# IX.

## Ueber die Dispersion des Lichtes.

(Annalen der Physik und Chemie, Bd. 124, 1865, S. 53—60.)

In den Comptes Rendus vom 13. Juni 1864 S. 1111 hat Hr. Mascart neue Bestimmungen über die Länge der Lichtwellen und die Brechungsindices der entsprechenden ordentlichen Strahlen im Doppelspath veröffentlicht, welche sich in ungefähr gleicher Ausdehnung, wie die Beobachtungen Esselbach's (diese Ann. Bd. 98, S. 513) über das gewöhnlich sichtbare und das ultraviolette Spectrum verbreiten. Bei der großen Genauigkeit dieser Angaben schien es mir wünschenswerth, dieselben zu einer nochmaligen Prüfung der Dispersionsformel zu benutzen, welche ich aus Cauchy's Theorie abgeleitet habe (diese Ann. Bd. 117, S. 27 s. o. S. 113).

Leider mufste auch bei dieser Gelegenheit auf die Vortheile verzichtet werden, welche sich darbieten, wenn man die Rechnung direct an die vollständigen Originalbeobachtungen anknüpfen kann. Denn wenn auch jedes Prüfungsverfahren zu einer Bestätigung der zu prüfenden Formel führen kann, sobald nur jede einzelne Abweichung von den Beobachtungen, welche es verlangt, klein genug ist, so ist doch nur die Ausgleichung der vollständigen Originalbeobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate im Stande, die Entscheidung über die Richtigkeit der Formel zu liefern, ohne sie von jeder einzelnen Abweichung, also von der zufälligen Vertheilung der Beobachtungsfehler, abhängig zu machen.

Die Prüfung durch die Originalbeobachtungen würde sich nach folgenden Grundsätzen zu richten haben. Da im vorliegenden Falle sämmtliche Beobachtungen in Winkelmessungen bestehen, also von gleicher Art sind, so berechne man aus ihnen nach den bekannten Regeln die Präcision einer einzigen Beobachtung vom Gewichte 1 von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus, zuerst, indem man die der unmittelbaren Messung unterworfenen Winkel als von einander unab-



hängig betrachtet, was sie bei der Beobachtung auch wirklich sind, und zum zweiten Male, indem man sie in die von der Dispersionsformel verlangte Abhängigkeit von einander versetzt. Bezeichnet man alsdann die Präcision im ersten Falle durch $h$, im andern durch $H$, so liefert der Quotient $\frac{H}{h}$ die verlangte Entscheidung in folgender Weise.

Nach dem Grundprincip der Methode der kleinsten Quadrate mufs sorgfältigen und vollständigen Beobachtungen ein möglichst grofses Zutrauen eingeräumt werden. Folglich verdient von beiden Ausgleichungen diejenige den Vorzug, welche den Originalbeobachtungen die gröfsere Präcision zuschreibt. Wenn daher $\frac{H}{h} > 1$ ist, so verdient die zweite Ausgleichung den Vorzug vor der ersten, d. h. die Annahme, dafs die Formel völlig genau sey, ist wahrscheinlicher als die Annahme des Gegentheils. Findet sich $\frac{H}{h} < 1$, so ist man zum umgekehrten Schlusse genöthigt. Es versteht sich von selbst, wie diese Betrachtung sich modificirt, wenn man statt der Gröfsen $H$ und $h$ ihre wahrscheinlichen Gränzen einführt.

Im gegenwärtigen Falle lagen nicht die Resultate der unmittelbaren Messungen selbst, sondern nur die aus ihnen berechneten wahrscheinlichsten Werthe der Indices und Wellenlängen vor; über die wahrscheinlichen Fehler der letztern ist nichts mitgetheilt. Es mufste hiernach von der Methode der kleinsten Quadrate gänzlich Abstand genommen werden, da selbst in dem Falle, wo man die Indices und Wellenlängen wie unmittelbar gemessene Größen behandeln wollte, schon aus Gründen der Homogenität die ihnen beizulegenden Gewichte, oder die zu letztern umgekehrt proportionalen wahrscheinlichen Fehler bekannt seyn müfsten.

Ich habe daher ein anderes Ausgleichungsverfahren angewandt, welches sich durch die Bequemlichkeit der numerischen Rechnung empfiehlt, und durch die Kleinheit der von ihm verlangten Abweichungen die Ueberzeugung gewährt, dafs die Anwendung der obigen Grundsätze wegen der Güte der Beobachtungen und der Genauigkeit der Formel gerechtfertigt, und überdiefs ohne beschwerliche Rechnungen durchzuführen seyn würde. Dasselbe besteht in folgendem.

Es seyen $n_1, \lambda_1;\ n_2, \lambda_2; \ldots$ die aus Beobachtungen bestimmten Werthe der Elemente einer Reihe von Strahlen, wobei $n$ den Brechungsindex, $\lambda$ die entsprechende Wellenlänge bedeutet.

Zu jedem dieser Elemente füge ich eine nach folgenden Bedingungen gewählte Correction:

*A.* Die corrigirten Elemente

$$N = n + \Delta n,\ \Lambda = \lambda + \Delta\lambda$$

genügen in aller Strenge der Dispersionsformel

$$\left(\frac{N_0}{N}\right)^4 - 2\left(\frac{N_0}{N}\right)^2 + \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right)^2 = 0. \tag{1}$$

*B.* Die Summe der Quadrate aller logarithmischen Correctionen

$$V = \left[\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2\right]$$

wird durch passende Wahl der mit Rücksicht auf $\Lambda$ noch verfügbaren Correctionen und der Constanten $N_0$, $\Lambda_0$ zu einem Minimum.

Ich setze nun voraus, dafs man sich vorläufig angenäherte Werthe $n_0$, $\lambda_0$ von $N_0$, $\Lambda_0$ verschafft habe, was erfahrungsgemäfs durch directe Berechnung derselben aus den Elementen zweier Strahlen (s. u. Form. 9) erreicht wird, und setze

$$\frac{N_i - n_i}{n_i} = x_i;\ \frac{\Lambda_i - \lambda_i}{\lambda_i} = y_i \text{ für } i = 0, 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

dann kann man mit Bestimmtheit darauf zählen, dafs alle gesuchten Correctionen sich auf höhere Decimalstellen werfen, mithin die Quadrate und Producte aller $x$ und $y$ wegen ihrer Kleinheit aufser Betracht fallen.

Schafft man nun aus (1) mittelst der Gleichung (2) alle corrigirten Elemente weg, und setzt von hier ab

$$\frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_i}\right)^2}{2\left(\frac{n_0}{n_i}\right)^2\left[\left(\frac{n_0}{n_i}\right)^2 - 1\right]} = r_i,\quad \frac{2 - \left(\frac{n_0}{n_i}\right)^2}{2\left[\left(\frac{n_0}{n_i}\right)^2 - 1\right]} = t_i, \tag{3}$$

so erhält man nach Beseitigung aller nicht linearen Theile die für alle Strahlen gültige Gleichung

$$\frac{r-t}{2} + x_0 - x + r(y_0 - y) = 0, \tag{4}$$

während $V$ in

$$V = [x^2 + y^2]$$

übergeht, wo jedoch das Glied $x_0^2 + y_0^2$ fehlt.

Bezeichnet man daher durch $\mu_1$, $\mu_2$, ... vorläufig unbestimmte Factoren, so erhält man als Minimumsbedingungen zu den Gleichungen (4) noch die folgenden

$$x = \mu,\ y = r\mu \text{ für jeden Strahl,}$$



ferner

$$[\mu] = 0,\ [r\mu] = 0,$$

welche letztern sich auch in die Form

$$[x] = 0,\ [y] = 0 \tag{5}$$

setzen lassen.

Aus den beiden ersten und aus (4) ergiebt sich

$$x = \frac{\frac{1}{2}(r-t) + x_0 + ry_0}{1 + r^2},\ y = rx. \tag{6}$$

Setzt man daher

$$\left[\frac{1}{1+r^2}\right] = A,\quad \left[\frac{r}{1+r^2}\right] = B,\quad \left[\frac{rr}{1+r^2}\right] = C$$
$$\left[\frac{t}{1+r^2}\right] = \beta,\quad \left[\frac{rt}{1+r^2}\right] = \gamma \tag{7}$$

so folgt aus (5)

$$Ax_0 + By_0 + \tfrac{1}{2}(B - \beta) = 0$$
$$Bx_0 + Cy_0 + \tfrac{1}{2}(C - \gamma) = 0,$$

also schliefslich

$$x_0 = \frac{B(C-\gamma) - C(B-\beta)}{2(AC - B^2)},\quad y_0 = \frac{B(B-\beta) - A(C-\gamma)}{2(AC-B^2)}. \tag{8}$$

Aus (3) zieht man noch die Gleichung

$$r - t = \frac{\left(\frac{n_0}{n}\right)^4 - 2\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}{2\left(\frac{n_0}{n}\right)^2\left[\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 - 1\right]},$$

welche zu einer für die numerische Rechnung wichtigen Folgerung führt. Da nämlich alle Elementenpaare $n$, $\lambda$ der Gleichung (1) annähernd genügen, so ist hier der Zähler sehr klein, während der Nenner in den bisher beobachteten Theilen des Spectrums stets über 3 bleibt. Folglich ist $r_i$ von $t_i$, also auch jedes Glied von $B$ und $C$ nur sehr wenig vom entsprechenden Gliede von $\beta$ und $\gamma$ verschieden, was beim Aufschlagen der Tafeln sehr zu Statten kommt. Sodann aber ergiebt sich hieraus, dafs in den Zählern von $x_0$ und $y_0$ aus den Minuenden und Subtrahenden die ersten Ziffern sich grofsentheils wegheben, und aufser den durch die Ungenauigkeit der Tafeln beeinträchtigten Endziffern nur wenige zuverlässige Stellen übrig bleiben. Diefs hat zur Folge, dafs man, obgleich alle $x$ und $y$ höchstens auf zwei Stellen genau zu berechnen sind, bei der Berechnung von $r, t, B, \beta, C, \gamma$ siebenstellige Tafeln mit aller Sorgfalt anzuwenden hat.

Die Constanten $n_0$, $\lambda_0$ werden am zweckmäfsigsten aus den Elementen $n_1$, $\lambda_1$; $n_2$, $\lambda_2$ zweier Strahlen nach den Formeln

$$n_0^2 = 2n_1^2 n_2^2 \frac{\frac{n_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{n_1^2}{\lambda_1^2}}{\frac{n_2^4}{\lambda_2^2} - \frac{n_1^4}{\lambda_1^2}}, \quad \lambda_0^2 = \frac{2n_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{\frac{n_2^4}{\lambda_2^2} - \frac{n_1^4}{\lambda_1^2}} \qquad (9)$$

berechnet, wobei jedoch die beiden Strahlen nicht zu nahe bei einander gewählt werden dürfen. Vernachlässigt man diese Vorsichtsmafsregel, so bleiben, namentlich bei schwach dispergirenden Substanzen in den drei Differenzen, aus denen $n_0^2$ und $\lambda_0^2$ sich zusammensetzen, so wenig fehlerfreie Decimalstellen übrig, dafs besonders die Bestimmung $\lambda_0^2$ höchst unsicher wird.

Ich würde dieses Umstandes nicht erwähnen, wenn er nicht bei der üblichen Prüfung der von Cauchy selbst gegebenen Formel durch die fortlaufende Proportion

$$n_2 - n_1 : \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} = \ldots$$

gänzlich übersehen würde, und gerade bei schwach dispergirenden Substanzen, auf welche diese Formel sich anwenden läfst, am meisten berücksichtigt werden mufs.

Die folgende Tafel enthält die Resultate meiner Rechnung. Zur Vergleichung habe ich noch die Indices nach Rudberg und die Wellenlängen nach Esselbach hinzugefügt, bemerke aber in Betreff der letztern, dafs Hr. Mascart durch $M, N, \ldots$ bis $S$ nicht die nämlichen Streifen wie Esselbach bezeichnet zu haben scheint.

Zu den Streifen $A, S, T$ hat Hr. Mascart nur die Indices bestimmt. Ich habe die zugehörigen Wellenlängen, die sich unter $A$ finden, nach meiner Formel berechnet. Die entsprechenden Werthe, welche man unter den Wellenlängen nach Esselbach findet, hat Hr. Helmholtz (Berl. Monatsber. 1855, S. 760) angegeben. Die Berechnung von Wellenlängen aus den zugehörigen Indices ist sehr mifslich, namentlich wenn jene sehr grofs sind, da in diesem Falle in der Wirklichkeit, also auch nach jeder der Wirklichkeit sich anschliefsenden Formel unmerkbare Aenderungen der Indices schon beträchtliche Aenderungen der Wellenlängen nach sich ziehen. Nimmt man als Fehlergränze des Index von $A$ nur fünf Einheiten der letzten Stelle, so wird die Fehlergränze der zugehörigen Wellenlänge nach der Formel $= 0{,}0184$.

Die Constanten $N_0$ und $\Lambda_0$ sind bis in die letzte Stelle genau, wovon ich mich durch eine zweite Ausgleichung mit Zugrundelegung der durch die erste corrigirten Constanten $n_0$, $\lambda_0$ überzeugt habe. Sie stimmen mit den Werthen

$$n_0 = 2{,}3185 \text{ und } \lambda_0 = 0{,}1748_{\frac{1}{1000}}{}^{\mathrm{mm}} = 0{,}06548_{\frac{1}{10000}} \text{ Par. Zoll,}$$



welche ich in meiner ersten Arbeit aus den Rudberg'schen Indices $B, G$ abgeleitet habe, sehr nahe überein.

Die Correctionen der Indices sind unbedeutend, im Ultravioletten sogar auffallend gering, während sie im gewöhnlichen Spectrum die Abweichungen der Rudberg'schen Indices von denen des Hrn. Mascart durchgängig übersteigen.

Die Correctionen der Wellenlängen sind sämmtlich so klein, dafs die ausgeglichenen Wellenlängen mit den beobachteten völlig identisch werden, wenn man sie auf gleiche Stellenzahl reducirt. Diese Erscheinung erklärt sich der Hauptsache nach dadurch, dafs im wirklichen, wie in dem nach der Formel (1) entworfenen Spectrum die Wellenlängen sich von einem Strahl zum andern weit stärker ändern, als die Indices. Da hiernach kleine Aenderungen der Wellenlängen auf die Indices keinen merklichen Einfluß haben, so würde man, um die Correctionen der Indices auf Kosten der Wellenlängen hinabzudrücken, letztere unverhältnifsmäfsig grofsen Aenderungen unterwerfen müssen, was durch obige und ähnliche Minimumsbedingungen verhütet wird.

| Dunkle Str. (Mascart) | Indices $N_0 = 2{,}318832$, $\frac{N_0}{\sqrt{2}} = 1{,}63966$. Rudberg $\nu$ | $10^4(\nu - n)$ | Mascart $n$ | $10^4(N - n)$ | Ausgeglichen $N$ | $10^4 x$ | Wellenlängen in $\frac{1}{1000}$ mm, $\Lambda_0 = 0{,}1746670$. Dunkle Streifen und Wellenlängen nach Esselbach | Mascart $\lambda$ | $10^5(\Lambda - \lambda)$ | Ausgeglichen $\Lambda$ | $10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | | | 1,6501 3 | | | | *A* 0,7617 | | | 0,7815 | |
| *B* | 1,65308 | + 1,2 | 1,6529 6 | + 3,5 | 1,6533 1 | + 2,1 | *B* 0,6874 | 0,68667 | + 0,25 | 0,68667 25 | + 3,6 |
| *C* | 1,65452 | + 0,6 | 1,6544 6 | + 2,0 | 1,6546 6 | + 1,2 | *C* 0,6564 | 0,65607 | + 0,15 | 0,65607 15 | + 2,3 |
| *D* | 1,65850 | + 0,4 | 1,6584 6 | — 0,3 | 1,6584 3 | — 0,2 | *D* 0,5886 | 0,5888 | — 0,02 | 0,58879 98 | — 0,4 |
| *E* | 1,66360 | + 0,6 | 1,6635 4 | — 1,8 | 1,6633 6 | — 1,1 | *E* 0,5260 | 0,52678 | — 0,17 | 0,52677 83 | — 3,0 |
| *b* | | | 1,6644 6 | — 1,0 | 1,6643 6 | — 0,6 | | 0,51655 | — 0,10 | 0,51654 90 | — 2,0 |
| *F* | 1,66802 | + 0,9 | 1,6679 3 | — 1,7 | 1,6677 6 | — 1,0 | *F* 0,4845 | 0,48596 | — 0,18 | 0,48595 82 | — 3,6 |
| *G* | 1,67617 | — 0,3 | 1,6762 0 | — 1,5 | 1,6760 5 | — 0,9 | *G* 0,4287 | 0,43075 | — 0,18 | 0,43074 82 | — 4,1 |
| *H* | 1,68330 | 0,0 | 1,6833 0 | — 0,9 | 1,6832 1 | — 0,5 | *H* 0,3929 | 0,39672 | — 0,12 | 0,39671 88 | — 3,1 |
| *L* | | | 1,6870 6 | — 0,4 | 1,6870 2 | — 0,2 | *L* 0,3791 | 0,38190 | — 0,05 | 0,38189 95 | — 1,3 |
| *M* | | | 1,6896 6 | — 0,5 | 1,6896 1 | — 0,3 | *M* 0,3657 | 0,37288 | — 0,07 | 0,37287 93 | — 2,0 |
| *N* | | | 1,6944 1 | — 0,3 | 1,6943 8 | — 0,2 | *N* 0,3498 | 0,35802 | — 0,05 | 0,35801 95 | — 1,4 |
| *O* | | | 1,6995 5 | + 0,1 | 1,6995 6 | + 0,05 | | 0,34401 | + 0,02 | 0,34401 02 | + 0,4 |
| *P* | | | 1,7027 6 | + 1,1 | 1,7028 7 | + 0,6 | *O* 0,3360 | 0,33602 | + 0,18 | 0,33602 18 | + 5,5 |
| *Q* | | | 1,7061 3 | + 1,0 | 1,7062 3 | + 0,6 | *P* 0,3290 | 0,32856 | + 0,17 | 0,32856 17 | + 5,2 |
| *R* | | | 1,7115 5 | + 0,7 | 1,7116 2 | + 0,4 | *Q* 0,3232 | 0,31775 | + 0,13 | 0,31775 13 | + 4,2 |
| *S* | | | 1,7158 0 | | | | *R* 0,3091 | | | 0,3103 | |
| *T* | | | 1,7193 9 | | | | 0,3047 | | | 0,3043 | |

# X.

## Zur Theorie der einwerthigen Potentiale.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 64, 1865, S. 321—368.)

Die Eigenschaften der Potentiale von Massen, welche körperliche Räume oder Oberflächen stetig erfüllen, sind seit den Untersuchungen von Gauss und Green und den Entdeckungen Dirichlets so vollständig festgestellt, dass eine auf diese speciellen Functionen beschränkte Untersuchung fast ausschliesslich auf die Reproduction bekannter Resultate angewiesen sein würde.

Die eben bezeichneten Potentiale sind aber weder die einzigen, welche in der Lehre von den nach dem Newton'schen Gesetze wirkenden Anziehungskräften in Betracht zu ziehen sind, noch von ausschliesslicher Bedeutung für die Anwendungen. Vielmehr müssen zu ihnen, wie aus der Theorie des Magnetismus und der linearen elektrischen Ströme bekannt ist, noch andere gefügt werden, bei denen die Anziehung von einzelnen Punkten oder den kleinsten Theilen einer Linie aus wirkt, und von denen namentlich die auf den letzten Fall bezüglichen, in hinlänglicher Allgemeinheit aufgefasst, jenen an Wichtigkeit kaum nachstehen dürften.

Man erkennt indessen sehr leicht, wenn man nur den Unterschied zwischen dem Potential eines schweren Massenpunktes und demjenigen eines magnetischen Elementes beachtet, dass die Eintheilung der Potentiale nach fingirten Massenvertheilungen keinen Ueberblick über den Umfang dieser Functionengattung gewähren kann, ganz abgesehen von den Schwierigkeiten, welche sich darbieten, wenn man die charakteristischen Eigenschaften solcher Potentiale an ihren, durch die vorausgesetzte Massenvertheilung bedingten Ausdrücken selbst aufsucht.

Um diese Fragen zu erledigen, bin ich daher in der folgenden Arbeit nicht von gegebenen Ausdrücken der einzelnen Potentiale ausgegangen, sondern von einer Definition derselben, durch welche die allen einwerthigen Potentialen ausserhalb ihrer Unstetigkeitsstellen gemeinsamen Eigenschaften (art. I) und ihre ausnahmslose Darstellbarkeit durch convergente Rechnungsoperationen (art. VI.) zu Merkmalen der ganzen Gattung gemacht werden. Von diesem Standpunkte aus besteht das Ziel der Untersuchung darin, die ganze Functionengattung nach Massgabe der mit den genannten Bedingungen verträglichen Unstetigkeiten in ihre charakteristischen Unterabtheilungen zu zerfällen, und die analytischen Formen zu entwickeln, durch welche die Functionen jeder Abtheilung dargestellt werden.

Es kann als ein Vortheil dieser Behandlungsweise bezeichnet werden, dass sie bei jeder Gattung von Potentialen die wesentlichen Eigenschaften derselben ihrem vollen Umfange nach hervortreten läfst. In der That findet sich unter den bekannten Sätzen über die Potentiale von Körpermassen und Flächenschichten (art. V. c., IX. m., XII. q.), auf welche die folgende Untersuchung ihrer Natur nach ebenfalls führen musste, keiner, der nicht von Beschränkungen befreit worden ist, die sich zwar beim directen Nachweise dieser Sätze an den Ausdrücken jener Potentiale durch doppelte und dreifache Integrale nicht vermeiden lassen, aber nur aus den hierbei verfügbaren Hülfsmitteln entspringen.

Die Gleichungen III. (*O.*) und IV. (3.) sind schon mehrfach aufgestellt, aber noch nicht zu den Folgerungen benutzt worden, die hier aus ihnen gezogen werden, wozu allerdings in den schwierigern Fällen die Hülfssätze *d.* und *e.* des art. VII. erforderlich sind. Mit Rücksicht auf die Wichtigkeit dieser und ähnlicher Formeln durfte eine vollständige Begründung der erstern nicht übergangen werden. Um in den art. VII., XI., XII. den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, habe ich den Beweis einiger dort benutzter Hülfssätze an den Schluss der Abhandlung in besondere Noten verlegt.

## I.

Wir bezeichnen durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $\mathfrak{o}$ im unbegrenzten Raume $\mathfrak{R}$, und durch $\varrho'$ den in ihm stattfindenden Werth einer gegebenen einwerthigen Function, welche, mit Ausnahme von isolirten Punkten, Linien und Flächen, nirgendwo unbestimmt oder unstetig ist, und nur in isolirten Punkten $\mathfrak{q}$ unendlich wird. In der Nähe der letztern beschränken wir das Anwachsen von $\varrho'$ durch die Bedingung, dass das Product

$$\mathfrak{r}^k \varrho',$$

wenn $\mathfrak{r}$ die Entfernung von $\mathfrak{o}$ bis $\mathfrak{q}$ bedeutet, bei jeder Richtung von $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{r}$ zugleich verschwindet, sobald für $k$ ein passender, von 1 verschiedener positiver echter Bruch gesetzt wird. Endlich setzen wir,



wenigstens vorläufig, fest, dass $\varrho'$ ausserhalb eines gegebenen Raumes $\mathfrak{R}'$, der keine unendlich weit vom Coordinatenanfange entfernten Punkte enthält, gleich Null sein soll.

Unter diesen Voraussetzungen untersuchen wir diejenigen Functionen $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$\mathfrak{A}$. Im ganzen Raume $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme gegebener Punkte $\mathfrak{p}$, Linien $\mathfrak{l}$ und Flächen $\mathfrak{f}$, sind $\mathfrak{v}$ und seine ersten Derivirten einwerthig, endlich und stetig.

$\mathfrak{B}$. Ausserhalb der in $\mathfrak{A}$. bezeichneten Stellen besteht zwischen den zweiten Derivirten von $\mathfrak{v}$ die Gleichung

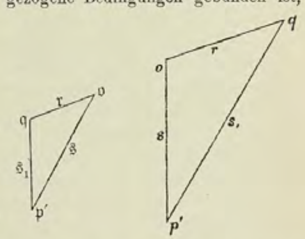
$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{z}^2} = -4\pi\varrho'.$$

$\mathfrak{C}$. Den Fall, wo eine erste Derivirte von $\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{v}$ selbst an einer Fläche entlang unendlich oder unbestimmt sind, schliessen wir aus.

Nähere Bestimmungen über die Zahl und Beschaffenheit der Ausnahmestellen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{f}$ und das Verhalten von $\mathfrak{v}$ an denselben bleiben der späteren Untersuchung vorbehalten.

## II.

Durch conforme Umbildung des Raumes $\mathfrak{R}$ ist man zunächst im Stande, jede Function $\mathfrak{v}$ auf eine andere Function $v$ von derselben Art zurückzuführen, die an so enge gezogene Bedingungen gebunden ist, dass sie einer weitern Behandlung zugänglich wird.




Neben dem unbegrenzten Raume $\mathfrak{R}$ denke man sich einen zweiten, ihm in den kleinsten Theilen ähnlichen Raum $R$, und in demselben drei rechtwinklige Axen; die Coordinaten eines $R$ angehörigen Punktes $o$ in Bezug auf diese Axen sollen $x$, $y$, $z$ heissen. Es seien ferner $\mathfrak{p}'$ und $p'$ zwei in $\mathfrak{R}$ und $R$ nach Belieben angenommene Punkte, deren Coordinaten, jedesmal mit Bezug auf die dem betreffenden Raume angehörigen Axen, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und $l$, $m$, $n$ sind. Bezeichnet man nun die Entfernungen $\mathfrak{o}\mathfrak{p}'$ und $op'$ durch $\mathfrak{s}$ und $s$, so wird nach einem Satze des Herrn Liouville[1])

1) Journ. de M. Liouville, XV. Wegen des Ueberganges von $\mathfrak{v}$ und $\varrho'$ zu $v$ und $\varrho$ und der sich hieran knüpfenden Relationen vergl. die wichtige Abhandlung des Herrn Liouville im nämlichen Journal XII. 286—288.

die verlangte Beziehung zwischen den entsprechenden Punkten $\mathfrak{o}$ und $o$ beider Räume auf die allgemeinste Weise durch die Gleichungen

$$(1.)\quad \mathfrak{x}-\mathfrak{l}=\left(\frac{a}{s}\right)^2(x-l),\quad \mathfrak{y}-\mathfrak{m}=\left(\frac{a}{s}\right)^2(y-m),\quad \mathfrak{z}-\mathfrak{n}=\left(\frac{a}{s}\right)^2(z-n)$$

oder die aus ihnen folgenden

$$\mathfrak{s}s=a^2,\quad \frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{l}}{\mathfrak{s}}=\frac{x-l}{s},\quad \frac{\mathfrak{y}-\mathfrak{m}}{\mathfrak{s}}=\frac{y-m}{s},\quad \frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{n}}{\mathfrak{s}}=\frac{z-n}{s}$$

dargestellt, vorausgesetzt, dass die Aehnlichkeit entsprechender Figuren bei beliebiger Grösse derselben und imaginäre Beziehungen ausgeschlossen werden.

Die letzten Gleichungen lassen die geometrische Beziehung zwischen den entsprechenden Punkten beider Räume unmittelbar erkennen, wenn man einen dieser Räume solange verschiebt und dreht, bis die Punkte $\mathfrak{p}'$ und $p'$ und die Richtungen der wachsenden Coordinaten zusammenfallen, wobei der Fall, dass dies letztere nicht angeht, ausser Acht gelassen werden kann. In der That geht dann die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte $\mathfrak{o}$, $o$ stets durch den Punkt $(\mathfrak{p}', p')$, und ihre von diesem Punkte ausgehenden Radienvectoren $\mathfrak{s}$, $s$ werden zu einander umgekehrt proportional.

Nennt man $\mathfrak{p}'$ und $p'$ die Mittelpunkte der beiden Räume $\mathfrak{R}$ und $R$, so folgt aus der Gleichung $\mathfrak{s}s=a^2$, dass im Mittelpunkte des einen Raumes die unendlich entfernten Theile des andern abgebildet sind. Ausserhalb $\mathfrak{p}'$ sind $x, y, z$ einwerthige, endliche und stetige Functionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, und umgekehrt letztere ausserhalb $p'$ in gleicher Weise mit jenen verbunden. Folglich gehört ausserhalb der Mittelpunkte zu jedem Punkte des einen Raumes ein einziger, ihn abbildender Punkt im andern Raume; wenn die Entfernung eines Punktes vom zugehörigen Mittelpunkte messbar, d. i. weder unendlich gross, noch unendlich klein ist, so gilt dasselbe von seiner Abbildung im andern Raume; endlich werden zusammenhängende Oerter in der Abbildung nicht getrennt, unterbrochene nicht zusammengefügt.

Gleichzeitig mit dieser Umbildung von $\mathfrak{R}$ führe ich zwei auf $R$ bezogene Functionen $v$ und $\varrho$ ein (vergl. die oben erwähnte Abhandlung von Liouville), welche die conformen Umbildungen von $\mathfrak{v}$ und $\varrho'$ heissen mögen, und mit Rücksicht auf die in (1.) festgestellte Beziehung zwischen den Variabeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und $x, y, z$ durch die Gleichungen

$$(2.)\qquad v=\frac{\mathfrak{s}}{a}\mathfrak{v},\quad \varrho=\left(\frac{\mathfrak{s}}{a}\right)^5\varrho',$$

oder die folgenden

$$v=\frac{a}{s}\mathfrak{v},\quad \varrho=\left(\frac{a}{s}\right)^5\varrho'$$

bestimmt sind.



Dies festgestellt, gehen wir dazu über, die im vorigen art. für $\varrho'$ und $\mathfrak{v}$ gestellten Bedingungen auf $\varrho$ und $v$ zu übertragen, und wählen zu diesem Zwecke den Mittelpunkt $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{R}$ ausserhalb $\mathfrak{R}'$ und sämmtlicher Ausnahmestellen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{f}$.

Dann kann die Abbildung $R'$ von $\mathfrak{R}'$, in welcher allein $\varrho$ von Null verschieden ist, weder den Mittelpunkt $p'$ von $R$ enthalten, noch bis ins Unendliche reichen, ersteres, weil $\mathfrak{R}'$ nicht bis ins Unendliche reicht, letzteres, weil $\mathfrak{p}'$ nicht im Innern von $\mathfrak{R}'$ liegt. Da hiernach $\varrho=\left(\frac{\mathfrak{s}}{a}\right)^5\varrho'$ im Punkte $p'$, ungeachtet des dort ins Unendliche wachsenden Factors $\mathfrak{s}^5$ gleich Null bleibt, so kann es nur mit $\varrho'$ zugleich unbestimmt, unstetig oder unendlich werden, ersteres also nur in isolirten Punkten, Linien und Flächen, letzteres nur in solchen Punkten $q$, welche den Punkten $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{R}$ entsprechen.

Ist $\mathfrak{r}$ die Entfernung von $q$ bis $o$, und bedeuten $\mathfrak{s}_1$, $s_1$ die Abstände der Punkte $\mathfrak{q}$, $q$ von den zugehörigen Mittelpunkten, so folgt aus der, durch die Gleichungen (1.) und die Proportion $\mathfrak{s}:s_1=\mathfrak{s}_1:s$ leicht zu beweisenden Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathfrak{p}'\mathfrak{o}\mathfrak{q}$, $p'qo$, $r=\frac{a^2}{\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1}\mathfrak{r}$, also

$$r^k\varrho=\left(\frac{\mathfrak{s}}{a}\right)^5\left(\frac{a^2}{\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1}\right)^k\cdot\mathfrak{r}^k\varrho'.$$

Lässt man $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{q}$, als auch $o$ mit $q$ zusammenfallen, so verschwindet auf der rechten Seite der Factor $\mathfrak{r}^k\varrho'$ nach art. I., der andere Factor wird $=\left(\frac{\mathfrak{s}_1}{a}\right)^{5-2k}$, also nicht unendlich gross. Folglich verschwindet $r^k\varrho$ unabhängig von der Richtung von $r$, sobald $o$ mit $q$ zusammenfällt. Die für $\varrho$ eintretenden Bedingungen sind also von derselben Art, wie die in art. I. für $\varrho'$ gestellten.

Anders verhält es sich mit $v$; die über die Lage von $\mathfrak{p}'$ getroffene Bestimmung führt eine wesentliche Beschränkung in der Lage der Ausnahmestellen von $v$ und eine Zerlegung von $\mathfrak{A}$. in zwei Bedingungen herbei, von denen die eine sich auf das Innere von $R$, die andere sich auf die unendlich entfernten Theile dieses Raumes bezieht.

Da die Ausnahmestellen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{v}$ ausserhalb $\mathfrak{p}'$ liegen, so liegen ihre Abbildungen $p$, $l$, $f$ sämmtlich in einem endlichen Bereiche von $p'$, derart, dass man sie mit $p'$ in eine Fläche $S$ einschliessen kann, die keine unendlich weit von einander und von dem willkürlich zu wählenden Coordinatenanfange entfernten Punkte enthält. In $p$, $l$, $f$ verlieren $v$ und seine ersten Derivirten der Definition gemäss die Eigenschaft, zugleich einwerthig, endlich und stetig zu sein; dasselbe gilt im Allgemeinen auch noch vom Punkte $p'$, aber von keinem anderen Punkte des Raumes $R$.

In der That liefert jeder im Unendlichen liegende Punkt $\mathfrak{p}$ des Raumes $\mathfrak{R}$ einen mit $p'$ zusammenfallenden Punkt $p$; jeder Linie $\mathfrak{l}$ und jeder Fläche $\mathfrak{f}$, die in $\mathfrak{R}$ bis ins Unendliche reicht, entspricht eine Linie $l$ und eine Fläche $f$, die sich in $p'$ schliesst. Enthält $\mathfrak{R}$ keine Ausnahmestelle von $\mathfrak{v}$ im Unendlichen, so wird $p'$ gleichwohl eine Ausnahmestelle von $v$ werden, sobald $\mathfrak{s}\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{s}$ zugleich über alle Grenzen wächst.

Bezeichnet man durch $\alpha, \beta, \gamma$ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung von $p'$ nach $o$ mit den Axen der $x, y, z$ bildet, so wird z. B. $\alpha = \frac{x-l}{s}$, und man erhält aus (1.) und (2.)

$$\frac{\partial sv}{\partial x} = a\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} - \frac{a^3}{s^2}\left[\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}} - 2\alpha\left(\alpha\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}} + \beta\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{y}} + \gamma\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{z}}\right)\right].$$

Nennt man daher die festen Werthe, welche $a^3\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}}$, $a^3\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{y}}$, $a^3\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{z}}$ in $\mathfrak{p}'$ erlangen, $P$, $Q$ und $R$, und lässt nun $o$ in der durch $\alpha, \beta, \gamma$ bestimmten Richtung ins Unendliche rücken, wobei dann schließlich $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{p}'$ zusammenfällt, so folgt der Satz, dass $s^2\frac{\partial sv}{\partial x}$ gegen die feste Grenze $P - 2\alpha(\alpha P + \beta Q + \gamma R)$ convergirt. Aehnliches gilt von $s^2\frac{\partial sv}{\partial y}$ und $s^2\frac{\partial sv}{\partial z}$.

Da aber hiernach $s^2\frac{\partial sv}{\partial x}$ bei unbegrenzter Zunahme von $s$ nicht über alle Grenzen wächst, so muss $s\frac{\partial sv}{\partial x} = s^2\frac{\partial v}{\partial x} + sv\alpha$ an der Grenze verschwinden. Bezeichnet man daher durch $M$ den festen Werth, den $a\mathfrak{v} = sv$ in $\mathfrak{p}'$ erlangt, so folgt unter derselben Voraussetzung, wie vorhin, $\lim sv = M$, $\lim s^2\frac{\partial v}{\partial x} = -M\alpha$; und man sieht leicht, dass man hier $s$ durch die Entfernung $r$ zwischen $o$ und einem beliebigen, in endlicher Entfernung von $p'$ liegenden Punkte $O$ ersetzen kann, weil der Quotient $\frac{s}{r}$ im Unendlichen $= 1$ wird. Folglich haben wir den Satz:

Sind $\alpha, \beta, \gamma$ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung von einem festen Punkte $O$ nach $o$ mit den Axen bildet, und ist $r$ die Entfernung beider Punkte, so gelten für die von $O$ unendlich weit entfernten Punkte $o$ des Raumes die asymptotischen Ausdrücke:

$$v = \frac{M}{r},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{M\alpha}{r^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{M\beta}{r^2},\quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{M\gamma}{r^2}.$$

Wir ziehen endlich aus dem Vorstehenden noch die für unsere spätern Zwecke ausreichende Folgerung, dass $v$, $r\frac{\partial v}{\partial x}$, $r\frac{\partial v}{\partial y}$ und $r\frac{\partial v}{\partial z}$ im Unendlichen verschwinden, ohne vorher ihre Stetigkeit zu unterbrechen.



Schliesslich wird (vergl. die Abhandlung von Liouville)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{z}^2} = \left(\frac{s}{a}\right)^5\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right],$$

also, wenn man den rechts in Klammern stehenden Ausdruck wie üblich durch $\Delta v$ bezeichnet, $\Delta v = -4\pi\left(\frac{a}{s}\right)^5\varrho' = -4\pi\varrho$.

Die Functionen $v$ genügen daher den folgenden Bedingungen:

A. $v$ und seine ersten Derivirten sind, mit Ausnahme gewisser Stellen, im ganzen Raume $R$ einwerthig, endlich und stetig.

*B.* Ausserhalb derselben Stellen besteht zwischen den zweiten Derivirten von $v$ die Gleichung

$$\Delta v = -4\pi\varrho.$$

*C.* Eine Ausnahme von diesen Bedingungen wird nur in bestimmten Punkten $p$, Linien $l$ und Flächen $f$ gestattet. Diese *Ausnahmestellen* sind so im Raume vertheilt, dass man sie in eine Fläche $S$ einschliessen kann, welche keine unendlich weit vom Coordinatenanfange entfernten Punkte enthält.

Den Fall, wo $v$ oder eine erste Derivirte von $v$ an einer Fläche entlang unendlich oder unbestimmt wird, schliessen wir aus.

*D.* Ist $r$ die Entfernung von $o$ bis zu irgend einem festen Punkte $O$, so convergiren

$$v,\quad r\frac{\partial v}{\partial x},\quad r\frac{\partial v}{\partial y},\quad r\frac{\partial v}{\partial z}$$

ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen Null, wenn $o$, ohne $S$ zu überschreiten, in beliebiger Richtung ins Unendliche rückt.

*E.* Die für $\varrho$ gültigen Bedingungen sind die nämlichen, wie die in art. I für $\varrho'$ gestellten.

Folglich ist $v$ eine Function derselben Art, wie $\mathfrak{v}$, jedoch von speciellem Charakter, da alle Ausnahmestellen ins Endliche gerückt sind, und für die unendlich entfernten Theile des Raumes die Dirichlet-sche Bedingung *D.* eingetreten ist. Wir haben daher den Satz, dass jede Function $\mathfrak{v}$ sich aus einer solchen speciellen Function $v$ durch conforme Umbildung des Raumes $R$ und der Functionen $v$ und $\varrho$ ergiebt.

Die Functionen $v$ unterscheiden sich von einander 1) durch die Zahl und Beschaffenheit ihrer Ausnahmestellen und 2) durch die Gesetze, nach denen sie und ihre ersten Derivirten dort anwachsen oder unstetig werden. Was den ersten Punkt betrifft, so werden wir im Folgenden stets die Grenzfälle ausschliessen, wo die Anzahl der Punkte $p$, die Länge einer Linie $l$ oder der Inhalt einer Fläche $f$ unendlich gross ist. Diese Beschränkung der Aufgabe ist keine wesentliche, und hat nur den Zweck, von der Untersuchung der Hauptfälle Convergenzfragen fern zu halten, welche bloss auf den Uebergang zu den Grenzfällen Bezug haben, und in jedem einzelnen Falle besonders zu erledigen sind (art. XIII.).

## III.

Wir denken uns einen zusammenhängenden Theil $V$ des unbegrenzten Raumes, in dessen Innerem sich Höhlungen befinden, welche sämmtliche Ausnahmestellen von $v$ enthalten, und nennen $S$ die Gesammtoberfläche dieser Höhlungen, $S_\infty$ die äussere Oberfläche von $V$, so dass die vollständige Begrenzung dieses Raumes durch die Flächen $S$ und $S_\infty$ gebildet wird. Die Elemente der drei Gebiete $V$, $S_\infty$ und $S$ werden wir durch $\partial V$, $\partial S_\infty$ und $\partial S$, ihre Coordinaten ohne Unterschied durch $x$, $y$, $z$, dagegen die Coordinaten eines in $V$ festgewählten Punktes $O$ durch $X$, $Y$, $Z$ bezeichnen.

Um diesen Punkt $O$ als Centrum legen wir eine Kugel $K$, deren Halbmesser $c$ wir so klein wählen, dass alle Punkte von $K$ ins Innere von $V$ fallen, und eine zweite Kugel $K_1$, deren Halbmesser die Längeneinheit ist. Ist alsdann $\partial\sigma$ ein Oberflächenelement von $K_1$, und sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$ seine Coordinaten in Bezug auf drei durch $O$ in gleicher Richtung mit den ursprünglichen gelegte Axen, so sind in Bezug auf dieselben Axen $c\xi$, $c\eta$, $c\zeta$ die Coordinaten seiner Centralprojection auf $K$, und ihr Inhalt $c^2\partial\sigma$ ist das Oberflächenelement der letztern.

Wir errichten endlich über $\partial S$ und $\partial S_\infty$ Normalen, die erstere nach $V$ hinein, die andere aus diesem Raume hinaus, und nennen die ersten Elemente dieser Normalen $\partial p$ und $\partial p_\infty$, so dass z. B. $\frac{\partial\omega}{\partial p}$ den Werth bedeutet, welchen die Derivirte von $\omega$ nach der über $\partial S$ errichteten Normale in ihrem Anfangspunkte auf $\partial S$ hat.

1. Multiplicirt man die Gleichung $\Delta v = -4\pi\varrho$ mit $-\frac{\partial V}{4\pi r}$, wo $r$ die Entfernung von $O$ bis zum Elemente $\partial V$ ist, und integrirt über alle Elemente von $V$ mit Ausschluss der in $K$ enthaltenen, so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung $\frac{1}{r}\Delta v = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) + \cdots$ und mit Rücksicht darauf, dass der Ausdruck $\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}$ und die beiden ähnlich gebildeten während der Integration einwerthig, endlich und stetig bleiben nach dem Greenschen Satze



$$\int'\frac{\varrho\,\partial V}{r} = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p_\infty} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_\infty}\right)\partial S_\infty + \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}\right)\partial S$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial c} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)c^2\partial\sigma,$$

wo zur Linken der Accent am Integralzeichen bedeutet, dass das Volumen der Kugel $K$ vom Integrationsraume ausgeschlossen ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial S = (S), \qquad \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_\infty} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p_\infty}\right)\partial S_\infty = (S_\infty),$$

so folgt hieraus:

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(c\frac{\partial v}{\partial c} + v\right)\partial\sigma = \int'\frac{\varrho\,\partial V}{r} + (S) - (S_\infty).$$

In dieser Gleichung lassen wir $c$ verschwinden, und werden beweisen, dass unter diesen Umständen beide Seiten gegen feste Grenzen convergiren, und auch beim Übergange zur Grenze $c = 0$ nicht aufhören, einander gleich zu sein.

Das Integral $\frac{1}{4\pi}\int c\frac{\partial v}{\partial c}\partial\sigma$ ist numerisch kleiner als das Product aus $\frac{1}{4\pi}\int c\,\partial\sigma = c$ und dem grössten numerischen Werthe, den

$$\frac{\partial v}{\partial c} = \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z}$$

auf $K$ erlangt. Da aber $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ den unveränderlichen Werth 1 hat, so kann dieses Product wegen $A$. durch Verkleinerung von $c$ unter jede Grenze gebracht werden, folglich convergirt $\frac{1}{4\pi}\int c\frac{\partial v}{\partial c}\partial\sigma$ mit abnehmendem $c$ ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen Null.

Nennt man ferner $v_0$ den Werth, den die einwerthige Function $v$ in $O$ erlangt, und ersetzt das Integral $\frac{1}{4\pi}\int v\,\partial\sigma$ durch $v_0 + \frac{1}{4\pi}\int(v - v_0)\partial\sigma$, so convergirt der zweite Summand wegen der Stetigkeit von $v$ mit abnehmendem $c$ stetig gegen Null.

Folglich convergirt bei unbegrenzter Abnahme von $c$ die linke Seite obiger Gleichung ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen die feste Grenze $v_0$.

Auf der rechten Seite ändert sich während dessen nur das erste Glied, und zwar ist der Zuwachs, den sie erlangt, wenn $c$ in den kleineren Werth $b$ übergeht, gleich $\int_b^c r\partial r\int\varrho\,\partial\sigma$. Solange $O$ in messbarer Entfernung von allen Punkten $q$ liegt, in denen $\varrho$ unendlich wird, verschwindet dieses Integral offenbar mit $c$ zugleich; ist dagegen $O$ selbst einer dieser Punkte, so setze man dasselbe, bei passender Wahl des von 1 verschiedenen positiven echten Bruches $k$ gleich $\int_b^c r^{1-k}\partial r\int r^k\varrho\,\partial\sigma$. Dann kann man $c$ so klein wählen, dass $r^k\varrho$ während der Integration numerisch kleiner als eine beliebig gegebene Zahl $A$ bleibt, also das Integral, abgesehen vom Zeichen, kleiner als

$$\int_b^c r^{1-k}\partial r\int A\,\partial\sigma = 4\pi A\cdot\frac{c^{2-k}-b^{2-k}}{2-k}$$

wird. Folglich convergirt dieses Integral auch im gegenwärtigen Falle mit $c$ und dem kleineren $b$ zugleich stetig gegen Null.

Man kann daher $c$ so klein wählen, dass jeder Zuwachs, den die rechte Seite obiger Gleichung durch fernere Verkleinerung von $c$ noch erhalten kann, unter eine beliebige Grenze gedrückt wird. Da aber die rechte Seite, solange $c$ von Null verschieden ist, einen völlig bestimmten, endlichen Werth hat, so folgt hieraus zunächst, dass sie bei unbegrenzter Abnahme von $c$ ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen eine feste Grenze convergirt, welche dadurch erhalten wird, dass man in ihrem ersten Gliede die Integration über das ganze Volumen $V$ ausdehnt.

Da endlich die obige Gleichung für ein beliebig kleines $c$ besteht, solange nur $c$ von Null verschieden ist, und die letzten Aenderungen, welche ihre beiden Seiten erleiden, wenn man $c$ vollends verschwinden lässt, selbst verschwindend klein, also nicht um messbare Grössen von einander verschieden sind, so kann die Gleichheit auch durch den Uebergang zur Grenze $c=0$ nicht aufgehoben werden, und es ergiebt sich nun folgende, bei jeder Lage von $O$ im Innern von $V$ gültige Gleichung:

$$(O.)\qquad v_0=\int\frac{\varrho\,\partial V}{r}+(S)-(S_\infty).$$

2. Hätte man die Gleichung $\Delta v=-4\pi\varrho$ mit $\frac{x-X}{4\pi r^3}\partial V=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial X}\partial V$ multiplicirt, und die Integration im früheren Umfange ausgeführt, so würde sich

$$\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{x-X}{r^3}\frac{\partial v}{\partial c}-v\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{x-X}{r^3}\right)\right]c^2\partial\sigma={\int}'\varrho\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial X}\partial V+(S)'-(S_\infty)'$$



ergeben haben, wo $(S)'$ und $(S_\infty)'$ die Integrale bedeuten, welche man aus den vorhin durch $(S)$ und $(S_\infty)$ bezeichneten erhält, wenn man $\frac{1}{r}$ durch $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial X}$ ersetzt, d. h. unter dem Integralzeichen nach $X$ differentiirt.

Im Elemente $c^2\partial\sigma$ wird nach der oben eingeführten Bezeichnung $x-X=c\xi$, $\frac{x-X}{r^3}=\frac{\xi}{c^2}$, also ist die linke Seite gleich

$$\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{\xi}{c^2}\frac{\partial v}{\partial c}-v\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\xi}{c^2}\right)\right]c^2\partial\sigma=\int\frac{\partial(v\xi c^2)}{4\pi c^2\partial c}\cdot\partial\sigma.$$

Bezeichnet man aber durch $\partial K$ das Volumenelement von $K$, so ist wegen der Stetigkeit von $v$ $\int\frac{\partial v}{\partial x}\partial K=\int v\xi c^2\partial\sigma$. Lässt man hier $c$ um $\partial c$ wachsen, und hebt in den Änderungen beider Seiten mit $4\pi c^2\partial c$ weg, so folgt

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial v}{\partial x}\partial\sigma=\frac{\partial\int v\xi c^2\partial\sigma}{4\pi c^2\partial c}=\int\frac{\partial(v\xi c^2)}{4\pi c^2\partial c}\cdot\partial\sigma.$$

da $\frac{\partial(v\xi c^2)}{\partial c}$ während der Integration weder unendlich noch unbestimmt wird. Also haben wir

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial v}{\partial x}\partial\sigma={\int}'\varrho\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\partial V+(S)'-(S_\infty)'.$$

Die linke Seite ist ein Mittel aus den Werthen, welche $\frac{\partial v}{\partial x}$ auf $K$ erlangt, und geht daher wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial v}{\partial x}$ mit abnehmendem $c$ stetig in den festen Werth $\frac{\partial v_0}{\partial X}$ über, welchen diese Derivirte in $O$ hat.

Können wir daher beweisen, dass auch die rechte Seite mit abnehmendem $c$ ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen eine feste Grenze convergirt, so folgt, dass die Gleichung auch noch an der Grenze $c=0$ besteht.

Lässt man $c$ in den kleineren Werth $b$ übergehen, so erhält die rechte Seite den Zuwachs

$$\int_b^c\partial r\int\varrho\xi\,\partial\sigma=\int_b^c\frac{\partial r}{r^k}\int r^k\varrho\xi\,\partial\sigma.$$

Solange $O$ in messbarer Entfernung von jedem Punkte $q$ liegt, verschwindet dies mit $c$ zugleich; fällt $O$ mit einem Punkte $q$ zusammen, so wird für ein hinlänglich kleines $c$ während der Integration $\int r^k\varrho\xi\,\partial\sigma$ numerisch kleiner als $\int A\,\partial\sigma=4\pi A$, weil $\xi$ zwischen $-1$ und $1$ liegt;

folglich wird jener Zuwachs kleiner als $4\pi A \int_b^c \frac{\partial r}{r^k} = 4\pi A \frac{c^{1-k} - b^{1-k}}{1-k}$, und verschwindet daher auch jetzt noch, wenn $c$ und das kleinere $b$ in Null übergehen. Daraus folgt:

$$(O'.) \qquad \frac{\partial v_0}{\partial X} = \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V + (S)' - (S_\infty)'.$$

Zugleich ist der Nachweis geliefert, dass das erste Glied zur Rechten einen völlig bestimmten, endlichen Werth hat, was von den beiden andern Gliedern ohne Weiteres einleuchtet.

## IV.

Lässt man die Fläche $S_\infty$ sich immer mehr erweitern, so dass sie fortwährend neue Teile des äusseren Raumes in ihr Inneres aufnimmt, ohne bereits überschrittene Theile auszuscheiden, so kann sich auf der rechten Seite der Gleichung

$$(O.) \qquad v_0 = \int \frac{\varrho \partial V}{r} + (S) - (S_\infty)$$

das erste Glied nur solange ändern, als es ausserhalb $S_\infty$ noch Stellen giebt, in denen $\varrho$ von Null verschiedene Werthe hat. Von dem Augenblicke an, wo $S_\infty$ diese Stellen sämmtlich überschritten hat, wird das Integral $\int \frac{\varrho \partial V}{r}$ von der ferneren Umgestaltung der Fläche $S_\infty$ unabhängig.

Dasselbe tritt einmal ein, wenn $\varrho$ zwar im ganzen Raume Werthe hat, jedoch so verläuft, dass das über den ganzen Raum erstreckte Integral $\int \frac{\varrho \partial V}{r}$ von der Anordnung der Integration unabhängig convergirt. In der That kann man unter dieser Voraussetzung dem Integrationsraume, ohne dabei Begrenzungstheile ins Unendliche zu verlegen, einen solchen Umfang ertheilen, dass keine fernere Erweiterung desselben den Werth des Integrals um eine beliebig kleine, gegebene Grösse zu ändern mehr im Stande ist.

Für den Fall, dass $\varrho$ nicht bloss in einem begrenzten Raume $R'$ von Null verschiedene Werthe hat, setzen wir diese Bedingung als erfüllt voraus.

Lässt man daher alle Punkte der Fläche $S_\infty$ ins Unendliche rücken, wobei nach den einmal gestellten Bedingungen in $V$ keine Ausnahmestelle von $v$ aufgenommen werden kann, so wird vorstehende Gleichung eine, für alle ausserhalb $S$ liegenden Punkte $O$ gültige, convergente



Darstellung von $v_0$ stets und auch nur dann liefern, wenn $(S_\infty)$ ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen eine feste Grenze convergirt, die von dem Gesetze, nach welchem die Umgestaltung von $S_\infty$ erfolgt, unabhängig ist.

Die Fläche $S_\infty$ schliessen wir in eine Fläche $S'_\infty$ ein, deren Element wir $\partial S'_\infty$ nennen; das erste Element der über $\partial S'_\infty$ aus dem von beiden Flächen begrenzten Raume hinaus errichteten Normale soll durch $\partial p'_\infty$ bezeichnet werden. Sei $w$ eine zweite, nebst ihren ersten Derivirten in diesem Raume einwerthige, endliche und stetige Function, welche der Gleichung $\varDelta w = 0$ genügt. Integrirt man nun die Gleichung $v \varDelta w - w \varDelta v = \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \cdots = 4\pi \varrho w$ über den zwischen $S_\infty$ und $S'_\infty$ liegenden Raum $W$, so folgt, wenn mit $4\pi$ weggehoben wird

$$(3.) \quad \frac{1}{4\pi}\int \left(v \frac{\partial w}{\partial p'_\infty} - w \frac{\partial v}{\partial p'_\infty}\right) \partial S'_\infty = \frac{1}{4\pi}\int \left(v \frac{\partial w}{\partial p_\infty} - w \frac{\partial v}{\partial p_\infty}\right) \partial S_\infty + \int \varrho w \partial W.$$

Setzt man hier $w = \frac{1}{r}$, und lässt nun die Flächen $S_\infty$ und $S'_\infty$ unabhängig von einander ins Unendliche rücken, so convergirt der oben gestellten Bedingung zufolge $\int \varrho w \partial W$ stetig gegen Null. Wenn daher gleichzeitig die linke Seite gegen eine feste Grenze convergirt, so ist dies auch die Grenze des ersten Gliedes zur Rechten, nämlich von $(S_\infty)$. Nimmt man aber für $S'_\infty$ eine um $O$ als Centrum mit dem Radius $r$ beschriebene Kugel, so wird die linke Seite

$$= \frac{1}{4\pi}\int \left(v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) r^2 \partial \sigma = -\frac{1}{4\pi}\int \left[v + \xi \cdot r \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \cdot r \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \cdot r \frac{\partial v}{\partial z}\right] \partial \sigma.$$

Dieselbe ist also numerisch kleiner als die Summe aus den grössten numerischen Werthen, welche $v$, $r\frac{\partial v}{\partial x}$, $r\frac{\partial v}{\partial y}$, $r\frac{\partial v}{\partial z}$ auf $S'_\infty$ annehmen. Da jeder von diesen vier Summanden wegen $D.$ durch Vergrösserung von $r$ unter jede Grenze gebracht werden kann, so convergirt mit wachsendem $r$ die linke Seite obiger Gleichung stetig gegen Null; dies ist also auch, nach dem vorhin Bemerkten, der Werth, in welchen $(S_\infty)$ stetig übergeht, wenn alle Punkte der Fläche $S_\infty$ ins Unendliche rücken. Wir haben demnach den Satz:

*a.* Sobald $v$ im ganzen, die Fläche $S$ umgebenden Raume $V$ den Bedingungen $A.$, $B.$, $D.$ genügt, und das Integral $\int \frac{\varrho \partial V}{r}$ unabhängig von der Anordnung der Integration convergirt, ist in jedem Punkte $O$ von $V$

$$(4.) \qquad v_0 = \int \frac{\varrho \partial V}{r} + (S).$$

## V.

Die Untersuchung der Gleichung

$$(O'.)\qquad \frac{\partial v_0}{\partial X} = \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V + (S)' - (S_\infty)'$$

erledigt sich auf demselben Wege. Setzt man in (3.) $w = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X}$ und nimmt für $S_\infty$ wieder eine Kugel vom Radius $r$ und dem Centrum $O$, so wird auf ihr $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} = \frac{\xi}{r^2}$, also folgt aus (3.)

$$(S_\infty)' = \frac{1}{4\pi}\int \left[v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\xi}{r^2}\right) - \frac{\xi}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r}\right] r^2 \partial\sigma - \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial W$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int \left[\frac{2v}{r} + \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z}\right] \xi \partial\sigma - \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial W.$$

Auf der rechten Seite convergirt das erste Glied wegen *D.* mit wachsendem $r$ notwendig gegen Null; wenn daher auch das zweite Glied bei unausgesetzter Erweiterung der Flächen $S_\infty$ und $S'_\infty$ verschwindet, so gilt dasselbe von $(S_\infty)'$. Daraus folgt der Satz:

*b.* Sobald $v$ im Raume $V$ ausserhalb $S$ den Bedingungen *A.*, *B.*, *D.* genügt, und das Integral $\int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V$ unabhängig von der Anordnung der Integration convergirt, ist in jedem Punkte $O$ von $V$

$$\frac{\partial v_0}{\partial X} = \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V + (S)'.$$

Durch Verbindung dieses Satzes mit dem vorigen folgt weiter:

*c.* Wenn $v$ im Raume ausserhalb $S$ den Bedingungen *A.*, *B.*, *D.* genügt, und die beiden Integrale $\int \frac{\varrho \partial V}{r}$, $\int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V$ unabhängig von der Anordnung der Integration convergiren, erhält man $\frac{\partial v_0}{\partial X}$ aus dem Ausdrucke von $v_0$ durch Differentiiren unter dem Integralzeichen.

Durch diese Sätze ist die Frage nach den ersten Derivirten von $v$ vollständig auf die Ermittelung der Ausdrücke zurückgeführt, durch welche $v$ selbst dargestellt wird, weshalb wir uns im Folgenden nur noch mit den letzteren zu beschäftigen haben.



## VI.

Durch die Gleichung (4.) wird jede den Bedingungen *A.*, *B.*, *D.* genügende Function $v$ im ganzen, ausserhalb $S$ liegenden Raume $V$ durch convergente Rechnungsoperationen dargestellt.

Da aber $S$ aus den Oberflächen $S_p$, $S_l$, etc. der einzelnen Höhlungen zusammengesetzt ist, in denen die Ausnahmestellen $p$, $l$, etc. von $v$ eingeschlossen sind, so ist in dieser Gleichung unter

$$(S) = \frac{1}{4\pi}\int \left(v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial S$$

eine Summe von Integralen $(S_p)$, $(S_l)$ etc. derselben Form zu verstehen, von denen jedes sich über eine der Oberflächen $S_p$, $S_l$ etc. erstreckt.

Lässt man nun die Oberfläche einer dieser Höhlungen, etwa $S_p$ sich immer mehr um die entsprechende Ausnahmestelle $p$ zusammenziehen, so kann dies in (4.) den Werth der rechten Seite nicht ändern, solange $v$ den Bedingungen des art. II. genügt. Da aber gleichzeitig wegen der für $\varrho$ gestellten Bedingungen $\int \frac{\varrho \partial V}{r}$ bei dieser Erweiterung seines Integrationsraumes gegen eine feste Grenze convergirt, und ausser diesem und $(S_p)$ alle übrigen Glieder der rechten Seite von (4.) ungeändert bleiben, so convergirt auch $(S_p)$ gegen eine feste Grenze.

Folglich müssen umgekehrt die an den Ausnahmestellen von $v$ eintretenden Bedingungen für $v$ und $\frac{\partial v}{\partial p}$ so gewählt werden, dass bei fortgesetzter Verengerung der Integrationsflächen $S_p$, $S_l$, etc. jedes der Integrale $(S_p)$, $(S_l)$, etc. für sich gegen eine feste Grenze convergirt. Ist dies erreicht, so wird $v_0$ durch die Gleichung (4.) an der Grenze im ganzen Raume *ausserhalb seiner Ausnahmestellen* dargestellt.

Damit ist jedoch der Fall nicht ausgeschlossen, dass der hiermit gewonnene *Ausdruck* der Function $v$ *in einer Ausnahmestelle* Werthe angiebt, welche von dem *der Function* an dieser Stelle vorgeschriebenen Verlaufe unabhängig sind.

Man weiss, dass solche lokale Abweichungen einer Function von einem sie sonst darstellenden Ausdrucke in manchen Fällen nur von der Form des letztern abhängen und durch eine Aenderung derselben gehoben werden können.

Wir schliessen nun alle Verstösse gegen die Bedingungen *A.* und *B.* aus, deren die Functionen $v$ wegen *C.* fähig sind, ohne dass die oben gefundenen, im ganzen übrigen Raume gültigen Ausdrücke dieser Functionen an ihnen Theil nehmen können.

Die Functionen, welche nun noch übrig bleiben, und die aus ihnen durch conforme Umbildung folgenden Functionen $\mathfrak{v}$ (art. II.) begreifen wir unter dem Namen der *einwerthigen Potentiale.*

Die folgenden Sätze beziehen sich ausschliesslich auf die den Bedingungen *C.* und *D.* genügenden Potentiale, welche wir zur Unterscheidung von den übrigen wie bisher durch $v$ bezeichnen.

## VII.

Hülfssatz. Sei $R$ eine positive Variable und $f(R)$ eine Function von $R$, die nebst ihrer ersten Derivirten $f'(R)$ *oberhalb* $R=0$ bis zu einem gegebenen Werthe $R=a$ hin weder unbestimmt, noch unendlich, noch unstetig wird, während ihr Verhalten *im Punkte* $R=0$ *selbst* noch dahin gestellt bleiben mag.

Dann besteht zwischen dem Verlaufe der beiden Functionen $f(R)$ und $f'(R)$ in unendlicher Nähe von $R=0$ ein Zusammenhang, in Betreff dessen wir folgende Sätze hervorheben.

*d.* Wenn für ein positives $k$ und jede unbegrenzte Abnahme von $R$ $R^{k+1}f'(R)$ ohne Unstetigkeit gegen eine feste Grenze $A$ convergirt, so convergirt $R^k f(R)$ stetig gegen die Grenze $-\frac{A}{k}$; wächst unter derselben Voraussetzung $R^{k+1}f'(R)$ über alle Grenzen, so ist dasselbe mit $R^k f(R)$ der Fall.

*e.* Wenn bei jeder unbegrenzten Abnahme von $R$ $Rf'(R)$ ohne Unstetigkeit gegen eine feste Grenze $A$ convergirt, so hat auch $\frac{f(R)}{\log R}$ den Werth $A$ zur Grenze; wächst unter derselben Voraussetzung $Rf'(R)$ über alle Grenzen, so findet dasselbe mit $\frac{f(R)}{\log R}$ statt.

*Beweis.* Ist $0 < R_0 < R_2 < a$, so folgt

$$f(R_2)-f(R_0)=\int_{R_0}^{R_2} R^{k+1}f'(R)\cdot\frac{\partial R}{R^{k+1}},$$

da $f(R)$ zwischen $R_0$ und $R_2$ weder unbestimmt, noch unendlich, noch unstetig ist. Da ferner zwischen denselben Grenzen $R^{k+1}f'(R)$ stetig und $\frac{1}{R^{k+1}}$ von Zeichenwechseln frei ist, so kann man, wie klein auch $R_0$ sein mag, zum Mindesten auf eine Art $R_1$ zwischen $R_0$ und $R_2$ so wählen, dass die rechte Seite

$$=R_1^{k+1}f'(R_1)\int_{R_0}^{R_2}\frac{\partial R}{R^{k+1}}$$

wird.



(*d.*) Solange nun $k>0$ ist, folgt hieraus

$$kR_0^k f(R_2)-kR_0^k f(R_0)=R_1^{k+1}f'(R_1)\left[1-\left(\frac{R_0}{R_2}\right)^k\right].$$

In dieser Gleichung lassen wir $R_0$ und $R_2$ abnehmen, jedoch so, dass wenn $a$ und $b$ zwei ohne Ende abnehmende Zahlen bedeuten, $R_0^k$ fortwährend unterhalb der kleinsten von den ebenfalls abnehmenden Zahlen $\frac{a}{f(R_2)}$ und $bR_2^k$ bleibt. Dann werden $R_0^k f(R_2)$ und $\left(\frac{R_0}{R_2}\right)^k$ Bruchtheile von $a$ und $b$, ersteres etwa $=\theta a$, letzteres $=\theta_1 b$, und $R_1$ in stetiger oder sprungweiser Abnahme der Null immer näher gebracht. Es folgt

$$k\theta a-kR_0^k f(R_0)=R_1^{k+1}f'(R_1)[1-\theta_1 b],$$

wo man sich die Grössen $a$, $b$, $R_2$, $R_0$ und $R_1$ in der angegebenen Abnahme zu denken hat.

Wenn daher $-kR_0^k f(R_0)$ bei abnehmendem $R_0$ über alle Grenzen wächst, oder gegen eine feste Grenze convergirt, so kann man die Abnahme von $R_1$ nach einem solchen Gesetze erfolgen lassen, dass $R_1^{k+1}f'(R_1)$ in gleicher Weise verläuft.

Wenn aber umgekehrt $R_1^{k+1}f'(R_1)$ unter allen Umständen zuletzt unendlich gross wird, und nicht etwa bloss dann, wenn $R_1$ längs einer besonders ausgewählten Werthenreihe abnimmt, so muss auch $-kR_0^k f(R_0)$ bei verschwindendem $R_0$ unendlich gross werden; convergirt $R_1^{k+1}f'(R_1)$ bei jeder unbegrenzten Abnahme von $R_1$ gegen eine feste Grenze $A$, so hat auch $-kR_0^k f(R_0)$ diesen Werth $A$ zur Grenze, w. z. b. w.

(*e.*) Für $k=0$ folgt ebenso

$$\frac{f(R_0)}{\log R_0}-\frac{f(R_2)}{\log R_0}=R_1 f'(R_1)\left[1-\frac{\log R_2}{\log R_0}\right].$$

Lässt man auch hier $R_0$ und $R_2$ verschwinden, jedoch so, dass $\log R_0$ numerisch oberhalb der grössten von den wachsenden Zahlen $\frac{\log R_2}{b}$, $\frac{f(R_2)}{a}$ bleibt, so bedarf es zum Beweise von *e.* nur einer Wiederholung der eben angewandten Schlüsse.

Diese beiden Sätze lassen sich verallgemeinern, jedoch ohne Hinzufügung neuer Bedingungen, durch welche ihre Brauchbarkeit beeinträchtigt wird, nicht umkehren.

*f.* Lehrsatz. Ein einwerthiges Potential $v$ und seine ersten Derivirten können in einem von jeder andern Ausnahmestelle getrennten Punkte $m$ weder unendlich, noch unbestimmt, noch unstetig sein, sobald die Producte

$$R^2\frac{\partial v}{\partial x},\quad R^2\frac{\partial v}{\partial y},\quad R^2\frac{\partial v}{\partial z}$$

bei jeder unbegrenzten Abnahme der Entfernung $R$ vom Punkte $x, y, z$ bis zum festen Punkte $m$ stetig gegen Null convergiren.

Beweis. Fände das Gegentheil statt, so würde $m$ zu den Ausnahmestellen von $v$ gehören. Wir scheiden demnach aus dem Raume $V$ einen abnehmenden Raum $V_m$ aus, welcher $m$ enthält, und nennen $S_1$ die um die übrigen Ausnahmestellen von $v$ gelegte Fläche.

Nun sei $w$ ein zweites einwerthiges Potential, welches sich von $v$ nur dadurch unterscheidet, dass es im Innern von $V_m$ den Bedingungen $A.$ und $B.$ genügt, während es ausserhalb $V_m$ genau denselben Bedingungen wie $v$ unterworfen ist, derart dass, wenn $v$ auch noch in $V_m$ den Bedingungen $A.$ und $B.$ genügte, in $V$ überall $v = w$ wäre.

Dann reicht es zum Beweise des Satzes hin, zu zeigen, dass der Unterschied der beiden Ausdrücke, durch welche $v$ und $w$ im Raume $V$ dargestellt werden, ausserhalb $V_m$ überall $= 0$ ist, und dass dies gilt, wie klein auch $V_m$ sein mag.

Ist dies nämlich bewiesen, so führt die Annahme, es sei im abnehmenden Raume $V_m$ selbst $v$ von $w$ verschieden, zur Folgerung, dass die Function $v$ im Punkte $m$ einen Verstoss gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ begeht, dessen ihr, für den ganzen übrigen Raum $V$ gültiger Ausdruck $w$ unfähig ist. Es würde also $v$ keine der Definition des einwerthigen Potentials genügende Function sein, und nur dadurch in eine solche verwandelt werden können, dass man in $V_m$ ihren Verlauf den Bedingungen $A.$ und $B.$ gemäss abänderte.

Aus (4.) ergiebt sich zunächst unter der Voraussetzung, dass $O$ ausserhalb $S_1$ liegt,

$$w_0 = \int \frac{\varrho \partial V}{r} + (S_1),$$

wo $(S_1)$ das früher durch $(S)$ bezeichnete Integral, ausgedehnt über die Fläche $S_1$, bedeutet.

Der Ausdruck für $v_0$ ergiebt sich für den Fall, dass $O$ ausserhalb $S_1$ und $V_m$ liegt, durch folgende Betrachtung. Man lege um $m$ als Centrum eine Kugel $K$ vom Radius $R$, welche den abnehmenden Raum $V_m$ völlig einschliesst, und wähle $R$ so klein, dass $O$ und $S_1$ ausserhalb des Volumens $V_K$ dieser Kugel liegen. Dann kann man für die Function $v$ die Fläche $S$ zusammensetzen aus $S_1$ und der Kugelfläche $K$. Dies festgestellt, ist der von $S_1$ herrührende Theil der Voraussetzung gemäss in den Ausdrücken für $v_0$ und $w_0$ der nämliche. Dasselbe gilt von dem über $V$ nach Ausschluss von $V_K$ erstreckten Integrale von



$\frac{\varrho \partial V}{r}$. Scheidet man daher zur Bildung von $v_0$ aus $V$ das Volumen $V_K$ aus, und fügt zu $S_1$ die Oberfläche dieses Volumens, so wird

$$v_0 = w_0 - \int \frac{\varrho \partial V_K}{r} + \frac{1}{4\pi} \int \left( v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial R} \right) R^2 \partial \sigma.$$

Da der Voraussetzung gemäss $R^2 \frac{\partial v}{\partial R} = \xi \cdot R^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \cdot R^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \cdot R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$, also nach *d.* auch $Rv$ und $R^2 v$ mit $R$ zugleich verschwindet, und $r$ während der Integration von Null verschieden bleibt, so convergirt das über die Oberfläche von $V_K$ erstreckte Integral mit $R$ zugleich stetig gegen Null; dasselbe beweist man von dem Integrale $\int \frac{\varrho \partial V_K}{r}$ auf dem in art. III. eingeschlagenen Wege.

Solange also die Entfernung von $O$ bis $m$ von Null verschieden ist, wie klein dieselbe übrigens auch sein mag, ist $v_0 = w_0$, w. z. b. w.

