)$ $(k, 2)$ $(k-1, 0)$ $(k-1, 1)$ $(k-2, 0)$ sind linearunabhängig, also kann eine Gleichung $A_k + zB_k + z^2C_k + A_{k-1} + zB_{k-1} + A_{k-2} = 0$ nur dann identisch bestehen, wenn alle Coefficienten $= 0$ sind. Es folgt hieraus, dass kein Ausdruck von der Form

$$\frac{A_k + A_{k-1} + A_{k-2}}{z}$$

ein Integrand I. G. sein kann.

Wäre nun unser Satz nicht richtig, so müsste eine Gleichung von der Form

$$\begin{gathered}(A_k + A_{k-1} + A_{k-2}) + z(B_k + B_{k-1} + B_{k-2}) \cdots \\ + z^{k-2}(C_k + C_{k-1} + C_{k-2}) + z^{k-1}(D_k + D_{k-1}) + z^k E_k = 0\end{gathered}$$

identisch bestehen, in welcher wir, wie im vorigen Falle, voraussetzen oder erzwingen können, dass das erste Glied, $A_k + A_{k-1} + A_{k-2}$, nicht fehlt, und in der dann nothwendig noch eines der folgenden Glieder vorkommen muss. Also wäre

$$\frac{A_k + A_{k-1} + A_{k-2}}{z}$$

ein Integrand I. G., was unmöglich ist.

ζ) Man erkennt nunmehr, dass diese Schlussweise für alle folgenden Werthe von i bestehen bleibt. Wendet man dieselbe nacheinander auf $i = k, k-1, k-2, \ldots 1$ an, und ergeben sich in diesen Fällen, wenn jedesmal alle diejenigen Fundamentalintegranden ausgeschieden werden, welche gegen frühere Gruppen linearabhängig sind, beziehungsweise

$$L_k, \quad L_{k-1}, \quad L_{k-2}, \ldots \quad L_1$$

Fundamentalintegranden, so liefern die Systeme (k) $(k-1)$ $(k-2)$ .. (1)

zusammengenommen p oder weniger als p linearunabhängige Integranden I. G., da es nur p linearunabhängige gibt. Ist

$$L_0$$

die Anzahl der fehlenden, so folgt

$$p = L_0 + 2L_1 + 3L_2 \cdots + (k+1)L_k. \tag{I}$$

Bedeutet sodann, wie im Vorangehenden, $1 + \lambda_i$ die Anzahl aller Fundamentalintegranden i^{ter} Ordnung, also aller derjenigen, die im Unendlichen auf jedem Blatte zur Ordnung $2 + i$ verschwinden, so dass z. B. $1 + \lambda_0 = p$ wird, so folgt

$$\left.\begin{aligned}
1 + \lambda_k &= L_k \\
1 + \lambda_{k-1} &= L_{k-1} + 2L_k \\
1 + \lambda_{k-2} &= L_{k-2} + 2L_{k-1} + 3L_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1 + \lambda_1 &= L_1 + 2L_2 + 3L_3 \cdots + kL_k \\
1 + \lambda_0 &= L_0 + 2L_1 + 3L_2 \cdots + (k+1)L_k,
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

letztere Gleichung in Uebereinstimmung mit (I) und mit

$$\lambda_0 = p - 1. \tag{III}$$

Die Anzahl der Fundamentalintegranden $(k, 0)$, $(k-1, 0)$, ... $(1, 0)$, $(0, 0)$, aus denen wir alle übrigen durch Multiplication mit Potenzen von z ableiten, ist also $L_0 + L_1 \cdots + L_k = \lambda_0 - \lambda_1$. Aber es ist $\mu = p - \lambda_1 - 1 + \varrho_1 = \lambda_0 - \lambda_1 + \varrho_1$, also ist jene Anzahl gleich

$$\mu - \varrho_1. \tag{IV}$$

Sodann folgt aus (II)

$$\begin{aligned}
\lambda_i - \lambda_{i+1} &= L_i + L_{i+1} \cdots + L_k \\
\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} &= \phantom{L_i +{}} L_{i+1} \cdots + L_k,
\end{aligned}$$

also ist für die verschiedenen Ordnungen k, $k-1$, ... 1, 0 die Anzahl der beizubehaltenden Fundamentalintegranden:

$$\left.\begin{aligned}
L_k &= 1 + \lambda_k \\
L_{k-1} &= (\lambda_{k-1} - \lambda_k) - (1 + \lambda_k) \\
L_{k-2} &= \lambda_{k-2} - 2\lambda_{k-1} + \lambda_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_i &= \lambda_i - 2\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_0 &= \lambda_0 - 2\lambda_1 + \lambda_2.
\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

Da ferner unter diesen Zahlen sich keine negative findet, während der Fall, dass eine von ihnen $= 0$ wäre, nicht ausgeschlossen ist, und $\lambda_0 - \lambda_1 = \mu - \varrho_1$ ist, so ist

$$\mu - \varrho = L_0 + L_1 \cdots + L_k \geqq L_1 + \cdots + L_k \geqq L_2 + \cdots + L_k \geqq L_{k-1} + L_k \geqq L_k \tag{VIa}$$

also

$$\mu - \varrho_1 = \lambda_0 - \lambda_1 \geqq \lambda_1 - \lambda_2 \geqq \lambda_2 - \lambda_3 \cdots \geqq \lambda_{k-1} - \lambda_k \geqq \lambda_k + 1. \tag{VI}$$

η) Sind, mit nunmehr abgeänderter Bezeichnung und mit Rücksicht auf (IV)

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \ldots \quad \sigma_{\mu-\varrho_1} \tag{VII}$$

die Fundamentalintegranden, welche der Bildung der Systeme (k) $(k-1)$... (1) (0) zu Grunde liegen, so werden im Unendlichen auf jedem Blatte von T

die	L_k	ersten	unendlich	klein	zur	Ordnung	$2 + k$
„	L_{k-1}	folgenden	„	„	„	„	$2 + k - 1$
„	L_{k-2}	„	„	„	„	„	$2 + k - 2$
...			...				
„	L_1	„	„	„	„	„	$2 + 1$
„	L_0	letzten	„	„	„	„	2,

und es nimmt daher der allgemeine Integrand I. G. die Form an

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \cdots + y_{\mu-\varrho_1}\sigma_{\mu-\varrho_1}, \tag{VIII}$$

wo $y_1 y_2 \ldots y_{\mu-\varrho_1}$ ganze Functionen von z mit constanten, aber sonst willkürlichen Coefficienten

$$x_1 \quad x_2 \ldots \quad x_p$$

sind, und zwar sind von diesen Functionen

die	L_k	ersten	in z	vom Grade	k
„	L_{k-1}	folgenden	„	„	$k-1$
„	L_{k-2}	„	„	„	$k-2$
...			...		
„	L_1	„	„	„	1
„	L_0	letzten dagegen constant.			

Die Anzahl der Glieder, aus denen s besteht, und welche alle linearunabhängig sind, ist also $(k+1)L_k + kL_{k-1} \cdots + L_0 = p$ (I), also ist in der That p die Anzahl der Parameter $x_1 x_2 \ldots$

θ) Für z darf man, was bei der vorläufigen Aufgabe des vorigen art. 5 nicht der Fall war, jede Function I. G. nehmen, wofern nur k gehörig ermittelt wird. Wenn ferner λ_1 in der vorgelegten Klasse algebraischer, gleichverzweigter Functionen überhaupt als Defect einer Function I. G. vorkommt, was nicht für jeden Werth von λ_1 der Fall zu sein braucht, so gibt es auch eine Function I. G. z mit diesem Defect λ_1 und dem kleinsten Ueberschuss $\varrho_1 = 1$, also von der niedrigsten, mit diesem Defect vereinbaren Ordnung $\mu = p - \lambda_1$.

Nimmt man für z eine solche Funktion, so ergibt sich aus (VIII) für s ein $(\mu - 1)$ gliedriger Ausdruck; die Gliederzahl ist also um eine Einheit kleiner wie die Ordnung von z. Diese Form von s heisst die canonische Form, und sie ist stets möglich. Zu jeder Defectzahl $\lambda_1, \lambda_1', \ldots$ welche in der Klasse wirklich vorkommt, gehört eine canonische Form von s. Wir haben also den Lehrsatz:

> Eine canonische Form für $s = \frac{dw}{dz}$ ergibt sich, wenn man für z eine Function I. G. mit irgend einem in der Klasse wirklich vorkommenden Defect λ, aber dem Ueberschuss
>
> $$\varrho = 1$$
>
> wählt, so dass die Ordnung dieser Function bei gleichem Defect die niedrigste
>
> $$\mu = p - \lambda$$
>
> wird. Dann wird die Anzahl der in s zu verwendenden Fundamentalintegranden, oder die Anzahl der Glieder von
>
> $$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \cdots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1}$$
>
> um eine Einheit niedriger als die Ordnung von z, und diese Form von s ist unter allen Umständen möglich.

Die Frage, wie man zu einer solchen Function z gelangen könne, wird sich später (V. Abschn. art. 21) durch die Umkehrung der Untersuchung erledigen.

i) Wir schliessen hieran noch einen Zusatz, an den sich (art. 13) wesentliche Folgerungen knüpfen. Derselbe wird nur für die canonische Form von s ausgesprochen, gilt aber auch, wenn $\varrho_1 > 1$ ist.

Der Ausdruck s kann nur dann identisch verschwinden, wenn die constanten Coefficienten $x_1 x_2 \ldots x_p$ alle $= 0$ gesetzt werden. Dies gilt unter der Voraussetzung, daß jedes y den oben ermittelten Grad in z hat. Es findet aber ganz allgemein der Satz statt,

> dass, wenn $G_1 G_2 \ldots G_{\mu-1}$ irgend welche ganze Functionen von z bedeuten, der Ausdruck
>
> $$G_1\sigma_1 + G_2\sigma_2 \cdots + G_{\mu-1}\sigma_{\mu-1}$$
>
> nur dann identisch verschwinden kann, wenn die Factoren $G_1 G_2 \ldots G_{\mu-1}$ einzeln identisch verschwinden.

Wir ordnen nach den in $G_1 G_2 \ldots G_{\mu-1}$ vorkommenden Potenzen von z und heben, falls alle Glieder durch eine Potenz von z theilbar sind, mit dieser weg. Wäre unser Satz nicht richtig, so würde sich eine Gleichung ergeben

$$A + zB + z^2 C \cdots + z^m E = 0,$$

wo $A, B, \ldots$ in $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\mu-1}$ linear und homogen mit constanten Coefficienten sind. Ausser A, welches nicht identisch $= 0$ ist, muss noch mindestens ein Glied vorkommen. Also wäre $\frac{A}{z}$ für $z = 0$ auf keinem Blatte unstetig, also ein Integrand I. G., was unmöglich ist.

7.

Die hiermit festgestellte canonische Form von s, also auch von $dw = s\,dz$, ist wesentlich an die Bedingung geknüpft, dass z^k die höchste Potenz von z sein soll, die noch zu den Functionen I. G. gehört. Es liegt nahe, zu fragen, welchen Werth dieser höchste Exponent k für ein gegebenes p haben kann. Ich will daher schon an dieser Stelle zeigen, wie diese Frage gestellt werden muss.

Aus (VI) (voriger art.) folgt u. A., weil wir jetzt $\varrho_1 = 1$ voraussetzen,

$$\mu - 1 = \lambda_0 - \lambda_1, \quad \mu - 1 \geqq \lambda_1 - \lambda_2, \quad \mu - 1 \geqq \lambda_2 - \lambda_3, \ldots$$
$$\mu - 1 \geqq \lambda_{k-1} - \lambda_k, \quad \mu - 1 \geqq \lambda_k + 1,$$

also durch Addition $(k+1)(\mu - 1) \geqq \lambda_0 + 1$, d. i.

$$(k+1)(\mu-1) \geqq p, \quad k \geqq \frac{p - \mu + 1}{\mu - 1}.$$

Andererseits ist die Anzahl der Nullpunkte einer Function I. G. höchstens $= 2p - 2$, also

$$\mu k \leqq 2p - 2.$$

Beides zusammen gibt eine der drei Ungleichheiten

$$\frac{p - \mu + 1}{\mu - 1} \leqq k \leqq \frac{2p-2}{\mu} \qquad (A)$$

$$\frac{p + k + 1}{k + 1} \leqq \mu \leqq \frac{2p-2}{k} \qquad (B)$$

$$\tfrac{1}{2}\mu k + 1 \leqq p \leqq (\mu - 1)(k + 1). \qquad (C)$$

Nehmen wir als Beispiel den Fall $\mu = 3$, so folgt aus (A)

$$\frac{p-2}{2} \leqq k \leqq \frac{2p-2}{3}.$$

Im vorliegenden Fall hat s die Form

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2;$$

sind a_1, a_2 die Grade von y_1, y_2 in z, also die Ordnungen von σ_1, σ_2, und ist $a_2 \gtreqless a_1$, so ist $k = a_1$ und $a_2 = p - a_1 - 2$. Es ergibt sich folgende Tabelle

p	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12
a_1	1	2	1	2	3	2	4	3	4	3	5	4	6	5	4	6	5	7	6	5
a_2	0	0	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	2	3	4	3	4	3	4	5

so dass jedesmal z^{a_1} die höchste Potenz von z ist, die noch zu den Functionen I. G. gehört. Der Beweis wird sich im art. 24 ergeben, wo wir finden werden, dass alle diese Fälle wirklich existiren, indem jedem dieser, ins Unbegrenzte fortzusetzenden Reihe von Fällen eine cubische Gleichung in s entspricht, welche s und implicite σ_1 und σ_2 in der jedesmal verlangten Weise bestimmt.

Dann wird es auch ohne weitere Ausführung klar, dass k weder durch p, noch durch μ allein, sondern durch p und μ zusammen bestimmt wird, wie es aus der Ungleichheit (A) hervorgeht.

Die zweite und dritte Ungleichheit zeigt, in welchen Fällen überhaupt von einem bestimmten Werthe von k die Rede sein kann. So ist z. B. die Annahme $k = 1$ in allen denjenigen Fällen a priori ausgeschlossen, für welche die Ungleichheit $\frac{p+2}{2} \gtreqless \mu \leq 2p - 2$ oder $\frac{\mu+2}{2} \gtreqless p \leq 2\mu - 2$ nicht erfüllt ist.

III. Die Function s als Wurzel einer Gleichung vom Grade μ.

8.

Wenn umgekehrt eine canonische Form

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \cdots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1}$$

vorliegt, in welcher die Ordnungen von $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{\mu-1}$ also die Grade von $y_1y_2\ldots y_{\mu-1}$ der Reihe nach

$$a_1 \quad a_2 \ldots \quad a_{\mu-1}$$

sind, so ist k die grösste von diesen Zahlen, und L_k gibt an, wieviel von ihnen $= k$ sind. Ebenso ergeben sich die Werthe von $L_{k-1}, \ldots L_0$, und da keiner von ihnen negativ ist, so ist unter diesen Voraussetzungen die Ungleichheit (VIa), d. i. die Bedingung (VI) (art. 6) für die ebenfalls leicht zu berechnenden Defecte $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k$ von $z, z^2, \ldots z^k$ identisch erfüllt.

Vermöge dieser Abzählung ist ferner $a_1 + a_2 \cdots + a_{\mu-1} = kL_k + (k-1)L_{k-1} \cdots + L_1$; aber wegen (II) (art. 6) ist dies auch gleich $1 + \lambda_1 = p - \mu + \varrho_1$, also folgt, weil $\varrho_1 = 1$ ist,

$$a_1 + a_2 \cdots + a_{\mu-1} = p - \mu + 1,$$

wie auch aus dem Umstande folgt, dass s, nach den willkürlichen Constanten geordnet, aus p Gliedern besteht.

Ich beschränke nun die Untersuchung dieser Function s und der Gleichung μ^{ten} Grades, deren Wurzel s ist, auf den Fall, wo s nur einfache und getrennte Singularitäten besitzt, d. h. wo für keinen Werth a von z mehr als eine einzige mehrfache Wurzel s stattfindet, und dies jedesmal eine Doppelwurzel ist.

Es sollen also nur einfache Verzweigungspunkte und nur eigentliche Doppelpunkte, und niemals soll für das nämliche z mehr als eine von diesen Singularitäten stattfinden.

Beiläufig bemerkt hängt dies, wie ich in meinen Vorlesungen zu zeigen pflege, von einer einzigen Constante ab, welche ich die Bidiscriminante der Gleichung zwischen s und z nenne; bei einer gegebenen Gleichung $F(s|z) = 0$ sind die vorstehenden Bedingungen erfüllt oder nicht, jenachdem diese Constante von Null verschieden oder $= 0$ ist.

Diese Bedingungen ziehen bekanntlich für die Discriminante unserer erst aufzustellenden Gleichung die wichtige Folgerung nach sich, dass sie nur einfache und Doppelfactoren hat, und zwar entspricht einem einfachen Wurzelfactor stets ein einfacher Verzweigungspunkt, einem Doppelfactor stets ein eigentlicher Doppelpunkt.

Unter den Voraussetzungen unserer Untersuchung wird also die Discriminante D der Gleichung zwischen s und z in die Form zu bringen sein

$$D = WR^2,$$

wo W das Produkt aller einfachen, R^2 das Produkt aller Doppelfactoren ist; in den Verzweigungspunkten ist dann $W = 0$, in den Doppelpunkten $R = 0$.

Diese Zerfällung von D und die wirkliche Darstellung von R wird eine der Hauptaufgaben unserer Untersuchung sein.

9.

Unter den nunmehr feststehenden Voraussetzungen hat die Fläche T

$$2(p + \mu - 1)$$

einfache und durchaus getrennte Verzweigungspunkte; sei

A

eine ganze Function $2(p+\mu-1)^{\text{ten}}$ Grades von z, welche in diesen Punkten verschwindet, also nur ungleiche Linearfactoren hat, ferner seien

$$s_1 \quad s_2 \dots \quad s_\mu$$

die verschiedenen Zweige von s. Dann hat der Ausdruck

$$\tau = A(t-s_1)(t-s_2)\dots(t-s_\mu)$$

die folgenden Eigenschaften.

1) Er ist algebraische einwerthige, also rationale Function von z.

2) Für endliche Werthe von z wird s nur in Verzweigungspunkten unstetig. Findet ein solcher statt für $z=\alpha$, so werden dort zwei Zweige, z. B. s_1 und s_2 unstetig wie $\frac{1}{\sqrt{z-\alpha}}$, die übrigen bleiben stetig. Da zugleich A verschwindet wie $z-\alpha$, so wird für $z=\alpha$ die rationale Function τ weder Null noch unendlich.

3) Für endliche Werthe von z wird demnach diese rationale Function nie unstetig, also ist sie ganze Function von z. Ordnet man sie nach Potenzen von t, und wird dann

$$\tau = At^\mu + A_1 t^{\mu-1} + A_2 t^{\mu-2} \dots + A_\mu,$$

so sind also die Coefficienten $A, A_1, \dots$ ganze Functionen von z, und es wird in einem Verzweigungspunkte zwar A, aber nicht jeder Coefficient $=0$. Dies gilt auch, wenn man $y_1, y_2, \dots y_{\mu-1}$ auf ihre constanten Theile $x_1 x_2 \dots x_{\mu-1}$ reducirt; wird alsdann $A_i = A_i^0$, und ist

$$A_i^0 = \Sigma A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{\mu-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{\mu-1}^{\alpha_{\mu-1}} \quad (\alpha_1+\alpha_2 \cdot\cdot +\alpha_{\mu-1}=i),$$

so sind hier die Coefficienten ganze Functionen von z, also sind sie es auch im ursprünglichen Ausdrucke, nämlich in

$$A_i = \Sigma A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{\mu-1}} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_{\mu-1}^{\alpha_{\mu-1}} \quad (\alpha_1+\alpha_2 \cdots +\alpha_{\mu-1}=i).$$

Da im Unendlichen jeder Zweig von s zur zweiten Ordnung verschwindet so folgt aus dem bereits bekannten Grade von A, dass dort A_i zur Ordnung $2(p+\mu-i-1)$ unendlich wird, also ist A_i in z vom Grade

$$\delta A_i = 2(p+\mu-i-1).$$

Aus den bekannten Graden von $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$ folgt also weiter, wenn wir zur Bezeichnung des Grades in z das Zeichen δ beibehalten,

$$\delta A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{\mu-1}} + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \cdots + \alpha_{\mu-1} a_{\mu-1} = 2(p+\mu-i-1).$$

Demnach genügt s einer Gleichung μ^{ten} Grades

$$As^\mu + A_1 s^{\mu-1} + A_2 s^{\mu-2} \dots + A_\mu = 0,$$

und hier findet nun der wichtige Satz statt, dass stets

$$A_1 = 0$$

ist, oder mit andern Worten, dass identisch

$$s_1 + s_2 \dots + s_\mu = 0$$

ist. In der That ist $v' = s_1 + s_2 \dots + s_\mu$ eine rationale Function von z, aber so beschaffen, dass ihr Integral $v = \int v' dz$ weder im Endlichen noch im Unendlichen jemals unstetig wird. Also ist auch v selbst rational, aber nie unstetig, also constant, mithin $v'=0$. Der besondere Fall dieses Satzes, wo z einwerthige doppeltperiodische Function von $w = \int s dz$ ist, ist seit langer Zeit bekannt.

