6. De la puissance des ensembles parfaits de points.

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur.

[Acta Mathematica Bd. 4, S. 381—392 (1884)].

... Quant à mon théorème qui exprime, que les ensembles *parfaits* de points ont tous la même puissance, savoir la puissance du *continu*, je prétends le démontrer, en me bornant d'abord aux ensembles parfaits linéaires, comme il suit. Soit S un ensemble parfait de points quelconque, *qui n'est condensé dans l'étendue d'aucun intervalle,* si petit qu'il soit; nous admettons, que S est contenu dans l'intervalle $(0\ldots 1)$, dont les points extrêmes 0 et 1 appartiennent a S; il est évident que tous les autres cas, dans lesquels l'ensemble parfait n'est condensé dans l'étendue d'aucun intervalle, peuvent par projection être réduits à celui-ci.

Or, il existe d'après mes considérations dans Acta mathematica T. 2 pag. 378 [S. 162] un nombre infini d'intervalles distincts, tout à fait séparés l'un de l'autre, que nous nous représentons rangés suivant leur grandeurs, de sorte que les intervalles plus petits viennent après les plus grands; nous les désignons, dans cet ordre, par

$$(a_1\ldots b_1),\ (a_2\ldots b_2),\ \ldots,\ (a_\nu\ldots b_\nu),\ \ldots; \tag{1}$$

ils sont par rapport à l'ensemble S tels que dans l'intérieur de chacun ne tombe aucun point de S, tandis que leurs points extrêmes a_ν et b_ν en concurrence avec les autres points-limites de l'ensemble de points $\{a_\nu, b_\nu\}$ appartiennent à S et le déterminent; nous désignons par g l'un quelconque de ces autres points-limites de $\{a_\nu, b_\nu\}$, par $\{g\}$ leur ensemble; nous avons

$$S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{g\}. \tag{2}$$

En outre la série (1) d'intervalles est telle que l'espace entre deux d'entre eux $(a_\nu\ldots b_\nu)$ et $(a_\mu\ldots b_\mu)$ en contient toujours une infinité d'autres et que de plus, $(a_\varrho\ldots b_\varrho)$ étant un quelconque de ces intervalles, il y en a d'autres de la même série (1) qui se rapprochent infiniment soit du point a_ϱ, soit du point b_ϱ; car a_ϱ et b_ϱ, comme appartenant comme *points* à l'ensemble parfait S, en sont aussi des *points-limites.*

Cela établi, je prends un ensemble de la première puissance quelconque

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_\nu,\ \ldots, \tag{3}$$

ensemble de points distincts et placés tous dans l'intervalle $(0\ldots 1)$, *dans*

toute l'étendue duquel ils sont condensés; seulement je suppose que ces points extrêmes 0 et 1 ne se trouvent pas entre les φ_ν.

Pour citer un exemple d'un ensemble tel qu'il nous le faut ici, je rappelle la forme de série, où j'ai mis l'ensemble de tous les nombres rationnels $\geqq 0$ et $\leqq 1$ dans Acta mathematica T.2 pag. 319 [hier III 2, S. 126] et où pour notre but il faut supprimer seulement les deux premiers termes, qui y sont 0 et 1.

Mais je tiens à ce que la série (3) soit laissée dans toute sa généralité.

Voici maintenant ce que j'avance: *l'ensemble de points $\{\varphi_\nu\}$ et l'ensemble d'intervalles $\{(a_\nu\ldots b_\nu)\}$ peuvent être associés avec un sens unique l'un à l'autre de sorte que, $(a_\nu\ldots b_\nu)$ et $(a_\mu\ldots b_\mu)$ étant deux intervalles quelconques appartenant à la série* (1), *puis φ_{k_ν} et φ_{k_μ} étant les points correspondants de la série* (3), *on a toujours le nombre φ_{k_ν} plus petit ou plus grand que φ_{k_μ} selon que dans le segment* $(0\ldots 1)$ *l'intervalle $(a_\nu\ldots b_\nu)$ est placé avant l'intervalle $(a_\mu\ldots b_\mu)$ ou après lui*[1].

Une telle correspondance des deux ensembles $\{\varphi_\nu\}$ et $\{(a_\nu\ldots b_\nu)\}$ se peut faire par exemple d'après la règle suivante:

Nous associons à l'intervalle $(a_1\ldots b_1)$ le point φ_1, à l'intervalle $(a_2\ldots b_2)$ le terme au plus petit indice de la série (3), nous le désignons par φ_{k_2}, qui a la même relation par rapport au plus ou moins avec φ_1, que l'intervalle $(a_2\ldots b_2)$ avec $(a_1\ldots b_1)$ par rapport à leur placement dans le segment $(0\ldots 1)$; de plus nous associons à l'intervalle $(a_3\ldots b_3)$ le terme au plus petit indice, qui a la même relation par rapport au plus ou moins avec φ_1 et avec φ_2, que l'intervalle $(a_3\ldots b_3)$ avec les intervalles $(a_1\ldots b_1)$ et $(a_2\ldots b_2)$ respectivement par rapport à leur placement dans le segment $(0\ldots 1)$.

Généralement nous associons à l'intervalle $(a_\nu\ldots b_\nu)$ le terme au plus petit indice de la série (3), nous le nommerons φ_{k_ν}, tel qu'il a la même relation par rapport au plus ou moins avec tous les points $\varphi_1, \varphi_{k_2}, \ldots, \varphi_{k_{\nu-1}}$ dont il a été déjà disposé, que l'intervalle $(a_\nu\ldots b_\nu)$ avec les intervalles correspondants $(a_1\ldots b_1), (a_2\ldots b_2), \ldots, (a_{\nu-1}\ldots b_{\nu-1})$ par rapport à leur placement dans le segment $(0\ldots 1)$.

J'avance, que d'après cette règle *les points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ de la suite* (3) *seront successivement, quoique selon un ordre différent de la loi de la série* (3), *associés* **tous** *à des intervalles distincts de la série* (1); car à chaque relation par rapport au plus ou moins entre des points en nombre fini de la série (3) il se trouve plusieurs fois une rélation conforme par rapport à la place dans le segment $(0\ldots 1)$ entre des intervalles en même nombre de la série (1); cela tient à ce que l'ensemble S est un ensemble parfait qui n'est condensé dans aucun intervalle, quelque petit qu'il soit.

[1] Il ne s'agit donc pas ici de la place ν et μ qu'occupent ces intervalles dans la série (1).

Pour simplifier nous poserons

$$\varphi_1 = \psi_1, \; \varphi_{k_2} = \psi_2, \; \ldots, \; \varphi_{k_\nu} = \psi_\nu, \; \ldots$$

Par conséquent la série suivante

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots \tag{4}$$

se compose absolument des mêmes éléments que la série (3); *les deux séries* (3) *et* (4) *ne diffèrent que par rapport à la succession de leurs termes.*

La série (4) de points ψ_ν a donc ce rapport remarquable avec la série (1) d'intervalles, que toutes les fois que ψ_ν est plus petit ou plus grand que ψ_μ, aussi a_ν et b_ν sont respectivement plus petits ou plus grands que a_μ et b_μ. Et je rappelle de nouveau que l'ensemble $\{\psi_\nu\}$, puisqu'il coïncide avec l'ensemble donné $\{\varphi_\nu\}$, à part la succession des termes, est condensé dans toute l'étendue du segment $(0 \ldots 1)$ et que les points extrêmes de celui-ci, 0 et 1, n'appartiennent pas à cet ensemble.

Les conséquences d'une telle association des deux ensembles $\{\psi_\nu\}$ et $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ sont maintenant, comme il est facile de le démontrer, les suivantes:

Si $(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1}), (a_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_2}), \ldots, (a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu}), \ldots$ *est une série quelconque d'intervalles appartenants à la série* (1), *qui convergent infiniment soit vers le point* a_ϱ, *soit vers le point* b_ϱ, *alors la série correspondante de points* $\psi_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_2}, \ldots, \psi_{\lambda_\nu}, \ldots$, *appartenants tous à la série* (4), *converge infiniment vers le point* ψ_ϱ, *et réciproquement.*

Si $(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1}), (a_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_2}), \ldots, (a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu}), \ldots$ *est une série quelconque de la même espèce, mais telle que ses termes convergent infiniment vers un point* g *de l'ensemble* S *(voir la formule* (2) *et la signification de* g), *alors la série correspondante* $\psi_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_2}, \ldots, \psi_{\lambda_\nu}, \ldots$ *à son tour converge infiniment vers un point déterminé du segment* $(0 \ldots 1)$, *qui ne coïncide avec aucun point de la série* (3) *ou* (4) *et qui de plus est entièrement déterminé par* g; *nous désignerons ce point correspondant à* g *par* h; *réciproquement soit* h *un point quelconque du segment* $(0 \ldots 1)$, *qui n'appartient pas à la série* (3) *ou* (4), *il détermine un point* g *de l'ensemble* S *différent des points* a_ν *et* b_ν; *en sorte que les deux nombres variables* g *et* h *sont des fonctions à sens unique l'une de l'autre et que les ensembles* $\{g\}$ *et* $\{h\}$ *par suite sont certainement de la même puissance.*

De là suit la démonstration du théorème en question.

Car nous avons d'après la formule (2)

$$S = \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{g\}.$$

Puis il est évident que

$$(0 \ldots 1) \equiv \{\varphi_{2\nu}\} + \{\varphi_{2\nu-1}\} + \{h\},$$

Mais comme on a les formules suivantes:

$$\{a_\nu\} \sim \{\varphi_{2\nu}\}, \quad \{b_\nu\} \sim \{\varphi_{2\nu-1}\} \text{ et } \{g\} \sim \{h\},$$

on conclut d'après le théorème (E) des Acta mathematica T. 2 pag. 318 [hier S. 125] la formule:

$$S \sim (0 \ldots 1)$$

c'est à dire l'ensemble parfait S a la même puissance que le segment continu $(0 \ldots 1)$; ce qui était à démontrer.

... Cette démonstration a l'avantage de nous dévoiler une grande classe remarquable de fonctions *continues* d'une variable réelle x, dont les propriétés donnent lieu à des recherches intéressantes, soit en les considérant d'après la définition, qui se rattache à notre développement, *soit en tâchant de les mettre sous la forme de séries trigonométriques, qui certainement leur sont conformes, parce que ces fonctions continues ne jouissent pas d'un nombre infini de maxima et minima.*

En effet nous pouvons établir dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ une fonction $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

Lorsque x est compris dans l'un quelconque des intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$, c'est à dire pour $a_\nu \leqq x \leqq b_\nu$, $\psi(x)$ est égale à ψ_ν; lorsque x reçoit une valeur g qui s'obtient comme limite d'une série d'intervalles $(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1}), \ldots, (a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu}), \ldots$ alors on définit

$$\psi(g) = h = \lim_{\nu=\infty} \psi_{\lambda_\nu}. \tag{5}$$

Certe, la fonction $\psi(x)$, d'après ce que nous avons vu, *est une fonction continue, monotone*[1] *de la variable continue* x; *lorsque* x *croît de* 0 *à* 1, $\psi(x)$ *varie d'une manière continue sans diminuer de* 0 *à* 1; *son image géométrique se compose d'un ensemble scalariforme de segments droits, tous parallèles à l'axe des* x *et de certains points interposés, qui font, que cette courbe devient un continu.* Un cas particulier de ces fonctions est déjà compris dans un exemple, que j'ai mentionné dans Acta mathematica T. 2, pag. 407[hier S. 207]. En posant

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_\varrho}{3^\varrho} + \cdots, \tag{6}$$

où les coefficients c_μ peuvent prendre à volonté les deux valeurs 0 et 2 et où la série peut être composée d'un nombre fini ou infini de membres, l'ensemble $\{z\}$ est un ensemble *parfait* S, situé dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, les points extrêmes 0 et 1 appartiennent à cet ensemble $\{z\}$; de plus l'ensemble $\{z\} = S$ est ici tel, qu'il n'est condensé dans l'étendue d'aucun intervalle, si petit qu'il soit; enfin on peut aussi s'assurer, que cet ensemble $S = \{z\}$ a une *grandeur* $\mathfrak{J}(S)$ (*notion* que j'expliquerai à l'instant) égale à zéro.

[1] C'est une *expression* introduite par M. Ch. Neumann (voir *Über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwickelungen*, S. 26. Leipzig 1881).

Ici les points, que nous avons désignés par b_ν résultent de la formule (6) pour z en prenant $c_\varrho = 0$ à partir d'un certain ϱ plus grand que 1, en sorte que tous les b_ν sont compris dans la formule

$$b_\nu = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{2}{3^\mu}. \tag{7}$$

Les points a_ν résultent de la même formule pour z, en prenant c_ϱ à partir d'un certain ϱ toujours égal à 2, en sorte qu'en vertu de l'équation

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots$$

on a, en prenant $c_\mu = 0,\ c_{\mu+1} = c_{\mu+2} = \cdots = 2$,

$$a_\nu = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{1}{3^\mu}. \tag{8}$$

Joignons maintenant la variable z à une autre y, définie par la formule

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_\varrho}{2^\varrho} + \cdots\right) \tag{9}$$

dans laquelle nous convenons, que les coefficients c_ϱ ont la même valeur que dans (6).

Par cette liaison y devient évidemment une fonction de z, que nous appellons $\psi(z)$. Remarquons maintenant que les deux valeurs de $\psi(z)$ pour $z = a_\nu$ et pour $z = b_\nu$ deviennent égales, savoir:

$$\psi(a_\nu) = \psi(b_\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2^1} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{2^{\mu-1}} + \frac{2}{2^\mu}\right).$$

De là resulte une fonction continue et monotone $\psi(x)$ de la variable continue x, définie de la manière suivante:

Pour $a_\nu < x < b_\nu$ on pose: $\psi(x) = \psi(a_\nu) = \psi(b_\nu)$, et pour $x = z$ on a $\psi(x) = y = \psi(z)$.

M. L. Scheeffer à Berlin a observé, que cette fonction $\psi(x)$, ainsi que beaucoup d'autres, est en contradiction avec un théorème de M. Harnack (v. Math. Annalen Bd. 19, pag. 241, Lehrs. 5). En effet cette fonction $\psi(x)$ a sa dérivée $\psi'(x)$ égale a zéro pour toutes les valeurs de x, à l'exception de ceux, que nous avons nommées z; celles-ci constituent un ensemble parfait $\{z\}$, dont la grandeur $\mathfrak{J}(\{z\})$ est égale à zéro. Mais M. Scheeffer m'a aussi dit, qu'il pouvait remplacer ce théorème par un autre, qui serait exempt de doute; j'espère qu'il publiera bientôt dans les Acta ses recherches sur ce sujet aussi bien que sur diverses autres questions intéressantes dont il s'occupe.

...Dans ce qui précède j'ai démontré, que tous les ensembles parfaits et linéaires de points, qui ne sont condensés dans aucune partie du segment, dans lequel ils sont placés, si petite qu'elle soit, sont de la même puissance que le continu linéaire.

Prenons maintenant un ensemble parfait et linéaire de points S *quelconque*, placé dans l'intervalle $(-\omega \cdots + \omega)$ je dis qu'également cet ensemble S a la puissance du continu $(0 \ldots 1)$.

En effet, comme nous avons déjà traité le cas, où l'ensemble S n'est condensé dans aucune partie continue du segment $(-\omega \cdots + \omega)$, prenons un intervalle quelconque $(c \ldots d)$, dans l'intérieur duquel S doit condensé partout. Tous les points de $(c \ldots d)$ appartiendront aussi à S, parce que S est un ensemble parfait.

L'ensemble de points $(c \ldots d)$ est un système partiel de S et S un système partiel du segment $(-\omega \cdots + \omega)$. Comme l'ensemble $(c \ldots d)$ a la même puissance que l'ensemble $(-\omega \cdots + \omega)$, on en conclut aussi, que S a la même puissance que $(-\omega \cdots + \omega)$, c'est à dire la puissance de $(0 \ldots 1)$; car on a le théorème général:

«*Étant donné un ensemble bien défini M d'une puissance quelconque, un ensemble partiel M' pris dans M et un ensemble partiel M'' pris dans M', si le dernier système M'' possède la même puissance que le premier M, l'ensemble moyen M' est aussi toujours de la même puissance que M et M''.*» (Voir Acta mathematica, T. 2, pag. 392) [hier III 4, S. 201].

Lorsqu'un ensemble P est tel, que son premier ensemble dérivé $P^{(1)}$ en est diviseur, je nomme P un *ensemble fermé*.

Chaque ensemble *fermé* P d'une puissance supérieure à la première se décompose, comme nous le savons, d'une seule manière en un ensemble R de la première puissance et en un ensemble parfait S. On en conclut au moyen des théorèmes obtenus, le suivant: «*Tous les ensembles fermés de points se divisent en deux classes, les uns sont de la première puissance, les autres ont la puissance du continu arithmétique.*» Dans une prochaine communication je montrerai que cette division en deux classes a aussi lieu pour les ensembles de points *non fermés*. Par là nous arriverons à l'aide des principes du § 13 de mon mémoire dans Acta mathematica T. 2, pag. 390 [S. 199], à la détermination de la *puissance* du *continu arithmétique*, en démontrant qu'elle coïncide avec celle de la *deuxième classe des nombres* (*II*).

...Il y a une *notion* de *volume* ou de *grandeur*, qui se rapporte à tout ensemble P, situé dans un espace plan G_n à n dimensions, que cet ensemble P soit continu ou non.

Dans le cas ou P se réduit à un ensemble continu à n dimensions, ou à un système de tels ensembles, cette notion se confond avec la notion ordinaire de volume.

Lorsque P est un continu à un nombre de dimensions plus petit que n la valeur du volume devient zéro; la même chose arrive lorsque P est tel que $P^{(1)}$ a la première puissance et encore dans divers autres cas. Mais ce qui, au premier moment, paraîtra peut être étonnant, c'est que ce volume, je le désigne par $\mathfrak{J}(P)$, a quelquefois une valeur différente de zéro pour des ensembles P contenus dans G_n de l'espèce de ceux, qui ne sont condensés dans aucune partie continue à n dimensions de G_n, si petite qu'elle soit.

J'arrive à cette notion générale de *volume* ou de *grandeur* $\mathfrak{J}(P)$ d'un ensemble *quelconque* P contenu dans G_n en prenant *chaque* point p, qui appartient à P ou à $P^{(1)}$, pour centre d'une sphère pleine à n dimensions au rayon ϱ, que nous appellerons $K(p, \varrho)$. Le plus petit multiple de tous ces sphères pleines $K(p, \varrho)$ (voir la définition du plus petit multiple, Acta mathematica T. 2, pag. 357) [S. 145] savoir

$$\mathfrak{M}[K(p, \varrho)],$$

(où ϱ est une constante) constitue pour chaque valeur de ϱ un ensemble qui se compose de pièces continues à n dimensions et dont le volume se détermine d'après les règles connues au moyen d'une intégrale n-tiple.

Soit $f(\varrho)$ la valeur de cette intégrale; $f(\varrho)$ est une fonction continue de ϱ, qui diminue avec ϱ; la limite de $f(\varrho)$, lorsque ϱ converge vers zéro, me sert de définition du volume $\mathfrak{J}(P)$; en sorte, que nous avons

$$\mathfrak{J}(P) = \lim_{\varrho = 0} f(\varrho). \tag{10}$$

Je fais remarquer expressément que cette valeur du *volume* ou de la *grandeur* d'un ensemble quelconque P contenu dans un espace continu plan G_n à n dimensions est absolument dépendante de l'espace plan G_n même, duquel P est considéré comme une partie composante, et particulièrement du nombre n; de sorte que, si l'on considère *le même ensemble* P comme une partie constituante d'un autre espace continu plan H_m, la valeur du volume de P par rapport à l'espace H_m est en général différente de celle, qui se rapporte au même ensemble P, considéré comme partie constitutive de G_n.

Un carré p. e. dont le côté est égal à l'unité, a sa *grandeur* égale à zéro lorsqu'il est considéré comme partie constituante de l'espace à trois dimensions; mais il a la grandeur égale à 1, lorsqu'on le regarde comme partie d'un plan à deux dimensions. Cette notion générale de *volume* ou de *grandeur* m'est indispensable dans les recherches sur les *dimensions* des *ensembles continus*, que j'ai promises dans Acta mathematica T. 2, pag. 407 [hier Anm. 12) S. 207] et que je vous enverrai plus tard pour votre journal.

En nous bornant ici aux ensembles *linéaires* de points, compris dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, le *volume* ou la *grandeur* d'un tel ensemble P se détermine facilement en suivant la méthode exposée dans Acta mathematica T. 2,

pag. 378 [hier S. 162], où nous avons considéré des intervalles, désignés par $(c_\nu \ldots d_\nu)$ et liés d'après une loi manifeste à P et $P^{(1)}$ ou, comme je l'ai exprimé là, à $\mathfrak{M}(P, P^{(1)})$. Nous y avons posé

$$\Sigma(d_\nu - c_\nu) = \sigma$$

où σ est une quantité déterminée positive $\leqq 1$. Or dans notre cas on se convaincra facilement que l'on a

$$\mathfrak{J}(P) = 1 - \sigma. \tag{11}$$

. . . Les ensembles linéaires parfaits de points S, qui ne sont condensés dans aucun intervalle, si petit qu'il soit, ont en général une grandeur $\mathfrak{J}(S)$ différente de zéro, mais il peuvent aussi avoir une grandeur $\mathfrak{J}(S)$ égale à zéro.

Quant à ceux, pour lesquels $\mathfrak{J}(S)$ est différent de zéro, ils peuvent être réduits par composition (addition) et à ceux pour lesquels $\mathfrak{J}(S) = 0$ et à de tels ensembles parfaits, qui non seulement sont d'une grandeur différente de zéro, mais dont toutes les parties *parfaites*, que l'on obtient en se bornant à des intervalles partiels de $(0 \ldots 1)$, ont *à leur tour* une grandeur différente de zéro.

Pour *cette dernière classe* d'ensembles parfaits linéaires il y a une démonstration très simple du théorème démontré plus haut, que leur puissance est celle du continu.

En effet prenons un tel ensemble parfait S dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ et supposons que les points extrêmes 0 et 1 appartiennent à S; nous établissons d'abord la série (1) d'intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$, appartenant dans le sens expliqué à l'ensemble parfait S.

Soit x une grandeur quelconque > 0 et $\leqq 1$, nous désignons par S_x l'ensemble, qui est constitué par tous les points de S, qui sont situés dans l'intervalle $(0 \ldots x)$ et définissons une fonction $\varphi(x)$ par les conditions suivantes:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) = \mathfrak{J}(S_x) \qquad \text{pour } x > 0 \text{ et } \leqq 1.$$

Cette fonction $\varphi(x)$ est, comme on le voit sans peine, continue et monotone dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$; pour la valeur $x = 1$ elle prend la valeur $\varphi(1) = \mathfrak{J}(S) = c$, différente de zéro d'après l'hypothèse faite par rapport à S. De plus, dans chacun des intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$, c'est à dire pour $a_\nu \leqq x \leqq b_\nu$ elle conserve une valeur constante $\varphi(x) = \varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$; lorsque x est plus petit que a_ν on a toujours $\varphi(x) < \varphi(a_\nu)$, lorsque x est plus grand que b_ν on a $\varphi(x) > \varphi(b_\nu)$; *cela tient à ce* que nous avons supposé un ensemble S tel que tout ensemble partiel parfait, que l'on obtient en se bornant à des intervalles partiels de $(0 \ldots 1)$ est à son tour d'une *grandeur* différente de zéro.

La fonction continue $\varphi(x)$ prend toutes les valeurs entre 0 et c; elle prend chaque valeur entre celles qui sont égales à $\varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$ un nombre infini de fois, savoir pour tous les x, qui sont $\leqq a_\nu$ et $\leqq b_\nu$; mais elle ne prend *qu'une seule* fois chaque valeur h de l'intervalle $(0 \ldots c)$, qui est différente des valeurs $\varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$, pour une valeur *distincte* g de x, où g diffère de toutes les valeurs appartenant aux intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$, soit des valeurs extrêmes a_ν et b_ν soit des intermédiares.

Et puisque à chacune de ces valeurs g de x il appartient une certaine valeur $h = \varphi(g)$, différente des valeurs $\varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$, et vice versa, on a comme dans notre première démonstration

$$\{g\} \sim \{h\}$$

d'où l'on conclut comme plus haut, que la puissance de S est celle du continu $(0 \ldots c)$.

... Après avoir obtenu ces résultats je suis revenu à mes recherches sur les séries trigonométriques, que j'ai publiées il y a maintenant treize ans et que j'avais laissées de côté depuis longtemps; non seulement je suis parvenu à démontrer, que le théorème Acta mathematica T. 2, pag. 348 [hier S. 101] reste juste, lorsque le système de points, que j'y ai désigné par P, est tel que son ensemble dérivé $P^{(1)}$ a la première puissance, mais je possède maintenant même quelques résultats pour le cas ou $P^{(1)}$ est d'une puissance plus grande que la première; je vous les enverrai une autre fois.

[Anmerkung.]

Eine ausführlichere Darstellung des Beweises findet sich in III 4, Nr. 6 § 19, S. 236 ff. Die am Schlusse von Cantor in Aussicht gestellte Fortsetzung seiner Untersuchungen über trigonometrische Reihen ist unterblieben.

7. Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mitteilung[1].

[Acta Mathematica Bd. 7, S. 105—124 (1885).]

Indem ich die weitere Darstellung meiner Untersuchungen über Punktmengen beginne, will ich *zunächst* in § 1 kurz diejenigen hierher gehörigen Sätze anführen, welche teils schon in einer Abhandlung sich vorfinden, die ich im 23. Bande der Math. Ann., S. 453 [hier III 4, Nr. 6, S. 210ff.] veröffentlicht habe, teils auch in Aufsätzen der Herren Bendixson und Phragmén (Acta mathematica, T. 2, p. 415 und T. 5, p. 47) von anderen Gesichtspunkten aus behandelt worden sind. Dabei möchte ich mich auf eine einfache Erklärung und Formulierung der in Betracht kommenden Theoreme und auf eine Andeutung ihrer Beweise beschränken; denn die ausführliche Entwickelung kann in der erwähnten Annalenarbeit gefunden werden.

§ 1.

Es ist eine sehr häufig in der Punktmengenlehre auftretende Erscheinung, daß *Eigenschaften* von Punktmengen in Betracht kommen, die den folgenden *beiden* Bedingungen genügen [„distributive Eigenschaft" wie hier S. 210]:

Erstens: wenn P irgendeine mit der betreffenden Eigenschaft behaftete Punktmenge innerhalb eines Gebietes H von G_n bedeutet, wo H ganz im Endlichen liegt, und man zerlegt H mit gehöriger Verteilung der Begrenzungsstücke in eine *endliche* Anzahl von *Teilgebieten* $H_1, H_2, \ldots, H_m$, in welche resp. die *Teilmengen* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ von P fallen, so hat immer *mindestens eine* von diesen Teilmengen ebenfalls die betreffende Eigenschaft.

Zweitens: ist P irgendeine mit der betreffenden Eigenschaft begabte Punktmenge, so hat immer auch $P + Q$ dieselbe Eigenschaft, was auch Q sei.

