D

Prof. Dr. E. B. Christoffel

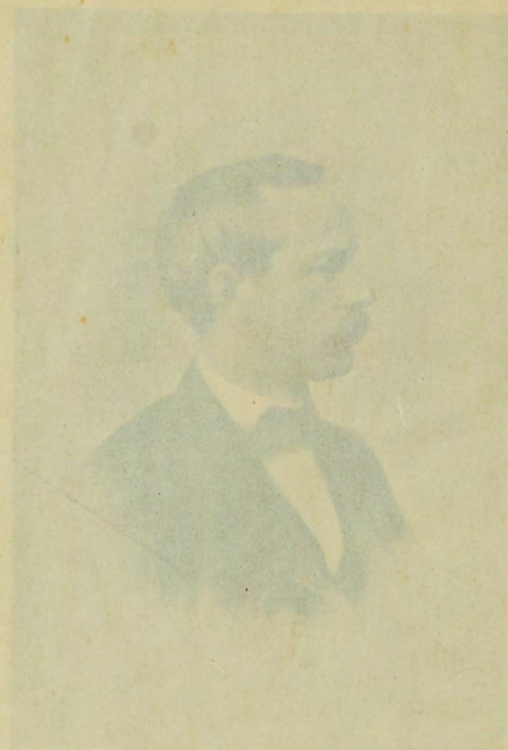
E. B. Christoffel, Gesammelte Abhandlungen

Brunner & Cie., Kunstanstalt, Zürich

E. B. CHRISTOFFEL

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN



Prof. Dr. E. B. Christoffel

E. B. Christoffel, Gesammelte Abhandlungen

Brunner & Co., Kunstanstalt, Zürich

E. B. CHRISTOFFEL

GESAMMELTE MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

A. KRAZER UND **G. FABER**

HERAUSGEGEBEN VON

L. MAURER

ERSTER BAND

MIT EINER BIOGRAPHIE E. B. CHRISTOFFELS VON C. F. GEISER
UND SEINEM BILD IN LICHTDRUCK SOWIE 15 TEXTFIGUREN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

VORWORT.

Es sind zehn Jahre verflossen, seit Christoffel kurz nach Vollendung seines 70. Lebensjahres gestorben ist. Seine Publikationen erstrecken sich über einen Zeitraum von 40 Jahren. Da ist es selbstverständlich, daß einiges davon veraltet, ein erheblicher Teil durch neue Arbeiten überholt ist. Aber so manches, was er geschaffen hat, gehört heute zum festen Besitz der Wissenschaft — so die Begriffsbildungen, die er in die Flächentheorie eingeführt hat, und die Theorie der Unstetigkeiten, die mit dem Fortbestehen partieller Differentialgleichungen verträglich sind. Seine Arbeiten über algebraische Funktionen und ihre Integrale, mit denen er sich in den beiden letzten Jahrzehnten seines Lebens fast ausschließlich beschäftigt hat, üben noch heute ihren Einfluß aus.

Allen Christoffelschen Arbeiten gemein ist die klare, sorgfältig durchgearbeitete Darstellung; ein Vorzug, der ihr Studium besonders für die heranwachsende mathematische Generation empfehlenswert macht.

Ein großer Teil der Abhandlungen ist in den Annali di matematica von Brioschi erschienen und infolgedessen manchen Fachgenossen weniger leicht zugänglich. Um so dankenswerter erscheint es, daß der Teubnersche Verlag eine Gesamtausgabe seiner Werke unternommen hat.

Herr Geiser hat die Güte gehabt, den Abdruck seiner Biographie Christoffels aus dem 34. Band der Mathematischen Annalen zu gestatten und sie zugleich durch Zusätze zu bereichern, die das Bild der eigenartigen Persönlichkeit Christoffels schärfer hervortreten lassen. Wir verdanken ihm auch die Photographie Christoffels, die der vorstehenden Heliogravure zugrunde liegt.

Die Abhandlungen I—XXXII sind zu Lebzeiten Christoffels erschienen. Die Abhandlung XXXIII „Ueber die Vollwertigkeit und die Stetigkeit analytischer Ausdrücke“ hat er noch selbst an die Redaktion der Mathematischen Annalen eingesandt, aber ihre Drucklegung nicht mehr erlebt. Die Abhandlungen XXXIV und XXXV „Vollständige

Theorie der Riemann'schen ϑ-Function" und „Querschnittstheorie" haben sich im Nachlaß vorgefunden. Die erstere war mit dem Vermerk „druckreif" versehen und ist ohne jede Änderung in den Annalen erschienen. In der letzteren hat der Herausgeber, Krazer, die einzelnen Abschnitte mit Überschriften versehen; im übrigen ist auch dieses Manuskript unverändert zum Abdruck gekommen.

Christoffel hatte die Absicht, diesen Abhandlungen noch weitere folgen zu lassen, die ebenfalls Fragen aus der Theorie der Abelschen Funktionen behandeln sollten. Aus seinen Vorlesungen ist bekannt, daß das Material dazu bereit lag. Leider hat seine fortschreitende Krankheit diese Absicht nicht zur Ausführung kommen lassen.

DIE HERAUSGEBER.

Elwin Bruno Christoffel.

Von

C. F. Geiser in Zürich.

Elwin Bruno Christoffel ist am 10. November 1829 in Montjoie, einem kleinen Städtchen in der preussischen Rheinprovinz (nahe an der belgischen Grenze) geboren. Auf dem Friedrich-Wilhelms-Gymnasium in Köln, wo der bald darauf durch die Befreiung Kinkels berühmt gewordene Karl Schurz sein Mitschüler war, erwarb er sich das Maturitätszeugniss. Seine Studienzeit verbrachte er an der Universität Berlin, wo ihn vor Allem Dirichlets Vorlesungen anzogen, mit deren Form und Gedankeninhalt er sich aufs Genaueste und Tiefste vertraut machte; sie sind für seine ganze Thätigkeit als Lehrer und Forscher massgebend geworden. Daneben interessirten ihn Borchardt's gehaltvolle Vorträge über elliptische Functionen; Steiner's geometrische Lehren suchte er sich wenigstens in den Grundprincipien anzueignen. Scherzweise bekannte er sich auch als Schüler Martin Ohm's und belegte dies durch ein Blatt von zweifelhaftem künstlerischen Werthe, auf welchem er den bei diesem Docenten in der ersten Vorlesung gehörten Satz illustrirt hatte: „Lagrange stand auf den Schultern von Euler, wir aber stehen auf den Schultern von Lagrange."*)

Das Bedürfniss einen vollkommenen Einblick in die Voraussetzungen zu gewinnen, auf welchen Dirichlet einzelne seiner Vorlesungen aufbaute, veranlasste Christoffel, sich eingehender mit Experimentalphysik zu beschäftigen, als dies damals bei den Studirenden der Mathematik üblich war. Er kam dadurch in persönliche Beziehungen zu Dove,

*) Als Weierstrass seinen ersten Besuch bei Steiner machte, fragte ihn dieser in seiner ironischen Art: „Sie kommen wohl hauptsächlich nach Berlin, um Ohm kennen zu lernen?" „Nein, ich wollte zu Ihnen und zu Dirichlet". „Dann haben Sie Grütze im Kopf; wer Grütze hat, kommt zu Dirichlet und mir, die andern gehen zu Ohm."

was ihm die Möglichkeit gewährte, gelegentlich eigene physikalische Versuche anzustellen. Er muss in dieser Richtung eine entschiedene Begabung besessen haben; ich erinnere mich noch lebhaft an die Anschaulichkeit, mit welcher er mir einst unter blosser Benutzung eines eisernen Lineals, eines Bindfadens und der Brettchen einer Cigarrenkiste zeigte, wie gewisse Fundamentalgesetze des Magnetismus experimentell zu prüfen seien. Auch in dem Laboratorium des Chemikers Sonnenschein arbeitete er eifrig; er trug bei einer Explosion schwere Verwundungen am Kopfe davon, deren Narben noch lange Jahre sichtbar blieben.

Nachdem Christoffel verhältnissmässig spät seine Universitätsstudien abgeschlossen hatte (er promovirte am 12. März 1856), kehrte er nach Montjoie zurück und blieb dort bis zum Tode seiner Mutter, die er während der Leidenszeit einer Krankheit nicht hatte verlassen wollen. Der mehrjährige Aufenthalt in dem abgelegenen Orte, der keinerlei wissenschaftliche Anregung bot, ja sogar die einfachsten geselligen Beziehungen vermissen liess, ist von grosser Bedeutung für seine ganze Individualität geworden. Auf Grund einer hervorragenden Arbeitskraft und einer zielsicheren Intelligenz, unbeirrt von irgend welchen fremden Einmischungen, gewann er eine geistige Selbständigkeit, die sich in der Wissenschaft frei von Einseitigkeiten und unfruchtbaren Speculationen hielt. Er drang tief in die Riemann'schen Schöpfungen ein, soweit dieselben damals schon publicirt waren. In den Dirichlet'schen Vorlesungen erblickte er eine ausgezeichnete Vorschule für dieses Studium, ebenso in den functionentheoretischen Abhandlungen Cauchy's, die er damals schon genau gekannt haben muss. Er meinte gelegentlich, mit dem Citat in § 6 der Abhandlung über die Abel'schen Functionen habe sich Riemann die Hälfte des Umfangs der Ausarbeitung seiner Theorie gespart. Aber in diesen Jahren einsamer und angestrengter Studien bildeten sich auch einige Singularitäten des Charakters aus; er selbst sagte, in jenen Zeiten hätte er sogar das Sprechen verlernt. Und so verblieb ihm ein öfter hervortretender Zug von Menschenscheu, sowie eine Reizbarkeit, die auch den Freunden gegenüber sich leicht in Schroffheit und Misstrauen geltend machte. Selbst sein sonst so sachkundiges und gerne anerkennendes Urtheil über die wissenschaftlichen Leistungen anderer Mathematiker konnte in solchen Momenten getrübt erscheinen.

Als völlig reifer Mann habilitirte sich Christoffel im Jahre 1859 an der Universität Berlin, wo er ebensowohl durch seine wissenschaftliche Bedeutung wie durch seine Thätigkeit als Docent sich die volle Anerkennung von Kummer und Weierstrass erwarb. Hauptsächlich auf ihre Empfehlung hin wurde ihm 1862 die durch Dedekind's Weggang

erledigte Stelle am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich übertragen. Bei Annahme des Rufes freute er sich darauf, vor einen grösseren Hörerkreis treten zu können, bei dem er eine weitgehende mathematische Vorbildung glaubte voraussetzen zu dürfen. Unter dieser Annahme hatte er insbesondere als Einleitung zu seinen Vorlesungen eine exacte Darlegung der Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung sorgfältig ausgearbeitet. Der erwartete Erfolg blieb zunächst aus, und die Studirenden ersuchten ihn, nach Verfluss des ersten Quartals, einen zugänglicheren Weg einzuschlagen. Ohne jede Empfindlichkeit entsprach er dem geäusserten Wunsche, begann die Vorlesung noch einmal auf total veränderter Grundlage und nun mit einer Wirkung, dass er sofort zu den ausgezeichnetsten Lehrern der Anstalt gezählt wurde. Später durfte er auch erhöhte Anforderungen stellen, zudem vereinigte sich in seinen Privatvorlesungen ein grosser Kreis von Schülern, welche er mit denjenigen Parthieen der Wissenschaft bekannt machen konnte, in denen sich seine eigene Forschung bewegte.

Es war ein unvergleichlicher Genuss, den Vorträgen Christoffels zu folgen. Schon die äussere Erscheinung des kräftig gebauten Mannes mit der ungesucht eleganten Haltung, dem fest wie in Bronze geprägten und doch geistig durchgearbeiteten Kopfe, den wunderbaren Augen, übte eine grosse Anziehungskraft aus. Die Sprache war einfach und lebendig, von einem leichten Flusse, ohne jede unnöthige Wiederholung oder nachträgliche Correctur. In dem für die künftigen Techniker obligatorischen Unterrichte liebte er es, bis zu ausführbaren geometrischen Constructionen und numerischen Rechnungen vorzudringen, deren Schlussergebnisse er ohne Prätention und Pedanterie in übersichtlicher Ordnung an der Tafel zusammenstellte. Der Hauptreiz und der Hauptwerth aller seiner Vorträge aber lag darin, dass er in bewusster Nachfolge Dirichlet's die Mathematik als eine Wissenschaft des reinen Gedankens behandelte. Die allgemeinen Grundbegriffe und Methoden wurden immer mit der grössten Präcision erläutert, die speciellen Probleme klar und scharf begrenzt, die gefundenen Lösungen in Bezug auf die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen ihrer Richtigkeit umfassend discutirt. Betrachtungen über das Unendlichwerden, über den Grenzprocess, über Unstetigkeiten wandte er seine besondere Aufmerksamkeit zu, indem er sie von den zufälligen Umständen, unter denen sie sich darboten, befreite und in ihrer philosophischen, oder wie er lieber gesagt hätte, rein begrifflichen Bedeutung auseinanderlegte. Damit hing wohl die Kunst zusammen zu concentriren und zu condensiren. So gab er in ein- bis zweistündigen Semestervorlesungen eine Theorie der bestimmten Integrale, oder der partiellen Differentialgleichungen, oder der krummen Oberflächen, die alles Wesentliche enthielt und hervortreten liess, ohne dass er nöthig gehabt hätte durch geistreiche Aperçus oder beziehungsvollen Citatenreichthum die dem Gegenstand an und für sich innewohnende Bedeutung noch besonders zu erhöhen und in künstlicher Beleuchtung erscheinen zu lassen. Freilich verwandte er auf derartige Collegien eine vorgängige Gedankenarbeit, dass er mir, jedenfalls ohne jede Uebertreibung, bei Beginn eines derselben sagen konnte: „Ich weiss jetzt schon, was ich in jeder der folgenden Stunden vorzutragen haben werde.“

Insofern man aus der Zeitfolge der von ihm publicirten Abhandlungen einen sichern Schluss ziehen darf, so ist der Züricher Aufenthalt für Christoffel auch in Bezug auf die selbständige wissenschaftliche Arbeit die reichste Zeit seines Lebens gewesen. Das Inhaltsverzeichniss des Crelle'schen Journals für die Bände 61—70 führt zehn hierhergehörige Abhandlungen auf, zu welchen man noch eine in den Annali di Matematica erschienene und eine von der Berliner Akademie der Wissenschaften veröffentlichte zu rechnen hat. Es war eine wohlverdiente Auszeichnung, dass er in Anerkennung dieser Leistungen von der eben genannten Körperschaft zu ihrem correspondirenden Mitgliede erwählt wurde.

Aber nicht nur durch seine eigene Thätigkeit als Forscher und Lehrer hat Christoffel dem Polytechnikum vorzügliche Dienste geleistet. Er suchte, namentlich seit ihm die Leitung der Fachlehrerabtheilung übertragen war, den mathematischen Unterricht durch neu einzuführende Vorlesungen jüngerer Docenten auszudehnen und auf eine höhere Stufe zu heben. Aber schon früher war es seiner Initiative zu verdanken gewesen, dass bei einer Budgeterhöhung im Jahre 1863 eine neue Professur für höhere Mathematik vorgesehen und an diese als Vertreter der Functionentheorie Herr Prym berufen wurde. Wie hoch Christoffel die wissenschaftliche Bedeutung dieses Collegen schätzte, klingt noch nach in der posthumen Abhandlung über die Theorie der Riemann'schen ϑ-Functionen, wo es heisst (Math. Annalen, Bd. 54 pag. 391): „Ich kann diese Gelegenheit nicht vorüber gehen lassen, ohne die unbeschreiblichen Verdienste in Erinnerung zu bringen, welche Herr Prym sich durch seine damaligen Publicationen um das Verständniss Riemann's erworben hat.“ In der That hat die Züricher Schule die Einführung in die Schöpfungen des grossen Göttinger Mathematikers schon zu einer Zeit in ihren Lehrplan aufgenommen, als dieselben noch schwer zugänglich und nur von einer kleinen Zahl von Mathematikern gekannt und nach ihrer ganzen Bedeutung gewürdigt waren.*)

*) Einer Darstellung der wissenschaftlichen Leistungen Clebsch's entnimmt man, dass dieser so vielseitige Mathematiker erst durch Herrn Gordan, nach dessen Habilitation in Giessen (Sommer 1863) „mit den damals noch verhältnissmässig neuen und wenig verbreiteten Riemann'schen Untersuchungen“ bekannt geworden sei (Math. Annalen Bd. 7 pag. 19).

Zu den Collegen Christoffels am eidg. Polytechnikum hatte während einiger Zeit auch Reuleaux gehört, der von dort im Jahre 1864 als Professor an das Gewerbeinstitut in Berlin berufen und Ende 1867 zum Director der aus diesem hervorgegangenen Gewerbe-Akademie ernannt worden war. Dies gab die Veranlassung, dass auch Christoffel an die neu organisirte Anstalt gezogen wurde. Eine bald nach Uebernahme der neuen Stellung an ihn ergangene vertrauliche Anfrage, ob er eventuell die Leitung der polytechnischen Schule in Aachen übernehmen würde, beantwortete er in ablehnendem Sinne. Er wollte seine wissenschaftliche Thätigkeit nicht durch Amtsgeschäfte administrativer Natur einschränken lassen — und wohl mochte er auch fühlen, dass ihm manche der wesentlichen Eigenschaften fehlten, die eine solche Amtsführung nothwendig fordert.

Christoffel hat die Rückkehr in's Vaterland als eine grosse Ehre und Freude geschätzt. Der Aufschwung, den Berlin während seiner Abwesenheit genommen, liess ihn die Anregungen und Vortheile einer Grossstadt aufs lebhafteste empfinden. Vor allem pries er es als ein besonderes Glück, dass er die grosse Zeit von 1870—71 in dem Centrum der materiellen und geistigen Machtentfaltung Deutschlands miterleben durfte. Er erzählte, wie in den Tagen der Erwartung des Entscheides während einer seiner Vorlesungen plötzlich eine grosse Bewegung unter den Zuhörern entstanden und auf seine Frage nach der Ursache die Antwort ertheilt worden sei: „Der Krieg ist erklärt.“ Und unvergesslich blieb ihm die darauf folgende, durch tiefen Ernst in festen Schranken gehaltene Entschlossenheit der Bevölkerung, insbesondere der älteren Jahrgänge der noch waffenpflichtigen Männer, die sich bei den Controllstellen anzumelden hatten. Grösseres und Edleres schien ihm der Mensch nicht erleben zu können, jedes persönliche Interesse werde in dem allgemeinen aufgelöst oder von demselben zurückgedrängt. Und doch sprach er später mit einem gewissen Gefühl des Missbehagens von den drei Jahren (1869—72) seiner Thätigkeit an der Gewerbeakademie. Zwar stand er mit seinem nächsten Collegen im besten Einvernehmen: Aronhold's liebenswürdige und lebendige Art war ihm durchaus sympathisch. Von der Art, wie sich dieser Mann aus den beschränktesten Verhältnissen, durch energische Ueberwindung der mannigfachsten Hindernisse eine bedeutende Stellung im Lehramte und in der Wissenschaft errungen hatte, sprach er mit rückhaltloser Anerkennung. Aber dass es ihm trotz der Unterstützung durch einen so ausgezeichneten Mitarbeiter nicht gelingen wollte, eine grössere Anzahl von Studierenden zu dauerndem Interesse an höhern mathematischen Vorlesungen heranzuziehen, veranlasste ihn zu sehr unliebsamen Vergleichungen mit den Züricher Verhältnissen. Es mag vielleicht, wenn auch unausgesprochen, ein Anderes dazu gekommen sein. Christoffel war früher Privatdocent an der Universität gewesen, er zählte zu den correspondirenden Mitgliedern der Akademie der Wissenschaften; ist es nicht denkbar, dass er sich neben seiner eigentlichen Lehrverpflichtung noch einen weitern, seinen Neigungen und Fähigkeiten entsprechenden Wirkungskreis ersehnte?

Alle Schwierigkeiten dieser Situation wurden durch die Berufung nach Strassburg gelöst. Freiherr von Roggenbach, der mit der ersten Einrichtung der neu zu gründenden Hochschule betraut war, wandte sich, um über die Besetzung der mathematischen Professuren fachkundigen Rath einzuholen, an Kronecker. Dieser nannte in erster Linie Christoffel, der auch, nachdem seinen Anforderungen entsprochen worden war, die ihm angebotene Stellung übernahm. Damit war er, noch in der ersten Hälfte der Vierziger stehend, also in vollster Manneskraft an ein Ziel gelangt, das allen seinen Wünschen und Hoffnungen die Erfüllung zu gewähren schien. Aber der mit den reichsten Mitteln durchgeführte grosse politische Gedanke: in dem wiedergewonnenen Reichslande eine Universität ersten Ranges aufzurichten, fand bei der deutschen Jugend nicht die freudige Aufnahme, die zur Sicherung einer dem ausgezeichneten Lehrkörper und den aufs grossartigste eingerichteten wissenschaftlichen Instituten entsprechenden Frequenz nöthig gewesen wäre. Die Anzahl der Studirenden blieb in den ersten Jahren sogar hinter bescheidenen Erwartungen zurück; insbesondere war in den mathematischen Fächern kein Grundstock von Schülern vorhanden, welche in einer systematisch geordneten Reihe von Vorlesungen einen höhern Abschluss ihrer akademischen Bildung gesucht hätten. So musste sich Christoffel einen Hörerkreis erst heranbilden. Er that es unter Einsetzung aller seiner Kräfte, sogar unter Einschränkung der bis dahin mit so reichem Erfolge gekrönten Publication wissenschaftlicher Abhandlungen. Die Resultate seiner Forschung sollten nun in erster Linie den Vorlesungen zu Gute kommen, aus deren Bedürfnissen sich umgekehrt häufig die Ziele seiner Untersuchungen ergaben. Gewiss war Strassburg durch diese Thätigkeit nicht in demselben Masse zu einem Mittelpunkte mathematischer Studien geworden, wie es nach- und nebeneinander Königsberg, Berlin, Göttingen waren oder sind. Aber Christoffel, der in der Wissenschaft gerne seine eigenen Wege ging und bei allem liebenswürdigen Verkehr mit seinen Zuhörern doch

die persönlichen Beziehungen mehr vermied als aufsuchte, hat niemals die Neigung besessen, eine besondere Schule zu gründen, und so erfüllte ihn das Erreichte mit der vollsten Befriedigung.

Seitdem er in der Auswahl des zu behandelnden Stoffes im Wesentlichen freie Hand hatte, bildete in den Vorlesungen, wenigstens in denjenigen, deren Inhalt mir bekannt geworden ist, die Functionentheorie den Hauptgegenstand. Es folgten sich in systematischer Anordnung: Bestimmte Integrale und unendliche Reihen; Einleitung in die Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse; Theorie der elliptischen Functionen; Theorie der Abel'schen Functionen; Anwendungen der Lehre von den Abel'schen Functionen. Aber auch in Vorlesungen, die mit diesem Cyklus nicht in unmittelbarem Zusammenhange standen: Algebraische Theorie der homogenen Formen und invarianten Substitutionen; Theorie der quadratischen und bilinearen Formen; Ausgewählte Kapitel aus der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen, wurden überall die Beziehungen zu Aufgaben aus jenem centralen Gebiete der Mathematik hervorgehoben. Es ist vielleicht von Interesse zu wissen, dass er schon im Beginn der Strassburger Zeit, als er eben erneut all' seine Arbeit der Functionenlehre zuwandte, die Theorie der Abel'schen Functionen als eine vollständige Theorie der algebraischen Functionen bezeichnete, die jedoch zu ihrer Erledigung nicht mit algebraischen Hülfsmitteln ausreiche, sondern auch transcendente erfordere. Er vermied das Dirichlet'sche Princip, dessen Wahrheit unter beschränkenden Voraussetzungen ihm zwar unzweifelhaft, dessen Begründung ihm aber unsicher schien. Wie weit er sich in der Umgestaltung der Riemann'schen Methoden und Resultate mit Weierstrass begegnet haben mag, muss ich aus dem einfachen Grunde mangelnder Sachkenntniss dahingestellt lassen. Nur das sei noch hervorgehoben, dass er sich unausgesetzt bemühte, die „imposanten“ Leistungen des grossen Berliner Mathematikers, soweit dieselben durch den Urheber selbst publicirt waren, in ihrer ganzen Bedeutung zu erfassen.

Mehr als zwanzig Jahre lang ist Christoffel in seinem Strassburger Lehramte thätig gewesen; sobald es die in dieser Hinsicht eben so liberalen als vernünftigen Statuten der Universität zuliessen, trat er in den Ruhestand. Es entsprach seiner ganzen Lebensauffassung, wenn er auch in Bezug auf seine eigene Person gefunden hatte: es liege nicht im Interesse der Hochschulen, Professoren bis zum Aeussersten im Dienste zu belassen und auszunutzen. Der Einwurzelung noch so berechtigter wissenschaftlicher Richtungen und Traditionen sei eine Ablösung durch neue Kräfte, die sich auf veränderten Bahnen bewegen, vorzuziehen. Für sich selbst hoffte er noch auf eine Zeit intensiver, von jeder äussern Rücksicht unabhängigen wissenschaftlichen Thätigkeit; sogar die Anregung: die gewonnene Musse zur Ausarbeitung und Publication solcher Ergebnisse seiner Forschung zu verwenden, denen er selbst einen grossen Werth beilegte, wies er von der Hand. Neben den mathematischen Studien zog ihn die erneute Lectüre der alten Klassiker an. Er hatte sich einst auf dem Gymnasium eine ungewöhnliche Kenntniss der griechischen und lateinischen Sprache angeeignet; während des Züricher Aufenthalts bildeten Plato und Tacitus*) seine Lieblingslectüre in den Stunden der Erholung von angestrengter Arbeit; jetzt vertiefte er sich in die zeitgenössischen Quellen der römischen Kaisergeschichte.

Leider war seine Gesundheit schon beim Rücktritte stark erschüttert. Im Jahre 1892 hatte er noch in fast jugendlicher Spannkraft des Körpers und des Geistes ein paar frohe Tage des Wiedersehens und der Erinnerung in Zürich verlebt. Er hatte die Absicht sich von da nach Interlaken zu wenden; auf dem Wege dorthin traf ihn bei Brunnen das Missgeschick, von einem Velocipedisten überfahren zu werden und einen Armbruch zu erleiden, der nur langsam und mangelhaft heilte. Zugleich vermehrten sich asthmatische Beschwerden, die ihn schon früher gelegentlich heimgesucht hatten. Wohl brachte später ein Winteraufenthalt in Grindelwald eine bedeutende Besserung und neuen Lebensmuth, aber in den letzten Jahren, die er in zunehmender Abgeschlossenheit und Einsamkeit verbrachte, sanken seine Kräfte mehr und mehr. Den siebzigsten Geburtstag verlebte er in äusserster Stille, da man auf seinen dringenden Wunsch von Deputationen und dergl. gänzlich Abstand genommen hatte. Bald nachher stellten sich die drohenden Anzeichen seiner letzten Krankheit ein, eines schweren Herz- und Nierenleidens, zu dem schliesslich noch die Wassersucht trat. Am 15. März 1900 hat ihn der Tod erlöst.

Ueber die Stellung Christoffels an der Universität Strassburg und über den Eindruck, den seine Persönlichkeit in dem Kreise seiner Collegen hinterliess, hat sich bei der Beerdigungsfeierlichkeit Prof. Windel-

*) Einen heitern Beweis seiner genauen Kenntniss des grossen Historikers bewahrt das eidgenössische Polytechnikum. Im Jahre 1864 hatte Christoffel als Actuar der Gesammtconferenz das Protokoll in einer Sitzung zu führen, welche wegen Auflehnung der Studirenden gegen die oberste Leitung der Anstalt einberufen war. Als Motto über seine Wiedergabe der Verhandlungen schrieb er im Originaltext und in deutscher Uebersetzung das Citat aus den Annalen (V, 6): „Bei diesem Anlasse wurden vierundvierzig Reden gehalten, einige aus Furcht, die meisten aber aus Gewohnheit.“

band in einer schönen und treffenden Rede ausgesprochen, die in den Math. Annalen Bd. 53 pag. 341 etc. abgedruckt ist. Dem Hinweis auf dieselbe mögen hier einige Erinnerungen folgen, die das dort entworfene Bild des Menschen ausserhalb seiner Wissenschaft noch zu ergänzen bestimmt sind.

Die Erziehung durch eine ihrem katholischen Glauben fromm ergebene Mutter hat nicht so eingreifend und dauernd gewirkt, dass Christoffel bei einem bestimmten religiösen Bekenntniss geblieben wäre. Doch hat er der Kirche, in welcher er aufgewachsen war, eine lebhafte Sympathie bewahrt, die im Zusammenhang mit dem Bedürfnisse stand, sich liebe Jugenderinnerungen unverletzt und ungetrübt zu erhalten. Damit verband sich in politischen Fragen eine conservative, streng monarchische Gesinnung, welcher er einen um so entschiedenern Ausdruck gab, je mehr sie sich mit den Anschauungen seiner Umgebung in Widerspruch befand. Er hatte dazu in den ersten Zeiten seines Züricher Aufenthaltes reichliche Gelegenheit. Unter seinen dortigen Landsleuten fand sich noch ein Stamm alter „Achtundvierziger“, die das Heil ihrer Heimath in der baldigen Aufrichtung einer Republik erwarteten, eine jüngere Generation stand auf dem Boden des Nationalvereins oder der liberalen Mehrheit des preussischen Abgeordnetenhauses; daneben erhoben die Süddeutschen die schärfsten Anklagen gegen das norddeutsche Junkerthum und einzelne Stimmen traten für das im Sinne des Liberalismus zu reformirende Oesterreich ein, dem die Führung des zu einigenden Deutschlands zu übertragen sei. In diesem Gewirre war ein Mann, welcher der festen Haltung König Wilhelms und der kühnen Kampfesweise des Ministerpräsidenten Bismarck freudig zustimmte, völlig isolirt. Erst der Krieg von 1866 brachte dann die grosse Wandlung und Christoffel erblickte ganz unbefangen in dem Siege der preussischen Waffen zugleich eine persönliche Genugthuung für die vielfachen Gegenstösse, die sein temperamentvolles Auftreten gefunden hatte.

Auch die politischen Verhältnisse der Schweiz, welche von denjenigen seines Heimathlandes so ganz verschieden waren, fesselten die Aufmerksamkeit Christoffels in hohem Grade. Er hat aus der Nähe die eigenartige Bewegung verfolgen können, die den Kanton Zürich aus einem repräsentativ regierten in ein rein demokratisches Staatswesen überführte. Das gelegentliche Zusammentreffen mit Mitgliedern der damaligen Regierung hatte ihm den Einblick in die verständige Tüchtigkeit dieser Männer gewährt, nun sah er, wie eine geschickt geleitete Opposition, theilweise unterstützt von einem talentvollen und in seinen Mitteln nicht wählerischen Pamphletär, das ganze System, auf welchem die Regierung beruhte, und damit diese selbst zu Fall brachte. Es stimmte ihn nachdenklich, dass sogar in der Republik, trotz der fortwährenden Besprechung und Kritik der öffentlichen Angelegenheiten durch die Presse und politische Versammlungen, sich die wahre Stimmung eines Volkes nicht immer auf der Oberfläche der Tagesmeinungen zeigt. Er war Zeuge davon, wie sich unbeachtet im Untergrunde eine wachsende Unbehaglichkeit und Unzufriedenheit auch der ruhigen Elemente angesammelt hatte, die nur eines letzten günstigen Anstosses bedurfte, um das Staatswesen bis in seine Grundfesten zu erschüttern, wie dann aber sofort in ernster Arbeit die Erneuerung desselben an die Hand genommen wurde. Gottfried Keller hat in der Schlusserzählung der Leute von Seldwyla: „Das verlorene Lachen“ ein lebendiges Bild von der Umwälzung gegeben, das Christoffel nicht nur an jene Begebenheiten erinnerte, sondern auch an die Stunden, die er einst auf dem Zunfthause zur Safran mit dem zürcherischen Staatsschreiber zugebracht hatte.

Die Unabhängigkeit seiner Ansichten von den Tagesströmungen hat Christoffel in besonderm Masse während der Zeiten des Culturkampfes bewährt, da er nun in entschiedener Weise sich gegen die Kirchenpolitik Bismarcks aussprach, auch die gleichgerichteten Vorgänge in der Schweiz missbilligte. Wohl hat sich dabei eine starke Neigung zu paradoxen Behauptungen sowie eine verschärfte Reizbarkeit gegenüber allfälligem Widerspruch geltend gemacht, aber der Grundgedanke seiner Argumentationen hat sich in Deutschland doch nach und nach allgemeine Anerkennung erworben. In der Schweiz hat sich die nämliche Wandlung vollzogen. Schon vor dem vatikanischen Concil hatte Jakob Burckhardt in einer seiner Vorlesungen*) gesagt: „Von Seite des Staates ist es lächerlich, wenn er gerne 'liberale Prälaten' hätte, die seiner Bureaukratie keine sauren Tage machen sollten.“ Und der bedeutendste Staatsmann des Landes schrieb während der Kampf am heftigsten tobte: „Leider haben wir uns zu einer eigenen und klar vorgezeichneten Politik in den Kirchenfragen nicht ermannen können. Wir hätten auf das Anathema des obersten der Priester mit der Proklamation der unbedingten Freiheit antworten sollen. Aber das Vertrauen in die Macht des Geistes hat uns gefehlt und wir haben uns hinter die Landjäger verkrochen.“

Es ist wahrscheinlich, dass der tiefgehende Meinungsunterschied, der sich in dieser Frage zwischen Christoffel und denjenigen Kreisen gezeigt hatte, auf die er amtlich und gesellschaftlich angewiesen war, zu seiner Vereinsamung wesentlich beitrug. Als der Streit verstummt und ein Ausgleich der Gegensätze möglich war, hatten vorrückendes Alter, dann Verzicht auf das Lehramt und beginnende Krankheit die Wiederaufnahme eines regern Verkehrs zunächst erschwert und schließlich völlig unmöglich gemacht. So hat denn sein Tod nicht eine Lücke in einen grossen Kreis lebendiger Interessen gerissen oder eine bedeutende directe Wirksamkeit auf eine jüngere Generation jählings unterbrochen. Aber der kleinen Zahl von Freunden, denen er einst seine persönliche Theilnahme zugewendet und in treuer Anhänglichkeit bewahrt hat, ist der auch ausserhalb seiner Wissenschaften so bedeutende Mann in dankbarer Erinnerung geblieben und ebenso werden die zahlreichen Schüler, die er während einer fast vierzigjährigen Wirksamkeit heranbildete, den unvergleichlichen Lehrer nicht vergessen haben.

*) Weltgeschichtliche Betrachtungen, pag. 142.

INHALT.

I.

DE MOTU PERMANENTI ELECTRICITATIS IN CORPORIBUS HOMOGENEIS.

DISSERTATIO INAUGURALIS

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE

FRIDERICA GUILELMA

PRO

SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

RITE CAPESSENDIS

DIE XII. M. MARTII A. MDCCCLVI.

H. L. Q. S.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL

RHENANUS.

OPPONENTIBUS:

J. NEUHAEUSER.
A. DE LA VALETTE ST. GEORGE, PHIL. DR.
A. KREMER, PHIL. CAND.

BEROLINI

TYPIS GUSTAVI SCHADE.

Im Original befinden sich auf Seite 3 bis 6 folgende Widmungen:

MATRI CARISSIMAE

NEC MINUS

VIRO ILLUSTRISSIMO CELEBERRIMO EXPERIENTISSIMO

HENRICO GUILELMO DOVE

PHIL. ET MED. DOCTORI ART. LIB. MAG. PROFESSORI P. O. IN UNIVERSITATE FRIDERICA GUILELMA ORDINIS REGII AQUILAE RUBRAE EQUITI SOCIETATUM MULTARUM LITTERARIUM SODALI CET. CET.

PRAECEPTORI DILECTISSIMO

HANC COMMENTATIONEM PIO GRATOQUE ANIMO OFFERT AUCTOR.

Postquam G. S. Ohm theoria sua electricitatis galvanicae [1]) analysi novum campum aperuit, multae inquisitiones in illo institutae, multaque egregia inventa sunt.

Consideratione enim ad corpora duarum, trium dimensionum extensa theoria amplificabatur: casu inde speciali, quem Illustrissimus hujus theoriae Auctor tractaverat, e principiis generalibus eruto, celeberrimae illae leges fluminis galvanici distributionisque vis electroscopicae in conductoribus linearibus ad summum, quod ipsa theoria patiebatur generalitatis fastigium evehebantur. Omnibus his disquisitionibus, e quarum numero commentationes a Cl° Kirchhoff in Annalibus Poggendorffii [2]) Tom. 64. 67. 75. prolatas commemorare sufficiat, physice valde promota experimentorumque copia aucta est.

Sed tamen haec theoria incompleta erat, quum eam tantum electricitatis proprietatem, a corporibus procedendi ad corpora contigua, respiceret, actione neglecta, quam corpora electrica in corpora remota exercent, — influentia, disjunctio electricitatum conjunctarum, — quae tamen ab illius natura separari nequit. Quae quidem quum parum momenti habere videatur ad phaenomena constantia in corporibus bene conducentibus, in corporibus male conducentibus e contrario sic praevalet, ut illa neglecta, electricitatis distributio nullo modo explicari possit.

Quod desiderium explere conatus, quum experientia nulla phaenomena suppeditare videretur electricitatis motae, quibus calculi apte superstrui possent, a phaenomenis profectus sum staticis, quae eodem modo tractare licebat, quo geometrae generaliter in transitu ab actionibus discretis ad continuas uti solent.

1) Die galvanische Kette, mathem. bearb. von Dr. G. S. Ohm. Berl. 1827.

2) Tom. 64. Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, besonders eine kreisförmige. — 67. Nachtrag dazu. — 75. Ueber die Anwendbarkeit der Formel für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theile aus nicht linearen Leitern bestehen.

Jam etiam alia parte a suppositionibus usitatis discedere coactus sum, ubi de vi electromotorica calculo subjicienda agebatur. E qua re nova quae sequuntur cum experientia egregie consentire videntur.

Hoc in commentatione maxime curandum esse censui, ut omnes notiones, quae ad electricitatis motum, qualem hic consideramus, faciunt, proferantur notionibusque comparentur, quae iis in theoriis cognatis respondent. Cujus rei utilitas primum eo versatur, ut theoriam nostram cum alia quadam frequentissima omnino congruere demonstretur: tum eo, ut easdem notiones majori securitate tractare liceat, quando de electricitatis motae theoria generali collocanda agetur.

Jam quod ad calculos subductos attinet, praeter casus extremos conductorum optimorum vel pessimorum electricitatis motum in sphaera plena tractavi omni generalitate tam physica quam analytica. Qua in re omnes calculos exhibere placuit, quorum in corporibus sphaericis opus esse possit. Formularum autem generalium ad formam simpliciorem redigendarum usuique practico accommodandarum negotium ab hac commentatione procul habendum, aliisque reservandum esse censui occasionibus, ubi ex rei utilitate necessitas oritura sit.

De motu permanenti electricitatis in corporibus homogeneis.

De electricitatis motu acturi e numero causarum, quibus corpus aliquod statum electricum induit, statuamus eas, quas abhinc prae ceteris eo nomine comprehendemus. Sunt autem illae:

1. fontes electricitatis, puta corpora electrica illi contigua, quae ei de electricitate sua impertiunt;

2. actio illa corporum electricorum ab existentia ipsius electricitatis inseparabilis, qua simul in omnibus corporibus, quorum natura non repugnat, electricitates conjunctae certo more dissociantur, simulque corpora ipsa viribus moventibus sollicitantur;

3. vis electromotorica in contactu corporum heterogeneorum agens, quae est causa illorum phaenomenorum, quae proprie galvanica dicuntur.

1.

Si electricitas sub datis conditionibus in corpore A movetur, quod variis modis, hic pro notis habendis, cognoscitur, tempore progrediente trium harum rerum observatur una:

1. Si causae, quibus motus electricitatis provocatur, manent, ita quidem ut perpetuas mutationes subeant, status electricus ipsius A

perpetuo a tempore pendebit, atque ab una epocha ad alteram variabitur. Si tamen causae illae invariabiles fiunt, hoc etiam cum statu electrico ipsius A locum habebit, qua in re distinguendi sunt casus sequentes:

2. Sit A in superficie sua nonnisi non-conductoribus contiguum, sit distributio copiarum electricitatis extra ipsum A occurrentium constans, omnibus, quae in systemate sunt corporibus ab omni motu impeditis: in corpore A aequilibrium constituetur electricum, quod secundum leges Electrostaticae determinatur.

3. Si tamen ipsum A in superficie sua invariabili modo cum fontibus electricis constantibus conjunctum est, ceteris conditionibus iisdem permanentibus, quales modo exposuimus, a certa inde epocha electricitatis motus in ipso A stabilis fiet. Qui status id proprii habet, ut, electricitate perpetuo ipsum A permeante, in nulla ipsius A particula status electrici mutatio operetur. Qui quum ei prorsus analogus sit, cui in theoria caloris nomen „motus caloris permanens" tribuitur, in sequentibus etiam appellabitur „electricitatis motus permanens". Quem accuratius examinare in hac commentatione nobis propositum est.

2.

Jam ut problema ad numeros revocetur, suppositionem facimus generaliter acceptam, electricitatis mensuram esse *densitatem electricam*, signo positivo vel negativo praeditam, prout electricitas est vitrea vel resinosa. Quae quantitas ut plane determinata sit, definitionem ejus usitatam repetamus.

Quodsi duo corpora habemus A et B, ipsa quidem omnino paria unitatemque voluminis occupantia, electricitatis autem ratione diversa, quae deinceps iisdem conditionibus electroscopio opponuntur in distantia r: electroscopium deinceps attractiones $\frac{a}{r^2}$, $\frac{b}{r^2}$ ostendet, qua in re repulsiones pro attractionibus negativis habebimus. Si igitur ponimus, corpus illud A continue in eodem statu, in quo quum hoc experimentum fieret erat, conservari, aut in hunc statum redigi posse pro voluntate nostra, sequitur, ut a sit quantitas constans, quae tamquam experientia data supponi possit; quare rationem $\frac{a}{b}$, cujus loco etiam rationem inter singulas attractiones intercedentem $\frac{b}{r^2} : \frac{a}{r^2}$ poni licet, sequentes vocem alias usitatam densitatem electricam medicam corporis B appellabimus.

Porro si B est particula corporis, per quod electricitas migrat, omnia quae in interioribus ejus sunt, electricitate imbuuntur. Si igitur corpus C, quod ejusdem naturae est sicut B, eadem qua ipsum B densitate electrica media gaudet, volumen ejus tamen est ipsius B pars dimidia, tertia ..., electricitatis in ipso C contentae copia manifesto erit pars dimidia, tertia ... copiae in ipso B contentae, id est: Electricitatis copia, quae corpore continetur, per quod electricitas migrat, producto aequiparatur e densitate electrica media volumineque corporis conflato.

Quae definitiones hac observatione valde simplificantur, attractionem, quam corpora electrica exercent, ab ipsorum corporum substantia esse independentem. Eo enim postulata abjiciuntur de corpore A facta, unde loco attractionis electricae $\frac{a}{r^2}$ vim aliquam constantem e natura apte petitam introducere licet.

Quum autem motus electricitatis generalis in eo versetur, ut corporis, per quod electricitas migrat, particulae externa electricitate impertiantur, electricitatemque propriam reddant, motum permanentem in eo positum esse apparet, ut in hac ipsius electricitatis vicissitudine nulla corporis particula densitatis electricae mutationem patiatur. Si igitur incrementum copiae electricitatis, quae in aliqua particula inest, ea suppositione computamus, ut electricitas in illa motum permanentem modo relictura sit, hoc incremento nihili aequiparato conditionem habebimus, ut in particula illa status electricus non mutetur, aequationem igitur habebimus, qua motus permanens in illa determinatur.

Phaenomena fundamentalia.

3.

Jam exponam, quae vel experientia dantur, vel hypothetice assumenda sunt, ut incrementum illud determinetur calculorumque fundamentum ponatur.

Qua in re mihi in mentem venire non potest, principia rursus firmare atque probare, quae jamdudum ab aliis proposita, atque cum ipsa natura egregie consentire experta sunt: simpliciter illa afferam atque adnotabo, ubi ampliora de iis inveniantur.

Jam primum illius sententiae mentionem injicere debemus, secundum quam electricitas pro fluido habenda est corporeo, cujus particulae mutuam repulsionem exercent secundum legem Newtonianam. Cui confisus si aequationes motus permanentis exhibes fluidi illius — ut supra motum permanentem vocabimus a densitatibus permanentibus — ad

eum quidem casum spectantes, quo velocitates singularum particularum perparvae sunt, easdem obtinebis aequationes, quales ex aliis deducemus principiis, quae de natura ipsius electricitatis minus supponere videntur. Cujus sententiae autem ut merito ratio habeatur, infra occasio invenietur.

Nos igitur, aliam viam ingressuri, a duabus rebus proficiscemur experientia confirmatis, quibus phaenomenis fundamentalibus nomen erit.

1. Conductio electricitatis.

Si duo corpora A et A', diversa densitate electrica praedita, in contactu perfecto sunt, alterum alteri de electricitate sua tradit. In temporis intervallo infinite parvo dt hac ratione per elementum ω superficiei, in qua A et A' contingunt, ex ipso A' in A electricitatis copia E' transmigrat, dum ex ipso A certa quaedam copia E ad A redundat. Quantitas, qua E' ipsam E superat, secundum G. S. Ohm a differentia densitatum electricarum pendet, quae proxime ab ipso ω in duobus ejus lateribus inveniuntur. Sint u', u densitates de quibus diximus, secundum ea, quae Ohm p. 103. et 106. op. l. proposuit, differentia $E'-E$, quam „flumen conductivum“ vocabimus, hac expressione utitur:

A. $$\Omega\,(u'-u)\,\omega\,dt,$$

ubi Ω est quantitas ab ipsis u, u', ω, dt independens, quam considerationibus idoneis determinare oportet.

Haec expressio duos casus amplectitur valde distinctos, prout A et A' ex eadem vel ex diversis substantiis confecta sunt.

Jam suppositionem facimus cum experientia consentientem, ad motum electricitatis spectantem hanc:

1. densitatem electricam in corpore homogeneo a puncto in punctum *continue* variare, ita ut differentia densitatum in duobus punctis propinquis distantiae punctorum proportionalis sit. Casus simplicissimus, ad quem generalem revocabimus, is est, quo inter utrasque quantitates perfecta aequalitas intercedit;

2. densitatem electricitatis, ubi superficiem contactus corporum heterogeneorum transmigrat, *subitas mutationes* pati, unde differentia densitatum electricarum, in punctis propinquis, sed superficie illa separatis, haud amplius a distantia eorum pendet, sed generaliter valore finito gaudet, qui in casu simplicissimo, ad quem ceteros revocabimus, unitatem aequatur.

Hujus suppositionis ope expressionem A. in casibus assignatis ita transformare licet, ut nullas quantitates involvat nisi definitas.

Simplicitatis causa primo loco eum casum consideramus, quo A' et A sunt corpora heterogenea. Si igitur eo casu, qui aequatione

a. $$u' - u = 1$$

significatur,

b. $$q\,\omega\,dt$$

quantitas est electricitatis, quae tempore dt ex ipso A' in A per ω transmigrat, aequationum A. et a. ope nanciscimur sequentem:

$$\Omega\,\omega\,dt = q\,\omega\,dt,$$

e qua hoc quidem casu

$$\Omega = q$$

sequitur. Quantitas igitur electricitatis, quae generaliter in directione commemorata per ipsum ω transit, haec est

B. $$q\,(u' - u)\,\omega\,dt.$$

Ex definitione autem ipsius q (form. b.) apparet, quoties A et A' boni conductores sunt, quantitatem q procul dubio valorem valde magnum induere.

Secundo casu, quo ω in interioribus conductoris homogeneï situm est, res haud ita simpliciter absolvitur.

A consideratione proficiscimur locorum geometricorum, in quibus densitas electrica u valore constante gaudet, quae igitur data sunt aequatione

c. $$u = \text{const.}$$

Quum autem ex suppositione nostra u sit functio continua coordinatarum, hac aequatione superficies repraesentatur, quae nisi in casibus specialibus puncta vel lineas singulares non praebet. Quibus casibus

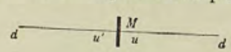


Fig. 1.

in praesentia exclusis, si x, y, z sunt coordinatae orthogonales puncti alicujus M superficiei c., Fig. 1, in hoc puncto illa planum tangens dd habet, cujus aequatio est

d. $$(X - x)\frac{du}{dx} + (Y - y)\frac{du}{dy} + (Z - z)\frac{du}{dz} = 0,$$

si X, Y, Z sunt ipsius plani coordinatae. Jam si statuimus, elementum

ω punctum M continere atque perpendiculare esse ad planum tangens dd, esse insuper ut supra u, u' densitates electricas in utrisque ipsius ω lateribus locum habentes, trans ω tempore dt secundum suppositionem nostram permeat electricitatis copia

$$\Omega\,(u' - u)\,\omega\,dt.$$

Quum autem ex aequatione d. pateat, u' et u nonnisi quantitatibus secundi ordinis differre, manifestum est, si tantum quantitates primi ordinis respicimus, flumen conductivum hoc casu nihil aequale esse, e qua re statim deducitur, flumen conductivum ubique ad superficies c. perpendiculare esse.

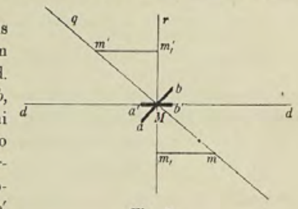


Fig. 2.

Quibus positis consideramus casum, quo ω, etiam nunc punctum M continens, cum plano tangenti d. certum angulum θ facit. Sit ab, Fig. 2, ipsius ω, dd autem plani tangentis intersectio cum plano tabulae, ω et d in hoc plano perpendicularia. Sit porro ω' projectio ipsius ω in planum d, $a'b'$ ejus intersectio, erit angulus $bMb' = \theta$, et $\omega' = \omega \cos\theta$. Jam ex iis, quae supra statuimus, manifestum est, per ω eandem necessario electricitatis copiam fluere debere ac per ipsum ω'.

Sint igitur Mr, Mq perpendicula in M supra $a'b'$, ab erecta, m_1', m_1 puncta, ipsi M propinqua, s' eorum distantia; sit u_1', u_1 densitas electrica in his punctis, secundum aequ. A. per ω' tempore dt in directione $m_1'm_1$ electricitatis copia

$$\Omega\,(u_1' - u_1)\,\omega'\,dt$$

transmigrat. Jam si eo casu, ad cujus normam nos generalem directuros esse supra annunciavimus, scilicet qui aequatione

e. $$u_1' - u_1 = s'$$

significatur,

f. $$k\,\omega'\,dt$$

est quantitas electricitatis, quae in directione dicta per ω' fluit, — ubi igitur k est quantitas definita experientia determinanda, quae *conductibilitas* vocari solet — nanciscimur aequationem

$$\Omega\,s'\,\omega'\,dt = k\,\omega'\,dt,$$

unde nostro casu

$$\Omega = \frac{k}{s'},$$

ideoque

g. $$\Omega\,(u_1' - u_1)\,\omega' dt = k\,\frac{u_1' - u_1}{s'}\,\omega' dt$$ [1]

sequitur.

E punctis m_1', m_1 lineas ducamus ipsi dd parallelas, perpendiculum Mq supra ω erectum in punctis m', m secantes, sitque horum punctorum distantia $= s$, unde $s' = s \cos\theta$; sint denique u', u densitates electricae in his punctis: u' ab u_1', u ab u_1 non different nisi quantitatibus secundi ordinis. Itaque expressio modo inventa g. quantitatis per ω' vel etiam per ω migrantis in hanc transit:

C. $$k\,\frac{u_1' - u_1}{s'}\,\omega' dt = k\,\frac{u' - u}{s}\,\omega\, dt;$$

qua aequatione loco fluminis ad laevum, oblique in directione $m_1' m_1$ per ω transeuntis substituitur flumen alterum, quod in directione ad ipsum ω perpendiculari $m'm$ differentiationique contraria movetur.

Si enim, quod secundum hypothesin fieri debet, ad limitem transimus, ubi s evanescit, $\frac{u' - u}{s}$ fit quotiens differentialis ipsius u in directione Mq formatus, unde eruimus propositionem sequentem:

Sit ω elementum areae infinite parvum in interioribus corporis homogenei situm, sint α, β, γ anguli, quos perpendiculum certo sensu supra ω erectum cum axibus ipsorum x, y, z facit, sit denique u densitas electrica in punctis ipsi ω quam proximis, per ω tempore dt in directione differentiationi (vel perpendiculo) opposita transmigrat electricitatis copia

D. $$k\left\{\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right\}\omega\, dt.$$

Qua in expressione si ponis

$$180^0 + \alpha = \alpha',\ 180^0 + \beta = \beta',\ 180^0 + \gamma = \gamma',$$

hanc induit formam

D'. $$-k\left\{\frac{du}{dx}\cos\alpha' + \frac{du}{dy}\cos\beta' + \frac{du}{dz}\cos\gamma'\right\}\omega\, dt,$$

1) Ut homogeneïtas formularum perspiciatur, haec observamus. Si unitatem longitudinis designamus L, formula e. accuratius ita exhibenda est: $u_1' - u_1 = \frac{s'}{L}$. Ubi igitur in sequentibus ipsum s' obvenit, ejus loco numerum $\frac{s'}{L}$ subintelligas. In f. ipsum k lineam designat, in g. autem loco lineae k area kL obvia est, unde abhinc k aream repraesentat.

quae est intensitas ejusdem fluminis, nisi quod ejus directio in directionem differentiationis incidit. Ex hoc autem *corollarium* sequitur, flumen negativum certa directione motum aequivalere flumini positivo ejusdem intensitatis, quod directione opposita movetur.

Jam quod eum casum attinet, quem hactenus pro exemto habuimus, quo videlicet superficies $u = $ const. puncta vel lineas singulares praebet, hoc solum reminiscaris, in talibus locis planum tangens analytice indeterminatum esse, ideoque valere aequationes

$$\frac{du}{dx} = 0,\ \frac{du}{dy} = 0,\ \frac{du}{dz} = 0.$$

Quum igitur in propinquitate talium locorum u sit constans, flumen conductivum in illis nihili aequale sit necesse est, unde expressio D. etiam ad hunc casum pertinet.

Is denique casus, quo trium differentialium partialium ipsius u alterum infinitum fieret, suppositione excluditur, u esse functionem coordinatarum continuam.

Corollarium. Antequam ad phaenomenum fundamentale secundum pergimus, expressionum modo impetratarum ope B. et C. significationem mechanicam statuemus hypothesium de natura functionis u supra factarum, e quibus expressiones illae sequebantur. Si conditiones, ad quas formulae illae spectant, easdem esse supponimus, ita ut valores ipsorum ω, dt, $(u' - u)$ in utrisque iidem sint, atque designamus

$$q\,(u' - u)\,\omega\, dt = B,\ k\,\frac{u' - u}{s}\,\omega\, dt = C,$$

sequitur

h. $$B = \frac{qs}{k}\,C,$$

quae aequatio docet, electricitatem per superficiem contactus corporum heterogeneorum migrantem resistentiam pati, quae causa est, ut loco quantitatis C quantitas infinite minor B transeat.

Talis resistentiae effectus, quaecunque ceterum res sint, nonnisi in hac re consistere potest.

Sit $\Gamma'\omega = \Gamma$ quantitas electricitatis, quae per aream ω moveretur, si resistentia ibi unitatem aequaret: si ω resistentiam opponit duplicem, triplicem, ... $\varrho^{\text{tuplicem}}$, erit quantitas quae per ω penetrat, $= \frac{1}{2}\omega\Gamma'$, $\frac{1}{3}\omega\Gamma'$, ... $\frac{1}{\varrho}\omega\Gamma'$; vel ut aliis verbis utamur: Si resistentia est $= \varrho$, ceteris nihil mutatis, trans ω totidem electricitatis permeat, quam per elementum $\omega' = \frac{\omega}{\varrho}$ penetraret, si resistentia unitati aequalis esset. Sit Γ_1 haec copia, erit

i. $$\Gamma_1 = \Gamma' \omega' = \frac{\omega'}{\omega} \Gamma,$$

atque $\frac{\omega'}{\omega} = \varrho$ resistentiam metitur.

Suppositiones igitur nostrae de functione u ad hoc redeunt, ut electricitas, ubi superficiem contactus corporum heterogeneorum adit, in resistentiam ingentem incidat, cujus mensura est

k. $$\frac{k}{qs},$$

si resistentia in interioribus corporis, e quo electricitas prodit, pro unitate habetur, designaturque k hujus corporis conductibilitas, atque s distantia media particularum de electricitate sua tempore dt communicantium.

Cujus resistentiae magnitudo etiam experientia certissime indicatur, praecipue observatione Clⁱ Péclet, superficiebus metallicis contiguis, nullo vernicis velamine separatis vim quandam condensatoriam inesse.

Jam hypotheses nostras, e forma speciali primitiva ad significationem generalem evectas ad omnes casus analogos applicare licebit atque oportebit.

2. *Disjunctio electricitatum conjunctarum.*

Phaenomenorum fundamentalium, quae nobis investiganda sunt alterum actione gignitur, quam corpora electrica in corpora remota exercent. Quae actio duplici modo eo cernitur, ut corpora conducentia, in quae illa exercetur, simul et ipsa electrica evadant (electricitas influentia provocata), simulque locum mutare nitantur (attractio electrica).

Quos effectus singulos seorsim tractaturus primum ostendam, e quovis puncto materiali in interioribus corporis conducentis sito, quamdiu influentia electrica sollicitatur, propter hanc influentiam continenter quantitates aequales electricitatis positivae et negativae in directiones oppositas profluere, atque inde copias electricitatis apparere, quae cum iis, quas in sectione praecedenti determinavimus, generaliter comparari possint.

Fig. 3. Si corpus electricitatem conducens B, cujus superficiem b vocamus, in propinquo est corporis A electricitate imbuti, quam, ut de re definita loquamur, positivam esse statuimus: in ipsius b parte ea,

quae ipsi Δ opposita est, cernitur copia electricitatis negativae $-\Delta$, dum quantitas aequivalens electricitatis positivae $+\Delta$ in reliqua ipsius b parte distributa invenitur. Jam si utraeque ipsius b partes paulisper

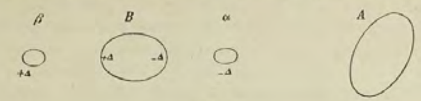


Fig. 3.

corporibus α et β tanguntur, quorum ulterius electricitatem positivam in b obviam tollit, electricitate negativa ad ipsum α transeunte: corpus B in statum anelectricum recedit, sed propter actionem assiduam ipsius A, tempore certo T delapso, in pristinum statum restituitur, ut sicut antea, denuo copiae $-\Delta$ et $+\Delta$ supra b distributae reperiantur. Tempus illud T generaliter valde exiguum est, sicut experimentis de influentia electricitatis notum est: si, quod infra supponetur, B et ipsum parvum est, ipsum T paene evanescere patet, quum evidenter una cum B decrescat. — Quod experimentum si repetitur, ita tamen, ut inter singula experimenta tempus T intercedat, semper idem ejus eventus erit, si propter causas qualescunque conditio electrica ipsorum α et β immutata manet: qui, quatenus nobis interest, eo consistit, ut corpora α et β copias $-\Delta$ et $+\Delta$ obtineant, quoties cum ipso B in directione supra significata contingunt. Haec autem directio illo indicio sine ulla ambiguitate definitur, si A et B infinite parva statuuntur: tunc enim manifesto in lineam incidit corpuscula A et B conjungentem. — Sit m multitudo experimentorum, quae tali modo per unitatem temporis instituuntur, ipsum α per idem tempus obtinet copiam $-m\Delta = -E$, per tempus τ igitur, quod multiplum esse statuimus temporis T, copiam $-\tau E$, ubi E jam a tempore τ independens evasit.

Sin autem nunc corpus B magis magisque decrescere facimus, secundum ea, quae supra monuimus, etiam T decrescit, sed generaliter loquendo jam infra omnes limites abierit, dum B adhuc sensibili quamvis exigua extensione utitur. Quo pacto primum τ a reservatione illa liberatur, ut exactum multiplum ipsius T sit, quum propter exiguitatem ipsius T ejus partes aliquotas respicere non oporteat. Secundo loco singulae tactiones ipsius B per α et β in unam conjunguntur tactionem continuam, singuli discessus electricitatis ab ipso B in unam continuam emissionem. Quae emissio, si etiam A infinite parvum esse statuimus, in linea locum habet corpora A et B jungente.

Si jam ultra supponimus, corpora B, α, β in unum corpus C supra spatium finitum patens conjungi, cujus B est particula in interioribus sita, ex ipso B in directione $B - A$ per tempus τ procedit electricitatis copia $-\tau E$, in directione autem opposita copia aequivalens $+\tau E$. Sed quantitas E non jam tota ex intensitate influentiae pendet, quam A in B exercet, sed etiam a resistentia, in quam electricitas ex B procedens incidit. Qua in re pro *principio* habendum est,

> Influentiam, quaecunque sit ejus intensitas, in corpusculo quodam B infinite parvo et substantia conducente circumdato nunquam majores electricitatum conjunctarum copias re vera dissociare posse, quam ex eo procedere possunt: ut, aliter loquendo, electricitatis copiae, quae pro intensitate influentiae disjunguntur, sed propter impedimenta ipsum B relinquere nequeunt, prorsus ita se habeant, acsi non separatae essent. Qua re sponte sequitur, copias ex ipso B prodeuntes semper esse aequivalentes.

Sub factis suppositionibus denique ipsum E infinite parvum evadit: sed quum jam ex omnibus punctis ipsius C eodem modo quo ex B electricitatis copiae profluant, talium copiarum multitudo infinita concurrit, quarum summa determinanda est. Flumina autem hac ratione e copiis $-\tau E$ et $+\tau E$ orta disjuncte tractanda esse vix moneri debet.

Jam ut determinetur quantitas electricitatis influentia ipsius A provocatae, quae tempore infinite parvo dt per datum elementum areae ω permeat, ab eo casu incipiamus, quo ω perpendiculare est in recta, quae punctum aliquod ipsius ω cum A conjungit. Fig. 4. Supra ω in directione $A - \omega$ exstruimus cylindrum normalem. Ex omnibus punctis in interioribus hujus cylindri sitis propter influentiam ipsius A electricitas negativa procedit in directione $\omega - A$. Quum autem velocitas electricitatis finita sit, persuasum habere possumus, tempore dt non alia puncta copias sensibiles electricitatis ex illis procedentis trans ω esse missura, nisi quae ipsi ω proxime adjacent, in quae igitur A actionem constantem exercet. Quum porro electricitatis copiae, quae tempore dt in directione dicta e quolibet puncto procedit, ad $-dt$ proportionalis sit, haec proprietas etiam copiis convenit, quae e punctis illis trans ω mittuntur. Si denique loco ipsius ω ejus partem dimi-

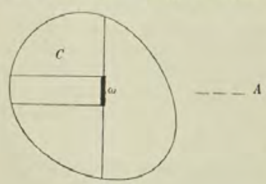


Fig. 4.

diam, tertiam, ... consideramus, manifesto erit electricitatis copia prioris pars dimidia, tertia, ... ex quo intelligitur, hanc copiam ad ipsum ω esse proportionalem. Unde, si $-H$ est densitas electricitatis per ω migrantis, porro $-h\omega dt$ ejus copia, si esset $H = 1$, generaliter habetur pro quantitate electricitatis transeuntis

$$-hH\omega dt.$$

Est igitur h constans ex observationibus petenda. Puncta autem, a quibus copia illa discessit, quum ipsi ω quam proxime adjaceant, manifestum est, ipsum H non pendere nisi ab actione, quam A in haec puncta exercet.