10.

Als Discriminante des Ausdruckes

$$\tau = At^\mu + A_1 t^{\mu-1} + A_2 t^{\mu-2} \dots + A_\mu$$

bezeichne ich, im Vorzeichen von der üblichen Schreibweise abweichend, die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mu A & (\mu-1)A_1 & (\mu-2)A_2 \dots \\ A_1 & 2A_2 & 3A_3 \dots \\ . & \mu A & (\mu-1)A_1 \dots \\ . & A_1 & 2A_2 \dots \\ \dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} = D,$$

welche entsteht, wenn das erste Zeilenpaar $\mu-1$ mal wiederholt aber jedesmal um eine Spalte nach rechts geschoben wird. Ist wie oben

$$\tau = A(t-s_1)(t-s_2)\dots(t-s_\mu),$$

so ergibt sich

$$D = \mu h A^{2\mu-2}[\Pi(s_1 s_2 \dots s_\mu)]^2,$$

wo h eine numerische Constante ist.

11.

In unserm Falle ist $A_1 = 0$ und s Wurzel einer Gleichung

$$As^\mu + A_2 s^{\mu-2} + A_3 s^{\mu-3} \dots + A_\mu = 0, \tag{I}$$

in welcher stets das zweite Glied fehlt. Setzt man die $(2\mu-3)$ zeilige Determinante, welche entsteht, wenn in D (art. 10) die erste Zeile und Spalte weggelassen werden,

$$\begin{vmatrix} 2A_2 & 3A_3 & 4A_4\ldots \\ \mu A & . & (\mu-2)A_2\ldots \\ . & 2A_2 & 3A_3\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = h\vartheta, \tag{II}$$

so wird die Discriminante

$$D = \mu h A \vartheta.$$

Wenn daher

$$A^{\frac{2\mu-3}{2}} \Pi(s_1 s_2 \ldots s_\mu) = \varDelta \tag{III}$$

gesetzt wird, so ist

$$D = \mu h A \varDelta^2 \tag{IV}$$

und

$$\vartheta = \varDelta^2. \tag{V}$$

Vergleicht man diese Formeln mit dem Schlusse von art. 8, so folgt, dass dort $W = \mu h A$ genommen werden kann, und dann muss $R^2 = \varDelta^2$, $R = \varDelta$ sein. Die Bedingungen unserer Aufgabe fordern also, dass $\varDelta$ eine rationale ganze Function von z ist und mit A keinen Linearfactor gemein hat.

Will man dies schon an dieser Stelle verificiren, so ist zunächst zu beachten, dass ausserhalb der Verzweigungspunkte von s oder was dasselbe ist, der $\sqrt{A}$, jeder Factor von $\varDelta$, also auch $\varDelta$ selbst einändrig ist. Wenn sodann z einen Verzweigungspunkt von s in unendlicher Nähe umkreist, so vertauschen sich zwei Zweige von s, die übrigen kehren zu ihren Anfangswerthen zurück; also wechselt Π nur sein Zeichen, ebenso die $\sqrt{A}$, aber der Endwerth von $\varDelta$ wird dem Anfangswerthe gleich. Also ist $\varDelta$ für keinen Werth von z mehrändrig, und als algebraische Function von z eine rationale. Diese rationale Function könnte für endliche Werthe von z nur unstetig werden, wenn ein Zweig von s es wird, also für $A = 0$. Aber als Integrand I. G. darf s nur in Verzweigungspunkten unstetig werden; für $A = 0$ bleiben also entweder alle Zweige von s stetig, und dann müssten auch $A_2 A_3 \ldots A_\mu$ verschwinden, was auszuschliessen ist oder es werden unstetig nur die beiden Zweige von s, welche im entsprechenden Verzweigungspunkte zusammenhängen, etwa s_1 und s_2. Also darf, so oft A verschwindet, der Grad der Gleichung I nur um zwei Einheiten sinken, d. h. für $A = 0$ darf niemals A_2 verschwinden. Dann erhält man für die beiden Zweige, welche unendlich werden, $As^2 + A_2 = 0$, d. h. $s_1\sqrt{A}$ und $s_2\sqrt{A}$ werden weder Null noch unendlich, und entgegengesetzt gleich. In diesem Verzweigungspunkte erlangen also die $2\mu - 3$ Factoren

$$(s_2 - s_1)\sqrt{A} \text{ und für } i > 2: \quad (s_i - s_1)\sqrt{A}, \quad (s_i - s_2)\sqrt{A},$$

von $\varDelta$ endliche von Null verschiedene Werthe, die übrigen Factoren bleiben stetig und von Null verschieden, da für $A = 0$ nur zwei Wurzeln s zusammenfallen, also wird für $A = 0$ die Function $\varDelta$ weder Null noch unendlich.

Damit ist bewiesen, dass die rationale Function $\varDelta$ für endliche Werthe von z nie unstetig wird, also eine ganze Function von z ist, ausserdem dass vermöge der Bedingungen unserer Aufgabe $\varDelta$ in keinem Verzweigungspunkte verschwindet.

Es ist leicht zu zeigen, dass der Grad dieser ganzen Function, also die Anzahl der Doppelpunkte von s, gleich $p(2\mu-3)+(\mu-1)(\mu-3)$ ist, was sich übrigens auch aus dem Ausdrucke ergibt, den wir im art. 15 für $\varDelta$ finden werden.

IV. Das Transformationsproblem; Bestimmung von Δ.

12.

In der für s gefundenen Gleichung

$$As^\mu + A_2 s^{\mu-2} \cdots + A_\mu = 0 \tag{1}$$

sind die Coefficienten $A_2 A_3 \ldots A_\mu$ symmetrische Functionen der Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_\mu$, aber zwischen diesen besteht die identische Gleichung

$$s_1 + s_2 \cdots + s_\mu = 0. \tag{2}$$

Wir schaffen mittelst dieser Gleichung eine Wurzel weg, und zwar stets s_μ; dann gehen $A_2 A_3 \ldots A_\mu$ über in symmetrische Functionen von $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$, welche wir durch $A_2' A_3' \ldots A_\mu'$ bezeichnen, so dass

$$At^\mu + A_2' t^{\mu-2} \cdots + A_\mu' = A(t-s_1)\cdots(t-s_{\mu-1})(t+s_1\cdots+s_{\mu-1}) \tag{3}$$

wird. Es sind also $A_2' A_3' \ldots A_\mu'$ homogene Formen von den Graden $2, 3, \ldots \mu$ mit $\mu - 1$ Argumenten $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$, aus denen sie in vorgeschriebener Weise zusammengesetzt sind.

Nun ist in canonischer Form (art. 8)

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \cdots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1}; \tag{4}$$

da diese Formel für jeden Zweig von s und die gleichzeitigen Zweige von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots . \sigma_{\mu-1}$ gilt, so liefert sie μ Formeln, von denen aber wegen (2) die letzte aus den übrigen folgt, und weggelassen werden kann.

Um diese wichtigen Formeln ausführen zu können, wollen wir die gleichzeitigen Zweige von s und irgend einem Fundamentalintegranden σ_λ durch

$$s_1,\ \sigma_{\lambda 1};\quad s_2,\ \sigma_{\lambda 2};\ \ldots\quad s_i,\ \sigma_{\lambda i};\ \ldots\quad s_\mu,\ \sigma_{\lambda\mu}$$

bezeichnen; dann folgt aus (4)

$$\left.\begin{array}{l} s_1\ \ \ = y_1\sigma_{11}\ \ \ + y_2\sigma_{21}\ \ \ \cdots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1,1} \\ s_2\ \ \ = y_1\sigma_{12}\ \ \ + y_2\sigma_{22}\ \ \ \cdots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{\mu-1} = y_1\sigma_{1,\mu-1} + y_2\sigma_{2,\mu-1}\cdots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1,\mu-1}, \end{array}\right\} \qquad (S)$$

wo aus dem angegebenen Grunde die Formel für s_μ weggelassen ist. Hier stehen also in derselben Zeile jedesmal die gleichzeitigen Zweige der verschiedenen Functionen, aber in derselben Spalte die verschiedenen Zweige der nämlichen Function, bis auf den μ^{ten} Zweig, der weggelassen ist.

Setzt man diese Ausdrücke in $A_2'A_3'\ldots A_\mu'$ ein, so erhält man $A_2A_3\ldots A_\mu$, also diejenigen Formen mit den $\mu-1$ Variabeln $y_1y_2\ldots y_{\mu-1}$, welche zur Bildung der Gleichung (1) erforderlich sind.

Damit sind wir zu einem eigentlichen Transformationsproblem gelangt, indem für die gesuchten Formen $A_2A_3\ldots A_\mu$ (1) canonische Formen $A_2'A_3'\ldots A_\mu'$ von vorgeschriebener Zusammensetzung vorliegen, und (2) die Substitution (S) gegeben ist, durch welche diese in jene übergehen. Die Schwierigkeit unserer Aufgabe liegt also hauptsächlich in der Natur der Substitution (S), über deren Coefficienten $\sigma_{\lambda i}$ weiter nichts feststeht, als was oben über die Fundamentalintegranden nachgewiesen wurde; um unsere Untersuchung weiter führen zu können, werden wir uns daher mit der Substitution (S) eingehender zu beschäftigen haben.

Es ist hier der Ort zu einigen ergänzenden Bemerkungen über die Fälle, welche durch unsere bisherigen Voraussetzungen über z ausgeschlossen sind. Diese Voraussetzungen bestehen darin, dass z eine Function I. G. mit dem niedrigsten Ueberschuss $\varrho = 1$ sein soll; ausgeschlossen sind also alle Functionen I. G., deren Ueberschuss $\varrho > 1$ ist, und Functionen II. G. z.

Die Gleichung (2) findet auf alle Fälle statt, und mit ihr die Reduction der Coefficienten in die Formen $A_2'\ldots A_\mu'$ mit $\mu-1$ Argumenten $s_1s_2\ldots s_{\mu-1}$.

Wenn aber (1) z Function I. G. und ihr Ueberschuss $\varrho > 1$ ist, und man drückt s durch Fundamentalintegranden aus, so wird nach art. 6 (VIII)

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \cdots + y_{\mu-\varrho}\sigma_{\mu-\varrho},$$

also ist die Gliederzahl $\mu-\varrho$, d. i. die Anzahl der Argumente $y_1y_2\ldots$ von $A_2\ldots A_\mu$ kleiner als die Anzahl $\mu-1$ der Argumente von $A_2'\ldots A_\mu'$.

Wenn (2) z Function II. G. ist, so ist jedenfalls ihre Ordnung $\mu \overline{\overline{>}}\, p+1$. Fundamentalintegranden, die im Unendlichen auf jedem Blatte zu einer höhern als der zweiten Ordnung verschwinden, gibt es nicht, weil sonst [nach art. 4 (6.)] z Function I. G. wäre. Durch Fundamentalintegranden $\sigma_1\sigma_2\ldots$ ausgedrückt, wird also

$$s = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 \cdots + x_p\sigma_p,$$

ohne Reduction der Gliederzahl. Die Gliederzahl p von s, also die Anzahl der Argumente in den Formen $A_2\ldots A_\mu$ ist also im Allgemeinen kleiner als die Anzahl $\mu-1$ der Argumente von $A_2'\ldots A_\mu'$, und sie ist dieser nur in dem besondern Falle gleich, wo z Function II. G. niedrigster Ordnung $\mu = p+1$ ist.

In allen denjenigen Fällen, wo $A_2'\ldots A_\mu'$ von mehr Argumenten abhängen wie $A_2\ldots A_\mu$, können zwar jene in diese, aber nicht umgekehrt diese in jene transformirt werden. (Vergl. art. 22.)

Ein Transformationsproblem, wo beide Formensysteme in einander transformirt werden können, also zwischen ihnen wirkliche Aequivalenz besteht, findet also nur statt, wenn z entweder Function I. G. von niedrigster Ordnung bei gegebenem Defect λ, oder Function II. G. von überhaupt niedrigster Ordnung $p+1$ ist, und auch in diesen Fällen nur dann, wenn aus der Substitution S, durch welche $A_2'\ldots A_\mu'$ in $A_2\ldots A_\mu$ transformirt werden, eine andere, S^{-1} folgt, welche rückwärts $A_2\ldots A_\mu$ in $A_2'\ldots A_\mu'$ transformirt, d. h. wenn die Substitution S eine umkehrbare oder ihre Determinante von Null verschieden ist. Dass dies der Fall ist, werden wir im folgenden art. beweisen.

Den hiermit als zulässig nachgewiesenen Fall, wo z zwar Function II. G. aber von niedrigster Ordnung ist, nehmen wir in unsere Voraussetzungen mit auf, so dass für diesen Fall die oben (art. 8) durch $a_1a_2\ldots a_{\mu-1}$ bezeichneten Zahlen alle $=0$ sind und $p = \mu-1$ wird.

13.

Wir bezeichnen die Determinante der Substitution S durch r, so dass

$$r = \frac{\partial(s_1s_2\ldots s_{\mu-1})}{\partial(y_1y_2\ldots y_{\mu-1})}$$

oder

$$r = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \cdots & \sigma_{\mu-1,1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \cdots & \sigma_{\mu-1,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1,\mu-1} & \sigma_{2,\mu-1} \cdots & \sigma_{\mu-1,\mu-1} \end{vmatrix}$$

wird; hier sind die Zeilen durch die gleichzeitigen Zweige der verschiedenen Functionen $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\mu-1}$, die Spalten durch die verschiedenen Zweige ein und derselben Function σ gebildet, immer mit Weglassung des μ^{ten} Zweigs. Wir sind nun im Stande, zunächst zu beweisen, dass die Substitution S eine umkehrbare, d. h. dass r nicht identisch Null ist.

Beweis. Angenommen, r sei identisch Null, allgemeiner, alle $(i+1)$ zeiligen Unterdeterminanten von r seien Null, aber wenigstens eine i zeilige sei nicht Null. Sei dies die Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \cdots & \sigma_{i1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \cdots & \sigma_{i2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1i} & \sigma_{2i} \cdots & \sigma_{ii} \end{vmatrix} = \delta.$$

Wenn dann g und λ beide $> i$ sind, so ist nach Voraussetzung stets

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \cdots & \sigma_{i1} & \sigma_{\lambda 1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \cdots & \sigma_{i2} & \sigma_{\lambda 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1i} & \sigma_{2i} \cdots & \sigma_{ii} & \sigma_{\lambda i} \\ \sigma_{1g} & \sigma_{2g} \cdots & \sigma_{ig} & \sigma_{\lambda g} \end{vmatrix} = 0.$$

Nun kann man, weil δ nicht $= 0$ ist, Factoren $R_1 R_2 \ldots R_i$ so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda 1} &= R_1 \sigma_{11} + R_2 \sigma_{21} \cdots + R_i \sigma_{i1} \\ \sigma_{\lambda 2} &= R_1 \sigma_{12} + R_2 \sigma_{22} \cdots + R_i \sigma_{i2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{\lambda i} &= R_1 \sigma_{1i} + R_2 \sigma_{2i} \cdots + R_i \sigma_{ii} \end{aligned}$$

wird und dann wird auch für $g > i$

$$\sigma_{\lambda g} = R_1 \sigma_{1g} + R_2 \sigma_{2g} \cdots + R_i \sigma_{ig},$$

d. h. es gibt Functionen $R_1 R_2 \ldots R_i$ von z, so dass jeder Zweig $\sigma_{\lambda 1}$, $\sigma_{\lambda 2}, \ldots \sigma_{\lambda \mu}$ der Function σ_λ sich durch die gleichzeitigen, dem näm-

lichen Blatte von T zugeordneten Zweige von $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_i$ nach der Formel

$$\sigma_{\lambda k} = R_1 \sigma_{1k} + R_2 \sigma_{2k} \cdots + R_i \sigma_{ik}$$

ausdrückt.

Die Ausdrücke für $R_1 R_2 \ldots R_i$ zeigen, dass dies algebraische Functionen von z sind, und dass diese Functionen für solche Werte von z, denen in der Fläche T kein Verzweigungspunkt entspricht, einändrig sind. Wenn aber z einen Verzweigungswerth der Functionen $\sigma_1 \sigma_2 \ldots$ umkreist, so dass der Zweig s_k von s in s_l übergeht, so erhält man

$$\sigma_{\lambda l} = R_1 \sigma_{1l} + R_2 \sigma_{2l} \cdots + R_i \sigma_{il}$$

mit den ursprünglichen Werthen der Factoren $R_1 R_2 \ldots R_i$. Diese algebraischen Functionen von z sind also niemals mehrändrig, mithin sind sie rational in z. Schafft man den gemeinsamen Nenner weg, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$G_1 \sigma_{1k} + G_2 \sigma_{2k} \cdots + G_i \sigma_{ik} + G_\lambda \sigma_{\lambda k} = 0,$$

wo G_1, $G_2 \ldots$ ganze Functionen von z sind; und da dies für alle Zweige von $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_\lambda$ gilt, so folgt

$$G_1 \sigma_1 + G_2 \sigma_2 \cdots + G_i \sigma_i + G_\lambda \sigma_\lambda = 0,$$

was nach dem Lehrsatze (i) des art. 6 unmöglich ist. Also ist bewiesen, dass r nicht identisch Null, mithin dass die Substitution S eine umkehrbare ist.

Auf Grund dieses Satzes können wir zur Bestimmung von r übergehen. Sei

$$r_i = \frac{\partial(s_1 \ldots s_{i-1} s_\mu s_{i+1} \ldots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 \ldots y_{i-1} y_i y_{i+1} \ldots y_{\mu-1})},$$

so ergibt sich, wenn man s_μ durch seinen Werth $-s_1 \ldots - s_{\mu-1}$ ersetzt,

$$r = -r_i.$$

Wo s sich nicht verzweigt, sind die Elemente von r einändrig und mit ihnen r selbst. Umkreist z in unendlicher Nähe einen Punkt $z = \alpha$, für den s sich verzweigt, so ist der Endwerth von r stets dem Anfangswerthe entgegengesetzt gleich. Denn wenn dort die beiden Zweige s_1, s_2 zusammenhängen, so vertauschen sich die beiden ersten Zeilen von r, hängt s_1 mit s_μ zusammen, so vertauscht sich in $r_i = -r$ die erste mit der i^{ten} Zeile; in beiden Fällen kehren die übrigen Zeilen zu ihren Anfangswerthen zurück, da für sie $z = \alpha$ keinen Verzweigungspunkt bestimmt.

Die nämlichen Eigenschaften hat auch die $\sqrt{A}$, also ist die algebraische Function von z

$$P = r \cdot \sqrt{A}$$

eine einwertige, mithin rational; ich behaupte, sie ist constant.