Dieser Beweis kommt darauf hinaus, zu zeigen, dass die Bedingung, $v$ oder seine ersten Derivirten sollen in $m$ unendlich, unstetig oder unbestimmt werden, jedoch so, dass $R^2 \frac{\partial v}{\partial x}$, $R^2 \frac{\partial v}{\partial y}$ und $R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$ mit $R$ zugleich stetig verschwinden, auf denselben Ausdruck für $v_0$ führt, wie die Bedingung, dass $A.$ und $B.$ in $m$ gar nicht verletzt werden. Solange also ein in $m$ stattfindender Verstoss gegen diese Bedingungen sich innerhalb der im Lehrsatze verlangten Grenzen hält, ist er ein solcher, dessen jeder in (4.) enthaltener Ausdruck unfähig ist, und den wir daher bei der Definition des einwerthigen Potentials ausschliessen.

*g.* Lehrsatz. Ein einwerthiges Potential $v$ und seine ersten Derivirten können auf einer Linie von endlicher Länge, die von jeder anderen Ausnahmestelle getrennt ist, weder unendlich, noch unbestimmt, noch unstetig sein, sobald die Producte

$$R \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R \frac{\partial v}{\partial z}$$

bei jeder unbegrenzten Abnahme der kürzesten Entfernung $R$ vom Punkte $x, y, z$ bis zur festen Linie stetig gegen Null convergiren.

Beweis. Was auch an dieser Linie $l$ stattfinden mag, so erhält man doch stets einen Ausdruck für die Werthe, welche $v$ ausserhalb $l$ und $S$ erlangt, wenn man $l$ mittelst einer Fläche $S_l$ aus $V$ ausschliesst und wie eine Ausnahmestelle behandelt. Nennt man das von $S_l$ eingeschlossene Volumen $V_l$, so wird durch den Ausschluss von $V_l$ die

Gleichung (4.) nur so weit geändert, dass auf ihrer rechten Seite noch der Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial S_\iota-\int\frac{\varrho\,\partial V_\iota}{r}$$

hinzutritt; derselbe ist, wie aus (3.) leicht folgt, von der Gestalt der Fläche $S_\iota$ unabhängig.

Bei unbegrenzter Verengerung von $S_\iota$ convergiren beide Theile dieses Ausdruckes stetig gegen Null.

Für den zweiten Theil ergiebt sich dies unmittelbar aus den über $\varrho$ und die Länge von $l$ gemachten Voraussetzungen. Um das Nämliche für den ersten Theil zu beweisen, nennen wir $R$ die kürzeste Entfernung von $\partial S_\iota$ bis zur Linie $l$, $(rp)$ den Winkel zwischen $r$ und $\partial p$, woraus $\frac{\partial r}{\partial p}=-\cos(rp)$ folgt, und setzen

$$\frac{R}{4\pi}\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(Rv\cdot\frac{\cos(rp)}{r^2}-\frac{1}{r}\cdot R\frac{\partial v}{\partial p}\right)=\omega,$$

wodurch derselbe die Form $\int\omega\frac{\partial S_\iota}{R}$ annimmt. Ist daher unter den absoluten Werthen, welche $\omega$ während der Integration erlangt, $\Omega$ der grösste, so ist dieser Theil numerisch kleiner als $\Omega\int\frac{\partial S_\iota}{R}$.

Lässt man aber alle Elemente $\partial S_\iota$ immer näher an $l$ heranrücken, so convergiren $R\frac{\partial v}{\partial x}$, $R\frac{\partial v}{\partial y}$, $R\frac{\partial v}{\partial z}$, also auch $R\frac{\partial v}{\partial p}$ und $R\frac{\partial v}{\partial R}$ stetig gegen Null. Dies ist nach *e.* nicht anders möglich, als dass zugleich $\frac{v}{\log R}$ und umsomehr $Rv=R\log R\cdot\frac{v}{\log R}$ verschwindet. Solange also $O$ nicht unendlich nahe an einem Punkte von $l$ liegt, convergiren mit $R$ zugleich alle Werthe von $\omega$, also auch $\Omega$ stetig gegen Null.

Ertheilt man der Fläche $S_\iota$ die Gestalt einer Röhre[1]), deren zu $l$ senkrechter Querschnitt ein Kreis vom constanten Radius $R$ ist, während sein Centrum auf $l$ liegt, und schliesst die Röhre durch zwei Halbkugeln, deren Mittelpunkte den Anfang und das Ende von $l$ bilden, so wird $\int\partial S_\iota=2\pi Rl+4\pi R^2$, wenn $l$ die Länge der Linie $l$ bedeutet; also wird bei verschwindenden Werthen von $R$ an der Grenze $\int\frac{\partial S_\iota}{R}=2\pi l$.

1) Note 2.



Folglich wird $\int\omega\frac{\partial S_\iota}{R}$ numerisch kleiner als das Product zweier Grössen $\Omega$ und $2\pi l$, von denen die erstere verschwindet, während die andere nicht über alle Grenzen wächst, woraus das Behauptete folgt.

Unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes wird also $v$ in jeder messbaren Entfernung von $l$ durch denselben Ausdruck dargestellt, den man erhält, wenn $v$ auch an $l$ entlang den Bedingungen *A.* und *B.* genügt. Folglich ist dieser Ausdruck, und mit ihm $v$ als einwerthiges Potential an $l$ entlang jeder mit den übrigen Voraussetzungen des Lehrsatzes vereinbaren Verletzung von *A.* und *B.* unfähig.

*h.* In art. II. *C.* ist der Fall ausgeschlossen worden, wo $v$ oder eine seiner ersten Derivirten in allen Punkten einer Fläche unendlich oder unbestimmt wird.

Der Grund hiervon ist folgender. Legt man um die Fläche $f$ eine von $S$ abgelöste Fläche $S_f$, so würde man unter der Voraussetzung, an $f$ entlang werde eine erste Derivirte von $v$ oder $v$ selbst unendlich oder unbestimmt, im Ausdrucke von $v_0$ ein Glied $(S_f)$ erhalten, in welchem die unter dem Integralzeichen stehende Function bei fortgesetzter Verengerung von $S_f$ schliesslich aufhört, die Integration zu gestatten.

Daraus darf man indessen nicht schliessen, dass es keine Ausdrücke gebe, welche ausserhalb der Fläche $f$ ein einwerthiges Potential $v$ darstellen, aber an ihr entlang unendlich oder unbestimmt werden. In den bis jetzt untersuchten Fällen muss diese Erscheinung jedoch als eine wirkliche Divergenz des Ausdrucks von $v$ bezeichnet werden, da sie bloss an der Form des Ausdruckes haftet, und durch Aenderung dieser Form beseitigt werden kann. Beispiele dieser Art erhält man, wenn man den aus art. V. *b.* folgenden Ausdrücken für die Derivirten der in art. XII. *r.* bezeichneten Potentiale auch noch an den Ausnahmestellen eine Bedeutung einräumt.

Aus den vorstehenden Lehrsätzen ergeben sich als Corollare die folgenden, in denen die jedesmalige Bedeutung von $R$ aus dem Vorhergehenden erhellt.

*i.* In einem Punkte oder einer Linie von endlicher Länge, die keiner anderen Ausnahmestelle angehören, kann ein einwerthiges Potential oder eine seiner ersten Derivirten niemals unstetig oder unbestimmt werden, ohne dass eine der letzteren unendlich wird.

*k.* Wird das einwerthige Potential $v$ oder eine seiner ersten Derivirten in dem, von jeder anderen Ausnahmestelle getrennten Punkte $m$ unendlich, so kann mindestens eine der Grössen $R^2\frac{\partial v}{\partial x}$, $R^2\frac{\partial v}{dy}$, $R^2\frac{\partial v}{\partial z}$ nicht bei jeder Richtung von $R$ mit $R$ zugleich verschwinden.

*l.* Wird das einwerthige Potential $v$ oder eine seiner ersten Derivirten in jedem Punkte einer Linie unendlich, die weder von unendlicher Länge ist, noch einer anderen Ausnahmestelle angehört, so kann mindestens eine der Grössen $R\frac{\partial v}{\partial x}$, $R\frac{\partial v}{\partial y}$, $R\frac{\partial v}{\partial z}$ nicht bei jeder unbegrenzten Abnahme von $R$ gegen Null convergiren.

### VIII.

Wenn wir daher die einwerthigen Potentiale $v$ nach ihren Verstössen gegen die Bedingungen *A.* und *B.* ordnen, so bleiben folgende Fälle übrig:

1. Diese Bedingungen werden im ganzen Raume erfüllt (art. IX.).
2. Ausnahmepunkte. Das Product aus einer der ersten Derivirten von $v$ und dem Quadrate der Entfernung $R$ von einem festen Punkte $p$ convergirt nicht bei jeder unbegrenzten Abnahme von $R$ gegen Null (art. X.).
3. Ausnahmelinien. Das Product aus einer der ersten Derivirten von $v$ und dem kürzesten Abstande $R$ von einer Linie $l$ convergirt nicht bei jeder unbegrenzten Abnahme von $R$ gegen Null (art. XI.).
4. Ausnahmeflächen. Beim Durchgange durch eine Fläche von endlicher Ausdehnung erleiden $v$ oder seine ersten Derivirten plötzliche Aenderungen (art. XII.).

Wenn die Fläche $S$ sich mit Ausscheidung aller Theile des Raumes, in denen die Bedingungen *A.* und *B.* erfüllt sind, immer enger an die Ausnahmestellen anschliesst, so zerfällt sie zuletzt in soviele von einander getrennte Theile, als Ausnahmestellen vorhanden sind. Jedem dieser Theile entspricht im Ausdrucke von $v$ ein Glied, welches einer der drei zuletzt genannten Gattungen von Potentialen angehört. Folglich kann jedes Potential $v$ durch eine Summe von Potentialen der vorhin bezeichneten vier Gattungen dargestellt werden.

### IX. Erster Fall.

*m.* Wenn den Bedingungen *A.* und *B.* im ganzen Raume, ohne Ausnahme irgend einer Stelle, Genüge geschieht, so ist in jedem Punkte $O$ des Raumes

$$v_0 = \int \frac{\varrho \, \partial V}{r},$$

sobald das Integral zur Rechten unabhängig von der Anordnung der Integration convergirt.

In der That fällt jetzt aus der Gleichung (4.) das Integral $(S)$ weg, da



es nicht mehr nötig ist, aus $V$ einzelne Theile wegen einer dort stattfindenden Verletzung von *A.* oder *B.* auszuscheiden.

Es folgt hieraus, dass man jedes einwerthige Potential $v$ durch Subtraction eines Integrals $\int \frac{\varrho \, \partial V}{r}$ in ein anderes, $w$, verwandeln kann, welches ausserhalb der Ausnahmestellen der Bedingung $\Delta w = 0$ genügt, während die an diesen Stellen selbst stattfindenden Verstösse gegen *A.* und *B.* ganz ungeändert bleiben.

### X. Zweiter Fall. Ausnahmepunkte.

Findet ein Verstoss gegen die Bedingungen *A.* und *B.* nur in einem einzigen Punkte $p$ statt, und ist $\varrho$ überall $= 0$, so wird ausserhalb der den Punkt $p$ einschliessenden Fläche $S$

$$v_0 = (S),$$

und dieser Ausdruck ist, wie man aus (3.) für $\varrho = 0$ und $w = \frac{1}{r}$ schliesst, von der Gestalt der Fläche $S$ unabhängig, solange sie $p$ ein-, $O$ ausschliesst.

Nimmt man daher für $S$ eine Kugel vom Halbmesser $R$ und dem Centrum $p$, so wird

$$v_0 = \frac{1}{4\pi} \int \left( v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial R} \right) R^2 \partial \sigma,$$

solange $R$ kleiner als die Strecke $Op$ ist, und die rechte Seite von $R$ unabhängig.

Soll in $p$ überhaupt eine Verletzung von *A.* und *B.* möglich sein, so darf sich dieselbe nicht innerhalb der in *f.* angegebenen Grenzen halten. Stellt man also die Bedingung, dass

$$R^\nu \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^\nu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^\nu \frac{\partial v}{\partial z}$$

bei abnehmendem $R$ nicht über alle Grenzen wachsen, dass dies aber bei jeder Verkleinerung von $\nu$ eintritt, so darf $\nu$ jedenfalls nicht kleiner als 2 sein. Nennt man die zunächst über $\nu$ liegende ganze Zahl $n + 3$, so kann $n$ nur eine der Zahlen 0, 1, 2, ... bedeuten, und es verschwinden

$$R^{n+3} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^{n+3} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^{n+3} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \text{und wegen } d. \text{ auch } R^{n+2} v$$

mit $R$ zugleich, während

$$R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial z}$$

über alle Grenzen wachsen. Es findet sich im Folgenden, dass $\nu = n + 2$ sein muss.

1. Nimmt man zunächst für $n$ seinen kleinsten Werth Null, und lässt $R$ abnehmen, so reducirt sich die rechte Seite der aus der obigen folgenden Gleichung

$$v_0 = -\frac{1}{4\pi r_p}\int R^2 \frac{\partial v}{\partial R}\partial\sigma + \frac{1}{4\pi}\int\left(R^2 v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} + \frac{(r-r_p)\,R^2}{r r_p}\frac{\partial v}{\partial R}\right)\partial\sigma,$$

in welcher $r_p$ die Entfernung von $O$ bis $p$ bedeutet, an der Grenze auf ihr erstes Glied, da $R^3 \frac{\partial v}{\partial R}$ der Voraussetzung gemäss, also nach $d.$ auch $R^2 v$ und, weil die Differenz der Dreiecksseiten $r$, $r_p$ kleiner als die dritte Seite $R$ ist, $(r - r_p)\,R^2 \frac{\partial v}{\partial R}$ verschwindet. Der Factor $\int \frac{\partial v}{\partial R}\cdot R^2 \partial\sigma = \int \frac{\partial v}{\partial p}\partial S$ muss nach dem Obigen einen von $R$ oder der Gestalt von $S$ unabhängigen Werth $-4\pi M$ haben.

*n.* Sobald im ganzen Raume $\varrho = 0$ ist, und ausserhalb des Punktes $p$ nirgendwo ein Verstoss gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ stattfindet, ferner bei unbegrenzter Annäherung an $p$

$$R^3 \frac{\partial v}{\partial x},\quad R^3 \frac{\partial v}{\partial y},\quad R^3 \frac{\partial v}{\partial z}$$

verschwinden, und

$$\int \frac{\partial v}{\partial p}\partial S = -4\pi M$$

ist, folgt

$$v_0 = \frac{M}{r_p}.$$

Bei der Anwendung dieses Satzes auf die Umformung von $\frac{1}{r}$ kann man ausser den Bedingungen des Satzes noch beliebige andere Eigenschaften dieser Function benutzen, da diese mit jenen nicht im Widerspruche stehen, sondern aus ihnen folgen.

2. Für den allgemeinen Fall, wo $n$ eine beliebige positive ganze Zahl ist, mag Folgendes genügen.

Entwickelt man $\frac{1}{r}$ mittelst des binomischen Satzes oder auf andere Weise nach steigenden Potenzen der Unterschiede $x - l$, $y - m$, $z - n$ zwischen den Coordinaten $x, y, z$ des Flächenelements $R^2\partial\sigma$ und den Coordinaten $l, m, n$ von $p$, so erhält man eine Reihe

$$\frac{1}{r} = \frac{T_0}{r_p} + \frac{T_1}{r_p^2} + \frac{T_2}{r_p^3} + \cdots,$$



in welcher $T_\mu$ ein homogenes Polynom $\mu^{\text{ten}}$ Grades jener Coordinatendifferenzen ist. Da die Nenner von $x, y, z$ unabhängig sind, so ist für jedes $\mu$ $\varDelta T_\mu = 0$, folglich, wie aus (3.) für $\varrho = 0$ und $w = T_\mu$ folgt, das Integral

$$M_\mu = \frac{1}{4\pi}\int\left[v\frac{\partial T_\mu}{\partial p} - T_\mu \frac{\partial v}{\partial p}\right]\partial S$$

von der Gestalt der Fläche $S$ unabhängig, solange sie den Punkt $p$ einschliesst. Sein Werth bleibt also ungeändert, wenn man für $S$ die im vorigen Falle construirte Kugel nimmt, und $R$ nach Belieben abnehmen lässt.

Vereinigt man nun in den Reihen für $\frac{1}{r}$ und $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R}$ alle Glieder, welche im Nenner eine höhere Potenz von $r_p$ enthalten, als die $(n+1)^{\text{te}}$, in einen Rest, so fallen bei fortgesetzter Verkleinerung von $R$ aus dem Ausdrucke für $v_0$ unter den obigen Voraussetzungen die von den Resten beider Reihen herrührenden Glieder weg, und es ergiebt sich

$$v_0 = \frac{M_0}{r_p} + \frac{M_1}{r_p^2} + \cdots + \frac{M_n}{r_p^{n+1}}.$$

Die Factoren $M_\mu$ sind beliebige Kugelfunctionen $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung der Winkel, welche die Richtung $pO$ bestimmen. Die in ihnen verfügbaren Constanten bestimmen sich bei den Anwendungen meistentheils aus den in der Regel bekannten Zeichenwechseln von $\frac{\partial v_0}{\partial r_p}$ und seinem Verhalten bei wachsenden und abnehmenden Werthen von $r_p$, wobei nach dem Obigen eine ungefähre Schätzung des Werthes von $v$ hinreicht.

3. Auch in dem Falle, wo die ersten Derivirten von $v$ bei unbegrenzter Annäherung an $p$ rascher anwachsen, als jede Potenz der reciproken Entfernung von diesem Punkte, stellt das Integral

$$[p] = \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial R}\right)R^2\partial\sigma$$

noch immer $v$ im ganzen Raume ausserhalb der um $p$ gelegten Kugel dar, und zwar ist sein Werth vom Halbmesser $R$ dieser Kugel völlig unabhängig.

Wenn überhaupt ein Integral der vorstehenden Form $[p]$ mit abnehmendem $R$ gegen eine von Null verschiedene feste Grenze convergirt, so geht es dort als einwerthiges Potential in ein solches über, welches in $p$, aber nicht ausserhalb dieses Punktes eine Ausnahmestelle besitzt. Liegt in einem solchen Falle $p$ auf einer Ausnahmelinie oder Fläche von $v$, so sagen wir, es finde in $p$ ein Verstoss gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ statt, welcher auch in einem isolirten Ausnahmepunkte möglich ist.

Jedes einwerthige Potential $v$ lässt sich daher durch Subtraction von Integralen der obigen Art in ein anderes, $w$, verwandeln, welches von allen in isolirten Ausnahmepunkten möglichen Verstössen gegen $A.$ und $B.$ befreit ist. Dann muss das, mittelst dieses Potentials $w$ gebildete Integral $[p]$, wo immer der Punkt $p$ gewählt werden mag, bei unbegrenzter Abnahme von $R$ entweder von $R$ abhängig bleiben, oder wenn es eine feste Grenze hat, mit $R$ zugleich verschwinden. Denn wenn $[p]$ bei abnehmendem $R$ zwar von $R$ unabhängig würde, aber nicht gegen Null convergirte, so wäre $p$ einem isolirten Ausnahmepunkte gleich zu achten.

## XI. Dritter Fall. Ausnahmelinien.

Findet ein Verstoss gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ nur auf einer Linie $l$ von endlicher Länge statt, und ist $\varrho$ überall $= 0$, so ist ausserhalb der $l$ einschliessenden Fläche $S$

$$v_0 = (S),$$

und dieses Integral ist von der Gestalt der Fläche $S$ unabhängig, solange sie $l$ ein-, und $O$ ausschliesst.

Der Einfachheit wegen setzen wir voraus, dass die Linie $l$ nicht aus getrennten Stücken besteht, und überall stetig gebogen ist. Diese Voraussetzung bildet keine wesentliche Einschränkung der Untersuchung. Besteht nämlich $l$ aus mehreren von einander getrennten, aber stetig gebogenen Theilen, so setzt sich $(S)$ aus ebensoviel Integralen von der Art zusammen, auf welche wir uns hier beschränken; hängt $l$ zusammen, jedoch so, dass stetig gebogene Theile bei ihrem Zusammentreffen Ecken bilden, so kann man dies so ansehen, als ob zwei stetig gebogene Linien einen Endpunkt mit einander gemein haben.

Stellt man nun die Bedingung, dass die Grössen

$$R^\nu \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^\nu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^\nu \frac{\partial v}{\partial z}$$

bei unbegrenzter Abnahme der kürzesten Entfernung $R$ vom Punkte $x, y, z$ bis zur Linie $l$ niemals über alle Grenzen wachsen, dass aber jede Verkleinerung von $\nu$ dies zur Folge habe, so darf $\nu$ nicht $< 1$ sein, weil sonst nach art. VII. $g.$ an $l$ entlang jeder Verstoss gegen $A.$ und $B.$ unmöglich sein würde. Ist $n + 2$ die zunächst über $\nu$



liegende ganze Zahl, also $n$ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots,$ so verschwinden hiernach die Grössen

$$R^{n+2} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^{n+2} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^{n+2} \frac{\partial v}{\partial z}, \text{ und wegen } d.\ R^{n+1} v$$

mit $R$ zugleich an $l$ entlang, während von den Grössen

$$R^n \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^n \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^n \frac{\partial v}{\partial z}$$

mindestens eine über alle Grenzen wächst.

Wir schliessen den Fall aus, wo in einzelnen Punkten von $l$ solche Verstösse gegen $A.$ und $B.$ stattfinden, wie sie nach dem vorigen art. auch in isolirten Punkten möglich sind.

Dann ist $v$ bis auf eine begrenzte Anzahl von Grössen bestimmt, über die zu seiner vollständigen Definition noch in jedem einzelnen Elemente von $l$ verfügt werden muss. (Vergl. unten ($\beta$.)).

Für die folgende Untersuchung ist es zweckmässig, der Fläche $S$ die folgende Form zu geben. Wir bezeichnen die Endpunkte von $l$ durch $a$ und $e$, zwei benachbarte Punkte von $l$ durch $a_1$ und $e_1$, und setzen nun $S$ zusammen aus einer um $a_1 e_1$ als Axe gelegten Röhrenfläche $S_l$[1]) vom Halbmesser $R$, und zwei über $a$ und $e$ hinausreichenden Verschlussstücken $S_a$, $S_e$, von denen jedes sich mittelst eines der Normalebene von $l$ angehörigen Streifens an $S_l$ senkrecht ansetzt. Die später zu benutzende Folge dieser Einrichtung besteht darin, dass verschwindende Aenderungen von $R$ die Endpunkte der Axe $a_1 e_1$ von $S_l$ ungeändert lassen.

Bezeichnet man die Theile von $(S)$, welche von der Integration über die Stücke $S_a$, $S_l$, $S_e$ von $S$ herrühren, durch $(a)$, $(l)$ und $(e)$, so wird

$$v_0 = (a) + (l) + (e).$$

Wir beginnen nun mit der Untersuchung des Integrals $(l)$ für ein ohne Ende abnehmendes $R$.

Ist $q$ ein zwischen $a$ und $e$ liegender Punkt von $l$, $s$ die Länge des Bogens $aq$, so dass $s$ zu- oder abnimmt, jenachdem $q$ an $l$ entlang nach $e$ oder $a$ rückt, und ist $\partial s$ das von $q$ ausgehende Bogenelement von $l$, $P$ der Krümmungsradius in $q$, $\theta'$ der Winkel zwischen $P$ und einem von $q$ ausgehenden Halbmesser der Röhrenfläche $S_l$, so wird das Element $\partial S_l$ der letzteren $= R\left(1 - \frac{R \cos \theta'}{P}\right) \partial \theta' \partial s$, und da $R$ zu ihm senkrecht steht,

1) Note 2.

$$(l) = \frac{1}{4\pi} \int' \left( R v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} - \frac{1}{r} R \frac{\partial v}{\partial R} \right) \left(1 - \frac{R \cos\theta'}{P}\right) \partial\theta' \partial s,$$

wo der Accent am Integralzeichen bedeutet, dass die Integration nach $s$ sich von $a_1$ bis $e_1$ erstreckt.

Seien $x, y, z$ die Coordinaten von $q$, die wir als Functionen von $s$ betrachten, und $x', y', z'$ ihre ersten, $x'', y'', z''$ ihre zweiten Derivirten nach $s$. Durch $q$ legen wir drei rechtwinklige Axen $qT, qP, qN$, von denen die erste in die Verlängerung von $\partial s$ fällt, die zweite nach dem Krümmungscentrum und die dritte so gerichtet ist, dass sie zusammen durch blosse Drehung beziehungsweise in die Richtung der wachsenden $x, y, z$ gebracht werden können. Setzt man nun

$$y'z'' - z'y'' = A, \quad z'x'' - x'z'' = B, \quad x'y'' - y'x'' = C,$$

so werden die Cosinus zwischen diesen und den positiven Axen der $x, y, z$ folgende:

$$\begin{array}{llll} \text{Richtungscosinus von } qT : & x' & y' & z' \\ \text{Richtungscosinus von } qP : & Px'' & Py'' & Pz'' \\ \text{Richtungscosinus von } qN : & PA & PB & PC. \end{array}$$

Bezeichnet man ferner durch $r_q$ die Entfernung von $q$ bis $O$, und durch $a, b, c$ ihre Richtungswinkel, so wird

$$\cos a = \frac{\partial r_q}{\partial X}, \quad \cos b = \frac{\partial r_q}{\partial Y}, \quad \cos c = \frac{\partial r_q}{\partial Z},$$

wenn $X, Y, Z$ wie früher die Coordinaten von $O$ sind.

Dies vorausgeschickt, lässt sich die Entfernung $r$ von $O$ bis zum Elemente $\partial S_l$ in eine für den gegenwärtigen Zweck passende Form bringen. Bezeichnet man nämlich durch $o$ den Endpunkt von $r$ auf $\partial S_l$, so sind $r$, $R$ und $r_q$ die Seiten des Dreiecks $qOo$, also wenn $\omega$ den $r$ gegenüberliegenden Winkel $oqO$ bedeutet, $r^2 = r_q^2 - 2r_q R \cos\omega + R^2$. Zur Bestimmung von $\omega$ seien ferner $\lambda$ und $\lambda'$ die Neigungswinkel von $r_q$ und $R$ gegen $qT$, $\theta$ und nach dem bereits oben Festgestellten $\theta'$ die Neigungswinkel der durch $qT$ und die Geraden $r_q$, $R$ gelegten Ebenen gegen die Krümmungsebene $TqP$; dann wird

$$\cos\omega = \cos\lambda \cos\lambda' + \sin\lambda \sin\lambda' \cos(\theta' - \theta),$$

oder $\cos\omega = \sin\lambda \cos(\theta' - \theta)$, da $R$ zu $qT$ senkrecht steht, also $\lambda' = 90^0$ ist. Daraus folgt

$$r^2 = r_q^2 - 2r_q R \sin\lambda \cos(\theta' - \theta) + R^2,$$

während $\lambda$ und $\theta$ durch die Gleichungen



$$\begin{aligned} \cos\lambda &= x' \cos a + y' \cos b + z' \cos c, \\ \sin\lambda \cos\theta &= Px'' \cos a + Py'' \cos b + Pz'' \cos c, \\ \sin\lambda \sin\theta &= PA \cos a + PB \cos b + PC \cos c \end{aligned}$$

bestimmt sind.

In diesem Ausdrucke von $r$ hängen $r_q$, $\lambda$ und $\theta$ nur von der Lage der Punkte $q$ und $O$ ab, aber nicht vom Halbmesser $R$ und auch nicht von $\theta'$. Da $r_q > R$ ist, so folgt

$$\frac{1}{r} = \sum_0^\infty \frac{R^m}{r_q^{m+1}} P_m,$$

wo unter $P_m$ die Kugelfunction $P_m(\sin\lambda \cos(\theta' - \theta))$ zu verstehen ist. Führt man dies in den Ausdruck von $(l)$ ein, und setzt zur besseren Uebersicht

$$\frac{1}{4\pi} \int' \frac{\partial v}{\partial R} P_m \cdot \frac{\partial s \partial\theta'}{r_q^{m+1}} = U_m, \quad \frac{1}{4\pi} \int' v P_m \cdot \frac{\partial s \partial\theta'}{r_q^{m+1}} = U_{m,1},$$
$$\frac{1}{4\pi} \int' \frac{\partial v}{\partial R} P_m \cdot \frac{\cos\theta' \partial s \partial\theta'}{P r_q^{m+1}} = V_m, \quad \frac{1}{4\pi} \int' v P_m \cdot \frac{\cos\theta' \partial s \partial\theta'}{P r_q^{m+1}} = V_{m,1},$$

so wird

$$\begin{aligned} (l) = &\sum_1^\infty m R^m U_{m,1} - \sum_0^\infty R^{m+1} U_m \\ &- \sum_1^\infty m R^{m+1} V_{m,1} + \sum_0^\infty R^{m+2} V_m. \end{aligned}$$

Da in den Ausdrücken $U$ und $V$ die Integration zwischen endlichen Grenzen stattfindet, die nach dem Obigen bei verschwindenden Änderungen von $R$ ungeändert bleiben, und zwischen denselben $\frac{\partial v}{\partial R}$ nicht unendlich oder unbestimmt wird, so ist

$$U_m = \frac{\partial U_{m,1}}{\partial R}, \quad V_m = \frac{\partial V_{m,1}}{\partial R}.$$

Solange aber der Endpunkt $O$ von $r_q$ ausserhalb der um $l$ mit dem Halbmesser $R$ beschriebenen Röhrenfläche liegt, werden $U_{m,1}$ und seine Derivirte $U_m$ oberhalb $R = 0$ weder unbestimmt, noch unendlich, noch unstetig; dasselbe gilt von $V_{m,1}$ und $V_m$. Folglich kann man auf diese Functionen von $R$ den Lehrsatz $d$. des art. VII. anwenden, und erhält, wenn der Fall, wo $R^{m+1} U_m$ oder $R^{m+2} V_m$ bei verschwindendem $R$ unbestimmt, unendlich oder unstetig wird, ausgeschlossen wird, für $m > 0$

$$\lim m R^m U_{m,1} = -\lim R^{m+1} U_m,$$
$$\lim m R^{m+1} V_{m,1} = -\frac{m}{m+1} \lim R^{m+2} V_m.$$

Da ferner wegen der für $\frac{\partial v}{\partial R}$ gestellten Bedingungen in der ersten von den vorstehenden Gleichungen beide Seiten für $m > n$, in der zweiten für $m+1 > n$ verschwinden, so folgt

$$\lim (l) = \lim \left[\sum_0^{n-1} \frac{2m+1}{m+1} R^{m+2} V_m - R U_0 - 2 \sum_1^n R^{m+1} U_m\right],$$

oder geordnet

$$(\alpha.) \quad \lim (l) = \lim \left[- R U_0 + 2 \sum_1^n \left(\frac{2m-1}{2m} R^{m+1} V_{m-1} - R^{m+1} U_m\right)\right].$$

Dies vorausgeschickt, unterwerfen wir $v$ an $l$ entlang der Bedingung, dass bei unbegrenzter Abnahme von $R$ in jedem Punkte $q$, für jeden Werth von $\beta$ und für $m = 0, 1, \ldots n$

$$(\beta.) \quad \lim R^{m+1} \int \frac{\partial v}{\partial R} \cos (m\theta' - \beta)\, \partial \theta' = - 4\pi (A_m \cos \beta + B_m \sin \beta)$$

sei, wo $A_m$ und $B_m$ von $\beta$ unabhängige Functionen des Bogens $s$ sind, welche die Integration an $l$ entlang in dem zur Bildung von $\lim (l)$ erforderlichen Umfange gestatten.

Aus dem bekannten Ausdrucke für die Kugelfunctionen

$$P_m (\cos \lambda \cos \lambda' + \sin \lambda \sin \lambda' \cos (\theta' - \theta))$$

erhält man für $\lambda' = 90^0$

$$P_0 (\sin \lambda \cos (\theta' - \theta)) = 1,$$
$$P_1 (\sin \lambda \cos (\theta' - \theta)) = \sin \lambda \cos (\theta' - \theta)$$

und allgemein

$$P_m (\sin \lambda \cos (\theta' - \theta)) = A_m \cos m (\theta' - \theta) + A_{m,1} \cos (m-2) (\theta' - \theta) + \cdots,$$

wo

$$A_m = 2 \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \sin \lambda^m$$

ist. Die übrigen Factoren $A$ sind ebenfalls von $\theta'$ und $\theta$ unabhängig, kommen aber bei der folgenden Untersuchung nicht in Betracht.

Wendet man nämlich den vorstehenden Ausdruck von $P_m$ auf die Bestimmung des

$$\lim \frac{R^{m+1}}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial R} P_m \partial \theta'$$

an, indem man von $m = 0$ an aufwärts schliesst, so zeigt sich sofort, dass $P_m$ durch sein erstes Glied ersetzt werden kann, und es ergiebt sich

für $m = 0$ $\qquad \lim \frac{R}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial R} P_0 \partial \theta' = - A_0,$

für $m = 1, 2, \ldots n$ $\qquad \lim \frac{R^{m+1}}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial R} P_m \partial \theta' = - A_m (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta).$



Ebenso findet sich für $m = 1, 2, \ldots n$

$$\lim \frac{R^{m+1}}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial R} P_{m-1} \cdot \cos \theta' \partial \theta' = - \tfrac{1}{2} A_{m-1} (A_m \cos (m-1)\theta + B_m \sin (m-1)\theta).$$

Daraus ergeben sich die folgenden Ausdrücke, aus denen in ($\alpha$.) der Grenzwerth von ($l$) zusammengesetzt ist:

$$(\gamma.) \begin{cases} \lim - R U_0 = \int' \frac{A_0 \partial s}{r_q}, \\ \lim - R^{m+1} U_m = 2 \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \int' \frac{\sin \lambda^m (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta)}{r_q^{m+1}} \partial s, \\ \frac{2m-1}{2m} \lim R^{m+1} V_{m-1} = - \frac{(2m!)}{(2^m m!)^2} \int' \frac{\sin \lambda^{m-1} (A_m \cos (m-1)\theta + B_m \sin (m-1)\theta)}{P r_q^m} \partial s; \end{cases}$$

die Accente an den Integralzeichen bedeuten, dass die Integration an $l$ entlang von $a_1$ bis $e_1$ zu erstrecken ist.

Lässt man daher die Flächen $S_a$ und $S_e$ sich bis zu den Punkten $a_1$ und $e_1$ erstrecken, und ersetzt sie nun der Einfachheit wegen durch Kugeln mit den Halbmessern $aa_1 = c_a$, $ee_1 = c_e$ und den Mittelpunkten $a$ und $e$, so gehen im Ausdrucke von $v_0$ ($a$) und ($e$) in Integrale [$a$] und [$e$] (voriger art.) über, und es folgt

$$v_0 = [a] + \lim (l) + [e].$$

Dieses Resultat umfasst verschiedene Fälle.

1. Wenn die durch $A_m$ und $B_m$ bezeichneten Functionen von $s$ so beschaffen sind, dass von den Integralen ($\gamma$.), aus denen $\lim (l)$ besteht, einzelne divergent werden, wenn man sie bis zu den Endpunkten $a$ und $e$ von $l$ erstreckt, so bilden die Integrale [$a$] und [$e$] wesentliche Bestandtheile des Ausdruckes von $v_0$, indem sie zur Ausgleichung der, bei abnehmenden Werthen der Halbmesser $c_a$ und $c_e$ eintretenden Divergenz von $\lim (l)$ dienen.

2. Wenn dagegen die Functionen $A$ und $B$ die Integration auch bis an die Enden von $l$ hinan gestatten, so kann man $c_a$ und $c_e$ verschwinden lassen, und verlangen, dass auch [$a$] und [$e$] verschwinden. Denn da in diesem Falle jedes der Integrale [$a$] und [$e$] für sich gegen eine feste Grenze convergirt, so würden sie, falls diese Grenzen von Null verschieden wären, in den Ausdruck von $v_0$ zwei Glieder liefern, welche man nach dem Schlusse des vorigen art. auch dadurch einführen kann, dass man einen isolirten Ausnahmepunkt nach $a$ und einen nach $e$ rücken lässt, und welche ebenso durch Beseitigung dieser Ausnahmepunkte ohne eine Abänderung in den übrigen Bedingungen entfernt werden können, wie es oben als geschehen vorausgesetzt worden ist. Daraus folgt der Satz:

*o.* Es sei $v$ ein einwerthiges Potential, welches nur auf einer ununterbrochen zusammenhängenden und stetig gebogenen Linie von der messbaren Länge $l$ gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ verstösst, und auch auf dieser von allen in isolirten Ausnahmepunkten möglichen Verletzungen dieser Bedingungen befreit ist. Wenn alsdann im ganzen Raume $\varrho = 0$ ist, und an $l$ entlang bei unbegrenzter Abnahme von $R$

$$1)\quad \lim R^{n+2}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \lim R^{n+2}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \lim R^{n+2}\frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$2)\quad \text{für } m = 0, 1, \ldots n \quad \lim R^{m+1}\int \frac{\partial v}{\partial R} \cos m\theta' \partial\theta' = -4\pi A_m,$$

$$3)\quad \text{für } m = 1, 2, \ldots n \quad \lim R^{m+1}\int \frac{\partial v}{\partial R} \sin m\theta' \partial\theta' = -4\pi B_m$$

ist, so ist für jeden Punkt $O$ ausserhalb $l$ $v_0 = \lim (l)$ oder

$$v_0 = \int \frac{A_0 \partial s}{r_q}$$

$$+ 2\sum_1^n \frac{(2m!)}{(2^m m!)^2}\int \Big[2\,\frac{\sin\lambda^m (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta)}{r_q^{m+1}}$$

$$- \frac{\sin\lambda^{m-1}(A_m \cos(m-1)\theta + B_m \sin(m-1)\theta)}{Pr_q^m}\Big]\partial s,$$

vorausgesetzt, dass die Functionen $A_m$ und $B_m$ die Integration über die ganze Linie $l$ hinweg gestatten.

Mittelst der hier anwendbaren Sätze *d.* und *e.* des art. VII. ergeben sich aus den Bedingungen 2) und 3) folgende Eigenschaften des vorstehenden Potentials:

$$\lim \frac{1}{\log R}\int v\partial\theta' \qquad = -4\pi A_0,$$

$$\left.\begin{aligned} \lim mR^m \int v \cos m\theta' \partial\theta' &= \quad 4\pi A_m \\ \lim mR^m \int v \sin m\theta' \partial\theta' &= \quad 4\pi B_m \end{aligned}\right\} \text{für } m = 1, 2, \ldots n.$$

Dieselben können ebenfalls dazu dienen, um zu einem gegebenen Ausdrucke von $v$ die Grössen $A$ und $B$ zu bestimmen.

Einfache Beispiele zu beiden Fällen erhält man durch conforme Umbildung einwerthiger Functionen von $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$, welche nur in einer endlichen Anzahl von Punkten der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ Ebene unendlich werden, oder ihrer reellen Bestandtheile. Betrachtet man nämlich eine solche als Function von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so verhält sie sich wie eine den Bedingungen des



art. I. für $\varrho'$ gleich Null genügende Function $\mathfrak{v}$, die nebst ihren ersten Derivirten $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}}, \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{y}}$ auf geraden Linien, die zur $\mathfrak{z}$-Axe parallel sind, unendlich wird, und ausserhalb derselben endlich und stetig bleibt. Diese Linien werden durch die conforme Umbildung in Kreisbögen verwandelt, deren Enden im Mittelpunkte des Raumes $x, y, z$ zusammenstossen. Die rationalen Functionen liefern Beispiele zum zweiten Falle, $\log\frac{\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}}{a}$ kann zur Erläuterung des andern dienen.

3. Wenn die ersten Derivirten von $v$ an $l$ entlang unendlich gross von unendlich hoher Ordnung werden, so stellt der Ausdruck $(S) = (l) + (a) + (e)$ noch immer $v$ ausserhalb der Fläche $S$ dar, und sein Werth ist auch jetzt noch vom Halbmesser $R$ und der Form von $S_a$ und $S_e$ unabhängig. Allgemein geht jeder Ausdruck dieser Form, der von der Umgestaltung der Fläche $S$ unabhängig wird, wenn sie sich immer enger um $l$ zusammenzieht, an der Grenze als einwerthiges Potential in ein solches über, welches ausser der Linie $l$ keine andere Ausnahmestelle besitzt. Man kann daher durch Subtraction von Potentialen dieser Gattung jedes einwerthige Potential $v$ in ein anderes, $w$, verwandeln, welches so beschaffen ist, dass der mittelst der Werthe von $w$ gebildete Ausdruck $(S)$ für jede beliebige Linie $l$ bei fortgesetzter Verengerung der Fläche $S$ entweder von der Gestalt dieser Fläche abhängig bleibt, oder falls er eine feste Grenze hat, an derselben verschwindet.

## XII. Vierter Fall. Ausnahmeflächen.

Die Bedingungen $A.$ und $B.$ werden nur an einer zusammenhängenden Fläche $f$ entlang verletzt, von welcher wir voraussetzen,

1) dass sie keine unendlich weit von einander entfernten Punkte enthält, und dass die Länge ihres Randes, wenn ein solcher vorhanden ist, nicht unendlich gross ist;
2) dass die Anzahl ihrer Ecken und Kanten, so wie die Zahl ihrer Durchschnittspunkte mit Geraden von verschwindender Länge und mit Curven, die zu ihrem Rande oder zu einer bestimmten, auf ihr verzeichneten Linie $l$ (vergl. unten 3)) in unendlicher Nähe parallel sind, nicht unendlich gross ist.

Wir setzen ferner voraus, dass $\varrho$ im ganzen Raume ausserhalb $f$ gleich Null ist. In diesem, wie in den früheren Fällen darf aus dem Umstande, dass $\Delta v$ auf $f$ selbst nicht gleich Null gesetzt werden kann, nicht geschlossen werden, $\varrho$ habe dort von Null verschiedene

Werthe, weil auf $f$ selbst von der Bildung des Ausdruckes $\Delta v$ überhaupt keine Rede sein kann.

Den Fall, wo $v$ oder eine seiner ersten Derivirten in allen Punkten eines Flächenstücks von endlicher Ausdehnung unendlich oder unbestimmt wird, haben wir bereits ausgeschlossen. Wir fügen hierzu noch weitere Beschränkungen in den an $f$ entlang vorauszusetzenden Verstössen gegen $A$. und $B$. Diese Verstösse bestehen nach art. VIII. in blossen Unstetigkeiten, welche $v$ oder seine ersten Derivirten beim Durchgange durch $f$ erleiden, und welche, abgesehen von einzelnen auf $f$ liegenden Punkten und Linien, mit keinem Unendlichwerden dieser Functionen verbunden sind. Die Beschränkungen, denen wir diese Unstetigkeiten unterwerfen, betreffen 1) die Geschwindigkeit, mit welcher $v$ oder seine ersten Derivirten anwachsen dürfen, wenn man solchen Punkten und Linien von Aussen her, und 2) die von jener wohl zu unterscheidende Geschwindigkeit, mit welcher ihre Sprünge wachsen dürfen, wenn man diesen Stellen an der Fläche $f$ entlang immer näher rückt.

Wenn die Unstetigkeiten von $v$ oder seinen ersten Derivirten sich bis an den Rand $\lambda$ der Fläche $f$ erhalten, so werden diese Functionen auf dem Rande selbst unbestimmt, indem sie beim Umbiegen um denselben alle beim Durchgange durch $f$ übersprungenen Werthe in stetiger Reihenfolge durchlaufen. Folglich gehört der Rand $\lambda$ im Allgemeinen ebenfalls zu den, auf $f$ noch besonders zu unterscheidenden Ausnahmestellen, von denen er bloss durch seine Lage auf $f$ unterschieden ist.

Wenn auf $f$ in irgend einem Punkte oder an einer Linie entlang eine, auch in isolierten Punkten oder Linien mögliche Verletzung von $A$. stattfindet, so kann man dieselbe ohne eine Aenderung in den übrigen Bedingungen dadurch vollständig beseitigen, dass man aus dem Ausdrucke für $v$ eine von den im zweiten und dritten Falle auftretenden Formen ausscheidet. Wir setzen dies als geschehen voraus, und beschränken dem entsprechend das Unendlichwerden von $v$ und seinen ersten Derivirten durch die unten folgende vierte Bedingung.

Dies festgestellt, betrachten wir $f$ als einen Spalt im Raume, und bezeichnen einen Punkt $o$ von $f$, jenachdem er als auf der einen oder der andern Seite des Spaltes liegend betrachtet wird, durch $o_1$ oder $o_2$, die Werthe von $v$ in diesen Punkten durch $v_1$, $v_2$ und unter der Voraussetzung, dass man beim Differentiiren von $o_1$ und $o_2$ aus auf den, über beiden Seiten des Spaltes von ihm abwärts errichteten Normalen fortschreitet, seine Derivirten durch $\frac{\partial v_1}{\partial p_1}$ und $\frac{\partial v_2}{\partial p_2}$. Dann stellen sich die an $f$ entlang zu erfüllenden Bedingungen wie folgt:



3) Mit Ausnahme von isolirten Punkten $m$, einer Linie $l$ (vergl. oben 2)) und des Randes $\lambda$ sind $v$ und seine ersten Derivirten auf beiden Seiten von $f$ nirgendwo unendlich oder unbestimmt. Die Punkte $m$ sind nur in begrenzter Zahl vorhanden, und die Anzahl der Ecken von $l$ und $\lambda$, sowie die Länge von $l$ ist ebenfalls nicht unendlich gross.

4) Legt man um jeden Punkt $m$ als Centrum eine Kugelfläche $S_m$, und um die Linien $l$ und $\lambda$ als Axen Röhrenflächen $S_l$ und $S_\lambda$, sämmtlich vom Halbmesser $c$, so soll zugleich mit $c$ jedes der Integrale

$$[m] = \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial S_m,$$

$$\left.\begin{array}{r}(l)\\(\lambda)\end{array}\right| = \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\cdot\left|\begin{array}{l}\partial S_l\\ \partial S_\lambda\end{array}\right.$$

verschwinden.

5) Beim Durchgange durch $f$ sind $v$ und seine ersten Derivirten unstetig, und zwar ist im Punkte $o$

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} = -4\pi \mathrm{E},$$
$$v_1 - v_2 = 4\pi\Omega_1.$$

6) Ist $R$ die geradlinige Entfernung von $o$ bis zu einem Punkte $m$, und nähert sich $o$, ohne $f$ zu verlassen, diesem Punkte auf einer beliebigen Bahn, so verschwinden

$$R^{1+k}\mathrm{E},\quad R^{1+k}\Omega_1$$

mit $R$ zugleich, sobald für $k$ eine passende, unter 1 liegende positive Zahl gesetzt wird.

7) Nähert sich dagegen $o$, ohne $f$ zu verlassen, einem der Linie $l$ oder $\lambda$ angehörigen Punkte so, dass seine Bahn zuletzt in die Normalebene dieser Linie fällt, so verschwinden zugleich mit der geradlinigen Entfernung $R$ beider Punkte die Grössen

$$R^k\mathrm{E},\quad R^k\Omega_1,$$

wenn $k$ wieder einen von 1 verschiedenen positiven echten Bruch bedeutet.

In den verschiedenen Fällen, welche sich hier darbieten, kann $k$ verschiedene Werthe haben, welche jedoch sämmtlich kleiner als 1 sein müssen. Für unsern Zweck reicht es hin, unter $k$ den grössten von allen diesen Werthen zu verstehen.

Setzt man nun die um alle Ausnahmestellen von $v$ zu legende Fläche $S$ zusammen aus den Flächen $S_m$, $S_l$, $S_\lambda$ (siehe oben 4)) und den ausserhalb derselben liegenden Theilen der Spaltflächen, und bezeichnet man durch $\partial f_1$ und $\partial f_2$ die mit dem Elemente $\partial f$ von $f$ zusammenfallenden Elemente der letztern, so geht die für jeden ausserhalb $S$ liegenden Punkt $O$ gültige Gleichung $v_0 = (S)$ mit Rücksicht auf die in 4) eingeführten Zeichen über in

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\int'\left(v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial p_1}\right)\partial f_1 + \frac{1}{4\pi}\int'\left(v_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial p_2}\right)\partial f_2$$
$$+ (l) + (\lambda) + \sum[m],$$

wenn die Summation im letzten Gliede zur Rechten sich über alle Punkte $m$ erstreckt, und in den ersten Gliedern der Accent andeutet, dass die innerhalb der Kugeln und Röhren liegenden Elemente $\partial f$ von der Integration ausgeschlossen sind.

In den beiden ersten Gliedern lassen sich zunächst die entsprechenden Elemente vereinigen. Berücksichtigt man, dass in $o$ $\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_2} = -\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1}$ ist, so ergiebt sich wegen 5)

$$(\alpha.) \qquad v_0 = \int' \frac{\mathrm{E}\,\partial f}{r} + \int' \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1}\partial f + (l) + (\lambda) + \sum[m].$$

Nennt man ferner $\partial f_m$, $\partial f_l$, $\partial f_\lambda$ die Elemente der ins Innere von $S_m$, $S_l$, $S_\lambda$ fallenden Theile von $f$, und setzt

$$\int \frac{\mathrm{E}\,\partial f_m}{r} = E_m, \quad \int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1}\partial f_m = O_m, \quad \int \frac{\mathrm{E}\,\partial f_l}{r} = E_l, \quad \text{u. s. w.,}$$

so kann man endlich schreiben

$$v_0 = \int \frac{\mathrm{E}\,\partial f}{r} + \int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1}\partial f + T,$$

wenn

$$T = (l) + (\lambda) - E_l - E_\lambda - O_l - O_\lambda + \sum([m] - E_m - O_m)$$

gesetzt wird, und das Weglassen der Accente bedeutet, dass die Integration in den ersten Gliedern über alle Elemente von $f$ ohne Ausnahme zu erstrecken ist.

Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass diese Glieder durch die Erweiterung ihres Integrationsgebietes weder unendlich, noch unbestimmt



werden. Dies ist, wie im Folgenden gezeigt wird, wirklich der Fall, solange die für E und $\Omega_1$ gestellten Bedingungen 6) und 7) erfüllt sind.

Werden dagegen diese Bedingungen so abgeändert, dass die Integrale $\int' \frac{\mathrm{E}\,\partial f}{r}$ und $\int' \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1}\partial f$ divergiren, wenn man die Integration bis an $l$, $\lambda$, $m$ hinan erstreckt, so muss der ursprüngliche Ausdruck ($\alpha$.) beibehalten werden, indem nun die Glieder $(l)$, $(\lambda)$, $[m]$ zur Ausgleichung der bei abnehmendem $c$ eintretenden Divergenz der ersten Glieder dienen.

Wir werden beweisen, dass bei den obigen Bedingungen jedes einzelne Glied von $T$ mit dem Halbmesser $c$ zugleich verschwindet. Da die Anzahl dieser Glieder wegen 3) keine unbegrenzte ist, so ist dasselbe dann auch von ihrer Summe $T$ nachgewiesen.

Nennt man $R$ die geradlinige Entfernung von $\partial f_m$ bis $m$, und bezeichnet durch $k$ den in 6) erwähnten positiven echten Bruch, so ist

$$E_m = \int \frac{R^{1+k}\mathrm{E}}{r} \cdot \frac{\partial f_m}{R^{k+1}}, \qquad O_m = \int R^{1+k}\Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial f_m}{R^{k+1}};$$

ersetzt man aber die Factoren $\frac{R^{1+k}\mathrm{E}}{r}$ und $R^{1+k}\Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1}$ durch passende Mittelwerthe $M$ und $N$, und setzt $\int \frac{\partial f_m}{R^{k+1}} = \omega$, so wird $E_m = M\omega$, $O_m = N\omega$. Da wegen 6) der grösste Werth von $M$ und $N$, und nach Note 1. auch $\omega$ mit $c$ zugleich unter jede Grenze sinkt, so gilt dasselbe von $E_m$ und $O_m$.

Bezeichnet man ferner durch $R$ die auf einem Halbmesser der Röhrenfläche $S_l$ gezählte Entfernung von $\partial f_l$ bis zur Axe $l$, durch $k$ den in 7) erwähnten positiven echten Bruch, und durch $M'$, $N'$ passende Mittel aus den Werthen, welche $\frac{R^k \mathrm{E}}{r}$ und $R^k\Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1}$ in $E_l$ und $O_l$ während der Integration durchlaufen, und setzt man $\int \frac{\partial f_l}{R^k} = \eta$, so wird $E_l = M'\eta$, $O_l = N'\eta$; und da wegen 7) der grösste Werth von $M'$ und $N'$, und nach Note 3. auch $\eta$ mit $c$ zugleich unter jede Grenze sinkt, so gilt dasselbe von $E_l$ und $O_l$, und aus demselben Grunde von $E_\lambda$ und $O_\lambda$.

Man kann daher die Halbmesser der Flächen $S_l$, $S_\lambda$, $S_m$ so klein wählen, dass die durch ihr völliges Verschwinden bewirkten Aenderungen $E_l + E_\lambda + \sum E_m$, $O_l + O_\lambda + \sum O_m$ der Integrale $\int' \frac{\mathrm{E}\,\partial f}{r}$ und

$\int' \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f$ kleiner als alles Beliebige werden; folglich convergieren diese Integrale ohne Unstetigkeit gegen feste Grenzen, wenn man sie bis an $l$, $\lambda$, $m$ hinan erstreckt.

Da zugleich mit $c$ wegen 4) auch jedes der Integrale $(l)$, $(\lambda)$, $[m]$ verschwindet, so folgt ferner, dass der Unterschied $T$ zwischen $v_0$ und der Summe der beiden Integrale $\int' \frac{\mathrm{E}\,\partial f}{r}$ und $\int' \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f$ unter jede Grenze gedrückt wird, wenn man die Halbmesser der Flächen $S_l$, $S_\lambda$, $S_m$ ohne Ende abnehmen lässt. Daraus folgt:

*p.* Die Function $v$ ist durch die Bedingungen *A.*, *B.*, *D.* des art. II und 3) bis 7) völlig bestimmt, so lange die Fläche $f$ den Bedingungen 1) und 2) entspricht, und $\varrho$ gleich Null ist, und zwar ist für jeden ausserhalb $f$ liegenden Punkt $O$:

$$v_0 = \int \frac{\mathrm{E}\,\partial f}{r} + \int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f.$$

Aendert man insbesondere die Bedingung 5) dahin ab, dass entweder $\Omega_1$ oder E gleich Null ist, so ergiebt sich:

*q.* Ist unter Voraussetzung aller übrigen Bedingungen $v$ selbst beim Durchgange durch die Fläche $f$ stetig, dagegen

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} = -4\pi \mathrm{E},$$

während E den in 6) und 7) gestellten Bedingungen genügt, so ist

$$v_0 = \int \frac{\mathrm{E}\,\partial f}{r}.$$

*r.* Ist die Derivirte von $v$ nach der Normale der Fläche $f$ beim Durchgange durch dieselbe nicht unstetig, jedoch

$$v_1 - v_2 = 4\pi \Omega_1,$$

während $\Omega_1$ die in 6) und 7) gestellten Bedingungen erfüllt, so ist

$$v_0 = \int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f.$$

Diese Sätze gelten selbst dann noch, wenn im ersten Fall $v_1$ und $v_2$, im zweiten $\frac{\partial v_1}{\partial p_1}$ und $\frac{\partial v_2}{\partial p_2}$ in unendlicher Nähe von $l$, $\lambda$, $m$ einen der-



artigen Verlauf annehmen, dass es nicht mehr gestattet ist, $\Omega_1$ resp. E an diesen Stellen noch gleich Null zu setzen, wofern nur dort den Bedingungen 6) und 7) Genüge geschieht. In der Tat kommen hierdurch zu $v_0$ nur Integrale $O_l$, $O_\lambda$, $O_m$ resp. $E_l$, $E_\lambda$, $E_m$, welche sämmtlich kleiner als jede angebbare oder mit anzugebenden Werthen vergleichbare Zahl sind.

Man kann endlich, ohne dass die vorstehenden Sätze ihre Gültigkeit verlieren, die Bedingungen 6) und 7) durch die allgemeinere ersetzen, dass die über einen beliebigen Theil $F$ von $f$ erstreckten Integrale $\int \frac{\mathrm{E}\,\partial f}{r}$ und $\int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f$ bei stetiger Erweiterung von $F$ nie unbestimmt, unendlich oder unstetig werden, weil diese Bedingung das Verschwinden von $E_m$, $O_m$, $E_l$, $O_l$, $E_\lambda$ und $O_\lambda$ nach sich zieht.

## XIII.

Zu den im Vorangehenden untersuchten Gattungen einwerthiger Potentiale müssen nun noch als besondere Fälle diejenigen gefügt werden, bei denen die Anzahl der Ausnahmepunkte, die Länge einer Ausnahmelinie oder der Inhalt einer Ausnahmefläche unendlich gross ist, sowie diejenigen, welche Ausnahmestellen im Unendlichen besitzen.

Wir bemerken in dieser Beziehung zunächst den folgenden Grundsatz, der mit den nöthigen Modificationen in jedem der eben genannten vier Fälle Anwendung findet.

> Wenn der Ausdruck $v$ eines einwerthigen Potentials bei unbegrenzter Erweiterung einer Ausnahmestelle $\mathfrak{A}$ zuletzt in einen, vom Gesetze dieser Erweiterung unabhängigen Ausdruck $u$ übergeht, so stellt $u$ dasjenige einwerthige Potential dar, welches der ins Unbegrenzte erweiterten Ausnahmestelle entspricht.

Bezeichnet man diese Letztere durch $\mathfrak{B}$, so reicht es zum Beweise des Satzes hin, zu zeigen, 1) dass $u$ ein einwerthiges Potential ist, 2) dass es ausserhalb $\mathfrak{B}$ nirgendwo gegen die Bedingung *A.* verstösst, und 3) dass $u$, soweit $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammenfällt, stets dieselben Unstetigkeiten wie $v$ besitzt. Das Letztere folgt aus der Form des Ausdruckes $v$, welche zur Folge hat, dass aus der Differenz $u - v$ alle auf $\mathfrak{A}$ bezüglichen Theile wegfallen; da ausserdem der Unterschied zwischen $u$ und $v$ nach den Bedingungen des Satzes durch hinlängliche Erweiterung von $\mathfrak{A}$ im ganzen Raume ausserhalb $\mathfrak{B}$ unter eine beliebige

Grenze hinabgedrückt werden kann, und $v$ dort die beiden zuerst genannten Eigenschaften besitzt, so können dieselben auch dem Ausdrucke $u$ nicht abgehen.

## XIV.

Nach diesem Satze bleiben nur noch diejenigen einwerthigen Potentiale zu untersuchen übrig, welche Ausnahmestellen im Unendlichen besitzen, ohne dass ihre Ausdrücke sich aus den oben gefundenen durch unbegrenzte Erweiterung einer solchen Stelle ergeben. Dieselben müssen nach art. II. und VI. aus den bisher betrachteten sämmtlich durch conforme Umbildung erhalten werden.

Zur leichteren Übersicht gehen wir auf die in art. I. definirte Function $\mathfrak{v}$ zurück, indem wir $\varrho' = 0$ setzen, und ausserdem die Bedingung stellen, dass $\mathfrak{v}$ von solchen Ausnahmestellen, die keinen Punkt im Unendlichen besitzen, befreit ist.

Da hiernach die Ausnahmestellen von $\mathfrak{v}$ entweder vollständig im Unendlichen liegen, oder ohne Unterbrechung aus den unendlich entfernten Theilen des Raumes bis ins Endliche reichen, so kann man den Raum $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ mittelst einer nie in getrennte Stücke zerfallenden Fläche in zwei Theile zerlegen, von denen der eine alle unendlich entfernten Theile des Raumes und sämmtliche Ausnahmestellen enthält, während der andere, den wir $\mathfrak{B}$ nennen, von ihnen völlig frei ist. Dann lässt sich der Werth $\mathfrak{v}_{\mathfrak{O}}$, den $\mathfrak{v}$ in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ des Raumes $\mathfrak{B}$ hat, nach art. III. durch ein über die Oberfläche von $\mathfrak{B}$ erstrecktes Integral darstellen, dessen Werth infolge der für $\mathfrak{v}$ gestellten Bedingungen von der Gestalt dieser Fläche unabhängig ist, solange in $\mathfrak{B}$ keine Ausnahmestellen aufgenommen werden.

Dies festgestellt, legen wir um den Mittelpunkt $\mathfrak{p}'$ des Raumes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ (art. II.) eine Kugelfläche $\mathfrak{K}$, um jede Ausnahmelinie von $\mathfrak{v}$ eine Röhrenfläche, und unterscheiden bei jeder Ausnahmefläche ihre beiden Seiten, indem wir sie als einen Spalt im Raume ansehen.

Dann können wir die Oberfläche von $\mathfrak{B}$ zusammensetzen 1) aus demjenigen Theile $\mathfrak{S}_\infty$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$, der ausserhalb sämmtlicher Röhren- und Spaltflächen liegt, und 2) aus derjenigen Fläche $\mathfrak{S}$, die durch sämmtliche ins Innere von $\mathfrak{K}$ fallenden Theile der letzteren gebildet wird.

Dehnt man nun die Bezeichnungen des art. III. 1. auf den vorliegenden Fall aus, so folgt aus der Gleichung $(O.)$ desselben art.

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{O}} = (\mathfrak{S}) - (\mathfrak{S}_\infty).$$

Lässt man jetzt $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{S}_\infty$ ins Unendliche rücken, und $\mathfrak{S}$ sich demgemäss erweitern, so sind zwei Fälle möglich; entweder convergirt das Integral $(\mathfrak{S})$, also wegen der für $\mathfrak{v}$ gestellten Bedingungen auch $(\mathfrak{S}_\infty)$ gegen eine feste Grenze, oder es ist dies nicht der Fall.



1. Im ersten Falle geht $(\mathfrak{S})$ in eines von den im vorigen art. behandelten Potentialen über, und es wird demnach $(\mathfrak{S}_\infty)$ an der Grenze ebenfalls ein einwerthiges Potential. Wir verwandeln dasselbe durch conforme Umbildung, zu deren Mittelpunkt wir das Centrum $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{K}$ nehmen, in ein auf den Raum $x$, $y$, $z$ bezügliches $v$. Dann entspricht der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ in letzterem eine neue Kugelfläche $K$, und den unendlich entfernten Theilen des Raumes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ das Centrum $p'$ von $K$. Man erhält auf diese Weise (art. II.) ein einwerthiges Potential

$$v = \frac{a}{s}(\mathfrak{S}_\infty),$$

welches ausserhalb $p'$ allenthalben den Bedingungen $A.$, $B.$, $D.$ des art. II. für $\varrho = 0$ genügt, also zu den im art. X. behandelten gehört. Folglich wird umgekehrt der Grenzwerth von $(\mathfrak{S}_\infty)$ im vorliegenden Falle durch conforme Umbildung der in art. X. behandelten Gattung von Potentialen erhalten, was in dem Falle, wo $\mathfrak{v}$ im Unendlichen nicht von unendlich hoher Ordnung unendlich wird, auf rationale ganze Functionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ führt.

2. Wenn dagegen bei fortgesetzter Erweiterung von $\mathfrak{K}$ zwar die Differenz von $(\mathfrak{S})$ und $(\mathfrak{S}_\infty)$ bei einem festen Werthe beharrt, aber keines von beiden Integralen für sich gegen eine feste Grenze convergirt, so verwandelt sich $\mathfrak{v}$ durch die nämliche conforme Umbildung in ein einwerthiges Potential $v$, welches eine nicht bis ins Unendliche reichende Ausnahmestelle besitzt, die sich im Punkte $p'$ schliesst. Der Kugel $\mathfrak{K}$ und dem zur Ausschliessung der Ausnahmestellen von $\mathfrak{v}$ dienenden System $\mathfrak{F}$ von Röhren- und Spaltflächen entspricht im Raume $x$, $y$, $z$ die Kugel $K$ mit dem Centrum $p'$ und ein System $F$ von Flächen, welche die Ausnahmestellen von $v$ einschliessen. Beseitigt man von beiden Flächen $K$ und $F$ diejenigen Theile, welche ins Innere der andern fallen, und nennt die übrig bleibenden Theile $S_{p'}$ und $S$, so wird $v$ nach art. IV. durch die Gleichung

$$v_0 = (S) + (S_{p'})$$

dargestellt, und es ist nun nach art. II.

$$(S) = \frac{a}{s}(\mathfrak{S}), \quad -(S_{p'}) = \frac{a}{s}(\mathfrak{S}_\infty).$$

Daraus folgt, dass bei fortgesetzter Verengerung von $K$ oder $S_{p'}$ zwar die Summe der Integrale $(S)$ und $(S_p)$ ungeändert bleibt, aber keines von beiden für sich gegen eine feste Grenze convergirt

Folglich wird man im gegenwärtigen Falle auf die in art. XI. und XII. erwähnten Fälle zurückgeführt, wo zur Vermeidung divergenter Ausdrücke für $v$ aus einer Linie $l$ oder einer Fläche $f$ abnehmende Stücke derselben ausgeschieden, und durch eingeschaltete Kugelflächen ersetzt wurden.

Die einwerthigen Potentiale zerfallen hiernach in zwei getrennte Gattungen, von denen die eine durch die, in den art. IX.—XII. gegebenen, geschlossenen Ausdrücke dargestellt wird, während die andere die Darstellung durch Formen, deren Elemente von der reciproken Entfernung abhängen, nur unter der Bedingung gestattet, dass die durch die Wahl dieser bestimmten Formen herbeigeführte Divergenz durch Ausscheidung von Restgliedern gehoben wird. Functionen dieser Art sind bis jetzt wenig untersucht worden, da sie nach dem eben Gesagten mit der Lehre von den Kräften, die nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung wirken, in keiner Beziehung stehen.

## Note 1.

Um den Punkt $m$ der Fläche $S$ als Centrum legen wir eine Kugel vom Radius $c$, und nennen $S'$ das in ihr Inneres fallende Stück von $S$. Es wird vorausgesetzt, dass $S'$ durch Gerade, die zu einer Coordinatenaxe parallel sind, höchstens $n$mal, d. h. nicht unendlich oft geschnitten wird. Ist jetzt $\partial S'$ ein Element von $S'$, $R$ seine Entfernung von $m$, $k$ eine unter 1 liegende positive Zahl, so convergirt das Integral

$$\omega = \int \frac{\partial S'}{R^{1+k}}$$

mit abnehmendem $c$ gegen Null.

Zum Beweise verlegen wir den Coordinatenanfang nach $m$, und bezeichnen die positiven Flächeninhalte der Projectionen von $\partial S'$ auf die Coordinatenebenen durch $\partial S_x'$, $\partial S_y'$, $\partial S_z'$, woraus

$$\omega < \int \frac{\partial S_x'}{R^{1+k}} + \int \frac{\partial S_y'}{R^{1+k}} + \int \frac{\partial S_z'}{R^{1+k}}$$

folgt, weil $\partial S'$ als Summe der positiven Projectionen von $\partial S_x'$, $\partial S_y'$, $\partial S_z'$ auf die Ebene von $\partial S'$ kleiner als die Summe dieser Grössen selbst ist. Legt man jetzt über die $yz$-Ebene um $m$ als Centrum zwei Kreise, deren Radien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R} + \partial \mathfrak{R}$ kleiner als $c$ sind, so ist die Summe aller auf den von ihnen begrenzten Kreisring fallenden Projectionen $\partial S_x'$ kleiner als $n \cdot 2\pi \mathfrak{R} \partial \mathfrak{R}$, also der von diesen Projectionen herrührende Theil von $\int \frac{\partial S_x'}{R^{1+k}}$ kleiner als $n \cdot 2\pi \mathfrak{R} \partial \mathfrak{R}$ dividirt durch den kleinsten Werth, welcher $R^{1+k}$ in diesen Projectionen beizulegen ist,



also jedenfalls kleiner als $\frac{n \cdot 2\pi \mathfrak{R} \partial \mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^{1+k}}$; mithin ist $\int \frac{\partial S_x'}{R^{1+k}} < 2n\pi \int_0^c \frac{\partial \mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^k} = \frac{2n\pi}{1-k} c^{1-k}$. Da dasselbe für die beiden anderen Integrale gilt, so folgt $\omega < \frac{6n\pi}{1-k} c^{1-k}$. So lange also $1-k$ einen von Null verschiedenen positiven Werth hat, und $n$ nicht über jeder angebbaren Zahl liegt, kann man die positive Grösse $\omega$ durch Verkleinerung von $c$ unter jede Grenze bringen, w. z. b. w.

## Note 2.

Die Oberfläche eines Raumes, den eine beliebig fortbewegte Kugel $K$ vom constanten Halbmesser $R$ durchdringt, nenne ich eine Röhrenfläche, $R$ ihren Halbmesser und die Bahn $l$ des Kugelcentrums ihre Axe.

Die Curve, in welcher die Kugel $K$ durch eine ihrer früheren Lagen geschnitten wird, ist ein Kreis, dessen Ebene zur Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte in der Mitte senkrecht steht, und den nämlichen Punkt zum Centrum hat. Lässt man beide Kugeln zusammenfallen, so geht ihr Durchschnitt in die Curve über, an der entlang $K$ von der Röhrenfläche $S$ berührt wird. Dieselbe ist hiernach ein Hauptkreis von $K$, dessen Ebene im Centrum von $K$ zur Axe $l$ senkrecht steht. Daraus ergeben sich die folgenden bekannten Sätze, welche hier der Übersicht wegen zusammengestellt werden mussten.

1. Die Röhrenfläche $S$ wird von jeder Normalebene ihrer Axe $l$ in einem Kreise vom Halbmesser $R$ geschnitten, den wir den Querschnitt nennen.

2. Alle Halbmesser eines Querschnitts sind Normalen von $S$; jeder Querschnitt ist also eine Krümmungslinie von $S$ und ihr Krümmungsradius constant $= R$.

Durch die Endpunkte $q$, $q'$ eines Bogenelementes $\partial l$ der Axe lege ich die Normalebenen von $l$, und nenne die hierdurch auf $S$ bestimmten Querschnitte $N$, $N'$. Ist nun $\partial l_1$ ein Element von $N$, $o$ sein Anfangspunkt, und $\partial l_2$ das von $N$ und $N'$ begrenzte Element der zweiten durch $o$ gehenden Krümmungslinie von $S$, so sind $\partial l_1$ und $\partial l_2$ zu einander, und weil sie in der Tangentialebene von $S$ liegen, auch beide zur Normale $oq$ senkrecht. Folglich ist ausser $\partial l$ auch noch $\partial l_2$ zur Ebene des Querschnittes $N$ senkrecht.

3. Jedes Element $\partial l_2$ einer Krümmungslinie der zweiten Schaar ist zu dem, von den nämlichen Normalebenen der Axe begrenzten Elemente $\partial l$ dieser letztern parallel.

Die Länge von $\partial l_2$ berechnen wir mittelst seiner Projection $\partial l_2'$ auf die zu $\partial l$ gehörige Krümmungsebene der Axe. Da $\partial l_2$ zu $\partial l$, also auch zu dieser Krümmungsebene parallel ist, so ist seine Länge gleich der Länge $\partial l_2'$ seiner Projection. Letztere ist zu $\partial l$ parallel, und mit diesem durch dieselben Normalebenen der Axe, also auch durch dieselben Hauptnormalen von $l$ begrenzt. Folglich liegen $\partial l$ und $\partial l_2'$ auf zwei concentrischen Kreisen dem nämlichen Centriwinkel gegenüber. Nennt man $P$ den Krümmungshalbmesser von $l$, $P'$ den Halbmesser des anderen Kreises, so folgt $\frac{\partial l_2'}{P'} = \frac{\partial l}{P}$, also $\partial l_2' = \partial l_2 = \frac{P'}{P}\partial l$.

Bezeichnet man aber durch $\theta'$ den Winkel zwischen der Richtung von $q$ nach $\sigma$ und von $q$ an $P$ entlang nach dem Krümmungscentrum hin, so dass $\theta'$, wenn $o$ an $N$ entlang sich fortbewegt, von 0 bis $2\pi$ wachsen kann, so ergiebt sich $P' = P - R\cos\theta'$, also $\partial l_2 = \left(1 - \frac{R\cos\theta'}{P}\right)\partial l$.

Lässt man ferner $\theta'$ um $\partial\theta'$ wachsen, so beschreibt $o$ das Bogenelement $\partial l_1$, also ist $\partial l_1 = R\partial\theta'$.