Si tamen μ est copia electricitatis in ipso A contentae, r ejus distantia ab ω: secundum legem a Coulomb detectam in puncta ipsi ω propinqua attractio exercetur, quae ad $\frac{\mu}{r^2}$ proportionalis est. Quae attractio si evanesceret, etiam H nullum esset: attractione crescente, H augetur. Suppositionem igitur facimus simplicitate sua commendabilem, densitatem H esse proportionalem ad hanc attractionem[1]), ponimusque

I. $$H = \frac{\mu}{crr},$$

ubi c est linea, quum μ volumen contineat. Quantitas igitur electricitatis, quae tempore dt per ω in directione $\omega - A$ transit, haec est:

II. $$-\frac{h}{c} \cdot \frac{\mu}{r^2} \cdot \omega dt = \frac{h}{c} \frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{r}\right)\omega dt.$$

Jam quaestio oritur, quanta sit electricitatis copia, quae sub hypothesi nostra per ω transit, siquidem hoc elementum quocunque modo versus directionem attractionis inclinatum est.

Sit ab, Fig. 5, intersectio hujus elementi cum plano tabulae, atque ω in hoc planum perpendiculare. Circa peripheriam ipsius ω pro directrice habitam cylindrum ponimus, cujus rectae generatrices in directionem attractionis incidunt. Sit $\omega_{,}$ ejus sectio transversa, hujus

1) Ipsa hypothesis non nova est, sed ejus applicatio. Biot illam in opere suo: „Traité de physique“ (Paris 1816.) Tome II. pag. 284. his verbis protulit:

> „Lorsqu'un corps conducteur et isolé B, qui est dans l'état naturel, est mis en présence d'un autre corps A électrisé et isolé, l'électricité distribuée sur la surface de A agit par influence sur les deux électricités combinées de B, en décompose une quantité proportionelle à l'intensité de son action etc. etc.“

postea autem actionis influentiae intensitatem eo definit, ut attractioni electricae eam aequiparet.

intersectio cum plano tabulae ab'; sit θ angulus acutus rectis ba, $b'a$ interceptus, unde $\omega' = \omega \cos\theta$. Jam e solo aspectu manifestum est, quantitates electricitatis, quae per ω' et ω transeunt, aequales esse, vel

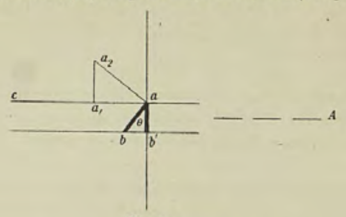


Fig. 5.

si placet, quantitatibus tantum altiorum ordinum inter se differre. Quae igitur per ω transit electricitatis copia secundum m. haec est:

n. $$\frac{h}{c}\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{r}\right)\omega' dt = \frac{h}{c}\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{r}\right)\cos\theta\cdot\omega\, dt.$$

Hanc expressionem ad formam simpliciorem redigere licet.

Supra ω in puncto a perpendiculum erigimus retrorsum spectans aa_2, ex a_2 iterum perpendiculum $a_2 a_1$ in ac dirigimus. Sit $aa_1 = dr$, $aa_2 = ds$, $a_1 a_2 = dp$, erit $dr = ds\cos\theta$, $dp = ds\cdot\sin\theta$. Sint porro v, v_1, v_2 valores, quos $\frac{\mu}{r}$ in punctis a, a_1, a_2 induit, habemus

$$\frac{v_2 - v}{ds} = \frac{v_2 - v_1}{ds} + \frac{v_1 - v}{ds} = \frac{v_2 - v_1}{dp}\cdot\frac{dp}{ds} + \frac{v_1 - v}{dr}\cdot\frac{dr}{ds},$$

vel si ad limitem pergimus, ubi ds evanescit:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dp}\sin\theta + \frac{dv}{dr}\cos\theta.$$

Jam in valorem ipsius $\frac{dv}{dp}$ inquiramus. Est autem

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dp} = \lim\frac{1}{dp}\left\{\frac{1}{\sqrt{(r^2 + dp^2)}} - \frac{1}{r}\right\} = -\lim\frac{dp}{2r^2} = 0,$$

unde

$$\frac{dv}{dp} = 0$$

atque

$$\frac{dv}{dr}\cos\theta = \frac{dv}{ds},$$

unde obtinemus

E. $$\frac{h}{c}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{r}\right)\cos\theta\cdot\omega\, dt = \frac{h}{c}\frac{d}{ds}\left(\frac{\mu}{r}\right)\omega\, dt.$$

Hac autem aequatione loco fluminis ad laevum, oblique per ω transeuntis substituitur flumen alterum, quod in directione $a_2 a$ ad ipsum ω perpendiculari differentiationique contraria movetur.

Si electricitas ipsius A negativa esset, expressioni praecedenti tale signum tribuendum esset, ut valor ejus positivus evaderet; quum autem secundum § 2. hoc casu μ negativum sit, forma expressionis nihil mutatur, quae igitur etiam ad hunc casum spectat.

His praeparatis, casum aggredimur generalem, quo influentia a variis copiis electricis, quocunque modo in spatio distributis exercetur.

Sit ω elementum areae in interioribus corporis conducentis situm, sint x, y, z coordinatae puncti ipso ω contenti, sint α, β, γ anguli, quos perpendiculum supra ω in certam regionem exstructum N cum axibus coordinatarum facit. Sint porro $m_1, m_2 \ldots$ varia volumina infinite parva, copias electricitatis $\mu_1, \mu_2, \ldots$ possidentia; sint x_1, y_1, z_1; $x_2, y_2, z_2 \ldots$ eorum coordinatae, $r_1, r_2, \ldots$ eorum distantiae ab ω, vel si placet, a puncto x, y, z.

Quoniam $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$ sunt cosinus angulorum, quos perpendiculum supra ω retrorsum erectum cum axibus facit, per ω tempore dt in directione perpendiculi N, si generaliter ponimus

$$\frac{dP}{dN} = \frac{dP}{dx}\cos\alpha + \frac{dP}{dy}\cos\beta + \frac{dP}{dz}\cos\gamma,$$

propter influentiam ipsius μ_1 copia electricitatis transit

$$-\frac{h}{c}\frac{d}{dN}\left(\frac{\mu_1}{r_1}\right)\omega\, dt,$$

propter influentiam ipsius μ_2 copia electricitatis transit

$$-\frac{h}{c}\frac{d}{dN}\left(\frac{\mu_2}{r_2}\right)\omega\, dt,$$

. . . .

electricitatis igitur copia, quae per ω eodem tempore in eadem directione propter influentiam omnium illarum quantitatum transit, haec est

o. $$-\frac{h}{c}\frac{d}{dN}\left\{\sum\frac{\mu}{r}\right\}\cdot\omega\, dt,$$

vel si ponimus

F. $$\sum\frac{\mu}{r} = v,$$

ubi v est potentiale omnium massarum electricarum, vel, ut brevitatis causa dicemus, *potentiale electricum*, haec:

G. $$-\frac{h}{c}\left\{\frac{dv}{dx}\cos\alpha + \frac{dv}{dy}\cos\beta + \frac{dv}{dz}\cos\gamma\right\}\omega\, dt.$$

Jam quod flumen attinet e copiis $+\tau E$ formatum, omnia quae exposuimus ad literam repetuntur, nisi quod copiis electricis obvenientibus ubique signum contrarium tribuendum sit, flumenque resultans in directione opposita dirigatur. Praeter copiam G. igitur per ω in directione differentiationi opposita transit copia

$$\text{H.} \qquad \frac{h}{c}\left\{\frac{dv'}{dx}\cos\alpha + \frac{dv'}{dy}\cos\beta + \frac{dv'}{dz}\cos\gamma\right\}\omega\,dt,$$

ubi accentibus, quibus ipsum v ornavimus, indicatur, valorem potentialis paullum differre ab eo, qui in form. G. obvius est. In utrisque enim expressionibus potentiale ad eas corporis partes referendum est, quae a copiis istis electricitatis proxime ante transitum per ω penetrantur.

Flumina G. et H. in unum flumen colligere licet, quod *flumen inductivum* vocare placet. Quum enim secundum corollarium e form. D. deductum flumen H. contra directionem differentiationis motum prorsus ita se habeat, sicut flumen

$$-\frac{h}{c}\left\{\frac{dv'}{dx}\cos\alpha + \frac{dv'}{dy}\cos\beta + \frac{dv'}{dz}\cos\gamma\right\}\omega\,dt$$

in directione differentiationis motum, manifestum est flumina G. et H. conjunctim ita se habere sicut flumen

$$-\frac{h}{c}\left\{\left(\frac{dv}{dx}+\frac{dv'}{dx}\right)\cos\alpha + \left(\frac{dv}{dy}+\frac{dv'}{dy}\right)\cos\beta + \left(\frac{dv}{dz}+\frac{dv'}{dz}\right)\cos\gamma\right\}\omega\,dt$$

in directione differentiationis motum, quod ab hoc

$$\text{I.} \qquad -\frac{2h}{c}\left\{\frac{dv}{dx}\cos\alpha + \frac{dv}{dy}\cos\beta + \frac{dv}{dz}\cos\gamma\right\}\omega\,dt$$

nonnisi quantitatibus altiorum ordinum differt. Quibus neglectis, I. est flumen, quod inductivum appellabimus.

Experimentum, a quo in antecedentibus profecti sumus, ab altera quoque parte, quam supra indicavimus, examinari oportet. Corporibus enim A et B iterum advocatis, praeter phaenomenum modo tractatum inter corpora illa etiam vis intercedit, quae distantiam eorum mutare contendit. Quum igitur omne punctum materiale in interioribus corporis conducentis situm viribus accelerantibus sollicitetur, generaliter in motu electricitatis tertium exstat phaenomenum fundamentale, videlicet motus interior et exterior corporis, per quod electricitas movetur.

Simplicitatis causa autem corpora, de quibus hic agetur, supponimus ita esse comparata, ut neque ipsa, neque eorum particulae loco suo moveri possint.

His statutis, ad tempus finem facimus considerationum hypotheticarum. In posterum semel tantummodo, ubi de electricitate in contactu corporum heterogeneorum orta, deque ratione agetur, qua electricitas ex influentiae actione orta se habet in superficie corporum, ad phaenomena redire cogemur simpliciora.

De motu permanenti electricitatis in interioribus corporum homogeneorum.

4.

Proponitur corpus A, extensum, homogeneum; puncta in interioribus ejus sita ad coordinatarum systema orthogonale referuntur ipsorum x, y, z. Densitas electrica ut supra vocatur u, potentiale electricum v.

Secundum ea, quae sub finem §[i] 2. statuimus, id nunc agitur, ut incrementum inveniatur, quod copia electricitatis in elemento aliquo ipsius A contenta acciperet, si electricitas statum permanentem modo relictura esset.

Quod incrementum secundum principium superpositionis parvarum mutationum aequale est summae incrementorum, quibus copia illa augeretur, si utrumque phaenomenum fundamentale solum existeret. Unde jam protinus conductionem electricitatis actionemque influentiae separatas tractare nobis licet.

Ipsum corpus A planis, quae coordinatarum planis parallela sunt, in parallelepipeda dividimus infinite parva, quorum latera, axibus ipsorum x, y, z parallela, sunt dx, dy, dz. Brevitatis causa haec elementa nomen ducent ab illa cuspide, cujus coordinatae algebraïce minores sunt: ita ut e. g. parallelepipedum, quod cuspidibus (x, y, z) et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ determinatur, ad punctum (x, y, z) pertinere dicatur.

In praesentia tamen non alia elementa considerabuntur, nisi quae tota in interioribus ipsius A sita sunt, quum elementa superficiei nimium propinqua peculiarem tractationem sibi poscant.

1. *Incrementum e conductione ortum.* Per unumquodque sex laterum parallelepipedi ad punctum (x, y, z) pertinentis secundum ea, quae in prima sectione §[i] antecedentis invenimus, flumen conductivum transit, cujus intensitas formula D. determinatur.

Si e. g. latera duo contemplamur, quae in directione ipsorum x perpendicularia sunt, et planis $X = x$, $X = x + dx$ continentur: in formula D. ponendum erit $\omega = dy\,dz$, $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90^0$. Per prius illorum igitur in directione abscissarum x decrescentium, id est ex interioribus parallelepipedi, copia electricitatis transit

$$k\frac{du}{dx}dy\,dz\,dt;$$

qua in expressione si ipsum x quantitate dx augemus, eruimus copiam, quae ab altera parte in parallelepipedum ingreditur, igitur

$$k\left(\frac{du}{dx} + dx\frac{d^2u}{dx^2}\right)dy\,dz\,dt.$$

De qua si quantitatem priorem deducimus, obtinemus incrementum, quod copia electricitatis in parallelepipedo nostro fluminibus illis accepit, hoc

$$k\frac{d^2u}{dx^2}dx\,dy\,dz\,dt.$$

Simili modo parallelepipedum e duabus reliquis coordinatarum directionibus incrementa accipit

$$k\frac{d^2u}{dy^2}dx\,dy\,dz\,dt \quad \text{et} \quad k\frac{d^2u}{dz^2}dx\,dy\,dz\,dt;$$

unde incrementum e conductione electricitatis ortum integrum hoc est:

K. $$k\left\{\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right\}dx\,dy\,dz\,dt.$$

2. *Incrementum ex electricitatibus influentia dissociatis.* Sint

$$v',\, v,\, v_1$$

valores, quos potentiale electricum in parallelepipedis contiguis, ad puncta

$$(x-dx, y, z),\ (x, y, z),\ (x+dx, y, z)$$

pertinentibus obtinet, secundum formulam G. §[i] antecedentis

e primo parallelepipedo in secundum electricitatis copia transit

$$-\frac{h}{c}\frac{dv'}{dx}dy\,dz\,dt,$$

e secundo autem in tertium

$$-\frac{h}{c}\frac{dv}{dx}dy\,dz\,dt.$$

Porro secundum formulam H. ejusdem §[i]

e tertio parallelepipedo in secundum copia transit

$$\frac{h}{c}\frac{dv_1}{dx}dy\,dz\,dt,$$

e secundo in primum

$$\frac{h}{c}\frac{dv}{dx}dy\,dz\,dt.$$

In secundo igitur parallelepipedo, quod ad punctum (x, y, z) pertinet, copia remanet

$$\frac{h}{c}\left\{-\frac{dv'}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dv_1}{dx}-\frac{dv}{dx}\right\}dy\,dz\,dt=\frac{h}{c}\left\{\frac{dv_1}{dx}-\frac{dv'}{dx}\right\}dy\,dz\,dt$$
$$=\frac{2h}{c}\frac{d^2v}{dx^2}dx\,dy\,dz\,dt,$$

quod est incrementum copiae electricitatis in parallelepido nostro contentae, illi parti fluminis inductivi debitum, quae per latera parallelepipedi ad planum ipsorum y et z parallela penetrat: atque apparet, ad ejus formationem quantitates, quae ex ipso elemento processerunt,

nihil contribuisse, sicut re vera secundum principium §[i] 3. 2) evenire debet.

Simili modo e duabus reliquis coordinatarum directionibus obtinentur incrementa

$$\frac{2h}{c}\frac{d^2v}{dy^2}dx\,dy\,dz\,dt \quad \text{et} \quad \frac{2h}{c}\frac{d^2v}{dz^2}dx\,dy\,dz\,dt,$$

unde omnibus collectis, incrementum ex influentiae actione ortum integrum hoc est

L. $$\frac{2h}{c}\left\{\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right\}dx\,dy\,dz\,dt.$$

Sed e nota potentialium proprietate quum sit

p. $$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=-4\pi u,$$

incrementum L. hoc evadit

M. $$-\frac{8\pi h}{c}u\cdot dx\,dy\,dz\,dt,$$

quae expressio docet, actionis, quam influentia in punctum aliquod in interioribus corporis conducentis situm exercet effectum non pendere nisi a densitate electrica in ipsius puncti propinquitate.

5.

Aequatio motus permanentis in interioribus corporum homogeneorum. Quum autem propter suppositiones, quas de natura conductoris fecimus, jam nulla alia incrementa speranda sint, secundum ea quae §[o] antecedenti monuimus, incrementum completum, quod electricitatis copia in isto parallelepipedo contenta obtinet, summam aequat expressionum K. et M., unde hoc est:

N. $$\left\{k\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right]-\frac{8\pi h}{c}u\right\}dx\,dy\,dz\,dt.$$

Ut igitur aequatio formetur, qua motus permanens definitur, hanc quantitatem nihili aequiparamus, e quo, factore $dx\,dy\,dz$ sublato, sequitur

O. $$k\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right]-\frac{8\pi h}{c}u=0.$$

Quae aequatio ad omnia puncta spectat, quae in interioribus corporis A. versantur.

Hac occasione adnotare convenit, expressionem N. nequaquam valere ad aequationem motus generalem exhibendam, quod ita patet. Considerationes enim, quas in § 3. instituimus, praecipue ea nituntur suppositione, distributionem electricitatis, de qua agitur, initio temporis dt

permanentem fuisse: simul hypotheses, quas ibi collocavimus, praesertim ea, quae in sectione secunda posita est, nonnisi tales modificationes sunt hypothesium generalium, quales motui permanenti conveniunt. Ad disquisitionem denique motus generalis notiones in praesentiarum adhibitae non sufficiunt, quum etiam velocitates electricitatis in singulis punctis in calculum introducere opus sit.

Ad exactam cognitionem phaenomenorum, quae electricitas mota praebet, praeter densitatem electricitatis etiam flumen electricum in quovis puncto conductoris determinari oportet. Quem in finem sit rursus ω elementum areae infinite parvum punctum (x, y, z) continens, et α, β, γ anguli, quos perpendiculum supra ω in certam regionem erectum cum axibus coordinatarum facit. Secundum formulas D'. et I. per ω in directione hujus perpendiculi transit flumen conductivum

$$-k\left\{\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos\beta+\frac{du}{dz}\cos\gamma\right\}\omega\,dt,$$

et flumen inductivum

$$-\frac{2h}{c}\left\{\frac{dv}{dx}\cos\alpha+\frac{dv}{dy}\cos\beta+\frac{dv}{dz}\cos\gamma\right\}\omega\,dt,$$

unde electricitatis transeuntis copia universa haec est:

q. $$-\left\{\frac{d}{dx}\left(ku+\frac{2h}{c}v\right)\cos\alpha+\frac{d}{dy}\left(ku+\frac{2h}{c}v\right)\cos\beta+\frac{d}{dz}\left(ku+\frac{2h}{c}v\right)\cos\gamma\right\}\omega\,dt.$$

Quae expressio si ad unitatem areae et temporis refertur, non tamen neglectis iis, quae de situ areae statuta sunt, eruitur *flumen electricum* ad talem areae unitatem pertinens. Unde si ponimus

P. $$ku+\frac{2h}{c}v=kw,$$

ejusdem fluminis expressio haec est

Q. $$-k\left\{\frac{dw}{dx}\cos\alpha+\frac{dw}{dy}\cos\beta+\frac{dw}{dz}\cos\gamma\right\}.$$

Invenimus igitur, quod attentione satis dignum esse videtur, flumen electricum permanens e duobus fluminibus conflari, flumine ordinario conductivo et flumine extraordinario inductivo.

Jam angulos α, β, γ ita determinare licet, ut flumen Q. quam maximum evadat.

Qua in re si relationem respicis $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$, hujus fluminis statim obtinebis expressionem

R. $$S=k\sqrt{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dz}\right)^2},$$

et ad ejus directionem definiendam

S. $$\cos\alpha=-\frac{k}{S}\frac{dw}{dx},\quad\cos\beta=-\frac{k}{S}\frac{dw}{dy},\quad\cos\gamma=-\frac{k}{S}\frac{dw}{dz}.$$

Sint α', β', γ' anguli, quos recta in hac directione perpendicularis cum axibus coordinatarum facit, e relatione $\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0$ sequitur, flumen electricum in hac directione esse nullum.

Quum autem in flumen R. eaedem considerationes institui possint, quae initio §i 3. 1) factae sunt, percipitur, flumen Q. non esse nisi eam partem fluminis R., quae per unitatem areae ad form. Q. pertinentem transit in planum ad directionem ipsus R. perpendiculare projectam. Flumen R. igitur est flumen electricum proprie dictum.

Quibus positis omnes notiones patent, quae in problemate nostro determinandae sunt: omniaque ad densitatem electricam u, potentiale v in spatio externo et functionem w revocantur. Functiones autem v et w more satis memorabili conjunguntur, quem infra ostendemus.

De motu electricitatis permanenti in superficie corporum homogeneorum.

6.

Calculi hactenus instituti quum ad omnia elementa valeant, quae tota in interioribus ipsius conductoris versantur, talia tantum nobis consideranda restant elementa, quae superficiei illius quam proxime adjacent.

Quae elementa prae ceteris corporis partibus variis proprietatibus excellunt: primum propter ingentem resistentiam, quam electricitas in superficie conductoris patitur (§ 3. Corollarium), tum eo, quod praeter conductionem et disjunctionem electricitatis etiam ad actionem vis electromotoricae respiciendum sit.

Jam in hac disquisitione iterum *principio* §i 2. utemur, motum permanentem electricitatis eo determinari, ut summa singulorum incrementorum, quibus electricitatis copia in elemento aliquo contenta per datum temporis intervallum augetur, nihili aequiparetur. Quae methodi aequalitas, quum in ipsius rei natura posita sit, tamen nos coget, ut actionem vis electromotoricae tali modo in calculos introducamus, cujus nexum cum praeceptis ab Ill. Ohm prolatis non primo adspectu dijudicare liceat.

Fig. 6. Sit s superficies, in qua corpora A et A' inter se contingunt, quam ubique continue curvatam esse supponimus. (Figura nostra sicut superiores intersectionem planam exhibet.) Sit ω elementum illius infinite parvum, $a\,a'$ ejus intersectio. Supra ω in utrasque directiones cylindros perpendiculares exstruimus sectionibus transversis terminatos $abca', a'b'c'a$, quorum volumina sint $\omega\delta$, $\omega\delta'$.

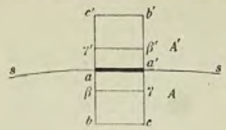


Fig. 6.

Secundum § 3. ad formationem fluminum ibi determinatorum eae tantum corporis particulae contribuunt, quarum distantia ab elemento ω, per quod illa migrant, infinite parva est, et quidem facile intelligitur, distantiam punctorum ultimorum, e quibus electricitatis copiae sensibiles trans ω mittuntur, a velocitate electricitatis pendere et a magnitudine elementi temporis.

Itaque, si δ et δ' infinite parva esse statuimus, tamen supponere fas est, areas $bc, b'c'$ utique postulatis §[i] 3. respondere: dum ab altera parte persuasum habere possumus, tales sectiones transversas $\beta\gamma, \beta'\gamma'$, quarum distantiae ab aa' respectu ipsorum δ, δ' satis parvulae sunt, postulatis iisdem nullo modo esse responsuras.

Jam ut aequationes obtineamus, quibus motus permanens in superficie determinatur, quatuor illa elementa $\beta bc\gamma, a\beta\gamma a', a'\beta'\gamma' a, \beta' b' c' \gamma'$ singula seorsim examinabimus.

Qua in re illarum electricitatis copiarum, quae per superficiem cylindricam fluunt, nulla ratio habenda erit: quum enim illae leges supra exhibitas sequantur, secundum § 4. quae ex illis oriuntur incrementa quarti ordinis sunt, unde, quod mox patebit, prae quantitatibus, de quibus hic agendum est, omnino negligenda sunt.

Brevitatis causa sint $\frac{dP}{dp}, \frac{dP'}{dp'}$ quotientes differentiales functionum P, P', ex elementis $\beta bc\gamma, \beta'b'c'\gamma'$ in directionibus perpendiculi ad interiora corporum A, A' spectantibus sumti[1]): dum functio P' in corpore A' easdem partes agit, quales P in corpore A.

Quibus positis, elementa $\beta bc\gamma, \beta'b'c'\gamma'$ per latera $bc, b'c'$ tempore dt secundum § 5. q. copias electricitatis obtinent:

r. $$\left(k\frac{du}{dp} + \frac{2h}{c}\frac{dv}{dp}\right)\omega dt, \qquad \text{r}'. \quad \left(k'\frac{du'}{dp'} + \frac{2h'}{c'}\frac{dv}{dp'}\right)\omega dt.$$

Quum autem secundum suppositiones, quibus hae formulae nituntur,

1) Haec denotatio quotientium differentialium, cujus in posterum semper usus erit, ab usitata tantum signo differt, sed rerum naturae magis convenire visa est.

x illis elementis per $bc, b'c'$ electricitatis copiae influentia ortae $-\frac{h}{c}\frac{dv}{dp}\omega dt$, $-\frac{h'}{c'}\frac{dv}{dp'}\omega dt$ secesserint, ex iisdem elementis quantitates aequivalentes sed signo oppositas per $\beta\gamma, \beta'\gamma'$ profluant necesse est. Unde elementa $a\beta\gamma a', a'\beta'\gamma' a$ ab elementis $\beta bc\gamma, \beta'b'c'\gamma'$ quantitates obtinent:

s. $$\frac{h}{c}\frac{dv}{dp}\omega dt, \qquad \text{s}'. \quad \frac{h'}{c'}\frac{dv}{dp'}\omega dt.$$

Jam ut aequationes eruantur, quae ad elementa $\beta bc\gamma, \beta'b'c'\gamma'$ spectant, copiae determinandae sunt, quae ex elementis $a\beta\gamma a', a'\beta'\gamma' a$ in illa procedunt. Quae determinatio quum ex considerationibus superioribus haud amplius succedat, e conditione nobis resultabit, motum electricitatis etiam in elementis $a\beta\gamma a', a'\beta'\gamma' a$ permanentem esse debere. Sint

t. $$\Omega\omega dt, \qquad \text{t}'. \quad \Omega'\omega dt$$

quantitates, quae requiruntur, si expressionum r. s. t. et r'. s'. t'. ope incrementa formamus, quae elementis $\beta bc\gamma, \beta'b'c'\gamma'$ accipiuntur, his incrementis, uti debet, nihili aequiparatis, obtinemus aequationes

u. $$k\frac{du}{dp} + \frac{2h}{c}\frac{dv}{dp} + \Omega - \frac{h}{c}\frac{dv}{dp} = 0,$$

u'. $$k'\frac{du'}{dp'} + \frac{2h'}{c'}\frac{dv}{dp'} + \Omega' - \frac{h'}{c'}\frac{dv}{dp'} = 0,$$

ubi factor communis ωdt sponte abiit.

Ad elementa $a\beta\gamma a', a'\beta'\gamma' a$ transimus. In iis expressiones s., s'. pro incrementis, contra t., t'. pro decrementis habendae sunt. Porro secundum § 3. B. $a\beta\gamma a'$ ab ipso $a'\beta'\gamma' a$ copiam obtinet

v, v'. $$q(u' - u)\omega dt.$$

Jam e principiis in §° 3. prolatis sequitur, ut electricitatis copiae, quae in interioribus elementorum nostrorum actione influentiae separantur, ex iisque procedunt, prae ceteris quantitatibus in calculis nostris obvenientibus prorsus negligendae sint.

Ponamus enim, actionem influentiae (cujus intensitas ab effectu, e reliquis conditionibus pendente bene distinguenda est), in elemento $a\beta\gamma a'$ tantam esse, ut flumen per aa' transeuns $E\omega dt$ incitaret, si aa' eandem resistentiam exerceret, quae in interioribus ipsius A locum habet: hoc flumen secundum § 3. Corollarium form. k. resistentiam patitur $\frac{k}{qs}$ (ubi s est distantia media elementorum, quae tempore dt trans aream ω de electricitate sua communicant): unde pars illius tantum re vera superficiem penetrat, scilicet quantitas infinite minor $\frac{qs}{k}\cdot E\omega dt$. Secundum *principium* autem, quod

§° 3. 2) collocavimus, per $\beta\gamma$ etiam nil pluris transit, nisi quantitas $-\frac{qs}{k}E\omega dt$, partesque fluminum, quae in interioribus ipsius $\alpha\beta\gamma\alpha'$ retinentur, secundum hoc idem principium pro non-separatis habendae sunt. Qua re sententiam nostram cum considerationibus superioribus consentire evictum est.

Jam ad vim electromotoricam examinandam transimus. Cujus actionem in hac tantum re consistere posse manifestum est, ut in iis corporum contiguorum particulis, quibus superficies corporum constant, electricitates conjunctas certo modo disjungat.

Ad rem melius cognoscendam advocamus tabulam Voltae duplicem, quae e physice satis nota est. Fig. 7. Sit $\beta\gamma\beta'\gamma'$ haec tabula, et quidem pars $\alpha\beta\gamma\alpha'$ e zinco, $\alpha'\beta'\gamma'\alpha$ e cupro confecta. Quarum prior propter actionem vis electromotoricae electricitatem positivam exhibet, dum altera electricitate negativa imbuta est. Jam si utraque pars corpore abducente tangitur, (ita tamen, ut novis tactionibus effectus vis electromotoricae in $\alpha\alpha'$ agentis non diminuatur), e cupro continenter totidem electricitatis negativae, quam e zinco positivae profluit. Quo experimento ratio, quomodo actio vis electromotoricae in calculum introducenda sit, omnino decernitur.

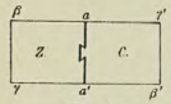


Fig. 7.

Si enim, Fig. 6., discum infinite tenuem $\beta\gamma\beta'\gamma'$ pro tabula Voltaïca habemus, prima vis electromotoricae actio in eo consistit, ut in duabus illius partibus electricitatum conjunctarum disjunctionem operet. Sint $-H$, $+H'$ densitates electricitatum hoc modo ex elementis $\alpha\beta\gamma\alpha'$, $\alpha'\beta'\gamma'\alpha$ versus $\alpha\alpha'$ propulsarum, $+H$ igitur et $-H'$ densitates electricitatum, quae ex illis versus $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ propelluntur: secundum formulam §i 3. B. elementum $\alpha\beta\gamma\alpha'$ per $\alpha\alpha'$ obtinet

w. $$+q(H'+H)\omega dt,$$

ipsum $\alpha'\beta'\gamma'\alpha$ autem

w'. $$-q(H'+H)\omega dt.$$

Illas autem copias, ex actione vis electromotoricae ortas, quae per $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ fluunt, determinare non opus est, quum expressionibus t. et t'. contineantur. Ceterum si in has quantitates inquirere velles, nec non in istas, quae in interioribus ipsorum $\alpha\beta\gamma\alpha'$, $\alpha'\beta'\gamma'\alpha$ remanent, iterum principio in §° 3. 2) collocato utendum esset.

Expressionibus s. t. v. w. et s'. t'. v'. w'. rite collectis, positoque

$$H+H'=\varDelta,$$

conditiones, ut electricitatis motus in particulis $\alpha\beta\gamma\alpha'$, $\alpha'\beta'\gamma'\alpha$ permanens sit, hae inveniuntur

x. $$\frac{h}{c}\frac{dv}{dp}-\Omega+q(u'-u+\varDelta)=0,$$

x'. $$\frac{h'}{c'}\frac{dv}{dp'}-\Omega'-q(u'-u+\varDelta)=0,$$

ubi factor communis ωdt sponte abiit.

Jam si summas conficimus aequationum u. et x., u'. et x'., quantitates Ω et Ω' abeunt, eruimusque

U. $$k\frac{du}{dp}+\frac{2h}{c}\frac{dv}{dp}+q(u'-u+\varDelta)=0,$$

U'. $$k'\frac{du'}{dp'}+\frac{2h'}{c'}\frac{dv}{dp'}+q(u-u'-\varDelta)=0.$$

Quae in his aequationibus ad laevam obveniunt expressiones si factore ωdt afficiuntur, incrementa completa exhibent a copiis electricitatis in ipsis $abca'$, $a'b'c'a$ contentis accepta.

Quum igitur omnibus satisfecerimus casibus, qui e situ particulae, per quam electricitas migrat, oriuntur, persuasum habere possumus, alias aequationes ad densitatem electricam determinandam non amplius esse circumspiciendas, atque in interioribus corporis $\varDelta$ unam tantum valere aequationem O., in superficie tamen ejus totidem aequationes forma U. gaudentes exstare, quot ipsum $\varDelta$ corporibus diversis contingit.

Sin autem aequationum x. et x'. summam facimus, aequatio sequitur

$$\left(\frac{h}{c}\frac{dv}{dp}-\Omega\right)+\left(\frac{h'}{c'}\frac{dv}{dp'}-\Omega'\right)=0,$$

quae docet, flumen electricum ipsius vis electromotoricae actione auctum, in superficie perpendiculare, ad utrasque ejus partes eodem valore eademque directione uti. Quae tamen aequatio propter U. et U'. superflua redditur.

Aequationes nostrae U. et U'. si cum illis comparantur, quas Ill. Ohm in opere praeclaro pag. 123. exhibuit, primo adspectu legem amplitudinum constantium (das Gesetz der constanten Spannungen) impugnavisse videmur. Sed in §° sequenti hanc legem, experientia nonnisi in casu apparatus voltaïci aperti (der offenen galvanischen Kette) probatam, eodem casu etiam e nostris formulis sequi demonstrabitur.

Jam propter dignitatem rei indicabimus, quis sit nexus inter aequationes nostras U. et U'. illasque, quae alias in theoria contactus galvanici exhiberi solent. Aequationibus illis in se ductis invenimus

$$\left(k\frac{du}{dp}+\frac{2h}{c}\frac{dv}{dp}\right)+\left(k'\frac{du'}{dp'}+\frac{2h'}{c'}\frac{dv}{dp'}\right)=0,$$

unde sequitur, flumen electricum, in superficie perpendiculare ad utrasque ejus partes eodem valore eademque directione uti debere: quae est prima conditionum a Cl° Ohm prolatarum, nisi quod nostra fluminis definitio ab usitata influentiae ratione differt. Porro jam in §° 3. e definitione quantitatis q conclusimus, valorem ejus, quoties A et A' boni conductores sunt, procul dubio permagnum fore. Quod si admittimus, si conditionem addimus, flumen electricum non nimio valore gaudere, ex U., si per p dividitur, sequitur, approximatam haberi aequationem

$$u - u' = \varDelta,$$

quae est altera aequationum a Cl° Ohm l. c. exhibitarum.

Jam casus nonnullos proponemus, quibus aequatio U. simpliciorem formam impetrat. Inter quos maxime referendus est sequens.

1) Sit A' non-conductor electricitatis, erit $q = 0$, unde aequatio in superficie oritur

$$\mathrm{U_1.} \qquad k\frac{du}{dp} + \frac{2h}{c}\frac{dv}{dp} = 0.$$

Secundum § 1. 2) tamen problema nostrum non existeret, si haec aequatio in tota superficie locum haberet.

2) Corpus A' proprietatibus utatur flatus aëris, male conducentis, continue se renovantis: in aequatione generali ponendum est $u' = 0$, $\varDelta = 0$, eritque

$$\mathrm{U_2.} \qquad k\frac{du}{dp} + \frac{2h}{c}\frac{dv}{dp} - qu = 0.$$

Ratio autem, qua deperditionem electricitatis in aërem respeximus, cum lege a Cl° Coulomb inventa omnino consentit.

De motu electricitatis in conductoribus linearibus, actione influentiae neglecta.

7.

In §° antecedenti a methodo hactenus in theoria contactus galvanici usitata discedere coacti sumus. E qua re nova quae redundant ut cum consiliis priorum comparari possint, electricitatis motum in conductoribus linearibus tractabimus ita comparatis, ut quantitas $\frac{h}{c}$ (vide § 5. O.) respectu ipsius k tam parva sit, ut et ipsa et omnes quantitates ipsi proportionales sine damno negligi possint. Quae postulatio quum etiam ita pronunciari possit, ut k ipsum $\frac{h}{c}$ eximie superet, manifestum est, corpora de quibus agimus, siquidem exstant, praecipue bonis conductoribus adnumeranda esse. Etiam quae e suppositione illa

resultant, egregie cum observationibus consentiunt in bonis conductoribus institutis, dum mali conductores, sicut experientia infraque calculi docent, longe alias leges sequuntur. Unde jam hoc loco proponemus, quod sequentibus comprobabitur, suppositionem patere ad omnes optimos conductores, neque tamen ad ullam aliam corporum speciem.

Fingamus igitur cyclum clausum conductorum linearium, sectionibus transversis constantibus utentium $A_1, A_2, \ldots A_m$, qui in ordine indicum sese contingunt, quorum ultimus primo contiguus seriem concludit. Conductores omnes in superficie libera non-conductoribus contiguos esse statuimus.

Sint pro indicis μ valoribus $1, 2, \ldots m$

$$u_\mu, l_\mu, \omega_\mu, k_\mu$$

densitas electrica, longitudo, sectio transversa, conductibilitas ipsius A_μ, porro $u_\mu{}^0$, $u_\mu{}'$ valores ipsius u_μ in propinquitate eorum locorum, ubi A_μ cum $A_{\mu-1}$ resp. $A_{\mu+1}$ contingit; sint denique q_μ, $\varDelta_\mu$ valores, quos ipsa q, $\varDelta$ (conf. § 6. U. U.') in superficie contactus communi corporum A_μ, $A_{\mu+1}$ obtinent: si omnia puncta ad coordinatarum systema orthogonale ipsorum ξ, η, ζ referuntur, ad determinationem ipsius u_μ aequationes habemus sequentes.

In interioribus ipsius A_μ (§ 5. O.):

$$(1) \qquad \frac{d^2u_\mu}{d\xi^2} + \frac{d^2u_\mu}{d\eta^2} + \frac{d^2u_\mu}{d\zeta^2} = 0;$$

in superficie libera ipsius A_μ (§ 6. $\mathrm{U_1}$.):

$$(2) \qquad \frac{du_\mu}{dp_\mu} = 0;$$

in ea ipsius A_μ superficie, qua cum $A_{\mu-1}$ contingit (§ 6. U'.):

$$(3) \qquad k_\mu \frac{du_\mu^0}{dp_\mu} + q_{\mu-1}(u'_{\mu-1} - u_\mu^0 - \varDelta_{\mu-1}) = 0;$$

et, ubi A_μ cum $A_{\mu+1}$ contingit (§ 6. U.):

$$(4) \qquad k_\mu \frac{du'_\mu}{dp_\mu} + q_\mu(u_{\mu+1}^0 - u'_\mu + \varDelta_\mu) = 0.$$

Jam si statuimus, indicem inferiorem m, si ν unitatibus augetur, non transire in $(m+\nu)$ sed in ν, principium e quo signa quantitatum $\varDelta$ eliguntur, praecepto continetur, ut aequationes, quae ad reliquos conductores pertinent, e praecedentibus eo eruantur, ut omnes indices eadem unitatum copia augeantur. Ita e. g. aequatio ipsius $u_{\mu+1}^0$ e tertia emergit haec:

$$(5) \qquad k_{\mu+1} \frac{du_{\mu+1}^0}{dp_{\mu+1}} + q_\mu(u'_\mu - u_{\mu+1}^0 - \varDelta_\mu) = 0.$$

Quae formulae ut casui nostro applicari queant, formulam notissimam advocamus

$$\int \left\{ \frac{d^2 A}{d\xi^2} + \frac{d^2 A}{d\eta^2} + \frac{d^2 A}{d\zeta^2} \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta = -\int \frac{dA}{dp}\, ds, \tag{6}$$

in qua ds est elementum superficiei ejusdem voluminis, supra quod integrale triplex extenditur, denotante $\frac{dA}{dp}$ quotientem differentialem ipsius A in directione supra (§ 6.) determinata.

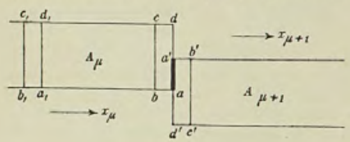


Fig. 8.

Qua in formula si ponimus $A = u_\mu$, integrali triplice supra talem ipsius A_μ partem extenso, quae (Fig. 8) sectionibus transversis $a_1 d_1$, $b_1 c_1$ terminatur, propter 1. obtinemus

$$\int \frac{du_\mu}{dp_\mu}\, ds = 0. \tag{7}$$

Propter 2. autem ex hoc integrali ea pars abit, quae ad superficiem ipsius A_μ spectat. Unde si in posterum axes conductorum linearium, vel rectas vel curvatas, pro axibus abscissarum habemus, in singulis conductoribus originem ab ea parte ducentibus, quae corpori in ordine indicum antecedenti quam proxima est, ipsis insuper abscissis $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ vocatis, aequatio 7., latitudine disci $a_1\, b_1\, c_1\, d_1$ posita $= dx_\mu$, in hanc transit:

$$dx_\mu \int \frac{d^2 u_\mu}{dx_\mu^2}\, ds = 0,$$

ubi ds est elementum sectionis transversae *constantis* ω_μ. Valorem igitur medium ipsius u_μ in hac sectione si u_μ vocare pergimus, sequitur

$$\frac{d^2 u_\mu}{dx_\mu^2}\, \omega_\mu\, dx_\mu = 0,$$

vel denique

$$\frac{d^2 u_\mu}{dx_\mu^2} = 0. \tag{8}$$

E qua, si f_μ, c_μ sunt constantes indeterminatae

$$u_\mu = f_\mu x_\mu + c_\mu \tag{9}$$

sequitur. In hac aequatione autem x_μ limites 0 et l_μ egrediatur nefas est. Porro est

$$u_\mu^0 = c_\mu, \quad u'_\mu = f_\mu l_\mu + c_\mu, \quad \frac{du_\mu}{dx_\mu} = f_\mu. \tag{10}$$

Aequatio 7. etiam tunc valet, si ds est elementum superficiei talis partis $abcd$ (Fig. 8) ipsius A_μ, quae finem ejus facit, ubi cum $A_{\mu+1}$ contingit. In superficie autem hujus partis distinguenda est:

1) sectio transversa bc, cujus elementum sit $d\omega_\mu$;

2) superficies libera, cujus elementum sit ds_μ;

3) superficies denique aa', in qua A_μ et $A_{\mu+1}$ contingunt; aream ejus ponamus $= \Omega_\mu$, elementum $= d\Omega_\mu$. Quibus praeparatis, aequatio 7. in hanc transit

$$\int \frac{du'_\mu}{dp_\mu}\, d\omega_\mu + \int \frac{du'_\mu}{dp_\mu}\, ds_\mu + \int \frac{du'_\mu}{dp_\mu}\, d\Omega_\mu = 0,$$

ubi propter aequ. 2. integrale secundum sponte abit. In tertium autem integrale aequationem 4. ducimus, unde, si iterum ad valores medios redimus, hancce obtinemus formulam

$$k_\mu \omega_\mu \frac{du'_\mu}{dx_\mu} - q_\mu \Omega_\mu \left(u^0_{\mu+1} - u'_\mu + \varDelta_\mu\right) = 0, \tag{11}$$

quam factore k_μ affecimus.

In formula 7. ponendo $\mu + 1$ loco μ, si ad initium $a'b'c'd'$ eam applicamus conductoris $A_{\mu+1}$, eodem modo formulae 5. ope eruimus sequentem

$$k_{\mu+1}\, \omega_{\mu+1} \frac{du^0_{\mu+1}}{dx_{\mu+1}} + q_\mu \Omega_\mu \left(u'_\mu - u^0_{\mu+1} - \varDelta_\mu\right) = 0. \tag{12}$$

Jam in 11. et 12. valores introducamus e 10. petitos:

$$k_\mu \omega_\mu f_\mu + q_\mu \Omega_\mu \{f_\mu l_\mu + c_\mu - c_{\mu+1} - \varDelta_\mu\} = 0 \tag{13}$$

$$k_{\mu+1}\, \omega_{\mu+1} f_{\mu+1} + q_\mu \Omega_\mu \{f_\mu l_\mu + c_\mu - c_{\mu+1} - \varDelta_\mu\} = 0, \tag{14}$$

e quibus igitur

$$k_\mu \omega_\mu f_\mu = k_{\mu+1}\, \omega_{\mu+1} f_{\mu+1} \tag{15}$$

sequitur. Hanc aequationem loco unius alteriusve aequationum 13., 14. introducere licet; partes expleat ipsius 14.

Jam si observas, aequationes praecedentes non cessare recte valere, si omnes indices eadem unitatum copia augentur, statim videbis, in aequatione 15. systema contineri aequationum

$$k_1 \omega_1 f_1 = k_2 \omega_2 f_2 = \cdots = k_m \omega_m f_m. \tag{16}$$

Quantitates autem singulae, quae ita aequales inveniuntur, magnitudinem exprimunt fluminis electrici in singulis conductoribus; quod si S vocamus, eruimus

$$f_1 = \frac{S}{k_1 \omega_1}, \quad f_2 = \frac{S}{k_2 \omega_2}, \ldots \quad f_m = \frac{S}{k_m \omega_m}. \tag{17}$$

Ad aequationum systema transimus, quod ex formula 13. oritur. Loco ipsius f_μ valore ejus introducto, aequatione per $q_\mu \Omega_\mu$ divisa, si ipsi μ valores $1, 2, \ldots m$ tribuimus, obtinemus

$$\tag{18} \begin{aligned} \frac{S}{q_1\Omega_1} &= c_2 - c_1 - S\frac{l_1}{k_1\omega_1} + \Delta_1 \\ \frac{S}{q_2\Omega_2} &= c_3 - c_2 - S\frac{l_2}{k_2\omega_2} + \Delta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{S}{q_\mu\Omega_\mu} &= c_{\mu+1} - c_\mu - S\frac{l_\mu}{k_\mu\omega_\mu} + \Delta_\mu \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{S}{q_m\Omega_m} &= c_1 - c_m - S\frac{l_m}{k_m\omega_m} + \Delta_m. \end{aligned}$$

Quarum aequationum si μ primas addimus, sequitur

$$S\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\frac{1}{q_\nu\Omega_\nu} = c_{\mu+1} - c_1 - S\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\frac{l_\nu}{k_\nu\omega_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\Delta_\nu,$$

vel

$$\tag{19} c_{\mu+1} = c_1 + S\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\left\{\frac{l_\nu}{k_\nu\omega_\nu} + \frac{1}{q_\nu\Omega_\nu}\right\} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\Delta_\nu.$$

Omnibus autem aequationibus 18. computatis, omnes c abeunt, habeturque

$$S\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{1}{q_\nu\Omega_\nu} = -S\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{l_\nu}{k_\nu\omega_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=m}\Delta_\nu,$$

vel

$$\tag{20} S = \frac{\Sigma\Delta}{\sum\left(\frac{l}{k\omega} + \frac{1}{q\Omega}\right)}$$

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_m}{\frac{l_1}{k_1\omega_1} + \frac{l_2}{k_2\omega_2} + \cdots + \frac{l_m}{k_m\omega_m} + \frac{1}{q_1\Omega_1} + \frac{1}{q_2\Omega_2} + \cdots + \frac{1}{q_m\Omega_m}}.$$

Ad hanc aequationem, si in formulam q. valores nunc determinati substituuntur, accedunt hae:

$$\tag{21} u_1 = S\cdot\frac{x_1}{k_1\omega_1} + c_1$$

$$u_{\mu+1} = S\left\{\frac{l_1}{k_1\omega_1} + \frac{l_2}{k_2\omega_2} + \cdots + \frac{l_\mu}{k_\mu\omega_\mu} + \frac{x_{\mu+1}}{k_{\mu+1}\omega_{\mu+1}} + \frac{1}{q_1\Omega_1} + \frac{1}{q_2\Omega_2} + \cdots + \frac{1}{q_\mu\Omega_\mu}\right\}$$
$$-\{\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_\mu\} + c_1.$$

Si tamen omnibus diversorum indicum abscissis cum ipsis x_1 originem communem esse placet, novaeque abscissae vocantur x, in antecedentibus ponendum est $x_1 = x$, $x_{\mu+1} = x - (l_1 + l_2 + \cdots + l_\mu)$.[1])

Jam casus nonnullos, qui in formulis nostris continentur, exponemus.

I. Sit corpus A_m non-conductor electricitatis, igitur $k_m = 0$, ipsius S denominator infinitus est, itaque $S = 0$. Unde formulae 21. in hasce transeunt

$$u_1 = c_1,\quad u_2 = c_1 - \Delta_1,\quad u_3 = c_1 - (\Delta_1 + \Delta_2), \ldots$$
$$u_{m-1} = c_1 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_{m-2}).$$

Ex his sequitur

$$u_1 - u_2 = \Delta_1,\quad u_2 - u_3 = \Delta_2, \ldots u_{m-2} - u_{m-1} = \Delta_{m-2},$$

quae est lex amplitudinum constantium, quae experientia in apparatu Voltaïco aperto probata est.

Si igitur apparatus, in quem antea inquisivimus, qui m conductoribus confectus erat, eo in apparatum apertum mutatur, ut conductore A_1 in duas partes diviso, conjunctio tollatur, designaturque u_{m+1} densitas electrica in ea ipsius A_1 parte, quae cum ipso A_m conjuncta permansit, habetur

$$u_1 = c_1,\ u_2 = c_1 - \Delta_1, \ldots u_m = c_1 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots \Delta_{m-1}),$$
$$u_{m+1} = c_1 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_m),$$

ideoque

$$u_1 - u_{m+1} = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_m.$$

Hoc igitur modo obtinetur numerator ipsius S, quem *summam amplitudinum in apparatu aperto obviarum* appellabimus.

Quoniam autem ex expressionibus densitatum electricarum quantitates ω et Ω abierunt, in apparatu illo aperto distributio et intensitas electricitatis a magnitudine sectionum transversarum et superficierum contactus est independens.

Jam si quantitatem $\frac{l_\nu}{k_\nu\omega_\nu}$ vocamus resistentiam conductoris A_ν, item $\frac{1}{q_\nu\Omega_\nu}$ resistentiam, quam superficies Ω_ν exercet, aequatio 20. docet,

> in apparatu Voltaïco clauso flumen electricum aequale esse summae amplitudinum in apparatu aperto obvenientium, per summam omnium resistentiarum in apparatu obviarum divisae.

Lex fluminis electrici si his verbis pronunciatur, omnino cum ea consentit, quam Cl. Ohm protulit; tota differentia in eo posita est, ut in nostra formula etiam resistentiae occurrant, in superficiebus contactus locum habentes. Quarum vis ac potestas quo melius perspiciatur, casus considerabimus sequentes.

[1]) De aequ. 20. et 21. conf. Die galv. Kette pag. 148 et 178.

II. Statuamus, singulis conductoribus ordineque eorum omnino immutatis manentibus, unam superficiem contactus diminui: quod quomodo fieri possit, e figura nostra 8. satis perspicuum est; quae ubi satis parva facta est, ipsum S iterum tantum denominatorem obtinet, ut pro evanescente haberi possit. Simul electricitatis distributio ad ejus similitudinem pergit, quae in apparatu aperto invenitur.

Cum hac re cautela illa in apparatibus galvanicis usitata cohaeret, ut superficies contactus quam maximae reddantur.

III. Hunc denique casum fingamus, quo conductoris A_1 loco successive alii aliique conductores substituuntur ex eadem substantia confecti, qui ita comparati sunt, ut ipsis l_1 et ω_1 decrescentibus, ratio $\frac{l_1}{\omega_1}$ vel $\frac{l_1}{k_1\omega_1}$ immutata maneat. Simplicitatis causa statuamus, corpora A_2 et A_m ab ipso A_1 tota ejus sectione transversa tangi, esse igitur $\Omega_m = \Omega_2 = \omega_1$. Quibus positis, simulatque ipsum ω_1 infra certum limitem decreverit, omnes terminos in denominatore ipsius S obvios prae hisce $\frac{1}{q_1\omega_1} + \frac{1}{q_m\omega_1}$ negligere licet, obtineturque

$$S = \frac{\omega_1}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_m}}\{\varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots + \varDelta_m\}, \quad u_1 = \frac{x_1(\varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots + \varDelta_m)}{k_1\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_m}\right)} + c_1,$$

$$u_{\mu+1} = \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots + \varDelta_m}{q_1\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_m}\right)} - (\varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots + \varDelta_\mu) + c_1.$$

Haec apparatus constructio igitur ea proprietate excellit, ut 1) flumen electricum valde exiguum sit, quamvis quantitas $\Sigma\frac{l}{k\omega}$ non nimio valore gaudeat, quae res notissima e sola deminutione conductibilitatis ipsius A_1 explicari solebat, quae phaenomeno quodam secundario, quod casu nostro evitari nequit, operatur; 2) ut in conductore A_1 densitas electrica a puncto in punctum rapide varietur, dum in reliquis conductoribus electricitas ad instar apparatus aperti distributa est.

Jam ad quaestiones pergimus generaliores.

Calculi praeliminares.

8.

Simplicitatis causa si ponimus

$$\frac{kc}{8\pi h} = a^2, \quad \frac{qc}{8\pi h} = b,$$

motus electricitatis in corpore A aequationibus determinatur sequentibus:

$$\text{I.} \qquad a^2\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right\} = u,$$

$$\text{II.} \qquad a^2\frac{du}{dp} + \frac{1}{4\pi}\frac{dv}{dp} + b(u' - u + \varDelta) = 0,$$

quarum prima ad interiores ipsius A partes spectat, altera ad eas superficiei partes, in quibus corpore A' contingitur.

Aequationi I. formulas nonnullas superstruamus, quae quum ad tractationem ejus faciant, eo etiam excellunt, quod modo satis concinno notiones quasdam inter se conjungant, quae in theoria nostra fundamentales sunt.

Jam quaeramus potentiale v puncti x_1, y_1, z_1, respectu corporis formandum, in quo electricitatis motus permanens factus est.

Aequationis I. ope, si statuitur

$$r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$$

habemus

$$v = \int\frac{u\,dx\,dy\,dz}{r} = a^2\int\frac{dx\,dy\,dz}{r}\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right\},$$

ubi integratio supra corpus universum extenditur. In hac expressione si integratio per partes more solito perficitur, obtinemus, designante ds elementum superficiei

$$v = -a^2\int\frac{du}{dp}\frac{ds}{r} - a^2\int\left\{\frac{du}{dx}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right\}dx\,dy\,dz,$$

ubi $\frac{du}{dp}$ est iterum quotiens differentialis ipsius u in directione perpendiculi ad interiora ipsius A spectantis formatus.

Est autem

$$\frac{du}{dx}\frac{dr}{dx} + \cdots = \frac{du}{dr}, \quad \text{itaque} \quad \frac{du}{dx}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \cdots = -\frac{1}{r^2}\frac{du}{dr},$$

unde integrale triplex in formula antecedenti obveniens aequale est huic

$$a^2\int\frac{du}{dr}\cdot\frac{dx\,dy\,dz}{r^2},$$

vel si loco orthogonalium coordinatae polares r, θ, φ introducuntur, punctumque x_1, y_1, z_1 earum initium esse statuitur,

$$a^2\int\frac{du}{dr}dr\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Jam casus distinguendi sunt, prout punctum attractum in interioribus ipsius A partibus situm est, aut in spatio externo.

1) Punctum attractum sit in spatio externo. Hic quoniam distantia r nunquam evanescit, integrale nostrum in summam integralium transit forma utentium

$$a^2\int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \int_{r'}^{r''} \frac{du}{dr}\, dr = a^2\int (u''-u') \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

ubi accentuum significatio sponte patet. Sint ds', ds'' elementa superficiei radiis vectoribus r', r'' correspondentia, α', α'' anguli a radiis illis uno tractu cum perpendiculo ad interiora ipsius A spectanti intercepti, fit

$$\text{in puncto anteriore } \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -\frac{ds' \cos\alpha'}{r'^2},$$

$$\text{atque in altero } \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{ds'' \cos\alpha''}{r''^2},$$

unde integrale nostrum invenitur esse

$$a^2\int \frac{u \cos\alpha\, ds}{r^2}.$$

In quo si integratio ad universam superficiem extenditur, valor etiam integralis triplicis suppeditatur. Ex elementis trigonometriae planae patet esse

$$\cos\alpha = -\frac{dr}{dp}, \quad \text{ideoque} \quad \frac{\cos\alpha}{r^2} = \frac{d\frac{1}{r}}{dp},$$

unde denique, omnibus rite collectis, habemus

$$\text{III.} \qquad v = a^2\int \left\{ u\, \frac{d\frac{1}{r}}{dp} - \frac{1}{r}\,\frac{du}{dp} \right\} ds.$$

2) Punctum attractum autem si in interioribus ipsius A partibus versatur, eorum quae modo exposuimus nihil mutatur praeterquam quod integralium, in quae triplex illud decomponendum est, unum limite inferiore utitur evanescenti. Hoc autem, si u est densitas electrica in puncto attracto, aequale fit expressioni

$$a^2\int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \int_0^{r'} \frac{du}{dr}\, dr = a^2\int (u'-u) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$= -4\pi a^2 u + a^2\int u' \sin\theta\, d\theta\, d\varphi;$$

unde eodem modo quo supra obtinemus aequationem

$$\text{IV.} \qquad v = -4\pi a^2 u + a^2\int \left\{ u\, \frac{d\frac{1}{r}}{dp} - \frac{1}{r}\,\frac{du}{dp} \right\} ds.$$

Quoties igitur valores, quos u et $\frac{du}{dp}$ in superficie induunt, innotuerunt, innotuit etiam potentiale in spatio externo; quum idem praeterea in interioribus a densitate electrica in puncto attracto pendeat.

Integrale duplex in aequationibus III. et IV. obvium summi momenti est, quum ejus differentiale in interioribus corporum flumen electricum completum, in spatio externo tamen flumen inductivum attractionemque electricam metiatur. Quod igitur in sequentibus litera distincta denotabitur, statueturque

$$\text{V.} \qquad w = \frac{1}{4\pi}\int \left\{ u\, \frac{d\frac{1}{r}}{dp} - \frac{1}{r}\,\frac{du}{dp} \right\} ds.$$

Unde sequitur esse

$$w = \frac{v}{4\pi a^2} \quad \text{aut} \quad w = u + \frac{v}{4\pi a^2},$$

prout ipsum w ad punctum in spatio externo aut in interioribus ipsius A situm refertur.

Haec functionis w definitio si cum ea, quam in §° 5. P. dedimus, comparatur, aequatione V. definitionem illam amplificatam esse patet. E rationibus autem, quas infra afferemus, productum ex ipso w et conductibilitate k conflatum *pressionem* vocabimus *electricam*.

Quoniam autem ipsum w, simulatque punctum, ad quod pertinet per superficiem ipsum A permeat, saltum definitum facit, ad aequationem pervenimus notatu dignam. Si enim ad superficiem ipsius A perpendiculum ducimus, in eoque ad utraque superficiei latera puncta sumimus superficiei infinite propinqua, ad quae ipsum w deinceps refertur, in puncto exteriori est $w = \frac{v}{4\pi a^2}$, in puncto autem interiore $w = u + \frac{v}{4\pi a^2}$; qui valor priorem illum, quum distantia punctorum infinite parva sit, quantitate u superat. Ab altera parte integrale

$$\int \frac{du}{dp} \cdot \frac{ds}{r}$$

in utrisque casibus eundem valorem impetrat, unde obtinemus

$$\text{VI.} \qquad \int u\, \frac{d\frac{1}{r}}{dp}\, ds + \int u\, \frac{d\frac{1}{r'}}{dp'}\, ds = 4\pi u,$$

ubi r' ad punctum exterius refertur, atque $\frac{d\frac{1}{r'}}{dp'}$ est quotiens differentialis in perpendiculo extrorsum spectanti formatus. — Ab hac formula sine difficultate ad aliam quandam transire licet, in theoria attractionis generali gravissimam.

Sine novorum calculorum institutione e formulis superioribus duas alias accipimus. Ad quas efficiendas in memoriam revocamus formulam in §° 4. adhibitam

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=-4\pi u.$$

Quae si factore $\frac{dx\,dy\,dz}{r}$ multiplicatur, integratione supra totum corpus extensa, si punctum x_1, y_1, z_1 in spatio externo situm est, efficitur

$$\text{VII.} \qquad -4\pi v=\int\left\{v\frac{d\frac{1}{r}}{dp}-\frac{1}{r}\frac{dv}{dp}\right\}ds,$$

si autem in interiore corpore situm est, evadit

$$\text{VIII.} \qquad 0=\int\left\{v\frac{d\frac{1}{r}}{dp}-\frac{1}{r}\frac{dv}{dp}\right\}ds.$$

Quae ut obtineantur, nihil faciendum est, nisi ut in duabus prioribus formulis in parte dextra $a^2=1$ ponatur, et v loco u substituatur.

Subsequenti autem exemplo harum formularum usus apparebit.

Fingas solidum sphaericum radii c; sit potentiale respectu illius in superficie formatum functio arbitrarie data angulorum polarium θ', φ', quam v' vocamus; sint porro R, θ, φ coordinatae polares puncti, in quod attractio exercetur, atque

$$\cos\omega=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'),$$

erit

$$r^2=c^2-2cR\cos\omega+R^2$$

et

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dp}=-\frac{d\frac{1}{r}}{dc}.$$

Jam si primum $R<c$ supponimus, constat esse

$$\frac{1}{r}=\sum_0^\infty\frac{R^m}{c^{m+1}}P_m(\cos\omega),\ \text{ideoque}\ \frac{d\frac{1}{r}}{dp}=\sum_0^\infty(m+1)\frac{R^m}{c^{m+2}}P_m(\cos\omega).$$

Quibus in formulam VIII. introductis, brevitatis causa statuto $\sin\theta'd\theta'd\varphi'=d\sigma'$, unde $ds=c^2d\sigma'$, obtinemus aequationem identicam

$$\sum_0^\infty(m+1)\left(\frac{R}{c}\right)^m\int v'P_m(\cos\omega)d\sigma'=\sum_0^\infty\left(\frac{R}{c}\right)^m c\int\frac{dv'}{dp}P_m(\cos\omega)d\sigma',$$

unde coëfficientibus comparatis emergit sequens

$$\text{IX.} \qquad c\int\frac{dv'}{dp}P_m(\cos\omega)d\sigma'=(m+1)\int v'P_m(\cos\omega)d\sigma'.$$

In spatio externo quum sit $R>c$, habemus

$$\frac{1}{r}=\sum_0^\infty\frac{c^m}{R^{m+1}}P_m(\cos\omega),\ \text{ideoque}\ \frac{d\frac{1}{r}}{dp}=-\sum_0^\infty m\frac{c^{m-1}}{R^{m+1}}P_m(\cos\omega);$$

formula igitur VII. in hanc mutatur

$$4\pi v=\sum_0^\infty m\left(\frac{c}{R}\right)^{m+1}\int v'P_m(\cos\omega)d\sigma'+\sum_0^\infty\left(\frac{c}{R}\right)^{m+1}c\int\frac{dv'}{dp}P_m(\cos\omega)d\sigma'$$

vel si aequationem modo inventam IX. advocamus

$$\text{X.} \qquad v=\sum_0^\infty\frac{2m+1}{4\pi}\left(\frac{c}{R}\right)^{m+1}\int v'P_m(\cos\omega)d\sigma',$$

quae est expressio nota potentialis in spatio externo. Puncto autem attracto versus superficiem pergente obtinemus evolutionem notissimam hanc

$$\text{XI.} \qquad v=\sum_0^\infty\frac{2m+1}{4\pi}\int v'P_m(\cos\omega)d\sigma',$$

cujus convergentia a Cl° Lej.-Dirichlet in diario Crelliano tom. XVII. luculenter demonstrata est.