Wenn nämlich für $z = \alpha$ die Zweige s_1, s_2 zusammenhängen, so werden sie beide unendlich wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$, alle übrigen bleiben stetig; der Ausdruck $-r_2 = r$ zeigt, dass auch r selbst nur wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$ unstetig wird, also P stetig bleibt. Das nämliche ist, wie der Ausdruck r selbst zeigt, der Fall, wenn s_1 und s_μ für $z = \alpha$ zusammenhängen. Die rationale Function P von z wird also für endliche Werthe von z nie unstetig, und ist daher keine gebrochne.

Nun wird im Unendlichen die $\sqrt{A}$ unendlich zur Ordnung $p + \mu - 1$, jedes einzelne Glied von r, z. B. $\sigma_{11}\sigma_{22}\ldots\sigma_{\mu-1,\mu-1}$ unendlich klein zur Ordnung $2 + a_1 + 2 + a_2 \cdots + 2 + a_{\mu-1} = p + \mu - 1$ (art. 8), also das entsprechende Glied von P weder Null noch unendlich.

Würde nun im Unendlichen r selbst von höherer Ordnung unendlich klein wie seine einzelnen Glieder, so wäre dort $P = 0$, also wäre P und mit ihm r identisch Null. Da letzteres nicht der Fall ist, so folgt

1) dass im Unendlichen jedes einzelne Glied von r zur nämlichen Ordnung $p + \mu - 1$ unendlich klein wird wie r selbst [art. 26 (13)],

2) dass P auch dort stetig bleibt, ohne zu verschwinden, also constant und von Null verschieden ist.

Der Werth von P ist im Uebrigen verfügbar, da jeder Fundamentalintegrand $\sigma_1\sigma_2\ldots$ nur bis auf einen constanten Factor bestimmt ist; durch geeignete Wahl eines der letztern kann man bewirken, dass $P = 1$ wird, und dann folgt

$$r = \frac{\partial(s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \cdots y_{\mu-1})} = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

mithin, wenn ϱ die Determinante der Substitution S^{-1} bedeutet,

$$\varrho = \frac{\partial(y_1 y_2 \cdots y_{\mu-1})}{\partial(s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1})} = \sqrt{A}.$$

14.

Die bisherigen Anwendungen der Formenalgebra in der Lehre von den algebraischen Functionen s einer einzigen Variable z beruhen in formaler Beziehung darauf, dass s, z wie Coordinaten eines Punktes

behandelt, und dem entsprechend projectivischen Transformationen unterworfen werden.[1]) Das Wesentliche bei diesem Verfahren besteht darin, dass durch die Form dieser Substitution implicite eine Verfügung über den Rang getroffen wird, den die Functionen s, z in der zu untersuchenden Klasse gleichverzweigter algebraischer Functionen einnehmen. Drückt man nämlich, wie es der linearen Transformation homogener Punktkoordinaten entspricht, die neuen Variabeln $s'z'$ aus als Quotienten linearer Functionen von sz mit demselben Nenner, so ist damit gleichzeitig festgestellt, dass bis auf etwaige Grenzfälle s' und z' Functionen von derselben Ordnung μ und derselben Gattung, also entweder beide von der I. oder beide von der II. Gattung sein sollen.

Substitutionen dieser Art sind bei unserer Untersuchung ausgeschlossen, da über s vollständig, über z im Wesentlichen verfügt ist. Eine Substitution I. Grades für z allein hat dagegen für unsern Fall gar keine Bedeutung mehr, da sie an den charakteristischen Zahlen λ, ϱ der Function z nichts ändert (Ende von art. 3) und auch nichts an der canonischen Form für $dw = s\,dz$.

Geht nämlich $dw = \Sigma y_i \sigma_i dz$, wo y_i ganze Function von z und vom Grade a_i ist, durch die Substitution $z = \alpha + \frac{\beta}{z'}$ über in $dw = \Sigma y_i' \sigma_i' dz'$, wo y_i' ganze Function von z' und ebenfalls vom Grade a_i ist, so ist

$$\sigma_i' = \frac{\sigma_i}{z'^{a_i+2}} = \left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)^{a_i+2} \sigma_i,$$

also ist σ_i' stetig für $z' = 0$, nämlich $z = \infty$, dagegen $\sigma_i' = 0^{2+a_i}$ für $z' = \infty$, $z = \alpha$. Also ist σ_i' Fundamentalintegrand von der Ordnung a_i, ebenso wie σ_i, nur dass jener sich auf z', dieser sich auf z als Variable bezieht.

An die Stelle aller Substitutionen solcher Art tritt bei unserm Problem die lineare und umkehrbare Substitution S^{-1} von der Determinante $\varrho = \sqrt{A}$, durch welche statt der $\mu - 1$ Variabeln $y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1}$ ebensoviel neue, $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$ eingeführt werden, und in deren Coefficienten z als Parameter der Substitution eingeht.

Durch diese Substitution werden die Grundformen

$$A_2 \quad A_3 \ldots \quad A_\mu \tag{A}$$

gleichzeitig in die vorgeschriebenen canonischen Formen

$$A_2' \quad A_3' \ldots \quad A_\mu' \tag{A'}$$

1) Den Riemannschen Voraussetzungen entspricht in der analogen Auffassung eine Substitution I. Grades für s und eine andere für z. Diese Art der Transformation ist meines Wissens bisher nicht weiter verfolgt worden.

transformirt. Ist also I irgend eine Invariante oder Covariante des Formensystems (A) und λ der Exponent, zu dem sie gehört, also in bekannter Bezeichnung

$$I' = \varrho^{\lambda} I,$$

so folgt

$$I = A^{-\frac{\lambda}{2}} I';$$

also haben wir auch für jede Invariante und jede Covariante I des Formensystems (A) vermöge der vorstehenden Gleichung eine vorgeschriebene canonische Form.

Mit Hülfe dieser canonischen Formen ergeben sich dann weiter Relationen zwischen den Grundformen (A) und ihren Invarianten und Covarianten; soweit diese Relationen nicht für jedes Formensystem (A) gelten, gehören sie zu den nothwendigen Bedingungen unserer Aufgabe.

Ich will dies an einigen Beispielen erläutern. Sind p, q Functionen von $\mu - 1$ Variabeln $t_1 t_2 \ldots t_{\mu-1}$, so will ich zur Abkürzung die Hessesche Covariante

$$\left| \frac{\partial^2 p}{\partial t_i \partial t_k} \right| = H_t(p)$$

und die im Parameter ε lineare Determinante

$$\left| \frac{\partial^2 p}{\partial t_i \partial t_k} - \varepsilon \frac{\partial q}{\partial t_i} \frac{\partial q}{\partial t_k} \right| = H_t(p) + \varepsilon H_t(p|q)$$

setzen, so dass

$$H_t(p|q) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial q}{\partial t_1} & \frac{\partial q}{\partial t_2} \cdots \\ \frac{\partial q}{\partial t_1} & \frac{\partial^2 p}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial t_1 \partial t_2} \cdots \\ \frac{\partial q}{\partial t_2} & \frac{\partial^2 p}{\partial t_1 \partial t_2} & \frac{\partial^2 p}{\partial t_2^2} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

ist. Sind nun u, v Functionen von $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$ und insofern auch von $y_1 y_2 \cdots y_{\mu-1}$, so sind $H_y(u)$ und $H_y(u|v)$ Covarianten, die zum Exponenten 2 gehören, also ist

$$H_y(u) = \frac{1}{A} H_t(u), \quad H_y(u|v) = \frac{1}{A} H_t(u|v).$$

Wenn aber u, v zunächst als Functionen von $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$ und s_μ gegeben sind, und man s_μ nicht eliminiren will, so kann man diese Gleichungen in die folgende Form bringen

$$H_y(u) = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ 1 & u_{11} & u_{12} \ldots & u_{1\mu} \\ 1 & u_{21} & u_{22} \ldots & u_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & u_{\mu 1} & u_{\mu 2} \ldots & u_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

$$H_y(u|v) = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \ldots & 1 \\ 0 & 0 & v_1 \ldots & v_\mu \\ 1 & v_1 & u_{11} \ldots & u_{1\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & v_\mu & u_{\mu 1} \ldots & u_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

wo

$$u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial s_i \partial s_k}, \quad v_i = \frac{\partial v}{\partial s_i}$$

zu setzen ist. Hieraus ergeben sich zahlreiche Formeln der beschriebenen Art, wenn man für u und v Potenzsummen $s_1^k + s_2^k + \cdots$ oder lineare Verbindungen solcher nimmt; ich hebe nur die folgenden drei hervor, welche darauf beruhen, dass in allen Fällen

$$A_2 = -\tfrac{1}{2} A (s_1^2 + s_2^2 \cdots + s_\mu^2)$$
$$A_3 = -\tfrac{1}{3} A (s_1^3 + s_2^3 \cdots + s_\mu^3)$$

ist. Man findet

$$H_y(A_2) = (-1)^{\mu-1} \mu A^{\mu-2} \tag{1}$$

$$H_y(A_3 - 2\lambda A_2) = 2^{\mu-1} A^{\mu-3} \frac{\partial}{\partial \lambda} [A \lambda^\mu + A_2 \lambda^{\mu-2} + A_3 \lambda^{\mu-3} \cdots + A_{\mu-1} \lambda] \tag{2}$$

$$H_y(A_3 | A_2) = 2^{\mu-2} \mu^2 A^{\mu-2} A_\mu; \tag{3}$$

diese Formeln zeigen, dass in der Gleichung

$$A s^\mu + A_2 s^{\mu-2} \cdots + A_\mu = 0$$

alle Coefficienten als bekannt gelten können, sobald A_2 und A_3 gefunden sind.

Ausserdem zeigt die Gleichung (1), dass die Discriminante $H_y(A_2)$ der quadratischen Form A_2 in jedem Verzweigungspunkte verschwindet. Aber in einem solchen Punkte wird $s\sqrt{A} = \sqrt{-A_2}$, und dies muss in $x_1 x_2 \ldots x_p$ linear sein; so oft $A = 0$ wird, muss also A_2 sich auf ein reines Quadrat reduciren, mithin nicht bloss seine Discriminante, sondern sogar jede zweizeilige Unterdeterminante derselben verschwinden.

Die Aufklärung über diese merkwürdigen Beziehungen zwischen A und der quadratischen Form A_2 wird sich im VII. Abschnitte ergeben.

15.

Auf dem Wege der Formenbildung erhält man hiernach offenbar eine Schaar von Eigenschaften, welche die Grundformen (A) nothwendig besitzen müssen, wenn sie die von uns gestellte Aufgabe lösen sollen, aber man kann auf diesem Wege nicht zur Kenntniss der für diese Aufgabe ausreichenden Bedingungen gelangen.

Wir nehmen daher unsere ursprüngliche Untersuchung wieder auf, und wenden uns zur wirklichen Darstellung der rationalen Function

$$\varDelta = A^{\frac{2\mu-3}{2}} \Pi(s_1 s_2 \dots s_\mu). \tag{1}$$

Dieselbe gründet sich auf den Ausdruck von $\varDelta$ als Functionaldeterminante. Sei

$$f(t) = A(t-s_1)(t-s_2)\dots(t-s_\mu) = At^\mu + A_2 t^{\mu-2} \dots + A_\mu;$$

werden $s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}$ also auch $s_\mu = -s_1 \dots - s_{\mu-1}$ als Functionen von $A_2 \dots A_\mu$ betrachtet, so folgt, indem man nach A_ϱ differentiirt, für $\varrho = 2, 3, \dots \mu$

$$f(t) \sum_{i=1}^{\mu-1} \left(\frac{1}{t-s_\mu} - \frac{1}{t-s_i} \right) \frac{\partial s_i}{\partial A_\varrho} = t^{\mu-\varrho},$$

also ist

$$-f'(s_i) \frac{\partial s_i}{\partial A_\varrho} = s_i^{\mu-\varrho}.$$

Nun ist

$$(-1)^{\mu-1} f'(s_1) f'(s_2) \dots f'(s_{\mu-1}) = A^{\mu-1} \Pi(s_{\mu-1} \dots s_1) \Pi(s_1 \dots s_\mu)$$

also folgt:

$$A^{\mu-1} \Pi(s_{\mu-1} \dots s_1) \Pi(s_1 \dots s_\mu) \frac{\partial(s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})}{\partial(A_2 A_3 \dots A_\mu)} = \begin{vmatrix} s_1^{\mu-2} & s_1^{\mu-3} \dots & 1 \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ s_{\mu-1}^{\mu-2} & s_{\mu-1}^{\mu-3} \dots & 1 \end{vmatrix},$$

mithin, da der Ausdruck zur Rechten $= \Pi(s_{\mu-1} \dots s_1)$ ist,

$$A^{\mu-1} \Pi(s_1 \dots s_\mu) \frac{\partial(s_1 \dots s_{\mu-1})}{\partial(A_2 \dots A_\mu)} = 1.$$

Also ist auch

$$\frac{\partial(A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial(s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})} = A^{\mu-1} \Pi(s_1 s_2 \dots s_\mu), \tag{2}$$

mithin

$$\varDelta = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(A_2 \dots A_\mu)}{\partial(s_1 \dots s_{\mu-1})},$$

d. i.

$$\varDelta = \frac{\partial(A_2 \dots A_\mu)}{\partial(s_1 \dots s_{\mu-1})} \cdot \frac{\partial(s_1 \dots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 \dots y_{\mu-1})} = \frac{\partial(A_2 \dots A_\mu)}{\partial(y_1 \dots y_{\mu-1})}.$$

Wir setzen von hier an den rationalen Ausdruck

$$\frac{\partial(A_2 A_2 \dots A_\mu)}{\partial(y_1 y_2 \dots y_{\mu-1})} = \mathfrak{A}, \tag{3}$$

dann haben wir

$$\varDelta = \mathfrak{A}, \tag{4}$$

womit von Neuem und durch wirkliche Darstellung dargethan ist, was wir schon im art. 11 auf anderm Wege bewiesen hatten, dass $\varDelta$ rationale ganze Function von z ist. Wird ferner, wie in art. 11 (II.) die $(2\mu - 3)$-zeilige Determinante

$$\begin{vmatrix} 2A_2 & 3A_3 & 4A_4 \dots \\ \mu A & . & (\mu-2)A_2 \dots \\ . & 2A_2 & 3A_3 \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} = h\vartheta \tag{5}$$

gesetzt, so fanden wir $\vartheta = \varDelta^2$, ferner $D = \mu h A \varDelta^2$ als Discriminante der Gleichung

$$As^\mu + A_2 s^{\mu-2} \dots + A_\mu = 0,$$

also haben wir jetzt

$$\vartheta = \mathfrak{A}^2 \tag{6}$$

$$D = \mu h A \mathfrak{A}^2, \tag{7}$$

womit die in art. 8 angekündigte Zerfällung der Discriminante in die Form WR^2 und, für jeden Fall wo die Bestimmung der Functionen $A_2 \dots A_\mu$ gelingt, für die Function s das Problem ihrer Verzweigungs- und Doppelpunkte z erledigt ist. Die Anzahl der letztern, oder der Grad von $\mathfrak{A}$ in z ist, wie bereits in art. 11 angegeben wurde, $p(2\mu - 3) + (\mu - 1)(\mu - 3)$.

Es verdient bemerkt zu werden, dass aus (3) und (6) auch noch die $\mu - 1$ Relationen

$$\frac{\partial(\mathfrak{A} A_3 A_4 \dots A_\mu)}{\partial(y_1 y_2 y_3 \dots y_{\mu-1})} = \frac{1}{2} \frac{\partial\vartheta}{\partial A_2}$$

$$\frac{\partial(A_2 \mathfrak{A} A_4 \dots A_\mu)}{\partial(y_1 y_2 y_3 \dots y_{\mu-1})} = \frac{1}{2} \frac{\partial\vartheta}{\partial A_3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial(A_2 A_3 A_4 \dots \mathfrak{A})}{\partial(y_1 y_2 y_3 \dots y_{\mu-1})} = \frac{1}{2} \frac{\partial\vartheta}{\partial A_\mu}$$

folgen, welche ihrerseits wieder die Gleichung (6) nach sich ziehen. Ich übergehe die Herleitung dieser Formeln, da im Folgenden von ihnen kein Gebrauch gemacht wird.

V. Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen des Problems.

16.

Nachdem somit die Discriminante D in die Form WR^2 gebracht ist, können wir die Untersuchung umkehren, um unter den nothwendigen Bedingungen unserer Aufgabe die ausreichenden nachzuweisen. Sei

$$A$$

ganze Function von z vom Grade $2(p+\mu-1)$ mit ausschliesslich einfachen Linearfactoren, ferner für $i=2, 3, \dots \mu$

$$A_i = \Sigma A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{\mu-1}} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_{\mu-1}^{\alpha_{\mu-1}} \quad (\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_{\mu-1}=i)$$

wo 1) $A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots}$ ganze Function von z vom Grade (art. 9)

$$2(p+\mu-i-1)-(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2\dots)$$

ist, sodann 2) $y_1 y_2 \cdots y_{\mu-1}$ ganze Functionen von z und von den Graden

$$a_1 \quad a_2 \dots \quad a_{\mu-1}$$

und 3) diese letztern so gewählt sind, dass

$$a_1+a_2\cdots+a_{\mu-1}+\mu-1=p$$

ist. Die Coefficienten $x_1 x_2 \dots x_p$ dieser ganzen Functionen sind willkürliche Constanten und ihre Anzahl ist $=p$.

Es wird vorausgesetzt, dass die Factoren

$$A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots},$$

also, bei unbeschränkten Werthen der Parameter $x_1 x_2 \dots x_p$, die ganzen Functionen $A_2 A_3 \dots A_p$ auf die allgemeinste Weise so bestimmt sind, dass

4) A_2 keinen Linearfactor $z-\alpha$ mit A gemein hat und
5) identisch

$$\vartheta = \mathfrak{A}^2$$

wird, oder genauer gesprochen, andere Bedingungen als in diesen Gradbestimmungen und den beiden vorstehenden allein enthalten sind, bleiben ausgeschlossen.

Wir stellen uns die Aufgabe, unter diesen Bedingungen die Eigenschaften von s als Function von $z x_1 x_2 \dots x_p$ zu untersuchen, wenn s die Wurzel der Gleichung

$$As^\mu + A_2 s^{\mu-2} \cdots + A_\mu = 0 \qquad (s)$$

ist.

Bei dieser Untersuchung sind zwei Abtheilungen zu unterscheiden. Die erste (art. 17, 18, 19) enthält den Beweis des Satzes, dass in Folge obiger Bedingungen s Integrand I. G. und lineare homogene Function von $y_1 y_2 \dots$ ist. Bei diesem Beweise kommt die Bedingungsgleichung $\vartheta = \mathfrak{A}^2$ nur insofern in Betracht, als sie fordert, dass ϑ ein reines Quadrat sein soll, aber der Ausdruck von $\mathfrak{A}$ wird bei diesem Beweise nicht benutzt. Dies hat zur Folge, dass, wie wir im art. 22 zeigen werden, dieser Theil unserer Untersuchung auch die Ausnahmefälle mit umfasst, wo die Anzahl der Argumente $y_1 y_2 \dots$ kleiner als $\mu-1$ ist.

Der zweite Theil unserer Untersuchung (art. 20, 21) vervollständigt die Resultate des ersten für den Hauptfall, wo

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial(A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial(y_1 y_2 \cdots y_{\mu-1})}$$

ist, und wird zeigen, dass die vorstehenden Bedingungen, die aus dem vorigen Abschnitte als nothwendige bekannt sind, auch ausreichen, damit s ein vollständiger Integrand I. G. in canonischer Form und gleichzeitig z eine Function von der besondern Beschaffenheit wird, welche in den vorangehenden Abschnitten vorausgesetzt wurde.

17.

Unsere Untersuchung gründet sich in erster Linie auf die Bedeutung der Werthe von z, für welche die Discriminante $D = \mu h A \mathfrak{A}^2$ verschwindet, und welche in zwei Gruppen zerfallen, die Wurzeln der Gleichungen $A=0$ und $\mathfrak{A}=0$.