Das Element der Oberfläche $S$ ist $\partial S = \partial l_1 \partial l_2$, mithin

$$\partial S = \left(1 - \frac{R\cos\theta'}{P}\right) R\partial\theta'\partial l.$$

Ist daher $l$ die Länge der Axe $l$, so ist die Gesammtoberfläche von $S$ zwischen dem ersten und letzten Querschnitte gleich

$$\int \partial l \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{R\cos\theta'}{P}\right) R\partial\theta' = 2\pi R l.$$

## Note 3.

Auf der Fläche $S$ sei eine Linie $l$ verzeichnet, deren Länge und Eckenzahl nicht unendlich gross sind. Um diese Linie als Axe legen wir eine Schaar von Röhrenflächen, und nennen $R$ den Halbmesser einer beliebigen Röhre $\Sigma$, $c$ den Halbmesser der weitesten Röhre $\Sigma_0$. Diese letztere schneidet aus $S$ ein Stück $S'$ heraus, von dem wir voraussetzen, dass es von jeder geraden Linie und jeder Krümmungslinie einer der genannten Röhrenflächen höchstens in $n$ getrennten Punkten, d. h. nicht unendlich oft geschnitten wird.

Ist jetzt $\partial S'$ ein, zwischen die Röhren von den Halbmessern $R$ und $R + \partial R$ fallendes Element von $S'$, $k$ eine unter 1 liegende positive Zahl, so convergirt das über die ganze Fläche $S'$ erstreckte Integral

$$\eta = \int \frac{\partial S'}{R^k}$$

mit abnehmendem $c$ gegen Null.



Zum Beweise dieses Satzes ist eine Zerlegung von $\eta$ erforderlich. Die Röhrenfläche $\Sigma_0$ setzt sich aus Kugelstücken und Röhrenflächen im engern Sinne zusammen. Die letzteren können durch einen Querschnitt $Q$ erzeugt werden, der sich an den stetig gebogenen Theilen von $l$ entlang fortbewegt. Zu den ersteren gehören die halbkugelförmigen Verschlussstücke über den Enden von $l$ und, wie aus der Erzeugung der Fläche durch Fortbewegung einer Kugel hervorgeht, in jeder Ecke $m$ von $l$ zwei Kugelsectoren, welche die angrenzenden Röhrenstücke in Verbindung setzen, und von denen der eine innerhalb, der andere ausserhalb beider Stücke liegt.

Dehnt man nun in $\eta$ zuerst die Integration über alle Elemente $\partial S'$ aus, welche von $Q$ überstrichen werden, so werden in jeder Ecke $m$ die in den einen Kugelsector fallenden Elemente zweimal aufgenommen, dagegen die im anderen und in den Verschlussstücken liegenden weggelassen. Ist $\eta'$ das Resultat dieser Integration, so muss man also, um $\eta$ zu erhalten, zu $\eta'$ für jede Ecke und jedes Ende von $l$ ein Integral $\int \frac{\partial S''}{R^k}$ addiren, und für jede Ecke ein solches Integral subtrahiren; in diesen Integralen ist $R$ die Entfernung von $\partial S''$ bis zum fraglichen Punkte von $l$, während $\partial S''$ das Element des ins jedesmalige Kugelstück fallenden Theils von $S'$ ist. Jedes dieser Integrale ist also kleiner als $c\int \frac{\partial S''}{R^{1+k}}$, und um so mehr kleiner als dasselbe Integral, wenn es über alle in die volle Kugel fallenden Elemente $\partial S''$ erstreckt wird. Da für das letztere die in der ersten Note gestellten Bedingungen erfüllt sind, so verschwindet es selbst, und um so mehr jedes zu $\eta'$ hinzuzufügende Integral mit $c$ zugleich. Dasselbe gilt von der Summe dieser Integrale, da ihre Anzahl nicht unendlich gross ist. Folglich verschwindet auch $\eta - \eta'$ zugleich mit $c$.

Die Untersuchung kann hiernach auf den Fall beschränkt werden, wo $l$ stetig gebogen, und $S'$ durch die Röhrenfläche $\Sigma_0$ vom Halbmesser $c$ und ihre Querschnitte in den Enden von $l$ begrenzt ist. Wir setzen demnach voraus, dass der Krümmungshalbmesser $P$ von $l$ nirgendwo kleiner als eine gegebene Strecke $\gamma$ wird, und wählen $c < \gamma$; dann wird für jeden Winkel $\theta$ $1 - \frac{R\cos\theta}{P}$ positiv und kleiner als 2, wovon später Gebrauch gemacht wird.

Dies festgestellt, betrachten wir der leichteren Darstellung wegen die Halbmesser $R$, die zu $l$ parallelen Krümmungslinien $l_2$ der Röhrenflächen und ihre, in die Querschnitte fallenden Krümmungslinien $l_1$ als drei Schaaren von Lichtstrahlen. Dann wirft $\partial S'$ in jeder dieser drei Beleuchtungen einen Schatten, in der ersten auf die Röhrenfläche $\Sigma$

vom Halbmesser $R$, in der zweiten auf den Querschnitt $Q$ und in der dritten auf denjenigen Theil E der Krümmungsebene von $l$, welcher die rückwärts gehende Verlängerung von $P$ enthält. Nennt man die Flächeninhalte dieser Schatten, wie sie aufgezählt wurden, $\partial \Sigma$, $\partial Q$, $\partial \mathrm{E}$, so ist

$$\partial S' < \partial \Sigma + \partial Q + \partial \mathrm{E},$$

da die drei Schatten von $\partial S'$ wie zu einander senkrechte Projectionen von $\partial S'$ oder wie Vergrösserungen solcher angesehen werden können.

Bedeutet $\partial \Sigma_0$ den Flächeninhalt des Schattens, den $\partial \Sigma$ auf die äusserste Röhrenwand $\Sigma_0$ wirft, und $h$ das Vergrösserungsverhältnis, so wird $\partial \Sigma = \frac{\partial \Sigma_0}{h}$; es wird demnach auch

$$\int \frac{\partial S'}{R^k} < \int \frac{\partial \Sigma_0}{h R^k} + \int \frac{\partial Q}{R^k} + \int \frac{\partial \mathrm{E}}{R^k},$$

wenn rechts der jedesmalige Werth von $R$ durch die Lage des schattenwerfenden Elementes $\partial S'$ bestimmt wird, und die Integrationen sich über alle beschatteten Theile von $\Sigma_0$, $Q$ und E erstrecken, und zwar über jedes Element so oft, als es Elemente $\partial S'$ giebt, deren Schatten es aufnimmt.

Nennt man $\partial l_1$, $\partial l_2$ die Elemente der beiden Krümmungslinien $l_1$, $l_2$, die vom Punkte $p$ der Fläche $\Sigma$ ausgehen, und $\theta$ den Winkel zwischen dem nach $p$ führenden Halbmesser $R$ und dem Krümmungshalbmesser $P$ im Fusspunkte von $R$ auf $l$, so ist $\partial l_1 = R \partial \theta$, $\partial l_2 = \left(1 - \frac{R \cos \theta}{P}\right) \partial l$, wenn $\partial l_2$ und $\partial l$ von denselben Querschnitten begrenzt werden. Die Elemente von $\Sigma$, $Q$ und E werden hiernach folgende:

$$\partial \Sigma = \partial l_2 \partial l_1 = R\left(1 - \frac{R \cos \theta}{P}\right) \partial l \partial \theta,$$

$$\partial Q = \partial l_1 \partial R = R \partial R \partial \theta,$$

$$\partial \mathrm{E} = \partial R \partial l_2 \text{ für } \theta = \pi, \text{ also } = \left(1 + \frac{R}{P}\right) \partial l \partial R.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial \Sigma_0}{h R^k} = R^{1-k}\left(1 - \frac{R \cos \theta}{P}\right) \partial l \partial \theta < 2 c^{1-k} \partial l \partial \theta,$$

$$\frac{\partial Q}{R^k} = R^{1-k} \partial R \partial \theta,$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{R^k} = \left(1 + \frac{R}{P}\right) \frac{\partial l \partial R}{R^k} < \frac{2 \partial l \partial R}{R^k}.$$

Bildet man jetzt für jedes Element $\partial S'$ die verstärkte Ungleichheit

$$\frac{\partial S'}{R^k} < 2 c^{1-k} \partial l \partial \theta + R^{1-k} \partial R \partial \theta + \frac{2 \partial l \partial R}{R^k},$$



und beachtet bei der Addition, dass auf jedes beschattete Element $\partial \Sigma_0$, $\partial Q$, $\partial \mathrm{E}$ nicht mehr als $n$ Schatten fallen können, so wird umsomehr

$$\int \frac{\partial S'}{R^k} < n\left[2 c^{1-k} \int \partial l \partial \theta + \int R^{1-k} \partial R \partial \theta + 2 \int \frac{\partial l \partial R}{R^k}\right],$$

wo die Integrationen über jedes beschattete Element $\partial \Sigma_0$, $\partial Q$, $\partial \mathrm{E}$ nur einmal zu erstrecken sind. Diese Ungleichheit wird mindestens nicht geschwächt, wenn statt dessen die Integrationen über alle Elemente ausgedehnt werden, also ist

$$\eta < n\left[4 \pi l \cdot c^{1-k} + \frac{2\pi}{2-k} c^{2-k} + \frac{2}{1-k} l c^{1-k}\right].$$

Solange daher $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{l}$ und die positive Zahl $1 - k$ von Null verschieden sind, kann man die positive Grösse $\eta$ durch Verkleinerung von $c$ unter jede Grenze hinabdrücken, w. z. b. w.

Zürich, 15. Juni 1865.

# XI.

## Ueber den Einfluss von Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 66, 1866, S. 1—14.)

Die Aufgaben, deren Lösung von der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen abhängt, führen in der Regel Nebenbedingungen mit sich, welche aus der mit dem Problem gegebenen realen Bedeutung der einzelnen Variabeln entspringen, und demgemäss stets in einer Beschränkung der Veränderlichkeit dieser Grössen bestehen.

Man hat diesem Umstande bisher keine besondere Beachtung geschenkt, indem bei den mir bekannt gewordenen Untersuchungen über Probleme dieser Art die Schlüsse sich ausschliesslich auf die den allgemeinen Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. eigenthümlichen Formverhältnisse stützen, ohne dass die Frage erwähnt wird, ob diese Formen auch die hier unerlässliche Eigenschaft besitzen, jene nur auf Grössenverhältnisse gerichteten Nebenbedingungen ununterbrochen zu befriedigen.

Dies ist nun keineswegs unter allen Umständen der Fall; vielmehr kann es vorkommen, dass diese Nebenbedingungen zu wesentlichen Abweichungen von den Gesetzen zwingen, nach denen die in der allgemeinen Lösung dargestellten Functionen durch die Differentialgleichungen von bekannten zu unbekannten Werthen fortgesetzt werden, und dann treten Erscheinungen ein, die bisher unbemerkt bleiben mussten, weil sie durch eine von diesen Gesetzen nirgendwo abweichende Rechnung nicht aufgedeckt werden können.

### 1.

Wir beschränken uns der Deutlichkeit wegen auf den Fall, wo die Auflösung gewöhnlicher Differentialgleichungen dazu dienen soll, um die Bewegungen materieller Punkte zu bestimmen. Diese Aufgabe schliesst ihrer Natur nach drei Bedingungen ein, dass nämlich 1) bei allen jene Bewegung unmittelbar bestimmenden Grössen imaginäre



Aenderungen, 2) bei der Zeit und den Coordinaten unstetige Aenderungen, und 3) bei der Zeit alle Beschränkungen in der Zu- oder Abnahme ausgeschlossen bleiben.

Diese Bedingungen würden nicht besonders zu erwähnen sein, wenn sie mit den Differentialgleichungen der Bewegung niemals in Widerspruch kommen könnten. In Wirklichkeit sind aber diese letzteren nichts anderes, als Gleichungen zwischen unbekannten Grössen, von denen einzelne die Derivirten anderer sind. Sie enthalten also thatsächlich zwei von einander zu unterscheidende Bedingungen, von denen die eine darin besteht, dass die Werthe jener Grössen durch die Werthe der übrigen gegeben sind, die andere darin, dass sie überdies die Derivirten anderer sein sollen. So enthält z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{dx}{dt}\sin\alpha + x\cos\alpha\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{dx}{dt}\cos\alpha - x\sin\alpha\right)^2 = 1$$

gleichzeitig alle Bedingungen, welche durch die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{a^2}(y\sin\alpha + x\cos\alpha)^2 + \frac{1}{b^2}(y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 = 1, \quad y = \frac{dx}{dt}$$

ausgedrückt sind.

Da hiernach zwei von einander durchaus unabhängige Bestimmungen vorliegen, von denen jede das Zeichen von $y$ an die Zu- oder Abnahme von $x$ bindet, nämlich einerseits die ursprüngliche Gleichung zwischen den Grössen $x$ und $y$ selbst nebst den Stetigkeits-Bedingungen, andererseits die Gleichung $y = \frac{dx}{dt}$ nebst den Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen, so ist unmittelbar klar, dass Widersprüche zwischen sämmtlichen Bedingungen nicht immer unmöglich sind, und unter welchen Voraussetzungen sie eintreten müssen.

*Ein Widerspruch zwischen diesen sämmtlichen Bedingungen tritt stets und auch nur dann ein, wenn eine Differentialgleichung oder ein System solcher in irgend einem Augenblicke anfängt, das Zeichen der Derivirten einer Function in einer den Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen widersprechenden Weise zu bestimmen.* Von demselben Augenblicke an ist eine reelle und zugleich stetige Fortsetzung dieser Function nur möglich, wenn entweder eine zweite, sich dort stetig anschliessende, im Allgemeinen singuläre Lösung existirt, oder die Differentialgleichungen in einer entsprechenden Weise abgeändert werden. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn eine Function $x$ und die unabhängige Variable $t$ in Folge der Stetigkeitsbedingungen ihre Aenderungen im früheren Sinne fortsetzen müssen, aber zugleich $\frac{dx}{dt} = x'$ durch die Differentialgleichungen zu einem Zeichenwechsel gezwungen wird.

II. Wenn $x'$ ohne Unstetigkeit sein Zeichen nicht wechseln kann, aber $x$ bei stetigem $x'$ durch die Realitätsbedingungen verhindert ist, seine Aenderungen im früheren Sinne fortzusetzen.

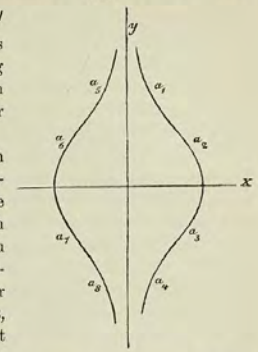
Dieser zweite Fall tritt z. B. ein, wenn die Differentialgleichungen für $x$, als Function von $x'$ betrachtet, ein Maximum bei positivem, oder ein Minimum bei negativem $x'$ liefern, ohne dass den Bedingungen der Aufgabe durch eine besondere Lösung genügt werden kann, welche eine dem Zeichen von $x'$ entsprechende Fortsetzung von $x$ gestattet, z. B. in der Differentialgleichung $(x'-a)^2 + x^2 = a^2$ für $x' = a$, $x = a$. Hat $x$ von Null aus gehend diesen Werth erreicht, so kann es wegen des Zeichens von $x'$ nicht zu früheren Werthen zurückkehren, wegen des Werthes von $x'$ nicht bei dem Werthe $a$ beharren, und wegen der Differentialgleichung und der Realitätsbedingungen denselben nicht überschreiten.

*Bedeutet bei einem mechanischen Problem, welches diesen Fall zulässt, $x$ irgend eine Coordinate, $t$ die Zeit, also $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit welcher $x$ wächst, so reicht die Angabe der beschleunigenden Kräfte nebst den Anfangs-, Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen zur völligen Bestimmung der Bewegung nicht für alle Folgezeiten hin, sondern nur bis zu dem Augenblicke, wo jener Fall zum ersten Male eintritt. Von diesem Augenblicke an ist die stetige und zugleich reelle Fortsetzung von $x$ bei stetigem $\frac{dx}{dt}$ unmöglich, also, da die erstere wegen des unbeschränkten Wachsens von $t$ nothwendig ist, wird $\frac{dx}{dt}$ zu einer Unstetigkeit gezwungen, die jedoch vollkommen willkürlich ist, weil die bis zu jenem Augenblicke wirkenden Bedingungen keine Angabe über die Grösse derselben enthalten.*

Auch der erste Fall ist unter zwei verschiedenen Voraussetzungen möglich. Sind nämlich $x_0$, $t_0$ die Werthe von $x$ und $t$, für welche derselbe eintritt, so genügt man entweder von da ab den Bedingungen der Aufgabe durch eine, von der bis dahin gültigen verschiedene, aber bei $x = x_0$, $t = t_0$ sich stetig anschliessende Lösung, oder es hört, falls eine solche Lösung nicht existirt, wenigstens eine der Grössen $x$, $t$ auf, reell zu sein. In der That kann unter dieser Voraussetzung $x$, wenn $t$ den Werth $t_0$ überschreitet, weder $= x_0$ bleiben, weil dies eine von der früheren, ein veränderliches $x$ voraussetzenden, verschiedene Lösung wäre, noch kann es, ohne imaginär zu werden, $x_0$ überschreiten, weil hierbei $x'$ sein Zeichen ändern würde, während der dritte Fall, dass es zu früheren Werthen zurückkehre, durch die Voraussetzungen des vorliegenden Falles ausgeschlossen ist.



Ein Beispiel dieser Art ist die Gleichung $x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 - x^2$. Setzt man $\frac{dx}{dt} = y$, und betrachtet $x$ und $y$ als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so entspricht dieser Gleichung eine Curve von der nebenverzeichneten Gestalt, welche die $y$-Axe zweimal zur Asymptote hat.




Lässt man nun $x$ zwischen den Grenzen $-1$ und $1$ oscilliren, und verlangt, dass hierbei alle einzelnen Theile im Ausdrucke für $y$ sich mit $x$ nach der Stetigkeit ändern, wie es später zu beweisenden Sätzen zufolge bei der unbestimmten Integration vorstehender Differentialgleichung wirklich geschieht, so wird diese Curve durch den Punkt $x$, $y$ von $a_1$ aus in der Richtung $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_1, \ldots$ durchlaufen, indem $y$, so oft $x$ durch Null geht, von einem der Werthsgebiete $+\infty$ und $-\infty$ ins andere springt, um sich von da ab eine Zeit lang nach der Stetigkeit zu ändern.

Dies widerspricht jedoch auf der Seite der negativen $x$ der Bedingung, dass bei reellen Werthen aller Variabeln stets $y = \frac{dx}{dt}$ sei, indem auf dem Zweige $a_5$, $a_6$, bei abnehmendem $x$, $\frac{dx}{dt}$ positiv, auf dem Zweige $a_7$, $a_8$, bei wachsendem $x$, $\frac{dx}{dt}$ negativ sein würde. Wenn man daher aus obiger Differentialgleichung $x$ durch unbestimmte Integration ermittelt, und die willkürliche Constante der Bedingung gemäss wählt, dass der Punkt $x$, $y$ zur Zeit $t = 0$ von $a_1$ ausgehe, so kann diese Lösung reelle Werthe für $x$ bei reellem $t$ nur bis zu dem Augenblicke liefern, wo $x$ zum ersten Male $= 0$ wird.

2.

Die vorangehenden Grössenbestimmungen stützen sich ausdrücklich auf die Bedingung reeller Werthe aller Variabeln, und können ohne dieselben nicht bestehen; sie begründen daher keine Schlüsse auf entsprechende Eigenschaften der durch die Differentialgleichungen bedingten analytischen Formen. Um auch für die letzteren die Folgerungen festzustellen, welche sich an die obigen Ausnahmefälle knüpfen, muss die Untersuchung bei unbeschränkten Variabeln durchgeführt werden. Der hierbei einzuschlagende Weg bestimmt sich durch den nachher zu beweisenden Satz, *dass der Uebergang von einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu seiner allgemeinen Lösung stets als durch unbestimmte Integration vollständiger Differentiale bewirkt angesehen werden kann.*

Während dieser unbestimmten Integrationen, welche man sich in der bekannten Weise als successive, die partiellen Differentiale der Reihe nach berücksichtigende zu denken hat, durchlaufen nun die unabhängigen Variabeln und die der Integration unterworfenen Functionen Werthenreihen, welche zwar unbestimmt gelassen sind, aber nichts desto weniger einer wesentlichen Einschränkung unterliegen.

In der That ist jedes Resultat der unbestimmten Integration, soweit dieser Begriff überhaupt reicht, ein Ausdruck $u$, der als solcher bei fester, übrigens willkürlicher unterer Begrenzung stetige Aenderungen nur mit der oberen Begrenzung zugleich erleidet, und den Ausdruck unter dem Integralzeichen zum Differential hat. Wenn daher der Ausdruck $u$ überhaupt vom Integrationswege, nicht bloss von seiner Begrenzung abhängt, so muss diese Abhängigkeit eine solche sein, dass eine stetige Aenderung des Integrationsweges bei fester Begrenzung entweder eine sprungweise Aenderung von $u$ zur Folge hat, oder, wo $u$ nicht unstetig ist, es ganz und gar ungeändert lässt.

In Folge dessen ist durch die unbestimmte Integration jeder Integrationsweg ausgeschlossen, an dem entlang die Werthe der unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrücke nicht allenthalben in der speciellen Weise auf einander folgen, wie sie sich bei der stetigen Fortsetzung der entsprechenden Functionen über complexe Werthsgebiete an einander fügen. Denn wenn derselbe eine angebbare Stelle enthielte, an welcher der durch die stetige Fortsetzung bestimmte analytische Verlauf einer von diesen Functionen unterbrochen ist, so würde man durch stetige Ortsänderung dieser Stelle dem Resultate der Integration stetige und von Null verschiedene Aenderungen ertheilen können.

Wenn daher in Folge anderweitiger Bedingungen in dem Augenblicke, wo der Integrationsweg eine bestimmte Stelle überschreitet, bei einer von den der Integration unterworfenen Functionen der analytische Verlauf unterbrochen werden muss, so muss von diesem Augenblicke an das Resultat dieser Integration von dem der unbestimmten abweichen, da beide sich in verschiedener Weise ändern.

Wenn ein System $A$ von $n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen eben so viel gesuchten Functionen die Eigenschaft hat, dass sich aus ihm nicht sämmtliche Derivirten eliminiren lassen, so besteht seine allgemeine Lösung aus $n$ Gleichungen $B$ zwischen den gesuchten Functionen und $n$ willkürlichen Constanten, welche bekanntlich in Bezug auf die Functionen von einander unabhängig sind, und überdies, was für unseren Zweck ebenso wesentlich ist, dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die willkürlichen Constanten besitzen. Denn liessen sich diese aus $B$ eliminiren, so wäre das Eliminationsresultat entweder identisch, und dann bestände das System $B$ aus weniger als $n$ Gleichungen, oder dasselbe stellte sich dar als eine von den Gleichungen $A$ geforderte Relation, in der weder willkürliche Constanten noch Derivirten vorkommen können, und dann liessen sich aus $A$ alle Derivirten eliminiren, was der Voraussetzung zuwider ist.



Folglich ist durch die Gleichungen $B$ jede von den $n$ willkürlichen Constanten in völlig bestimmter Weise abhängig gemacht von der unabhängigen Veränderlichen und den ursprünglich gesuchten Functionen. Es giebt daher auch $n$ von einander unabhängige vollständige Differentiale, welche in Folge der Gleichungen $A$ gleich Null sein müssen, und von denen aus man durch unbestimmte Integration zu einem mit $B$ gleichbedeutenden System von Gleichungen gelangt. Folglich muss die allgemeine Lösung von $A$ wenigstens mittelbar als das Resultat unbestimmter Integrationen angesehen werden. Dasselbe gilt von der allgemeinen Lösung jedes beliebigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, da dasselbe, auf seine wirkliche Ordnung reducirt (vergl. die Abhandlung von Jacobi im 64. Bande dieses Journals, Seite 297), als ein System $A$ dargestellt werden kann.

Hieraus ziehen wir nun den Schluss, *dass die allgemeine Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen bei mechanischen Problemen, weil sie dem Resultate unbestimmter Integrationen entspricht, nach Berücksichtigung der Anfangsbedingungen nur bis zu dem Augenblicke gültig ist, wo zum ersten Male einer Derivirten durch die Differentialgleichungen ein den Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen widersprechendes Vorzeichen angewiesen wird.*

Umgekehrt kann von den obigen Ausnahmefällen weder der eine, noch der andere eintreten, so lange die allgemeine Lösung bei reellen und stetigen Aenderungen der Variabeln jeder Function reelle, und wo das gefordert ist, zugleich stetige Aenderungen anweist, weil unter dieser Voraussetzung ein Widerspruch zwischen der Zu- oder Abnahme einer Function und dem Zeichen ihrer Derivirten unmöglich ist.

## 3.

Zum Schlusse will ich an einigen einfachen Beispielen nachweisen, wie in den obigen Ausnahmefällen die Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen zur Bestimmung der ferneren Bewegung verhelfen, und zu diesem Zwecke ein von mir vor längerer Zeit gefundenes Verfahren benutzen, welches, wenn auch auf eine specielle Gattung von Differentialgleichungen beschränkt, doch vorzugsweise geeignet ist, um die hier erörterten Verhältnisse zur Anschauung zu bringen. Dasselbe gewährt überdies bei einer grossen Zahl von Aufgaben der Mechanik ohne die geringste Mühe eine so vollständige Einsicht in den Verlauf der zu untersuchenden Erscheinung, wie sie durch die Rechnung nur selten, und stets nur auf Umwegen erreicht werden kann. Dasselbe besteht in Folgendem.

Ist eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{1.}$$

zu untersuchen, in welcher die unabhängige Variable $t$ nicht vorkommt, so betrachte man in einem System rechtwinkliger Coordinaten $x$ als die Abscisse zweier Punkte $m$ und $\mu$ zur Zeit $t$, von denen der erstere auf der Abscissenaxe beharrt, während die Ordinate $y$ des andern $= \frac{dx}{dt}$ ist. Während alsdann $m$ sich der Gleichung (1.) gemäss an der Abscissenaxe entlang fortbewegt, beschreibt der mit $m$ stets auf derselben Ordinate befindliche Hülfspunkt $\mu$ eine Curve, deren Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{2.}$$

ist, und welche die Geschwindigkeitscurve heissen soll.

Dies festgestellt, ist $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot y$; folglich wird die Geschwindigkeitscomponente von $\mu$ parallel zur $x$-Axe durch die Ordinate, parallel zur $y$-Axe durch die Subnormale der Geschwindigkeitscurve dargestellt. Die tangentiale Geschwindigkeit von $\mu$ ist hiernach gleich dem von $\mu$ bis zur $x$-Axe reichenden Stücke $N$ der Normale. Legt man die Richtungen der wachsenden $x$ und $y$ wie üblich nach rechts und oben, so bewegt sich $\mu$ wegen der Gleichung $\frac{dx}{dt} = y$ nach rechts oder links, je nachdem es sich über oder unter $m$ befindet.

Ist $\varrho$ der Krümmungshalbmesser der Geschwindigkeitscurve, $d\tau$ der Winkel, um den er sich während der Zeit $dt$ dreht, $ds$ das $d\tau$ gegenüberliegende Bogenelement, so ist $\varrho\, d\tau = ds$. Bezeichnet man daher die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Normale sich dreht, durch $\omega$, so folgt $\varrho\omega = \frac{ds}{dt}$, also

$$\omega = \frac{N}{\varrho}.$$

Betrachtet man $m$ als eine Masseneinheit, so wird die an $m$ wirkende beschleunigende Kraft $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$ durch die von $m$ selber aus-



gehende Subnormale dargestellt, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, stets auf derjenigen Seite von $m$, nach welcher sie diesen Punkt zieht.

Auf diese Weise ist die zu untersuchende Bewegung von $m$ auf die Bewegung des Hülfspunktes $\mu$ zurückgeführt, und die letztere augenfällig, solange $\mu$ sich ausserhalb der $x$-Axe befindet, weil in diesem Falle die Geschwindigkeit von $\mu$ und ihre Richtung sich aus der Gestalt der Geschwindigkeitscurve und der Lage von $\mu$ unmittelbar zu erkennen geben.

Wenn dagegen $\mu$ in die $x$-Axe einrückt, also $y = \frac{dx}{dt} = 0$ wird, so kommt $m$, welches jetzt mit $\mu$ zusammenfällt, dort für einen Augenblick zur Ruhe. Ob es in derselben verharren, oder seine Bewegung weiter fortsetzen muss, hängt davon ab, ob mit $\frac{dx}{dt}$ auch die andere Geschwindigkeitscomponente $\frac{dy}{dt} = y\frac{dy}{dx}$ von $\mu$ erlischt. Ist dies der Fall, ist z. B. der Winkel, unter welchem $\mu$ die $x$-Axe trifft, kein rechter, so geht $\mu$ und mit ihm $m$ in den Ruhezustand über. Damit die Bewegung von $\mu$ nach seinem Eintritte in die $x$-Axe nicht erlösche, ist erforderlich, wenn auch nicht in allen Fällen hinreichend, dass dort $y\frac{dy}{dx}$ von Null verschieden bleibt. Was unter dieser Voraussetzung stattfindet, hängt hauptsächlich davon ab, ob der Punkt, den die Geschwindigkeitscurve mit der $x$-Axe gemein hat, ein Rückkehrpunkt, ein Wendepunkt oder ein Punkt gewöhnlicher Biegung ist. Die verschiedenen hier möglichen Fälle lassen sich indessen stets so leicht erledigen, dass eine allgemeine Erörterung über dieselben überflüssig ist.

I. Sei die Bewegung von $m$ bestimmt durch die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{x^3}$, mit der Bedingung, dass für $t = 1$, $x = 1$ und $\frac{dx}{dt} = 0$ sei, nebst allen aus dem Begriff der Bewegung folgenden Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen. Wir fügen noch hinzu, dass die Geschwindigkeit von $m$, ohne durch Null zu gehen, ihre Richtung nicht umkehren soll, was die Stetigkeitsbedingung für unendliche Werthe von $\frac{dx}{dt}$ vertritt.

Durch einmalige Integration findet sich die oben als Beispiel benutzte Gleichung $x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 - x^2$; also ist die Gleichung der Geschwindigkeitscurve $x^2y^2 = 1 - x^2$. Dieselbe giebt für $y = 0$, $x = \pm 1$, $y\frac{dy}{dx} = \mp 1$. Wenn daher der Punkt $\mu$ die $x$-Axe trifft, so geht er durch dieselbe hindurch mit der Geschwindigkeit 1. Da ferner $\mu$ sich unter der $x$-Axe nach links, über derselben nach rechts bewegt, so gelangt er, auf welchem Zweige er sich auch befinden mag, mit wachsender Geschwindigkeit und wachsender Ordinate auf die unendlich entfernten Theile dieses Zweiges. In demselben Augenblicke geht der mit $\mu$ fortwährend auf derselben Ordinate befindliche Punkt $m$ mit unendlich grosser Geschwindigkeit durch den Anfangspunkt, wodurch $\mu$ auf die benachbarten Theile des anderen Zweiges übergeführt wird. Da hiernach $\mu$ die Geschwindigkeitscurve unaufhörlich in derselben Richtung, und dieselbe Stelle jedesmal mit derselben Geschwindigkeit durchläuft, so ist seine Bewegung eine rein periodische. Folglich führt $m$ periodische Oscillationen zwischen den Abscissen $x = 1$ und $x = -1$ aus. Da überdies die Geschwindigkeitscurve in Bezug auf die Coordinatenaxen symmetrisch ist, so sind auch die Viertelsschwingungen von $m$ symmetrisch. Die Dauer einer ganzen Schwingung ist demnach viermal so gross, wie die Zeit, deren $\mu$ bedarf, um einen Quadranten zu durchlaufen. Wegen $dt = \frac{dx}{y}$ ist die letztere $= \int_0^1 \frac{dx}{y}$ bei positivem $y$, also $= 1$. Die Dauer einer vollständigen Schwingung beträgt also 4 Zeiteinheiten.

Durch Integration findet man mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen $x = \sqrt{t(2-t)}$, was nur von $t = 0$ bis $t = 2$ reell ist. An den Grenzen dieses Zeitraums wird $x = 0$, und hier tritt der Fall ein, dass, wenn $x$ seine reellen Aenderungen durch Null hindurch fortsetzt, der Ausdruck $\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}$ für $\frac{dx}{dt}$ bei stetiger Aenderung seiner einzelnen Theile das Zeichen wechselt, was die reelle und zugleich stetige Fortsetzung von $x$ und $t$ durch die Differentialgleichung selbst unmöglich macht.

II. Sei $\alpha$ eine reelle Zahl zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, und die Bewegung von $m$ bestimmt durch die Differentialgleichung $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\operatorname{cotg}\alpha^2}{x^3} + x = 0$; die übrigen Bedingungen sollen dieselben sein, wie im vorigen Beispiele.

Durch einmalige Integration erhält man $x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1-x^2)(\operatorname{cotg}\alpha^2 + x^2)$. Daraus ergiebt sich weiter durch unbestimmte Integration

$$t = \text{const.} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x^2}{\operatorname{cotg}\alpha^2 + x^2}},$$

und hieraus durch passende Bestimmung der Constanten nach einer kleinen Reduction $x^2 = \cos^2(1-t) - \operatorname{cotg}\alpha^2 \sin^2(1-t)$. Folglich hat $x$ die Periode $2\pi$. Da indessen, wie man sofort sieht, $x$ aus vorstehender Gleichung zu Anfange nur während des Zeitraums $1 - \alpha < t < 1 + \alpha$ reelle Werthe erlangt, so lassen sich aus der Periodicität des Aus-



druckes für $x$ keine weiteren Schlüsse ziehen. An den Grenzen dieses Zeitraumes tritt derselbe Ausnahmefall wie im vorigen Beispiele ein.

Die Geschwindigkeitscurve, deren Gleichung $x^2y^2 = (1-x^2)(\operatorname{cotg}\alpha^2 + x^2)$ ist, hat eine ähnliche Gestalt, wie im vorigen Falle; wo sie die $x$-Axe schneidet, wird die Geschwindigkeit von $\mu$, abgesehen vom Zeichen, $= \frac{1}{\sin\alpha^2}$, also von Null verschieden. Folglich finden in Bezug auf die Bewegung von $\mu$ und $m$ auch die vorigen Schlüsse statt. Die Zeit, deren $\mu$ bedarf, um einen Quadranten zu durchlaufen, ergiebt sich aus dem obigen Ausdrucke für $t$ gleich $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha$, da $\alpha$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Folglich führt $m$ periodische Oscillationen zwischen den Abscissen $x = 1$ und $x = -1$ aus, aber die Dauer einer ganzen Schwingung ist nicht $= 2\pi$, wie die allgemeine Lösung andeutet, sondern $= 4\alpha$.

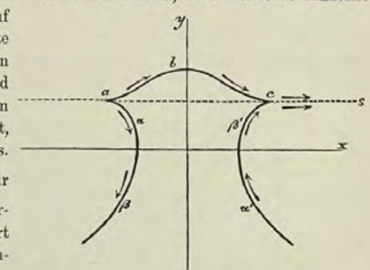
III. Sei die Bewegung des Punktes $m$ durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x\sqrt[3]{1 - \frac{dx}{dt}}$$

und die hinzugehörigen Bedingungen bestimmt.

Diese Gleichung hat die singuläre Lösung $\frac{dx}{dt} = 1$; durch Integration findet man dagegen $3\left(2\frac{dx}{dt} + 3\right)\left(1 - \frac{dx}{dt}\right)^{\frac{2}{3}} = 14 - 5x^2$, bei passender Wahl der Integrationsconstanten. Die letztere hat zur Folge, dass die Geschwindigkeitscurve, deren Gleichung $3(2y+3)(1=y)^{\frac{2}{3}} - 14 - 5x^2$ ist, nothwendig durch die Anfangslage von $\mu$ geht, d. h. $\mu$ seine Bewegung auf der Geschwindigkeitscurve beginnt. Es wird sich zeigen, dass $\mu$ nicht unter allen Umständen auf ihr verbleibt.

Was nun die Gestalt dieser Curve betrifft, so ist dieselbe zunächst symmetrisch in Bezug auf die $y$-Axe. Auf der Seite der positiven $x$ gehören zu jedem $x$ zwischen 1 und $\sqrt{\frac{14}{5}}$ drei reelle $y$, von denen eines negativ ist, sonst nur ein einziges. Da $y\frac{dy}{dx} = x\sqrt[3]{1-y}$ für $x = 1$, $y = 0$ nicht verschwindet, so findet dort ein senkrechter Durchschnitt mit der $x$-Axe statt, welcher die Fortbewegung von $\mu$ nicht hindert. Für $y = 1$,



$x = \sqrt{\frac{14}{5}}$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$, also hat die Curve dort eine Spitze $c$, in welcher ihre beiden dort von links her zusammentreffenden Zweige von der in der Figur punktirten Geraden $y = 1$, welche der singulären Lösung entspricht, berührt werden. Endlich erlangt $y$ für $x = 0$ ein Maximum.

Es sind hiernach in Betreff der anfänglichen Lage von $\mu$ drei Voraussetzungen möglich.

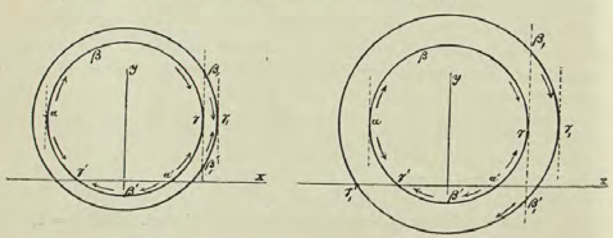
$\alpha$) Befand $\mu$ sich zu Anfange in $\alpha$ auf dem Zweige $\alpha\beta$, so bewegt es sich zunächst nach rechts, geht dann durch die $x$-Axe, und setzt von dort aus seine Bewegung über $\beta$ hinweg ohne Ende fort.

b) Befand $\mu$ sich zu Anfange auf dem Zweige $abc$, so bewegt es sich nach rechts bis $c$. Von dort kann es, weil die Ordinate in $c$ ihr Zeichen nicht wechselt, nicht nach links zurückkehren, während die Geschwindigkeitscurve sich von $c$ aus auch nicht weiter nach rechts fortsetzt. Folglich würde die stetige Fortbewegung von $m$ über die Abscisse $x = \sqrt{\frac{14}{5}}$ von $c$ hinaus ohne eine Unstetigkeit von $\frac{dx}{dt} = y$ nicht möglich sein, wenn nicht die in $c$ berührende Gerade $cs$ einen den ursprünglichen Bedingungen ebenfalls genügenden Ort für $\mu$ bildete. In $c$ angelangt, geht daher $\mu$ auf $cs$ über, und behält von da ab die Geschwindigkeit 1.

$\alpha'$) Befand endlich $\mu$ sich zu Anfange in $\alpha'$, so durchläuft es den Bogen $\alpha'\beta'c$ und geht dann auf $cs$ über.

Der Gang von $m$, oder der Verlauf von $x$ als Function von $t$, lässt sich hiernach leicht beurtheilen.

IV. Sei $h$ eine positive Constante, und die Bewegung von $m$ bestimmt durch die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{dt} - h\right)\frac{d^2x}{dt^2} + x\frac{dx}{dt} = 0$, die Anfanfangsbedingung, dass für $t = 0$, $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = y_0$ werde, und die hierzu gehörigen Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen.





Setzt man $(y_0 - h)^2 + x_0^2 = c^2$, so folgt $\left(\frac{dx}{dt} - h\right)^2 + x^2 = c^2$, und für die Gleichung der Geschwindigkeitscurve $(y - h)^2 + x^2 = c^2$. Dieselbe ist also ein Kreis $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ vom Halbmesser $c$, dessen Mittelpunkt in der Höhe $h$ über dem Coordinatenursprunge liegt. Wir wollen nun annehmen, $y_0$ und $x_0$ seien so gewählt, dass $c > h$ wird, die Durchschnittspunkte mit der $x$-Axe seien $\alpha'$ und $\gamma'$, und die beiden Punkte, in denen der Kreis von seinen Ordinaten berührt wird, $\alpha$ und $\gamma$. Dann sind in Bezug auf die anfängliche Lage von $\mu$ vier Voraussetzungen möglich.

$\alpha$) Befand $\mu$ sich anfangs zwischen $\alpha$ und $\gamma'$, so bewegt es sich mit abnehmender Geschwindigkeit nach dem Durchschnitte $\gamma'$ mit der $x$-Axe, wo es zur Ruhe kommt.

$\beta'$) Befand $\mu$ sich zu Anfange auf dem Bogen $\alpha'\beta'\gamma'$, so bewegt es sich nach links, und kommt wieder in $\gamma'$ zur Ruhe.

$\beta$) Befand $\mu$ sich zu Anfange auf einem der Bogen $\alpha\beta\gamma$ oder $\alpha'\gamma$, so bewegt es sich in beiden Fällen nach rechts, bis es den Punkt $\gamma$ erreicht, wobei $m$ die Geschwindigkeit $h$ erlangt. Von dort kann $\mu$ nicht nach links zurückkehren, weil die Ordinate $y = \frac{dx}{dt}$ ihr Zeichen nicht wechselt, und nicht weiter nach rechts gehen, da die Geschwindigkeitscurve sich in dieser Richtung nicht fortsetzt, und ausser der Gleichung des obigen Kreises keine andere Lösung existirt, welche den vorliegenden Bedingungen Genüge leistet.

Folglich ist zur stetigen und zugleich reellen Fortsetzung von $x$ und $t$ in dem Augenblicke, wo $\mu$ in $\gamma$ anlangt, eine plötzliche, übrigens willkürliche Aenderung von $\frac{dx}{dt} = y$ erforderlich.

Sei also $y_1$ der Werth, auf den $\frac{dx}{dt}$ von $h$ aus in dem Augenblicke springt, wo $x = c$ wird; dann folgt aus der ursprünglichen Differentialgleichung, wenn $(y_1 - h)^2 + c^2 = c_1^2$ gesetzt wird, $(y - h)^2 + x^2 = c_1^2$; also wird der neue Zweig der Geschwindigkeitscurve ein mit dem vorigen concentrischer Kreis, dessen Halbmesser $c_1 > c$ ist.

Je nach dem Werthe von $y_1$ springt nun der, an keine stetige Ortsänderung gebundene Hülfspunkt $\mu$, nachdem er in $\gamma$ angelangt ist, nach $\beta_1$ oder $\beta_1'$. Liegt ausser $\beta_1$ auch noch $\beta_1'$ über der $x$-Axe (Figur links), so wiederholt sich der vorige Fall, indem nun $\mu$ sowohl von $\beta_1$ wie von $\beta_1'$ aus nach dem in gleicher Höhe mit $\gamma$ liegenden Punkte $\gamma_1$ rückt, also eine neue Unstetigkeit von $\frac{dx}{dt}$ erforderlich wird, die zu einem neuen Kreise mit vergrössertem Halbmesser führt. Liegt $\beta_1'$ unter der $x$-Axe, und springt $\mu$ von $\gamma$ nach $\beta_1'$, so rückt es von dort nach $\gamma_1'$ (Figur rechts), wo es zur Ruhe kommt.

Die Bewegung von $m$ oder der Verlauf von $x$ als Function von $t$ bedarf hiernach keiner weiteren Erörterung.

Weitere geeignete Beispiele zur Anwendung des vorliegenden Verfahrens, welche allerdings nicht auf die hier behandelten Ausnahmefälle führen, liefert die Lehre vom konischen Pendel, von der Drehung eines Körpers um seinen Schwerpunkt und von der Bewegung eines schweren Punktes auf einer beliebig gegebenen Curve. Alle diese Anwendungen sind jedoch so einfach, dass es nicht nöthig ist, hier darauf näher einzugehen.

Zürich, 5. Januar 1866.

# XII.

## Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie.*)

(Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Bd. 1, 1868, S. 89—103.)

Il presente lavoro si occupa del problema delle temperature stazionarie sopra superficie piane, coll'intento di esporre i punti di vista generali che devono mettersi a fondamento nella trattazione di questa quistione.

Ho giudicato conveniente di ritenere per la presente ricerca le condizioni essenziali del problema nella stessa semplicità che è propria della quistione fisica. Se si pone il problema nella sua forma più generale, allora il suo interesse invade un nuovo campo, onde per questo caso è giustificata una speciale ricerca che riservo ad un'altra occasione.

L'unico cangiamento che mi sono permesso per questa volta, concerne l'equazione differenziale del problema, che ho completata col mezzo di un termine indipendente, in guisa che l'espressione $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ non vien posta eguale a zero, ma ad una funzione arbitraria $\varphi$ di $x$, $y$. Fatta astrazione da ragioni più riposte, questa aggiunta ha l'evidente vantaggio che vengono d'ora in avanti esclusi diversi sussidi non adatti a ricerche generali, per es. trasformazioni e soluzioni particolari.

Il principale interesse che si annoda a questo problema, dipende dalla sua conosciuta relazione colle proprietà generali di una funzione di una variabile complessa $x + iy$. Le ricerche fatte finora, per quanto qui potranno occorrere, non mirano però tanto ad approfondire e spiegare completamente questo legame, quanto piuttosto a rendere utile questo legame per gli scopi dell'integrazione.

Se si introducono nell'equazione $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, in luogo delle

*) Traduzione del Dott. Carlo Formenti, in Pavia.

coordinate ortogonali $x$, $y$, le parti reali $\theta$, $\omega$ di una funzione di $x + iy$ come variabili indipendenti, in virtù di quella relazione non vien cangiata la forma dell'equazione differenziale. Da ciò si ha subito il principio adoperato dal sig. Lamé nelle sue pregevoli *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, che la soluzione del problema per la superficie circolare $x^2 + y^2 < c^2$ basta per derivarne, sotto certe supposizioni fatte intorno alla funzione $\theta + i\omega$ ed alla grandezza di $c$, la soluzione per la superficie $\theta^2 + \omega^2 < c^2$.

La stessa trasformazione serve anche di fondamento alla bella memoria del sig. Neumann (Giornale di Borchardt, t. 59, pag. 348). La quale, oltre ad una diligente ricerca sulle curve (dapprima trattate da Cauchy) $\theta^2 + \omega^2 = c^2$, che il signor Neumann chiama *linee di livello*, presenta eziandio un importante progresso nella trattazione dell'attuale problema, facendo dipendere, per mezzo di considerazioni che sono analoghe alla teoria di Green sul potenziale, la determinazione della funzione primitivamente cercata da un'altra $\left[\eta_a^{(p)} d\omega_a \text{ in quanto al valore } = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \xi}{\partial p} ds \text{ art. 1.}\right]$ che è indipendente dai valori arbitrari di quella nel contorno, e soltanto dipende dalla forma del contorno e dalla posizione di un punto arbitrario $p$. L'espressione di questa funzione in $\theta$ ed $\omega$ è data a pag. 354, e la determinazione di $\theta$ ed $\omega$ per mezzo di $x$ ed $y$ vien ridotta ad un problema (pag. 355) il quale, a meno di una condizione di discontinuità non messa in evidenza, ma tuttavia facile a completarsi, costituisce un caso particolare della quistione primitiva. Non vi si danno però applicazioni di questa interessante riduzione a casi determinati.

Quanto sia anche a me riuscito di trovare nuovi punti di vista ed utili sussidi per la presente questione, lo mostreranno le ricerche che seguono.

## I.

Sia distesa sul piano $xy$ una superficie $F$ ad un solo strato e semplicemente connessa (*eine einblättrige und einfach zusammenhängende Fläche*), il cui contorno sia formato da una data curva $K$. Ciò supposto, si cerca una funzione $U$ di $x$, $y$, che unitamente alle sue derivate prime sia ad un valore *(einwerthig)* e continua in $F$, e che sodisfaccia all'equazione:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \varphi(x, y),$$

mentre lungo il contorno $K$ sia:

$$U = \psi(x, y).$$



Per determinare $U$ in punto $o$ di $F$, separiamo da $F$ un cerchio di raggio $\varrho$, il cui centro sia $o$, e formiamo, mediante una funzione $\xi$ che colle sue prime derivate sia nella restante superficie $F'$ ad un valore e continua, l'equazione:

$$\int \xi \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right] dF' = \int \varphi\, \xi\, dF'.$$

Se si indica con $ds$ un elemento arbitrario della linea $K$, con $dp$ il differenziale della normale a $ds$ diretta verso l'esterno, e finalmente con $\theta$ l'angolo che il raggio $\varrho$ uscente da $o$ fa colla direzione delle $x$ crescenti; il primo membro dell'ultima equazione diventerà:

$$-\int\left(\xi \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial \xi}{\partial p}\right) ds - \int\left(\varrho\, \xi \frac{\partial U}{\partial \varrho} - U \varrho \frac{\partial \xi}{\partial \varrho}\right) d\theta + \int U \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right] dF'.$$

Ciò posto, assoggettiamo $\xi$ alle seguenti condizioni:

*A.* Lungo la curva $K$ sia dappertutto $\xi = 0$.

*B.* Per $\varrho$ tendente a zero diventi $\varrho \frac{\partial \xi}{\partial \varrho} = 1$.

*C.* In $F$, fuori di $o$, sia $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$.

Da *B.* pel teorema VII. *e.* della mia *teorica dei potenziali ad un valore* (Giornale di Borchardt, t. 64, pag. 337*)) discende che anche $\frac{\xi}{\log \varrho}$ converge verso il limite 1, quando $\varrho$ tende a zero. Per conseguenza, insieme con $\varrho$ si annulla $\varrho \xi = \varrho \log \varrho \cdot \frac{\xi}{\log \varrho}$, e l'ultima espressione annullandosi $\varrho$, si trasforma in:

$$-\int \psi \frac{\partial \xi}{\partial p} ds + 2\pi U_0.$$

Noi otteniamo adunque:

$$U_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int \psi \frac{\partial \xi}{\partial p} ds + \int \varphi\, \xi\, dF\right],$$

quindi la determinazione di $U$ è ridotta a quella di $\xi$.

## II.

L'equazione *C.* è la condizione affinchè $\frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx$ sia il differenziale totale di una funzione di $x$, $y$. Indicando questa funzione con $\eta$, si ottiene

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

*) Dieser Band S. 200.

quindi

$$\omega = \xi + i\eta$$

è una funzione di $z = x + iy$, e $\xi$ ne è la parte reale. Questa funzione, per le *A.* e *B.* e per le già poste condizioni, ha le seguenti proprietà:

1. Lungo la curva $K$, la funzione $\omega$ è imaginaria senza parte reale, mod. $e^{\omega} = 1$.
2. Fuori di $o$, $\frac{d\omega}{dz}$ epperò anche $\omega, \xi, \eta$ sono monodrome (*einändrig*) e continue.
3. Se si considerano $\xi$ ed $\eta$ come funzioni delle coordinate polari $\varrho$, $\theta$, aventi origine in $o$, quando $\theta$ cresce per una rotazione dell'asse delle $x$ verso l'asse delle $y$, è:

$$\varrho \frac{\partial \xi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \quad \varrho \frac{\partial \eta}{\partial \varrho} = -\frac{\partial \xi}{\partial \theta}.$$

Da ciò segue subito per $\varrho = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 1$. Se quindi il punto $(x, y)$ gira nella direzione positiva intorno al punto $o$, per ciascun giro $\eta$ cresce di $2\pi$, ed $\omega$ di $2\pi i$, perchè $\xi$ è ad un valore. Per lo stesso motivo nel piano $(\varrho, \theta)$, lungo la linea $\varrho = 0$, è $\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0$*); quindi per $\varrho = 0$ si ha $\varrho \frac{\partial \eta}{\partial \varrho} = 0$, $\frac{\eta}{\log \varrho} = 0$. Ne risulta che nel punto $o$ la funzione $\omega - \log(z - z_0)$ è monodroma, ed insieme anche continua, perchè il quoziente

$$\frac{\omega - \log(z - z_0)}{\log(z - z_0)} = \frac{\xi}{\log \varrho + i\theta} - 1 + i \frac{\eta}{\log \varrho + i\theta},$$

si annulla con $\varrho$, ciò che sarebbe impossibile se la funzione $\omega - \log(z - z_0)$, monodroma in $o$, ivi fosse discontinua.

Quindi $e^{\omega}$ è dappertutto in $F$ ad un valore e continua, e fuori di $o$, dove diventa infinitamente piccola del primo ordine, è inoltre diversa da zero. Se si indica con $w$ questa funzione, si ha il seguente risultato:

Sia $w$ una funzione di $z$ ad un valore e continua in $F$, tale che il suo modulo nel contorno $K$ di questa superficie

*) Per provare questa proposizione, basta mostrare che la funzione $U' = \xi - \log \varrho$, che è ad un valore in $F$, è in $o$ anche continua, poichè allora essa sarà costante lungo la summenzionata linea $\varrho = 0$ (asse delle $\theta$). Se nell'art. I si assume $U'$ in luogo di $U$, sarà $\varphi = 0$ all'infuori di $o$. Inoltre, per la rappresentazione di $U'$ in un punto qualsivoglia $m$ diverso da $o$, non occorre che il punto $o$ sia escluso da $F$, perchè per $\varrho = 0$ risulta $\varrho \frac{\partial U'}{\partial \varrho} = 0$, $\varrho U' = 0$. Conseguentemente $U'$ è rappresentata da un integrale esteso soltanto lungo $K$, epperò è una funzione a un valore e continua in ogni punto di $F$, ed in particolare nel punto $o$.



abbia il valore 1; nel punto $o$ essa divenga infinitamente piccola del primo ordine ed in tutti gli altri punti della superficie $F$ rimanga invece diversa da zero. Allora la parte reale di $\log w$ sodisfà a tutte le condizioni poste per $\xi$, e si può porre:

$$\xi = \log \operatorname{mod} w.$$

Se $w'$ è una seconda funzione di $z$ che sodisfaccia a tutte le condizioni poste per $w$, $\frac{w'}{w}$ sarà in $F$ ad un valore, nè nulla nè infinita; ed il suo modulo sarà in $K$ eguale ad 1. Quindi ogni ramo della funzione $\log \frac{w'}{w}$ è in $F$ monodromo e continuo, ed in $K$ puramente imaginario. La sua parte reale è perciò nel contorno di $F$ eguale a zero, nell'interno nè polidroma (*mehrändrig*) nè discontinua, e quindi dappertutto in $F$ eguale a zero. Per conseguenza $\log \frac{w'}{w}$ è costante e puramente imaginario, $= \gamma i$. Da ciò si ricava $w' = e^{\gamma i} w$, cioè $w$ per le antecedenti condizioni è determinata fino ad un fattore costante di modulo 1, e quindi $\xi$ è determinata completamente.

## III.

Se ora si scompone la funzione $w$ nelle sue parti reali:

$$w = u + iv,$$

siccome lungo $K$ è mod $w = 1$ e nel punto $o$ di $F$ si ha $w = 0$, così ne emerge che i piani della $z$ e della $w$ si devono corrispondere in modo, che alla data area $F$ esistente nel primo piano corrisponda nell'altro piano il cerchio $u^2 + v^2 < 1$, al punto $o$ il centro di quest'ultimo, ed al contorno $K$ di $F$ il contorno del cerchio. La determinazione di $w$ coincide quindi colla soluzione della questione: rappresentare l'area data $F$ sul piano della $w$, trasformandola in un cerchio di raggio 1, in modo che nel centro di quest'ultimo riesca rappresentato un punto $o$ scelto ad arbitrio in $F$.

Dalla conclusione del precedente articolo risulta che questo problema è pienamente determinato, in quanto che due rappresentazioni circolari di $F$, l'una delle quali si ottiene dall'altra facendola rotare di un angolo $\gamma$, non possono essere considerate come essenzialmente diverse.

Questo risultato ed in pari tempi il dimostrare che il presente problema ammette una soluzione per ciascuna forma di $F$, sono compresi come caso particolare nella proposizione generale sopra le superficie semplicemente connesse, che Riemann ha sviluppata nella sua dissertazione inaugurale, p. 30.*)

## IV.

Per le ricerche ulteriori, conviene sostituire al problema dell'articolo antecedente un altro che dipenda da condizioni più facili ad essere sodisfatte.

Poichè mod $(z-z_0)$ non è altro che la distanza rettilinea dei due punti $z$ e $z_0$, così il luogo di tutti i punti $z$, i quali sodisfanno alla condizione mod $(z-z_0) =$ mod $(z-z_1)$, è la retta perpendicolare nel punto di mezzo a quella che congiunge i punti $z_0$ e $z_1$. Quindi se si assume per $z_1$ l'espressione $z_0' = x_0 - iy_0$ coniugata di $z_0 = x_0 + iy_0$, ne segue per $y_0$ positivo che la funzione:

$$\frac{z-z_0}{z-z_0'}$$

nella metà $y > 0$ del piano, diventa infinitamente piccola nel solo punto $o$ e propriamente del primo ordine; nel resto rimane continua e nel contorno di questa superficie raggiunge il modulo 1. Per questa superficie è quindi conosciuta anche $\xi$.

Se ora si è in grado di rappresentare il piano della $Z = X + iY$ sul piano della $z$, in modo che al mezzo piano $Y > 0$, che in seguito si indicherà con $E$, ed al suo contorno (chiuso all'infinito) $Y = +0$ corrisponda nel piano della $z$ un'area $F$ col proprio contorno dato $K$, ed a ciascun punto dell'una superficie corrisponda un punto unico dell'altra; e se in questa supposizione $Z_0$ è il valore di $Z$ nel punto $o$ di $F$, e $Z_0'$ il suo coniugato, allora ciascun punto del piano $z$ corrispondente a $Z_0'$ giace fuori di $F$, perchè $Z_0'$ è situato fuori di $E$. Inoltre $Z$ è soltanto nel punto $o$ di $F$ eguale a $Z_0$, perchè a ciascun punto $Z_0$ di $E$ corrisponde un punto unico $o$ di $F$. Assumendo quindi:

$$(a) \qquad w = \frac{Z-Z_0}{Z-Z_0'},$$

$w$ diventerà nel punto $o$ di $F$ infinitamente piccola del primo ordine e nel resto di $F$ si conserverà ad un valore, continua e diversa da zero, ed acquisterà nel contorno $K$ di $F$, il quale corrisponde al contorno di $E$, il modulo 1. Quindi per la superficie $F$ è:

$$(b) \qquad \xi = \log \operatorname{mod} \frac{Z-Z_0}{Z-Z_0'}.$$

*) *Annali di Matematica*, t. 2 (I^a. serie).



Essendo $ds$, $dX$ gli elementi corrispondenti dei contorni di $F$ ed $E$, così pure $dp$, $dY$ i corrispondenti elementi delle loro normali, si avrà:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = -\frac{\partial \xi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial p},$$

perchè a cagione della somiglianza delle parti infinitamente piccole, alla direzione di $dp$ corrisponde la direzione delle $Y$ decrescenti. Qui $\frac{\partial Y}{\partial p}$, comme rapporto di elementi lineari corrispondenti, è eguale a mod $\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial s}$, dunque $\frac{\partial Y}{\partial p} ds = dX$. Allora $\frac{\partial \xi}{\partial Y}$ è la parte reale di $\frac{\partial \log w}{\partial Y}$ per $Y = 0$. Quindi per l'elemento $ds$ di $K$ corrispondente al $dX$, si ottiene:

$$(c) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial p} ds = \frac{2Y_0\, dX}{(X-X_0)^2 + Y_0^2},$$

ed ecco allora stabilite tutte le espressioni richieste nell'art. 1, tosto che la superficie $E$ sia rappresentata semplicemente sopra $F$.

## V.

### Poligoni ad un solo strato.

Sia $F$ un poligono ad un solo strato, composto di un sol pezzo cogli $n$ vertici $z_1, z_2, \ldots z_n$, che si succedono in un giro positivo intorno ad $F$ nell'ordine dei loro indici. L'angolo interno nel vertice $z_s$ sia indicato con $\lambda_s$, in modo che sarà:

$$(1) \qquad \sum(\pi - \lambda_s) = 2\pi.$$

Noi ci proponiamo la questione di rappresentare semplicemente la superficie $E$ su questo poligono.

Siano $a_1, a_2, \ldots a_n$ i punti dell'asse delle $X$ corrispondenti ai vertici $z_1, z_2, \ldots z_n$ del poligono. Questi punti si seguiranno l'un l'altro nella direzione delle $X$ crescenti, nello stesso ordine dei loro indici, e quindi fra due di essi il passaggio si dovrà fare pel punto infinitamente lontano dell'asse. Noi supporremo che questi sieno i punti $a_n$, $a_1$, onde fra le quantità reali $a$ avrà luogo la successione:

$$a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_n.$$

Il punto giacente sul contorno del poligono fra $z_n$ e $z_1$, che corrisponde al punto infinitamente lontano dell'asse delle $X$, verrà indicato con $z'$.

Ciò posto, si tratta di stabilire una tale dipendenza fra le quantità $z$ e $Z$ che: 1) ad un giro positivo intorno all'una delle due superficie $F$, $E$ corrisponda un giro positivo intorno all'altra; 2) che i punti $z$, $Z$ durante il giro passino contemporaneamente per i punti $z_s$, $a_s$; 3) che $z$ percorra una linea retta ogni qual volta $Z$ descrive uno dei segmenti $a_{s-1}a_s$; finalmente 4) che nella rappresentazione di $E$ su $F$, nell'interno delle due superficie esista perfetta eguaglianza di angoli, cioè ne sia esclusa qualunque diramazione (*Verzweigung*).

Mentre $z$ e $Z$ percorrono i corrispondenti segmenti rettilinei $z_{s-1}z_s$, $a_{s-1}a_s$ in direzione positiva, rimane inalterata la parte imaginaria di $\log\frac{\partial z}{\partial Z}$ dipendente soltanto da queste direzioni. Nello stesso momento però in cui $z$ piega intorno al vertice $z_s$, e quindi $Z$ nel suo giro positivo intorno ad $E$ oltrepassa il punto $a_s$, $dz$ ruota dell'angolo $\pi-\lambda_s$ in direzione positiva, mentre $dZ$ conserva la sua direzione. Quindi in un mezzo giro negativo intorno ad $a_s$, $\log\frac{\partial z}{\partial Z}$ cresce di $(\pi-\lambda_s)i$, cioè in un intero giro positivo cresce di

$\frac{\lambda_s-\pi}{\pi}\cdot 2\pi i$; epperò $(Z-a_s)^{\frac{\pi-\lambda_s}{\pi}}\cdot\frac{\partial z}{\partial Z}$ è in $a_s$ monodroma, nè nulla nè infinita. Di qui segue che il prodotto

$$(Z-a_1)^{\frac{\pi-\lambda_1}{\pi}}\cdot(Z-a_2)^{\frac{\pi-\lambda_2}{\pi}}\cdots(Z-a_n)^{\frac{\pi-\lambda_n}{\pi}}\cdot\frac{\partial z}{\partial Z}=\chi$$

lungo l'asse delle $X$ non ha punti di diramazione (*Verzweigungspuncte*), nè di valor zero, nè di discontinuità, perchè altrimenti $K$ avrebbe od altri vertici o vertici d'altra natura. Inoltre $\frac{\partial z}{\partial Z}$, (e quindi per la relazione (1) anche $\chi$) dev'essere in tutta la superficie $E$ monodroma, continua e diversa da zero; perchè altrimenti la sua rappresentazione od avrebbe diramazioni e quindi non sarebbe ad un solo strato, oppure si estenderebbe all'infinito.

La funzione $\chi$ adunque non è mai in $E$ polidroma o discontinua, e deve inoltre essere tale che in ciascun segmento $a_{s-1}a_s$ dell'asse delle $X$ il rapporto $\frac{dz}{\operatorname{mod} dz}$ sia costante, perchè questi segmenti devono essere rappresentati linearmente. Siccome per $Y=0$ è $dZ=dX$, per la realtà delle quantità $a$, il precedente prodotto sta in rapporto costante col suo modulo; perciò

$$\frac{\chi}{\operatorname{mod}\chi}$$

deve essere costante in ciascun segmento $a_{s-1}a_s$, quindi per la sua continuità avrà lo stesso valore costante in tutto l'asse delle $X$. Indicando questo valore con $c$, si ha per $Y=0$:

$$\log\chi=\log\operatorname{mod}\chi+\log c;$$



adunque nell'asse delle $X$ la parte imaginaria di $\log\chi$ è costante; ed essendo $\chi$ in $E$ monodroma, continua e diversa da zero, ciò non è altrimenti possibile se non quando $\log\chi$, e quindi anche $\chi$, ha dappertutto lo stesso valor costante. Designando con $A$ questo valore, si ha:

$$(1')\qquad dz=A(Z-a_1)^{\frac{\lambda_1}{\pi}-1}\cdot(Z-a_2)^{\frac{\lambda_2}{\pi}-1}\cdots(Z-a_n)^{\frac{\lambda_n}{\pi}-1}\cdot dZ,$$

dove ora il rapporto della costante $A$ al suo modulo deve essere scelto in modo, che $\frac{dz}{\operatorname{mod} dz}$ ottenga nel punto $z'$ il valore che corrisponde alla data direzione da $z_n$ a $z_1$.

Se $\alpha$ è l'angolo di questa direzione con quella delle $x$ crescenti e $c$ una costante positiva, si otterrà:

$$(2)\qquad dz=ce^{\alpha i}(a_1-Z)^{\frac{\lambda_1}{\pi}-1}\cdot(a_2-Z)^{\frac{\lambda_2}{\pi}-1}\cdots(a_n-Z)^{\frac{\lambda_n}{\pi}-1}\cdot dZ,$$

supposto che la variabile venga limitata alla superficie $E$, e ciascun fattore

$$(a_s-Z)^{\frac{\lambda_s}{\pi}-1},$$

venga definito colla condizione di rimanere positivo nell'asse delle $X$ finchè sia $X<a_s$. Ponendo con queste limitazioni:

$$(3)\qquad ce^{\alpha i}(a_1-Z)^{\frac{\lambda_1}{\pi}-1}\cdot(a_2-Z)^{\frac{\lambda_2}{\pi}-1}\cdots(a_n-Z)^{\frac{\lambda_n}{\pi}-1}=\mathfrak{z},$$

si ottiene mediante l'equazione:

$$(4)\qquad z-z'=\int_{-\infty}^{Z}\mathfrak{z}\,dZ,$$

la richiesta rappresentazione di $E$ sopra $F$.

Indicando il lato del poligono fra i vertici $z_s$, $z_{s+1}$ con $L_s^{s+1}$, si ha

$$(5)\quad L_1^2=\int_{a_1}^{a_2}\operatorname{mod}\mathfrak{z}\,dX,\quad L_2^3=\int_{a_2}^{a_3}\operatorname{mod}\mathfrak{z}\,dX,\ldots,\quad L_{n-1}^n=\int_{a_{n-1}}^{a_n}\operatorname{mod}\mathfrak{z}\,dX$$

$$L_n^1=\int_{a_n}^{\infty}\operatorname{mod}\mathfrak{z}\,dX+\int_{-\infty}^{a_1}\operatorname{mod}\mathfrak{z}\,dX,$$

se dappertutto in $\operatorname{mod}\mathfrak{z}$ vien posto $Y=0$.

Siccome $\mathfrak{z}$ in $E$ non presenta nè diramazioni nè discontinuità, così $\int z\,dZ$ preso lungo l'intero contorno di $E$ è nullo, cioè avuto riguardo alla (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} z\,dX = 0,$$

ove si integri lungo la linea $Y = +0$. Di qui si hanno due equazioni fra i lati $L$ e gli angoli $\lambda$, che non sono altro che le condizioni conosciute perchè il poligono $K$ sia chiuso.

## VI.

Per gli antecedenti risultati è risoluto il problema dell'art. IV per ciascun poligono $F$, di rappresentare cioè semplicemente $E$ su $F$ in modo che a ciascun punto dell'una superficie corrisponda un punto unico dell'altra.

Siccome per ogni posizione del punto $Z$ in $E$ è dato il corrispondente punto $z$ di $F$, così si può in particolare per l'espressione:

$$w = \frac{Z - Z_0}{Z - Z_0'},$$

dell'art. IV, sempre assegnare il punto $z_0$ di $F$ corrispondente a $Z_0$, per il quale l'ultima formula dell'art. I offra il valore cercato di $U$. In questo senso adunque (e la più parte delle soluzioni di tali questioni non vanno più oltre) la questione di determinare $U$ si può considerare come risoluta per tutti i poligoni $F$.

Affatto diversamente si presenta la questione quando non si voglia contentarsi di ciò, ma invece si domandi che la quantità $Z_0$, che occorre per la formazione di $w$, venga determinata per ciascuna qualsivoglia posizione del punto $o$ di $F$.

Infatti questa domanda non altro significa se non che, mediante la inversione dell'equazione (4), $Z$ sia presentata come funzione di $z$.

Un esame più diligente mostra che sono solamente quattro i poligoni $F$ per i quali questa quistione può essere posta senza ulteriori modificazioni, vale a dire il rettangolo, il triangolo equilatero, e due triangoli rettangoli, l'isoscele cioè e quello i cui angoli all'ipotenusa sono di $30^0$ e $60^0$.

In tutti gli altri casi o deve essere limitata la variabilità di $z$ e $Z$ nelle superficie $F$ ed $E$, onde non si ottiene alcuna semplificazione, mentre va perduta l'importanza analitica del problema; oppure, ove si richieda la inversione con variabili illimitate, il problema della rappresentazione dev'essere posto altrimenti.

Ed invero, se in $F$ i rapporti angolari sono tutti razionali, e



quindi $z$ è una funzione algebrica di $Z$, si può facilmente per questa funzione determinare la superficie $T$ rappresentante il suo modo di diramazione (*Verzweigungsart*), e l'ordine $2p+1$ della sua connessione (*Zusammenhang*), ed allora per conseguire l'inversione dell'equazione $dz = z\,dZ$, devonsi aggiungere a questa, come è noto, ancora $p-1$ altre equazioni $dz_\sigma = z_\sigma dZ_\sigma$, dove tutte le $z_\sigma$ sono funzioni algebriche diramate come $T$, e tutte le $z_\sigma$ sono integrali di prima specie non aventi tra loro relazioni lineari, alla quale ultima condizione in virtù dell'equazione (1) dell'art. precedente sodisfà anche $z$.

In termini più semplici, ciò significa doversi in questo caso rappresentare simultaneamente $E$ su $p$ superficie, una delle quali è la stessa $F$, e le altre dipendono da $F$. Il caso di $p=1$ mostra già che da questo punto di vista il problema primitivo si decompone in infiniti gruppi di casi particolari.

Del resto, da queste considerazioni risulta che i risultati dell'articolo precedente insegnano in ciascun caso a conoscere la classe di funzioni alla quale appartengono $w$ e $\xi$, anche quando l'espressione di $U$ sia stata trovata per altra via.

## VII.

Ormai non rimane che a render possibile, collo svolgimento di un esempio trattato anche con altri metodi, il confronto fra questi ed il processo qui esposto. Noi scegliamo per brevità il più semplice di tutti, cioè il caso che la superficie $F$ sia un rettangolo. Assumendo nell'art. I, la funzione arbitraria $\varphi = 0$, si può assai facilmente determinare per questa superficie la $U$ col metodo dato da Fourier (cfr. Lamé *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes*, XIV), ma il principale risultato della ricerca, cioè la determinazione della specie di funzioni dalla quale dipende la soluzione, non si potrebbe riconoscere per questa via che a stento, sebbene la posteriore verificazione del medesimo non offra alcuna difficoltà.

Siano $a$ e $b$ i lati del rettangolo $F$, posti rispettivamente sugli assi delle $x$, $y$ positive. Noi possiamo allora porre:

$$z_1 = a, \quad z_2 = a + bi, \quad z_3 = bi, \quad z_4 = 0,$$

ed otteniamo:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = 0,$$

quindi:

$$z = C : \sqrt{(a_1 - Z)(a_2 - Z)(a_3 - Z)(a_4 - Z)},$$

dove la radice è definita come dianzi.

La superficie $T$ è a due strati (*zweiblättrig*), coi punti di diramazione $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ situati sull'asse delle $X$. Assumendo, ciò che è lecito, pei limiti ai quali si estendono i due strati di $T$ gli orli delle rette congiungenti $a_1$ con $a_2$, ed $a_3$ con $a_4$, fra questi limiti gli strati saranno connessi, ed $E$ sarà la metà positiva (corrispondente ad $Y > 0$) del primo strato.

Per questa connessione di $T$ e per le condizioni imposte all'espressione $z$, questa ottiene 1) valori contrari in due punti di $T$ situati l'un sopra l'altro, ed invece 2) valori coniugati in due punti coniugati dello stesso strato.