Adnotamus, evolutionem XI. e formula VI. evolutionum ipsius $\frac{d\frac{1}{r}}{dp}$ adjumento sine ullo paene calculo provenire.

Formula X. integrale completum praebet hujus aequationis

$$\text{XII.} \qquad \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0$$

in toto spatio extra sphaeram, radio c circa originem coordinatarum descriptam; in qua si coordinatae polares orthogonalium loco introducuntur, innotescit etiam integrale quod huic casui proprium est aequationis

$$\text{XIII.} \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dX}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta^2}\frac{d^2X}{d\varphi^2}+m(m+1)X=0,$$

hoc est

$$X=\int v'P_m(\cos\omega)d\sigma';$$

quae quum sint notissima, ampliori tractationi supersedendum est. Sed quum his formulis in posterum utendum sit, demonstrare eas, quam afferre solum maluimus, quippe quarum deductio satis commoda reique conveniens vix plus operis postularet, quam sola commemoratio.

De motu permanenti aetheris repulsivi.

9.

Antequam ad accuratiorem tractationem aequationum supra exhibitarum transimus, monstrabimus, quomodo ad id quoque inservire possunt, ut electricitatis motus quasi sub visum et adspectum ponatur. Ita e. g. in doctrina de motu permanenti caloris in corporibus homogeneïs temperatura potentiali molium externarum repraesentari potest. Aptiorem imaginem condensatio vel etiam densitas praebet aëris permanenter se moventis, — si ut supra motum permanentem vocare pergimus a densitatibus permanentibus, — cujus partes nulla vi accelerantur, qui inclusus est parietibus, quibus aëris externi, etiam permanenter se moventis accessus ubique eodem quidem sed imperfecto modo arcetur.

Ponamus igitur omnes conditiones, quales in hoc exemplo descripsimus, iisque hoc etiam addamus, aëris singulas partes secundum legem Newtonianam mutuo se repellere; tum igitur, si U, V, W velocitates secundum directiones coordinatarum sunt, ϱ densitas prima, u densitas in statu turbato, deinde s condensatio, ideoque $u = \varrho(1+s)$; si denique v potentiale omnium molium repellentium est, e principiis hydrodynamicis notum est, si velocitates satis exiguae sunt, valere aequationes

$$\frac{dU}{dt} + A^2\frac{ds}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dt} + A^2\frac{ds}{dy} + \frac{dv}{dy} = 0,$$

$$\frac{dW}{dt} + A^2\frac{ds}{dz} + \frac{dv}{dz} = 0, \quad \frac{ds}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0,$$

ex quibus, si pro condensatione s densitas u introducitur, sua sponte

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A^2\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right\} - 4\pi\varrho u$$

sequitur. Si motus est permanens, pars laeva evanescit, unde patet, habere nos aequationem I. §[i] 8., siquidem $A^2 = 4\pi\varrho \cdot a^2$ ponitur.

Jam si in superficie perpendiculum erigimus, duoque in ejus directione esse statuimus voluminis elementa se invicem tangentia, quorum alterum superficiem tangit, necesse est, in utroque accelerationem accurate eandem esse. Quodsi igitur u' est densitas externa, (si considerationes §§ 5. et 6. de resistentia in superficie hic etiam adhibentur), $Q(u'-u)dt$ est elementi prioris acceleratio in directione perpendiculi introrsum spectantis, deinde

$$-\left(A^2\frac{ds}{dp} + \frac{dv}{dp}\right)dt = -\left(4\pi a^2\frac{du}{dp} + \frac{dv}{dp}\right)dt$$

est acceleratio elementi alterius; quibus aequatis, et $Q = 4\pi b$ posito, accipietur

$$a^2\frac{du}{dp} + \frac{1}{4\pi}\frac{dv}{dp} + b(u'-u) = 0,$$

quae ab aequatione II. §[i] 8. nonnisi deficiente termino $b\Delta$ differt. Sed hic etiam in aequationem introduci posset, si superficiei attribueretur proprietas, ut aërem motum in unam partem facilius transmitteret quam in alteram.

Quum autem e deductione harum aequationum prima, quantum quidem e principiis mechanicis concludi liceat, demonstratum sit, sufficere eas ad ipsum u omnibus numeris determinandum, aliae relationes non amplius circumspiciendae sunt. Itaque concludimus:

Electricitas ubi in corporibus homogeneïs in motu permanenti est, iisdem obtemperat legibus quibus fluidum elasticum exigue motum, cujus partes secundum legem Newtonianam mutuo se repellunt; atque quidem fluidi densitati respondet densitas electrica; pressioni quam fluidum in interiores partes propter expansionem suam et repulsionem, in exteriores propter repulsionem solam exercet, respondet pressio electrica; denique accelerationi in interioribus fluidi partibus respondet flumen electricum, repulsioni fluidi disjunctio corpore electrico operata.

Patet igitur principia, a quibus profecti sumus, in eo casu electricitatis moventis, quem hic consideramus, analytice perfecte congruere cum ista sententia de natura electricitatis, cujus initio §[i] 3. mentio facta est. Unaque demonstratum est, quod disertis verbis monemus, si alterius theoriae partes sequuntur, alterius phaenomena fundamentalia haud amplius esse respicienda. Si igitur e. g. sicut nos quidem fecimus, influentiae actionem in disjunctione electricitatum conjuncturam versari putas, haud amplius repulsionem respicies, quam electricitates ejusdem generis mutuo exercent, quia aliter ejusdem effectus bis rationem haberes.

Ceterum hoc ad extremum observamus, omnia quae contra aetherem repulsivum permanenter sese moventem dici possunt, etiam dici contra eam theoriam, quae electricitatem tale fluidum esse contendit.

De motu permanenti electricitatis in corporibus sphaericis.

10.

Formularum §[i] 8. auxilio integrationem aequationis I. in corporibus sphaericis absolvere possumus. Introductis enim coordinatis polaribus

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\varphi, \quad z = r\sin\theta\sin\varphi,$$

in hanc transformatur

$$\text{XIV.}\qquad a^2\left\{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{du}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right\}=r^2u,$$

cujus e sola comparatione cum aequ. XIII. patet esse integrale particulare

$$A_n(r)X_n(\theta,\varphi),$$

ubi e notatione usitata X_n est functio sphaerica n^{ti} ordinis. Quod ubi in aequ. XIV. loco u substituimus, formulae XIII. ope nanciscimur sequentem

$$X_n\left\{a^2\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dA_n}{dr}\right)-n(n+1)A_n\right]-r^2A_n\right\}=0,$$

vel si, ipso X_n sublato, statuimus

$$A_n(r)=r^n u_n(r),$$

$$\text{XV.}\qquad \frac{d^2u_n}{dr^2}+\frac{2n+2}{r}\frac{du_n}{dr}=\frac{u_n}{a^2}.$$

Integralium hujus aequationis particularium qualia circumferuntur, uno tantum in nostro casu uti possumus, in quo n est numerus positivus, quum alterum omni sensu careat, quoties n extra limites 0, -1 versatur. E verificatione tamen prioris methodum petere licet sequentem.

Sit pro omnibus indicis m valoribus

$$y_m=e^{-\frac{rx}{a}}(x^2-1)^m,$$

facile obtinetur aequatio identica:

$$\frac{1}{ra}\frac{dy_{n+1}}{dx}=\frac{y_n}{a^2}-\frac{2n+2}{r}\frac{dy_n}{dr}-\frac{d^2y_n}{dr^2}.$$

Quam quoties secundum x intra tales limites integramus, ubi y_{n+1} evanescit, formam eruimus aequationis XV. unaque integrale ejus particulare. Tales limites autem sunt, siquidem quantitates $(n+1)$ et $\frac{r}{a}$ positivae supponuntur

$$x=-1,\quad +1,\quad +\infty,$$

unde integrale completum emergit sequens:

$$\text{XVI.}\qquad u_n(r)=A\int_{-1}^{1}e^{-\frac{rx}{a}}(x^2-1)^n dx+B\int_{1}^{\infty}e^{-\frac{rx}{a}}(x^2-1)^n dx.$$

Hoc autem integrale prout casus postulat, in alias formas redigendum est. Quoties enim r evanescere, neque tamen infinitum fieri potest, constantium una, generaliter in arbitrio nostro posita, per alteram definitur, ponendumque est $B=-A$, unde efficitur

$$(1)\qquad u_n(r)=A\int_{-1}^{1}e^{-\frac{rx}{a}}(x^2-1)^n dx,$$

quod est integrale supra commemoratum. Quoties tamen r infinitum fieri, neque tamen evanescere potest, ponendum est

$$(2)\qquad u_n(r)=A\int_{1}^{\infty}e^{-\frac{rx}{a}}(x^2-1)^n dx;$$

si denique ipsi r omnes valores positivi competunt, nullo excepto, fit

$$(3)\qquad u_n(r)=0.$$

Ad inveniendam formam algebraïcam integralium in aequatione XVI. occurrentium ponamus $\frac{r}{a}=k$ et

$$\int_{\pm1}^{\infty}e^{-kx}(x^2-1)^n dx=e^{\mp k}\cdot z,\qquad z=\int_{\pm1}^{\infty}e^{-k(x\mp1)}(x^2-1)^n dx.$$

Ubi si loco x nova altera variabilis y introducitur ponendo $x\mp1=y$, erit

$$z=\int_0^{\infty}e^{-ky}y^n(y\pm2)^n dy=(-1)^n\frac{d^n}{dk^n}\int_0^{\infty}e^{-ky}(y\pm2)^n dy.$$

Jam est secundum theorema binomiale

$$\int_0^{\infty}e^{-ky}(y\pm2)^n dy=\sum_0^n\frac{n!}{s!\,(n-s)!}(\pm2)^s\int_0^{\infty}e^{-ky}y^{n-s}dy=\frac{n!}{k^{n+1}}\sum_0^n\frac{(\pm2k)^s}{s!},$$

unde

$$z=(-1)^n n!\frac{d^n}{dk^n}\left[\frac{1}{k^{n+1}}\sum_0^n\frac{(\pm2k)^s}{s!}\right],$$

denique

$$\int_{\pm1}^{\infty}e^{-kx}(x^2-1)^n dx=(-1)^n n!\,e^{\mp k}\frac{d^n}{dk^n}\left[\frac{1}{k^{n+1}}\sum_0^n\frac{(\pm2k)^s}{s!}\right].$$

Si igitur pro omnibus qui fingi possunt ipsius k valoribus ponimus

$$\text{XVII.}\quad 1)\qquad V_n(k)=e^{-k}\frac{d^n}{dk^n}\cdot\frac{1+\frac{2k}{1}+\frac{(2k)^2}{2!}+\cdots+\frac{(2k)^n}{n!}}{k^{n+1}}$$

pro valore ipsius k positivo erit

$$2)\qquad \int_{\pm1}^{\infty}e^{-kx}(x^2-1)^n dx=\pm(-1)^n n!\,V_n(\pm k),$$

unde aequationis XV. integrale completum hoc est

XVIII. $$u_n(r) = A\, V_n\left(\frac{r}{a}\right) + B\, V_n\left(-\frac{r}{a}\right).$$

Ipsius u inde derivatur expressio generalis haec

XIX. $$u = \sum_0^\infty r^n \left\{ V_n\left(\frac{r}{a}\right) X_n(\theta, \varphi) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) Y_n(\theta, \varphi) \right\}.$$

Formulis XVI. 1. 2. 3. respondent valores ipsius u sequentes:

1) $$u = \sum_0^\infty r^n \left\{ V_n\left(\frac{r}{a}\right) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) \right\} X_n(\theta, \varphi)$$

2) $$u = \sum_0^\infty r^n V_n\left(\frac{r}{a}\right) X_n(\theta, \varphi)$$

3) $$u = 0.$$

E proprietatibus functionis V, quae ad propositum nostrum faciunt, adnotemus sequentes.

Functionum $V_n\left(\frac{r}{a}\right)$, $V_n\left(-\frac{r}{a}\right)$ si una aliave denotatur V_n, ex integralibus definitis (XVII. 2)) invenitur formula recurrens:

XX. 1) $$\frac{dV_n}{dr} = \frac{r}{2a^2} V_{n+1}.$$

Cujus adjumento ex aequatione XV. haec deducitur

2) $$\left(\frac{r}{2a}\right)^2 V_{n+1} = V_{n-1} - \frac{2n+1}{2} V_n.$$

Jam si in aequatione XV. loco ipsius u primum $V_n\left(\frac{r}{a}\right)$ deinde $V_n\left(-\frac{r}{a}\right)$ substituuntur, terminis qui ad dextram aequationum inveniuntur eliminatis, aequatio evadit integrabilis, e cujus integratione prodit

$$V_n\left(\frac{r}{a}\right) \frac{dV_n\left(-\frac{r}{a}\right)}{dr} - V_n\left(-\frac{r}{a}\right) \frac{dV_n\left(\frac{r}{a}\right)}{dr} = \frac{c}{r^{2n+2}},$$

ubi c ab ipso r independens est. Si in hanc aequationem symbolorum loco ipsa integralia introducis, ipsique r post transformationem idoneam valorem 0 tribuis, invenies esse $c = (-1)^{n+1}(2a)^{2n+1}$, unde aequationes efficiuntur

3) $$V_n\left(\frac{r}{a}\right) \frac{dV_n\left(-\frac{r}{a}\right)}{dr} - V_n\left(-\frac{r}{a}\right) \frac{dV_n\left(\frac{r}{a}\right)}{dr} = \frac{(-1)^{n+1}}{2a} \left(\frac{2a}{r}\right)^{2n+2},$$

4) $$V_n\left(\frac{r}{a}\right) V_{n+1}\left(-\frac{r}{a}\right) - V_n\left(-\frac{r}{a}\right) V_{n+1}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\left(\frac{2a}{r}\right)^{2n+3},$$

quarum posterior e 3. formulae 1. ope succedit.

Formula 3. ad omnes ipsius n valores spectat, qui supra -1 versantur, si in quantitate $(-1)^{n+1}$ cautiones necessariae adhibentur. Illius ope demonstratur, quantitates $V_n\left(\frac{r}{a}\right)$ et $V_n\left(-\frac{r}{a}\right)$, si haec denotatio formulae XVII. 2) beneficio ad omnes ipsius n valores concessos extenditur, re vera integralia esse aequationis XV. a se invicem independentia. Quod si non esset, constantem quandam b ita determinare liceret, ut aequatio haberetur identica $V_n\left(\frac{r}{a}\right) = b\, V_n\left(-\frac{r}{a}\right)$. Tunc autem pars laeva ipsius 3. evanesceret, quod locum non habere in conspectu est. Quae demonstratio principio generali nititur huic.

Si n functiones unius variabilis x, puta $z_1, z_2, \ldots z_n$ a se invicem pendere aut independentes esse convenimus, prout aequatio

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_n z_n = 0$$

valoribus constantibus ipsorum $a_1, a_2, \ldots a_n$, quorum unus saltem a nullitate differt, identica reddi potest, necne, theorema habetur generale:

Functiones $z_1, z_2 \ldots z_n$ a se invicem pendent aut independentes sunt, prout determinans

$$\Sigma \pm z_1 z_2' \ldots z_n^{(n-1)}$$

identice evanescit, necne. In hoc determinante positum est $z_\nu^{(\mu)} = \frac{d^\mu z_\nu}{dx^\mu}$.

Quod theorema praesertim in aequationibus differentialibus linearibus utile est, quibus quum determinantis illius formatio facillima reddatur.

Observationem adjungere placet, saepe utilius esse, si functionis V_n loco haec functio

5) $$W_n(k) = \left(\frac{k}{2}\right)^n V_n(k)$$

in calculos introducitur, quae quum variis rationibus istam simplicitate superet. Cujus tamen in praesentiarum usum non faciemus.

11.

Jam electricitatis motum in sphaera plena radii c, in cujus superficie electricitatis fontes arbitrarii inveniuntur, dum non-conductores electrici, qui quocunque modo in spatio distributi sunt, effectum in eam exercent, examinemus. Expressionem igitur ipsius u e form. XIX. 1) nobis sumere debemus, et, si pro hac quidem disquisitione

a. $$V_n\left(\frac{r}{a}\right) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) = u_n(r)$$

ponimus, fit

b. $$u = \sum_0^\infty r^n u_n(r)\, X_n(\theta, \varphi).$$

Deinde si V potentiale completum est, secundum aequ. II. pro $r = c$ habemus:

c. $$a^2 \frac{du}{dr} + \frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dr} + b(u - u' - \Delta) = 0.$$

In sequentibus loco ipsius $u' + \Delta$ ejus evolutionem secundum functiones sphaericas adhibebimus, ponemusque

d. $$u' + \Delta = \sum_0^\infty \Delta_n(\theta, \varphi).$$

Est autem V summa algebraïca ipsius v respectu sphaerae formati, et ipsius v_1, si eo potentiale omnium non-conductorum signamus. Jam vero si pro $r = c$ est

d′. $$v_1 = \sum_0^\infty E_n(\theta, \varphi),$$

facile e formulis VII. et VIII. intelligitur, pro $r < c$ esse

$$v_1 = \sum_0^\infty \left(\frac{r}{c}\right)^n E_n(\theta, \varphi),$$

ideoque pro $r = c$

e. $$\frac{dv_1}{dr} = \sum_0^\infty \frac{n}{c} E_n(\theta, \varphi).$$

Restat igitur, ut expressio $\frac{d}{dr}\left(a^2 u + \frac{1}{4\pi} v\right)$ pro $r = c$ evolvatur. Secundum form. IV. est

$$a^2 u + \frac{1}{4\pi} v$$

$$= -\frac{a^2}{4\pi} \int \left\{ u \frac{d}{dc} \cdot \frac{1}{\sqrt{(c^2 - 2cr\cos\omega + r^2)}} + \frac{du}{dp} \frac{1}{\sqrt{(c^2 - 2cr\cos\omega + r^2)}} \right\} c^2 d\sigma'$$

$$= \frac{a^2}{4\pi} \sum_0^\infty \left(\frac{r}{c}\right)^n \int \left\{ (n+1)u - c\frac{du}{dp} \right\} P_n(\cos\omega)\, d\sigma';$$

in qua si evolutiones ipsorum u et $\frac{du}{dp} = -\frac{du}{dc}$ imponimus, reductionibus obviis factis efficitur

f. $$a^2 u + \frac{1}{4\pi} v = a^2 \sum_0^\infty \left\{ u_n(c) + \frac{c}{2n+1} \frac{du_n(c)}{dc} \right\} X_n(\theta, \varphi),$$

ideoque pro $r = c$

g. $$\frac{d}{dr}\left(a^2 u + \frac{1}{4\pi} v\right) = a^2 \sum_0^\infty n c^{n-1} \left\{ u_n(c) + \frac{c}{2n+1} \frac{du_n(c)}{dc} \right\} X_n(\theta, \varphi).$$

Jam si valores aequationibus b. e. g. effecti in c. imponuntur, obtinetur

$$\sum_0^\infty \left\{ a^2 n c^{n-1} \left[u_n(c) + \frac{c}{2n+1} \frac{du_n(c)}{dc} \right] + b c^n u_n(c) \right\} X_n(\theta, \varphi)$$

$$= b \sum_0^\infty \Delta_n(\theta, \varphi) - \frac{1}{4\pi c} \sum_0^\infty n E_n(\theta, \varphi),$$

atque inde secundum theorema, unamquamque functionem unico tantum modo secundum functiones sphaericas evolvi posse:

$$\left\{ a^2 n c^{n-1} \left[u_n(c) + \frac{c}{2n+1} \frac{du_n(c)}{dc} \right] + b c^n u_n(c) \right\} X_n(\theta, \varphi)$$

$$= b \Delta_n(\theta, \varphi) - \frac{n}{4\pi c} E_n(\theta, \varphi).$$

E qua formula ut abeat differentiale $\frac{du_n}{dc}$ si formulam XX. 1) adhibemus, et semel omnino statuimus $u_n(c) = u_n$, ad electricitatis densitatem in sphaera exprimendam hanc habebimus aequationem

XXI. $$u = \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{r}{c}\right)^n u_n(r) \left\{ bc\Delta_n(\theta, \varphi) - \frac{n}{4\pi} E_n(\theta, \varphi) \right\}}{(a^2 n + bc) u_n + \frac{\frac{1}{2} n c^2}{2n+1} u_{n+1}}.$$

Porro puncti in externo spatio siti r, θ, φ potentiale sphaerae respectu formatum

XXII. $$v = \frac{1}{2} c^2 \sum_0^\infty \frac{\frac{4\pi}{2n+1} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} u_{n+1} \left\{ bc\Delta_n(\theta, \varphi) - \frac{n}{4\pi} E_n(\theta, \varphi) \right\}}{(a^2 n + bc) u_n + \frac{\frac{1}{2} n c^2}{2n+1} u_{n+1}}.$$

Deinde ex f. efficitur

XXIII. $$u + \frac{v}{4\pi a^2}$$

$$= \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{r}{c}\right)^n \left[u_n + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{c^2}{2a^2} u_{n+1} \right] \cdot \left\{ bc\Delta_n(\theta, \varphi) - \frac{n}{4\pi} E_n(\theta, \varphi) \right\}}{(a^2 n + bc) u_n + \frac{\frac{1}{2} n c^2}{2n+1} u_{n+1}},$$

et denique ad pressionem electricam in interioribus sphaerae determinandam

XXIV. $$u + \frac{v + v_1}{4\pi a^2} = w$$

$$= bc \sum_0^\infty \left(\frac{r}{c}\right)^n \frac{\left[u_n + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{c^2}{2a^2} u_{n+1}\right] \varDelta_n(\theta, \varphi) + \frac{1}{4\pi a^2} u_n E_n(\theta, \varphi)}{(a^2 n + bc) u_n + \frac{\frac{1}{2} n c^2}{2n+1} u_{n+1}}.$$

Formulae XX. 2) ope hae summae, si terminus $n = 0$ excluditur, simpliciores reddi possunt, quum secundum formulam illam habeatur

$$(a^2 n + bc) u_n + \frac{\frac{1}{2} n c^2}{2n+1} u_{n+1} = bc u_n + \frac{2 n a^2}{2n+1} u_{n-1},$$

$$u_n + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{c^2}{2a^2} u_{n+1} = \frac{2}{2n+1} u_{n-1}.$$

Ex expressione XXII. sua sponte efficitur electricitatis summa in sphaera contenta; est enim aequalis coëfficienti ipsius $\frac{1}{r}$ in evolutione ipsius v. Quam si Ω vocamus, fit

$$\Omega = 2\pi c^3 \varDelta_0 \cdot \frac{u_1}{u_0},$$

vel adhibitis formulis huc spectantibus §[i] 10.

XXV. $$\Omega = 4\pi a^2 c \varDelta_0 \frac{\left(\frac{c}{a} - 1\right) e^{\frac{c}{a}} + \left(\frac{c}{a} + 1\right) e^{-\frac{c}{a}}}{e^{\frac{c}{a}} - e^{-\frac{c}{a}}},$$

vel si, $\frac{c}{a} < \pi$ supposito, evolvitur

h. $$\Omega = 16\pi c^3 \varDelta_0 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n B_{2n+1}}{(2n+2)!} \left(\frac{2c}{a}\right)^{2n},$$

ubi B_1, B_3, ... numeri Bernoulliani $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, ... sunt.

Ex aequatione XXV. quum omne ipsorum b et v_1 vestigium abierit, sequitur, in motu permanenti electricitatis summam in sphaera homogenea contentam omnino non pendere a difficultatibus, quibus electricitas superficiem permeans impeditur, nec minus a disjunctione, quae non-conductoribus extra sphaeram positis efficitur.

Similiter Coulomb observavit, in sphaeris electricitate imbutis, in quibus electricitas, quantum quidem fieri potest, in aequilibrio est, deperditionem in aërem circumdatum a substantia sphaerarum esse independentem. Confer Biot traité de phys. tome II. pag. 255.

12.

Formulis §[i] 10. omnia absolvi possunt problemata, quae spectant ad pluria corpora, quae et sphaeris concentricis definiuntur et omnia concentrice sita sunt. Attamen computationes, illa scilicet excepta,

quae in corpore indefinito, e quo sphaera exsecta est, versatur, tam molestae sunt, ut earum perfectio vix operae pretium esse videatur. Quare hoc tantum agemus, ut exemplo simplici monstremus, quomodo corporum, quae certis conditionibus in motu permanenti sunt, summa electrica constitui possit.

Quem in finem theorema advocamus Gaussianum (vide Journal de mathémat. de M. Liouville Tome VII. pag. 304. Théorèmes généraux cet.), integrale

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{dp} ds,$$

supra unam vel plures superficies clausas extensum, moli aequale esse attrahenti, superficiebus illis inclusae.

Quod statim formulae 6. §[i] 7. ope deducitur, in qua si loco $\varDelta$ potentiale v substituitur, aequationesque ipsius potentialis advocantur differentiales.

Jam casum consideramus corporis, quod duabus sphaeris concentricis definitur, cujus superficies interior velamine non-conducenti obducta est. Sint c, c_1 radii sphaerarum, $c < c_1$, si centrum commune pro origine coordinatarum habemus, secundum § 10. XIX. erit densitas electrica

i. $$u = \sum_0^\infty r^n \{v_n(r) X_n(\theta, \varphi) + w_n(r) Y_n(\theta, \varphi)\},$$

ubi brevitatis causa $v_n(r) = V_n\left(\frac{r}{a}\right)$, $w_n(r) = V_n\left(-\frac{r}{a}\right)$ positum est.

Proinde si v est potentiale omnium quantitatum electricitatis quae et in cavitate interiori, et in ipso corpore, et in spatio externo versantur, ad determinationem ipsius u habentur aequationes

k. $$r = c \qquad a^2 \frac{du}{dr} + \frac{1}{4\pi} \frac{dv}{dr} = 0,$$

l. $$r = c_1 \qquad a^2 \frac{du}{dr} + \frac{1}{4\pi} \frac{dv}{dr} = b(u - U) = 0,$$

ubi U fontium electricorum in superficie obviorum ubertatem metitur.

Quas aequationes si supra totas superficies, ad quas referuntur, integramus, observamusque, propter aequationem 6. §[i] 7. ex aequatione

$$\frac{d^2(a^2 u + \frac{1}{4\pi} v)}{dx^2} + \frac{d^2(a^2 u + \frac{1}{4\pi} v)}{dy^2} + \frac{d^2(a^2 u + \frac{1}{4\pi} v)}{dz^2} = 0$$

sequi

$$\int \left(a^2 \frac{du}{dp} + \frac{1}{4\pi} \frac{dv}{dp}\right) ds = 0,$$

manifestum est, integrale expressionis $(u - U)$, supra superficiem $r = c_1$

extensum, evanescere. Quapropter, si abhinc ds, ds_1 sunt elementa superficierum $r = c$, $r = c_1$, habemus

$$\text{m.}\qquad \int (u - U)\, ds_1 = 0,\ a^2 \int \frac{du}{dr}\, ds + \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{dr}\, ds = 0,$$

$$a^2 \int \frac{du}{dr}\, ds_1 + \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{dr}\, ds_1 = 0.$$

Si tamen ponimus esse Ω summam quaesitam electricitatis in ipso corpore contentae, ω copiarum electricarum summam, quae in cavitate illius interiori versantur, e theoremate Gaussiano supra commemorato sequitur

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{dr}\, ds = -\omega,\ \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{dr}\, ds_1 = -(\omega + \Omega).$$

Porro ex aequ. i., advocata formula XX. 1) sequitur

$$a^2 \int \frac{du}{dr}\, ds = 2\pi c^3 [v_1(c)\, X_0 + w_1(c)\, Y_0],$$

$$a^2 \int \frac{du}{dr}\, ds_1 = 2\pi c_1^3 [v_1(c_1)\, X_0 + w_1(c_1)\, Y_0],$$

$$\int u\, ds_1 = 4\pi c_1^2 [v_0(c)\, X_0 + w_0(c)\, Y_0];$$

unde, si jam ultra ponimus

$$\int U\, ds_1 = 4\pi c_1^2 U_0,$$

ubi igitur U_0 est ubertas media fontium electricorum in superficie, substitutis valoribus modo acceptis in aequationes m., ad ipsa Ω, X_0, Y_0 determinanda eruimus aequationes:

$$v_0(c_1)\, X_0 + w_1(c_1)\, Y_0 - U_0 = 0,$$

$$v_1(c)\ X_0 + w_1(c)\ Y_0 - \frac{\omega}{2\pi c^3} = 0,$$

$$v_1(c_1)\, X_0 + w_1(c_1)\, Y_0 - \frac{\omega + \Omega}{2\pi c_1^3} = 0,$$

e quibus deducitur

$$\frac{\omega + \Omega}{2\pi c_1^3} [v_1(c)\, w_0(c_1) - w_1(c)\, v_0(c_1)] + \frac{\omega}{2\pi c^3} [v_0(c_1)\, w_1(c_1) - w_0(c_1)\, v_1(c_1)]$$
$$+ U_0 [v_1(c_1) w_1(c) - w_1(c_1) v_1(c)] = 0,$$

vel quum e formula XX. 3)

$$v_0(c_1)\, w_1(c_1) - w_0(c_1)\, v_1(c_1) = -\frac{4a^3}{c_1^3}$$

sit,

$$\text{XXVI.}\qquad \Omega = -\omega \left\{ 1 - \frac{\frac{4a^3}{c^3}}{v_1(c)\, w_0(c_1) - w_1(c)\, v_0(c_1)} \right\}$$
$$+ 2\pi c_1^3 U_0 \frac{v_1(c)\, w_1(c_1) - w_1(c)\, v_1(c_1)}{v_1(c)\, w_0(c_1) - w_1(c)\, v_0(c_1)} = -\omega \left\{ 1 - \frac{2c_1}{(a+c) e^{\frac{c_1 - c}{a}} - (a-c) e^{-\frac{c_1 - c}{a}}} \right\}$$
$$+ 4\pi a c_1^2 U_0 \frac{\left(\frac{a}{c} - 1\right)\left(\frac{a}{c_1} + 1\right) e^{\frac{c_1 - c}{a}} - \left(\frac{a}{c} + 1\right)\left(\frac{a}{c_1} - 1\right) e^{-\frac{c_1 - c}{a}}}{\left(\frac{a}{c} + 1\right) e^{\frac{c_1 - c}{a}} - \left(\frac{a}{c} - 1\right) e^{-\frac{c_1 - c}{a}}}.$$

Ex hac formula patet, nostro casu certam partem electricitatis in corpore contentae unice ex actione proficisci copiarum electricitatis in cavitate interiori distributarum. Facile autem demonstratur, factorem ipsius ω, quamdiu quidem $\frac{c}{a}$ et $\frac{c_1}{a}$ positiva sunt, quod nostro casu evenit, semper fractionem esse genuinam negativam. Si igitur e. g. corpus illud in superficie exteriori aëre uniformiter sese moventi contingitur, (§ 6. U_2.), habetur $U_0 = 0$, electricitatisque in corpore contentae copia est pars aliquota electricitatis in cavitate inclusae, signo tamen opposito praedita. Simul copia illa a natura aëris circumdati nullo modo pendet.

13.

Additio ad § 10. In §° 10. invenimus, quoties $X_n(\theta, \varphi)$, $Y_n(\theta, \varphi)$ sunt functiones sphaericae n^{ti} ordinis, aequationi I. vel XIV. semper satisfieri expressione

$$r^n \left\{ V_n\left(\frac{r}{a}\right) X_n(\theta, \varphi) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) Y_n(\theta, \varphi) \right\}.$$

Cujus casus specialis is, ubi $n = 0$, prae ceteris attentione dignus est. Hoc enim casu X_0 et Y_0 constantes sunt, unde si loco eorum ponimus A et B, aequationis I. habemus integrale particulare

$$\text{n.}\qquad u = A V_0\left(\frac{r}{a}\right) + B V_0\left(-\frac{r}{a}\right) = \frac{a}{r}\left(A e^{-\frac{r}{a}} - B e^{\frac{r}{a}}\right),$$

in quo est $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Quum autem aequatio I. nullos coëfficientes variabiles involvat, expressio illa tunc etiam satisfaciet, si loco ipsorum x, y, z ponitur $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, igitur $r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$, ubi x_1, y_1, z_1 ab ipsis x, y, z sunt independentia.

Expressionem hoc modo mutatam, posito insuper $A = \varphi(x_1, y_1, z_1)$ et $B = \psi(x_1, y_1, z_1)$, si volumine $dx_1\, dy_1\, dz_1$ multiplicamus supraque volumen finitum V integramus, integrale

XXVII. $$u = \int \left\{ \varphi(x_1, y_1, z_1)\, V_0\left(\frac{r}{a}\right) + \psi(x_1, y_1, z_1)\, V_0\left(-\frac{r}{a}\right) \right\} dx_1\, dy_1\, dz_1$$

manifesto proprietate gaudebit, ut, quoties punctum x, y, z extra volumen V versatur, aequationi differentiali

XXVIII. 1) $$a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u$$

satisfaciat. Quod tamen punctum si volumine illo continetur, eadem methodo, qua Gaufs in commentatione supra laudata ad demonstrandas aequationes differentiales potentiales usus est, invenitur, expressionem aequationi satisfacere

2) $$a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u + 4\pi a^3 (\psi(x, y, z) - \varphi(x, y, z)).$$

Videmus igitur, cum aequatione XXVIII. 1) aliam quandam arctissime conjunctam esse, quam in formam

3) $$a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u + u_1$$

redigere licet. Atque si rationis memineris, qua terminus u in aequationem XXVIII. 1) ingressus est (§ 4. L. M.), facile casum electricitatis motae finges, qui ad hanc aequationem ducat.

Porro ex iis, quae modo invenimus, perspicitur, integrationem aequationum 1) et 3) ad problema reduci posse, ut expressio n. tali modo evolvatur, ut variabiles a constantibus arbitrariis separatae prodeant: quo impetrato, expressio XXVII. sine mora formam induit talem, quam ulterius tractare licet.

Quae evolutio, si coordinatis polaribus ordinariis utimur, sine difficultate e calculis supra exhibitis elicitur. Posito enim

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\cos\varphi,\ z = r\sin\theta\sin\varphi;$$

$$x_1 = r_1\cos\theta_1,\ y_1 = r_1\sin\theta_1\cos\varphi_1,\ z_1 = r_1\sin\theta_1\sin\varphi_1,$$

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1),$$

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = r^2 - 2rr_1\cos\omega + r_1^2 = R^2,$$

atque

o. $$r_1 > r,$$

functio

$$\Omega = AV_0\left(\frac{R}{a}\right) + BV_0\left(-\frac{R}{a}\right)$$

lemmatis sequentibus omnibus numeris definitur:

1) Ω tam respectu variabilium r, θ, φ quam ipsorum r_1, θ_1, φ_1 est integrale aequationis XIV. ita comparatum, ut secundum functiones sphaericas, nominatim secundum functiones $P_n(\cos\omega)$ evolvi possit. In ipso Ω si loco r, r_1 ponis $ra, r_1 a$, igitur Ra loco R, Ω ab ipso a independens evadit.

2) Ipsius $\frac{\Omega}{a}$ evolutio, si a in infinitum crescit, in evolutionem Laplaceanam ipsius $\frac{A-B}{R}$ transit.

3) In ipso Ω si scribitur $-a, B, A,$ loco a, A, B, Ω non mutatur.

4) Si ponitur $B = 0$, $a = \infty$, fit $\Omega = 0$.

Quibus lemmatis advocatis, invenitur

XXIX. $$\Omega = AV_0\left(\frac{R}{a}\right) + BV_0\left(-\frac{R}{a}\right)$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2} \left(\frac{r}{2a}\right)^n \left(\frac{r_1}{2a}\right)^n \left[AV_n\left(\frac{r_1}{a}\right) + BV_n\left(-\frac{r_1}{a}\right)\right]$$
$$\left[V_n\left(\frac{r}{a}\right) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right)\right] P_n(\cos\omega).$$

Hac formula ope aequationum XVII. 2) vel etiam XX. 1) et 2) egregie uti licet ad evolutionem functionum $V_n\left(\frac{R}{a}\right)$, quod tamen hoc loco omittimus.

Qua evolutione si secundum praecepta supra tradita uteris ad integrationem aequationum XXVIII. 1) et 3) altero quidem casu iterum formulas §[i] 10. obtines, altero tamen eadem resultant, quae methodo ordinaria variationis constantium obtinerentur. In aequatione enim XXVIII. 3) si, functione u_1 secundum functiones sphaericas evoluta, ad integrationem via tentatur §[i] 10., quaestio reducitur ad integrationem aequationis differentialis, quae ab aequatione XV. nonnisi novo termino differt, et variatione constantium integrari potest.

Qua in re hoc memorabile intercedit, ut omnes implicationes, quibus methodus illa laborat, propter singularem naturam functionum V_n prorsus evitari queant, quoties u_1 est integrale aequationis XXVIII. 1) vel 3). Quod quum ad accuratiorem notitiam functionum illarum, quae in physice mathematica tanti momenti sunt, nonnihil afferre videatur, breviter exponamus.

Sit igitur primum

$$u_1 = \sum_0^\infty r^n \left\{ V_n\left(\frac{r}{a}\right) X_n(\theta, \varphi) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) Y_n(\theta, \varphi) \right\},$$

aequatio XXVIII. 3) in hanc transit:

p. $$a^2 \left\{ \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{du}{d\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} \right\}$$
$$= r^2 u + \sum_0^\infty r^n \left\{ V_n\left(\frac{r}{a}\right) X_n + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) Y_n \right\}.$$

Ad ejus integrationem ponimus

$$u = U + \sum_0^\infty r^n \{ A_n(r) X_n(\theta,\varphi) + B_n(r) Y_n(\theta,\varphi) \},$$

ubi U eadem forma sit, qua u_1 utitur. Quae series si in p. substituitur, habetur:

$$\sum_0^\infty r^{n+2} X_n \left\{ a^2 \left[A_n'' + \frac{2n+2}{r} A_n' \right] - A_n - V_n\left(\frac{r}{a}\right) \right\}$$

$$+ \sum_0^\infty r^{n+2} Y_n \left\{ a^2 \left[B_n'' + \frac{2n+2}{r} B_n' \right] - B_n - V_n\left(-\frac{r}{a}\right) \right\} = 0,$$

unde

$$A_n'' + \frac{2n+2}{r} A_n' = \frac{A_n + V_n\left(\frac{r}{a}\right)}{a^2}, \quad B_n'' + \frac{2n+2}{r} B_n' = \frac{B_n + V_n\left(-\frac{r}{a}\right)}{a^2}$$

sequitur. Quarum aequationum loco generaliorem consideramus hanc:

$$\text{q.} \qquad C'' + \frac{2n+2}{r} C' = \frac{C + \alpha V_m\left(\frac{r}{a}\right) + \beta V_m\left(-\frac{r}{a}\right)}{a^2}.$$

Ad integrationem ponimus

$$C = \sum \left[\alpha_s V_s\left(\frac{r}{a}\right) + \beta_s V_s\left(-\frac{r}{a}\right) \right].$$

Ex aequatione autem differentiali ipsius V_s (vide § 10. XV.) advocata formula XX. 1) sequitur

$$V_s'' + \frac{2n+2}{r} V_s' - \frac{V_s}{a^2} = \frac{2(n-s)}{r} V_s' = \frac{n-s}{a^2} V_{s+1}.\text{[1]}$$

[1] Methodus, quam ad constantium variationem evitandam hic adhibuimus, quae eo nititur, quod si in laevam aequationis q. partem una alterave functionum V_s substituitur, duae aliae reproducantur, saepe, si apte modificatur, usurpari potest, semperque methodo generali praeferenda est. Atque ut alio eam exemplo illustremus gravi ac praestanti, afferre juvat, Cl^m Neumann functionum $Q_n(x)$ a Cl^o Heine in attractionis et caloris theoriam introductarum determinationem eo revocasse, ut functio algebraïca integra $(n-1)^{ti}$ ordinis inveniatur, quae aequationi

$$\alpha. \qquad \frac{d}{dx}\left((x^2-1)\frac{dS}{dx}\right) = n(n+1)S + 4\frac{dP_n}{dx}$$

satisfaciat. Si enim S_{n-1} est haec functio, secundum Neumann est:

$$\beta. \qquad Q_n(x) = \frac{2n+1}{2} \left\{ P_n(x)\, lg\frac{x+1}{x-1} + S_{n-1} \right\}.$$

Jam si consideramus, functionem P_s, si in laeva aequationis α. parte loco S substituitur, reproduci, facile apparet, ingrediendam esse hanc viam. Pro S

Unde si loco C seriem in aequationem q. substituimus, sequitur:

$$\Sigma(n-s)\left[\alpha_s V_{s+1}\left(\frac{r}{a}\right) + \beta_s V_{s+1}\left(-\frac{r}{a}\right)\right] = \alpha V_m\left(\frac{r}{a}\right) + \beta V_m\left(-\frac{r}{a}\right),$$

e qua deducitur esse $\alpha_{m-1} = \frac{\alpha}{n-m+1}$, $\beta_{m-1} = \frac{\beta}{n-m+1}$, α_n et β_n arbitraria, ceteras constantes tamen evanescere. Est igitur

$$\text{r.} \qquad C = \frac{\alpha V_{m-1}\left(\frac{r}{a}\right) + \beta V_{m-1}\left(-\frac{r}{a}\right)}{n-m+1} + \alpha_n V_n\left(\frac{r}{a}\right) + \beta_n V_n\left(-\frac{r}{a}\right).$$

Hac formula patet casus exclusos esse, ubi $m = 0$ vel $m = n+1$. Quorum ulterior et ipse satis concinne functionum V_s ope tractari potest: quod tamen calculos sibi poscit, quos brevitatis causa praetermittimus. Eo casu, quo habetur $m = 0$, si loco $V_o\left(\frac{r}{a}\right)$ et $V_o\left(-\frac{r}{a}\right)$ eorum expressiones substituimus, aequatio q. hancce induit formam:

$$\text{s.} \qquad C'' - \frac{C}{a^2} + \frac{2n+2}{r}\left(C' - \frac{\alpha e^{-\frac{r}{a}} - \beta e^{\frac{r}{a}}}{(2n+2)a} \right) = 0,$$

quam in aequationes

$$C' - \frac{\alpha e^{-\frac{r}{a}} - \beta e^{\frac{r}{a}}}{(2n+2)a} = 0, \quad C'' - \frac{C}{a^2} = 0$$

discerpi posse patet. Obtinemus igitur pro $m = 0$:

$$\text{t.} \qquad C = -\frac{\alpha e^{-\frac{r}{a}} + \beta e^{\frac{r}{a}}}{2n+2} + \alpha_n V_n\left(\frac{r}{a}\right) + \beta_n V_n\left(-\frac{r}{a}\right).$$

sumenda est series secundum ipsa P_s progrediens, ponendaque est loco $\frac{dP_n}{dx}$ ejus evolutio

$$\gamma. \qquad \frac{dP_n}{dx} = (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \cdots;$$

tunc sequitur

$$\delta. \qquad S = \alpha P_n - 2\left\{ \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5} + \cdots \right\};$$

de qua si ipsius S_{n-1} valor depromitur, substituiturque in aequationem β., eruitur

$$\varepsilon. \qquad Q_n(x) = \frac{2n+1}{2}\left\{ P_n \cdot lg\frac{x+1}{x-1} - 2\left[\frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5} + \cdots \right] \right\},$$

quae aequatio eo inservire potest, ut functio $Q_n(x)$ pro omnibus qui fingi possunt, ipsius x valoribus definiatur. — Quae determinatio, si attractionis theoriam non respicis, etiam aliis rationibus egregii usus est.

De functionibus hisce confer: Heine: de aequ. diff., Berol. 1843, *idem*: Aufg. für parz. Differenzialgl. Diar. Crell. XXVI., *idem*: Attraction der Ellipsoïde ibid. XLII. — Neumann: Magnetisirung eines Rotationsellipsoïds ibid. XXXV.

Omnes has integrationes ex aequatione identica eruere licet sequenti. Sit pro omnibus ipsius m valoribus

$$z_m = e^{-\frac{rx}{a}} (x^2 - 1)^m f(x),$$

erit

$$\frac{1}{ra}\frac{dz_{n+1}}{dx} = \frac{1}{ra}\cdot e^{-\frac{rx}{a}}(x^2-1)^{n+1}\frac{df}{dx} + \frac{z_n}{a^2} - \frac{2n+2}{r}\frac{dz_n}{dr} - \frac{d^2 z_n}{dr^2}.$$

Quae facile demonstratur, si identitas in §° 10 obvia factore $f(x)$ multiplicatur. Eodem modo, sicut haec, tractanda est, functioque $f(x)$ singulis casibus adaptanda est. Qua in re ad casus modo tractatos eruendos formula XX. 1) utendum est.

Jam si in r. ponimus $m = n$, in t. tamen $n = 0$, ipsorum A_n et B_n obtinemus expressiones has:

$$A_0 = -\frac{1}{2}e^{-\frac{r}{a}},\ A_n = V_{n-1}\left(\frac{r}{a}\right),\ B_0 = -\frac{1}{2}e^{\frac{r}{a}},\ B_n = V_{n-1}\left(-\frac{r}{a}\right),$$

ubi constantes arbitrariae nullitati aequiparatae sunt, quae quum nisi constantes adhuc indefinitas in ipso U contentas afficere possint.

Aequationis p. itaque est integrale completum

u. $$u = U - \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{r}{a}}X_0 + e^{\frac{r}{a}}Y_0\right)$$

$$+ \sum_0^\infty r^n \left\{ V_{n-1}\left(\frac{r}{a}\right) X_n + V_{n-1}\left(-\frac{r}{a}\right) Y_n \right\}.$$

Integratio aequationis s. formulam generaliorem suppeditabit. Sit enim proposita aequatio

v. $$a^2\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right\} = u + \alpha V_0\left(\frac{r}{a}\right) + \beta V_0\left(-\frac{r}{a}\right),$$

ubi $r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$, atque x_1, y_1, z_1 ab ipsis x, y, z independentia. Manifesto ejus integrale completum habebitur, si alicui ejus integrali particulari integrale additur completum U aequationis XXVIII. 1). Quod integrale particulare ita eligimus, ut sit functio mera ipsus r. Quo pacto v. in hanc transit:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = \frac{u + \alpha V_0\left(\frac{r}{a}\right) + \beta V_0\left(-\frac{r}{a}\right)}{a^2},$$

unde integrale illud particulare hoc est:

$$u = -\tfrac{1}{2}\left(\alpha e^{-\frac{r}{a}} + \beta e^{\frac{r}{a}}\right),$$

eritque generaliter

w. $$u = U - \tfrac{1}{2}\left(\alpha e^{-\frac{r}{a}} + \beta e^{\frac{r}{a}}\right).$$

Si tamen loco α, β datas functiones ipsorum x_1, y_1, z_1 ponimus $\varphi(x_1, y_1, z_1)$ et $\psi(x_1, y_1, z_1)$, (quae in ipso U continentur constantes arbitrariae et eaedem pro talibus functionibus haberi debent), ponturque $dx_1\, dy_1\, dz_1 = dm_1$ esse elementum dati voluminis V: si porro integralia

$$\int u\, dm_1,\ \int U\, dm_1$$

iterum vocantur u et U, ponturque

x. $$\int\left\{\varphi\cdot V_0\left(\frac{r}{a}\right) + \psi\cdot V_0\left(-\frac{r}{a}\right)\right\} dm_1 = u_1;$$

erit (vide XXVIII.)

1) u_1 integrale aequationis

$$a^2\left\{\frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{d^2u_1}{dy^2} + \frac{d^2u_1}{dz^2}\right\} = u_1$$

aut hujus

$$a^2\left\{\frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{d^2u_1}{dy^2} + \frac{d^2u_1}{dz^2}\right\} = u_1 + 4\pi a^3(\psi(x, y, z) - \varphi(x, y, z)),$$

prout punctum x, y, z extra aut intra volumen V versatur;

2) simul est

y. $$u = U - \tfrac{1}{2}\int\left\{\varphi\cdot e^{-\frac{r}{a}} + \psi\cdot e^{\frac{r}{a}}\right\} dm_1$$

integrale completum aequationis

z. $$a^2\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right\} = u + u_1.$$

Suppositione igitur speciali de functione u_1 ex expressione ipsius u tres integrationes abierunt, vel potius nullae tres integrationes ad illas accesserunt, quae in ipso u_1 perficiendae sunt, quod tamen e comparatione aequationum XXVII. et XXVIII. 2) exspectandum erat.

De locis geometricis, quae in motu permanenti electricitatis respicienda sunt.

14.

E formularum §ⁱ 11. sqq. complicatione satis intelligitur, priusquam de functionibus u_1' et v_1 a quibus problema pendet, certa conjectura facta sit, determinationes accuratiores proponi non posse. Nihilominus tamen haec in universum observare juvat.

Potentiale quum in toto spatio continuum sit, in unoquoque igitur puncto unum tantum valorem recipiat, omne punctum necessario in una vel altera superficierum $v = c$, nunquam autem in duabus earum situm est. Quodsi igitur constantem c continue mutari statuimus, evenire oportet, ut corpus attrahens aliqua harum superficierum in puncto aliquo tangatur. Talia autem puncta a ceteris omnibus superficiei punctis eo differunt, quod in iis attractio in superficie perpendicularis est. Jam si $P = 0$ est aequatio superficiei, punctorum illorum conditio analytica aequationibus

$$\zeta. \qquad \frac{dv}{dx} : \frac{dv}{dy} : \frac{dv}{dz} = \frac{dP}{dx} : \frac{dP}{dy} : \frac{dP}{dz}$$

$$\eta. \qquad P = 0$$

expressa est. Curva $\zeta.$ est locus geometricus eorum punctorum, in quibus superficies systematum $v = c$, $P = c'$ inter se osculantur. Eodem modo locus omnium punctorum, in quibus systematum $w = c$, $P = c'$ superficies se tangunt, eo excellit, quod superficiem iis punctis, in quibus flumen electricum ad superficiem perpendiculare in spatium externum effunditur, secat. Aequationes ejus sunt:

$$\theta. \qquad \frac{dw}{dx} : \frac{dw}{dy} : \frac{dw}{dz} = \frac{dP}{dx} : \frac{dP}{dy} : \frac{dP}{dz};$$

atque ad ora etiam ejus invenienda, addenda est aequatio $\eta.$

Ex harum curvarum definitione perspicuum est, eas, simulatque una vel altera superficierum $P = c'$ cuspidem praebet aut in unum punctum recidit, se mutuo secare. In sphaera igitur utraque per ejus centrum permeat.

Tum vero ea curva, quae superficierum $w = c$, $v = c'$ osculatione gignitur, consideranda est. Cui triplicem esse originem, superficierum systemate $u = c''$ assumpto, statim intelligetur. Attractionis directio in ea cum flumine electrico congruit; aequationes ejus sunt

$$\iota. \qquad \frac{dw}{dx} : \frac{dw}{dy} : \frac{dw}{dz} = \frac{dv}{dx} : \frac{dv}{dy} : \frac{dv}{dz} = \frac{du}{dx} : \frac{du}{dy} : \frac{du}{dz};$$

quarum, prout una vel altera origo consideratur, pars una omitti potest.

Tribus his curvis respondent superficies hae:

$$\zeta'. \qquad \frac{dv}{dx}\frac{dP}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{dP}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dP}{dz} = 0,$$

$$\theta'. \qquad \frac{dw}{dx}\frac{dP}{dx} + \frac{dw}{dy}\frac{dP}{dy} + \frac{dw}{dz}\frac{dP}{dz} = 0,$$

$$\iota'. \qquad \frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz} = 0.$$

Prima earum, $\zeta'.$, superficiem $\eta.$ secat in curva, in qua attractio in planum superficiem tangens incidit: altera, $\theta'.$, cum $\eta.$ conjuncta omnium punctorum hujus superficiei definit locum, in quibus flumen electricum in planum tangens incidit. Tertia denique locus est omnium punctorum, in quibus flumen electricum in attractione perpendiculare est.

Jam vero haec loca geometrica ad motuum rationes in faciliori conspectu ponendas aptissima sunt; in omnibusque doctrinis cognatis eorum inveniuntur similitudines; praeterea arctissime cohaerent cum Maximi et Minimi determinationibus, quibus parumper immorabimur.

Curvae $\zeta.$ et superficiei $\zeta'.$ nulla alia, ut facile patet, puncta communia sint, nisi quae aequationibus

$$\frac{dv}{dx} = 0 \quad \frac{dv}{dy} = 0 \quad \frac{dv}{dz} = 0 \text{ et } \frac{dP}{dx} = 0 \quad \frac{dP}{dy} = 0 \quad \frac{dP}{dz} = 0$$

definita sunt. Posteriora haec, quorum jam supra mentio facta est, si negligimus, videmus, curvam $\zeta.$ et superficiem $\zeta'.$ communia habere omnia puncta, in quibus potentiale Maximum, Minimum vel Maximo-Minimum est.

Jam sint x, y, z talis puncti coordinatae, v_0 in eo valor potentialis; coordinatarum origine ad illud translata ita ut ξ, η, ζ fiant coordinatae novae, pro omnibus punctis vicinis accipimus

$$2(v - v_0) = \frac{d^2 v_0}{dx^2} \cdot \xi^2 + \cdots + 2\frac{d^2 v_0}{dy\,dz} \cdot \eta\zeta + \cdots,$$

in qua altioris ordinis termini neglecti sunt.

Punctum autem x, y, z si in spatio externo situm est, coëfficientium ipsorum ξ^2, η^2, ζ^2 summa evanescit; est igitur una trium harum quantitatum praedita signo a duabus reliquis diverso. Jam si v variamus, illa aequatione significatur copia similium similiterque sitarum superficierum secundi ordinis; atque valori $v = v_0$ respondet conus, qui est finis inter duo systemata, quorum alterum hyperbolica, alterum elliptica hyperboloïdea continet. Qui quum simul sit omnium harum superficierum asymptota, singulae superficies utrarumque copiarum paulum a vertice ejus distantes, ei celerrime appropinquantur.

Sin autem punctum x, y, z in interioribus corporis attrahentis situm est, id accidere potest, ut superficies illae in ellipsoïdea transeant.

Eodem modo superficies $\theta'.$ secatur curva $\theta.$ in omnibus punctis, in quibus pressio electrica valorem maximo-minimum accipit.

Denique omnia puncta, quibus loca $\iota.$ et $\iota'.$ communibus utuntur, aut hujus generis sunt aut illius, quod supra consideravimus.

Quum in corpore interiore semper sit

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} = 0,$$

in secundo punctorum genere hyperboloïdica tantum systemata consideranda sunt; in quorum centro flumen electricum, pro horum punctorum natura, nullum est. Sed utriusque systematis superficierum tam magna ad asymptotarum conum appropinquatione non procul a centro flumina fortissima existere oportet, quia hoc loco pressiones electricae diversae intensionis proxime sibi sunt oppositae, simulque flumen electricum virium illarum differentiae directe, distantiae inverse proportionale est.

Quae observationes si conjunctae cum determinationibus nonnullis de motu electricitatis in corporibus male conducentibus, quae mox sequentur, ad athmosphaeram terrestrem applicantur, — de consideratione hic sermonem esse levi tantum approximatione valitura vix monendum videtur, — memorabilia quaedam sequuntur, quae tamen hoc loco supprimere debemus, quum ad campum quendam a proposito nostro nimis remotum pertinentia, ex adjumentis alienis vigorem disiderent.

De motu permanenti electricitatis in corporibus male conducentibus.

15.

Jam ad extremum consideramus eum casum, quo corpus A ita comparatum est, ut fractio $\frac{kc}{8\pi h}$, quam $= a^2$ posuimus, valorem valde exiguum obtineat. Talia corpora si existunt, manifesto praecipue corporibus male conducentibus adnumeranda erunt. Neque tamen statim contendere licet, quod postea demum probabitur, ipsum a^2 in omnibus corporibus male conducentibus perparvum esse.

Ex aequatione in interioribus ipsius A locum habente

$$u = a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\}$$

suppositione illa sequitur, quoties expressio

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = K$$

non valore gaudet valde considerabili, densitatem u et ipsam minimam fore, et vice versa, quoties in interioribus ipsius A densitas u aliquo loco valorem accipit, qui mensura definiri potest, expressionem K in eodem loco valorem admodum magnum necessario induere.

Circa punctum x, y, z superficiem clausam ponimus infinite parvam, quae volumen dm continet: secundum § 4. 1)

$$k K dm$$

erit quantitas, qua flumen conductivum per dm transeuns, ubi in volumen hoc intrat, valorem superat, quem obtinet, ubi e volumine eodem progreditur. Quoties igitur K in loco quodam permagnum est, flumen conductivum, ideoque etiam flumen electricum completum mutationes rapidas patitur.

Unde videmus, in interioribus corporum ejus naturae, qualia supra descripsimus, densitatem electricam generaliter valde exiguam esse; quoties tamen illa in aliquo loco mensura definiri potest, intensitatem fluminis electrici in eodem loco rapidas subire mutationes. In interioribus talium corporum igitur evenire potest, ut in certo loco flumen electricum valorem considerabilem habeat, dum flumina circumfusa admodum parva sunt.

Constans a hujus phaenomeni conditionem praebet. Quoties enim, ut rem ad omnia corpora extendamus, in interioribus corporis cujusdam densitas electrica alicubi tanta est, ut quantitates ordinis a^2 cum illa comparatae pro levibus et parvulis haberi possint, semper violentae illae electricitatis vicissitudines exspectandae erunt.

Longe diversa in superficie ipsius A eveniunt. In aequatione U. §i 6., si ponimus $u' + \Delta = u_1$, hanc illa formam induit:

$$k \frac{du}{dp} + \frac{2h}{c} \frac{dV}{dp} + q(u_1 - u) = 0,$$

ubi V est potentiale omnium copiarum electricarum obvenientium. Ex hac aequatione patet, ipsum u in propinquitate superficiei generaliter valores finitos obtinere, talibusque directionibus, quae superficiei parallelae sunt, non nimias mutationes passurum esse.

Jam legem determinabimus, qua densitas electrica a superficie inde decrescit, suppositione nitentes, ipsum u in interioribus ipsius A non valores nisi exiguos induere. Qua in re omnes quantitates negligemus, una cum ipso a evanescentes.

Quod ut impetremus, initio coordinatarum in punctum superficiei ipsius A translato, perpendiculum in illo puncto introrsum spectans pro axi positivorum x sumemus, axibus ipsorum y et z in plano superficiem tangenti sitis. Eas denique tantum corporis partes considerabimus, quae in axi ipsorum x jacent.

Quibus positis habemus aequationes:

$$a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u$$

et pro $x = 0$

$$k \frac{du}{dx} + \frac{2h}{c} \frac{dV}{dx} + q(u_1 - u) = 0.$$

Quarum prior, posito $x = a\xi$, in hanc transit

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + a^2\left\{\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right\} = u,$$

vel si supponimus, quod ex observatione supra facta sequitur, quantitatem $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}$ non nimio valore gaudere

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = u,$$

ex qua

$$u = Ae^{-\xi} + Be^{\xi},$$

vel

$$u = Ae^{-\frac{x}{a}} + Be^{\frac{x}{a}}$$

sequitur. Quum autem densitas u e suppositione nostra in interioribus ipsius A non valores nisi exiguos induat, ponendum est $B = 0$, obtinemusque legem quaesitam, formula expressam hac

$$\varkappa. \qquad u = Ae^{-\frac{x}{a}},$$

ubi A de uno perpendiculo ad alterum variatur.

Jam ut ad ipsum A determinandum aequatione uti possimus pro $x = 0$ locum habente, observamus, e formula IV. §[i] 8. eadem, in qua hoc loco acquiescimus approximatione haberi

$$4\pi a^2 u + v = a^2 \int \left\{A \frac{d\frac{1}{r}}{dp} + \frac{1}{ar} A\right\} ds,$$

vel

$$ku + \frac{2h}{c} v = \frac{2h}{c} \cdot a \int \left(a \frac{d\frac{1}{r}}{dp} + \frac{1}{r}\right) A\, ds.$$

Quum igitur quantitas $ku + \frac{2h}{c} v$, ideoque etiam ejus quotiens differentialis ipsi a proportionalis sit, hunc in aequatione nostra negligamus necesse est. Quae itaque, si v_1 designamus potentiale omnium copiarum electricitatis externarum, loco u ejus valore A substituto, in hanc transit:

$$\frac{2h}{c} \frac{dv_1}{dx} + q(u_1 - A) = 0,$$

unde

$$A = u_1 + \frac{2h}{qc} \frac{dv_1}{dx},$$

denique

$$u = \left(u_1 + \frac{2h}{qc} \frac{dv_1}{dx}\right) e^{-\frac{x}{a}}$$

sequitur.

Itaque electricitas in corporibus, qualia consideravimus, nonnisi in profunditates valde exiguas procedit, densitate ejus in progressione geometrica decrescente.

Hae deductiones, quae cum ratione, qua electricitas in corporibus male conducentibus versatur, optime consentire videntur, nostrae theoriae propriae sunt, neque ullo modo e theoria hactenus accepta erui possunt. Re vera haec theoria e nostra sequitur, si ubique (nisi forte in calculis approximatis modo propositis) ipsum a in infinitum crescere statuitur: dum calculi modo peracti e contrario ipsum a infinite parvum esse supponunt.

Quae phaenomena autem quum in omnibus corporibus male conducentibus appareant, sequitur, ut in omnibus his corporibus a sit quantitas admodum parva. Si enim in corpore male conducenti, in quo igitur k perparvum est, ipsum a valorem acciperet finitum vel adeo infinitum, secundum calculos nostros electricitas non in superficie ejus moraretur, sed densitate sensibili per tota ejus interiora penetraret.

Formulam $\varkappa$. sub certis conditionibus ad substantias qualescunque extendere licet. Ipsum enim a quoniam pro datis substantiis per certas lineas repraesentatur, quas hactenus tacite ad mensuram omnibus corporibus communem rettulimus, manifesto illud valorem numericum eo minorem impetrabit, quo major erit unitas longitudinis, quae singulis casibus in calculos introducitur: et vice versa. Itaque si in disquisitione corporis, cujus dimensiones respectu lineae a valde considerabiles sunt, unitas longitudinis satis magna et calculis accommodata adhibetur, linea a numero valde exiguo exprimetur.