In dieser Beziehung ist es nothwendig festzuhalten, was durch die Untersuchungen der Abschnitte III., IV. bewiesen ist, dass mit unsern gegenwärtigen Bedingungen der dort behandelte Fall verträglich ist, wo s μ-werthiger Integrand I. G. ist und nur einfache und getrennte Singularitäten besitzt, die alle im Endlichen stattfinden.

Es kann also aus diesen Bedingumgen allein nichts folgen, wodurch dieser Fall ausgeschlossen wird; aber dies fände statt, 1) wenn allein in Folge der jetzt geltenden Bedingungen $\mathfrak{A}$ mehrfache Factoren $z-\alpha$ oder Factoren mit A gemein hätte, 2) wenn diese Bedingungen zur Folge hätten, dass die Gleichung (s) nicht irreductibel ist.

Die gegenwärtig zu untersuchende Gleichung

$$As^\mu + A_2 s^{\mu-2} \cdots + A_\mu = 0 \qquad (s)$$

besitzt hiernach die wesentliche Eigenschaft, dass, so oft Wurzeln s zusammenfallen, nur eine mehrfache Wurzel stattfindet, und dies jedesmal eine Doppelwurzel ist. Findet dies für $z = \alpha$ statt, so hat die Discriminante D den Wurzelfactor $z - \alpha$ ein oder zweimal, jenachdem der Doppelwurzel ein Verzweigungs- oder ein Doppelpunkt entspricht.

Zur irreductiblen Gleichung (s) gehört eine μ-blättrige, zusammenhängende Fläche T, welche die Werthe von z der Verzweigungsart von s gemäss repräsentirt; dieselbe hat nur einfache Verzweigungspunkte, und in ihnen ist $A = 0$. In dieser Fläche hat die Function s Doppelpunkte; die Werthe von z, für welche ein solcher stattfindet, sind die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{A} = 0$.

Die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte dieser Fläche T ist $2(p + \mu - 1)$, die Anzahl ihrer Doppellinien $p + \mu - 1$; also ist sie eine $(2p + 1)$ fach zusammenhängende Fläche, und zu ihr gehört eine Klasse algebraischer gleichverzweigter Functionen von z nebst p linear-unabhängigen Integralen I. G.

Vermöge der im art. 16 wiederholten Gradbestimmungen wird im Unendlichen auf jedem Blatte s unendlich klein zur zweiten Ordnung, das $\int s dz$ also nicht unstetig. Im Endlichen kann ein Zweig von s unendlich werden nur für $A = 0$; aber dann sinkt der Grad der Gleichung (s) nur um zwei Einheiten, da A_2 nie mit A zugleich verschwindet, also werden dann jedesmal zwei Wurzeln unendlich, die übrigen bleiben stetig. Für jene erhält man $As^2 + A_2 = 0$, also sind es die beiden Zweige von s, die in dem entsprechenden Verzweigungspunkte zusammenhängen, und diese werden unendlich wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$; das $\int s dz$ wird also auch dort nicht unstetig.

Da das $\int s dz$ hiernach überhaupt nie unstetig wird, so ist es ein Integral I. G., mithin ist s Integrand I. G., wie auch immer die Parameter $x_1 x_2 \ldots x_p$ angenommen werden mögen.

18.

Dies reicht zum Beweise des von uns (art. 16) ausgesprochenen Satzes keineswegs aus, vielmehr muss s nun auch als Function von $x_1 x_2 \ldots x_p$ untersucht werden. Die Gleichung (s) zeigt, dass s algebraische Function von $x_1 x_2 \ldots x_p$ und in ihnen homogen vom ersten Grade ist. Ausserdem geht aus dieser Gleichung hervor, dass s, als Function eines dieser Parameter betrachtet, nur im Unendlichen unstetig wird.

Wäre nun bewiesen, dass s rationale Function dieser Parameter ist, so würde aus dem letztern Umstande folgen, dass es nur eine ganze Function derselben sein kann, und dann aus der vorangehenden Bemerkung, dass es in den Parametern linear und homogen ist.

Ist unter dieser Voraussetzung s^0 der lineare Ausdruck, in den s übergeht, wenn $y_1 y_2 \ldots$ auf ihre von z unabhängigen Anfangsglieder reducirt, und alle übrigen Parameter $x = 0$ gesetzt werden, (s^0) die ebenso modificirte Gleichung (s), so erhält man aus (s^0) die Gleichung (s), also aus s^0 die Wurzel s wieder, wenn jene Anfangsglieder wieder zu $y_1 y_2 \ldots$ ergänzt werden.

Daraus geht hervor, dass wir nur noch beweisen dürfen, s ist rationale Function seiner Parameter, um bewiesen zu haben, dass es in $y_1 y_2 \ldots$ linear und homogen ist.

19.

Wir betrachten also s als Function von x_1 mit den Parametern $z x_2 \ldots x_p$ und untersuchen unter dieser Voraussetzung seine Verzweigungs- und Doppelpunkte, und zwar nur um zu beweisen, dass erstere nicht existiren. Nach einigen Erläuterungen wird dieser Beweis durch Anwendung sehr bekannter — wohl auf Herrn Puiseux zurückzuführender — Schlüsse gelingen.

Die Werthe von x_1, für welche die in Rede stehenden Singularitäten stattfinden können, ergeben sich aus dem Verschwinden der Discriminante, also, da der Factor A derselben von x_1 unabhängig ist, aus der Gleichung

$$\mathfrak{A} = 0;$$

die verschiedenen Zweige von s sind wie früher $s_1 s_2 \ldots s_\mu$.

Es ist nothwendig, die Verhältnisse, auf welche hier die Aufmerksamkeit zu richten ist, klar aufzufassen. Wird s als Function von z untersucht, so sind zwar die Verzweigungswerthe z unabhängig von $x_1 x_2 \ldots x_p$, aber die Doppelpunkte sind es nicht. Soll in diesem Falle z einen Punkt dieser Art umkreisen, so begreift es sich von selbst, dass während dessen die Parameter $x_1 x_2 \ldots x_p$ ungeändert bleiben müssen, weil sonst auch der zu umkreisende Punkt variirt. Die analoge Bedingung muss auch in unserm Falle aufrecht erhalten bleiben, und es ist nothwendig, dieselbe völlig sicher zu stellen. Spricht man, wenn s als Function von z untersucht wird, von einem bestimmten Doppelpunkte, so ist nicht bloss von einem Werthepaar $s, z = \gamma, \delta$ die Rede, sondern es ist gemeint, dass den Parametern $x_1 \ldots x_p$ ein festes Werthesystem $x_1^0 \ldots x_p^0$ zugewiesen ist, für welches jenes Werthepaar stattfindet. Sei für dieses bestimmte Werthesystem

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad x_p = x_p^0$$

der Werth

$$z = z^0$$

eine Lösung der Gleichung $\mathfrak{A} = 0$; dann ist bewiesen, dass dem Werthesystem

$$z = z^0 \quad x_1 = x_1^0 \quad x_2 = x_2^0 \dots \quad x_p = x_p^0$$

ein Doppelpunkt von s als Function von z entspricht; seien

$$s_1 = c \quad s_2 = c \quad s_3 = c_3 \dots \quad s_\mu = c_\mu \tag{1}$$

die zugehörigen Wurzeln der Gleichung (s), also $s_1 = s_2$, aber

$$\frac{\partial s_1}{\partial z} = c_1', \quad \frac{\partial s_2}{\partial z} = c_2', \tag{2}$$

also c_2' von c_1' verschieden.

Wenn nunmehr s als Function von x_1 untersucht werden soll, so müssen $z x_2 \dots x_p$ als unveränderliche Parameter betrachtet werden; wir wollen s als Function von x_1 für

$$z = z^0 \quad x_2 = x_2^0 \dots \quad x_p = x_p^0$$

untersuchen. Dann ist

$$x_1 = x_1^0$$

eine Lösung der Gleichung $\mathfrak{A} = 0$, und es ist die Frage, ob, wenn x_1 diesen Punkt in unendlicher Nähe einmal umkreist, die Endwerthe $s_1' s_2'$ der beiden für $x_1 = x_1^0$ zusammenfallenden Zweige von s den Anfangswerthen $s_1 s_2$ beziehungsweise gleich sind oder nicht; im letzten Falle würde für $x_1 = x_1^0$ eine Verzweigung zwischen $s_1 s_2$ stattfinden.

Als Function von x_1 wird kein Zweig von s unstetig ausser für $x_1 = \infty$. Wenn daher x_1 im Endlichen einen unendlich kleinen Weg zurücklegt, so ist die entsprechende Aenderung jedes Zweiges von s eine ebenfalls nur unendlich kleine. Umkreist also x_1 den Punkt x_1^0 in unendlicher Nähe, so bleiben $s_1 s_2$ nur unendlich wenig verschieden von c, ebenso $\frac{\partial s_1}{\partial z}$ von c_1' und $\frac{\partial s_2}{\partial z}$ von c_2', da diese Derivirten dort ebenfalls stetig sind. Also ist es sicher, dass nur einer der beiden folgenden Fälle stattfinden kann:

1) Entweder ist $s_1' - s_1$ zwar unendlich klein, aber nicht Null, und dann ist $s_1' - s_2 = 0$, $s_2' - s_1 = 0$, oder es ist:

2) $s_1' - s_2$ nicht Null, und dann ist $s_1' - s_1 = 0$, $s_2' - s_2 = 0$.

Im ersten Falle ist $x_1 = x_1^0$ Verzweigungspunkt zwischen $s_1 s_2$, im andern Falle findet ein Doppelpunkt statt. Aber im ersten Falle wäre auch

$$\frac{\partial s_1'}{\partial z} - \frac{\partial s_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial s_2'}{\partial z} - \frac{\partial s_1}{\partial z} = 0,$$

d. h. $c_1' - c_2'$ Null oder unendlich klein. Dies ist unmöglich wegen der Eigenschaften von s als Function von z, also findet der zweite Fall

nothwendig statt, und es ist bewiesen, dass s als Function von x_1 nur Doppelpunkte, keine Verzweigungspunkte hat.

Folglich ist jeder Zweig von s eine algebraische, in keinem Punkte mehrändrige, also eine rationale Function von x_1. Und da dies für jeden der p Parameter $x_1 x_2 \dots x_p$ gilt, so treten die Schlüsse des art. 18 in Kraft, und es ist bewiesen, dass s lineare homogene Function von $x_1 x_2 \dots x_p$, endlich dass es in $y_1 y_2 \dots$ linear und homogen ist.

20.

Wir untersuchen nun weiter, welche Folgerungen sich daran knüpfen, dass der Ausdruck von $\mathfrak{A}$ vorgeschrieben,

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial (A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial (y_1 y_2 \cdots y_{\mu-1})}$$

ist. Die Discriminante der Gleichung (s) ist auf jeden Fall $D = \mu h A \vartheta$, also $= \mu h A \mathfrak{A}^2$, folglich ist $\varDelta = \mathfrak{A}$. Aber es ist identisch [art. 15 (2)]

$$\varDelta = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial (A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial (s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})},$$

also folgt

$$\frac{\partial (A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial (y_1 y_2 \cdots y_{\mu-1})} = \frac{\partial (A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial (s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}},$$

mithin ist, als nothwendige Folge aus den Bedingungen des art. 16

$$\frac{\partial (s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})}{\partial (y_1 y_2 \cdots y_{\mu-1})} = \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

21.

Unter den vollständigen Voraussetzungen des art. 16 hat die Wurzel der Gleichung

$$A s^\mu + A_2 s^{\mu-2} \dots + A_\mu = 0 \tag{s}$$

nothwendig die Form

$$s = y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 \dots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1},$$

wo $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{\mu-1}$ Integranden I. G. von den Ordnungen $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ sind. Ordnet man s nach $x_1 x_2 \dots x_p$, so sind also die p Factoren derselben Integranden I. G., aber s ist nur dann ein vollständiger Integrand I. G. wenn diese p Factoren linearunabhängig sind. Dies ist wirklich der Fall; der Beweis beruht auf dem allgemeinern Satze,

> dass es unmöglich ist, ganze Functionen $G_1 G_2 \dots G_{\mu-1}$ von z so zu bestimmen, dass die μ Zweige des Ausdruckes
>
> $$G_1 \sigma_1 + G_2 \sigma_2 \dots + G_{\mu-1} \sigma_{\mu-1}$$
>
> identisch verschwinden.

Setzt man nämlich die $\mu-1$ ersten Zweige dieses Ausdrucks $=0$, so hat man zur Bestimmung der (einwerthigen) Factoren $G_1 G_2 \dots G_{\mu-1}$ Gleichungen, deren Determinante nach art. 20

$$\frac{\partial(s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \cdots y_{\mu-1})} = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

also nicht Null ist; den geforderten Bedingungen kann man also nur genügen, wenn man $G_1\ G_2 \dots G_{\mu-1}$ für jedes z, also identisch $=0$ setzt.

Also kann man insbesondere einen Ausdruck von der Form $y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 + \cdots$ nur dadurch identisch $=0$ machen, dass man $x_1=0$, $x_2=0, \dots x_p=0$ setzt, d. h. die Factoren von $x_1 x_2 \dots x_p$ im Ausdrucke von s sind linearunabhängig, und s ist ein vollständiger Integrand I. G.

Die Gleichung (s) bestimmt eine Klasse algebraischer gleichverzweigter Functionen, und wir sind nun auch im Stande, den Rang nachzuweisen, den z in dieser Klasse einnimmt, was zur vollständigen Umkehrung der in den Abschnitten II. III. IV. durchgeführten Untersuchungen nothwendig ist.

Sind 1) die Zahlen $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ alle oder doch zum Theil von Null verschieden, und ist $a_1 = k$ die grösste unter ihnen, so sind $y_1\sigma_1$ und σ_1 Integranden I. G., also ist ihr Quotient y_1 und insbesondere z^k Function I. G; ich behaupte, dass z^{k+1} Funktion II. G. ist.

Ist z^m Function I. G., so gibt es einen Integranden σ von der Ordnung m, und es ist auch $z^m\sigma$ Integrand I. G. Beide sind in der Form s darstellbar, weil s ein vollständiger Integrand I. G. ist. Sei also $\sigma = y_1'\sigma_1 + y_2'\sigma_2 + \cdots$, $z^m\sigma = y_1''\sigma_1 + y_2''\sigma_2 + \cdots$, so sind weder alle Factoren y' noch alle Factoren y'' identisch Null, und ihre Grade in z sind der Reihe nach höchstens $a_1 a_2 \dots$ Aber nun folgt identisch $(z^m y_1' - y_1'')\sigma_1 + (z^m y_2' - y_2'')\sigma_2 + \cdots = 0$, also müssen hier die Coefficienten $z^m y_1' - y_1''$, $z^m y_2' - y_2'', \dots$ alle identisch Null sein, während weder alle y' noch alle y'' es sind. Ist nun y_1'' nicht identisch Null, so kann auch y_1' es nicht sein, also ist y_1'' durch z^m theilbar. Dies ist kein Widerspruch für $m \overline{<} k$, aber wohl einer für $m > k$; also ist es unmöglich, dass z^{k+1} Function I. G. sei, w. z. b. w.

Sind 2) die Zahlen $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ alle $=0$, was $\mu - 1 = p$, $\mu = p+1$ gibt, so folgt aus dem nämlichen Beweise, dass keine Potenz von z Function I. G. sein kann, dass also schon z selbst Function II. G., aber von der niedrigsten Ordnung ist.

Und so haben wir den folgenden Satz in allen seinen Theilen bewiesen:

Die im art. 16 zusammengestellten Bedingungen sind nothwendig und hinreichend, damit die Wurzel s der Gleichung

$$As^\mu + A_2 s^{\mu-2} \dots + A_\mu = 0$$

ein vollständiger Integrand I. G. und von der canonischen Form

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \dots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1}$$

wird. Sind die Grade $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ von $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$ alle gleich Null, so ist in der, durch diese Gleichung bestimmten Klasse gleichverzweigter algebraischer Functionen, z eine Function II. G. von der niedrigsten Ordnung $\mu = p+1$; sind die Grade $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ nicht alle $=0$, und ist dann k der grösste unter ihnen, so sind $z z^2 \dots z^k$ Functionen I. G., aber z^{k+1} ist Function II. G. Also ist in diesem Fall für die Function z selbst der Überschuss $\varrho = 1$, der Defect $\lambda = p - \mu$.

22.

Wir sind nun auch im Stande, die bisher ausgeschlossenen Fälle zu erledigen, wo entweder z Function II. G., aber nicht von der niedrigsten Ordnung $p+1$, sondern einer Ordnung $\mu = p + \varrho$, $\varrho > 1$, oder eine Function I. G. von der Ordnung μ und einem Ueberschuss $\varrho > 1$ ist. Drückt man den vollständigen Integranden I. G. durch Fundamentalintegranden aus, so erhält man in beiden Fällen

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \dots + y_{\mu-\varrho}\sigma_{\mu-\varrho}, \tag{1}$$

wo im ersten Falle $\mu - \varrho = p$ ist und $y_1 y_2 \dots y_{\mu-\varrho}$ mit $x_1 x_2 \dots x_p$ übereinstimmen, während im zweiten Falle (vergl. art. 6 VIII.) einige der Factoren $y_1 y_2 \dots y_{\mu-\varrho}$ von z abhängen; in beiden Fällen ist die Gliederzahl $\mu - \varrho < \mu - 1$.

Für s ergibt sich wieder eine Gleichung μ^{ten} Grades

$$As^\mu + A_2 s^{\mu-2} \dots + A_\mu = 0, \tag{2}$$

in welcher allgemein A_i in den y homogen vom Grade i ist; der Factor A ist in z vom Grade $2(p+\mu-1)$; ist, nach den y geordnet,

$$A_i = \Sigma A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{\mu-\varrho}} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_{\mu-\varrho}^{\alpha_{\mu-\varrho}} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_{\mu-\varrho} = i),$$

und sind $a_1 a_2 \dots a_{\mu-\varrho}$ die Grade von $y_1 y_2 \dots y_{\mu-\varrho}$ in z, so folgt für den Grad der Coefficienten

$$\delta A^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots} = 2(p+\mu-i-1) - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \dots).$$

Auch hier folgt, wie in art. 11 der Satz, dass

$$\Delta = A^{\frac{2\mu-3}{2}}\, \Pi(s_1 s_2 \dots s_\mu)$$

rationale ganze Function von z, also, wenn man diese wiederum durch

$$\mathfrak{A}$$

bezeichnet, die Discriminante der Gleichung (1)

$$D = \mu h A \mathfrak{A}^2$$

ist: nur ergibt sich für $\mathfrak{A}$ nicht der frühere Ausdruck als Determinante der $\mu - 1$ Functionen $A_2 \dots A_\mu$ nach den Variabeln $y_1 y_2 \dots$, da die Anzahl der letztern $< \mu - 1$ ist; ausserdem können $A_2' \dots A_\mu'$ (art. 12) nicht mehr als canonische Formen von $A_2 \dots A_\mu$ gelten, da sie mehr Argumente $s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}$ enthalten als diese. Dass zwischen den Argumenten $s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}$, wenn man sie durch $y_1 y_2 \cdots y_{\mu-\varrho}$ ausdrückt und dann letztere eliminirt, lineare Relationen eintreten, durch welche ihre Anzahl auf $\mu - \varrho$ reducirt wird, nützt nichts, so lange die Coefficienten dieser Relationen sich der Untersuchung entziehen.

Kehrt man nun die Untersuchung um, indem man ausser den obigen Gradbestimmungen nur noch fordert, dass A_2 und A nicht gleichzeitig verschwinden dürfen und dass $\vartheta = \mathfrak{A}^2$, d. h. dass ϑ das Quadrat einer rationalen ganzen Function von z sei, so wiederholen sich alle Schlüsse der art. 17, 18, 19 und es folgt, dass s Integrand I. G. und von der obigen Form (1) ist.