Facendo inoltre nella solita maniera, a partire da un punto in $E$, un taglio trasversale (*Querschnitt*) intorno ad $a_1 a_2$, e l'altro intorno ad $a_2 a_3$, ne viene che $Z$ per l'equazione $dz = z\,dZ$ è determinata come una funzione di $z$ ad un solo valore, avente i due periodi $2a$, $2bi$, i cui valori emergono anche da ciò che segue.

Trasportando in $a_2$ il punto d'incontro dei due tagli trasversali, e riducendo quest'ultimi a linee rette, la connessione del primo strato col secondo tra $a_1$ e $a_2$, ed in ciascuno strato la connessione della metà positiva colla metà negativa fra $a_2$ ed $a_3$, sarà tolta. La rappresentazione della superficie $T'$ così modificata, sul piano $z$, diviene un rettangolo $\Pi$, i cui lati $2a$, $2b$ sono paralelli agli assi delle $x$, $y$, e le cui diagonali s'incontrano nell'origine $z_4 = 0$, e del quale adunque $F$ è quella quarta parte che cade nel quadrante positivo.

Per dimostrarlo, si tiri anzitutto in ciascuno strato da $a_4$ al corrispondente punto $Z$ una linea, in modo che le due linee così ottenute si coprano; allora la somma degli integrali $\int_{a_4}^{Z} z\,dZ$, presi lungo queste due linee, sarà nulla, quindi a due punti di $T'$ giacenti l'uno sull'altro corrisponderanno due valori contrari di $z$, cioè due punti del piano $z$ la cui congiungente passa per l'origine $z_4 = 0$ ed è ivi divisa per metà.

Tirando inoltre da $a_4$ sullo stesso strato di $T'$ due linee simmetriche rispetto all'asse delle $X$, cioè congiungenti soltanto punti coniugati e terminate in siffatti punti, si otterranno mediante l'integrazione valori coniugati di $z$ anche nei punti estremi. Due punti coniugati dello stesso strato di $T'$ vengono dunque rappresentati nel piano $z$ in due punti coniugati, cioè situati simmetricamente rispetto all'asse delle $x$.

Da ciò risulta subito che $\Pi$ è la rappresentazione di $T'$. Se i rettangoli nei quali vien diviso $\Pi$ dagli assi coordinati nell'ordine con



cui si succedono in un giro positivo intorno all'origine, si denotano con $F$, $F_1$, $F_2$, $F_3$, possiamo concludere, siccome per le condizioni del problema $E$ è di già rappresentato su $F$, che la parte positiva del secondo strato coperta da $E$ sarà rappresentata su $F_2$, la metà negativa del primo strato su $F_3$, e quella del secondo su $F_1$. Contemporaneamente è dimostrato che $2a$, $2bi$ sono i moduli di periodicità di $z$.

Questi risultati sono sufficienti per esprimere la funzione:

$$w = e^{\gamma i}\frac{Z - Z_0}{Z - Z_0'}$$

mediante $z$. In fatti se $z_0$ è quel punto di $F$ che corrisponde al punto $Z_0$ di $E$, allora $Z - Z_0$ diventa in $\Pi$ nei due punti $z_0$, $-z_0$ infinitamente piccola del primo ordine, ma fuori di questi diversa da zero. Se $z_0'$ è coniugato a $z_0$, $Z - Z_0'$ non è mai in $\Pi$ eguale a zero, fuorchè nei punti $z_0'$, $-z_0'$, nei quali è infinitamente piccola del primo ordine. Quindi $w$ è una funzione di $z$ ad un valore, coi periodi $2a$, $2bi$, la quale nel rettangolo $\Pi$ dei periodi è infinitamente piccola solamente per $z = (z_0, -z_0)$, infinitamente grande solamente per $z = (z_0', -z_0')$, e sempre del primo ordine; e per $Z = \infty$ si riduce a $e^{\gamma i}$. Di qui segue che mediante la funzione di Jacobi:

$$\theta_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\operatorname{sen} x - 2q^{\frac{9}{4}}\operatorname{sen} 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\operatorname{sen} 5x \ldots$$

la $w$ si può esprimere nella forma:

$$w = C\frac{\theta_1\left(\frac{\pi(z - z_0)}{2bi}\right)\cdot\theta_1\left(\frac{\pi(z + z_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(z - z_0')}{2bi}\right)\cdot\theta_1\left(\frac{\pi(z + z_0')}{2bi}\right)}, \quad q = e^{-\frac{\pi a}{b}},$$

dove $C$ è una costante.

Se $z'$ è il punto fra $z_4$ e $z_1$, che corrisponde al punto di $E$ infinitamente lontano, si ha:

$$e^{\gamma i} = C\frac{\theta_1\left(\frac{\pi(z' - z_0)}{2bi}\right)\cdot\theta_1\left(\frac{\pi(z' + z_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(z' - z_0')}{2bi}\right)\cdot\theta_1\left(\frac{\pi(z' + z_0')}{2bi}\right)}.$$

Siccome $z'$ è reale, nel fattore di $C$ il denominatore è coniugato al numeratore, onde il modulo di questo fattore sarà $= 1$. Quindi, se la quantità $e^{\gamma i}$, soggetta soltanto a quest'ultima condizione, si assume eguale al fattore di $C$, riescirà $C = 1$, epperò:

$$w = \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(z-z_0)}{2bi}\right)\cdot\theta_1\left(\frac{\pi(z+z_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(z-z_0')}{2bi}\right)\cdot\theta_1\left(\frac{\pi(z+z_0')}{2bi}\right)}, \quad q = e^{-\frac{\pi a}{b}}.$$

Moltiplicando quest'espressione di $w$, coll'espressione che ne risulta per il valore coniugato $w'$, si otterà il quadrato del mod $w$, e quindi per la determinazione di $U$ nel punto $z_0$ di $F$:

$$e^{2\xi} = ww', \quad \xi = \tfrac{1}{2}\log ww'.$$

Decomponendo $w$ in $u+iv$ si risolve inoltre il problema di rappresentare il rettangolo $F$ sul cerchio $u^2+v^2<1$, in modo che il centro del cerchio corrisponda al punto $z_0$ di $F$, da scegliersi arbitrariamente.

I tre altri problemi accennati nell'art. VI. per i quali soltanto è ancora possibile la rappresentazione di $w$ per mezzo di $z$, si possono del pari risolvere facilmente coi mezzi qui adoperati.

Zurigo, 25 marzo 1867.

# XIII.

## Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 67, 1867, S. 218—228.)

Die sogenannten Minimumsflächen besitzen eine merkwürdige Eigenschaft, welche ich bei Gelegenheit meiner Abhandlung über die Bestimmung krummer Oberflächen durch locale Messungen auf denselben (dieses Journal Band 64*)) Herrn Weierstrass mitgetheilt habe. Dieselbe besteht in Folgendem.

1. Seien $S$ und $S'$ zwei Minimumsflächen, d. h. solche, für welche die Summe der beiden Hauptkrümmungen in jedem Punkte $= 0$ ist. Nachdem jede von diesen Flächen in eine beliebige Lage gebracht worden ist, wähle man auf ihnen Flächenstücke $T$, $T'$ so aus, dass 1) auf keinem von beiden dieselbe Normalenrichtung zweimal, dagegen 2) jede auf dem einen stattfindende Normalenrichtung auch auf dem andern vorkommt.

Betrachtet man unter diesen Voraussetzungen einen Punkt $m'$ von $T'$ als Bild desjenigen Punktes $m$ von $T$, für welchen die gleiche Normalenrichtung stattfindet, so wird $T'$ ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von $T$.

Bei diesem Satze ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass die Flächen $S$, $S'$ sich nur durch ihre Lage im Raume von einander unterscheiden. Durch blosse Drehung einer Minimumsfläche kann man also beliebig viele Abbildungen derselben auf sich selbst erhalten.

2. Der obige Satz bleibt bestehen, wenn eine der Flächen $S$, $S$ durch eine Kugel ersetzt wird.

Aus diesem zweiten Satze folgt der erste durch Wiederholung. Da ausserdem alle Abbildungen einer Kugelfläche auf einer Ebene bekannt sind, so sind es auch alle Abbildungen einer Minimumsfläche, wie zuerst von Herrn Weingarten gefunden worden ist.[1])

1) Vergl. die reichhaltige Abhandlung: Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des andern ist. Dieses Journal Band 62, p. 164, 165.

*) Im vorliegenden Band S. 162.

Ich habe mich veranlasst gesehen, diesen Gegenstand weiter zu verfolgen, und namentlich zu untersuchen, welche Flächen $T$ überhaupt die Eigenschaft haben, dass sich ihnen eine zweite $T'$ zuordnen lässt, welche, ohne zu $T$ homothetisch zu sein, ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von $T$ liefert, wenn sie nach obigem Princip auf $T$ bezogen wird. Von dieser Untersuchung sind selbstverständlich alle diejenigen Flächen $T$ ausgeschlossen, auf denen jede überhaupt vorhandene Normalenrichtung eine Linie bestimmt, also die auf eine Ebene abwickelbaren Flächen.

Es hat sich herausgestellt, dass die verlangte Eigenschaft eine Flächenfamilie begründet, welche sich auch als das System derjenigen Flächen definiren lässt, die ein ebenes Bild gestatten, in welchem ihre Krümmungslinien durch zwei Schaaren zu einander senkrechter Geraden dargestellt werden. Es besitzt hiernach jede Fläche, an welcher die zuerst erwähnte Eigenschaft nachgewiesen ist, auch die zweite, und umgekehrt.

Diese Flächenfamilie ist sehr umfassend; mittelst der Formel B. des art. V., welche das Kriterium derselben enthält, findet man leicht, dass zu ihr nicht bloss die Minimumsflächen im gewöhnlichen Sinne, sondern allgemein diejenigen gehören, deren mittlere Krümmung constant ist, also die Minimumsflächen über gegebenem Volumen; ausserdem gehören hierhin alle Flächen zweiten Grades, alle Rotationsflächen, u. s. w.

In dieser Familie entspricht jeder Fläche $T$ eine andere $T'$, und im Allgemeinen auch nur eine nebst ihren homothetischen, welche durch $T$ ihrer Gestalt und Lage nach bestimmt ist, wenn von Translationen ohne Drehungen abgesehen wird, die an der Abbildung nichts ändern. Die einzige Ausnahme hiervon bildet die Kugel, für welche die Aufgabe, $T'$ zu finden, unbestimmt ist, weil sie selbst jeder beliebigen Minimumsfläche entspricht.

Da die einfachen Hülfsmittel, welche ich bei dieser Untersuchung benutzt habe, sich auch bei anderen Gelegenheiten als brauchbar erweisen, so erlaube ich mir, im Folgenden zu zeigen, wie sich im Anschlusse an einen directen Beweis der obigen Sätze über Minimumsflächen die übrigen Resultate ergeben haben. Jene Sätze selbst habe ich ursprünglich aus dem art. IV. meiner oben erwähnten Arbeit erhalten.

## I.

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der Aufstellung der geometrischen Bedingungen, welche erforderlich sind, damit zwei Flächen $T$, $T'$ einander ähnlich werden, wenn jedem Punkte $m$ von $T$ sein Bild



$m'$ auf $T'$ durch die Bedingung gleicher Normalenrichtung zugeordnet wird, in welchem Falle $m$ und $m'$ entsprechende Punkte heissen sollen.

Zu dem Zwecke bestimme man nach Gauss (Disqu. gen. circa superf. c. I.) eine Richtung im Raume mit Hülfe einer Kugel $K$ vom Halbmesser 1 durch den Punkt, in welchem ein gleichgerichteter Halbmesser auf der Kugelfläche endigt. Sind also $N$, $N'$ die Normalen der Flächen $T$, $T'$ in den Punkten $m$, $m'$, so werden diese Punkte einander entsprechen, sobald beide Normalen dem nämlichen Punkte $\mathfrak{N}$ von $K$ entsprechen. Damit ferner zwei von entsprechenden Punkten $m$, $m'$ ausgehende Linienelemente $\partial s$, $\partial s'$ der Flächen $T$, $T'$ in entsprechenden Punkten endigen, müssen auch in ihren Endpunkten die Normalen dem nämlichen Punkte $\mathfrak{P}$ von $K$ entsprechen. Der unendlich kleine sphärische Bogen $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \varDelta$ giebt dann den Winkel an, um den sich die Normale $N$ dreht, wenn ihr Fusspunkt von $m$ aus $\partial s$ beschreibt.

Wir haben nun zu untersuchen, welche Bedingungen erforderlich sind, damit das Verhältnis der entsprechenden Linienelemente $\partial s$, $\partial s'$ von der Lage des ihre Endpunkte bestimmenden Punktes $\mathfrak{P}$ unabhängig wird.

Seien $\partial N_1$, $\partial N_2$ in $m$ beginnende Bogenelemente der beiden Krümmungslinien von $T$, $\varrho_1$, $\varrho_2$ die ihnen entsprechenden Krümmungshalbmesser der Fläche. Ferner sei $\delta_2$ der Winkel, um den sich $\varrho_1$ dreht, wenn sein Fusspunkt $\partial N_1$ durchläuft, ebenso $\delta_1$ der Winkel, um den sich $\varrho_2$ dreht, wenn sein Fusspunkt $\partial N_2$ durchläuft, also abgesehen vom Zeichen $\partial N_1 = \varrho_1 \delta_2$, $\partial N_2 = \varrho_2 \delta_1$ und $\partial s^2 = \varrho_1^2 \delta_2^2 + \varrho_2^2 \delta_1^2$. Haben $\varrho_1'$, $\varrho_2'$, $\delta_1'$, $\delta_2'$ dieselbe Bedeutung für die Fläche $T'$ im Punkte $m'$, so wird $\partial s'^2 = \varrho_1'^2 \delta_2'^2 + \varrho_2'^2 \delta_1'^2$ und mithin das zu untersuchende Verhältniss

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial s}\right)^2 = \frac{\varrho_1'^2 \delta_2'^2 + \varrho_2'^2 \delta_1'^2}{\varrho_1^2 \delta_2^2 + \varrho_2^2 \delta_1^2}.$$

Daraus ergeben sich die Sätze über die Minimumsflächen sofort. Nimmt man nämlich $\varrho_1'^2 = \varrho_2'^2$, $\varrho_1^2 = \varrho_2^2$, d. h. für $T$ und $T'$ Minimums- oder Kugelflächen, so heben die Drehungswinkel sich weg, indem aus der Betrachtung der Kugel $K$ $\varDelta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 = \delta_1'^2 + \delta_2'^2$ folgt.

Ist nun, um zur allgemeinen Untersuchung überzugehen, $o$ das Centrum der Kugel $K$ und sind $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_1'$, $\mathfrak{N}_2'$ diejenigen Punkte des durch $\mathfrak{N}$ als Pol bestimmten Aequators, welche den Richtungen $\partial N_1$, $\partial N_2$, $\partial N_1'$, $\partial N_2'$ der Krümmungslinien von $T$ und $T'$ entsprechen, so folgt, weil der Punkt $\mathfrak{P}$ von $K$ sowohl dem Endpunkte von $\partial s$, als auch dem von $\partial s'$ entspricht, dass der Uebergang von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{P}$ auf folgende zwei Arten bewirkt werden kann:

1. indem man zwei unendlich kleine Drehungen um die Axen $o\mathfrak{N}_1$, $o\mathfrak{N}_2$ zusammensetzt, von denen die erste den Winkel $\delta_1$, die andere den Winkel $\delta_2$ beträgt;

2. indem man zwei die Winkel $\delta'_1$, $\delta'_2$ betragende Drehungen um die Axen $o\mathfrak{N}'_1$, $o\mathfrak{N}'_2$ zusammensetzt.

Dies festgestellt, zählen wir auf dem Aequator von $\mathfrak{N}_1$ aus Längen, die nach $\mathfrak{N}_2$ hin wachsen, und setzen fest, was offenbar gestattet ist, dass von den Punkten $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$ der zweite die grössere Länge hat. Ist alsdann $\alpha$ die Länge von $\mathfrak{N}'_1$, $\lambda$ die Länge des Meridians $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$, so wird, weil alle Bogen $\delta$ unendlich klein sind, $\delta_1 = \varDelta \sin\lambda$, $\delta_2 = \varDelta \cos\lambda$, $\delta'_1 = \varDelta \sin(\lambda - \alpha)$, $\delta'_2 = \varDelta \cos(\lambda - \alpha)$, mithin

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial s}\right)^2 = \frac{\varrho_1'^2 \cos^2(\lambda-\alpha) + \varrho_2'^2 \sin^2(\lambda-\alpha)}{\varrho_1{}^2 \cos\lambda^2 + \varrho_2{}^2 \sin\lambda^2},$$

sobald $\partial s$, $\partial s'$ in entsprechenden Punkten anfangen und endigen.

Dieser Ausdruck soll nun von der Lage des Punktes $\mathfrak{P}$, d. h. von $\lambda$ unabhängig sein. Man erkennt ohne Mühe, dass diese Bedingung für jeden beliebigen Werth von $\alpha$, d. h. unabhängig von den Richtungen, in denen die Krümmungslinien der Flächen $T$, $T'$ von $m$, $m'$ ausgehen, nur dann erfüllt wird, wenn zugleich $\varrho_1'^2 = \varrho_2'^2$, $\varrho_1^2 = \varrho_2^2$ ist, was den bereits oben erledigten Fall liefert.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann das Verhältniss der beiden Linienelemente nur noch in dem Falle von $\lambda$ unabhängig sein, wenn $\alpha = 0$ oder ein Vielfaches von $90^0$ ist. In allen diesen Fällen wird jedem der beiden von $m$ ausgehenden Krümmungslinienelemente eines der beiden von $m'$ ausgehenden parallel; wir schliessen daher keinen Fall aus, wenn wir

$$\alpha = 0$$

setzen, d. h. fordern, dass $\partial N'_1$ mit $\partial N_1$, $\partial N'_2$ mit $\partial N_2$ gleiche Richtung habe. Dann wird

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial s}\right)^2 = \frac{\varrho_1'^2 \cos\lambda^2 + \varrho_2'^2 \sin\lambda^2}{\varrho_1{}^2 \cos\lambda^2 + \varrho_2{}^2 \sin\lambda^2},$$

und dies wird nur dann von $\lambda$ unabhängig, wenn $\varrho_1'^2 : \varrho_1^2 = \varrho_2'^2 : \varrho_2^2$, d. h. entweder $\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} = \frac{\varrho'_2}{\varrho_2}$, oder $\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} = -\frac{\varrho'_2}{\varrho_2}$ wird.

Die zweite von diesen beiden Lösungen liefert den allgemeinen Satz:

*Wenn zwei Flächen $T$ und $T'$ in der Beziehung zu einander stehen, dass in je zwei durch gleiche Normalenrichtung einander entsprechenden Punkten $m$, $m'$ derselben* 1) *auch die Hauptschnitte beider Flächen einander parallel werden, und* 2) *zwischen den Verhältnissen der Krümmungen paralleler Hauptschnitte die Relation*



$$\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} + \frac{\varrho'_2}{\varrho_2} = 0$$

*stattfindet, so wird $T'$ ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von $T$, wenn jeder Punkt $m'$ als das Bild des entsprechenden Punktes $m$ angesehen wird.*

In diesem Satze sind die auf die Minimumsflächen bezüglichen ebenfalls enthalten. Nimmt man nämlich für $T'$ eine Minimumsfläche, so folgt aus der zweiten Bedingung, dass $T$ eine Kugelfläche sein muss, und diese genügt offenbar auch der ersten Bedingung.

Die erste Lösung führt auf ganz elementare Resultate, die hauptsächlich als Vervollständigung des vorigen Satzes aufzufassen sind. In der That fordert dieselbe, wie leicht zu sehen ist, und auch aus den folgenden Untersuchungen hervorgeht, nichts anderes, als dass $T$ und $T'$ homothetisch sind, woraus dann freilich, da die Aehnlichkeit für beliebig grosse perspectivisch liegende Theile vorhanden ist, auch die Aehnlichkeit der kleinsten Theile folgt.

Es ergiebt sich aber hieraus, *dass ausser den durch den ersten Satz bestimmten Flächenpaaren und ihren homothetischen keine andern existiren, welche die von uns geforderten Eigenschaften besitzen.*

## II.

Es wirft sich jetzt die Frage auf, wie und unter welchen Voraussetzungen die Bedingungen des obigen Satzes befriedigt werden können.

Zu dem Zwecke bemerken wir zunächst, was aus der zweiten Bedingung folgt, dass in entsprechenden Punkten nothwendig die eine Fläche gewölbt, die andere sattelförmig gebogen sein muss. Um über bestimmte Vorstellungen zu verfügen, wollen wir daher, was auf den schliesslichen Verlauf der Untersuchung keinen Einfluss mehr haben wird, festsetzen, es seien $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho'_1$ positiv, $\varrho'_2$ dagegen sei negativ.

Wir bezeichnen nun die rechtwinkligen Coordinaten von $m$ durch $x, y, z$, durch $x', y', z'$ diejenigen von $m'$, ausserdem die Richtungscosinus der Normale, der ersten und zweiten Krümmungslinie in $m$, also wegen des geforderten Parallelismus auch in $m'$ durch $a, b, c$; $a_1, b_1, c_1$; $a_2, b_2, c_2$, wobei die Vorzeichen der Grössen $a, b, c$ so gewählt sein sollen, dass die durch sie bestimmte Richtung der Normale derjenigen entgegengesetzt wird, in welcher von der Oberfläche aus die positiven Krümmungshalbmesser aufgetragen werden.

In Folge des Parallelismus der Krümmungslinien werden auch die Drehungswinkel um die zu ihren Tangenten parallelen Axen für beide Flächen gleich, also $\delta'_1 = \delta_1$, $\delta'_2 = \delta_2$.

Wir bestimmen nun zunächst die Grössen, um welche die Coordinaten von $m$ und $m'$ und die Richtungscosinus der Normale in Folge dieser Drehungen zunehmen.

Dreht man die Normale um eine zur Tangente der zweiten Krümmungslinie parallele und durch das Krümmungscentrum des ersten Hauptschnitts gehende Axe herum, bis der Drehungswinkel $\delta_2$ geworden ist, so durchläuft ihr Fusspunkt auf beiden Flächen die erste Krümmungslinie, und weil $\varrho_1$, $\varrho_1'$ positiv sind, beide in derselben Richtung. Die zurückgelegten Wege sind $\partial N_1 = \varrho_1 \delta_2$, $\partial N_1' = \varrho_1' \delta_2$, mithin die Zunahmen von $x$ und $x'$:

$$\underset{1}{\partial} x = a_1 \varrho_1 \delta_2, \quad \underset{1}{\partial} x' = a_1 \varrho_1' \delta_2,$$

vorausgesetzt, dass man den Drehungswinkel $\delta_2$ positiv oder negativ nimmt, jenachdem $m$ sich in der Richtung $a_1 b_1 c_1$, oder ihr entgegen bewegt.

Nach der Lehre von der Krümmung der Flächen ist aber auch $\underset{1}{\partial} x = \varrho_1 \underset{1}{\partial} a$, $\underset{1}{\partial} x' = \varrho_1' \underset{1}{\partial} a$, woraus in beiden Fällen

$$\underset{1}{\partial} a = a_1 \delta_2$$

folgt.

Dreht man die Normale um eine zur Anfangsrichtung der ersten Krümmungslinie parallele und durch das Krümmungscentrum des zweiten Hauptschnittes gehende Axe herum, bis der Drehungswinkel $\delta_1$ geworden ist, so durchläuft ihr Fusspunkt auf beiden Flächen die zweite Krümmungslinie, aber in entgegengesetzten Richtungen. Sind $\partial N_2$, $\partial N_2'$ die wirklich zurückgelegten Wege, so nimmt $x$ um $a_2 \partial N_2$ zu, $x'$ um $a_2 \partial N_2'$ ab. Nun ist $\partial N_2 = \varrho_2 \delta_1$, $\partial N_2' = -\varrho_2' \delta_1$, also wachsen $x$ und $x'$ um

$$\underset{2}{\partial} x = a_2 \varrho_2 \delta_1, \quad \underset{2}{\partial} x' = a_2 \varrho_2' \delta_1,$$

wieder vorausgesetzt, dass $\delta_1$ positiv oder negativ genommen wird, jenachdem $m$ sich in der Richtung $a_2 b_2 c_2$ oder ihr entgegen bewegt.

Da ausserdem $\underset{2}{\partial} x = \varrho_2 \underset{2}{\partial} a$, $\underset{2}{\partial} x' = \varrho_2' \underset{2}{\partial} a$ ist, so folgt

$$\underset{2}{\partial} a = a_2 \delta_1.$$

Daraus ergeben sich für die vollständigen Differentiale die folgenden wichtigen Formeln:

$$\begin{aligned}
\partial x &= a_1 \varrho_1 \delta_2 + a_2 \varrho_2 \delta_1, & \partial y &= b_1 \varrho_1 \delta_2 + b_2 \varrho_2 \delta_1, & \partial z &= c_1 \varrho_1 \delta_2 + c_2 \varrho_2 \delta_1,\\
\partial a &= a_1 \delta_2 \quad + a_2 \delta_1, & \partial b &= b_1 \delta_2 \quad + b_2 \delta_1, & \partial c &= c_1 \delta_2 \quad + c_2 \delta_1,\\
\partial x' &= a_1 \varrho_1' \delta_2 + a_2 \varrho_2' \delta_1, & \partial y' &= b_1 \varrho_1' \delta_2 + b_2 \varrho_2' \delta_1, & \partial z' &= c_1 \varrho_1' \delta_2 + c_2 \varrho_2' \delta_1,
\end{aligned}$$

von denen die auf die Fläche $T$ allein bezüglichen für jede beliebige



Fläche gelten. Aus den bei ihrer Herleitung unterschiedenen Fällen ergiebt sich übrigens, dass diese Formeln von den zu Eingange über die Vorzeichen der Krümmungshalbmesser gemachten Voraussetzungen unabhängig, also auf beide Fälle des vorigen art. anwendbar sind.

## III.

Setzt man nun, um die erste Lösung des art. I zu befriedigen, $\varrho_1' = k\varrho_1$, $\varrho_2' = k\varrho_2$, so wird $\partial x' = k\partial x$, $\partial y' = k\partial y$, $\partial z' = k\partial z$. Damit diese Gleichungen eine Fläche $T'$ bestimmen können, müssen ihre rechten Seiten vollständige Differentiale sein. Betrachtet man $z$ als Function von $x$, $y$, so folgt aus der ersten Gleichung, dass $k$ von $y$, aus der zweiten, dass es von $x$ unabhängig, also constant sein muss. Diese Lösung liefert also, wie schon früher angewandt worden ist, zu jeder beliebigen Fläche ihre sämmtlichen homothetischen.

## IV.

Zur Befriedigung der zweiten Lösung

$$\frac{\varrho_1'}{\varrho_1} + \frac{\varrho_2'}{\varrho_2} = 0$$

setzen wir $\varrho_2' = H\varrho_2$, $\varrho_1' = -H\varrho_2$. Dann wird $\underset{1}{\partial} x' = -H \underset{1}{\partial} x$, $\underset{2}{\partial} x' = H \underset{2}{\partial} x$, u. s. w.

Nennt man nun diejenige Seite einer Fläche, von welcher ihre Normalen ausgehen, ihre Vorderseite, so ergiebt sich aus diesen Formeln zunächst, dass im vorliegenden Falle die Vorderseite von $T$ auf der Rückseite von $T'$ abgebildet wird, und umgekehrt, vorausgesetzt, dass man unter einer Abbildung eine im gewöhnlichen Sinne, also nicht verkehrt ähnliche versteht.

Sodann ergeben sich für die vollständigen Differentiale die Gleichungen

$$\partial x' = H(\underset{2}{\partial} x - \underset{1}{\partial} x), \quad \partial y' = H(\underset{2}{\partial} y - \underset{1}{\partial} y), \quad \partial z' = H(\underset{2}{\partial} z - \underset{1}{\partial} z),$$

von denen zunächst gezeigt werden soll, dass sie aus den Bedingungen unserer Untersuchung nicht bloss folgen, sondern dieselben auch umgekehrt nach sich ziehen.

Sind nämlich $a$, $b$, $c$ die Richtungscosinus der Normale von $T$, so sind sie es auch für $T'$, weil aus den vorstehenden Gleichungen

$$a\partial x' + b\partial y' + c\partial z' = 0$$

folgt.

Da ferner die Krümmungslinienelemente $\partial N_1$, $\partial N_2$ auf einander senkrecht stehen, so folgt $\partial s'^2 = H^2(\partial N_1^2 + \partial N_2^2) = H^2 \partial s^2$, also ist $T'$ ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von $T$.

Auf Grund dieser beiden Folgerungen ergiebt sich endlich nach art. I auch der Parallelismus der Krümmungslinien beider Flächen.

Folglich enthalten die vorstehenden Differentialgleichungen alle für die gegenwärtige Aufgabe nothwendigen und ausreichenden Bedingungen.

Setzt man $\frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} H = \Omega$, so lassen die obigen Gleichungen sich in die Form

$$(\mathfrak{A}.)\qquad \begin{cases} \partial x' = \Omega\left[2\partial a - \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\partial x\right], \\ \partial y' = \Omega\left[2\partial b - \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\partial y\right], \\ \partial z' = \Omega\left[2\partial c - \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\partial z\right] \end{cases}$$

bringen. Dieselbe zeigt sofort, dass unsere ursprüngliche Aufgabe, die Bedingungen zu ermitteln, damit zu einer gegebenen Fläche $T$ eine sie in der verlangten Weise abbildende existire, auf die Herstellung und Deutung der Integrabilitätsbedingungen zurückgeführt ist, welche erforderlich sind und hinreichen, damit die drei vorstehenden Ausdrücke zugleich vollständige Differentiale werden.

Es ist indessen zweckmässig, für diese Untersuchung die Differentialgleichungen so viel wie möglich in der ursprünglichen einfachsten Form beizubehalten.

## V.

Wir setzen voraus, dass $x, y$ und $z$ als Functionen zweier von einander unabhängiger Variabeln $u_1, u_2$ in der Weise dargestellt sind, dass der Gleichung $\partial u_1 = 0$ diejenige Schaar Krümmungslinien von $T$ entspricht, welcher die vorhin als erste bezeichnete angehört, der Gleichung $\partial u_2 = 0$ die andere Schaar. Bezeichnet man daher die Derivirten von $x, y, z$ nach $u_1, u_2$ durch $x_1, x_2, x_{12}$, u. s. w., so wird

$$\underset{1}{\partial} x = x_2 \partial u_2, \quad \underset{2}{\partial} x = x_1 \partial u_1, \quad \text{u. s. w.}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen $\underset{1}{\partial} x = \varrho_1 \underset{1}{\partial} a$, $\underset{2}{\partial} x = \varrho_2 \underset{2}{\partial} a$, wenn

$$\frac{1}{\varrho_1} = r_1, \quad \frac{1}{\varrho_2} = r_2$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial a}{\partial u_2} = r_1 x_2, \quad \frac{\partial a}{\partial u_1} = r_2 x_1,$$

mithin durch Elimination von $a$

$$(1.)\qquad x_{12} = \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{\partial r_2}{\partial u_2} x_1 - \frac{\partial r_1}{\partial u_1} x_2\right),$$



wozu noch zwei ähnliche Gleichungen für $y$ und $z$ kommen. Ausserdem ist

$$(2.)\qquad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Dies vorausgeschickt, nehmen die Differentialgleichungen des vorigen art. die folgende Form an:

$$(A.)\qquad \begin{cases} \partial x' = H(x_2 \partial u_2 - x_1 \partial u_1), \\ \partial y' = H(y_2 \partial u_2 - y_1 \partial u_1), \\ \partial z' = H(z_2 \partial u_2 - z_1 \partial u_1). \end{cases}$$

Für $\log H = Z$ liefert die erste als Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial Z}{\partial u_1} x_2 + \frac{\partial Z}{\partial u_2} x_1 + 2 x_{12} = 0,$$

oder wegen (1.)

$$\left[\frac{\partial Z}{\partial u_1} - \frac{2}{r_1 - r_2}\frac{\partial r_1}{\partial u_1}\right] x_2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial u_2} + \frac{2}{r_1 - r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u_2}\right] x_1 = 0.$$

Mit Rücksicht auf (2.) folgt aus dieser und den beiden hierzugehörigen Gleichungen, daß nothwendig

$$\frac{\partial Z}{\partial u_1} = \frac{2}{r_1 - r_2}\frac{\partial r_1}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u_2} = -\frac{2}{r_1 - r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u_2}$$

sein muss, und umgekehrt sind mit diesen beiden zugleich alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

Damit aber diese beiden Gleichungen mit einander bestehen können, ist erforderlich und hinreichend, dass

$$(B.)\qquad \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{r_1 - r_2}\frac{\partial r_1}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{r_1 - r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u_2}\right) = 0$$

sei. Ist diese Bedingung erfüllt, so liefern also die vorstehenden Ausdrücke für $\partial Z$ ein vollständiges Differential, und die so bestimmte Function

$$H = e^Z$$

macht auch die Ausdrücke für $\partial x', \partial y', \partial z'$ zu vollständigen Differentialen. Zugleich ist ersichtlich, dass der letztern Forderung auf keine andere Weise genügt werden kann.

Es bedarf nur noch der geometrischen Interpretation von $(B.)$. Sei

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \xi_1^2, \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \xi_2^2,$$

so folgt aus (1.) und (2.)

$$(3.)\qquad \frac{1}{r_1 - r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u_2} = \frac{\partial \log \xi_1}{\partial u_2}, \quad \frac{1}{r_1 - r_2}\frac{\partial r_1}{\partial u_1} = -\frac{\partial \log \xi_2}{\partial u_1},$$

wodurch $(B.)$ in

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\xi_1}{\xi_2}}{\partial u_1 \, \partial u_2} = 0$$

übergeht. Diese Gleichung fordert also, dass $\log \frac{\xi_1}{\xi_2}$ sich als Differenz einer bloss von $u_1$ und einer bloss von $u_2$ abhängigen Function darstellen lasse, dass also

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\varphi(u_1)}{\psi(u_2)}$$

dem Quotienten aus zwei solchen Functionen gleich sei.

Führt man nun, was an den frühern Voraussetzungen nichts ändert, mittelst der Gleichungen $\varphi(u_1)\partial u_1 = \partial u_1'$, $\psi(u_2)\partial u_2 = \partial u_2'$ zwei neue Variabeln $u_1'$, $u_2'$ ein, so folgt, dass die Allgemeinheit unseres Resultates nicht geändert wird, wenn wir $\varphi(u_1)$ und $\psi(u_2)$ constant und einander gleich setzen. Dann wird die Lösung von $(B.)$

(4.) $$\xi_1 = \xi_2.$$

Damit also die Gleichungen $(A.)$ durch passende Wahl von $H$ integrabel gemacht werden können, ist erforderlich und hinreichend, dass das Quadrat des Linienelementes von $T$ sich in die Form $\partial s^2 = \xi_1^2(\partial u_1^2 + \partial u_2^2)$ bringen lasse, während $\partial u_1 = 0$, $\partial u_2 = 0$ die Differentialgleichungen der beiden Schaaren Krümmungslinien von $T$ sind. Wir haben hiernach den Satz:

*Damit einer Fläche $T$ eine zweite $T'$ in der oben verlangten Weise zugeordnet werden könne, ist erforderlich und hinreichend, dass $T$ ein in den kleinsten Theilen ähnliches ebenes Bild gestatte, in welchem seine Krümmungslinien durch zwei Schaaren zu einander senkrechter Geraden dargestellt werden.*

*Und umgekehrt können alle Flächen $T$, zu denen die Gleichungen $(\mathfrak{A}.)$ oder $(A.)$ eine zugeordnete $T'$ liefern, in dieser Weise auf einer Ebene abgebildet werden.*

Bezeichnet man bei der Abbildung von $T$ auf der Ebene der $u_1$, $u_2$ das Vergrösserungsverhältniss durch $\frac{1}{m}$, so wird

$$\partial s^2 = m^2(\partial u_1^2 + \partial u_2^2),$$

und es ergeben sich für die Familie der Flächen $T$ aus (4.), (2.), (1.) und (3.) die Differentialgleichungen:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = m^2, \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0, \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = m^2,$$

$$x_{12} = \frac{\partial \log m}{\partial u_1} x_2 + \frac{\partial \log m}{\partial u_2} x_1,$$

$$y_{12} = \frac{\partial \log m}{\partial u_1} y_2 + \frac{\partial \log m}{\partial u_2} y_1,$$

$$z_{12} = \frac{\partial \log m}{\partial u_1} z_2 + \frac{\partial \log m}{\partial u_2} z_1.$$



Ist $T$ diesen Gleichungen gemäss bestimmt, so wird

$$\partial Z = -2 \frac{\partial \log m}{\partial u_1} \partial u_1 - 2 \frac{\partial \log m}{\partial u_2} \partial u_2,$$

also $Z = \text{const.} - 2 \log m$,

$$H = \frac{A}{m^2},$$

so dass man zur Bestimmung von $T'$ die integrabeln Gleichungen

$$\partial x' = \frac{A}{m^2}(x_1 \partial u_1 - x_2 \partial u_2),$$

$$\partial y' = \frac{A}{m^2}(y_1 \partial u_1 - y_2 \partial u_2),$$

$$\partial z' = \frac{A}{m^2}(z_1 \partial u_1 - z_2 \partial u_2)$$

erhält.

Es ist hier nicht der Ort, diesen Gegenstand durch Ausführung von Beispielen weiter zu verfolgen.

Zürich, 2. April 1867.

## XIV.

## Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 68, 1868, S. 246—252.)

In der fundamentalen Begründung der Invariantentheorie, durch welche Herr Aronhold dieses ganze Gebiet auf ein einziges, von jeder Willkürlichkeit befreites und der grössten Ausdehnung fähiges Princip zurückgeführt hat, wirft sich das Hauptgewicht auf die Frage, *wie gross für eine gegebene homogene Function in einem System von Grundformen die Anzahl derselben vorausgesetzt werden darf, wenn dasselbe nur voneinander unabhängige enthalten soll*, weil nur bei gesicherter Kenntnis dieser Fundamentalzahlen beurtheilt werden kann, ob gegebene Functionen $F$ und $F'$ durch lineare Substitutionen ineinander transformirt werden können, und durch wieviel Substitutionen dies erreicht werden kann.

Die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten einer homogenen Function, mit welcher alle übrigen Fundamentalzahlen gegeben sind, ist bis jetzt auf zwei verschiedenen Wegen bestimmt worden, zuerst durch Abzählung der Transformationsbedingungen und der zu eliminirenden Substitutionscoefficienten, dann mittelst der partiellen Differentialgleichungen der Invariantentheorie. Bemerkenswerthe und den allgemeinen Fall bildende Abweichungen von den bei diesen Beweisen vorausgesetzten Verhältnissen, welche sich mir bei andern Untersuchungen darboten, haben mir gezeigt, dass beide Beweise unzureichend sind und übereinstimmend das voraussetzen, was sich bei genauerer Betrachtung als die Hauptfrage für den zu leistenden Beweis herausstellt.

Bezeichnet $(n, p)$ die Anzahl der Coefficienten einer homogenen Function $F$ vom $p^{\text{ten}}$ Grade und $n$ Variabeln, so ist $(n, p)$ auch die Anzahl der Bedingungen für die Transformation dieser Function in eine andere mittels einer gegebenen linearen Substitution. Durch Elimination der $n \cdot n$ Substitutionscoefficienten ergeben sich die Transformationsrelationen, also die absoluten Invarianten von $F$.



Nimmt man nun an, unter den ursprünglichen Transformationsbedingungen lasse sich eine Gruppe von $n \cdot n$ Gleichungen auswählen, *welche in Bezug auf die Substitutionstionscoefficienten voneinander unabhängig sind,* so wird die Anzahl der Transformationsrelationen, also der absoluten Invarianten

$$\omega = (n, p) - n^2.$$

Wenn aber eine solche Gruppe von $n \cdot n$ Gleichungen nicht existiren sollte, so würde mit Rücksicht auf den Umstand, dass die ursprünglichen Transformationsbedingungen bei der von ihnen geforderten Wahl von $F'$ nie auf einen Widerspruch führen können, folgen, dass bei der Transformation von $F$ in eine mit möglichst viel willkürlichen Coefficienten versehene Function $F'$

1) nicht alle Substitutionscoefficienten bestimmte Werthe erlangen, sondern eine Anzahl $\mu$ derselben willkürlich bleibt, und in Folge dessen

2) die Anzahl der Transformationsrelationen um $\mu$ Einheiten grösser ist als die durch Abzählen gefundene normalmässige Anzahl $\omega = (n, p) - n^2$ derselben.

Es würden demnach auch die merkwürdigen Folgerungen wegfallen, oder einer durchgreifenden Modification bedürfen, welche sich in der Lehre von den zugehörigen Formen und den Covarianten an die Voraussetzung knüpfen, dass durch das Resultat der Transformation die anzuwendende Substitution völlig bestimmt sei.

Im $65^{\text{sten}}$ Bande dieses Journals pag. 267 ist die Frage nach der Anzahl voneinander unabhängiger Invarianten von der Untersuchung des Systems partieller Differentialgleichungen

$$D_{ik} H = 0$$

abhängig gemacht worden, denen alle absoluten Invarianten und nur solche genügen, und gezeigt worden, dass jede Gleichung, welche sich aus diesen $n \cdot n$ Gleichungen durch Differentiiren und Elimination der höhern Derivirten ergiebt, aus Gleichungen des Systems auch linear zusammengesetzt werden kann. Dieser Nachweis reicht jedoch zu der daraus gezogenen Folgerung nicht aus, indem die übrigen Sätze, auf welche diese sich stützt, eine Bedingung enthalten, welche in jedem besonderen Falle als erfüllt nachgewiesen werden muss.

Wenn ein System linearer und in den Derivirten homogener Differentialgleichungen erster Ordnung, wie das obige, durch Differentiiren und Elimination der höhern Derivirten nur auf Combinationen der ursprünglichen Gleichungen führt, so nenne ich dasselbe ein *vollständiges*, und schliesse dabei absichtlich den Fall nicht aus, wo in dem

System selbst auch noch Gleichungen enthalten sind, welche aus andern linear folgen; solche Gleichungen nenne ich *überzählige.*

*Befreit man ein vollständiges System von seinen überzähligen Gleichungen, so hört es nicht auf, ein vollständiges zu sein.*

Ein von allen überzähligen Gleichungen befreites vollständiges System hat stets soviel, und niemals mehr voneinander unabhängige Lösungen, als die Anzahl der Variabeln, vermindert um die Anzahl der Gleichungen beträgt.

*Ist daher in einem vollständigen System: $N$ die Anzahl der Variabeln, $M$ die Anzahl der Gleichungen überhaupt und $\mu$ die Anzahl der überzähligen, so ist die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen* $= N - M + \mu$.

Wenn daher in obigem System von Differentialgleichungen die Anzahl der überzähligen $\mu$ ist, so folgt:

1) Die Anzahl der voneinander unabhängigen absoluten Invarianten von $F$, d. i. die Anzahl der Transformationsrelationen ist $(n, p) - n^2 + \mu = \omega + \mu$, also um $\mu$ Einheiten grösser als die durch Abzählen gefundene normalmässige;

2) bei der Transformation von $F$ in $F'$ können daher $n^2 - \mu$ Coefficienten von $F'$ willkürlich angenommen werden, und dann schon sind die übrigen bestimmt;

3) bei dieser Transformation bleiben $\mu$ Substitutionscoefficienten willkürlich.

Aus diesen Erörterungen in Verbindung mit den vorangehenden ergiebt sich zur Genüge nicht blos die Nothwendigkeit einer genauen Bestimmung der Zahl $\mu$, sondern auch, dass hier der Schwerpunkt aller Zahlenbestimmungen der Invariantentheorie liegt. Auf der andern Seite ist es klar, dass eine besondere Untersuchung über die Zahl $\mu$ nur in dem Falle überflüssig sein würde, wo die Grundformen entweder unmittelbar aus den ursprünglichen Transformationsbedingungen, oder durch directe Integration der partiellen Differentialgleichungen abgeleitet werden, weil nur in einem dieser Fälle die genaue Anzahl der Transformationsrelationen sich von selbst ergiebt.

Die Zahl $\mu$ kann durch die Lösung der Aufgabe gefunden werden, $n \cdot n$ Coefficienten $\lambda$ so zu bestimmen, dass für jede beliebige Function $\Pi$

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} D_{ik} \Pi$$

Null wird, indem $\mu$ die Anzahl derjenigen $\lambda$ ist, welche hierbei willkürlich bleiben. Vermöge der Willkürlichkeit von $\Pi$ ergeben sich hieraus $(n, p)$ Gleichungen, welche man erhält, indem man nacheinander $\Pi$ durch die verschiedenen Coefficienten von $F$ ersetzt.



Wäre man im Stande, unter diesen $(n, p)$ Gleichungen irgend eine Gruppe von $n \cdot n$ Gleichungen zu ermitteln, von denen sich beweisen lässt, dass ihre Determinante von Null verschieden ist, so würde jedes $\lambda = 0$ folgen, also auf dem directesten Wege bewiesen sein, dass $\mu = 0$ ist.

Bei einer allgemeinen Begründung der Invariantentheorie hindert aber nichts, die auf vorstehende Art definirte Zahl $\mu$ vorläufig in der Theorie mitzuführen, bis sich bequeme Hülfsmittel zu ihrer allgemeinen Bestimmung darbieten, und diese finden sich, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, für die homogenen Functionen in der Lehre von den zugehörigen Formen, welche den Beweis des Satzes, *dass für $p > 2$ stets $\mu = 0$ ist,* ohne Schwierigkeit gestattet.

1.

Wir setzen also voraus, dass die Bestimmung der Coefficienten $\lambda$ auf $\mu$ voneinander unabhängige Lösungen

$$\lambda_{ik}^1, \quad \lambda_{ik}^2, \ \ldots \ \lambda_{ik}^\mu$$

führt, aus denen sich jede andere nach der Formel

$$\lambda_{ik} = \sum c_\varrho \lambda_{ik}^\varrho$$

zusammensetzt. Diese besonderen Lösungen $\lambda_{ik}^\varrho$ unterwerfen wir mit Rücksicht auf unsere spätern Untersuchungen der offenbar zulässigen Bedingung, dass sie ausser Coefficienten von $F$ kein anderes willkürliches Element enthalten sollen.

Bei dieser Voraussetzung schliesst man aus der oben nachgewiesenen Anzahl absoluter Invarianten in bekannter Weise, dass die Anzahl voneinander unabhängiger Invarianten überhaupt

$$\eta = (n, p) - n^2 + \mu + 1$$

ist. Dieser Schluss erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn gar keine absolute Invariante existirt, also für $p > 2$ nur, wenn $n = 2$, $p = 3$ ist. Für diesen Fall hat Herr Aronhold durch Integration der Differentialgleichungen gezeigt, dass eine einzige Invariante, also keine absolute existirt, weshalb in diesem Falle $\mu = 0$ ist.

2.

Sei, mit den zugehörigen Polynomialcoefficienten $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots)$ geschrieben,

$$F = S(\alpha_1 \alpha_2 \ldots) a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots$$

Um zugehörige Formen mit den Variabeln $u_1, u_2, \ldots$ zu finden, erhebt man die lineare Function $U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots$ in die $p^{\text{te}}$ Potenz, und sucht Invarianten der homogenen Function $F + tU^p$, wo $t$ einen constanten Parameter bedeutet. Ist also $\Pi(a_{\alpha_1\alpha_2\ldots})$ eine Invariante von $F$, und von den $u$ unabhängig, so wird bekanntermassen

$$\Pi' = \Pi(a_{\alpha_1\alpha_2\ldots} + t u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots)$$

im weitern Sinne eine zugehörige Form, vorausgesetzt, dass $\Pi'$ nicht von den Variabeln $u$, oder bei willkürlichen $u$ nicht vom Parameter $t$ unabhängig ist.

Nun erkennt man durch Differentiiren sofort, dass, welche Function der Coefficienten von $F$ allein $\Pi$ immer bedeuten mag, die aus ihr abgeleitete $\Pi'$ nur dann bei beliebigen Werthen der $u$ von $t$ unabhängig sein kann, wenn $\Pi$ selbst von allen $a$ unabhängig ist.

*Also liefert jede wirkliche Invariante $\Pi$ von $F$ auch eine wirkliche zugehörige Form $\Pi'$.*

Die Anzahl der in Bezug auf die $n$ Variabeln $u$ voneinander unabhängigen zugehörigen Formen kann niemals grösser als $n$ sein. Um die Frage zu entscheiden, wann diese Zahl erreicht wird, betrachten wir vorläufig den Fall, wo $F$ mindestens $n$ von einander unabhängige Invarianten $\Pi_s(a_{\alpha_1\alpha_2\ldots})$ hat, $s = 1, 2, \ldots n$. Dann sind die Functionen $\Pi_s' = \Pi_s(a_{\alpha_1\alpha_2\ldots} + t u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots)$ nach dem Vorangehenden wirkliche zugehörige Formen. Wären diese in Bezug auf die Variabeln $u$ nicht unabhängig voneinander, so könnte man eine Function $f$ so wählen, dass $f(\Pi_1', \Pi_2', \ldots \Pi_n')$ von den $u$ unabhängig, also $f(\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n)$ würde. Dann aber wäre dieser letztere Ausdruck nach dem Frühern von allen Coefficienten der Function $F$ unabhängig, und $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$ wären keine voneinander unabhängige Invarianten.

*Aus $n$ voneinander unabhängigen Invarianten erhält man also auch $n$ zugehörige Formen, welche in Bezug auf die Variabeln $u$ voneinander unabhängig sind.*

Dies festgestellt, lässt sich leicht zeigen, dass für $p > 2$, selbst unter der Voraussetzung, $\mu$ sei nicht Null, die zugehörigen Formen in der normalmässigen Anzahl $n$ vorhanden sein würden, d. h. dass unter den angegebenen Bedingungen die Anzahl der Invarianten $\eta \geqq n$ ist.

Wenn nämlich $\mu$ von Null verschieden ist, so tritt der ungünstigste Fall für die Erfüllung der Ungleichheit

$$(n, p) - n^2 + \mu + 1 \geqq n$$

ein für $\mu = 1$, was

$$(n, p) \geqq (n-1)(n+2)$$

giebt. Da ferner die linke Seite, sobald $n > 1$ ist, wegen der Gleichung $(n, p+1) = (n, p)\left[1 + \frac{n-1}{p+1}\right]$ mit $p$ zugleich wächst, so tritt unter der Voraussetzung, dass $p > 2$ sei, der ungünstigste Fall ein



für $p = 3$, was

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \geqq (n-1)(n+2)$$

giebt. Durch Beseitigung positiver Factoren kann man dieser Bedingung die Form

$$(n-2)(n-3) \geqq 0$$

geben, und dies ist für jedes ganzzahlige $n$ der Fall.

3.

Durch Division mit einer Invariante kann man stets bewirken dass eine zugehörige Form beim Uebergange zu den transformirten Coefficienten und Variabeln ganz ungeändert bleibt. Solche zugehörige Formen sind durch das Gleichungssystem

$$D_{ik}\Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_k = 0$$

bestimmt.

Man überzeugt sich leicht, dass auch diese Gleichungen ein vollständiges System bilden. Ist daher $\mu_1$ die Anzahl der überzähligen Gleichungen dieses Systems, so ist die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen:

$$n + (n, p) - n^2 + \mu_1.$$

Verwendet man aber zu einem vollständigen System voneinander unabhängiger Lösungen der vorstehenden Gleichungen möglichst viel, also $(n, p) - n^2 + \mu$ absolute Invarianten, so bilden die zur Vervollständigung des Systems erforderlichen Lösungen ein System von zugehörigen Formen, welche in Bezug auf die Variabeln $u$ voneinander unabhängig sind, und aus denen sich mit Hinzuziehung von Invarianten jede andere zugehörige Form zusammensetzen lässt.

Die Anzahl der in Bezug auf die Variabeln $u$ voneinander unabhängigen zugehörigen Formen ist demnach:

$$n + \mu_1 - \mu.$$

Wäre nun, immer unter der Voraussetzung $p > 2$, der Fall möglich, dass $\mu$ von Null verschieden ist, so würde aus dem Schlusse des vorigen art.

$$\mu_1 = \mu$$

folgen. Lässt sich beweisen, dass hierin ein Widerspruch enthalten ist, so ist bewiesen, dass $\mu$ nicht von Null verschieden sein kann.

Der Voraussetzung gemäss ist $\mu_1$ die Anzahl derjenigen $\lambda$, welche willkürlich bleiben, wenn man aus dem Ausdrucke

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} D_{ik}\Psi + \sum_{ik} \lambda_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_k$$

alle Derivirten von $\Psi$ eliminirt. Da das erste Glied nur Derivirten nach Coefficienten von $F$ enthält, so muss es für sich verschwinden, also $\lambda_{ik}$ die in art. 1 angegebene Form

$$\lambda_{ik} = \sum_{\varrho} c_{\varrho} \lambda_{ik}^{\varrho}$$

haben, wo die Grössen $\lambda_{ik}^{\varrho}$ von allen willkürlichen Elementen, namentlich den $u$ völlig frei sind. Die $\mu$ Coefficienten $c$ müssen jetzt so gewählt werden, dass auch das zweite Glied identisch verschwindet. Man erhält also die $n$ Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\varrho} c_{\varrho} \sum_{k} u_k \lambda_{ik}^{\varrho} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

zwischen den $\mu$ Grössen $c$, und es wird jetzt $\mu_1$ die Anzahl derjenigen $c$, welche hierbei willkürlich bleiben.

Nimmt man aber an, $\mu$ sei von Null verschieden, so muss $\mu_1 = \mu$ sein, also jedes $c$ willkürlich bleiben. Dies ist nicht anders möglich, als wenn für jedes $i$ und $\varrho$

$$\sum_{k} u_k \lambda_{ik}^{\varrho} = 0$$

ist, und zwar für alle Werthe der unabhängigen Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_n$.

Da aber die Coefficienten $\lambda_{ik}^{\varrho}$ von den $u$ völlig unabhängig sind, so müssen sie alle Null sein, was mit der Annahme, $\mu$ sei von Null verschieden, im Widerspruche steht. Folglich ist, für $p > 2$, diese Annahme selbst unzulässig.

Wenn aber $\mu = 0$ ist, so ist umsomehr $\mu_1 = 0$, da $n + \mu_1 - \mu$ nicht grösser als $n$, also $\mu_1$ nicht grösser als $\mu$ sein kann. Da dies offenbar auch für die Differentialgleichungen der Covarianten gilt, haben wir also den zu beweisenden Satz:

*Die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten sowie aller übrigen Grundformen ist für jede homogene Function, deren Grad grösser als 2 ist, die normalmässige.*

Zürich, 19. December 1867.

### Anmerkung.

In Randbemerkungen seines mehrfach erwähnten Handexemplars weist Christoffel selbst auf die Schwächen des vorstehenden Beweisversuches hin.

# XV.

## Theorie der bilinearen Functionen.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 68, 1868, S. 253—272.)

Die in meiner vorangehenden Arbeit für die homogenen Functionen bewiesenen Lehrsätze lassen sich mit Leichtigkeit auf den Fall ausdehnen, wo die zu transformirende Function $F$ in Bezug auf $p$ Systeme von je $n$ Variabeln linear und homogen ist, und überdies auf jedes Variabelnsystem dieselbe lineare Substitution angewandt wird.

Setzt man nämlich in $F$ alle diejenigen Variabeln einander gleich, für welche dieselbe Substitution gilt, so geht $F$ in eine homogene Function $\Phi$ von der $p^{\text{ten}}$ Ordnung und $n$ Dimensionen über, welche, sobald $p > 2$ ist, die normalmässige Anzahl $n$ voneinander unabhängiger zugehöriger Formen besitzt. Diese zugehörigen Formen von $\Phi$ sind aber auch zugehörige Formen von $F$ und nur insoweit specialisirt, als sie die Coefficienten von $F$ nur in denjenigen Verbindungen enthalten, zu denen diese sich beim Übergange von der $p$-fach linearen Function $F$ zur homogenen Function $\Phi$ vereinigt haben.

Da hiernach $F$ ebenfalls die normalmässige Anzahl $n$ voneinander unabhängiger zugehöriger Formen besitzt, so ist bei der Transformation von $F$ durch das Resultat derselben die anzuwendende Substitution insofern völlig bestimmt, als sie keine willkürlichen Constanten enthalten kann. Folglich sind auch die übrigen Grundformen in der normalmässigen Anzahl vorhanden, und die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten ist z. B. $= n^p - n^2 + 1$.

Für den Fall $p = 2$ verlieren diese Sätze ebenso, wie bei den homogenen Functionen ihre Gültigkeit, nur dass die Erscheinungen, welche diese Ausnahmefälle darbieten, und welche über die hier erwähnten Transformationsprobleme hinaus zur allgemeinen Regel werden, bei den bilinearen Functionen vollständiger hervortreten, als bei den homogenen Functionen zweiter Ordnung.

Die Frage nach den Grundformen einer bilinearen Function

$$F = S(gh) x_g y_h; \quad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

erledigt sich am einfachsten durch die wirkliche Darstellung derselben. Wir werden in art. I. für die Function $F$ im Ganzen $\left[\frac{n}{2}\right]$ absolute Invarianten[1]), $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ zugehörige Formen und ebensoviel Covarianten darstellen. Aus ihrer Beziehung zum Transformationsprobleme wird dann zunächst der Nachweis geführt, dass diese Formensysteme vollständig sind. Dass sie auch von überzähligen Formen frei sind, also nur voneinander unabhängige enthalten, ergiebt sich dann durch folgende Überlegung.

Die wirkliche Anzahl $I$ der voneinander unabhängigen absoluten Invarianten ist unter allen Umständen gleich der normalmässigen, vermehrt um die Anzahl $\mu$ von Substitutionscoefficienten, welche bei einer zulässigen Transformation von $F$ willkürlich bleiben; für die bilinearen Functionen ist also $I=\mu$. Die stets zulässige Transformation von $F$ in sich selbst (art. II.) zeigt aber, dass allgemein $\mu=\left[\frac{n}{2}\right]$, also gleich ist der in art. I. gefundenen Anzahl von absoluten Invarianten. Folglich ist dieses Formensystem nicht nur vollständig, sondern auch frei von überzähligen Formen. Daraus ergiebt sich dann nach dem in meiner vorigen Arbeit benutzten Prinzip, dass die aus diesem Invariantensysteme hervorgegangenen zugehörigen Formen und Covarianten, soweit sich solche wirklich ergeben konnten, ebenfalls voneinander unabhängig sein müssen.

Dies festgestellt, ergiebt sich mittelst des von Herrn **Aronhold** gelehrten Verfahrens für die absoluten Invarianten $\Pi$ von $F$ sehr leicht das System von $nn$ Differentialgleichungen

$$(A.)\qquad D_{ik}\Pi=0,$$

wo

$$D_{ik}\Pi=\sum_h\left[\frac{\partial\Pi}{\partial(ih)}(kh)+\frac{\partial\Pi}{\partial(hi)}(hk)\right]$$

ist, und welchem alle absoluten Invarianten und nur solche genügen.

Dieses System ist ein vollständiges. Bezeichnet man nämlich, was bei allen Untersuchungen dieser Art grosse Vortheile gewährt und im Folgenden beibehalten wird, durch das Zeichen

$$\binom{i}{k}$$

die Null oder Eins, jenachdem $k$ von $i$ verschieden oder ihm gleich

1) Unter $\left[\frac{n}{2}\right]$ wird im Folgenden stets die größte in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl verstanden.



ist, so findet für jede Function der Coefficienten von $F$ die identische Gleichung

$$(B.)\qquad D_{gh}D_{ik}\Pi-D_{ik}D_{gh}\Pi=\binom{g}{k}D_{ih}\Pi-\binom{h}{i}D_{gk}\Pi$$

statt, welche Herr **Clebsch** bereits im 65sten Bande dieses Journals pag. 268 für die homogenen Functionen, wenn auch in verschiedene Fälle zerlegt, aufgestellt hat; dieselbe hat ganz allgemeine Gültigkeit. Sie zeigt, dass jede Gleichung, welche aus dem System ($A.$) durch Differentiiren und Elimination der höheren Derivirten hervorgeht, auch aus Gleichungen des Systems linear zusammengesetzt werden kann.

Da aber im System ($A.$) die Anzahl der Variabeln mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmt, so ist die Anzahl $\mu$ der überzähligen Gleichungen dieses Systems gleich der Anzahl seiner Lösungen, also

$$\mu=\left[\frac{n}{2}\right],$$

während es für $p>2$ stets Null ist.

Für *die zugehörigen Formen* $\Psi$ und *die Covarianten* $\Phi$ ergeben sich, wenn jede durch eine geeignete Invariante dividirt wird, die Gleichungssysteme

$$(C.)\qquad D_{ik}\Psi+\frac{\partial\Psi}{\partial u_i}u_k=0,\qquad D_{ik}\Phi-x_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}=0,$$

deren Vollständigkeit man leicht beweist. Dieselben sind ausserdem von überzähligen Gleichungen frei. In der That ist die Anzahl der Lösungen des ersten Systems, nämlich der absoluten Invarianten und zugehörigen Formen zusammengenommen, $=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n$, also die normalmässige; dasselbe gilt vom andern System.

Für *die Zwischenformen* $\Theta$ erhält man, wenn jede durch eine geeignete Invariante dividirt wird, das Gleichungssystem

$$D_{ik}\Theta+\frac{\partial\Theta}{\partial u_i}u_k-x_i\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}=0.$$

Dasselbe ist ein vollständiges, und wie aus dem für die Systeme ($C.$) geführten Beweise hervorgeht, von überzähligen Gleichungen frei; die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen ist daher $2n$.

Verwendet man aber zu einer vollständigen Lösung dieses Systems möglichst viel absolute Invarianten, zugehörige Formen und Covarianten, so bleiben $2n-\left[\frac{n}{2}\right]-2\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]$ eigentliche Zwischenformen übrig, welche

1) mit den zugehörigen Formen ein System von $n$ in Bezug auf die Variabeln $u$,
2) mit den Covarianten ein System von $n$ in Bezug auf die Variabeln $x$,

3) mit beiden und den absoluten Invarianten ein System von $2n$ in Bezug auf die Coefficienten von $F$ voneinander unabhängigen Functionen bilden.

Diese $\left[\frac{n}{2}\right]$ Zwischenformen bilden also eine selbständige Gattung von Ausdrücken, indem sie sich aus den übrigen Grundformen nicht zusammensetzen lassen, und begründen insofern einen der wesentlichsten Unterschiede zwischen den bilinearen und den Functionen von höhern Ordnungen. In der That besteht auch für jede dieser letztern ein System von $2n$ Zwischenformen, welche in Bezug auf die Variabeln $x$ und $u$ voneinander unabhängig sind. Verwendet man aber zu einem solchen System vollständige Systeme von zugehörigen Formen und Covarianten, so bleibt keine Zwischenform mehr übrig, woraus hervorgeht, dass in diesem Falle jede Zwischenform aus zugehörigen Formen und Covarianten zusammengesetzt werden kann, vorausgesetzt, dass diese sämmtlichen Formen durch Division mit einer Invariante in der mehrfach erwähnten Weise modificirt worden sind, wozu man stets mit ein und derselben, nicht absoluten Invariante und ihren Potenzen ausreicht.

Der Grund von dieser und jeder andern Abweichung der bilinearen Functionen vom Verhalten der Functionen höherer Ordnungen liegt darin, dass für die letztern die oben durch $\mu$ bezeichnete Zahl stets Null ist, und es geht hieraus hervor, dass neben der Herstellung der Grundformen sich bei den bilinearen Functionen noch folgende beiden, bei der hier vorausgesetzten Gattung von Transformationsproblemen für sie allein existirenden Aufgaben darbieten:

1) Die Transformation einer bilinearen Function in sich selbst und der Nachweis der willkürlichen Elemente in der hieraus entspringenden Substitution;

2) der directe Nachweis derjenigen $\left[\frac{n}{2}\right]$ Gleichungen, welche im System ($A$.) überzählig sind.

Wegen der Hülfsmittel, welche bei der Herstellung der Grundformen benutzt werden, und der Anwendung der zugehörigen Formen zur Bestimmung der Substitution verweise ich auf die fundamentale Abhandlung des Herrn Aronhold im 62sten Bande dieses Journals.

### I. Die Grundformen der bilinearen Function $F$.

Man verificirt leicht, dass die Determinante

$$P = \Sigma \pm (11)(22)\dots(nn)$$

dem Gleichungssystem

$$D_{ik} P = 2\binom{i}{k} P$$



Genüge leistet; also ist $P$ Invariante von $F$, und wenn $r$ die stets von Null verschiedene Substitutionsdeterminante bedeutet, die Transformirte von $P$

$$P' = r^2 P.$$

Dies festgestellt, sei $\mathfrak{F}$ die aus $F$ durch Vertauschung der Variabelnsysteme hervorgehende bilineare Function,

$$\mathfrak{F} = S(gh) y_g x_h = S(hg) x_g y_h.$$

Da bei beiden Variabelnsystemen *dieselbe* Substitution vorausgesetzt wird, so hat $\mathfrak{F}$ dieselben Invarianten wie $F$, und alle simultanen Invarianten von $F$ und $\mathfrak{F}$ sind zugleich Invarianten von $F$. Dasselbe gilt demnach auch von den Invarianten der Function $\lambda F + \mu \mathfrak{F}$, solange $\lambda$, $\mu$ constante Werthe haben.

Setzt man daher den Coefficienten von $x_g y_h$ in dieser Function, nämlich

$$\lambda(gh) + \mu(hg) = [gh],$$

so folgt, dass auch

$$\Sigma \pm [11][22]\dots[nn] = \Pi(\lambda, \mu)$$

eine *Invariante* von $F$ ist, und zwar für alle constanten Werthe von $\lambda$ und $\mu$.

Für die Anwendungen *der zugehörigen Formen* ist es nöthig, die einfachen Voraussetzungen der Einleitung zu verlassen, und statt der Variabeln $u$ allein zwei Variabelnsysteme einzuführen. Wir suchen demnach simultane Invarianten von $\lambda F + \mu \mathfrak{F}$ mit dem Producte zweier linearen Functionen $U = \Sigma u_g x_g$, $U' = \Sigma u'_h y_h$, also der bilinearen Function

$$U_1 = S u_g u'_h x_g y_h.$$

Aus dem Vorangehenden ergiebt sich die Invariante

$$\begin{vmatrix} [11] + \alpha u_1 u'_1 & [12] + \alpha u_1 u'_2 & \dots \\ [21] + \alpha u_2 u'_1 & [22] + \alpha u_2 u'_2 & \dots \\ \vdots & & \end{vmatrix},$$

welche für $\alpha = 0$ in $\Pi(\lambda, \mu)$ übergeht. Dieselbe ist in Bezug auf $\alpha$ linear und bleibt ungeändert, wenn man $\lambda$ mit $\mu$ und zugleich das System der Variabeln $u$ mit dem der $u'$ vertauscht. Setzt man sie $= \Pi(\lambda, \mu) + \alpha \Psi(\lambda, \mu; \overline{u}, \overline{u'})$, so hat auch $\Psi$ die zuletzt erwähnte Eigenschaft, und es wird, wenn durch

$$\Pi_{gh}(\lambda, \mu)$$

die aus einer Aenderung des Elementes $[gh]$ entspringende Unterdeterminante von $\Pi(\lambda, \mu)$ bezeichnet wird, die gesuchte zugehörige Form

$$\Psi(\lambda, \mu; \overline{u}, \overline{u'}) = S \Pi_{gh}(\lambda, \mu) u_g u'_h,$$

also eine bilineare Function der Variabelnsysteme $u, u'$. In Determinantenform wird

$$\Psi(\lambda, \mu; \bar{u}, \bar{u}') = \begin{vmatrix} 0 & u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ -u_1 & [11] & [12] & \dots & [1n] \\ -u_2 & [21] & [22] & \dots & [2n] \\ \vdots & & & & \vdots \\ -u_n & [n1] & [n2] & \dots & [nn] \end{vmatrix}.$$

Um *bilineare Covarianten* zu erhalten, setzen wir

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = X_h, \quad \frac{\partial F}{\partial x_g} = Y_g,$$

und suchen simultane Invarianten von $\lambda F + \mu \mathfrak{F}$ mit dem Producte der linearen Functionen $\Sigma X_h y_h$, $\Sigma Y_g x_g$, indem wir die Coefficienten $X$, $Y$ wie Constanten behandeln. Das Vorangehende zeigt, dass die hieraus fliessenden Covarianten erhalten werden, wenn man in $\Psi$ jedes $u$, $u'$ durch das entsprechende $Y$, $X$ ersetzt; also ergiebt sich die Covariante

$$\Phi(\lambda, \mu; \bar{x}, \bar{y}) = \Psi(\lambda, \mu; \bar{Y}, \bar{X}).$$

Was die Beziehung zwischen diesen und ihren Transformirten betrifft, so folgt aus der Grundeigenschaft von $P$, aus welchem die Vorstehenden als Entwicklungscoefficienten entspringen,

$$\Pi' = r^2 \Pi, \quad \Psi' = r^2 \Psi, \quad \Phi' = r^2 \Phi.$$

Wir werden nun zunächst zeigen, dass diese Gleichungen für die Möglichkeit der Transformation von $F$ in $F'$ und die Bestimmung der dies leistenden Substitutionen nicht bloss erforderlich sind, sondern auch hinreichen, sobald sie für alle Werthe von $\lambda$ und $\mu$ erfüllt sind, d. h. dass die vermöge der Willkürlichkeit von $\lambda$ und $\mu$ aus $\Pi$, $\Psi$, $\Phi$ hervorgehenden Formen hinreichen, um aus ihnen jede andere Form derselben Art zusammenzusetzen.

In der That wird für $\lambda = 1$, $\mu = 0$ identisch $\Phi = \Pi(1, 0)F$, also $\Phi' = \Pi'(1, 0)F'$ und $\Pi'(1, 0)F' = r^2\Pi(1, 0)F$, endlich, weil $\Pi'(1, 0) = r^2\Pi(1, 0)$ ist, $F' = F$, w. z. b. w.

Dass in der Gleichung $P'\Pi = P\Pi'$ alle für die Möglichkeit der Transformation von $F$ in $F'$ erforderlichen Bedingungen enthalten sind, hat zuerst Herr Kronecker in seiner Abhandlung über die bilinearen Functionen von gerader Dimension $n$[1]) durch directe Transformation derselben in eine Normalform bewiesen.

1) Monatsberichte der Berliner Akademie, Sitzung v. 15. October 1866, pag. 601 u. f.



Um die Anzahl der Formen zu übersehen, welche in obigen Ausdrücken wegen der Willkürlichkeit von $\lambda$ und $\mu$ enthalten sind, setzen wir

$$\frac{(ik) + (ki)}{2} = \sigma_{ik}, \quad \frac{(ik) - (ki)}{2} = \delta_{ik},$$

woraus allgemein

$$(ik) = \sigma_{ik} + \delta_{ik}, \quad \sigma_{ki} = \sigma_{ik}, \quad \delta_{ki} = -\delta_{ik}$$

folgt. Wird alsdann noch

$$\lambda + \mu = s, \qquad \lambda - \mu = t,$$

also

$$[ik] = s\sigma_{ik} + t\delta_{ik}$$

gesetzt, so wird

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 & u_1' & u_2' & \cdots \\ -u_1 & s\sigma_{11} & s\sigma_{12} + t\delta_{12} & \cdots \\ -u_2 & s\sigma_{12} - t\delta_{12} & s\sigma_{22} & \cdots \\ \vdots & & & \end{vmatrix},$$

woraus $\Pi$ durch Weglassung des aus den $u$ und $u'$ gebildeten Randes erhalten wird.