Inde sequitur, ut form. $\varkappa$. ad omnia corpora qualiacunque valeat, quorum dimensiones respectu lineae a satis magnae sunt.

Nec minus vice versa patet, legem illam etiam in corporibus quam pessime conducentibus tandem necessario irritam fieri, si dimensiones eorum magis magisque diminuuntur.

Cogitare licet, constantes k et $\frac{h}{c}$ a se invicem pendere, ita ut altera mutata et altera mutetur. Sed hoc jam evictum est, ipso k in indefinitum decrescente, quantitatem $\frac{h}{c}$ multo saltem lentius decrescere quam k, ita ut ratio $\frac{kc}{h}$ denique cum k evanescat. Eodem modo e consensu calculorum §i 7. cum observationibus in bonis conductoribus institutis percipitur, crescente conductibilitate etiam quantitatem a^2 augeri, ita ut etiam in hanc partem quantitas $\frac{h}{c}$ multo lentius varietur, quam conductibilitas k.

Quamquam igitur secundum nostram theoriam modus, quo electricitas in corpore quodam distribuitur, vere e valore pendet, quem constans a in hoc corpore induit, tamen corporum in ordinem digerendorum rationem semper e conductibilitate eorum petere licet, quae quum in determinatione ipsius a omnino praevaleat.

Die beiden letzten Seiten des Originals enthalten:

VITA.

Natus sum ego Elwin Bruno Christoffel in oppido Rhenano Montjoie anno 1829 die 10. Novembris patre Francisco Carolo, quem morte mihi ereptum lugeo, matre Maria Helena e. g. Engels, quam vivam adhuc veneror.

Fidem confiteor catholicam.

Primis literarum elementis domi imbutus Coloniam Agrippinam me contuli gymnasiaque, quae ibi florent, primum Catholicum deinde Friderici Guilelmi quinque per annos frequentavi.

Maturitatis testimonio munitus Berolinum petii, ubi ab Ill. Busch rectore magnifico in civium academicorum numerum receptus et ab Ill. Boeckh decano spectabili in album facultatis philosophicae relatus sum. Per quadriennium lectiones audivi virorum Illustrissimorum, Clarissimorum, Experientissimorum

Borchardt, Lejeune-Dirichlet, Dove, Eisenstein, Encke, Joachimsthal, Lichtenstein, Magnus, Mitscherlich, Ohm, Steiner, Trendelenburg, Wiedemann.

Quibus omnibus viris de me maxime meritis summas quam possum gratias ago semperque habebo.

THESES.

1. Mathesis ad omnia valet, quae mensuram et ordinem habent.
2. Non dari saltum in natura est propositio mere theoretica.
3. In calculo infinitesimali methodus differentialium est omnium praestantissima.
4. Velocitatem, qua calor propagatur, finitam esse dico.

II.

Über die Gaufsische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55, 1858, S. 61—82.)

Das Folgende enthält eine neue Darstellung des bekannten, von Gaufs (Comm. Gott. rec. 1814—15) erfundenen Verfahrens zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale. Im Anschlufs hieran wird dasselbe in der Weise verallgemeinert, dafs zu einer Anzahl beliebig gegebener Zwischenwerthe die übrigen nach den von Gaufs aufgestellten Prinzipien ausgewählt werden. Diese neue Methode kann in verschiedenen Beziehungen von Nutzen sein, wie weiter unten nachgewiesen werden soll.

1.

Da die späteren Entwicklungen in stetigem Zusammenhange mit den Formeln für die mechanische Quadratur im Allgemeinen stehen, so kann eine kurze Herleitung der letztern nicht füglich umgangen werden. Sei

$$f(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n), \tag{1.}$$

so fällt die Funktion

$$\varphi(x) = f(x)\left\{\frac{F(a_1)}{f'(a_1)(x-a_1)} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)(x-a_2)} + \cdots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)(x-a_n)}\right\} \tag{2.}$$

mit der Funktion $F(x)$ für die Werthe $x = a_1, a_2, \ldots a_n$ zusammen, und es ist $\varphi(a_1) = F(a_1)$, $\varphi(a_2) = F(a_2)$, $\ldots \varphi(a_n) = F(a_n)$. Aus (2.) folgt

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)\partial x \tag{3.}$$

$$= \frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{x-a_1} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{x-a_2} + \cdots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{x-a_n},$$

und dieser Ausdruck ist bis auf einen bestimmten Fehler gleich dem Integrale $\int_{-1}^{1} F(x)\partial x$.

Um die in (3.) angedeuteten Integrationen auszuführen, ist im Allgemeinen folgender Weg einzuschlagen. Ist u eine beliebige, aufserhalb der Gränzen -1 und 1 liegende Gröfse, so hat man identisch

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\partial x}{x-u} = \int_{-1}^{1} \frac{f(u)\partial x}{x-u} + \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}\partial x = f(u)\lg\frac{u-1}{u+1} + \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}\partial x.$$

Da $f(x)$ eine rationale ganze Funktion von x vom n^{ten} Grade ist, so ist $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ ebenfalls eine solche Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade von x wie von u. Setzt man demnach

$$\text{(4.)} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}\partial x = f_1(u),$$

so ist $f_1(u)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, und

$$\text{(5.)} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\partial x}{x-u} = f(u)\lg\frac{u-1}{u+1} + f_1(u).$$

Diese Formel bleibt offenbar selbst dann bestehen, wenn u zwischen die Gränzen -1 und $+1$ fällt, sobald nur die unter dem Integral linker Hand stehende Funktion $\frac{f(x)}{x-u}$ innerhalb jener Gränzen überall endlich bleibt. Die Formel (5.) gilt daher, wenn u einer der Gröfsen $a_1, a_2, \dots a_n$ gleich gesetzt wird, unter allen Umständen, mögen diese Gröfsen aufserhalb oder innerhalb der erwähnten Gränzen liegen. Dadurch geht die Gleichung (3.) in folgende über:

$$\text{(6.)} \qquad \int_{-1}^{1} \varphi(x)\partial x = \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}F(a_1) + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}F(a_2) + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}F(a_n),$$

und man hat annähernd

$$\text{(7.)} \qquad \int_{-1}^{1} F(x)\partial x = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\partial x.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche folgt:

$$\frac{f_1(u)}{f(u)} = \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}\cdot\frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}\cdot\frac{1}{u-a_2} + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}\cdot\frac{1}{u-a_n},$$

so dafs $\frac{f_1(u)}{f(u)}$ der mittelst der Zwischenwerthe $a_1, a_2, \dots a_n$ berechnete

angenäherte Werth des Integrals $\int_{-1}^{1} \frac{\partial x}{u-x}$ ist; und wenn man dies in (5.) anwendet:

$$\text{(8.)} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\partial x}{x-u}$$

$$= f(u)\left\{\lg\frac{u-1}{u+1} + \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}\cdot\frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}\cdot\frac{1}{u-a_2} + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}\cdot\frac{1}{u-a_n}\right\}.$$

Setzt man von jetzt an

$$\text{(9.)} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\partial x}{u-x} = f_2(u),$$

so ist wegen (5.)

$$\text{(10.)} \qquad f(u)\lg\frac{u+1}{u-1} = f_1(u) + f_2(u),$$

und wegen (8.)

$$\text{(11.)} \quad \int_{-1}^{1} \frac{\partial x}{u-x} - \left\{\frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}\cdot\frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}\cdot\frac{1}{u-a_2} + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}\cdot\frac{1}{u-a_n}\right\} = \frac{f_2(u)}{f(u)}.$$

Es ist somit $\frac{f_2(u)}{f(u)}$ der Unterschied zwischen dem wahren und dem angenäherten Werthe von $\int_{-1}^{1} \frac{\partial x}{u-x} = \lg\frac{u+1}{u-1}$. Entwickelt man daher in (11.) die linke Seite nach absteigenden Potenzen von u, und setzt den Überschufs des wahren Werthes von $\int_{-1}^{1} x^m\partial x$ über den angenäherten Werth desselben, nämlich

$$\text{(12.)} \qquad \int_{-1}^{1} x^m\partial x - \left\{\frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}a_1^m + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}a_2^m + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}a_n^m\right\} = k_m,$$

so erhält man:

$$\text{(13.)} \qquad \frac{k_0}{u} + \frac{k_1}{u^2} + \frac{k_2}{u^3} + \cdots = \frac{f_2(u)}{f(u)}.$$

Setzt man andererseits

$$\text{(14.)} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\partial x = A_1,$$

und allgemein

$$\text{(15.)} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)x^s\partial x = A_{s+1},$$

ferner

$$\frac{1}{f(u)} = \frac{A'}{u^n} + \frac{A''}{u^{n+1}} + \frac{A'''}{u^{n+2}} + \cdots,$$

so ist

$$f_2(u) = \frac{A_1}{u} + \frac{A_2}{u^2} + \frac{A_3}{u^3} + \cdots \tag{16.}$$

und

$$\frac{f_2(u)}{f(u)} = \frac{A_1 A'}{u^{n+1}} + \frac{A_2 A' + A_1 A''}{u^{n+2}} + \frac{A_3 A' + A_2 A'' + A_1 A'''}{u^{n+3}} + \cdots, \tag{17.}$$

mithin $k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 0$. Die Formel (7.) liefert also allemal den genauen Werth von $\int_{-1}^{1} F(x)\partial x$, so oft $F(x)$ eine ganze Funktion ist, welche den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt. Man hat ferner

$$k_n = A_1 A', \quad k_{n+1} = A_2 A' + A_1 A'', \quad k_{n+2} = A_3 A' + A_2 A'' + A_1 A''', \text{ etc.}$$

Kann man nun $f(u)$ so bestimmen, dafs in der Entwicklung von $f_2(u)$ die m ersten Glieder, also in der Entwicklung von $f(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ die Glieder, welche $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \cdots \frac{1}{u^m}$ enthalten, von selbst wegfallen, so beginnt die Reihe für $\frac{f_2(u)}{f(u)}$ mit dem Term $\frac{k_{m+n}}{u^{m+n+1}}$, und die Formel (7.) ist für alle ganzen Funktionen vom $(m+n-1)^{\text{ten}}$ oder einem niedrigern Grade vollkommen strenge. Gleichzeitig ist

$$k_{n+m} = A_{m+1} A', \quad k_{n+m+1} = A_{m+2} A' + A_{m+1} A'', \quad \text{etc.}$$

Es wird sich bald zeigen, dafs der höchste Grad von Genauigkeit, welcher mit der vorausgesetzten Form von $f(x)$ erreicht werden kann, dem Falle entspricht, wo $m = n$ ist. Es ist dies der nämliche Fall, den Gaufs in der oben angeführten Abhandlung, und Jacobi in gegenwärtigem Journal behandelt haben.

2.

Das Folgende beruht auf diesem Lemma:

Unterwirft man eine ganze Funktion $f(u)$ vom n^{ten} Grade der Bedingung, dafs aus der absteigenden Entwicklung von $f(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ die Terme, welche $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \cdots \frac{1}{u^n}$ enthalten, von selbst wegfallen, so giebt es stets eine Funktion, welche diesen Bedingungen genügt, und dieselbe ist bis auf einen constanten Faktor bestimmt. Verlangt man aufserdem, dafs das Glied mit $\frac{1}{u^{n+1}}$ verschwinde, so wird die Funktion $f(u)$ identisch gleich Null, indem jener constante Faktor den bestimmten Werth Null erhält.

Dasselbe ergiebt sich leicht mittelst der Formeln (10.) und (14.), denen zufolge allgemein der Coefficient von $\frac{1}{u}$ in der absteigenden Entwicklung von $F(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ gleich $\int_{-1}^{1} F(x)\partial x$ ist, vorausgesetzt, dafs $F(u)$ eine rationale ganze Funktion ist. Sei zunächst $f(u)$ so bestimmt, daß in (10.) $f_2(u)$ die Form

$$f_2(u) = \frac{A_{n+2}}{u^{n+2}} + \frac{A_{n+3}}{u^{n+3}} + \cdots$$

hat, und sei ferner $f(u) = P + Qi$, wo P und Q reelle ganze Funktionen von u sind; so multiplicire man die Gleichung (10.) mit $P - Qi$. Dann ist $(P - Qi)f_1(u)$ wieder eine ganze Funktion von u, während die Entwicklung von $(P - Qi)f_2(u)$ mit dem Term $\frac{1}{u^2}$ beginnt. Also ist der Faktor von $\frac{1}{u}$ gleich Null. Da derselbe aber gleich

$$\int_{-1}^{1} f(u)(P - Qi)\partial u = \int_{-1}^{1} (P^2 + Q^2)\partial u$$

ist, und die Elemente dieses Integrals alle positiv sind, so mufs, wenn das ganze Integral gleich Null sein soll, jedes einzelne Element verschwinden, also, wie behauptet, $f(u)$ identisch gleich Null sein.

Da somit die, in Bezug auf die unbekannten Coefficienten der Funktion $f(u)$ linearen Gleichungen

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \ldots \quad A_n = 0, \quad A_{n+1} = 0$$

von einander unabhängig sind, indem sich aus ihnen für jede der $(n+1)$ unbekannten Gröfsen ein einziger Werth ergiebt, so folgt, dafs man unter den $(n+1)$ Coefficienten von $f(u)$ wenigstens auf *eine* Art ein System von n derselben so auswählen kann, dafs die n Gleichungen

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \ldots \quad A_n = 0 \tag{A.}$$

in Bezug auf dieses System von Unbekannten von einander unabhängig sind. Denn wäre dies nicht der Fall, so müfste man, wie leicht zu sehen ist, aus den Gleichungen

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad A_n = \alpha_n, \quad A_{n+1} = \alpha_{n+1}$$

sämmtliche Unbekannten eliminiren können, was nach dem eben bewiesenen nicht möglich ist.

Da endlich die Gleichungen (A.) linear sind, so bestimmen sie das Verhältnifs von n Coefficienten zum $(n+1)^{\text{ten}}$ auf eine einzige Weise, wodurch obiges Lemma in allen seinen Theilen bewiesen ist.

Differentiirt man nun die Gleichung (10.), und multiplicirt mit u^2-1, so folgt:

$$(18.)\qquad (u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\cdot \lg\frac{u+1}{u-1} = 2f + (u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u} + (u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u},$$

und eine nochmalige Differentiation giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\right)\lg\frac{u+1}{u-1} = 4\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\right).$$

Diese beiden Gleichungen haben wieder die Form von (10.). Nimmt man aber jetzt an, dafs $f_2(u)$ die Potenzen $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \cdots \frac{1}{u^n}$ nicht enthält, dafs also

$$f_2 = \frac{A_{n+1}}{u^{n+1}} + \frac{A_{n+2}}{u^{n+2}} + \cdots$$

ist, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\right) = \frac{n(n+1)A_{n+1}}{u^{n+1}} + \cdots,$$

so dafs die Funktion $\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\right) - n(n+1)f_2$, nach negativen Potenzen von u entwickelt, die Potenzen $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \cdots \frac{1}{u^n}, \frac{1}{u^{n+1}}$ nicht enthält. Multiplicirt man daher die Gleichung (10.) mit $n(n+1)$ und subtrahirt sie von der vorstehenden, so folgt

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\right) - n(n+1)f\right\}\lg\frac{u+1}{u-1}$$
$$= 4\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u}\right) - n(n+1)f_1 + \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\right) - n(n+1)f_2\right\};$$

und da der Faktor von $\lg\frac{u+1}{u-1}$ den $(n+1)^{\text{ten}}$ Grad nicht erreicht, so folgt vermöge des obigen Lemmas, dafs er identisch gleich Null sein muß. Da ferner auf der rechten Seite die drei ersten Glieder nur positive Potenzen von u enthalten, während das Folgende sich nur aus negativen Potenzen von u zusammensetzt, und da diese beiden Theile für sich verschwinden müssen, so haben wir

$$(19.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\right) - n(n+1)f = 0,$$

$$(20.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\right) - n(n+1)f_2 = 0,$$

$$(21.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u}\right) - n(n+1)f_1 + 4\frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Nach den bekannten Untersuchungen über die Gleichung (19.) folgt hieraus

$$(22.)\qquad f(u) = P_n(u) = \frac{\partial^n (u^2-1)^n}{2^n \Gamma(n+1)\partial u^n}$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}u^n - \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-2}u^{n-2} + \cdots,$$

und wegen (9.)

$$(23.)\qquad f_2(u) = Q_n(u) = \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)\partial x}{u-x},$$

welche Bezeichnung von der gewöhnlichen nur wenig abweicht. Sodann folgt, dafs die Gleichung

$$(24.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial U}{\partial u}\right) = n(n+1)\,U - 4\frac{\partial P_n(u)}{\partial u}$$

zu ihrem completen Integrale einen Ausdruck von der Form

$$(25.)\qquad U = A P_n(u) + B Q_n(u) + R_n(u)$$

hat, wo $R_n(u)$ eine rationale ganze Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, und nichts Anderes, als die bisher durch $f_1(u)$ bezeichnete Funktion ist. Die Funktionen P, Q, R stehen in Folge der Gleichung (10.) in der Relation

$$(26.)\qquad P_n(u)\lg\frac{u+1}{u-1} = Q_n(u) + R_n(u),$$

oder auch

$$(27.)\qquad Q_n(u) = P_n(u)\lg\frac{u+1}{u-1} - R_n(u),$$

so dafs nur noch die Funktion $R_n(u)$ zu bestimmen übrig bleibt. Zuvor will ich aber noch die Formeln

$$(28.)\qquad (u^2-1)P_n'(u) = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}(u) - P_{n-1}(u)),$$

$$(29.)\qquad \begin{cases}(2n+1)uP_n(u) = (n+1)P_{n+1}(u) + nP_{n-1}(u),\\ (2n+1)uQ_n(u) = (n+1)Q_{n+1}(u) + nQ_{n-1}(u),\\ (2n+1)uR_n(u) = (n+1)R_{n+1}(u) + nR_{n-1}(u)\end{cases}$$

einschalten, welche sich auf verschiedene Art, unter anderm auch mittelst obigen Lemma's beweisen lassen. Setzt man z. B. in (18.) $P_n(u)$ für $f(u)$ ein, so beginnt die Entwicklung von $(u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}$ mit dem Term $-\frac{(n+1)A_{n+1}}{u^n}$. Bedenkt man nun, dafs man setzen kann

$$(u^2-1)P_n'(u) = aP_{n+1}(u) + bP_{n-1}(u) + cP_{n-3}(u) + \cdots,$$

so folgt aus unserm Lemma, dafs auf der rechten Seite alle Coefficienten, mit Ausnahme von a und b, verschwinden. Die Bestimmung der Constanten a und b hat keine Schwierigkeiten. — Zur Herleitung der Gleichungen (29.) hat man nur (26.) mit u zu multipliciren, und ganz ähnliche Betrachtungen anzustellen. Diese Gleichungen stimmen übrigens im Wesentlichen mit denen überein, deren sich Gaufs in den artt. 17. und 18. seiner Abhandlung bedient.

Differentiirt man die Gleichung (28.) so folgt wegen (19.)

$$P'_{n+1}(u) - P'_{n-1}(u) = (2n+1)P_n(u),$$

also auch

$$P'_{n-1}(u) - P'_{n-3}(u) = (2n-3)P_{n-2}(u),$$

u. s. f., woraus durch Addition

(30.) $$P'_{n+1}(u) = (2n+1)P_n(u) + (2n-3)P_{n-2}(u) + (2n-7)P_{n-4}(u) + \cdots$$

folgt. Vermöge dieser Formel geht die Gleichung (24.) in folgende über:

(31.) $$\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial U}{\partial u}\right) - n(n+1)U$$
$$+ 4\{(2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \cdots\} = 0.$$

Um nun zur Bestimmung von $R_n(u)$ überzugehen, bemerke man, dafs die Gleichung (26.) durch Aenderung des Vorzeichens von u und nachfolgende Multiplication mit $(-1)^{n-1}$ folgende Gestalt annimmt:

$$P_n(u)\lg\frac{u+1}{u-1} = (-1)^{n+1}Q_n(-u) + (-1)^{n-1}R_n(-u),$$

woraus durch Vergleichung mit (26.) $R_n(-u) = (-1)^{n-1}R_n(u)$ folgt. Da somit $R_n(u)$ nur die Potenzen u^{n-1}, u^{n-3}, u^{n-5} etc. enthalten kann, so hat es die Form

$$R_n(u) = a_1P_{n-1}(u) + a_3P_{n-3}(u) + a_5P_{n-5}(u) + \cdots$$

Setzt man dies in (31.) für U ein, so folgt:

$$\begin{aligned}0 = a_1[(n-1)n - n(n+1)]P_{n-1} &+ a_3[(n-3)(n-2) - n(n+1)]P_{n-3}\\ +4(2n-1)P_{n-1} \qquad &\qquad\qquad + 4(2n-5)P_{n-3}\\ &+ a_5[(n-5)(n-4) - n(n+1)]P_{n-5} + \cdots\\ &\qquad\qquad + 4(2n-9)P_{n-5} + \cdots,\end{aligned}$$

und hieraus

$$a_1 = 2\frac{2n-1}{1\cdot n}, \quad a_3 = 2\frac{2n-5}{3(n-1)}, \quad a_5 = 2\frac{2n-9}{5(n-2)}, \quad \text{u. s. w.}$$

Damit sind die verlangten Funktionen f, f_1, f_2 vollständig bestimmt; es ist nämlich:

(32.) $$\begin{cases} f(u) = P_n(u) = \dfrac{\partial^n(u^2-1)^n}{2^n\Gamma(n+1)\partial u^n}, \\[2ex] f_1(u) = R_n(u) = 2\left\{\dfrac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(u) + \dfrac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(u)\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \dfrac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(u) + \cdots\right\}, \\[2ex] f_2(u) = Q_n(u) = P_n(u)\lg\dfrac{u+1}{u-1} - R_n(u) = \displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{P_n(x)\partial x}{u-x} \\ \qquad = 2\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{2s+1\cdot 2s+2\cdots 2s+n}{2s+1\cdot 2s+3\cdots 2s+2n-1}\cdot\dfrac{1}{u^{n+2s+1}}. \end{cases}$$

Den allgemeinen Ausdruck der Funktion $P_n(u)$ hat Gaufs in seiner Abhandlung gegeben, doch rührt die elegante, obenstehende Form derselben von Jacobi her. Auch findet man bei Gaufs den Ausdruck von $Q_n(u)$ sowohl in Form einer hypergeometrischen Reihe, wie in seiner Reduction auf einen algebraischen und einen transcendenten Theil.

Obgleich auf diese Weise die Coefficienten in der Gleichung (6.) explicite dargestellt sind, so giebt es doch mit Rücksicht darauf, dafs in den Größen $\frac{f_1(u)}{f'(u)}$ dort für u nur solche Werthe zu substituiren sind, welche $f(u)$ verschwinden machen, noch einfachere Darstellungsweisen für dieselben. Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)P'_n(u)) = n(n+1)P_n(u),$$
$$\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)R'_n(u)) = n(n+1)R_n(u) - 4P'_n(u)$$

folgt durch Elimination von $n(n+1)$:

$$P_n\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)R'_n) - R_n\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)P'_n) + 4P_nP'_n = 0,$$

und hieraus durch teilweise Integration

$$(u^2-1)(P_nR_n' - R_nP_n') + 2P_n^2 = a.$$

Für $u=1$ ergiebt sich hieraus $a=2$, also ist identisch

(33.) $$\frac{u^2-1}{2}\{P_n(u)R_n'(u) - R_n(u)P_n'(u)\} + P_n^2(u) = 1,$$

mithin für alle Werthe von u, für welche $P_n(u) = 0$ ist:

(34.) $$\frac{1-u^2}{2}P_n'(u)R_n(u) = 1.$$

Daraus folgt für die nämlichen Werthe von u:

$$(35.)\qquad \frac{f_1(u)}{f'(u)} = \frac{R_n(u)}{P_n'(u)} = \frac{1-u^2}{2}(R_n(u))^2 = \frac{2}{(1-u^2)(P_n'(u))^2}.$$

Die erste dieser Darstellungen ist von Gaufs gegeben; die zweite dagegen hat den Vorzug, dafs sie die Berechnung der Coefficienten $\frac{f_1(u)}{f'(u)}$ blofs von der Funktion $P_n'(u)$ abhängig macht, deren numerischer Werth bei der Auflösung der Gleichung $P_n(u) = 0$ gleichzeitig mit der Wurzel u bestimmt wird.

Sind $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(u) = 0$, so ist

$$(36.)\qquad P_n(u) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}(u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_n),$$

folglich nach der zweiten Darstellungsweise

$$(37.)\qquad \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} = \frac{2\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1}\right)^2}{(1-a_1)(1+a_1)[(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)]^2},$$

so dafs sämmtliche Coefficienten in einfache, leicht zu bildende Faktoren zerlegt sind. Ich bemerke noch folgende Formeln, welche sich unter der Voraussetzung, dafs $P_n(u) = 0$ sei, aus (28.) und (29.) leicht ergeben:

$$(38.)\qquad (1-u^2)P_n'(u) = nP_{n-1}(u) = -(n+1)P_{n+1}(u),$$

$$(39.)\qquad \frac{f_1(u)}{f'(u)} = \frac{2(1-u^2)}{(nP_{n-1}(u))^2} = \frac{2(1-u^2)}{((n+1)P_{n+1}(u))^2}.$$

Diese Ausdrücke treten durch Auflösung in lineare Faktoren in eine interessante Beziehung zum Produkte

$$\frac{R_n(a_1)}{P_n'(a_1)}\cdot\frac{R_n(a_2)}{P_n'(a_2)}\cdots\frac{R_n(a_n)}{P_n'(a_n)}.$$

Dies vorangeschickt haben wir das Resultat, dafs, wenn $F(x)$ eine rationale ganze Funktion von x ist, welche den $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht überschreitet, man die streng richtige Gleichung hat

$$(40.)\qquad \int_{-1}^{1} F(x)\,\partial x = \frac{R_n(a_1)}{P_n'(a_1)}F(a_1) + \frac{R_n(a_2)}{P_n'(a_2)}F(a_2) + \cdots + \frac{R_n(a_n)}{P_n'(a_n)}F(a_n).$$

Läfst sich ferner $F(x)$ in eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, welche für alle zwischen -1 und 1 liegenden Werthe von x so stark convergirt, dafs man die Reihe, ohne ihren Werth merklich zu ändern, auf ihre $2n$ ersten Glieder reduciren kann, so gilt die Formel (40.) wieder ohne merklichen Fehler. Dasselbe gilt, wenn man vermöge der besondern Beschaffenheit von $F(x)$

alle auf das $2n^{\text{te}}$ folgenden Glieder in den sogenannten Rest der Reihe vereinigen mufs, wofern nur dieser Rest gegen $F(x)$ vernachlässigt werden darf.

Un hiervon eine Anwendung zu geben, werde ich die Interpolationsformel (2.) für den Fall, wo die Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(u) = 0$ sind, in eine andere Form bringen. Ich erinnere zu dem Zwecke an die bekannten Formeln

$$\int_{-1}^{1} P_\mu(x)P_\nu(x)\,\partial x = 0,\quad \int_{-1}^{1} P_\nu(x)P_\nu(x)\,\partial x = \frac{2}{2\nu+1},$$

von denen sich die erstere aus der Betrachtung des Produktes $P_m(u)\,Q_{m+p}(u)$ unter Anwendung der Gleichung (14.) leicht ergiebt. — Ist nun $\mu+\nu<2n$ und auch $2\nu<2n$, so muß man mittelst der Formel (40.) den genauen Werth dieser Integrale erhalten, und es ist somit

$$(41.)\qquad \sum P_\mu(a)P_\nu(a)\frac{R_n(a)}{P_n'(a)} = 0$$

$$(42.)\qquad \sum P_\nu(a)P_\nu(a)\frac{R_n(a)}{P_n'(a)} = \frac{2}{2\nu+1},$$

wo die Summen sich auf die Werthe $a = a_1, a_2, \ldots a_n$ beziehen. Will man jetzt die Funktion $F(x)$ durch eine Funktion $f(x)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ersetzen, welche mit ihr für die Werthe $x = a_1, a_2, \ldots a_n$ übereinstimmen soll, so kann man setzen

$$f(x) = \beta P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \beta_2 P_2(x) + \cdots + \beta_{n-1}P_{n-1}(x),$$

und hat zur Bestimmung der Coefficienten $\beta, \beta_1, \ldots \beta_{n-1}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} F(a_1) &= \beta P_0(a_1) + \beta_1 P_1(a_1) + \beta_2 P_2(a_1) + \cdots + \beta_{n-1}P_{n-1}(a_1)\\ F(a_2) &= \beta P_0(a_2) + \beta_1 P_1(a_2) + \beta_2 P_2(a_2) + \cdots + \beta_{n-1}P_{n-1}(a_2)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F(a_n) &= \beta P_0(a_n) + \beta_1 P_1(a_n) + \beta_2 P_2(a_n) + \cdots + \beta_{n-1}P_{n-1}(a_n). \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese der Reihe nach mit

$$P_\nu(a_1)\frac{R_n(a_1)}{P_n'(a_1)},\quad P_\nu(a_2)\frac{R_n(a_2)}{P_n'(a_2)},\quad \ldots\quad P_\nu(a_n)\frac{R_n(a_n)}{P_n'(a_n)}$$

und addirt, so fallen wegen (41.) alle β weg, deren Index von ν verschieden ist: da hingegen nach (42.) der Coefficient von β_ν gleich $\frac{2}{2\nu+1}$ ist, so folgt

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2}\sum F(a)P_\nu(a)\frac{R_n(a)}{P_n'(a)},$$

wo die Summe wie oben zu interpretiren ist. Die so bestimmte Funktion $f(x)$ ist mit der durch die Gleichung (2.) definirten $\varphi(x)$ identisch, da beides rationale ganze Funktionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sind, welche für n Werthe von x mit einander übereinstimmen. Es ist also

$$(43.)\qquad \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \sum F(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P_n'(a)}.$$

Ist $F(x)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, so fällt diese Formel mit der bekannten Entwicklung zusammen. Setzt man z. B. $F(x) = \frac{P_n(x)-P_n(y)}{x-y}$, so ist $\varphi(x) = F(x)$, ferner $F(a_s) = \frac{P_n(y)}{y-a_s}$, mithin

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2} P_n(y) \sum \frac{P_\nu(a)}{y-a} \frac{R_n(a)}{P_n'(a)}$$
$$= \frac{2\nu+1}{2} \left\{ P_\nu(y) \sum \frac{R_n(a)}{P_n'(a)} \frac{P_n(y)}{y-a} - P_n(y) \sum \frac{P_\nu(y)-P_\nu(a)}{y-a} \frac{R_n(a)}{P_n'(a)} \right\}.$$

In diesem Ausdrucke ist die erste Summe gleich $R_n(y)$; die andere kann, da $\frac{P_\nu(y)-P_\nu(x)}{y-x}$ eine ganze Funktion von x ist, welche den $2n^{\text{ten}}$ Grad nicht erreicht, nach (40.) durch das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{P_\nu(y)-P_\nu(x)}{y-x} \partial x = R_\nu(y)$ ersetzt werden. Folglich ist

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2} (P_\nu(y) R_n(y) - P_n(y) R_\nu(y))$$

und

$$\frac{P_n(x)-P_n(y)}{x-y} = \sum_0^{n-1} \frac{2\nu+1}{2} \{ P_\nu(y) R_n(y) - P_n(y) R_\nu(y) \} P_\nu(x).$$

Setzt man hier tx und ty statt x und y, so überzeugt man sich leicht, daß β_ν höchstens vom $(n-\nu-1)^{\text{ten}}$ Grade sein kann.

Die erzeugende Funktion der Ausdrücke

$$\Pi_m = P_n(u) R_{n+m}(u) - P_{n+m}(u) R_n(u),$$

nämlich $v = \sum_0^\infty \Pi_m x^m$, genügt der Differentialgleichung

$$(1 - 2ux + x^2) \frac{\partial x^n v}{\partial x} + (x-u) x^n v = 2x^n,$$

wie man durch Substitution der Reihe für v mittelst (29.) leicht verificirt; und es findet sich

$$v = \frac{2}{x^n \sqrt{1-2ux+x^2}} \int_0^x \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1-2ux+x^2}}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\Pi_{m+1} = 2 \sum_0^m \frac{P_s(u) P_{m-s}(u)}{n+s+1},$$

also wenn $\nu < n$:

$$P_\nu R_n - P_n R_\nu = 2 \sum_0^{n-\nu-1} \frac{P_s P_{n-\nu-s-1}}{\nu+s+1},$$

wodurch die oben nachgewiesene Reduktion bewerkstelligt ist.

Eine interessantere, auch in der Folge nützliche Anwendung von (43.) ist folgende. Setzt man in dieser Formel

$$F(x) = \frac{n}{2} \cdot \frac{P_n(x) P_{n-1}(y) - P_n(y) P_{n-1}(x)}{x-y},$$

so erhält man wieder $\varphi(x) = F(x)$, da letztere Funktion in Bezug auf x ganz und vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Es ist aber

$$F(a_s) = \frac{n}{2} \cdot \frac{P_n(y) P_{n-1}(a_s)}{y-a_s},$$

folglich

$$\beta_\nu = \frac{n}{2} \cdot \frac{2\nu+1}{2} \sum \frac{P_n(y)}{y-a} \frac{P_\nu(a) P_{n-1}(a) R_n(a)}{P_n'(a)}.$$

Aus (38.) und (34.) folgt weiter

$$(1-a^2) P_n'(a) = n P_{n-1}(a), \quad (1-a^2) P_n'(a) R_n(a) = n P_{n-1}(a) R_n(a) = 2,$$

mithin

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \sum \frac{P_n(y)}{y-a} \frac{P_\nu(a)}{P_n'(a)} = \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(y).$$

Es ist daher identisch

$$(44.)\qquad \frac{n}{2} \cdot \frac{P_n(x) P_{n-1}(y) - P_n(y) P_{n-1}(x)}{x-y} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) P_\nu(y),$$

wie man auch durch Multiplication mit $x-y$ und Anwendung von (29.) verificiren kann.

3.

Sei jetzt, um zu dem in 1. angedeuteten allgemeinen Falle überzugehen, $f(u)$ eine Funktion vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade, welche die Eigenschaft hat, dafs aus der Entwicklung von $f(u) \lg \frac{u+1}{u-1}$ die Terme $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^2}, \dots \frac{1}{u^m}$ wegfallen, und sei wie früher

$$(1.)\qquad f_1(u) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \partial x;$$

seien ferner $a_1, a_2, \ldots a_{n+m}$ die Wurzeln der Gleichung $f(u) = 0$, so giebt der Ausdruck

$$\Omega = \sum_{s=1}^{s=n+m} \frac{f_1(a_s)}{f'(a_s)} F(a_s) \tag{2.}$$

im Allgemeinen einen genäherten Wert des Integrals $\int\limits_{-1}^{1} F(x)\partial x$, während er diesen Werth genau darstellt, so oft $F(x)$ eine ganze Funktion ist, welche den $(2m+n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt.

Zur Bestimmung der Funktion $f(u)$ bietet sich zunächst ein Weg dar durch die Gleichungen 1. (14.), (15.), denen zufolge die erwähnte Eigenschaft von $f(u)$ durch die Gleichungen

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\partial x = 0, \quad \int\limits_{-1}^{1} f(x)x\partial x = 0, \quad \ldots \quad \int\limits_{-1}^{1} f(x)x^{m-1}\partial x = 0 \tag{3.}$$

bedingt wird.

Da diese Gleichungen nach dem in art. 2 Eingangs Bemerkten von einander unabhängig sind, so lassen sich aus ihnen m Coefficienten von $f(u)$ durch die übrigen $(n+1)$ ausdrücken. Geht man also auf die Wurzeln von $f(u)$ zurück, so sind durch die Gleichungen (3.) m dieser Wurzeln durch die übrigen n auf eine einzige Weise bestimmt; letztere dagegen bleiben vollkommen willkürlich. Genau gesprochen besteht also die vorliegende Aufgabe darin, daß man diejenige Funktion $f(u)$ vom $(n+m)^{\text{ten}}$ Grade bestimmen soll, welche den Gleichungen (3.) Genüge leistet, und für gegebene n Werthe von u verschwindet. Zugleich ist ersichtlich, dafs diese Aufgabe stets eine, und nur eine einzige Lösung zuläfst.

Gegenwärtige Methode gewährt demnach die Möglichkeit, bei der angenäherten Integration einer *gegebenen* Funktion alle Vortheile zu vereinigen, welche einerseits aus der Berücksichtigung des numerischen Verlaufs dieser Funktion, und andererseits aus der Anwendung der Gaufsischen Methode entspringen können. Man wird nämlich jene n willkürlichen Wurzeln so wählen, dafs für sie die Funktion $F(x)$ besonders einfache, oder auch solche Werthe annimmt, von denen ein grofser Einflufs auf den Werth des gesuchten Integrals zu erwarten ist.

Man kann aber auch in den Fall kommen, dafs der analytische Ausdruck von $F(x)$ unbekannt ist, während die Werthe $F(a_1)$, $F(a_2)$, $\ldots F(a_n)$ beispielsweise durch Beobachtungen bestimmt worden sind. Kann man es alsdann dahin bringen, auch noch die Werthe von $F(x)$ für die übrigen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu bestimmen, so gewährt die Formel (2.), abgesehen von den Beobachtungsfehlern, einen

höheren Grad von Genauigkeit, als sich mit jenen n und irgend welchen andern m Zwischenwerthen im Allgemeinen würde erreichen lassen.

Seien also $a_1, a_2, \ldots a_n$ die gegebenen Wurzeln von $f(x)$, und

$$y = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n), \tag{4.}$$

so kann man setzen

$$f(x) = y(A_m x^m + A'_m x^{m-1} + \cdots + A_m^{(m)}). \tag{5.}$$

Setzt man ferner

$$\int\limits_{-1}^{1} y x^s \partial x = Y_s, \tag{6.}$$

so gehen die Gleichungen (3.) in folgende über:

$$\begin{aligned}
0 &= A_m Y_m + A'_m Y_{m-1} + \cdots + A_m^{(m)} Y_0 \\
0 &= A_m Y_{m+1} + A'_m Y_m + \cdots + A_m^{(m)} Y_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= A_m Y_{2m-1} + A'_m Y_{2m-2} + \cdots + A_m^{(m)} Y_{m-1},
\end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich, wenn $y_1, y_2, \ldots y_m$ die Werthe von y für $x = x_1, x_2, \ldots x_m$ vorstellen, und man von einem constanten Faktor absieht

$$\begin{aligned}
f(x) = y\int\limits_{-1}^{1(m)} & y_1 y_2 \ldots y_m (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m) \\
& \Pi(x_1, x_2, \ldots x_m) x_1{}^0 x_2{}^1 \ldots x_m^{m-1} \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m,
\end{aligned} \tag{7.}$$

wo $\Pi(x_1, x_2, \ldots x_m) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\ldots$ ist. Ist $i_1, i_2, \ldots i_m$ irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots m$, so ist dies auch gleich

$$\begin{aligned}
y\int\limits_{-1}^{1(m)} & y_1 y_2 \ldots y_m (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m) \\
& \Pi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_m}) x_{i_1}^0 x_{i_2}^1 \ldots x_{i_m}^{m-1} \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m.
\end{aligned}$$

Bringt man aber in Π die Indices wieder in die frühere Ordnung, so erhält $x_{i_1}^0, x_{i_2}^1, \ldots x_{i_m}^{m-1}$ dasselbe Vorzeichen, welches es in der Determinante

$$\Sigma \pm x_1^0 x_2^1 \ldots x_m^{m-1} = \Pi(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

hat. Folglich ist auch

$$\begin{aligned}
& \Gamma(m+1)\cdot f(x) \\
&= y\int\limits_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \ldots y_m (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)[\Pi(x_1, x_2, \ldots x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m.
\end{aligned} \tag{8.}$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck der Funktion $f(x)$, und es steht seiner

Anwendung nichts im Wege, als die zahlreichen und unbequemen Integrationen, welche er involvirt. Ich werde daher für einige besondere Fälle seine entwickelte Form hersetzen. Es ist für

$$(9.)\quad \begin{cases} m=0 \; f(x) = y \\ m=1 \; f(x) = y\{xY_0 - Y_1\} \\ m=2 \; f(x) = y\{x^2[Y_1^2 - Y_0Y_2] - x[Y_1Y_2 - Y_0Y_3] + [Y_2^2 - Y_1Y_3]\} \\ m=3 \; f(x) = y\{x^3[Y_2^3 - Y_1Y_2Y_3 + Y_3^2Y_0 - Y_1Y_2Y_3 + Y_1^2Y_4 - Y_0Y_2Y_4] \\ \qquad - x^2[Y_2^3Y_3 - Y_1Y_3^2 + Y_0Y_3Y_4 - Y_1Y_2Y_4 + Y_1^2Y_5 - Y_0Y_2Y_5] \\ \qquad + x[Y_0Y_4^2 - Y_0Y_3Y_5 + Y_1Y_2Y_5 - Y_1Y_3Y_4 + Y_2Y_3^2 - Y_2^2Y_4] \\ \qquad - [Y_3^3 - Y_2Y_3Y_4 + Y_1Y_4^2 - Y_2Y_3Y_4 + Y_2^2Y_5 - Y_1Y_3Y_5]\} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Für gewisse Anwendungen ist es nöthig, die Gleichung (2.) in eine andere Form zu bringen. Sei

$$y = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) = A(x),$$
$$f(x) = yB(x) = yA_m(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_m),$$

so dafs die Gröfsen $b_1, b_2, \dots b_m$ mit den früher durch $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots a_{n+m}$ bezeichneten zusammenfallen. Sei ferner

$$(10.)\qquad \varphi(x) = \sum \frac{F(a)}{A'(a)} \frac{A(x)}{x-a},$$

$$(11.)\qquad \psi(x) = \sum \frac{F(a)}{A'(a)} \frac{A(x)B(x)}{(x-a)B(a)} + \sum \frac{F(b)}{B'(b)} \frac{A(x)B(x)}{(x-b)A(b)},$$

so ist die rechte Seite von (2.) nichts anderes als das von $x=-1$ bis $x=1$ genommene Integral von $\psi(x)$. Man kann aber diese Funktion auch in die Form

$$(12)\qquad \psi(x) = \varphi(x) + \sum \frac{F(b)-\varphi(b)}{A(b)B'(b)} \frac{A(x)B(x)}{x-b}$$

bringen, indem beide Ausdrücke für $x = a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_m$ mit $F(x)$ übereinstimmen, und somit als Funktionen des $(n+m-1)^{\text{ten}}$ Grades identisch sein müssen. Dies festgestellt, erhalten wir statt der Gleichung (2.) folgende:

$$(13.)\qquad \Omega = \sum \frac{A_1(a)}{A'(a)} F(a) + \sum \frac{F(b)-\varphi(b)}{A(b)B'(b)} \int_{-1}^{1} \frac{A(x)B(x)}{x-b} \partial x,$$

welche für die Anwendung gegenwärtiger Methode einen neuen Gesichtspunkt darbietet. Betrachtet man nämlich

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x)\partial x = \sum \frac{A_1(a)}{A'(a)} F(a)$$

als erste Annäherung an den Werth von $\int_{-1}^{1} F(x)\partial x$, so stellt sich der Ausdruck

$$\Delta = \sum \frac{F(b)-\varphi(b)}{A(b)B'(b)} \int_{-1}^{1} \frac{A(x)B(x)}{x-b} \partial x$$

als die Correction dar, welche man an jener anzubringen hat, um einen genauern Werth zu erhalten.

So aufgefafst kommt also unsere Methode darauf hinaus, die Wurzeln $b_1, b_2, \dots b_m$ so auszuwählen, dafs die mittelst derselben berechnete Correction Δ eine höhere Genauigkeit erreicht, als sich im Allgemeinen mittelst irgend welcher anderer m Wurzeln würde erzielen lassen.

Ist $k_s^{(m)}$ der bei der Integration von x^s begangene Fehler, so hat man nach art. 1 $k_0^{(m)} = k_1^{(m)} = \dots = k_{2m+n-1}^{(m)} = 0$,

$$\frac{k_{2m+n}^{(m)}}{u^{2m+n+1}} + \frac{k_{2m+n+1}^{(m)}}{u^{2m+n+2}} + \dots = \frac{f_2(u)}{f(u)} = \frac{1}{f(u)} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{u^{m+s+1}} \int_{-1}^{1} x^{m+s} f(x)\partial x,$$

also

$$k_{2m+n}^{(m)} = \lim_{u=\infty} \frac{u^{m+1} f_2(u)}{\frac{f(u)}{u^{m+n}}} = \frac{1}{A_m} \int_{-1}^{1} x^m f(x)\partial x.$$

Aus (7.) folgt aber weiter, dafs

$$\int_{-1}^{1} x^m f(x)\partial x = \int_{-1}^{1(m+1)} y_1 y_2 \dots y_{m+1} \Pi(x_1, x_2, \dots x_{m+1}) x_1^0 x_2^1 \dots x_{m+1}^m \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{m+1}$$

der Coefficient der höchsten Potenz von x in

$$y \int_{-1}^{1(m+1)} y_1 y_2 \dots y_{m+1} (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{m+1})$$
$$\cdot \Pi(x_1, x_2, \dots x_{m+1}) x_1^0 x_2^1 \dots x_{m+1}^m \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{m+1},$$

also nach der Bezeichnung der Formel (5.) gleich A_{m+1} ist. Folglich hat man allgemein

$$k_{2m+n}^{(m)} = \frac{A_{m+1}}{A_m},$$

also z. B.

$$k_n^{(0)} = Y_0, \qquad k'_{n+2} = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}}{Y_0}, \qquad k''_{n+4} = \frac{\begin{vmatrix} Y_2 & Y_1 & Y_0 \\ Y_3 & Y_2 & Y_1 \\ Y_4 & Y_3 & Y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}}, \qquad \text{etc.}$$

4.

Obgleich die Entwicklungen des vorigen art. für alle in der Praxis vorkommenden Fälle ausreichen dürften, so werde ich doch eine zweite Herleitung derselben nicht übergehen, da die gesuchten Ausdrücke auf einem andern Wege eine vollkommnere Gestalt annehmen.

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion vom $(n+m)^{\text{ten}}$ Grade, so kann man stets setzen

$$f(x) = A P_{n+m}(x) + A_1 P_{n+m-1}(x) + \cdots + A_{n+m-1} P_1(x) + A_{n+m} P_0(x).$$

Sollen nun aus der Entwicklung von $f(x) \lg \frac{x+1}{x-1}$ die Terme $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\cdots \frac{1}{x^m}$ ausfallen, so sieht man aus den früher entwickelten Eigenschaften der Funktionen P, dafs $f(x)$ die Funktionen $P_0, P_1, \ldots P_{m-1}$ nicht enthalten darf, und es ist daher der allgemeinste Ausdruck der Funktion $(n+m)^{\text{ten}}$ Grades, welche jener Bedingung genügt, dieser:

$$f(x) = A P_{n+m}(x) + A_1 P_{n+m-1}(x) + \cdots + A_n P_m(x).$$

Diese Funktion soll ferner für $x = a_1, a_2, \ldots a_n$ verschwinden. Wenn man daher von einem willkürlichen constanten Faktor absieht, so erhält man

$$\text{(1.)} \qquad f(x) = \Sigma \pm P_{n+m}(x) P_{n+m-1}(a_1) P_{n+m-2}(a_2) \ldots P_m(a_n),$$

und es handelt sich darum, diese Determinante durch das Produkt

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

wirklich zu dividiren. Für $n=1$ gelingt dies mittelst der Formel (44.) art. 2. Setzt man nämlich dort $m+1$ statt n und a_1 statt y, so ergiebt sich

$$\text{(2.)} \quad \frac{P_{m+1}(x) P_m(a_1) - P_m(x) P_{m+1}(a_1)}{x-a_1} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{m+1} \sum_0^m \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) P_\nu(a_1).$$

Ich werde jetzt einen Hülfssatz beibringen, durch welchen man von vorstehender Formel zur Division der Gleichung (1.) durch den Ausdruck

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

gelangen kann.

Bezeichnet man die in (1.) rechts stehende Determinante durch $\varDelta$, so bilde man die Funktion

$$\text{(3.)} \quad U = \frac{P_{n+m-1}(a_1)\frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_1)}}{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)} + \frac{P_{n+m-1}(a_2)\frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_2)}}{(x-a_3)\ldots(x-a_n)(x-a_1)} + \cdots$$
$$+ \frac{P_{n+m-1}(a_n)\frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_n)}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})},$$

also

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\,U$$
$$= (x-a_1) P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + (x-a_2) P_{n+m-1}(a_2) \frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_2)} + \cdots$$
$$+ (x-a_n) P_{n+m-1}(a_n) \frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_n)}.$$

Nun ist nach den bekannten Eigenschaften der Determinanten

$$P_{n+m-1}(x) \frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(x)} + P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \cdots$$
$$+ P_{n+m-1}(a_n) \frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_n)} = 0,$$

mithin vorstehendes gleich

$$-\left\{x P_{n+m-1}(x) \frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(x)} + a_1 P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \cdots\right\}.$$

Transformirt man hier die Faktoren der Partialdeterminanten mittelst der Formel (29.) art. 2

$$u P_{n+m-1}(u) = \frac{n+m}{2n+2m-1} P_{n+m}(u) + \frac{n+m-1}{2n+2m-1} P_{n+m-2}(u),$$

so zerstören sich alle Glieder, welche Faktoren von der Form

$$\frac{n+m-1}{2n+2m-1} P_{n+m-2}(u)$$

erhalten, und dieser Ausdruck ergiebt sich gleich

$$-\frac{n+m}{2n+2m-1}\left\{P_{n+m}(x) \frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(x)} + P_{n+m}(a_1) \frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \cdots\right\}$$
$$= -\frac{n+m}{2n+2m-1} \varDelta.$$

Daraus folgt die Formel

$$\text{(4.)} \qquad \frac{\varDelta}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = -\frac{2n+2m-1}{n+m} U.$$

Da die partiellen Determinanten $\frac{\partial \varDelta}{\partial P_{n+m}(a_s)}$ von derselben Art wie $\varDelta$ selber, aber eine Ordnung niedriger sind, so reducirt sich durch (4.) die Herstellung der Quotienten zur Linken auf die von n andern Quotienten derselben Gattung, in denen Zähler und Nenner um eine Ordnung niedriger sind.

Mittelst der Formeln (2.) und (4.) erhält man

$$\frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_1) P_m(a_2)}{(x-a_1)(x-a_2)}$$
$$= \frac{2m+3}{m+2}\left\{P_{m+1}(a_1) \frac{\Sigma \pm P_{m+1}(x) P_m(a_2)}{x-a_2} - P_{m+1}(a_2) \frac{\Sigma \pm P_{m+1}(x) P_m(a_1)}{x-a_1}\right\}$$
$$= \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1 \cdot 2m+3}{m+1 \cdot m+2} \sum_0^m \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \Sigma \pm P_{m+1}(a_1) P_\nu(a_2).$$

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{\Sigma \pm P_{m+3}(x) P_{m+2}(a_1) P_{m+1}(a_2) P_m(a_3)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}$$

$$= \frac{2m+5}{m+3} \Big\{ P_{m+2}(a_1) \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_2) P_m(a_3)}{(x-a_2)(x-a_3)}$$

$$+ P_{m+2}(a_2) \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_3) P_m(a_1)}{(x-a_3)(x-a_1)}$$

$$+ P_{m+2}(a_3) \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_1) P_m(a_2)}{(x-a_1)(x-a_2)} \Big\}$$

$$= \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1 \cdot 2m+3 \cdot 2m+5}{m+1 \cdot m+2 \cdot m+3} \sum_0^m \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \Sigma \pm P_{m+2}(a_1) P_{m+1}(a_2) P_\nu(a_3).$$

Man kann auf diese Weise fortfahren, und es hat nicht die geringste Schwierigkeit, durch Induktion folgende allgemeine Formel nachzuweisen:

$$(5.) \quad f(x) = \Sigma \pm P_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \ldots P_m(a_n)$$

$$= \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1 \cdot 2m+3 \cdots 2m+2n-1}{m+1 \cdot m+2 \cdots m+n} (x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_n)$$

$$\cdot \sum_0^m \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) \ldots P_{m+1}(a_{n-1}) P_\nu(a_n).$$

Es ergiebt sich ferner unter Beibehaltung der frühern Bezeichnung

$$(6.) \quad \begin{cases} f_1(x) = \Sigma \pm R_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \ldots P_m(a_n), \\ f_2(x) = \Sigma \pm Q_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \ldots P_m(a_n), \end{cases}$$

welche Determinanten durch Permutation der an den Funktionalzeichen befindlichen Indices zu bilden sind.

Setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) P_{m+n-2}(a_2) \ldots P_m(a_n) = \mathfrak{A}_m,$$

so erhält man für den bei der Integration von x^{2m+n} begangenen Fehler $k^{(m)}_{2m+n}$, welcher mit dem in art. 3 bestimmten identisch sein muß, in folgender Weise einen neuen Ausdruck. Da nämlich nach art. 1

$$\frac{k^{(m)}_{2m+n}}{u^{2m+n+1}} + \frac{k^{(m)}_{2m+n+1}}{u^{2m+n+2}} + \cdots = \frac{f_2(u)}{f(u)}$$

ist, so folgt, dafs $k^{(m)}_{2m+n}$ die Gränze ist, welcher sich

$$u^{2m+n+1} \frac{Q_m(u) \dfrac{\partial f(x)}{\partial P_m(x)}}{P_{m+n}(u) \dfrac{\partial f(x)}{\partial P_{m+n}(x)}}$$

mit wachsendem u nähert. Man erhält

$$(7.) \quad k^{(m)}_{2m+n} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdots 2m-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots m+n}{1 \cdot 3 \cdots 2m+2n-1} \cdot \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial P_m(x)}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial P_{m+n}(x)}}$$

$$= (-1)^n \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdots 2m-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots m+n}{1 \cdot 3 \cdots 2m+2n-1} \cdot \frac{\mathfrak{A}_{m+1}}{\mathfrak{A}_m}.$$

Bezeichnet man den Coefficienten von x^s in $P_s(x)$, nämlich $\frac{1 \cdot 3 \cdots 2s-1}{1 \cdot 2 \cdots s}$ durch γ_s, und setzt vorstehenden Ausdruck dem in art. 3 gefundenen gleich, so folgt:

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{2(-1)^n}{(2m+1)\gamma_m \gamma_{m+n}} \frac{\mathfrak{A}_{m+1}}{\mathfrak{A}_m},$$

mithin

$$\frac{A_m}{A_0} = \frac{(-1)^{mn} 2^m}{1 \cdot 3 \cdots 2m-1} \cdot \frac{1}{\gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{m-1} \cdot \gamma_n \gamma_{n+1} \cdots \gamma_{m+n-1}} \cdot \frac{\mathfrak{A}_m}{\mathfrak{A}_0}.$$

Es ist ferner $A_0 = 1$, und wie sich leicht findet

$$\mathfrak{A}_0 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} \Pi(a_1, a_2, \ldots a_n),$$

folglich

$$(8.) \quad \mathfrak{A}_m = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)} \cdot 1 \cdot 2 \cdots m}{2^m} \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_m \cdot \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{m+n-1} \Pi(a_1, a_2, \ldots a_n) A_m.$$

Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke für $\mathfrak{A}_m$ und $1 \cdot 2 \cdots m A_m$ ein, indem man letztern aus art. 3 (8.) entnimmt, so folgt

$$\Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) \ldots P_m(a_n)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}}{2^m} \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_m \cdot \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{m+n-1} \Pi(a_1, a_2, \cdots a_n)$$

$$\int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \cdots y_m [\Pi(x_1, x_2, \cdots x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m.$$

Dehnt man diese Formel auf $n+1$ Argumente $x, a_1, \ldots a_n$ aus, so ergiebt sich

$$(9.) \quad \Sigma \pm P_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \ldots P_m(a_n)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}}{2^m} \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_m \cdot \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{m+n} \Pi(a_1, \ldots a_n, x)$$

$$\int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \cdots y_m (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_m) [\Pi(x_1, \ldots x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m,$$

wodurch der Zusammenhang zwischen den Formeln des gegenwärtigen und des vorigen art. dargelegt ist.

Ich werde jetzt noch einen dritten Ausdruck für $f(x)$ herleiten, der ebenfalls eigenthümlicher Natur ist. Integrirt man die Gleichung (1.)

m mal hinter einander nach x von -1 bis x, ebenso m mal nach a_1, a_2, ... a_n von -1 bis a_1, -1 bis a_2, ... -1 bis a_n, und wendet dann in jedem Term der Determinante den Jacobischen Satz

$$\int_{-1}^{x(m)} P_n(x)\,\partial x^m = (x^2-1)^m \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)} \frac{\partial^m P_n(x)}{\partial x^m}$$

an, so erhält man

$$\int_{-1}^{x,\,a_1,\,\dots a_{n\,(m(n+1))}} f(x)\,(\partial x\,\partial a_1 \dots \partial a_n)^m$$

$$= \Sigma \pm \int_{-1}^{x(m)} P_{n+m}(x)\,\partial x^m \int_{-1}^{a_1(m)} P_{n+m-1}(a_1)\,\partial a_1^m \dots \int_{-1}^{a_n(m)} P_m(a_n)\,\partial a_n^m$$

$$= \frac{\Gamma(1)\,\Gamma(2)\dots\Gamma(n+1)}{\Gamma(2m+1)\,\Gamma(2m+2)\dots\Gamma(2m+n)} [(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m$$

$$\Sigma \pm P_{n+m}^{(m)}(x)\,P_{n+m-1}^{(m)}(a_1)\dots P_m^{(m)}(a_n).$$

In dieser Determinante kann man aber zufolge eines bekannten Satzes alle Elemente auf ihren ersten Term reduciren. Schreibt man darauf die gemeinsamen Faktoren aller Elemente derselben Vertikalreihen heraus, so ergiebt sich vorstehendes

$$= c[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m\,\Sigma \pm x^n a_1^{n-1}\dots a_n^0$$

$$= c[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m\,\Pi(a_n, a_{n-1}, \dots a_1, x),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$c = \frac{1}{[2^m\,\Gamma(m+1)]^{n+1}} \cdot \frac{(2m)_0\,(2m+2)_1\,(2m+4)_2\dots(2m+2n)_n}{m_0\,(m+1)_1\,(m+2)_2\dots(m+n)_n},$$

und μ_ν wie üblich den Coefficienten von x^ν in der Entwicklung von $(1+x)^\mu$ bezeichnet. Es ist demnach auch

(10.) $$\Sigma \pm P_{n+m}(x)\,P_{m+n-1}(a_1)\dots P_m(a_n)$$

$$= c\frac{\partial^{m(n+1)}}{(\partial x\,\partial a_1\dots\partial a_n)^m}\{[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m\,\Pi(a_n, a_{n-1}, \dots a_1, x)\},$$

oder wenn man

(11.) $$\frac{\partial^{mn}}{(\partial a_1\,\partial a_2\dots\partial a_n)^m}\{[(a_1^2-1)(a_2^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m\,\Pi(a_n, a_{n-1}, \dots a_1, x)\} = V$$

setzt:

(12.) $$\Sigma \pm P_{m+n}(x)\,P_{m+n-1}(a_1)\dots P_m(a_n) = c\,\frac{\partial^m (x^2-1)^m\,V}{\partial x^m}.$$

Ist nun der Ausdruck V reell oder so beschaffen, dafs er durch Multiplication mit einer constanten Gröfse reell gemacht werden kann,

so schliefst man aus dieser Gleichung nach bekannten Methoden, dafs zum Mindesten m Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell und zwischen den Gränzen -1 und $+1$ gelegen sein müssen. Sind also z. B. die gegebenen n Wurzeln a_1, a_2, ... a_n reell und aufserhalb jener Gränzen belegen, so müssen die übrigen m Wurzeln echte Brüche sein. — Sind ferner alle Wurzeln der Gleichung $V = 0$ reell, so sind es auch alle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und die Anzahl der aufserhalb der Gränzen -1 und 1 liegenden Wurzeln ist in beiden dieselbe.

Hieraus ist es ersichtlich, dafs man gegenwärtiges Verfahren zur angenäherten Integration von $F(x)$ mit grofsem Vortheil z. B. dann wird anwenden können, wenn sich $F(x)$ für n bestimmte, aufserhalb des Integrationsintervalls, und für beliebig viele innerhalb desselben willkürlich vertheilte Werthe von x annähernd oder genau ermitteln läfst.

Anmerkung.

In dem Handexemplar Christoffels, das im Vorwort erwähnt ist, finden sich ziemlich umfangreiche Ausführungen, die auf eine Ausdehnung der Gaufsschen Quadratur auf den Fall unendlicher Grenzen abzielen. Sie beschäftigen sich hauptsächlich mit den Funktionensystemen, die durch die Gleichungen

$$f_n(x) = \frac{e^x x^{1-\alpha}}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{-x} x^{n+\alpha-1}\right) \qquad (\alpha \text{ positiv})$$

und

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{-x^2}\right) \qquad (\text{Hermitesche Polynome})$$

definiert sind. Diese Ausführungen sind in die Abhandlung Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues (XXVIII) übergegangen und dort verallgemeinert. Über die Verwendung dieser Funktionen zur Ausführung der ins Unendliche erstreckten Integration finden sich nur kurze Andeutungen.

M.

III.

Ueber die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55, 1858, S. 281—299.)

Eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ohne zweiten Theil zwischen y und der unabhängigen Veränderlichen x hat bekanntlich stets n Integrale $y_1, y_2, \dots y_n$, der Beschaffenheit, dafs es unmöglich ist, n Constanten $a_1, a_2, \dots a_n$ zu bestimmen, welche den Ausdruck:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n = H$$

identisch zu Null machen, ohne dafs zu gleicher Zeit alle diese Constanten verschwinden; es ist in diesem Falle H das complete Integral jener Differentialgleichung. Läfst sich dagegen H durch constante Werthe von $a_1, a_2, \dots a_n$, die alle oder zum Theil von Null verschieden sind, zum Verschwinden bringen, so reichen die Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ zur Darstellung des completen Integrals nicht aus. — Ganz ähnliche Verhältnisse finden bei den linearen Differenzengleichungen statt.

Hat man demnach n Integrale einer solchen Gleichung gefunden, so mufs man untersuchen, ob zwischen denselben eine lineare homogene Relation existirt, oder nicht, ob man also aus ihnen das complete, oder nur ein partikulares Integral zusammensetzen kann. Die Entscheidung dieser Frage hängt von analytischen Kriterien ab, welche im Folgenden hergeleitet werden sollen.