Der Unterschied zwischen dem gegenwärtigen Falle und demjenigen, wo s canonische Form ist, besteht darin, dass in diesem letztern Hauptfalle 1) bekannt ist, von welcher rationalen Function $\mathfrak{A}$ der Ausdruck ϑ das Quadrat sein soll und 2) der Untersuchung alle Hülfsmittel der Transformationstheorie zu Gebote stehen, wovon in den so eben besprochenen Ausnahmefällen weder das Eine noch das Andere der Fall ist.

Im Uebrigen enthalten die gegenwärtigen Betrachtungen den Aufschluss darüber, weshalb die Lösung der Aufgabe, s in canonischer Form zu bestimmen, auch zur Erledigung von Ausnahmefällen führen kann, wovon wir im folgenden (art. 24) ein Beispiel ($\mu = 3$, $p = 1$) geben werden.

VI. Klassification; die Systeme $\mu = 2$ und $\mu = 3$.

23.

Die bisherige Klassification der algebraischen Functionen einer einzigen Variable beruht auf den charakteristischen Eigenschaften derselben, welche sich an die Riemannsche Zahl p knüpfen; sie besteht bekanntlich darin, dass man zum nämlichen Geschlechte alle diejenigen Functionenklassen zählt, für welche p den nämlichen Werth hat. Für

eine weitergehende Eintheilung der Functionenklassen, die zum nämlichen Geschlechte gehören, fehlt bis jetzt der Eintheilungsgrund, da der Satz, dass für $p > 1$ die Anzahl der verfügbaren Moduln im allgemeinen Falle $= 3p - 3$ ist, einen solchen nicht enthält.

Die gegenwärtige Theorie liefert die Ergänzung für die hier vorhandene Lücke.

Ich ordne die verschiedenen Klassen algebraischer gleichverzweigter Functionen einer einzigen Variable zunächst nach Systemen, und zähle zum nämlichen System alle diejenigen Klassen, welche sich für den nämlichen Werth der Zahl

$$\mu$$

ergeben, wofern die Ausnahmefälle des vorigen art. 22 ausgeschlossen bleiben und s wirklich als canonische Form erscheint.

In das nämliche System μ gehören dann als Unterabtheilungen Functionenklassen der sämmtlichen Geschlechter p, welche mit diesem Werthe von μ bei geeigneten Werthen der Zahl k verträglich sind.

Umgekehrt ordnen sich innerhalb des nämlichen Geschlechtes p die zu ihm gehörigen Functionenklassen zu Familien, so weit sie — unter der vorhin angegebenen Beschränkung — zur nämlichen Zahl μ gehören, und es würde, wenn eine vollständige Theorie der Moduln möglich werden sollte, ihre Hauptaufgabe sein, für ein gegebenes p die einzelnen Familien μ und jedesmal die Anzahl der Moduln festzustellen.

Das erste System von Functionenklassen gehört zum Werthe

$$\mu = 2;$$

dasselbe wird durch die elliptischen und ultraelliptischen Functionen gebildet, wie man aus der Transformationstheorie leicht erkennt. In der That ergibt sich für s in diesem Falle eine quadratische Gleichung $As^2 + A_2 = 0$, wo A, A_2 ganze Functionen von z von den Graden $2(p + \mu - 1) = 2p + 2$ und $2p - 2$ sind; A hat nur ungleiche Linearfactoren. Die Anzahl der Functionen y ist $\mu - 1 = 1$, also ist $A_2 = Cy_1^2$, $y_1 = x_1 + x_2 z + \cdots + x_p z^{p-1}$, mithin C constant. Für $C = -1$ folgt

$$s = \frac{x_1 + x_2 z + \cdots + x_p z^{p-1}}{\sqrt{A}},$$

wie bekannt.

24.

Das nächste System von Functionenklassen ergibt sich für

$$\mu = 3;$$

in diesem Falle lautet die Gleichung in s

$$As^3 + A_2 s + A_3 = 0,$$

und die Coefficienten $A\,A_2\,A_3$ sind in z von den Graden $2p+4$, $2p$, $2p-2$. Sei

$$y_1 = x_1 + x_2 z \cdots + x_{1+a_1} z^{a_1}$$
$$y_2 = x_{2+a_1} + x_{3+a_1} z \cdots + x_p z^{a_2},$$

also

$$p = a_1 + a_2 + 2.$$

Nun ist

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0, \quad A_2 = A(s_2 s_3 + s_3 s_1 + s_1 s_2), \quad A_3 = -A s_1 s_2 s_3$$

und

$$\frac{\partial(s_1 s_2)}{\partial(y_1 y_2)} = \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Um bei den canonischen Formen von A_2, A_3 die Symmetrie zu bewahren, drücke ich sie nicht durch $s_1 s_2$, sondern durch zwei andere Variable $z_1 z_2$ aus, so dass

$$s_1 = z_1 + z_2, \quad s_2 = \varrho z_1 + \varrho^2 z_2, \quad s_3 = \varrho^2 z_1 + \varrho z_2$$

wird, wo ϱ eine dritte Einheitswurzel und zwar

$$\varrho = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, \quad \varrho^2 = -\frac{i\sqrt{3}+1}{2}$$

ist. Dann folgt

$$\frac{\partial(s_1 s_2)}{\partial(z_1 z_2)} = \varrho^2 - \varrho = -i\sqrt{3}, \qquad \frac{\partial(z_1 z_2)}{\partial(s_1 s_2)} = \frac{i}{\sqrt{3}},$$

also

$$\frac{\partial(z_1 z_2)}{\partial(y_1 y_2)} = \frac{i}{\sqrt{3A}}.$$

Aber zugleich wird

$$A_2 = -3Az_1 z_2, \quad A_3 = -A(z_1^3 + z_2^3).$$

Benutzen wir nun für die Hessesche Determinante einer Function u die schon oben (art. 14) angewandte Bezeichnung, so wird

$$H_y(u) = H_z(u)\left(\frac{\partial(z_1 z_2)}{\partial(y_1 y_2)}\right)^2 = -\;{}^{1}\;\;(u),$$

und dies gibt

$$H_y(A_3) = -12Az_1 z_2 = 4A_2, \quad H_y(A_2) = 3A,$$

so dass A_2, A aus A_3 berechnet werden können. Es fragt sich nur, ob die so gewonnenen Ausdrücke auch die Gleichung

$$\vartheta = \mathfrak{A}^2$$

verificiren, oder ob hierzu noch andere Bedingungen erforderlich sind. In unserm Falle ist aber

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial(A_2 A_3)}{\partial(y_1 y_2)} = \frac{i}{\sqrt{3A}} \frac{\partial(A_2 A_3)}{\partial(z_1 z_2)} = \frac{9iA^2}{\sqrt{3A}}(z_2^3 - z_1^3),$$

was

$$\mathfrak{A}^2 = -27A^3[(z_1^3 + z_2^3)^2 - 4z_1^3 z_2^3] = -27AA_3^2 - 4A_2^3$$

gibt. Andererseits ist

$$\vartheta = \begin{vmatrix} 2A_2 & 3A_3 & . \\ 3A & . & A_2 \\ . & 2A_2 & 3A_3 \end{vmatrix} = -4A_2^3 - 27AA_3^2;$$

also ist $\vartheta = \mathfrak{A}^2$ ohne neue Bedingungen, und A_2, A_3 genügen unserer Aufgabe, wenn sie noch die gehörigen Grade haben.

Sei f eine cubische Form

$$f = \alpha y_1^3 + 3\alpha_1 y_1^2 y_2 + 3\alpha_2 y_1 y_2^2 + \alpha_3 y_2^3 \quad \text{und} \quad A_3 = f,$$

so daß noch die Grade von $\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ festzusetzen sind; sodann sei die Hessesche Covariante von f

$$H = \begin{vmatrix} \alpha y_1 + \alpha_1 y_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & \alpha_2 y_1 + \alpha_3 y_2 \end{vmatrix} = \beta y_1^2 + \beta_1 y_1 y_2 + \beta_2 y_2^2,$$

also

$$A_2 = 9H;$$

ferner sei die Invariante von f

$$I = \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha_1 & \alpha_2 & . \\ \alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_3 & . \\ . & \alpha & 2\alpha_1 & \alpha_2 \\ . & \alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 4\beta\beta_2 - \beta_1^2, \quad \text{also} \quad A = 27I,$$

endlich

$$T = \frac{1}{3}\frac{\partial(Hf)}{\partial(y_1 y_2)} \quad \text{also} \quad \mathfrak{A} = 27T;$$

dann ergibt sich für s die Gleichung

$$27Is^3 + 9Hs + f = 0, \tag{1}$$

und für diese Function ist nun das Problem ihrer Doppel- und Verzweigungspunkte gelöst, da in jenen T oder $\mathfrak{A}$, in diesen I oder A verschwindet. Die Gleichung $\vartheta = \mathfrak{A}^2$ ist nichts anderes als die bekannte Formel $T^2 + 4H^3 + If^2 = 0$; mittelst derselben kann man die Gleichung (1) in die Form bringen

$$(3Hs - f)(6Hs + f)^2 + 27T^2 s^3 = 0,$$

so dass in den Doppelpunkten $T = 0$, $6Hs + f = 0$ ist. A_2 und A, d. h. H und I dürfen nicht gleichzeitig verschwinden, d. h. f darf für keinen Werth von z ein reiner Kubus werden.

Um nun zu den Gradbestimmungen überzugehen, setzen wir $a_1 \overline{\overline{>}} a_2$ voraus; dann ist

$$a_1 = k$$

der Exponent der höchsten Potenz von z, welche noch Function I. G. ist und, weil $a_1 + a_2 + 2 = p$ ist,

$$a_2 = p - 2 - k.$$

Dies sind die Grade von y_1, y_2; da der Grad von f, also $\delta f = 2p - 2$ sein muß, so folgt

$$\delta\alpha + 3a_1 = \delta\alpha_1 + 2a_1 + a_2 = \delta\alpha_2 + a_1 + 2a_2 = \delta\alpha_3 + 3a_2 = 2p - 2,$$

also wird

$$\delta\alpha = 2(p-1) - 3k, \quad \delta\alpha_1 = p - k, \quad \delta\alpha_2 = k + 2, \quad \delta\alpha_3 = 3k - p + 4, \tag{2}$$

was eine arithmetische Reihe mit der constanten Differenz

$$a_1 - a_2 = 2k - p + 2$$

ist. Man überzeugt sich leicht, daß mit diesen Werthen auch A_2 und A die vorgeschriebenen Grade erlangen.

Nun wissen wir aus art. 7, dass für den Fall $\mu = 3$ unmöglich z^k Function I. G. sein kann, wenn k nicht der Ungleichheit

$$\frac{p-2}{2} \overline{\overline{<}} k \leq \frac{2p-2}{3}$$

genügt. Das Vorstehende zeigt umgekehrt, dass, so oft k dieser Ungleichheit gemäss angenommen wird,

$$\delta\alpha = 3\left(\frac{2p-2}{3} - k\right) \quad \text{und} \quad a_1 - a_2 = 2\left(k - \frac{p-2}{2}\right)$$

positiv, mindestens nicht negativ werden; aus (2) erhält man also für $\delta\alpha, \delta\alpha_1, \ldots$ Zahlen, welche wirklich die Grade ganzer Functionen angeben, und wenn man f demgemäss annimmt, so wird s durch die Gleichung (1) als Integrand I. G. in der Form

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2$$

bestimmt, wo $\sigma_1\,\sigma_2$ Fundamentalintegranden von den Ordnungen k, $p - 2 - k$ und $y_1 y_2$ ganze Functionen von denselben Graden sind; ausserdem ist z^k Function erster, z^{k+1} Function zweiter Gattung, z selbst Function I. G. mit dem Überschuss $\varrho = 1$.

Sodann ist der Fall zu berücksichtigen, wo z Function II. G. aber niedrigster Ordnung $\mu = p + 1$ ist. Dies gibt in unserm Falle $p = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, also sind in f alle Coefficienten vom Grade $2p - 2 = 2$.

Für die im System $\mu = 3$ enthaltenen Functionenklassen ergeben sich also (vgl. art. 7) folgende charakteristische Zahlen:

$$\mu = 3, \quad a_1 = k, \quad a_2 = p - k - 2 \tag{1}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccccccccccccccc} p & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 & 10 & 11 & 11 & 12 & 12 & 12 & \cdots \\ \hline k & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 3 & 4 & 3 & 5 & 4 & 6 & 5 & 4 & 6 & 5 & 7 & 6 & 5 & \cdots \end{array} \tag{2}$$

Die Ausnahmefälle des art. 22 endlich setzen $1 \overline{\overline{<}} \mu - \varrho < \mu - 1$, d. i. $1 \overline{\overline{<}} 3 - \varrho < 2$, also $\varrho = 2$ voraus. Es wird also $\mu - \varrho = 1$, $s = y_1\sigma_1$, wo y_1 vom Grade $p - 1$ ist; ferner $A_3 = \alpha y_1^3$, also der Grad von A_3, nämlich $2p - 2 = \delta\alpha + 3p - 3$, $p + \delta\alpha = 1$, d. i. $p = 1$, $\delta\alpha = 0$.

Wir erhalten also für $\mu = 3$ nur einen einzigen Ausnahmefall $p = 1$, $\varrho = 2$, und dieser gibt $s = x_1\sigma_1$ oder $s = \sigma_1$, da wir jetzt $x_1 = 1$ setzen dürfen.

Die obigen Resultate erledigen auch diesen Fall. Setzen wir nämlich in (1) zunächst $y_2 = 0$, $y_1 = 1$, was $27Is^3 + 9\beta s + \alpha = 0$ gibt, so wird hierdurch s auf jeden Fall als Integrand I. G. bestimmt; soll $p = 1$ sein, so müssen I, β, α von den Graden $6, 2, 0$ sein. Wir nehmen $\alpha = 1$, dann wird

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1^2, \quad I = -4\beta^3 - \gamma^2,$$

wenn

$$\gamma = \alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$$

ist. Bestimmmt man also $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ so, dass β vom zweiten, γ vom dritten Grade wird, d. h. nimmt man β, γ mit diesen Graden an, so ist allen Bedingungen genügt, und für s folgt die Gleichung

$$27(4\beta^3 + \gamma^2)s^3 - 9\beta s - 1 = 0$$

oder

$$(3\beta s - 1)(6\beta s + 1)^2 + 27\gamma^2 s^3 = 0;$$

in den Doppelpunkten ist also $\gamma = 0$, $6\beta s + 1 = 0$, in den Verzweigungspunkten $4\beta^3 + \gamma^2 = 0$. In diesem Falle ist z einwerthige und doppeltperiodische Function dritter Ordnung von $w = \int 3s\,dz$, oder es ist, nach der in dieser Theorie üblichen Ausdrucksweise,

$$4\beta^3 + \gamma^2 - 3\beta\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^3 = 0$$

die Differentialgleichung der einwerthigen doppeltperiodischen Functionen dritter Ordnung z von w.

25.

Für $\mu > 3$ treten Verhältnisse ein, welche die beiden so leicht zu erledigenden Fälle $\mu = 2$ und $\mu = 3$ in gewissem Sinne als Ausnahmefälle erscheinen lassen. Hierhin gehört zunächst die Gleichung (art. 14)

$$H_y(A_2) = (-1)^{\mu-1} \mu A^{\mu-2};$$

für $\mu = 3$ lehrte sie, wie A aus A_2 zu berechnen ist, für $\mu > 3$ dagegen drückt sie nur eine Eigenschaft von A_2 aus, welche darin besteht, dass die Discriminante von A_2 jeden Linearfaktor $\mu - 2$ mal hat.

Sodann ist zu beachten, was die Formeln (2) (3) des art. 14 zeigen, dass für $\mu > 3$ nicht mehr so einfache Beziehungen zwischen den Functionen $A_2 A_3 \ldots A_\mu$ stattfinden, wie für $\mu = 3$, wo A_3 eine beliebige binäre cubische Form und, von constanten Factoren abgesehen, A_2 ihre Hessesche Covariante und A ihre Invariante war; vielmehr reducirt sich offenbar, sobald $\mu > 3$ ist, die Theorie der Functionen $A_4 A_5 \ldots A_\mu$ auf A_3 und namentlich A_2 als Grundgebilde, was indessen nicht so verstanden sein soll, als ob man eine von diesen beiden willkürlich annehmen dürfte, was bei A_2 niemals, und schon für $\mu = 4$ bei A_3 nicht mehr der Fall ist, da alsdann nicht bloss A_4, sondern auch A_3 als Function von $y_1 y_2 y_3$ in Linearfactoren zerfällt.

Mit der Theorie der Function A_2 wollen wir uns noch im folgenden Abschnitte beschäftigen.

VII. Theorie der Function A_2.

26.

Sei in entwickelter Form

$$A_2 = \sum_i \sum_k a_{ik} y_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots \mu - 1), \tag{1}$$

mithin der Grad des Coefficienten $a_{ik} = a_{ki}$

$$\delta a_{ik} = 2(p + \mu - 3) - a_i - a_k.$$

Ferner sei C die Discriminante von A_2, also

$$C = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{\mu-1, \mu-1} \tag{2}$$

und in üblicher Weise C_{ik} die zum Elemente a_{ik} gehörige Unterdeterminante von C. Es findet zunächst der Satz statt, dass A_2 eine vollständige quadratische Form ist. In der That ist $2^{\mu-1} C = H_y(A_2)$,

also haben wir

$$C = \frac{(-1)^{\mu-1} \mu}{2^{\mu-1}} A^{\mu-2}, \tag{3}$$

also ist C nicht Null, woraus der vorstehende Satz folgt.

Ich bringe nun A_2 in die adjungirte Form; sind $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_{\mu-1}$ die neuen Variabeln, also

$$\eta_i = \frac{1}{2} \frac{\partial A_2}{\partial y_i}, \tag{4}$$

so lautet die inverse Substitution

$$C y_k = \sum_i C_{ik} \eta_i \tag{5}$$

und es wird

$$C A_2 = \sum_i \sum_k C_{ik} \eta_i \eta_k. \tag{6}$$

Die Substitution (5), durch welche A_2 direct in diese, zur ursprünglichen adjungirte Form gebracht wird, ist einer merkwürdigen Umformung fähig. Wird A_2 durch $s_1 s_2 \ldots s_\mu$ ausgedrückt und berücksichtigt, dass $s_\mu = -s_1 \cdots - s_{\mu-1}$ ist, so folgt

$$\frac{d A_2}{d s_1} = \frac{\partial A_2}{\partial s_1} - \frac{\partial A_2}{\partial s_\mu} = A(s_2 + \cdots + s_\mu) - A(s_1 \cdots + s_{\mu-1}) = A(s_\mu - s_1),$$

und ebenso, für $\nu = 1, 2, \ldots \mu - 1$ allgemein

$$\frac{d A_2}{d s_\nu} = A(s_\mu - s_\nu).$$

Die Substitution (4) wird hiernach zunächst

$$2 \eta_i = A \sum_\nu (s_\mu - s_\nu) \frac{\partial s_\nu}{\partial y_i}.$$

Ist nun r die Determinante dieser Gleichungen, also $r = \frac{1}{\sqrt{A}}$, und

$$r_i^\nu = \frac{\partial r}{\partial \left(\frac{\partial s_\nu}{\partial y_i}\right)}$$

die zum Elemente $\frac{\partial s_\nu}{\partial y_i}$ gehörige Unterdeterminante, so folgt durch Auflösung nach $A(s_\mu - s_\nu)$

$$\sqrt{A} \cdot (s_\mu - s_\nu) = 2 \sum_i r_i^\nu \eta_i, \tag{7}$$

und die beabsichtigte Umformung von (5) erfordert zunächst, dass y_k

durch die $\mu - 1$ Differenzen $s_\mu - s_\nu$ ausgedrückt wird. Nun ist

$$s_\nu = \sum_k \frac{\partial s_\nu}{\partial y_k} \cdot y_k,$$

also

$$r y_k = \sum_\nu r_k^\nu s_\nu$$

oder

$$y_k = \sqrt{A} \sum_\nu r_k^\nu s_\nu. \tag{8}$$

Sodann sei $\sigma_\lambda = s_\mu - s_\lambda$; dies gibt

$$\sigma_1 + \sigma_2 \cdots + \sigma_{\mu-1} = (\mu - 1) s_\mu - (s_1 + s_2 \cdots + s_{\mu-1}) = \mu s_\mu,$$

also ist

$$s_\mu = \frac{1}{\mu} \sum_\lambda (s_\mu - s_\lambda)$$

$$s_\nu = \frac{1}{\mu} \sum_\lambda (s_\mu - s_\lambda) - (s_\mu - s_\nu),$$

also folgt aus (7), was wir auch im folgenden art. gebrauchen werden

$$\left.\begin{aligned} s_\mu &= \frac{2}{\mu \sqrt{A}} \sum_i \eta_i \sum_\lambda r_i^\lambda \\ s_\nu &= \frac{2}{\sqrt{A}} \sum_i \eta_i \left[\frac{1}{\mu} \sum_\lambda r_i^\lambda - r_i^\nu \right]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Wird dies endlich in (8) eingeführt, so folgt

$$y_k = 2 \sum_\nu r_k^\nu \sum_i \eta_i \left[\frac{1}{\mu} \sum_\lambda r_i^\lambda - r_i^\nu \right]$$

$$\begin{aligned} y_k = -2 \sum_i \eta_i \Big\{ & r_i' r_k' + r_i^2 r_k^2 \cdots + r_i^{\mu-1} r_k^{\mu-1} \\ & - \frac{1}{\mu} (r_i' + r_i^2 \cdots + r_i^{\mu-1})(r_k' + r_k^2 \cdots + r_k^{\mu-1}) \Big\}, \end{aligned} \tag{10}$$

welches die beabsichtigte Umformung der Substitution (5) ist.