Ich will nun unter Υ irgendeine Punktmengenbeschaffenheit verstehen, welche diesen *beiden* Bedingungen genügt; dann gilt der folgende allgemeine Satz:

Theorem I. *Ist H irgendein ganz im Endlichen liegender kontinuierlicher Teil von G_n und P eine in H enthaltene Punktmenge mit der Eigenschaft Υ, so gibt es wenigstens einen Punkt g von H in solcher Lage, daß, wenn $K(\varrho)$ die n-dimensionale Vollkugel mit dem Mittelpunkt g und dem Radius ϱ*

[1] Fortsetzung des Aufsatzes in Acta mathematica 2, 409 [hier III 5, S. 247].

ist, derjenige Bestandteil von P, welcher in das Gebiet $K(\varrho)$ fällt, stets die Eigenschaft Υ hat, der Radius ϱ der Vollkugel mag so klein genommen werden, wie man wolle.

Unter einer *abgeschlossenen* Punktmenge (ensemble fermé) verstehe ich eine solche P, bei welcher die Bedingung erfüllt ist:

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) = P^{(1)}. \tag{1}$$

Dagegen nenne ich eine Punktmenge P *insichdicht* (ensemble condensé en soi), wenn bei ihr die Gleichung erfüllt ist:

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) = P. \tag{2}$$

Ist eine Punktmenge so beschaffen, daß sie *keinen insichdichten* Bestandteil hat, so nenne ich sie eine *separierte* Punktmenge. [Vgl. hier S. 226—228.]

Zur Erläuterung dieser Definitionen führe ich an, daß jede *perfekte* Punktmenge *sowohl abgeschlossen, wie* auch *insichdicht* ist, daß die *Ableitung* einer *insichdichten* Punktmenge stets *perfekt* ist und daß die *isolierten* Punktmengen eine besondere Art von *separierten* Mengen bilden; auch sind alle *abgeschlossenen* Punktmengen *erster* Mächtigkeit (wegen Theorem A) ebensowohl wie alle Mengen der Form $P - \mathfrak{D}(P, P^{(\Omega)})$ *separierte* Mengen; letztere Behauptung kann leicht mit Hilfe des gleich folgenden Theorems III bewiesen werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird sich der Satz ergeben, daß *alle separierten* Mengen höchstens von der *ersten* Mächtigkeit sind.

Theorem II. *Ist eine in G_n vorkommende Punktmenge P so beschaffen, daß, wenn H ein ganz im Endlichen befindlicher Teil von G_n ist, alsdann immer der in H enthaltene Bestandteil von P endlich ist oder die erste Mächtigkeit besitzt, so ist P selbst entweder endlich oder von der ersten Mächtigkeit.*

Theorem III. *Es sei Q irgendeine abgeschlossene Punktmenge und R eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, daß erstens R keinen Punkt mit Q gemein hat, wie auch zweitens, daß, wenn H irgendein stetiger Bestandteil von G_n ist, in den kein einziger Punkt von Q fällt, alsdann der zum Gebiete H gehörige Bestandteil von R endlich ist oder die erste Mächtigkeit hat, so ist auch R selbst höchstens von der ersten Mächtigkeit.*

Zum Beweise des letzteren Theorems bediene ich mich eines n-fach ausgedehnten, aus einem oder mehreren getrennten *stetigen Teilen* bestehenden Raumteils, den ich mit

$$\Pi(\varrho, Q)$$

bezeichne, weil er sowohl von einer beliebigen positiven Größe ϱ wie auch von der abgeschlossenen Menge Q abhängt; er geht dadurch aus der Menge Q hervor, daß man *sämtliche* n-dimensionalen Vollkugeln vom Radius ϱ zusammennimmt, deren *Centra* zu Q gehörige Punkte sind. Wegen der in bezug auf R gemachten Voraussetzungen fällt in den Raumteil

$$G_n - \Pi(\varrho, Q),$$

wie klein auch ϱ sei, stets ein Bestandteil von R, der höchstens die *erste* Mächtigkeit hat und andererseits kann ϱ immer so klein gewählt werden, daß dieser Raumteil $G_n - \Pi(\varrho, Q)$ einen beliebig vorher ins Auge gefaßten Punkt r von R enthält, da sonst dieser Punkt auch der *abgeschlossenen* Menge Q angehören würde. Daraus schließt man leicht, indem man ϱ unendlich klein werden läßt, daß R selbst *höchstens* die erste Mächtigkeit besitzt.

Theorem D. *Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, daß ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit hat als die erste, so gibt es immer Punkte, welche allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich angehören, wo α irgendeine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse ist, und der Inbegriff aller dieser Punkte, der nichts anderes ist als $P^{(\Omega)}$, ist stets eine perfekte Menge.*

Theorem E. *Ist P von derselben Beschaffenheit wie in Theorem D und ist $S = P^{(\Omega)}$ die perfekte Menge, deren Existenz in Theorem D ausgesprochen ist, so ist die Differenz*

$$R = P^{(1)} - S$$

stets höchstens von der ersten Mächtigkeit, und es läßt sich daher die erste Ableitung $P^{(1)}$ einer solchen Punktmenge P in zwei Bestandteile R und S zerlegen, derart daß

$$P^{(1)} = R + S,$$

wo R höchstens von der ersten Mächtigkeit und S eine perfekte Menge ist.

Theorem F. *Ist P von derselben Beschaffenheit wie in den Theoremen D und E, so gibt es stets eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenklasse zugehörige Zahl α, so daß*

$$P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)} = P^{(\alpha+\lambda)},$$

wo λ eine ganz beliebige endliche oder transfinite Zahl ist, und es ist also bereits die α^{te} Ableitung von P gleich der perfekten Menge S, d. h. man hat

$$P^{(\alpha)} = P^{(\Omega)} = S.$$

Theorem G. *Ist R die in Theorem E vorkommende Menge, α die in Theorem F so bezeichnete Zahl, so ist immer*

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) = 0$$

und um so mehr

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\Omega)}) = 0.$$

Dieses letzte Theorem G rührt von Herrn Bendixson her. Die Beweise dieser Sätze D, E, F, G beruhen sowohl auf den Theoremen I und III wie auch auf den früher gebrachten Theoremen A, B, C; die Ausführung hiervon findet sich in den Mathematischen Annalen, Bd. 23 [hier III 4, Nr. 6, § 15—17, S. 210 ff.].

Die Ableitung $P^{(1)}$ und daher auch alle höheren Ableitungen *irgendeiner* Punktmenge P sind stets *abgeschlossene* Mengen, und es läßt sich leicht auch das Umgekehrte beweisen, daß *jede abgeschlossene* Menge als die *erste* (oder auch höhere) Ableitung von anderen Mengen dargestellt werden kann (Math. Ann., Bd. 23, S. 470) [hier S. 226]; daher sind wir imstande, auf Grund unserer Theoreme folgendes über die *abgeschlossenen* Mengen zu behaupten:

Theorem H. *Ist P irgendeine abgeschlossene Punktmenge, so besteht dieselbe immer aus zwei wesentlich verschiedenen, getrennten Bestandteilen R und S (von welchen einer auch Null sein kann), so daß*

$$P = R + S, \tag{3}$$

wo R eine separierte Menge und höchstens von der ersten Mächtigkeit, während S, falls sie nicht gleich Null, eine perfekte Menge und daher (Acta mathematica, T. 4, p. 381) [hier III 6, S. 252][1] *von der Mächtigkeit des Linearkontinuums ist. Falls die abgeschlossene Menge P endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist, verschwindet der Teil S und man hat alsdann von einem gewissen kleinsten α der ersten oder zweiten Zahlenklasse an (welches kleinste α stets von der ersten Art ist);*

$$P^{(\alpha)} = 0.$$

Ist aber die abgeschlossene Menge P von höherer als der ersten Mächtigkeit, so ist S immer eine von Null verschiedene perfekte Menge und man hat von einem gewissen kleinsten α der ersten oder zweiten Zahlenklasse an

$$P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+\lambda)} = S$$

und somit auch

$$P^{(\Omega)} = S.$$

Die separierte Menge R hat dabei die Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\alpha)}) = \mathfrak{D}(R,\ R^{(\Omega)}) = 0.$$

Alle abgeschlossenen unendlichen Punktmengen sind entweder von der ersten Mächtigkeit oder von der Mächtigkeit des Linearkontinuums (Math. Ann., Bd. 23, S. 488) [hier S. 244].

Ich will nun im folgenden zeigen, wie sich alle diese Sätze auf *beliebige*, also auch auf *nicht abgeschlossene* Punktmengen *verallgemeinern* lassen.

§ 2.

Ist eine *insichdichte* Punktmenge P so beschaffen, daß der in hinreichend nahe Umgebung (d. h. Vollkugel mit dem betreffenden Punkt als Zentrum) jedes ihrer Punkte fallende Bestandteil derselben *stets*, d. h. für *alle* ihre

[1] Man vgl. auch I. Bendixson: Sur la puissance des ensembles parfaits de points. (Bihang till Sv. Vetenskapsakademiens handlingar 9, Nr. 6 (1884).)

Punkte *eine und dieselbe Mächtigkeit* hat, so wollen wir eine solche insichdichte Menge eine *homogene* Punktmenge nennen, und wenn jene Mächtigkeit die α^{te} ist, so möge P eine *homogene Punktmenge α^{ter} Ordnung* heißen. Es ist leicht zu zeigen, daß eine homogene Menge α^{ter} Ordnung immer selbst von der α^{ten} Mächtigkeit ist.

So ist z. B. die Menge *aller rationalen* Zahlen eine *homogene* Menge *erster* Ordnung, die Menge *aller irrationalen* Zahlen aber eine *homogene* Menge von der *Mächtigkeit des Linearkontinuums.*

Sei nun P eine *ganz beliebige* Punktmenge innerhalb G_n. Sie wird aus *zweierlei* Punkten bestehen: die *ersteren* liegen so, daß in *hinreichend nahe* Umgebung von ihnen keine anderen Punkte von P fallen, es sind dies sogenannte *isolierte* Punkte von P; die *anderen* Punkte von P sind *gleichzeitig Grenzpunkte* von P, gehören also auch als *Punkte* zu $P^{(1)}$.

Den Inbegriff der *ersteren* wollen wir mit Pa bezeichnen und die *Adhärenz* von P nennen; der Inbegriff der letzteren werde mit Pc bezeichnet und heiße die *Kohärenz* von P.

Wir haben alsdann

$$Pc = \mathfrak{D}(P,\ P^{(1)}) \text{ und} \tag{4}$$

$$P = Pa + Pc. \tag{5}$$

Pa und Pc sind also bestimmte Teile von P.

Pa ist immer eine *isolierte* Menge oder Null; Pc braucht weder das eine noch das andere zu sein, auch ist klar, daß *jeder insichdichte Bestandteil von P zugleich Bestandteil von Pc ist, und daß Pc dann und nur dann gleich P (daher $Pa = 0$ und umgekehrt) ist, wenn P eine insichdichte Menge ist.*

Auf Pc können wir dieselbe Zerlegung anwenden und haben, wenn Pcc mit Pc^2 bezeichnet wird:

$$Pc = Pca + Pc^2; \qquad P = Pa + Pca + Pc^2.$$

Wird die ν-malige wiederholte Anwendung der *Operation* c auf P mit Pc^ν bezeichnet, so hat man auch

$$P = Pa + Pca + Pc^2a + \cdots + Pc^{\nu-1}a + Pc^\nu.$$

Pc^ν heiße die ν^{te} *Kohärenz* von P.

Es läßt sich nun aber auch auf Grund *vollständiger Induktion* der Begriff der γ^{ten} *Kohärenz* von P definieren, wo γ eine beliebige *transfinite* Zahl ist.

Bedeutet γ eine *transfinite* Zahl der *ersten* Art, so definiert man:

$$Pc^\gamma = (Pc^{\gamma-1})c. \tag{6}$$

Ist aber γ eine *transfinite* Zahl der *zweiten* Art, so sei

$$Pc^\gamma = \mathfrak{D}(\ldots,\ Pc^{\gamma'},\ \ldots), \tag{7}$$

wo γ' *alle* Zahlen zu durchlaufen hat, die kleiner sind als γ. Zum Verständnis der letzten Gleichung (7) beachte man, daß stets $Pc^{\gamma'}$ *ganz* in $Pc^{\gamma''}$ enthalten ist, wenn $\gamma'' < \gamma'$ ist.

Nach diesen Festsetzungen besteht für alle Zahlenpaare γ und δ die Gleichung

$$(Pc^{\gamma})c^{\delta} = Pc^{\gamma+\delta} \tag{8}$$

und, was auch γ für eine *finite* oder *transfinite* Zahl sei, wie leicht zu beweisen, das folgende Theorem:

$$P = \sum_{\gamma'=0,1,\ldots<\gamma} Pc^{\gamma'}a + Pc^{\gamma}. \tag{9}$$

Hier haben die verschiedenen Bestandteile der rechten Seite $Pc^{\gamma'}a$ und Pc^{γ} untereinander keinen Zusammenhang, d. h. keine gemeinschaftlichen Punkte; jedes Glied $Pc^{\gamma'}a$ stellt als *Adhärenz* von $Pc^{\gamma'}$ eine *isolierte* Menge dar, die Summe $\sum\limits_{\gamma'=0,1,\ldots<\gamma} Pc^{\gamma'}a$ *selbst* ist offenbar immer eine *separierte* Menge, weil *jeder insichdichte* Bestandteil von P auch Bestandteil von Pc^{γ} ist, mithin jene Summe *keinen insichdichten* Bestandteil haben kann.

Es soll nun bewiesen werden, *daß wenn P eine separierte Menge ist, alsdann eine der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehörige kleinste Zahl α existiert, so daß $Pc^{\alpha} = 0$ und daher auch $Pc^{\alpha+\lambda} = 0$, daß aber, wenn P nicht eine separierte Menge ist, alsdann eine ebensolche Zahl α in der ersten oder zweiten Zahlenklasse vorhanden ist, so daß Pc^{α} und daher auch $Pc^{\alpha+\lambda}$ eine insichdichte Menge ist.*

Den *Beweis* des zuletzt behaupteten Satzes führen wir wie folgt.

1⁰. Betrachten wir *zuerst* den Fall, *daß P von der ersten Mächtigkeit* ist und wenden den in (9) ausgesprochenen Satz für $\gamma = \Omega$ an, wo Ω die *kleinste* Zahl der *dritten* Zahlenklasse ist, so haben wir

$$P = \sum_{\gamma'=0,1,2,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a + Pc^{\Omega}.$$

Wären nun auf der rechten Seite alle Glieder $Pc^{\gamma'}a$ von Null verschieden, so hätte diese Seite unsrer Gleichung *zum mindesten die zweite Mächtigkeit*, das gleiche würde also auch von der linken Seite, d. h. von P gelten, gegen unsere Voraussetzung, daß P die *erste* Mächtigkeit besitzt. Es muß also Zahlen γ' und unter ihnen eine *kleinste* α geben (denn es ist eine Eigentümlichkeit der *ganzen* Zahlen, daß *jeder* Inbegriff von solchen, möge er aus *endlichen* oder *transfiniten* Zahlen bestehen, ein *Minimum* besitzt), so daß

$$Pc^{\alpha}a = 0.$$

Nun ist aber

$$Pc^{\alpha} = Pc^{\alpha}a + Pc^{\alpha+1},$$

daher

$$Pc^{\alpha} = Pc^{\alpha+1} = (Pc^{\alpha})c.$$

Ist hier Pc^{α} von Null verschieden, so folgt aus der letzten Gleichung, daß Pc^{α} und daher auch $Pc^{\alpha+\lambda}$ eine *insichdichte* Menge ist. Ist P eine separierte Menge, so kann nicht Pc^{α} eine insichdichte Menge sein und ist folglich *Null*; ist aber P keine separierte Menge, so kann Pc^{α} nicht Null sein und ist folglich *insichdicht*.

2⁰. Gehen wir nun zu der Annahme über, *daß P eine höhere Mächtigkeit hat als die erste.*

Die *Eigenschaft*, eine *höhere* Mächtigkeit als die *erste* zu haben, genügt den *beiden* Bedingungen, welche wir zu *Anfang* dieser Arbeit angeführt haben, sie ist also eine solche, auf welche das Theorem I Anwendung findet, worin wir daher unter Υ die soeben charakterisierte *Mengenbeschaffenheit* uns denken können. Wenn man außerdem noch das Theorem II berücksichtigt, so folgt, daß im Raum G_n Punkte q vorhanden sein müssen derart, daß in jede um q als Mittelpunkt mit dem Radius ϱ beschriebene n-dimensionale Vollkugel $K(\varrho)$ ein Bestandteil von P fällt, welcher eine *höhere* Mächtigkeit hat als die *erste*. Bezeichnen wir den *Inbegriff aller dieser Punkte q* mit Q, so sieht man leicht, daß Q eine *abgeschlossene* Menge ist; denn jeder *Grenzpunkt* von Q erfüllt dieselbe Bedingung, wie diejenige ist, durch welche wir die Punkte q definiert haben, er gehört also selbst zu Q.

Die beiden Mengen P und Q müssen nun *gemeinschaftliche* Punkte haben, oder mit anderen Worten, es ist $\mathfrak{D}(P, Q)$ *von Null verschieden.*

Dies folgt aus Theorem III, wenn wir darin an die Stelle der mit R bezeichneten Menge unsere Menge P setzen, während die dort mit Q bezeichnete die Bedeutung der uns *hier vorliegenden* Menge Q erhält.

Betrachten wir nämlich einen stetigen Teil H von G_n, in den *kein* Punkt von Q fällt, so wird *der in das Gebiet H fallende Bestandteil P_1 von P höchstens von der ersten Mächtigkeit sein*; denn wäre P_1 von *höherer* Mächtigkeit, so würde es nach dem soeben Bewiesenen eine Menge Q_1 geben, die zu P_1 dasselbe Verhältnis hat wie Q zu P, und es würde offenbar Q_1 ein Bestandteil von Q sein, der ganz innerhalb des Gebietes H läge, gegen die Voraussetzung, welche mit Bezug auf H gemacht worden ist.

Wäre also $\mathfrak{D}(P, Q) = 0$, so wären *beide* Bedingungen, denen das Theorem III unterliegt, erfüllt und wir würden daraus schließen können, daß P selbst eine Menge von *höchstens der ersten* Mächtigkeit sei, während wir es doch hier mit einer Menge P von *höherer* Mächtigkeit zu tun haben. *Also ist $\mathfrak{D}(P, Q)$ von Null verschieden.*

Fassen wir nun die Menge $\mathfrak{D}(P, Q)$ näher ins Auge und bezeichnen sie mit V. Sie besteht aus den zu P gehörigen Punkten v, die eine solche Lage haben, daß in *jeder* Umgebung von v Punkte von P liegen, deren Inbegriff von *höherer* Mächtigkeit ist als von der ersten. *Kein Punkt v von V ist ein isolierter* Punkt von V und P; denn umgeben wir v als Mittelpunkt mit einer beliebigen Vollkugel $K(\varrho)$, so fällt in dieselbe ein Bestandteil V_1 von P, der von *höherer* als der *ersten* Mächtigkeit ist; das letztere können wir auch von der Menge $V_1 - v$ sagen, die aus V_1 hervorgeht, wenn man von letzterer den *einzigen* Punkt v in Abzug bringt; daher muß es nach dem vorhin für P Bewiesenen auch unter den Punkten von $V_1 - v$ *solche* geben, daß die in jede Umgebung von ihnen fallenden Bestandteile von $V_1 - v$ eine *höhere* als die *erste* Mächtigkeit besitzen, und letztere Punkte sind offenbar auch Punkte von V. Man sieht also, daß wenn ein beliebiger Punkt v als Mittelpunkt mit einer Vollkugel $K(\varrho)$ von beliebig kleinem Radius ϱ umgeben wird, in das Innere dieser Vollkugel noch *andere* Punkte von V hineinfallen als v; es ist also v sicherlich *kein isolierter* Punkt von V.

Da nun bewiesen ist, daß *jeder* Punkt v von V ein *Grenzpunkt* von V ist, so ist V eine *insichdichte Menge.*

Wir sehen daher, daß jede Punktmenge P von *höherer als der ersten* Mächtigkeit einen *bestimmten insichdichten Bestandteil* V besitzt, der aus *allen Punkten* v von P zusammengesetzt ist, welche eine solche Lage haben, daß in jede um v als Zentrum beschriebene Vollkugel $K(\varrho)$ ein Bestandteil von P hineinfällt, der von *höherer als der ersten Mächtigkeit* ist.

Daraus folgt zunächst, daß eine *separierte unendliche Menge stets von der ersten Mächtigkeit* ist; denn wir nannten *separierte* Menge eine solche, die *keinen insichdichten* Bestandteil hat; wäre sie von *höherer* als der *ersten Mächtigkeit,* so müßte sie nach dem soeben Bewiesenen einen *insichdichten* Bestandteil besitzen. Bei dieser Gelegenheit möchte ich erwähnen, daß auch Herr Bendixson, wie ich von ihm brieflich erfahren, einen ähnlichen Beweis dieses letzteren Satzes gefunden hat, nachdem ich ihn zur Untersuchung dieser Frage angeregt hatte. Kehren wir nun unter der *vorliegenden Annahme,* daß P von *höherer* Mächtigkeit als der *ersten* ist, zu der Gleichung (9) zurück und setzen auch hier $\gamma = \Omega$, betrachten also die folgende Gleichung:

$$P = \sum_{\gamma' = 0, 1, \ldots, \omega, \ldots < \Omega} P c^{\gamma'} a + P c^{\Omega}.$$

Der Bestandteil $\sum\limits_{\gamma' = 0, 1, \ldots, \omega, \ldots < \Omega} P c^{\gamma'} a$ der rechten Seite, welchen wir R nennen wollen, stellt, wie schon früher hervorgehoben worden ist, eine *separierte* Menge vor, weil jeder *insichdichte* Bestandteil von P auch in *jeder Kohärenz* von P, also auch in $P c^{\Omega}$ enthalten ist; jeder *insichdichte* Bestandteil von R wäre auch ein solcher von P, und daher auch von $P c^{\Omega}$, was dadurch ausgeschlossen ist, daß $\mathfrak{D}(R, P c^{\Omega}) = 0$ ist.

R als *separierte* Menge hat, wie wir gesehen, höchstens die *erste* Mächtigkeit.

Nun ist

$$R = \sum_{\gamma' = 0, 1, \ldots, \omega, \ldots < \Omega} P c^{\gamma'} a, \tag{10}$$

und wir schließen aus dieser Gleichung, daß unter den Gliedern $P c^{\gamma'} a$ der rechten Seite solche vorhanden sein müssen, welche verschwinden, weil sonst R von *höherer als der ersten Mächtigkeit* sein würde. Ist darnach α die *kleinste* der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse angehörige Zahl, für welche

$$P c^{\alpha} a = 0,$$

so folgt daraus, daß

$$P c^{\alpha} = (P c^{\alpha}) c.$$

Hier ist der Fall $P c^{\alpha} = 0$ ausgeschlossen, weil $P c^{\alpha}$ *zum mindesten* aus dem *insichdichten* Bestandteil V von P besteht; also ist $P c^{\alpha}$ und daher auch $P c^{\alpha + \lambda} = P c^{\Omega}$ eine *insichdichte* Menge.

Der mit V bezeichnete *insichdichte* Bestandteil von P, dessen Existenz in dem Falle nachgewiesen ist, daß P eine höhere Mächtigkeit als die *erste* hat, ist Bestandteil der *insichdichten* Menge $P c^{\alpha} = P c^{\Omega}$; bezeichnen wir nun den Inbegriff *aller* übrigen Punkte von $P c^{\alpha}$ mit U, derart daß

$$P c^{\alpha} = P c^{\Omega} = U + V, \tag{11}$$

so sieht man leicht, *daß U nur Null* oder eine *homogene* Menge *erster Ordnung* sein kann. Denn in *jede* Nähe eines Punktes u von U fallen, da $P c^{\alpha}$ *insichdicht* ist, unendlich viele Punkte von $P c^{\alpha}$; diese können aber in *hinreichender* Nähe nur dem Teil U, nicht aber dem Teil V angehören, weil sonst u nach der Definition von V ein Punkt der letzteren Menge sein würde; es liegen also in *jeder* Umgebung von u andere Punkte von U, deren Inbegriff aber *keine* höhere Mächtigkeit als die *erste* haben kann, weil sonst ebenfalls u zu V gehören würde.

Bemerken wir noch, daß wir wegen $P c^{\alpha} a = P c^{\alpha + \lambda} a = 0$ die Gleichung (10) wie folgt schreiben können:

$$R = \sum_{\alpha' = 0, 1, \ldots < \alpha} P c^{\alpha'} a, \tag{12}$$

und fassen die gewonnenen Resultate in folgendem zusammen.

Theorem J. *Ist P eine separierte unendliche Menge, so ist sie von der ersten Mächtigkeit und es gibt eine kleinste Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse, so daß*

$$P c^{\alpha} = 0;$$

man hat also in diesem Falle (wegen (9), wenn darin $\gamma = \alpha$ gesetzt wird)

$$P = \sum_{\alpha' = 0, 1, \ldots < \alpha} P c^{\alpha'} a.$$

Theorem K. *Ist P von der ersten Mächtigkeit, ohne jedoch eine separierte Menge zu sein, so gibt es eine der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehörige kleinste Zahl α, so daß $P c^{\alpha}$ eine homogene Menge erster Ordnung wird;*

bezeichnen wir diese mit U und $\sum\limits_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a$ mit R, so ist R entweder Null oder eine separierte Menge, und man hat

$$P = R + U.$$

Dabei ist

$$\mathfrak{D}(R,\ U^{(1)}) = 0.$$

Die letzte Behauptung hat ihren Grund darin, daß, wenn ein Punkt r von R zu $U^{(1)}$ gehören würde, $r + U$ ebenso wie U eine *insichdichte* Menge und somit ein Bestandteil von $U = Pc^{\alpha}$ wäre.

Theorem L. *Ist P von höherer als der ersten Mächtigkeit, so gibt es eine der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehörige kleinste Zahl α, derart daß Pc^{α} eine insichdichte Menge ist; letztere besteht aus einem Bestandteil V, welcher insichdicht ist und alle Punkte von P umfaßt, welche so liegen, daß in jeder Umgebung von ihnen Bestandteile von P enthalten sind, die von höherer als der ersten Mächtigkeit sind, und aus einem Bestandteil U, der, falls er nicht Null ist, aus der Zusammensetzung der übrigen Punkte von Pc^{α} besteht und eine homogene Menge erster Ordnung bildet; wird die Summe $\sum\limits_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a$ mit R bezeichnet, so ist R entweder Null oder eine separierte Menge und man hat*

$$P = R + U + V.$$

Dabei ist

$$\mathfrak{D}(R,\ U^{(1)}) = 0; \qquad \mathfrak{D}(R,\ V^{(1)}) = 0; \qquad \mathfrak{D}(U,\ V^{(1)}) = 0.$$

Die letzten Relationen werden ganz ebenso bewiesen wie die entsprechende Behauptung in Theorem K.