Wenn ferner durch die Anwendung dieser Kriterien gefunden ist, dafs zwischen gegebenen Functionen eine lineare homogene Relation besteht, so kann man verlangen, dafs dieselbe wirklich aufgestellt werde. Dabei zeigt es sich, dafs die Werthe der Coefficienten, mit welchen die einzelnen Functionen in dieser Relation behaftet sind, im Allgemeinen von den Grenzen abhängen, zwischen denen die unabhängige Veränderliche liegt, und für andere Grenzen ganz verschieden ausfallen. Die folgende Untersuchung wird lehren, dafs auch die Bestimmung dieser Grenzen nach allgemeinen Prinzipien von Statten geht, so dafs

für die beiden Hauptfragen, auf welche man auf diesem Gebiete stöfst, leitende Grundsätze vorhanden sind.

Um die zu dieser Untersuchung erforderlichen Unterscheidungen treffen zu können, ist es nothwendig, den Begriff der Function in folgender Weise zu erweitern.

Es bezeichne x eine Veränderliche, welche *jeden reellen Werth* annehmen kann, m eine zweite Veränderliche, welche *nur positive und negative ganzzahlige Werthe* annimmt. Ist nun eine Function $f(x)$ zwischen den willkürlichen reellen Grenzen a und b gegeben, so stellt die Gleichung $y = f(x)$ eine Curve dar, welche von $x = a$ bis $x = b$ in gegebener Weise verläuft. Die Gleichung $y = f(m)$ dagegen stellt vermöge der über m getroffenen Bestimmung ein System von Punkten dar, deren Abscissen die zwischen den Grenzen a und b enthaltenen ganzen Zahlen sind. Sowie nun $f(x)$ eine Function von x ist, weil es für jedes zwischen a und b liegende x einen bestimmten Werth hat, so ist $f(m)$ eine Function von m, weil es für jedes zwischen a und b liegende m einen bestimmten Werth hat. Da man aber durch jenes System von Punkten beliebig viele unter einander nicht im Mindesten verwandte Curven $y = f_1(x)$ legen kann, so dafs, für jedes zwischen a und b liegende m, $f_1(m) = f(m)$ ist, so sieht man, dafs die Natur dieses Systems von Punkten, nämlich die Function $f(m)$ ganz unabhängig ist von den Werthen, welche $f(x)$ für die nicht ganzzahligen Abscissen annimmt. Man mufs also bei der Definition der Function von m die Vorstellung, dafs sie in einem Ausdrucke enthalten sei, der auch für nicht ganzzahlige Werthe der Veränderlichen gewisse Werthe hat, als ganz unwesentlich fallen lassen, und sich diese Function entweder graphisch durch ein auf bestimmte Axen bezogenes System von Punkten, oder was genau dasselbe ist, numerisch durch eine Tabelle gegeben denken, in welcher die eine Colonne diejenigen Werthe enthält, welche m annehmen kann, während die andere Colonne jedesmal den zugehörigen Functionalwerth liefert.

Da nach dem Gesagten unzählig viele Functionen von x dieselbe Function von m enthalten, so kann durch eine Function von m ohne Hinzufügung weiterer Bedingungen keine einzige Function von x bestimmt sein. Aber es ist wesentlich zu bemerken, dafs man von den Functionen von m zu den Functionen von x übergehen kann. Hängt nämlich $f(m)$ noch von einer willkürlichen Constanten ε in der Weise ab, dafs $f(m) = F(m\varepsilon)$ ist, wo ε nicht anders als in der Verbindung $m\varepsilon$ vorkommt, so setze man $m\varepsilon = x$; dann entspricht der Aenderung von m um eine Einheit die von x um ε, d. h. um eine Gröfse, welche vermöge ihrer Willkürlichkeit auf jeden Grad von Kleinheit gebracht werden kann.

Auf dieselbe Art, wie die Functionen von m, lassen sich auch Functionen einer Veränderlichen m' definiren, welche sich nicht mehr wie m um constante, sondern um ganz beliebige Differenzen ändert. Aber da die Werthe, welche m' annehmen kann, eine bestimmte Aufeinanderfolge zeigen, so kann man m', und folglich auch jede Function von m' als Function von m betrachten.

Sind $n+1$ Functionen von m gegeben, $f(m), f_1(m), \dots f_n(m)$, so kann man stets eine lineare homogene Relation $Af(m) + A_1 f_1(m) + \cdots + A_n f_n(m) = 0$ aufstellen, in welcher mindestens einer der Coefficienten $A, A_1, \dots A_n$ von Null verschieden ist, und welche für bestimmte n aufeinanderfolgende Werthe von m, etwa für $m = m_0$, $m_0+1, \dots m_0+n-1$ gültig ist. In dem besonderen Falle, wo diese nämliche Relation auch noch für Werthe $m = m_0-1, m_0-2, \dots m_0-q$; $m_0+n, m_0+n+1, \dots m_0+n+p$ stattfindet, nenne ich die Functionen $f(m), f_1(m), \dots f_n(m)$ *linearabhängig für die Werthe* $m = m_0 - q$, $m_0 - q + 1, \dots m_0 + n + p$. Die Anzahl der Werthe von m, für welche gegebene Functionen von m linearabhängig sind, kann demnach nie kleiner sein, als die Anzahl der Functionen. Es ist nach dem Vorangeschickten kaum nöthig zu bemerken, daſs die Eigenschaft der Linearabhängigkeit sich nicht auf die Functionen $f(x), f_1(x), \dots f_n(x)$ bezieht, in welchen jene enthalten sind, sondern nur auf die besondern Werthe, welche diese Functionen für die angegebenen ganzzahligen Werthe von x annehmen. — Sind die gegebenen Functionen in den Intervallen $m = m'$, $m'+1, \dots m''-1$; $m = m'', m''+1, \dots m'''-1$; $\dots m = m^i, m^i+1, \dots m^k-1$ linearabhängig, während die Relationen, durch welche diese Abhängigkeit ausgedrückt wird, in den einzelnen Intervallen verschieden sind, so nenne ich die Functionen wieder linearabhängig für die Werthe $m = m', m'+1, \dots m^k - 1$.

Wenn die gegebenen Functionen in einem bestimmten Intervall den Bedingungen der Linearabhängigkeit nicht genügen, so nenne ich sie *linearunabhängig für die in jenem Intervall enthaltenen Werthe von* m.

Es ist nach dem oben Angedeuteten einleuchtend, wie diese Definitionen auf den Fall einer continuirlichen Veränderlichen x übertragen werden. Will man dieselben benutzen, um zu untersuchen, ob und innerhalb welcher Grenzen die Functionen $f(m), f_1(m), \dots f_n(m)$ linearabhängig sind, so muſs man zunächst die Coefficienten $A, A_1, \dots A_n$ so bestimmen, daſs die Gleichung $Af(m) + A_1 f_1(m) + \cdots + A_n f_n(m) = 0$ für $m = m_0, m_0+1, \dots m_0+n-1$ stattfindet, wo m_0 irgend einen besonderen Werth von m vorstellt. Ist dies geschehen, so muſs man versuchen, ob diese Gleichung auch noch für einen der Werthe $m = m_0 - 1$, m_0+n besteht, und wenn eins von beiden der Fall ist, weiter versuchen, ob sie auch noch für folgende Werthe von m gültig bleibt. Man gelangt alsdann von selbst zu den Grenzen, innerhalb derer die Linearabhängigkeit stattfindet. Besteht diese Relation aber nicht mehr für $m = m_0 - 1$, $m_0 + n$, so muſs man die Coefficienten $A, A_1, \dots A_n$ von Neuem für einen andern Werth von m_0 bestimmen, und dasselbe Verfahren wiederholen. Um dieses grade in den wichtigsten Fällen unbrauchbare Verfahren überflüssig zu machen, dienen die im Folgenden zu entwickelnden Kriterien für die Linearabhängigkeit der Functionen von m.

1.

Seien $n+1$ Functionen $f(m), f_1(m), \dots f_n(m)$ gegeben, welche für die Werthe $m = m_0, m_0+1, \dots m_0+n+p$ linearabhängig sind. Dann muſs $p \gtreqless 0$ sein. Es sind nun drei Fälle möglich:

1) entweder besteht zwischen diesen Functionen nur eine einzige lineare homogene Relation, welche für alle jene Werthe von m gültig ist;

2) oder es bestehen mehrere dieser Relationen, für die nämlichen Werthe von m;

3) oder endlich zerfällt jene Reihe von Werthen in $q+r$ Intervalle (deren jedes aus mehr als n Werthen besteht) von zweierlei Art, so daſs in den q Intervallen der ersten Art eine einzige lineare homogene Relation existirt, während in den r Intervallen der zweiten Art die gegebenen Functionen durch mehr als eine dieser Relationen mit einander verbunden sind. Hierin ist der Fall mitbegriffen, wo eine der Zahlen q oder r gleich Null ist.

Im ersten Falle hat man, wenn m einen der Werthe $m_0, m_0+1, \dots m_0+p$ bedeutet, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &Af(m) + A_1 f_1(m) + \cdots + A_n f_n(m) = 0, \\ &Af(m+1) + A_1 f_1(m+1) + \cdots + A_n f_n(m+1) = 0, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &Af(m+n) + A_1 f_1(m+n) + \cdots + A_n f_n(m+n) = 0. \end{aligned}$$

Setzt man demnach:

$$\Sigma \pm f(m) f_1(m+1) \dots f_n(m+n) = \Delta(m), \tag{1.}$$

$$\frac{\partial \Delta(m)}{\partial f_\mu(m+n)} = \Delta_\mu(m), \tag{2.}$$

so folgt aus den n ersten jener Gleichungen für ein unbestimmtes ω:

$$A_\mu = \omega \Delta_\mu(m). \tag{3.}$$

Da nun der Voraussetzung gemäſs wenigstens einer der Coefficienten A_μ von Null verschieden ist, so folgt, *daſs in unserm Falle* *wenigstens eine der Gröfsen $\Delta_\mu(m)$ für jedes der Reihe $m_0, m_0+1, \dots m_0+p+1$ angehörige m von Null verschieden ist, während die Determinante $\Delta(m)$ für die Werthe $m = m_0, m_0+1, \dots m_0+p$ verschwindet.*

Im zweiten Falle hat man für jedes der Reihe $m_0, m_0+1, \dots m_0+p+n$ angehörige m wenigstens zwei von einander unabhängige Relationen:

$$Af(m) + A_1 f_1(m) + \cdots + A_n f_n(m) = 0,$$
$$Bf(m) + B_1 f_1(m) + \cdots + B_n f_n(m) = 0,$$

woraus wiederum für die Werthe $m = m_0, m_0+1, \dots m_0+p$ die Gleichung $\Delta(m) = 0$ folgt. Da aber der Voraussetzung gemäfs die Quotienten $\frac{B}{A}, \frac{B_1}{A_1}, \dots \frac{B_n}{A_n}$ wenigstens zum Theil von einander verschieden sind, so erhält man, wenn aus beiden Gleichungen eine der Functionen f_μ eliminirt wird, stets eine Relation derselben Art zwischen den übrigen Functionen, in welcher wenigstens ein Coefficient von Null verschieden ist. Daraus folgt, *dafs man in diesem Falle nothwendig die Gleichungen $\Delta_\mu(m) = 0$ hat,* wo μ jede der Zahlen $0, 1, \dots n$, und m einen beliebigen der Werthe $m_0, m_0+1, \dots m_0+p+1$ vorstellt. Bestehen mehr als zwei Relationen zwischen den gegebenen Functionen unabhängig von einander, so erhält man aufser den Gleichungen $\Delta(m) = 0$, $\Delta_\mu(m) = 0$ noch weitere Formeln, welche für unsern Zweck jedoch kein näheres Interesse haben.

Was *den dritten Fall* betrifft, so sieht man leicht, dafs, wenn alle in den unentwickelten Determinanten $\Delta(m)$ oder $\Delta_\mu(m)$ vorkommenden Argumente demselben Intervall angehören, sich die in den beiden ersten Fällen gegebenen Erörterungen mit den nöthigen Modificationen wörtlich wiederholen lassen. Liegen diese Argumente dagegen in zwei aufeinanderfolgenden Intervallen, so lassen sich in Bezug auf die in diesen Intervallen stattfindenden Relationen sehr verschiedene Voraussetzungen machen, von denen hier nur eine einzige discutirt werden soll. Nimmt man an, dafs von den linearen Relationen, welche in den einzelnen Intervallen stattfinden, keine auch im andern gültig ist, so kann man augenscheinlich aus diesen Relationen keine allgemeingültigen Gleichungen herleiten, in welchen aus beiden Intervallen bestimmte Functionalwerthe, aber aufser diesen keine anderen Gröfsen mehr vorkommen. *Man kann daher über den Werth von $\Delta(m)$ oder $\Delta_\mu(m)$ im Allgemeinen gar nichts festsetzen, sobald die in ihnen vorkommenden Argumente verschiedenen Intervallen angehören; liegen dagegen diese Argumente in demselben Intervall, so ist auf jeden Fall $\Delta(m) = 0$, und es sind aufserdem alle $\Delta_\mu(m)$ gleich Null, oder wenigstens ein Theil derselben von Null*

verschieden, jenachdem das Intervall von der zweiten oder der ersten Art ist. Die Anzahl der Werthe von m, für welche die in $\Delta(m)$ vorkommenden Argumente zwei aufeinanderfolgenden Intervallen angehören können, ist gleich n, und kann diese Zahl nicht übersteigen, da jedes Intervall mehr als n Argumente umfafst. *Sind daher $n+1$ Functionen linearabhängig, so kann es vorkommen, dafs n, aber nicht mehr aufeinanderfolgende Werthe ihrer Determinante $\Delta(m)$ von Null verschieden sind. Ist umgekehrt $\Delta(m)$ für mehr als n aufeinanderfolgende Werthe von m von Null verschieden, so können jene Functionen nicht für alle Werthe von m linearabhängig sein.*

2.

Ich gehe jetzt von der Voraussetzung aus, dafs $\Delta(m)$ für die Werthe $m = m_0, m_0+1, \dots m_0+p$ verschwindet, dagegen für die Werthe $m = m_0 - 1, m_0+p+1$ von Null verschieden ist. Dann gilt der Satz, *dafs die Functionen $f, f_1, \dots f_n$ für die Werthe $m = m_0, m_0+1, \dots m_0+p+n$ linearabhängig sind.*

Es soll zunächst bewiesen werden, dafs dieser Satz für $n+1$ Functionen gilt, wenn er für n Functionen stattfindet. Setzt man:

$$\varphi(m) = Af(m) + A_1 f_1(m) + \cdots + A_n f_n(m), \tag{1.}$$

und nimmt für die Coefficienten $A, A_1, \dots A_n$ bestimmte Zahlen, welche den Gleichungen:

$$\varphi(m') = 0, \quad \varphi(m'+1) = 0, \dots \varphi(m'+n-1) = 0 \tag{2.}$$

genügen, wo m' irgend einen besondern Werth von m bedeutet, so erhält man aus den Gleichungen (2.) und einer der folgenden:

$$Af(m'-1) + A_1 f_1(m'-1) + \cdots + A_n f_n(m'-1) = \varphi(m'-1),$$
$$Af(m'+n) + A_1 f_1(m'+n) + \cdots + A_n f_n(m'+n) = \varphi(m'+n),$$

die Gleichungen:

$$A_\mu \Delta(m'-1) = (-1)^n \varphi(m'-1) \Delta_\mu(m'), \tag{3.}$$
$$A_\mu \Delta(m') = \varphi(m'+n) \Delta_\mu(m'). \tag{4.}$$

Ist nun m' eine der Zahlen $m_0, m_0+1, \dots m_0+p$, so verschwindet in (4.) der Voraussetzung zufolge die linke Seite, und man hat:

$$\varphi(m'+n) \Delta_\mu(m') = 0, \tag{5.}$$

so dafs entweder $\varphi(m'+n) = 0$ ist, oder sämmtliche $\Delta_\mu(m')$ verschwinden. Es zerfällt daher im Allgemeinen die Reihe $m_0, m_0+1, \dots m_0+p$ in Intervalle von zweierlei Art; in denen der ersten Art ist wenigstens eine der Gröfsen $\Delta_\mu(m')$ von Null verschieden, und es sind daher, wie behauptet, die Functionen $f, f_1, \ldots f_n$ in diesem Intervall linearabhängig. In den Intervallen der zweiten Art, in welchen man die $n+1$ Relationen $\Delta_\mu(m') = 0$ hat, sind je n der gegebenen Functionen linearabhängig vermöge der Voraussetzung, dafs obiger Satz für n Functionen gültig sei. In der That haben die Determinanten $\Delta_\mu(m)$ dieselbe Form wie $\Delta(m)$, während sie eine Function weniger enthalten.

In einem Intervall der ersten Art kann nur eine einzige lineare homogene Relation zwischen den gegebenen Functionen stattfinden; in einem der zweiten Art dagegen bestehen in Folge der gemachten Voraussetzungen $n+1$ Relationen, deren jede von einer Function frei ist. Eine Anzahl von $n+1$ Relationen dieser Form kann sich nicht aus einer einzigen Relation herleiten lassen, *es bestehen daher in den Intervallen der zweiten Art mindestens zwei lineare Relationen zwischen den gegebenen Functionen unabhängig von einander.*

Da $\Delta(m_0 - 1) = (-1)^n \{f(m_0-1)\Delta_0(m_0) + f_1(m_0-1)\Delta_1(m_0) + \cdots\}$ von Null verschieden ist, so muß von den Gröfsen $\Delta_\mu(m_0)$, also auch von den zu ihnen proportionalen Größen A_μ, eine wenigstens von Null verschieden sein. Die Werthe $m_0, m_0+1, \ldots m_0+n$ gehören also zu einem Intervall der ersten Art, in welchem nur eine einzige Relation $\varphi(m) = 0$ stattfindet; und diese Gleichung kann wegen (3.) nicht auch für den Werth $m = m_0 - 1$ bestehen. — Gehört ferner der Werth $m_0 + p$ zu einem Intervall der ersten Art, so besteht die in demselben stattfindende lineare Relation wegen (4.) auch für den Werth $m' = m_0 + p + n$, während sie unmöglich für den folgenden Werth von m' stattfinden kann. Liegt jener Werth in einem Intervall der zweiten Art, so hat man der Voraussetzung gemäfs mindestens zwei von einander unabhängige lineare Relationen $\psi(m) = 0$, $\chi(m) = 0$, welche für die Werthe $m_0 + p + n - 1, m_0 + p + n - 2, \ldots$ stattfinden. Für dieselben Werthe besteht also auch die Relation $\alpha\psi(m) + \beta\chi(m) = 0$; in welcher man die Zahlen α und β so bestimmen kann, dafs dieselbe auch für $m = m_0 + p + n$ stattfindet. Auch diese Relation kann unmöglich für $m = m_0 + p + n + 1$ stattfinden, wie man leicht sieht, wenn man in (4.) $m' = m_0 + p + 1$ setzt.

Es bleibt nur noch übrig, obigen Satz für zwei Functionen nachzuweisen, da er alsdann auf jede Anzahl von Functionen ausgedehnt werden kann. Dieser Beweis ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Vorangehenden, da nämlich in unserem Falle $\Delta_0(m) = -f_1(m)$, $\Delta_1(m) = f(m)$ ist, so besteht in den Intervallen der zweiten Art jede beliebige lineare Relation zwischen den gegebenen Functionen, während für die Intervalle der ersten Art die Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen bereits nachgewiesen ist. Auch wiederholen sich die Bemerkungen,

durch welche die Grenzen nachgewiesen wurden, innerhalb deren die Linearabhängigkeit nothwendig stattfindet.

Aus diesen Beweisen ergeben sich nun weiter folgende Sätze:

1) Damit gegebene $n+1$ Functionen $f(m), f_1(m), \ldots f_n(m)$ für alle Werthe von m linearunabhängig sind, ist erforderlich und hinreichend dafs ihre Determinante $\Delta(m)$ für alle Werthe von m von Null verschieden ist.

2) Ist die Anzahl aufeinanderfolgender Werthe von m, für welche $\Delta(m)$ von Null verschieden ist, nie gröfser als n, so sind die Functionen $f(m), f_1(m), \ldots f_n(m)$ für alle Werthe von m linearabhängig.

An diese Sätze, welche in Verbindung mit den im Anfange bewiesenen die vollständigen Kriterien für die Linearabhängigkeit oder Unabhängigkeit gegebener Functionen enthalten, schliefsen sich folgende Bemerkungen, die zur Bestimmung der Grenzen dienen, innerhalb welcher die Linearabhängigkeit im Allgemeinen durch verschiedene lineare Relationen ausgedrückt wird.

3) Sind zwei Intervalle, in welchen $\Delta(m)$ verschwindet, durch n oder weniger Werthe von m getrennt, für welche $\Delta(m)$ von Null verschieden ist, so kann keine lineare Relation zwischen den gegebenen Functionen, welche in dem einen Statt findet, auch im andern gültig sein.

Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem vorhin geführten Beweise. Ist ferner m' der erste Werth von m in einem Intervall der ersten Art, $m'-1$ der letzte in einem von der zweiten Art, und $\varphi(m) = 0$ die in jenem stattfindende lineare Relation, welche also für $m = m', m'+1, \ldots$ besteht, so ist in (3.) $\Delta(m'-1) = 0$, dagegen von den Größen $\Delta_\mu(m')$ mindestens eine von Null verschieden, also nothwendig $\varphi(m'-1) = 0$. Da ferner in der Gleichung $A_\mu \Delta(m'-2) = (-1)^n \cdot \varphi(m'-2) \Delta_\mu(m'-1)$ beide Seiten unabhängig von $\varphi(m'-2)$ verschwinden, so kann dieser Wert von Null verschieden sein, so daß also die Relation $\varphi(m) = 0$ nothwendig für $m = m'-1$, aber nicht auch für $m = m'-2$ stattfindet. — Ist ferner $m'+1$ der erste Werth in einem Intervall der zweiten Art, m' der letzte in einem von der ersten Art, und $\varphi(m) = 0$ die in letzterem stattfindende lineare Relation, so ist nach dem vorhin Bewiesenen $\varphi(m'+n) = 0$; aber da in der Gleichung

$$A_\mu \Delta(m'+1) = \varphi(m'+n+1) \Delta_\mu(m'+1)$$

beide Seiten unabhängig von $\varphi(m'+n+1)$ verschwinden, so kann dies von Null verschieden sein.

4) Sind also zwei Intervalle der ersten Art durch eines von der zweiten Art geschieden, so ist die lineare Relation, welche in dem einen stattfindet, nicht nothwendig auch in dem andern gültig.

5) Ist ein Intervall der ersten Art, welches die Werthe $m = m_0$, $m_0 + 1, \dots m'_0$ umfaßt, durch zwei andere von der zweiten Art begrenzt, so findet in ihm eine einzige lineare Relation statt, welche für die Werthe $m = m_0 - 1, m_0, \dots m'_0 + n$, aber nicht nothwendig auch noch für die Werthe $m_0 - 2$ und $m'_0 + n + 1$ gültig ist.

Um diese Sätze auf ein Beispiel anzuwenden, nehme ich an, daſs: $\Delta(m) = 0$ ist für jedes m, und daſs sämmtliche $\Delta_\mu(m)$ verschwinden, wenn m einer der Gruppen:

$$m_1, m_1 + 1, \dots m_1' - 1; \quad m_2, m_2 + 1, \dots m_2' - 1;$$
$$\dots m_\mu, \; m_\mu + 1, \dots m_\mu' - 1$$

angehört, während für jeden anderen Werth von m wenigstens eine jener Gröſsen von Null verschieden ist; und sei $m_1 < m_1' < m_2 < m_2' \dots < m_\mu < m_\mu'$. Dann findet zwischen den $n + 1$ Functionen eine einzige lineare Relation statt für $m = -\infty, \dots m_1 + n - 1$; eine andere für $m = m_1' - 1, m_1', \dots m_2 + n - 1$; eine dritte für $m = m_2' - 1$, $m_2' \dots m_3 + n - 1$; u. s. f.; und endlich eine im Allgemeinen von jenen verschiedene für $m = m_\mu' - 1, m_\mu', \dots \infty$. Dagegen sind jede beliebige n von den gegebenen Functionen linearabhängig für die Werthe $m = m_1$, $m_1 + 1, \dots m_1' + n - 2$; $m = m_2, m_2 + 1, \dots m_2' + n - 2$; $\dots m = m_\mu$, $m_\mu + 1, \dots m_\mu' + n - 2$, und es finden in den einzelnen Intervallen im Allgemeinen verschiedene lineare Relationen statt.

3.

Ich werde jetzt die lineare Differenzengleichung:

(1.) $$P(m)f(m + n) + P_1(m)f(m + n - 1) + \dots + P_n(m)f(m) = 0$$

untersuchen, in welcher die Coefficienten $P, P_1, \dots P_n$ analytische Functionen von m sind, und dabei die erlaubte Voraussetzung machen, daſs für keinen Werth von m sämmtliche Coefficienten verschwinden. Ist dies nämlich nicht der Fall, so darf man (1.) nur durch eine Function $\varphi(m)$ dividiren, welche nur dann verschwindet, wenn sämmtliche Coefficienten verschwinden, und sich jedesmal in derselben Weise der Null nähert, wie derjenige Coefficient, welcher von allen am langsamsten gegen Null convergirt. Ebenso werde ich voraussetzen, daſs für keinen Werth von m einer oder mehrere dieser Coefficienten unendlich groſs werden.

Es handelt sich bei dieser Untersuchung, wie im Folgenden bei den linearen Differentialgleichungen, wesentlich darum, genau festzusetzen, welchen Grad von Allgemeinheit das complete Integral einer solchen Gleichung im Allgemeinen, und welchen dasselbe unter ge-

wissen Bedingungen erreichen kann. Dieser Grad hängt ab von der Anzahl linearunabhängiger Functionen, durch welche jener Gleichung und gleichzeitig etwaigen Bedingungen genügt wird.

Das allgemeinste Verfahren zur Integration von (1.) besteht darin, daſs man die Werthe $f(m_0), f(m_0 + 1), \dots f(m_0 + n - 1)$ der gesuchten Function als willkürlich gegeben betrachtet, und dann mittelst (1.) die Werthe $f(m_0 + n), f(m_0 + n + 1), \dots f(m_0 + n + p)$ successive bestimmt. Ist dies geschehen, und giebt man der Function $f(m)$ für alle übrigen Werthe von m einen willkürlichen Verlauf, so sage ich der Kürze wegen, daſs sie der Gleichung (1.) für die Werthe:

(a.) $$m = m_0, \; m_0 + 1, \dots m_0 + p$$

genügt.

Sind n Functionen $f_1(m), f_2(m), \dots f_n(m)$ gegeben, welche der Gleichung (1.) für die Werthe (a.) genügen, so hat man demnach für die nämlichen Werthe von m:

(2.) $$\begin{cases} P(m)f_1(m + n) + P_1(m)f_1(m + n - 1) + \dots + P_n(m)f_1(m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P(m)f_n(m + n) + P_1(m)f_n(m + n - 1) + \dots + P_n(m)f_n(m) = 0, \end{cases}$$

und wenn man hieraus die Coefficienten $P_1, P_2, \dots P_{n-1}$ eliminirt, nach der frühern Bezeichnung:

(3.) $$P(m)\Delta_0(m + 1) = (-1)^n P_n(m)\Delta_0(m).$$

Mittelst dieser Gleichung läſst sich nun zunächst leicht nachweisen, daſs unter gewissen Umständen n linearunabhängige Integrale der Gleichung (1.) existiren. Setzt man nämlich voraus, daſs die Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$ für die Werthe (a.) von Null verschieden sind, so kann man die willkürlichen Werthe $f_1(m_0), f_1(m_0 + 1), \dots$ $f_1(m_0 + n - 1), f_2(m_0)$ etc. immer so annehmen, daſs $\Delta_0(m_0)$ von Null verschieden ist. Da somit auch $\Delta_0(m_0 + 1), \Delta_0(m_0 + 2), \dots \Delta_0(m_0 + p + 1)$ von Null verschieden sind, so folgt nach dem Frühern, daſs die Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ für die Werthe:

(b.) $$m = m_0, \; m_0 + 1, \dots m_0 + p + n$$

linearunabhängig sind.

Ich werde jetzt umgekehrt beweisen, daſs für alle Werthe von m, für welche n linearunabhängige Functionen der Gleichung (1.) genügen sollen, die Gröſsen $P(m)$ und $P_n(m)$ von Null verschieden sein müssen.

Sind die vorhin gegebenen Functionen für die Werthe (b.) linearunabhängig, so ist $\Delta_0(m)$ von Null verschieden für $m = m_0, m_0 + 1, \dots$ $m_0 + p + 1$, also in der ganzen Ausdehnung der Gleichung (3.) weder

$\varDelta_0(m)$ noch $\varDelta_0(m+1)$ gleich Null. Es ist daher nicht möglich, dafs eine der Gröfsen $P(m)$ und $P_n(m)$, aber nicht zugleich die andere verschwinde; und umgekehrt würde, wenn dies der Fall wäre, eine der Gröfsen $\varDelta_0(m)$ und $\varDelta_0(m+1)$ gleich Null sein, also eine Linearabhängigkeit zwischen den gegebenen Functionen bestehen. Die Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$ können aber auch für keinen der Werthe (a.) zugleich verschwinden. Setzt man nämlich $\frac{\partial \varDelta_0(m)}{\partial f_\mu(m)} = \varDelta_{0,\mu}(m)$, woraus

$$\varDelta_0(m) = f_1(m)\varDelta_{0,1}(m) + f_2(m)\varDelta_{0,2}(m) + \cdots,$$
$$(-1)^{n-1}\varDelta_0(m+1) = f_1(m+n)\varDelta_{0,1}(m) + f_2(m+n)\varDelta_{0,2}(m) + \cdots$$

folgt, so ergiebt sich unter der Voraussetzung $P(m) = 0$ und $P_n(m) = 0$ aus den Gleichungen (2.), dafs entweder sämmtliche Coefficienten der Gleichung (1.), oder sämmtliche Gröfsen $\varDelta_{0,\mu}(m)$ verschwinden. Das Erstere ist gleich im Anfange ausgeschlossen worden; wäre das Andere der Fall, so hätte man auch $\varDelta_0(m) = 0$, $\varDelta_0(m+1) = 0$, woraus der Voraussetzung zuwider die Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen für die Werthe von $m, m+1, \ldots m+n$ folgt.

Bezeichnet man demnach durch m' die besonderen Werthe von m, für welche einer der Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$, oder beide zugleich verschwinden, so hat man folgende Regeln:

1) Gegebene n Functionen, welche der Gleichung (1.) für einen der Werthe m' genügen, können nicht linearunabhängig sein.

2) Will man die Gleichung (1.) durch n linearunabhängige Functionen integriren, so ist dazu erforderlich, dafs für keinen der Werthe m' jede dieser Functionen der Gleichung (1.) Genüge leiste.

3) Hat man umgekehrt n linearunabhängige Functionen, welche der Gleichung (1.) in bestimmten Intervallen genügen, so kann es unter den Werthen m' keinen geben, für welchen sämmtliche Functionen der Gleichung (1.) genügen.

4) Stellt man bei der Integration der Gleichung (1.) die Bedingung, dafs das gesuchte Integral jener Gleichung auch noch für einen der Werthe m' genüge, so giebt es keine n, sondern höchstens $n-1$ linearunabhängige Functionen, welche diesen Bedingungen genügen, und ihre Anzahl kann durch weitere Bedingungen auch noch weiter reducirt werden.

Aus diesen Sätzen folgt, dafs bei der Integration der Gleichung (1.) die erste Aufgabe darin besteht, die besonderen Werthe m' zu ermitteln. Dadurch zerfällt die Reihe der Werthe von m in Intervalle, zwischen denen die Werthe m' eingeschaltet sind; in jedem einzelnen Intervall mufs die Integration besonders vorgenommen werden.

Hieran schliefst sich der bekannte Satz, dafs die Gleichung (1.) nie mehr als n linearunabhängige Integrale haben kann. Denn genügen die Functionen $f, f_1, \ldots f_n$ jener Gleichung für die Werthe (a.) so folgt $\varDelta(m) = 0$, woraus sich weiter ergiebt, dafs diese Functionen für die Werthe (b.) linearabhängig sind. Bilden die Werthe (a.) eines der eben beschriebenen Intervalle, und sind in demselben die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ linearunabhängig, so sind $\varDelta_0(m_0)$, $\varDelta_0(m_0+1), \ldots \varDelta_0(m_0+p+1)$ von Null verschieden, und es besteht für die Werthe (b.) eine einzige lineare Relation:

$$Af(m) + A_1 f_1(m) + \cdots + A_n f_n(m) = 0,$$

in welcher A von Null verschieden sein mufs. Denn, wäre $A = 0$, so müfsten wegen der Linearunabhängigkeit von $f_1, f_2, \ldots f_n$ auch die übrigen Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_n$ verschwinden. Es besteht also für sämmtliche Werthe (b.) eine einzige Relation von der Form;

$$f(m) = a_1 f_1(m) + a_2 f_2(m) + \cdots + a_n f_n(m).$$

Genügen die Functionen $f, f_1, \ldots f_n$ der Gleichung (1.) in mehreren aufeinanderfolgenden Intervallen, in denen $f_1, f_2, \ldots f_n$ linearunabhängig sind, so kann für einen beliebigen der zwischen jenen Intervallen eingeschalteten Werthe m' wenigstens eine der letzteren Functionen der Gleichung (1.) nicht Genüge leisten, also $\varDelta(m')$ nicht gleich Null sein.

Sind daher zwischen zwei dieser Intervalle n oder weniger Werthe m' eingeschaltet, so mufs die in dem einen stattfindende lineare Relation von der im andern bestehenden gänzlich verschieden sein (§. 2. 3).

4.

Die noch rückständige Untersuchung von Functionen, welche von einer stetigen Veränderlichen abhängen, erledigt sich aus dem Vorangehenden mittelst der identischen Gleichung:

$$(1.) \quad \Sigma \pm f(m) f_1(m+1) \ldots f_n(m+n) = \Sigma \pm f(m) \varDelta f_1(m) \ldots \varDelta^n f_n(m),$$

in welcher nach der gewöhnlichen Bezeichnung von Differenzen:

$$\varDelta^i f_k(m) = f_k(m+i) - i f_k(m+i-1) + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} f_k(m+i-2) - \cdots + (-1)^i f_k(m)$$

ist. Dieselbe wird einfach dadurch bewiesen, dafs man auf der rechten Seite für die Differenzen ihre Entwicklungen setzt, und dann durch Addition von Verticalreihen reducirt. Aus (1.) ergiebt sich:

$$(2.) \qquad \varDelta_\mu(m) = \frac{\partial \varDelta(m)}{\partial \varDelta^n f_\mu(m)}.$$

Nun wird an den frühern Betrachtungen gar nichts geändert, wenn man überall statt der Argumente $m, m+\mu$ der einzelnen Functionen dasselbe Vielfache derselben $m\varepsilon, (m+\mu)\varepsilon$ einführt, also auch nicht, wenn man $m\varepsilon = x$, $\varepsilon = \partial x$ setzt. Dann ist:

$$\Delta^i f_k(m\varepsilon) = \partial x^i f_k^{(i)}(x),$$

$$\frac{\Delta(m\varepsilon)}{\partial x^{\frac{1}{2}n(n+1)}} = \Sigma \pm f(x) f_1'(x) \ldots f_n^{(n)}(x) = \mathrm{E}(x),$$

$$\frac{\Delta_\mu(m\varepsilon)}{\partial x^{\frac{1}{2}n(n-1)}} = \frac{\partial \mathrm{E}(x)}{\partial f_\mu^{(n)}(x)} = \mathrm{E}_\mu(x),$$

u. s. w. Dies festgestellt, hat man folgende Sätze:

1) Verschwindet $\mathrm{E}(x)$ für alle Werthe von $x = x_0$ bis $x = x_1$, wo $x_0 < x_1$ ist, so sind die Functionen $f(x), f_1(x), \ldots f_n(x)$ für diese nämlichen Werthe von x linearabhängig. Ist $\varphi(x) = 0$ eine der linearen Relationen, welche für $x = x_1$ und kleinere Werthe von x stattfinden, und construirt man die Curve $y = \varphi(x)$ für alle Werthe von x, die gröfser als x_1 sind, so hat diese Curve für $x = x_1$ mit der Abscissenaxe einen Contact von der n^{ten} Ordnung.

2) Sind zwei Intervalle, in denen $\mathrm{E}(x)$ verschwindet, durch Werthe von x getrennt, für welche $\mathrm{E}(x)$ von Null verschieden ist, so wird die Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen in beiden Intervallen im Allgemeinen durch verschiedene Relationen ausgedrückt.

3) Damit gegebene $n+1$ Functionen $f(x), f_1(x), \ldots f_n(x)$ für alle Werthe von x linearunabhängig sind, ist es erforderlich und hinreichend, dafs ihre Determinante $\mathrm{E}(x)$ für alle Werthe von x von Null verschieden ist.

Nennt man ferner ein Intervall, in welchem mindestens eine der Gröfsen $\mathrm{E}_\mu(x)$ von Null verschieden ist, ein Intervall der ersten Art, dagegen ein solches, in welchem sämmtliche $\mathrm{E}_\mu(x)$ verschwinden, eines von der zweiten Art, während $\mathrm{E}(x) = 0$ vorausgesetzt wird, so hat man weiter:

4) Sind zwei Intervalle der ersten Art durch eines von der zweiten Art geschieden, so ist die lineare Relation, welche in dem einen stattfindet, nicht nothwendig auch im andern gültig.

5) Ist ein Intervall der ersten Art, welches sich von $x = x_0$ bis $x = x_1$ incl. ausdehnt, durch zwei andere von der zweiten Art begrenzt, so findet in ihm eine einzige lineare Relation $\varphi(x) = 0$ statt. Construirt man die Curve $y = \varphi(x)$ für die Werthe $x < x_0$ und $x > x_1$, so hat der erste Zweig für $x = x_0$ mit der Abscissenaxe einen Contact von der ersten, der andere für $x = x_1$ einen von der n^{ten} Ordnung. Nur

in besonderen Fällen kann in diesen Punkten der Contact auf eine höhere Ordnung steigen.

Ich wende mich zur Untersuchung der Differentialgleichung:

$$(3.)\qquad A(x) f^{(n)}(x) + A_1(x) f^{(n-1)}(x) + \cdots + A_n(x) f(x) = 0,$$

und betrachte statt derselben zunächst die Gleichung:

$$(4.)\quad A(m\varepsilon)\frac{\Delta^n f(m\varepsilon)}{\varepsilon^n} + A_1(m\varepsilon)\frac{\Delta^{n-1} f(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}} + \cdots + A_n(m\varepsilon) f(m\varepsilon) = 0,$$

welche durch die Substitution:

$$A_n = \varepsilon^{n-s}\Big\{P_s + (n-s+1)\,P_{s-1} + \frac{(n-s+2)(n-s+1)}{1\cdot 2}\,P_{s-2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1\cdot 2\ldots s}\,P\Big\}$$

oder:

$$P_s = \frac{A_s}{\varepsilon^{n-s}} - (n-s+1)\frac{A_{s-1}}{\varepsilon^{n-s+1}} + \frac{(n-s+2)(n-s+1)}{1\cdot 2}\,\frac{A_{s-2}}{\varepsilon^{n-s+2}} - \cdots + (-1)^s\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1\cdot 2\ldots s}\,A$$

die Form:

$$P(m\varepsilon) f((m+n)\varepsilon) + P_1(m\varepsilon) f((m+n-1)\varepsilon) + \cdots + P_n(m\varepsilon) f(m\varepsilon) = 0$$

annimmt. Es läfst sich daher alles, was im vorigen Paragraph festgestellt wurde, auch auf vorstehende Gleichung (4.) übertragen, welches auch der Werth von ε sei, also auch dann, wenn ε unter einer beliebigen Grenze liegt.

Bezeichnet man daher durch m' die Werthe von m, für welche bei einem bestimmten, unter einer gegebenen Grenze liegenden ε eine der Gröfsen

$$P(m\varepsilon) = \frac{A(m\varepsilon)}{\varepsilon^n},$$

$$P_n(m\varepsilon) = (-1)^n\Big\{\frac{A(m\varepsilon)}{\varepsilon^n} - \frac{A_1(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{A_2(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-2}} - \cdots\Big\},$$

oder beide zusammen im Vergleich zu allen übrigen Gröfsen P_s verschwinden, so sieht man augenblicklich, dafs, wenn jene Grenze immer kleiner genommen wird, diese Werthe sich auf diejenigen reduciren, für welche $P(m\varepsilon)$ verschwindet.

Macht man nun die erlaubte Voraussetzung, dafs es keinen endlichen Werth von x giebt, für welchen alle Coefficienten $A_s(x)$ verschwinden, oder für den einen oder mehrere derselben die Grenzen des Endlichen übersteigen, und bezeichnet durch x' diejenigen Werthe von x, für welche $A(x)$ verschwindet, so erhält man folgende Resultate:

1) Gegebene n Functionen, welche der Gleichung (3.) für einen der Werthe x' genügen, können nicht linearunabhängig sein.

2) Will man die Gleichung (3.) durch n linearunabhängige Functionen integriren, so ist dazu erforderlich, dafs für keinen der Werthe x' jede dieser Functionen der Gleichung (3.) genüge.

3) Hat man umgekehrt n linearunabhängige Functionen, welche der Gleichung (3.) in bestimmten Intervallen genügen, so kann es unter den Werthen x' keinen geben, für den jede dieser Functionen der Gleichung (3.) genügt.

4) Stellt man bei der Integration von (3.) die Bedingung, dafs das gesuchte Integral jener Gleichung auch noch für einen der Werthe x' genüge, so giebt es keine n, sondern höchstens $n-1$ linearunabhängige Functionen, welche jenen Bedingungen genügen, und ihre Anzahl kann durch weitere Bedingungen auch noch weiter reducirt werden.

Hat man n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche der in 2) aufgestellten Bedingung genügen, so erhält man durch Elimination von $A_1, A_2, \ldots A_n$ aus den Gleichungen:

$$A(x)f_1^{(n)}(x) + A_1(x)f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + A_n(x)f_1(x) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A(x)f_n^{(n)}(x) + A_1(x)f_n^{(n-1)}(x) + \cdots + A_n(x)f_n(x) = 0$$

die folgende:

$$A(x)\frac{\partial \mathrm{E}_0(x)}{\partial x} + A_1(x)\,\mathrm{E}_0(x) = 0.$$

Da in der ganzen Ausdehnung dieser Gleichung $A(x)$ von Null verschieden ist, so hat man entweder $\mathrm{E}_0(x) = 0$, also auch $\frac{\partial \mathrm{E}_0}{\partial x} = 0$, oder:

$$\frac{\partial \mathrm{E}_0}{\mathrm{E}_0\,\partial x} + \frac{A_1}{A} = 0,$$

woraus:

$$\mathrm{E}_0(x) = e^{-\int \frac{A_1(x)}{A(x)}\partial x} \tag{5.}$$

folgt. Die rechte Seite dieser Gleichung enthält eine durch die Integration eingeführte Constante, welche dadurch bestimmt werden mufs, dafs man für x einen besondern Werth einsetzt. Dabei entscheidet sich zugleich die Frage, ob E_0 gleich Null oder von Null verschieden ist, d. h. ob jene Integrale linearabhängig oder linearunabhängig sind.

Die obigen vier Sätze bedürfen einer Erläuterung, welche ich für den dritten und vierten Satz an zwei einfachen Beispielen geben will. Die Gleichung $(x^2-1)f'' + 2xf' - 2f = 0$ hat die Integrale $f_1 = x$, $f_2 = x\lg\frac{x+1}{x-1} - 2$, während $x' = \pm 1$ ist. Diese Integrale sind linear-

unabhängig, also darf eines derselben für $x = -1$, und eines für $x = 1$ der Differentialgleichung nicht genügen. Dies ist in der That mit f_2 der Fall, da f_2 in der Nähe jener Werthe aufhört der Voraussetzung zu entsprechen, dafs seine Aenderung der Aenderung von x proportional sei, also von der Herstellung der Differentialquotienten f' und f'' für jene Werthe keine Rede sein kann. — Untersucht man die Wärmebewegung in einer Vollkugel nach der Fourier'schen Theorie für den Fall, wo die Temperatur u nur von der Zeit t und dem aus dem Centrum genommenen Radiusvector x abhängt, so hat man für alle Punkte der Kugel ohne Ausnahme $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Ist α eine willkürliche Constante, so kann man ein particulares Integral finden, wenn man noch die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha^2 u$ hinzunimmt. Dann erhält man:

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{a^2}xu = 0,$$

und es ist ein solches Integral zu suchen, welches dieser Gleichung für den Punkt $x = 0$ genügt. Diese Gleichung hat die Integrale:

$$f_1 = c_1\frac{\sin\frac{\alpha x}{a}}{x}, \quad f_2 = c_2\frac{\cos\frac{\alpha x}{a}}{x},$$

von denen das Letztere zu verwerfen ist, weil es der Gleichung nicht für $x = 0$ genügt.

Aus art. 3 übertragen wir noch folgende Sätze. Hat man $n+1$ Functionen $f, f_1, \ldots f_n$, welche der Gleichung (3.) für alle Werthe von $x = x_0$ bis $x = x_1$ genügen, so sind dieselben für die nämlichen Werthe von x linearabhängig. Sind die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ in jenem Intervall linearunabhängig, so besteht in demselben eine einzige Relation von der Form:

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x).$$

Genügen diese nämlichen Functionen der Gleichung (3.) in zwei aufeinanderfolgenden Intervallen, zwischen denen ein Werth x' liegt, für den $A(x), A'(x), \ldots A^{(\mu)}(x)$ verschwinden, und ist $\mu \overline{\overline{<}}\, n$, so mufs die in dem einen Intervall stattfindende lineare Relation von der im andern bestehenden gänzlich verschieden sein.

5.

Es ist hier am Orte, einige Eigenschaften der im Vorhergehenden betrachteten Determinanten anzuschliefsen. Es ist:

$$\Sigma \pm VU \cdot V_1 U_1' \cdot V_2 U_2'' \ldots V_n U_n^{(n)} = VV_1 \ldots V_n \Sigma \pm UU_1'U_2'' \ldots . U_n^{(n)},$$

und wenn man $U^{(\mu)}_{\nu+1} - U_\nu^{(\mu)} = \varDelta U_\nu^{(\mu)}$, $\varDelta U^{(\mu)}_{\nu+1} - \varDelta U_\nu^{(\mu)} = \varDelta^2 U_\nu^{(\mu)}$ etc. setzt:

$$\Sigma \pm U \varDelta U' \varDelta^2 U'' \dots \varDelta^n U^{(n)} = \Sigma \pm U U_1' U_2'' \dots U_n^{(n)},$$

eine Formel, welche man auf dieselbe Art, wie die Gleichung (1.) art. 4 beweist. Die Verbindung dieser Gleichungen giebt:

$$(1.)\qquad \begin{aligned} &\Sigma \pm VU \cdot \varDelta(VU') \cdot \varDelta^2(VU'') \dots \varDelta^n(VU^{(n)}) \\ &= V V_1 V_2 \dots V_n \Sigma \pm U \varDelta U' \varDelta^2 U'' \dots \varDelta^n U^{(n)}. \end{aligned}$$

Setzt man in dieser $V = \frac{1}{U}$, $V_1 = \frac{1}{U_1}$, $\dots V_n = \frac{1}{U_n}$, so folgt:

$$\Sigma \pm U \varDelta U' \varDelta^2 U'' \dots \varDelta^n U^{(n)} = U U_1 U_2 \dots U_n \Sigma \pm \varDelta\left(\frac{U'}{U}\right) \varDelta^2\left(\frac{U''}{U}\right) \dots \varDelta^n\left(\frac{U^{(n)}}{U}\right).$$

Wiederholt man diese Operation und setzt:

$$\varDelta\left(\frac{U^{(\mu)}}{U}\right) = U^{\mu,0},\quad \varDelta\left(\frac{U^{\mu,0}}{U^{1,0}}\right) = U^{\mu,1},\quad \varDelta\left(\frac{U^{\mu,1}}{U^{2,1}}\right) = U^{\mu,2}, \text{ etc.},$$

so ergiebt sich schliefslich:

$$(2.)\qquad \begin{aligned} &\Sigma \pm U \varDelta U' \varDelta^2 U'' \dots \varDelta^n U^{(n)} \\ &= U U_1 \dots U_n \cdot U^{1,0} U_1^{1,0} \dots U_{n-1}^{1,0} \cdot U^{2,1} U_1^{2,1} \dots U_{n-2}^{2,1} \dots U^{n-1,n-2} U_1^{n-1,n-2} \cdot U^{n,n-1}, \end{aligned}$$

wodurch die Determinante zur Linken als das Produkt von $\frac{n+1 \cdot n+2}{2}$ Factoren dargestellt ist. Setzt man $U_\mu^{(\nu)} = f_\nu(m\varepsilon + \mu\varepsilon)$, $V_\mu = \varphi(m\varepsilon + \mu\varepsilon)$, $m\varepsilon = x$ und $\varepsilon = \partial x$, so erhält man aus (1.), wenn man durch $\partial x^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ dividirt und zur Grenze übergeht:

$$(3.)\qquad \Sigma \pm \varphi f \frac{\partial \varphi f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi f_2}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial^n \varphi f_n}{\partial x^n} = \varphi^{n+1} \Sigma \pm f \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial^n f_n}{\partial x^n}.$$

Bezeichnet man ferner die Grenze von $\frac{U^{\mu,\nu}}{\partial x}$ durch $f_{\mu,\nu}$, so dafs man hat:

$$f_{\mu,0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_\mu}{f}\right),\quad f_{\mu,1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_{\mu,0}}{f_{1,0}}\right),\quad f_{\mu,2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_{\mu,1}}{f_{2,1}}\right), \text{ etc.},$$

so folgt aus (2.):

$$(4.)\qquad \Sigma \pm f \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial^n f_n}{\partial x^n} = f^{n+1} f_{1,0}^n f_{2,1}^{n-1} \dots f_{n-1,n-2}^2 f_{n,n-1}.$$

Die Gleichungen (3.) und (4.) sind zuerst von Herrn **Hesse** im 54sten Bande dieses Journals pag. 249, 250 veröffentlicht worden.*)

*) Die in diesen beiden Gleichungen enthaltenen Ergebnisse waren bereits vor länger als einem Jahr von Herrn **Christoffel** gefunden und der Redaction dieses Journals mitgetheilt worden. Nur dem Umstande, dafs der Herr Verfasser dieser Arbeit einige Aenderungen in derselben vorzunehmen wünschte, ist es zuzuschreiben, dafs die nämlichen Ergebnisse, welche Herr **Hesse** in der citirten Abhandlung erhalten hat, von diesem früher veröffentlicht worden sind. B.

Zur Transformation der Veränderlichen in diesen Determinanten hat man die Formel:

$$(5.)\qquad \Sigma \pm f \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial^n f_n}{\partial x^n} = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \Sigma \pm f \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \cdots \frac{\partial^n f_n}{\partial t^n},$$

welche sich sehr leicht beweisen läfst, indem man für die Derivirten nach x die nach t mittelst der Formel:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{\partial^n f}{\partial t^n}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^n + a_1^{(n)} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial t^{n-1}} + a_2^{(n)} \frac{\partial^{n-2} f}{\partial t^{n-2}} + \cdots$$

einführt, und dann durch Addition von Verticalreihen reducirt.

Setzt man:

$$\Sigma \pm f \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial^n f_n}{\partial x^n} = \varDelta,\quad \frac{\partial \varDelta}{\partial f_\mu^{(n)}} = \varDelta_\mu,\quad \frac{\partial^\nu \varDelta_\mu}{\partial x^\nu} = \varDelta_\mu^{(\nu)},$$

so hat man folgendes System von Gleichungen, dessen Beweis ich übergehe:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \Sigma \pm \varDelta_0 \varDelta_1' \varDelta_2'' \dots \varDelta_n^{(n)} = \varDelta^n \\ \Sigma \pm \varDelta_0 \varDelta_1' \varDelta_2'' \dots \varDelta_{n-1}^{(n-1)} = (-1)^n \varDelta^{n-1} \cdot f_n \\ \Sigma \pm \varDelta_0 \varDelta_1' \varDelta_2'' \dots \varDelta_{n-2}^{(n-2)} = (-1)^{2n} \varDelta^{n-2} \Sigma \pm f_{n-1} \frac{\partial f_n}{\partial x} \\ \Sigma \pm \varDelta_0 \varDelta_1' \varDelta_2'' \dots \varDelta_{n-3}^{(n-3)} = (-1)^{3n} \varDelta^{n-3} \Sigma \pm f_{n-2} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Sigma \pm \varDelta_0 \varDelta_1' = (-1)^{(n-1)n} \varDelta \Sigma \pm f_2 \frac{\partial f_3}{\partial x} \cdots \frac{\partial^{n-2} f_n}{\partial x^{n-2}} \\ \varDelta_0 = (-1)^{nn} \Sigma \pm f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdots \frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial x^{n-1}}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind von Wichtigkeit für die Untersuchung solcher linearer homogener Differentialausdrücke, welche nach der Benennung des Herrn **Hesse** zu einander complementar sind. So enthält z. B. die vorletzte derselben die vollständige Integration einer linearen Differentialgleichung ohne zweiten Theil, für den Fall, dafs das Integral ihrer Complementargleichung bekannt ist.

Montjoie, 1857.

Anmerkung.

Zu der vorstehenden Abhandlung enthielt das in der Vorrede erwähnte Handexemplar Christoffels einen Nachtrag, der auf S. 106—110 zum ersten Male abgedruckt wird. F.

Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung über die lineare Abhängigkeit von Funktionen einer einzigen Veränderlichen.

(Aus dem Nachlafs Christoffels.)

Durch eine gütige Mittheilung des Herrn Prof. Kummer wurde ich auf einen in der Anwendung der Lehre von der Linearabhängigkeit vorkommenden Fall aufmerksam gemacht, welcher sich mittelst der in obigen artt. gegebenen Regeln nicht erledigen läfst, nämlich den Fall, wo eine Function so beschaffen ist, dafs sie einer gegebenen Differenzen- oder Differenzialgleichung nur innerhalb eines bestimmten Intervalls genügt. Die in art. 3. angestellte Untersuchung ist nämlich nur so weit geführt worden, dafs sich ein Schlufs auf das Verhalten solcher n Funktionen ziehen liefs, welche der Gleichung 1. in allen p. 98 bezeichneten Intervallen genügen. Es ist daher auch wesentliche Bedingung zu den durch 1) 2) 3) 4) bezeichneten Sätzen, dafs die Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ der Gleichung 1. in mehr als einem Intervall genügen, d. h. dafs die in Frage kommenden Werte m' zwischen Intervallen liegen, in denen der Gleichung 1. durch jene Functionen Genüge geschieht. Die analoge Bedingung gilt für die Sätze des art. 4.

Um den obigen Fall zu behandeln, zerlege ich nach Anleitung von pag. 98 die Reihe der Werthe m in Intervalle, zwischen denen die Werthe m' eingeschaltet sind, und sei die Reihe a. ein solches Intervall; dann ist also sowohl für $m = m_0 - 1$, als für $m = m_0 + p + 1$ eine der Functionen $P(m)$ und $P_n(m)$ oder es sind beide gleich Null. Man befindet sich demnach in dem pag. 97 erörterten Falle; die unter den dortigen Voraussetzungen bestimmten Functionen sind für die Werthe b. linearunabhängig. Handelt es sich nun darum, die Werthe dieser Functionen für $m = m_0 - 1$ und $m = m_0 + p + 1$ so zu bestimmen, dafs der Gleichung 1. Genüge geschieht, so sind folgende Fälle zu unterscheiden.

A. 1) $P_n(m_0 - 1) = 0$, $P(m_0 - 1) \lesseqgtr 0$. Da $\Delta(m_0)$ von Null verschieden ist, so folgt aus 3. $\Delta_0(m_0 - 1) = \infty$, was unzulässig ist. Es kann also mindestens eine der Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ nicht bis zu dem Werthe $m = m_0 - 1$ fortgesetzt werden.

2) $P_n(m_0 - 1) = 0$, $P(m_0 - 1) = 0$. Aus 2. folgt, dafs $\Delta_{0,\mu}(m_0 - 1) = 0$ für $\mu = 1, 2, \dots n$, also $\Delta_0(m_0) = 0$, was nicht der Fall ist. Also haben wir dasselbe Resultat wie in 1).

3) $P_n(m_0 - 1) \lesseqgtr 0$, $P(m_0 - 1) = 0$. Aus 3. ergiebt sich $\Delta_0(m_0 - 1) = 0$; folglich sind die Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ linearabhängig für $m = m_0 - 1, m_0, \dots m_0 + n - 2$.

B. 1) $P(m_0 + p + 1) = 0$, $P_n(m_0 + p + 1) \lesseqgtr 0$. Unter dieser Voraussetzung wird $\Delta_0(m_0 + p + 2) = \infty$, also kann zum wenigsten eine der Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ nicht bis zum Werthe $m = m_0 + p + n + 1$ fortgesetzt werden.

2) $P(m_0 + p + 1) = 0$, $P_n(m_0 + p + 1) = 0$. Hieraus folgt $\Delta_{0,\mu}(m_0 + p + 1) = 0$ für $\mu = 1, 2, \dots n$, also auch $\Delta_0(m_0 + p + 1) = 0$, was nicht der Fall ist, also gilt wieder das vorige Resultat.

3) $P(m_0 + p + 1) \lesseqgtr 0$, $P_n(m_0 + p + 1) = 0$ liefert die Gleichung $\Delta_0(m_0 + p + 2) = 0$; die Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ können daher bis zum Werthe $m = m_0 + p + 1$ fortgesetzt werden, sind aber für die Werthe $m = m_0 + p + 2, m_0 + p + 3, \dots m_0 + p + n + 1$ linearabhängig.

Sollen demnach alle Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ bis zu obigen Werthen mittelst der Gleichung 1. fortgesetzt werden, so ist dies nur in den Fällen A. 3) und B. 3) möglich, und es stellt sich die Thatsache heraus, dafs die n Functionen für die n extremen Werthe des um die Werthe $m' = m_0 - 1$ und $m' = m_0 + p + n + 1$ vermehrten Intervalls ihre Linearunabhängigkeit nicht bewahren.

Um alle Fälle zu erledigen, welche sich bei der Fortsetzung obiger Functionen mittelst der Gleichung 1. darbieten können, wenn dieselbe überhaupt möglich ist, gehe ich zur Betrachtung der Werthe $m = m_0 - 2$, $m = m_0 + p + 2$ über. Es sind dabei folgende Fälle möglich.

A. 3) α) $P_n(m_0 - 2) \lesseqgtr 0$, $P(m_0 - 2) \lesseqgtr 0$. Aus 3. folgt $\Delta_0(m_0 - 2) = 0$, die Functionen können also fortgesetzt werden, bleiben aber linearabhängig.

β) $P_n(m_0 - 2) = 0$, $P(m_0 - 2) \lesseqgtr 0$. Aus 2. folgt, daß die Werthe der Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ für $m = m_0 - 2$ willkürlich sind; es ist also gestattet, diese Werthe so auszuwählen, dafs die Functionen für die Werthe $m_0 - 2, m_0 - 1, \dots m_0 + n - 3$ linearunabhängig werden; jedenfalls wird aber die weitere Fortsetzung derselben von ihrem früheren Verlauf unabhängig, indem zu derselben die Angabe der zu $m = m_0 - 2$ gehörigen Functionalwerthe erforderlich ist.

γ) $P_n(m_0 - 2) \lesseqgtr 0$, $P(m_0 - 2) = 0$; aus 3. ergiebt sich $\Delta_0(m_0 - 2) = 0$, wie in α).

δ) $P_n(m_0 - 2) = 0$, $P(m_0 - 2) = 0$; aus 2. folgt $\Delta_{0,\mu}(m_0 - 2) = 0$ für $\mu = 1, 2, \dots n$, also ist wie in α) und γ) $\Delta_0(m_0 - 2) = 0$.

B. 3) α) $P(m_0+p+2) \lessgtr 0$, $P_n(m_0+p+2) \lessgtr 0$ giebt $\Delta_0(m_0+p+2)=0$; die Functionen können also zum Werthe $m=m_0+p+n+2$ fortgesetzt werden, indem sie dabei linearabhängig bleiben.

β) $P(m_0+p+2)=0$, $P_n(m_0+p+2) \lessgtr 0$; die Werthe der Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ bleiben für $m=m_0+p+n+2$ willkürlich; sie können also so gewählt werden, daß die Functionen für $m=m_0+p+3, m_0+p+4, \dots m_0+p+n+2$ linearunabhängig werden; jedenfalls wird aber die weitere Fortsetzung derselben von ihrem früheren Verlaufe unabhängig, indem zu derselben die durch die Gleichung 1. nicht vermittelte Angabe der zu $m=m_0+p+n+2$ gehörigen Functionalwerthe erforderlich ist.

γ) $P(m_0+p+2) \lessgtr 0$, $P_n(m_0+p+2)=0$ giebt wie in α) $\Delta_0(m_0+p+2)=0$.

δ) $P(m_0+p+2)=0$, $P_n(m_0+p+2)=0$ giebt aus 2. für $\mu=1,2,\dots n$ $\Delta_{0,\mu}(m_0+p+2)=0$, also wie in α) und γ) $\Delta_0(m_0+p+2)=0$.

Daraus ergiebt sich nun folgender Satz:

Genügen n linearunabhängige Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ der Gleichung 1. in einem bestimmten Intervalle a., welcher unten und oben durch die Werthe $m'=m_0-1$ und $m'=m_0+p+1$ begrenzt ist, so können nur dann alle Functionen mittelst der Gleichung 1. über das Intervall b. fortgesetzt werden, wenn $P_n(m_0-1)$ und $P(m_0+p+1)$ von Null verschieden ist; ist dies aber der Fall, so ist auch die weitere Fortsetzung der Functionen zulässsig und richtet sich nach folgenden Gesetzen.

Ist unter den Zahlen $m=m_0-2, m_0-3 \dots m_0-q$ die Zahl m_0-q die einzige, welche der Bedingung (A. 3) β)) $P_n(m)=0$ $P(m) \lessgtr 0$ genügt, so sind die Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ für die Werthe $m_0-q+1, m_0-q+2, \dots m_0+n-2$ linearabhängig. Zur Bestimmung der für $m=m_0-q$ und darüber hinaus stattfindenden Functionalwerthe reicht die Angabe der Werthe, welche die Functionen für $m=m_0, m_0+1, \dots m_0+n-1$ haben, nicht mehr aus, sondern es müssen mindestens die zu $m=m_0-q$ gehörigen Werthe derselben unmittelbar gegeben werden; dies kann aber so geschehen, dafs die Functionen von $m_0-q+n-1$ abwärts linearunabhängig werden, da wegen der willkürlichen Functionalwerthe, welche bei m_0-q stattfinden, beliebig viele solche Fortsetzungen erhalten werden können.