Wenn wir daher den Ausdruck

$$\begin{aligned} & r_i' r_k' + r_i^2 r_k^2 \cdots + r_i^{\mu-1} r_k^{\mu-1} \\ & - \frac{1}{\mu} (r_i' + r_i^2 \cdots + r_i^{\mu-1})(r_k' + r_k^2 \cdots + r_k^{\mu-1}) = R_{ik} \end{aligned} \tag{11}$$

setzen, so folgt

$$\frac{C_{ik}}{C} = -2 R_{ik}. \tag{12}$$

Dass R_{ik} eine rationale Function von z ist und im Endlichen nur dann unstetig werden kann, wenn z einem Verzweigungswerthe gleich

wird, braucht nicht bewiesen zu werden, da der vorstehende Ausdruck durch C_{ik} und C in Verbindung mit der aus (3) bekannten Bedeutung von C dies zeigt; wir benutzen umgekehrt den Ausdruck von R_{ik} durch irrationale Elemente, um zu untersuchen, wie sich die rationale Function $C_{ik} : C$ in den Verzweigungspunkten und im Unendlichen verhält.

Für einen Verzweigungswerth z werden zwei und nur zwei Zweige von s unstetig, beide wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$; ihre Summe bleibt stetig, ebenso jeder andere Zweig von s. Da aber in der Unterdeterminante r_i^ν zwei Zweige, s_μ und s_ν fehlen, so wird sie für einen Verzweigungswerth z entweder gar nicht unstetig, nämlich wenn dort s_μ und s_ν zusammenhängen, oder r_i^ν wird unstetig nur wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$, letzteres namentlich auch dann, wenn r_i^ν von beiden Zweigen abhängt, welche dort unstetig werden, weil man, ohne Aenderung von r_i^ν, den einen durch die Summe beider ersetzen kann.

Der Ausdruck (11) von R_{ik} besteht daher aus dreierlei Gliedern, 1) solchen die für den betreffenden Verzweigungswerth stetig bleiben, 2) solchen die dort unstetig werden wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$ und 3) Gliedern die wie $\frac{1}{A}$ unstetig werden. Da die Summe aller dieser Glieder rational ist, so müssen die Glieder zweiter Art einander aufheben, und es folgt, dass die rationale Function

$$A R_{ik} = \alpha_{ik}$$

für endliche Werthe von z nie unstetig wird, also eine ganze Function von z ist. Aus (11) folgt noch beiläufig $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$.

Um den Grad dieser ganzen Function zu bestimmen, beachte man, dass im Unendlichen auf jedem Blatte $\frac{\partial s}{\partial y_i} = \sigma_i$ zur Ordnung $2 + a_i$ verschwindet, während dort r und (art. 13) jedes einzelne Glied von r, insbesondere auch $r_i^\nu \frac{\partial s_\nu}{\partial y_i}$ zur Ordnung $p + \mu - 1$ verschwindet. Also folgt, dass für unendliche Werthe von z

$$r_i^\nu \text{ zur Ordnung } p + \mu - 1 - 2 - a_i \tag{13}$$

verschwindet. Also dort wird R_{ik} unendlich klein zur Ordnung

$$2(p + \mu - 1) - a_i - a_k - 4,$$

und weil A vom Grade $2(p + \mu - 1)$ ist, $A R_{ik} = \alpha_{ik}$ unendlich gross zur Ordnung $a_i + a_k + 4$. Also ist der gesuchte Grad

$$\delta \alpha_{ik} = a_i + a_k + 4. \tag{14}$$

Und so haben wir nun

$$\frac{C_{ik}}{C} = -2\frac{\alpha_{ik}}{A}. \tag{15}$$

Wir setzen nun

$$\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{\mu-1,\mu-1} = \Gamma, \tag{16}$$

und bezeichnen durch Γ_{ik} die zum Elemente α_{ik} gehörige Unterdeterminante. Durch Bildung von Γ und Γ_{ik} folgt dann

$$\frac{1}{C} = \frac{(-1)^{\mu-1}2^{\mu-1}}{A^{\mu-1}}\cdot\Gamma, \qquad \frac{a_{ik}}{C} = \frac{(-1)^{\mu-2}2^{\mu-2}}{A^{\mu-2}}\Gamma_{ik}.$$

Nun war (3)

$$\frac{1}{C} = \frac{(-1)^{\mu-1}2^{\mu-1}}{\mu A^{\mu-2}},$$

also folgt:

$$\left.\begin{aligned} A &= \mu\Gamma \\ a_{ik} &= -\frac{\mu}{2}\Gamma_{ik} \\ A_2 &= -\frac{\mu}{2}\sum_i\sum_k \Gamma_{ik}y_iy_k \\ AA_2 &= -2\sum_i\sum_k \alpha_{ik}\eta_i\eta_k. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Wegen (15) nimmt die Substitution (5), durch welche A_2 aus der ersten in die zweite Form übergeführt wird, die vereinfachte Gestalt

$$y_k = -\frac{2}{A}\sum_i \alpha_{ik}\eta_i \tag{18}$$

an. —

In einem Verzweigungspunkte wird $A = 0$, $s\sqrt{A} = \sqrt{-A_2}$, also muss A_2 ein reines Quadrat werden (art. 14 zu Ende). In der That findet für $A = 0$ oder $\Gamma = 0$ das Formelnsystem $\Gamma_{gh}\Gamma_{ik} = \Gamma_{gk}\Gamma_{ih}$ statt, mittelst dessen sich diese Eigenschaft von A_2 sofort verificirt.

Sodann ist zu bemerken, dass wenn Γ oder A nur einfache Factoren $z - \alpha$ hat, niemals A_2 mit A zugleich verschwinden kann, also die hierauf bezügliche Bedingung 4) des art. 16 wegfällt. Wenn nämlich Γ und A_2 für $z = \alpha$ verschwinden, so ist α von $x_1x_2\ldots x_p$ unabhängig, also verschwindet für $z = \alpha$ jeder Coefficient Γ_{ik} von A_2, mithin ausser Γ selbst auch noch $\frac{\partial\Gamma}{\partial z}$, was unmöglich ist, wenn Γ oder A jeden Linearfactor $z - \alpha$ nur einmal besitzt.

27.

Damit ist die nothwendige Form von A_2 dargethan, und es erübrigt noch, die Substitution (18) in den übrigen Functionen $A_3\ldots A_\mu$

auszuführen. Wir benutzen für diese die Ausdrücke

$$A_k = (-1)^k A[s_1s_2\ldots s_k + \cdots],$$

indem wir statt der Substitution (18) direct die Formeln

$$\left.\begin{aligned} s_\mu &= \frac{2}{\mu\sqrt{A}}\sum_i\eta_i\sum_\lambda r_i^\lambda \\ s_\nu &= \frac{2}{\sqrt{A}}\sum_i\eta_i\Big[\frac{1}{\mu}\sum_\lambda r_i^\lambda - r_i^\nu\Big] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

anwenden. Führt man diese ein und scheidet die Potenz von A aus, so nimmt A_k die Form an

$$A_k = \frac{A}{A^{\frac{k}{2}}}\cdot P;$$

wir denken uns P nach $\eta_1\eta_2\ldots$ geordnet, und bezeichnen durch

$$Q\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots\eta_{\mu-1}^{\alpha_{\mu-1}}$$

irgend ein Glied von P. Der Ausdruck Q ist in den Unterdeterminanten von r homogen vom Grade k, mit rein numerischen Coefficienten. Aber in den Formeln (9) ist η_1 nur mit Unterdeterminanten $r_1'r_1^2\ldots$ vom gemeinsamen untern Index 1 multiplicirt, η_2 nur mit Unterdeterminanten $r_2'r_2^2\ldots$ vom untern Index 2, u. s. w. Also ist Q eine Summe von Gliedern, von denen jedes das Product ist aus einem numerischen Coefficienten und α_1 Factoren r_1^ν, α_2 Factoren r_2^ν u. s. w. Da die Anzahl dieser Factoren $= k$ ist, so wird ein solches Product für einen Verzweigungswerth z unendlich höchstens wie $A^{-\frac{k}{2}}$, also $Q\cdot A^{\frac{k}{2}}$ für einen Verzweigungswerth z nie unstetig. Setzen wir dieses Product $= Q_1$ und $PA^{\frac{k}{2}} = P_1$, so wird

$$A_k = \frac{P_1}{A^{k-1}}$$

und $Q_1\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots$ ein Glied von P_1. Da man diese Form von A_k auch durch die Substitution (18) erhält, so ist Q_1 rationale Function von z, und weil sie im Endlichen nie unstetig wird, so ist sie ganze Function von z. Um ihren Grad zu bestimmen, ist zu beachten, dass im Unendlichen α_1 Factoren eines Gliedes von Q zur Ordnung $(p+\mu-1)-(a_1+2)$, α_2 Factoren zur Ordnung $(p+\mu-1)-(a_2+2)$ u. s. w. verschwinden, also Q selbst zur Ordnung

$$\begin{aligned} &\alpha_1[(p+\mu-1)-(a_1+2)] + \alpha_2[(p+\mu-1)-(a_2+2)] + \cdots \\ &\qquad = k(p+\mu-1) - 2k - (\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \cdots) \end{aligned}$$

verschwindet. Da dort $A^{\frac{k}{2}}$ zur Ordnung $k(p+\mu-1)$ unendlich wird, so wird $Q_1 = Q \cdot A^{\frac{k}{2}}$ unendlich zur Ordnung $2k + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \dots$, und dies ist der Grad von Q_1. Wir haben also den Satz:

Aus dem Ausdrucke von A_2 leite man die Substitution

$$\eta_i = \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial y_i}$$

oder durch Umkehrung die folgende

$$y_k = -\frac{2}{A}\sum_i \alpha_{ik}\eta_i \tag{18}$$

ab. Führt man letztere in die übrigen Functionen $A_3 \dots A_\mu$ ein, so hebt sich aus den Coefficienten der neuen, nach $\eta_1 \eta_2 \dots$ geordneten Ausdrücke A einmal weg, und es nimmt allgemein A_k die Form an

$$A_k = \frac{1}{A^{k-1}}\sum Q^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\dots}\,\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\cdots \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots = k),$$

wo alle Coefficienten ganze Functionen von z sind und insbesondere $Q^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\dots}$ vom Grade

$$2k + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots$$

ist.

Strassburg, 22. Februar 1878.

XXIX.

Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linearunabhängigen Integrale erster Gattung.

(Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Bd. 10, 1883, S. 81—100.)

In meiner Abhandlung über die canonische Form der Integrale I. G. habe ich mich auf einige bekannte Sätze bezogen und dabei angemerkt, dass dieselben sich aus rein algebraischen Betrachtungen schöpfen lassen. Der Wunsch, dies näher zu erläutern und namentlich die algebraischen Methoden nachzuweisen, deren ich mich bediene, veranlasst mich, im Folgenden meinen Beweis von einem dieser Sätze mitzutheilen.

Der Gegenstand dieser Untersuchung gehört in die Grundlagen der Lehre von den Abelschen Functionen, und betrifft einerseits die Anzahl der linearunabhängigen Integranden I. G. w', die zu einer gegebenen Gleichung

$$F(\overset{n}{s}\,|\,\overset{m}{z}) = 0 \tag{1}$$

gehören, andererseits die Kriterien für die Irreductibilität von F resp. die Anzahl seiner irreductibeln Factoren.

Bevor ich zu dieser Untersuchung übergehe, muss ich befürworten, dass in dieser Materie mehrere Sätze von einander getrennt werden müssen. Ist die Gleichung (1) irreductibel und, indem ich mich zunächst der üblichen Bezeichnungen bediene, r die Anzahl der Doppelpunkte $s\,|\,z = \gamma\,|\,\delta$, so lautet der erste Satz, dass die Anzahl der linearunabhängigen Functionen w', welche zu dieser Gleichung gehören, stets gleich

$$(m-1)(n-1) - r$$

ist. Der zweite Satz ist von anderer Natur, und betrifft die zur Gleichung (1) gehörige Fläche T. Aus der Irreductibilität von (1) folgt, dass diese n-blättrige Fläche eine zusammenhängende ist, also ist die

Anzahl der Dopellinien, in denen je zwei Blätter in einander übergehen, $\geqq n-1$. Bezeichnet man sie durch

$$n-1+p,$$

so ist die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte $w = 2(n-1+p)$, und da auch $w = 2m(n-1) - 2r$ ist, so folgt die bekannte Relation

$$p = (m-1)(n-1) - r.$$

Der erste Satz sagt also auch aus, dass die Anzahl der linearunabhängigen Functionen w' gleich ist der Anzahl p der überzähligen, d. h. für den Zusammenhang von T entbehrlichen Doppellinien dieser Fläche.

Der zweite Satz lehrt, dass (1) diese Fläche durch Querschnitte in eine einfachzusammenhängende verwandelt werden kann und dass dies (2) unter anderm durch p Querschnittbündel c, a, b (Riemann, *Theorie der Abelschen Functionen*, § 19) geleistet wird.

Beide Sätze vereinigt geben den dritten Satz, dass die Anzahl der linearunabhängigen Functionen w' der Anzahl dieser Querschnittbündel gleich ist.

In dieser Form rührt der Satz von Riemann her; unabhängig vom Dirichlet'schen Princip ist derselbe meines Wissens zuerst von Herrn Prym bewiesen worden (vergl. Borchardt's Journal 71, pag. 231—232); der Beweis folgt direct aus einem Riemann'schen Satze über die Periodicitätsmoduln der Integrale I. G. (*Th. d. A. F.*, § 21), wenn man berücksichtigt, dass der Riemann'sche Ausdruck von w' die Existenz von mindestens p linearunabhängigen Functionen w' auf jeden Fall sicherstellt.

Der zweite von diesen Sätzen wird in der Lehre vom Zusammenhange der Fläche T mit selbstständigen Hülfsmitteln bewiesen; ein Gleiches kann man vom ersten Satze verlangen, und dann erst erhält der soeben erwähnte Beweis des dritten Satzes seine wahre Bedeutung, da er in den Eigenschaften der Periodicitätsmoduln das Band nachweist, welches die beiden ersten, so sehr verschiedenartigen Lehrsätze direct miteinander verknüpft.

Von einem algebraischen Beweise des ersten Satzes muss man hiernach fordern, dass er von der Querschnittstheorie unabhängig ist aber ausserdem muss er die Irreductibilität der Gleichung (1), an die allein der Satz geknüpft ist, auch als den allein und unmittelbar entscheidenden Beweisgrund hervortreten lassen.

Beides leistet die folgende Untersuchung dadurch dass sie von einer neuen Darstellung der Functionen w' ausgeht, und sie liefert

ausserdem die Kriterien für die Irreductibilität des Polynoms F resp. die Anzahl seiner irreductibeln Factoren. Unmittelbar vorausgesetzt ist dabei der allgemeine Fall, den Riemann seinen Untersuchungen zu Grunde legt; der Schlussausdruck von w' ist indessen so beschaffen, dass man die Veränderungen überblicken kann, welche in ihm vorgehen, wenn sich beim Uebergange zu besondern Fällen höhere Singularitäten bilden.

Am Schlusse theile ich noch den doppelten Ausdruck einer Integralfunction R mit, von welcher man sofort zu den Integralen III. und II. G. gelangt, sowie den Ausdruck einer algebraischen wie T verzweigten Function S von z mittelst des Integranden R'.

I.

Sei in bekannter Bezeichnung

$$F(\overset{n}{s}\,|\,\overset{m}{z}) \equiv as^n + a_1 s^{n-1} \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

eine Gleichung zwischen s und z, und ihr Polynom F entweder selbst irreductibel oder durch jeden irreductibeln Factor nur einmal theilbar; ausserdem sei T die n-blättrige Fläche, durch deren Punkte man die Werthe von z repräsentiren muss, damit s denselben eindeutig zugeordnet werden kann, ohne an Linien (lignes d'arrêt nach Cauchy) unstetig zu sein. Jede Function σ von z, welche diese Eigenschaft mit s gemein hat, heisst verzweigt wie die Fläche T. Sind $s_1 s_2 \ldots s_n$ die Werthe von s für das nämliche z, und beziehungsweise $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ die gleichzeitigen, den nämlichen Punkten von T zugeordneten Werthe von σ, so kann man sich die Aufgabe stellen, im Ausdrucke

$$\psi(t\,|\,z) = U + U_1 t \cdots + U_{n-1} t^{n-1}$$

die von t unabhängigen Coefficienten U, $U_1, \ldots$ als Functionen von z so zu bestimmen, dass für $i = 1, 2, \ldots n$

$$\psi(s_i\,|\,z) = \sigma_i$$

wird. Die Interpolationsformel von Lagrange gibt sofort

$$\psi(t\,|\,z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i}{F'(s_i\,|\,z)} \cdot \frac{F(t\,|\,z)}{t - s_i},$$

wenn

$$F'(t\,|\,z) = \frac{\partial F(t\,|\,z)}{\partial t}$$

ist. Der vorstehende Ausdruck für ψ ist unzulässig, wenn $F'(s\,|\,z)$ identisch Null ist; aber dies ist durch die Bedingung ausgeschlossen, dass $F(t\,|\,z)$ durch keinen irreductibeln Factor zweimal aufgeht.

Zur Untersuchung von ψ als Function von z wird diese Variable ausser in T auch noch in einer besondern Ebene E repräsentirt. Beschreibt dann z in dieser irgend einen in sich zurückkehrenden Weg l, welcher durch keinen Verzweigungswerth z von s führt, so gibt dies in T für den Punkt z n allenthalben getrennte Wege $l_1 l_2 \ldots l_n$, deren Endpunkte demnach eine Permutation ihrer Anfangspunkte bilden. Die Endwerthe von $s_1 s_2 \ldots s_n$ und ebenso der zugeordneten Zweige $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ bilden die nämliche Permutation ihrer Anfangswerthe, folglich ist der Endwerth von ψ dem Anfangswerthe gleich. Als Function von z hat also ψ gar keine Verzweigungspunkte, also ist ψ einwerthige Function von z für jedes t, d. h. $U U_1 \ldots$ sind einwerthige Functionen von z.

Jede wie T verzweigte Function σ von z lässt sich also durch s und z in der Form

$$\sigma = \psi(s \mid z) = U + U_1 s \cdots + U_{n-1} s^{n-1}$$

ausdrücken, wo die Coefficienten einwerthige Functionen von z sind, und zwar liefert diese Gleichung zu jedem Zweige von s den ihm zugeordneten Zweig von σ.