§ 3.

Die in § 2 nachgewiesenen wesentlich verschiedenen und auseinander fallenden Bestandteile einer *beliebigen* Punktmenge P scheinen mir wichtig genug, um besondere *Bezeichnungen* und *Namen* zu rechtfertigen.

Wir wollen R den *Rest* oder das *Residuum* von P nennen und mit Pr bezeichnen, dagegen heiße $Pc^{\Omega} = U + V$ die *totale Inhärenz* von P und werde mit Pi bezeichnet, so daß man hat

$$R = Pr = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a, \tag{13}$$

$$U + V = Pi = Pc^{\alpha} = Pc^{\Omega}, \tag{14}$$

$$P = Pr + Pi. \tag{15}$$

U heiße die *Inhärenz erster Ordnung* von P oder auch die *erste Inhärenz* von P, und es werde dafür das Zeichen Pi_1 gebraucht.

Was nun die *insichdichte* Menge V anbetrifft, so sieht man zwar aus § 2 leicht: sie ist derart, daß in jeder Nähe *jedes* ihrer Punkte v eine höhere

Mächtigkeit als die erste von Punkten, nicht bloß der Menge P, *sondern von V selbst* liegen, indessen steht zunächst noch nicht fest, daß sie stets eine *homogene* Menge ist, falls sie nicht verschwindet; dies wird erst dann sichergestellt sein, wenn wir gezeigt haben werden, daß bei den *Punktmengen innerhalb G_n keine höhere Mächtigkeit* vorkommen kann, als die *zweite*; denn sobald dies bewiesen wäre, würde daraus folgen, daß V, falls sie nicht verschwindet, eine *homogene Menge zweiter Ordnung* ist. Indem wir also fürs erste die Möglichkeit des Vorkommens *höherer Mächtigkeiten* als der *zweiten* zu berücksichtigen haben, ergibt sich hier allgemein folgendes:

Ist v irgendein Punkt von V und ist $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\nu, \ldots$ irgendeine Reihe von positiven Größen, derart daß

$$\varrho_\nu > \varrho_{\nu+1} \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \varrho_\nu = 0,$$

und bezeichnet man mit V_ν den Teil von V, welcher in die um v als *Mittelpunkt* beschriebene Vollkugel $K(\varrho_\nu)$ fällt, mit α_ν die *Ordnungszahl* der *Mächtigkeit* von V_ν, so ist klar, daß α_ν *nicht kleiner* sein kann, als $\alpha_{\nu+1}$, daß also

$$\alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1};$$

denn $V_{\nu+1}$ ist ein Teil von V_ν.

Wir haben also eine einfach unendliche Reihe von *endlichen* oder *transfiniten ganzen* Zahlen α_ν, welche mit wachsendem ν *nicht* zunehmen; von einer *solchen* Reihe *ganzer* Zahlen ist aber leicht zu zeigen [1], daß ihre Glieder von einem Gewissen $\nu = \nu_0$ an *alle einander gleich* sein müssen, so daß

$$\alpha_{\nu_0} = \alpha_{\nu_0+1} = \alpha_{\nu_0+2} = \cdots$$

Man setze den gemeinsamen Wert aller dieser Zahlen $= \beta$.

Wir sehen also, daß $V_{\nu_0}, V_{\nu_0+1}, V_{\nu_0+2}, \ldots$ *alle* von der β^{ten} Mächtigkeit sind, und erkennen daraus leicht, daß wenn $\varrho \leqq \varrho_{\nu_0}$, derjenige Bestandteil von V, welcher in die um v als *Mittelpunkt* beschriebene Vollkugel $K(\varrho)$ fällt, *immer* die β^{te} *Mächtigkeit* hat; denn, da ϱ seiner Größe nach zwischen zwei bestimmte Glieder der Reihe $\varrho_{\nu_0}, \varrho_{\nu_0+1}, \varrho_{\nu_0+2}, \ldots$ fällt, so stößt man ebensowohl bei der Annahme, daß die Mächtigkeit des bezeichneten Teils von V *größer* als β, wie auch, daß sie *kleiner* als β sei, auf einen Widerspruch.

Wir sehen hieraus, daß zu jedem Punkt v von V eine ganz bestimmte *endliche* oder *überendliche* Zahl β gehört derart, daß für *hinreichend kleine* Werte von ϱ der in die, um v als *Zentrum* beschriebene Vollkugel $K(\varrho)$ fallende Bestandteil von V die β^{te} *Mächtigkeit* hat; wir wollen daher auch β die zum Punkte v gehörige *Ordnungszahl* und v einen *Punkt β^{ter} Ordnung von V oder P* nennen.

Der Inbegriff *aller* Punkte β^{ter} *Ordnung* von V, falls solche überhaupt vorhanden sind, bildet, wie leicht zu sehen, eine *homogene Punktmenge* β^{ter}

Ordnung und *Mächtigkeit*, welche wir die β^{te} *Inhärenz* oder die *Inhärenz* β^{ter} *Ordnung* von P nennen und mit Pi_β bezeichnen.

Wir haben nun

$$V = \sum_{\beta=2,3,\ldots} Pi_\beta, \tag{16}$$

wo auf der Rechten die einzelnen Glieder auch Null sein können und β *alle endlichen* und *überendlichen* ganzen Zahlen, die größer als 1 sind, zu durchlaufen hat.

Da nun nach (14) $Pi = Pc^\Omega = U + V$ und $U = Pi_1$, so können wir schreiben:

$$Pi = \sum_{\beta=1,2,\ldots} Pi_\beta, \tag{17}$$

wo hier β alle positiven ganzen Zahlen von 1 an zu durchlaufen hat. Zwischen den verschiedenen von uns nachgewiesenen Bestandteilen einer Punktmenge herrschen allgemein Beziehungen, die hervorgehoben zu werden verdienen.

Betrachten wir zuerst die Definitionen von Pa und Pc, wie sie uns in den Formeln (4) und (5) entgegentreten, so sehen wir, daß

$$\mathfrak{D}(Pa,\ Pc) = 0, \tag{18}$$

$$\mathfrak{D}[Pa,\ (Pa)^{(1)}] = 0, \tag{19}$$

$$\mathfrak{D}[Pa,\ (Pc)^{(1)}] = 0. \tag{20}$$

(18) sagt aus, daß die beiden Mengen Pa und Pc völlig getrennt (zusammenhangslos) sind, d. h. keine ihnen gemeinsam angehörigen Punkte haben; (19) besagt, daß Pa eine *isolierte* Menge ist, (20) läßt erkennen, daß Pa auch keinen Punkt hat, der Grenzpunkt von Pc wäre.

Die *isolierten* Punkte von P bilden Pa, wir wollen sie *Punkte* 0^{ter} *Art von P* nennen; die *isolierten* Punkte von Pc bilden Pca, wir wollen sie *Punkte* 1^{ter} *Art von P* nennen.

Allgemein wollen wir die Punkte der *isolierten* Menge $Pc^{\alpha'}a$ *Punkte* α'^{ter} *Art von P* nennen.

Die aus (13), (15) und (17) hervorgehende Formel

$$P = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a + \sum_{\beta=1,2,\ldots} Pi_\beta \tag{21}$$

zeigt, daß ein beliebiger Punkt p von P entweder einem Bestandteil $Pc^{\alpha'}a$ von P angehört, dann ist p ein *Punkt* α'^{ter} *Art von P* und α' ist eine bestimmte Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse, kleiner als α oder 0, oder es gehört p einem Bestandteil Pi_β von P an und ist alsdann ein *Punkt* β^{ter} *Ordnung von P*. Die *sämtlichen* Punkte α'^{ter} Art von P bilden daher, wenn überhaupt welche vorhanden sind, eine *isolierte* Menge, die sämtlichen Punkte β^{ter} *Ordnung* von P bilden dagegen, falls es deren überhaupt gibt, eine *homogene* Menge β^{ter} Ordnung.

Man kann die in Pr enthaltenen Punkte *Artpunkte* von P und die in Pi vorkommenden Punkte *Ordnungspunkte* von P nennen.

Aus der *Abwesenheit* von Punkten α'^{ter} Art von P folgt auch das *Nichtvorhandensein* von Punkten $(\alpha' + \lambda)^{\text{ter}}$ Art, wo λ eine beliebige Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse ist; denn, wenn $Pc^{\alpha'}a = 0$, so ist $Pc^{\alpha'}$ entweder *Null* oder eine *insichdichte* Menge und es ist daher allgemein: $Pc^{\alpha'+\lambda} = Pc^{\alpha'}$ und $Pc^{\alpha'+\lambda}a = 0$. Daher zeigt *umgekehrt* das *Vorhandensein* von Punkten α'^{ter} Art auch *immer* das *Vorhandensein* von Punkten *jeder niedrigeren* Art an.

Dagegen hat die *Abwesenheit* oder das *Vorhandensein* von Punkten β^{ter} *Ordnung* keinerlei Einfluß auf das *Vorkommen* oder *Nichtvorkommen* von *Ordnungspunkten* mit *andrer* Ordnungszahl oder von *Artpunkten*.

Wenden wir die Relation (20) auf $Pc^{\alpha'}$ an Stelle von P an, so haben wir

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pc^{\alpha'})^{(1)}] = 0. \tag{22}$$

Nun ist aber sowohl $Pc^{\alpha'+\lambda}a$, wie auch Pi_β Bestandteil von $Pc^{\alpha'}$; wir haben also auch

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pc^{\alpha'+\lambda}a)^{(1)}] = 0 \tag{23}$$

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pi_\beta)^{(1)}] = 0. \tag{24}$$

So sehen wir, daß der Bestandteil $Pc^{\alpha'}a$ von P weder *Grenzpunkte* von $Pc^{\alpha'+\lambda}a$, noch *Grenzpunkte* von Pi_β zu *Punkten* hat.

Alle Punkte der rechten Seite von (21), *mit Ausnahme der im ersten Gliede Pa enthaltenen*, sind zugleich *Grenzpunkte* von P, und man ist daher berechtigt, wenn $\alpha' > 0$, einen *Punkt* α'^{ter} Art von P auch *Grenzpunkt* α'^{ter} Art von P und einen *Punkt* β^{ter} Ordnung von P auch *Grenzpunkt* β^{ter} Ordnung von P zu nennen; nur die Punkte 0^{ter} *Art* von P können *nicht* zugleich *Grenzpunkte von P* heißen, weil sie *isolierte Punkte* von P sind.

$Pc^{\alpha'}$ können wir offenbar charakterisieren als den Inbegriff sowohl *aller Artpunkte von P, deren Artzahl* $\geqq \alpha'$, wie auch *aller Ordnungspunkte* von P; $Pi = V = Pc^\Omega$ ist der Inbegriff *aller Ordnungspunkte von P*.

Was nun das Verhältnis der *Inhärenzen* zueinander sowohl wie zu dem *Rest* von P anbetrifft, so können wir allgemein darüber folgendes behaupten:

$$\mathfrak{D}[Pr,\ (Pi)^{(1)}] = 0, \tag{25}$$

und daher ist auch

$$\mathfrak{D}[Pr,\ (Pi_\beta)^{(1)}] = 0. \tag{26}$$

Denn da Pi eine *insichdichte* Menge ist, so ist auch $Pi + Z$ eine *insichdichte* Menge, falls Z irgendein Bestandteil von $(Pi)^{(1)}$ ist; wäre also $\mathfrak{D}[Pr, (Pi)^{(1)}]$ von Null verschieden und bezeichnen wir diese Menge mit Z, so würde $Pi + Z$ ein *insichdichter* Bestandteil von P und daher auch von $Pi = Pc^\Omega$ sein, während doch Z als Bestandteil von Pr nicht in Pi enthalten sein kann.

Ferner können wir sagen, daß

$$\mathfrak{D}[Pi_\beta,\ (Pi_{\beta'})^{(1)}] = 0, \tag{27}$$

vorausgesetzt, daß $\beta' > \beta$.

Denn jeder *Grenzpunkt* von $Pi_{\beta'}$ ist, falls er *Punkt* von P ist, notwendig ein *Ordnungspunkt* von P von *mindestens* der β'^{ten} Ordnung, kann also nicht *Punkt* von Pi_β sein, da alle Punkte von Pi_β *Punkte* β^{ter} Ordnung von P sind und $\beta < \beta'$ angenommen ist.

Es ließen sich unsere Betrachtungen noch nach mancher Richtung vervollständigen, was für eine spätere Gelegenheit vorbehalten bleibt.

Ich will nun zeigen, wie unsere früheren Theoreme, die wir im Theorem H zusammengezogen haben, sich aus den neuen Resultaten ergeben, sobald man nur die Menge P als *abgeschlossen* voraussetzt.

Unter einer *abgeschlossenen* Menge verstanden wir nach (1) eine solche P, deren Ableitung $P^{(1)}$ *ganz* in ihr enthalten ist, so daß

$$\mathfrak{D}(P,\ P^{(1)}) = P^{(1)}.$$

Es fällt daher bei *abgeschlossenen* Mengen nach (4) die *erste Kohärenz* von P, die wir Pc nennen, mit der *ersten Ableitung* zusammen; wir haben

$$Pc = P^{(1)}, \tag{28}$$

vorausgesetzt, daß P *abgeschlossen* ist.

Nun wissen wir aber, daß auch *alle* Ableitungen $P^{(\gamma)}$ *abgeschlossene* Mengen sind, woraus folgt, daß *allgemein* in unserm Fall

$$Pc^\gamma = P^{(\gamma)}, \tag{29}$$

und daher

$$Pc^\gamma a = P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}, \tag{30}$$

wo für $\gamma = 0$ unter $P^{(0)}$ nichts anderes als P zu verstehen ist.

Endlich haben wir hier

$$Pi = Pc^\Omega = P^{(\Omega)}. \tag{31}$$

$P^{(\Omega)}$ ist daher, falls sie nicht Null ist, eine *insichdichte* Menge, und da sie außerdem als *Ableitung* von P eine *abgeschlossene* Menge ist, so folgt hieraus, daß $P^{(\Omega)}$, falls sie nicht verschwindet, eine *perfekte* Menge ist.

Man sieht also, daß im vorliegenden Falle der Bestandteil $U = Pi_1$ von Pi *stets verschwindet* und daß daher Pi sich auf V reduziert; denn, da Pi eine *perfekte* Menge ist, so ist nach Theorem A der Bestandteil von Pi, welcher in eine Vollkugel fällt, die einen Punkt von Pi umgibt, stets von *höherer* als der *ersten* Mächtigkeit; es kann also *kein* Punkt von Pi ein Punkt *erster* Ordnung sein.

Daher ist jede *abgeschlossene* Menge *erster* Mächtigkeit eine *separierte* Menge. Je nachdem nun die *abgeschlossene* Menge P von der *ersten* oder von *höherer* Mächtigkeit ist, ergeben sich aus den Theoremen J und L und den auf sie folgenden Resultaten die verschiedenen Behauptungen in Theorem H.

Die im Vorstehenden zu einer Art von Abschluß gelangten Untersuchungen über *Punktmengen* habe ich von Anfang an nicht bloß aus spekulativem Interesse, sondern zugleich im Hinblick auf Anwendungen unternommen, welche ich mir davon in der *mathematischen Physik* und in anderen Wissenschaften versprach.

Die *Hypothesen*, welche den meisten theoretischen Untersuchungen über *Naturerscheinungen* zugrunde gelegt werden, haben mich niemals sehr befriedigt, und ich glaubte dies dem Umstande zuschreiben zu müssen, daß die *Theoretiker* zumeist entweder über die *letzten* Elemente der *Materie* eine völlige Unbestimmtheit herrschen lassen oder daß sie dieselben als sogenannte *Atome* von zwar *sehr kleinem* aber doch *nicht gänzlich verschwindendem Rauminhalte* annehmen. Mir unterlag es keinem Zweifel, daß, um zu einer befriedigenderen *Naturerklärung* zu gelangen, die letzten oder eigentlichen *einfachen* Elemente der Materie in *aktual unendlicher Zahl* vorauszusetzen und in bezug auf das *Räumliche* als *völlig ausdehnungslos* und *streng punktuell* zu betrachten sind; ich wurde in dieser Ansicht bestärkt, indem ich bemerkte, daß in der neueren Zeit so hervorragende *Physiker* wie Faraday, Ampère, Wilh. Weber und von *Mathematikern* neben anderen Cauchy dieselbe Überzeugung vertreten haben.

Um aber diese *Grundanschauung* zur Durchführung bringen zu können, schienen mir allgemeine Untersuchungen über *Punktmengen*, wie ich sie angestellt habe, vorhergehen zu müssen. Ich nenne im Anschluß an Leibniz die *einfachen* Elemente der Natur, aus deren Zusammensetzung in gewissem Sinne die *Materie* hervorgeht, *Monaden* oder *Einheiten* (man vergleiche namentlich die beiden Leibnizschen Abhandlungen: „*La Monadologie*", Edit. Erdmann, p. 705 oder Edit. Dutens, T. II, p. 20 und „*Principes de la nature et de la grâce, fondés en raison*", Edit. Erdmann, p. 714 und Edit. Dutens, T. II, p. 32) und gehe von der Ansicht aus, mit welcher ich mich in Übereinstimmung mit der heutigen Physik zu befinden glaube, daß *zwei spezifisch verschiedene, aufeinander wirkende Materien* und demgemäß auch *zwei* verschiedene Klassen von *Monaden* nebeneinander zugrunde zu legen sind, die *Körpermaterie* und die *Äthermaterie*, die *Körpermonaden* und die *Äthermonaden*, indem diese beiden *Substrate* zur *Erklärung* der *bisher beobachteten sinnfälligen Erscheinungen* auszureichen scheinen.

Auf diesem Standpunkte ergibt sich als die *erste Frage*, woran aber weder Leibniz noch die Späteren gedacht haben, welche *Mächtigkeiten* jenen beiden Materien in Ansehung ihrer Elemente, sofern sie als *Mengen* von *Körper-* resp. *Äthermonaden* zu betrachten sind, zukommen; in dieser Beziehung habe ich mir schon vor Jahren die *Hypothese* gebildet, daß die *Mächtigkeit* der *Körpermaterie* diejenige ist, welche ich in meinen Untersuchungen die *erste* Mächtigkeit nenne, daß dagegen die *Mächtigkeit* der *Äthermaterie* die *zweite* ist.

Für diese Ansicht und Meinung lassen sich *sehr viele* Gründe ins Feld führen, wie ich bei einer späteren Gelegenheit auseinandersetzen will; nehmen wir sie vorläufig an, so müssen wir uns in jedem *Zeitmoment* die *Körpermaterie* (sei es im ganzen Weltraume G_3, sei es in irgend einem abgegrenzten Teil H_3 derselben) unter dem *Bilde* einer Punktmenge P von der ersten Mächtigkeit, die *Äthermaterie* in demselben Raume unter dem *Bilde* einer *daneben* bestehenden Punktmenge Q von der *zweiten* Mächtigkeit denken, und diese beiden Punktmengen P und Q wären gewissermaßen als Funktionen der *Zeit* zu betrachten. Aus den Untersuchungen des § 2 folgt aber, daß

$$P = Pr + Pi_1,$$

wo Pr die *separierte* Menge ist, welche wir den *Rest* von P nannten, und wo Pi_1, wenn sie nicht verschwindet, die *erste Inhärenz* von P, eine *homogene* Punktmenge *erster* Ordnung ist; die *übrigen Inhärenzen* fallen hier fort, weil P die *erste* Mächtigkeit hat. Ebenso haben wir

$$Q = Qr + Qi_1 + Qi_2,$$

da Q von der *zweiten* Mächtigkeit ist und somit *höhere Inhärenzen* als die *zweite* hier nicht vorkommen.

Es wird sich zunächst darum handeln, zu entscheiden, ob vielleicht den *fünf* wesentlich verschiedenen Bestandteilen, in welche hiernach die *Körper-* und *Äthermaterie* in jedem Zeitmoment getrennt erscheint, und etwa auch den verschiedenen Teilen, in welche Pr und Qr nach (13) zerfallen, auch wesentlich verschiedene *Erscheinungs-* und *Wirkungsweisen* der Materie, wie *Aggregatzustände, chemische Unterschiede, Licht* und *Wärme, Elektrizität* und *Magnetismus* entsprechen mögen.

Ich möchte jedoch die Vermutungen, welche ich in dieser Beziehung habe, nicht früher in bestimmter Form aussprechen, als bis eine genauere Prüfung derselben stattgefunden haben wird.

[Anmerkungen.]

Die vorstehende Abhandlung ist im wesentlichen eine Ergänzung und Fortsetzung der im Vorwort zitierten Annalenarbeit III 4 Nr. 6. Die Theoreme I, II, III, D, E, F, G sind genaue Wiederholungen der gleichbezeichneten Theoreme im § 15—16 der genannten Arbeit. Das „Theorem H“ S. 264 faßt dann die gewonnenen Resultate, soweit sie sich auf „abgeschlossene“ Mengen beziehen, zu einem einzigen Satze zu-

sammen, demzufolge jede abgeschlossene Menge in einen abzählbaren „separierten“ und einen „perfekten“ Bestandteil von der Mächtigkeit des Kontinuums zerlegt werden kann. In § 2 (S. 264 ff.) wird dann versucht, durch Einführung neuer Begriffe („Kohärenz“, „Adhärenz“ und „Inhärenz“) eine entsprechende allgemeingültige Zerlegung auch der nicht abgeschlossenen Mengen durchzuführen. Die hier gewonnenen Resultate, die in den Theoremen J, K, L zusammengefaßt werden, sind aber, wie es scheint, nicht von der gleichen Bedeutung und Fruchtbarkeit wie die grundlegenden Sätze über abgeschlossene Mengen. Cantors am Schluß der Arbeit geäußerte Hoffnung, sie auf eine Theorie der Körper- und Ätheratome anzuwenden, erscheint uns heute sehr problematisch.

[1] Zu S. 271. Hier wird von der (noch unbewiesenen) Annahme Gebrauch gemacht, daß jede Mächtigkeit ein Alef und daher unter jeder Menge von Mächtigkeiten eine kleinste enthalten sei. Vgl. den „Anhang“ S. 443 ff.

8. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.

[Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereing. Bd. I, S. 75—78 (1890—91).]

In dem Aufsatze, betitelt: Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen (Journ. Math. Bd. 77, S. 258) [hier S. 115], findet sich wohl zum ersten Male ein Beweis für den Satz, daß es unendliche Mannigfaltigkeiten gibt, die sich nicht gegenseitig eindeutig auf die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ beziehen lassen, oder, wie ich mich auszudrücken pflege, die nicht die Mächtigkeit der Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ haben. Aus dem in § 2 Bewiesenen folgt nämlich ohne weiteres, daß beispielsweise die Gesamtheit aller reellen Zahlen eines beliebigen Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ sich *nicht* in der Reihenform

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_\nu,\ \ldots$$

darstellen läßt.

Es läßt sich aber von jenem Satze ein viel einfacherer Beweis liefern, der unabhängig von der Betrachtung der Irrationalzahlen ist.

Sind nämlich m und w irgend zwei einander ausschließende Charaktere, so betrachten wir einen Inbegriff M von Elementen

$$E = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\nu,\ \ldots),$$

welche von unendlich vielen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ abhängen, wo jede dieser Koordinaten entweder m oder w ist. M sei die Gesamtheit aller Elemente E.

Zu den Elementen von M gehören beispielsweise die folgenden drei:

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{I}} &= (m, m, m, m, \ldots), \\ E^{\mathrm{II}} &= (w, w, w, w, \ldots), \\ E^{\mathrm{III}} &= (m, w, m, w, \ldots). \end{aligned}$$

Ich behaupte nun, daß eine solche Mannigfaltigkeit M nicht die Mächtigkeit der Reihe $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ hat.

Dies geht aus folgendem Satze hervor:

„Ist $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ irgendeine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit M, so gibt es stets ein Element E_0 von M, welches mit keinem E_ν übereinstimmt."

Zum Beweise sei

$$\begin{aligned} E_1 &= (a_{1,1},\ a_{1,2},\ \ldots,\ a_{1,\nu},\ \ldots), \\ E_2 &= (a_{2,1},\ a_{2,2},\ \ldots,\ a_{2,\nu},\ \ldots). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_\mu &= (a_{\mu,1},\ a_{\mu,2},\ \ldots,\ a_{\mu,\nu},\ \ldots). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hier sind die $a_{\mu,\nu}$ in bestimmter Weise m oder w. Es werde nun eine Reihe $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$, so definiert, daß b_ν auch nur gleich m oder w und von $a_{\nu,\nu}$ *verschieden* sei.

Ist also $a_{\nu,\nu} = m$, so ist $b_\nu = w$, und ist $a_{\nu,\nu} = w$, so ist $b_\nu = m$.

Betrachten wir alsdann das Element

$$E_0 = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots)$$

von M, so sieht man ohne weiteres, daß die Gleichung

$$E_0 = E_\mu$$

für keinen positiven ganzzahligen Wert von μ erfüllt sein kann, da sonst für das betreffende μ und für alle ganzzahligen Werte von ν

$$b_\nu = a_{\mu,\nu},$$

also auch im besondern

$$b_\mu = a_{\mu,\mu}$$

wäre, was durch die Definition von b_ν ausgeschlossen ist. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, daß die Gesamtheit aller Elemente von M sich nicht in die Reihenform: $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ bringen läßt, da wir sonst vor dem Widerspruch stehen würden, daß ein Ding E_0 sowohl Element von M, wie auch nicht Element von M wäre.

Dieser Beweis erscheint nicht nur wegen seiner großen Einfachheit, sondern namentlich auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil das darin befolgte Prinzip sich ohne weiteres auf den allgemeinen Satz ausdehnen läßt, daß die Mächtigkeiten wohldefinierter Mannigfaltigkeiten kein Maximum haben oder, was dasselbe ist, daß jeder gegebenen Mannigfaltigkeit L eine andere M an die Seite gestellt werden kann, welche von stärkerer Mächtigkeit ist als L.

Sei beispielsweise L ein Linearkontinuum, etwa der Inbegriff aller reellen Zahlgrößen z, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind.

Man verstehe unter M den Inbegriff aller eindeutigen Funktionen $f(x)$, welche nur die beiden Werte 0 oder 1 annehmen, während x alle reellen Werte, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, durchläuft.

Daß M *keine kleinere* Mächtigkeit hat als L, folgt daraus, daß sich Teilmengen von M angeben lassen, welche dieselbe Mächtigkeit haben wie L,

z. B. die Teilmenge, welche aus allen Funktionen von x besteht, die für einen einzigen Wert x_0 von x den Wert 1, für alle andern Werte von x den Wert 0 haben.