Ist unter den Zahlen $m=m_0+p+2, m_0+p+3, \dots m_0+p+r+2$ die Zahl $m_0+p+r+2$ die einzige, welche der Bedingung (B. 3) β))

$P(m)=0$, $P_n(m) \lessgtr 0$ genügt, so sind die Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ für die Werthe $m_0+p+2, m_0+p+3, \dots m_0+p+r+n+1$ linearabhängig. Zur Bestimmung der für $m=m_0+p+r+2$ und darüber hinaus stattfindenden Functionalwerthe reicht die Angabe der Werthe, welche die Functionen für $m=m_0, m_0+1, \dots m_0+n-1$ haben, nicht mehr aus, sondern es müssen mindestens die zu $m=m_0+p+r+2$ gehörigen Werthe derselben unmittelbar gegeben werden; dies kann aber so geschehen, dafs die Functionen von $m_0+p+r+3$ aufwärts linearunabhängig werden. Jedenfalls können aber die Werthe, welche man hierdurch für die Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ von $m_0+p+r+2$ an erhält, nicht mehr als die Fortsetzung des früheren Verlaufs dieser Functionen betrachtet werden, da wegen der bei $m_0+p+r+2$ stattfindenden willkürlichen Functionalwerthe beliebig viele solcher Fortsetzungen erhalten werden können.

Was nun den Übergang von diesen Betrachtungen zu denen des art. 4 betrifft, so ist darüber folgendes zu bemerken. Genügen n linearunabhängige Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ der Differenzialgleichung 3. für alle zwischen x_0' und x_1' liegenden Werthe von x, während x_0' und x_1' den Coeffizienten $A(x)$ zum Verschwinden bringen, so kann es sich ereignen, dafs sie der Gleichung auch noch für einen dieser Werthe oder für beide genügen; jedenfalls hat man dann für diesen extremen Werth von x die Gleichung $a_1 f_1^{(\mu)} + a_2 f_2^{(\mu)} + \dots + a_n f_n^{(\mu)} = 0$, $\mu=1,2,\dots n$. Aber die Bedingungen für das Eintreten dieses Falles lassen sich nur aus einer genaueren Untersuchung der Gleichungen (pag. 101) $P(m\varepsilon)=0$, $P_n(m\varepsilon)=0$ unter Anwendung obiger Sätze herleiten und sind der allgemeinen Untersuchung nicht zugänglich.

IV.

Zur Abhandlung von Heine: „Ueber Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen“ im 57. Band des Journals für die reine und angewandte Mathematik.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 58, 1861, S. 90—92.)

Herr Heine hat im § 7 der genannten Abhandlung die Zähler und Nenner der Näherungswerthe des Kettenbruchs für

$$(1.)\qquad u=\frac{F\left(k,k,\gamma+1,\frac{x}{k^2}\right)}{F\left(k,k,\gamma,\frac{x}{k^2}\right)},\qquad k=\infty$$

gefunden, und zwar erfordert der dort eingeschlagene Weg die gesonderte Bestimmung der beiden auf einander folgenden Zähler P_{2m}, P_{2m+1} und der entsprechenden Nenner Q_{2m}, Q_{2m+1}. Es dürfte von einigem Interesse sein, *daß diese vier Functionen sämmtlich in einer einzigen Form enthalten sind.*

Bestimmt man nämlich zwei Reihen von Functionen V und W durch die Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} V_0=1,\; V_1=\gamma+1,\; V_2=(\gamma+2)V_1+x,\; V_3=(\gamma+3)V_2+xV_1,\;\ldots \\ \qquad V_{m+3}=(\gamma+m+3)V_{m+2}+xV_{m+1}, \\ W_0=\gamma\qquad W_1=(\gamma+1)W_0+x,\; W_2=(\gamma+2)W_1+xW_0,\ldots \\ \qquad W_{m+2}=(\gamma+m+2)W_{m+1}+xW_m, \end{cases}$$

so ist

$$\frac{V_m}{W_m}=\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{x}{\gamma+1+\cdots+\cfrac{x}{\gamma+m}}}=\begin{bmatrix}1, & x, & x, & \cdots & x\\ \gamma, & \gamma+1, & \gamma+2, & & \gamma+m\end{bmatrix},$$

mithin $\frac{V_m}{W_m}$ der $m+1^{\text{te}}$ Näherungswerth des Kettenbruchs für $\frac{u}{\gamma}$. Folglich können γV_m und W_m von P_m und Q_m nur durch ein und denselben constanten Factor verschieden sein.

Vergleicht man in (2.) die über einander stehenden Gleichungen, so zeigt sich sofort, daß, wenn

$$(3.)\qquad V_m=\varphi(x,\gamma+1,m)$$

gesetzt wird, zugleich

$$(4.)\qquad W_m=\varphi(x,\gamma,m+1)$$

sein muß; damit ist die oben aufgestellte Behauptung erwiesen. Es ergiebt sich

$$(5.)\qquad \varphi(x,\gamma,m)=\Sigma(m-s)_s\frac{\Gamma(\gamma+m-s)}{\Gamma(\gamma+s)}x^s,$$

wo s die Werthe $0, 1, 2, \ldots$ bis zur größten in $\frac{1}{2}m$ enthaltenen ganzen Zahl inclusive durchläuft, und statt des Quotienten der beiden Γ die entsprechende Facultät zu setzen ist. Mittelst dieser Bezeichnung wird nun

$$(6.)\quad \begin{cases} (\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+2m-1)\,P_{2m}=\varphi(x,\gamma+1,2m-1), \\ (\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+2m)\qquad P_{2m+1}=\varphi(x,\gamma+1,2m), \\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+2m-1)\,Q_{2m}=\varphi(x,\gamma,2m), \\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+2m)\qquad Q_{2m+1}=\varphi(x,\gamma,2m+1). \end{cases}$$

Der Werth von u läfst sich stets in ausgeführter Form angeben, so oft γ die Hälfte einer positiven und ungeraden Zahl ist. Für $\gamma=\frac{1}{2}$ findet man denselben in der Abhandlung des Herrn Heine; ist

$$(7.)\qquad \gamma=\tfrac{1}{2}(2n+3),\quad n=0,1,2,\ldots,$$

so setze man

$$(8.)\qquad x=\tfrac{1}{4}y^2,$$

und

$$(9.)\qquad \mathfrak{A}_n=\tfrac{1}{2}e^{-y}\frac{\partial^{n+1}e^y}{\partial x^{n+1}},\quad \mathfrak{B}_n=-\tfrac{1}{2}e^y\frac{\partial^{n+1}e^{-y}}{\partial x^{n+1}},$$

oder in anderer Form

$$(10.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_n=\dfrac{\partial^n}{\partial y^n}\dfrac{1-\frac{2y}{1}+\frac{(2y)^2}{1\cdot 2}-\cdots\pm\frac{(2y)^n}{1\cdot 2\ldots n}}{y^{n+1}}, \\ \mathfrak{B}_n=\dfrac{\partial^n}{\partial y^n}\dfrac{1+\frac{2y}{1}+\frac{(2y)^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{(2y)^n}{1\cdot 2\ldots n}}{y^{n+1}}, \end{cases}$$

dann wird

$$(11.)\qquad \frac{u}{\gamma}=\begin{bmatrix}1, & x, & x, & \\ \gamma, & \gamma+1, & \gamma+2, & \cdots\end{bmatrix}=\frac{e^y\mathfrak{A}_{n+1}-e^{-y}\mathfrak{B}_{n+1}}{e^y\mathfrak{A}_n-e^{-y}\mathfrak{B}_n},$$

und nach dem Früheren ist hiervon der $m+1^{\text{te}}$ Näherungswerth

$$\frac{V_m}{W_m} = \frac{\varphi(x, \tfrac{1}{2}(2n+5), \quad m \quad)}{\varphi(x, \tfrac{1}{2}(2n+3), m+1)}, \tag{12.}$$

welcher sich auch in die zu (11.) ganz analoge Form

$$\frac{\mathfrak{B}_{m+n+2}\,\mathfrak{A}_{n+1} - \mathfrak{A}_{m+n+2}\,\mathfrak{B}_{n+1}}{\mathfrak{B}_{m+n+2}\,\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_{m+n+2}\,\mathfrak{B}_n}$$

bringen läßt.

Die Functionen φ scheinen zu einer gröfseren Rolle bestimmt zu sein, als sich aus ihrer Beziehung zur hypergeometrischen Reihe vermuthen läfst. Sie stehen nämlich mit den Integralen der Riccatischen Gleichung in einem so genauen Zusammenhange, daß man fast in allen Untersuchungen auf sie geführt wird, welche ein näheres Eingehen auf die Natur dieser Integrale erfordern.

Berlin, im März 1860.

V.

Über die Dispersion des Lichts.

(Monatsberichte der Kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1861, S. 906—921 und 997—999; wieder abgedruckt in Annalen der Physik und Chemie Bd. 117, 1862, S. 27—45.)

Seit den Untersuchungen Cauchy's über die Dispersion des Lichts hat man sich vielfach mit diesem Problem beschäftigt, theils um nachzuweisen, dafs die Resultate des Mémoire sur la dispersion, in Folge der ihnen zu Grunde gelegten Voraussetzungen von der Dispersion keine Rechenschaft zu geben vermögen, theils um dieselben von andern Gesichtspunkten aus neu zu begründen oder durch andere zu ersetzen. Der hauptsächlichste Einwurf, den man gegen Cauchy's Theorie erheben kann, bezieht sich darauf, dafs in derselben eine genügende Erörterung desjenigen Punktes vermifst wird, auf den es vor allem ankommt, nämlich der Frage, ob die Constanten, vermöge deren die Wellenlänge in den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eingeht, auch solcher Werthe fähig sind, dafs dadurch eine wahrnehmbare Abhängigkeit zwischen jenen Gröfsen begründet wird; derselbe trifft in diesem Sinne auch alle später über diesen Gegenstand veröffentlichten Arbeiten.

Die genauere Untersuchung dieser Frage, welche sich in ähnlicher Form auch bei andern Problemen der Molekulartheorie wiederholt, hat gezeigt, dafs die Voraussetzungen der §§ 1. 2. 3. des Mém. s. l. disp., auf gebührende Grenzen eingeschränkt, die Dispersion des Lichtes in isotropen Mitteln, mit Ausschlufs bestimmter Grenzfälle, vollständig erklären, und zwar durch eine Formel, welche alle bisher aufgestellten an Einfachheit wesentlich übertrifft. Nennt man nämlich die Wellenlänge eines Strahls im dispersionsfreien Raume und seinen Brechungsindex für den Übergang in ein anderes isotropes Mittel die Elemente dieses Strahls, so besteht die von mir gefundene Dispersionsformel in einer Relation zwischen den Elementen zweier Strahlen, von denen der eine willkürlich, der andere physikalisch definirt und für die Natur der brechenden Substanz charakteristisch ist; während die Annäherungsformeln von Cauchy, Baden-Powell, Broch und Redtenbacher ihrer Natur nach als Relationen zwischen den Elementen von drei, die letztere von vier willkürlichen Strahlen aufgefafst werden müssen.

Das Mémoire s. l. disp., an welches hier angeknüpft wird, handelt von den kleinen Schwingungen, welche ein sich selbst überlassenes System materieller Punkte um eine stabile Gleichgewichtslage herum ausführt. In der letztern sind die Punkte retikular geordnet; ihre Entfernungen von einander halten sich sowohl vor, als während der Bewegung über einer endlichen, wenn auch sehr kleinen Grenze ϱ_0. Nennt man m, m' die als einander gleich vorausgesetzten Massen zweier Punkte, r ihre gegenseitige Entfernung, so wirkt zwischen ihnen die Anziehung $mm'f(r)$, welche nebst ihrer ersten Derivirten $mm'f'(r)$ die Eigenschaft hat, während r von ϱ_0 bis zu einem andern endlichen, jedoch sehr kleinen Werthe ϱ wächst, nie unendlich oder unstetig zu werden, und für gröfsere Werthe von r zu verschwinden. Diese Entfernung ϱ wird der Radius der Wirkungssphäre genannt.

Hierzu wird die einschränkende Bedingung gefügt, dafs die von verschiedenen lokalen Störungen des Gleichgewichts herrührenden Erschütterungen sich überall, wo sie einander begegnen, ohne merkbare gegenseitige Störung superponiren. Reduzirt man dem entsprechend die beschleunigenden Kräfte auf ihre linearen Theile, so findet sich, dafs dies nur so lange geschehen kann, als die ursprüngliche gegenseitige Lage von Punkten, die mit mefsbarer Stärke auf einander wirken, nur sehr wenig geändert ist. Bei Wellenbewegungen lassen sich zwei Grenzfälle nachweisen, in denen diese Bedingung nicht erfüllt ist; man gelangt zu denselben, bei constanter Wellenlänge durch Vergröfserung der Amplitude, und bei constanter Amplitude durch Verringerung der Wellenlänge. Die Gesetze, nach denen die Bewegung in diesen Fällen verläuft, können sich demnach aus der Untersuchung der superponirbaren kleinen Schwingungen nicht ergeben, da sie bei derselben von vornherein ausgeschlossen sind.

Dies vorausgeschickt, findet Cauchy folgendes Resultat. Ist das oben bezeichnete System isotrop, so besteht zwischen der Schwingungsdauer $t = \frac{2\pi}{s}$ ebener Wellen, in denen die Schwingungen transverval sind, und ihrer Wellenlänge $l = \frac{2\pi}{k}$ eine Relation von der Form:

1. $$s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6 + \cdots;$$

hier sind $a_1, a_2, a_3, \cdots$ constante Gröfsen, welche von der Einwirkung

abhängen, die irgend ein Punkt O des Systems während des Gleichgewichts von Seiten der übrigen, in seiner Wirkungssphäre befindlichen Punkte erfährt; ist m einer der letztern, und r seine Entfernung von O, so hat man (§ 9.)

2. $$a_{i+1} = \frac{(-1)^i}{\Pi(2i+3)}\left(A_i + \frac{1}{2i+5} B_i\right),$$
$$A_i = \sum m f(r) r^{2i+1},\quad B_i = \sum m(rf'(r) - f(r)) r^{2i+1}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist $\frac{l}{t} = \frac{s}{k}$, folglich, so lange nicht alle Constanten $a_2, a_3 \cdots$ verschwinden, für Wellen von verschiedener Länge verschieden.

Denkt man sich jetzt zwei isotrope Medien μ und m, welche sich längs einer Ebene E berühren, und von denen das erstere aufserdem die Eigenschaft hat, Wellen von jeder Länge mit der nämlichen Geschwindigkeit fortzupflanzen, so besteht die Aufgabe der Dispersionstheorie darin, den Brechungsindex n für den Übergang eines Wellensystems aus μ nach m als Funktion derjenigen Gröfsen darzustellen, durch welche die Bewegung dieser Wellen in μ bestimmt wird.

Bezeichnet man die Werthe, welche die oben eingeführten Gröfsen in μ annehmen, durch die entsprechenden griechischen Buchstaben, so hat man $\sigma^2 = \alpha_1 \varkappa^2$, $\sigma = \frac{2\pi}{\tau}$, $\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$. Da ferner die auf die Ebene E bezüglichen Bedingungen in linearen Gleichungen zwischen einer endlichen Anzahl von rechts und links dieser Ebene stattfindenden Verrückungen und Beschleunigungen bestehen, so erhält man die bekannten Relationen $\lambda = nl$, $\tau = t$. Hieraus ergiebt sich $\sigma = s$, $k = \frac{2\pi n}{\lambda}$, $\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, also findet zwischen n und λ die Gleichung

3. $$\alpha_1 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = a_1 \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 + a_2 \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^4 + a_3 \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^6 + \cdots$$

statt, aus welcher n zu bestimmen ist.

Zu dem Ende nimmt Cauchy an, dafs die Quotienten $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots$ sehr kleine Gröfsen von der Ordnung ϱ^2 sind, und kehrt nun die Reihe 1. um, woraus für k^2 ein Ausdruck von der Form $k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \cdots$ folgt; dieselbe Operation, auf 3. angewandt, giebt $n^2 = b_1 \alpha_1 + \frac{(2\pi)^2 b_2 \alpha_1^2}{\lambda^2} + \frac{(2\pi)^4 b_3 \alpha_1^3}{\lambda^4} + \cdots$; es folgt aus jener Voraussetzung, dafs auch in dieser Reihe jeder Coëffizient sich im Vergleich zum vorangehenden wie eine Gröfse von der Ordnung ϱ^2 verhalten mufs. Die numerische Verifikation zeigt, dafs diese Voraussetzung, welche schon im Prinzip den Zweck der Untersuchung in Frage stellt, keineswegs mit der Erfahrung übereinstimmt, indem selbst in solchen Fällen, wo n sich nur sehr langsam mit λ ändert, die angenommene rapide Abnahme der Coëffizienten nicht eintritt. Auch ist dieselbe keine nothwendige Folge der frühern Voraussetzungen; vielmehr läfst sich leicht zeigen, dafs durch geeignete Bestimmungen über die Funktion $f(r)$ den Constanten a_1 und a_2 jeder endliche Werth angewiesen werden kann, während alsdann bei den folgenden Coëffizienten jene Gröfsenordnung allerdings stattfindet.

Sei p die Anzahl der verschiedenen Werthe von r, denen im Innern der zu O gehörigen Wirkungssphäre Punkte des Systems entsprechen, so ist p eine endliche, durch den Werth von ϱ völlig bestimmte Zahl. Jede der Summen A_i enthält dann die nämlichen p Werthe der Funktion $f(r)$, über welche man, mit Berücksichtigung der über diese Funktion bereits getroffenen Bestimmungen, frei verfügen kann. Betrachtet man diese Werthe von $f(r)$ als Unbekannte, so fragt es sich, ob man in 2. die Werthe $A_0, A_1, \ldots A_{p-1}$ als willkürlich gegeben betrachten darf, oder ob die der Funktion $f(r)$ auferlegten Bedingungen eine Beschränkung in der Auswahl dieser Werthe nach sich ziehen.

Die Werthe von $f(r)$ müssen 1) mit der Stabilität des Systems vereinbar sein, 2) den Bedingungen der Isotropie genügen, und 3) darf keiner derselben unendlich grofs sein. Die erste Bedingung hat auf die augenblickliche Untersuchung keinen Einflufs, da sie nur das Zeichen, nicht den absoluten Werth eines Ausdrucks bestimmt, welcher von den in Frage kommenden Werthen von $f(r)$ und $f'(r)$ abhängt; die Isotropiebedingungen bleiben vorläufig ganz bei Seite, da sie erst durch die folgenden Betrachtungen auf ihren gebührenden Umfang eingeschränkt werden müssen.

Bezeichnet man jetzt die in A_i einzusetzenden Werthe von r durch r_1 oder s_1, jenachdem ihnen ein positiver oder negativer Werth von $f(r)$ entspricht, und setzt: $\sum m f(r_1) r_1{}^{2i+1} = R_i$, $-\sum m f(s_1) s_1{}^{2i+1} = R_i'$, so ist A_i als Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern gleich $R_i - R_i'$; ferner lassen sich zwischen ϱ_0 und ϱ zwei Werthe r_{1i} und s_{1i} so auswählen, dafs $R_i = r_{1i}^{2i} R_0$, $R_i' = s_{1i}^{2i} R_0'$ wird; daraus folgt

$$A_0 = R_0 - R_0',\ A_1 = r_{11}^2 R_0 - s_{11}^2 R_0', \cdots A_i = r_{1i}^{2i} R_0 - s_{1i}^{2i} R_0'.$$

Wenn nun $f(r)$ bei der Summation sein Zeichen nicht wechselt, so ist eine der Gröfsen R_0, R_0' gleich Null, also findet dann, wenigstens bei den Constanten A_i, die von **Cauchy** angenommene Gröfsenordnung statt. Werden dagegen Zeichenwechsel zugelassen, so steht nichts im Wege, der Funktion $f(r)$ einen solchen Verlauf zu geben, dafs r_{11}^2 von

s_{11}^2 um irgend eine endliche Gröfse von der Ordnung ϱ^2 verschieden ist; dann erhält man:

$$R_0 = \frac{A_1 - s_{11}^2 A_0}{r_{11}^2 - s_{11}^2}, \quad R_0' = \frac{A_1 - r_{11}^2 A_0}{r_{11}^2 - s_{11}^2},$$

$$A_i = \frac{r_{1i}^{2i} - s_{1i}^{2i}}{r_{11}^2 - s_{11}^2} A_1 - \frac{r_{1i}^{2i} s_{11}^2 - s_{1i}^{2i} r_{11}^2}{r_{11}^2 - s_{11}^2} A_0.$$

Ertheilt man jetzt den Gröfsen A_1 und A_0 endliche Werthe von derselben Ordnung, so werden R_0 und R_0' endlich und im Vergleich zu ihnen von der Ordnung $\frac{1}{\varrho^2}$, was mit keiner frühern Bestimmung im Widerspruche steht; dagegen wird der erste Theil von A_i, wenn $i \gtreqqless 2$ ist, von der Ordnung ϱ^{2i-2}, der andere von der Ordnung ϱ^{2i}, also tritt hier der oben erwähnte Umstand wirklich ein.

Durch Häufung der Bedingungen, denen $f(r)$ unterworfen ist, kann man bewirken, dafs $r_{11}^2 = s_{11}^2$ wird. Ich lasse diesen Fall im Folgenden unberücksichtigt, da es nicht der Natur der Sache angemessen zu sein scheint, die Schlufsresultate, aus denen, wie es bei Untersuchungen dieser Art stets der Fall ist, jede Spur vom besondern Charakter der Funktion $f(r)$ herausfällt, an spezielle Voraussetzungen über den Verlauf derselben zu binden.

Da dieselbe Betrachtung auf B_i anwendbar ist, so folgt, dafs in jeder der beiden Reihen $A_0, A_1, A_2 \ldots$ und $B_0, B_1, B_2, \ldots$ die zwei ersten Glieder endlicher Werthe von derselben Ordnung fähig sind, dagegen das dritte und jedes folgende Glied im Vergleich zum vorangehenden eine Gröfse von der Ordnung ϱ^2 ist. Dasselbe gilt daher auch von der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$

So lange nun in der Gleichung (3.) $\frac{\lambda}{n} = l$ so klein ist, dafs alle Glieder der rechten Seite einen merklichen Einflufs auf ihren Werth äufsern, findet offenbar kein einfacher Zusammenhang zwischen n und λ statt; ich beschränke daher die Untersuchung auf den Fall, wo l zum Radius der Wirkungssphäre in einem solchen Verhältnisse steht, dafs die Glieder, deren Coëffizienten von der Ordnung $\varrho^2, \varrho^4, \varrho^6, \ldots$ sind, keinen wesentlichen Beitrag zum vollen Werthe der rechten Seite mehr liefern. Es mufs dabei der Erfahrung überlassen werden, zu entscheiden, bis zu welchen Werthen von l alle nach dem zweiten folgenden Glieder vernachlässigt werden dürfen, während es ganz dahin gestellt bleibt, wie grofs oder klein man sich den Radius der Wirkungssphäre zu denken hat. Abgesehen von allen andern Bedingungen wird also die Formel

4. $$\alpha_1 = a_1 n^2 + (2\pi)^2 a_2 \frac{n^4}{\lambda^2}$$

für hinlänglich grofse Werthe von l den Voraussetzungen der Theorie genau entsprechen, dagegen bei abnehmendem l einmal aufhören, die Resultate derselben darzustellen.

Dies festgestellt, denke man sich durch O eine Gerade g von beliebiger Richtung gezogen, und setze, unter (rg) den Winkel zwischen g und r verstanden,

$$\mathfrak{A}_i = \Sigma m f(r) r^{2i+1} \cos^{2i+2}(rg)$$
$$\mathfrak{B}_i = \Sigma m (r f'(r) - f(r)) r^{2i+1} \cos^{2i+4}(rg);$$

dann bestehen nach Cauchy (man vergl. § 3. 43.—46. mit § 9. 10.—11.) die Bedingungen für die Isotropie darin, dafs für $i = 0, 1, 2, \ldots$ bei jeder beliebigen Richtung von g

5. $$\mathfrak{A}_i = \frac{1}{2i+3} A_i, \quad \mathfrak{B}_i = \frac{1}{2i+5} B_i$$

sein mufs.

Will man nun die Bedingung der Isotropie unbeschränkt aufrecht erhalten, so hat man zu untersuchen, ob dieser unendlichen Zahl von Bedingungsgleichungen bei einer endlichen Zahl von Werthen der Funktionen $f(r)$ und $rf'(r) - f(r)$ durch eine passende Anordnung des Systems Genüge geschehen könne, d. h. ob es möglich ist, eine solche Einrichtung des retikularen Punktensystems anzugeben, dafs diese Bedingungsgleichungen sich von selbst auf eine endliche Zahl reduziren. Dieser Untersuchung kann man sich aber ganz überheben, wenn man die Betrachtung so einschränkt, wie es vorhin geschehen ist. In der That läfst sich nachweisen, dafs bei den vorausgesetzten Werthen von l die Gleichung 4., oder was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung $s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4$ stattfindet, sobald nur die Gleichungen 5. für $i = 0$ und $i = 1$ erfüllt sind, während es ganz gleichgültig ist, ob dies auch mit den folgenden der Fall ist.

Die Gröfse s^2 ist im Allgemeinen durch eine kubische Gleichung bestimmt, deren Coëffizienten von den beiden Funktionen

$$T = \frac{1}{\Pi(2)} \mathfrak{A}_0 k^2 - \frac{1}{\Pi(4)} \mathfrak{A}_1 k^4 + \frac{1}{\Pi(6)} \mathfrak{A}_2 k^6 - \cdots$$
$$V - \mathfrak{B}_{-2} = \frac{1}{\Pi(4)} \mathfrak{B}_0 k^4 - \frac{1}{\Pi(6)} \mathfrak{B}_1 k^6 + \frac{1}{\Pi(8)} \mathfrak{B}_2 k^8 - \cdots$$

abhängen, und zwar ist für den Fall, dafs alle Isotropiebedingungen erfüllt sind, $s^2 = T + \frac{dV}{k\,dk}$. Da $\mathfrak{A}_i$ sich in die Form $r_{1i}^{2i} \cos^{2i+2}\varphi_i R_0 - s_{1i}^{2i} \cos^{2i+2}\psi_i R_0'$ bringen läfst, und ähnliches von $\mathfrak{B}_i$ gilt, so sind $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ von derselben Ordnung, wie A_i und B_i. Reduzirt man daher vorstehende Reihen auf ihre beiden ersten Glieder, so wird unter der Voraussetzung, dafs die Gleichungen 5. für $i = 0$ und $i = 1$ erfüllt sind,

$$T = \frac{1}{\Pi(3)} A_0 k^2 - \frac{1}{\Pi(5)} A_1 k^4, \quad V = \mathfrak{B}_{-2} + \frac{1}{\Pi(5)} B_0 k^4 - \frac{1}{\Pi(7)} B_1 k^6;$$

daraus ergibt sich für s^2 die nämliche kubische Gleichung, als ob in dem Falle der unbeschränkten Isotropie die Ausdrücke für T und V ebenfalls auf ihre ersten Glieder reduzirt worden wären; man erhält also, wie vorhin, $s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4$.

Drückt man in den Gleichungen $\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{3} A_0$, $\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{5} A_1$, $\mathfrak{B}_0 = \frac{1}{5} B_0$, $\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{7} B_1$, auf welche sich in Folge der über l gemachten Voraussetzung die Isotropiebedingungen reduziren, cos (rg) durch die Cosinus der Winkel aus, welche r und g mit drei rechtwinkligen Axen bilden, so liefern dieselben wegen der willkürlichen Richtung von g beziehungsweise 6, 15, 15, 28 Relationen, von denen jedesmal eine aus den übrigen folgt; die Zahl der von einander unabhängigen Bedingungen ist demnach 60. Nichts hindert, die Anzahl p der verschiedenen Werthe von r so groß vorauszusetzen, dafs diese linearen Gleichungen neben den beiden, durch welche die Werthe von $f(r)$ und $f'(r)$ mit den Gröfsen a_1 und a_2 verknüpft sind, befriedigt werden können.

Die einzige Beschränkung, der man bei der Auswahl der Werthe von a_1 und a_2 unterworfen ist, rührt von den Stabilitätsbedingungen her, und besteht darin, dafs s^2 positiv und von Null verschieden sein mufs. Diese Bedingung ist bei der gegenwärtigen Untersuchung erfüllt, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen in μ, nämlich $\sqrt{a_1}$, und umsomehr $s = \sigma$ als sehr beträchtlich vorausgesetzt wird, und die Gröfsen a_1 und a_2 demgemäfs bestimmt werden.

Wendet man die Gleichung 4. auf die Dispersion des Lichtes an, so kann man auf Grund der Erfahrung, dafs den kleinern Wellenlängen die gröfsern Brechungsindices entsprechen, das Vorzeichen der Constanten $\frac{a_1}{\alpha_1}$ und $\frac{a_2}{\alpha_1}$ bestimmen; in der That folgt aus der ersten der Gleichungen

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a_1}{\alpha_1} + (2\pi)^2 \frac{a_2}{\alpha_1} \cdot \frac{n^2}{\lambda^2}, \quad 1 = \frac{a_1}{\alpha_1} n^2 + (2\pi)^2 \frac{a_2}{\alpha_1} \cdot \frac{n^4}{\lambda^2},$$

dafs $\frac{a_2}{\alpha_1}$ negativ, aus der andern, dafs $\frac{a_1}{\alpha_1}$ positiv sein mufs. Die erstere zeigt aufserdem, dafs neben der mit wachsendem λ abnehmenden Wurzel noch eine zweite vorhanden ist, welche mit λ zugleich und zwar so wächst, dafs ihr Verhältnifs zu λ sich einer von Null verschiedenen festen Grenze nähert. In Folge dieser Zeichenbestimmung kann man zwei positive Gröfsen n_0 und λ_0 so wählen, dafs $\frac{a_1}{\alpha_1} = \frac{2}{n_0^2}$, $(2\pi)^2 \frac{a_2}{\alpha_1} = -\frac{\lambda_0^2}{n_0^4}$ wird; dadurch nimmt die Gleichung 4. folgende Form an:

$$\left(\frac{n_0}{n}\right)^4 - 2\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = 0. \tag{6.}$$

Von den Wurzeln dieser Gleichung müssen drei verworfen werden, nämlich zwei wegen ihres Vorzeichens, die dritte aus dem doppelten Grunde, weil sie gegen die Voraussetzung mit λ zugleich wächst, und weil sie für den gebrochenen Strahl eine so kleine Wellenlänge liefern würde, dafs die in 3. vorgenommene Vernachlässigung mindestens nicht als zulässig nachgewiesen werden kann.

Die einzige Wurzel, welche allen Voraussetzungen nachweisbar genügt, ist die folgende:

$$n = \frac{n_0\sqrt{2}}{\sqrt{\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)} + \sqrt{\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)}}, \tag{7.}$$

wo alle Radikale positiv zu nehmen sind; dieselbe ist für $\lambda > \lambda_0$ reell, für $\lambda < \lambda_0$ complex.*)

Aus dem Frühern folgt, dafs diese Formel ihre Gültigkeit verliert, sobald λ unter eine, von der Erfahrung festzustellende Grenze sinkt. Läfst man diese Einschränkung für einen Augenblick unberücksichtigt, so kann man zunächst die Gröfsen n_0 und λ_0 von ihrer bisherigen Definition durch die Constanten der Molekulartheorie unabhängig machen, und durch rein physikalische Bedingungen bestimmen. Da nämlich, wie aus der Theorie der Lichtbrechung und Reflexion bekannt ist, Strahlen mit complexem Brechungsindex total reflektirt werden, so folgt, dafs von μ nach m nur solche Strahlen übergehen können, deren Wellenlänge über der, von der Natur beider Medien abhängigen Grenze λ_0 liegt, während alle Strahlen von kleinerer Wellenlänge bei jedem Einfallswinkel total reflektirt werden. Es sind daher n_0 und λ_0 die Elemente des äußersten von μ nach m brechbaren Strahls.

Die Wellenlänge dieses charakteristischen Strahls ist im Allgemeinen sehr klein im Vergleich zur Wellenlänge der gewöhnlich sichtbaren Strahlen; nur bei der von Dale und Gladstone untersuchten Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff gehört sie einem der bis jetzt beobachteten Theile des Spektrums an, indem bei dieser Substanz $\lambda_0 = 0{,}112$ ist, während nach Esselbach die Wellenlänge von R in dem hier angewandten Mafse 0,114 ist.

Da der Nenner von n sich um so weniger von 2 unterscheidet,

*) Setzt man $\lambda_0 = \lambda \sin \varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, so nimmt die Gleichung 7. die Form $n \cos\frac{\varphi}{2} = \text{const.}$ an, welche jedoch für die numerische Rechnung weniger geeignet ist, als die obige.

je größer λ im Vergleich zu λ_0 ist, so müssen alle Strahlen, deren Wellenlänge hinlänglich gröfser als λ_0 ist, nahezu in derselben Richtung gebrochen werden. Das nach obiger Formel gebildete Spektrum ist daher von zwei Richtungen begrenzt, die den Brechungsindices n_0 und $\frac{n_0}{\sqrt{2}}$ entsprechen; die erstere wird durch den charakteristischen Strahl gebildet, in der andern concentriren sich alle Strahlen von beträchtlicher Wellenlänge.

Die Constante n_0 bestimmt demgemäfs bei gegebenem Einfallswinkel die beiden Grenzrichtungen des Spektrums, während λ_0 die Grenze der im Spektrum vorhandenen Strahlen angibt, und zugleich ihre Vertheilung in demselben bestimmt. Man mufs daher die erstere als das Mafs des Brechungsvermögens, die andere als das Mafs des Dispersionsvermögens betrachten.

Um Mifsverständnissen zu begegnen, wiederhole ich, dafs diese Gesetze nur unter bestimmten Einschränkungen gelten, indem sie bei abnehmendem λ einmal aufser Kraft treten werden, und überdies der Fall nicht ausgeschlossen ist, dafs sie in der Wirklichkeit durch Erscheinungen modifizirt werden, von denen die gegenwärtige Untersuchung wegen der Bedingung der Superposition keine Rechenschaft zu geben vermag.

Dafs sich obige Formel wirklich auf die Brechung der Lichtwellen anwenden läfst, ergibt sich aus folgender Tafel, in welcher verschiedene Grade des Dispersionsvermögens, bis zum stärksten aufwärts, vertreten sind; N ist der beobachtete, n der nach 7. berechnete Index; bei den Strahlen, deren Elemente zur Berechnung von n_0 und λ_0 benutzt worden sind, ist n nicht angegeben. Für die Wellenlängen der Strahlen B, C, D, E, F, G und H wurden, in $\frac{1}{10\,000}$ Par. Zoll ausgedrückt, die Zahlen

0,2541 0,2424 0,2175 0,1944 0,1791 0,1586 0,1457

angenommen; dieselben bilden das arithmetische Mittel aus den beiden, nur wenig von einander abweichenden Angaben Fraunhofer's, und müssen bei der Ungewifsheit, welche von beiden die genauere ist, als die wahrscheinlichsten betrachtet werden. Da diese Zahlen nur bis auf vier Stellen bekannt, und in der letzten jedenfalls unsicher sind, so mufsten auch alle Indices auf eine entsprechende Zahl von Stellen reduzirt werden.

Die Beobachtungen von Baden-Powell und der Hrn. Dale und Gladstone finden sich in den Proceed. of the Roy. Soc., Novemberheft 1859; die übrigen Angaben sind dem Handbuche von Beer entnommen.

Äther (Dale und Gladstone).

$n_0 : \sqrt{2} = 1{,}3482 \quad n_0 = 1{,}9068 \quad \lambda_0 = 0{,}04827.$

	B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
N	1,3545	1,3554	1,3566	1,3590	1,3606	1,3646	1,3683
n		1,3551	1,3568	1,3590	1,3610		1,3678
N—n		+ 3	— 2	0	— 4		+ 5

Spiköl (Baden-Powell).

$n_0 : \sqrt{2} = 1{,}4607 \quad n_0 = 2{,}0658 \quad \lambda_0 = 0{,}06546.$

N	1,4732	1,4746	1,4783	1,4829	1,4868	1,4944	1,5009
n		1,4745	1,4779	1,4825	1,4866		1,5013
N—n		+ 1	+ 4	+ 4	+ 2		— 4

Gelbes Flintglas von Guinand (Dutirou).

$n_0 : \sqrt{2} = 1{,}7489 \quad n_0 = 2{,}4733 \quad \lambda_0 = 0{,}07673.$

N	1,7697	1,7718	1,7777	1,7852	1,7924	1,8062	1,8186
n		1,7718	1,7778	1,7855	1,7927		1,8184
N—n		0	— 1	— 3	— 3		+ 2

Phenylhydrat (Dale und Gladstone).

$n_0 : \sqrt{2} = 1{,}5220 \quad n_0 = 2{,}1525 \quad \lambda_0 = 0{,}07966.$

N	1,5416	1,5433	1,5488	1,5564	1,5639	1,5763	1,5886
n		1,5436	1,5492	1,5566	1,5634		1,5880
N—n		— 3	— 4	— 2	+ 5		+ 6

Schwefelkohlenstoff (Dale und Gladstone).

$n_0 : \sqrt{2} = 1{,}5854 \quad n_0 = 2{,}2422 \quad \lambda_0 = 0{,}09897.$

N	1,6177	1,6209	1,6303	1,6434	1,6554	1,6799	1,7035
n		1,6212	1,6307	1,6437	1,6559		1,7028
N—n		— 3	— 4	— 3	— 5		+ 7

Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff (Dale und Gladstone).

$n_0 : \sqrt{2} = 1{,}8812 \quad n_0 = 2{,}6604 \quad \lambda_0 = 0{,}1121.$

N	1,9314	*	1,9527	1,9744	1,9941	2,0361	2,0746
n		1,9369	1,9523	1,9737	1,9942		2,0783
N—n			+ 4	+ 7	— 1		— 37

* ist nicht beobachtet.

Um mit Sicherheit beurtheilen zu können, ob die Werthe der Differenzen $N-n$ zum Schlusse auf eine Ungenauigkeit der Formel berechtigen, mufs man die Grenzen bestimmen, innerhalb deren sich die Unterschiede zwischen den berechneten und den wahren Indices halten müssen, wenn die Formel als absolut genau vorausgesetzt wird, und die Beobachtungsfehler bestimmt angenommene Grenzen erreichen, aber nicht überschreiten können; daraus ergeben sich unmittelbar die Grenzen der, mit der Gültigkeit der Formel verträglichen Abweichungen der berechneten von den beobachteten Indices. Ich habe die etwas umständliche Rechnung für Schwefelkohlenstoff ausgeführt, unter der Voraussetzung, dafs die Fehler, mit denen die beobachteten Indices und Wellenlängen behaftet sind, höchstens eine, bezüglich zwei Einheiten der letzten Stelle betragen. Dieser Substanz wurde deshalb der Vorzug gegeben, weil sie bei ihrer starken Dispersion und der Vollständigkeit der Beobachtungsreihe sich zu einem wirklichen Prüfungsmittel der Dispersionsformel eignet, und aufserdem die bei ihr vorkommenden Differenzen $N-n$ nicht unbeträchtlich sind. Es hat sich ergeben, dafs, wenn die Formel volle Genauigkeit besitzt, die Unterschiede zwischen den berechneten und den wahren Indices in Folge der bei den Beobachtungen als möglich vorausgesetzten Fehler, abgesehen vom Zeichen und in Einheiten der letzten Stelle, für die Strahlen *C, D, E, F, H* die Grenzen

2 3 4 5 9

erreichen können; hätte man weitere Grenzen für die Beobachtungsfehler angenommen, so würden diese Zahlen gröfser ausgefallen sein. Addirt man hierzu die möglichen Abweichungen der beobachteteu von den wahren Indices, so erhält man für die zulässigen Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Indices die Grenzen

3 4 5 6 10.

Die absoluten Werte der wirklichen Differenzen sind der Tafel zufolge gleich

3 4 3 5 7,

und werden demnach vollständig durch die Beobachtungsfehler erklärt, selbst wenn man den Beobachtungen eine Genauigkeit zuschreibt, welche sie zuverlässig nicht besitzen.

Es schien überflüssig, diese Untersuchung für die übrigen Substanzen der Tafel zu wiederholen, da bei denselben die Differenzen durchweg kleiner, als beim Schwefelkohlenstoff sind; die starke Abweichung beim Index *H* der Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff läfst sich vielleicht durch die Schwierigkeit erklären, bei der durch die starke Dispersion verursachten ungemeinen Lichtschwäche noch sichere Beobachtungen anzustellen.

Über die Dispersionsverhältnisse nicht isotroper Medien ist bis jetzt nichts genügendes festgestellt; es lag jedoch nahe, durch numerische Rechnung zu untersuchen, ob in solchen Fällen der Lichtbrechung, wo sich die Richtung der Strahlen nach dem gewöhnlichen Gesetze ändert, auch für die Dispersion das gewöhnliche Gesetz gelte. Die folgende Tafel zeigt, dafs dies, soweit die Genauigkeit der Beobachtungen reicht, wirklich der Fall ist; aufserdem ergibt sich aus den schönen Beobachtungen Esselbach's (Poggendorff's Annalen 98.) das wichtige Resultat, dafs die Formel 7., wenigstens bei einer Substanz, auf alle zwischen B und dem Esselbach'schen Streifen R enthaltenen Wellenlängen anwendbar ist.

Bei den circularpolarisirenden Substanzen zeigt sich eine Unregelmäfsigkeit, die sich allerdings auch beim Äther findet; dieselbe besteht in dem öftern Zeichenwechsel der Differenzen $N-n$. Wären blofs die zur Berechnung von n_0 und λ_0 benutzten Beobachtungen ungenau, alle übrigen dagegen in Übereinstimmung mit dem durch 7. ausgedrückten Gesetze, so würde in der Differenzenreihe höchstens ein einziger Zeichenwechsel vorkommen können.

Bei Lavendelöl H ist die Beobachtung als unsicher bezeichnet; die starke Abweichung bei D rührt, wie es scheint, davon her, dafs an Stelle von D noch einmal C beobachtet worden ist.

Circularpolarisirende Mittel.

Lavendelöl (Baden-Powell).

$n_0:\sqrt{2} = 1,4525$ $n_0 = 2,0541$ $\lambda_0 = 0,06335$.

N	1,4641	1,4658	1,4660	1,4728	1,4760	1,4837	1,4930?
n		1,4653	1,4685	1,4727	1,4766		1,4900
$N-n$		+ 5	− 25	+ 1	− 6		+ 30

Terpentinöl (Fraunhofer).

$n_0:\sqrt{2} = 1,4599$ $n_0 = 2,0647$ $\lambda_0 = 0,06035$.

N	1,4705	1,4715	1,4744	1,4784	1,4817	1,4882	1,4939
n		1,4716	1,4745	1,4783	1,4818		1,4938
$N-n$		− 1	− 1	+ 1	− 1		+ 1

Einaxige Krystalle.

Ordentlicher Strahl im Bergkrystall, elliptisch pol. (Esselbach).

$n_0:\sqrt{2} = 1,5348$ $n_0 = 2,1706$ $\lambda_0 = 0,04935 = 133,6$ Milliontel-Millim.

λ	B 687,4	C 656,4	D 588,6	E 526,0	F 484,5	G 428,7	H 392,9
N	1,5414	1,5424	1,5446	1,5746	1,5500	1,5546	1,5586
n	1,5422	1,5430	1,5450		1,5500	1,5543	1,5583
$N-n$	− 8	− 6	− 4		0	+ 3	+ 3

λ	L 379,1	M 365,7	N 349,8	O 336,0	P 329,0	Q 323,2	R 309,1
N	1,5605	1,5621	1,5646	1,5674	1,5690	1,5702	1,5737
n	1,5601		1,5648	1,5675	1,5690	1,5704	1,5740
$N-n$	+ 4		− 2	− 1	0	− 2	− 3

λ ist in Milliontel-Millimetern angegeben.

Hauptindices des Doppelspaths (Rudberg).

ω. $n_0:\sqrt{2} = 1,6394$ $n_0 = 2,3185$ $\lambda_0 = 0,06458$.

N	1,6531	1,6545	1,6585	1,6636	1,6680	1,6762	1,6833
n		1,6545	1,6583	1,6632	1,6677		1,6836
$N-n$		0	+ 2	+ 4	+ 3		− 3

ε. $n_0:\sqrt{2} = 1,4774$ $n_0 = 2,0893$ $\lambda_0 = 0,04733$.

N	1,4839	1,4845	1,4864	1,4887	1,4907	1,4945	1,4978
n		1,4845	1,4863	1,4886	1,4906		1,4978
$N-n$		0	+ 1	+ 1	+ 1		0

Hauptindices zweiaxiger Krystalle (Rudberg).

Arragonit (negativ).

α. $n_0:\sqrt{2} = 1,6672$ $n_0 = 2,3578$ $\lambda_0 = 0,06344$.

N	1,6806	1,6820	1,6859	1,6908	1,5952	1,7032	1,7101
n		1,6820	1,6857	1,6906	1,6950		1,7105
$N-n$		0	+ 2	+ 2	+ 2		− 4

β. $n_0:\sqrt{2} = 1,6632$ $n_0 = 2,3521$ $\lambda_0 = 0,06284$.

N	1,6763	1,6778	1,6816	1,6863	1,6905	1,6984	1,7051
n		1,6776	1,6814	1,6860	1,6903		1,7055
$N-n$		+ 2	+ 2	+ 3	+ 2		− 4

γ. $n_0 : \sqrt{2} = 1,5207$ $n_0 = 2,1506$ $\lambda_0 = 0,04815$.

N	1,5275	1,5282	1,5301	1,5326	1,5348	1,5388	1,5423
n		1,5282	1,5301	1,5325	1,5347		1,5424
$N-n$		0	0	+ 1	+ 1		− 1

Topas (positiv).

α. $n_0 : \sqrt{2} = 1,6098$ $n_0 = 2,2766$ $\lambda_0 = 0,05058$

N	1,6179	1,6188	1,6211	1,6241	1,6265	1,6312	1,6351
n		1,6187	1,6209	1,6238	1,6264		1,6354
$N-n$		+ 1	+ 2	+ 3	+ 1		− 3

β. $n_0 : \sqrt{2} = 1,6025$ $n_0 = 2,2662$ $\lambda_0 = 0,05040$.

N	1,6105	1,6114	1,6137	1,6167	1,6191	1,6237	1,6275
n		1,6113	1,6135	1,6163	1,6189		1,6278
$N-n$		+ 1	+ 2	+ 4	+ 2		− 3

γ. $n_0 : \sqrt{2} = 1,6004$ $n_0 = 2.2633$ $\lambda_0 = 0,05039$.

N	1,6084	1,6094	1,6116	1,6145	1,6170	1,6215	1,6254
n		1,6092	1,6114	1,6143	1,6168		1,6257
$N-n$		+ 2	+ 2	+ 2	+ 2		− 3

Nachtrag.

Aus meinen Untersuchungen über die Dispersion des Lichtes, von denen ein Auszug in der Sitzung vom 14. d. M. vorgelegt worden ist, hat sich ergeben, dafs das Spektrum eines aus Strahlen von allen Wellenlängen gemischten Lichtes zwischen zwei Richtungen eingeschlossen ist, über welche hinaus keine Strahlen gebrochen werden; die eine von diesen Begrenzungen rührt davon her, dafs alle Strahlen, deren Wellenlänge kleiner als eine bestimmte Strecke λ_0 ist, an der Oberfläche der brechenden Substanz total reflektirt werden, und deshalb im Spektrum fehlen müssen; in der andern Grenzrichtung concentriren sich alle Strahlen von beträchtlicher Wellenlänge. Die zu diesen Richtungen gehörigen Brechungsindices sind in meiner Abhandlung durch n_0 und $\frac{n_0}{\sqrt{2}}$ bezeichnet, und in den beigefügten Tafeln für jede Substanz angegeben. Es wurden dabei absichtlich alle Folgerungen unterlassen, welche sich

aus den Werthen dieser Indices auf die Ausdehnung der dunklen Gebiete des Spektrums ziehen lassen, und zwar bei den brechbarsten Strahlen aus dem wiederholt angegebenen Grunde, weil in diesen Theilen des Spektrums die von mir gegebene Dispersionsformel, unbeschadet der Richtigkeit der allgemeinen Theorie, ihre Gültigkeit verlieren kann, bei den Strahlen von der geringsten Brechbarkeit dagegen, weil keine Beobachtungen vorhanden sind, die eine Vergleichung mit der Theorie gestatten.

Der einzige Versuch, den Brechungsindex der äufsersten nachweisbaren dunkeln Wärmestrahlen zu bestimmen, ist meines Wissens von Müller (Poggendorff's Annalen 105. p. 352) gemacht worden. Müller liefs ein, durch ein Crownglasprisma entworfenes Sonnenspektrum auf einen Schirm fallen, in einer Entfernung, bei welcher seine Breite 18^{mm} betrug. In diesem Spektrum bedeckte jede Strahlengattung eine, nach Eisenlohr's Vermuthung (Pogg. Ann. 109. pag. 240) 8^{mm}, jedenfalls aber nicht weniger als 2^{mm} breite Fläche. Mittelst der Thermosäule wurde nachgewiesen, dafs die weniger brechbaren dunkeln Wärmestrahlen sich jenseits B über eine Fläche von ungefähr gleicher Breite, wie das leuchtende Spektrum erstreckten.

Aus dieser Beobachtung, welche zuerst von Franz (Pogg. Ann. 101.) gemacht worden ist, schliefst Müller 1), dafs in diesem Spektrum der Streifen B in der Mitte zwischen H und den äufsersten dunkeln Wärmestrahlen W liege, und dafs aus diesem Grunde 2) der Index von B das arithmetische Mittel aus den Indices von H und W sei. Da nach Fraunhofer für Crownglas $n_B = 1,526$, $n_H = 1,546$ ist, so findet Müller hieraus $n_W = 1,506$, während die Annäherungsformel Cauchy's $n_W = 1,5156$ liefert. Aus der meinigen ergibt sich $n_W = 1,5163$.

Hierbei ist nun zu bemerken, dafs die von Müller angewandte Formel nur dann mit einiger Annäherung gültig sein würde, wenn die Indices von H, B und W nur um zu vernachlässigende Gröfsen von einander verschieden wären; aufserdem hat der Schlufs, B liege in der Mitte zwischen H und W, keinen rechten Sinn, indem von den Entfernungen der Strecken, über welche die genannten Strahlengattungen sich im Spektrum verbreiten, doch nur auf Grund bestimmt anzugebender Conventionen gesprochen werden kann.

Dem gegenüber sucht Eisenlohr am angeführten Orte zu zeigen, dafs die Versuche Müller's mit Rücksicht auf die Divergenz der Sonnenstrahlen eine genügende Erklärung finden, wenn man den kleinsten Brechungsindex für Crownglas zu 1,516 statt zu 1,506 annimmt. Eine bessere Bestätigung meiner Formel würde sich nicht denken lassen, wenn nicht Hr. Eisenlohr zur Begründung seiner Schlüsse genöthigt gewesen wäre, bei der gänzlichen Abwesenheit aller erforderlichen Angaben über die Anordnung der Müller'schen Versuche zu Hypothesen über dieselbe seine Zuflucht zu nehmen.

Auf eine Vergleichung der Dispersionstheorie mit experimentellen Untersuchungen über die dunkeln Theile des Spektrums wird man wohl vorläufig verzichten müssen, da eine, auch nur angenäherte Bestimmung der Elemente derjenigen Strahlen, welche in diese Gebiete hinein gebrochen werden, mit zu bedeutenden Schwierigkeiten verbunden zu sein scheint.

Anmerkung.

Die Christoffel'sche Abhandlung „Über die Dispersion des Lichts" sowie der Nachtrag dazu wurden von Weierstraſs der Akademie am 14. und am 31. October 1861 mitgeteilt.

F.

VI.

Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn Weierstrass.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 63, 1864, S. 255—272.)

1.

Durch Untersuchungen über die kleinen Schwingungen eines zuerst von Cauchy behandelten Systems materieller Punkte bin ich zur Verallgemeinerung einiger wichtigen Theoreme des Herrn Weierstrass gelangt, welche ich jenen Untersuchungen voranschicke, da sie auch unabhängig von denselben von algebraischem Interesse zu sein scheint.

Ich bezeichne durch

$$\varphi = \Sigma[gh]u_g v_h, \quad \psi = \Sigma(gh)u_g v_h,$$
$$g, h = 0, 1, \ldots n$$

zwei bilineare Functionen der Variabeln $\begin{vmatrix} u\, u_1 \ldots u_n \\ v\, v_1 \ldots v_n \end{vmatrix}$, und durch Φ und Ψ die Werthe, welche sie annehmen, wenn jedem Paare von Variabeln conjugirte Werthe

$$u_g = x_g + iy_g, \quad v_g = x_g - iy_g$$

ertheilt werden.

Sind alsdann folgende Voraussetzungen erfüllt,

1) dass die Coefficienten $[gh]$ und $[hg]$, sowie (gh) und (hg) für alle Werthe von g und h zu einander conjugirt sind, und

2) dass Φ nur dann verschwinden kann, wenn die reellen Variabeln x und y sich alle zugleich auf Null reduciren,

so finden folgende Lehrsätze statt:

I. Φ ist reell und von unveränderlichem Zeichen.

II. Die Determinante der bilinearen Function φ ist von Null verschieden.

III. Die Determinante $\Delta(s)$ der bilinearen Function $\psi - s\varphi$ verschwindet nur für reelle Werthe von s.

IV. Ist $\Delta_{ik}(t)$ irgend eine erste Unterdeterminante von $\Delta(t)$ so ist die Zerfällung von

$$\frac{\Delta_{ik}(t)}{\Delta(t)}$$

in Partialbrüche stets frei von allen Gliedern, deren Nenner in Bezug auf t den ersten Grad übersteigt.

Die beiden letzten Theoreme gehen in die von Herrn **Weierstrass** (Monatsberichte der Berliner Akademie vom 4. März 1858, pag. 213 u. f.) aufgestellten über, wenn man voraussetzt, dass in den Coefficienten $[gh]$ und (gh) die imaginären Theile fehlen, ohne an den übrigen Bedingungen etwas zu ändern. Sie lassen sich umgekehrt aus diesen herleiten, indem man dieselben auf die Determinante $E(s)$ der homogenen Function zweiten Grades $\Psi - s\Phi$ anwendet, und dann die, von jeder Voraussetzung über die Coefficienten $[gh]$ und (gh) unabhängige Identität $E(s) = [2^{n+1}\Delta(s)]^2$ benutzt.[1]

Im Folgenden ist ein anderer Weg eingeschlagen worden.

2.

Zunächst bemerkt man, dass wegen 1)

$$\Phi = \Sigma[gh](x_g + iy_g)(x_h - iy_h)$$

zu

$$\Sigma[hg](x_g - iy_g)(x_h + iy_h) = \Phi$$

conjugirt, also reell ist. Dasselbe gilt von Ψ.

Nun würde Φ als stetige Function wegen der zweiten Bedingung sein Zeichen nur in dem Augenblicke wechseln können, wo es selbst mit allen reellen Variablen x und y zugleich durch Null geht. Dass jedoch auch hierbei kein Zeichenwechsel von Φ eintreten kann, erhellt sofort, wenn man alle Variablen, einmal zugleich, dann auch eine nach der anderen bis Null abnehmen, und von dort zu bestimmten Werthen übergehen läßt. In beiden Fällen gelangt Φ als einwerthige Function zum nämlichen Endwerthe, während im zweiten Falle der Werth $\Phi = 0$, also auch jeder Zeichenwechsel von Φ umgangen worden ist.

---

1) Für den Fall, wo $\varphi = uv + u_1 v_1 \ldots$ gesetzt wird, ist das Theorem III. bereits von Herrn **Hermite** aufgestellt werden (Comptes R. tom. 41, p. 181—183). Herr **Hermite** stützt seinen Beweis auf eine Transformation von $\Delta(s)$ und das von Herrn **Borchardt** für den Fall reeller Elemente (ik) allgemein nachgewiesene Theorem (dieses Journal Band 30 und **Liouville's** Journal 12). Unter den nämlichen Voraussetzungen ist der Satz von Herrn **Clebsch** (dieses Journal Band 57, pag. 327) bewiesen worden; in einer spätern Abhandlung hat Herr **Clebsch** den Satz für den allgemeineren Fall ausgesprochen, wo bei den oben gestellten Bedingungen die Coefficienten von φ beliebige reelle Werthe haben (dieses Journal Band 62, pag. 235).

Dies festgestellt, bezeichnen wir durch s und $u, u_1, \ldots u_n$ Grössen, welche den von sämmtlichen v freien Gleichungen

$$(1.) \qquad \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial v_h} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_h} = 0, \quad h = 0, 1, \ldots n$$

genügen.

Dann ist

$$(2.) \qquad \frac{1}{s^{n+1}}\Delta(s) = 0$$

die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, daß man, bei von Null verschiedenem s, den Gleichungen (1.) genügen kann, ohne alle unbekannten Größen $u, u_1, \ldots u_n$ gleich Null zu setzen.

Sei also s irgend eine Grösse, welche der Gleichung (2.) genügt, und von den Grössen $u, u_1, \ldots u_n$ mindestens eine von Null verschieden.

Zerlegt man alsdann jedes u in seinen reellen und imaginären Bestandtheil, so dass $u_g = x_g + iy_g$ wird, und bestimmt hieraus die conjugirten Werthe $x_g - iy_g = v_g$, so ergiebt sich aus (1.)

$$\frac{1}{s}\Sigma v_h \frac{\partial\psi}{\partial v_h} = \Sigma v_h \frac{\partial\varphi}{\partial v_h},$$

d. i.

$$\frac{1}{s}\Psi = \Phi.$$

Da aber Ψ und Φ beide reell sind, und letzteres, was auch s sein mag, von Null verschieden ist, so kann 1) s nicht imaginär sein, d. h. alle Wurzeln der Gleichung $\Delta(s) = 0$ sind reell, und 2) kann s nicht unendlich gross sein, d. h. die Determinante von φ ist von Null verschieden.

Zum Beweise des vierten Satzes genügt es, zu zeigen, daß jede m-fache Wurzel der Gleichung $\Delta(s) = 0$ zum Mindesten $(m-1)$-fache Wurzel sämmtlicher Gleichungen $\Delta_{ik}(s) = 0$ ist.

Zu diesem Zwecke bemerke man zunächst, daß die in 1) und 2) gestellten Bedingungen nicht aufhören erfüllt zu sein, wenn man in der Function ψ den Coefficienten (kk) um eine reelle Grösse ϱ, oder die beiden conjugirten Coefficienten (gh) und (hg) um die conjugirten Grössen $\varrho e^{\alpha i}$ und $\varrho e^{-\alpha i}$ vermehrt.

Bezeichnet man durch $\Delta_{gh}(t)$ die aus einer Aenderung des Elementes $(gh) - t[gh]$ entspringende Unterdeterminante von $\Delta(t)$, so erhält man an Stelle der Gleichung $\Delta(t) = 0$ im ersten Falle

$$(3.) \qquad \Delta(t) + \varrho\Delta_{kk}(t) = 0,$$

im zweiten dagegen

$$(4.)\qquad \Delta(t)+\varrho e^{\alpha i}\Delta_{gh}(t)+\varrho e^{-\alpha i}\Delta_{hg}(t)+\varrho^2\frac{\partial^2\Delta(t)}{\partial(gh)\partial(hg)}=0.$$

Folglich sind alle Wurzeln dieser beiden Gleichungen reell. Wenn s eine m-fache Wurzel der Gleichung $\Delta(t)=0$ ist, so muß demnach jede der beiden vorstehenden Gleichungen (3.) und (4.) m reelle Wurzeln besitzen, die sämmtlich für $\varrho=0$ in s übergehen. Wenn diese m Wurzeln nicht alle für jedes ϱ gleich s sind, woraus offenbar der zu beweisende Satz schon folgen würde, so muss wenigstens eine von ihnen sich mit ϱ ändern.

Seit t eine solche Wurzel. Unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von ϱ hinlänglich klein ist, kann man t durch einen nach steigenden Potenzen von ϱ geordneten Ausdruck darstellen, und erhält, wenn man sich auf die beiden ersten Glieder dieser Entwicklung beschränkt,

$$t=s+a\varrho^{\mu}\ldots$$

In dieser Gleichung ist a reell und von ϱ unabhängig, μ *ist eine von Null verschiedene positive ganze Zahl.*

Wäre μ negativ oder Null, so würde t bei abnehmendem ϱ nicht gegen die Grenze s convergiren; wäre μ eine positive, aber keine ganze Zahl, so würde man für t eine Reihe imaginärer Werthe erhalten können, indem man, was auf den Werth von a keinen Einfluss hat, ϱ negativ, und für ϱ^{μ} einen der complexen Werthe wählt, deren diese Potenz unter den angegebenen Voraussetzungen fähig ist.

Um hieraus den Beweis des vierten Satzes abzuleiten, wie zu jedem anderen Beweise des nämlichen Satzes, ist es nothwendig, zu bemerken, dass bei reellem t die Determinante

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix}(00)-t[00] & (10)-t[10] & \ldots\\ (01)-t[01] & (11)-t[11] & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix}$$

ebenfalls reell ist. Man erkennt dies sofort, wenn man das Zeichen der $\sqrt{-1}$ ändert, wodurch jede m^{te} Horizontalreihe in die m^{te} Verticalreihe verwandelt wird. Da dies gilt, so lange die in art. 1 für die Coefficienten der Functionen ψ und φ gestellten Bedingungen erfüllt sind, so ergiebt sich gleichzeitig die Realität des Ausdrucks, um den $\Delta(t)$ in der Gleichung (4.) vermehrt worden ist. Dividirt man denselben durch ϱ, und lässt hierauf ϱ verschwinden, so folgt, dass $e^{\alpha i}\Delta_{gh}(t)+e^{-\alpha i}\Delta_{hg}(t)$ für jedes reelle α und t reell, also $\Delta_{gh}(t)$ zu $\Delta_{hg}(t)$ conjugirt ist.

Multiplicirt man endlich die Gleichung (4.) mit $\Delta(t)$, so kann man sie mittelst der bekannten Identität

$$\Delta\frac{\partial^2\Delta}{\partial(gh)\partial(hg)}=\Delta_{gh}\Delta_{hg}-\Delta_{gg}\Delta_{hh}$$

in folgende Form bringen

$$(5.)\qquad [\Delta(t)+\varrho e^{\alpha i}\Delta_{gh}(t)][\Delta(t)+\varrho e^{-\alpha i}\Delta_{hg}(t)]=\varrho^2\Delta_{gg}(t)\Delta_{hh}(t),$$

wo die beiden Factoren der linken Seite zu einander conjugirt sind.

Dies festgestellt, sei

$$\frac{\Delta(t)}{(t-s)^m}=c\quad\text{für}\quad t=s.$$

Dividirt man die Gleichung (3.) in der Voraussetzung eines verschwindenden ϱ durch $a^{-\frac{1}{\mu}}(t-s)^m=\varrho(t-s)^{m-\frac{1}{\mu}}$, so folgt für $\varrho=0$ oder $t=s$

$$ca^{\frac{1}{\mu}}+\lim.\frac{\Delta_{kk}(t)}{(t-s)^{m-\frac{1}{\mu}}}=0.$$

Da $ca^{\frac{1}{\mu}}$ weder Null noch unendlich gross ist, so muss $m-\frac{1}{\mu}$ eine ganze Zahl, also μ selbst als positive ganze Zahl gleich 1 sein.