Vertauscht man nun $\lambda$ mit $\mu$, und jedes $u$ mit dem entsprechenden $u'$, so wechselt $t$ sein Zeichen, $s$, $\Pi$ und $\Psi$ bleiben ungeändert. Da nun $\Pi$ von den Variabeln $u$, $u'$ unabhängig ist, so hat seine Entwicklung die Form

$$\Pi = s^n \Pi_0 + s^{n-2}t^2 \Pi_2 + s^{n-4}t^4 \Pi_4 + \cdots,$$

während, wenn entwickelt

$$\Psi = s^{n-1}\Psi_1 + s^{n-2}t\,\Psi_2 + s^{n-3}t^2\,\Psi_3 + \cdots$$

ist, die Entwicklungscoefficienten $\Psi_\sigma$ bilineare Functionen der Variabeln $u$, $u'$ sind, welche bei der Vertauschung der beiden Variabelnsysteme entweder ungeändert bleiben, oder nur ihre Zeichen wechseln, ersteres bei ungeradem, letzteres bei geradem $\sigma$.

Setzt man daher, um den in der Einleitung vorausgesetzten Fall zu erhalten, jedes $u'$ dem entsprechenden $u$ gleich, so fallen alle $\Psi_\sigma$ mit geradem Index weg, und es ergeben sich nun $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ Invarianten, $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ zugehörige Formen mit einem einzigen Variabelnsystem, also ebensoviel Covarianten derselben Art, aus denen alle Formen gleicher Gattung zusammengesetzt werden können. Dass sie auch voneinander unabhängig sind, lässt sich aus der Einrichtung der Elemente von $\Psi$ erkennen, wird sich aber auch im folgenden art. ergeben.

Von den besonderen Fällen, welche sich hier darbieten, und welche alle auf bekannte Determinantensätze hinauskommen, heben wir einen des Folgenden wegen hervor. Für ein ungerades $n$ wird nämlich $\Psi_n$, wie man aus dem Ausdrucke für $\Psi$ erkennt, wenn man $s = 0$, $t = 1$ setzt, das Product aus einer linearen Funktion der $u$ und der nämlichen Funktion mit den Variabeln $u'$. Folglich kann die bilineare zugehörige Form $\Psi_n$ durch eine in den $u$ lineare ersetzt werden, welche wir durch $\psi(u)$ bezeichnen werden, so dass $\Psi_n = \psi(u)\psi(u')$ wird.

### II. Transformation der bilinearen Function $F$ in sich selbst.

Sei

$$x_i = \sum_k \alpha_{ki}\xi_k, \quad y_i = \sum_k \alpha_{ki}\eta_k$$

die Substitution, durch welche $F$ in

$$F' = S(gh)'\xi_g\eta_h$$

übergeführt wird, und

$$v_k = \sum_i \alpha_{ki} u_i$$

die in den zugehörigen Formen auszuführende transponirte Substitution, welche für beide Variabelnsysteme der $u$ und $u'$ gilt.

Soll nun allgemein

$$(gh)' = (gh)$$

sein, also durch die vorausgesetzte Substitution $F$ in sich selbst mit andern Variabeln transformirt werden, so folgt aus der Gleichung $\Pi' = r^2\Pi$, dass

$$r^2 = 1$$

sein muss.

Der bessern Uebersicht wegen setzen wir von hier an

$$\lambda + \mu = s = 1, \quad \lambda - \mu = t,$$

wodurch die Grundformen $\Pi(\lambda, \mu)$, $\Psi(\lambda, \mu; \bar{u}, \bar{u}')$, $\Phi(\lambda, \mu; \bar{x}, \bar{y})$ in Functionen von $t$ übergehen, welche wir durch $\Pi(t)$, $\Psi(t; \bar{u}, \bar{u}')$, $\Phi(t; \bar{x}, \bar{y})$ bezeichnen, und von denen die erste eine gerade Function von $t$ ist.

Beim obigen Werthe von $r^2$ ergiebt sich für die zugehörigen Formen die Gleichung

$$\text{(1.)} \qquad \Psi(t; \bar{v}, \bar{v}') = \Psi(t; \bar{u}, \bar{u}')$$

oder

$$\sum_{gh} \Pi_{gh}(t) v_g v'_h = \sum_{gh} \Pi_{gh}(t) u_g u'_h,$$

welche für jedes $t$ erfüllt sein muss.

Wir beweisen zunächst, dass aus dieser Gleichung stets $r^2 = 1$ folgt. Vergleicht man nämlich beiderseits die Coefficienten von $u_i u'_k$, so folgt

$$\sum_h \Pi_{gh}(t)\alpha_{gi}\alpha_{hk} = \Pi_{ik}(t),$$



und wenn man mittelst dieses Ausdrucks die von Null verschiedene Determinante $\Sigma \pm \Pi_{11}\Pi_{22}\ldots\Pi_{nn}$ bildet, $r^2 = 1$, wie erforderlich ist.

Dies festgestellt, ist es nothwendig, die beiden Fälle zu unterscheiden, wo $n$ gerade oder ungerade ist.

Im ersten Falle, $n = 2m$, ist der Grad von $\Psi$ in Bezug auf $t$ um eine Einheit kleiner, als der Grad von $\Pi$. Schliesst man nun den Fall aus, wo nicht alle Coefficienten von $F$ willkürliche und voneinander unabhängige Werthe haben, so hat die Gleichung $\Pi(t) = 0$ $m$ Lösungen $t^2 = \omega_1^2$, $t^2 = \omega_2^2$, $\ldots$ $t^2 = \omega_m^2$, die alle voneinander verschieden sind.

Dividirt man jetzt die Gleichung (1.) durch $\Pi(t)$, so ergeben sich aus ihr durch Zerlegung in Partialbrüche zwei Systeme von je $m$ Gleichungen, welche den Wurzelfactoren $t - \omega_s$, $t + \omega_s$ entsprechen, und die Gleichung (1.) völlig ersetzen. Der erste Wurzelfactor liefert die Gleichung

$$\sum_{gh} \Pi_{gh}(\omega_s) v_g v'_h = \sum_{gh} \Pi_{gh}(\omega_s) u_g u'_h;$$

beachtet man, dass $\Pi_{gh}(-\omega_s) = -\Pi_{hg}(\omega_s)$ ist, so ergiebt sich aus dem andern Wurzelfactor die Gleichung

$$\sum_{gh} \Pi_{hg}(\omega_s) v_g v'_h = \sum_{gh} \Pi_{hg}(\omega_s) u_g u'_h.$$

Multiplicirt man mit $\Pi_{kk}(\omega_s)$, wo $k$ einen beliebigen Index bedeutet, so zerfallen die vorstehenden Ausdrücke in Linearfactoren

$$\text{(2.)} \quad \sum_g \Pi_{gk}(\omega_s) v_g \cdot \sum_h \Pi_{kh}(\omega_s) v'_h = \sum_g \Pi_{gk}(\omega_s) u_g \cdot \sum_h \Pi_{kh}(\omega_s) u'_h,$$

$$\text{(3.)} \quad \sum_g \Pi_{kg}(\omega_s) v_g \cdot \sum_h \Pi_{hk}(\omega_s) v'_h = \sum_g \Pi_{kg}(\omega_s) u_g \cdot \sum_h \Pi_{hk}(\omega_s) u'_h.$$

Da jedes $v_g$ lineare Function der $u$ allein, und jedes $v'_g$ dieselbe Function der $u'$ allein ist, so folgt aus (2.)

$$\sum_g \Pi_{gk}(\omega_s) v_g = a_s \sum_g \Pi_{gk}(\omega_s) u_g,$$

$$\sum_h \Pi_{kh}(\omega_s) v'_h = \frac{1}{a_s} \sum_h \Pi_{kh}(\omega_s) u'_h,$$

wo alle $a$ willkürliche Constanten und offenbar von $k$ unabhängig sind.

Vertauscht man hier die Variabeln $u$ und $u'$, so vertauschen sich auch die $v$ und $v'$, und es folgt, dass die Gleichungen (3.) von selbst befriedigt sind.

Also haben wir zur Bestimmung der gesuchten Substitutionen, durch welche bei geradem $n = 2m$ die Function $F$ in sich selbst transformirt wird, die $2m$ Gleichungen

$$\sum_g \Pi_{gk}(\omega_s)(v_g - a_s u_g) = 0,$$

$$\sum_g \Pi_{kg}(\omega_s)(u_g - a_s v_g) = 0,$$

in denen der Index $k$ gleichgültig ist, und durch jeden andern ersetzt werden kann.

Zur Bestimmung der inversen Substitution erhält man ähnliche Gleichungen. Da die Determinante dieser Gleichungen, wie man durch Bildung derselben leicht findet, von Null verschieden ist, so sind die Unbekannten $v$ als lineare Functionen der $u$ mit den $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ willkürlichen Constanten $a$ bestimmt.

Für ein ungerades $n = 2m + 1$ sind $\Psi$ und $\Pi$ vom nämlichen Grade in $t$. Folglich liefert die Partialbruchzerfällung in diesem Falle 1) ein System von $2m$ Gleichungen der nämlichen Form wie das vorstehende, und 2) nach der Bezeichnung am Schlusse des vorigen art. noch die Bedingung $\Psi_n(\bar{v}, \bar{v'}) = \Psi_n(\bar{u}, \bar{u'})$, welche durch die einfachere $\psi(\bar{v}) = r \cdot \psi(\bar{u})$ ersetzt werden kann, und daher keine willkürliche Constante in die gesuchte Substitution einführt. Folglich ist in dieser die Anzahl der willkürlichen Elemente wieder $m = \left[\frac{n}{2}\right]$.

Die Anzahl der willkürlichen Substitutionselemente stimmt daher in allen Fällen mit der Anzahl von absoluten Invarianten überein, die sich im vorigen art. ergeben haben, und es ist hiernach dieses Invariantensystem nicht bloss vollständig, sondern auch frei von überzähligen Formen. Dasselbe gilt daher auch, wie schon bemerkt wurde, von den übrigen Formensystemen.

### III. Transformation von $F$ in spezielle Formen.

Für die Transformation von $F$ in irgend eine gegebene Form $F'$ haben wir demnach die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen

$$\Pi'(\lambda, \mu) = r^2 \Pi(\lambda, \mu),$$

$$\Psi'(\lambda, \mu;\, \bar{v}, \bar{v'}) = r^2 \Psi(\lambda, \mu;\, \bar{u}, \bar{u'}),$$

$$\Phi'(\lambda, \mu;\, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = r^2 \Phi(\lambda, \mu;\, \bar{x}, \bar{y}),$$

von denen die erste die sämmtlichen Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation enthält, die zweite die directe und die dritte die inverse Substitution liefert.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Substitution so zu bestimmen, dass $F'$ in eine Summe von $m$ bilinearen Functionen



$$f_1' = S(gh)'\xi_g\eta_h, \quad (g, h = 1, 2, \ldots n_1)$$
$$f_2' = S(gh)'\xi_g\eta_h, \quad (g, h = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots n_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_m' = S(gh)'\xi_g\eta_h, \quad (g, h = n_{m-1} + 1, n_{m-1} + 2, \ldots n)$$

zerfällt, welche so gewählt sind, dass ein Variabelnpaar $\xi_s$, $\eta_s$, welches in eine von diesen speciellen Functionen eingeht, in keiner von den übrigen mehr vorkommt.

Auf dieselbe Weise, wie in art. I. $\Pi(\lambda, \mu)$ aus $F$, $\Psi(\lambda, \mu, \bar{u}, \bar{u'})$ und $\Phi(\lambda, \mu, \bar{x}, \bar{y})$ aus $\Pi(\lambda, \mu)$ abgeleitet wurde, leite man aus jeder der vorstehenden, einer geringern Anzahl von Variabelnpaaren entsprechenden Functionen eine Invariante, zugehörige Form und Covariante ab, welche für die Function $f_s'$ durch $\pi_s(\lambda, \mu)$, $\psi_s(\lambda, \mu, \bar{v}, \bar{v'})$, $\varphi_s(\lambda, \mu, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ bezeichnet werden sollen.

Dann wird offenbar für die Function

$$F' = f_1' + f_2' + \cdots + f_m'$$

die Invariante

$$\Pi'(\lambda, \mu) = \pi_1(\lambda, \mu)\pi_2(\lambda, \mu) \ldots \pi_m(\lambda, \mu),$$

während die Herleitung von $\Psi$ und $\Phi$ aus $\Pi$ sofort erkennen lässt, dass

$$\frac{\Psi'(\lambda, \mu;\, \bar{v}, \bar{v'})}{\Pi'(\lambda, \mu)} = \sum_s \frac{\psi_s(\lambda, \mu;\, \bar{v}, \bar{v'})}{\pi_s(\lambda, \mu)},$$

$$\frac{\Phi'(\lambda, \mu;\, \bar{\xi}, \bar{\eta})}{\Pi'(\lambda, \mu)} = \sum_s \frac{\varphi_s(\lambda, \mu;\, \bar{\xi}, \bar{\eta})}{\pi_s(\lambda, \mu)}$$

ist.

Setzt man diese Ausdrücke den der ursprünglichen Function $F$ entsprechenden gleich, und zerfällt beiderseits in Partialbrüche, so zerfallen die hier auftretenden besondern Werthe der Functionen $\psi_s$, $\varphi_s$, $\Psi$, $\Phi$ nach dem vorigen art. in Linearfactoren, und es muss nun jeder solche Linearfactor der einen Seite einem durch die Bedingung eines gleichen Nenners und entsprechender Variabeln völlig bestimmten Linearfactor auf der andern Seite proportional gesetzt werden.

Wir verfolgen dies nicht weiter, und ziehen aus dem Vorangehenden nur noch die folgende Bestimmung über die zulässigen Dimensionen der einzelnen Functionen $f_s'$.

Setzt man wieder $\lambda + \mu = s = 1$, $\lambda - \mu = t$, so werden beide Seiten der für die Möglichkeit der Transformation nothwendigen und ausreichenden Bedingungsgleichung

$$r^2 \Pi(\lambda, \mu) = \pi_1(\lambda, \mu)\pi_2(\lambda, \mu) \ldots \pi_m(\lambda, \mu)$$

ganze Functionen von $t^2$, und die linke Seite sowie die aufeinanderfolgenden Factoren der rechten in Bezug auf $t^2$ vom Grade $\left[\frac{n}{2}\right]$, $\left[\frac{n_1}{2}\right]$, $\left[\frac{n_2 - n_1}{2}\right], \dots \left[\frac{n - n_{m-1}}{2}\right]$. Damit diese Gleichung bei willkürlichem $t$ durch geeignete Wahl der Functionen $f_s'$ befriedigt werden könne, ist es also erforderlich, dass beide Seiten in Bezug auf $t^2$ vom nämlichen Grade sind, also

$$\left[\frac{n_1}{2}\right] + \left[\frac{n_2 - n_1}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n - n_{m-1}}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]$$

ist. Bezeichnet aber $\alpha$ die Anzahl derjenigen Functionen $f_s'$, welche von ungerader Dimension sind, so ist die linke Seite offenbar

$$\frac{n - \alpha}{2},$$

und daraus folgt, *dass unter den Functionen $f_1', f_2', \dots f_m'$ sich für ein gerades $n$ keine, für ein ungerades $n$ nur eine einzige von ungerader Dimension befinden darf.* Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die verlangte Transformation von $F$ stets möglich.

Nimmt man daher, um die grösste Vereinfachung zu erhalten, die Dimensionen sämmtlicher Functionen $f_s'$ so klein wie möglich, so zerfällt $F'$ für ein gerades $n$ in eine Summe von $\left[\frac{n}{2}\right]$ binären Functionen, wozu für ein ungerades $n$ noch ein eingliedriger Ausdruck kommt. Der erste von diesen Fällen liefert die von Herrn Kronecker in der oben erwähnten Abhandlung zuerst eingeführte Normalform.

### IV. Die Zwischenformen und die überzähligen Differentialgleichungen der absoluten Invarianten.

Um eine grössere Anzahl von Zwischenformen zu erhalten, aus denen sich dann die vorzugsweise charakteristischen zusammensetzen lassen, suchen wir mit Ausscheidung von früher bestimmten Formen simultane Invarianten von

$$\lambda F + \mu \mathfrak{F} = S[gh] x_g y_h$$

mit den linearen Functionen

$$U = \Sigma u_g x_g, \quad V = \Sigma X_g y_g, \quad W = \Sigma \mathfrak{X}_g y_g,$$

indem wir schliesslich

$$X_g = \frac{\partial F}{\partial y_g}, \quad \mathfrak{X}_g = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_g}$$

setzen, wodurch $V$ und $W$ in $F$ und $\mathfrak{F}$ übergehen. Vermehrt man also in $\Pi(\lambda, \mu)$ jedes Element $[gh]$ um

$$\omega_{gh} = \alpha u_g X_h + \beta u_g \mathfrak{X}_h + \gamma u_h \mathfrak{X}_g + \delta u_h X_g,$$



entwickelt dann nach Potenzen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, so ergiebt sich

$$\Pi(\lambda, \mu) + \alpha \Theta_1 + \beta \Theta_2 + \gamma \Theta_3 + \delta \Theta_4 + \cdots,$$

wo die Entwicklungscoefficienten der linearen Glieder, welche wir allein berücksichtigen, die Ausdrücke

$$\Theta_1 = S \Pi_{gh} \cdot u_g X_h,$$
$$\Theta_2 = S \Pi_{gh} \cdot u_g \mathfrak{X}_h,$$
$$\Theta_3 = S \Pi_{gh} \cdot u_h \mathfrak{X}_g,$$
$$\Theta_4 = S \Pi_{gh} \cdot u_h X_g$$

haben und eigentliche Zwischenformen sind. Zwischen diesen vier Formen bestehen einfache Beziehungen.

Zunächst bemerkt man leicht, dass durch Vertauschung von $\lambda$ mit $\mu$ $\Theta_1$ mit $\Theta_4$, $\Theta_2$ mit $\Theta_3$ vertauscht wird. Sodann ergiebt sich

$$\lambda \Theta_1 + \mu \Theta_2 = \Pi \cdot U,$$
$$\lambda \Theta_3 + \mu \Theta_4 = \Pi \cdot U.$$

Setzt man daher

$$\lambda \Theta_1 + \mu \Theta_4 = \Pi U + \Theta,$$

so wird

$$\lambda \Theta_3 + \mu \Theta_2 = \Pi U - \Theta,$$

und $\Theta$ eine neue Zwischenform, welche auf doppelte Weise dargestellt werden kann

$$\Theta = \lambda(\Theta_1 - \Theta_3) = \mu(\Theta_4 - \Theta_2),$$

also durch $\lambda\mu$ theilbar ist, und überdies durch Vertauschung von $\lambda$ mit $\mu$ nicht geändert wird.

Hieran knüpfen sich nun merkwürdige Resultate. Ersetzt man allgemein $x_i u_k$ durch

$$D_{ik} F = x_i \frac{\partial F}{\partial x_k} + y_i \frac{\partial F}{\partial y_k},$$

(vergl. die Einleitung), und bezeichnet das, was hierdurch aus $\Theta_i$ wird, durch $\Theta_i(F)$, so folgt, weil $U$ in $2F$ übergeht,

$$\lambda \Theta_1(F) + \mu \Theta_4(F) = 2 \Pi F + \Theta(F),$$
$$\lambda \Theta_3(F) + \mu \Theta_2(F) = 2 \Pi F - \Theta(F).$$

Nun ist in $\lambda \Theta_1 + \mu \Theta_4$ der Factor von $\Pi_{gh}$ gleich

$$\lambda u_g X_h + \mu u_h X_g = \sum_i \lambda(ih) x_i u_g + \mu(ig) x_i u_h;$$

derselbe geht durch die angegebene Substitution über in

$$\sum_i \lambda(ih) D_{ig} F + \mu(ig) D_{ih} F.$$

In diesem Ausdrucke findet sich der Factor von $x_i y_k$ ohne Schwierigkeit $= (ih)[gk] + (ig)[kh]$; also ist in $\lambda\Theta_1(F) + \mu\Theta_4(F)$ der Factor von $x_i y_k$ gleich

$$\underset{g,h}{S}\Pi_{gh}((ih)[gk] + (ig)[kh]) = 2\Pi\cdot(ik),$$

mithin

$$\lambda\Theta_1(F) + \mu\Theta_4(F) = 2\Pi F,$$
$$\Theta(F) = 0,$$
$$\lambda\Theta_3(F) + \mu\Theta_2(F) = 2\Pi F.$$

Die zweite von diesen Gleichungen liefert den Satz:

*Ist die obige Zwischenform:*

$$\Theta = \sum \lambda_{ik} x_i u_k,$$

*so ist identisch*

$$\sum \lambda_{ik} D_{ik} F = 0,$$

*also auch für jede beliebige Function $P$ der Coefficienten von $F$*

$$\sum \lambda_{ik} D_{ik} P = 0.$$

Diese Gleichung enthält die vollständige Lösung der Aufgabe, die überzähligen Differentialgleichungen der absoluten Invarianten zu bestimmen. Da nämlich

$$\Theta_1 - \Theta_3 = S(\Pi_{kh} X_h - \Pi_{hk} \mathfrak{X}_h) u_k,$$

und $\Theta = \lambda(\Theta_1 - \Theta_3)$ ist, so folgt

$$\lambda_{ik} = \lambda \sum_h ((ih)\Pi_{kh} - (hi)\Pi_{hk}).$$

Einen andern Ausdruck erhält man aus der Gleichung $\Theta = \mu(\Theta_4 - \Theta_2)$, nämlich

$$\lambda_{ik} = \mu \sum_h ((ih)\Pi_{hk} - (hi)\Pi_{kh}).$$

Die halbe Summe beider ergiebt endlich die symmetrische Darstellung

$$\lambda_{ik} = \frac{1}{2}\sum_h \left((ih)\frac{\partial \Pi}{\partial(kh)} - (hi)\frac{\partial \Pi}{\partial(hk)}\right).$$

Setzt man nun

$$\Pi = \Pi_0\lambda^n + \Pi_1\lambda^{n-1}\mu + \Pi_2\lambda^{n-2}\mu^2 + \cdots + \Pi_n\mu^n,$$

so fallen aus $\lambda_{ik}$ die mit $\lambda^n$ und $\mu^n$ multiplicirten Glieder fort, wie man leicht verificirt, und auch aus dem Umstande schliesst, dass $\Theta$, mithin auch $\lambda_{ik}$ durch $\lambda\mu$ theilbar ist, so dass in der Entwicklung von $\lambda_{ik}$ nur $(n-1)$ Glieder übrig bleiben. Da aber allgemein $\Pi_{n-s} = \Pi_s$ ist, so erhält man nur $\frac{n-1}{2}$ verschiedene Glieder, wenn $(n-1)$ gerade, und nur $\frac{n}{2}$ Glieder, wenn $(n-1)$ ungerade ist, also allgemein $\left[\frac{n}{2}\right]$ verschiedene Lösungen der Aufgabe, die $n\cdot n$ Coefficienten $\lambda_{ik}$ so zu bestimmen, dass



$$\sum \lambda_{ik} D_{ik} P$$

für jede beliebige Function $P$ verschwindet.

Dadurch sind ebensoviel Gleichungen des Systems

$$D_{ik} P = 0$$

als lineare Folge der übrigen nachgewiesen, was direct bestätigt werden sollte.

## V. Eigenschaften der $\lambda_{ik}$.

Durch das Schlussresultat des vorigen art. erlangen die Coefficienten der speciellen Zwischenform $\Theta$ ein selbständiges Interesse, weshalb wir zum Nachweise ihrer Eigenschaften übergehen.

Da $\Theta(\bar{x}, \bar{u})$ Entwicklungsglied einer Zwischenform $\Pi$ ist, welche der Gleichung $\Pi' = r^2 \Pi$ genügt, so ist unter Voraussetzung der in art. II. angegebenen Substitution

$$\Theta'(\bar{\xi}, \bar{v}) = r^2\Theta(\bar{x}, \bar{u}),$$

und es genügt hiernach $\Theta$ dem System partieller Differentialgleichungen

$$D_{ik}\Theta + \frac{\partial\Theta}{\partial u_i}u_k - x_i\frac{\partial\Theta}{\partial x_k} = 2\binom{i}{k}\Theta;$$

dasselbe gilt von jeder der vier Zwischenformen, aus denen $\Theta$ zusammengesetzt wurde.

Sei nun $\lambda'_{ik}$ das, was aus $\lambda_{ik}$ wird, wenn jeder Coefficient von $F$ durch den entsprechenden Coefficienten der transformirten $F'$ ersetzt wird, also $\Theta'(\bar{x}, \bar{u}) = \sum \lambda'_{ik} x_i u_k$; dann folgt aus der ersten Gleichung

$$\sum \lambda'_{ik}\xi_i v_k = r^2 \sum \lambda_{gh} x_g u_h.$$

Nimmt man beiderseits die Derivirte nach $\xi_i$ und $v_k$, so folgt, weil $\frac{\partial x_g}{\partial \xi_i} = \alpha_{ig}$, $\frac{\partial u_h}{\partial v_k} = \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}}$ ist,

$$\lambda'_{ik} = r^2 \sum_{g,h} \alpha_{ig}\frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}}\lambda_{gh}.$$

Setzt man sodann den Ausdruck von $\Theta$ in die Differentialgleichungen ein, so folgt

$$D_{ik}\lambda_{gh} = 2\binom{i}{k}\lambda_{gh} - \binom{h}{k}\lambda_{gi} + \binom{g}{i}\lambda_{kh}.$$

Ist daher $P$ irgend eine Function der $\lambda$, also auch der Coefficienten von $F$, so folgt

$$D_{ik}P = 2\binom{i}{k}\sum_{g,h}\frac{\partial P}{\partial \lambda_{gh}}\lambda_{gh} + \sum_{h}\left(\frac{\partial P}{\partial \lambda_{ih}}\lambda_{kh} - \lambda_{hi}\frac{\partial P}{\partial \lambda_{hk}}\right).$$

Wenn daher $P$ homogen ist und dem Gleichungssystem

$$\sum_{h}\left(\frac{\partial P}{\partial \lambda_{ih}}\lambda_{kh} - \lambda_{hi}\frac{\partial P}{\partial \lambda_{hk}}\right) = 0$$

genügt, so ist es eine Invariante von $F$. Die Bedeutung dieses Resultates wird sich aus dem Folgenden ergeben.

### VI. Ueber die den Zwischenformen eigentümliche Substitution.

Nach dem Vorangehenden ist $\Theta(\bar{x}, \bar{u})$ eine bilineare Function, deren Transformation sich von der früher betrachteten dadurch unterscheidet, dass die auf die beiden Variabelnsysteme anzuwendenden Substitutionen nicht übereinstimmen, sondern zueinander transponirt sein sollen. Sei allgemein

$$G = S l_{gh} x_g u_h$$

eine solche Function, welche durch die beiden Substitutionen

$$x_i = \sum_k \alpha_{ki}\xi_k, \quad v_k = \sum_i \alpha_{ki} u_i$$

in

$$G' = S l'_{gh} \xi_g v_h$$

übergeführt wird.

Vermöge der Gleichung $G' = G$ folgt aus der Lehre von den Zwischenformen, weil

$$D_{ik}G' = \sum_h \frac{\partial G'}{\partial \alpha_{ih}}\alpha_{kh}$$

ist,

$$\sum_h \frac{\partial G'}{\partial \alpha_{ih}}\alpha_{kh} = \xi_i\frac{\partial G'}{\partial \xi_k} - \frac{\partial G'}{\partial v_i}v_k.$$

Dies festgestellt, sei $\Pi$ eine Function der Coefficienten von $G$; dann ist

$$\sum_h \frac{\partial \Pi'}{\partial \alpha_{ih}}\alpha_{kh} = \underset{a,b}{S}\frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{ab}}\left[\sum_h \frac{\partial G'}{\partial \alpha_{ih}}\alpha_{kh}\right]_{\xi_a v_b}$$

$$= S\frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{ab}}\left[\xi_i\frac{\partial G'}{\partial \xi_k} - \frac{\partial G'}{\partial v_i}v_k\right]_{\xi_a v_b}$$

$$= \sum_h\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{ih}}l'_{kh} - l'_{hi}\frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{hk}}\right).$$



Wenn daher die rechte Seite dieser Gleichung für jedes $i$ und $k$ verschwindet, so ist $\Pi$ absolute Invariante von $G$, und umgekehrt.

Die absoluten Invarianten von $G$, unter Voraussetzung obiger Transformation, sind also durch das Gleichungssystem

$$(A.) \qquad \delta_{ik}\Pi = \sum_h\left(\frac{\partial \Pi}{\partial l_{ih}}l_{kh} - l_{hi}\frac{\partial \Pi}{\partial l_{hk}}\right) = 0$$

definirt, und es lässt sich nun zunächst leicht zeigen, dass $G$ bei obiger Transformation auch *nur* absolute Invarianten besitzt.

Um dies zu beweisen, setze man die rationale Function $\Pi$ gleich dem Quotienten aus zwei von gemeinsamen veränderlichen Factoren befreiten ganzen Functionen. Dann erhält man nach bekannten Schlüssen für diese ein System von Differentialgleichungen

$$\delta_{ik}P = \varrho_{ik}P,$$

wo die Factoren $\varrho$ sämmtlich constant sind. Wir werden nun zeigen, dass dieselben alle Null sein müssen, woraus dann der vorstehende Satz folgt.

Aus der Definitionsgleichung

$$\delta_{ik}G = x_i\frac{\partial G}{\partial x_k} - \frac{\partial G}{\partial u_i}u_k$$

zieht man leicht die folgende

$$(B.) \qquad \delta_{gh}\delta_{ik}G - \delta_{ik}\delta_{gh}G = \binom{g}{k}\delta_{ih}G - \binom{h}{i}\delta_{gk}G,$$

welche nun auch für jede beliebige Function $P$ gilt. Aus den obigen Differentialgleichungen folgt jetzt $0 = \binom{g}{k}\varrho_{ih}P - \binom{h}{i}\varrho_{gk}P$, also, wenn nicht $P = 0$ ist, was wir ausschliessen, $\binom{g}{k}\varrho_{ih} = \binom{h}{i}\varrho_{gk}$, woraus allgemein $\varrho_{ik} = \binom{i}{k}\varrho$, mithin $\delta_{ik}P = \binom{i}{k}\varrho P$ folgt. Da aber identisch $\sum\delta_{ii}P = 0$ ist, so folgt endlich $\varrho = 0$, w. z. b. w.

Vergleicht man diese Resultate mit dem Schlusse des vorigen art., so folgt, dass jede Invariante einer bilinearen Zwischenform von $F$, mit Rücksicht auf die den Zwischenformen eigenthümliche Transformation gebildet, auch Invariante von $F$ selbst ist.

Es ist sehr leicht, Invarianten von $G$ zu erhalten. Sei

$$H = S\mathfrak{C}_{gh}x_g u_h$$

eine derselben Transformation wie $G$ unterworfene Function oder $= G$ selbst. Dann ist nach art. V.

$$l'_{ik} = \mathop{S}_{g,h} l_{gh} \alpha_{ig} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}},$$

$$\mathfrak{C}'_{ik} = S\, \mathfrak{C}_{gh} \alpha_{ig} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}},$$

mithin

$$(C.) \qquad \sum_a l'_{ia} \mathfrak{C}'_{ak} = \mathop{S}_{g,h} \Big( \sum_a l_{ga} \mathfrak{C}_{ah} \Big) \cdot \alpha_{ig} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{hk}}.$$

Wenn daher eine bloss aus Coefficienten von $G$ gebildete Function $f(\overline{l_{ik}})$ die Eigenschaft hat, dass

$$f(\overline{l'_{ik}}) = f(\overline{l_{ik}})$$

ist, so ist auch

$$f\Big(\overline{\sum_a l'_{ia} \mathfrak{C}'_{ak}}\Big) = f\Big(\overline{\sum_a l_{ia} \mathfrak{C}_{ak}}\Big).$$

Nun findet man leicht, dass $\sum l'_{ii} = \sum l_{ii}$ ist; nimmt man daher das erstemal $H = G$, und dann neue, sich von selbst ergebende Formen für $H$, so erhält man folgende Reihe von Invarianten von $G$, die nach dem Obigen sämmtlich absolute sind:

$$(D.) \qquad \begin{cases} \sum\limits_i l_{ii} \\ \sum\limits_i \sum\limits_a l_{ia} l_{ai} \\ \sum\limits_i \sum\limits_{ab} l_{ia} l_{ab} l_{bi} \\ \sum\limits_i \sum\limits_{abc} l_{ia} l_{ab} l_{bc} l_{ci} \end{cases}$$

u. s. w.

Ein zweites Verfahren ergiebt sich aus den Differentialgleichungen $(A.)$. Da nämlich aus diesen

$$\frac{\partial \delta_{ik} \Pi}{\partial l_{ab}} = \delta_{ik} \Big( \frac{\partial \Pi}{\partial l_{ab}} \Big) + \binom{a}{k} \frac{\partial \Pi}{\partial l_{ib}} - \binom{b}{i} \frac{\partial \Pi}{\partial l_{ak}}$$

folgt, so ist identisch

$$\sum_a \frac{\partial \delta_{ik} \Pi}{\partial l_{aa}} = \delta_{ik} \Big( \sum_a \frac{\partial \Pi}{\partial l_{aa}} \Big).$$

Wenn daher $\Pi$ eine Lösung des Systems $(A.)$ ist, so ist auch

$$\theta \Pi = \sum_a \frac{\partial \Pi}{\partial l_{aa}}$$

eine solche, und hieraus können durch Wiederholung noch weitere Lösungen $\theta\theta\Pi = \theta^2 \Pi$, $\theta^3 \Pi$ u. s. w. folgen.

Nun bestätigt man ohne Weiteres, dass $\Delta = \sum \pm l_{11} l_{22} \dots l_{nn}$ den



Gleichungen $(A.)$ genügt. Folglich werden dieselben für jeden constanten Werth von $\alpha$ auch befriedigt durch

$$\begin{vmatrix} l_{11} - \alpha & l_{12} & \dots l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} - \alpha & \dots l_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots l_{nn} - \alpha \end{vmatrix} = \Delta(\alpha),$$

worin $n$ offenbar voneinander unabhängige Lösungen enthalten sind.

Die Wurzeln der Gleichung $\Delta(\alpha) = 0$ sind ebenfalls Invarianten von $G$, wie man mittelst der Differentialgleichungen $(A.)$, denen $\Delta(\alpha)$ und seine nach $\alpha$ genommenen Derivirten für jedes $\alpha$ genügen, leicht bestätigt. Zwischen diesen Wurzeln und den unter $(D.)$ angegebenen Invarianten besteht ein sehr einfacher Zusammenhang, den zuerst Herr Borchardt (Bd. 30 dieses Journals pag. 38) gefunden hat, und welcher sich auch aus dem Folgenden ergiebt.

Wir werden nämlich zeigen, dass die vorausgesetzte Substitution stets so gewählt werden kann, dass $G'$ die Form

$$G' = \sum \omega_i \xi_i v_i$$

annimmt, und dass alsdann die Coefficienten $\omega$ die Wurzeln der Gleichung $\Delta(\alpha) = 0$ werden. Ist dies bewiesen, so wird $l'_{ii} = \omega_i$, $l'_{ik} = 0$, und die unter $(D.)$ gegebenen Invarianten werden:

$$\sum l_{ii} = \sum l'_{ii} = \sum \omega, \quad \sum_{ia} l_{ia} l_{ai} = \sum \omega^2, \quad \sum l_{ia} l_{ab} l_{bi} = \sum \omega^3, \ \text{u. s. w.}$$

Da allgemein

$$\sum_k l_{ik} \alpha_{kh} = \sum_g \alpha_{ig} l_{gh}$$

ist, so ist zur Ausführbarkeit obiger Transformation von $G$ für jedes $i$ das Gleichungssystem

$$\sum_g \alpha_{ig} l_{gh} = \alpha_{ih} \omega_i$$

erforderlich. Also müssen die Grössen $\omega$ die Wurzeln der Gleichung $\Delta(\alpha) = 0$, oder es muss identisch

$$\Delta(\alpha) = (\omega_1 - \alpha)(\omega_2 - \alpha) \dots (\omega_n - \alpha)$$

sein. Sind die $\omega$ dieser Bedingung gemäss gewählt, so lassen sich die Transformationsbedingungen für jedes $i$ befriedigen. Daraus folgt aber, dass in $\Delta(\alpha)$ alle voneinander unabhängigen Invarianten von $G$ enthalten sind und die Anzahl derselben $n$ ist. Endlich folgt für das System $(A.)$, dessen Vollständigkeit durch die Gleichung $(B.)$ nachgewiesen ist, dass dasselbe genau $n$ überzählige Gleichungen enthält. In der That findet man leicht, dass der Ausdruck

$$\sum \mu_{ik} \delta_{ik} \Pi$$

für jede Function $\Pi$ verschwindet, wenn man die Coefficienten $\mu$ aus einer der folgenden Gleichungen wählt:

$$\mu_{ik} = \binom{i}{k}$$

$$\mu_{ik}^{(1)} = l_{ik}$$

$$\mu_{ik}^{(2)} = \sum_{a} l_{ia} l_{ak}$$

$$\mu_{ik}^{(3)} = \sum_{ab} l_{ia} l_{ab} l_{bk}$$

u. s. w.

Die invariantiven Eigenschaften dieser ebenfalls zuerst von Herrn Borchardt (in der oben erwähnten Abhandlung) eingeführten Ausdrücke ergeben sich ohne Weiteres aus ($C$.). Mittelst derselben findet man leicht, dass allgemein $\mu_{ik}^{(m)}$ der Coefficient von $\frac{1}{x^{m+1}}$ in der absteigenden Entwicklung von

$$-\frac{\partial \log \Delta(x)}{\partial l_{ki}}$$

ist. Bei der Wichtigkeit der Ausdrücke $\mu_{ik}$ für die Untersuchung der Gleichung $\Delta(\alpha) = 0$ war es nicht ohne Interesse, die eigenthümliche Bedeutung nachzuweisen, welche ihnen in der Theorie der bilinearen Functionen zukommt.

Zürich, 27. December 1867.

# XVI.

## Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

(Mathematische Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1868, S. 119—176.)

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie geodätischer Dreiecke, ohne irgend eine beschränkende Voraussetzung über die Länge ihrer Seiten oder die Oberfläche, in welcher sie enthalten sind. Die Untersuchung solcher Dreiecke ist bisher nur für die beiden besondern Fälle ausgeführt worden, welche sich in der praktischen Geodäsie darbieten, nämlich hauptsächlich in einer sehr umfangreichen Literatur für das von der Kugel nur wenig abweichende abgeplattete Rotationssphäroïd, für welches namentlich Gaufs, Bessel, Jacobi und in der neuesten Zeit General Baeyer und Hansen Annäherungsformeln abgeleitet haben, die für numerische Zwecke nichts zu wünschen übrig lassen. Der zweite Fall, welcher noch behandelt worden ist, betrifft die unendlich kleinen geodätischen Dreiecke auf beliebigen Oberflächen, deren Theorie Gaufs in seinen *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (art. XXIII bis Ende) entwickelt hat.

Die allgemeine Frage, welche im Folgenden behandelt wird, ist dagegen noch nicht berücksichtigt worden, obgleich der genaue Zusammenhang derselben mit der Lehre von den aufeinander abwickelbaren Flächen, und die Aufforderung von Gaufs selbst zur weitern Ausbildung dieser Theorie (l. c. art. XIII) wohl geeignet sein konnten, die Aufmerksamkeit auf ein Problem zu lenken, welchem, für einen besondern Fall, ein grofser Theil jener berühmten Abhandlung gewidmet ist.

Dafs gleichwohl der Versuch einer an keinerlei Einschränkungen gebundenen Begründung der höhern Geodäsie bisher unterblieben ist, dürfte sich zum Theil dadurch erklären, dafs die bisherigen Untersuchungen von zu specieller und im Zusammenhange damit von zu verwickelter Natur gewesen sind, um die Möglichkeit einer gesetzmäfsigen Behandlung dieser Fragen erkennen zu lassen. In der That geht aus diesen Untersuchungen zwar hervor, welche Gröfsen — nämlich die Seiten und ihre Azimuthe an den Ecken — zur vollständigen Kenntnifs eines geodätischen Dreiecks erforderlich sind, aber nicht, welche mit diesen Gröfsen verbundenen Functionen eingeführt werden müssen, um zu den Grundformeln für eine Trigonometrie beliebiger krummer Oberflächen zu gelangen.

Ich betrachte es nun als das Hauptresultat der folgenden Untersuchungen, dafs, ebenso wie die Lehre von den nach dem Newton'schen Gesetze wirkenden Anziehungskräften von einer einzigen Function, dem Potential abhängt, die Geodäsie einer beliebigen krummen Oberfläche auf die Theorie einer einzigen Function von vier Variabeln zurückkommt, welche ich die reducirte Länge eines geodätischen Bogens nenne und durch $(o\, o_1)$ bezeichne, wenn $o$ und $o_1$ die Endpuncte dieses Bogens sind.

Ist diese Gröfse als Function der Coordinaten von $o$ und $o_1$ bestimmt, so liefern meine Untersuchungen unmittelbar die endlichen Formeln für sämmtliche Winkel und Azimuthe eines geodätischen Dreiecks, und die vollständigen Differentiale dieser nämlichen Gröfsen so wie der drei Seiten (Abschnitt IV. art. 23).

Diese Function wird, mit Ausnahme eines besonders zu erledigenden Falles, aufser den zugehörigen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen durch eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung bestimmt, welche nicht linear ist, und demnach bei dem gegenwärtigen Standpuncte der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen allerdings einer allgemeinen Behandlung kaum zugänglich sein wird. Gleichwohl dürften sich auf dem durch die gegenwärtigen Untersuchungen eröffneten Wege selbst für die Ableitung von angenäherten Resultaten Vortheile darbieten, wenn man, statt auf diese Differentialgleichung, direct auf das System von Gleichungen operirt, aus welchem sie hervorgeht (Abschn. III. art. 20. $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{C}$.).

Die Function $(o\, o_1)$, welche hier reducirte Länge genannt wird, ist nun, bis auf die Variabeln, von denen sie abhängt, nichts anderes als die Gröfse, welche Gaufs (l. c. XIX) durch $m$ bezeichnet, und von welcher beim Übergange von beliebigen Coordinaten $p, q$ zu geodätischen Polarcoordinaten $r, \varphi$ (art. XXII) beiläufig bemerkt wird, dafs man sie ebenfalls erhalten kann, sobald $r$ und $\varphi$ als Functionen von $p$ und $q$ bestimmt sind. Hierzu ist nur die Integration zweier partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung erforderlich, von denen die eine in den Derivirten vom zweiten Grade, die andere linear ist. Weingarten hat zuerst bemerkt (Borchardt's Journal LXII. pag. 63), dafs die erste von diesen Gleichungen mit derjenigen übereinstimmt, von welcher in der Jacobi-Hamilton'schen Theorie die Bestimmung der



geodätischen Linien abhängig gemacht wird, und man aus einer sogenannten vollständigen Lösung derselben eine vollständige Lösung der zweiten Gleichung erhält, indem man nach der willkürlichen Constante differentiirt und mit einer neuen Constante multiplicirt.

Es kann demnach den Anschein haben, als ob durch die Zurückführung von $m$ auf eine nicht lineare partielle Differentialgleichung dritter Ordnung die Einfachheit der Bedingungen ohne Noth geopfert werde. Dies ist indessen nur solange der Fall, als man, wie am angeführten Orte, statt der beiden Endpuncte $o$ und $o_1$ nur den ersten und das Azimuth der geodätischen Linie $o\,o_1$ in ihm als gegeben betrachtet. Will man die unter dieser Voraussetzung gefundenen Resultate für den Zweck der gegenwärtigen Untersuchung brauchbar machen, so mufs $m$ als Function der Coordinaten von $o$ und $o_1$ dargestellt, also das Azimuth in $o$ eliminirt werden, und dies wird gerade durch die erwähnte Differentialgleichung dritter Ordnung geleistet.

Zu dieser und den übrigen Differentialgleichungen, welche sich in den folgenden Untersuchungen darbieten, gehören Stetigkeitsbedingungen, welche aus der Lehre von den geodätischen Linien abgeleitet werden müssen. Aus diesem Grunde wurde es nothwendig, die Bedingungen, welche zum Verschwinden der ersten Variation eines Bogens erforderlich sind, vollständig herzustellen. Dieselben bestehen 1) in der bekannten Differentialgleichung und 2) in den Stetigkeitsbedingungen, welche erforderlich sind, damit der vom Integralzeichen freie Theil der ersten Variation für sich $= 0$ werde. Untersuchungen über die zum Verschwinden dieses Theiles der ersten Variation erforderlichen Stetigkeitsbedingungen und die mit demselben verträglichen Unstetigkeiten habe ich bisher nirgendwo gefunden, obgleich die vollständige Kenntnifs dieser Verhältnisse für Probleme der Variationsrechnung von der gröfsten Wichtigkeit ist, und ihre Nichtberücksichtigung zu Widersprüchen führen kann.

Da aufserdem im Folgenden die Differentialgleichungen für geodätische Linien in drei verschiedenen Formen benutzt werden, und zwei derselben von den sonst üblichen abweichen, so mufste eine möglichst gedrängte Ableitung derselben vorangeschickt werden.

## Inhalt.





## Erster Abschnitt.

### Über die geodätischen Linien im Allgemeinen.

#### 1.

Ich setze voraus, dafs der Raum auf drei rechtwinklige Axen der $x, y, z$ bezogen ist, welche in völlig bestimmter Weise orientirt sind, etwa dadurch, dafs aufser dem Anfangspuncte noch die drei Puncte gegeben werden, in welchen die unendlich entfernte Himmelskugel von den Richtungen der wachsenden $x$, $y$ und $z$ getroffen wird.

Sodann sei eine krumme Oberfläche $S$ vorgelegt. Da die hier beabsichtigten Untersuchungen sich nur auf solche Verhältnisse beziehen, welche ungeändert bestehen bleiben, wenn $S$ ohne Dehnung beliebig verbogen wird, so würde es unzulänglich sein, diese Oberfläche durch eine einzige Gleichung zwischen $x$, $y$ und $z$ darzustellen. Wir setzen voraus, dafs $S$ durch drei Gleichungen

$$x = \varphi(p, q), \quad y = \psi(p, q), \quad z = \chi(p, q)$$

gegeben ist, in welchen $p$, $q$ voneinander unabhängige Variabeln bedeuten. Dann entsprechen jedem Puncte von $S$ bestimmte Werthe von $p, q$, welche wir ebenfalls die Coordinaten dieses Punctes nennen, und umgekehrt entspricht jedem Werthepaar $p, q$ ein bestimmter Punct von $S$, wenn, was bei Erörterungen dieser Art nothwendige Voraussetzung ist, mehrdeutige Ausdrücke durch Trennung ihrer Zweige auf eindeutige zurückgeführt werden.

Den Gleichungen $\partial p = 0$, $\partial q = 0$ entsprechen zwei sich gegenseitig durchdringende und die Oberfläche stetig bedeckende Kurvensysteme. Ich setze, was freisteht, voraus, dafs jede Kurve dieser Systeme ihre Richtung nach der Stetigkeit ändert, solange $S$ stetig gebogen ist, oder allgemeiner, um den Fall, wo $S$ Kanten darbietet, mit zu umfassen, dafs die beiden Scheitelwinkel, unter denen ein Linienelement der Oberfläche von einer solchen Kurve geschnitten wird, nie voneinander verschieden sein sollen.

Um die in der Tangentialebene eines Punctes von demselben ausgehenden Richtungen voneinander zu unterscheiden, zählen wir in dieser Ebene um den Berührungspunkt herum Azimuthe, deren fester Schenkel die Richtung der von dort aus wachsenden $p$ ist, und welche für alle Puncte der Oberfläche in der nämlichen Richtung wachsen.

## 2.

Dies festgestellt, bezeichnen wir 1) durch $\omega$ das Azimuth der wachsenden $q$, 2) durch $e\partial p$, $g\partial q$ die Wege, welche der Punct $p, q$ zurücklegen würde, wenn nur eine seiner beiden Coordinaten $p, q$ um ihr Differential wächst, so daſs $e, g$ positive Gröſsen werden, endlich 3) durch $\partial s$ das Linienelement, welches der Punct $p, q$ beschreibt, wenn beide Änderungen zugleich stattfinden, und durch $\theta$ sein Azimuth. Dann folgt

$$\partial s^2 = e^2 \partial p^2 + 2eg\cos\omega\,\partial p\partial q + g^2\partial q^2,$$

$$e\partial p = \frac{\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega}\partial s,$$

$$g\partial q = \frac{\sin\theta}{\sin\omega}\partial s.$$

Wir werden nun aus den in der Einleitung angegebenen Gründen in verschiedenen Formen die Bedingungen dafür herstellen, daſs $\partial s$ die Fortsetzung einer bis an den Punct $p, q$ reichenden geodätischen Linie wird.

Betrachtet man zunächst $p$ und $q$ als Functionen des Bogens $s$ dieser Linie, so erhält man durch eine Rechnung, die wir übergehen dürfen, zwei Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} = -\left\{{11 \atop 1}\right\}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2 - 2\left\{{12 \atop 1}\right\}\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial q}{\partial s} - \left\{{22 \atop 1}\right\}\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = -\left\{{11 \atop 2}\right\}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2 - 2\left\{{21 \atop 2}\right\}\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial q}{\partial s} - \left\{{22 \atop 2}\right\}\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)^2,$$

von denen eine Lösung, nämlich die Gleichung

$$e^2\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2 + 2eg\cos\omega\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial q}{\partial s} + g^2\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)^2 = 1$$

bekannt ist. In Wirklichkeit liefert die Integration auf der rechten Seite eine willkürliche Constante; dieselbe muſs aber $=1$ gesetzt werden, wenn $s$ die Bogenlänge der geodätischen Linie sein soll.

Die Coefficienten dieser Differentialgleichungen bilden ein System von Hülfsgröſsen, welche bei jeder Untersuchung über geodätische Verhältnisse an Stelle der ersten Derivirten von $e, g, \omega$ eingeführt werden müssen; wir geben daher ihre Werthe in zwei Formen, indem wir in der zweiten Columne

$$E = e^2, \quad F = eg\cos\omega, \quad G = g^2, \quad \triangle = EG - F^2$$

voraussetzen:



$$\left\{{11 \atop 1}\right\} = \frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial p} + \frac{\cos\omega}{g\sin\omega^2}\left(\frac{\partial e}{\partial q} - \frac{\partial g\cos\omega}{\partial p}\right) = \frac{1}{2\triangle}\left(G\frac{\partial E}{\partial p} + F\frac{\partial E}{\partial q} - 2F\frac{\partial F}{\partial p}\right)$$

$$\left\{{11 \atop 2}\right\} = \frac{e}{g^2\sin\omega^2}\left(\frac{\partial g\cos\omega}{\partial p} - \frac{\partial e}{\partial q}\right) = \frac{1}{2\triangle}\left(2E\frac{\partial F}{\partial p} - F\frac{\partial E}{\partial p} - E\frac{\partial E}{\partial q}\right)$$

$$\left\{{12 \atop 1}\right\} = \frac{1}{e\sin\omega^2}\left(\frac{\partial e}{\partial q} - \cos\omega\frac{\partial g}{\partial p}\right) = \frac{1}{2\triangle}\left(G\frac{\partial E}{\partial q} - F\frac{\partial G}{\partial p}\right)$$

$$\left\{{21 \atop 2}\right\} = \frac{1}{g\sin\omega^2}\left(\frac{\partial g}{\partial p} - \cos\omega\frac{\partial e}{\partial q}\right) = \frac{1}{2\triangle}\left(E\frac{\partial G}{\partial p} - F\frac{\partial E}{\partial q}\right)$$

$$\left\{{22 \atop 1}\right\} = \frac{g}{e^2\sin\omega^2}\left(\frac{\partial e\cos\omega}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial p}\right) = \frac{1}{2\triangle}\left(2G\frac{\partial F}{\partial q} - F\frac{\partial G}{\partial q} - G\frac{\partial G}{\partial p}\right)$$

$$\left\{{22 \atop 2}\right\} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\cos\omega}{e\sin\omega^2}\left(\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial e\cos\omega}{\partial q}\right) = \frac{1}{2\triangle}\left(E\frac{\partial G}{\partial q} + F\frac{\partial G}{\partial p} - 2F\frac{\partial F}{\partial q}\right).$$

Vertauscht man daher die Richtungen der wachsenden $p$ und $q$ mit einander, so vertauschen sich in den Coefficienten der Differentialgleichungen die Indices 1 und 2, $e$ vertauscht sich mit $g$, und das von $\partial p$ aus gezählte Azimuth $\theta$ von $\partial s$ vertauscht sich mit dem von $\partial q$ aus gezählten Azimuth $\theta - \omega$.

Durch Umkehrung folgt

$$\frac{\partial e}{\partial p} = e\left\{{11 \atop 1}\right\} + g\cos\omega\left\{{11 \atop 2}\right\} \qquad \frac{\partial e}{\partial q} = e\left\{{12 \atop 1}\right\} + g\cos\omega\left\{{21 \atop 2}\right\}$$

$$\frac{\partial g}{\partial p} = e\cos\omega\left\{{12 \atop 1}\right\} + g\left\{{21 \atop 2}\right\} \qquad \frac{\partial g}{\partial q} = e\cos\omega\left\{{22 \atop 1}\right\} + g\left\{{22 \atop 2}\right\}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial p} = -\sin\omega\left[\frac{e}{g}\left\{{12 \atop 1}\right\} + \frac{g}{e}\left\{{11 \atop 2}\right\}\right] \qquad \frac{\partial\omega}{\partial q} = -\sin\omega\left[\frac{g}{e}\left\{{21 \atop 2}\right\} + \frac{e}{g}\left\{{22 \atop 1}\right\}\right].$$

Aus den beiden letzten Formeln ziehen wir noch für eine spätere Anwendung (Zweiter Abschnitt, art. 10) die identische Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{g\sin\omega}{e}\left\{{11 \atop 2}\right\}\right] - \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{g\sin\omega}{e}\left\{{21 \atop 2}\right\}\right] = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{e\sin\omega}{g}\left\{{22 \atop 1}\right\}\right] - \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{e\sin\omega}{g}\left\{{12 \atop 1}\right\}\right].$$

Wir benutzen endlich die obigen Formeln zur Herstellung der zweiten Derivirte einer beliebigen Function $m$ von $p$ und $q$ nach $s$. Wird der Punct $p, q$ auf die oben bestimmte geodätische Linie beschränkt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Werthe von $\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial q}{\partial s}$:

$$\frac{\partial m}{\partial s} = \frac{\sin(\omega-\theta)}{e\sin\omega}\frac{\partial m}{\partial p} + \frac{\sin\theta}{g\sin\omega}\frac{\partial m}{\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial s^2} = \left(\frac{\sin(\omega-\theta)}{e\sin\omega}\right)^2\left[\frac{\partial^2 m}{\partial p^2} - \left\{{11 \atop 1}\right\}\frac{\partial m}{\partial p} - \left\{{11 \atop 2}\right\}\frac{\partial m}{\partial q}\right]$$

$$+ 2\frac{\sin(\omega-\theta)\sin\theta}{eg\sin\omega^2}\left[\frac{\partial^2 m}{\partial p\partial q} - \left\{{12 \atop 1}\right\}\frac{\partial m}{\partial p} - \left\{{21 \atop 2}\right\}\frac{\partial m}{\partial q}\right]$$

$$+ \left(\frac{\sin\theta}{g\sin\omega}\right)^2\left[\frac{\partial^2 m}{\partial q^2} - \left\{{22 \atop 1}\right\}\frac{\partial m}{\partial p} - \left\{{22 \atop 2}\right\}\frac{\partial m}{\partial q}\right],$$

wozu wir noch die Identität

$$e^2\left(\frac{\sin(\omega-\theta)}{e\sin\omega}\right)^2+2eg\cos\omega\,\frac{\sin(\omega-\theta)\sin\omega}{eg\sin\omega^2}+g^2\left(\frac{\sin\theta}{g\sin\omega}\right)^2=1$$

fügen.

3.

Wir nehmen die vorangehende Untersuchung, welche die Bedingungen für geodätische Linien nicht vollständig enthält, von einem zweiten Gesichtspuncte auf, indem wir (vergl. Disqu. g. c. s. XVIII) nach den Gesetzen fragen, nach denen sich, an einer geodätischen Linie entlang, das Azimuth $\theta$ derselben ändert.

Für die erste Variation des Linienelementes erhält man, wenn $\partial p$, $\partial q$ durch $\theta$ ausgedrückt werden,

$$\partial\delta s=e\cos\theta\,\partial\delta p+g\cos(\omega-\theta)\partial\delta q$$
$$+\{\sin(\omega-\theta)\cos\theta\,\delta\log e+\sin\theta\cos(\omega-\theta)\,\delta\log g-\sin\theta\sin(\omega-\theta)\,\delta\omega\}\frac{\partial s}{\sin\omega}.$$

Ist aber $\delta\sigma$ der Weg, um welchen der Punct $p, q$ bei der Variation verschoben wurde, $\psi$ sein Azimuth, also

$$g\delta q=\frac{\sin\psi}{\sin\omega}\delta\sigma,\quad e\delta p=\frac{\sin(\omega-\psi)}{\sin\omega}\delta\sigma,$$

so wird

$$e\cos\theta\,\delta p+g\cos(\omega-\theta)\,\delta q=\cos(\psi-\theta)\,\delta\sigma,$$

mithin

$$\partial\delta s=\partial[\cos(\psi-\theta)\,\delta\sigma]-\delta p\cdot\partial e\cos\theta-\delta q\cdot\partial g\cos(\omega-\theta)$$
$$+\{\sin(\omega-\theta)\cos\theta\,\delta\log e+\sin\theta\cos(\omega-\theta)\,\delta\log g-\sin\theta\sin(\omega-\theta)\,\delta\omega\}\frac{\partial s}{\sin\omega}.$$

Soll nun die Verbindungslinie $s$ zweier festen Puncte $o, o_1$ eine geodätische sein, so mufs das von $o$ bis $o_1$ erstreckte Integral dieses Ausdruckes bei jeder Wahl von $\delta p$, $\delta q$ verschwinden, durch welche der Zusammenhang der Verbindungslinie nicht aufgehoben wird. Daraus folgt zunächst

$$0=-\delta p\cdot\frac{\partial e\cos\theta}{\partial s}-\delta q\cdot\frac{\partial g\cos(\omega-\theta)}{\partial s}$$
$$+\frac{\sin(\omega-\theta)\cos\theta}{\sin\omega}\,\delta\log e+\frac{\sin\theta\cos(\omega-\theta)}{\sin\omega}\,\delta\log g-\frac{\sin\theta\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega}\,\delta\omega,$$

für jedes $\delta p$, $\delta q$.

Ist diese Bedingung erfüllt, so wird die Variation des Bogens $o\,o_1$:

$$\delta s=[\cos(\psi-\theta)\,\delta\sigma]_0^{o_1},$$

wo die Zeichen an den Klammern andeuten, dafs man zu den Grenzen der Integration übergehen soll. An diesen Grenzen ist $\delta\sigma=0$. Aber dies reicht zum Verschwinden des vorstehenden Ausdruckes nicht aus,



sondern es ist hierzu noch aufserdem erforderlich, dafs $\cos(\psi-\theta)\ \delta\sigma$ zwischen den Grenzen stetig sei, und zwar für jede zulässige Variation der Linie $o\,o_1$.

Wir legen nun, wo $s$ eine Kante der Oberfläche überschreitet, $\delta\sigma$ in dieselbe, und nehmen $\delta\sigma$ und $\psi$ allenthalben stetig an, wodurch mit Rücksicht auf die stetige Richtungsänderung der Linien $\partial q=0$, von denen aus das Azimuth $\psi$ gezählt wird, alle bei der Variation zu berücksichtigenden Bedingungen in hinreichender Allgemeinheit befriedigt sind. Dann erkennt man sofort, dafs zum Verschwinden der ersten Variation noch die Stetigkeit von $\theta$ an $s$ entlang erforderlich ist. Da nun nach art. 1 der eine Schenkel $e\partial p$ von $\theta$ stets einer Kurve angehört, welche kein Linienelement von $S$ anders als unter beiderseits gleichen Scheitelwinkeln schneidet, so gilt dasselbe auch vom andern Schenkel $\partial s$.

Eine geodätische Linie ändert daher, solange $S$ stetig gebogen ist, ihre Richtung ebenfalls nach der Stetigkeit, und bildet beim Übergange über eine Kante von $S$ mit derselben beiderseits gleiche Scheitelwinkel.

Setzt man nun in der obigen allgemeinen Bedingungsgleichung den Factor von $\delta p$ gleich Null, und schafft dann die Derivirten von $e$, $g$ und $\omega$ mittelst der in art. 2 gegebenen Ausdrücke weg, so erhält man nach einer einfachen Reduction

$$\frac{\partial\theta}{\partial s}=\frac{g}{e^2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\sin(\theta-\omega)-\frac{1}{e}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\sin\theta,$$

mithin durch Vertauschung der Richtungen von $\partial p$ und $\partial q$ die übrigens nicht wesentlich verschiedene Formel

$$\frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial s}=\frac{e}{g^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\sin\theta-\frac{1}{g}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\sin(\theta-\omega),$$

welches die verlangten Bedingungsgleichungen in einer für die folgenden Anwendungen geeigneten Form sind.

Von den verschiedenen Folgerungen, welche sich an den oben stehenden Ausdruck von $\delta s$ knüpfen lassen, müssen wir noch eine hervorheben. Ersetzt man den geodätischen Bogen $o\,o_1$, was ebenfalls eine Variation desselben ist, durch einen unendlich benachbarten geodätischen Bogen $o\,o^1$, und ist $\psi$ das Azimuth des Weges $o_1 o^1$, so wächst $o\,o_1$ um $\delta s=\cos(\psi-\theta)\cdot o_1 o^1$. Soll' daher $o\,o_1$ ungeändert bleiben, so mufs $\cos(\psi-\theta)=0$, also $o_1 o^1$ in $o_1$ zu $o\,o_1$ senkrecht sein. Daraus ergiebt sich der schöne Satz, den Gaufs im art. XV seiner Disquis. gen. c. s. c. auf zwei Arten abgeleitet hat, und der zu den Fundamenten unserer Untersuchungen gehört:

Dreht sich eine geodätische Linie von unveränderlicher Länge um einen festen Endpunct, so bleibt sie fortwährend senkrecht zu der vom beweglichen Endpuncte beschriebenen Kurve.

Diese Kurve nennen wir einen geodätischen Kreis, und den festen Endpunct der geodätischen Linie sein Centrum.

4.

Werden von einem festen Punkte $o$ auf $S$ unter allen Azimuthen geodätische Linien gezogen, so ist durch die Angabe des Azimuthes $\varphi$ und der von $o$ aus gezählten Länge $r$ einer solchen Linie die Lage ihres Endpunctes $o_1$ auf $S$ völlig bestimmt. Betrachtet man nach Gaufs (Disqu. g. XV. XVI) diese beiden voneinander unabhängig veränderlichen Gröfsen als Coordinaten des Punctes $o_1$, so entspricht der Gleichung $\partial\varphi = 0$ die Schaar aller von $o$ ausgehenden geodätischen Linien, und der Gleichung $\partial r = 0$ das System aller geodätischen Kreise, deren Centrum der feste Punkt $o$ ist.

Von diesen beiden Kurvenschaaren hat nach dem vorigen art. die erste, und weil beide sich unter rechten Winkeln durchdringen, auch die zweite die in art. 1 von den Kurvenschaaren $\partial p = 0$, $\partial q = 0$ geforderte Eigenschaft, kein Linienelement von $S$ anders als unter beiderseits gleichen Scheitelwinkeln zu schneiden.

Wir zählen nun auf jedem geodätischen Kreise von dem $\varphi = 0$ entsprechenden Puncte aus Bögen $\sigma$, die auf allen Kreisen in der nämlichen Richtung wachsen, und wählen diese Richtung so, dafs sie für unendlich kleine Werthe von $r$ mit der Richtung der wachsenden $\varphi$ übereinstimmt. Dann wird $\sigma$ für jeden geodätischen Kreis eine Function von $\varphi$, und wenn ihre Derivirte

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = m$$

gesetzt wird, $m$ der Factor, mit welchem man den Centriwinkel $\partial\varphi$ multipliciren mufs, um das ihm gegenüberliegende Element $\partial\sigma$ des geodätischen Kreises vom Halbmesser $r$ zu erhalten.

Diese Gröfse $m$ nennen wir, was sich durch die Eigenschaften derselben (Zweiter Abschn., art. 9 und dritter Abschnitt) rechtfertigen wird, die reducirte Länge des geodätischen Bogens $r$, und bezeichnen sie, wo das Centrum $o$ vom beschreibenden Puncte $o_1$ unterschieden werden mufs, durch

$$(o\,o_1),$$



so dafs also $(o_1\,o)$ die reducirte Länge von $r$ unter der umgekehrten Voraussetzung sein wird, dafs $r$ sich um $o_1$ als festen Endpunct dreht, und der vorhin unbewegliche Punct $o$ einen geodätischen Kreis beschreibt.

Jedem bestimmten Werthe von $r$ entspricht ein endlicher Werth von $m$, und beide ändern sich zugleich nach der Stetigkeit. Würde nämlich $m = \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}$ irgendwo unendlich, so müfste dort entweder der geodätische Kreis den Leitstrahl $r$ berühren, statt ihn senkrecht zu schneiden, oder es würde die geodätische Linie $r$ von einer unendlich benachbarten in $o$ berührt, und dann wäre an $r$ entlang stets $m = \infty$. Würde $m$ in einem Puncte $\pi$ von $r$ unstetig, so würde diese geodätische Linie, wenn sie unendlich wenig um $o$ gedreht wird, in zwei bei $\pi$ getrennte Stücke zerfallen, also das bis $o$ reichende Stück nicht über sein bei $\pi$ stattfindendes Ende hinaus als geodätische Linie fortgesetzt werden können.

Das Quadrat des Linienelementes wird jetzt

$$\partial s^2 = \partial r^2 + m^2 \partial\varphi^2;$$

ist $\Theta$ das Azimuth von $\partial s$, und in der Weise gezählt, dafs die Azimuthe der Linienelemente, welche den wachsenden $r$ und $\varphi$ entsprechen, beziehungsweise 0 und $\frac{\pi}{2}$ werden, so wird

$$\partial r = \cos\Theta \cdot \partial s, \quad m\partial\varphi = \sin\Theta \cdot \partial s.$$

Soll endlich $\partial s$ die Fortsetzung einer bis an $o_1$ reichenden geodätischen Linie sein, welche dort unter dem Azimuth $\Theta$ eintrifft, so ergiebt sich am einfachsten auf directem Wege die Zunahme dieses Azimuths bis zum Endpuncte von $\partial s$

$$\partial\Theta = -\sin\Theta \frac{\partial \log m}{\partial r} \partial s,$$

(Disqu. g. c. s. c. XIX).

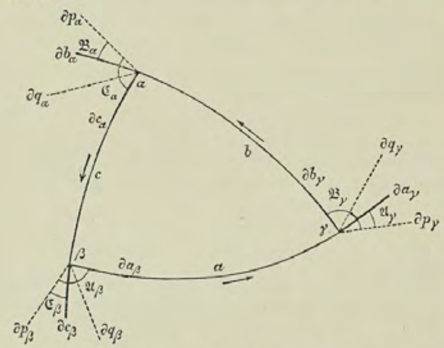
Die Untersuchung der zweiten Variation zeigt ferner, dafs ein wenn auch noch so kleines Stück von $r$ niemals die kürzeste Verbindungslinie seiner Endpuncte sein kann, wenn es einen Punct enthält, in welchem $\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial r}$ unstetig wird. Eine kürzeste Verbindungslinie zweier Puncte geht also an jedem Puncte der bezeichneten Art vorbei; trifft eine geodätische Linie in ihrem Verlaufe auf einen solchen Punct, so wird durch die hier geforderte Stetigkeit von $\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial r}$ ihre weitere Fortsetzung ausgeschlossen (III. Abschnitt, artt. 15. 16).

## Zweiter Abschnitt.

### Theorie der geodätischen Dreiecke.

5.

Auf der Oberfläche $S$ sei ein geodätisches Dreieck vorgelegt, dessen Seiten $a$, $b$, $c$ sind. Von den beiden Theilen der Fläche, welche an diese Figur angrenzen, nennen wir einen das Innere des Dreiecks, und bezeichnen nun die im Innern des Dreiecks den Seiten $a$, $b$, $c$ gegenüberliegenden Winkel durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Coordinaten ihrer Ecken durch $p_\alpha$, $q_\alpha$; $p_\beta$, $q_\beta$; $p_\gamma$, $q_\gamma$, überhaupt den Werth, welchen eine veränderliche Gröfse in einer dieser Ecken annimmt, durch Anhängung des Index $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.




Wir zählen ferner auf jeder Seite von einem willkürlichen Anfangspuncte aus Abscissen, welche in derjenigen Richtung wachsen, für welche das Innere des Dreiecks auf der Seite der wachsenden Azimuthe liegt. Sind auf der Seite $a$ die Abscissen von $\beta$ und $\gamma$ gleich $a_\beta$, $a_\gamma$;
" $b$ " $\gamma$ " $\alpha$ " $b_\gamma$, $b_\alpha$;
" $c$ " $\alpha$ " $\beta$ " $c_\alpha$, $c_\beta$;
ferner die Azimuthe ihrer positiven Incremente

$$\partial a_\beta,\ \partial a_\gamma,\ \partial b_\gamma,\ \partial b_\alpha,\ \partial c_\alpha,\ \partial c_\beta$$

gleich

$$\mathfrak{A}_\beta,\ \mathfrak{A}_\gamma,\ \mathfrak{B}_\gamma,\ \mathfrak{B}_\alpha,\ \mathfrak{C}_\alpha,\ \mathfrak{C}_\beta,$$

so bestehen zwischen diesen und den Winkeln des Dreiecks die Relationen:

$$\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{B}_\alpha + \alpha = \pi, \quad \mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{C}_\beta + \beta = \pi, \quad \mathfrak{B}_\gamma - \mathfrak{A}_\gamma + \gamma = \pi$$



so dafs die Winkel des Dreiecks mit den Azimuthen zugleich gegeben sind. Endlich werden die reducirten Längen der Seiten $a$, $b$, $c$ (art. 4) durch

$$(\beta\gamma),\ (\gamma\alpha),\ (\alpha\beta) \text{ oder durch } (\gamma\beta),\ (\alpha\gamma),\ (\beta\alpha)$$

bezeichnet, jenachdem diese Seiten sich um die Puncte $\beta$, $\gamma$, $\alpha$ oder um $\gamma$, $\alpha$, $\beta$ drehen.

Abgesehen von den reducirten Längen der Seiten, mit denen wir uns im folgenden Abschnitte beschäftigen werden, sind hiernach für die vollständige Kenntnifs eines geodätischen Dreiecks 9 Elemente erforderlich, nämlich die 6 Azimuthe an den Ecken und die drei Seiten.

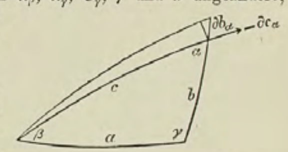
Diese 9 Gröfsen sind Functionen der Coordinaten der drei Ecken, und wir stellen uns die Aufgabe, ihre partiellen Derivirten nach diesen Variabeln zu bestimmen, deren Anzahl $= 54$ ist.

Diese Aufgabe wird gelöst sein, wenn wir die Derivirten nach den 6 Abscissen $a_\beta$, $a_\gamma$, ... ermittelt haben, da jene sich aus diesen zusammensetzen lassen (artt. 8. 9).

In Folge unserer Bezeichnungen reicht es aber für diesen Zweck aus, die Derivirten nach $b_\alpha$ und $c_\alpha$ herzustellen, da aus diesen die übrigen sich durch cyklische Vertauschung ergeben.

6.

Wächst $b_\alpha$ um $\partial b_\alpha$, so bleiben $\mathfrak{A}_\beta$, $\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{B}_\gamma$, $\gamma$ und $a$ ungeändert; $c$ dreht sich um die Ecke $\beta$ und überstreicht dort einen Winkel, der $\partial\varphi$ heifsen mag.