Es hat aber auch M *nicht gleiche* Mächtigkeit mit L, da sich sonst die Mannigfaltigkeit M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu der Veränderlichen z bringen ließe, und es könnte M in der Form einer eindeutigen Funktion der beiden Veränderlichen x und z

$$\varphi(x, z)$$

gedacht werden, so daß durch jede Spezialisierung von z ein Element $f(x) = \varphi(x, z)$ von M erhalten wird und auch umgekehrt jedes Element $f(x)$ von M aus $\varphi(x, z)$ durch eine einzige bestimmte Spezialisierung von z hervorgeht. Dies führt aber zu einem Widerspruch. Denn versteht man unter $g(x)$ diejenige eindeutige Funktion von x, welche nur die Werte 0 oder 1 annimmt und für jeden Wert von x von $\varphi(x, x)$ verschieden ist, so ist einerseits $g(x)$ ein Element von M, andererseits kann $g(x)$ durch keine Spezialisierung $z = z_0$ aus $\varphi(x, z)$ hervorgehen, weil $\varphi(z_0, z_0)$ von $g(z_0)$ verschieden ist.

Ist somit die Mächtigkeit von M weder kleiner noch gleich derjenigen von L, so folgt, daß sie größer ist als die Mächtigkeit von L. (Vgl. Crelles Journal Bd. 84, S. 242) [hier III 2, S. 119].

Ich habe bereits in den „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" (Leipzig 1883; Math. Ann. Bd. 21) [hier III 4, Nr. 5, S. 165] durch ganz andere Hilfsmittel gezeigt, daß die Mächtigkeiten kein Maximum haben; dort wurde sogar bewiesen, daß der Inbegriff aller Mächtigkeiten, wenn wir letztere ihrer Größe nach geordnet denken, eine „wohlgeordnete Menge" bildet, so daß es in der Natur zu jeder Mächtigkeit eine nächst größere gibt, aber auch auf jede ohne Ende steigende Menge von Mächtigkeiten eine nächst größere folgt [1].

Die „Mächtigkeiten" repräsentieren die einzige und notwendige Verallgemeinerung der endlichen „Kardinalzahlen", sie sind nichts anderes als die aktual-unendlich-großen Kardinalzahlen, und es kommt ihnen dieselbe Realität und Bestimmtheit zu wie jenen; nur daß die gesetzmäßigen Beziehungen unter ihnen, die auf sie bezügliche „Zahlentheorie" zum Teil eine andersartige ist als im Gebiete des Endlichen.

Die weitere Erschließung dieses Feldes ist Aufgabe der Zukunft.

[Anmerkungen.]

Diese Arbeit bringt zum erstenmal den klassischen Beweis für die Tatsache $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$ (in der Schreibweise der Kardinalzahlen) vermittels des „Cantorschen Diagonalverfahrens". Um ihn für $\mathfrak{m} = \aleph_0 = \mathfrak{a}$ auf die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums anzuwenden, braucht man noch den Nachweis, daß sich das Kontinuum eineindeutig auf die Menge der *formal verschiedenen* Dualbrüche abbilden läßt, obwohl doch jede dyadische Ra-

tionalzahl $\frac{p}{2^n}$ nicht eine, sondern *zwei* dyadische Darstellungen (mit lauter Nullen oder lauter Einsen am Ende) gestattet. Da aber diese Dualzahlen selbst eine *abzählbare* Menge bilden und das Kontinuum selbst abzählbare Teilmengen besitzt, so ergibt sich in derselben abgekürzten Schreibweise

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = 2^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}.$$

Vgl. die hier folgende Abhandlung III 9, § 4, S. 288.

[1] Zu S. 280 dritter Absatz: Daß die Gesamtheit aller Mächtigkeiten ein wohlgeordnetes System (wenn auch nicht eine „Menge") bildet, wird an der zitierten Stelle keineswegs „bewiesen", da bei Cantor der Nachweis noch fehlt, daß jede Menge einer Wohlordnung fähig und daher jede Mächtigkeit ein Alef ist.

9. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre[1].

[Math. Annalen Bd. 46 S. 481—512 (1895); Bd. 49, S. 207—246 (1897).]

„Hypotheses non fingo.“ [Newton.]

„Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus.“

„Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia.“

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Kardinalzahl.

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M = \{m\}. \tag{1}$$

Die Vereinigung mehrerer Mengen $M, N, P, \ldots$, die keine gemeinsamen Elemente haben, zu einer einzigen bezeichnen wir mit

$$(M, N, P, \ldots). \tag{2}$$

Die Elemente dieser Menge sind also die Elemente von M, von N, von P etc. zusammengenommen.

„Teil“ oder „Teilmenge“ einer Menge M nennen wir jede *andere* Menge M_1, deren Elemente zugleich Elemente von M sind [1].

Ist M_2 ein Teil von M_1, M_1 ein Teil von M, so ist auch M_2 ein Teil von M.

Jeder Menge M kommt eine bestimmte „Mächtigkeit“ zu, welche wir auch ihre „Kardinalzahl“ nennen.

„Mächtigkeit“ oder „Kardinalzahl“ von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird.

Das Resultat dieses zweifachen Abstraktionsakts, die Kardinalzahl oder Mächtigkeit von M, bezeichnen wir mit

$$\overline{\overline{M}}. \tag{3}$$

---

[1] [Anmerkung des Herausgebers s. S. 351—356.]

Da aus jedem einzelnen Elemente m, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine „Eins“ wird, so ist die Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellektuelles Abbild oder Projektion der gegebenen Menge M in unserm Geiste Existenz hat.

Zwei Mengen M und N nennen wir „äquivalent“ und bezeichnen dies mit

$$M \sim N \quad \text{oder} \quad N \sim M, \tag{4}$$

wenn es möglich ist, dieselben gesetzmäßig in eine derartige Beziehung zueinander zu setzen, daß jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der andern entspricht.

Jedem Teil M_1 von M entspricht alsdann ein bestimmter äquivalenter Teil N_1 von N und umgekehrt.

Hat man ein solches Zuordnungsgesetz zweier äquivalenten Mengen, so läßt sich dasselbe (abgesehen von dem Falle, daß jede von ihnen aus nur einem Elemente besteht) mannigfach modifizieren. Namentlich kann stets die Vorsorge getroffen werden, daß einem besonderen Elemente m_0 von M irgendein besonderes Element n_0 von N entspricht. Denn entsprechen bei dem anfänglichen Gesetze die Elemente m_0 und n_0 noch nicht einander, vielmehr dem Elemente m_0 von M das Element n_1 von N, dem Elemente n_0 von N das Element m_1 von M, so nehme man das modifizierte Gesetz, wonach m_0 und n_0 und ebenso m_1 und n_1 entsprechende Elemente beider Mengen werden, an den übrigen Elementen jedoch das erste Gesetz erhalten bleibt. Hierdurch ist jener Zweck erreicht.

Jede Menge ist sich selbst äquivalent:

$$M \sim M. \tag{5}$$

Sind zwei Mengen einer dritten äquivalent, so sind sie auch unter einander äquivalent:

$$\textit{aus} \quad M \sim P \quad \textit{und} \quad N \sim P \quad \textit{folgt} \quad M \sim N. \tag{6}$$

Von fundamentaler Bedeutung ist es, *daß zwei Mengen M und N dann und nur dann dieselbe Kardinalzahl haben, wenn sie äquivalent sind:*

$$\textit{aus} \quad M \sim N \quad \textit{folgt} \quad \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}, \tag{7}$$

und

$$\textit{aus} \quad \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \quad \textit{folgt} \quad M \sim N. \tag{8}$$

Die Äquivalenz von Mengen bildet also das notwendige und untrügliche Kriterium für die Gleichheit ihrer Kardinalzahlen.

In der Tat bleibt nach der obigen Definition der Mächtigkeit die Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ungeändert, wenn an Stelle eines Elementes oder auch an Stelle mehrerer, selbst aller Elemente m von M je ein anderes Ding substituiert wird.

Ist nun $M \sim N$, so liegt ein Zuordnungsgesetz zugrunde, durch welches M und N gegenseitig eindeutig aufeinander bezogen sind; dabei entspreche dem Elemente m von M das Element n von N. Wir können uns alsdann an Stelle jedes Elementes m von M das entsprechende Element n von N substituiert denken, und es verwandelt sich dabei M in N ohne Änderung der Kardinalzahl; es ist folglich

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}. \tag{8}$$

Die Umkehrung des Satzes ergibt sich aus der Bemerkung, daß zwischen den Elementen von M und den verschiedenen Einsen ihrer Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältnis besteht. Denn es wächst gewissermaßen, wie wir sahen, $\overline{\overline{M}}$ so aus M heraus, daß dabei aus jedem Elemente m von M eine besondere Eins von $\overline{\overline{M}}$ wird. Wir können daher sagen, daß

$$M \sim \overline{\overline{M}}. \tag{9}$$

Ebenso ist $N \sim \overline{\overline{N}}$. Ist also $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, so folgt nach (6) $M \sim N$.

Wir heben noch den aus dem Begriff der Äquivalenz unmittelbar folgenden Satz hervor:

Sind $M, N, P, \ldots$ *Mengen, die keine gemeinsamen Elemente haben,* $M', N', P', \ldots$ *ebensolche jenen entsprechende Mengen, und ist*

$$M \sim M', \quad N \sim N', \quad P \sim P', \ldots,$$

so ist auch immer

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots).$$

§ 2.
Das „Größer" und „Kleiner" bei Mächtigkeiten.

Sind bei zwei Mengen M und N mit den Kardinalzahlen $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ und $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ die *zwei* Bedingungen erfüllt:

1) *es gibt keinen Teil von* M, *der mit* N *äquivalent ist,*

2) *es gibt einen Teil* N_1 *von* N, *so daß* $N_1 \sim M$,

so ist zunächst ersichtlich, daß dieselben erfüllt bleiben, wenn in ihnen M und N durch zwei denselben äquivalente Mengen M' und N' ersetzt werden; *sie drücken daher eine bestimmte Beziehung der Kardinalzahlen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zueinander aus.*

Ferner *ist die Äquivalenz von* M *und* N, *also die Gleichheit von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *ausgeschlossen*; denn wäre $M \sim N$, so hätte man, weil $N_1 \sim M$, auch $N_1 \sim N$ und es müßte wegen $M \sim N$ auch ein Teil M_1 von M existieren, so daß $M_1 \sim M$, also auch $M_1 \sim N$ wäre, was der Bedingung 1) widerspricht.

Drittens *ist die Beziehung von* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *eine solche, daß sie dieselbe Beziehung von* $\mathfrak{b}$ *zu* $\mathfrak{a}$ *unmöglich macht;* denn wenn in 1) und 2) die Rollen von M und N vertauscht werden, so entstehen daraus zwei Bedingungen, die jenen kontradiktorisch entgegengesetzt sind.

Wir drücken die durch 1) *und* 2) *charakterisierte Beziehung von* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *so aus, daß wir sagen:* $\mathfrak{a}$ *ist kleiner als* $\mathfrak{b}$, *oder auch:* $\mathfrak{b}$ *ist größer als* $\mathfrak{a}$, in Zeichen

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}. \tag{1}$$

Man beweist leicht, daß

$$\text{wenn} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \quad \text{dann immer} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{c}. \tag{2}$$

Ebenso folgt ohne weiteres aus jener Definition, daß, *wenn* P_1 *Teil einer Menge* P *ist, aus* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P_1}}$ *immer auch* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}$ *und aus* $\overline{\overline{P}} < \mathfrak{b}$ *immer auch* $\overline{\overline{P_1}} < \mathfrak{b}$ *sich ergibt.*

Wir haben gesehen, daß von den drei Beziehungen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$$

jede einzelne die beiden anderen ausschließt.

Dagegen versteht es sich keineswegs von selbst und dürfte an dieser Stelle unseres Gedankenganges kaum zu beweisen sein, daß bei irgend zwei Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *eine von jenen drei Beziehungen notwendig realisiert sein müsse.*

Erst später, wenn wir einen Überblick über die aufsteigende Folge der transfiniten Kardinalzahlen und eine Einsicht in ihren Zusammenhang gewonnen haben werden, wird sich die Wahrheit des Satzes ergeben:

A. „*Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei beliebige Kardinalzahlen, so ist entweder* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$."

Aufs einfachste lassen sich aus diesem Satze die folgenden ableiten, von denen wir aber vorläufig keinerlei Gebrauch machen dürfen:

B. „*Sind zwei Mengen* M *und* N *so beschaffen, daß* M *mit einem Teil* N_1 *von* N *und* N *mit einem Teil* M_1 *von* M *äquivalent ist, so sind auch* M *und* N *äquivalent*" [2].

C. „*Ist* M_1 *ein Teil einer Menge* M, M_2 *ein Teil der Menge* M_1, *und sind die Mengen* M *und* M_2 *äquivalent, so ist auch* M_1 *den Mengen* M *und* M_2 *äquivalent*".

D. „*Ist bei zwei Mengen* M *und* N *die Bedingung erfüllt, daß* N *weder mit* M *selbst, noch mit einem Teile von* M *äquivalent ist, so gibt es einen Teil* N_1 *von* N, *der mit* M *äquivalent ist.*"

E. „*Sind zwei Mengen* M *und* N *nicht äquivalent, und gibt es einen Teil* N_1 *von* N, *der mit* M *äquivalent ist, so ist kein Teil von* M *mit* N *äquivalent.*"

§ 3.
Die Addition und Multiplikation von Mächtigkeiten.

Die Vereinigung zweier Mengen M und N, die keine gemeinschaftlichen Elemente haben, wurde in § 1, (2) mit (M, N) bezeichnet. Wir nennen sie die „*Vereinigungsmenge von* M *und* N".

Sind M', N' zwei andere Mengen ohne gemeinschaftliche Elemente, und ist $M \sim M'$, $N \sim N'$, so sahen wir, daß auch

$$(M, N) \sim (M', N').$$

Daraus folgt, daß die Kardinalzahl von (M, N) nur von den Kardinalzahlen $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ abhängt.

Dies führt zur Definition der Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, indem wir setzen

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M, N)}}. \tag{1}$$

Da im Mächtigkeitsbegriff von der Ordnung der Elemente abstrahiert ist, so folgt ohne weiteres

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \tag{2}$$

und für je drei Kardinalzahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}. \tag{3}$$

Wir kommen zur Multiplikation.

Jedes Element m einer Menge M läßt sich mit jedem Elemente n einer andern Menge N zu einem neuen Elemente (m, n) verbinden; für die Menge aller dieser Verbindungen (m, n) setzen wir die Bezeichnung $(M \cdot N)$ fest. Wir nennen sie die „*Verbindungsmenge von M und N*". Es ist also

$$(M \cdot N) = \{(m, n)\}. \tag{4}$$

Man überzeugt sich, daß auch die Mächtigkeit von $(M \cdot N)$ nur von den Mächtigkeiten $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ abhängt; denn ersetzt man die Mengen M und N durch die ihnen äquivalenten Mengen

$$M' = \{m'\} \quad \text{und} \quad N' = \{n'\}$$

und betrachtet man m, m' sowie n, n' als zugeordnete Elemente, so wird die Menge

$$M' \cdot N' = \{(m', n')\}$$

dadurch in ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältnis zu $(M \cdot N)$ gebracht, daß man (m, n) und (m', n') als einander entsprechende Elemente ansieht; es ist also

$$(M' \cdot N') \sim (M \cdot N). \tag{5}$$

Wir definieren nun das Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M \cdot N)}}. \tag{6}$$

Eine Menge mit der Kardinalzahl $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ lässt sich aus zwei Mengen M und N mit den Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch nach folgender Regel herstellen: man gehe von der Menge N aus und ersetze in ihr jedes Element n durch eine Menge $M_n \sim M$; faßt man die Elemente aller dieser [unter sich elementefremder] Mengen M_n zu einem Ganzen S zusammen, so sieht man leicht, daß

$$S \sim (M \cdot N), \tag{7}$$

folglich

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$

Denn wird bei irgendeinem zugrunde liegenden Zuordnungsgesetze der beiden äquivalenten Mengen M und M_n das dem Elemente m von M entsprechende Element von M_n mit m_n bezeichnet, so hat man

$$S = \{m_n\}, \tag{8}$$

und es lassen sich daher die Mengen S und $(M \cdot N)$ dadurch gegenseitig eindeutig aufeinander beziehen, daß m_n und (m, n) als entsprechende Elemente angesehen werden.

Aus unseren Definitionen folgen leicht die Sätze:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}, \tag{11}$$

weil

$$(M \cdot N) \sim (N \cdot M),$$
$$(M \cdot (N \cdot P)) \sim ((M \cdot N) \cdot P),$$
$$(M \cdot (N, P)) \sim ((M \cdot N), (M \cdot P)).$$

Addition und Multiplikation von Mächtigkeiten unterliegen also allgemein dem kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetze.

§ 4.

Die Potenzierung von Mächtigkeiten.

Unter einer „*Belegung der Menge N mit Elementen der Menge M*" oder einfacher ausgedrückt, unter einer „*Belegung von N mit M*" verstehen wir ein Gesetz, durch welches mit jedem Elemente n von N je ein bestimmtes Element von M verbunden ist, wobei ein und dasselbe Element von M wiederholt zur Anwendung kommen kann. Das mit n verbundene Element von M ist gewissermaßen eine eindeutige Funktion von n und kann etwa mit $f(n)$ bezeichnet werden; sie heiße „*Belegungsfunktion* von n"; die entsprechende Belegung von N werde $f(N)$ genannt [3].

Zwei Belegungen $f_1(N)$ und $f_2(N)$ heißen dann und nur dann gleich, wenn *für alle Elemente n von N* die Gleichung erfüllt ist

$$f_1(n) = f_2(n), \tag{1}$$

so daß, wenn auch nur für ein einziges besonderes Element $n = n_0$ diese Gleichung *nicht* besteht, $f_1(N)$ und $f_2(N)$ als *verschiedene* Belegungen von N charakterisiert sind.

Beispielsweise kann, wenn m_0 ein besonderes Element von M ist, festgesetzt sein, daß für alle n

$$f(n) = m_0$$

sei; dieses Gesetz konstituiert eine besondere Belegung von N mit M.

Eine andere Art von Belegungen ergibt sich, wenn m_0 und m_1 zwei verschiedene besondere Elemente von M sind, n_0 ein besonderes Element von N ist, durch die Festsetzung

$$f(n_0) = m_0,$$
$$f(n) = m_1$$

für alle n, die von n_0 verschieden sind.

Die Gesamtheit aller verschiedenen Belegungen von N mit M bildet eine bestimmte Menge mit den Elementen $f(N)$; wir nennen sie die „*Belegungsmenge von N mit M*" und bezeichnen sie durch $(N \mid M)$. Es ist also

$$(N \mid M) = \{f(N)\}. \tag{2}$$

Ist $M \sim M'$ und $N \sim N'$, so findet man leicht, daß auch

$$(N \mid M) \sim (N' \mid M'). \tag{3}$$

Die Kardinalzahl von $(N \mid M)$ hängt also nur von den Kardinalzahlen $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ ab; sie dient uns zur Definition der Potenz $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(N \mid M)}}. \tag{4}$$

Für drei beliebige Mengen M, N und P beweist man leicht die Sätze:

$$((N \mid M) \cdot (P \mid M)) \sim ((N, P) \mid M), \tag{5}$$
$$((P \mid M) \cdot (P \mid N)) \sim (P \mid (M \cdot N)), \tag{6}$$
$$(P \mid (N \mid M)) \sim ((P \cdot N) \mid M), \tag{7}$$

aus denen, wenn $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}$ gesetzt wird, auf grund von (4) und im Hinblick auf § 3 die für drei beliebige Kardinalzahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gültigen Sätze sich ergeben

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}, \tag{8}$$
$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}, \tag{9}$$
$$(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}. \tag{10}$$

Wie inhaltreich und weittragend diese einfachen auf die Mächtigkeiten ausgedehnten Formeln sind, erkennt man an folgendem Beispiel:

Bezeichnen wir die Mächtigkeit des Linearkontinuums X (d. h. des Inbegriffs X aller reellen Zahlen x, die ≥ 0 und ≤ 1 sind) mit $\mathfrak{o}$, so überzeugt man sich leicht, daß sie sich unter anderm durch die Formel

$$\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \tag{11}$$

darstellen läßt, wo über die Bedeutung von $\aleph_0$ der § 6 Aufschluss gibt.

In der Tat ist $2^{\aleph_0}$ nach (4) nichts anderes als die Mächtigkeit aller Darstellungen

$$x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \cdots \qquad (\text{wo } f(\nu) = 0 \quad \text{oder} \quad 1) \tag{12}$$

der Zahlen x im Zweiersystem. Beachten wir hierbei, daß jede Zahl x nur einmal zur Darstellung kommt mit Ausnahme der Zahlen $x = \dfrac{2\nu+1}{2^\mu} < 1$, die zweimal dargestellt

werden, so haben wir, wenn wir die „abzählbare" Gesamtheit der letzteren mit $\{s_\nu\}$ bezeichnen, zunächst

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_\nu\}, X)}}.$$

Hebt man aus X irgendeine „abzählbare" Menge $\{t_\nu\}$ heraus und bezeichnet den Rest mit X_1, so ist

$$X = (\{t_\nu\}, X_1) = (\{t_{2\nu-1}\}, \{t_{2\nu}\}, X_1),$$
$$(\{s_\nu\}, X) = (\{s_\nu\}, \quad \{t_\nu\}, \quad X_1),$$
$$\{t_{2\nu-1}\} \sim \{s_\nu\}, \quad \{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\}, \quad X_1 \sim X_1,$$

mithin

$$X \sim (\{s_\nu\}, X),$$

also (§ 1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}.$$

Aus (11) folgt durch Quadrieren nach (§ 6, (6))

$$\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

und hieraus durch fortgesetzte Multiplikation mit $\mathfrak{o}$

$$\mathfrak{o}^\nu = \mathfrak{o}, \tag{13}$$

wo ν irgendeine endliche Kardinalzahl ist.

Erhebt man beide Seiten von (11) zur Potenz $\aleph_0$, so erhält man

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}.$$

Da aber nach § 6, (8) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, so ist

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = \mathfrak{o}. \tag{14}$$

Die Formeln (13) und (14) haben aber keine andere Bedeutung als diese: „Das ν-dimensionale sowohl, wie das $\aleph_0$-dimensionale Kontinuum haben die Mächtigkeit des eindimensionalen Kontinuums." Es wird also *der ganze Inhalt* der Arbeit im 84ten Bande des Crelle'schen Journals, S. 242 [III 2, S. 119] *mit diesen wenigen Strichen* aus den *Grundformeln des Rechnens mit Mächtigkeiten* rein algebraisch abgeleitet.

§ 5.

Die endlichen Kardinalzahlen. [4]

Es soll zunächst gezeigt werden, wie die dargelegten Prinzipien, auf welchen später die Lehre von den aktual unendlichen oder transfiniten Kardinalzahlen aufgebaut werden soll, auch die natürlichste, kürzeste und strengste Begründung der endlichen Zahlenlehre liefern.

Einem einzelnen Ding e_0, wenn wir es unter den Begriff einer Menge $E_0 = (e_0)$ subsumieren, entspricht als Kardinalzahl das, was wir „Eins" nennen und mit 1 bezeichnen; wir haben

$$1 = \overline{\overline{E}}_0. \tag{1}$$

Man vereinige nun mit E_0 ein anderes Ding e_1, die Vereinigungsmenge heiße E_1, so daß

$$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1). \tag{2}$$

Die Kardinalzahl von E_1 heißt „Zwei" und wird mit 2 bezeichnet:

$$2 = \overline{\overline{E}}_1. \tag{3}$$

Durch Hinzufügung neuer Elemente erhalten wir die Reihe der Mengen

$$E_2 = (E_1, e_2), \quad E_3 = (E_2, e_3), \ldots,$$

welche in unbegrenzter Folge uns sukzessive die übrigen, mit $3, 4, 5, \ldots$ bezeichneten, sogenannten *endlichen Kardinalzahlen* liefern. Die hierbei vorkommende hilfsweise Verwendung derselben Zahlen als Indizes rechtfertigt sich daraus, daß eine Zahl erst dann in dieser Bedeutung gebraucht wird, nachdem sie als Kardinalzahl definiert worden ist. Wir haben, wenn unter $\nu - 1$ die der Zahl ν in jener Reihe nächstvorangehende verstanden wird,

$$\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}, \tag{4}$$

$$E_\nu = (E_{\nu-1}, e_\nu) = (e_0, e_1, \ldots e_\nu). \tag{5}$$

Aus der Summendefinition in § 3 folgt

$$\overline{\overline{E}}_\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} + 1, \tag{6}$$

d. h. jede endliche Kardinalzahl (außer 1) ist die Summe aus der nächst vorhergehenden und 1.

Bei unserm Gedankengange treten nun folgende drei Sätze in den Vordergrund:

A. „*Die Glieder der unbegrenzten Reihe endlicher Kardinalzahlen*

$$1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$$

sind alle untereinander verschieden (d. h. die in § 1 aufgestellte Äquivalenzbedingung ist an den entsprechenden Mengen nicht erfüllt)".

B. „*Jede dieser Zahlen ν ist größer als die ihr vorangehenden und kleiner als die auf sie folgenden* (§ 2)."

C. „*Es gibt keine Kardinalzahlen, welche ihrer Größe nach zwischen zwei benachbarten ν und $\nu + 1$ lägen* (§ 2)."

Die Beweise dieser Sätze stützen wir auf die zwei folgenden D und E, welche daher zunächst zu erhärten sind.

D. „*Ist M eine Menge von solcher Beschaffenheit, daß sie mit keiner von ihren Teilmengen gleiche Mächtigkeit hat, so hat auch die Menge (M, e), welche aus M durch Hinzufügung eines einzigen neuen Elementes e hervorgeht, dieselbe Beschaffenheit, mit keiner von ihren Teilmengen gleiche Mächtigkeit zu haben.*"

E. „*Ist N eine Menge mit der endlichen Kardinalzahl ν, N_1 irgendeine Teilmenge von N, so ist die Kardinalzahl von N_1 gleich einer der vorangehenden Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$.*"

Beweis von D. Nehmen wir an, es hätte die Menge (M, e) mit einer ihrer Teilmengen, wir wollen sie N nennen, gleiche Mächtigkeit, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, die beide auf einen Widerspruch führen:

1) Die Menge N enthält e als Element; es sei $N = (M_1, e)$; dann ist M_1 ein Teil von M, weil N ein Teil von (M, e) ist. Wie wir in § 1 sahen, läßt sich das Zuordnungsgesetz der beiden äquivalenten Mengen (M, e) und (M_1, e) so modifizieren, daß das Element e der einen demselben Element e der andern entspricht; alsdann sind von selbst auch M und M_1 gegenseitig eindeutig aufeinander bezogen. Dies streitet aber gegen die Voraussetzung, daß M mit seinem Teile M_1 nicht gleiche Mächtigkeit hat.

2) Die Teilmenge N von (M, e) enthält e nicht als Element, dann ist N entweder M oder ein Teil von M. Bei dem zugrunde liegenden Zuordnungsgesetze zwischen (M, e) und N möge das Element e der ersteren dem Elemente f der letzteren entsprechen. Sei $N = (M_1, f)$; dann wird gleichzeitig die Menge M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu M_1 gesetzt sein; M_1 ist aber als Teil von N jedenfalls auch ein Teil von M. Es wäre auch hier M einem seiner Teile äquivalent, gegen die Voraussetzung.

Beweis von E. Es werde die Richtigkeit des Satzes bis zu einem gewissen ν vorausgesetzt und dann auf die Gültigkeit für das nächstfolgende $\nu + 1$ wie folgt geschlossen.