Wird insbesondere σ weder unendlich oft noch je zu unendlich hoher Ordnung unstetig, so überträgt sich dies auf $\psi(t \mid z)$, also ist dann $\psi(t \mid z)$ eine rationale Function von z.

II.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, $\sigma = \psi(s \mid z)$ auf die allgemeinste Weise so zu bestimmen, dass

$$w = \int \sigma\, dz = \int \psi(s \mid z)\, dz$$

ein Integral I. G., d. h. weder im Endlichen noch im Unendlichen jemals unstetig wird. Bei der Lösung dieser Aufgabe beschränken wir uns auf den Fall, wo s als Function von z nur einfache und getrennte Singularitäten hat, und diese alle nur im Endlichen stattfinden, d. h. wo (1) die Punkte, in denen $s = \infty$ wird oder eine mehrfache Wurzel s stattfindet, alle im Endlichen liegen und niemals zwei solcher Punkte für das nämliche z stattfinden, ausserdem aber (2) als mehrfache Wurzeln nur Doppelwurzeln vorkommen.

Es ist ein Fundamentalsatz, dass (1) dieser einfachste Fall für alle Grade m, n der Gleichung (1) existirt und (2) wenn man ihn mit Riemann als den allgemeinen bezeichnet, jeder besondere Fall Grenzfall des allgemeinen ist, nämlich durch stetige Aenderung der Fläche T und stetige Verlegung der Werthe von s in ihr erreicht werden

kann. Auch dieser wichtige Lehrsatz lässt sich mit rein algebraischen Hülfsmitteln beweisen, wie es beim gegenwärtigen Stande der Lehre von den algebraischen Functionen verlangt werden muss.

Im Uebrigen muss bemerkt werden, dass auch der directen Behandlung besonderer Fälle nach der hier auseinander zu setzenden Methode keine principiellen Hindernisse im Wege stehen.

Unter den vorstehenden Voraussetzungen nun darf σ unstetig werden nur in den Verzweigungspunkten, und zwar wie $1 : \sqrt{z - \beta}$, wenn für $z = \beta$ ein solcher stattfindet; im Unendlichen muss auf jedem Blatte $\sigma = 0^2$ werden, und umgekehrt sind diese Bedingungen auch ausreichend, damit das $\int \sigma dz$ nie unstetig wird, also ein Integral I. G. ist.

Im gegenwärtigen Falle ist also

$$\psi(t \mid z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i}{F'(s_i \mid z)} \cdot \frac{F(t \mid z)}{t - s_i}$$

rationale Function von z, und wir haben zu untersuchen, wo und wie sie unstetig wird.

a) Nimmt z einen solchen Werth an, dass $s_i = t$ wird, so bleibt der zweite Factor

$$\frac{F(t \mid z)}{t - s_i}$$

stetig, da $t - s_i$ Wurzelfactor des Zählers ist. Dieser Factor wird also nur im Unendlichen unstetig, und zwar $= \infty^m$; aber dort wird auch $F'(s_i \mid z) = \infty^m$ und $\sigma_i = 0^2$; im Unendlichen wird also ψ nicht unstetig, sondern unendlich klein zur zweiten Ordnung.

b) Die Unstetigkeitspunkte von ψ liegen also alle im Endlichen und sie entsprechen den Werthen von z, für welche in der Fläche T der erste Factor

$$\tau_i = \frac{\sigma_i}{F'(s_i \mid z)}$$

unendlich wird, also den Verzweigungspunkten von T und den Doppelpunkten von s.

Der Vereinfachung wegen benutze ich nun für die Werthe, welche s, z in den

$$r = (m-1)(n-1) - p$$

Punktepaaren, welche Doppelpunkte heissen, und in den

$$w = 2m(n-1) - 2r = 2(n-1+p)$$

Verzweigungspunkten annehmen, die nämliche Bezeichnung

$$s \mid z = \alpha_i \mid \beta_i,$$

so dass wir $w + r$ solcher Werthepaare zu berücksichtigen haben.

Ist alsdann $s \mid z = \alpha_i \mid \beta_i$ ein Verzweigungspunkt, so wird in ihm $\sigma = \infty$, $F' = 0$, aber $\sigma \sqrt{z-\beta_i}$ und $\frac{F'}{\sqrt{z-\beta_i}}$ werden weder Null noch unendlich. Das nämliche gilt von $(z-\beta_i)\tau_i$, und zwar erlangt dieses Product im Verzweigungspunkte denselben Werth für beide Zweige von τ, welche dort zusammenhängen. Bezeichnet man ihn durch $\frac{1}{2} A_i$, so folgt für $z = \beta_i$

$$\lim\,(z-\beta_i)\psi(t \mid z) = A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t-\alpha_i};$$

für $z = \beta_i$ wird also ψ unstetig und zwar

$$\psi(t \mid z) = A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t-\alpha_i \cdot z-\beta_i} + \text{funct. cont.}$$

Findet für $z = \beta_k$ ein Doppelpunkt $s_1 = s_2 = \alpha_k$ statt, so bleiben σ_1, σ_2 stetig, aber $F'(s_1 \mid z)$, $F'(s_2 \mid z)$ verschwinden wie $z - \beta_k$; also folgt für $z = \beta_k$

$$\lim\,(z-\beta_k)\psi(t \mid z) = A_k \frac{F(t \mid \beta_k)}{t-\alpha_k},$$

wo A_k eine Constante ist. Für $z = \beta_k$ wird also ψ ebenfalls unstetig und

$$\psi(t \mid z) = A_k \frac{F(t \mid \beta_k)}{t-\alpha_k \cdot z-\beta_k} + \text{funct. cont.}$$

Setzen wir daher den, bei Untersuchungen dieser Art stets wiederkehrenden Ausdruck

$$\frac{F(t \mid \beta_i)}{t-\alpha_i \cdot z-\beta_i} = T_i(t \mid z),$$

so folgt, dass $\psi(t \mid z)$ nur für die $w + r$ Werthe β_i von z unstetig wird, und für $z = \beta_i$

$$\psi(t \mid z) = A_i T_i(t \mid z) + \text{funct. cont.}$$

ist. Der Ueberschuss von ψ über die Summe aller Ausdrücke $A_i T_i$ wird also niemals unstetig, also ist er constant, und $= 0$, da er im Unendlichen verschwindet. Es folgt

$$\psi(t \mid z) = \sum_{i=1}^{w+r} A_i T_i(t \mid z) = \sum_{i=1}^{w+r} A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t-\alpha_i \cdot z-\beta_i}.$$

Aber da ψ im Unendlichen zur zweiten Ordnung verschwindet, so muss in seiner absteigenden Entwicklung das Glied mit $\frac{1}{z}$ fehlen, also

$$\sum A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t-\alpha_i} = 0 \qquad (A)$$

sein, und zwar für jedes t.

III.

Jetzt erhalten wir

$$\sigma = \sum_i A_i T_i(s \mid z) = \sum_i A_i \frac{F(s \mid \beta_i)}{s-\alpha_i \cdot z-\beta^i}$$

und haben zunächst zu untersuchen, in wie weit dieser Ausdruck den an σ zu stellenden Anforderungen genügt.

1) Im Unendlichen wird wegen (A) auf jedem Blatte der Fläche T: $\sigma = 0^2$, wie erforderlich ist.

2) Wir untersuchen demnach die Unstetigkeiten einer einzelnen Function

$$T_i = \frac{F(s \mid \beta_i)}{s-\alpha_i \cdot z-\beta_i}$$

nur noch für endliche Werthe von z.

a) Wenn beide Factoren des Nenners unendlich klein werden, so werden zwei Wurzelfactoren des Zählers $= s - \alpha_i$ bis auf Glieder von noch höherer Ordnung, also wird in diesem Falle

$$T_i = \frac{s-\alpha_i}{z-\beta_i} G$$

und an der Grenze G weder Null, noch unendlich, noch $= \frac{0}{0}$.

Ist nun $\alpha_i \beta_i$ ein Verzweigungspunkt, so folgt, dass T_i in ihm unendlich wird wie $\frac{1}{\sqrt{z-\beta_i}}$, das $\int \sigma dz$ bleibt also dort stetig; das letztere gilt auch von den übrigen Functionen T_k.

Entspricht dem Werthepaar $\alpha_i \beta_i$ ein Doppelpunkt, d. h. findet dasselbe in zwei getrennten Punkten der Fläche T statt, so nimmt G, da es nicht $= \frac{0}{0}$ wird, in beiden Punkten den nämlichen Werth an, ebenso jede andere Function T_k; aber $\frac{s-\alpha_i}{z-\beta_i}$, welches in beiden Punkten ebenfalls stetig bleibt, erlangt in ihnen ungleiche Werthe, ebenso T_i. Letzteres und das $\int \sigma dz$ bleiben also stetig.

Hieraus ergibt sich der im Folgenden unentbehrliche Satz, dass die $w + r$ Functionen T_i linearunabhängig sind. Sollte nämlich T_i sich durch die übrigen Functionen T_k linear und mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen, so müsste, wenn $\alpha_i \beta_i$ ein Verzweigungspunkt ist, wenigstens eine der letztern dort unendlich werden, und wenn $\alpha_i \beta_i$ ein Doppelpunkt ist, wenigstens eine der übrigen Functionen T_k in den entsprechenden Punkten von T ungleiche Werthe annehmen, wovon weder das eine noch das andere der Fall ist.

b) Sodann ist der Fall zu untersuchen, wo nur ein Factor im Nenner von T_i verschwindet. Wird $s = \alpha_i$ aber nicht $z = \beta_i$, so bleibt T_i also σ stetig, da $s - \alpha_i$ Wurzelfactor des Zählers von T_i ist; wird $z = \beta_i$ aber s nicht $= \alpha_i$, so wird s eine andere Wurzel des Zählers, also abermals T_i und σ nicht unstetig.

c) Im Unendlichen sowie in allen denjenigen Punkten der Fläche T, in denen der Nenner einer der Functionen $T_1, T_2, \ldots$ verschwindet, hat also σ alle verlangten Eigenschaften. Aber ausserhalb dieser Punkte wird noch jede Function T_i, und im Allgemeinen auch σ, unendlich so oft $s = \infty$ wird; soll also σ auch in diesen Fällen stetig bleiben, so müssen seine $w + r$ Constanten $A_1, A_2, \ldots$ in geeigneter Weise beschränkt werden, und andere Beschränkungen derselben sind für unsere Aufgabe nicht erforderlich.

IV.

Sei

$$Q(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \ldots (z - \beta_{w+r}),$$

also $Q(z)$ der Ausdruck, welcher sich ergibt, wenn man die Discriminante D der Gleichung (1) von dem Factor befreit, den sie mit ihrer Derivirten gemein hat. Dann ist $\psi(t|z)\,Q(z)$ eine ganze Function von t und z, und von den Graden $n-1$ und $w+r-2$, da für $z = \infty$ $\psi = 0^2$ wird. Sei also

$$\psi(t|z) \cdot Q(z) = G\big(\overset{n-1}{t}\,\big|\,\overset{w+r-2}{z}\big)$$

mithin

$$\sigma = \frac{G\big(\overset{n-1}{s}\,\big|\,\overset{w+r-2}{z}\big)}{Q(z)},$$

wovon die Formeln der art. II. III. die Partialbruchzerfällungen sind.

Hier muss nun der Zähler G ohne unnöthige Beschränkungen so bestimmt werden, dass er für $s = \infty$ niemals unstetig werden kann. Dies gelingt durch folgende Überlegungen. Schreibt man die Gleichung (1) in der Form

$$as^\mu + a_1 s^{\mu-1} \cdots + a_\mu = -\frac{a_{\mu+1}}{s} - \frac{a_{\mu+2}}{s^2} - \cdots$$

so folgt, für $\mu = 0, 1, \ldots n-1$, dass der Ausdruck zur Linken zur ersten Ordnung verschwindet, so oft $s = \infty$ wird. Wir setzen

$$at^\mu + a_1 t^{\mu-1} \cdots + a_\mu = f_\mu(t|z),$$

dann ist $f_n(s|z)$ identisch $= 0$, die übrigen Functionen $f_\mu(s|z)$ werden $= 0^1$ für $s = \infty$.

Eine ganze Function von s und z, die in s vom μ^{ten} Grade ist, wird im Allgemeinen $= \infty^\mu$ für $s = \infty$. Soll sie in jedem Falle, wo s unendlich wird, entweder stetig bleiben oder doch nur zu einer kleinern als der μ^{ten} Ordnung unendlich werden, so muss der Factor von s^μ ohne Rest durch a theilbar sein; ist er $= b \cdot a$, also auch b ganze Function von z, so kann man das Glied höchster Ordnung

$$b \cdot as^\mu = bf_\mu(s|z) - \text{einer ganzen Function von } s \text{ und } z$$

setzen, die in s nur auf den Grad $\mu - 1$ steigt; vereinigt man mit dieser die übrigen Glieder der in Rede stehenden ganzen Function, so erlangt sie die Ausdrucksform

$$bf_\mu(s|z) + C_1 s^{\mu-1} + \cdots + C_{\mu-1},$$

wo $b, C_1, \ldots C_{\mu-1}$ ganze Functionen von z sind.

Wendet man dies wiederholt auf die Function G an, welche für $s = \infty$ niemals unstetig werden darf, so folgt, dass sie nothwendig die Form

$$G\big(\overset{n-1}{s}\,\big|\,\overset{w+r-2}{z}\big) = A_0(z) f_{n-1}(s|z) + A_1(z) f_{n-2}(s|z) \cdots \\ + A_{n-2}(z) f_1(s|z) + A_{n-1}(z)$$

hat, wo $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ ganze Functionen von z sind, und zwar ist A_{n-1} vom Grade $w + r - 2$, alle übrigen sind nur vom Grade $w + r - m - 2$.

Demnach haben wir nur noch die Bedingungen zu ermitteln, damit bei diesen Graden der Functionen A identisch

$$\psi(t|z) = \frac{1}{Q(z)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-2} A_\nu(z) f_{n-\nu-1}(t|z) + A_{n-1}(z) \right\} = \sum_{i=1}^{w+r} A_i \frac{F(t|\beta_i)}{t - \alpha_i \cdot z - \beta_i} \qquad (\alpha)$$

wird. Dies gibt zunächst

$$A_i \frac{F(t|\beta_i)}{t - \alpha_i} = \sum_0^{n-2} \frac{A_\nu(\beta_i)}{Q'(\beta_i)} f_{n-\nu-1}(t|\beta_i) + \frac{A_{n-1}(\beta_i)}{Q'(\beta_i)}.$$

Nun ist, wenn $F(\alpha|\beta) = 0$ ist,

$$\frac{F(t|\beta)}{t - \alpha} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha^\nu f_{n-\nu-1}(t|\beta);$$

berücksichtigt man, dass $f_0(\beta) = a(\beta)$ ist, so geht die vorige Formel über in

$$A_i \sum_0^{n-2} \alpha_i^\nu f_{n-\nu-1}(t|\beta_i) + A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i) = \sum_0^{n-2} \frac{A_\nu(\beta_i)}{Q'(\beta_i)} f_{n-\nu-1}(t|\beta_i) + \frac{A_{n-1}(\beta_i)}{Q'(\beta_i)}.$$

Aber da $a(\beta_i)$ nicht $= 0$ ist, so folgt aus der Gleichheit der Coefficienten von t^{n-1} diejenige der Coefficienten von $f_{n-1}(t \mid \beta_i) = a(\beta_i)t^{n-1} + \cdots$; hebt man diese Glieder weg, so folgt ebenso die Gleichheit der Coefficienten von $f_{n-2}(t \mid \beta_i)$, u. s. w., so dass wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_\nu(\beta_i)}{Q'(\beta_i)} &= A_i \alpha_i^\nu \quad (\text{für } \nu = 0, 1, \ldots n-2) \\ \frac{A_{n-1}(\beta_i)}{Q'(\beta_i)} &= A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i), \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

beides für $i = 1, 2, \ldots w + r$. Daraus ergeben sich weiter die Partialbruchzerfällungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_\nu(z)}{Q(z)} &= \sum_i \frac{A_i \alpha_i^\nu}{z - \beta_i} \quad (\text{für } \nu = 0, 1, \ldots n-2) \\ \frac{A_{n-1}(z)}{Q(z)} &= \sum_i \frac{A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i)}{z - \beta_i}. \end{aligned}\right\} \tag{γ}$$

Aus den Graden $w + r - m - 2$, $w + r - 2$ und $w + r$ von A_ν, A_{n-1} und Q folgt, dass die absteigende Entwicklung in der ersten Formel mit z^{-m-2}, in der zweiten mit z^{-2} beginnen muss; also folgt endlich

$$\sum_i A_i \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} \nu = 0, 1, \ldots n-2 \\ \mu = 0, 1, \ldots \ m \end{array} \right| \tag{B}$$

$$\sum_i A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i) = 0. \tag{C}$$

Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so liefern die Gleichungen (γ) jedes A mit dem in (α) vorgeschriebenen Grade, während (α) selbst auch ohne dies Folge von (β) und dies Folge von (γ) ist. Die vorstehenden Bedingungen (B) (C) sind also nothwendig und zugleich hinreichend, damit

$$\psi(s \mid z) = \sum_i A_i \frac{F(s \mid \beta_i)}{s - \alpha_i \cdot z - \beta_i}$$

für $s = \infty$ niemals unstetig wird.

V.

Jeder Integrand I. G. lässt sich also in die Form

$$\sigma = \sum_{i=1}^{w+r} A_i \frac{F(s \mid \beta_i)}{s - \alpha_i \cdot z - \beta_i} = \sum_i A_i T_i(s \mid z)$$

bringen, wo die $w + r$ Functionen T_i linearunabhängig und ihre Coefficienten A_i constant sind.

Aber es ist nicht jeder Ausdruck dieser Form ein Integrand I. G., sondern es sind hierzu die folgenden Bedingungen zwischen den Coefficienten A_i erforderlich und hinreichend:

$$\sum_i A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t - \alpha_i} = 0 \quad \text{für jedes } t; \tag{A}$$

$$\sum_i A_i \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0 \quad \text{für} \left| \begin{array}{l} \nu = 0, 1, \ldots n-2 \\ \mu = 0, 1, \ldots \ m \end{array} \right| \tag{B}$$

$$\sum_i A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i) = 0. \tag{C}$$

Dieselben sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Die Gleichungen (B) kann man durch die folgende ersetzen, dass für jede ganze Function $g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z})$ sein muss

$$\sum_i A_i g(\overset{n-2}{\alpha_i} \mid \overset{m}{\beta_i}) = 0. \tag{$B\,1$}$$

Nun ist

$$\frac{1}{n} F'(s \mid z) = a(z) s^{n-1} + g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z}),$$

also folgt aus (B) oder $(B\,1)$

$$\frac{1}{n} \sum_i A_i F'(\alpha_i \mid \beta_i) = \sum_i A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i);$$

da $F'(\alpha_i \mid \beta_i) = 0$ ist, so ist (C) eine Folge von (B), also überzählig. Sodann ist

$$f_{n-1}(s \mid z) = a s^{n-1} + g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z}),$$

also können wir auch schreiben

$$\frac{F(t \mid z)}{t - s} = f_{n-1}(s \mid z) + t f_{n-2}(s \mid z) + \cdots = a s^{n-1} + g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z}),$$

mithin ist, als nothwendige Folge von (B), auch

$$\sum A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t - \alpha_i} = 0, \tag{A}$$

und zwar für jedes t. In der That ist die Bedingung (A), dass im Unendlichen $\psi(t \mid z) = 0^2$ werden soll, auch durch die geforderten Grade der A ausgedrückt.

Lassen wir die hiernach überzähligen Gleichungen (A) und (C) weg, so bleiben nur noch die Bedingungen (B) übrig und wir haben nun zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen dieses System von überzähligen Gleichungen frei ist.