Die Zunahmen von $b$, $\beta$, $\mathfrak{C}_\beta$ werden $\partial b_\alpha$, $\partial\varphi$, $\partial\varphi$; ferner wird $(\beta\alpha)\,\partial\varphi = \partial b_\alpha \cdot \sin\alpha$, $\partial c = \partial b_\alpha \cdot \cos\alpha$, und weil $c_\alpha$ gegen die Richtung vom Drehungspuncte $\beta$ nach dem beschreibenden Puncte $\alpha$ wächst,

$$\partial\alpha = \partial\mathfrak{B}_\alpha - \partial\mathfrak{C}_\alpha = \sin\alpha\,\frac{\partial\log(\beta\alpha)}{\partial c_\alpha}\,\partial b_\alpha.$$

Endlich wird nach art. 3 die Zunahme des Azimuthes $\mathfrak{B}_\alpha$, vom Anfang bis zum Ende des Elementes $\partial b_\alpha$ von $b$:

$$\partial\mathfrak{B}_\alpha = \left[\frac{g_\alpha}{e_\alpha^2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin(\mathfrak{B}_\alpha - \omega_\alpha) - \frac{1}{e_\alpha}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin\mathfrak{B}_\alpha\right]\partial b_\alpha,$$

woraus $\partial\mathfrak{C}_\alpha$ sofort folgt.

Durch Elimination von $\partial\varphi$ ergiebt sich also:

$$\frac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial b_\alpha}=0 \quad \frac{\partial\mathfrak{B}_\gamma}{\partial b_\alpha}=0 \quad \frac{\partial\mathfrak{C}_\alpha}{\partial b_\alpha}=\frac{g_\alpha}{e_\alpha^2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin(\mathfrak{B}_\alpha-\omega_\alpha)-\frac{1}{e_\alpha}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin\mathfrak{B}_\alpha-\sin\alpha\frac{\partial\log(\beta\alpha)}{\partial c_\alpha}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{A}_\gamma}{\partial b_\alpha}=0 \quad \frac{\partial\mathfrak{B}_\alpha}{\partial b_\alpha}=\frac{g_\alpha}{e_\alpha^2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin(\mathfrak{B}_\alpha-\omega_\alpha)-\frac{1}{e_\alpha}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin\mathfrak{B}_\alpha \quad \frac{\partial\mathfrak{C}_\beta}{\partial b_\alpha}=\frac{\sin\alpha}{(\beta\alpha)}$$

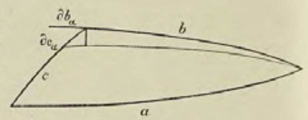
$$\frac{\partial\alpha}{\partial b_\alpha}=\sin\alpha\frac{\partial\log(\beta\alpha)}{\partial c_\alpha} \quad \frac{\partial\beta}{\partial b_\alpha}=\frac{\sin\alpha}{(\beta\alpha)} \quad \frac{\partial\gamma}{\partial b_\alpha}=0$$

$$\frac{\partial a}{\partial b_\alpha}=0 \quad \frac{\partial b}{\partial b_\alpha}=1 \quad \frac{\partial c}{\partial b_\alpha}=\cos\alpha.$$

Wir haben hier, wie auch im Folgenden, die Dreieckswinkel $\alpha, \beta, \gamma$ noch nebenbei berücksichtigt, da wir ihre vollständigen Differentiale bei einer spätern Untersuchung gebrauchen werden.

7.

Wächst $c_\alpha$ um $\partial c_\alpha$, so bleiben $\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{A}_\beta$, $\mathfrak{C}_\beta$, $\beta$ und $a$ ungeändert; $b$ dreht sich um die Ecke $\gamma$ und überstreicht dort einen Winkel, der $\partial\psi$ heifsen mag.




Die Zunahmen von $c$, $\gamma$, $\mathfrak{B}_\gamma$ sind $-\partial c_\alpha$, $-\partial\psi$, $+\partial\psi$; ferner wird $(\gamma\alpha)\partial\psi=\partial c_\alpha\cdot\sin\alpha$, $\partial b=-\partial c_\alpha\cdot\cos\alpha$, und die Zunahme des Winkels zwischen $\partial b_\alpha$ und $\partial c_\alpha$ (art. 4)

$$\partial(\pi-\alpha)=-\sin\alpha\frac{\partial\log(\gamma\alpha)}{\partial b_\alpha}\partial c_\alpha$$

oder

$$\partial\alpha=\partial\mathfrak{B}_\alpha-\partial\mathfrak{C}_\alpha=\sin\alpha\frac{\partial\log(\gamma\alpha)}{\partial b_\alpha}\partial c_\alpha.$$

Endlich wird die Zunahme des Azimuths $\mathfrak{C}_\alpha$, vom Anfange bis zum Ende des Elementes $\partial c_\alpha$ von $c$

$$\partial\mathfrak{C}_\alpha=\left[\frac{g_\alpha}{e_\alpha^2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin(\mathfrak{C}_\alpha-\omega_\alpha)-\frac{1}{e_\alpha}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin\mathfrak{C}_\alpha\right]\partial c_\alpha,$$

woraus $\partial\mathfrak{B}_\alpha$ sofort folgt.

Durch Elimination von $\partial\psi$ ergiebt sich also:

$$\frac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial c_\alpha}=0 \quad \frac{\partial\mathfrak{B}_\gamma}{\partial c_\alpha}=\frac{\sin\alpha}{(\gamma\alpha)} \quad \frac{\partial\mathfrak{C}_\alpha}{\partial c_\alpha}=\frac{g_\alpha}{e_\alpha^2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin(\mathfrak{C}_\alpha-\omega_\alpha)-\frac{1}{e_\alpha}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin\mathfrak{C}_\alpha$$

$$\frac{\partial\mathfrak{A}_\gamma}{\partial c_\alpha}=0 \quad \frac{\partial\mathfrak{B}_\alpha}{\partial c_\alpha}=\frac{g_\alpha}{e_\alpha^2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin(\mathfrak{C}_\alpha-\omega_\alpha)-\frac{1}{e_\alpha}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}_\alpha \sin\mathfrak{C}_\alpha+\sin\alpha\frac{\partial\log(\gamma\alpha)}{\partial b_\alpha} \quad \frac{\partial\mathfrak{C}_\beta}{\partial c_\alpha}=0$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial c_\alpha}=\sin\alpha\frac{\partial\log(\gamma\alpha)}{\partial b_\alpha} \quad \frac{\partial\beta}{\partial c_\alpha}=0 \quad \frac{\partial\gamma}{\partial c_\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{(\gamma\alpha)}$$

$$\frac{\partial a}{\partial c_\alpha}=0 \quad \frac{\partial b}{\partial c_\alpha}=-\cos\alpha \quad \frac{\partial c}{\partial c_\alpha}=-1.$$



8.

Durch cyklische Vertauschung ergeben sich aus den vorangehenden Formeln die noch fehlenden Richtungsderivirten, und dieselben müssen nun in die partiellen Derivirten nach den Coordinaten $p$, $q$ der drei Ecken umgesetzt werden.

Zwischen den Ortsänderungen $\partial b_\alpha$, $\partial c_\alpha$, $\partial c_\beta$ u. s. w. und den Differentialen der unabhängigen Variabeln $p_\alpha$, $q_\alpha$, $p_\beta$ u s. w. bestehen die folgenden Gleichungen:

Ecke $\alpha$:

$$(a.)\begin{cases}
\sin\alpha\partial b=\sin\mathfrak{C}\cdot e\partial p+\sin(\mathfrak{C}-\omega)g\partial q & \sin\omega\cdot e\partial p=-\sin(\mathfrak{B}-\omega)\partial b-\sin(\mathfrak{C}-\omega)\partial c\\
\sin\alpha\partial c=-\sin\mathfrak{B}\cdot e\partial p-\sin(\mathfrak{B}-\omega)g\partial q & \sin\omega\cdot g\partial q=\sin\mathfrak{B}\cdot\partial b+\sin\mathfrak{C}\partial c\\
\text{Ecke } \beta: & \\
\sin\beta\partial c=\sin\mathfrak{A}\cdot e\partial p+\sin(\mathfrak{A}-\omega)g\partial q & \sin\omega\cdot e\partial p=-\sin(\mathfrak{C}-\omega)\partial c-\sin(\mathfrak{A}-\omega)\partial a\\
\sin\beta\partial a=-\sin\mathfrak{C}\cdot e\partial p-\sin(\mathfrak{C}-\omega)g\partial q & \sin\omega\cdot g\partial q=\sin\mathfrak{C}\partial c+\sin\mathfrak{A}\partial a\\
\text{Ecke } \gamma: & \\
\sin\gamma\partial a=\sin\mathfrak{B}\cdot e\partial p+\sin(\mathfrak{B}-\omega)g\partial q & \sin\omega\cdot e\partial p=-\sin(\mathfrak{A}-\omega)\partial a-\sin(\mathfrak{B}-\omega)\partial b\\
\sin\gamma\partial b=-\sin\mathfrak{A}\cdot e\partial p-\sin(\mathfrak{A}-\omega)g\partial q & \sin\omega\cdot g\partial q=\sin\mathfrak{A}\partial a+\sin\mathfrak{B}\partial b.
\end{cases}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den partiellen und den Richtungsderivirten einer beliebigen Function $\Omega$:

Ecke $\alpha$:

$$(b.)\begin{cases}
\sin\omega\frac{\partial\Omega}{\partial b}=-\sin(\mathfrak{B}-\omega)\frac{\partial\Omega}{e\partial p}+\sin\mathfrak{B}\frac{\partial\Omega}{g\partial q} & \sin\alpha\frac{\partial\Omega}{e\partial p}=\sin\mathfrak{C}\frac{\partial\Omega}{\partial b}-\sin\mathfrak{B}\frac{\partial\Omega}{\partial c}\\
\sin\omega\frac{\partial\Omega}{\partial c}=-\sin(\mathfrak{C}-\omega)\frac{\partial\Omega}{e\partial p}+\sin\mathfrak{C}\frac{\partial\Omega}{g\partial q} & \sin\alpha\frac{\partial\Omega}{g\partial q}=\sin(\mathfrak{C}-\omega)\frac{\partial\Omega}{\partial b}-\sin(\mathfrak{B}-\omega)\frac{\partial\Omega}{\partial c}\\
\text{Ecke } \beta: & \\
\sin\omega\frac{\partial\Omega}{\partial c}=-\sin(\mathfrak{C}-\omega)\frac{\partial\Omega}{e\partial p}+\sin\mathfrak{C}\frac{\partial\Omega}{g\partial q} & \sin\beta\frac{\partial\Omega}{e\partial p}=\sin\mathfrak{A}\frac{\partial\Omega}{\partial c}-\sin\mathfrak{C}\frac{\partial\Omega}{\partial a}\\
\sin\omega\frac{\partial\Omega}{\partial a}=-\sin(\mathfrak{A}-\omega)\frac{\partial\Omega}{e\partial p}+\sin\mathfrak{A}\frac{\partial\Omega}{g\partial q} & \sin\beta\frac{\partial\Omega}{g\partial q}=\sin(\mathfrak{A}-\omega)\frac{\partial\Omega}{\partial c}-\sin(\mathfrak{C}-\omega)\frac{\partial\Omega}{\partial a}\\
\text{Ecke } \gamma: & \\
\sin\omega\frac{\partial\Omega}{\partial a}=-\sin(\mathfrak{A}-\omega)\frac{\partial\Omega}{e\partial p}+\sin\mathfrak{A}\frac{\partial\Omega}{g\partial q} & \sin\gamma\frac{\partial\Omega}{e\partial p}=\sin\mathfrak{B}\frac{\partial\Omega}{\partial a}-\sin\mathfrak{A}\frac{\partial\Omega}{\partial b}\\
\sin\omega\frac{\partial\Omega}{\partial b}=-\sin(\mathfrak{B}-\omega)\frac{\partial\Omega}{e\partial p}+\sin\mathfrak{B}\frac{\partial\Omega}{g\partial q} & \sin\gamma\frac{\partial\Omega}{g\partial q}=\sin(\mathfrak{B}-\omega)\frac{\partial\Omega}{\partial a}-\sin(\mathfrak{A}-\omega)\frac{\partial\Omega}{\partial b}.
\end{cases}$$

Setzt man nun in das vollständige Differential von $\Omega$ statt der partiellen Derivirten ihre vorstehenden Ausdrücke durch die Richtungsderivirten ein, so ergiebt sich vermöge der Gleichungen $(a)$

$$\partial\Omega=\frac{\partial\Omega}{\partial b_\alpha}\cdot\partial b_\alpha+\frac{\partial\Omega}{\partial c_\alpha}\cdot\partial c_\alpha+\frac{\partial\Omega}{\partial c_\beta}\cdot\partial c_\beta+\cdots,$$

also die nämliche Form, wie wenn die Ortsänderungen $\partial b_\alpha, \partial c_\alpha, \partial c_\beta, \ldots$ die vollständigen Differentiale voneinander unabhängiger Functionen von $p_\alpha, q_\alpha, p_\beta, \ldots$ wären.

Auf diese Weise erhält man die vollständigen Differentiale zunächst in der Form:

$$\begin{aligned}
\partial \mathfrak{A}_\beta &= \left[\frac{g}{e^2}\left\{ {11 \atop 2} \right\} \sin(\mathfrak{C}-\omega) - \frac{1}{e}\left\{ {21 \atop 2} \right\} \sin \mathfrak{C} - \sin\beta\, \frac{\partial \log(\gamma\beta)}{\partial a_\beta}\right]_\beta \partial c_\beta \\
&\quad + \left[\frac{g}{e^2}\left\{ {11 \atop 2} \right\} \sin(\mathfrak{A}-\omega) - \frac{1}{e}\left\{ {21 \atop 2} \right\} \sin \mathfrak{A}\right]_\beta \partial a_\beta + \frac{\sin\gamma}{(\beta\gamma)}\partial b_\gamma \\
\partial \mathfrak{A}_\gamma &= \left[\frac{g}{e^2}\left\{ {11 \atop 2} \right\} \sin(\mathfrak{B}-\omega) - \frac{1}{e}\left\{ {21 \atop 2} \right\} \sin \mathfrak{B} + \sin\gamma\, \frac{\partial \log(\beta\gamma)}{\partial a_\gamma}\right]_\gamma \partial b_\gamma \\
&\quad + \left[\frac{g}{e^2}\left\{ {11 \atop 2} \right\} \sin(\mathfrak{A}-\omega) - \frac{1}{e}\left\{ {21 \atop 2} \right\} \sin \mathfrak{A}\right]_\gamma \partial a_\gamma + \frac{\sin\beta}{(\gamma\beta)}\partial c_\beta \\
\partial a &= \cos\beta\,\partial c_\beta - \partial a_\beta - \cos\gamma\,\partial b_\gamma + \partial a_\gamma \\
\partial \alpha &= \frac{\sin\gamma}{(\alpha\gamma)}\partial a_\gamma - \frac{\sin\beta}{(\alpha\beta)}\partial a_\beta + \sin\alpha\left[\frac{\partial\log(\beta\alpha)}{\partial c_\alpha}\partial b_\alpha + \frac{\partial\log(\gamma\alpha)}{\partial b_\alpha}\partial c_\alpha\right],
\end{aligned}$$

und wenn man aus den drei ersten Gleichungen die Ortsänderungen $\partial a_\beta$ u. s. w. fortschafft:

$$\begin{aligned}
\partial \mathfrak{A}_\beta &= -\frac{g_\beta \sin\omega_\beta}{e_\beta}\left[\left\{ {11 \atop 2} \right\}\partial p + \left\{ {21 \atop 2} \right\}\partial q\right]_\beta - \frac{\partial\log(\gamma\beta)}{\partial a_\beta}\Big[\sin\mathfrak{A}\, e\,\partial p \\
&\quad + \sin(\mathfrak{A}-\omega)\, g\,\partial q\Big]_\beta \frac{1}{(\beta\gamma)}\left[\sin\mathfrak{A}\, e\,\partial p + \sin(\mathfrak{A}-\omega)\, g\,\partial q\right]_\gamma \\
\partial \mathfrak{A}_\gamma &= -\frac{g_\gamma \sin\omega_\gamma}{e_\gamma}\left[\left\{ {11 \atop 2} \right\}\partial p + \left\{ {21 \atop 2} \right\}\partial q\right]_\gamma - \frac{\partial\log(\beta\gamma)}{\partial a_\gamma}\Big[\sin\mathfrak{A}\, e\,\partial p \\
&\quad + \sin(\mathfrak{A}-\omega)\, g\,\partial q\Big]_\gamma + \frac{1}{(\gamma\beta)}\left[\sin\mathfrak{A}\, e\,\partial p + \sin(\mathfrak{A}-\omega)\, g\,\partial q\right]_\beta \\
\partial a &= \cos\mathfrak{A}_\gamma\cdot e_\gamma\partial p_\gamma + \cos(\mathfrak{A}_\gamma-\omega_\gamma)\, g_\gamma\partial q_\gamma - \cos\mathfrak{A}_\beta\cdot e_\beta\partial p_\beta \\
&\qquad - \cos(\mathfrak{A}_\beta-\omega_\beta)\, g_\beta\partial q_\beta.
\end{aligned}$$

Wenn nun in diesen Gleichungen die Functionen $(\beta\gamma)$, $(\gamma\beta)$ ihrer ursprünglichen Definition gemäfs bestimmt wären, so würden die Bedingungen der Integrabilität nothwendig identisch erfüllt sein. Folglich müssen wir umgekehrt durch die Integrabilitätsbedingungen zu den charakteristischen Eigenschaften dieser Functionen gelangen.

Die vorstehenden Gleichungen lösen die Aufgabe, zu bestimmen, wie sich die Länge einer geodätischen Linie und ihre Azimuthe in den Endpuncten ändern, wenn letztere unendlich wenig verschoben werden.



9.

Für die Länge einer durch die Coordinaten ihrer Endpuncte gegebenen geodätischen Linie und ihre Azimuthe in den Endpuncten erhalten wir demnach das folgende System von partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{I.}\begin{cases}
\dfrac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial p_\beta} = -\dfrac{g_\beta\sin\omega_\beta}{e_\beta}\left\{ {11 \atop 2} \right\}_\beta - e_\beta\sin\mathfrak{A}_\beta\dfrac{\partial\log(\gamma\beta)}{\partial a_\beta} & \dfrac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial p_\gamma} = -e_\gamma\dfrac{\sin\mathfrak{A}_\gamma}{(\beta\gamma)} \\[2ex]
\dfrac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial q_\beta} = -\dfrac{g_\beta\sin\omega_\beta}{e_\beta}\left\{ {21 \atop 2} \right\}_\beta - g_\beta\sin(\mathfrak{A}_\beta-\omega_\beta)\dfrac{\partial\log(\gamma\beta)}{\partial a_\beta} & \dfrac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial q_\gamma} = -g_\gamma\dfrac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma-\omega_\gamma)}{(\beta\gamma)}
\end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases}
\dfrac{\partial\mathfrak{A}_\gamma}{\partial p_\gamma} = -\dfrac{g_\gamma\sin\omega_\gamma}{e_\gamma}\left\{ {11 \atop 2} \right\}_\gamma - e_\gamma\sin\mathfrak{A}_\gamma\dfrac{\partial\log(\beta\gamma)}{\partial a_\gamma} & \dfrac{\partial\mathfrak{A}_\gamma}{\partial p_\beta} = e_\beta\dfrac{\sin\mathfrak{A}_\beta}{(\gamma\beta)} \\[2ex]
\dfrac{\partial\mathfrak{A}_\gamma}{\partial q_\gamma} = -\dfrac{g_\gamma\sin\omega_\gamma}{e_\gamma}\left\{ {21 \atop 2} \right\}_\gamma - g_\gamma\sin(\mathfrak{A}_\gamma-\omega_\gamma)\dfrac{\partial\log(\beta\gamma)}{\partial a_\gamma} & \dfrac{\partial\mathfrak{A}_\gamma}{\partial q_\beta} = g_\beta\dfrac{\sin(\mathfrak{A}_\beta-\omega_\beta)}{(\gamma\beta)}
\end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases}
\dfrac{\partial a}{\partial p_\beta} = -e_\beta\cos\mathfrak{A}_\beta & \dfrac{\partial a}{\partial p_\gamma} = e_\gamma\cos\mathfrak{A}_\gamma \\[2ex]
\dfrac{\partial a}{\partial q_\beta} = -g_\beta\cos(\mathfrak{A}_\beta-\omega_\beta) & \dfrac{\partial a}{\partial q_\gamma} = g_\gamma\cos(\mathfrak{A}_\gamma-\omega_\gamma).
\end{cases}$$

Zu jeder von diesen drei Gleichungsgruppen gehören 6 Integrabilitätsbedingungen, welche aber aus bekannten Gründen nicht alle voneinander unabhängig sind. Aufserdem ist zu bemerken, dafs in den Integrabilitätsbedingungen die Derivirte eines Azimuths stets durch ihren vorstehenden Werth ersetzt werden mufs, und in Folge dessen eine Anzahl derselben identisch wird. Dies bezieht sich vorzugsweise auf die Gleichungen III., mit denen wir beginnen.

Man erhält

$$\frac{\partial^2 a}{\partial p_\beta\partial p_\gamma} = e_\beta\sin\mathfrak{A}_\beta\frac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial p_\gamma} = -e_\gamma\sin\mathfrak{A}_\gamma\frac{\partial\mathfrak{A}_\gamma}{\partial p_\beta};$$

setzt man hier für die Derivirten ihre Werthe ein, so folgt

$$-e_\beta\sin\mathfrak{A}_\beta\cdot e_\gamma\frac{\sin\mathfrak{A}_\gamma}{(\beta\gamma)} = -e_\gamma\sin\mathfrak{A}_\gamma\cdot e_\beta\frac{\sin\mathfrak{A}_\beta}{(\gamma\beta)},$$

also ist

$$(\beta\gamma) = (\gamma\beta),$$

d. h. die reducirte Länge einer geodätischen Linie bleibt ungeändert, wenn man Anfangs- und Endpunct derselben vertauscht. Wir haben also den Satz:

Man drehe eine geodätische Linie ohne Änderung ihrer Länge unendlich wenig aus ihrer ursprünglichen Lage, einmal um den einen, das anderemal um den andern Endpunct.

Sind alsdann die Drehungswinkel am festen Endpuncte einander gleich, so sind es auch die vom beweglichen Endpuncte beschriebenen Wege.

In Folge dieses Resultates ist es bei der reducirten Länge eines geodätischen Bogens überflüssig, anzugeben, welches der feste und welches der bewegliche Endpunct desselben sein soll, und wir setzen daher von hier ab:

$$(\beta\gamma) = (\gamma\beta) = (a), \quad (\gamma\alpha) = (\alpha\gamma) = (b), \quad (\alpha\beta) = (\beta\alpha) = (c).$$

Wir werden im Folgenden für die reducirte Länge $(a)$, als Function einer der beiden Abscissen $a_\beta$, $a_\gamma$ betrachtet, Differentialgleichungen finden, und die zugehörigen Grenzbedingungen aufstellen. Bei diesen ist es wegen der Voraussetzung, dafs $a_\gamma > a_\beta$ sei, nicht mehr gleichgültig, welcher von den beiden Puncten $\beta$, $\gamma$ der feste, welches der bewegliche ist. In der That wird, wenn $a_\beta$ constant ist und $\gamma$ in unendliche Nähe von $\beta$ rückt, $(\beta\gamma) = a_\gamma - a_\beta$, d. h. an der Grenze, wo beide Puncte zusammenfallen,

$$(\beta\gamma) = 0, \quad \frac{\partial(\beta\gamma)}{\partial a_\gamma} = 1.$$

Nimmt man dagegen $a_\gamma$ constant, und läfst $\beta$ unendlich nahe an $\gamma$ rücken, so wird $(\gamma\beta) = a_\gamma - a_\beta$, also an der Grenze

$$(\gamma\beta) = 0, \quad \frac{\partial(\gamma\beta)}{\partial a_\beta} = -1.$$

Um bei der allgemeinen Untersuchung über die Function, welche wir reducirte Länge nennen, diese Ungleichförmigkeit in den Grenzbedingungen zu vermeiden, werden wir sie (art. 15) durch eine andere, die reducirte Abscisse, ersetzen, bei welcher die Grenzbedingungen immer die nämlichen sind.

Mit Berücksichtigung des obigen Resultates geben die übrigen Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen III. nichts Neues.

### 10.

Bei den Integrabilitätsbedingungen für die Azimuthe ist hervorzuheben, dafs diejenigen, welche keine zweite Derivirte der reducirten Länge $(a)$ enthalten, identisch werden, wenn man aus ihnen die Derivirten der Azimuthe wegschafft. Wir unterscheiden nun die beiden Fälle, wo eine Integrabilitätsbedingung sich durch doppelte Darstellung der zweiten Derivirte eines Azimuths nach den Coordinaten derselben oder verschiedener Ecken ergiebt.

Der erste Fall führt für jedes Azimuth auf zwei Bedingungen, von denen aber nach der eben gemachten Bemerkung die eine identisch erfüllt ist. Die andere darf nur für ein Azimuth, z. B. für $\mathfrak{A}_\gamma$, aufgesucht werden, da die entsprechende sich für $\mathfrak{A}_\beta$ offenbar durch Vertauschung von $\gamma$, $\partial a_\gamma$ mit $\beta$, $\partial a_\beta$ ergiebt.



Setzt man die beiden Ausdrücke, welche sich für $\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\gamma}{\partial p_\gamma \partial q_\gamma}$ ergeben, einander gleich, so erhält man zunächst eine ziemlich verwickelte Formel, die wir übergehen, da sie auf ein bereits von Gaufs (D. g. XIX) gegebenes Resultat führt. Durch Reduction dieser Gleichung mittelst der Formeln (b.) des vorangehenden art. 8 ergiebt sich nämlich

$$\frac{1}{(a)}\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} + \frac{1}{eg\sin\omega}\left(\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{g\sin\omega}{e}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right] - \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{g\sin\omega}{e}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\right]\right) = 0,$$

wo im zweiten Summanden der Index $\gamma$ weggelassen ist.

Mit Rücksicht auf eine Formel des art. 2 führen wir nun eine neue Gröfse $k$ ein, so dafs

$$eg\sin\omega\cdot k = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{g\sin\omega}{e}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right] - \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{g\sin\omega}{e}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\right] = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{e\sin\omega}{g}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right] - \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{e\sin\omega}{g}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]$$

wird, wodurch die vorstehende Differentialgleichung die Form

$$\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} + k_\gamma(a) = 0$$

annimmt.

Transformirt man aber das Linienelement, indem man durch eine ganz beliebige Substitution zwei neue Variabeln $p'$, $q'$ an Stelle von $p$, $q$ einführt, so dafs

$$\partial s^2 = e'^2\partial p'^2 + 2e'g'\cos\omega'\partial p'\partial q' + g'^2\partial q'^2$$

wird, so mufs man für die, von der Wahl eines speciellen Coordinatensystems $p$, $q$ unabhängige Gröfse $-\frac{1}{(a)}\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2}$ genau denselben Ausdruck $k_\gamma$ erhalten, nur dafs überall, wo $e$, $g$, $\omega$, $\partial p$, $\partial q$ steht, die entsprechenden accentuirten Gröfsen erscheinen.

Folglich ist $k$ eine absolute Invariante, und man kann ihren Werth sofort bestimmen, indem man den Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$ nach $\gamma$ verlegt, $p' = x$, $q' = y$ und bis auf Gröfsen dritter Ordnung

$$z = \frac{x^2}{2\varrho_1} + \frac{y^2}{2\varrho_2}$$

nimmt. Man findet dann $k_\gamma = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$, d. h. $k$ ist das Krümmungsmafs der Fläche $S$ im Puncte $p$, $q$.

Die obige Differentialgleichung für $(a)$ ist die nämliche, welche Gaufs mittelst seines allgemeinen Ausdrucks für das Krümmungsmafs (Disq. g. c. s. XI) abgeleitet hat (ibid. XIX).

Wenn daher $\beta$ der Anfangspunct ist, so haben wir

$$\frac{\partial^2 (a)}{\partial a_\gamma^2} + k_\gamma (a) = 0,$$

und für $a_\gamma = a_\beta$:

$$(a) = 0, \quad \frac{\partial (a)}{\partial a_\gamma} = 1.$$

Betrachtet man dagegen $\gamma$ als Anfangspunct, so folgt

$$\frac{\partial^2 (a)}{\partial a_\beta^2} + k_\beta (a) = 0,$$

und für $a_\beta = a_\gamma$:

$$(a) = 0, \quad \frac{\partial (a)}{\partial a_\beta} = -1.$$

## 11.

Bildet man für $\mathfrak{A}_\beta$ und $\mathfrak{A}_\gamma$ die zweiten Derivirten nach den Coordinaten verschiedener Ecken, so ergiebt sich mit Weglassung verschwindender Glieder:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma}\left(\sin \mathfrak{A}_\beta \dfrac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right) = \dfrac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta}\left(\dfrac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(a)}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma}\left(\sin \mathfrak{A}_\beta \dfrac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right) = \dfrac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta}\left(\dfrac{\sin (\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(a)}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma}\left(\sin (\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \dfrac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right) = \dfrac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta}\left(\dfrac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(a)}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma}\left(\sin (\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \dfrac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right) = \dfrac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta}\left(\dfrac{\sin (\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(a)}\right), \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta}\left(\sin \mathfrak{A}_\gamma \dfrac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right) = \dfrac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma}\left(\dfrac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(a)}\right), \\[2ex] -\dfrac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta}\left(\sin \mathfrak{A}_\gamma \dfrac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right) = \dfrac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma}\left(\dfrac{\sin (\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(a)}\right), \\[2ex] -\dfrac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta}\left(\sin (\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \dfrac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right) = \dfrac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma}\left(\dfrac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(a)}\right), \\[2ex] -\dfrac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta}\left(\sin (\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \dfrac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right) = \dfrac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma}\left(\dfrac{\sin (\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(a)}\right). \end{cases}$$

Es wird sich im Folgenden um die Entwicklung dieser und der im vorigen art. gefundenen Differentialgleichungen handeln. Bevor wir dazu übergehen, ziehen wir eine Folgerung aus ihnen, indem wir in der ersten Gleichung jeder Gruppe die Richtungen der wachsenden $p_\gamma$, $p_\beta$ in $\partial b_\gamma$, $\partial c_\beta$ verlegen, oder wenn man will, umgekehrt verfahren.



Dann wird $\mathfrak{B}_\gamma = 0$, $\mathfrak{C}_\beta = 0$, also (art. 5) $\mathfrak{A}_\gamma = \gamma - \pi$, $\mathfrak{A}_\beta = \pi - \beta$. Die genannten Formeln gehen daher in die folgenden über

$$\frac{\partial}{\partial b_\gamma}\left(\sin \beta \frac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial c_\beta}\left(\frac{\sin \gamma}{(a)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_\beta}\left(\sin \gamma \frac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right) - \frac{\partial}{\partial b_\gamma}\left(\frac{\sin \beta}{(a)}\right) = 0,$$

und es läfst sich umgekehrt ohne Schwierigkeit zeigen, dafs aus diesen Gleichungen die vorangehenden sämmtlich folgen, wenn über die Richtungen der Linien $b$, $c$ passend verfügt wird.

Man kann endlich diese beiden merkwürdigen Gleichungen in die Formen

$$\frac{\partial}{\partial b_\gamma}\left(\frac{\partial \beta}{\partial c_\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial c_\beta}\left(\frac{\partial \beta}{\partial b_\gamma}\right), \quad \frac{\partial}{\partial c_\beta}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial b_\gamma}\right) = \frac{\partial}{\partial b_\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial c_\beta}\right)$$

setzen und dann verificiren, dafs bei wiederholtem Differentiiren nach den Richtungen von $\partial b_\gamma$, $\partial c_\beta$ die Reihenfolge der Operationen gleichgültig ist.

## 12.

Um die Bedeutung, welche wir in der Folge den in den beiden vorangehenden artt. gefundenen Resultaten beilegen werden, deutlicher hervortreten zu lassen, werden wir diese Gleichungen in völlig entwickelter Form darstellen.

In den beiden Formelnsystemen des vorigen art. enthält jede Gruppe zwei überflüssige Gleichungen, da jede zweite Derivirte von $\log (a)$ zweimal dargestellt wird. Wir können uns daher mit zwei Combinationen von Gleichungen jeder Gruppe begnügen, und multipliciren die erste und dritte Gleichung in der ersten Gruppe mit $\cos (\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)$, $-\cos \mathfrak{A}_\beta$, in der zweiten mit $\cos (\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)$, $\cos \mathfrak{A}_\gamma$, und bilden ihre Summe; verfährt man ebenso mit der zweiten und vierten Gleichung, so folgt:

$$\sin \omega_\beta \frac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma}\left(\frac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right) = \cos (\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \frac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta}\left(\frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(a)}\right) - \cos \mathfrak{A}_\beta \frac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta}\left(\frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(a)}\right)$$

$$\sin \omega_\beta \frac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma}\left(\frac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right) = \cos (\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \frac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta}\left(\frac{\sin (\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(a)}\right) - \cos \mathfrak{A}_\beta \frac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta}\left(\frac{\sin (\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(a)}\right)$$

$$\sin \omega_\gamma \frac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta}\left(\frac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right) = -\cos (\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \frac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma}\left(\frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(a)}\right) + \cos \mathfrak{A}_\gamma \frac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma}\left(\frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(a)}\right)$$

$$\sin \omega_\gamma \frac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta}\left(\frac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right) = -\cos (\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \frac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma}\left(\frac{\sin (\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(a)}\right) + \cos \mathfrak{A}_\gamma \frac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma}\left(\frac{\sin (\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(a)}\right).$$

Die wirkliche Ausführung aller Derivirten gibt endlich, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{e_\beta}\frac{\partial \log(a)}{\partial p_\beta} - \frac{\cos\mathfrak{A}_\beta}{g_\beta}\frac{\partial \log(a)}{\partial q_\beta} = B_\beta$$

$$\frac{\cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{e_\gamma}\frac{\partial \log(a)}{\partial p_\gamma} - \frac{\cos\mathfrak{A}_\gamma}{g_\gamma}\frac{\partial \log(a)}{\partial q_\gamma} = B_\gamma$$

gesetzt wird:

$$\text{A.}\quad\begin{cases}
\dfrac{\sin\mathfrak{A}_\beta}{e_\gamma g_\beta}\dfrac{\partial^2 \log(a)}{\partial p_\gamma \partial q_\beta} - \dfrac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{e_\gamma e_\beta}\dfrac{\partial^2 \log(a)}{\partial p_\gamma \partial p_\beta} + 2\dfrac{\sin\mathfrak{A}_\gamma}{(a)}B_\beta = \dfrac{\cos\mathfrak{A}_\gamma \sin\omega_\beta}{(a)(a)}\\[2ex]
\dfrac{\sin\mathfrak{A}_\beta}{g_\gamma g_\beta}\dfrac{\partial^2 \log(a)}{\partial q_\gamma \partial q_\beta} - \dfrac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{g_\gamma e_\beta}\dfrac{\partial^2 \log(a)}{\partial q_\gamma \partial p_\beta} + 2\dfrac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(a)}B_\beta = \dfrac{\cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)\sin\omega_\beta}{(a)(a)}\\[2ex]
\dfrac{\sin\mathfrak{A}_\gamma}{g_\gamma e_\beta}\dfrac{\partial^2 \log(a)}{\partial q_\gamma \partial p_\beta} - \dfrac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{e_\gamma e_\beta}\dfrac{\partial^2 \log(a)}{\partial p_\gamma \partial p_\beta} + 2\dfrac{\sin\mathfrak{A}_\beta}{(a)}B_\gamma = \dfrac{\cos\mathfrak{A}_\beta \sin\omega_\gamma}{(a)(a)}\\[2ex]
\dfrac{\sin\mathfrak{A}_\gamma}{g_\gamma g_\beta}\dfrac{\partial^2 \log(a)}{\partial q_\gamma \partial q_\beta} - \dfrac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{e_\gamma g_\beta}\dfrac{\partial^2 \log(a)}{\partial p_\gamma \partial q_\beta} + 2\dfrac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(a)}B_\gamma = \dfrac{\cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)\sin\omega_\gamma}{(a)(a)}.
\end{cases}$$

Von diesen vier Gleichungen folgt eine aus den übrigen, wovon man sich leicht überzeugt, indem man aus den beiden ersten $B_\beta$, aus den beiden letzten $B_\gamma$ eliminiert.

Die entwickelte Form der Gleichung

$$\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} + k_\gamma(a) = 0$$

ergiebt sich aus den Schlufsformeln des art. 2, und lautet:

$$\text{B.}\quad\begin{cases}
\left(\dfrac{\sin(\mathfrak{A}-\omega)}{e\sin\omega}\right)^2\left[\dfrac{\partial^2(a)}{\partial p^2} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial(a)}{\partial p} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial(a)}{\partial q} + e^2 k(a)\right]\\[2ex]
-2\dfrac{\sin(\mathfrak{A}-\omega)\sin\mathfrak{A}}{eg\sin\omega^2}\left[\dfrac{\partial^2(a)}{\partial p\,\partial q} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial(a)}{\partial p} - \begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial(a)}{\partial q} + eg\cos\omega\cdot k(a)\right]\\[2ex]
+\left(\dfrac{\sin\mathfrak{A}}{g\sin\omega}\right)^2\left[\dfrac{\partial^2(a)}{\partial q^2} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial(a)}{\partial p} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial(a)}{\partial q} + g^2 k(a)\right] = 0,
\end{cases}$$

wo der Index $\gamma$ weggelassen wurde und durch $\beta$ ersetzt werden kann.

### 13.

Will man sich der im vorigen art. entwickelt dargestellten Formeln zur Bestimmung von $(a)$ bedienen, so ist dazu die Kenntnifs der von $\beta$ unter dem Azimuth $\mathfrak{A}_\beta$ ausgehenden geodätischen Linie erforderlich.

Wir können nun als ein Hauptziel der gegenwärtigen Untersuchungen die Aufgabe bezeichnen, die Bestimmung der reducirten Länge eines geodätischen Bogens als Function der Coordinaten seiner beiden Endpuncte an Bedingungen zu knüpfen, die nur von der Lage



dieser Puncte abhängen, und die Kenntnifs einer geodätischen Verbindungslinie dieser Puncte nicht voraussetzen.

Kann man diesen Bedingungen gemäfs $(a)$, $(b)$ und $(c)$ als Functionen der Coordinaten von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bestimmen, so liefern, wie sich im folgenden Abschnitte art. 20. 𝔇. ergeben wird, die Formeln des vorigen art. und die aus ihnen durch Vertauschung folgenden die sämmtlichen Azimuthe, und müssen daher als *die endlichen Formeln für die Auflösung geodätischer Dreiecke* aufgefafst werden, während es zur Bestimmung der Seiten noch einer Integration vollständiger Differentiale bedarf.

## Dritter Abschnitt.

### Theorie der reducirten Länge eines geodätischen Bogens.

### 14.

Wird eine krumme Oberfläche ohne Dehnung, also ohne Änderung ihrer Linienelemente, beliebig gebogen, so bleibt in jedem Puncte derselben das Krümmungsmafs ungeändert (Disqu. g. c. s. XII), weil der Ausdruck desselben nur von dem des Linienelementes abhängt. Da bei einer solchen Umbiegung auch jede geodätische Linie eine solche bleibt, so folgt nach der Definition der reducirten Länge, dafs auch diese bei der Umbiegung der Oberfläche ungeändert bleibt. Nennt man daher bei aufeinander abwickelbaren Flächen entsprechende Elemente solche, die bei der Abwickelung zur Deckung kommen, so folgt der Satz:

*Zwei aufeinander abwickelbare Flächen haben in entsprechenden Puncten das gleiche Krümmungsmafs* (Gaufs l. c.), *und entsprechende geodätische Bögen haben dieselbe reducirte Länge.*

Da der Ausdruck für das Krümmungsmafs denjenigen des Linienelementes nicht bestimmt, so läfst der erste Theil dieses Satzes sich nicht umkehren; wohl aber gilt die Umkehrung des zweiten Theorems:

*Kann man die Puncte zweier Flächen einander in der Weise als entsprechende zuordnen, dafs die reducirte Länge der geodätischen Verbindungslinie von zwei Puncten der ersten Fläche stets dieselbe ist wie für die entsprechenden Puncte der andern, so lassen sich diese Flächen aufeinander abwickeln, und es kommen hierbei stets entsprechende Puncte zur Deckung.*

Nimmt man nämlich in den vorletzten Gleichungen des art. 10 den Punct $\gamma$ so nahe beim festen Puncte $\beta$ an, dafs $a_\gamma - a_\beta$ als eine sehr kleine Gröfse erster Ordnung bezeichnet werden kann, so wird die reducirte Länge dieses Bogens vermöge der Differentialgleichung bis auf Gröfsen dritter Ordnung genau: $(a) = a_\gamma - a_\beta$. Weil aber diese Gröfse, wenn $a_\gamma - a_\beta$ unendlich klein wird, in das Linienelement zwischen den unendlich benachbarten Puncten $\beta$, $\gamma$ übergeht, so mufs man durch Entwickelung der Function $(a)^2$ — wenn die Coordinaten von $\beta$ und $\gamma$ durch $p, q$ und $p', q'$ bezeichnet werden — einen Ausdruck von der Form

$$(a)^2 = E(p'-p)^2 + 2F(p'-p)(q'-q) + G(q'-q)^2$$

erhalten, der bis auf Gröfsen vierter Ordnung genau ist, und wo die Coefficienten nur noch von den Coordinaten $p, q$ des Punctes $\beta$ abhängen. Dadurch ist aber das Linienelement gegeben, und sein Quadrat $\partial s^2 = E\partial p^2 + 2F\partial p\,\partial q + G\partial q^2$. Folglich ist durch den allgemeinen Ausdruck der reducirten Länge eines geodätischen Bogens als Function der Coordinaten seiner Endpuncte das Linienelement der entsprechenden Oberfläche völlig bestimmt, woraus der obige Satz folgt.

## 15.

An Stelle der reducirten Länge werden wir jetzt eine Function einführen, welche wir zur Unterscheidung die reducirte Abscisse nennen und in folgender Weise definiren.

Bei den reducirten Längen $(\beta\gamma)$, $(\gamma\beta)$ war vorausgesetzt, dafs man auf einer gegebenen geodätischen Linie $\mathfrak{B}$ von einem beliebigen Anfangspuncte aus Abscissen $r$ zähle, die in der Richtung von $\beta$ nach $\gamma$ hin wachsen. Dadurch war, bei unveränderlicher Lage von $\beta$, der Punct $\gamma$ auf den Theil $r > a_\beta$ von $\mathfrak{B}$ beschränkt, und unter dieser Voraussetzung war

$$\frac{\partial^2(\beta\gamma)}{\partial r^2} + k(\beta\gamma) = 0,$$

und für

$$r = a_\beta \quad (\beta\gamma) = 0, \quad \frac{\partial(\beta\gamma)}{\partial r} = 1.$$

Wir heben diese Beschränkung der Abscisse $r$ auf, und lassen die vorstehende Differentialgleichung, ohne Änderung in den Grenzbedingungen, für alle mit den Stetigkeitsbedingungen (art. 4) verträglichen reellen Werthe von $r$ bestehen.



Die so entstehende Function von $r$ nennen wir die reducirte Abscisse von $\gamma$ in Bezug auf $\beta$ als Anfangspunct, und bezeichnen sie, wenn $r_\beta$, $r_\gamma$ die Abscissen dieser Puncte sind, durch

$$[r_\beta r_\gamma].$$

Ist also $r_\gamma > r_\beta$, so ist dies auch die reducirte Länge $(\beta\gamma)$ des Bogens $\beta\gamma$; ist dagegen $r_\gamma < r_\beta$, also die reducirte Länge $= [r_\gamma r_\beta]$, so stimmen alle Bedingungen für $[r_\beta r_\gamma]$ mit denjenigen überein, welche man aus den Schlufsgleichungen des art. 10 unter derselben Voraussetzung über die Lage der Puncte $\gamma$, $\beta$ für $-(a) = -[r_\gamma r_\beta]$ erhält. Folglich ist in diesem Falle $[r_\beta r_\gamma] = -[r_\gamma r_\beta]$, wie sich im folgenden art. auf anderm Wege ergeben wird.

Will man sich daher in den geodätischen Formeln statt der reducirten Länge $(a)$ der entsprechenden reducirten Abscisse bedienen, was bei ausgeführten Rechnungen nicht umgangen werden kann, so ist es nicht mehr gleichgültig, welchen der beiden Ausdrücke $[r_\beta r_\gamma]$, $[r_\gamma r_\beta]$ man für $(a)$ setzt, sondern man mufs denjenigen nehmen, für welchen die an zweiter Stelle stehende Abscisse die gröfsere ist.

## 16.

Ist $\alpha$ die Abscisse eines gegebenen Punctes der geodätischen Linie $\mathfrak{B}$, so wird die reducirte Abscisse

$$[\alpha r]$$

des Punctes $r$ mit Bezug auf $\alpha$ als Anfangspunct durch folgende Bedingungen definirt:

1. $$\frac{\partial^2[\alpha r]}{\partial r^2} + k[\alpha r] = 0$$

im Allgemeinen, und für $r = \alpha$

$$[\alpha r] = 0, \quad \frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} = 1.$$

Dazu kommt das im ersten Abschn. art. 4 gefundene Resultat, dafs $[\alpha r]$ und seine erste Derivirte allenthalben stetig sein müssen, was je nach dem Verlaufe der Linie $\mathfrak{B}$ als Beschränkung der Veränderlichkeit von $m$ oder aber auch von $r$ aufzufassen ist.

Multiplicirt man die Gleichung 1. mit $[\beta r]\partial r$, so folgt durch Integration, dafs der Ausdruck

$$[\alpha r]\frac{\partial[\beta r]}{\partial r} - [\beta r]\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$$

constant ist. Nimmt man daher zur Bestimmung seines Werthes einmal $r = \alpha$, dann $r = \beta$, so findet er sich $= -[\beta\alpha]$, und auch $= [\alpha\beta]$; also haben wir

$$2. \qquad [\alpha\beta] + [\beta\alpha] = 0,$$

wie schon im vorigen art. gefunden wurde, und

$$3. \qquad [\alpha r] \frac{\partial[\beta r]}{\partial r} - [\beta r] \frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} = [\alpha\beta].$$

Nimmt man hier die Derivirte nach $\beta$, und läfst dann $\beta$ mit $\alpha$ zusammenfallen, so folgt

$$4. \qquad [\alpha r] \frac{\partial^2[\alpha r]}{\partial\alpha\,\partial r} - \frac{\partial[\alpha r]}{\partial\alpha} \frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} = 1.$$

Bildet man endlich mittelst 3. das Product $[\alpha\beta][\gamma r]$, so folgt durch cyklische Vertauschung der Puncte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$

$$5. \qquad [\alpha r][\beta\gamma] + [\beta r][\gamma\alpha] + [\gamma r][\alpha\beta] = 0.$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als der auf vier Puncte einer geodätischen Linie ausgedehnte bekannte Satz über vier Puncte einer Geraden. Im Übrigen sind die Gleichungen 3. und 5. Additionstheoreme, von denen die der Kugeloberfläche entsprechenden Sätze über die Function $[\alpha r] = \sin(r - \alpha)$ die speciellsten Fälle sind.

## 17.

Wir gehen nun zur Untersuchung derjenigen Abscissen $r$ über, für welche

$$[\alpha r] = 0$$

wird. Um auch für den Fall, wo die geodätische Linie $\mathfrak{B}$ eine in sich zurückkehrende ist, die bei dieser Untersuchung stattfindenden Verhältnisse gehörig zu berücksichtigen, ordnen wir die zu diesen Abscissen gehörigen Puncte nicht nach ihrer geometrischen Aufeinanderfolge an $\mathfrak{B}$ entlang, sondern nach der Aufeinanderfolge ihrer Abscissen, so dafs immer der Fall möglich bleibt, wo ein späterer Punct des Systems räumlich zwischen zwei ihm vorangehenden liegt.

Um endlich bei der geometrischen Deutung von Untersuchungen über die reducirte Abscisse unrichtige Folgerungen zu vermeiden, mufs ein merkwürdiger Umstand berücksichtigt werden, der bis jetzt noch nicht beachtet worden zu sein scheint.

Ich will voraussetzen, man habe für zwei aufeinander abwickelbare Flächen $S$ und $S'$ die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Puncte durch dieselben Variabeln $p$, $q$ in der Weise dargestellt, dafs zwei Puncte, welche gleichen Werthen der Variabeln $p$, $q$ entsprechen, bei



der Abwickelung aufeinander fallen. Hat man alsdann für eine geodätische Linie $\alpha\beta$ der Fläche $S$ die reducirte Abscisse $[\alpha\beta]$ in Function der Coordinaten ihrer Endpuncte dargestellt, so ist dieser Ausdruck nach art. 14 auch die reducirte Abscisse für die geodätische Linie $\alpha'\beta'$ der Fläche $S'$, auf welche sich jene abwickelt, aber nur unter der Voraussetzung, dafs die Fläche $S'$ auch wirklich die vollständige Abwickelung der Linie $\alpha\beta$ enthält.

In der That folgt aus der Lehre von der Abwickelung krummer Oberflächen keineswegs, dafs, wenn ein Theil einer gegebenen Fläche sich einer bestimmten Bedingung gemäfs ohne Dehnung, aber mit oder ohne unstetige Richtungsänderungen der Tangentialebene umbiegen läfst, dies auch von der vollständigen Fläche gilt.

Man denke sich z. B. von einer Rotationsfläche $S$ eine von zwei Parallelkreisen und zwei Meridianbögen begrenzte Zone, welche die Oberfläche wenigstens theilweise mehrfach bedeckt, und $n$mal um dieselbe herumreicht. Soll diese Zone durch Auseinanderwickelung in eine neue, geschlossene Rotationsfläche $S'$ verwandelt werden, welche nur einmal um ihre Axe herumreicht, so ist dies stets, aber auch nur dann möglich, wenn auf der ursprünglichen Zone der Neigungswinkel ihrer Normale gegen die Ebene des Aequators nirgendwo gröfser ist als derjenige Winkel im ersten Quadranten, dessen Sinus $= \frac{1}{n}$ ist. Durch geeignete Wahl von $n$ kann man bei jeder Rotationsfläche $S$ (mit Ausnahme des Kegels) bewirken, dafs es Zonen giebt, welche dieser Bedingung genügen, und andere, die ihr nicht genügen. Diese letzteren gehen bei der Aufwickelung verloren, und die neue Fläche $S'$ wird von allen auf der ursprünglichen vorhandenen geodätischen Linien nur diejenigen Stücke enthalten, welche auf einer Zone der ersten Art lagen.

Wenn man daher für diese neue Fläche $S'$ finden würde, dafs z. B. die reducirte Abscisse $[\alpha'\beta']$ für einen reellen Werth $\beta'$ verschwindet, so kann immerhin der Fall stattfinden, dafs demungeachtet die Oberfläche $S'$ keinen diesem Werthe entsprechenden reellen Punct enthält, und man kann alsdann nur schliefsen, dafs es noch andere durch die Function $[\alpha'\beta']$ nach art. 14 bestimmte Oberflächen $S$ giebt, auf denen $S'$ abwickelbar ist, ohne sie ganz zu bedecken, und welche auf ihrem unbedeckten Theile zu jenem reellen Werthe $\beta'$ auch den entsprechenden realen Punct darbieten.

## 18.

Dieses so verstanden, ist es z. B. nach dem Jacobi'schen Kriterium für die kürzesten Linien klar, dafs die Linie $\mathfrak{B}$ nur solange eine kürzeste Verbindungslinie von $r$ mit $\alpha$ ist, als zwischen $r$ und $\alpha$ kein mit $\alpha$ sich ändernder Werth $\beta$ enthalten ist, für den $[\alpha\beta] = 0$ ist.

Sei nun das Krümmungsmaſs $k$ auf einer den Punct $\alpha$ enthaltenden Strecke von $\mathfrak{B}$ negativ. Da in $\alpha$ selbst $[\alpha r] = 0$, $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} = 1$, also positiv ist, so wird zu Anfange $[\alpha r]$ mit $r$ zugleich wachsen, folglich $[\alpha r]$ selbst, und mit ihm $\frac{\partial^2[\alpha r]}{\partial r^2} = -k[\alpha r]$ positiv werden. Solange dies der Fall ist, wächst also auch die erste Derivirte, und zwar über 1 hinaus, mithin $[\alpha r]$ umsomehr, und mit beschleunigter Geschwindigkeit. Da $[\alpha r]$ in der entgegengesetzten Richtung unaufhörlich abnimmt, solange $k$ negativ ist, so folgt der Satz:

Zwei unendlich benachbarte geodätische Linien können sich von ihrem Eintritt in ein Flächenstück von negativem Krümmungsmaſse bis zum nächsten Austritte aus demselben niemals in mehr als einem Puncte schneiden.

Mit Rücksicht auf das oben erwähnte Kriterium für kürzeste Linien folgt hieraus auch der von Jacobi ohne Beweis ausgesprochene Satz (Vorlesungen über Dynamik pag. 46):

Auf einem Flächenstücke von negativem Krümmungsmaſse ist jede geodätische Linie zugleich eine kürzeste Verbindungslinie ihrer Endpuncte.

Den Beweis dieser Sätze kann man auch aus der Gleichung

$$[\alpha r]\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} = \int_{\alpha}^{r}\left[\left(\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}\right)^2 - k[\alpha r]^2\right]\partial r$$

ziehen. Weniger einfach ist die Untersuchung für den Fall, wo das Krümmungsmaß positiv ist.

Ist $k$ positiv, so haben $[\alpha r]$ und seine zweite Derivirte entgegengesetzte Vorzeichen. Läſst man daher $r$ ununterbrochen wachsen, so wird die erste Derivirte wachsen oder abnehmen, jenachdem $[\alpha r]$ negativ oder positiv ist, während umgekehrt $[\alpha r]$ selbst wächst oder abnimmt, jenachdem die erste Derivirte positiv oder negativ ist. Wir haben demnach vier Fälle zu unterscheiden, zu deren geometrischen Darstellung wir $\mathfrak{B}$ um den Punkt $\alpha$ unendlich wenig drehen, so daſs, wenn $\partial\varphi$ der Drehungswinkel bei $\alpha$ ist, der Punct $r$ den zu $\mathfrak{B}$ senkrechten Weg $[\alpha r]\partial\varphi$ beschreibt, welcher nach derselben oder der entgegengesetzten Seite wie $\partial\varphi$ aufzutragen ist, jenachdem $[\alpha r]$ positiv oder negativ ist, und ein wirkliches Schneiden beider Linien eintritt, wenn $[\alpha r]$ sein Zeichen wechselt.



Liegt $r$ nahe genug bei $\alpha$, so ist $[\alpha r]$ positiv für $r > \alpha$, negativ für $r < \alpha$, $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ in beiden Fällen positiv. Diese Fälle finden also unter allen Umständen wenigstens einmal statt.

1) Ist nun $[\alpha r]$ negativ, $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ positiv, so nehmen beide mit $r$ zu, und die Zunahme von $[\alpha r]$ ist eine beschleunigte. Findet dies statt auf der Strecke $r_1 < r < r_2$, so wird

$$[\alpha r_2] > \frac{\partial[\alpha r_1]}{\partial r_1}(r_2 - r_1) + [\alpha r_1],$$

und daraus folgt, daſs $r_2$ nicht jede Grenze überschreiten kann. Denn sonst würde, wie weit auch die negative Gröſse $[\alpha r_1]$ unter Null liegt, die rechte Seite der Ungleichheit durch Vergröſserung von $r_2$ positiv gemacht werden können, während sie $< [\alpha r_2]$, also negativ bleiben muſs. Wenn man daher im vorliegenden Falle $r$, also auch die positive Gröſse $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ wachsen läſst, so muſs einmal der Fall eintreten, wo die ursprünglich negative Gröſse $[\alpha r]$ gleich Null und hierauf positiv wird.

Es versteht sich von selbst, daſs diese Schlüsse ihre Gültigkeit verlieren, wenn bei wachsendem $r$ das Krümmungsmaſs nicht immer positiv bleibt.

2) Ist nun auch $[\alpha r]$ positiv geworden, so nimmt $[\alpha r]$ noch immer zu, $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ dagegen nimmt ab, und die Zunahme von $[\alpha r]$ ist demnach eine verzögerte. Hier sind zwei Fälle denkbar; entweder convergirt bei unbegrenzter Zunahme von $r$ $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ gegen eine positive feste Grenze, die auch $= 0$ sein kann, und dann verschwindet zuletzt die zweite Derivirte, also auch $k[\alpha r]$, d. i. $k$, weil $[\alpha r]$ nicht abgenommen hat, also von Null verschieden ist. Dieser Fall tritt z. B. bei den Meridianen eines Rotationsparaboloids ein. — Oder aber es geht $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ durch Null, $[\alpha r]$ überschreitet ein Maximum, und es tritt der folgende Fall ein.

3) Ist $[\alpha r]$ positiv, $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ negativ, so nehmen beide ab, während $r$ wächst, ersteres mit beschleunigter Geschwindigkeit, und man beweist wie im ersten Falle, daſs in Folge dessen $[\alpha r]$ durch Null gehen muſs.

4) Ist auf diese Weise auch $[\alpha r]$ negativ geworden, so nimmt seine Derivirte wieder zu, $[\alpha r]$ selbst fährt fort abzunehmen, aber mit verzögerter Geschwindigkeit. Jenachdem nun, wie im zweiten Falle, die Derivirte gegen eine feste Grenze convergirt, die nicht positiv ist,

oder durch Null geht, wird $[\alpha r]$ im Abnehmen bleiben, oder der erste Fall eintreten, der seinerseits wieder den zweiten nach sich zieht.

Es folgt also, dafs bei positivem Krümmungsmafse eine der ursprünglichen unendlich benachbarte geodätische Linie, welche jene im Puncte $\alpha$ schneidet, im zweiten und vierten Falle an dieser ohne Ende entlang laufen kann, ohne sie von Neuem zu schneiden, dafs dagegen auf den ersten und dritten Fall nothwendig ein Durchschnitt folgt, ebenso wie dem zweiten und vierten nothwendig ein solcher vorangeht.

Da sich ferner ergeben hat, dafs $[\alpha r]$ und seine erste Derivirte sowohl bei positivem wie bei negativem Krümmungsmafse nie gleichzeitig verschwinden, so folgt noch, dafs mit dem Verschwinden von $[\alpha r]$ stets ein wirkliches Schneiden, niemals ein Berühren der geodätischen Linien verbunden ist. Wenn daher mehr als ein Schnittpunct stattfindet, so gehören zwei, bei wachsendem $r$ aufeinander folgende Schnittpuncte niemals zur nämlichen Art, und es wechselt $[\alpha r]$ beim Überschreiten eines Schnittpunctes jedesmal sein Zeichen.

### 19.

Es lohnt der Mühe, unter der Voraussetzung, dafs die Gleichung

1. $$[\alpha r] = 0$$

mehr als eine Wurzel hat, die Abhängigkeit derselben von der stets vorhandenen Wurzel $r = \alpha$ einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen.

Ist $\beta$ eine von $\alpha$ verschiedene Wurzel dieser Gleichung, so folgt aus art. 16 Formel 5. für jedes $r$ und $\gamma$

$$\frac{[\alpha r]}{[\beta r]} = \frac{[\alpha \gamma]}{[\beta \gamma]},$$

d. h. es ist alsdann

$$\frac{[\alpha r]}{[\beta r]}$$

von $r$ ganz unabhängig. Dies gilt auch umgekehrt; denn wenn dieser Bruch nach $r$ constant ist, so findet auch die vorangehende Gleichung statt, und aus der erwähnten Formel folgt bei beliebigen $r$ und $\gamma$ $[\gamma r][\alpha\beta] = 0$, d. h. $[\alpha\beta] = 0$, weil im ersten Factor $r$ beliebig ist.

Aus der identischen Gleichung 3. art. 16 folgt aber unter der nämlichen Voraussetzung, dafs vorstehender Bruch gleich ist

$$\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} : \frac{\partial[\beta r]}{\partial r},$$

bei ebenfalls willkürlichem $r$. Nimmt man daher $r = \beta$ oder $r = \alpha$, so folgt



2. $$\frac{[\alpha r]}{[\beta r]} = \frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\beta}, \quad \frac{[\beta r]}{[\alpha r]} = \frac{\partial[\beta\alpha]}{\partial\alpha} = -\frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\alpha},$$

wenn $[\alpha\beta]$ selbst $= 0$ ist.

Betrachtet man nun $\beta$ als Function von $\alpha$, so folgt aus $\partial[\alpha\beta] = 0$, wenn man die Derivirten wegschafft:

$$\frac{\partial\alpha}{[\alpha r]^2} = \frac{\partial\beta}{[\beta r]^2},$$

folglich ist

3. $$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = \frac{[\beta r]^2}{[\alpha r]^2}$$

stets positiv und niemals Null oder unendlich. Denn könnte dies z. B. für ein bestimmtes $\alpha$ verschwinden, so müfste die rechte Seite für dieses $\alpha$ und jedes $r$ gleich Null sein, was ein Widerspruch ist.

Wenn also die Gleichung 1. noch eine zweite reelle Wurzel $\beta$ hat, so wird diese mit $\alpha$ zugleich stets und ohne Stillstände wachsen, solange sie stetig ist.

Sei

$$\frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\beta} = u, \quad \frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\alpha} = v,$$

also wegen 2. und 3.

$$uv = -1, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = \frac{1}{u^2}.$$

Dann folgt

$$\partial u = \frac{\partial^2[\alpha\beta]}{\partial\alpha\,\partial\beta}\partial\alpha + \frac{\partial^2[\alpha\beta]}{\partial\beta^2}\partial\beta,$$

oder da der Factor von $\partial\beta$, welcher $= -k_\beta[\alpha\beta]$ ist, verschwindet,

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{\partial^2[\alpha\beta]}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^3[\alpha\beta]}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \frac{\partial^3[\alpha\beta]}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$$
$$= -k_\alpha\frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\beta} - k_\beta\frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha},$$

endlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = -k_\alpha\cdot u + \frac{k_\beta}{u^3}.$$

Setzt man hier für $u$ seinen Werth ein, so folgt schliefslich

4. $$3\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial\alpha^2}\right)^2 - 2\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\frac{\partial^3\beta}{\partial\alpha^3} = 4k_\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)^4 - 4k_\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)^2,$$

welcher Differentialgleichung dritter Ordnung alle Wurzeln $\beta$ der Gleichung $[\alpha\beta] = 0$ Genüge leisten.

Man bestätigt leicht, dafs die nämliche Differentialgleichung sich auch ergiebt, wenn man $\beta$ als Function von $\alpha$ so bestimmt, dafs zu zwei Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \alpha^2} + k_\alpha m = 0,$$

die nicht in constantem Verhältnisse zu einander stehen, sich stets zwei Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \beta^2} + k_\beta M = 0$$

angeben lassen, welche das nämliche Verhältnifs liefern. Dies Verfahren ist genau dasselbe, durch welches Herr **Kummer** (Crelle's Journal XV. p. 39 und 127) die **Jacobi**'sche Differentialgleichung abgeleitet hat, welcher sämmtliche Modulargleichungen der elliptischen Functionen Genüge leisten, und welche einen besondern Fall der vorstehenden bildet.

Die allgemeine Lösung obiger Differentialgleichung stellt sich demnach in folgender Form dar:

$$\frac{[\alpha_1 \alpha]}{[\alpha_2 \alpha]} = \frac{p[\lambda\beta] + q[\mu\beta]}{r[\lambda\beta] + s[\mu\beta]},$$

vorausgesetzt, dafs weder $[\alpha_1 \alpha_2]$, noch $[\lambda\mu] = 0$ ist, weil sonst nach dem zu Eingange dieses art. gefundenen Satze eine von beiden Seiten der Gleichung constant wäre. Aus demselben Grunde darf $ps - qr$ nicht $= 0$ sein.

Was die Constanten $p, q, r, s$ betrifft, so müssen dieselben offenbar so gewählt werden, dafs beide Zähler und ebenso beide Nenner gleichzeitig verschwinden können. Sind nämlich $\beta_1$, $\beta_2$ die Werthe, welche $\beta$ für $\alpha = \alpha_1$ und $\alpha = \alpha_2$ erlangt, so mufs zur Rechten der Zähler für $\beta = \beta_1$, der Nenner für $\beta = \beta_2$ verschwinden. Aus der Differentialgleichung für $M$ folgt also, dafs jener zu $[\beta_1\beta]$, dieser zu $[\beta_2\beta]$ proportional ist, und unsere allgemeine Lösung nimmt hiernach die vereinfachte Form

$$\frac{[\alpha_1 \alpha]}{[\alpha_2 \alpha]} = \lambda \cdot \frac{[\beta_1 \beta]}{[\beta_2 \beta]}$$

an, wo $\lambda$ eine Constante ist.

Sind endlich auch $\alpha_3, \beta_3$ gleichzeitige Werthe von $\alpha, \beta$, so folgt durch Elimination von $\lambda$

5. $$\frac{[\alpha_1 \alpha_3]}{[\alpha_2 \alpha_3]} : \frac{[\alpha_1 \alpha]}{[\alpha_2 \alpha]} = \frac{[\beta_1 \beta_3]}{[\beta_2 \beta_3]} : \frac{[\beta_1 \beta]}{[\beta_2 \beta]}$$

als allgemeine Lösung der Differentialgleichung 4., in welcher die nöthige Anzahl willkürlicher Constanten zur Evidenz gebracht ist, indem



über die Werthe $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ von $\beta$, welche drei gegebenen Werthen $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ von $\alpha$ entsprechen sollen, nach Belieben verfügt werden kann. Mit Benutzung einer in der Planimetrie üblichen Ausdrucksweise kann man also sagen:

Die Differentialgleichung 4. ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dafs der Punct $\beta$ mit drei festen Puncten $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ stets das nämliche Doppelverhältnifs gebe, wie der Punct $\alpha$ mit drei ebenfalls festen Puncten $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$.

Diese sechs festen Puncte können nach Belieben angenommen werden, bis auf die Bedingung, dafs von den sechs reducirten Abscissen

$$[\alpha_1\alpha_2],\ [\alpha_1\alpha_3],\ [\alpha_2\alpha_3],\ [\beta_1\beta_2],\ [\beta_1\beta_3],\ [\beta_2\beta_3]$$

keine $= 0$ sei.

Wählt man unter dieser Voraussetzung, falls dies möglich ist, $\beta_1$, $\beta_2$ und $\beta_3$ so, dafs

$$[\alpha_1\beta_1] = 0, \quad [\alpha_2\beta_2] = 0, \quad [\alpha_3\beta_3] = 0$$

wird, so geht die Lösung der Gleichung 4. über in die Gleichung $[\alpha\beta] = 0$, von der wir ausgegangen sind. In der That tritt alsdann $\frac{[\beta_1\beta]}{[\beta_2\beta]}$ in constantes Verhältnifs zu $\frac{[\alpha_1\beta]}{[\alpha_2\beta]}$, und es folgt zunächst

$$\frac{[\alpha_1\alpha]}{[\alpha_1\beta]} : \frac{[\alpha_2\alpha]}{[\alpha_2\beta]} = \lambda.$$

Nimmt man hier $\alpha = \alpha_3$, $\beta = \beta_3$, so wird wegen $[\alpha_3\beta_3] = 0$ zur Linken der Divisor gleich dem Dividenden, also ist $\lambda = 1$ und es folgt

$$[\alpha_1\alpha][\alpha_2\beta] + [\alpha_2\alpha][\alpha_1\beta] = 0,$$

endlich wegen 5. art. 16

$$[\alpha\beta][\alpha_1\alpha_2] = 0, \text{ d. i. } [\alpha\beta] = 0,$$

w. z. b. w.

## 20.

Sei $m$ die reducirte Länge eines geodätischen Bogens, welcher die Puncte $p_0, q_0$ und $p, q$ verbindet. Will man sich zur Bestimmung von $m$ als Function von $p, q$ der Gleichung B. des art. 12 bedienen, so mufs man noch, aufser den bereits festgestellten Stetigkeitsbedingungen, die am Schlusse des art. 14 gefundene Anfangsbedingung hinzufügen, zufolge welcher $m^2$, wenn $p, q$ in unendliche Nähe von $p_0, q_0$ rückt, bis auf Gröfsen vierter Ordnung das Quadrat des beide Puncte verbindenden Linienelementes wird.

Dies setzt aber voraus, dafs man in der Differentialgleichung B. die vom Azimuth $\mathfrak{A}$ abhängigen Coefficienten, welche nach art. 2 nichts anderes als $\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2$, $-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial q}{\partial s}$, $\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)^2$ sind, aus den dort aufgestellten Differentialgleichungen bestimmt, und dann das Verhältnifs zweier von ihnen zum dritten durch $p, q, p_0, q_0$ und das Azimuth bei $p_0, q_0$ ausgedrückt habe.

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, werden wir die Gleichung B. noch einmal differentiiren, und mittelst der hieraus folgenden $\frac{\partial p}{\partial s}$ und $\frac{\partial q}{\partial s}$ eliminiren, woraus dann für $m$ eine partielle Differentialgleichung folgt, in welcher nur $p, q$ vorkommen, während die Coordinaten $p_0, q_0$ nur noch in Grenzbedingungen eingehen, und das Azimuth bei $p_0, q_0$ aus allen Bedingungen eliminirt ist.

Für die folgenden Rechnungen, die durchgängig nur angedeutet werden müssen, werden wir statt der bisherigen Bezeichnungen einfachere wählen, deren Bedeutung sich aber durch die Vergleichung mit den entsprechenden Formeln von selbst ergiebt.

$\mathfrak{A}$. Es sind $p$ und $q$ als Functionen von $s$ so zu bestimmen, dafs zwei Differentialgleichungen von der Form (vergl. art. 2)

$$1. \qquad \begin{aligned} p'' &= \lambda_1 p'^2 + 2\mu_1 p'q' + \nu_1 q'^2 \\ q'' &= \lambda_2 p'^2 + 2\mu_2 p'q' + \nu_2 q'^2 \end{aligned}$$

erfüllt werden, und zugleich

$$2. \qquad Ep'^2 + 2Fp'q' + Gq'^2 = 1$$

wird, wenn das Quadrat des Linienelementes

$$\partial s^2 = E\partial p^2 + 2F\partial p\partial q + G\partial q^2$$

ist. Endlich müssen $p, q$ für $s = 0$ in $p_0, q_0$ übergehen.

Die Ausdrücke, welche in 1. rechts vom Gleichheitszeichen vorkommen, werden wir durch $(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, $(\lambda_2\mu_2\nu_2)$ bezeichnen.

$\mathfrak{B}$. Ist die vorige Aufgabe gelöst, und wird

$$1. \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 m}{\partial p^2} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial m}{\partial p} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial m}{\partial q} + Ekm &= \mathfrak{E} \\ \frac{\partial^2 m}{\partial p\,\partial q} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial m}{\partial p} - \begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial m}{\partial q} + Fkm &= \mathfrak{F} \\ \frac{\partial^2 m}{\partial q^2} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial m}{\partial p} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial m}{\partial q} + Gkm &= \mathfrak{G} \end{aligned}$$



gesetzt, so haben wir aus der erwähnten Gleichung B. zur Bestimmung von $m$:

$$2. \qquad \mathfrak{E}p'^2 + 2\mathfrak{F}p'q' + \mathfrak{G}q'^2 = 0,$$

wozu aufser den Stetigkeitsbedingungen noch die Anfangsbedingung gehört, dafs, wenn $p, q$ von $p_0, q_0$ nur noch um unendlich kleine Gröfsen erster Ordnung verschieden sind, bis auf Gröfsen vierter Ordnung genau

$$3. \qquad m^2 = E_0(p-p_0)^2 + 2F_0(p-p_0)(q-q_0) + G_0(q-q_0)^2$$

wird.

$\mathfrak{C}$. Wir setzen nun voraus, dafs diesen sämmtlichen Bedingungen genügt ist. Dann bestimmen $p, q$ als Functionen von $s$ eine von $p_0, q_0$ ausgehende geodätische Linie, $s$ wird die Länge des zwischen beiden Puncten enthaltenen Stückes dieser Linie und $m$, wie verlangt, die reducirte Länge von $s$.