Als Menge mit der Kardinalzahl $\nu + 1$ werde $E_\nu = (e_0, e_1, \ldots e_\nu)$ zugrunde gelegt; ist der Satz für diese richtig, so folgt ohne weiteres (§ 1) auch seine Gültigkeit für jede andere Menge mit derselben Kardinalzahl $\nu + 1$. Sei E' irgendein Teil von E_ν; wir unterscheiden folgende Fälle:

1) E' enthält e_ν nicht als Element, dann ist E' entweder $E_{\nu-1}$ oder ein Teil von $E_{\nu-1}$, hat also zur Kardinalzahl entweder ν oder eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$, weil wir ja unsern Satz als richtig für die Menge $E_{\nu-1}$ mit der Kardinalzahl ν voraussetzen.

2) E' besteht aus dem einzigen Element e_ν, dann ist $\overline{\overline{E'}} = 1$.

3) E' besteht aus e_ν und einer Menge E'', so daß $E' = (E'', e_\nu)$. E'' ist ein Teil von $E_{\nu-1}$, hat also vorausgesetztermaßen zur Kardinalzahl eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$.

Nun ist aber $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E''}} + 1$, daher hat E' zur Kardinalzahl eine der Zahlen $2, 3, \ldots \nu$.

Beweis von A. Jede der von uns mit E_ν bezeichneten Mengen hat die Beschaffenheit, mit keiner ihrer Teilmengen äquivalent zu sein. Denn nimmt man an, daß dies für ein gewisses ν richtig sei, so folgt aus dem Satze D dasselbe für das nächstfolgende $\nu + 1$.

Für $\nu = 1$ erkennt man aber unmittelbar, daß die Menge $E_1 = (e_0, e_1)$ keiner ihrer Teilmengen, die hier (e_0) und (e_1) sind, äquivalent ist.

Betrachten wir nun irgend zwei Zahlen μ und ν der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ und ist μ die frühere, ν die spätere, so ist $E_{\mu-1}$ eine Teilmenge von $E_{\nu-1}$; es sind daher $E_{\mu-1}$ und $E_{\nu-1}$ nicht äquivalent; die zugehörigen Kardinalzahlen $\mu = \overline{\overline{E}}_{\mu-1}$ und $\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}$ sind somit nicht gleich.

Beweis von B. Ist von den beiden endlichen Kardinalzahlen μ und ν die erste die frühere, die zweite die spätere, so ist $\mu < \nu$. Denn betrachten wir die beiden Mengen $M = E_{\mu-1}$ und $N = E_{\nu-1}$, so ist an ihnen jede der beiden Bedingungen in § 2 für $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ erfüllt. Die Bedingung 1) ist erfüllt, weil nach Satz E eine Teilmenge von $M = E_{\mu-1}$ nur eine von den Kardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \mu - 1$ haben, also der Menge $N = E_{\nu-1}$ nach Satz A nicht äquivalent sein kann. Die Bedingung 2) ist erfüllt, weil hier M selbst ein Teil von N ist.

Beweis von C. Sei $\mathfrak{a}$ eine Kardinalzahl, die kleiner ist als $\nu + 1$. Wegen der Bedingung 2) des § 2 gibt es eine Teilmenge von E_ν mit der Kardinalzahl $\mathfrak{a}$. Nach Satz E kommt einer Teilmenge von E_ν nur eine der Kardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$ zu.

Es ist also $\mathfrak{a}$ gleich einer von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$.

Nach Satz B ist keine von diesen größer als ν.

Folglich gibt es keine Kardinalzahl $\mathfrak{a}$, die kleiner als $\nu + 1$ und größer als ν wäre.

Von Bedeutung für das Spätere ist folgender Satz:

F. „*Ist K irgendeine Menge von verschiedenen endlichen Kardinalzahlen, so gibt es unter ihnen eine $\varkappa_1$, die kleiner als die übrigen, also die kleinste von allen ist.*"

Beweis. Die Menge K enthält entweder die Zahl 1, dann ist diese die kleinste, $\varkappa_1 = 1$; oder nicht. Im letzteren Falle sei J der Inbegriff *aller* derjenigen Kardinalzahlen unsrer Reihe $1, 2, 3, \ldots$, welche kleiner sind als die in K vorkommenden. Gehört eine Zahl ν zu J, so gehören auch alle Zahlen $< \nu$ zu J. Es muß aber J ein Element ν_1 haben, so daß $\nu_1 + 1$ und folglich auch alle größeren Zahlen nicht zu J gehören, weil sonst J die Gesamtheit aller endlichen Zahlen umfassen würde, während doch die zu K gehörigen Zahlen nicht in J enthalten sind. J ist also nichts anderes als der Abschnitt $(1, 2, 3, \ldots \nu_1)$. Die Zahl $\nu_1 + 1 = \varkappa_1$ ist notwendig ein Element von K und kleiner als die übrigen.

Aus F schließt man auf:

G. „*Jede Menge $K = \{\varkappa\}$ von verschiedenen endlichen Kardinalzahlen läßt sich in die Reihenform*

$$K = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots)$$

bringen, so daß

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 \ldots\text{“}$$

§ 6.

Die kleinste transfinite Kardinalzahl Alef-null [5].

Die Mengen mit endlicher Kardinalzahl heißen „*endliche Mengen*", alle anderen wollen wir „*transfinite Mengen*" und die ihnen zukommenden Kardinalzahlen „*transfinite Kardinalzahlen*" nennen.

Die Gesamtheit *aller endlichen Kardinalzahlen ν* bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Kardinalzahl (§ 1) „*Alef-null*", in Zeichen $\aleph_0$, definieren also

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}. \tag{1}$$

Daß $\aleph_0$ eine *transfinite* Zahl, d. h. *keiner endlichen* Zahl μ *gleich* ist, folgt aus der einfachen Tatsache, daß, wenn zu der Menge $\{\nu\}$ ein neues Element e_0 hinzugefügt wird, die Vereinigungsmenge $(\{\nu\}, e_0)$ der ursprünglichen $\{\nu\}$ äquivalent ist. Denn es läßt sich zwischen beiden die gegenseitig eindeutige Beziehung denken, wonach dem Elemente e_0 der ersten das Element 1 der zweiten, dem Element ν der ersten das Element $\nu + 1$ der andern entspricht. Nach § 3 haben wir daher

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0. \tag{2}$$

In § 5 wurde aber gezeigt, daß (für endliches μ) $\mu + 1$ stets von μ verschieden ist, daher ist $\aleph_0$ keiner endlichen Zahl μ gleich.

Die Zahl $\aleph_0$ ist größer als jede endliche Zahl μ:

$$\aleph_0 > \mu. \tag{3}$$

Dies folgt im Hinblick auf § 3 daraus, daß $\mu = \overline{\overline{(1, 2, 3, \ldots \mu)}}$, kein Teil der Menge $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ äquivalent der Menge $\{\nu\}$ und daß $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ selbst ein Teil von $\{\nu\}$ ist.

Andrerseits ist $\aleph_0$ *die kleinste transfinite Kardinalzahl.*

Ist $\mathfrak{a}$ irgendeine von $\aleph_0$ verschiedene transfinite Kardinalzahl, so ist immer

$$\aleph_0 < \mathfrak{a}. \tag{4}$$

Dies beruht auf folgenden Sätzen:

A. „*Jede transfinite Menge T hat Teilmengen mit der Kardinalzahl $\aleph_0$.*"

Beweis. [6] Hat man nach irgendeiner Regel eine endliche Zahl von Elementen $t_1, t_2, \ldots t_{\nu-1}$ aus T entfernt, so bleibt stets die Möglichkeit, ein ferneres Element t_ν herauszunehmen. Die Menge $\{t_\nu\}$, worin ν eine beliebige endliche Kardinalzahl bedeutet, ist eine Teilmenge von T mit der Kardinalzahl $\aleph_0$, weil $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§ 1).

B. „*Ist S eine transfinite Menge mit der Kardinalzahl $\aleph_0$, S_1 irgendeine transfinite Teilmenge von S, so ist auch $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.*"

Beweis. Vorausgesetzt ist, daß $S \sim \{\nu\}$; bezeichnen wir unter Zugrundelegung eines Zuordnungsgesetzes zwischen diesen beiden Mengen mit s_ν dasjenige Element von S, welches dem Elemente ν von $\{\nu\}$ entspricht, so ist

$$S = \{s_\nu\}.$$

Die Teilmenge S_1 von S besteht aus gewissen Elementen $s_\varkappa$ von S, und die Gesamtheit aller Zahlen $\varkappa$ bildet einen transfiniten Teil K der Menge $\{\nu\}$.

Nach Satz G, § 5 läßt sich die Menge K in die Reihenform bringen

$$K = \{\varkappa_\nu\},$$

wo

$$\varkappa_\nu < \varkappa_{\nu+1},$$

folglich ist auch

$$S_1 = \{s_{\varkappa_\nu}\}.$$

Daraus folgt, daß $S_1 \sim S$, mithin $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.

Aus A und B ergibt sich die Formel (4) im Hinblick auf § 2.

Aus (2) schließt man durch Hinzufügung von 1 auf beiden Seiten

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

und indem man diese Betrachtung wiederholt,

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0. \tag{5}$$

Wir haben aber auch

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \tag{6}$$

Denn nach (1) § 3 ist $\aleph_0 + \aleph_0$ die Kardinalzahl $\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}}$, weil

$$\overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}} = \aleph_0.$$

Nun hat man offenbar

$$\{\nu\} = (\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}),$$
$$(\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}),$$

also

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0.$$

Die Gleichung (6) kann auch so geschrieben werden:

$$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0,$$

und indem man zu beiden Seiten wiederholt $\aleph_0$ addiert, findet man, daß

$$\aleph_0 \cdot \nu = \nu \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \tag{7}$$

Wir haben aber auch

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \tag{8}$$

Beweis [7]. Nach (6) des § 3 ist $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ die der Verbindungsmenge

$$\{(\mu, \nu)\}$$

zukommende Kardinalzahl, wo μ und ν unabhängig voneinander zwei beliebige endliche Kardinalzahlen sind. Ist auch λ Repräsentant einer beliebigen endlichen Kardinalzahl (so daß $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ und $\{\nu\}$ nur verschiedene Bezeichnungen für dieselbe Gesamtheit aller endlichen Kardinalzahlen sind), so haben wir zu zeigen, daß

$$\{(\mu, \nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Bezeichnen wir $\mu + \nu$ mit ϱ, so nimmt ϱ die sämtlichen Zahlenwerte $2, 3, 4, \ldots$ an, und es gibt im ganzen $\varrho - 1$ Elemente (μ, ν), für welche

$\mu + \nu = \varrho$, nämlich diese:

$$(1, \varrho - 1), \quad (2, \varrho - 2), \ldots (\varrho - 1, 1).$$

In dieser Reihenfolge denke man sich zuerst das eine Element $(1, 1)$ gesetzt, für welches $\varrho = 2$, dann die beiden Elemente, für welche $\varrho = 3$, dann die drei Elemente, für welche $\varrho = 4$ usw., so erhält man sämtliche Elemente (μ, ν) in einfacher Reihenform:

$$(1, 1); \quad (1, 2), (2, 1); \quad (1, 3), (2, 2), (3, 1); \quad (1, 4), (2, 3), \ldots,$$

und zwar kommt hier, wie man leicht sieht, das Element (μ, ν) an die λ^{te} Stelle, wo

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}. \tag{9}$$

λ nimmt jeden Zahlwert $1, 2, 3, \ldots$ einmal an; es besteht also vermöge (9) eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen den beiden Mengen $\{\lambda\}$ und $\{(\mu, \nu)\}$.

Werden die beiden Seiten der Gleichung (8) mit $\aleph_0$ multipliziert, so erhält man $\aleph_0{}^3 = \aleph_0{}^2 = \aleph_0$ und durch wiederholte Multiplikation mit $\aleph_0$ die für jede endliche Kardinalzahl ν gültige Gleichung:

$$\aleph_0^\nu = \aleph_0. \tag{10}$$

Die Sätze E und A des § 5 führen zu dem Satze über *endliche* Mengen:

C. „*Jede endliche Menge E ist so beschaffen, daß sie mit keiner von ihren Teilmengen äquivalent ist.*“

Diesem Satz steht scharf der folgende für *transfinite* Mengen gegenüber:

D. „*Jede transfinite Menge T ist so beschaffen, daß sie Teilmengen T_1 hat, die ihr äquivalent sind* [8].“

Beweis. Nach Satz A dieses Paragraphen gibt es eine Teilmenge $S = \{t_\nu\}$ von T mit der Kardinalzahl $\aleph_0$. Sei $T = (S, U)$, so daß U aus denjenigen Elementen von T zusammengesetzt ist, welche von den Elementen t_ν verschieden sind. Setzen wir $S_1 = \{t_{\nu+1}\}$, $T_1 = (S_1, U)$, so ist T_1 eine Teilmenge von T, und zwar die durch Fortlassung des einzigen Elementes t_1 aus T hervorgehende. Da $S \sim S_1$ (Satz B dieses Paragraphen) und $U \sim U$, so ist auch (§ 1) $T \sim T_1$.

In diesen Sätzen C und D tritt die wesentliche Verschiedenheit von endlichen und transfiniten Mengen am deutlichsten zutage, auf welche bereits im Jahre 1877 im 84sten Bande des Crelle'schen Journals S. 242 [III 2, S. 119] hingewiesen wurde.

Nachdem wir die kleinste transfinite Kardinalzahl $\aleph_0$ eingeführt und ihre nächstliegenden Eigenschaften abgeleitet haben, entsteht die Frage nach den höheren Kardinalzahlen und ihrem Hervorgang aus $\aleph_0$.

Es soll gezeigt werden, daß die transfiniten Kardinalzahlen sich nach ihrer Größe ordnen lassen und in dieser Ordnung wie die endlichen, jedoch in einem erweiterten Sinne eine „*wohlgeordnete Menge*“ bilden. [9]

Aus $\aleph_0$ geht nach einem bestimmten Gesetze die *nächstgrößere* Kardinalzahl $\aleph_1$, aus dieser nach demselben Gesetze die *nächstgrößere* $\aleph_2$ hervor, und so geht es weiter.

Aber auch die unbegrenzte Folge der Kardinalzahlen

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

erschöpft nicht den Begriff der transfiniten Kardinalzahl. Es wird die Existenz einer Kardinalzahl nachgewiesen werden, die wir mit $\aleph_\omega$ bezeichnen und welche sich als die zu *allen* $\aleph_\nu$ *nächstgrößere* ausweist; aus ihr geht in derselben Weise wie $\aleph_1$ aus $\aleph_0$ eine nächstgrößere $\aleph_{\omega+1}$ hervor, und so geht es ohne Ende fort.

Zu *jeder transfiniten Kardinalzahl* $\mathfrak{a}$ gibt es eine nach einheitlichem Gesetz aus ihr hervorgehende *nächstgrößere*; aber auch zu jeder unbegrenzt aufsteigenden wohlgeordneten Menge $\{\mathfrak{a}\}$ von transfiniten Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ gibt es eine *nächstgrößere*, einheitlich daraus hervorgehende.

Zur strengen Begründung dieses im Jahre 1882 gefundenen und in dem Schriftchen „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre", sowie im 21. Bande der Math. Annalen [III 4, Nr. 5, § 11—13] ausgesprochenen Sachverhaltes bedienen wir uns der sogenannten „*Ordnungstypen*", deren Theorie wir zunächst in den folgenden Paragraphen auseinanderzusetzen haben.

§ 7.

Die Ordnungstypen einfach geordneter Mengen. [10]

Eine Menge M nennen wir „*einfach geordnet*", wenn unter ihren Elementen m eine bestimmte „*Rangordnung*" herrscht, in welcher von je zwei beliebigen Elementen m_1 und m_2 das eine den „*niedrigeren*", das andere den „*höheren*" Rang einnimmt, und zwar so, daß wenn von drei Elementen m_1, m_2 und m_3 etwa m_1 dem Range nach niedriger ist als m_2, dieses niedriger als m_3, alsdann auch immer m_1 niedrigeren Rang hat als m_3.

Die Beziehung zweier Elemente m_1 und m_2, bei welcher m_1 den niedrigeren, m_2 den höheren Rang in der gegebenen Rangordnung hat, soll durch die Formeln ausgedrückt werden

$$m_1 \prec m_2, \quad m_2 \succ m_1. \tag{1}$$

So ist beispielsweise jede in einer unendlichen Geraden definierte Punktmenge P eine einfach geordnete Menge, wenn von zwei zu ihr gehörigen Punkten p_1 und p_2 demjenigen der niedrigere Rang zugewiesen wird, dessen Koordinate (unter Zugrundelegung eines Nullpunktes und einer positiven Richtung) die kleinere ist.

Es leuchtet ein, daß eine und dieselbe Menge nach den verschiedensten Gesetzen „einfach geordnet" werden kann. Nehmen wir zum Beispiel die Menge R aller positiven rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ (wo p und q teilerfremd seien), die größer als 0 und kleiner als 1 sind, so hat man einmal ihre „natürliche" Rangordnung der Größe nach. Dann lassen sie sich aber auch etwa so ordnen (und in dieser Ordnung wollen wir die Menge mit R_0 bezeichnen), daß von zwei Zahlen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$, bei denen die Summen $p_1 + q_1$ und $p_2 + q_2$ verschiedene Werte haben, diejenige Zahl den niedrigeren Rang erhält, für welche die betreffende Summe die kleinere ist, und daß wenn $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$, alsdann die kleinere der beiden rationalen Zahlen die niedrigere sei.

In dieser Rangordnung hat unsere Menge, da zu einem und demselben Wert von $p + q$ immer nur eine endliche Anzahl von verschiedenen rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ gehört, offenbar die Form

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots\right),$$

wo

$$r_\nu \prec r_{\nu+1}.$$

Stets also, wenn wir von einer *einfach geordneten* Menge M sprechen, denken wir uns eine *bestimmte Rangordnung* ihrer Elemente in dem erklärten Sinne zugrunde gelegt.

Es gibt zweifach, dreifach, ν-fach, α-fach geordnete Mengen, von diesen sehen wir aber vorläufig in unserer Untersuchung ab. Daher sei es uns auch erlaubt, im folgenden den kürzeren Ausdruck „geordnete Menge" zu gebrauchen, während wir die „einfach geordnete Menge" im Sinne haben.

Jeder geordneten Menge M kommt ein bestimmter „*Ordnungstypus*" oder kürzer ein bestimmter „*Typus*" zu, den wir mit

$$\overline{M} \tag{2}$$

bezeichnen wollen; hierunter verstehen wir *den Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergibt, wenn wir nur von der Beschaffenheit der Elemente m abstrahieren, die Rangordnung unter ihnen aber beibehalten.*

Darnach ist der Ordnungstypus $\overline{M}$ *selbst eine geordnete Menge*, deren Elemente *lauter Einsen* sind, die dieselbe Rangordnung untereinander haben wie die entsprechenden Elemente von M, aus denen sie durch Abstraktion hervorgegangen sind.

Zwei geordnete Mengen M und N nennen wir „*ähnlich*", wenn sie sich gegenseitig eindeutig einander so zuordnen lassen, daß wenn m_1 und m_2 irgend zwei Elemente von M, n_1 und n_2 die entsprechenden Elemente von N sind, alsdann immer die Rangbeziehung von m_1 *zu* m_2 innerhalb M dieselbe ist wie die von n_1 zu n_2 innerhalb N. Eine solche Zuordnung ähnlicher Mengen nennen wir eine „Abbildung" derselben aufeinander. Dabei entspricht jeder Teilmenge M_1 von M (die offenbar auch als geordnete Menge erscheint) eine ihr ähnliche Teilmenge N_1 von N.

Die Ähnlichkeit zweier geordneten Mengen M und N drücken wir durch die Formel aus

$$M \simeq N. \tag{3}$$

Jede geordnete Menge ist sich selbst ähnlich.

Sind zwei geordnete Mengen einer dritten ähnlich, so sind sie auch einander ähnlich.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß *zwei geordnete Mengen dann und nur dann denselben Ordnungstypus haben, wenn sie ähnlich sind, so daß von den beiden Formeln*

$$\overline{M} = \overline{N}, \quad M \simeq N \tag{4}$$

immer die eine eine Folge der andern ist.

Abstrahiert man an einem Ordnungstypus $\overline{M}$ auch noch von der Rangordnung der Elemente, so erhält man (§ 1) die Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ der geordneten Menge M, welche zugleich Kardinalzahl des Ordnungstypus $\overline{M}$ ist.

Aus $\overline{M} = \overline{N}$ folgt immer $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, d. h. geordnete Mengen von gleichem Typus haben immer dieselbe Mächtigkeit oder Kardinalzahl; die Ähnlichkeit geordneter Mengen begründet stets ihre Äquivalenz. Hingegen können zwei geordnete Mengen äquivalent sein, ohne ähnlich zu sein.

Wir werden zur Bezeichnung der Ordnungstypen die kleinen Buchstaben des griechischen Alphabets gebrauchen.

Ist α ein Ordnungstypus, so verstehen wir unter

$$\overline{\alpha} \tag{5}$$

die zugehörige Kardinalzahl.

Die Ordnungstypen endlicher einfach geordneter Mengen bieten kein besonderes Interesse. Denn man überzeugt sich leicht, daß für eine und dieselbe endliche Kardinalzahl ν alle einfach geordneten Mengen einander ähnlich sind, also einen und denselben Typus haben. Die endlichen einfachen Ordnungstypen sind daher denselben Gesetzen unterworfen wie die endlichen Kardinalzahlen, und es wird erlaubt sein, für sie dieselben Zeichen $1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$ zu gebrauchen, wenn sie auch begrifflich von den Kardinalzahlen verschieden sind.

Ganz anders verhält es sich mit den *transfiniten Ordnungstypen;* denn zu einer und derselben transfiniten Kardinalzahl gibt es unzählig viele verschiedene Typen einfach geordneter Mengen, die in ihrer Gesamtheit eine besondere „*Typenklasse*" konstituieren.

Jede dieser Typenklassen ist also bestimmt durch die transfinite Kardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche allen einzelnen zur Klasse gehörigen Typen gemeinsam ist; wir nennen sie daher kurz Typenklasse $[\mathfrak{a}]$.

Diejenige von ihnen, welche sich uns naturgemäß zuerst darbietet, und deren vollständige Erforschung daher auch das nächste besondere Ziel der

transfiniten Mengenlehre sein muß, ist die Typenklasse $[\aleph_0]$, welche alle Typen mit der kleinsten transfiniten Kardinalzahl $\aleph_0$ umfaßt.

Wir haben zu unterscheiden von der Kardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche die Typenklasse $[\mathfrak{a}]$ *bestimmt*, diejenige Kardinalzahl $\mathfrak{a}'$, welche *ihrerseits durch die Typenklasse* $[\mathfrak{a}]$ *bestimmt ist;* es ist die Kardinalzahl, welche (§ 1) der Typenklasse $[\mathfrak{a}]$ zukommt, sofern sie eine *wohldefinierte Menge* darstellt, *deren Elemente die sämtlichen Typen* α *mit der Kardinalzahl* $\mathfrak{a}$ *sind.* Wir werden sehen, daß $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ verschieden, und zwar immer größer als $\mathfrak{a}$ ist.

Werden in einer geordneten Menge M alle Rangbeziehungen ihrer Elemente umgekehrt, so daß überall aus dem „Niedriger" ein „Höher" und aus dem „Höher" ein „Niedriger" wird, so erhält man wieder eine geordnete Menge, die wir mit

$$^{*}M \tag{6}$$

bezeichnen und die „*inverse*" von M nennen wollen.

Den Ordnungstypus von $^{*}M$ bezeichnen wir, wenn $\alpha = \overline{M}$ ist, mit

$$^{*}\alpha. \tag{7}$$

Es kann vorkommen, daß $^{*}\alpha = \alpha$, wie z. B. bei den endlichen Typen oder bei dem Typus der Menge R aller rationalen Zahlen, die größer als 0 und kleiner als 1 sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, den wir unter der Bezeichnung η untersuchen werden.

Wir bemerken ferner, daß zwei ähnliche geordnete Mengen entweder auf eine *einzige* Weise oder auf *mehrere* Weisen aufeinander abgebildet werden können; im ersten Falle ist der betreffende Typus sich selbst nur auf eine Weise ähnlich, im andern auf mehrere Weisen [11].

So sind nicht nur alle endlichen Typen, sondern die Typen der transfiniten „wohlgeordneten Mengen", welche uns später beschäftigen werden und die wir „transfinite Ordnungszahlen" nennen, von der Art, nur eine einzige Abbildung auf sich selbst zuzulassen. Dagegen ist jener Typus η sich selbst auf unzählig viele Weisen ähnlich.

Wir wollen diesen Unterschied an zwei einfachen Beispielen verdeutlichen.

Unter ω verstehen wir den Typus einer wohlgeordneten Menge

$$(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots),$$

in welcher

$$e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

und wo ν Repräsentant aller endlichen Kardinalzahlen ist.

Eine andere wohlgeordnete Menge

$$(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$$

mit der Bedingung

$$f_\nu \prec f_{\nu+1}$$

vom nämlichen Typus ω kann offenbar auf jene nur so „abgebildet" werden, daß e_ν und f_ν entsprechende Elemente sind. Denn das dem Range nach niedrigste Element e_1 der ersten muß bei der Abbildung dem niedrigsten Element f_1 der zweiten, das dem Range nach auf e_1 nächstfolgende e_2 dem auf f_1 nächstfolgenden f_2 usw. zugeordnet werden.

Jede andere gegenseitig eindeutige Zuordnung der beiden äquivalenten Mengen $\{e_\nu\}$ und $\{f_\nu\}$ ist keine „Abbildung" in dem Sinne, wie wir ihn oben für die Typentheorie fixiert haben.

Nehmen wir dagegen eine geordnete Menge von der Form

$$\{e_{\nu'}\},$$

wo ν' Repräsentant aller positiven und negativen endlichen ganzen Zahlen mit Einschluß der 0 ist und wo ebenfalls

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1}.$$

Diese Menge hat kein dem Range nach niedrigstes und kein höchstes Element. Ihr Typus ist nach der Summendefinition, die im § 8 gegeben werden wird, dieser:

$$^*\omega + \omega.$$

Er ist sich selbst auf unzählig viele Weisen ähnlich.

Denn betrachten wir eine Menge von demselben Typus

$$\{f_{\nu'}\},$$

wo

$$f_{\nu'} \prec f_{\nu'+1},$$

so können die beiden geordneten Mengen so aufeinander abgebildet werden, daß, unter ν_0' eine bestimmte der Zahlen ν' verstanden, dem Elemente $e_{\nu'}$ der ersten das Element $f_{\nu_0'+\nu'}$ der zweiten entspricht. Bei der Willkürlichkeit von ν_0' haben wir also hier unendlich viele Abbildungen.