Daraus schliesst man, dass $\Delta_{kk}(t)$ mindestens $(m-1)$-mal durch $t-s$ theilbar ist.

Dividirt man die Gleichung (5.) bei verschwindendem ϱ zweimal durch $(t-s)^m : a\varrho^{\mu-1}=\varrho(t-s)^{m-1}$, so folgt für $\varrho=0$ oder $t=s$

$$\lim.\left[ca\varrho^{\mu-1}+e^{\alpha i}\frac{\Delta_{gh}(t)}{(t-s)^{m-1}}\right]\left[ca\varrho^{\mu-1}+e^{-\alpha i}\frac{\Delta_{hg}(t)}{(t-s)^{m-1}}\right]=\lim.\frac{\Delta_{gg}(t)}{(t-s)^{m-1}}\cdot\frac{\Delta_{hh}(t)}{(t-s)^{m-1}}.$$

Da die rechte Seite nicht unendlich gross ist, so gilt dasselbe von den beiden conjugirten Factoren zur Linken. Beachtet man noch, dass $\mu-1$ nicht negativ sein kann, so folgt, dass $\Delta_{gh}(t)$ und $\Delta_{hg}(t)$ in jedem Falle durch $(t-s)^{m-1}$ theilbar sind, w. z. b. w.

Bezeichnet man daher die Wurzeln der Gleichung $\Delta(t)=0$, so weit sie von einander verschieden sind, durch

$$s,\ s_1,\ \ldots\ s_p,$$

so folgt aus dem vierten Satze, dass man durch Zerfällung in Partialbrüche erhält

$$(6.)\qquad \frac{\Delta_{ik}(t)}{\Delta(t)}=\sum_{\delta}\frac{A_{ik}^{\delta}}{s_{\delta}-t},$$

wo die Summation sich über die verschiedenen Wurzeln s_{δ} erstreckt, und sämmtliche A von t unabhängig sind.

3.

Die in der Gleichung (6.) eingeführten Grössen A treten bei verschiedenen Untersuchungen auf, weshalb es gestattet sein mag, im Folgenden den Ursprung ihrer wesentlichsten Eigenschaften nachzuweisen.

Man bemerkt zunächst die identische Gleichung

$$(7.)\qquad \sum_{g,h}[(gh)-z[gh]]\,\varDelta_{ih}(x)\,\varDelta_{gk}(y) = \frac{(y-z)\,\varDelta(x)\,\varDelta_{ik}(y)+(z-x)\,\varDelta(y)\,\varDelta_{ik}(x)}{y-x},$$

deren Richtigkeit aus dem Umstande folgt, dass ihre beiden Seiten in Bezug auf z vom ersten Grade sind, und überdies für zwei Werthe von z, nämlich $z=x$ und $z=y$ übereinstimmen.

Dieselbe enthält in symbolischer Vereinigung alle Relationen zwischen den Coefficienten der Functionen φ und ψ und den Grössen A, welche in Bezug auf die letztern vom zweiten Grade sind. Um diese Relationen zu erhalten, darf man die Gleichung (7.) nur durch $\varDelta(x)\varDelta(y)$ dividiren, und auf beiden Seiten die Formel (6.) anwenden.

Zwischen den nämlichen Grössen bestehen ferner zwei Systeme von Gleichungen, welche nach den Grössen A linear sind. Diese Formelnsysteme sind in den folgenden Gleichungen enthalten, welche den Ausgangspunkt der Untersuchungen des Herrn Weierstrass bilden. Aus der Definition der Determinanten $\varDelta(x)$ und $\varDelta_{ik}(x)$ ergiebt sich

$$(8.)\qquad \left|\begin{aligned} u_g &= \sum_h \frac{\varDelta_{gh}(x)}{\varDelta(x)}\cdot\frac{\partial(\psi-x\varphi)}{\partial v_h},\\ v_h &= \sum_g \frac{\varDelta_{gh}(x)}{\varDelta(x)}\cdot\frac{\partial(\psi-x\varphi)}{\partial u_g}. \end{aligned}\right.$$

Wendet man hier die Formel (6.) an, so folgt

$$u_g = \sum_\delta \frac{1}{s_\delta-x}\sum_h A^\delta_{gh}\,\frac{\partial(\psi-x\varphi)}{\partial v_h},$$
$$v_h = \sum_\delta \frac{1}{s_\delta-x}\sum_g A^\delta_{gh}\,\frac{\partial(\psi-x\varphi)}{\partial u_g},$$

und zwar gilt dies für jedes beliebige x. Lässt man daher x über alle Grenzen wachsen, oder mit einer bestimmten Wurzel, etwa mit s_δ zusammenfallen, so erhält man aus der ersten Gleichung

$$(9.)\qquad \left|\begin{aligned} u_g &= \sum_\delta\sum_h A^\delta_{gh}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v_h},\\ \sum_h A^\delta_{gh}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_h} &= s_\delta \sum_h A^\delta_{gh}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v_h}, \end{aligned}\right.$$

und aus der anderen

$$(10.)\qquad \left\{\begin{aligned} v_h &= \sum_\delta\sum_g A^\delta_{gh}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u_g},\\ \sum_g A^\delta_{gh}\,\frac{\partial\psi}{\partial u_g} &= s_\delta \sum_g A^\delta_{gh}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u_g}. \end{aligned}\right.$$

Vergleicht man in diesen Formeln die Coefficienten der willkürlichen Grössen u und v, so erhält man die vorhin erwähnten linearen Formelnsysteme.

Endlich kann man die bekannten Ausdrücke für die aus den Größen $\varDelta_{ik}(x)$ gebildeten Determinanten zur Darstellung von Relationen zwischen den Grössen A allein benutzen, was indessen der Kürze wegen übergangen werden kann.

Die vorstehenden Resultate finden ihre Anwendung in der Theorie der bilinearen Functionen und bei der Integration linearer Differentialgleichungen. Ich erlaube mir, in dieser Beziehung einstweilen auf die zu Eingange erwähnte Abhandlung des Herrn Weierstrass sowie auf meine folgende Arbeit über kleine Schwingungen zu verweisen.

4.

Durch das Vorangehende ist eine grosse Reihe von Fragen auf die Ermittlung der Bedingungen zurückgeführt, welche erfüllt sein müssen, damit eine bilineare Function

$$\varphi = \Sigma[gh]u_g v_h,$$

deren zusammengehörige Coefficienten $[gh]$, $[hg]$ conjugirt sind, und in welcher jedes Paar u_g, v_h von Variabeln durch ein Paar conjugirter Werthe ersetzt ist, nur dann verschwinden könne, wenn diese Variabeln alle zugleich verschwinden

Setzt man den Coefficienten [00] gleich Null voraus, so kann man φ für jeden Werth von u zum Verschwinden bringen, indem man alle übrigen Variabeln nebst ihren Conjugirten gleich Null setzt. Es ist also sicher, dass eine der gesuchten Bedingungen darin besteht, dass [00] von Null verschieden sein muss. Ich füge hinzu, dass die übrigen sich aus dieser durch Wiederholung ergeben.

Setzt man

$$[00]\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \varphi_1,$$

so folgt $\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}=0$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}=0$; also ist φ_1 eine bilineare Function der

Variabeln $\left|\begin{matrix} u_1 \dots u_n \\ v_1 \dots v_n \end{matrix}\right|$, welche das Paar u, v nicht mehr enthält. Setzt man ferner

$$\varphi_1 = \Sigma [gh]_1 u_g v_h,$$

so folgt

$$[gh]_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_g \partial v_h} = [00][gh] - [0h][g0],$$

$$[hg]_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_h \partial v_g} = [00][hg] - [h0][0g];$$

folglich sind die zusammengehörigen Coefficienten dieser neuen Function wieder conjugirt.

Da man endlich

$$\varphi = \frac{1}{[00]} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{[00]} \varphi_1$$

hat, so erkennt man leicht, dass die Constante $[11]_1$ von Null verschieden sein muss. Denn wäre sie gleich Null, so würde man φ für jeden Werth von u_1 zum Verschwinden bringen können, indem man $u_2, u_3, \dots u_n$ gleich Null setzt, und u durch die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ bestimmt.

Dies festgestellt, sei

$$[00]\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_1, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_g \partial v_h} = [gh]_1,$$

$$[11]_1 \varphi_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} = \varphi_2, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u_g \partial v_h} = [gh]_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots$$

$$[n-1, n-1]_{n-1} \varphi_{n-1} - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial v_{n-1}} = \varphi_n, \quad \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial u_n \partial v_n} = [nn]_n,$$

$$[nn]_n \varphi_n - \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial v_n} = \varphi_{n+1}.$$

Da von den Functionen φ_g jede aus der vorangehenden auf dieselbe Weise, wie φ_1 aus φ entspringt, so folgt, daß φ_g in Bezug auf die Variabeln $\left|\begin{matrix} u_g \dots u_n \\ v_g \dots v_n \end{matrix}\right|$ bilinear, und von den Variabeln $\left|\begin{matrix} u \dots u_{g-1} \\ v \dots v_{g-1} \end{matrix}\right|$ unabhängig ist; also ist $\varphi_{n+1} = 0$. Ferner folgt, dass in diesen Functionen die zusammengehörigen Coefficienten conjugirt, und schliesslich, dass alle Constanten $[gg]_g$ von Null verschieden sein müssen.

Folglich hat man die bereits von Jacobi (Bd. 53, p. 269 dieses Journals) gegebene Transformation:

$$\varphi = \frac{1}{[00]} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{[00][11]_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} + \dots + \frac{1}{[00][11]_1 \dots [nn]_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial v_n}.$$

Ersetzt man aber in den linearen Functionen

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial u_g} = \sum_h [gh]_g v_h, \quad \frac{\partial \varphi_g}{\partial v_g} = \sum_h [hg]_g u_h$$

die Paare u_h, v_h durch die conjugirten Werthe $x_h + iy_h$, $x_h - iy_h$, so erlangen sie conjugirte Werthe $f_g + if'_g$, $f_g - if'_g$, wo f_g, f'_g lineare Functionen von $x_g, y_g, x_{g+1}, \dots y_n$ mit reellen Coefficienten bedeuten. Mittelst der im art. 1 eingeführten Bezeichnung erhält man also aus der vorigen Gleichung

$$\Phi = \frac{1}{[00]}(f^2 + f'^2) + \frac{1}{[00][11]_1}(f_1^2 + f_1'^2) + \dots + \frac{1}{[00][11]_1 \dots [nn]_n}(f_n^2 + f_n'^2).$$

Durch diese Zerfällung der Function Φ ist bewiesen, dass die zweite Bedingung des art. 1. auch durch die folgende ersetzt werden kann,

dass die Grössen

$$[00], [11]_1, \dots [nn]_n$$

von Null verschieden und positiv sein müssen, mit Ausnahme der ersten, die ein beliebiges Zeichen haben kann.

Es ist zu bemerken, daß die Anzahl dieser Bedingungen genau die nämliche ist, wie in dem einfacheren Falle, wo die Function φ weder in ihren Coefficienten, noch in den conjugirten Variabeln imaginäre Theile enthält.

5.

An die vorangehenden Untersuchungen anknüpfend, werde ich zunächst die dort gestellten Bedingungen von einer wesentlichen Einschränkung befreien, welche ohne Nachtheil für die Einfachheit der Beweise und die bequeme Einsicht in sämmtliche Beweisgründe nicht hätte unterdrückt werden können.

Die erwähnten Bedingungen bestanden darin, 1) dass in jeder der beiden bilinearen Functionen φ, ψ die Coefficienten von $u_g v_h$, $u_h v_g$ stets zu einander conjugirt sind, und 2) dass φ bei conjugirten Werthen der Paare u_g, v_g nur mit diesen zugleich verschwinden kann. Daraus folgten, ausser zwei Sätzen, die hier nicht mehr in Betracht kommen, die beiden anderen, dass die Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ reell sind, und dass die ersten Unterdeterminanten von $\Delta(t)$ jeden Linearfactor dieser Function höchstens einmal weniger enthalten, als diese selbst ihn besitzt.

Die zweite von diesen Bedingungen lässt sich, ohne dass eines der vorstehenden Theoreme seine Gültigkeit verliert, dahin abändern, *dass φ bei conjugirten Werthen der Paare u_g, v_g unveränderliches Zeichen besitzen muss.*

Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, bedarf es nur des Nachweises, dass bei diesen geänderten Bedingungen die Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ reell bleiben, indem hieraus der andere Satz folgt (pag. 127—129).

Um diesen Nachweis zu führen, denke man sich φ mittelst des zu Ende des vorigen art. angeführten Verfahrens in eine Summe von gleichbezeichneten Gliedern zerfällt. Wenn dann φ der oben erweiterten, aber nicht der ursprünglichen zweiten Bedingung genügt, so muss in jener Zerfällung eine Anzahl von Gliedern, vom letzten an gerechnet, fehlen. Dies festgestellt, kann man offenbar die beiden ursprünglichen Bedingungen befriedigen, indem man für jedes in φ fehlende Glied ein anderes von der durch die Zerfällung verlangten Form einsetzt, welches mit einem stetig abnehmenden Coefficienten versehen ist. Dann werden alle Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ reell, und dies bleibt bis zur Grenze bestehen, wo die neu eingeführten Glieder wieder verschwinden.

Hieran schliessen sich nun einige weitere Untersuchungen, welche die ausserordentliche Tragweite der vorstehenden Bedingungen in einer höchst bemerkenswerthen Weise hervortreten lassen.

Was diese Bedingungen für den gegenwärtigen Zweck vorzugsweise charakterisiert, besteht darin, dass durch sie zwei Sätze mit einander verknüpft sind, von denen offenbar unter geänderten Bedingungen jeder ohne den andern bestehen kann. Am meisten Interesse bietet in dieser Beziehung der zweite von obigen Sätzen dar, indem derselbe durch einfache Modificationen in den bilinearen Functionen φ, ψ auf unzählig viele Fälle ausgedehnt werden kann, in denen von den obigen Bedingungen keine mehr erfüllt ist.

6.

Ich bezeichne durch $z = x + iy$ eine complexe veränderliche Grösse und, indem x und y in der üblichen Weise als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene E dargestellt werden, jeden Punkt dieser Ebene durch den ihm entsprechenden Werth von z.

In dieser Ebene sei eine Anzahl von Punkten P gegeben, die keine Linie stetig erfüllen, und eine Linie L von messbarer Länge, die keinen dieser Punkte P enthält.

In den bilinearen Functionen φ und ψ ersetze ich sämmtliche Coefficienten durch complexe Functionen von z, die ausserhalb der Punkte P in der ganzen Ebene E einwerthig, endlich und stetig sind, und an der ganzen Linie L entlang den folgenden Bedingungen genügen:

1) dass $[gh]$ und $[hg]$, sowie (gh) und (hg) an L entlang conjugirt sind;
2) dass φ, wenn jedes Paar u_g, v_g durch ein Paar von stets zu einander conjugirten Variabeln ersetzt wird, an L entlang keines Zeichenwechsels fähig ist;
3) dass man an L entlang auf keinen Punkt trifft, in dem zwei, vorher von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ einander gleich werden.

Bezeichnet man nun durch Q diejenigen Punkte der Ebene E, in denen eine dieser Wurzeln unendlich gross oder einer sonst von ihr verschiedenen gleich wird, so folgt aus den vorstehenden Bedingungen der Satz,

dass in der ganzen Ebene E mit Ausnahme der Punkte Q die Unterdeterminanten $\Delta_{ik}(t)$ jeden Linearfactor von $\Delta(t)$ höchstens einmal weniger enthalten, als diese Function selbst ihn besitzt.

Beim Beweise dieses Satzes habe ich die genauere Erörterung mehrerer Punkte nicht umgehen zu dürfen geglaubt. Zunächst schicke ich folgende Bemerkung über die Vertheilung der Punkte Q in der Ebene E voraus.

Setzt man $\Delta(t)$ seiner Zerfällung in Linearfactoren gleich, und bezeichnet durch K den Factor der höchsten Potenz von $-t$ im Ausdrucke von $\Delta(t)$, so folgt, dass einer dieser Linearfactoren, also eine Wurzel der Gleichung $\Delta(t) = 0$, nur dann unendlich werden kann, wenn entweder $\Delta(t)$ für jedes endliche t unendlich wird, oder, falls dies endlich bleibt, wenn K verschwindet. Das erstere findet nur in Punkten P statt; die Punkte P', in denen die ausserhalb der Punkte P einwerthige, endliche und stetige Function K verschwindet, können keine messbare Linie stetig erfüllen, weil K nicht in der ganzen Ebene gleich Null ist.

Dasselbe gilt aus gleichen Gründen von den Punkten P'', in denen zwei, sonst von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ einander gleich werden. In der That ist das aus sämmtlichen Differenzen dieser Wurzeln gebildete Produkt in Bezug auf dieselben symmetrisch, also einwerthig, und da es nur mit einer dieser Wurzeln zugleich unendlich oder unstetig werden kann, ausserhalb der Punkte P, P' endlich und stetig. Da es wegen 3) an L entlang von Null verschieden ist, so können die Punkte P'', in denen es verschwindet, keine Linie von messbarer Länge stetig erfüllen.

Daraus folgt, dass die Punkte Q in der Ebene E so vertheilt sind, dass sie für sich allein keinen Theil derselben völlig begrenzen.

Dies festgestellt, sei in irgend einem Punkte der Linie L

$$\Delta(t) = K(s-t)^m (s_1 - t)^{m_1} \ldots (s_p - t)^{m_p},$$

und jede der Grössen $s, s_1, \ldots s_p$ von jeder andern verschieden. Dann sind wegen 3) die Exponenten $m, m_1, \ldots m_p$ der verschiedenen Linearfactoren an L entlang unveränderlich, und die Grössen s auf derselben Strecke reell. Ausserdem liefert das Weierstrasssche Theorem auf dieser Linie für $\Delta_{ik}(t)$ einen Ausdruck

$$\Delta_{ik}(t) = (s-t)^{m-1} (s_1 - t)^{m_1 - 1} \ldots (s_p - t)^{m_p - 1} \delta_{ik}(t),$$

wo $\delta_{ik}(t)$ eine rationale ganze Function von t ist.

Es handelt sich nun darum, zu beweisen, dass bei gehörigen Bestimmungen über die den Grössen s ausserhalb L beizulegende Bedeutung diese beiden Zerfällungen ausserhalb der Punkte Q in der ganzen Ebene E gültig sind.

Die Grössen $s, s_1, \ldots s_p$ sind vorläufig nur durch die Factorenzerfällung von $\Delta(t)$, also an L entlang definirt. Man kann sich dieselben aber auch noch auf eine zweite Art, nämlich dadurch entstanden denken, dass der vorher ausserhalb L befindliche Punkt z durch stetige Ortsänderung in diese Linie eintritt, wobei dann die Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ stetig in die Grössen $s, s_1, \ldots s_p$ übergehen.

Aus diesem Grunde kann man daher auch rückwärts die an L entlang durch die obige Factorenzerfällung definirten Functionen s mittelst der Differentialgleichung $\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} \sqrt{-1}$ von dieser Linie aus zu benachbarten Flächentheilen stetig fortsetzen. Fügt man, um hierbei jede Unbestimmtheit auszuschliessen, die Bedingung hinzu, dass die Fortsetzung dieser Functionen von L aus nach gegebenen Theilen von E stets gleichzeitig an denselben Flächentheilen entlang erfolgen soll, so fällt jede von ihnen an jeder Stelle mit einer dort vorhandenen Wurzel der Gleichung $\Delta(t) = 0$ zusammen, da diese Fortsetzung nach einem bekannten Satze nur auf eine Weise möglich ist, also zu denselben Functionen zurückführen muss, aus denen man sich, auf dem vorhin beschriebenen Wege nach L zurückkehrend, die dort gegebenen Functionen s entstanden denken kann. Bei dieser stetigen Fortsetzung der Functionen s ist kein Theil der Ebene E unerreichbar, da die Punkte Q, welche allein bei derselben umgangen werden müssen, keinen Theil dieser Ebene von den übrigen trennen.

Bei der gleichzeitigen Fortsetzung aller s verwandeln sich die rechten Seiten obiger Gleichungen, die ich durch $D(t)$, $D_{ik}(t)$ bezeichnen will, in complexe Functionen von z, die in jedem Augenblicke ausserhalb der Punkte Q einwerthig, endlich und stetig sind. Da die Differenzen $\Delta(t) - D(t)$, $\Delta_{ik}(t) - D_{ik}(t)$ an der Linie L entlang verschwinden, so können sie demnach ausserhalb der Punkte Q auch in keinem anderen Theile der Ebene von Null verschieden sein. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Wenn in einem Punkte Q zwei vorher verschiedene Wurzeln s und s_1 einander gleich werden, so wird dort $\Delta(t)$ den Factor $s - t$ im Allgemeinen zweimal öfter enthalten als $\Delta_{ik}(t)$, nämlich stets und auch nur dann, wenn dort $\delta_{ik}(t)$ nicht ohne Rest durch $s - t$ theilbar wird.

Der obige Satz beschränkt sich offenbar nicht auf den Fall, wo die Functionen $[gh]$, (gh) bloss von einer einzigen Variablen z abhängen.

Es seien $z, z_1, z_2, \ldots$ complexe Variable, und ihnen entsprechend $L, L_1, L_2, \ldots$ ununterbrochen zusammenhängende Werthenreihen, von denen jede bei der geometrischen Darstellung der zugehörigen Variablen durch eine Linie von messbarer Länge repräsentirt wird.

Sind alsdann alle $[gh]$, (gh) einwerthige Functionen von $z, z_1, z_2, \ldots$, welche den oben gestellten Bedingungen genügen, solange jede Variable z_i der entsprechenden Werthenreihe L_i angehört, und deren Unstetigkeitsstellen P durch keine dieser Werthenreihen gehen und auch keinen Theil des Grössengebietes vollständig begrenzen, aus welchem die Variablen $z, z_1, z_2, \ldots$ ihre Werthe entnehmen; dann gilt der obige Satz im ganzen Umfange dieses Gebietes, mit Ausnahme derjenigen Stellen Q, an denen entlang eine der Functionen $s, s_1, \ldots s_p$ aufhört, endlich oder von jeder anderen verschieden zu sein.

Der Beweis dieses Satzes, in welchem die Einwerthigkeit der Functionen $[gh]$, (gh) auch durch Bedingungen erzwungen sein kann, ergiebt sich durch wiederholte Anwendung des vorigen; man lässt nämlich in der Voraussetzung, dass jede Variable z_i in der entsprechenden Werthenreihe L_i enthalten ist, zunächst nur z aus L heraustreten; dann weist man z ausserhalb L einen festen Werth an, und lässt nun auch z_1 aus L_1 herausrücken, u. s. w. Dann hört der Satz nach der oben angewandten Schlussweise in keinem Augenblicke auf, gültig zu sein, so lange man in keine der durch Q bezeichneten Stellen eintritt.

7.

Der hiermit begründete Satz lässt sich nun ohne Weiteres auf solche Fälle ausdehnen, wo die erste von den oben gestellten Bedingungen in gegebener Weise verletzt ist.

Wenn nämlich die Coefficienten der bilinearen Functionen φ', ψ' dieser ersten Bedingung nirgendwo oder an keiner nachweisbaren Strecke entlang Genüge leisten, so führe man statt φ', ψ' zwei neue bilineare Functionen φ, ψ ein, deren Coefficienten man als einwerthige

Functionen von z so wählt, dass sie für $z = 0$ mit den Coefficienten jener zusammenfallen, und an einer Linie L entlang die verlangte Eigenschaft annehmen. Wenn alsdann φ und $\varDelta(t)$ auf einem messbaren Stücke dieser Linie auch den übrigen Bedingungen genügen, und im Punkte $z = 0$ keine ausserhalb desselben von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\varDelta(t) = 0$ zusammenfallen, auch keine derselben dort unendlich wird, so ist die Gültigkeit des Satzes auch für diesen Punkt, d. h. für die Determinante von $\psi' - t\varphi'$ und ihre Unterdeterminanten bewiesen.

Am Einfachsten erzwingt man die erste Bedingung durch Einführung linearer Functionen von z. Haben in den Functionen

$$\varphi' = \Sigma[gh]' u_g v_h, \quad \psi' = \Sigma(gh)' u_g v_h$$

die Coefficienten $[gh]'$, $(gh)'$ beliebige Werthe, und bezeichnet man durch $[gh]''$, $(gh)''$ ihre Conjugirten, so ertheile man in den statt jener zu betrachtenden Functionen φ, ψ den Coefficienten die Werthe

$$[gh] = \frac{[gh]' + [hg]''}{2} + \frac{[gh]' - [hg]''}{2}(1 - z),$$

$$(gh) = \frac{(gh)' + (hg)''}{2} + \frac{(gh)' - (hg)''}{2}(1 - z);$$

dann wird offenbar für $z = 0$ $[gh] = [gh]'$, $(gh) = (gh)'$, dagegen an der ganzen Geraden $x = 1$ entlang $[gh]$ zu $[hg]$, (gh) zu (hg) conjugirt.

Im gegenwärtigen Falle liegen die durch P bezeichneten Punkte im Unendlichen, die Punkte P', in denen K verschwindet, so wie die Punkte P'', in denen sonst verschiedene Wurzeln der Gleichung $\varDelta(t) = 0$ zusammenfallen, sind nur in endlicher Zahl vorhanden, da K und $\varDelta(t)$ in Bezug auf z algebraisch sind.

Wenn daher die zweite Bedingung auf irgend einer messbaren Strecke der Geraden $x = 1$ erfüllt ist, und der Werth $z = 0$ keinen Punkt P' oder P'' bestimmt, so muss jeder Linearfactor der Determinante von $\psi' - t\varphi'$ in ihren ersten Unterdeterminanten höchstens einmal weniger vorkommen, als in ihr selbst.

8.

Im Vorangehenden ist gezeigt, wie man der ersten von den obigen Bedingungen genügen kann, wenn sie nicht bereits erfüllt ist.

Die sich hieran schliessende Untersuchung, ob auch die zweite Bedingung erfüllt ist, erledigt sich durch das am Schlusse des ersten Theiles dieser Arbeit angeführte Verfahren.

Es bleibt nur noch übrig, ein brauchbares Hülfsmittel anzugeben, welches unter Voraussetzung der beiden ersten Bedingungen diejenigen

für die Existenz und die Anzahl vielfacher Wurzeln der Gleichung $\varDelta(t) = 0$ liefert. Dasselbe ist in der folgenden Umkehrung des zweiten Weierstrassschen Theorems enthalten.

Wenn unter Voraussetzung der beiden ersten Bedingungen s eine Wurzel der Gleichung $\varDelta(t) = 0$, und $(t - s)^{m-1}$ die höchste Potenz von $t - s$ ist, durch welche die Unterdeterminanten

$$\varDelta_{00}(t), \ \varDelta_{11}(t), \ \dots \ \varDelta_{nn}(t)$$

alle theilbar sind, so ist $\varDelta(t)$ durch $(t - s)^m$, aber durch keine höhere Potenz von $t - s$ theilbar.

Ist p der Exponent der höchsten Potenz von $t - s$, durch welche $\varDelta(t)$ ohne Rest theilbar ist, so ist jede Unterdeterminante $\varDelta_{ik}(t)$ $(p - 1)$-mal durch $t - z$ theilbar; also kann p nicht grösser als m sein. Dass es auch nicht kleiner als m sein kann, ergiebt sich durch folgende Betrachtung.

Sind ϱ und α beliebige reelle Zahlen, so hat jede Gleichung (pag. 128)

$$\varDelta(t) + \varrho e^{\alpha i} \varDelta_{gh}(t) + \varrho e^{-\alpha i} \varDelta_{hg}(t) + \varrho^2 \frac{\partial^2 \varDelta(t)}{\partial(gh)\partial(hg)} = 0$$

p reelle Wurzeln, die mit abnehmendem ϱ stetig in s übergehen, wenn sie nicht schon unabhängig von ϱ gleich s sind. Im letzteren Falle würde $\varDelta_{gh}(t)$ durch $(t - s)^p$ theilbar sein.

Ist dagegen eine jener p Wurzeln von ϱ abhängig, und für ein verschwindendes ϱ bis auf Grössen höherer Ordnung gleich $s + a\varrho^\mu + \cdots = t$, so erhält man die Gleichung (pag. 129, wo m durch p zu ersetzen ist)

$$\lim\left[ca\varrho^{\mu-1} + e^{\alpha i}\frac{\varDelta_{gh}(t)}{(t-s)^{p-1}}\right]\left[ca\varrho^{\mu-1} + e^{-\alpha i}\frac{\varDelta_{hg}(t)}{(t-s)^{p-1}}\right]$$

$$= \lim \frac{\varDelta_{gg}(t)}{(t-s)^{p-1}} \cdot \frac{\varDelta_{hh}(t)}{(t-s)^{p-1}},$$

wo c den Werth von $\frac{\varDelta(t)}{(t-s)^p}$ für $t = s$ bedeutet, und das Zeichen lim. sich auf die Abnahme von ϱ oder $t - s$ bezieht.

Nimmt man nun an, es sei $p - 1 < m - 1$, so wird die rechte Seite, also auch jeder der beiden conjugirten Factoren zur Linken gleich Null. In der hieraus folgenden Gleichung

$$\lim.\left[ca\varrho^{\mu-1} + e^{\alpha i}\frac{\varDelta_{gh}(t)}{(t-s)^{p-1}}\right] = 0$$

ist der erste Summand für jeden Werth von α und ϱ reell, da μ eine ganze Zahl ist. Da ferner $\frac{\varDelta_{gh}(t)}{(t-s)^{p-1}}$ für $\varrho = 0$ oder $t = s$ von α ganz unabhängig wird, so würde man, wenn der Grenzwerth A dieses Quotienten von Null verschieden wäre, den Winkel α so wählen können, dass das Product $Ae^{\alpha i}$ imaginär wird, was mit dem Verschwinden der Summe $ca\varrho^{\mu-1} + Ae^{\alpha i}$ unvereinbar ist. Da hiernach $\frac{\Delta_{gh}(t)}{(t-s)^{p-1}}$ auch unter der gegenwärtigen Voraussetzung für $t = s$ verschwindet, so ist $\Delta_{gh}(t)$, sobald $p < m$ ist, in allen Fällen durch $(t-s)^p$ theilbar. Dann aber ist auch die Derivirte von $\Delta(t)$ durch $(t-s)^p$, also $\Delta(t)$ selbst, weil es für $t = s$ verschwindet, durch $(t-s)^{p+1}$ theilbar, gegen die Voraussetzung. Folglich kann auch nicht $p < m$ sein, w. z. b. w.

Wenn $\Delta(t)$ durch die m^{te}, aber durch keine höhere Potenz von $t - s$ theilbar ist, so ist umgekehrt $(t-s)^{m-1}$ die höchste Potenz, durch welche sämmtliche $\Delta_{gg}(t)$ ohne Rest aufgehen. In der That bildet die Annahme des Gegentheils einen Widerspruch mit obigem Satze.

Da hiernach das Bestehen des Satzes mit einer Verletzung der ihm zu Grunde gelegten Bedingungen unverträglich ist, so sind diese zu seiner Gültigkeit nicht bloss ausreichend, sondern auch nothwendig. Dagegen sind sie nicht stets von einander unabhängig.

Ist nämlich in obigem Satze $m - 1 > 1$, so ist die Bedingung, dass s eine Wurzel der Gleichung $\Delta(t) = 0$ sein soll, von selbst erfüllt.

Wenn die bilinearen Functionen φ, ψ den beiden ersten Bedingungen genügen, so ist dies offenbar auch mit den bilinearen Functionen φ_g, ψ_g der Fall, die man aus jenen erhält, indem man $u_g = 0$, $v_g = 0$ setzt. Da aber die Determinante von $\psi_g - t\varphi_g$ nichts Anderes als $\Delta_{gg}(t)$ ist, so gelten für die Beziehungen zwischen dieser und ihren eigenen Unterdeterminanten dieselben Sätze, wie für die Beziehung zwischen $\Delta(t)$ und $\Delta_{gg}(t)$ selbst.

Ist $\Delta_{gg}(t)$ für jedes g durch $(t-s)^{m-1}$ theilbar, so muss hiernach in der identischen Gleichung

$$\Delta_{gg}(t)\Delta_{hh}(t) - \Delta_{gh}(t)\Delta_{hg}(t) = \Delta(t)\,\frac{\partial^2 \Delta(t)}{\partial(gg)\,\partial(hh)}$$

die rechte Seite, und mit ihr das zweite Glied der linken für jedes g und h mindestens $(m-2)$-mal durch $t - s$ theilbar sein. Da aber $\Delta_{gh}(t)$ und $\Delta_{hg}(t)$ als conjugirte Grössen den reellen Factor $t - s$ gleich oft besitzen müssen, so enthält jede von ihnen diesen Factor mindestens $\left[\frac{m-1}{2}\right]$-mal, wenn man so die grösste in $\frac{m-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Aus dem linearen Ausdrucke von $\Delta(t)$ durch die Unterdeterminanten einer beliebigen Reihe folgt also, dass auch $\Delta(t)$ selbst den Factor $t - s$ mindestens $\left[\frac{m-1}{2}\right]$-mal, also ihn jedenfalls besitzt, sobald $m - 1 > 1$ ist.

Durch diese Sätze ist die Frage, ob und wieviel Linearfactoren von $\Delta(t)$ einander gleich sind, auf die Ermittlung derjenigen gemeinsamen Factoren der Unterdeterminanten $\Delta_{00}(t)$, $\Delta_{11}(t)$, ... $\Delta_{nn}(t)$ zurückgeführt, mit denen $\Delta(t)$ zugleich verschwindet.

Es lässt sich mittelst derselben auch umgekehrt beurtheilen, wie man zu den Bedingungen gelangen kann, welche erfüllt sein müssen, wenn die Anzahl der von einander verschiedenen Linearfactoren, und von jedem derselben der Exponent gegeben ist.

Um zu diesen Bedingungen zu gelangen, bedarf es nur einer Wiederholung der obigen Sätze.

Damit z. B. $\Delta(t)$ einen Linearfactor m-mal enthalte, muss jedes $\Delta_{gg}(t)$ ihn $(m-1)$-mal besitzen; da aber der Satz auch für $\Delta_{gg}(t)$ gilt, so muss jede zweite Unterdeterminante $\frac{\partial^2 \Delta(t)}{\partial(gg)\,\partial(hh)}$ ihn $(m-2)$-mal enthalten, u. s. w.

Umgekehrt, wenn alle Unterdeterminanten

$$\frac{\partial^{m-1} \Delta(t)}{\partial(g_1 g_1)\,\partial(g_2 g_2) \cdots \partial(g_{m-1}\, g_{m-1})}$$

einen einzigen Linearfactor mit einander gemein haben, mit welchem zugleich alle zunächst vorangehenden Unterdeterminanten

$$\frac{\partial^{m-2} \Delta(t)}{\partial(g_1 g_1) \cdots \partial(g_{m-2}\, g_{m-2})}$$

verschwinden, so ist $\Delta(t)$ durch ihn m-mal und nicht öfter theilbar.

Es wäre überflüssig, die hieraus für allgemeinere Fälle durch Zusammensetzung folgenden Regeln auszuführen; ebenso können Angaben über gelegentliche Erleichterungen bei der wirklichen Aufstellung der besprochenen Bedingungen übergangen werden, da sie durch das obige Theorem in Verbindung mit demjenigen, dessen Umkehrung es ist, offen dargelegt sind.

Zürich, 1864.

VII.

Ueber die kleinen Schwingungen eines periodisch eingerichteten Systems materieller Punkte.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 63, 1864, S. 273—288.)

Die vorliegende Abhandlung enthält die vollständige Lösung des bekannten Problems, die unendlich kleinen Schwingungen eines Systems räumlich getrennter materieller Punkte zu bestimmen, zwischen denen anziehende und abstossende Kräfte wirken, und welche in periodisch wiederkehrenden Gruppen im Raume vertheilt sind.

Cauchy, welcher mit diesem Problem der analytischen Optik eine neue Grundlage zu geben gedachte, legte demselben eine grosse Bedeutung bei, wie aus den zahlreichen Abhandlungen hervorgeht, in denen er sich mit diesem Problem beschäftigt. Dieselben finden sich, soweit sie mir bekannt geworden sind, in den Comptes rendus vom 9ten bis zum 30sten Bande und im 22sten Bande der Memoiren der Pariser Akademie; die ersteren sind zum Theil in den Exercices wiederholt.

Der nächste Weg, welcher sich zur Lösung des vorliegenden Problemes darbietet, besteht in der Ermittlung der Gesetze, nach denen die periodischen Bewegungen des Systems in ebenen Wellen erfolgen. Sind diese bekannt, so liefert der Fouriersche Satz unmittelbar die allgemeinen Formeln für die Bewegung, welche auf einen beliebigen Anfangszustand folgt.

Aber diese Lösung kann nicht als vollendet angesehen werden; im art. III. der folgenden Abhandlung wird nachgewiesen, dass die vielfachen Integrale, auf welche man durch den Fourierschen Satz geführt wird, Elemente enthalten, welche der Lösung vollkommen fremd sind, und welche daher durch eine Reduction jener Integrale ausgeschieden werden müssen.

Durch eine genauere Untersuchung der algebraischen Functionen, welche in diese Integrale eingehen, ist mir die verlangte Reduction gelungen, zunächst für die einfacheren Ausdrücke, welche Cauchy am Schlusse des §. 2. seiner Abhandlung über die Farbenzerstreuung giebt, dann auch für die Lösung des allgemeinen Problems.

In der vorliegenden Abhandlung ist der umgekehrte Weg eingeschlagen worden. Nachdem im art. III. nachgewiesen worden ist, welche Reductionen sich bei der Anwendung des Fourierschen Satzes als nothwendig herausstellen, wird die Aufgabe so gestellt und behandelt, dass man von Anfang an die Gewissheit hat, die Lösung in einer Form zu erhalten, welche keiner weitern Reduction mehr bedürftig ist.

Es hat sich auf diesem Wege das merkwürdige Resultat ergeben, dass die Bewegung des zu untersuchenden Systems, auch unter den allgemeinsten Voraussetzungen, stets nur von einer einzigen Klasse analytischer Functionen einer veränderlichen Grösse t abhängt, deren reelle Werthe die seit der anfänglichen Gleichgewichtsstörung verflossene Zeit bestimmen. Diese Functionen habe ich durch $T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''}$ bezeichnet, und ihren Ausdruck durch ein dreifaches Integral mit endlicher Begrenzung im art. IX. Formel 18 angegeben.

I.

Obgleich das Problem, mit welchem die vorliegende Abhandlung sich beschäftigt, allgemein bekannt ist, lässt sich doch eine ausführliche Darlegung desselben nicht füglich umgehen.

Ist Π ein System materieller Punkte, so wird dasselbe vollkommen homogen genannt, wenn es folgenden Bedingungen genügt:

1) Alle Punkte des Systems besitzen dieselbe Masse.
2) Sind a, b, c irgend welche Punkte des Systems, und zieht man aus c eine Gerade cd von gleicher Länge und Richtung wie ab, so ist d ebenfalls ein Punkt des Systems.

Fügt man zu diesen Bedingungen das Grundprincip der atomistischen Theorie,

3) dass die Entfernung zweier materieller Punkte, wie klein sie im Uebrigen auch sein mag, doch niemals unter jeder Grenze liegt,

so ist das System Π nothwendig ein reticulares, d. h. die materiellen Punkte dieses Systems befinden sich in den Durchschnittspunkten dreier Schaaren von Ebenen, welche den Raum in congruente Parallelepipeda zerlegen[1]); lässt man den besondern Fall, wo eine oder zwei Kanten dieser Parallelepipede unendlich gross sind, unberücksichtigt, so sind also die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der verschiedenen Punkte $m_{\iota\iota'\iota''}$ des Systems Π durch lineare Gleichungen

1) Man vergleiche Dirichlets Abhandlung über die positiven ternären quadr. Formen, dieses Journal Band 40.

$$m_{ll'l''}\cdot\quad \begin{aligned} x &= \alpha + al + a'l' + a''l'', \\ y &= \beta + bl + b'l' + b''l'', \\ z &= \gamma + cl + c'l' + c''l'' \end{aligned}$$

gegeben, in denen l, l', l'' jedes ganzzahligen Werthes fähig, und die übrigen Grössen rechter Seite unveränderlich sind.

Diese Definition lässt sich, wie Cauchy bemerkt[1]), auf homogene Mittel, welche aus chemisch differenten Atomen zusammengesetzt sind, nur anwenden, wenn man sich die Massenpunkte $m_{ll'l''}$ durch Atomengruppen ersetzt denkt, welche um jede Ecke der vorhin erwähnten Parallelepipede in gleicher Weise angeordnet sind.

Wir fügen hiernach zum homogenen System Π noch N andere, Π_1, Π_2, ... Π_N, die so geordnet sind, dass die Coordinaten des zu Π_i gehörigen Punktes $m^i_{ll'l''}$ mit den obigen durch die Gleichungen

$$m^i_{ll'l''}\cdot\quad x_i - \alpha_i = x - \alpha, \quad y_i - \beta_i = y - \beta, \quad z_i - \gamma_i = z - \gamma$$

verbunden sind. Zu jeder Werthengruppe (l, l', l'') gehört dann eine Gruppe materieller Punkte $m_{ll'l''}$, $m^1_{ll'l''}$, ... $m^N_{ll'l''}$, die in ihren physikalischen Eigenschaften übereinstimmen oder von einander verschieden sein können. Diese Gruppen wiederholen sich periodisch auf dieselbe Weise, wie die Punkte des Systems Π; ihre Gesammtheit kann also ebenfalls als ein homogenes System P angesehen werden.

Es sind nun die superponirbaren kleinen Schwingungen eines solchen periodisch eingerichteten Systems P, mit denen die gegenwärtige Arbeit sich beschäftigt. Und zwar fügen wir zu den obigen Voraussetzungen über die Einrichtung dss Systems P noch die folgenden, welche die in ihm wirkenden Kräfte betreffen.

Wir setzen voraus, dass zwischen den einzelnen materiellen Punkten von P Attractionen (Anziehungen und Abstossungen) wirken, durch welche sie, bei der oben beschriebenen Einrichtung des Systems P, im stabilen relativen Gleichgewichte erhalten werden.

Es seien ferner $m^i_{ll'l''}$ und $m^k_{l+n,\, l'+n',\, l''+n''}$ zwei beliebige Punkte von P, deren Massen und Coordinaten beziehungsweise m^i, x_i, y_i, z_i und m^k, x'_k, y'_k, z'_k sind. Dann wirkt an m^i in Folge der gegenseitigen Attraction beider Punkte in ihrer Verbindungslinie eine Kraft, die bloss von ihrer Entfernung (ik) abhängt, und durch

$$\frac{\partial[ik]}{\partial(ik)}$$

1) Comptes rendus Tome 9, pag. 558.

bezeichnet werden soll. Die Componenten dieser Kraft werden also ausgedrückt durch

$$\frac{\partial[ik]}{\partial x'_k}, \quad \frac{\partial[ik]}{\partial y'_k}, \quad \frac{\partial[ik]}{\partial z'_k}.$$

Ueber die Massen m, m', ... m^N, so wie über die Attractionsgesetze, welche durch das Zeichen $\frac{1}{m^i m^k}\frac{\partial[ik]}{\partial(ik)}$ bei verschiedenen Werthen der Indices i und k dargestellt werden, lassen wir die allgemeinsten Voraussetzungen bestehen; wir setzen also weder zwischen zwei von jenen $N+1$ Massen, noch zwischen zwei von den im Allgemeinen denkbaren $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ Attractionsgesetzen die Gleichheit voraus.

Da die Differenzen $x'_k - x_i$, $y'_k - y_i$, $z'_k - z_i$, von denen die erste nach der oben eingeführten Bezeichnung $= \alpha_k - \alpha_i + an + a'n' + a''n''$ ist, nur noch von den ganzen Zahlen n, n', n'' abhängen, welche für den angezogenen Punkt $m^i_{ll'l''}$ die relative Lage des anziehenden Punktes $m^k_{l+n,\, l'+n',\, l''+n''}$ bestimmen, so erhält man die Gleichgewichtsbedingungen für jeden Punkt $m^i_{ll'l''}$ von Π_i, wenn man in den Gleichungen

$$(1.)\quad 0 = \sum_{nn'n''}\sum_k \frac{\partial[ik]}{\partial x'_k}, \quad 0 = \sum_{nn'n''}\sum_k \frac{\partial[ik]}{\partial y'_k}, \quad 0 = \sum_{nn'n''}\sum_k \frac{\partial[ik]}{\partial z'_k}$$

die erste Summation über alle ganzzahligen Werthe von n, n', n'', die zweite über die Werthe $k = 0, 1, \ldots N$ erstreckt, mit Weglassung des einzigen Gliedes $(n = n' = n'' = 0,\ k = i)$.

Ertheilt man hierauf dem Index i der Reihe nach die Werthe 0, 1, ... N, so ergeben sich die vollständigen Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems P.

II.

Da das relative Gleichgewicht von P der Voraussetzung gemäss stabil ist, so kann man seinen Punkten so kleine relative Ortsänderungen und Geschwindigkeiten ertheilen, dass dieselben in der nachfolgenden Bewegung unaufhörlich innerhalb beliebig enge gewählter Grenzen beharren.

Man kann also bewirken, dass jede relative Ortsänderung fortwährend unendlich klein bleibt. Dann lassen sich die beschleunigenden Kräfte in jedem Augenblicke durch die Ortsänderungen linear ausdrücken. Folglich sind die Bewegungen in unendlich kleinen relativen Ortsänderungen superponirbar.

Bezeichnet man zur Zeit t die zu den Axen parallelen Verschiebungen

$$(2.)\quad \begin{cases} \text{des Punktes } m^i_{ll'l''} \text{ durch } \xi^i_{ll'l''} = \xi_i,\ \eta^i_{ll'l''} = \eta_i,\ \zeta^i_{ll'l''} = \zeta_i, \\ \text{des Punktes } m^k_{l+n,\,l'+n',\,l''+n''} \text{ durch } \xi'_k,\ \eta'_k,\ \zeta'_k, \end{cases}$$

so erhält man aus den Gleichungen (1.) die am Punkte $m^i_{ll'l''}$ zur Zeit t wirkenden Componenten, wenn man auf der rechten Seite überall und für jedes k $x'_k - x_i$, $y'_k - y_i$, $z'_k - z_i$ durch $x'_k - x_i + \xi'_k - \xi_i$, $y'_k - y_i + \eta'_k - \eta_i$, $z'_k - z_i + \zeta'_k - \zeta_i$ ersetzt, also x'_k, y'_k, z'_k bezüglich um $\xi'_k - \xi_i$, $\eta'_k - \eta_i$, $\zeta'_k - \zeta_i$ wachsen lässt.

Daraus ergeben sich die Gleichungen für die superponirbaren Bewegungen des Systems P in folgender Gestalt:

$$(3.)\quad \begin{cases} m^i \dfrac{\partial^2 \xi^i_{ll'l''}}{\partial t^2} = \sum\limits_{nn'n''} \sum\limits_k \left[\dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x'^2_k} (\xi'_k - \xi_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x'_k \partial y'_k} (\eta'_k - \eta_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x'_k \partial z'_k} (\zeta'_k - \zeta_i) \right], \\ m^i \dfrac{\partial^2 \eta^i_{ll'l''}}{\partial t^2} = \sum\limits_{nn'n''} \sum\limits_k \left[\dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x'_k \partial y'_k} (\xi'_k - \xi_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial y'^2_k} (\eta'_k - \eta_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial y'_k \partial z'_k} (\zeta'_k - \zeta_i) \right], \\ m^i \dfrac{\partial^2 \zeta^i_{ll'l''}}{\partial t^2} = \sum\limits_{nn'n''} \sum\limits_k \left[\dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial x'_k \partial z'_k} (\xi'_k - \xi_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial y'_k \partial z'_k} (\eta'_k - \eta_i) + \dfrac{\partial^2 [ik]}{\partial z'^2_k} (\zeta'_k - \zeta_i) \right]. \end{cases}$$

Dieselben müssen für alle ganzzahligen Werthe von l, l', l'' und für $i = 0, 1, \ldots N$ bestehen. Die Bedingung, dass bei den Summationen das Glied ($n = n' = n'' = 0$, $k = i$) weggelassen werden soll, braucht jetzt nicht mehr berücksichtigt zu werden, da bei diesen Werthen der Summationsindices die Factoren $\xi'_k - \xi_i$ u. s. w. sich auf Null reduciren.

III.

Seit den Untersuchungen Cauchys über die reticularen Systeme pflegt man den Anfangszustand eines solchen Systems durch stetige Functionen der Coordinaten auszudrücken, welche nicht bloss den materiellen Punkten des Systems, sondern auch den sie umgebenden massenfreien Punkten Anfangsverschiebungen und Geschwindigkeiten anweisen.

Indem man hierauf die Differentialgleichungen der Bewegung auf alle Punkte des Raumes ausdehnt, bestimmt man mittelst des Fourierschen Satzes eine Bewegung des continuirlichen Raumes, an welcher die in ihn eingetauchten materiellen Punkte ihrem Orte gemäss theilnehmen.

Bei diesem Verfahren wird die Bewegung des materiellen Punktsystems abhängig gemacht, nicht bloss von seinem eigenen Anfangszustande, was für jeden einzelnen Punkt desselben in irgend einem Umfange der Fall sein muss, sondern auch noch vom Anfangszustande des massenfreien Raumes, was in Wirklichkeit nicht der Fall sein kann.

Von diesen, der Lösung nothwendig fremden Elementen kann dieselbe nur durch die Reduction der vielfachen Integrale befreit werden, welche durch den Fourierschen Satz eingeführt worden sind.

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, geben wir den Anfangszustand des Systems P unmittelbar durch die Verschiebungen und Geschwindigkeiten seiner eigenen Punkte. Sei

$$(4.)\quad \begin{cases} \text{für } t = 0, \quad \xi^i_{ll'l''} = \xi_i = V^{3i}_{ll'l''}, \quad \dfrac{\partial \xi_i}{\partial t} = G^{3i}_{ll'l''}, \\ \qquad\qquad\quad \eta^i_{ll'l''} = \eta_i = V^{3i+1}_{ll'l''}, \quad \dfrac{\partial \eta_i}{\partial t} = G^{3i+1}_{ll'l''}, \\ \qquad\qquad\quad \zeta^i_{ll'l''} = \zeta_i = V^{3i+2}_{ll'l''}, \quad \dfrac{\partial \zeta_i}{\partial t} = G^{3i+2}_{ll'l''}. \end{cases}$$

Dann lässt sich das zu lösende Problem wie folgt aussprechen:

Es sollen, für alle ganzzahligen Werthe von l, l', l'' und für $i = 0, 1, \ldots N$

$$\xi^i_{ll'l''}, \quad \eta^i_{ll'l''}, \quad \zeta^i_{ll'l''}$$

als Functionen der Zeit t und der Anfangswerthe V und G den Gleichungen (3.) und (4.) gemäss bestimmt werden.

IV.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, zu ermitteln, in welcher Weise die gesuchten Functionen von den Anfangswerthen abhängen.

Zu diesem Zwecke lassen wir an Stelle des durch die Gleichung (4.) dargestellten Anfangszustandes einen andern treten, in welchem nur der Punkt

$$m^k_{\lambda+l,\,\lambda'+l',\,\lambda''+l''}$$

in seinem Gleichgewichte gestört worden ist, und auch diesem Punkte nur unendlich kleine Verschiebungen und Geschwindigkeiten ∂V, $\partial V'$, $\partial V''$ und ∂G, $\partial G'$, $\partial G''$ ertheilt worden sind. Aus dieser Gleichgewichtsstörung entspringt eine Bewegung des Systems P, in welchem wir die Verschiebungen des Punktes

$$m^i_{ll'l''}$$

zur Zeit t durch X, Y, Z bezeichnen wollen.

Wir wollen zweitens voraussetzen, dass man zur Zeit $t = 0$, ohne das Gleichgewicht der übrigen Punkte des Systems zu stören, die Verschiebungen ∂V, $\partial V'$, $\partial V''$ und die Geschwindigkeiten ∂G, $\partial G'$, $\partial G''$ dem Punkte

$$m^k_{\lambda\lambda'\lambda''}$$

ertheilt habe. Bezeichnet man alsdann in der hieraus erfolgenden Bewegung des Systems P die Verschiebungen des Punktes

$$m^i_{000}$$

zur Zeit t durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so muss wegen der Einrichtung des Systems P

$$X = \mathfrak{X}, \quad Y = \mathfrak{Y}, \quad Z = \mathfrak{Z}$$

sein. In der That werden die im zweiten Falle gemachten Voraussetzungen mit den auf den ersten Fall bezüglichen völlig identisch, wenn man das System P ohne Drehung so lange verschiebt, bis der Punkt $m^k_{\lambda\lambda'\lambda''}$ nach $m^k_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}$ rückt, wobei dann jeder Punkt $m^i_{\lambda\lambda'\lambda''}$ nach $m^i_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}$, und insbesondere m^i_{000} nach $m^i_{ll'l''}$ geschoben wird.

Für die Grössen X, $\mathfrak{X}$, Y, ... lassen sich aber leicht bestimmte Ausdrücke finden. Superponirt man nämlich jeden der beiden Anfangszustände, aus denen sie entspringen, mit dem durch die Gleichungen (4.) bestimmten, so werden *im ersten Falle* die Anfangswerthe $(V^{3k}, G^{3k}, V^{3k+1}, \dots)_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}$ um ∂V, ∂G, $\partial V'$, ..., und in Folge dessen die Verschiebungen $(\xi, \eta, \zeta)^i_{ll'l''}$ um X, Y, Z vermehrt; *im zweiten Falle*, wo die Aenderungen ∂V, ∂G, $\partial V'$, ... den Anfangswerthen $(V^{3k}, G^{3k}, V^{3k+1}, \dots)_{\lambda\lambda'\lambda''}$ ertheilt werden, ändern sich $(\xi, \eta, \zeta)^i_{000}$ um $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Drückt man demnach die Verschiebungen X, $\mathfrak{X}$, Y, ... durch die Differentiale der Grössen $\xi^i_{ll'l''}$, ξ^i_{000}, $\eta^i_{ll'l''}$, ... nach den geänderten Anfangswerthen aus, so ergiebt sich aus ihrer Gleichheit z. B.

$$X = \frac{\partial \xi^i_{ll'l''}}{\partial V^{3k}_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} \cdot \partial V + \frac{\partial \xi^i_{ll'l''}}{\partial G^{3k}_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} \cdot \partial G + \frac{\partial \xi^i_{ll'l''}}{\partial V^{3k+1}_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} \cdot \partial V' + \cdots$$

$$= \mathfrak{X} = \frac{\partial \xi^i_{000}}{\partial V^{3k}_{\lambda\lambda'\lambda''}} \cdot \partial V + \frac{\partial \xi^i_{000}}{\partial G^{3k}_{\lambda\lambda'\lambda''}} \cdot \partial G + \frac{\partial \xi^i_{000}}{\partial V^{3k+1}_{\lambda\lambda'\lambda''}} \cdot \partial V' + \cdots,$$

und allgemein, wenn man einen der Buchstaben ξ, η, ζ durch (ξ, η, ζ), und einen der Buchstaben V, G durch (V, G) bezeichnet

$$\text{(5.)} \qquad \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)^i_{ll'l''}}{\partial(V, G)^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)^i_{000}}{\partial(V, G)^j_{\lambda\lambda'\lambda''}},$$

für $i = 0, 1, \dots N$, $j = 0, 1, \dots 3N+2$, und alle ganzzahligen Werthe von λ, λ', λ'', l, l', l''.

Wir setzen von jetzt an

$$\text{(6.)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi^i_{000}}{\partial V^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = R^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, & \dfrac{\partial \eta^i_{000}}{\partial V^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = R^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, \quad \dfrac{\partial \zeta^i_{000}}{\partial V^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = R^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, \\[2ex] \dfrac{\partial \xi^i_{000}}{\partial G^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = S^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, & \dfrac{\partial \eta^i_{000}}{\partial G^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = S^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, \quad \dfrac{\partial \zeta^i_{000}}{\partial G^j_{\lambda\lambda'\lambda''}} = S^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, \end{cases}$$

und werden im folgenden art. zeigen, wie sich die Bestimmung der Functionen ξ, η, ζ vollständig auf die Ermittlung der Functionen R und S zurückführen lässt.

V.

Zunächst ergiebt sich aus den für $t = 0$ stattfindenden Gleichungen $\xi^i_{000} = V^{3i}_{000}$, $\dfrac{\partial \xi^i_{000}}{\partial t} = G^{3i}_{000}$, $\eta^i_{000} = V^{3i+1}_{000}$, u. s. w. mit Hülfe der Gleichungen (6.), dass für $t = 0$, mit einziger Ausnahme von

$$R^{j,j}_{000} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S^{j,j}_{000}}{\partial t} \qquad (j = 0, 1, \dots 3N+2),$$

welche gleich 1 werden, alle übrigen Functionen R, S, $\dfrac{\partial R}{\partial t}$, $\dfrac{\partial S}{\partial t}$ verschwinden.

Ferner erhält man aus den Gleichungen (3.), indem man sie nach einem Anfangswerthe differentiirt, mit Hülfe der Gleichungen (5.) Differentialgleichungen, denen die Functionen R und S genügen müssen.

Beachtet man, dass nach (5.) und (6.) auf Grund der in art. II eingeführten Bezeichnung

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)^i_k}{\partial(V, G)^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)^k_{l+n,l'+n',l''+n''}}{\partial(V, G)^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)^k_{000}}{\partial(V, G)^j_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''}}$$

$$= (P^{3k,j}, P^{3k+1,j}, P^{3k+2,j})_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''},$$

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)_i}{\partial(V, G)^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}} = (P^{3i,j}, P^{3i+1,j}, P^{3i+2,j})_{\lambda\lambda'\lambda''}$$

ist, wo P durch R oder S zu ersetzen ist, jenachdem man nach V oder G differentiirt, so erkennt man sofort, dass man, um die Gleichungen (3.) nach $(V, G)^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}$ zu differentiiren, nur nöthig hat, dort überall

$$\xi_i, \ \eta_i, \ \zeta_i \quad \text{durch} \quad P^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, \ P^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}, \ P^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}$$

und die Differenzen

$$\xi_k' - \xi_i, \quad \eta_k' - \eta_i, \quad \zeta_k' - \zeta_i$$

durch

$$P^{3k,j}_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''} - P^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathfrak{P}^{3k,3i}, \quad P^{3k+1,j}_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''} - P^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathfrak{P}^{3k+1,3i+1},$$

$$P^{3k+2,j}_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''} - P^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathfrak{P}^{3k+2,3i+2}$$

zu ersetzen.

Behält man diese Bezeichnung zur Abkürzung bei, so ergiebt sich also

$$(7.)\quad \begin{cases} m^i \dfrac{\partial^2 P^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}}{\partial t^2} = \sum\limits_{nn'n''}\sum\limits_k \left[\dfrac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'^2}\mathfrak{P}^{3k,3i} + \dfrac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial y_k'}\mathfrak{P}^{3k+1,3i+1} + \dfrac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial z_k'}\mathfrak{P}^{3k+2,3i+2}\right], \\ m^i \dfrac{\partial^2 P^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}}{\partial t^2} = \sum\limits_{nn'n''}\sum\limits_k \left[\dfrac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial y_k'}\mathfrak{P}^{3k,3i} + \dfrac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'^2}\mathfrak{P}^{3k+1,3i+1} + \dfrac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'\partial z_k'}\mathfrak{P}^{3k+2,3i+2}\right], \\ m^i \dfrac{\partial^2 P^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}}{\partial t^2} = \sum\limits_{nn'n''}\sum\limits_k \left[\dfrac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial z_k'}\mathfrak{P}^{3k,3i} + \dfrac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'\partial z_k'}\mathfrak{P}^{3k+1,3i+1} + \dfrac{\partial^2[ik]}{\partial z_k'^2}\mathfrak{P}^{3k+2,3i+2}\right] \end{cases}$$

Fügt man zu diesen Gleichungen die Bedingung, dass

für $t = 0$ und $j = 0, 1, \ldots 3N+2$

$$(8.)\qquad P^{j,j}_{000} = \mathfrak{A}^j, \quad \frac{\partial P^{j,j}_{000}}{\partial t} = \mathfrak{B}^j$$

werde, und alle übrigen Functionen P und $\frac{\partial P}{\partial t}$ verschwinden, so wird offenbar

I. $P = R$, wenn man alle $\mathfrak{A}^j = 1$, alle $\mathfrak{B}^j = 0$ setzt;

II. $P = S$, wenn man alle $\mathfrak{A}^j = 0$, alle $\mathfrak{B}^j = 1$ setzt,

gleiche Indices bei P, R und S vorausgesetzt.

Diese Bedingungen zeigen, was auch für sich klar ist, dass die Functionen R und S von den Anfangswerthen V und G unabhängig sind; also sind (5.) und (6.) die Verschiebungen ξ, η und ζ lineare Functionen derselben. Da diese Functionen verschwinden, wenn man alle Anfangswerthe auf Null reducirt, so erhält man aus den Gleichungen (5.) und (6.)

$$(9.)\quad \begin{cases} \xi^i_{ll'l''} = \sum\limits_{\lambda\lambda'\lambda''}\sum\limits_j [R^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}\, V^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''} + S^{3i,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}\, G^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}], \\ \eta^i_{ll'l''} = \sum\limits_{\lambda\lambda'\lambda''}\sum\limits_j [R^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}\, V^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''} + S^{3i+1,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}\, G^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}], \\ \zeta^i_{ll'l''} = \sum\limits_{\lambda\lambda'\lambda''}\sum\limits_j [R^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}\, V^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''} + S^{3i+2,j}_{\lambda\lambda'\lambda''}\, G^j_{\lambda+l,\lambda'+l',\lambda''+l''}], \end{cases}$$

wo von den beiden Summationen sich die erste über alle ganzzahligen Werthe von λ, λ', λ'', und die zweite sich über die Werthe $j = 0, 1, 2, \ldots 3N+2$ erstreckt.

VI.

Man kann eine Particularlösung der Gleichungen (7.) finden, indem man jede Funktion $P_{ll'l''}$ zur Exponentialgrösse $e^{(lu+l'u'+l''u'')\sqrt{-1}}$ proportional setzt, wobei u, u', u'' Constanten bedeuten, welche willkürlich bleiben. Durch Superposition solcher Particularlösungen muss man hierauf den Anfangsbedingungen (8.) Genüge leisten.