Aus $\mathfrak{B}$. 2. folgt durch Differentiiren

$$1. \quad 2(\mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q')p'' + 2(\mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q')q'' + \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial p}p'^3 + \left(\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial q} + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial p}\right)p'^2q' + \cdots = 0,$$

und wenn man hier für $p'', q''$ aus $\mathfrak{A}$. 1. ihre Werthe einsetzt:

$$2. \quad 2(\mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q')(\lambda_1\mu_1\nu_1) + 2(\mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q')(\lambda_2\mu_2\nu_2) + \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial p}p'^3 + \cdots = 0.$$

Diese Gleichung ist, wie $\mathfrak{B}$. 2. in $p', q'$ homogen, aber vom dritten Grade. Wenn dieselbe nicht bei beliebigen Werthen der Größen $\lambda, \mu, \nu$ identische Folge von $\mathfrak{B}$. 2. ist, so kann man aus beiden Gleichungen $p'$ und $q'$ eliminiren; das Resultat dieser Elimination

$$3. \qquad [m] = 0,$$

ist die oben erwähnte partielle Differentialgleichung. Zu ihr gehört aufser den Stetigkeitsbedingungen noch $\mathfrak{B}$. 3. als Anfangsbedingung.

Wenn dagegen die Gleichung $\mathfrak{C}$. 2. bei beliebigen Werthen der Gröfsen $\lambda, \mu, \nu$ mit $\mathfrak{B}$. 2. verträglich ist, so genügen $p', q'$ mit $\mathfrak{B}$. 2. zugleich den linearen Gleichungen $\mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q' = 0$, $\mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q' = 0$. In diesem Falle ist also $\mathfrak{E}p'^2 + 2\mathfrak{F}p'q' + \mathfrak{G}q'^2$ ein vollständiges Quadrat, und $m$ genügt der partiellen Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G} = 0.$$

Da die Gleichung $[m] = 0$ jetzt für alle Werthe der sechs Gröfsen $\lambda, \mu, \nu$ besteht, so ist sie nothwendige Folge der vorstehenden.

Während also die reducirte Länge $m$ in allen Fällen aufser den Anfangs- und Stetigkeitsbedingungen der Gleichung $\mathfrak{C}$. 3. genügt, giebt es noch Ausnahmefälle, wo sie der einfachern Differentialgleichung (3.) Genüge leistet, und jene eine Folge von dieser wird.

$\mathfrak{D}$. Wir untersuchen nun die umgekehrte Frage, ob auch jede der Gleichung $\mathfrak{C}$. 3. und den dazu gehörigen Bedingungen genügende Function eine reducirte Länge ist. Damit dies der Fall sei, ist erforderlich und hinreichend, dafs mit Zugrundelegung der so bestimmten Function $m$ sich auch die in $\mathfrak{A}$. und $\mathfrak{B}$. gestellten Bedingungen befriedigen lassen.

Die Gleichung $\mathfrak{C}$. 3. ist die Bedingung dafür, dafs den Gleichungen $\mathfrak{B}$. 2. und $\mathfrak{C}$. 2. durch den nämlichen Werth von $\frac{q'}{p'} = \frac{\partial q}{\partial p}$ genügt werden könne. Wir setzen also voraus, es sei $\frac{q'}{p'}$ eine Lösung der Gleichung $\mathfrak{B}$. 2., durch welche auch $\mathfrak{C}$. 2. befriedigt ist. Setzt man dies in $\mathfrak{A}$. 2. ein, so sind auch $p', q'$ bestimmt bis aufs Zeichen, von welchem die Richtung der wachsenden $s$ abhängt, und welches auf das Verhältnis $\frac{\partial q}{\partial p}$ keinen Einflufs hat.

Durch Differentiiren folgt jetzt aus $\mathfrak{B}$. 2. die Gleichung $\mathfrak{C}$. 1., und wenn man von dieser die bereits befriedigte Gleichung $\mathfrak{C}$. 2. subtrahirt und den Factor 2 beseitigt

$$1.\quad [\mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q'][p'' - (\lambda_1\mu_1\nu_1)] + [\mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q'][q'' - (\lambda_2\mu_2\nu_2)] = 0\,.$$

Differentiirt man die bei der Bestimmung von $p', q'$ benutzte Gleichung $\mathfrak{A}$. 2., so erhält man eine Gleichung von derselben Form wie $\mathfrak{C}$. 1., und von welcher zu bemerken ist, dafs sie nach art. 2 vermöge der Bedeutung der Coefficienten $\lambda_1 = -\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}$ u. s. w. identisch wird, wenn man $p'', q''$ durch $(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, $(\lambda_2\mu_2\nu_2)$ ersetzt. Es ist also auch, sobald $p', q'$ der Gleichung $\mathfrak{A}$. 2. genügen,

$$2.\quad [Ep' + Fq'][p'' - (\lambda_1\mu_1\nu_1)] + [Fp' + Gq'][q'' - (\lambda_2\mu_2\nu_2)] = 0.$$

Wenn die Determinante

$$3.\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} \mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q' & \mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q' \\ Ep' + Fq' & Fp' + Gq' \end{vmatrix}$$

dieser beiden Gleichungen nicht $= 0$ ist, so sind also auch die Differentialgleichungen $\mathfrak{A}$. 1. erfüllt, und zwar ist eine einmalige Integration derselben geleistet, indem $p', q'$ als Functionen von $p, q, p_0, q_0$ erhalten worden sind. Bestimmt man also hieraus $p, q$ so, dafs sie für $s = 0$ in $p_0, q_0$ übergehen, so sind alle Bedingungen $\mathfrak{A}$. und $\mathfrak{B}$. befriedigt, und es ist dann namentlich wegen $\mathfrak{A}$. 2. die unabhängige Variable $s$ die Länge einer geodätischen Linie zwischen $p_0, q_0$ und $p, q$, und $m$ ihre reducirte Länge.



Wenn dagegen unter der nämlichen Voraussetzung, dafs den Gleichungen $\mathfrak{A}$. 2., $\mathfrak{B}$. 2. und $\mathfrak{C}$. 2. Genüge geleistet ist, $\varDelta$ identisch verschwindet, so sind die Gleichungen $\mathfrak{A}$. 1. nicht mehr eine nothwendige Folge der beiden vorstehenden. Man kann in diesem Falle eine Gröfse $\lambda$ so bestimmen, dafs $\mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q' = \lambda(Ep' + Fq')$, und zugleich $\mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q' = \lambda(Fp' + Gq')$ wird. Addirt man diese Gleichungen, nachdem man die erste mit $p'$, die andere mit $q'$ multiplicirt hat, so folgt wegen $\mathfrak{B}$. 2. und $\mathfrak{A}$. 2. $0 = \lambda$, so dafs also, wenn $\varDelta$ identisch verschwindet, an Stelle von $\mathfrak{B}$. 2. die einfachern Gleichungen $\mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q' = 0$, $\mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q' = 0$ treten.

Folglich genügt $m$ in diesem Falle auch noch der Gleichung $\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G} = 0$. Es wird sich weiter unten ergeben, dafs nicht jede Function, welche diese Gleichung befriedigt, eine reducirte Länge ist, abgesehen davon, dafs sich nur in Ausnahmefällen unter den Lösungen dieser Gleichung überhaupt reducirte Längen befinden.

Aus den vorangehenden Untersuchungen ergibt sich also das folgende Resultat: Jede Function $m$, welche aufser den Anfangs- und Stetigkeitsbedingungen noch der Differentialgleichung $\mathfrak{C}$. 3., aber nicht zugleich der Gleichung $\mathfrak{C}$. (3.) genügt, ist eine reducirte Länge, und es lassen sich aus dem Ausdrucke dieser Function mittelst der Gleichungen $\mathfrak{B}$. 2. und $\mathfrak{A}$. 2. auf algebraïschem Wege $p'$ und $q'$, also das Azimuth $\mathfrak{A}$ der von $p_0 q_0$ nach $pq$ gehenden geodätischen Linie finden, während es zur Bestimmung ihrer Länge noch einer Integration bedarf. Bei der Bestimmung von $p', q'$ wird ein Vorzeichen verfügbar, welches bestimmt ist, sobald festgestellt wird, ob $s$ von $p_0 q_0$ nach $pq$ hin, oder in umgekehrter Richtung wächst. Vgl. art. 13.

### 21.

Die Untersuchung des Ausnahmefalles, welcher sich im Vorangehenden dargeboten hat, stützt sich auf die Bemerkung, dafs der Ausdruck $\varDelta$, unter Voraussetzung linearer Substitutionen für $p'$ und $q'$ allein, die simultane Covariante der beiden Formen

$$u = \mathfrak{E}p'^2 + 2\mathfrak{F}p'q' + \mathfrak{G}q'^2$$
$$v = Ep'^2 + 2Fp'q' + Gq'^2$$

ist. Man findet in Folge dessen durch geeignete Specialisirung dieser Formen

$$\varDelta^2 = -\begin{vmatrix} \mathfrak{E}v - Eu & \mathfrak{F}v - Fu \\ \mathfrak{F}v - Fu & Gv - Gu \end{vmatrix}.$$

In unserm Falle ist aber ($\mathfrak{A}$. 2.) $v = 1$ und ($\mathfrak{B}$. 2.) $u = 0$; folglich wird

$$\varDelta^2 = \mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}.$$

Dieser Ausdruck ist seinerseits wieder die Invariante von $u$ bei linearen Substitutionen für $p'$ und $q'$ allein; er ist aber auch eine Invariante in weit ausgedehnterm Sinne.

Setzt man zunächst in den Gleichungen der Oberfläche $S$

$$x = \varphi(p,q), \quad y = \psi(p,q), \quad z = \chi(p,q)$$

für die Variabeln $p, q$ zwei voneinander unabhängige Functionen von $p_1, q_1$, ein, wodurch die Fläche $S$ nicht geändert wird, so geht die Function $v$ über in eine neue Function

$$v_1 = E_1 p_1'^2 + 2 F_1 p_1' q_1' + G_1 q_1'^2,$$

durch welche der neue Ausdruck des Linienelementes bestimmt ist, und die Function $u$, welche bei beliebigem $m$ nichts anderes bedeutet als

$$u = \frac{\partial^2 m}{\partial s^2} + km,$$

geht über in eine neue Function

$$u_1 = \mathfrak{E}_1 p_1'^2 + 2\mathfrak{F}_1 p_1' q_1' + \mathfrak{G}_1 q_1'^2,$$

wo $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}_1$ für die neue Form des Linienelementes und die zugehörigen Variabeln, wegen des vorstehenden Werthes von $u$, der kein Coordinatensystem voraussetzt, ebenso gebildet sind, wie früher $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$.

Da man andererseits die Werthe der Coefficienten in den transformirten Formen erhält, indem man in den ursprünglichen Formen blofs die lineare Substitution

$$(p) \qquad p' = \frac{\partial p}{\partial p_1} \cdot p_1' + \frac{\partial p}{\partial q_1} \cdot q_1', \quad q' = \frac{\partial q}{\partial p_1} \cdot p_1' + \frac{\partial q}{\partial q_1} \cdot q_1'$$

macht, und $\varDelta$ hierbei die erste Potenz der Substitutionsdeterminante

$$r = \frac{\partial p}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial q}{\partial q_1} - \frac{\partial p}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_1}$$

ausscheidet, so folgt

$$\mathfrak{F}_1^2 - \mathfrak{E}_1 \mathfrak{G}_1 = r^2(\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}).$$

Sei allgemeiner $S_1$ eine auf $S$ abwickelbare Fläche und das System ihrer Gleichungen

$$x = \varphi_1(p_1, q_1), \quad y = \psi_1(p_1, q_1), \quad z = \chi_1(p_1, q_1).$$

Dann kann man $p$ und $q$ als Functionen von $p_1$ und $q_1$ so bestimmen, dafs die Linienelemente beider Flächen einander gleich werden, also wieder

$$v = v_1$$



wird. Aus der nämlichen Substitution für $p$ und $q$ ergiebt sich eine lineare Substitution $(p)$ für ihre Derivirten $p', q'$. Führt man die erstere in $m$ aus, so bleibt $u = \frac{\partial^2 m}{\partial s^2} + km$ bei jeder Bedeutung von $m$ ungeändert, wenn $S$ auf $S_1$ abgewickelt wird, also ist auch

$$u = u_1,$$

mithin wie oben $\mathfrak{F}_1^2 - \mathfrak{E}_1\mathfrak{G}_1 = r^2(\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G})$.

Der Ausdruck $\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}$, dessen Zusammensetzung durch die identische Gleichung

$$\partial\varphi^2 + \partial\psi^2 + \partial\chi^2 = E\partial p^2 + 2F\partial p \partial q + G\partial q^2$$

bestimmt ist, ist also Invariante gegenüber jeder Substitution von Functionen $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ an Stelle von $\varphi, \psi, \chi$, durch welche

$$\partial\varphi^2 + \partial\psi^2 + \partial\chi^2 = \partial\varphi_1^2 + \partial\psi_1^2 + \partial\chi_1^2$$

wird, unabhängig davon, ob hierbei gleichzeitig $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \psi_1$ und $\chi = \chi_1$ sein kann oder nicht.

In derselben Weise mufs dieses Theorem auch für das Krümmungsmafs ausgesprochen werden, wenn man die Substitutionen, denen gegenüber dasselbe invariant ist, richtig bezeichnen will.

## 22.

Um nun die Natur der Flächen zu bestimmen, für welche bei jeder Lage des Punctes $p, q$ die reducirte Länge $m$ einer geodätischen Verbindungslinie dieses Punctes mit dem festen Puncte $p_0, q_0$ der Gleichung

$$\varDelta = 0$$

genügt, mag dies nun für alle oder nur für specielle Lagen des Punctes $p_0, q_0$ stattfinden, bezeichnen wir den geodätischen Bogen zwischen beiden Puncten durch $r$, sein Azimuth bei $p_0, q_0$ durch $\varphi$, und nehmen die neuen Variabeln $p_1 = r$, $q_1 = \varphi$. Dann wird das Quadrat des von $p, q$ ausgehenden Linienelementes

$$\partial s^2 = \partial r^2 + m^2 \partial\varphi^2,$$

und hieraus folgt (art. 2 und $\mathfrak{B}$. 1. art. 20)

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\partial^2 m}{\partial r^2} + km$$

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{\partial^2 m}{\partial r \partial\varphi} - \frac{\partial \log m}{\partial r} \frac{\partial m}{\partial\varphi}$$

$$\mathfrak{G}_1 = \frac{\partial^2 m}{\partial\varphi^2} + m\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial m}{\partial\varphi}\right)^2 + km^3.$$

Da $m$ eine reducirte Länge sein soll, so wird $\mathfrak{E}_1 = 0$; ferner ist

$$\mathfrak{F}_1 = m^2 \frac{\partial^2 \log m}{\partial r\, \partial \varphi},$$

also erhalten wir

$$m^4 \left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial r\, \partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial q}{\partial \varphi} - \frac{\partial p}{\partial \varphi}\frac{\partial q}{\partial r}\right)^2 (\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}),$$

und da die rechte Seite $= 0$ sein soll,

$$\frac{\partial^2 \log m}{\partial r\, \partial \varphi} = 0.$$

Folglich ist $m$ das Product aus zwei Factoren, von denen jeder nur eine der beiden Variabeln $r$, $\varphi$ enthält. Da aber $\frac{\partial m}{\partial r}$ für $r = 0$ in die Einheit übergeht, so ist $m$ von $\varphi$ völlig frei, und Function von $r$ allein. Daraus ergiebt sich weiter, dafs auch das Krümmungsmafs $k$ nur von $r$ abhängig, also an jedem geodätischen Kreise entlang constant ist, dessen Centrum der Punct $p_0$, $q_0$ ist.

Wenn umgekehrt, bei geeigneter oder beliebiger Lage des Punctes $p_0$, $q_0$, $k$ nur von $r$, nie von $\varphi$ abhängt, so wird auch die reducirte Länge $m$ Function von $r$ allein, und $\varDelta$ identisch $= 0$.

Bei dieser Beschaffenheit von $m$ zeigt aber der Ausdruck des Linienelementes, dafs die Fläche $S$ ohne Dehnung in eine Rotationsfläche umgebogen werden kann, so dafs $p_0$, $q_0$ Punct der Drehungsaxe wird.

In diesem Falle verwandeln sich alle von $p_0$, $q_0$ ausgehenden geodätischen Linien in Meridiane, für deren reducirte Längen, weil sie vom Azimuth $\varphi$ unabhängig sind, $\varDelta = 0$ ist, und es giebt daher umgekehrt, wenn die Voraussetzungen unserer Untersuchung erfüllt sind, keinen von $p_0$, $q_0$ ausgehenden geodätischen Bogen, für welchen $\varDelta$ von Null verschieden ist.

Der Fall, dafs die reducirte Länge der Gleichung $\varDelta = 0$ genügt, bietet sich also dar,

1) bei den Flächen von constantem Krümmungsmafse für jede beliebige Lage des Punctes $p_0$, $q_0$;

2) bei jeder andern Fläche, die sich auf eine Rotationsfläche abwickeln läfst, wenn man für $p_0$, $q_0$ einen derjenigen Puncte wählt, welche dabei auf die Drehungsaxe fallen, vorausgesetzt, dafs die ursprüngliche Fläche überhaupt einen solchen Punct enthält.



In allen übrigen Fällen ist, wenn man für $m$ eine reducirte Länge nimmt, $\varDelta$ von Null verschieden, folglich nicht blofs jede reducirte Länge eine Lösung der im art. 19 gefundenen Differentialgleichung

$$[m] = 0$$

nebst den dazu gehörigen Bedingungen, sondern auch umgekehrt jede Function, welche dieses System von Bedingungen befriedigt, eine reducirte Länge.

Da endlich nicht jede Lösung der Gleichung $\varDelta = 0$ eine reducirte Länge ist, sondern nur eine solche, die von $\varphi$ unabhängig ist, weil nur in diesem Falle $\mathfrak{E}_1 = 0$ wird, so folgt, dafs in den beiden obigen Ausnahmefällen auch die Gleichung $\varDelta = 0$ zur Bestimmung der reducirten Länge nicht hinreicht, sondern diese, was in diesen Fällen aber auch zunächst liegt, direct aus der ursprünglichen Gleichung

$$\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} + km = 0$$

gefunden werden mufs.

Von den obigen Ausnahmefällen wird der erste im folgenden Abschn. art. 29 seine vollständige Erledigung finden; der andere tritt nur für besondere Lagen des Punctes $p_0$, $q_0$ ein, und bedarf als Grenzfall keiner besondern Behandlung.

## Vierter Abschnitt.

### Geodätische Classification der krummen Oberflächen.

#### 23.

Nachdem im Vorangehenden nachgewiesen worden ist, welche Bedeutung den im zweiten Abschnitte gefundenen Integrabilitätsbedingungen beigelegt werden mufs, werden wir die sämmtlichen Formeln mit Benutzung der inzwischen gefundenen Vereinfachungen in entsprechender Weise zusammenstellen. Wir halten dabei an der Voraussetzung fest, dafs die in den Seiten des geodätischen Dreiecks gezählten Abscissen in der art. 5 festgelegten Richtung wachsen, so dafs die reducirten Längen der Seiten, durch reducirte Abscissen ausgedrückt, die folgenden werden:

$$(a) = [\beta\gamma], \quad (b) = [\gamma\alpha], \quad (c) = [\alpha\beta].$$

### A. Die endlichen Grundformeln.

$$\frac{\partial^2 (a)}{\partial a_\beta^2} + k_\beta (a) = 0$$

$$(a) \frac{\partial^2 (a)}{\partial a_\beta \partial a_\gamma} - \frac{\partial (a)}{\partial a_\beta} \frac{\partial (a)}{\partial a_\gamma} = 1$$

$$\frac{\partial^2 (a)}{\partial a_\gamma^2} + k_\gamma (a) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b_\gamma}\left(\sin\beta \frac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial c_\beta}\left(\frac{\sin\gamma}{(a)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_\beta}\left(\sin\gamma \frac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right) - \frac{\partial}{\partial b_\gamma}\left(\frac{\sin\beta}{(a)}\right) = 0.$$

Die übrigen Formeln, welche hierhin gehören, ergeben sich durch cyklische Vertauschungen; die entwickelten Formeln werden wir nicht wiederholen.

### B. Die Differentialformeln.

Dieselben lauten in unentwickelter Form:

$$\partial \mathfrak{A}_\beta = \left[\frac{g}{e^2}\left\{ {11 \atop 2} \right\} \sin(\mathfrak{C} - \omega) - \frac{1}{e}\left\{ {21 \atop 2} \right\} \sin\mathfrak{C} - \sin\beta \frac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right]_\beta \partial c_\beta$$
$$+ \left[\frac{g}{e^2}\left\{ {11 \atop 2} \right\} \sin(\mathfrak{A} - \omega) - \frac{1}{e}\left\{ {21 \atop 2} \right\} \sin\mathfrak{A}\right]_\beta \partial a_\beta + \frac{\sin\gamma}{(a)} \partial b_\gamma$$

$$\partial \mathfrak{A}_\gamma = \left[\frac{g}{e^2}\left\{ {11 \atop 2} \right\} \sin(\mathfrak{B} - \omega) - \frac{1}{e}\left\{ {21 \atop 2} \right\} \sin\mathfrak{B} + \sin\gamma \frac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right]_\gamma \partial b_\gamma$$
$$+ \left[\frac{g}{e^2}\left\{ {11 \atop 2} \right\} \sin(\mathfrak{A} - \omega) - \frac{1}{e}\left\{ {21 \atop 2} \right\} \sin\mathfrak{A}\right]_\gamma \partial a_\gamma + \frac{\sin\beta}{(a)} \partial c_\beta$$

$$\partial a = \cos\beta\, \partial c_\beta - \partial a_\beta - \cos\gamma\, \partial b_\gamma + \partial a_\gamma$$

$$\partial \alpha = \frac{\sin\gamma}{(b)} \partial a_\gamma - \frac{\sin\beta}{(c)} \partial a_\beta + \sin\alpha \left[\frac{\partial \log (c)}{\partial c_\alpha} \partial b_\alpha + \frac{\partial \log (b)}{\partial b_\alpha} \partial c_\alpha\right].$$

In entwickelter Form wird

$$\partial \mathfrak{A}_\beta = -\left[\frac{g \sin\omega}{e}\left\{ {11 \atop 2} \right\} + e \sin\mathfrak{A} \frac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right]_\beta \partial p_\beta - \left[\frac{g \sin\omega}{e}\left\{ {21 \atop 2} \right\}\right.$$
$$\left. + g \sin(\mathfrak{A} - \omega) \frac{\partial \log (a)}{\partial a_\beta}\right]_\beta \partial q_\beta - e_\gamma \frac{\sin\mathfrak{A}_\gamma}{(a)} \partial p_\gamma - g_\gamma \frac{\sin(\mathfrak{A} - \omega)_\gamma}{(a)} \partial q_\gamma$$

$$\partial \mathfrak{A}_\gamma = -\left[\frac{g \sin\omega}{e}\left\{ {11 \atop 2} \right\} + e \sin\mathfrak{A} \frac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right]_\gamma \partial p_\gamma - \left[\frac{g \sin\omega}{e}\left\{ {21 \atop 2} \right\}\right.$$
$$\left. + g \sin(\mathfrak{A} - \omega) \frac{\partial \log (a)}{\partial a_\gamma}\right]_\gamma \partial q_\gamma + e_\beta \frac{\sin\mathfrak{A}_\beta}{(a)} \partial p_\beta + g_\beta \frac{\sin(\mathfrak{A} - \omega)_\beta}{(a)} \partial q_\beta$$

$$\partial a = e_\gamma \cos\mathfrak{A}_\gamma \partial p_\gamma + g_\gamma \cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \partial q_\gamma$$
$$- e_\beta \cos\mathfrak{A}_\beta \partial p_\beta - g_\beta \cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \partial q_\beta.$$



Wenn es sich nicht blofs um eine einzige geodätische Linie, sondern um ein geodätisches Dreieck handelt, so müssen auch hier noch die durch cyklische Vertauschung folgenden Formeln beigefügt werden.

### 24.

Die vorstehenden Resultate wenden wir auf die Untersuchung der Frage an, unter welchen Voraussetzungen über die Fläche $S$ in ähnlicher Weise, wie es bei der Kugel der Fall ist, zwischen den Elementen, nämlich den Seiten und Winkeln eines geodätischen Dreiecks Gleichungen bestehen, welche von den Coordinaten $p$, $q$ der drei Ecken unabhängig sind.

Wenn eine solche Gleichung stattfindet, so wird bei einer stetigen Ortsänderung des Dreiecks, bei welcher fünf Elemente ungeändert bleiben, auch das sechste sich nicht ändern. Ein ähnlicher Schlufs gilt in den beiden andern noch möglichen Fällen, wo zwischen den sechs Elementen zwei oder drei voneinander unabhängige Gleichungen stattfinden.

Wenn umgekehrt eine stetige Ortsänderung des Dreiecks möglich ist, bei welcher seine sämmtlichen Elemente ungeändert bleiben, so sind die Ausdrücke der sechs Elemente durch die Coordinaten der drei Ecken keine voneinander unabhängige Functionen der letztern, indem die Differentiale der Coordinaten durch die Differentiale der Elemente nicht völlig bestimmt sind, weil sonst jene mit diesen zu gleich verschwinden müfsten. Unterscheidet man nun diejenigen Coordinaten, deren Differentiale bei gegebenen Differentialen der Elemente willkürlich bleiben, von den übrigen, und eliminirt die letztern, so gehen die erstern nothwendig von selbst heraus, und man erhält demnach ebensoviel voneinander unabhängige Gleichungen zwischen den Elementen des Dreiecks allein, als Differentiale von Coordinaten seiner Ecken willkürlich bleiben.

Es ist demnach zu untersuchen, ob die sechs Gleichungen

(1) $\partial a = 0,\ \partial b = 0,\ \partial c = 0,\ \partial \alpha = 0,\ \partial \beta = 0,\ \partial \gamma = 0$

bei von Null verschiedenen Werthen der Gröfsen

(2) $\partial p_\alpha,\ \partial q_\alpha,\ \partial p_\beta,\ \partial q_\beta,\ \partial p_\gamma,\ \partial q_\gamma,$

oder was auf dasselbe hinauskommt, der folgenden

(3) $\partial a_\beta,\ \partial b_\gamma,\ \partial c_\alpha,\ \partial a_\gamma,\ \partial b_\alpha,\ \partial c_\beta$

möglich sind oder nicht, und im ersten Falle, wieviel von den letztern dabei willkürlich bleiben.

Diese Untersuchung über die Fälle, wo die Auflösung der Gleichungen (1) keine bestimmte ist, hängt nur scheinbar vom Verschwinden einer sechszeiligen Determinante und ihrer Unterdeterminanten ab, indem die drei ersten von den Gleichungen (1) sich stets und ohne Unbestimmtheit nach drei Unbekannten, z. B. $\partial a_\beta$, $\partial b_\gamma$, $\partial c_\alpha$ auflösen lassen, durch deren Elimination man zu drei Gleichungen gelangt, deren Determinante zu untersuchen ist.

Auf einem solchen direkten Wege würde man indessen zu kaum übersehbaren Resultaten gelangen.

## 25.

Setzt man zu besserer Übersicht

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \mathsf{A}, \quad \frac{\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha} = \mathsf{B}, \quad \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \Gamma,$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ -\cos\gamma & 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & -\cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \delta,$$

so wird

$$1 - \mathsf{A}^2 = \frac{\delta}{\sin\beta^2\sin\gamma^2}, \quad \mathsf{A} - \mathsf{B}\Gamma = \frac{\delta\cos\alpha}{\sin\alpha^2\sin\beta\sin\gamma}$$

u. s. w., und man erhält:

$$\partial a - \cos\gamma\,\partial b - \cos\beta\,\partial c = \sin\gamma\,(\sin\gamma\,\partial a_\gamma + \mathsf{B}\sin\alpha\,\partial c_\alpha) \\ - \sin\beta\,(\sin\beta\,\partial a_\beta + \Gamma\sin\alpha\,\partial b_\alpha),$$

nebst zwei ähnlichen Gleichungen, welche aus dieser durch Vertauschungen folgen.

Um den drei ersten Gleichungen (1) zu genügen, nehmen wir

$$\sin\gamma\,\partial a_\gamma + \mathsf{B}\sin\alpha\,\partial c_\alpha = x\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \sin\beta\,\partial a_\beta + \Gamma\sin\alpha\,\partial b_\alpha = x\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha\,\partial b_\alpha + \Gamma\sin\beta\,\partial a_\beta = y\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \quad \sin\gamma\,\partial b_\gamma + \mathsf{A}\sin\beta\,\partial c_\beta = y\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta\,\partial c_\beta + \mathsf{A}\sin\gamma\,\partial b_\gamma = z\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad \sin\alpha\,\partial c_\alpha + \mathsf{B}\sin\gamma\,\partial a_\gamma = z\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

woraus

$$(1 - \mathsf{B}^2)\sin\alpha\,\partial c_\alpha = z\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} - \mathsf{B}x\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$(1 - \Gamma^2)\sin\alpha\,\partial b_\alpha = y\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} - \Gamma x\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

u. s. w. folgt. Durch die Werthe von $x, y, z$ sind also die Größen (3) völlig bestimmt, und die Anzahl der willkürlich bleibenden ist in beiden Systemen dieselbe.



Nun ist

$$\partial\alpha = \frac{1}{(b)}\left[\sin\gamma\,\partial a_\gamma + \frac{\partial(b)}{\partial b_\alpha}\sin\alpha\,\partial c_\alpha\right] - \frac{1}{(c)}\left[\sin\beta\,\partial a_\beta - \frac{\partial(c)}{\partial c_\alpha}\sin\alpha\,\partial b_\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{(b)}\left[x\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \left(\frac{\partial(b)}{\partial b_\alpha} - \mathsf{B}\right)\sin\alpha\,\partial c_\alpha\right] - \frac{1}{(c)}\left[x\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} - \left(\frac{\partial(c)}{\partial c_\alpha} + \Gamma\right)\sin\alpha\,\partial b_\alpha\right],$$

also folgt

$$\partial\alpha = \frac{1}{(b)}\left[x\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \left(\frac{\partial(b)}{\partial b_\alpha} - \mathsf{B}\right)\frac{\sin\beta}{1-\mathsf{B}^2}\left(\frac{z}{\sin\gamma} - \mathsf{B}\frac{x}{\sin\alpha}\right)\right] \\ - \frac{1}{(c)}\left[x\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} - \left(\frac{\partial(c)}{\partial c_\alpha} + \Gamma\right)\frac{\sin\gamma}{1-\Gamma^2}\left(\frac{y}{\sin\beta} - \Gamma\frac{x}{\sin\alpha}\right)\right].$$

Setzt man nun

$$\frac{\partial(a)}{\partial a_\beta} + \mathsf{A} = (a)\mathsf{A}_\beta \quad \frac{\partial(b)}{\partial b_\gamma} + \mathsf{B} = (b)\mathsf{B}_\gamma \quad \frac{\partial(c)}{\partial c_\alpha} + \Gamma = (c)\Gamma_\alpha$$

$$\frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma} - \mathsf{A} = (a)\mathsf{A}_\gamma \quad \frac{\partial(b)}{\partial b_\alpha} - \mathsf{B} = (b)\mathsf{B}_\alpha \quad \frac{\partial(c)}{\partial c_\beta} - \Gamma = (c)\Gamma_\beta,$$

so wird der Factor von $y$ gleich

$$\frac{\sin\alpha^2\sin\beta\sin\gamma}{\delta}\cdot\Gamma_\alpha,$$

der Factor von $z$ wird gleich

$$\frac{\sin\alpha^2\sin\beta\sin\gamma}{\delta}\cdot\mathsf{B}_\alpha$$

und der Factor von $x$ wird:

$$\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\sin\beta}{(b)} - \frac{\sin\gamma}{(c)}\right) - \mathsf{B}\mathsf{B}_\alpha\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\,(1-\mathsf{B}^2)} - \Gamma\Gamma_\alpha\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\,(1-\Gamma^2)}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\sin\beta}{(b)} - \frac{\sin\gamma}{(c)}\right) - \frac{\sin\alpha\sin\beta^2\sin\gamma^2}{\delta}\left(\frac{\mathsf{B}\mathsf{B}_\alpha}{\sin\beta} + \frac{\Gamma\Gamma_\alpha}{\sin\gamma}\right) = \frac{\sin\alpha^2\sin\beta\sin\gamma}{\delta}\mathsf{A}_\alpha,$$

wenn ferner

$$\frac{\delta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\left(\frac{\sin\beta}{(b)} - \frac{\sin\gamma}{(c)}\right) - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\frac{\mathsf{B}\mathsf{B}_\alpha}{\sin\beta} + \frac{\Gamma\Gamma_\alpha}{\sin\gamma}\right) = \sin\alpha^2\cdot\mathsf{A}_\alpha$$

$$\frac{\delta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\left(\frac{\sin\gamma}{(c)} - \frac{\sin\alpha}{(a)}\right) - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\frac{\Gamma\Gamma_\beta}{\sin\gamma} + \frac{\mathsf{A}\mathsf{A}_\beta}{\sin\alpha}\right) = \sin\beta^2\cdot\mathsf{B}_\beta$$

$$\frac{\delta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\left(\frac{\sin\alpha}{(a)} - \frac{\sin\beta}{(b)}\right) - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\frac{\mathsf{A}\mathsf{A}_\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\mathsf{B}\mathsf{B}_\gamma}{\sin\beta}\right) = \sin\gamma^2\cdot\Gamma_\gamma$$

gesetzt wird.

Bei diesen Bezeichnungen wird also, wenn $\partial a = 0$, $\partial b = 0$, $\partial c = 0$ ist,

$$\partial\alpha = \frac{\sin\alpha^2\sin\beta\sin\gamma}{\delta}[\mathsf{A}_\alpha x + \Gamma_\alpha y + \mathsf{B}_\alpha z].$$

Diese Umformungen setzen jedoch voraus, daſs

$$\delta = -4\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

von Null verschieden sei. Von den vier Factoren dieses Productes verschwindet aber der erste für jedes beliebige geodätische Dreieck nur dann, wenn das Krümmungsmafs $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ jedes Dreiecks $= 0$ (Disqu. g. c. s. XX), also auch das Krümmungsmafs der Fläche $S$ allenthalben $= 0$, und diese Fläche auf einer Ebene abwickelbar ist. Diese Flächen sind also von der folgenden Untersuchung ausgeschlossen, was jedoch keine Beschränkung ist, da die Trigonometrie derselben bei unsern Untersuchungen vorausgesetzt wurde.

Wäre der zweite Factor für jedes geodätische Dreieck der Fläche $S$ gleich Null, so wäre das Krümmungsmafs jedes Dreiecks nur vom Winkel $\alpha$ abhängig, und sein Differential $= 2\partial\alpha$, was ein Widerspruch ist. Wir erhalten demnach das folgende Resultat.

Für jede Fläche $S$, die nicht auf einer Ebene abgewickelt werden kann, besteht die Bedingung dafür, dafs auf ihr ein geodätisches Dreieck ohne Änderung seiner Elemente stetig verschoben werden könne, darin, dafs den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_\alpha x + \Gamma_\alpha y + \mathsf{B}_\alpha z &= 0 \\ \mathsf{B}_\beta y + \mathsf{A}_\beta z + \Gamma_\beta x &= 0 \\ \Gamma_\gamma z + \mathsf{B}_\gamma x + \mathsf{A}_\gamma y &= 0 \end{aligned}$$

genügt werden könne, ohne dafs die Unbekannten $x$, $y$, $z$ sämmtlich verschwinden.

Bleiben $n$ von diesen Unbekannten willkürlich, so bestehen zwischen den Elementen des geodätischen Dreiecks gerade $n$ voneinander unabhängige Gleichungen, welche keine andern veränderlichen Gröfsen enthalten.

### 26. Die erste Flächengattung, $n = 0$.

Ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathsf{A}_\alpha & \Gamma_\alpha & \mathsf{B}_\alpha \\ \Gamma_\beta & \mathsf{B}_\beta & \mathsf{A}_\beta \\ \mathsf{B}_\gamma & \mathsf{A}_\gamma & \Gamma_\gamma \end{vmatrix} = \Delta$$

nicht identisch $= 0$, so werden $x$, $y$ und $z = 0$, und es ist dann die stetige Ortsänderung eines geodätischen Dreiecks ohne Änderung seiner Elemente im Allgemeinen unmöglich.

Im vorliegenden Falle sind die Differentiale von $p_\alpha, q_\alpha, \dots q_\gamma$ durch die Differentiale der Elemente völlig bestimmt, solange nicht $\Delta = 0$ wird, was nur für spezielle Dreiecke möglich ist. Folglich sind nicht blofs die Elemente des Dreiecks durch die Coordinaten der Ecken, sondern auch umgekehrt diese durch jene bestimmt. Ist diese Bestimmung eine mehrdeutige, so findet dasselbe Elementensystem bei mehrern geodätischen Dreiecken statt; aber es ist nicht möglich, diese durch stetige Ortsänderung ineinander überzuführen, ohne dafs während dieses Überganges Änderungen in den Elementen stattfinden.



### 27. Die zweite Flächengattung, $n = 1$.

Die zweite Flächengattung findet statt, wenn $\Delta$, aber nicht jede Unterdeterminante von $\Delta$ identisch verschwindet.

Alsdann ist von den Gröfsen $x$, $y$, $z$ eine willkürlich, und durch diese sind die beiden andern bestimmt. Auf einer solchen Fläche findet also für jedes geodätische Dreieck eine Gleichung zwischen seinen Elementen allein statt, aber auch nur eine einzige. Es können daher fünf Elemente des Dreiecks und ihre stetigen Änderungen beliebig angenommen werden, und durch diese ist das sechste Element nebst seinen stetigen Änderungen bestimmt.

Von den sechs Gröfsen $\partial p_\alpha, \partial q_\alpha, \dots \partial q_\gamma$ ist nur eine einzige willkürlich. Ein auf der Oberfläche gegebenes geodätisches Dreieck kann also im gegenwärtigen Falle ohne Änderung seiner Elemente stetig verschoben werden, jedoch nur in der Weise, dafs jede Ecke eine völlig bestimmte Kurve durchläuft.

Werden daher auf einer Fläche der zweiten Gattung fünf Elemente eines geodätischen Dreiecks gegeben, so ist hierdurch das sechste, und für jede Ecke eine Ortskurve völlig bestimmt, und zwar ist die Lage sämmtlicher Ecken gegeben, sobald irgend einer von ihnen eine bestimmte Lage auf ihrer Ortskurve angewiesen wird. Gleichzeitig sind dann auch die Azimuthe an den Ecken bestimmt.

### 28. Die dritte Flächengattung, $n = 2$.

Die dritte Flächengattung findet statt, wenn alle Unterdeterminanten, aber nicht alle Elemente von $\Delta$ identisch gleich Null sind.

In diesem Falle ist auch $\Delta = 0$, und es bleiben von den Größen $x$, $y$, $z$ zwei willkürlich, und durch diese ist die dritte bestimmt. Auf einer Fläche dieser Gattung finden also für jedes geodätische Dreieck zwei Gleichungen zwischen seinen Elementen statt, welche die Coordinaten der Ecken nicht enthalten.

Von den sechs Gröfsen $\partial p_\alpha, \partial q_\alpha, \dots \partial q_\gamma$ bleiben ferner zwei willkürlich, und durch diese sind die übrigen bestimmt. Die stetige Ortsänderung eines geodätischen Dreiecks von unveränderlichen Elementen ist also in der Weise möglich, dafs eine Ecke an einer beliebigen Kurve entlang verschoben werden kann, während hierdurch die gleichzeitige Bewegung der beiden andern Ecken völlig bestimmt ist.

Eine Fläche der vorliegenden Gattung enthält also jedes auf ihr überhaupt mögliche geodätische Dreieck unendlich oft, und zwar auf drei Arten, indem jeder Punct der Fläche für eine beliebige der drei Ecken genommen werden kann, wodurch dann die beiden andern Ecken, also die Richtungen der von der ersten Ecke ausgehenden Seiten, völlig bestimmt sind.

Auf einer Fläche der dritten Gattung kann man demnach über vier Elemente eines geodätischen Dreiecks und die Coordinaten einer Ecke nach Belieben verfügen. Dadurch sind die beiden andern Elemente und die Coordinaten der beiden andern Ecken bestimmt. Ist diese letztere Bestimmung eine mehrdeutige, so ergeben sich für jeden Punct der Fläche mehrere, in den Elementen congruente Dreiecke, welche dort die nämliche Ecke, z. B. $\alpha$ haben. Aber diese congruenten Dreiecke können durch stetige Drehung um die gemeinsame Ecke $\alpha$ nicht zur Deckung gebracht werden, ohne daß während des stetigen Überganges Änderungen in den Elementen stattfinden. In der That ergiebt sich aus dem Obigen auch der Satz:

Wenn man auf einer Fläche der dritten Gattung ein geodätisches Dreieck um eine seiner Ecken, z. B. $\alpha$ dreht, ohne die dort anstofsenden Elemente $b, a, c$ zu ändern, so erhält man nach und nach alle geodätischen Dreiecke, welche mit diesen drei Elementen auf der Fläche überhaupt construirt werden können, und zwar gilt dies, wo auch der Punct $\alpha$ auf der Fläche angenommen werden mag.

### 29. Die vierte Flächengattung, $n = 3$.

Die vierte Flächengattung findet statt, wenn sämmtliche Elemente von $\Delta$ identisch gleich Null sind.

In diesem Falle bleiben $x, y$ und $z$ willkürlich, und es finden daher auf jeder Fläche dieser Art drei von den Coordinaten der Ecken unabhängige Gleichungen zwischen den sechs Elementen jedes geodätischen Dreiecks statt.

Es bleiben ferner drei von den Gröfsen $\partial p_\alpha, \partial q_\alpha, \ldots \partial q_\gamma$ willkürlich, und durch diese sind die drei übrigen bestimmt. Auf den Flächen der vorliegenden Art ist also die stetige Ortsänderung eines geodätischen Dreiecks von unveränderlichen Elementen in der Weise möglich, dafs eine Ecke, z. B. $\alpha$ auf einer beliebigen Kurve verschoben, und gleichzeitig einer der beiden andern Ecken noch eine ununterbrochene Bewegung ertheilt wird, die bis auf die Bedingung unveränderlicher Elemente willkürlich ist, also neben einer translatorischen Bewegung mit der Ecke $\alpha$ in einer Drehung des Dreiecks um dieselbe besteht.



Der vorliegende Fall ist bis jetzt der einzige, wo die weitern Untersuchungen sich vollständig haben durchführen lassen. Aus den Gleichungen $\mathsf{A}_\gamma = 0$, $\mathsf{A}_\beta = 0$ folgt

$$\frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma} = -\frac{\partial(a)}{\partial a_\beta} = \mathsf{A},$$

und aus $\mathsf{A}_\alpha = 0$, weil auch $\mathsf{B}_\alpha = 0$, $\Gamma_\alpha = 0$ ist:

$$\frac{\sin(\beta)}{(b)} = \frac{\sin\gamma}{(c)}.$$

Vermöge der ersten Gleichung geht die Formel

$$(a)\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma \partial a_\beta} - \frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma}\frac{\partial(a)}{\partial a_\beta} = 1$$

über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(a)\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} - \left(\frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma}\right)^2 + 1 = 0.$$

Dieselbe wird durch Multiplication mit $\frac{2}{(a)^3}\frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma}$ integrabel, und liefert

$$\left(\frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma}\right)^2 - 1 = -c(a)^2,$$

wo $c$ die Integrationsconstante ist. Dies in die vorige Differentialgleichung eingesetzt giebt

$$\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} + c(a) = 0,$$

folglich ist das Krümmungsmafs der Fläche an jeder geodätischen Linie entlang constant, und wir erhalten den Satz:

Die vierte Flächengattung wird gebildet durch das System aller derjenigen Flächen, deren Krümmungsmafs constant ist.

Wird dasselbe wieder durch $k$ bezeichnet, so folgt mit Rücksicht auf die für $a_\gamma = a_\beta$ stattfindenden Grenzbedingungen

$$(a) = \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}(a_\gamma - a_\beta)\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(a\sqrt{k}).$$

Durch cyklische Vertauschungen ergeben sich demnach die für alle Flächen von constantem Krümmungsmafse $k$ gültigen Formeln:

$$\frac{\sin(a\sqrt{k})}{\sin\alpha} = \frac{\sin(b\sqrt{k})}{\sin\beta} = \frac{\sin(c\sqrt{k})}{\sin\gamma},$$

$$\cos(a\sqrt{k}) = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\cos(b\sqrt{k}) = \frac{\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}$$

$$\cos(c\sqrt{k}) = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Der merkwürdige Satz, dafs die in der vorstehenden Weise geschriebenen Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht blofs für die auf der Kugel abwickelbaren Flächen, sondern auch noch für diejenigen Flächen gültig sind, deren Krümmungsmafs einen negativen constanten Werth hat, ist zuerst von Herrn Minding (Crelle's Journal XIX) gefunden worden.

Hiermit ist der Ausnahmefall erledigt, welcher sich am Schlusse des vorigen Abschnitts dargeboten hat, und es treten nun für alle übrigen Flächengattungen die dort gefundenen Resultate in Kraft, denen zufolge die zur Auflösung eines geodätischen Dreiecks erforderlichen Formeln sich aus art. 23 unmittelbar ergeben, sobald die reducirte Länge eines geodätischen Bogens als Function der Coordinaten seiner Endpuncte dargestellt ist, wozu jene Formeln nicht erforderlich sind.

Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 17. Dezember 1868.

# XVII.

## Über die Transformation ganzer homogener Differentialausdrücke.

(Monatsberichte der Kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1869, S. 1—6.)

Wenn man in einem homogenen Differentialausdruck $p$ter Ordnung

$$F = \Sigma F_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2} \ldots \partial x_{\alpha_p},$$

in welchem die Coefficienten beliebige Functionen der $n$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, statt dieser Variabeln ein System von einander unabhängiger Functionen der neuen Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ einführt, so erhält man einen neuen Differentialausdruck $F'$ von gleicher Ordnung und Dimension, welcher aus dem ursprünglichen auch durch zwei successive Substitutionen erhalten werden kann, nämlich dadurch, dafs man 1) die Differentiale $\partial x$ durch eine in den $\partial x'$ lineare Substitution transformirt, und alsdann 2) in den Coefficienten $F_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots}$ selbst ebenfalls von den ursprünglichen zu den neuen Variabeln übergeht. Jene lineare Substitution nenne ich im Folgenden die Hauptsubstitution.

Sind nun umgekehrt zwei Differentialausdrücke $F$ und $F'$ von gleicher Ordnung und Dimension gegeben, so kann man sich ebenso wie in der Invariantentheorie die Frage vorlegen, unter welchen Bedingungen $F$ in $F'$ transformirt werden kann und falls dies möglich ist, welche Substitution die verlangte Transformation leistet.

Unter den verschiedenen Fällen, welche sich hier darbieten, verdienen die Differentialausdrücke zweiter Ordnung besondere Aufmerksamkeit, sowohl wegen der wichtigen Probleme, in denen sie vorkommen, als auch weil sie den Differentialausdrücken höherer Ordnungen gegenüber einen Ausnahmefall bilden.

Wenn nämlich $p > 2$ ist, so liefert die Invariantentheorie unter der Voraussetzung, dafs blofs die Hauptsubstitution ausgeführt wird, einerseits eine Anzahl von Bedingungsgleichungen für die Möglichkeit der Transformation, und andererseits mittelst der, bis auf besondere Fälle stets in der normalmäfsigen Anzahl vorhandenen zugehörigen Formen völlig bestimmte Werthe für die Coefficienten in der Hauptsubstitution. Damit sind aber nicht alle Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation von $F$ in $F'$ gewonnen, sondern es wird nun eine zweite Untersuchung nöthig, die Bedingungen betreffend, damit die aus den zugehörigen Formen hervorgehenden Ausdrücke für $\partial x_1, \partial x_2, \ldots \partial x_n$ auch, wie erforderlich, die vollständigen Differentiale der ursprünglichen Variabeln werden. Für diese Untersuchung bilden die zugehörigen Formen selbst die Grundlage, und zwar genau wegen der bekannten Eigenschaft derselben, unmittelbar nicht die direkte, sondern die transponirte Substitution zu liefern.

Ohne diese Betrachtungen weiter zu verfolgen, sieht man nun ohne Weiteres ein, weshalb die quadratischen Differentialformen sich der allgemeinen Behandlung entziehen; der Grund hiervon liegt darin, dafs die algebraische Invariantentheorie für dieselben nur eine zugehörige Form liefert, also ohne Hinzuziehung der Integrabilitätsbedingungen nicht die Mittel gewährt, um die Hauptsubstitution durch das Resultat derselben zu bestimmen.

Ich habe daher den Fall $p = 2$ für beliebige Werthe von $n$ behandelt, mich dabei jedoch auf die Voraussetzung beschränkt, dafs die Determinante von $F$ nicht identisch $= 0$ ist. Im Verlaufe dieser Untersuchung, welche im Journal des Herrn Borchardt erscheinen wird, trennen sich zwei verschiedene Fälle von einander, indem sich als Hauptfall derjenige herausstellt, in welchem das Resultat der Transformation die anzuwendende Substitution völlig bestimmt, während demselben Ausnahmefälle zur Seite stehen, in denen es stetige Variationen der Substitution gibt, welche $F'$ ungeändert lassen. Zu diesen gehört z. B. der Fall, wo $\sqrt{F}$ das Linienelement einer in sich selbst ohne Dehnung verschiebbaren Oberfläche ist, und es ist aufserdem zu bemerken, dafs diese Ausnahmefälle nicht blofs für $p = 2$, sondern auch für alle übrigen Ordnungen zu berücksichtigen sind.

Für die dem Hauptfalle entsprechenden quadratischen Differentialformen finde ich nun das merkwürdige, und aus der Natur der Sache keineswegs im Voraus zu erwartende Resultat, dafs alle Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation von $F$ in $F'$, sowohl was die Hauptsubstitution, als was die zu ihr gehörigen Integrabilitätsbedingungen betrifft, sich ohne Ausnahme als Gleichungen zwischen Invarianten der Formen $F$ und $F'$ darstellen lassen, wenn dieser



Ausdruck zur Bezeichnung der gleichen Formverhältnisse wie in der Algebra angewandt wird, und dafs auch hier zugehörige Formen und Covarianten in derselben Bedeutung, wenn auch aus ganz anderer Quelle auftreten, wie bei den analogen algebraischen Transformationsproblemen.

Die erwähnten Invariantengleichungen werden durch die allgemeine Theorie in zwei völlig bestimmte Gruppen zerlegt. Unter den Gleichungen der ersten Gruppe finden sich deren $n$, durch welche die ursprünglichen Variabeln als Functionen der neu einzuführenden völlig bestimmt sind, und diese Werthe müssen die übrigen Gleichungen der ersten Gruppe, soweit solche vorhanden sind, und alle in der zweiten enthaltenen zu identischen machen. Unter Voraussetzung dieser Werthe der ursprünglichen Variabeln liefern alsdann die Gleichungen zwischen den zugehörigen Formen völlig bestimmte Werthe für die Coefficienten der Hauptsubstitution und diese sind, ohne dafs neue Bedingungen erforderlich werden, in verlangter Weise die Derivirten der ursprünglichen nach den neuen Variabeln.

Wenn dagegen die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten und zugehörigen Formen von $F$ zur völligen Bestimmung der ursprünglichen Variabeln und der Coefficienten in der Hauptsubstitution nicht hinreicht, so bietet $F$ einen der oben erwähnten Ausnahmefälle dar, und es ist hiernach klar, dafs die sämmtlichen Bedingungen für diese Fälle in identischen Gleichungen zwischen solchen Invarianten und zugehörigen Formen von $F$ bestehen, welche im Hauptfalle voneinander unabhängige Functionen sämmtlicher Variabeln sind.

Unter den besondern Fällen, welche ich behandelt habe, zeichnen sich die ternären Formen durch eine bemerkenswerthe Vereinfachung der Resultate aus. Ich erlaube mir daher dieselben für diesen Fall vollständig mitzutheilen.

Man bezeichne durch $E$ die Determinante der ternären Form

$$F = \Sigma \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k,$$

und durch $E_{ik}$ in bekannter Weise ihre Unterdeterminanten. Ferner bilde man folgende 18 Ausdrücke

$$\left|\begin{matrix} gh \\ i \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_{ih}}{\partial x_g} + \frac{\partial \omega_{gi}}{\partial x_h} - \frac{\partial \omega_{gh}}{\partial x_i}\right),$$

und mittelst dieser

$$A_{11} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 \omega_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \omega_{22}}{\partial x_3{}^2} - \frac{\partial^2 \omega_{33}}{\partial x_2{}^2}\right) + \sum_{\alpha\beta} \frac{E_{\alpha\beta}}{E}\left(\begin{vmatrix} 23 \\ \alpha \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 23 \\ \beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 22 \\ \alpha \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 33 \\ \beta \end{vmatrix}\right)$$

$$A_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \omega_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \omega_{23}}{\partial x_1{}^2} - \frac{\partial^2 \omega_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \omega_{13}}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$$

$$+ \sum_{\alpha\beta} \frac{E_{\alpha\beta}}{E}\left(\begin{vmatrix} 11 \\ \alpha \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 23 \\ \beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ \alpha \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 13 \\ \beta \end{vmatrix}\right),$$

nebst den durch cyklische Vertauschungen von 1, 2, 3 aus ihnen folgenden; endlich die 18 Ausdrücke

$$A_{gik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_g} - \frac{A_{ik}}{E}\frac{\partial E}{\partial x_g} + \sum_{\lambda\mu} \begin{vmatrix} g\lambda \\ \mu \end{vmatrix} \cdot \frac{E_{i\mu} A_{\lambda k} + E_{\mu k} A_{i\lambda}}{E},$$

so wie alle ihnen entsprechenden für die neue Form

$$F' = \sum \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k.$$

Mittelst dieser Ausdrücke als Coefficienten werden die drei algebraischen Formen

$$\Gamma = \sum A_{ik} X_i X_k,$$
$$\Phi = \sum E_{ik} X_i X_k,$$
$$\Theta = \sum A_{gik} U_g X_i X_k,$$

und für $F'$ die entsprechenden $\Gamma'$, $\Phi'$, $\Theta'$ mit den Variabeln $\Xi$ und $V$ an Stelle von $X$ und $U$ gebildet.

Dann sind die für die Möglichkeit der Transformation von $F$ in $F'$ erforderlichen und ausreichenden Bedingungen genau die nämlichen, wie diejenigen, welche stattfinden müssen, damit durch eine lineare Substitution

$$X_i = \sum_\alpha r^i_\alpha \Xi_\alpha$$

$\Gamma$ in $\Gamma'$, $\Phi$ in $\Phi'$ transformirt werde und gleichzeitig unter Voraussetzung der transponirten Substitution

$$V_\alpha = \sum_i r^i_\alpha U_i$$

$\Theta$ und $\Theta'$ entsprechende Zwischenformen werden, welche der Gleichung

$$\Theta' = R^{\frac{1}{2}} \Theta$$

genügen, unter $R$ die Substitutionsdeterminante verstanden.

Dieser Satz findet jedoch nur unter der Voraussetzung statt, daſs die sechs absoluten zugehörigen Formen und Invarianten von $\Gamma$, $\Phi$ voneinander unabhängige Functionen der Variabeln $x_1\, x_2\, x_3\, U_1\, U_2\, U_3$ sind.



Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man aus den Covariantengleichungen die Coefficienten der inversen Substitution

$$\Xi_\alpha = \sum_i \varrho^i_\alpha X_i,$$

und zwar so, daſs allgemein

$$R^{\frac{1}{2}} \varrho^i_\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$$

wird.

Dazu bemerke ich noch, daſs die vier simultanen Invarianten der Functionen $\Gamma$, $\Phi$ diejenigen sind, welche ich als ein vollständiges System von Invarianten des Differentialausdruckes $F$ bezeichne.

Anmerkung.

Dieser Auszug der später im 70. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik erschienenen und auf den folgenden Seiten dieses Bandes abgedruckten Abhandlung Christoffels wurde der Akademie von Borchardt in der Gesammtsitzung am 7. Januar 1869 übergeben.

# XVIII.

## Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 70, 1869, S. 46—70.)

1.

Führt man in den Differentialausdruck

$$F = \sum \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k; \quad i, k = 1, 2, \dots n,$$

in welchem die Coefficienten $\omega$ beliebige Functionen der von einander unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ sind, statt der letztern ein System von einander unabhängiger Functionen der neuen Variabeln $x'_1, x'_2, \dots x'_n$ ein, so geht $F$ in einen neuen Differentialausdruck

$$F' = \sum \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k$$

über, welcher dem ursprünglichen vermöge der ausgeführten Substitution gleich ist.

Sind umgekehrt die beiden Differentialausdrücke $F$ und $F'$ gegeben, so kann man sich die Frage vorlegen, welche Bedingungen erforderlich sind, damit der eine in den andern transformirt werden könne, und falls dies möglich ist, welche Substitutionen die verlangte Transformation leisten.

Wir bezeichnen für diese Untersuchung die Substitutionsdeterminante und die Determinanten von $F$ und $F'$ wie folgt:

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} = r,$$

$$\sum \pm \omega_{11} \; \omega_{22} \cdots \omega_{nn} = E,$$

$$\sum \pm \omega'_{11} \; \omega'_{22} \cdots \omega'_{nn} = E'.$$

Dann findet, wie aus der algebraischen Invariantentheorie bekannt ist, eine und auch nur eine Transformationsbedingung

$$E' = r^2 E$$



statt, und diese würde auch für den vorliegenden Fall ausreichen, wenn die Coefficienten $\omega$ von $F$ und die Elemente von $r$ constant wären. Im gegenwärtigen Falle müssen jedoch noch andere Bedingungen erfüllt sein, da nicht jedes System linearer und homogener Functionen von $\partial x'_1, \partial x'_2, \dots \partial x'_n$, welches an Stelle von $\partial x_1, \partial x_2, \dots \partial x_n$ gesetzt $F$ in $F'$ überführt, die gestellte Aufgabe löst, sondern nur ein solches, welches den Integrabilitätsbedingungen genügt, damit die Ausdrücke für $\partial x_1, \partial x_2, \dots \partial x_n$ vollständige Differentiale werden.

Wenn allgemein $F$ ein homogener Differentialausdruck von beliebiger, und $F'$ von derselben Ordnung ist, so finden ebenso für die Transformation von $F$ in $F'$, weil für die Differentiale lineare Substitutionen gelten, zunächst die aus der algebraischen Invariantentheorie entspringenden Bedingungsgleichungen statt, und die zugehörigen Formen liefern, wenn die Ordnung von $F$ grösser als 2 ist, im Allgemeinen völlig bestimmte Werthe für die Coefficienten in den Ausdrücken der ursprünglichen Differentiale durch die neu einzuführenden. Aber diese Coefficienten müssen noch den hinzugehörigen Integrabilitätsbedingungen unterworfen werden, wobei die Eigenschaft der zugehörigen Formen, unmittelbar nicht die directe, sondern die transponirte Substitution zu liefern, wesentlich in Betracht kommt (vergl. art. 10).

Vereinfachungen dieser Art finden für die homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades nicht statt, da sich für dieselben aus den algebraischen Bedingungen nur eine Invariante und eine zugehörige Form ergiebt. Ich werde daher im Folgenden die Hülfsmittel auseinandersetzen, mittelst deren dieser auf den verschiedensten Gebieten so wichtige Ausnahmefall sich erledigen lässt, und bemerke nur noch, dass über den Fall, wo $F = \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \partial x_3^2$ ist, ein ausführliches Werk von Herrn Lamé existirt (Théorie des coordonneés curvilignes), während die gegenwärtigen Untersuchungen ursprünglich durch die Ausdehnung des Problems der aufeinander abwickelbaren Flächen auf Gebiete von $n$ Dimensionen veranlasst worden sind.

2.

Bei der Untersuchung der Bedingungen, welche für die Möglichkeit der Gleichung

$$(1.) \qquad \sum \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k = \sum \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k$$

erforderlich sind und hinreichen, werde ich mich auf den Fall beschränken, wo die Determinanten $E$ und $E'$ dieser Differentialausdrücke nicht identisch gleich 0 sind. Die neuen Variabeln $x'$ werden als die unabhängigen betrachtet und ihre Differentiale constant angenommen.

Ersetzt man nun jedes $\partial x_i'$ durch $\partial x_i' + \delta x_i'$ und bezeichnet die den Differentialen $\delta x'$ entsprechenden Zunahmen der ursprünglichen Variabeln $x$ ebenfalls durch $\delta x$, so muss in (1.) allgemein $\partial x$ durch $\partial x + \delta x$ ersetzt werden. Führt man alsdann beiderseits die Quadrate und Producte aus, so ergiebt sich nach Beseitigung übereinstimmender Theile

$$(2.)\qquad \sum \omega_{ik}\partial x_i \delta x_k = \sum \omega_{ik}'\partial x_i' \delta x_k'.$$

Vergleicht man hier die Coefficienten von $\partial x_g'$, so folgt

$$\sum_{ik} \omega_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x_g'} \delta x_k = \sum_k \omega_{gk}' \delta x_k',$$

und hieraus

$$(3.)\qquad \delta x_h' = \sum_{gik} \omega_{ik} \frac{E_{gh}'}{E'} \frac{\partial x_i}{\partial x_g'} \delta x_k,$$

wo $E_{gh}'$ in bekannter Weise die aus einer Aenderung von $\omega_{gh}'$ (nicht von $\omega_{hg}'$) entspringende Unterdeterminante von $E'$ bedeutet.

In der Gleichung (2.) lasse man nun jedes $x'$ um sein Differential $\partial x'$, in (1.) dagegen um $\delta x'$ wachsen, wodurch die Differentiale zur Rechten nicht geändert werden; dann folgt:

$$\sum \omega_{ik}\partial^2 x_i \delta x_k + \sum \partial\omega_{ik}\partial x_i \delta x_k + \sum \omega_{ik}\partial x_i \partial\delta x_k = \sum \partial\omega_{ik}'\partial x_i' \delta x_k,$$
$$\sum \delta\omega_{ik}\partial x_i \partial x_k + 2\sum \omega_{ik}\partial x_i \delta\partial x_k = \sum \delta\omega_{ik}'\partial x_i' \partial x_k'.$$

Dividirt man die zweite Gleichung durch 2 und subtrahirt sie von der vorangehenden, so folgt

$$\sum \omega_{ik}\partial^2 x_i \delta x_k + \sum \partial\omega_{ik}\partial x_i \delta x_k - \tfrac{1}{2}\sum \delta\omega_{ik}\partial x_i \partial x_k$$
$$= \sum \partial\omega_{ik}'\partial x_i' \delta x_k' - \tfrac{1}{2}\sum \delta\omega_{ik}'\partial x_i' \partial x_k'.$$

Wird nun zur besseren Uebersicht

$$(4.)\qquad \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\omega_{gk}}{\partial x_h} + \frac{\partial\omega_{hk}}{\partial x_g} - \frac{\partial\omega_{gh}}{\partial x_k}\right] = \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}$$

gesetzt, woraus

$$(5.)\qquad \begin{bmatrix} hg \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\omega_{hk}}{\partial x_g} = \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gk \\ h \end{bmatrix}$$

folgt, und dieselbe Bezeichnung bei der transformirten Form benutzt, so ergiebt sich

$$(6.)\qquad \sum_{ik} \omega_{ik}\partial^2 x_i \delta x_k + \sum_{ikl} \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} \partial x_i \partial x_l \delta x_k = \sum_{\alpha\beta h} \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}' \partial x_\alpha' \partial x_\beta' \delta x_h'.$$

Hier ersetze man $\delta x_h'$ durch seinen Werth aus (3.), wodurch die rechte Seite in



$$\sum_{\alpha\beta h} \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}' \partial x_\alpha' \partial x_\beta' \sum_{gik} \omega_{ik} \frac{E_{gh}'}{E'} \frac{\partial x_i}{\partial x_g'} \delta x_k$$

übergeht. Durch Vergleichung der Coefficienten von $\delta x_k$ folgt also

$$\sum_i \omega_{ik}\partial^2 x_i + \sum_{il} \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} \partial x_i \partial x_l = \sum_{gi\alpha\beta} \omega_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x_g'} \partial x_\alpha' \partial x_\beta' \sum_h \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}' \frac{E_{gh}'}{E'}.$$

Diese Gleichung multiplicire ich mit $\frac{E_{rk}}{E}$ und summire über die Werthe von $k$. Wird alsdann

$$(7.)\qquad \sum_k \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} \frac{E_{rk}}{E} = \begin{Bmatrix} il \\ r \end{Bmatrix}$$

gesetzt, woraus

$$(8.)\qquad \begin{Bmatrix} li \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} il \\ r \end{Bmatrix}$$

folgt, und die gleiche Bezeichnung bei der transformirten Form angewandt, so ergiebt sich

$$\partial^2 x_r + \sum_{il} \begin{Bmatrix} il \\ r \end{Bmatrix} \partial x_i \partial x_l = \sum_{\alpha\beta g} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ g \end{Bmatrix}' \frac{\partial x_r}{\partial x_g'} \partial x_\alpha' \partial x_\beta',$$

woraus offenbar auch rückwärts die Gleichung (6.) folgt, und es wird hiernach für alle Werthe von $\alpha$, $\beta$ und $r$:

$$(9.)\qquad \frac{\partial^2 x_r}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} \frac{\partial x_k}{\partial x_\beta'} = \sum_\lambda \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{Bmatrix}' \frac{\partial x_r}{\partial x_\lambda'}.$$

Diese Gleichung liefert $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen für jedes $r$, also im Ganzen ein System von $n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ simultanen partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der gesuchten Substitution. Sind dieselben befriedigt, so sind selbstverständlich die Integrabilitätsbedingungen für die linearen Ausdrücke der ursprünglichen durch die neuen Differentiale erfüllt.

Diese Gleichungen vereinfachen sich sehr beträchtlich, wenn alle Coefficienten $\omega$ der ursprünglichen Form constant sind, indem in diesem Falle, aber wegen (7.) und (5.) auch nur unter dieser Voraussetzung, alle Ausdrücke $\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}$ verschwinden. Man erhält alsdann für jede ursprüngliche Variable ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen, und für alle Variabeln das nämliche System. Das gleiche Resultat hat Herr Lamé für den von ihm behandelten oben erwähnten Fall gefunden.

### 3.

Wenn es nicht möglich ist, die ursprünglichen Variabeln $x$ als Functionen der neuen $x'$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen (9.) befriedigt werden, so ist die Transformation von $F$ in $F'$ unmöglich, da diese Gleichungen sich mit Nothwendigkeit ergeben, wenn die Möglichkeit dieser Transformation vorausgesetzt wird.

Sind dagegen die Gleichungen (9.) auf irgend eine Weise erfüllt, so wirft sich die Frage auf, in wie weit sie zum Rückschlusse auf die Gleichung (1.), d. h. auf die Formel $F = F'$ berechtigen. Um dies zu untersuchen, führe man die vorausgesetzte Lösung der Gleichungen (9.) in $F$ ein, woraus

$$F = \sum \omega''_{ik} \partial x'_i \partial x'_k = F''$$

folgen möge. Dann handelt es sich darum, welche Beziehungen zwischen den entsprechenden Coefficienten von $F''$ und $F'$ stattfinden.

Nun sind die Gleichungen (9.) nichts anderes als eine identische Umformung der Gleichung (6.), aus welcher sie selbst folgen, und welche sie auch rückwärts nach sich ziehen. Geht man aber, statt von $F = F'$, jetzt von $F = F''$ aus, so liefert die Rechnung des art. 2 statt des Ausdrucks, welcher dort auf der rechten Seite von (6.) steht, den neuen Ausdruck

$$\sum_{\alpha\beta h} \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}'' \partial x'_\alpha \partial x'_\beta \delta x'_h,$$

und dieser muss dem ursprünglichen gleich sein. Also ergiebt sich allgemein

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}'' = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}',$$

woraus wegen (5.)

$$\frac{\partial \omega''_{hk}}{\partial x'_g} = \frac{\partial \omega'_{hk}}{\partial x'_g}$$

für alle Werthe von $g$, $h$, $k$ folgt. Die entsprechenden Coefficienten von $F''$ und $F'$ unterscheiden sich demnach nur um additive Constanten. Damit diese Constanten verschwinden, reicht es aus, dass irgend einmal $F'' = F'$ werde, mit anderen Worten, dass die Lösung der Gleichungen (9.) den aus der Gleichung (1.) hervorgehenden Transformationsrelationen

$$\text{(10.)} \qquad \sum_{ik} \omega_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta} = \omega'_{\alpha\beta}$$

für irgend ein specielles Werthesystem der neuen Variabeln Genüge leiste. Wir haben also den Satz:



*Wenn es möglich ist, die ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Functionen der neuen Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ so zu bestimmen, dass das Gleichungssystem (9.) befriedigt wird, und man unterwirft diese Functionen noch der Anfangsbedingung, dass sie nebst ihren ersten Derivirten für irgend ein specielles Werthesystem der neuen Variabeln den in der Gleichung $F = F'$ enthaltenen Transformationsrelationen Genüge leisten, so finden diese Transformationsrelationen und mit ihnen die Gleichung $F = F'$ für alle Werthe der neuen Variabeln statt.*

Daraus folgt, dass die in (1.) enthaltenen Transformationsrelationen durch die Gleichungen (9.) bis auf die ihnen zu entnehmende Anfangsbedingung überflüssig gemacht werden, sobald die letztern miteinander verträglich sind.

*Das Gleichungssystem (9.) enthält also, seine Möglichkeit vorausgesetzt, bis auf die erwähnte Anfangsbedingung die sämmtlichen für die Transformation von $F$ in $F'$ nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, und ersetzt hiernach gleichzeitig die algebraischen aus (1.) hervorgehenden Transformationsrelationen und die hinzugehörigen Integrabilitätsbedingungen.*

### 4.

Für die Möglichkeit der Gleichungen (9.) sind neue Integrabilitätsbedingungen erforderlich, zu deren Herleitung wir jetzt übergehen. Um zugleich den Nachweis zu führen, dass diese die Gleichungen (9.) nicht rückwärts nach sich ziehen, betrachten wir statt der letztern das System, welches in einer der folgenden Gleichungen enthalten ist:

$$\text{(9'.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \sum\limits_{gh} \begin{Bmatrix} gh \\ r \end{Bmatrix} u^g_\alpha u^h_\beta = \sum\limits_\lambda \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{Bmatrix}' u^r_\lambda + \begin{pmatrix} r \\ \alpha\beta \end{pmatrix}, \\ \dfrac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\gamma} + \sum\limits_{gi} \begin{Bmatrix} gi \\ r \end{Bmatrix} u^g_\alpha u^i_\gamma = \sum\limits_\lambda \begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{Bmatrix}' u^r_\lambda + \begin{pmatrix} r \\ \alpha\gamma \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wo, wie im Folgenden allgemein, die ersten Derivirten

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} = u^i_\alpha$$

gesetzt sind, während wir für die höhern Derivirten die gewöhnliche Bezeichnung beibehalten. Aus dem Vorstehenden wird also das System (9.) erhalten, indem man die Grössen $\begin{pmatrix} r \\ \alpha\beta \end{pmatrix}$ alle gleich 0 setzt.