Der hier entwickelte Begriff des „Ordnungstypus" umfaßt, wenn er in gleicher Weise auf „mehrfach geordnete Mengen" übertragen wird, neben dem in § 1 eingeführten Begriff der „Kardinalzahl oder Mächtigkeit" alles „Anzahlmäßige", das überhaupt denkbar ist, und läßt in diesem Sinne keine weitere Verallgemeinerung zu [12]. Er enthält nichts Willkürliches, sondern ist die naturgemäße Erweiterung des Anzahlbegriffs. *Es verdient besonders betont zu werden, daß das Gleichheitskriterium* (4) *mit absoluter Notwendigkeit aus dem Begriffe des Ordnungstypus folgt und daher keinerlei Abänderung zuläßt.* In dem Verkennen dieses Sachverhaltes ist die Hauptursache der schweren Irrtümer zu erblicken, welche sich in dem Werke des Herrn G. Veronese „Grundzüge der Geometrie" finden (Deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894).

Auf S. 30 wird dort die „Anzahl oder Zahl einer geordneten Gruppe" ganz in Übereinstimmung mit dem, was wir „Ordnungstypus einer einfach geordneten Menge" genannt haben, erklärt. (Zur Lehre vom Transfiniten,

Halle 1890, pag. 68—75, Abdruck aus der Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik, vom Jahre 1887) [hier IV 4, S. 378].

Dem Kriterium der Gleichheit vermeint aber Herr V. einen Zusatz geben zu müssen. Er sagt pag. 31: „Zahlen, deren Einheiten sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen *und von denen die eine nicht ein Teil der andern oder einem Teil der andern gleich ist*, sind gleich"[1].

Diese Definition der Gleichheit enthält einen *Zirkel* und wird daher zu einem *Nonsens*.

Was heißt denn in seinem Zusatz „*einem Teil der andern nicht gleich*"?

Um diese Frage zu beantworten, muß man vor allem wissen, wann zwei Zahlen gleich oder nicht gleich sind. *Es setzt also seine Definition der Gleichheit* (abgesehen von ihrer Willkürlichkeit) *eine Definition der Gleichheit voraus, die wiederum eine Definition der Gleichheit voraussetzt, bei welcher man von neuem wissen muß, was gleich und ungleich ist, usw., usw., in infinitum.*

Nachdem Herr V. auf solche Weise das unentbehrliche Fundament für die Vergleichung von Zahlen sozusagen *freiwillig preisgegeben* hat, darf man sich über die Regellosigkeit nicht wundern, in welcher er des weiteren mit seinen pseudotransfiniten Zahlen operiert und den letzteren Eigenschaften zuschreibt, die sie aus dem einfachen Grunde nicht besitzen können, weil sie, in der von ihm fingierten Form, selbst keinerlei Existenz, es sei denn auf dem Papiere, haben. Auch wird hiermit die auffallende Ähnlichkeit verständlich, welche seinen Zahlbildungen mit den höchst absurden „unendlichen Zahlen" Fontenelle's in dessen „Géometrie de L'Infini, Paris 1727" anhaftet.

Kürzlich hat auch Herr W. Killing in dem „Index lectionum" der Akademie in Münster (für 1895—96) seinen Bedenken gegen die Grundlage des Veronese'schen Buches dankenswerten Ausdruck gegeben.

§ 8.

Addition und Multiplikation von Ordnungstypen.

Die Vereinigungsmenge (M, N) zweier Mengen M und N läßt sich, wenn die letzteren geordnet sind, selbst als eine geordnete Menge auffassen, in welcher die Rangbeziehungen der Elemente von M untereinander, ebenso die Rangbeziehungen der Elemente von N untereinander dieselben wie in M resp. N geblieben sind, dagegen alle Elemente von M niedrigeren Rang als alle Elemente von N haben. Sind M' und N' zwei andere geordnete Mengen [ohne gemeinsame Elemente], $M \simeq M'$, $N \simeq N'$, so ist auch $(M, N) \simeq (M', N')$; der Ordnungstypus von (M, N) hängt also nur von den Ordnungstypen

[1] In der italienischen Originalausgabe (S. 27) lautet diese Stelle wörtlich: „Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell' altro, sono uguali."

$\overline{M}=\alpha$, $\overline{N}=\beta$ ab; wir definieren also

$$\alpha+\beta=\overline{(M,N)}. \tag{1}$$

In der Summe $\alpha+\beta$ heißt α der „*Augendus*“, β der „*Addendus*“.

Für drei beliebige Typen beweist man leicht das assoziative Gesetz

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma. \tag{2}$$

Dagegen ist das kommutative Gesetz bei der Addition von Typen im allgemeinen nicht gültig. Wir sehen dies bereits am folgenden einfachen Beispiel.

Ist ω der im § 7 bereits erwähnte Typus der wohlgeordneten Menge

$$E=(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \quad e_\nu \prec e_{\nu+1},$$

so ist $1+\omega$ nicht gleich $\omega+1$.

Denn ist f ein neues Element, so hat man nach (1)

$$1+\omega=\overline{(f,E)},$$

$$\omega+1=\overline{(E,f)}.$$

Die Menge

$$(f,E)=(f, e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

ist aber der Menge E ähnlich, folglich

$$1+\omega=\omega.$$

Dagegen sind die Mengen E und (E,f) nicht ähnlich, weil erstere kein dem Range nach höchstes Glied, letztere aber das höchste Glied f hat. $\omega+1$ ist also von $\omega=1+\omega$ verschieden.

Aus zwei geordneten Mengen M und N mit den Typen α und β läßt sich eine geordnete Menge S dadurch herstellen, daß in N an Stelle jedes Elementes n eine geordnete Menge M_n substituiert wird, welche denselben Typus α wie M hat, also

$$\overline{M}_n=\alpha, \tag{3}$$

und daß über die Rangordnung in

$$S=\{M_n\} \tag{4}$$

folgende Bestimmungen getroffen werden:

1) je zwei Elemente von S, welche einer und derselben Menge M_n angehören, behalten in S dieselbe Rangbeziehung wie in M_n,

2) je zwei Elemente von S, welche zwei verschiedenen Mengen M_{n_1} und M_{n_2} angehören, erhalten in S die Rangbeziehung, welche n_1 und n_2 in N haben.

Der Ordnungstypus von S hängt, wie leicht zu sehen, nur von den Typen α und β ab; wir definieren:

$$\alpha\cdot\beta=\overline{S}. \tag{5}$$

In diesem Produkte heißt α der „*Multiplikandus*“ und β der „*Multiplikator*“.

Unter Zugrundelegung irgendeiner *Abbildung* von M auf M_n sei m_n das dem Elemente m von M entsprechende Element von M_n.

Wir können dann auch schreiben

$$S=\{m_n\}. \tag{6}$$

Nehmen wir eine dritte geordnete Menge $P=\{p\}$ mit dem Ordnungstypus $\overline{P}=\gamma$ hinzu, so ist nach (5)

$$\alpha\cdot\beta=\overline{\{m_n\}}, \quad \beta\cdot\gamma=\overline{\{n_p\}}, \quad (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\overline{\{(m_n)_p\}},$$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=\overline{\{m_{(n_p)}\}}.$$

Die beiden geordneten Mengen $\{(m_n)_p\}$ und $\{m_{(n_p)}\}$ sind aber ähnlich und werden aufeinander abgebildet, indem man ihre Elemente $(m_n)_p$ und $m_{(n_p)}$ als entsprechende ansieht.

Es besteht folglich für drei Typen α, β und γ das *assoziative Gesetz*

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma). \tag{7}$$

Aus (1) und (5) folgt auch leicht das *distributive Gesetz*

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma, \tag{8}$$

jedoch nur in dieser Form, wo *der zweigliedrige Faktor die Rolle des Multiplikators* hat.

Dagegen hat bei Typen das *kommutative Gesetz* ebensowenig bei der Multiplikation wie bei der Addition allgemeine Geltung.

Beispielsweise sind $2\cdot\omega$ und $\omega\cdot 2$ verschiedene Typen; denn nach (5) ist

$$2\cdot\omega=\overline{(e_1, f_1;\ e_2, f_2;\ \ldots;\ e_\nu, f_\nu; \ldots)}=\omega;$$

dagegen ist

$$\omega\cdot 2=\overline{(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots;\ f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)}$$

offenbar von ω verschieden.

Vergleicht man die in § 3 gegebenen Definitionen der Elementaroperationen für Kardinalzahlen mit den hier aufgestellten für Ordnungstypen, so erkennt man leicht, daß die Kardinalzahl der Summe zweier Typen gleich ist der Summe der Kardinalzahlen der einzelnen Typen und daß die Kardinalzahl des Produkts zweier Typen gleich ist dem Produkt der Kardinalzahlen der einzelnen Typen.

Jede aus den beiden Elementaroperationen hervorgehende Gleichung zwischen Ordnungstypen bleibt also auch richtig, wenn man darin sämtliche Typen durch ihre Kardinalzahlen ersetzt.

§ 9.

Der Ordnungstypus η der Menge R aller rationalen Zahlen, die größer als 0 und kleiner als 1 sind, in ihrer natürlichen Rangordnung. [13]

Unter R verstehen wir, wie in § 7, das System aller rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ (p und q als teilerfremd gedacht), die >0 und <1, *in ihrer natürlichen Rangordnung*, wo die Größe der Zahl ihren Rang bestimmt. Den Ordnungstypus von R bezeichnen wir mit η:

$$\eta = \overline{R}. \tag{1}$$

Wir haben aber dort dieselbe Menge auch in eine andere Rangordnung gesetzt, in welcher wir sie R_0 nennen, wobei in erster Linie die Größe von $p + q$, in zweiter Linie, nämlich bei rationalen Zahlen, für welche $p + q$ denselben Wert hat, die Größe von $\frac{p}{q}$ selbst den Rang bestimmt. R_0 hat die Form einer wohlgeordneten Menge vom Typus ω:

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots), \quad \text{wo} \quad r_\nu \prec r_{\nu+1}, \tag{2}$$

$$\overline{R}_0 = \omega. \tag{3}$$

R und R_0 haben, weil sie sich nur in der Rangordnung der Elemente unterscheiden, dieselbe Kardinalzahl, und da offenbar $\overline{\overline{R}}_0 = \aleph_0$, so ist auch

$$\overline{\overline{R}} = \overline{\eta} = \aleph_0. \tag{4}$$

Der Typus η gehört also in die Typenklasse $[\aleph_0]$.

Wir bemerken zweitens, daß in R weder ein dem Range nach niedrigstes, noch ein dem Range nach höchstes Element vorkommt.

Drittens hat R die Eigenschaft, dass *zwischen* je zweien seiner Elemente dem Range nach andere liegen; diese Beschaffenheit drücken wir mit den Worten aus: *R ist „überalldicht"*.

Es soll nun gezeigt werden, daß diese drei Merkmale den Typus η von R kennzeichnen, so daß folgender Satz besteht:

„Hat man eine einfach geordnete Menge M, welche die drei Bedingungen erfüllt:

1) $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$,

2) M hat kein dem Range nach niedrigstes und kein höchstes Element,

3) M ist überalldicht,

so ist der Ordnungstypus von M gleich η:

$$\overline{M} = \eta."$$

Beweis. Wegen der Bedingung 1) läßt sich M in die Form einer wohlgeordneten Menge vom Typus ω bringen; in einer solchen Form zugrunde gelegt, bezeichnen wir M mit M_0 und setzen

$$M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots). \tag{5}$$

Wir haben nun zu zeigen, daß

$$M \simeq R. \tag{6}$$

D. h. es muß bewiesen werden, daß sich M auf R *abbilden* läßt, so daß das Rangverhältnis je zweier Elemente in M dasselbe ist wie das Rangverhältnis der beiden entsprechenden Elemente in R.

Das Element r_1 in R möge dem Elemente m_1 in M zugeordnet werden.

r_2 hat eine bestimmte Rangbeziehung zu r_1 in R; wegen der Bedingung 2) gibt es unzählig viele Elemente m_ν von M, welche zu m_1 dieselbe Rangbeziehung in M haben wie r_2 zu r_1 in R; *von ihnen* wählen wir dasjenige, welches in M_0 den kleinsten Index hat, es sei m_{ι_2}, und ordnen es dem r_2 zu.

r_3 hat in R bestimmte Rangbeziehungen zu r_1 und r_2; wegen der Bedingungen 2) und 3) gibt es unzählig viele Elemente m_ν von M, welche in M zu m_1 und m_{ι_2} dieselben Rangbeziehungen haben, wie r_3 zu r_1 und r_2 in R; wir wählen dasjenige von ihnen, es sei m_{ι_3}, welches in M_0 den kleinsten Index hat, dieses ordnen wir dem r_3 zu.

Nach diesem Gesetze denken wir uns das Zuordnungsverfahren fortgesetzt; sind den ν Elementen

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$$

von R bestimmte Elemente

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

von M als Bilder zugewiesen, welche in M dieselben Rangbeziehungen untereinander haben wie die entsprechenden in R, so werde dem Elemente $r_{\nu+1}$ von R das in M_0 mit dem kleinsten Index versehene Element $m_{\iota_{\nu+1}}$ von M als Bild zugewiesen, welches zu

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

dieselben Rangbeziehungen in M hat, wie $r_{\nu+1}$ zu $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ in R.

Wir haben auf diese Weise *allen* Elementen r_ν von R bestimmte Elemente m_{ι_ν} von M als Bilder zugewiesen, und die Elemente m_{ι_ν} haben in M dieselbe Rangordnung wie die entsprechenden Elemente r_ν in R.

Es muß aber noch gezeigt werden, daß die Elemente m_{ι_ν} *alle Elemente m_ν von M* umfassen oder, was dasselbe ist, daß die Reihe

$$1, \iota_2, \iota_3, \ldots, \iota_\nu, \ldots$$

nur eine *Permutation* der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

ist.

Dies beweisen wir durch eine *vollständige Induktion*, indem wir zeigen, daß *wenn* die Elemente $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ bei der Abbildung zur Geltung kommen, *dasselbe auch bei dem folgenden Elemente $m_{\nu+1}$ der Fall ist.*

Sei λ so groß, daß unter den Elementen

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda}$$

die Elemente

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu,$$

(welche vorausgesetztermaßen zur Abbildung gelangen) vorkommen. Es kann sein, daß sich auch $m_{\nu+1}$ darunter vorfindet; dann kommt $m_{\nu+1}$ bei der Abbildung zur Geltung.

Findet sich aber $m_{\nu+1}$ *nicht* unter den Elementen

$$m_1,\ m_{\iota_2},\ m_{\iota_3},\ \ldots,\ m_{\iota_\lambda},$$

so hat $m_{\nu+1}$ zu diesen Elementen innerhalb M eine bestimmte Rangstellung; dieselbe Rangstellung zu $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ in R haben unzählig viele Elemente von R, unter ihnen sei das in R_0 mit dem kleinsten Index versehene $r_{\lambda+\sigma}$.

Dann hat $m_{\nu+1}$, wie man sich leicht überzeugt, auch zu

$$m_1,\ m_{\iota_2},\ m_{\iota_3},\ \ldots,\ m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

dieselbe Rangstellung in M, wie $r_{\lambda+\sigma}$ zu

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{\lambda+\sigma-1}$$

in R. Da $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ bereits zur Abbildung gelangt sind, so ist $m_{\nu+1}$ das mit dem kleinsten Index in M_0 versehene Element, welches diese Rangstellung zu

$$m_1,\ m_{\iota_2},\ \ldots,\ m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

hat. Folglich ist nach unserm Zuordnungsgesetze

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}.$$

Es kommt also auch in diesem Falle das Element $m_{\nu+1}$ bei der Abbildung zur Geltung, und zwar ist $r_{\lambda+\sigma}$ das ihm zugeordnete Element von R.

So sehen wir, daß durch unsern Zuordnungsmodus *die ganze Menge* M auf *die ganze Menge* R abgebildet wird; M und R sind ähnliche Mengen, w. z. b. w.

Aus dem soeben bewiesenen Satze ergeben sich beispielsweise die folgenden:

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller negativen und positiven rationalen Zahlen mit Einschluß der Null in ihrer natürlichen Rangordnung."

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller rationalen Zahlen, welche größer als a und kleiner als b sind; in ihrer natürlichen Rangordnung, wo a und b irgend zwei reelle Zahlen sind, $a < b$."

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller reellen algebraischen Zahlen in ihrer natürlichen Rangordnung."

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller reellen algebraischen Zahlen, welche größer als a und kleiner als b sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, wo a und b irgend zwei reelle Zahlen sind, $a < b$."

Denn alle diese geordneten Mengen erfüllen die drei in unserm Satze für M geforderten Bedingungen (vgl. Crelle's Journal Bd. 77, S. 258) [III 1, S. 115].

Betrachten wir ferner nach den in § 8 gegebenen Definitionen Mengen mit den Typen $\eta+\eta$, $\eta\eta$, $(1+\eta)\eta$, $(\eta+1)\eta$, $(1+\eta+1)\eta$, so finden

sich auch bei ihnen jene drei Bedingungen erfüllt. Wir haben somit die Sätze:

$$\eta+\eta=\eta, \tag{7}$$

$$\eta\eta=\eta, \tag{8}$$

$$(1+\eta)\eta=\eta, \tag{9}$$

$$(\eta+1)\eta=\eta, \tag{10}$$

$$(1+\eta+1)\eta=\eta. \tag{11}$$

Die wiederholte Anwendung von (7) und (8) gibt für jede endliche Zahl ν

$$\eta\cdot\nu=\eta, \tag{12}$$

und

$$\eta^\nu=\eta. \tag{13}$$

Dagegen sind, wie man leicht sieht, für $\nu > 1$, die Typen $1+\eta$, $\eta+1$, $\nu\cdot\eta$, $1+\eta+1$ sowohl unter sich wie auch von η verschieden. Andrerseits ist

$$\eta+1+\eta=\eta, \tag{14}$$

dagegen $\eta+\nu+\eta$ für $\nu > 1$ von η verschieden.

Endlich verdient hervorgehoben zu werden, daß

$${}^*\eta=\eta. \tag{15}$$

§ 10.

Die in einer transfiniten geordneten Menge enthaltenen Fundamentalreihen.

Legen wir irgendeine einfach geordnete transfinite Menge M zugrunde. Jede Teilmenge von M ist selbst eine geordnete Menge. Für das Studium des Typus $\overline{M}$ scheinen diejenigen Teilmengen von M, denen die Typen ω und ${}^*\omega$ zukommen, besonders wertvoll zu sein; wir nennen sie „*in M enthaltene Fundamentalreihen erster Ordnung*", und zwar die ersteren (vom Typus ω) „*steigende*", die anderen (vom Typus ${}^*\omega$) „*fallende*".

Da wir uns auf die Betrachtung von Fundamentalreihen *erster Ordnung* beschränken (in späteren Untersuchungen werden auch solche *höherer Ordnung* zur Geltung kommen), so wollen wir sie hier einfach „*Fundamentalreihen*" nennen.

Eine „steigende Fundamentalreihe" hat also die Form

$$\{a_\nu\}, \quad \text{wo} \quad a_\nu \prec a_{\nu+1}, \tag{1}$$

eine „fallende Fundamentalreihe" ist von der Form

$$\{b_\nu\}, \quad \text{wo} \quad b_\nu \succ b_{\nu+1}. \tag{2}$$

ν hat überall in unseren Betrachtungen (sowie auch $\varkappa, \lambda, \mu$) die Bedeutung einer beliebigen *endlichen* Kardinalzahl oder auch eines *endlichen* Typus resp. einer *endlichen* Ordnungszahl.

Zwei in M enthaltene steigende Fundamentalreihen $\{a_\nu\}$ und $\{a'_\nu\}$ nennen wir „*zusammengehörig*“, in Zeichen

$$\{a_\nu\} \parallel \{a'_\nu\}, \tag{3}$$

wenn sowohl zu jedem Elemente a_ν Elemente a'_λ existieren, so daß

$$a_\nu \prec a'_\lambda,$$

wie auch zu jedem Elemente a'_ν Elemente a_μ vorhanden sind, so daß

$$a'_\nu \prec a_\mu.$$

Zwei in M enthaltene fallende Fundamentalreihen $\{b_\nu\}$ und $\{b'_\nu\}$ heißen „*zusammengehörig*“, in Zeichen

$$\{b_\nu\} \parallel \{b'_\nu\}, \tag{4}$$

wenn zu jedem Elemente b_ν Elemente b'_λ vorhanden sind, so daß

$$b_\nu \succ b'_\lambda,$$

und zu jedem Elemente b'_ν Elemente b_μ existieren, so daß

$$b'_\nu \succ b_\mu.$$

Eine steigende Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ und eine fallende $\{b_\nu\}$ nennen wir dann „*zusammengehörig*“, in Zeichen

$$\{a_\nu\} \parallel \{b_\nu\}, \tag{5}$$

wenn 1) für alle ν und μ

$$a_\nu \prec b_\mu$$

und 2) in M *höchstens ein* Element m_0 (also entweder nur eines oder gar kein solches) existiert, so daß für alle ν

$$a_\nu \prec m_0 \prec b_\nu.$$

Es bestehen dann die Sätze:

A. „*Sind zwei Fundamentalreihen zusammengehörig mit einer dritten, so sind sie auch unter einander zusammengehörig.*“

B. „*Zwei gleichgerichtete Fundamentalreihen, von denen die eine Teilmenge der andern ist, sind stets zusammengehörig.*“

Existiert in M ein Element m_0, welches zu der steigenden Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ eine solche Stellung hat, daß

1) für jedes ν

$$a_\nu \prec m_0,$$

2) für jedes Element m von M das $\prec m_0$, eine gewisse Zahl ν_0 existiert, so daß

$$a_\nu \succ m, \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0,$$

so wollen wir m_0 „*Grenzelement von* $\{a_\nu\}$ *in* M“ und zugleich ein „*Hauptelement von* M“ nennen.

Ebenso nennen wir auch m_0 ein „*Hauptelement von* M“ und zugleich „*Grenzelement von* $\{b_\nu\}$ *in* M“, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

1) für jedes ν

$$b_\nu \succ m_0,$$

2) für jedes Element m von M, das $\succ m_0$, existiert eine gewisse Zahl ν_0, so daß

$$b_\nu \prec m, \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0.$$

Eine Fundamentalreihe kann *nie mehr als ein* Grenzelement in M haben; M aber hat im allgemeinen viele Hauptelemente.

Man überzeugt sich von der Wahrheit folgender Sätze:

C. „*Hat eine Fundamentalreihe ein Grenzelement in M, so haben alle mit ihr zusammengehörigen Fundamentalreihen dasselbe Grenzelement in M.*“

D. „*Haben zwei Fundamentalreihen (gleichgerichtete oder verschiedengerichtete) ein und dasselbe Grenzelement in M, so sind sie zusammengehörig.*“

Sind M und M' zwei ähnliche geordnete Mengen, so daß

$$\overline{M} = \overline{M'}, \tag{6}$$

und legt man *irgendeine Abbildung* der beiden Mengen zugrunde, so gelten, wie man leicht sieht, folgende Sätze:

E. „*Jeder Fundamentalreihe in M entspricht als Bild eine Fundamentalreihe in M' und umgekehrt; jeder steigenden eine steigende, jeder fallenden eine fallende; zusammengehörigen Fundamentalreihen in M entsprechen als Bilder zusammengehörige Fundamentalreihen in M' und umgekehrt.*“

F. „*Gehört zu einer Fundamentalreihe in M ein Grenzelement in M, so gehört auch zu der entsprechenden Fundamentalreihe in M' ein Grenzelement in M' und umgekehrt; und diese beiden Grenzelemente sind Bilder voneinander bei der Abbildung.*“

G. „*Den Hauptelementen von M entsprechen als Bilder Hauptelemente von M' und umgekehrt.*“

Besteht eine Menge M aus lauter Hauptelementen, so daß jedes ihrer Elemente ein Hauptelement ist, so nennen wir sie eine „*insichdichte Menge*“.

Gibt es zu jeder Fundamentalreihe in M ein Grenzelement in M, so nennen wir M eine „*abgeschlossene Menge*“.

Eine Menge, die sowohl „insichdicht“, wie auch „abgeschlossen“ ist, heiße eine „*perfekte Menge*“ [14].

Hat eine Menge eins von diesen drei Prädikaten, so kommt dasselbe Prädikat auch jeder ähnlichen Menge zu; es lassen sich dieselben Prädikate daher auch den entsprechenden Ordnungstypen zuschreiben, und es gibt somit „*insichdichte Typen*“, „*abgeschlossene Typen*“, „*perfekte Typen*“, desgleichen auch „*überalldichte Typen*“ (§ 9).

So ist z. B. η ein „insichdichter“ Typus; wie in § 9 gezeigt, ist er auch „überalldicht“, aber nicht „abgeschlossen“.

ω und $^*\omega$ haben keine Hauptelemente (Haupteinsen); dagegen haben $\omega + \nu$ und $\nu + {}^*\omega$ je ein Hauptelement und sind „abgeschlossene" Typen.

Der Typus $\omega \cdot 3$ hat zwei Hauptelemente, ist aber nicht „abgeschlossen"; der Typus $\omega \cdot 3 + \nu$ hat drei Hauptelemente und ist „abgeschlossen".

§ 11.

Der Ordnungstypus θ des Linearkontinuums X. [15]

Wir wenden uns zur Untersuchung des Ordnungstypus der Menge $X = \{x\}$ aller reellen Zahlen x, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, so daß bei zwei beliebigen Elementen x und x' derselben

$$x \prec x', \quad \text{falls} \quad x < x'. \tag{1}$$

Die Bezeichnung dieses Typus sei

$$\overline{X} = \theta. \tag{1}$$

Aus den Elementen der rationalen und irrationalen Zahlenlehre weiß man, daß jede Fundamentalreihe $\{x_\nu\}$ in X ein Grenzelement x_0 in X hat und daß auch umgekehrt jedes Element x von X Grenzelement von zusammengehörigen Fundamentalreihen in X ist. Somit ist X eine *„perfekte Menge"*, θ ein *„perfekter Typus"*.

Damit ist θ aber noch nicht ausreichend charakterisiert, wir haben vielmehr noch folgende Eigenschaft von X ins Auge zu fassen:

X enthält die in § 9 untersuchte Menge R vom Ordnungstypus η als Teilmenge, und zwar *im besondern so, daß zwischen je zwei beliebigen Elementen* x_0 und x_1 von X Elemente von R dem Range nach liegen.

Es soll nun gezeigt werden, daß *diese Merkmale zusammengenommen* in erschöpfender Weise den Ordnungstypus θ des Linearkontinuums X kennzeichnen, so daß der Satz gilt:

„Hat eine geordnete Menge M ein solches Gepräge, daß sie 1) *„perfekt" ist,* 2) *in ihr eine Menge S mit der Kardinalzahl $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$ enthalten ist, welche zu M in der Beziehung steht, daß zwischen je zwei beliebigen Elementen m_0 und m_1 von M Elemente von S dem Range nach liegen, so ist $\overline{M} = \theta$."*

Beweis. Sollte S ein niedrigstes oder ein höchstes Element haben, so würden sie wegen 2) auch denselben Charakter als Elemente von M tragen; wir könnten sie alsdann von S entfernen, ohne daß diese Menge dadurch die in 2) ausgedrückte Beziehung zu M verliert.

Wir setzen daher S von vornherein ohne niedrigstes und höchstes Element voraus; S hat alsdann nach § 9 den Ordnungstypus η.