Angenommen, das System (B) enthalte eine oder mehr als eine überzählige Gleichung. Dann kann man mit Benutzung von Multiplicatoren, die nicht alle $=0$ sind, aus (B) alle Unbekannten A_i eliminiren. Nimmt man diese Multiplicatoren zu Coefficienten der Function $g(\overset{n-2}{s} \,|\, \overset{m}{z})$, so wird also in der Gleichung $(B\,1)$ allgemein $g(\alpha_i \,|\, \beta_i) = 0$, ohne dass alle Coefficienten von g verschwinden. Es gibt also in diesem Falle eine ganze Function $g(\overset{n-2}{s} \,|\, \overset{m}{z})$, die in jedem Verzweigungs- und jedem Doppelpunkte verschwindet. Von dieser Function g erhalten wir also $w + 2r = 2m(n-1)$ Nullpunkte. Ich werde beweisen, dass g von der Ordnung $2m(n-1)$ ist; dann folgt, dass g nur in jenen Punkten, und in keinem von ihnen zu einer höhern als der ersten Ordnung verschwindet. In der That wird in n Fällen (für $z=\infty$) $g = \infty^m$, und in m Fällen (für $s=\infty$) $g = \infty^{n-2}$, während sonst g nicht mehr unstetig wird; also wird genau $nm + m(n-2) = 2m(n-1)$ mal $g = \infty^1$, wie es eben angegeben wurde.

Diese Null- und Unstetigkeitspunkte, nebst den nämlichen Ordnungszahlen, kommen auch der in jedem Falle wirklich existirenden Function $F'(s \,|\, z)$ zu; also ist $g : F' = \gamma$ wie T verzweigt, aber nie unstetig noch Null, also in jedem zusammenhängenden Theile von T constant und in keinem $=0$. Vereinigt man jedesmal γ mit g, so folgt:

Enthält das System (B) eine oder mehr als eine überzählige Gleichung, so genügen diejenigen Wurzeln s der Gleichung

$$F(\overset{n}{s} \,|\, \overset{m}{z}) = 0, \tag{1}$$

welche dem nämlichen zusammenhängenden Theile der Fläche T zugeordnet sind, auch einer Gleichung kleinern Grades

$$g(\overset{n-2}{s} \,|\, \overset{m}{z}) - F'(s \,|\, z) = 0, \tag{2}$$

die ebenfalls in z rational ist.

Hier trennen sich nun zwei Fälle voneinander.

A) Ist die Gleichung (1) irreductibel, so kann s nicht auch noch der Gleichung (2) genügen dann also ist es ein Widerspruch, anzunehmen, das System (B) sei nicht frei von überzähligen Gleichungen. Die Anzahl der Gleichungen (B) ist aber

$$(n-1)(m+1) = (m-1)(n-1) + 2(n-1) = r + p + 2(n-1) = r + w - p,$$

also um p Einheiten kleiner als die Anzahl der Unbekannten A_i. Von diesen lässt sich also wenigstens eine Gruppe von $w + r - p$

Unbekannten[1]) aus den Gleichungen (B) ermitteln; sie drücken sich linear und homogen durch die p übrigen aus, welche willkürlich bleiben, abgesehen vom Falle $p=0$, wo sämmtliche $A=0$ werden, und also ein Integral I. G. überhaupt nicht existirt. Sind $A_1 \ldots A_p$ die Coefficienten, welche willkürlich bleiben, so erhält man für $k > p$ Auflösungsformeln

$$A_k = \sum_{\varrho=1}^{p} A_\varrho \cdot \Delta_{k\varrho},$$

wo alle Δ Determinantenquotienten sind; setzt man alsdann den Gesammtfactor von A_ϱ, nämlich

$$T_\varrho(s \,|\, z) + \sum_{k>p} \Delta_{k\varrho} T_k(s \,|\, z) = w_\varrho',$$

so wird

$$\sigma = \psi(s \,|\, z) = A_1 w_1' + A_2 w_2' \cdots + A_p w_p'.$$

Hier sind demnach $w_1' w_2' \ldots w_p'$ Integranden I. G., und sie sind linearunabhängig. Wären sie es nämlich nicht, so liesse sich wenigstens ein Anfangsglied T_ϱ durch andere Functionen T_i linear und mit constanten Coefficienten ausdrücken, was unmöglich ist. Da der vorstehende Ausdruck alle Integranden I. G. enthält, so haben wir den Satz:

Ist die Gleichung

$$F(\overset{n}{s} \,|\, \overset{m}{z}) = 0$$

irreductibel, so sind die $w + r - p$ Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{w+r} A_i \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \nu = 0, 1, \ldots n-2 \\ \mu = 0, 1, \ldots \;\; m \end{array} \right| \tag{B}$$

voneinander unabhängig, und mit Benutzung derselben ist jeder, der Gleichung (1) zugeordnete Integrand I. G. in der Form

$$\sigma = \sum_{i=1}^{w+r} A_i \frac{F(s \,|\, \beta_i)}{s - \alpha_i \cdot z - \beta_i}$$

darstellbar; die Anzahl der linearunabhängigen Integranden I. G. ist in allen Fällen $= p$, insbesondere $=0$ für $p=0$.

B) Enthält das System (B) überzählige Gleichungen, so kann die Gleichung (1) nicht irreductibel sein. Dieses Resultat ist unter der Voraussetzung hergeleitet, dass (art. I) das Polynom F

1) Eine genauere Bestimmung über diese Gruppe von Unbekannten ergibt sich am Schlusse des folgenden art.

durch keinen irreductibeln Factor zweimal aufgehe, weil sonst $F'(s|z)$ identisch Null ist; diese Bedingung, an der wir festhalten, lässt sich auch so ausdrücken, dass die Discriminante D von F nicht identisch Null sein darf. Sei unter dieser Voraussetzung k die Anzahl der irreductibeln, also ungleichen Factoren von F. Dann zerfällt die n-blättrige Fläche T in k zusammenhängende Flächen, den einzelnen Factoren von F entsprechend, und jeder ist nach dem vorigen Satze eine Anzahl linearunabhängiger Integranden I. G. zugeordnet, gleich der Anzahl ihrer überzähligen Doppellinien. Die Anzahl aller der Gleichung (1) zugeordneten Integranden I. G. ist also gleich der Anzahl p der überzähligen Doppellinien in dieser zerfallenden Fläche T. Für den Zusammenhang dieser Fläche sind unentbehrlich nur noch $(n-1)-(k-1)$ Doppellinien, also ist $(n-1)-(k-1)+p$ die Anzahl aller, und das Doppelte hiervon ist die Anzahl aller einfachen Verzweigungspunkte von T. Aber diese ist wieder $w=2m(n-1)-2r$, wenn r die Anzahl aller Doppelpunkte ist, also folgt

$$(n-1)-(k-1)+p=m(n-1)-r, \text{ d. i. } p=[(m-1)(n-1)-r]+k-1:$$

die Anzahl der linearunabhängigen Integranden I. G. ist also um $k-1$ grösser wie in dem Falle, wo das System (B) keine überzählige Gleichung enthält. Da diese Functionen unter der Voraussetzung der Gleichungen (B) alle im obigen Ausdrucke von σ enthalten sind, so folgt, daß das System (B) genau $k-1$ überzählige Gleichungen enthält. Dies lässt sich umkehren:

Enthält das System (B) $k-1$ überzählige Gleichungen, und ist die Discriminante D von F nicht identisch Null, so zerfällt F in k ungleiche irreductible Factoren.

Denn wäre F durch denselben irreductibeln Factor zweimal theilbar, so wäre D identisch Null; wäre F das Product aus l ungleichen, irreductibeln Factoren, und l nicht $=k$, so enthielte das System (B) $l-1$ und nicht $k-1$ überzählige Gleichungen.

VI.

Nunmehr ist

$$\varphi(t|z)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\frac{F(t|z)}{t-s_i}$$

ganze Function von t und rationale Function von z. Für $s_i=t$ bleibt sie stetig, ebenso wenn $\sigma=\infty$ wird. Denn wenn dies für $z=\beta$ stattfindet, so wird $(z-\beta)\sigma=0$, also auch $(z-\beta)\varphi(t|z)=0$, mithin φ nicht unstetig. Da hiernach die rationale Function φ für kein end-

liches z unstetig wird, so ist sie ganze Function von z. Für $z=\infty$ findet sich $\varphi=\infty^{m-2}$, also ist φ in z vom Grade $m-2$. Ist, nach t geordnet, $\varphi=Ct^{n-1}+C_1t^{n-2}+\ldots$, so wird der leitende Coefficient

$$C=a\sum\sigma_i;$$

derselbe ist gleich Null, denn die $\sum\sigma_i$ ist ebenfalls rational, im Endlichen nie unstetig und im Unendlichen Null, also identisch Null. Folglich ist φ in t nur vom Grade $n-2$, und wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\frac{F(t|z)}{t-s_i}=\varphi(\overset{n-2}{t}\,|\,\overset{m-2}{z}).$$

Findet für $z=\delta$ ein Doppelpunkt $s_1=s_2=\gamma$ statt, so hat $F(t|\delta)$ den Factor $t-\gamma$ zweimal, in zwei Gliedern hebt er sich aber einmal weg, also hat $\varphi(t|\delta)$ ihn einmal. Für σ ergibt sich der bekannte Ausdruck Riemanns

$$\sigma F'(s|z)=\varphi(\overset{n-2}{s}\,|\,\overset{m-2}{z})$$

mit dem Zusatze, dass $\varphi\,(s|z)$ in den r Doppelpunkten verschwindet; es ist ebenfalls bekannt, dass diese Eigenschaft auch ausreicht, damit σ Integrand I. G. wird. Zwischen den $(m-1)(n-1)$ Coefficienten von φ ergeben sich also in Riemann'scher Bezeichnung die r Bedingungsgleichungen

$$\varphi(\gamma_\varrho|\delta_\varrho)=0 \qquad (\varrho=1,2,\ldots r); \tag{B'}$$

ist l die Anzahl der überzähligen Gleichungen dieses Systems, so ergeben sich $[(m-1)(n-1)-r]+l$ Functionen σ; dieselben sind linearunabhängig, da φ nicht durch alle irreductibeln Factoren von F theilbar sein kann.

Ist die Gleichung (1) irreductibel, so ist $l=0$:

Ist die Gleichung (1) irreductibel, so ist die Anzahl r und die Lage der Doppelpunkte γ,δ eine solche, dass unter den r Gleichungen (B') sich keine überzählige findet.

Dazu kommt wie am Schlusse des vorigen art. der Satz:

Enthält das System (B') vermöge der Anzahl r und der Lage der Doppelpunkte überzählige Gleichungen, und ist die Anzahl derselben $=k-1$, so zerfällt F in k ungleiche irreductible Factoren, vorausgesetzt dass seine Discriminante nicht identisch Null ist.

Die gegenwärtige Untersuchung zeigt, dass in allen diesen Fällen ein Integrand I. G. w' in den beiden Punkten von T, die einem Doppelpunkte entsprechen, ungleiche Werthe annimmt; stellt man also w' durch Functionen T dar, so muss sein Ausdruck alle Functionen T_k enthalten, welche einem Doppelpunkte $\alpha_k\beta_k$ zugeordnet sind.

Die entsprechenden Coefficienten A_k gehören daher auf alle Fälle zu derjenigen Gruppe von Unbekannten, nach denen das System (B) aufgelöst werden kann,

denn wenn A_k willkürlich bleibt, kommt T_k nur in einer Function w_k' vor.

VII.

Auf diesen Sätzen beruht die Möglichkeit der Integrale III. und II. G. für jedes p, auch für $p = 0$. Ich finde in dieser Beziehung folgende Resultate, deren Beweis ich nach dem Vorangehenden wohl übergehen darf. Sei ε ein von $s|z$ unabhängig veränderlicher Punkt der Fläche T und in ihm $z = \zeta$, $s = \sigma$, ferner, wenn wieder $\alpha_i\beta_i$ einen Verzweigungs- oder Doppelpunkt bedeutet

$$\mathfrak{A}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{w+r} A_i(\varepsilon)\frac{F(s\,|\,\beta_i)}{s-\alpha_i\cdot z-\beta_i} - \frac{1}{F'(\sigma\,|\,\zeta)}\frac{F(s\,|\,\zeta)}{s-\sigma\cdot z-\zeta},$$

während die $w + r$ Constanten $A_i(\varepsilon)$ an die $w + r - p$ Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{w+r} A_i(\varepsilon)\alpha_i^{\nu}\beta_i^{\mu} = \frac{\sigma^{\nu}\zeta^{\mu}}{F'(\sigma\,|\,\zeta)} \qquad \left|\begin{array}{l} \nu = 0, 1, \ldots n-2 \\ \mu = 0, 1, \ldots \quad m \end{array}\right|$$

gebunden sind. Wir setzen voraus, dass die Gleichung (1) irreductibel ist, dann folgt aus art. V., dass diese Gleichungen niemals einander widersprechen können, und $w + r - p$ Unbekannte A_i durch die p übrigen und die unabhängigen Glieder ohne Widerspruch bestimmen. Insbesondere ist also $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ bestimmt bis auf einen additiven Integranden I. G. Durch die vorstehenden Bedingungen ist also auch die Integralfunction

$$R(\varepsilon) = \int \mathfrak{A}(\varepsilon)dz$$

widerspruchsfrei bestimmt bis auf ein additives Integral I. G. Dieselbe hat die folgenden Eigenschaften:

1. Im Punkte ε ist

$$R(\varepsilon) = -\log(z-\zeta) + \text{funct. cont. mon.}$$

2. In jedem der n unendlich fernen Punkte ∞_ν von T ist

$$R(\varepsilon) = \frac{1}{n}\log\frac{1}{z} + \text{funct. cont. mon.}$$

3. Dies sind die einzigen Punkte, in denen diese Function unendlich wird.

Um sie eindeutig zu machen, verwandle man daher die Fläche T mittelst der bekannten Querschnittbündel c, a, b in eine einfach zusammenhängende Fläche T', und ziehe durch diese aus dem nämlichen Punkte, von dem alle Schnitte c nach den Schnittpaaren a, b ausgehen, nacheinander noch einen Schnitt l bis ε und Schnitte $l_1 l_2 \ldots l_n$ nach den unendlich fernen Punkten $\infty_1 \infty_2 \ldots \infty_n$. Wird der Integrationsweg auf diese, ebenfalls noch einfach zusammenhängende Fläche T_1 beschränkt, so wird R eindeutig und im Innern von T_1 nie unstetig; die Periodicitätsmoduln dieser Function sind alle constant. Bezeichnet man die Seiten der Querschnitte a, b in üblicher Weise und die Seiten der Schnitte l so, dass man durch einen positiven Umlauf um den Endpunkt von der negativen auf die positive Seite des Schnittes gelangt, so ist

4. an l $\qquad \overset{+}{R} - \overset{-}{R} = -2\pi i$

an $l_1 l_2 \ldots l_n$ $\qquad \overset{+}{R} - \overset{-}{R} = \frac{2\pi i}{n}.$

Ist sodann u_μ das μ^{te} Normalintegral I. G. und

5. an a_λ $\qquad \overset{+}{R} - \overset{-}{R} = A_\lambda(\varepsilon) \quad \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = \binom{\lambda}{\mu}\pi i$

an b_λ $\qquad \overset{+}{R} - \overset{-}{R} = B_\lambda(\varepsilon) \quad \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = a_{\lambda\mu},$

während an c_λ beide Functionen stetig sind, so folgt aus der Untersuchung der Function $\int R du_\mu$ in bekannter Weise

$$6. \qquad B_\mu(\varepsilon) = \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda(\varepsilon)a_{\lambda\mu} - 2u_\mu(\varepsilon) + \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{n} u_\mu(\infty_\nu)$$

Hier bedeuten $u_\mu(\varepsilon)$, $u_\mu(\infty_\nu)$ die Werthe von u_μ in den Punkten ε, ∞_ν von T'; unter dem Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ verstehe ich die Einheit, wenn $\lambda = \mu$ ist, in allen übrigen Fällen die Null.[1])

1) Ein ähnliches Symbol für die Zwecke der Determinantentheorie findet sich in der Literatur zuerst in einer Abhandlung des Herrn Kronecker (Monatsber. d. Berliner Ac. vom 15. Oct. 1866, pag. 601); ich selbst bin vor langer Zeit zum obigen Symbol durch Untersuchungen genöthigt worden, in denen Derivirten wie $\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ nicht zu vermeiden sind, während $x_1 x_2 \ldots x_n$ unabhängige Variabeln bedeuten.

Die Differenz zweier Functionen R ist demnach ein Integral III. G.,

$$R(\varepsilon_1) - R(\varepsilon_2) = \tilde{\omega}(\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2)$$

und

$$t(\varepsilon) = \frac{dR(\varepsilon)}{d\zeta}$$

ein Integral II. G. (Riemann: *Th. d. A. F.*, art. 4).

Die nämliche Function R lässt sich auch in der folgenden Form darstellen

$$R(\varepsilon) = \int \left\{ \Phi\left(\overset{n-2}{s} \,\middle|\, \overset{m-2}{z}\right) - \frac{F(s \mid \zeta)}{s - \sigma \cdot z - \zeta} - \frac{1}{n} \frac{F'(s \mid z) - F'(s \mid \zeta)}{z - \zeta} \right\} \frac{dz}{F'(s \mid z)},$$

wofern die $(m-1)(n-1) = r + p$ Constanten von Φ so bestimmt werden, dass der Ausdruck zwischen den gewundenen Klammern in den r Doppelpunkten verschwindet. Nach art. VI. sind diese r Bedingungsgleichungen widerspruchsfrei und voneinander unabhängig; also ist auch in dieser Form R völlig bestimmt bis auf ein additives Integral I. G.

Um von den Anwendungen dieser Function R nur ein Beispiel anzudeuten, sei S eine algebraische wie T verzweigte Function von z, die nur im Endlichen und zwar in den q Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_q$ unstetig wird. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall, wo S nur zur 1. Ordnung unendlich wird, und sei

$$\text{in } \varepsilon_k: \quad S = \frac{E_k}{z - \zeta_k} + \text{funct. cont.} \quad (k = 1, 2, \ldots q),$$

wenn ζ_k den Werth von z in ε_k und E_k eine Constante bedeutet. Dann ergibt sich die wirkliche Darstellung von S als rationale Function von s und z wie folgt. Ist w irgend ein Integral I. G. und seine Derivirte $\frac{dw}{dz}$ in ε_k gleich $w'(\varepsilon_k)$, so ist bekanntlich

$$\sum_{k=1}^{q} E_k w'(\varepsilon_k) = 0. \tag{α}$$

Nun bilde man $I = \int S dw$, $\Delta = \sum_k E_k w'(\varepsilon_k) R(\varepsilon_k)$, beides Integrale algebraischer wie T verzweigter Functionen von z. Dann bleibt I, und wegen (α) auch Δ im Unendlichen stetig, im Endlichen werden sie beide unendlich nur in den Punkten ε, aber wie man sofort sieht so, dass ihre Summe $I + \Delta$ auch dort stetig bleibt. Letztere ist also ein allenthalben endliches Integral, also ein Integral I. G.

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 \cdots + c_p w_p + \text{const.};$$

daraus folgt

$$S w' = c_1 w_1' + c_2 w_2' \cdots + c_p w_p' - \sum_{k=1}^{q} E_k w'(\varepsilon_k) \frac{dR(\varepsilon_k)}{dz}.$$

Hier sind noch die p Constanten $c_1 c_2 \ldots c_p$ zu bestimmen, was sofort zu meiner Unterscheidung von Functionen S der I. und der II. G. führt.

Es ist unnöthig, die Modificationen zu erläutern, welche sich im Ausdrucke von S ergeben, wenn S in einem Punkte ε zu höherer Ordnung unendlich wird, oder im Ausdrucke und den Unstetigkeiten von $R(\varepsilon)$, wenn ε in einen unendlich fernen Punkt ∞_ν rückt; der erste von den obigen Ausdrücken von R liefert die Entscheidung der letztern Frage ohne Weiteres.

Strassburg, 18. Februar 1880.