Die in Rede stehenden Integrabilitätsbedingungen werden erhalten, wenn man die erste Gleichung (9'.) nach $x'_\gamma$, die zweite nach $x'_\beta$ differentiirt und die Differenz bildet, wobei die dritte Derivirte von $x_r$

wegfällt. Beachtet man, dass auch die Glieder, welche eine nach $x'_\beta$ und $x'_\gamma$ genommene zweite Derivirte enthalten, sich wegheben, so folgt:

$$\sum_{ghi}\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix} gh \\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_i}-\frac{\partial\begin{Bmatrix} gi \\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_h}\right]u^g_\alpha u^h_\beta u^i_\gamma+\sum_{ph}\begin{Bmatrix} ph \\ r\end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x_p}{\partial x'_\alpha\partial x'_\gamma}u^h_\beta-\sum_{pi}\begin{Bmatrix} pi \\ r\end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x_p}{\partial x'_\alpha\partial x'_\beta}u^i_\gamma$$

$$=\sum_\lambda\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\beta}\right]u^r_\lambda+\sum_\lambda\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda\end{Bmatrix}'\frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\lambda\partial x'_\gamma}-\sum_\lambda\begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda\end{Bmatrix}'\frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\lambda\partial x'_\beta}$$

$$+\frac{\partial\begin{pmatrix} r \\ \alpha\beta\end{pmatrix}}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{pmatrix} r \\ \alpha\gamma\end{pmatrix}}{\partial x'_\beta}.$$

Daraus geht zunächst hervor, dass die Integrabilitätsbedingungen für das System (9'.) genau die nämlichen sein werden wie für die ursprünglichen Gleichungen (9.), sobald die Grössen $\begin{pmatrix} r \\ \alpha\beta\end{pmatrix}$ dem folgenden Gleichungssystem Genüge leisten

$$(11.)\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{ph}\begin{Bmatrix} ph \\ r\end{Bmatrix}\begin{pmatrix} p \\ \alpha\gamma\end{pmatrix}u^h_\beta-\sum_{pi}\begin{Bmatrix} pi \\ r\end{Bmatrix}\begin{pmatrix} p \\ \alpha\beta\end{pmatrix}u^i_\gamma \\ \displaystyle=\sum_\lambda\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda\end{Bmatrix}'\begin{pmatrix} r \\ \lambda\gamma\end{pmatrix}-\sum_\lambda\begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda\end{Bmatrix}'\begin{pmatrix} r \\ \lambda\beta\end{pmatrix}+\frac{\partial\begin{pmatrix} r \\ \alpha\beta\end{pmatrix}}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{pmatrix} r \\ \alpha\gamma\end{pmatrix}}{\partial x'_\beta},\end{cases}$$

welches sich leicht in eine symmetrische Form setzen lässt.

Ich setze nun voraus, dass diese Bedingung für alle Werthe von $r$, $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ erfüllt ist. Werden alsdann in der vorangehenden Gleichung für die zweiten Derivirten ihre Werthe aus (9'.) eingesetzt, so folgt:

$$\sum_{ghi}\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix} gh \\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_i}-\frac{\partial\begin{Bmatrix} gi \\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_h}\right]u^g_\alpha u^h_\beta u^i_\gamma$$

$$+\sum_{ph}\begin{Bmatrix} ph \\ r\end{Bmatrix}u^h_\beta\Big(\sum_\lambda\begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda\end{Bmatrix}'u^p_\lambda-\sum_{gi}\begin{Bmatrix} gi \\ p\end{Bmatrix}u^g_\alpha u^i_\gamma\Big)$$

$$-\sum_{pi}\begin{Bmatrix} pi \\ r\end{Bmatrix}u^i_\gamma\Big(\sum_\lambda\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda\end{Bmatrix}'u^p_\lambda-\sum_{gh}\begin{Bmatrix} gh \\ p\end{Bmatrix}u^g_\alpha u^h_\beta\Big)$$

$$=\sum_\lambda\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\beta}\right]u^r_\lambda$$

$$+\sum_\lambda\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda\end{Bmatrix}'\Big(\sum_\mu\begin{Bmatrix} \gamma\lambda \\ \mu\end{Bmatrix}'u^r_\mu-\sum_{pi}\begin{Bmatrix} pi \\ r\end{Bmatrix}u^p_\lambda u^i_\gamma\Big)$$

$$-\sum_\lambda\begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda\end{Bmatrix}'\Big(\sum_\mu\begin{Bmatrix} \beta\lambda \\ \mu\end{Bmatrix}'u^r_\mu-\sum_{ph}\begin{Bmatrix} ph \\ r\end{Bmatrix}u^p_\lambda u^h_\beta\Big).$$



Hier heben sich alle Glieder weg, in denen das Product aus zwei Derivirten $u$ vorkommt; vereinigt man die übrigen Glieder, indem man rechts $\lambda$ mit $\mu$ vertauscht, so folgt:

$$(12.)\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{ghi}\left(\frac{\partial\begin{Bmatrix} gh \\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_i}-\frac{\partial\begin{Bmatrix} gi \\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_h}+\sum_p\left[\begin{Bmatrix} gh \\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} pi \\ r\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} gi \\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ph \\ r\end{Bmatrix}\right]\right)u^g_\alpha u^h_\beta u^i_\gamma \\ \displaystyle=\sum_\lambda\left(\frac{\partial\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\beta}+\sum_\mu\left[\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \mu\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix} \mu\gamma \\ \lambda\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \mu\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix} \mu\beta \\ \lambda\end{Bmatrix}'\right]\right)u^r_\lambda\,.\end{cases}$$

Wir haben also das folgende Resultat.

*Das Gleichungssystem, welches aus (12.) hervorgeht, wenn für $r$, $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ alle Werthe von 1 bis $n$ eingesetzt werden, enthält alle für die Möglichkeit des Systems (9.) erforderlichen Integrabilitätsbedingungen. Aber es kann die Gleichungen (9.) nicht ersetzen, indem aus ihm rückwärts nicht diese, sondern die allgemeinern Gleichungen (9.') folgen, in denen die unabhängigen Glieder $\begin{pmatrix} r \\ \alpha\beta\end{pmatrix}$ dem Gleichungssystem (11.) Genüge leisten.*

## 5.

Die Gleichungen (12.) müssen für die weitere Untersuchung durch ein anderes, gleichbedeutendes System ersetzt werden. Ich multiplicire für diesen Zweck mit $\omega_{rk}u^k_\delta$ und summire über alle Werthe von $k$ und $r$. Es ist klar, dass die hieraus folgenden Gleichungen auch wieder zum System (12.) zurückführen, wenn man, nachdem die eben bezeichnete Summation wirklich ausgeführt ist, mit $\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_l}\cdot\frac{E_{\varrho l}}{E}$ multiplicirt, hierauf zuerst nach $\delta$, dann nach $l$ summirt und zuletzt $\varrho=r$ setzt.

Bei der angegebenen Operation geht die Gleichung (12.), da wegen (10.)

$$\sum_{rk}\omega_{rk}u^r_\lambda u^k_\delta=\omega'_{\lambda\delta}$$

ist, zunächst in

$$\sum_{ghik}u^g_\alpha u^h_\beta u^i_\gamma u^k_\delta\sum_r\omega_{rk}\left(\frac{\partial\begin{Bmatrix} gh \\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_i}-\frac{\partial\begin{Bmatrix} gi \\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_h}+\sum_p\left[\begin{Bmatrix} gh \\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} pi \\ r\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} gi \\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ph \\ r\end{Bmatrix}\right]\right)$$

$$=\sum_\lambda\omega'_{\lambda\delta}\left(\frac{\partial\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\beta}+\sum_\mu\left[\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \mu\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix} \mu\gamma \\ \lambda\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \mu\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix} \mu\beta \\ \lambda\end{Bmatrix}'\right]\right)$$

über, so dass die noch rückständigen Reductionen für beide Seiten der Gleichung die nämlichen sind. Nun ist nach Gleichung (7.)

$$\sum_r \omega_{rk} \begin{Bmatrix} gh \\ r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix},$$

also wird die auf der linken Seite nach $r$ genommene Summe

$$= \frac{\partial \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_i} - \sum_p \begin{Bmatrix} gh \\ p \end{Bmatrix} \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} - \frac{\partial \begin{bmatrix} gi \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_h} + \sum_p \begin{Bmatrix} gi \\ p \end{Bmatrix} \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} + \sum_p \left( \begin{Bmatrix} gh \\ p \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} pi \\ k \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} gi \\ p \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} ph \\ k \end{bmatrix} \right),$$

wenn in den beiden Summen, welche Derivirten von $\omega$ enthalten, $p$ statt $r$ gesetzt wird. Ferner ist nach (5.)

$$\frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} ip \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} = \begin{bmatrix} hp \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix},$$

also

$$\begin{bmatrix} pi \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} = - \begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} - \begin{bmatrix} ph \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix},$$

und die in Rede stehende Summe wird

$$= \frac{\partial \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_i} - \frac{\partial \begin{bmatrix} gi \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_h} + \sum_p \left( \begin{Bmatrix} gi \\ p \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} gh \\ p \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix} \right).$$

Diesen Ausdruck bezeichne ich von hier ab durch $(gkhi)$, so dass, wenn die Grössen $\begin{Bmatrix} gi \\ p \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} gh \\ p \end{Bmatrix}$ mittelst der Gleichungen (7.) weggeschafft werden,

$$(13.) \quad (gkhi) = \frac{\partial \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_i} - \frac{\partial \begin{bmatrix} gi \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_h} + \sum_{\alpha\beta} \frac{E_{\alpha\beta}}{E} \left( \begin{bmatrix} gi \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hk \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} gh \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ik \\ \beta \end{bmatrix} \right),$$

oder wenn man die Derivirten ausführt,

$$(14.) \quad \left\{ \begin{aligned} (gkhi) &= \tfrac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega_{gi}}{\partial x_h \partial x_k} + \frac{\partial^2 \omega_{hk}}{\partial x_g \partial x_i} - \frac{\partial^2 \omega_{gh}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ik}}{\partial x_g \partial x_h} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha\beta} \frac{E_{\alpha\beta}}{E} \left( \begin{bmatrix} gi \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hk \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} gh \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ik \\ \beta \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \right.$$

wird. In Folge dieser Bezeichnung, welche wir auch für die transformirte Form benutzen, nehmen die Integrabilitätsbedingungen (12.) die folgende Gestalt an:

$$(15.) \qquad (\alpha\delta\beta\gamma)' = \sum_{ghik} (gkhi) u_\alpha^g u_\beta^h u_\gamma^i u_\delta^k.$$

Für dieses System von Gleichungen gilt das nämliche Resultat wie für die Gleichungen (12.), dass sie das vollständige System aller zu (9.) gehörigen Integrabilitätsbedingungen bilden, aber nicht die Gleichungen (9.), sondern das allgemeinere System (9'.) unter Voraussetzung



der Relationen (11.) nach sich ziehen, also die zu (1.) gehörigen Integrabilitätsbedingungen nicht ersetzen.

Die Coefficienten im vorstehenden Formelnsystem haben folgende Eigenschaften. Vertauscht man in (13.) $i$ mit $h$, so folgt

$$16^a.) \qquad (gkih) = -(gkhi).$$

Vertauscht man in (14.) $g$ mit $k$, so folgt

$$(16^b.) \qquad (kghi) = -(gkhi).$$

Vertauscht man in (14.) $g$ mit $i$ und zugleich $k$ mit $h$, so ändert sich auf der rechten Seite wegen $E_{\beta\alpha} = E_{\alpha\beta}$ nichts, und es folgt

$$(ihkg) = (gkhi)$$

oder

$$(16^c.) \qquad (higk) = (gkhi).$$

Endlich erhält man ohne Weiteres

$$(16^d.) \qquad (gkhi) + (ghik) + (gikh) = 0,$$

wobei zu bemerken ist, dass diese Formel auf eine der vorangehenden zurückführt, sobald sich unter den Zahlen $ghik$ zwei gleiche befinden.

Mittelst dieser vier Formeln lässt sich die Anzahl der in (15.) enthaltenen und wesentlich voneinander verschiedenen Relationen leicht bestimmen.

Zunächst sind wegen ($a$.) und ($b$.) alle Fälle auszuschliessen, wo $\alpha = \delta$ oder $\beta = \gamma$ ist, sowie diejenigen, welche durch Vertauschung von $\alpha$ mit $\delta$ oder von $\beta$ mit $\gamma$ folgen. Für $\alpha\delta$ sowie für $\beta\gamma$ sind demnach nur Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen $1, 2, \dots n$ zu nehmen, deren Anzahl gleich $\frac{n(n-1)}{2} = n_2$ ist.

Jetzt zerfallen die Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$ in drei Gruppen, die erste von $n_2$ Ausdrücken, welche der Voraussetzung $\alpha\delta = \beta\gamma$ entsprechen, die zweite von $\frac{n_2(n_2-1)}{2}$ Ausdrücken, in denen $\alpha\delta$ nicht gleich $\beta\gamma$ ist, während die dritte Gruppe von gleichviel Ausdrücken, welche sich aus der zweiten durch Vertauschung von $\alpha\delta$ mit $\beta\gamma$ ergiebt, wegen ($c$.) auszuschliessen ist. Also erhalten wir wegen ($a$.), ($b$.) und ($c$.) nur $\frac{n_2(n_2+1)}{2}$ Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$.

Da aber jede Gruppe $\alpha\delta\beta\gamma$, in welcher keine Zahl mehr als einmal vorkommt, eine Gleichung ($d$.) liefert, so lassen sich im Ganzen

$$n_4 = \tfrac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3)$$

von den eben erwähnten Ausdrücken durch andere darstellen, und es bleiben nur

$$\frac{n_2(n_2+1)}{2} - n_4 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

von einander wesentlich verschiedene Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$ übrig; dies ist demnach die Anzahl der Gleichungen (15.), soweit sie nicht aus einander folgen.

Die Anzahl der Gleichungen (10.) ist $\frac{n(n+1)}{2}$; addirt man dies zur vorstehenden Zahl, so erhält man

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2(n^2-1)}{12}=n^2+n+\frac{(n+2)(n+1)n(n-3)}{12},$$

und es ist demnach für $n=2$ die Anzahl der Gleichungen (10.) und (15.) kleiner als die Anzahl $n^2+n$ der in ihnen vorkommenden Unbekannten, nämlich der ursprünglichen Variabeln und ihrer ersten Derivirten, für $n=3$ ist sie dieser gleich und für $n>3$ ist sie größer als die letztere.

6.

Ebenso wie die Gleichungen (10.) als Transformationsrelationen zur Gleichung (1.) oder (2.) gehören, so sind auch die Gleichungen (15.), wie aus ihrer Form hervorgeht, die Transformationsrelationen zu einer Form vierter Ordnung. Bevor wir zur Herstellung dieser Form übergehen, werden wir nachweisen, wie man allgemein aus den zu irgend einer Form gehörigen Transformationsrelationen mittelst der Gleichungen (9.) zu den Transformationsrelationen für eine neue Form gelangen kann, deren Ordnung um Eins grösser ist wie die Ordnung der ursprünglichen Form.

Sei

$$G_\mu=\sum_{i_1\ldots i_\mu}(i_1 i_2\ldots i_\mu)\underset{1}{\partial} x_{i_1}\underset{2}{\partial} x_{i_2}\ldots\underset{\mu}{\partial} x_{i_\mu}$$

eine aus den Coefficienten von $F$ abgeleitete und in den Differentialen $\underset{1}{\partial} x, \underset{2}{\partial} x, \ldots \underset{\mu}{\partial} x$ $\mu$-fach lineare Form, $G'_\mu$ ihre transformirte, mithin allgemein

$$(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)'=\sum_{i_1\ldots i_\mu}(i_1 i_2\ldots i_\mu)\,u^{i_1}_{\alpha_1}u^{i_2}_{\alpha_2}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu},$$

wo wie bisher

$$u^i_\alpha=\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$$

zu setzen ist. Differentiirt man nun nach $x'_\alpha$, so folgt

$$\frac{\partial(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)'}{\partial x'_\alpha}=\sum_{i\ldots i_\mu}\frac{\partial(i_1 i_2\ldots i_\mu)}{\partial x_i}\,u^i_\alpha u^{i_1}_{\alpha_1}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}+P,$$

$$P=\sum_{\lambda i_2\ldots i_\mu}(\lambda i_2\ldots i_\mu)\,\frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha\partial x'_{\alpha_1}}\,u^{i_2}_{\alpha_2}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}$$
$$+\sum_{i_1\lambda\ldots i_\mu}(i_1\lambda\ldots i_\mu)\,u^{i_1}_{\alpha_1}\frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha\partial x'_{\alpha_2}}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}+\cdots.$$



Setzt man nun in $P$ für die zweiten Derivirten ihre Werthe

$$\frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha\partial x'_{\alpha_s}}=\sum_r\left\{\begin{matrix}\alpha\alpha_s\\ r\end{matrix}\right\}' u^\lambda_r-\sum_{i i_s}\left\{\begin{matrix}i i_s\\ \lambda\end{matrix}\right\}u^i_\alpha u^{i_s}_{\alpha_s}$$

ein, so erhält man für $P$ eine Differenz $U-V$, wo

$$U=\sum_r\left\{\begin{matrix}\alpha\alpha_1\\ r\end{matrix}\right\}'\sum_{\lambda i_2\ldots i_\mu}(\lambda i_2\ldots i_\mu)\,u^\lambda_r u^{i_2}_{\alpha_2}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}$$
$$+\sum_r\left\{\begin{matrix}\alpha\alpha_2\\ r\end{matrix}\right\}'\sum_{i_1\lambda\ldots i_\mu}(i_1\lambda\ldots i_\mu)\,u^{i_1}_{\alpha_1}u^\lambda_r\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}+\cdots$$
$$=\sum_r\left[\left\{\begin{matrix}\alpha\alpha_1\\ r\end{matrix}\right\}'(r\alpha_2\ldots\alpha_\mu)'+\left\{\begin{matrix}\alpha\alpha_2\\ r\end{matrix}\right\}'(\alpha_1 r\ldots\alpha_\mu)'+\cdots\right]$$

und

$$V=\sum_{i\ldots i_\mu}u^i_\alpha u^{i_1}_{\alpha_1}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}\sum_r\left[\left\{\begin{matrix}i i_1\\ \lambda\end{matrix}\right\}(\lambda i_2\ldots i_\mu)+\left\{\begin{matrix}i i_2\\ \lambda\end{matrix}\right\}(i_1\lambda\ldots i_\mu)+\cdots\right]$$

ist. Führt man den hierdurch bestimmten Werth von $P$ ein, und bringt $U$ auf die linke Seite der Gleichung, während auf der rechten alles unter ein Summenzeichen gebracht wird, so ergiebt sich folgendes Resultat:

*Unter der Voraussetzung, dass alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, erhält man aus jedem vollständigen System von Transformationsrelationen* $\mu^{ter}$ *Ordnung*

$$(17^a.)\qquad (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)'=\sum_{i_1\ldots i_\mu}(i_1 i_2\ldots i_\mu)\,u^{i_1}_{\alpha_1}u^{i_2}_{\alpha_2}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}$$

*ein neues vollständiges System von Transformationsrelationen* $(\mu+1)^{ter}$ *Ordnung*

$$(17^b.)\qquad (\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\mu)'=\sum_{i\ldots i_\mu}(i i_1\ldots i_\mu)\,u^i_\alpha u^{i_1}_{\alpha_1}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu},$$

*wenn man*

$$(17^c.)\quad (i i_1\ldots i_\mu)=\frac{\partial(i_1 i_2\ldots i_\mu)}{\partial x_i}-\sum_\lambda\left[\left\{\begin{matrix}i i_1\\ \lambda\end{matrix}\right\}(\lambda i_2\ldots i_\mu)+\left\{\begin{matrix}i i_2\\ \lambda\end{matrix}\right\}(i_1\lambda\ldots i_\mu)+\cdots\right]$$

*setzt und diese Bezeichnung auch für die transformirte Form benutzt.*

Mittelst dieses Satzes kann man aus einer Gleichung $G_\mu=G'_\mu$ eine Reihe ähnlicher Gleichungen $G_{\mu+1}=G'_{\mu+1}$, $G_{\mu+2}=G'_{\mu+2}$, usw. ableiten, bis man auf identische Relationen oder solche kommt, die aus früheren zusammengesetzt sind.

Der erste Fall tritt bei der Function $F$ selbst ein. Nimmt man nämlich $(i_1 i_2) = \omega_{i_1 i_2}$, so wird

$$(i i_1 i_2) = \frac{\partial \omega_{i_1 i_2}}{\partial x_i} - \sum_\lambda \left[ \left\{ {i i_1 \atop \lambda} \right\} \omega_{\lambda i_2} + \left\{ {i i_2 \atop \lambda} \right\} \omega_{i_1 \lambda} \right]$$

$$= \frac{\partial \omega_{i_1 i_2}}{\partial x_i} - \left[ {i i_1 \atop i_2} \right] - \left[ {i i_2 \atop i_1} \right]$$

nach einer in art. 5. benutzten Formel, und dies ist wegen Gleichung (5.) stets gleich Null.

7.

Wir gehen nun zur Darstellung derjenigen homogenen Form $G_4$ über, zu welcher die Gleiehungen (15.) als Transformationsrelationen gehören. Dieselben lauten

$$(18.) \qquad (\alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)' = \sum_{i \ldots i_3} (i i_1 i_2 i_3) \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x'_{\alpha_1}} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial x'_{\alpha_2}} \frac{\partial x_{i_3}}{\partial x'_{\alpha_3}},$$

und es ist wegen (16.)

$$(19.) \begin{cases} (i i_1 i_3 i_2) = -(i i_1 i_2 i_3), \quad (i_1 i i_2 i_3) = -(i i_1 i_2 i_3), \quad (i_2 i_3 i i_1) = (i i_1 i_2 i_3), \\ \qquad (i i_1 i_2 i_3) + (i i_2 i_3 i_1) + (i i_3 i_1 i_2) = 0. \end{cases}$$

Wir multipliciren die Gleichung (18.) mit $\partial x'_\alpha \delta x'_{\alpha_1} D x'_{\alpha_2} \varDelta x'_{\alpha_3}$, unter $\partial$, $\delta$, $D$, $\varDelta$ verschiedene Differentiationszeichen verstanden, und setzen

$$\sum_{i \ldots i_3} (i i_1 i_2 i_3) \partial x_i \delta x_{i_1} D x_{i_2} \varDelta x_{i_3} = G_4;$$

dann folgt aus (18.) durch Summation über alle Werthe der $\alpha$

$$G'_4 = G_4.$$

Hier ist also $G_4$ eine quadrilineare Form der Variabelnsysteme $\partial x$, $\delta x$ $D x$, $\varDelta x$, welche alle derselben linearen Substitution unterworfen sind. Aber diese Form ist wegen der Eigenschaften ihrer Coefficienten eine sehr specielle.

Vertauscht man $i$ mit $i_1$, was nichts ändert, da beide die gleichen Werthe durchlaufen, und ersetzt dann $(i_1 i i_2 i_3)$ durch $-(i i_1 i_2 i_3)$, so folgt, dass $G_4$ nur sein Zeichen ändert, wenn $\partial$ mit $\delta$ vertauscht wird. Nimmt man für $i i_1$ nur die Combinationen ohne Wiederholung, so folgt

$$G_4 = \sum (i i_1 i_2 i_3)(\partial x_i \delta x_{i_1} - \partial x_{i_1} \delta x_i) D x_{i_2} \varDelta x_{i_3}.$$

Das Gleiche ergiebt sich für $D$ und $\varDelta$, wenn $i_2$ und $i_3$ vertauscht werden, und es folgt

$$(20.) \quad G_4 = {}' \sum (i i_1 i_2 i_3)(\partial x_i \delta x_{i_1} - \partial x_{i_1} \delta x_i)(D x_{i_2} \varDelta x_{i_3} - D x_{i_3} \varDelta x_{i_2}),$$



wenn der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass sowohl für $i i_1$, als für $i_2 i_3$ nur die $\frac{n(n-1)}{2}$ Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen $1, 2, \ldots n$ gesetzt werden dürfen.

Vertauscht man nun $i$ mit $i_2$, $i_1$ mit $i_3$ und wendet die Gleichung $(i_2 i_3 i i_1) = (i i_1 i_2 i_3)$ an, so folgt, dass $G_4$ ungeändert bleibt, wenn allgemein $\partial x_i \delta x_k - \partial x_k \delta x_i$ mit $D x_i \varDelta x_k - D x_k \varDelta x_i$ vertauscht wird. Gleichwohl darf man nicht $D = \partial$ und $\varDelta = \delta$ oder eines von beiden setzen, weil sonst die Coefficienten $(i i_1 i_2 i_3)$ und $(i_2 i_1 i i_3)$ oder, was dasselbe ist, $(i i_1 i_2 i_3)$ und $(i i_3 i_2 i_1)$ nicht mehr von einander getrennt bleiben, sondern zu ihrer Summe vereinigt werden, mithin aus $G_4 = G'_4$ nicht mehr alle Transformationsrelationen (18.) hervorgehen können.

Die letzteren ergeben sich auch aus den Formen

$$H_4 = \sum (i i_2 i_3 i_1) \partial x_i \delta x_{i_1} D x_{i_2} \varDelta x_{i_3} = \sum (i i_1 i_2 i_3) \partial x_i D x_{i_1} \varDelta x_{i_2} \delta x_{i_3},$$
$$J_4 = \sum (i i_3 i_1 i_2) \partial x_i \delta x_{i_1} D x_{i_2} \varDelta x_{i_3} = \sum (i i_1 i_2 i_3) \partial x_i \varDelta x_{i_1} \delta x_{i_2} D x_{i_3},$$

welche aus $G_4$ durch cyklische Vertauschung von $\delta$, $D$ und $\varDelta$ hervorgehen, und es ist wegen (19.) identisch

$$G_4 + H_4 + J_4 = 0.$$

8.

Ich setze nun voraus, man habe nach art. 6. aus den Coefficienten $(i_1 i_2 i_3 i_4)$ von $G_4$ neue Ausdrücke $(i i_1 i_2 i_3 i_4)$ abgeleitet und mittelst derselben eine in den Differentialen $\partial x$, $\underset{1}{\partial x}$, $\underset{2}{\partial x}$, $\underset{3}{\partial x}$, $\underset{4}{\partial x}$ fünffach lineare Form $G_5$ gebildet. Ebenso sei aus $G_5$ auf demselben Wege eine sechsfach lineare Form $G_6$, aus dieser eine siebenfach lineare $G_7$ abgeleitet worden, u. s. w., bis man auf Formen kommt, deren Coefficienten entweder verschwinden oder auf frühere Formen zurückführen. Dann ergiebt sich das Gleichungssystem

$$(A.) \qquad F = F', \quad G_4 = G'_4, \quad G_5 = G'_5, \quad \ldots,$$

und es geht aus dem Vorangehenden hervor, dass für die Möglichkeit der ersten von diesen Gleichungen die Möglichkeit aller übrigen erforderlich ist.

Damit aber die Gleichung $F = F'$ möglich sei, ist erforderlich und hinreichend, dass die entsprechenden Transformationsrelationen

$$(F.) \qquad (\alpha_1 \alpha_2)' = \sum_{i_1 i_2} (i_1 i_2) u^{i_1}_{\alpha_1} u^{i_2}_{\alpha_2}$$

für $(ik) = \omega_{ik}$, und zugleich die Integrabilitätsbedingungen

$$(B.) \qquad \frac{\partial u^i_\alpha}{\partial x'_\beta} = \frac{\partial u^i_\beta}{\partial x'_\alpha}$$

erfüllt sind. Denn wenn beide Gleichungssysteme erfüllt sind, so giebt es $n$ Functionen $v_1, v_2, \ldots v_n$ der Beschaffenheit, dass die Gleichungen $(F.)$ durch die allgemeine Annahme

$$u_\alpha^i = \frac{\partial v_i}{\partial x'_\alpha}$$

befriedigt werden, und die Substitution $x_1 = v_1,\ x_2 = v_2, \ldots x_n = v_n$ leistet dann die verlangte Transformation von $F$ in $F'$.

Damit die Gleichung $G_4 = G'_4$ möglich sei, müssen die Transformationsrelationen

$$(G_4.) \qquad (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)' = \sum_{i_1 \ldots i_4} (i_1 i_2 i_3 i_4)\, u_{\alpha_1}^{i_1} u_{\alpha_2}^{i_2} u_{\alpha_3}^{i_3} u_{\alpha_4}^{i_4}$$

und die Integrabilitätsbedingungen $(B.)$ erfüllt sein.

Ebenso müssen diese letzteren neben den Transformationsrelationen

$$(G_5.) \qquad (\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)' = \sum_{i \ldots i_4} (i i_1 \ldots i_4)\, u_\alpha^i u_{\alpha_1}^{i_1} \ldots u_{\alpha_4}^{i_4}$$

erfüllt sein, damit die Gleichung $G_5 = G'_5$ möglich sei, u. s. w.

Dies festgestellt, würde die Transformation von $F$ in $F'$ schon dann unmöglich sein, wenn die verschiedenen Systeme von Transformationsrelationen $(F.)$, $(G_4.)$, $(G_5.)$, $(G_6.)$, u. s. w. algebraisch nicht miteinander bestehen könnten, abgesehen von den nothwendig hinzuzufügenden Integrabilitätsbedingungen $(B.)$.

Ich setze daher, indem von den Gleichungen $(B.)$ gänzlich Abstand genommen wird, voraus, die verschiedenen Systeme von Transformationsrelationen, deren Herleitung und Aufeinanderfolge oben festgestellt wurde, seien algebraisch erfüllt; dann handelt es sich darum, ob die Integrabilitätsbedingungen $(B.)$, vermittelst deren aus $F = F'$ alle übrigen Gleichungen $(A.)$ folgten, überflüssig sind oder nicht.

## 9.

Um diese Frage, welche der Kernpunkt des ganzen Transformationsproblems ist, zu erledigen, will ich zur Vermeidung überflüssiger Rechnungen die hier erforderlichen Schlüsse zunächst unter einer bestimmten Voraussetzung darlegen, welche keineswegs festgehalten werden soll, und dann erst zur Behandlung der Frage in derjenigen Form übergehen, in welcher sie gestellt werden muß.

Ich will also voraussetzen 1) dass die Unbekannten $x$ und $u$ beispielsweise durch das Gleichungssystem $(G_4.)$ vollständig und ohne Widerspruch bestimmt sind, und dass 2) diese Werthe der Unbekannten auch dem folgenden Gleichungssystem $(G_5.)$ genügen.



Nimmt man nun von den Gleichungen $(G_4.)$ die Derivirte nach $x'_\alpha$, so folgt ein Gleichungssystem

$$(G'_4.) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)'}{\partial x'_\alpha} &= \sum_{i \ldots i_4} \frac{\partial(i_1 i_2 i_3 i_4)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} u_{\alpha_1}^{i_1} \ldots u_{\alpha_4}^{i_4} + \Pi, \\ \Pi &= \sum_{\lambda i_2 i_3 i_4} (\lambda i_2 i_3 i_4) \frac{\partial u_{\alpha_1}^\lambda}{\partial x'_\alpha} u_{\alpha_2}^{i_2} u_{\alpha_3}^{i_3} u_{\alpha_4}^{i_4} \\ &\quad + \sum_{i_1 \lambda i_3 i_4} (i_1 \lambda i_3 i_4)\, u_{\alpha_1}^{i_1} \frac{\partial u_{\alpha_2}^\lambda}{\partial x'_\alpha} u_{\alpha_3}^{i_3} u_{\alpha_4}^{i_4} + \cdots. \end{aligned} \right.$$

In Bezug auf dieses System ist zunächst festzustellen, was aus unserer ersten Voraussetzung folgt, dass durch dasselbe die Werthe aller Derivirten

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}, \quad \frac{\partial u_{\alpha_s}^\lambda}{\partial x'_\alpha}$$

völlig bestimmt sind, d. h. dass das System $(G'_4.)$ eine der Anzahl dieser Unbekannten gleiche Anzahl von Gleichungen enthält, welche in Bezug auf jene von einander unabhängig sind, und keine Gleichung dieses Systems mit andern im Widerspruche ist.

Setzt man nun

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} - u_\alpha^i = \binom{i}{\alpha}$$

$$\frac{\partial u_{\alpha_s}^\lambda}{\partial x'_\alpha} + \sum_{i i_s} \begin{Bmatrix} i i_s \\ \lambda \end{Bmatrix} u_\alpha^i u_{\alpha_s}^{i_s} - \sum_r \begin{Bmatrix} \alpha\alpha_s \\ r \end{Bmatrix}' u_r^\lambda = \binom{\lambda}{\alpha\alpha_s},$$

so sind $\binom{i}{\alpha} = 0$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s} = 0$ die Gleichungen, mittelst deren in art. 6. aus den vorstehenden Gleichungen $(G'_4.)$ die soeben als die Unbekannten dieses Systems bezeichneten Derivirten weggeschafft wurden, wodurch jene in die Gleichungen $(G_5.)$ übergingen.

Schafft man statt dessen diese Derivirten aus den Gleichungen $(G'_4.)$ mittelst der vorstehenden Formeln weg, so erhält man auf der rechten Seite einen in den Grössen $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ linearen Theil $U_4$, der sich von der ursprünglichen rechten Seite von $(G'_4.)$ nur dadurch unterscheidet, dass $\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$ durch $\binom{i}{\alpha}$, $\frac{\partial u_{\alpha_s}^\lambda}{\partial x'_\alpha}$ durch $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ ersetzt ist. Die übrigen Glieder heben sich gegen die linke Seite weg, da wir voraussetzen, dass die Gleichungen $(G_5.)$ erfüllt sind. Folglich gehen die Gleichungen $(G'_4.)$ über in ein Gleichungssystem

$$U_4 = 0,$$

welches aus jenen erhalten wird, wenn die Unbekannten durch $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ ersetzt, und alle unabhängigen Glieder unterdrückt werden.

Dieses System enthält also ebenfalls eine der Anzahl der Unbekannten $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ gleiche Anzahl von Gleichungen, welche in Bezug auf jene von einander unabhängig sind. Folglich können diese Gleichungen nur dadurch befriedigt werden, dass man allgemein $\binom{i}{\alpha} = 0$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s} = 0$, also namentlich für jedes $i$ und $\alpha$

$$u_\alpha^i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$$

setzt.

Wenn daher die Gleichungen $(G_4.)$ allein alle Unbekannten völlig bestimmen, und die ihnen genügenden Werthe derselben auch die aus $(G_4.)$ fliessenden Gleichungen $(G_5.)$ befriedigen, so sind alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt, so dass bei diesen Voraussetzungen die Gleichungen $(B.)$ überflüssig werden.

10.

Es bedarf nach dem Vorhergehenden keiner neuen Rechnung, um einzusehen, dass diese Folgerungen auch noch stattfinden, wenn alle Unbekannten durch die Gleichungssysteme $(G_p)$, $(G_q)$, $(G_r)$, ... ohne Widerspruch völlig bestimmt sind und zugleich den Gleichungen $(G_{p+1})$, $(G_{q+1})$, $(G_{r+1})$, ... Genüge leisten, welche sich aus diesen nach art. 6. ergeben. In der Tat folgt dann aus jedem System $(G_s)$ mit Rücksicht auf $(G_{s+1})$ ein Gleichungssystem $U_s = 0$, und es muss sich dann unter der Schaar von Gleichungen

$$U_p = 0, \quad U_q = 0, \quad U_r = 0, \quad \ldots$$

eine Gruppe finden, welche ebenso viel Gleichungen enthält als Unbekannte vorhanden sind, und deren Determinante von Null verschieden ist.

Zu den Gleichungen, aus denen man die ursprünglichen Unbekannten $x$ und $u$ zu bestimmen hat, gehören in erster Linie die Transformationsrelationen $(F.)$ selbst; sie unterscheiden sich von den übrigen ausser ihnen zu verwendenden Gleichungssystemen, z. B. von den Gleichungen $(G_4.)$ dadurch, dass die aus ihnen nach art. 6. abzuleitenden Gleichungen identisch erfüllt sind, indem sich für $(i_1 i_2) = \omega_{i_1 i_2}$, $(i i_1 i_2) = 0$ ergab. Folglich erhalten wir den Lehrsatz:

*Aus dem ursprünglichen Differentialausdrucke $F$ leite man zunächst nach den artt. 5. und 7. die Form $G_4$ ab, und dann aus dieser nach art. 6. die Formenreihe $G_5$, $G_6$, u. s. w. Wenn alsdann durch die Transformationsrelationen, welche zu den Gleichungen*

$$F = F', \quad G_4 = G_4', \quad G_5 = G_5', \quad \ldots \quad G_p = G_p'$$

*gehören, die Werthe der Unbekannten $x$ und $u$ ohne Widerspruch völlig bestimmt sind, und die nämlichen Werthe der Unbekannten auch noch den Transformationsrelationen Genüge leisten, welche sich aus der nächstfolgenden Gleichung*

$$G_{p+1} = G'_{p+1}$$

*ergeben, so sind zugleich alle für die Transformation von $F$ in $F'$ erforderlichen Integrabilitätsbedingungen erfüllt, und es wird allgemein*

$$u_\alpha^i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}.$$



Durch diesen Lehrsatz, welcher in allen Fällen, wo er Anwendung findet, die Frage nach den Integrabilitätsbedingungen überflüssig macht, wird für die Anwendungen der algebraischen Invariantentheorie ein neues und fruchtbares Gebiet eröffnet.

In der That kommt bei der Anwendung dieses Satzes der Umstand nicht mehr in Betracht, dass die Grössen $\partial x$, $\partial \underset{1}{x}$, ... vollständige Differentiale bedeuten, sondern man hat $F$, $G_4$, $G_5$, ... nur noch als algebraische homogene Formen mit den Variabelnsystemen $\partial x$, $\partial \underset{1}{x}$, ... zu betrachten, unter der Voraussetzung, dass alle Variabelnsysteme der nämlichen linearen Substitution unterliegen.

Unter dieser Bedingung hat man nun, was aus rein algebraischen Gründen entschieden wird, die Reihe der aufeinanderfolgenden Formen $F$, $G_4$, $G_5$, ... soweit fortzusetzen, bis sie $n$ absolute Invarianten und ebensoviel zugehörige Formen $\Psi_s$ liefern, von denen die ersten *in Bezug auf die Variabeln $x$*, die letztern überhaupt von einander unabhängig sind. Sodann hat man noch für die um ein Glied weiter fortgesetzte Formenreihe $F$, $G_4$, $G_5$, ... ein vollständiges System von Invarianten $I$, $I_1$, ... zu ermitteln, welche *in Bezug auf die Coefficienten dieser Formen* von einander unabhängig sind.

Dann besteht das System aller für die Möglichkeit der Transformation von $F$ in $F'$ erforderlichen und ausreichenden Bedingungen in den Gleichungen

$$I' = r^\lambda I, \quad I_1' = r^{\lambda_1} I_1, \quad \ldots,$$

wo $r$ die Substitutionsdeterminante ist, und die Exponenten $\lambda$ constante Werthe haben.

Es ist angemessen, *diese Invarianten $I$, $I_1$, ... der hinreichend weit, aber nicht weiter als nöthig fortgesetzten Formenreihe $F$, $G_4$, $G_5$, ...*

*auch als ein vollständiges System von Invarianten des Differentialausdruckes $F$ zu bezeichnen.*

Seien $U_1, U_2, \ldots U_n$ die Variabeln in den ursprünglichen, $V_1, V_2, \ldots V_n$ dieselben in den transformirten zugehörigen Formen, so dass zur ursprünglichen Substitution

$$\partial x_i = \sum_\alpha u_\alpha^i \partial x'_\alpha$$

die transponirte

$$V_\alpha = \sum_i u_\alpha^i U_i$$

gehört. Sind unter dieser Voraussetzung die Gleichungen zwischen den zugehörigen Formen die folgenden

$$\Psi'_s(V_1, V_2, \ldots) = r^{\mu_s} \Psi_s(U_1, U_2, \ldots),$$

für $s = 1, 2, \ldots n$ und constante Werthe der $\mu$, so folgen, wenn unter $\Omega$ eine beliebige Function der ursprünglichen Variabeln verstanden, und allgemein

$$U_i = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\Psi'_s\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1'}, \frac{\partial \Omega}{\partial x_2'}, \ldots\right) = r^{\mu_s} \Psi_s\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}, \ldots\right).$$

*Solche, eine willkürliche Function $\Omega$ enthaltende Ausdrücke*

$$\Psi_s\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}, \ldots\right)$$

*müssen als zugehörige Formen des Differentialausdruckes $F$ bezeichnet werden.*

Ebenso liefern die Covarianten des Systems $F, G_4, G_5, \ldots n$ Gleichungen

$$\Phi'_s(\partial x'_1, \partial x'_2, \ldots) = r^{\nu_s} \Phi_s(\partial x_1, \partial x_2, \ldots),$$

und *die Differentialausdrücke*

$$\Phi_s(\partial x_1, \partial x_2, \ldots)$$

*müssen als Covarianten des Differentialausdruckes $F$ selbst bezeichnet werden.*

## 11.

Um den Inhalt des im vorigen art. gefundenen Satzes genau festzustellen, muss hervorgehoben werden, dass die Bedingungen desselben nicht unter allen Umständen erfüllt werden können. Wenn es sich z. B. um die Frage handelt, ob zwei gegebene Oberflächen auf einander ohne Dehnung abgewickelt werden können, so hat man eine Gleichung $F = F'$ für $n = 2$ zu untersuchen. Wenn nun die Abwickelung einer



Fläche auf die andere, also die vorstehende Gleichung möglich ist, so wird man aus den in den Gleichungen $F = F'$, $G_4 = G'_4$, $G_5 = G'_5, \ldots$ enthaltenen Transformationsrelationen, wie weit diese Reihe auch fortgesetzt werden mag, doch in denjenigen Fällen niemals bestimmte Werthe der $x$ und $u$ erhalten, wo die vorgelegten Flächen in sich selbst stetig verschoben werden können, weil in diesen Fällen die Transformationsrelationen, ohne Aenderungen der neuen Variabeln, stetige Aenderungen der ursprünglichen gestatten.

Es ist hiernach leicht, die Bedingungen für den allgemeinen Fall anzugeben, welcher der Verschiebbarkeit einer Fläche in sich selbst entspricht.

Das Grössengebiet der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ wird ein bei unveränderlichem $F$ in sich verschiebbares genannt, wenn durch das Resultat der Transformation von $F$ die anzuwendende Substitution nicht völlig bestimmt ist. Es ist klar, dass die sämmtlichen Bedingungen für das Stattfinden dieses Falles in identischen Gleichungen zwischen solchen Invarianten und zugehörigen Formen von $F$ bestehen, welche unter den Voraussetzungen des vorigen art. von einander unabhängige Functionen der Variabeln $x$ und $u$ sind.

In diesem Falle werden die Integrabilitätsbedingungen nicht überflüssig, weil man allen Transformationsrelationen genügen kann, ohne die in art. 9. durch $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_\nu}$ bezeichneten Ausdrücke gleich 0 zu setzen.

Für alle übrigen Fälle gilt das schöne, und aus der Natur der Sache keineswegs a priori zu erwartende Resultat, dass alle für die Möglichkeit der Transformation von $F$ in $F'$ nothwendigen und ausreichenden Bedingungen sich als Gleichungen zwischen Invarianten darstellen lassen, wenn dieser Ausdruck zur Bezeichnung der gleichen Formverhältnisse wie in der Algebra angewandt wird, und dass auch bei dem hier behandelten Transformationsproblem zugehörige Formen und Covarianten genau in derselben Bedeutung, wenn auch aus ganz anderer Quelle auftreten, wie bei den analogen algebraischen Problemen.

## 12.

Als Beispiel zur vorangehenden Theorie behandle ich den Fall $n = 3$, bei welchem sich merkwürdige Vereinfachungen darbieten.

Werden wie in Gleichung (20.) für $i_1 i_2$ ebenso wie für $k_1 k_2$ nur Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen 123, also z. B. nur die Gruppen 23, 31, 12 genommen, so kann man die Transformationsrelationen (18.) von $G_4$ in die Form

$$(\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2)' = {\sum}' (i_1 i_2 k_1 k_2)\left(u^{i_1}_{\beta_1} u^{i_2}_{\beta_2} - u^{i_1}_{\beta_2} u^{i_2}_{\beta_1}\right)\left(u^{k_1}_{\gamma_1} u^{k_2}_{\gamma_2} - u^{k_1}_{\gamma_2} u^{k_2}_{\gamma_1}\right)$$

setzen.

Ich bestimme nun vier Zahlen $\beta$, $\gamma$, $i$ und $k$ durch die Bedingung, dass $\beta\beta_1\beta_2$, $\gamma\gamma_1\gamma_2$, $i i_1 i_2$ und $k k_1 k_2$ positive Permutationen der Zahlen 123 werden, so dass also gleichzeitig z. B.

$$\begin{aligned} & \beta = 1, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 3, \\ \text{oder } & \beta = 2, \quad \beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 1, \\ \text{oder } & \beta = 3, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 2 \end{aligned}$$

wird. Man erkennt hieraus, dass auch umgekehrt durch den Werth von $\beta$ sowohl $\beta_1$ als $\beta_2$ bestimmt ist.

Dies festgestellt, bezeichne ich die aus einer Aenderung von $u^i_\alpha$ hervorgehende Unterdeterminante von $r$ durch $r^i_\alpha$ und setze, da $i_1 i_2$ sowie $k_1 k_2$ durch die Werthe von $i$ und $k$ völlig bestimmt sind,

$$(i_1 i_2 k_1 k_2) = A_{ik},$$

so dass nach (14.)

$$(a.)\quad \begin{cases} A_{11} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 \omega_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \omega_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \omega_{33}}{\partial x_2^2}\right) + \sum_{\alpha\beta} \frac{E_{\alpha\beta}}{E}\left(\begin{bmatrix}23\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\ \beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}22\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}33\\ \beta\end{bmatrix}\right) \\ A_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \omega_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \omega_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \omega_{13}}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \sum_{\alpha\beta} \frac{E_{\alpha\beta}}{E}\left(\begin{bmatrix}11\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\ \beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}12\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13\\ \beta\end{bmatrix}\right) \end{cases}$$

wird, woraus die übrigen durch zyklische Vertauschung von 123 folgen.

Dann nehmen die Transformationsrelationen von $G_4$ die einfache Form an:

$$(b.)\qquad A'_{\beta\gamma} = \sum_{ik} A_{ik} r^i_\beta r^k_\gamma.$$

In ähnlicher Weise lassen sich die zu $F = F'$ gehörigen Transformationsrelationen, wie z. B. aus der zugehörigen Form von $F$ hervorgeht, durch die folgenden ersetzen:

$$(c.)\qquad E'_{\beta\gamma} = \sum_{ik} E_{ik} r^i_\beta r^k_\gamma.$$

Hierzu gehört die Bemerkung, dass wegen der Gleichungen (19.)

$$(d.)\qquad A_{ki} = A_{ik}$$

ist und, was später zur Anwendung kommt, $A_{ik}$ sein Zeichen wechselt, wenn $i_1$ und $i_2$ oder $k_1$ und $k_2$ mit einander vertauscht werden.

Die Gleichungen (*b.*) und (*c.*) sind hiernach nichts anderes als die Transformationsrelationen für die simultane Ueberführung der ternären quadratischen Formen



$$\Gamma = \sum_{ik} A_{ik} X_i X_k,$$

$$\Phi = \sum_{ik} E_{ik} X_i X_k$$

in die folgenden

$$\Gamma' = \sum_{ik} A'_{ik} \Xi_i \Xi_k,$$

$$\Phi' = \sum_{ik} E'_{ik} \Xi_i \Xi_k$$

mittelst der linearen Substitution

$$(e.)\qquad X_i = \sum_\beta r^i_\beta \Xi_\beta,$$

deren Determinante

$$R = r^2$$

ist, und zu welcher die inverse Substitution

$$(e'.)\qquad \Xi_\beta = \sum_i \frac{1}{r} u^i_\beta X_i$$

gehört.

Es ist bekannt, dass dieses Transformationsproblem ein bestimmtes ist, indem vier simultane Invarianten und drei zugehörige Formen existiren, welche in Bezug auf die Variabeln der letztern und die Coefficienten von $\Gamma$, $\Phi$ von einander unabhängig sind. Daraus ergeben sich drei absolute Invarianten; wenn diese auch in Bezug auf die Variabeln $x_1$, $x_2$, $x_3$ von einander unabhängig sind, so ist es nach dem Lehrsatze des art. 10. für die gegenwärtige Untersuchung nur noch nöthig, zu $F$ und $G_4$ die nächstfolgende Form $G_5$ abzuleiten. Nun ist nach art. 6.

$$\begin{aligned}(g i_1 i_2 k_1 k_2) = \frac{\partial (i_1 i_2 k_1 k_2)}{\partial x_g} - \sum_\lambda \Big[ & \begin{Bmatrix} g i_1 \\ \lambda \end{Bmatrix}(\lambda i_2 k_1 k_2) + \begin{Bmatrix} g i_2 \\ \lambda \end{Bmatrix}(i_1 \lambda k_1 k_2) \\ & + \begin{Bmatrix} g k_1 \\ \lambda \end{Bmatrix}(i_1 i_2 \lambda k_2) + \begin{Bmatrix} g k_2 \\ \lambda \end{Bmatrix}(i_1 i_2 k_1 \lambda)\Big].\end{aligned}$$

In dieser Summe hat man im ersten Gliede für $\lambda$ nur die Werthe $i_1$ und $i$ zu nehmen, da $(i_2 i_2 k_1 k_2) = 0$ ist. Verfährt man ebenso bei den übrigen Gliedern, und vertauscht in den Fällen, wo $\lambda = i$ oder $= k$ gesetzt wird, diesen Index mit dem zugehörigen, so folgt zunächst

$$\begin{aligned}(g i_1 i_2 k_1 k_2) = {} & \frac{\partial (i_1 i_2 k_1 k_2)}{\partial x_g} - (i_1 i_2 k_1 k_2)\left[\begin{Bmatrix} g i_1 \\ i_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g i_2 \\ i_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g k_1 \\ k_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g k_2 \\ k_2 \end{Bmatrix}\right] \\ & + \begin{Bmatrix} g i_1 \\ i \end{Bmatrix}(i_2 i k_1 k_2) + \begin{Bmatrix} g i_2 \\ i \end{Bmatrix}(i i_1 k_1 k_2) + \begin{Bmatrix} g k_1 \\ k \end{Bmatrix}(i_1 i_2 k_2 k) + \begin{Bmatrix} g k_2 \\ k \end{Bmatrix}(i_1 i_2 k k_1).\end{aligned}$$

Nun sind $i_1 i_2 i$, $i_2 i i_1$ und $k_1 k_2 k$, $k_2 k k_1$ zugleich mit $i i_1 i_2$ und $k k_1 k_2$

positive Permutationen von 123; also folgt, wenn rechts in der Klammer des Subtrahenden noch $\left\{\begin{smallmatrix} g\,i \\ i \end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix} g\,k \\ k \end{smallmatrix}\right\}$ addirt wird:

$$(g\,i_1 i_2 k_1 k_2) = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_g} - 2A_{ik}\sum_r \left\{\begin{matrix} g\,r \\ r \end{matrix}\right\}$$

$$+\left\{\begin{matrix} g\,i \\ i \end{matrix}\right\} A_{ik} + \left\{\begin{matrix} g\,i_1 \\ i \end{matrix}\right\} A_{i_1 k} + \left\{\begin{matrix} g\,i_2 \\ i \end{matrix}\right\} A_{i_2 k} + \left\{\begin{matrix} g\,k \\ k \end{matrix}\right\} A_{ik} + \left\{\begin{matrix} g\,k_1 \\ k \end{matrix}\right\} A_{ik_1} + \left\{\begin{matrix} g\,k_2 \\ k \end{matrix}\right\} A_{ik_2}.$$

Diesen durch die Werthe $g$, $i$, $k$ völlig bestimmten Ausdruck bezeichne ich durch $A_{gik}$, so dass

$$(g\,i_1 i_2 k_1 k_2) = A_{gik},$$

und nach der leicht herzuleitenden Formel

$$2\sum_r \left\{\begin{matrix} g\,r \\ r \end{matrix}\right\} = \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial x_g}$$

$$(f.) \qquad A_{gik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_g} - \frac{A_{ik}}{E}\frac{\partial E}{\partial x_g} + \sum_\lambda \left[\left\{\begin{matrix} g\lambda \\ i \end{matrix}\right\} A_{\lambda k} + \left\{\begin{matrix} g\lambda \\ k \end{matrix}\right\} A_{i\lambda}\right]$$

wird. Dieser Ausdruck hat die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn $i$ mit $k$, dagegen sein Zeichen zu wechseln, wenn $i_1$ mit $i_2$ oder $k_1$ mit $k_2$ vertauscht wird. In Folge dessen lassen sich die zu $G_5 = G_5'$ gehörigen Transformationsrelationen

$$A'_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{g i_1 i_2 k_1 k_2} A_{gik} u^g_\alpha u^{i_1}_{\beta_1} u^{i_2}_{\beta_2} u^{k_1}_{\gamma_1} u^{k_2}_{\gamma_2}$$

in die einfachere Form

$$(g.) \qquad A'_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{gik} A_{gik} u^g_\alpha r^i_\beta r^k_\gamma$$

bringen und führen nun zu einem weitern merkwürdigen Resultate.

Sind nämlich für die zugehörigen Formen von $\Gamma$ und $\Phi$ $U_1 U_2 U_3$ die ursprünglichen, $V_1 V_2 V_3$ die neuen Variabeln, so dass die entsprechende, zu (*e.*) transponirte Substitution wird

$$(h.) \qquad V_\alpha = \sum_g r^g_\alpha U_g,$$

woraus durch Umkehrung

$$(h'.) \qquad U_g = \sum_\alpha \frac{1}{r} u^g_\alpha V_\alpha$$

folgt, so erhält man aus der Gleichung (*g.*), indem man mit $V_\alpha \Xi_\beta \Xi_\gamma$ multiplicirt und nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ summirt:

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} A'_{\alpha\beta\gamma} V_\alpha \Xi_\beta \Xi_\gamma = r \sum_{gik} A_{gik} U_g X_i X_k.$$

Da aber $r = R^{\frac{1}{2}}$ eine Potenz der Substitutionsdeterminante ist, und in beiden Summen sowohl die Variabeln der ursprünglichen als auch die der zugehörigen Formen vorkommen, so müssen dieselben



entsprechende simultane Zwischenformen sein, und wir können demnach den folgenden Lehrsatz aussprechen:

*Um die für die Möglichkeit der Transformation eines ternären quadratischen Differentialausdruckes*

$$F = \sum \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k$$

*in einen andern*

$$F' = \sum \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k$$

*erforderlichen und ausreichenden Bedingungen und, falls dieselben erfüllt sind, die Substitution zu erhalten, welche die verlangte Transformation leistet, bilde man mittelst der Coefficienten von $F$ die drei algebraischen ternären Formen*

$$\Gamma = \Sigma A_{ik} X_i X_k$$
$$\Phi = \Sigma E_{ik} X_i X_k$$
$$\Theta = \Sigma A_{gik} U_g X_i X_k,$$

*und für $F'$ in gleicher Weise die entsprechenden Formen $\Gamma'$, $\Phi'$, $\Theta'$ mit den Variabeln $\Xi$ und $V$ an Stelle von $X$ und $U$.*

*Dann sind die verlangten Bedingungen genau die nämlichen, welche erforderlich sind und hinreichen, damit durch eine directe Substitution*

$$X_i = \sum_\alpha r^i_\alpha \Xi_\alpha$$

*$\Gamma$ in $\Gamma'$, $\Phi$ in $\Phi'$ transformirt werde, und unter Voraussetzung der transponirten Substitution*

$$V_\alpha = \sum_i r^i_\alpha U_i$$

*gleichzeitig $\Theta$ und $\Theta'$ entsprechende Zwischenformen werden, welche der Gleichung*

$$\Theta' = R^{\frac{1}{2}} \Theta$$

*genügen.*

*Dieser Satz findet jedoch nur unter der Voraussetzung statt, dass die sechs absoluten zugehörigen Formen und Invarianten von $\Gamma$, $\Phi$ von einander unabhängige Functionen der Variabeln $x_1 x_2 x_3 U_1 U_2 U_3$ sind.*

*Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man aus den Gleichungen zwischen den ursprünglichen und transformirten Covarianten von $\Gamma$, $\Phi$ die Coefficienten $\frac{1}{r} u^i_\beta$ der inversen Substitution, also da $r$ durch die Invarianten bestimmt ist, $u^i_\beta$ selbst und zwar so, dass allgemein*

$$u^i_\beta = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}$$

*wird.*

*Ist sie nicht erfüllt, so folgt statt des vorstehenden Satzes das Resultat, dass das Grössengebiet der Variabeln $x_1 x_2 x_3$ ohne Aenderung von $F$ stetig in sich verschoben werden kann.*

Aus art. 10. folgt, dass unter den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes alle für die Möglichkeit der Transformation von $F$ in $F'$ erforderlichen und ausreichenden Bedingungen sich mittelst der simultanen Invarianten dreier homogenen Formen $F$, $G_4$, $G_5$ und ihrer transformirten darstellen lassen. Dieses Resultat setzt ebenso wie der obige Satz voraus, dass bei der Elimination der Substitutionscoefficienten $u_\alpha^i$ oder $r_\alpha^i$, aus welcher die in Rede stehenden algebraischen Grundformen hervorgehen, auf Integrabilitätsbedingungen zwischen denselben keinerlei Rücksicht genommen werde.

Nun ist oben gefordert, es sollen sich die Grössen $A_{gik}$ durch die Coefficienten von $\Gamma$ und $\Phi$, und die Grössen $A'_{gik}$ in der gleichen Weise durch die Coefficienten von $\Gamma'$ und $\Phi'$ so ausdrücken lassen, dass 1) $\Theta$ eine simultane Zwischenform von $\Gamma$ und $\Phi$, 2) $\Theta'$ die nämliche simultane Zwischenform von $\Gamma'$ und $\Phi'$, und 3) $\Theta' = R^{\frac{1}{2}}\Theta$ wird. Der Exponent von $R$ zeigt, dass diesen Bedingungen nicht genügt werden kann, wenn die Grössen $A_{gik}$ rationale Functionen der Grössen $A_{ik}$, $E_{ik}$ sind. Andererseits lassen sich diese Bedingungen sicher befriedigen, wenn $F'$ nicht willkürlich gegeben, sondern aus $F$ durch irgend eine Substitution, z. B. die identische $x_i = x_i'$ abgeleitet worden ist. Also haben wir den Satz:

*Man kann für jeden ternären quadratischen Differentialausdruck $F$ die in den Gleichungen (f.) eingeführten Grössen $A_{gik}$ als irrationale Functionen der Coefficienten von $\Gamma$ und $\Phi$ so darstellen, dass $\Theta$ eine simultane Zwischenform von $\Gamma$ und $\Phi$ wird, die zu ihrer transformirten in der Beziehung $\Theta' = R^{\frac{1}{2}}\Theta$ steht.*

Fügt man zu dieser die Gleichungen $\Gamma' = \Gamma$, $\Phi' = \Phi$ und

$$\Sigma \pm r_1^1 r_2^2 r_3^3 = R,$$

so erhält man 31 Transformationsrelationen, aus denen sich, obgleich die Variabeln von $\Theta$ verschiedenen Substitutionen unterworfen sind, die 9 Substitutionscoefficienten $r_\alpha^i$ so eliminiren lassen, dass alle Eliminationsresultate die Invariantenform

$$I' = R^\lambda I$$

annehmen.

In dem Hauptfalle, wo durch das Resultat der Transformation von $\Gamma$ und $\Phi$ die anzuwendende Substitution völlig bestimmt ist, gilt das Gleiche nothwendig auch von den drei Functionen $\Gamma$, $\Phi$ und $\Theta$. Alsdann ist die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten



1) von $\Gamma$ und $\Phi$ allein gleich 4, 2) von $\Gamma$, $\Phi$ und $\Theta$ zusammen gleich 22, also 3) die Anzahl derjenigen unter ihnen, welche nothwendig Coefficienten von $\Theta$ enthalten, gleich 18.

Nach der in art. 10. angewandten Ausdrucksweise hat also der Differentialausdruck $F$ im gegenwärtigen Falle 22 Invarianten überhaupt und 21 absolute, ausserdem drei von einander unabhängige zugehörige Formen und ebenso viel Covarianten.

Ueber die beim vorigen Lehrsatze ausgeschlossenen Differentialausdrücke $F$, zu denen unter andern das Quadrat des Linienelementes im Raume von drei Dimensionen gehört, liegt eine Abhandlung aus dem Nachlasse Riemanns[1]) vor, zu welcher Herr Dedekind die dort unterdrückten analytischen Entwicklungen in Aussicht gestellt hat.

---

1) *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Abh. der Göttinger Ges. d. W. vom Jahre 1867, Band XIII. (Gesammelte Werke S. 254.)

3. Januar 1869.

# XIX.

## Ueber ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 70, 1869, S. 241—245.)

Die Lehrsätze, welche ich im art. 10 meiner Abhandlung über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades (p. 46 dieses Bandes)*) bewiesen habe, setzen voraus, dass man die dort eingeführte Formenreihe $F$, $G_4$, $G_5$, ... soweit fortgesetzt habe, bis sie 1) $n$ absolute Invarianten und 2) ebensoviel zugehörige Formen liefert, von denen die erstern in Bezug auf die ursprünglichen Variabeln, die letztern überhaupt voneinander unabhängig sind. Von diesen beiden Bedingungen ist, wie ich seitdem bemerkt habe, die erste für das Stattfinden der erwähnten Sätze nicht bloss nothwendig, sondern auch hinreichend, so dass die zugehörigen Formen stets in der geforderten Zahl vorhanden sind, wenn $n$ voneinander unabhängige absolute Invarianten existiren.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf einen Umstand, welcher bei der Auflösung linearer Gleichungen eintreten kann und der folgenden Anwendung wegen einer Erörterung bedarf. Derselbe besteht darin, dass ein System von linearen Gleichungen, welches nicht zur völligen Bestimmung aller Unbekannten hinreicht, gleichwohl unter Umständen für gewisse Unbekannten Werthe liefern kann, welche von jeder Unbestimmtheit frei sind.

Um die Bedingungen für diesen Fall darzustellen, sei A. ein System von $p+m$ oder mehr linearen Gleichungen mit den Unbekannten $y_1, y_2, \dots y_{p+m}$ und den unabhängigen Gliedern $z_1, z_2, \dots$ Ich setze voraus, dass alle Determinanten dieses Systems, deren Ordnung $> p$ ist, gleich Null, aber die Determinanten $p^{\text{ter}}$ Ordnung nicht alle gleich Null sind. Insbesondere sei diejenige Determinante $p^{\text{ter}}$ Ordnung von Null verschieden und $= \Delta$, welche den Unbekannten $y_1, y_2, \dots y_p$ in den Gleichungen entspricht, deren unabhängige Glieder $z_1, z_2, \dots z_p$ sind (vergl. **Baltzer**, Theorie und Anwendung der Determinanten, zweite Auflage, §. 8, 3 und §. 4, 7).

*) S. 352 dieses Bandes.



Werden nun diese $p$ Gleichungen nach $y_1, y_2, \dots y_p$ aufgelöst, und die gefundenen Werthe in die übrigen Gleichungen eingesetzt, so fallen aus diesen (nach §. 3, 16 des angef. Werkes) auch die übrigen Unbekannten $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots y_{p+m}$ weg, und man erhält demnach einerseits die Werthe, welche den Grössen $z_{p+1}, z_{p+2}, \dots$ beigelegt werden müssen, wenn das System A. keinen Widerspruch enthalten soll, während andererseits das Resultat folgt, dass die Unbekannten $y_1, y_2, \dots y_p$ sich durch $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots y_{p+m}$ ausdrücken, diese letztern dagegen willkürlich bleiben.

Damit nun, was dem obigen Falle entspricht, z. B. $y_1$ einen Werth erhalte, der von jeder Unbestimmtheit frei ist, ist erforderlich und hinreichend, dass die $m$ Determinanten $p^{\text{ter}}$ Ordnung $= 0$ sind, welche aus $\Delta$ hervorgehen, wenn man jeden Coefficienten von $y_1$ durch den derselben Gleichung entnommenen Coefficienten einer der Unbekannten $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots y_{p+m}$ ersetzt, indem diese Ausdrücke bis aufs Zeichen die Coefficienten sind, mit denen diese Unbekannten im Ausdrucke von $\Delta \cdot y_1$ multiplicirt sind.

### 1.

Ich will nun im Anschlusse an die artt. 9. 10. meiner oben erwähnten Abhandlung voraussetzen, es liege ein System von Gleichungen beliebiger Form

$$(1.) \qquad \mathfrak{A} = 0$$

vor, in welchem zwei Gruppen von Unbekannten vorkommen, nämlich $x_1, x_2, \dots x_n$ und $u_1', u_2', \dots u_n^{(n)}$, und eine Gruppe von unabhängigen Variabeln, nämlich $x_1', x_2', \dots x_n'$. Von diesem System werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:

*a*) Das System (1.) liefere völlig bestimmte Werthe der Unbekannten $x$ als Functionen der Variabeln $x'$.

*b*) Ob es auch zur Bestimmung der Unbekannten $u$ ausreiche, bleibt dahingestellt.

*c*) Dagegen soll, wenn man nach den unabhängigen Variabeln differentiirt und hierauf

$$(2.) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} = u_\alpha^{(i)}, \quad \frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x_\alpha'} = \varphi_{\alpha\beta}^{(i)}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{x}')$$

einsetzt, ein Gleichungssystem

$$(3.) \qquad \mathfrak{B} = 0$$

folgen, von welchem ich voraussetze, dass es durch die dem System (1.) genügenden bestimmten Werthe der $x$ und irgend ein gleichzeitig genügendes System der $u$ befriedigt wird.

Dann ergeben sich folgende Schlüsse. Wegen *a*) liefern die Gleichungen

$$(1'.)\qquad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x'_\alpha} = 0$$

völlig bestimmte Werthe für die Derivirten von $x_1, x_2, \dots x_n$, während die Frage, ob die aus ihnen folgenden Werthe der Derivirten von $u'_1, u'_2, \dots$ ebenfalls von jeder Unbestimmtheit frei sind, nach *b*) dahingestellt bleiben muss.

Aus (1'.) eliminire man nun alle Derivirten mittelst der Gleichungen

$$(2'.)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} = u_\alpha^{(i)} + \binom{i}{\alpha}, \quad \frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x'_\alpha} = \varphi_{\alpha\beta}^{(i)}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{x}') + \binom{i}{\alpha\beta};$$

dann muss man, weil die Gleichungen (1'.) in den Derivirten linear sind, aus jeder von ihnen eine Gleichung von der Form $U + \mathfrak{B} = 0$ erhalten, wo $\mathfrak{B}$ dieselbe Bedeutung wie in (3.) hat, und $U$ aus $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x'_\alpha}$ erhalten wird, wenn man allgemein $\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$ durch $\binom{i}{\alpha}$, $\frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x'_\alpha}$ durch $\binom{i}{\alpha\beta}$ ersetzt und diejenigen Glieder weglässt, welche keine Derivirte enthalten. Da aber nach Voraussetzung *c*) stets $\mathfrak{B} = 0$ ist, so liefert jede Gleichung (1'.) eine neue Gleichung

$$(3'.)\qquad U = 0,$$

welche sich von jener nur dadurch unterscheidet, dass alle unabhängigen Glieder unterdrückt sind, während die ursprünglichen Unbekannten $\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$, $\frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x'_\alpha}$ durch andere, nämlich $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{i}{\alpha\beta}$ ersetzt sind.

Diesem Gleichungssystem kann man daher genügen, indem man alle Unbekannten $= 0$ setzt. Da es aber für die Unbekannten $\binom{i}{\alpha}$ Werthe liefern muss, die keine Unbestimmtheit enthalten, so kann ihm auch nur dadurch genügt werden, dass man alle $\binom{i}{\alpha} = 0$ setzt. Wir haben daher den Satz:

*d*) Wenn die obigen Voraussetzungen erfüllt sind, so sind auch die Unbekannten $u_\alpha^{(i)}$ des Gleichungssystems (1.), (3.) keiner Unbestimmtheit fähig, sondern es folgt allgemein

$$u_\alpha^{(i)} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}.$$

2.

Dies festgestellt, betrachte ich noch einmal die Systeme von Transformationsrelationen, welche aus den Gleichungen $F = F'$,



$G_4 = G'_4$, $G_5 = G'_5, \dots$ hervorgehen. Nimmt man an, dass die zu den Gleichungen

$$(4.)\qquad F = F', \quad G_4 = G'_4, \quad G_5 = G'_5, \quad G_p = G'_p$$

gehörigen Transformationsrelationen völlig bestimmte Werthe der ursprünglichen Variabeln $x$ als Functionen der neuen Variabeln $x'$ liefern, und dass diese, sowie irgend ein gleichzeitig genügendes System der $u$ auch den in

$$(5.)\qquad G_{p+1} = G'_{p+1}$$

enthaltenen Transformationsrelationen Genüge leisten, so folgt aus dem obigen Satze, dass allgemein

$$(6.)\qquad u_\alpha^{(i)} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha},$$

also die Transformation von $F$ in $F'$ möglich ist.

Die Bedingungen hierfür ergeben sich wie folgt. Man betrachte die Gleichungen (4.) und (5.) als rein algebraische und bilde 1) ein vollständiges System voneinander unabhängiger absoluter Invarianten $I_1, I_2, \dots I_\lambda$ des Formensystems

$$(a.)\qquad F, G_4, G_5, \dots G_p,$$

2) die absoluten Invarianten $I_{\lambda+1}, I_{\lambda+2}, \dots I_l$, welche zu jenen gefügt werden müssen, um ein vollständiges System voneinander unabhängiger absoluter Invarianten der um ein Glied weiter fortgesetzten Formenreihe

$$(b.)\qquad F, G_4, G_5, \dots G_p, G_{p+1}$$

zu erhalten.

Dann ist für die Anwendbarkeit der obigen Schlüsse erforderlich und hinreichend, dass 1) unter den $\lambda$ Invarianten der ersten Gruppe sich deren $n$, etwa $I_1, I_2, \dots I_n$ befinden, welche in Bezug auf die Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ voneinander unabhängig sind, und dass 2) die Werthe der ursprünglichen Variabeln als Functionen der neuen, welche sich aus den Gleichungen $I_1 = I'_1$, $I_2 = I'_2, \dots I_n = I'_n$ ergeben, auch den übrigen Gleichungen $I_\alpha = I'_\alpha$ der ersten Gruppe, soweit solche vorhanden sind, und allen Gleichungen $I_\beta = I'_\beta$ der zweiten Gruppe Genüge leisten. Sind nämlich diese Bedingungen erfüllt, so enthalten die aus (4.) und (5.) hervorgehenden Transformationsrelationen auch in Bezug auf die Werthe der Unbekannten $u$ keinen Widerspruch, und es folgt nun mit Nothwendigkeit die Gleichung (6.). Mit Rücksicht darauf, dass bei diesen Untersuchungen vorausgesetzt ist, dass die Determinante von $F$ nicht identisch $= 0$ ist, haben wir also den folgenden Satz:

*Es seien $F$ und $F'$ zwei vollständige quadratische Differentialformen mit den Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ und $x'_1, x'_2, \dots x'_n$. Um zu untersuchen, ob die eine in die andere transformirt werden könne, bilde man die Formenreihe $F, G_4, G_5, \dots$ für $F$ und die entsprechende für $F'$. Wenn alsdann unter den absoluten Invarianten von*

$$(a.) \qquad F,\ G_4,\ G_5,\ \dots\ G_p,$$

*als System von simultan zu transformirenden algebraischen Formen betrachtet, sich deren $n$ befinden, welche in Bezug auf die Variabeln $x$ voneinander unabhängig sind, ohne dass dies der Fall ist, wenn man $G_p$ aus der Formenreihe weglässt, so bestehen die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation des Differentialausdruckes $F$ in $F'$ darin, dass die als algebraische betrachteten Formen*

$$(b.) \qquad F,\ G_4,\ G_5,\ \dots\ G_p,\ G_{p+1}$$

*durch übereinstimmende lineare Substitutionen gleichzeitig in*

$$(b'.) \qquad F',\ G'_4,\ G'_5,\ \dots\ G'_p,\ G'_{p+1}$$

*transformirt werden können, und diese Bedingungen werden daher durch die Gleichheit der entsprechenden absoluten Invarianten der Formenreihen (b.) und (b'.) vollständig ausgedrückt.*

*Wenn dagegen die algebraische Formenreihe (a.), wie weit sie auch fortgesetzt werden mag, niemals $n$ absolute Invarianten liefert, welche in Bezug auf die Variabeln $x$ voneinander unabhängig sind, so ist die Transformation von $F$ in $F'$ selbst in den Fällen, wo sie möglich ist, doch keine bestimmte,*

weil in diesem Falle, wo die Invarianten allein zur Ermittelung der gesuchten Substitution nicht ausreichen, noch die Differentialgleichungen des Problems zu Hülfe genommen werden müssen, so dass die Substitution nothwendig verfügbare Elemente enthält, welche stetiger Aenderungen fähig sind.

Berlin, den 7. April 1869.