Denn da S ein Teil von M ist, so müssen nach 2) zwischen je zwei beliebigen Elementen s_0 und s_1 von S dem Range nach andere Elemente von S liegen. Außerdem haben wir nach 2) $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$.

Die beiden Mengen S und R sind daher einander *„ähnlich"*,

$$S \simeq R. \tag{2}$$

Wir denken uns irgendeine *„Abbildung"* von R auf S zugrunde gelegt und behaupten, daß dieselbe zugleich eine bestimmte *„Abbildung"* von X auf M ergibt, und zwar in folgender Weise:

Alle Elemente von X, die gleichzeitig der Menge R angehören, mögen als Bilder denjenigen Elementen von M entsprechen, welche zugleich Elemente von S sind und bei der vorausgesetzten Abbildung von R auf S jenen Elementen von R entsprechen.

Ist aber x_0 ein nicht zu R gehöriges Element von X, so läßt sich dasselbe als Grenzelement einer in X enthaltenen Fundamentalreihe $\{x_\nu\}$ ansehen, welche durch eine in R enthaltene mit ihr zusammengehörige Fundamentalreihe $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ ersetzt werden kann. Der letzteren entspricht als Bild eine Fundamentalreihe $\{s_{\lambda_\nu}\}$ in S und M, welche wegen 1) von einem Elemente m_0 in M begrenzt wird, das nicht zu S gehört (F, § 10). Dieses Element m_0 in M (welches dasselbe bleibt, wenn an Stelle der Fundamentalreihen $\{x_\nu\}$ und $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ andere von demselben Elemente x_0 in X begrenzte gedacht werden (E, C, D in § 10), gelte als Bild von x_0 in X. Umgekehrt gehört zu jedem Elemente m_0 von M, welches nicht in S vorkommt, ein ganz bestimmtes Element x_0 von X, welches nicht zu R gehört und von welchem m_0 das Bild ist.

Auf diese Weise ist zwischen X und M eine gegenseitig eindeutige Beziehung hergestellt, von der zu zeigen ist, daß sie eine „Abbildung" dieser Mengen begründet.

Dies steht von vornherein für diejenigen Elemente von X und M fest, welche gleichzeitig den Mengen R resp. S angehören.

Vergleichen wir ein Element r von R mit einem nicht zu R gehörigen Elemente x_0 von X; die zugehörigen Elemente von M seien s und m_0.

Ist $r < x_0$, so gibt es eine steigende Fundamentalreihe $\{r_{\varkappa_\nu}\}$, welche von x_0 begrenzt wird, und es ist von einem gewissen ν_0 an

$$r < r_{\varkappa_\nu} \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0.$$

Das Bild von $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ in M ist eine steigende Fundamentalreihe $\{s_{\lambda_\nu}\}$, welche in M von m_0 begrenzt wird, und man hat (§ 10) erstens $s_{\lambda_\nu} \prec m_0$ für jedes ν und andrerseits $s \prec s_{\lambda_\nu}$ für $\nu \geqq \nu_0$, daher (§ 7) $s \prec m_0$.

Ist $r > x_0$, so schließt man ähnlich, daß $s \succ m_0$.

Betrachten wir endlich zwei nicht zu R gehörige Elemente x_0 und x_0' und die ihnen in M entsprechenden Elemente m_0 und m_0', so zeigt man durch eine analoge Betrachtung, daß wenn $x_0 < x_0'$, alsdann $m_0 \prec m_0'$.

Damit wäre der Beweis der Ähnlichkeit von X und M erbracht, und es ist daher

$$\overline{M} = \theta.$$

§ 12.

Die wohlgeordneten Mengen.

Unter den einfach geordneten Mengen gebührt den *wohlgeordneten Mengen* eine ausgezeichnete Stelle; ihre Ordnungstypen, die wir *„Ordnungszahlen“* nennen, bilden das natürliche Material für eine genaue Definition der höheren transfiniten Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten, eine Definition, die durchaus konform ist derjenigen, welche uns für die kleinste transfinite Kardinalzahl *Alef-null* durch das System aller endlichen Zahlen ν geliefert worden ist (§ 6).

„Wohlgeordnet“ nennen wir eine einfach geordnete Menge F (§ 7), wenn ihre Elemente f von einem niedersten f_1 an *in bestimmter Sukzession aufsteigen*, so daß folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

I. *„Es gibt in F ein dem Range nach niederstes Element f_1“.*

II. *„Ist F' irgendeine Teilmenge von F und besitzt F ein oder mehrere Elemente höheren Ranges als alle Elemente von F', so existiert ein Element f' von F, welches auf die Gesamtheit F' zunächst folgt, so daß keine Elemente in F vorkommen, die ihrem Range nach zwischen F' und f' fallen*[1]“ [16].

Im besondern folgt auf jedes einzelne Element f von F, *falls es nicht das höchste ist*, ein bestimmtes anderes Element f' dem Range nach als *nächsthöheres*; dies ergibt sich aus der Bedingung II, wenn man für F' das einzelne Element f setzt. Ist ferner beispielsweise in F eine unendliche Reihe aufeinander folgender Elemente

$$e' \prec e'' \prec e''' \cdots e^{(\nu)} \prec e^{(\nu+1)} \cdots$$

enthalten, doch so, daß es in F auch solche Elemente gibt, die höheren Rang haben *als alle* $e^{(\nu)}$, so muß nach der Bedingung II, wenn man darin für F' die Gesamtheit $\{e^{(\nu)}\}$ setzt, ein Element f' existieren, so daß nicht nur

$$f' \succ e^{(\nu)}$$

für alle Werte von ν, sondern daß es auch *kein Element* g in F gibt, welches den beiden Bedingungen genügt

$$g \prec f',$$
$$g \succ e^{(\nu)}$$

für alle Werte von ν.

So sind z. B. die drei Mengen

$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3)$$

[1] Es stimmt diese Definition der „wohlgeordneten Menge“, abgesehen vom Wortlaut, durchaus mit derjenigen überein, welche in Math. Ann. **21**, 548 (Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre, S. 4) [hier III 4, Nr. 5, S. 168] eingeführt wurde.

wo

$$a_\nu \prec a_{\nu+1} \prec b_\mu \prec b_{\mu+1} \prec c_1 \prec c_2 \prec c_3$$

wohlgeordnet. Die beiden ersten haben kein höchstes Element, die dritte hat das höchste Element c_3; in der zweiten und dritten folgt auf sämtliche Elemente a_ν zunächst b_1, in der dritten auf sämtliche Elemente a_ν und b_μ zunächst c_1.

Im folgenden wollen wir die in § 7 erklärten Zeichen $\prec$ und $\succ$, welche dort zum Ausdruck der Rangbeziehung je zweier Elemente gebraucht wurden, auf Gruppen von Elementen ausdehnen, so daß die Formeln

$$M \prec N,$$
$$M \succ N$$

der Ausdruck dafür seien, daß in einer vorliegenden Rangordnung alle Elemente der Menge M niederen resp. höheren Rang haben als alle Elemente der Menge N.

A. *„Jede Teilmenge F_1 einer wohlgeordneten Menge F hat ein niederstes Element.“*

Beweis. Gehört das niederste Element f_1 von F zu F_1, so ist es zugleich das niederste Element von F_1.

Andernfalls sei F' die Gesamtheit aller Elemente von F, welche niederen Rang haben als alle Elemente von F_1, so ist eben deshalb kein Element von F zwischen F' und F_1 gelegen.

Folgt also f' (nach II) zunächst auf F', so gehört es notwendig zu F_1 und nimmt hier den niedersten Rang ein.

B. *„Ist eine einfach geordnete Menge F so beschaffen, daß sowohl F wie auch jede ihrer Teilmengen ein niederstes Element haben, so ist F eine wohlgeordnete Menge.“*

Beweis. Da F ein niederstes Element hat, so ist die Bedingung I erfüllt. Sei F' eine Teilmenge von F derart, daß es in F ein oder mehrere Elemente $\succ F'$ gibt; F_1 sei die Gesamtheit aller dieser Elemente und f' das niederste Element von F_1, so ist offenbar f' das auf F' zunächst folgende Element von F. Somit ist auch die Bedingung II erfüllt und es ist daher F eine wohlgeordnete Menge.

C. *„Jede Teilmenge F' einer wohlgeordneten Menge F ist gleichfalls eine wohlgeordnete Menge.“*

Beweis. Nach Satz A hat F' sowohl wie jede Teilmenge F'' von F' (da sie zugleich Teilmenge von F ist) ein niederstes Element; daher ist nach Satz B F' eine wohlgeordnete Menge.

D. *„Jede einer wohlgeordneten Menge F ähnliche Menge G ist gleichfalls eine wohlgeordnete Menge.“*

Beweis. Ist M eine Menge, welche ein niederstes Element besitzt, so hat, wie aus dem Begriffe der Ähnlichkeit (§ 7) unmittelbar folgt, auch jede ihr ähnliche Menge N ein niederstes Element.

Da nun $G \simeq F$ sein soll und F als wohlgeordnete Menge ein niederstes Element hat, so gilt dasselbe von G.

Ebenso hat jede Teilmenge G' von G ein niederstes Element; denn bei einer Abbildung von G auf F entspricht der Menge G' als Bild eine Teilmenge F' von F, so daß

$$G' \simeq F'.$$

F' hat aber nach Satz A ein niederstes Element, daher auch G'. Es haben also sowohl G, wie auch jede Teilmenge G' von G ein niederstes Element; nach Satz B ist daher G eine wohlgeordnete Menge.

E. „*Werden in einer wohlgeordneten Menge G an Stelle ihrer Elemente g wohlgeordnete Mengen substituiert in dem Sinne, daß wenn F_g und $F_{g'}$ die an Stelle der beiden Elemente g und g' tretenden wohlgeordneten Mengen sind und $g \prec g'$, alsdann auch $F_g \prec F_{g'}$, so ist die auf diese Weise durch Zusammensetzung aus den Elementen sämtlicher Mengen F_g hervorgehende Menge H eine wohlgeordnete.*"

Beweis. Sowohl H, wie auch jede Teilmenge H_1 von H haben ein niederstes Element, was H nach Satz B als wohlgeordnete Menge kennzeichnet. Ist nämlich g_1 das niederste Element von G, so ist das niederste Element von F_{g_1} zugleich niederstes Element von H. Hat man ferner eine Teilmenge H_1 von H, so gehören ihre Elemente zu bestimmten Mengen F_g, die zusammengenommen eine Teilmenge der aus den Elementen F_g bestehenden, der Menge G ähnlichen wohlgeordneten Menge $\{F_g\}$ bilden; ist etwa F_{g_0} das niederste Element dieser Teilmenge, so ist das niederste Element der in F_{g_0} enthaltenen Teilmenge von H_1 zugleich niederstes Element von H_1.

§ 13.

Die Abschnitte wohlgeordneter Mengen.

Ist f irgendein *vom Anfangselement f_1 verschiedenes* Element der wohlgeordneten Menge F, so wollen wir die Menge A aller Elemente von F, welche $\prec f$, einen „*Abschnitt von F*", und zwar den *durch das Element f bestimmten* Abschnitt von F nennen. Dagegen heiße die Menge R aller übrigen Elemente von F *mit Einschluß von f* ein „*Rest von F*", und zwar der *durch das Element f bestimmte* Rest von F. Die Mengen A und R sind nach Satz C, § 12 *wohlgeordnet*, und wir können nach § 8 und § 12 schreiben:

$$F = (A, R), \tag{1}$$
$$R = (f, R'), \tag{2}$$
$$A \prec R. \tag{3}$$

R' ist der auf das Anfangselement f folgende Teil von R und reduziert sich auf 0, falls R außer f kein anderes Element hat.

Nehmen wir als Beispiel die wohlgeordnete Menge

$$F = (a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

so sind hier durch das Element a_3 der Abschnitt

$$(a_1, a_2)$$

und der zugehörige Rest

$$(a_3, a_4, \ldots a_{\nu+2}, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

durch das Element b_1 der Abschnitt

$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots)$$

und der zugehörige Rest

$$(b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

durch das Element c_2 der Abschnitt

$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1)$$

und der zugehörige Rest

$$(c_2, c_3)$$

bestimmt.

Sind A und A' zwei Abschnitte von F, f und f' die sie bestimmenden Elemente und ist

$$f' \prec f, \tag{4}$$

so ist A' auch Abschnitt von A.

Wir nennen dann A' den *kleineren*, A den *größeren* Abschnitt von F:

$$A' < A. \tag{5}$$

Dementsprechend können wir auch von jedem A von F sagen, daß er kleiner ist als F selbst:

$$A < F. \tag{6}$$

[17]. A. „*Sind zwei ähnliche wohlgeordnete Mengen F und G aufeinander abgebildet, so entspricht jedem Abschnitt A von F ein ähnlicher Abschnitt B von G und jedem Abschnitt B von G ein ähnlicher Abschnitt A von F, und die Elemente f und g von F und G, durch welche die einander zugeordneten Abschnitte A und B bestimmt sind, entsprechen einander ebenfalls bei der Abbildung.*"

Beweis. Hat man zwei ähnliche einfach geordnete Mengen M und N aufeinander abgebildet, sind m und n zwei zugeordnete Elemente und ist M' die Menge aller Elemente von M, welche $\prec m$, N' die Menge aller Elemente von N, welche $\prec n$, so entsprechen bei der Abbildung M' und N'

einander. Denn jedem Element m' von M, das $\prec m$, muß (§ 7) ein Element n' von N entsprechen, das $\prec n$ ist, und umgekehrt.

Wendet man diesen allgemeinen Satz auf die wohlgeordneten Mengen F und G an, so erhält man das zu Beweisende.

B. „*Eine wohlgeordnete Menge F ist keinem ihrer Abschnitte A ähnlich.*“

Beweis. Nehmen wir an, es sei $F \simeq A$, so denken wir uns eine Abbildung von F auf A hergestellt. Nach Satz A entspricht alsdann dem Abschnitt A von F als Bild ein Abschnitt A' von A, so dass $A' \simeq A$. Es wäre also auch $A' \simeq F$ und es ist $A' < A$. Aus A' würde sich in derselben Weise ein kleinerer Abschnitt A'' von F ergeben, so daß $A'' \simeq F$ und $A'' < A'$ usw. Wir erhielten so eine *notwendig unendliche* Reihe

$$A > A' > A'' \ldots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)}, \ldots$$

von stets kleiner werdenden Abschnitten von F, die alle der Menge F ähnlich wären.

Bezeichnen wir mit $f, f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots$ die diese Abschnitte bestimmenden Elemente von F, so wäre

$$f \succ f' \succ f'' \ldots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)}, \ldots .$$

Wir würden also eine *unendliche* Teilmenge

$$(f, f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots)$$

von F haben, in welcher *kein Element den niedersten Rang* einnimmt.

Solche Teilmengen von F sind aber nach Satz A, § 12 *nicht möglich.* Die Annahme einer Abbildung von F auf einen ihrer Abschnitte führt also zu einem Widerspruch, und es ist daher die Menge F keinem ihrer Abschnitte ähnlich.

Ist auch nach Satz B eine wohlgeordnete Menge F keinem ihrer *Abschnitte* ähnlich, so gibt es doch immer, wenn F *unendlich* ist, *andere Teilmengen* von F, welchen F ähnlich ist. So ist z. B. die Menge

$$F = (a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots)$$

jedem ihrer Reste

$$(a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2}, \ldots a_{\varkappa+\nu}, \ldots)$$

ähnlich. Es ist daher von Bedeutung, daß wir dem Satz B auch noch folgenden an die Seite stellen können:

C. „*Eine wohlgeordnete Menge F ist keiner Teilmenge irgend eines ihrer Abschnitte A ähnlich.*“

Beweis. Nehmen wir an, es sei F' Teilmenge eines Abschnittes A von F und $F' \simeq F$. Wir denken uns eine Abbildung von F auf F' zugrunde gelegt; dabei wird nach Satz A dem Abschnitte A von F ein Abschnitt F''

der wohlgeordneten Menge F' als Bild entsprechen; dieser Abschnitt werde durch das Element f' von F' bestimmt. Es ist f' auch Element von A und bestimmt einen Abschnitt A' von A, von welchem F'' eine Teilmenge ist.

Die Annahme einer Teilmenge F' eines Abschnittes A von F, so daß $F' \simeq F$, führt uns daher zu einer Teilmenge F'' eines Abschnittes A' von A, so daß $F'' \simeq A$.

Dieselbe Schlußweise ergibt eine Teilmenge F''' eines Abschnittes A'' von A', so daß $F''' \simeq A'$. Und wir erhalten so fortgehend, wie im Beweise des Satzes B, eine *notwendig unendliche* Reihe immer kleiner werdender Abschnitte von F

$$A > A' > A'' \ldots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)} \ldots$$

und damit die *unendliche* Reihe der diese Abschnitte bestimmenden Elemente

$$f \succ f' \succ f'' \ldots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)} \ldots,$$

in welcher kein niederstes Element vorhanden wäre, was nach dem Satze A, § 12 unmöglich ist. Es gibt daher keine Teilmenge F' eines Abschnittes A von F, so daß $F' \simeq F$. —

D. „*Zwei verschiedene Abschnitte A und A' einer wohlgeordneten Menge F sind nicht einander ähnlich.*“

Beweis. Ist $A' < A$, so ist A' auch Abschnitt der wohlgeordneten Menge A, kann daher nach Satz B nicht A ähnlich sein.

E. „*Zwei ähnliche wohlgeordnete Mengen F und G lassen sich nur auf eine einzige Weise aufeinander abbilden.*“

Beweis. Setzen wir zwei verschiedene Abbildungen von F auf G voraus und sei f ein Element von F, dem bei den beiden Abbildungen verschiedene Bilder g und g' in G entsprächen. A sei der Abschnitt von F, der durch f bestimmt ist, B und B' seien die Abschnitte von G, die durch g und g' bestimmt sind. Nach Satz A ist sowohl $A \simeq B$, wie auch $A \simeq B'$, und es wäre daher auch $B \simeq B'$, was gegen den Satz D streitet.

F. „*Sind F und G zwei wohlgeordnete Mengen, so kann ein Abschnitt A von F höchstens einen ihm ähnlichen Abschnitt B in G haben.*“

Beweis. Würde der Abschnitt A von F zwei ihm ähnliche Abschnitte B und B' in G haben, so wären auch B und B' ähnlich, was nach Satz D unmöglich ist.

G. „*Sind A und B ähnliche Abschnitte zweier wohlgeordneter Mengen F und G, so gibt es auch zu jedem kleineren Abschnitt $A' < A$ von F einen ähnlichen Abschnitt $B' < B$ von G und zu jedem kleineren Abschnitt $B' < B$ von G einen ähnlichen Abschnitt $A' < A$ von F.*“

Beweis folgt aus Satz A, wenn derselbe auf die ähnlichen Mengen A und B angewandt wird.

H. „*Sind A und A' zwei Abschnitte einer wohlgeordneten Menge F, B und B' ihnen ähnliche Abschnitte einer wohlgeordneten Menge G, und ist $A' < A$, so ist $B' < B$.*

Beweis folgt aus den Sätzen F und G.

J. „*Ist ein Abschnitt B einer wohlgeordneten Menge G keinem Abschnitt einer wohlgeordneten Menge F ähnlich, so ist sowohl jeder Abschnitt $B' > B$ von G als auch G selbst weder einem Abschnitt von F noch F selbst ähnlich.*"

Beweis folgt aus Satz G.

K. „*Gibt es zu jedem Abschnitt A einer wohlgeordneten Menge F einen ihm ähnlichen Abschnitt B einer andern wohlgeordneten Menge G, aber auch umgekehrt zu jedem Abschnitt B von G einen ihm ähnlichen Abschnitt A von F, so ist $F \simeq G$.*"

Beweis. Wir können F und G nach folgendem Gesetz aufeinander abbilden:

Das niederste Element f_1 von F entspreche dem niedersten Element g_1 von G. Ist $f \succ f_1$ irgendein anderes Element von F, so bestimmt es einen Abschnitt A von F; zu diesem gehört der Voraussetzung nach ein bestimmter ähnlicher Abschnitt B von G; das den Abschnitt B bestimmende Element g von G sei das Bild von f. Und ist g irgendein Element von G, das $\succ g_1$, so bestimmt es einen Abschnitt B von G, zu dem voraussetzungsgemäß ein ähnlicher Abschnitt A von F gehört; das Element f, welches diesen Abschnitt A bestimmt, sei das Bild von g.

Daß die auf diese Weise definierte gegenseitig eindeutige Zuordnung von F und G eine *Abbildung* im Sinne von § 7 ist, folgt leicht.

Sind nämlich f und f' zwei beliebige Elemente von F, g und g' die ihnen entsprechenden Elemente von G, A und A' die durch f und f', B und B' die durch g und g' bestimmten Abschnitte, und ist etwa

$$f' \prec f,$$

so ist

$$A' < A;$$

nach Satz H ist daher auch

$$B' < B$$

und folglich

$$g' \prec g.$$

L. „*Gibt es zu jedem Abschnitt A einer wohlgeordneten Menge F einen ihm ähnlichen Abschnitt B einer andern wohlgeordneten Menge G, ist hingegen mindestens ein Abschnitt von G vorhanden, zu dem es keinen ähnlichen Abschnitt von F gibt, so existiert ein bestimmter Abschnitt B_1 von G, so daß $B_1 \simeq F$.*"

Beweis. Wir fassen die Gesamtheit aller Abschnitte von G ins Auge, zu denen es keine ähnlichen Abschnitte in F gibt; unter ihnen muß es einen *kleinsten* Abschnitt geben, den wir B_1 nennen. Dies folgt daraus, daß nach Satz A, § 12 die Menge der alle diese Abschnitte bestimmenden Elemente ein niederstes Element besitzt; der durch letzteres bestimmte Abschnitt B_1 von G ist der kleinste aus jener Gesamtheit. Nach Satz J ist *jeder* Abschnitt von G, der $> B_1$ ist, derartig, daß zu ihm kein ähnlicher Abschnitt in F vorhanden ist; es müssen daher die Abschnitte B von G, welchen ähnliche Abschnitte von F gegenüberstehen, alle $< B_1$ sein, und zwar gehört zu jedem Abschnitt $B < B_1$ ein ähnlicher Abschnitt A von F, weil eben B_1 der kleinste Abschnitt von G ist unter denen, welchen keine ähnlichen Abschnitte in F entsprechen.

Somit gibt es zu jedem Abschnitt A von F einen ähnlichen Abschnitt B von B_1 und zu jedem Abschnitt B von B_1 einen ähnlichen Abschnitt A von F; nach Satz K ist daher

$$F \simeq B_1.$$

M. „*Hat die wohlgeordnete Menge G mindestens einen Abschnitt, zu dem kein ähnlicher Abschnitt in der wohlgeordneten Menge F vorhanden ist, so muß jeder Abschnitt A von F einen ihm ähnlichen Abschnitt B in G haben.*"

Beweis. Sei B_1 der kleinste Abschnitt in G von allen, zu denen keine ähnlichen in F vorhanden sind. (Vgl. den Beweis von L.) Würde es Abschnitte in F geben, denen keine ähnlichen Abschnitte in G gegenüberstehen, so würde auch unter diesen einer der kleinste sein, wir nennen ihn A_1. Zu jedem Abschnitt von A_1 würde alsdann ein ähnlicher Abschnitt von B_1 und zu jedem Abschnitt von B_1 ein ähnlicher Abschnitt von A_1 existieren. Nach Satz K wäre daher

$$B_1 \simeq A_1.$$

Dies widerspricht aber dem, daß zu B_1 kein ähnlicher Abschnitt in F vorhanden ist. Es kann daher in F keinen Abschnitt geben, dem nicht ein ähnlicher in G gegenübersteht.

N. „*Sind F und G zwei beliebige wohlgeordnete Mengen, so sind entweder* 1) *F und G einander ähnlich, oder es gibt* 2) *einen bestimmten Abschnitt B_1 von G, welcher F ähnlich ist, oder es gibt* 3) *einen bestimmten Abschnitt A_1 von F, welcher G ähnlich ist; und jeder dieser drei Fälle schließt die Möglichkeit der beiden anderen aus.*"

Beweis. Das Verhalten von F zu G kann ein *dreifaches* sein.

1) Es gehört zu jedem Abschnitte A von F ein ähnlicher Abschnitt B von G und umgekehrt zu jedem Abschnitte B von G ein ähnlicher Abschnitt A von F.

2) es gehört zu jedem Abschnitt A von F ein ähnlicher Abschnitt B von G, dagegen gibt es mindestens einen Abschnitt von G, dem kein ähnlicher Abschnitt in F entspricht.

3) Es gehört zu jedem Abschnitt B von G ein ähnlicher Abschnitt A von F, dagegen gibt es mindestens einen Abschnitt von F, dem kein ähnlicher Abschnitt in G entspricht.

Der Fall, daß es sowohl einen Abschnitt von F, dem kein ähnlicher in G entspricht, wie auch einen Abschnitt von G gibt, dem kein ähnlicher in F entspricht, ist nicht möglich; er wird durch den Satz M ausgeschlossen.

Nach Satz K ist im *ersten* Falle

$$F \simeq G.$$

Nach Satz L gibt es im *zweiten* Falle einen bestimmten Abschnitt B_1 von B, so daß

$$B_1 \simeq F,$$

und im *dritten* Falle einen bestimmten Abschnitt A_1 von F, so daß

$$A_1 \simeq G.$$

Es kann aber nicht gleichzeitig $F \simeq G$ und $F \simeq B_1$ sein, da alsdann auch $G \simeq B_1$ wäre, gegen den Satz B, und aus demselben Grunde kann nicht gleichzeitig $F \simeq G$ und $G \simeq A_1$ sein.

Aber auch das Zusammenbestehen von $F \simeq B_1$ und $G \simeq A_1$ ist unmöglich; denn nach Satz A würde aus $F \simeq B_1$ die Existenz eines Abschnitts B_1' von B_1 folgen, so daß $A_1 \simeq B_1'$. Es wäre daher auch $G \simeq B_1'$ gegen den Satz B.

O. *„Ist eine Teilmenge F' einer wohlgeordneten Menge F keinem Abschnitt von F ähnlich, so ist sie F selbst ähnlich.“*

Beweis. F' ist eine wohlgeordnete Menge nach Satz C, § 12. Wäre F' weder einem Abschnitt von F noch F selbst ähnlich, so gäbe es nach Satz N einen Abschnitt F_1' von F', der F ähnlich wäre. F_1' ist aber eine Teilmenge desjenigen Abschnitts A von F, der durch dasselbe Element bestimmt ist wie der Abschnitt F_1' von F'. Es müßte also die Menge F einer Teilmenge eines ihrer Abschnitte ähnlich sein, was dem Satz C widerspricht.

§ 14.
Die Ordnungszahlen wohlgeordneter Mengen.

Nach § 7 hat jede einfach geordnete Menge M einen bestimmten *Ordnungstypus* $\overline{M}$; es ist dies der Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergibt, wenn unter Festhaltung der Rangordnung ihrer Elemente von der Beschaffenheit der letzteren abstrahiert wird, so daß aus ihnen lauter Einsen werden, die

in einem bestimmten Rangverhältniss zueinander stehen. *Allen einander ähnlichen Mengen, und nur solchen, kommt ein und derselbe Ordnungstypus zu.*

Den Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge F nennen wir die ihr zukommende *„Ordnungszahl“*.