In Folge der besondern Beschaffenheit dieser Anfangsbedingungen ist es leicht, im Voraus das Resultat der eben bezeichneten Superposition zu erkennen. Es sei Ω eine Function der Variabeln t, u, u', u'', welche ebenso wie ihre erste Derivirte $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ für $t = 0$ von u, u', u'' unabhängig wird. Entwickelt man diese beiden Functionen für alle zwischen $-\pi$ und π enthaltenen Werthe von u, u', u'' nach Exponentialgrößen $e^{(\lambda u+\lambda' u'+\lambda'' u'')\sqrt{-1}}$, so verschwinden für $t = 0$ alle Coefficienten in diesen Entwicklungen bis auf diejenigen, welche der Voraussetzung $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 0$ entsprechen. Dies ist genau die von den Functionen $P_{\lambda\lambda'\lambda''}$ verlangte Eigenschaft. Wir setzen demnach

$$(10.)\qquad P^{h,j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Omega^{hj}\, e^{(\lambda u+\lambda' u'+\lambda'' u'')\sqrt{-1}}\,\partial u\,\partial u'\,\partial u'',$$

wo jede Integration zwischen den Grenzen $-\pi$ und π auszuführen ist.

Dann verlangen die Anfangsbedingungen (8.), dass man für $t = 0$ habe

$$(11.)\qquad \Omega^{jj} = \mathfrak{A}^j, \quad \frac{\partial \Omega^{jj}}{\partial t} = \mathfrak{B}^j, \quad \Omega^{hj} = 0, \quad \frac{\partial \Omega^{hj}}{\partial t} = 0,$$

wenn h von j verschieden ist.

Ferner ergiebt sich aus (10.)

$$P^{hj}_{\lambda-n,\lambda'-n',\lambda''-n''} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Omega^{hj}\, e^{(\lambda u+\cdots)\sqrt{-1}} \cdot e^{-(nu+\cdots)\sqrt{-1}}\,\partial u\,\partial u'\,\partial u''.$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die Gleichungen (7.) ein, und bedienen uns folgender abkürzender Bezeichnung:

$$e^{-(nu+n'u'+n''u'')\sqrt{-1}} = \omega,$$

$$
(12.)\left\{\begin{array}{ll}
\text{ferner \textit{in der ersten Gleichung}} & \\
\sum\limits_{nn'n''}\sum\limits_{k=0}^{k=N}\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'^2}-\sum\limits_{nn'n''}\frac{\partial^2[ii]}{\partial x_i'^2}\cdot\omega=(3i,3i), & -\sum\limits_{nn'n''}\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'^2}\cdot\omega=(3i,3k),\\
\sum\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial y_k'}-\sum\frac{\partial^2[ii]}{\partial x_i'\partial y_i'}\cdot\omega=(3i,3i+1), & -\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial y_k'}\cdot\omega=(3i,3k+1),\\
\sum\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial z_k'}-\sum\frac{\partial^2[ii]}{\partial x_i'\partial z_i'}\cdot\omega=(3i,3i+2), & -\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial z_k'}\cdot\omega=(3i,3k+2),\\
\text{\textit{in der zweiten}} & \\
\sum\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial y_k'}-\sum\frac{\partial^2[ii]}{\partial x_i'\partial y_i'}\cdot\omega=(3i+1,3i), & -\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial y_k'}\cdot\omega=(3i+1,3k),\\
\sum\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'^2}-\sum\frac{\partial^2[ii]}{\partial y_i'^2}\cdot\omega=(3i+1,3i+1), & -\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'^2}\cdot\omega=(3i+1,3k+1),\\
\sum\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'\partial z_k'}-\sum\frac{\partial^2[ii]}{\partial y_i'\partial z_i'}\cdot\omega=(3i+1,3i+2), & -\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'\partial z_k'}\cdot\omega=(3i+1,3k+2),\\
\text{\textit{und in der dritten}} & \\
\sum\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial z_k'}-\sum\frac{\partial^2[ii]}{\partial x_i'\partial z_i'}\cdot\omega=(3i+2,3i), & -\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'\partial z_k'}\cdot\omega=(3i+2,3k),\\
\sum\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'\partial z_k'}-\sum\frac{\partial^2[ii]}{\partial y_i'\partial z_i'}\cdot\omega=(3i+2,3i+1), & -\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k'\partial z_k'}\cdot\omega=(3i+2,3k+1),\\
\sum\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial z_k'^2}-\sum\frac{\partial^2[ii]}{\partial z_i'^2}\cdot\omega=(3i+2,3i+2), & -\sum\frac{\partial^2[ik]}{\partial z_k'^2}\cdot\omega=(3i+2,3k+2),
\end{array}\right.
$$

wo die Gleichungen der zweiten Verticalreihe k und i als von einander verschieden voraussetzen.

Unterscheidet man in den Gleichungen (7.) die beiden Fälle, wo $k=i$ oder k von i verschieden ist, so erkennt man, dass dieselben sich mit Hülfe der vorstehenden Bezeichnungen in die folgenden verwandeln, in denen

$$\frac{1}{(2\pi)^3}e^{(\lambda u+\lambda' u'+\lambda'' u'')\sqrt{-1}}\,\partial u\,\partial u'\,\partial u''=\partial E_{\lambda\lambda'\lambda''}$$

gesetzt ist:

$$0=\int\partial E_{\lambda\lambda'\lambda''}\left[m^i\frac{\partial^2\Omega^{3i,j}}{\partial t^2}+\sum_k\left((3i,3k)\Omega^{3k,j}+(3i,3k+1)\Omega^{3k+1,j}+(3i,3k+2)\Omega^{3k+2,j}\right)\right],$$

$$0=\int\partial E_{\lambda\lambda'\lambda''}\left[m^i\frac{\partial^2\Omega^{3i+1,j}}{\partial t^2}+\sum_k\left((3i+1,3k)\Omega^{3k,j}+(3i+1,3k+1)\Omega^{3k+1,j}+(3i+1,3k+2)\Omega^{3k+2,j}\right)\right],$$

$$0=\int\partial E_{\lambda\lambda'\lambda''}\left[m^i\frac{\partial^2\Omega^{3i+2,j}}{\partial t^2}+\sum_k\left((3i+2,3k)\Omega^{3k,j}+(3i+2,3k+1)\Omega^{3k+1,j}+(3i+2,3k+2)\Omega^{3k+2,j}\right)\right],$$

wo k bei der Summation die Werthe $0, 1, \dots N$ durchläuft.

Diese Gleichungen müssen für alle ganzzahligen Werthe von λ, λ', λ'' bestehen. Da aber die in den eckigen Klammern stehenden Functionen von λ, λ', λ'' unabhängig sind, so ergiebt sich aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, dass sie gleich Null sein müssen für alle zwischen $-\pi$ und π liegenden Werthe von u, u', u'', d. h. für alle Werthe, welche diese Variabeln während der Integration durchlaufen.

Jede der vorstehenden Gleichungen liefert also eine Differentialgleichung zwischen den einzelnen Functionen Ω. Setzt man der Symmetrie wegen in der ersten $m^i=\mu_{3i}$, in der zweiten $m^i=\mu_{3i+1}$, in der dritten $m^i=\mu_{3i+2}$, so dass man für $i=0, 1, \dots N$ hat

$$(13.)\qquad \mu_{3i}=\mu_{3i+1}=\mu_{3i+2}=m^i,$$

so treten diese Gleichungen sämmtlich in die nämliche Form; man erhält für

$$h, j=0, 1, \dots 3N+2$$

$$(14.)\qquad \mu_h\frac{\partial^2\Omega^{hj}}{\partial t^2}+\sum_{g=0}^{g=3N+2}(hg)\Omega^{gj}=0.$$

Auf diese Weise ist das ursprüngliche Problem auf die Integration des vorstehenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die in (11.) gestellten Anfangsbedingungen zurückgeführt. Zu dieser Integration sind indessen einige Vorbereitungen erforderlich.

VII.

Vor allem ist es notwendig, gewisse Eigenschaften der Coefficienten (hg) festzustellen.

Zunächst ergiebt sich aus ihrer Entstehung, dass sie nicht bloss von der Zeit t unabhängig sind, sondern auch von der Stelle, welche der Punkt $m^i_{ll'l''}$ im System Π_i oder P einnimmt.

Eine zweite Eigenschaft ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen (12.). Sie ist in der Gleichung

$$(3i+\chi, 3k+\varrho)=(3i+\varrho, 3k+\chi)$$

enthalten, wenn ϱ und χ nach Belieben aus den Zahlen 0, 1, 2 ausgewählt werden.

Die dritte Eigenschaft, deren Kenntnis nothwendig ist, besteht darin, dass die beiden Grössen (gh) und (hg), welche im Allgemeinen complexe Werthe haben, stets zu einander conjugirt sind.

Zum Beweise dieser Behauptung werden wir in den Ausdrücken der verschiedenen Grössen (gh) die Vorzeichen der Indices n, n', n'' ändern, was auf den Werth dieser Ausdrücke offenbar keinen Einfluss hat.

Dann erkennt man zunächst leicht, dass die Grössen $(3i+\chi, 3i+\varrho)$ sämmtlich reell sind. Da ausserdem $(3i+\chi, 3i+\varrho) = (3i+\varrho, 3i+\chi)$ ist, so wird in diesem Falle der obigen Behauptung nicht widersprochen.

Wir wollen nun unter der Voraussetzung, dass k von i verschieden ist, die beiden Factoren untersuchen, welche im Ausdrucke von $(3i+\chi,\ 3k+\varrho)$ unter dem Summenzeichen stehen.

Da man nach art. I. und II.

$$x'_k - x_i = \alpha_k - \alpha_i + an + a'n' + a''n'', \quad x'_i - x_k = \alpha_i - \alpha_k + an + \cdots$$

hat, und ähnliche Gleichungen für die anderen Coordinatendifferenzen gelten, so folgt, dass $x'_k - x_i$, $y'_k - y_i$, $z'_k - z_i$ durch Aenderung des Vorzeichens von n, n', n'' in $-(x'_i - x_k)$, $-(y'_i - y_k)$, $-(z'_i - z_k)$ verwandelt werden. Gleichzeitig gehen also die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2[ik]}{\partial x'^2_k}, \ \frac{\partial^2[ik]}{\partial y'_k \partial z'_k} \text{ u. s. w. über in } \frac{\partial^2[ki]}{\partial x'^2_i}, \ \frac{\partial^2[ki]}{\partial y'_i \partial z'_i} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt, dass in den Gleichungen (12.) der Zeichenwechsel der Indices n, n', n'' nur zur Folge hat, dass auf der linken Seite 1) die Zahlen i und k vertauscht werden, und 2) in der Exponentialgrösse $\omega = e^{-(nu+\cdots)\sqrt{-1}}$ die $\sqrt{-1}$ das entgegengesetzte Zeichen erhält. Dadurch wird aber die Grösse $(3i+\chi,\ 3k+\varrho)$ ohne Aenderung ihres Werthes in die Conjugirte von $(3k+\chi,\ 3i+\varrho) = (3k+\varrho, 3i+\chi)$ verwandelt, w. z. b. w.

Man kann endlich noch eine vierte Eigenschaft dieser Grössen (gh) bemerken; dieselben sind nämlich in Bezug auf jede der drei Variabeln u, u', u'' periodisch, mit der Periode 2π. Daraus zieht man leicht den Schluss, dass die durch die Gleichungen (11.) und (14.) bestimmten Functionen Ω die nämliche Periodicität darbieten müssen.

VIII.

Setzt man

$$\psi^j = \sum_{g,h} (hg)\Omega^{gj} H^h, \quad \varphi^j = \sum_g \mu_h \Omega^{hj} H^h,$$

so kann man die Gleichungen (14.) in folgende Form bringen:

$$\text{(15.)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial H^h}\right) + \frac{\partial \psi^j}{\partial H^h} = 0, \quad h = 0, 1, \ldots 3N+2.$$

Da diese Gleichungen linear, und ihre Coefficienten constant sind, so hängt ihre Integration, wie bekannt, nur von der Untersuchung der Determinante der bilinearen Function

$$\psi^j - x\varphi^j$$

und ihrer Unterdeterminanten ab.

Vergleicht man aber die Ausdrücke der Functionen ψ^j und φ^j mit denjenigen, welche in der Abhandlung über die Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn *Weierstrass* (p. 125) durch ψ und φ bezeichnet wurden, so erkennt man sofort, dass die dort gemachten Voraussetzungen im gegenwärtigen Falle erfüllt sind.

Setzt man nämlich $[hh] = \mu_h$ und, so lange g von h verschieden ist, $[gh] = 0$, so wird

$$\varphi^j = \sum [hg]\Omega^{gj} H^h,$$

und es sind nun (gh) und (hg), sowie $[gh]$ und $[hg]$ zu einander conjugirt, wie dort verlangt wurde. Setzt man ferner $\Omega^{hj} = x_h + iy_h$, $H^h = x_h - iy_h$, so wird $\varphi^j = \sum \mu_h(x_h^2 + y_h^2)$. Dies kann, da sämmtliche μ als Massen materieller Punkte positiv sind, nur verschwinden, wenn alle rellen Variabeln x und y sich zugleich auf Null reduciren.

Bezeichnet man daher durch

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} (00) - \mu x & (01) & \cdots \\ (10) & (11) - \mu x & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

die Determinante von $\psi^j - x\varphi^j$, und durch $\Delta_{ik}(x)$ die aus einer Aenderung des Elementes (ik) entspringende Unterdeterminante von $\Delta(x)$, so folgt

I. dass alle Wurzeln der Gleichung $\Delta(x) = 0$ reell sind.

Bezeichnet man die von einander verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung $3N+3^{\text{ten}}$ Grades durch

$$s^2, \quad s_1^2, \quad \ldots \quad s_p^2,$$

so folgt weiter,

II. dass man durch Zerfällung in Partialbrüche

$$\frac{\Delta_{ik}(x)}{\Delta(x)} = \sum_\delta \frac{A_{ik}^\delta}{s_\delta^2 - x}$$

erhält, wo die Factoren A von x unabhängig sind, und die Summation sich über die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta(x) = 0$ erstreckt.

Endlich zieht man aus den Gleichungen (9.) der angeführten Abhandlung für den vorliegenden Fall die folgenden:

$$\text{(III.)} \qquad \begin{cases} \Omega^{gj} = \sum\limits_\delta \sum\limits_h A_{gh}^\delta \dfrac{\partial \varphi^j}{\partial H^h}, \\ \sum\limits_h A_{gh}^\delta \dfrac{\partial \psi^j}{\partial H^h} = s_\delta^2 \sum\limits_h A_{gh}^\delta \dfrac{\partial \varphi^j}{\partial H^h}, \end{cases}$$

welche bei jeder Bedeutung der Grössen Ω^{0j}, Ω^{1j}, ... stattfinden.

Setzt man also

$$(16.)\qquad \sum_h A^\delta_{gh} \frac{\partial \varphi^j}{\partial H^h} = \sum_h \mu_h A^\delta_{gh} \Omega^{hj} = \Omega^{gj\delta},$$

so folgt aus den Gleichungen (III.)

$$(17.)\qquad \begin{cases} \Omega^{gj} = \sum\limits_\delta \Omega^{gj\delta}, \\ \sum\limits_h A^\delta_{gh} \dfrac{\partial \psi^j}{\partial H^h} = s^2_\delta \, \Omega^{gj\delta}. \end{cases}$$

Dies festgestellt, multipliciren wir die Gleichung (15.) mit A^δ_{gh}, und addiren hierauf die aus ihr für $h = 0, 1, \ldots 3N+2$ entspringenden Gleichungen zu einander; dann folgt

$$\frac{\partial^2 \Omega^{gh\delta}}{\partial t^2} + s^2_\delta \Omega^{gj\delta} = 0.$$

Da man aus (16.) und (11.) für $t = 0$

$$\Omega^{gj\delta} = \mu_j A^\delta_{gj} \mathfrak{A}^j, \qquad \frac{\partial \Omega^{gj\delta}}{\partial t} = \mu_j A^\delta_{gj} \mathfrak{B}^j$$

erhält, so ist also für ein beliebiges t

$$\Omega^{gj\delta} = \mu_j A^\delta_{gj} \left[\mathfrak{A}^j \cos s_\delta t + \mathfrak{B}^j \frac{\sin s_\delta t}{s_\delta} \right],$$

mithin, wegen der Gleichung (17.)

$$\Omega^{gj} = \mu_j \sum_\delta A^\delta_{gj} \left[\mathfrak{A}^j \cos s_\delta t + \mathfrak{B}^j \frac{\sin s_\delta t}{s_\delta} \right].$$

IX.

Aus dem eben gefundenen Ausdrucke der Functionen Ω ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichung (10.), dass man, wenn

$$(18.)\qquad \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_\delta \int A^\delta_{jh} \frac{\sin s_\delta t}{s_\delta} e^{(\lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'')\sqrt{-1}} \partial u \, \partial u' \, \partial u'' = T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''}$$

$$-\pi < u, u', u'' < \pi$$

gesetzt wird,

$$P^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mu_j \left[\mathfrak{A}^j \frac{\partial T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''}}{\partial t} + \mathfrak{B}^j T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''} \right]$$

erhält. Da ferner (art. V, I. und II.) P gleich R oder S ist, je nachdem man für jedes j $\mathfrak{A}^j = 1$, $\mathfrak{B}^j = 0$ oder $\mathfrak{A}^j = 0$, $\mathfrak{B}^j = 1$ setzt, so folgt:

$$R^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mu_j \frac{\partial T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''}}{\partial t}, \quad S^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mu_j T^{hj}_{\lambda\lambda'\lambda''}.$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke erhält man aus den Gleichungen (9.)

die Lösung des vorgelegten Problems. Sei zur besseren Uebersicht für $\varrho = 0, 1, 2$

$$(19.)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\lambda\lambda'\lambda''} \sum\limits_{j=0}^{j=3N+2} \mu_j V^j_{\lambda+l,\, \lambda'+l',\, \lambda''+l''} T^{3i+\varrho,\, j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathfrak{B}^{i,\varrho}_{ll'l''}, \\ \sum\limits_{\lambda\lambda'\lambda''} \sum\limits_{j=0}^{j=3N+2} \mu_j G^j_{\lambda+l,\, \lambda'+l',\, \lambda''+l''} T^{3i+\varrho,\, j}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathfrak{G}^{i,\varrho}_{ll'l''}, \end{cases}$$

so folgt:

$$(20.)\qquad \begin{cases} \xi^i_{ll'l''} = \mathfrak{G}^{i,0}_{ll'l''} + \dfrac{\partial \mathfrak{B}^{i,0}_{ll'l''}}{\partial t}, \\ \eta^i_{ll'l''} = \mathfrak{G}^{i,1}_{ll'l''} + \dfrac{\partial \mathfrak{B}^{i,1}_{ll'l''}}{\partial t}, \\ \zeta^i_{ll'l''} = \mathfrak{G}^{i,2}_{ll'l''} + \dfrac{\partial \mathfrak{B}^{i,2}_{ll'l''}}{\partial t}. \end{cases}$$

Die Einfachheit dieser Formeln lässt nichts zu wünschen übrig. Es scheint indessen schwer zu sein, aus ihnen unmittelbar eine Vorstellung von der durch sie dargestellten Bewegung zu gewinnen. Dagegen bieten sie für angenäherte Bestimmungen eine völlig zuverlässige Grundlage dar, bei welcher es nicht, wie bei der directen Behandlung der ursprünglichen Differentialgleichungen, zu befürchten ist, dass durch wiederholte Vernachlässigungen schliesslich alles verwischt wird, was den Charakter des ursprünglichen Problems ausmacht.

VIII.

Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 64, 1865, S. 193—209.)

Die bisherigen Untersuchungen über die Gestalt der Erde gehen sämmtlich von der durch hydrostatische Gründe nahegelegten Voraussetzung aus, dass dieselbe bis auf geringe und nur zufällige Abweichungen ein Sphäroid ist, welches seine Drehungsaxe mit der Erde gemein hat. Dieses Sphäroid, welches man zum Unterschiede von der wirklichen die wahre Oberfläche der Erde nennt, wird dadurch bestimmt, dass die auf der ersten wirklich ausgeführten Gradmessungen durch möglichst wenig beträchtliche Abänderungen der Beobachtungsresultate mit den auf der letztern ihnen entsprechenden in genaue Uebereinstimmung gebracht werden.

Das in Rede stehende Problem lässt sich indessen auch noch von einem zweiten Gesichtspunkte aus behandeln, welcher von jeder willkürlichen, wenn auch noch so annehmbaren Voraussetzung über die zu ermittelnde Gestalt der Erde unabhängig ist, und aus diesem Grunde zur Entscheidung über die Zulässigkeit einer solchen Voraussetzung führen könnte.

Es versteht sich von selbst, dass auch bei dieser Untersuchung das Studium spezieller Terrains von der Bestimmung der Erdoberfläche im Allgemeinen getrennt werden muss. Aus diesem Grunde wird es keine willkürliche Voraussetzung in sich schliessen, wenn man als die zu bestimmende Gestalt der Erde, mit Berücksichtigung unserer vorläufigen Kenntnis von ihrer allgemeinen Wölbung, diejenige allenthalben gewölbte und stetig gekrümmte Oberfläche E bezeichnet, welche mit der wirklichen Erdoberfläche nach Beseitigung ihrer lokalen Hebungen und Senkungen vollständig zusammenfällt. Es muss hinzugefügt werden, dass die in der letzten Bedingung liegende Unbestimmtheit wegen der relativen Geringfügigkeit der zu beseitigenden Unebenheiten als thatsächlich gar nicht vorhanden betrachtet werden kann.

Zur Orientierung über die Lage eines Punktes m auf der Oberfläche E sind die an die tägliche Bewegung der Himmelskugel geknüpften sphärischen Coordinaten desselben im vorliegenden Falle nicht geeignet, weil sie von der Beschaffenheit der Fläche E in der Nähe des Punktes m unabhängig sind, also auch für sich allein keinen Rückschluss auf dieselbe gestatten. Ich bediene mich aus diesem Grunde zur Bestimmung der Lage von m auf E der sphärischen Coordinaten eines Punktes, den ich das wahre Zenith der Fläche E im Punkte m nenne, und verstehe hierunter denjenigen Punkt in der unendlich entfernten Himmelskugel, in welchem diese von der in m auf der zugänglichen Seite von E errichteten Normale geschnitten wird.

Dies festgestellt, erhält man aus den folgenden Untersuchungen für den vorliegenden Fall den Satz:

Wenn die Oberfläche E eines sich nicht ins Unendliche erstreckenden Körpers allenthalben gewölbt und stetig gebogen ist, ferner in keinem Punkte derselben ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich gross oder unstetig ist, endlich für jedes wahre Zenith, unabhängig davon, welcher Punkt der Fläche ihm entsprechen mag, die Summe der in letzterem stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser gegeben ist, so ist die Fläche selbst und ihre Lage in der Himmelskugel völlig bestimmt, bis auf einen beliebigen mit ihr verbundenen Punkt, über dessen Ort im absoluten Raume noch verfügt werden kann.

In Folge dieses Satzes kann die Gestalt der Fläche E mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, wenn man im Stande ist, für eine genügende Anzahl von Punkten derselben, über deren gegenseitige Lage keine anderweitigen Angaben erforderlich sind, 1) die sphärischen Coordinaten ihres wahren Zeniths, und 2) die Summe der in ihnen stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser zu ermitteln.

In der That kann man unter dieser Voraussetzung die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser als Function der Coordinaten des wahren Zeniths darstellen, wobei man nur darauf Rücksicht zu nehmen hat, dass der bei der Interpolation zu Grunde gelegte Ausdruck in keinem Zenith unendlich oder unstetig wird, und einer im art. VIII näher zu bezeichnenden Bedingung genügt. Durch den numerischen Verlauf dieser Function und die übrigen Bedingungen des Satzes ist aber die Fläche E völlig bestimmt.

Es muss hier unerörtert bleiben, in wie weit sich diese Resultate zur wirklichen Ausführung eignen. Die Grundlage zu derselben ist in dem Satze zu suchen, dass ein stetig gekrümmtes, hinlänglich kleines Stück jeder beliebigen Oberfläche als einer Fläche zweiten Grades angehörig betrachtet werden kann. Die letztere muss für jedes passend gewählte Stück T der zur Untersuchung vorgelegten Fläche durch Messungen von derselben Art bestimmt werden, wie man sie bisher zur Bestimmung des ganzen Erdsphäroids ausgeführt hat, und liefert dann für die Punkte des genauesten Anschlusses an T das wahre Zenith und die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser.

I.

Dem vorliegenden Zwecke gemäss beschränken wir die nachfolgenden Untersuchungen auf den Fall, wo die vorgelegte Fläche E sich weder ins Unendliche erstreckt, noch auf ihrer zugänglichen Seite in verschiedenen Punkten gleichgerichtete Normalen hat, noch in Zusammenhang, Biegung oder Krümmung irgendwo eine Unstetigkeit darbietet. Zur Vereinfachung schliessen wir überdies den Fall aus, wo ein Hauptkrümmungshalbmesser auf E unendlich gross wird; es mag indessen beiläufig bemerkt werden, dass sämmtliche Resultate gültig bleiben, wenn dieser Fall in einer begrenzten Anzahl von Punkten eintritt, sobald nur nicht das Product aus einem Hauptkrümmungshalbmesser und jeder Potenz der Entfernung von einem dieser Punkte, deren Exponent kleiner als 1 ist, in demselben unendlich wird (art. Vb. und VI).

Die nächste Folgerung, welche wir aus diesen Einschränkungen ziehen, besteht darin, dass nicht bloss zu jedem Punkte m der Fläche E ein einziger Punkt $\mathfrak{m}$ als wahres Zenith, sondern auch umgekehrt zu jedem wahren Zenith nur ein einziger Punkt der Fläche E gehört.

Dies festgestellt, sei C der Nordpol der Himmelskugel, A der Durchschnitt des ersten Meridians mit dem durch C bestimmten Aequator, B der von A aus auf letzterem um einen Quadranten östlich entfernte Punkt. In dem hierdurch gegebenen Coordinatensystem soll die nach Osten wachsende Länge von $\mathfrak{m}$ durch φ, seine nach Norden wachsende Breite durch θ bezeichnet werden.

Zur Bestimmung der Lage des entsprechenden Punktes m im Raume bediene ich mich rechtwinkliger Coordinaten x, y, z, welche in den durch die unendlich entfernten Punkte A, B, C bestimmten Richtungen wachsen. Ueber ihren Anfangspunkt, der vorläufig nicht in Betracht kommt, kann erst später (art. VIII) verfügt werden.

Nach dem, was oben festgestellt wurde, sind die rechtwinkligen Coordinaten von m durch die Länge und Breite von $\mathfrak{m}$ vollständig bestimmt. Da ausserdem wegen des ununterbrochenen Zusammenhanges und der stetigen Biegung von E beide Punkte zugleich ihren Ort nach der Stetigkeit ändern, endlich nach der Voraussetzung kein Punkt m im

Unendlichen liegt, so sind x, y und z einwerthige, endliche und stetige Functionen der Variabeln θ und φ, und letztere von einander unabhängig.

Da aber φ und θ nicht bloss die Lage von m, sondern auch die Richtung der Tangentialebene von E in diesem Punkte bestimmen, so sind sie rückwärts von den verschwindenden Aenderungen abhängig, welche x, y und z durch eine unendlich kleine Ortsänderung des Punktes m auf E erleiden. Aus diesem Grunde erlangen x, y und z, wenn sie als Functionen von φ und θ dargestellt werden, bestimmte Eigenschaften, welche die Grundlage unserer Untersuchung bilden.

II.

Es seien $\partial x, \partial y, \partial z$ die Zunahmen, welche die Coordinaten von m beim Uebergange zu einem auf E unendlich benachbarten Punkte m_1 erlangen. Projicirt man das Linienelement $m m_1$ auf die Normale $m\mathfrak{m}$, und bezeichnet die Winkel zwischen dieser und den Richtungen der wachsenden Coordinaten durch $(\mathfrak{m}A)$, $(\mathfrak{m}B)$, $(\mathfrak{m}C)$, so folgt:

$$\partial x \cos(\mathfrak{m}A) + \partial y \cos(\mathfrak{m}B) + \partial z \cos(\mathfrak{m}C) = 0;$$

hier ist, weil φ und θ die Länge und Breite von $\mathfrak{m}$ sind,

$$\cos(\mathfrak{m}A) = \cos\varphi\cos\theta, \quad \cos(\mathfrak{m}B) = \sin\varphi\cos\theta, \quad \cos(\mathfrak{m}C) = \sin\theta.$$

An Stelle von θ führe ich eine neue veränderliche Grösse ϱ mittelst der Gleichungen

$$(1.) \qquad \cos\theta = \frac{1}{C_\varrho}, \quad \sin\theta = \frac{S_\varrho}{C_\varrho}$$

ein, wo C und S den hyperbolischen Cosinus und Sinus bedeuten, also

$$(2.) \qquad C_\varrho = \frac{e^\varrho + e^{-\varrho}}{2}, \quad S_\varrho = \frac{e^\varrho - e^{-\varrho}}{2}$$

ist. Damit also θ seine Werthe von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ der Reihe nach erlange, muss ϱ die reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen.

Daraus folgt

$$(3.) \qquad \cos(\mathfrak{m}A) = \frac{\cos\varphi}{C}, \quad \cos(\mathfrak{m}B) = \frac{\sin\varphi}{C}, \quad \cos(\mathfrak{m}C) = \frac{S}{C},$$

wenn zur Abkürzung C und S statt C_ϱ und S_ϱ gesetzt wird, also weiter

$$\partial z = -\frac{\cos\varphi}{S}\partial x - \frac{\sin\varphi}{S}\partial y,$$

endlich

$$(4.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial\varrho} = -\dfrac{1}{S}\left(\cos\varphi\dfrac{\partial x}{\partial\varrho} + \sin\varphi\dfrac{\partial y}{\partial\varrho}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} = -\dfrac{1}{S}\left(\cos\varphi\dfrac{\partial x}{\partial\varphi} + \sin\varphi\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\right). \end{cases}$$

Da aber die Variabeln φ und ϱ von einander unabhängig sind, also jede Aenderung der einen die andere und ihr Differential ungeändert lässt, so muss man gleiche Resultate erhalten, wenn man von den vorstehenden Gleichungen die erste nach φ, die zweite nach ϱ differentiirt. Multiplicirt man vorher mit S, und subtrahirt nach dem Differentiiren die erste von der zweiten, so folgt

$$(5.)\qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{1}{C}\left(\sin\varphi\,\frac{\partial x}{\partial \varrho} - \cos\varphi\,\frac{\partial y}{\partial \varrho}\right).$$

Zu diesen Gleichungen kommen noch andere, welche sich aus der Untersuchung über die Krümmung von E ergeben.

III.

Um bei der Bestimmung der Krümmungshalbmesser von E jede Unsicherheit in Bezug auf die Bedeutung der Zeichen auszuschliessen, zählen wir auf jeder Normale $m\mathfrak{m}$ Abscissen R, welche im Fusspunkte m Null sind, und in der Richtung nach dem Zenith $\mathfrak{m}$ hin abnehmen, also auf der unzugänglichen Seite von E positiv werden.

Bezeichnet man nun durch u, v, w die rechtwinkligen Coordinaten eines der auf $m\mathfrak{m}$ liegenden Krümmungsmittelpunkte von E, und durch R seine auf dieser Normale gezählte Abscisse, also abgesehen vom Zeichen den ihm entsprechenden Krümmungshalbmesser, so ist für jedes Vorzeichen von R

$$\frac{x-u}{R} = \cos(\mathfrak{m}A), \qquad \frac{y-v}{R} = \cos(\mathfrak{m}B), \qquad \frac{z-w}{R} = \cos(\mathfrak{m}C).$$

Ertheilt man aber den Grössen φ und ϱ verschwindende Aenderungen $\partial\varphi$ und $\partial\varrho$, welche so gewählt sind, dass m an dem zu R gehörigen Krümmungskreise entlang rückt, so bleiben u, v, w und R ungeändert, und es folgt

$$\partial x = R\partial\cos(\mathfrak{m}A), \qquad \partial y = R\partial\cos(\mathfrak{m}B), \qquad \partial z = R\partial\cos(\mathfrak{m}C).$$

Von diesen drei Gleichungen, ebenso wie von den vorigen, folgt jedesmal eine aus den beiden andern. Führt man rechts die in (3.) gegebenen Werthe ein, so ergiebt sich

$$\left(R\frac{\sin\varphi}{C} + \frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\partial\varphi + \left(R\frac{S\cos\varphi}{C^2} + \frac{\partial x}{\partial\varrho}\right)\partial\varrho = 0,$$
$$-\left(R\frac{\cos\varphi}{C} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\partial\varphi + \left(R\frac{S\sin\varphi}{C^2} + \frac{\partial y}{\partial\varrho}\right)\partial\varrho = 0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}\partial\varphi + \left(\frac{\partial z}{\partial\varrho} - \frac{R}{C^2}\right)\partial\varrho = 0.$$

Von diesen Gleichungen dienen zwei zur Bestimmung von R und dem zugehörigen Werthe von $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$. Eliminirt man den letztern, auf

dessen Bestimmung es hier nicht ankommt, so erhält man ohne Mühe aus den beiden ersten Gleichungen mit Rücksicht auf (4.) die folgende

$$R^2 - RC^2\left[\frac{\partial z}{\partial\varrho} - \frac{1}{C}\left(\sin\varphi\,\frac{\partial x}{\partial\varphi} - \cos\varphi\,\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\right] + \frac{C^3}{S}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\varrho} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\varrho}\right) = 0.$$

Bezeichnet man daher die beiden Hauptkrümmungshalbmesser von E im Punkte m durch R_1 und R_2, indem man diese Grössen negativ oder positiv nimmt, jenachdem der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der zugänglichen oder der entgegengesetzten Seite von E liegt, so folgt:

$$(6.)\qquad \frac{\partial z}{\partial\varrho} = \frac{1}{C}\left(\sin\varphi\,\frac{\partial x}{\partial\varphi} - \cos\varphi\,\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right) + \frac{R_1+R_2}{C^2},$$

$$(7.)\qquad R_1 R_2 = \frac{C^3}{S}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\varrho} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\varrho}\right).$$

IV.

Durch Auflösung der Gleichungen (4.), (5.) und (6.) erhält man

$$(8.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\varrho} = -\dfrac{\partial z}{\partial\varrho}S\cos\varphi - \dfrac{\partial z}{\partial\varphi}C\sin\varphi, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial z}{\partial\varrho}C\sin\varphi - \dfrac{\partial z}{\partial\varphi}S\cos\varphi - \dfrac{R_1+R_2}{C}\sin\varphi, \end{cases}$$

$$(9.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial\varrho} = -\dfrac{\partial z}{\partial\varrho}S\sin\varphi + \dfrac{\partial z}{\partial\varphi}C\cos\varphi, \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} = -\dfrac{\partial z}{\partial\varrho}C\cos\varphi - \dfrac{\partial z}{\partial\varphi}S\sin\varphi + \dfrac{R_1+R_2}{C}\cos\varphi, \end{cases}$$

und wenn man diese Werthe in (7.) einsetzt, oder auf anderem Wege,

$$(10.)\qquad R_1R_2 - (R_1+R_2)C^2\frac{\partial z}{\partial\varrho} + \left(C^2\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^2 + \left(C^2\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = 0.$$

Bezeichnet man durch i die $\sqrt{-1}$, und setzt zur Abkürzung

$$x + iy = \Omega,$$

so lassen sich die Gleichungen (8.) und (9.) in die beiden folgenden zusammenziehen:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho} = e^{\varphi i}\left(-S\frac{\partial z}{\partial\varrho} + iC\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right),$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi} = e^{\varphi i}\left(-iC\frac{\partial z}{\partial\varrho} - S\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) + ie^{\varphi i}\frac{R_1+R_2}{C}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden hieraus für $\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varrho\partial\varphi}$ folgenden Ausdrücke erhält man, als Bedingung dafür, dass die Gleichungen (8.) und (9.) die vollständigen Differentiale von x und y liefern, die Gleichung

$$(\mathrm{I.})\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{R_1+R_2}{C}\right).$$

Sodann erhält man

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi^2}=-Se^{\varphi i}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)+i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{\varphi i}\frac{R_1+R_2}{C}\right),$$

oder wegen der vorigen Gleichung

$$=-\frac{S}{C}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(e^{\varphi i}\frac{R_1+R_2}{C}\right)+i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{\varphi i}\frac{R_1+R_2}{C}\right).$$

Durch Trennung des Reellen vom Imaginären ergiebt sich endlich

$$\text{(II.)}\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}=-\frac{S}{C}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\cos\varphi\frac{R_1+R_2}{C}\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{R_1+R_2}{C}\right),$$

$$\text{(III.)}\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}=-\frac{S}{C}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\sin\varphi\frac{R_1+R_2}{C}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{R_1+R_2}{C}\right).$$

V.

Die im vorigen art. gefundenen Differentialgleichungen gewähren das Mittel zur Lösung der Eingangs gestellten Aufgabe, die Fläche E mit Rücksicht auf die übrigen von ihr verlangten Eigenschaften unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass an ihr entlang für jede Richtung der Normale, unabhängig von der Lage ihres Fusspunktes, die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser, d. h. letztere als Function jener gegeben ist.

Unsere nächste Aufgabe besteht nun darin, aus den von der Fläche E verlangten Eigenschaften für die Functionen x, y und z diejenigen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen abzuleiten, welche zu ihrer völligen Bestimmung durch die Differentialgleichungen (I.), (II.) und (III.) erforderlich sind.

Zu diesem Zwecke betrachte ich ϱ und φ als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, wobei dann zu beachten ist, dass, weil φ die östliche Länge des wahren Zeniths bedeutet, von dieser Ebene nur der durch die Ungleichheit $0<\varphi<2\pi$ begrenzte Streifen in Betracht kommt.

a. Zunächst ist die schon früher gemachte Bemerkung zu wiederholen, dass in Folge jener Bedingungen x, y und z allenthalben einwerthige, endliche und stetige Functionen von ϱ und φ sind.

b. Da ferner R_1 und R_2 der Voraussetzung gemäss nirgendwo unendlich werden, so folgt aus der oben gefundenen Gleichung (10.),

$$\left(C^2\frac{\partial z}{\partial\varrho}-\frac{R_1+R_2}{2}\right)^2+\left(C^2\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{R_1-R_2}{2}\right)^2,$$

dass $C^2\frac{\partial z}{\partial\varrho}$ und $C^2\frac{\partial z}{\partial\varphi}$ nirgendwo, auch für $\varrho=\pm\infty$ nicht, über alle Grenzen wachsen. In der That erkennt man leicht, dass $C^2\frac{\partial z}{\partial\varphi}$ numerisch nie grösser als die halbe Differenz der beiden Hauptkrümmungshalbmesser wird, und in Folge dessen $C^2\frac{\partial z}{\partial\varrho}$ stets zwischen den Grenzen R_1 und R_2 eingeschlossen bleibt.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.) und (9.) folgt hieraus, dass die ersten Derivirten von x, y und z in keinem Punkte unendlich werden, und wenn der numerische Werth von ϱ über alle Grenzen wächst, so stark abnehmen, dass die Producte

$$C^2\left(\frac{\partial z}{\partial\varrho},\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right),\qquad C\left(\frac{\partial x}{\partial\varrho},\frac{\partial x}{\partial\varphi},\frac{\partial y}{\partial\varrho},\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)$$

sämtlich unterhalb endlicher Grenzen beharren.

c. Hieran schliesst sich der Satz, dass es in der Ebene der ϱ, φ keine Linie giebt, auf deren beiden Seiten eine der ersten Derivirten von x, y, z verschiedene Werthe hat.

Zunächst sind x, y und z wegen ihrer Stetigkeit auf beiden Seiten einer beliebigen Linie die nämlichen Funktionen ihres Bogens σ, also auch ihre Derivirten $\frac{\partial x}{\partial\sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial\sigma}$, $\frac{\partial z}{\partial\sigma}$ auf beiden Seiten dieselben.

Errichtet man ferner im Anfange des Bogenelementes $\partial\sigma$ über ihm die Normale ∂n so, dass ∂n und $\partial\varphi$ denselben Winkel wie $\partial\sigma$ und $\partial\varrho$ einschliessen, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial\sigma}=\frac{\partial z}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\sigma}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma},\qquad \frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial\varrho}{\partial\sigma}-\frac{\partial z}{\partial\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma},$$

welche Gleichungen auch für x und y gelten. Folglich erhält man aus den Gleichungen des art. IV., indem man Ω durch seinen Werth ersetzt:

$$\frac{\partial(x+iy)}{\partial\sigma}=e^{\varphi i}\left(-S\frac{\partial z}{\partial\sigma}+iC\frac{\partial z}{\partial n}+i\frac{R_1+R_2}{C}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right).$$

Diese Gleichung zeigt wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von R_1+R_2, dass auch $\frac{\partial z}{\partial n}$ beim Durchgange durch $\partial\sigma$ keine Unstetigkeit erleidet.

Da hiernach die ersten Derivirten von z sich beim Durchgange durch $\partial\sigma$ nach der Stetigkeit ändern, so gilt dasselbe wegen (8.) und (9.) auch von den ersten Derivirten der beiden andern Coordinaten x und y.

d. Da die Lage des ersten Meridians auf der Himmelskugel nach Belieben gewählt werden kann, und durch eine Aenderung derselben φ nur um eine constante Grösse, sein Differential gar nicht geändert wird, so folgt aus dem Vorangehenden, dass x, y und z nebst ihren ersten Derivirten beim Durchgange durch denselben stetig bleiben.

Daraus folgt für die Ebene ϱ, φ, dass jede dieser Functionen für denselben Werth von ϱ auf beiden Begrenzungslinien $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ denselben Werth erlangt.

e. Den Polen der Himmelskugel entsprechen zwei Punkte der

Fläche E, in denen die Länge φ jeden beliebigen Werth hat, ohne dass ihre rechtwinkligen Coordinaten unbestimmt werden. Folglich werden letztere von φ unabhängig, wenn ϱ unendlich grosse Werthe erlangt.

Diese Sätze enthalten für die hier zu lösende Aufgabe alles, was zur völligen Bestimmung der Functionen x, y und z ausser den Differentialgleichungen I., II. und III. an Grenz- und Stetigkeitsbedingungen erforderlich ist, soweit diese Functionen nicht von der bis jetzt verfügbar gebliebenen Lage des Coordinatenursprungs abhängen.

VI.

Zur Bestimmung der Functionen x, y und z suchen wir die Lösung der folgenden Aufgabe, aus welcher sich jene durch Particularisirung ergiebt.

Es sei $\mathfrak{u}$ eine Function von $\mathfrak{r}$ und f, welche für alle reellen Werthe von $\mathfrak{r}$ und von $f=0$ bis $f=2\pi$ den folgenden Bedingungen genügt.

1. $\mathfrak{u}$ und seine ersten Derivirten sind überall einwerthig, endlich, und ersteres in keinem Punkte, letztere an keiner Linie entlang unstetig.

2. $\mathfrak{u}$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{u}}{\partial f^2}=F(\mathfrak{r},f).$$

3. Für den nämlichen Werth von $\mathfrak{r}$ erhalten $\mathfrak{u}$ und $\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial f}$ an der Grenze $f=0$ dieselben Werthe, wie an der andern Grenze $f=2\pi$.

4. Für unendliche Werthe von $\mathfrak{r}$ verschwindet $\mathfrak{r}\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}$, $\mathfrak{u}$ selbst wird von f unabhängig.

5. Die Summe der beiden für $\mathfrak{r}=+\infty$ und $\mathfrak{r}=-\infty$ eintretenden Werthe von $\mathfrak{u}$ ist gegeben.

Die zu lösende Aufgabe besteht darin, 1) die Function $\mathfrak{u}$ zu bestimmen und 2) die Beschränkungen anzugeben, denen die gegebene Function $F(\mathfrak{r},f)$ vermöge der $\mathfrak{u}$ auferlegten Bedingungen unterworfen ist.

Die erste Frage erledigt sich durch die Bestimmung desjenigen Werthes u, den die Function $\mathfrak{u}$ in einem beliebig gewählten Punkte $\mathfrak{r}=\varrho$, $f=\varphi$ erlangt. Um denselben zu finden, multiplicire ich die Gleichung (2.) mit dem Factor

$$\omega=\frac{1}{4\pi}\lg\left(C(\mathfrak{r}-\varrho)-\cos(f-\varphi)\right)$$

und dem Elemente $\partial\mathfrak{r}\,\partial f$ einer um den Punkt ϱ, φ herumführenden Fläche T, deren innerer Rand ein um diesen Punkt mit dem Halbmesser c beschriebener Kreis K ist, und deren nachher zu bestimmender äusserer Rand S heissen soll. Beide Ränder sollen sich innerhalb des hier allein zu betrachtenden Streifens $0<f<2\pi$ halten.

Man erhält diesen Factor ω, indem man mittelst des von Herrn Riemann (Inauguraldiss. S. 13—14) angegebenen Factors $\frac{1}{4\pi}\lg\left((\mathfrak{r}-\varrho)^2+(f-\varphi)^2\right)$ zunächst den gesuchten Werth u durch Begrenzungswerthe von $\mathfrak{u}$ und seinen ersten Derivirten ausdrückt, und dann diese letztern nach dem von mir in meiner Inauguraldiss. S. 38 angewandten Verfahren mit Hülfe von Bedingungsgleichungen eliminirt, welche sich mittelst desselben Factors ergeben, wenn man seinen Unstetigkeitspunkt ϱ, φ aus dem Streifen $0<\varphi<2\pi$ hinaus verlegt, also φ durch einen ausserhalb dieser Grenzen liegenden Werth φ_1 ersetzt. Mit Rücksicht auf die Bedingung (3.) findet man leicht, dass für $\varphi_1-\varphi$ alle Vielfachen der ganzen Breite jenes Streifens genommen werden müssen, und gelangt nun durch Verbindung dieser Multiplicatoren zu dem nach f periodischen Factor ω.

Durch Integration über die Fläche T erhält man

$$\int\omega\left(\frac{\partial^2\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{u}}{\partial f^2}\right)\partial\mathfrak{r}\,\partial f=\int F(\mathfrak{r},f)\,\omega\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f.$$

Da auf T überall $\frac{\partial^2\omega}{\partial\mathfrak{r}^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial f^2}=0$ ist, so lässt sich die linke Seite in die Form

$$\int\left[\frac{\partial}{\partial\mathfrak{r}}\left(\omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}-\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{r}}\right)+\frac{\partial}{\partial f}\left(\omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial f}-\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial f}\right)\right]\partial\mathfrak{r}\,\partial f$$

bringen, und es hat hiernach der Factor ω die Eigenschaft, die Integration ohne vorläufige Kenntniss der Function $\mathfrak{u}$ zu ermöglichen, d. h. die Elimination aller zwischen den Rändern von T stattfindenden Werthe dieser Function zu bewirken. Dass dieser Factor ausserdem die Eigenschaft besitzt, bei gehöriger Erweiterung der Fläche T, auch alle übrigen unbekannten Werthe, bis auf den gesuchten Werth u, zu eliminiren, also diesen zu bestimmen, wird sich aus dem Folgenden ergeben.

Sind $c\,\partial\sigma$ und ∂S die stets positiven Bogenelemente von K und S, und bedeutet ∂n das erste Element der über ∂S aus T hinaus errichteten Normale, so ist nach einem bekannten Satze, sobald P und Q zwei auf T überall einwerthige und endliche Functionen sind, welche höchstens in einzelnen Punkten, aber an keiner Linie entlang, unstetig werden,

$$\int\frac{\partial P}{\partial\mathfrak{r}}\partial\mathfrak{r}\,\partial f=\int P\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial n}\partial S-\int P\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial c}c\,\partial\sigma,$$

$$\int\frac{\partial Q}{\partial f}\partial\mathfrak{r}\,\partial f=\int Q\frac{\partial f}{\partial n}\partial S-\int Q\frac{\partial f}{\partial c}c\,\partial\sigma.$$

Die linke Seite obiger Gleichung geht hiernach über in

$$\int\left(\omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial n}-\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)\partial S-\int\left(\omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial c}-\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial c}\right)c\,\partial\sigma.$$

Der Werth des über K erstreckten Integrals ergiebt sich für verschwindende Werthe von c wie folgt. Statt der im Bogenelemente $c\,\partial\sigma$ stattfindenden Coordinaten $\mathfrak{r}$, f führe ich den Winkel σ mittelst der Gleichungen $f-\varphi=c\cos\sigma$, $\mathfrak{r}-\varrho=c\sin\sigma$ ein; dann wird dort

$$\omega=\frac{1}{4\pi}\lg\left(\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{24}c^4\cos 2\sigma\ldots\right),$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial c}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{c-\frac{1}{6}c^3\cos 2\sigma\ldots}{c^2-\frac{1}{12}c^4\cos 2\sigma\ldots},$$

woraus für ein verschwindendes c $\lim c\omega=0$, $\lim c\frac{\partial\omega}{\partial c}=\frac{1}{2\pi}$ folgt. Da gleichzeitig $\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial c}$ nicht unendlich gross wird, $\mathfrak{u}$ dagegen ohne Unstetigkeit in den festen Werth u übergeht, so folgt

$$\lim -\int\left(\omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial c}-\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial c}\right)c\,\partial\sigma=u.$$

In der hieraus folgenden Gleichung

(11.) $$u=\int\left(\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial n}-\omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial n}\right)\partial S+\int F(\mathfrak{r},f)\,\omega\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f$$

ist das erste Integral zur Rechten über den ganzen Umfang der Curve S, das andere über die von ihr eingeschlossene Fläche zu erstrecken, und die Summe beider von der Gestalt der Curve S unabhängig, so lange sie den Punkt ϱ, φ einschliesst.

Dies festgestellt, ersetze ich S durch ein den Punkt ϱ, φ einschliessendes Rechteck $mnop$, dessen Seiten mn, no, op, pm der Reihe nach durch die Gleichungen $\mathfrak{r}=-g$, $f=2\pi$, $\mathfrak{r}=h$, $f=0$ gegeben sind. Dann zerfällt das über S erstreckte Integral in vier Theile, die ich (mn), (no), (po), (mp) nennen will. Es wird aber

$$(mp)+(no)=\int_{-g}^{h}\left(-\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial f}+\omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial f}\right)_{f=0}\cdot\partial\mathfrak{r}+\int_{-g}^{h}\left(\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial f}-\omega\frac{\partial u}{\partial f}\right)_{f=2\pi}\cdot\partial\mathfrak{r},$$

also diese Summe gleich Null, weil die entsprechenden Elemente beider Integrale sich wegen der auch durch ω und $\frac{\partial\omega}{\partial f}$ erfüllten Bedingung (3.) gegenseitig aufheben. Sodann erhält man

$$(po)=\int_0^{2\pi}\left(\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{r}}-\omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}\right)_{\mathfrak{r}=h}\cdot\partial f,$$

$$(mn)=\int_0^{2\pi}\left(-\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{r}}+\omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}\right)_{\mathfrak{r}=-g}\cdot\partial f,$$

oder

$$(po)=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathfrak{u}}{4\pi}\cdot\frac{S(h-\varrho)}{C(h-\varrho)-\cos(f-\varphi)}-\frac{\omega}{h}\cdot\mathfrak{r}\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}\right)_{\mathfrak{r}=h}\cdot\partial f,$$

$$(mo)=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathfrak{u}}{4\pi}\cdot\frac{S(g+\varrho)}{C(g+\varrho)-\cos(f-\varphi)}-\frac{\omega}{g}\cdot\mathfrak{r}\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}\right)_{\mathfrak{r}=-g}\cdot\partial f.$$

Lässt man nun g und h über alle Grenzen wachsen, so verschwindet in beiden Integralen der Subtrahend wegen der Bedingung (4.), da $\frac{\omega}{h}$ und $\frac{\omega}{g}$, wie leicht zu sehen ist, beide gegen die Grenze $\frac{1}{4\pi}$ convergiren. Ferner haben die Factoren von $\frac{\mathfrak{u}}{4\pi}$ die Einheit zur Grenze, während $\mathfrak{u}$ in beiden Fällen von f unabhängig wird.

Ist also u' der für $\mathfrak{r}=+\infty$, u_1 der für $\mathfrak{r}=-\infty$ eintretende feste Werth von $\mathfrak{u}$, so wird, wenn g und h über alle Grenzen wachsen,

$$\lim\left((po)+(mn)\right)=\frac{u'+u_1}{2}.$$

Durch die nämliche Erweiterung des Rechtecks $mnop$ geht also die für u gefundene Gleichung in die folgende über

(IV.) $$u=\frac{u'+u_1}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}F(\mathfrak{r},f)\,\omega\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f,$$

welche den gesuchten Werth u durch bekannte Grössen ausdrückt, also die Lösung der ersten Aufgabe enthält.

Die vorstehende Gleichung muss für $\varrho=+\infty$, $u=u'$, für $\varrho=-\infty$, $u=u_1$, also in beiden Fällen $u'-u_1$ durch ein Integral ausgedrückt liefern. Zu dem nämlichen Resultate gelangt man bequemer, und ohne der Lösung der zweiten Aufgabe vorzugreifen, indem man die Gleichung (2.) mit $-\frac{1}{4\pi}\mathfrak{r}\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f$ multiplicirt, und dann zwischen denselben Grenzen, wie in IV. integrirt. Man findet sofort

(V.) $$\frac{u'-u_1}{2}=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}F(\mathfrak{r},f)\,\mathfrak{r}\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f.$$

VII.

Wir gehen jetzt zur zweiten Frage über, ob die Function F bis auf die in IV. und V. hervortretenden Convergenzbedingungen vollkommen willkürlich gegeben werden kann, oder ob die der Function $\mathfrak{u}$ auferlegten Bedingungen noch weitere Beschränkungen in der Wahl von F nach sich ziehen.

Beschränkungen dieser Art, falls sie überhaupt existiren, müssen in Gleichungen bestehen, welche keinen Aufschluss über die Function $\mathfrak{u}$ mehr enthalten, also aus (2.) durch Elimination sämmtlicher Werthe von $\mathfrak{u}$ gefunden werden.

Um diese Elimination zu bewirken, multiplicire ich die Gleichung (2.) mit einem geeigneten Factor Ω und mit $\partial\mathfrak{r}\,\partial f$, und integrire dann über alle Werthe von $\mathfrak{r}$ und f. Damit hierdurch zunächst alle innerhalb der Begrenzung stattfindenden Werthe von $\mathfrak{u}$ eliminirt werden, muss Ω nebst seinen ersten Derivirten zwischen den Grenzen einwerthig, endlich und bis auf einzelne Punkte auch stetig bleiben, und der Differentialgleichung $\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mathfrak{r}^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial f^2}=0$ genügen, weil jede mit den übrigen Bedingungen verträgliche Verletzung einer derselben eine Theilung des Integrationsgebietes nöthig macht, und zu einer Gleichung zwischen den an der Theilungsstelle stattfindenden Werthen von $\mathfrak{u}$ führt. Damit ferner die an den Grenzen $f=0$, $f=2\pi$ stattfindenden Werthe von $\mathfrak{u}$ sich wegheben, müssen auch Ω und $\frac{\partial\Omega}{\partial f}$ für das nämliche $\mathfrak{r}$ an beiden Grenzen dieselben Werthe erlangen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird

$$\int \Omega\, F(\mathfrak{r},f)\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f=\int_0^{2\pi}\left[\Omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}-\mathfrak{u}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathfrak{r}}\right]_{-\infty}^{\infty}\cdot\partial f.$$

Ausserdem ergiebt sich aber aus denselben, etwa indem man die Gleichung (IV.) auf Ω anwendet, dass Ω, ausserhalb etwa vorhandener Unstetigkeitspunkte, in seinem ganzen Verlaufe durch einen nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von f fortschreitenden Ausdruck dargestellt werden kann, von dem es in jenen Punkten nur um messbare Grössen abweicht, und man erhält dann aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\Omega = A + A_1 e^{\mathfrak{r}}\ \cos(f-a_1)+A_2e^{2\mathfrak{r}}\ \cos(2f-a_2)\ldots\\ +B_1e^{-\mathfrak{r}}\cos(f-b_1)+B_2e^{-2\mathfrak{r}}\cos(2f-b_2)\ldots\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck zeigt sofort, dass die noch rückständige Elimination der für $\mathfrak{r}=\pm\infty$ eintretenden Werthe von $\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}$ und $\mathfrak{u}$, wenn man

sich jeder neuen Bedingung über die dort verschwindenden, von f abhängigen Theile von $\mathfrak{u}$ enthält, nur dann gelingt, wenn der Ausdruck für Ω auf sein erstes Glied A reducirt wird.

Für $\Omega=1$ fällt die rechte Seite völlig weg, und es ergiebt sich als einzige, der Funktion F aufzuerlegende Bedingung die Gleichung

$$\text{(VI.)}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\mathfrak{r},f)\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f=0.$$

Da dieses Resultat von der Geschwindigkeit, mit welcher $\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}$ im Unendlichen verschwindet, unabhängig ist, so gilt es auch für die bei der Bestimmung von x, y, z für F zu wählenden Functionen.

VIII.

Seien jetzt o' und o_1 diejenigen beiden Punkte der Oberfläche E, deren wahre Zenithe der Nord- und Südpol der Himmelskugel sind. Den bisher verfügbar gebliebenen Anfangspunkt der Coordinaten x, y, z verlegen wir in die Mitte zwischen o' und o_1, so dass, wenn die Coordinaten dieser Punkte beziehungsweise x', y', z' und x_1, y_1, z_1 sind,

$$x'+x_1=0,\quad y'+y_1=0,\quad z'+z_1=0$$

wird.

Bezeichnet man daher die Werthe, welche R_1, R_2, S und C für $\varrho=\mathfrak{r}$, $\varphi=f$ annehmen, durch $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{C}$, so folgt aus IV. mit Rücksicht auf die durch die Gleichungen (I.), (II.), (III.) jedesmal gegebene Bedeutung von F, wenn wie oben

$$\omega=\frac{1}{4\pi}\lg\left(C(\mathfrak{r}-\varrho)-\cos(f-\varphi)\right)$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
x&=\int\left[-\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}}\frac{\partial}{\partial\mathfrak{r}}\left(\cos f\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)-\frac{\partial}{\partial f}\left(\sin f\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)\right]\omega\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f,\\
y&=\int\left[-\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}}\frac{\partial}{\partial\mathfrak{r}}\left(\sin f\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)+\frac{\partial}{\partial f}\left(\cos f\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)\right]\omega\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f,\\
z&=\int\frac{1}{\mathfrak{C}}\frac{\partial}{\partial\mathfrak{r}}\left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)\omega\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f,
\end{aligned}$$

wo, wie auch in den folgenden Formeln, nach $\mathfrak{r}$ von $-\infty$ bis ∞, nach f zwischen den Grenzen 0 und 2π zu integriren ist.

Ersetzt man hier ω durch $-\frac{\mathfrak{r}}{4\pi}$, so erhält man nach V., weil $\frac{x'-x_1}{2}=x'$ ist, die Coordinaten desjenigen Punktes o', der sein wahres Zenith im Nordpol der Himmelskugel hat. Wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ fallen die Glieder mit den nach f genommenen Derivirten weg, und es folgt:

$$x' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)\mathfrak{r}\cos f\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f,$$
$$y' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)\mathfrak{r}\sin f\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f,$$
$$z' = \frac{1}{4\pi}\int -\frac{1}{\mathfrak{C}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)\mathfrak{r}\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f.$$

Ersetzt man endlich ω durch die Einheit, so erhält man mit Rücksicht auf VI. die den rechten Seiten von I., II. und III. aufzuerlegenden Bedingungen, welche sich auf die folgenden reduciren:

$$\int \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)\cos f\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f = 0,$$
$$\int \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)\sin f\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f = 0,$$
$$\int \frac{1}{\mathfrak{C}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}\right)\partial\mathfrak{r}\,\partial f \qquad = 0.$$

Da $R_1 + R_2$ als Function von ϱ und φ gegeben oder durch Interpolation dargestellt werden muss, so enthalten die vorstehenden Gleichungen eine bei der Wahl dieser Function massgebende Bedingung, ohne deren Berücksichtigung die übrigen Bedingungen des Problems untereinander in Widerspruch gebracht werden.

Die sämmtlichen auf $R_1 + R_2$ bezüglichen Bedingungen lassen sich dahin zusammenfassen, dass diese Function nirgendwo unendlich oder unstetig werden darf, und dass in ihrer Entwicklung nach Kugelfunctionen der $\cos(\mathfrak{m}A)$, $\cos(\mathfrak{m}B)$, $\cos(\mathfrak{m}C)$ das zweite, nach diesen Cosinus lineare und homogene Glied fehlen muss. In der Tat führen die vorstehenden Gleichungen unmittelbar auf diese letzte Bedingung, wenn man die Derivirte von $\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}}$ durch theilweise Integration wegschafft, und dann an Stelle von $\mathfrak{r}$ das Complement der Breite θ einführt.

IX.

Für ein abgeplattetes Sphäroid S, dessen Umdrehungsaxe zur z-Axe parallel ist, hat man

$$R_1 + R_2 = -\frac{a}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\theta^2}}\right),$$

wenn die Wurzel positiv genommen wird, und a den Halbmesser des Aequators, ε die Excentricität der Meridianellipse bedeutet, also die Abplattung $\alpha = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}$ ist.

Umgekehrt kann nach den obigen Resultaten eine Fläche E, welche der vorstehenden Gleichung gemäss verläuft, nur dann von dem Sphäroid S verschieden sein, wenn sie entweder auf ihrer zugänglichen Seite in verschiedenen Punkten gleichgerichtete Normalen hat, oder sich ins Unendliche erstreckt, oder Stetigkeitsunterbrechungen in Zusammenhang, Biegung oder Krümmung darbietet, wobei jedoch von der Frage, ob bei obiger Gleichung auch jeder von diesen Fällen möglich sei, Abstand genommen ist. Sind aber alle diese Fälle ausgeschlossen, so fällt die Fläche E entweder mit S zusammen, oder sie kann mit S durch eine Verschiebung ohne Drehung zur völligen Deckung gebracht werden.

Wenn daher die obige Gleichung bei passender Wahl von a und ε in einer genügenden Zahl von Punkten der Erdoberfläche erfüllt würde, so wäre dies allein schon hinreichend, um die Identität der letztern mit dem Sphäroid S sicher zu stellen

Abgesehen von den Schwierigkeiten, welche die hier geforderte genaue Bestimmung des wahren Zeniths und der entsprechenden Hauptkrümmungshalbmesser darbietet, gewähren die obigen Resultate den Vortheil, eine stufenweise und nur durch die notwendige Unvollkommenheit der Messungen begrenzte Annäherung an die Wirklichkeit zu gestatten, indem die geschlossenen Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z die Werthe der Function $R_1 + R_2$ nur linear enthalten, also für jedes Glied, welches zur genaueren und vollständigeren Darstellung dieser Function in ihren Ausdruck neu aufgenommen werden muss, ein von den bereits vorhandenen Ausdrücken für die Coordinaten unabhängiges Correctionsglied zu denselben liefern.

Zürich, 10. December 1864.