Sind α und β zwei beliebige *Ordnungszahlen*, so können sie ein *dreifaches* Verhalten zueinander haben. Sind nämlich F und G zwei wohlgeordnete Mengen derart, daß

$$\overline{F} = \alpha, \quad \overline{G} = \beta,$$

so sind nach dem Satze N, § 13 *drei* sich gegenseitig ausschließende Fälle möglich:

1) $$F \simeq G.$$

2) Es gibt einen bestimmten Abschnitt B_1 von G, so daß

$$F \simeq B_1.$$

3) Es gibt einen bestimmten Abschnitt A_1 von F, so daß

$$G \simeq A_1.$$

Wie man leicht sieht, bleibt jeder dieser drei Fälle bestehen, wenn F und G durch ihnen ähnliche Mengen F' und G' ersetzt werden; demnach haben wir es auch mit drei sich gegenseitig ausschließenden Beziehungen der Typen α und β zueinander zu tun.

Im ersten Falle ist $\alpha = \beta$; im zweiten sagen wir, daß $\alpha < \beta$, im dritten, daß $\alpha > \beta$.

Wir haben also den Satz:

A. *„Sind α und β zwei beliebige Ordnungszahlen, so ist entweder $\alpha = \beta$, oder $\alpha < \beta$, oder $\alpha > \beta$.“*

Aus der Erklärung des Kleiner- und Größerseins folgt leicht:

B. *„Hat man drei Ordnungszahlen α, β, γ und ist $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, so ist auch $\alpha < \gamma$.“*

Die Ordnungszahlen bilden also in ihrer *Größenordnung* eine einfach geordnete Menge; später wird sich zeigen, daß es eine *wohlgeordnete* Menge ist.

Die in § 8 definierten Operationen der *Addition* und *Multiplikation* von Ordnungstypen beliebiger einfach geordneter Mengen sind natürlich auch auf die Ordnungszahlen anwendbar.

Ist $\alpha = \overline{F}$, $\beta = \overline{G}$, wo F und G zwei wohlgeordnete Mengen sind, so ist [nach (1) S. 302]

$$\alpha + \beta = \overline{(F, G)}. \tag{1}$$

Die Vereinigungsmenge (F, G) ist offenbar auch eine wohlgeordnete Menge; wir haben also den Satz:

C. *„Die Summe zweier Ordnungszahlen ist ebenfalls eine Ordnungszahl.“*

In der Summe $\alpha + \beta$ heißt α der „*Augendus*", β der „*Addendus*".

Da F ein *Abschnitt* von (F, G), so hat man stets

$$\alpha < \alpha + \beta. \tag{2}$$

Hingegen ist G nicht ein *Abschnitt*, sondern ein *Rest* von (F, G), kann daher, wie wir in § 13 sahen, der Menge (F, G) ähnlich sein; trifft dies nicht ein, so ist G nach Satz O, § 13 [S. 320] einem Abschnitt von (F, G) ähnlich. Es ist also

$$\beta \leqq \alpha + \beta. \tag{3}$$

Sonach haben wir:

D. „*Die Summe zweier Ordnungszahlen ist stets größer als der Augendus, dagegen größer oder gleich dem Addendus. Hat man $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, so folgt hieraus immer, daß $\beta = \gamma$.*"

Im allgemeinen sind $\alpha + \beta$ und $\beta + \alpha$ nicht gleich. Dagegen hat man, wenn γ eine dritte Ordnungszahl ist,

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma). \tag{4}$$

Also [vgl. § 8, S. 302]:

E. „*Bei der Addition von Ordnungszahlen ist das assoziative Gesetz gültig.*"

Substituiert man in der Menge G vom Typus β für *jedes* Element g je eine Menge F_g vom Typus α, so erhält man nach Satz E, § 12 eine *wohlgeordnete* Menge H, deren Typus durch die Typen α und β völlig bestimmt ist und das *Produkt* $\alpha \cdot \beta$ genannt wird:

$$\overline{F}_g = \alpha, \tag{5}$$

$$\alpha \cdot \beta = \overline{H}. \tag{6}$$

F. „*Das Produkt zweier Ordnungszahlen ist ebenfalls eine Ordnungszahl.*"

In dem Produkt $\alpha \cdot \beta$ heißt α der „*Multiplikandus*", β der „*Multiplikator*".

Im allgemeinen sind $\alpha \cdot \beta$ und $\beta \cdot \alpha$ nicht gleich. Man hat aber (§ 8)

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma). \tag{7}$$

D. h.

G. „*Bei der Multiplikation von Ordnungszahlen gilt das assoziative Gesetz.*"

Das *distributive* Gesetz hat im allgemeinen (§ 8) nur in folgender Form hier Gültigkeit [vgl. S. 303]:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \tag{8}$$

In bezug auf die Größe des Produkts gilt, wie man leicht sieht, der Satz:

H. „*Ist der Multiplikator größer als 1, so ist das Produkt zweier Ordnungszahlen stets größer als der Multiplikandus, dagegen größer oder gleich dem Multiplikator. Hat man $\alpha\beta = \alpha\gamma$, so folgt hieraus immer, daß $\beta = \gamma$.*"

Andrerseits ist offenbar

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha. \tag{9}$$

Es kommt hier noch die Operation der *Subtraktion* hinzu. Sind α und β zwei Ordnungszahlen und $\alpha < \beta$, so existiert immer eine bestimmte Ordnungszahl, die wir $\beta - \alpha$ nennen, welche der Gleichung genügt

$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta. \tag{10}$$

Denn ist $\overline{G} = \beta$, so hat G einen Abschnitt B, so daß $\overline{B} = \alpha$; den zugehörigen Rest nennen wir S und haben

$$G = (B, S) \text{ und}$$

$$\beta = \alpha + \overline{S},$$

also

$$\beta - \alpha = \overline{S}. \tag{11}$$

Die Bestimmtheit von $\beta - \alpha$ erhellt daraus, daß der Abschnitt B von G ein völlig bestimmter [Satz F, S. 317], daher auch S eindeutig gegeben ist.

Wir heben folgende, aus (4), (8) und (10) fließende Formeln hervor:

$$(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha, \tag{12}$$

$$\gamma(\beta - \alpha) = \gamma\beta - \gamma\alpha. \text{ [18]} \tag{13}$$

Von Bedeutung ist es, daß die Ordnungszahlen stets auch in unendlicher Anzahl sich summieren lassen, so daß ihre Summe eine bestimmte, von der Reihenfolge ihrer Summanden abhängige Ordnungszahl ist.

Ist etwa

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$$

eine beliebige einfach unendliche Reihe von Ordnungszahlen und hat man

$$\beta_\nu = \overline{G}_\nu, \tag{14}$$

so ist [Satz E, S. 314] auch

$$G = (G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots) \tag{15}$$

eine wohlgeordnete Menge, deren Ordnungszahl β die Summe der β_ν darstellt. Wir haben also

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots = \overline{G} = \beta, \tag{16}$$

und man hat, wie aus der Definition des Produktes leicht hervorgeht, stets

$$\gamma \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots) = \gamma \cdot \beta_1 + \gamma \cdot \beta_2 + \cdots + \gamma \cdot \beta_\nu + \cdots \tag{17}$$

Setzen wir

$$\alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu, \tag{18}$$

so ist

$$\alpha_\nu = \overline{(G_1, G_2, \ldots G_\nu)}. \tag{19}$$

Es ist

$$\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu, \tag{20}$$

und wir können nach (10) die Zahlen β_ν durch die Zahlen α_ν wie folgt ausdrücken:

$$\beta_1 = \alpha_1; \quad \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu. \tag{21}$$

Die Reihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$$

stellt daher eine *beliebige* unendliche Reihe von Ordnungszahlen dar, welche *die Bedingung* (20) erfüllen; wir nennen sie eine „*Fundamentalreihe*" von Ordnungzahlen (§ 10); zwischen ihr und β besteht eine Beziehung, die sich folgendermaßen aussprechen läßt:

1) β ist $> \alpha_\nu$ für jedes ν, weil die Menge $(G_1, G_2, \ldots G_\nu)$, deren Ordnungszahl α_ν ist, ein *Abschnitt* der Menge G ist, welche die Ordnungszahl β hat.

2) Ist β' *irgendeine* Ordnungszahl $< \beta$, so ist von einem gewissen ν an stets

$$\alpha_\nu > \beta'.$$

Denn da $\beta' < \beta$, so gibt es einen Abschnitt B' der Menge G vom Typus β'. Das diesen Abschnitt bestimmende Element von G muß einer von den Teilmengen G_ν, wir wollen sie G_{ν_0} nennen, angehören. Dann ist aber B' auch Abschnitt von $(G_1, G_2, \ldots G_{\nu_0})$ und folglich $\beta' < \alpha_{\nu_0}$, daher

$$\alpha_\nu > \beta'$$

für $\nu \geqq \nu_0$.

Somit ist β die auf alle α_ν der Größe nach nächstfolgende Ordnungszahl; wir wollen sie daher die „*Grenze*" der α_ν für wachsende ν nennen und mit $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu$ bezeichnen, so daß nach (16) und (21)

$$\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu) + \cdots \tag{22}$$

Wir können das Vorangehende in folgendem Satze aussprechen:

I. „*Zu jeder Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu\}$ von Ordnungszahlen gehört eine Ordnungszahl $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu$, welche auf alle α_ν der Größe nach zunächst folgt; sie wird dargestellt in der Formel* (22)."

Wird unter γ irgendeine konstante Ordnungszahl verstanden, so beweist man leicht mit Hilfe der Formeln (12), (13), (17) die in folgenden Formeln enthaltenen Sätze:

$$\operatorname{Lim}_\nu (\gamma + \alpha_\nu) = \gamma + \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu, \tag{23}$$

$$\operatorname{Lim}_\nu \gamma \cdot \alpha_\nu \quad = \gamma \cdot \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu. \tag{24}$$

Wir haben in § 7 bereits erwähnt, daß alle einfach geordneten Mengen von gegebener *endlicher* Kardinalzahl ν einen und denselben Ordnungstypus haben. Dies läßt sich hier wie folgt beweisen [19]. Jede einfach geordnete

Menge von *endlicher* Kardinalzahl ist eine *wohlgeordnete* Menge; denn sie muß, ebenso wie jede ihrer Teilmengen ein niederstes Element haben, was sie nach Satz B, § 12 als eine wohlgeordnete Menge kennzeichnet.

Die Typen endlicher einfach geordneter Mengen sind daher nichts anderes als *endliche Ordnungszahlen*. Zwei verschiedenen Ordnungszahlen α und β kann aber nicht eine und dieselbe *endliche* Kardinalzahl ν zukommen. Ist nämlich etwa $\alpha < \beta$ und $\overline{G} = \beta$, so existiert, wie wir wissen, ein Abschnitt B von G, so daß $\overline{B} = \alpha$.

Es würde also der Menge G und ihrer Teilmenge B dieselbe endliche Kardinalzahl ν eignen. Dies ist nach Satz C, § 6 unmöglich.

Die *endlichen Ordnungszahlen* stimmen daher in ihren Eigenschaften mit den *endlichen Kardinalzahlen* überein.

Ganz anders verhält es sich mit den *transfiniten Ordnungszahlen*; zu einer und derselben transfiniten Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ gibt es eine *unendliche* Anzahl von Ordnungszahlen, die ein einheitliches zusammenhängendes System bilden, welches wir die „Zahlenklasse $Z(\mathfrak{a})$" nennen. Sie ist ein Teil der *Typenklasse* $[\mathfrak{a}]$ (§ 7).

Den nächsten Gegenstand unserer Betrachtung bildet die Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$, welche wir die *zweite Zahlenklasse* nennen wollen.

In diesem Zusammenhange verstehen wir nämlich unter der *ersten Zahlenklasse* die Gesamtheit $\{\nu\}$ aller *endlichen* Ordnungszahlen.

§ 15.

Die Zahlen der zweiten Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$.

Die zweite Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$ ist die Gesamtheit $\{\alpha\}$ aller Ordnungstypen α wohlgeordneter Mengen von der Kardinalzahl $\aleph_0$ (§ 6).

A. „*Die zweite Zahlenklasse hat eine kleinste Zahl $\omega = \operatorname{Lim}_\nu \nu$.*"

Beweis. Unter ω verstehen wir den Typus der wohlgeordneten Menge

$$F_0 = (f_1, f_2, \ldots f_\nu, \ldots), \tag{1}$$

wo ν alle endlichen Ordnungszahlen durchläuft und

$$f_\nu \prec f_{\nu+1}. \tag{2}$$

Es ist also (§ 7)

$$\omega = \overline{F}_0 \tag{3}$$

und (§ 6)

$$\overline{\overline{\omega}} = \aleph_0. \tag{4}$$

ω ist daher eine Zahl der zweiten Zahlenklasse, und zwar die *kleinste*. Denn ist γ irgendeine Ordnungszahl $< \omega$, so muß sie (§ 14) Typus eines *Abschnitts* von F_0 sein. F_0 hat aber nur Abschnitte

$$A = (f_1, f_2, \ldots f_\nu)$$

mit *endlicher* Ordnungszahl ν. Es ist daher $\gamma = \nu$.

Es gibt also keine *transfiniten* Ordnungszahlen, welche kleiner wären als ω, die daher die kleinste von ihnen ist. Nach der in § 14 gegebenen Erklärung von $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$ ist offenbar $\omega = \operatorname*{Lim}_\nu \nu$.

B. „*Ist α irgendeine Zahl der zweiten Zahlenklasse, so folgt auf sie als nächstgrößere Zahl derselben Zahlenklasse die Zahl $\alpha + 1$.*“

Beweis. Sei F eine wohlgeordnete Menge vom Typus α und von der Kardinalzahl $\aleph_0$, also

$$\overline{F} = \alpha, \tag{5}$$

$$\overline{\overline{\alpha}} = \aleph_0. \tag{6}$$

Wir haben, wenn unter g ein neu hinzutretendes Element verstanden wird,

$$\alpha + 1 = \overline{(F, g)}. \tag{7}$$

Da F ein Abschnitt von (F, g) ist, so haben wir

$$\alpha + 1 > \alpha. \tag{8}$$

Es ist

$$\overline{\overline{\alpha + 1}} = \overline{\overline{\alpha}} + 1 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 \quad (\S\ 6).$$

Die Zahl $\alpha + 1$ gehört also zur zweiten Zahlenklasse. Zwischen α und $\alpha + 1$ gibt es aber keine Ordnungszahlen; denn jede Zahl γ, die $< \alpha + 1$, entspricht als Typus einem Abschnitte von (F, g); ein solcher kann nur entweder F oder ein Abschnitt von F sein. γ ist also entweder $=$ oder $< \alpha$.

C. „*Ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ irgendeine Fundamentalreihe von Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenklasse, so gehört auch die auf sie der Größe nach zunächst folgende Zahl $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$ (§ 14) der zweiten Zahlenklasse an.*“

Beweis. Nach § 14 ergiebt sich aus der Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu\}$ die Zahl $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$, indem man eine andere Reihe $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$ herstellt, so daß

$$\beta_1 = \alpha_1, \ \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ldots \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu, \ldots$$

Sind dann $G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots$ wohlgeordnete Mengen [ohne gemeinsame Elemente] derart, daß

$$\overline{G}_\nu = \beta_\nu,$$

so ist auch

$$G = (G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots)$$

eine wohlgeordnete Menge und

$$\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu = \overline{G}.$$

Es handelt sich daher nur um den Nachweis, daß

$$\overline{\overline{G}} = \aleph_0.$$

Da aber die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$ der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehören, so ist

$$\overline{\overline{G}}_\nu \leqq \aleph_0$$

und daher

$$\overline{\overline{G}} \leqq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

G ist aber jedenfalls eine transfinite Menge, also ist der Fall $\overline{\overline{G}} < \aleph_0$ ausgeschlossen [20].

Zwei *Fundamentalreihen* $\{\alpha_\nu\}$ und $\{\alpha'_\nu\}$ von Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenklasse nennen wir (§ 10) [S. 308] „*zusammengehörig*“, in Zeichen

$$\{\alpha_\nu\} \,\|\, \{\alpha'_\nu\}, \tag{9}$$

wenn zu *jedem* ν endliche Zahlen λ_0, μ_0 vorhanden sind, so daß

$$\alpha'_\lambda > \alpha_\nu, \quad \lambda \geqq \lambda_0, \tag{10}$$

und

$$\alpha_\mu > \alpha'_\nu, \quad \mu \geqq \mu_0. \tag{11}$$

D. „*Die zu zwei Fundamentalreihen $\{\alpha_\nu\}$, $\{\alpha'_\nu\}$ gehörigen Grenzzahlen $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$ und $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha'_\nu$ sind dann und nur dann gleich, wenn $\{\alpha_\nu\} \,\|\, \{\alpha'_\nu\}$.*“

Beweis. Der Kürze halber setzen wir $\operatorname{Lim} \alpha_\nu = \beta$, $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha'_\nu = \gamma$.

Nehmen wir zuerst an, es sei $\{\alpha_\nu\} \,\|\, \{\alpha'_\nu\}$, so behaupten wir, daß $\beta = \gamma$. Wäre nämlich β nicht gleich γ, so müßte eine von diesen beiden Zahlen die kleinere sein, etwa $\beta < \gamma$. Von einem gewissen ν an wäre $\alpha'_\nu > \beta$ [S. 324], daher auch wegen (11) von einem gewissen μ an $\alpha_\mu > \beta$. Dies ist aber unmöglich, weil $\beta = \operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$, für alle μ also $\alpha_\mu < \beta$.

Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß $\beta = \gamma$, so muß, weil $\alpha_\nu < \gamma$, von einem gewissen λ an $\alpha'_\lambda > \alpha_\nu$, und weil $\alpha'_\nu < \beta$, von einem gewissen μ an $\alpha_\mu > \alpha'_\nu$ sein; d. h. es ist $\{\alpha_\nu\} \,\|\, \{\alpha'_\nu\}$.

E. „*Ist α irgendeine Zahl der zweiten Zahlenklasse, ν_0 eine beliebige endliche Ordnungszahl, so ist $\nu_0 + \alpha = \alpha$ und daher auch $\alpha - \nu_0 = \alpha$.*“

Beweis. Wir überzeugen uns zuerst von der Richtigkeit des Satzes wenn $\alpha = \omega$. Es ist

$$\omega = \overline{(f_1, f_2 \ldots f_\nu, \ldots)},$$

$$\nu_0 = \overline{(g_1, g_2, \ldots g_{\nu_0})},$$

daher

$$\nu_0 + \omega = \overline{(g_1, g_2, \ldots g_{\nu_0},\ f_1, f_2, \ldots f_\nu \ldots)} = \omega .$$

Ist aber $\alpha > \omega$, so haben wir [S. 323]

$$\alpha = \omega + (\alpha - \omega) ,$$

$$\nu_0 + \alpha = (\nu_0 + \omega) + (\alpha - \omega) = \omega + (\alpha - \omega) = \alpha .$$

F. „*Ist ν_0 irgendeine endliche Ordnungszahl, so ist $\nu_0 \cdot \omega = \omega$.*“

Beweis. Um eine Menge vom Typus $\nu_0 \cdot \omega$ zu erhalten, hat man für die einzelnen Elemente f_ν der Menge $(f_1, f_2, \ldots f_\nu, \ldots)$ Mengen $(g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \cdots g_{\nu,\nu_0})$ vom Typus ν_0 zu substituieren. Man erhält die Menge

$$(g_{1,1}, g_{1,2}, \ldots g_{1,\nu_0}, g_{2,1}, \ldots g_{2,\nu_0}, \ldots g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \ldots g_{\nu,\nu_0}, \ldots) ,$$

welche der Menge $\{f_\nu\}$ offenbar ähnlich ist; daher ist

$$\nu_0 \omega = \omega .$$

Kürzer ergibt sich dasselbe wie folgt: nach (24) § 14 ist, da $\omega = \operatorname*{Lim}_\nu \nu$,

$$\nu_0 \omega = \operatorname*{Lim}_\nu \nu_0 \nu .$$

Andrerseits ist

$$\{\nu_0 \nu\} \parallel \{\nu\} ,$$

mithin

$$\operatorname*{Lim}_\nu \nu_0 \nu = \operatorname*{Lim}_\nu \nu = \omega ,$$

also

$$\nu_0 \omega = \omega .$$

G. „*Man hat immer*

$$(\alpha + \nu_0)\, \omega = \alpha \omega ,$$

unter α eine Zahl der zweiten, unter ν_0 eine solche der ersten Zahlenklasse verstanden.“

Beweis. Wir haben

$$\operatorname*{Lim}_\nu \nu = \omega .$$

Nach (24) § 14 ist daher

$$(\alpha + \nu_0)\, \omega = \operatorname*{Lim}_\nu (\alpha + \nu_0) \nu .$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}(\alpha + \nu_0)\, \nu &= \overbrace{(\alpha + \nu_0)}^{1} + \overbrace{(\alpha + \nu_0)}^{2} + \cdots + \overbrace{(\alpha + \nu_0)}^{\nu} \\ &= \alpha + \overbrace{(\nu_0 + \alpha)}^{1} + \overbrace{(\nu_0 + \alpha)}^{2} \cdots \overbrace{(\nu_0 + \alpha)}^{(\nu - 1)} + \nu_0 \\ &= \overbrace{\alpha}^{1} + \overbrace{\alpha}^{2} + \cdots + \overbrace{\alpha}^{\nu} + \nu_0 \\ &= \alpha \nu + \nu_0 .\end{aligned}$$

Man hat nun, wie leicht zu sehen [weil $\alpha(\nu + 1) = \alpha \nu + \alpha > \alpha \nu + \nu_0$],

$$\{\alpha \nu + \nu_0\} \parallel \{\alpha \nu\}$$

und folglich

$$\operatorname*{Lim}_\nu (\alpha + \nu_0) \nu = \operatorname*{Lim}_\nu (\alpha \nu + \nu_0) = \operatorname*{Lim}_\nu \alpha \nu = \alpha \omega .$$

H. „*Ist α irgendeine Zahl der zweiten Zahlenklasse, so bildet die Gesamtheit $\{\alpha'\}$ aller Zahlen α' der ersten und zweiten Zahlenklasse, welche kleiner sind als α, in ihrer Größenordnung eine wohlgeordnete Menge vom Typus α.*“

Beweis. Sei F eine wohlgeordnete Menge derart, daß $\overline{F} = \alpha$; f_1 sei das niederste Element von F. Ist α' eine beliebige Ordnungszahl $< \alpha$, so gibt es (§ 14) einen bestimmten Abschnitt A' von F, so daß

$$\overline{A'} = \alpha',$$

und umgekehrt bestimmt jeder Abschnitt A' durch seinen Typus $\overline{A'} = \alpha'$ eine Zahl $\alpha' < \alpha$ der ersten oder zweiten Zahlenklasse; denn, da $\overline{\overline{F}} = \aleph_0$, so kann $\overline{\overline{A'}}$ nur eine endliche Kardinalzahl oder $\aleph_0$ sein.

Der Abschnitt A' wird durch ein Element $f' \succ f_1$ von F bestimmt, und umgekehrt bestimmt jedes Element $f' \succ f_1$ von F einen Abschnitt A' von F. Sind f' und f'' zwei Elemente $\succ f_1$ von F, A' und A'' die durch sie bestimmten Abschnitte von F, α' und α'' deren Ordnungstypen, und ist etwa $f' \prec f''$, so ist (§ 13) $A' < A''$ und daher $\alpha' < \alpha''$.

Setzen wir daher $F = (f_1, F')$, so wird, wenn man dem Element f' von F' das Element α' von $\{\alpha'\}$ zuordnet, eine Abbildung dieser beiden Mengen gewonnen. Es ist somit

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{F'}.$$

Nun ist aber $\overline{F'} = \alpha - 1$ und (nach Satz E) $\alpha - 1 = \alpha$, daher

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha .$$

Da $\overline{\overline{\alpha}} = \aleph_0$, so ist auch $\overline{\overline{\{\alpha'\}}} = \aleph_0$; es gilt daher:

J. „*Die Menge $\{\alpha'\}$ aller Zahlen α' der ersten und zweiten Zahlenklasse, welche kleiner sind als eine Zahl α der zweiten Zahlenklasse, hat die Kardinalzahl $\aleph_0$.*“

K. „*Jede Zahl α der zweiten Zahlenklasse ist entweder derart, daß sie aus einer nächst kleineren $\underline{\alpha}_1$ durch Hinzufügung der 1 hervorgeht:*

$$\alpha = \underline{\alpha}_1 + 1 ,$$

oder es läßt sich eine Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu\}$ von Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenklasse angeben, so daß

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu .\text{“}$$

Beweis. Sei $\alpha = \overline{F}$. Hat F ein dem Range nach höchstes Element g, so ist $F = (A, g)$, wo A der durch g bestimmte Abschnitt von F ist. Wir haben dann den ersten Fall, nämlich

$$\alpha = \overline{A} + 1 = \underline{\alpha}_1 + 1 .$$

Es existiert also eine *nächst kleinere* Zahl, die eben $\underline{\alpha}_1$ genannt wird.

Besitzt aber F kein höchstes Element, so fassen wir den Inbegriff $\{\alpha'\}$ aller Zahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse ins Auge, welche kleiner als α sind. Nach Satz H ist die Menge $\{\alpha'\}$ in ihrer Größenordnung ähnlich der Menge F; unter den *Zahlen* α' ist daher keine die größte. Nach Satz J läßt sich die Menge $\{\alpha'\}$ in die Form $\{\alpha'_\nu\}$ einer einfach unendlichen Reihe bringen. Gehen wir von α'_1 aus, so werden im allgemeinen in dieser von der Größenordnung abweichenden Rangordnung die nächstfolgenden $\alpha'_2, \alpha'_3 \ldots$ kleiner sein als α'_1; jedenfalls aber kommen im weiteren Verlaufe Glieder vor, die $> \alpha'_1$; denn α'_1 kann nicht größer sein als alle anderen Glieder, weil unter den Zahlen $\{\alpha'_\nu\}$ keine größte vorhanden ist. Die mit dem kleinsten Index versehene Zahl α'_ν, welche größer ist als α'_1, sei α'_{ϱ_2}. Ebenso sei α'_{ϱ_3} die mit dem kleinsten Index versehene Zahl der Reihe $\{\alpha'_\nu\}$, welche größer ist als α'_{ϱ_2}. Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine unendliche Reihe wachsender Zahlen, eine Fundamentalreihe

$$\alpha'_1,\ \alpha'_{\varrho_2},\ \alpha'_{\varrho_3}, \ldots \alpha'_{\varrho_\nu}, \ldots .$$

Es ist

$$1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \cdots < \varrho_\nu < \varrho_{\nu+1}, \ \ldots,$$

$$\alpha'_1 < \alpha'_{\varrho_2} < \alpha'_{\varrho_3} < \cdots < \alpha'_{\varrho_\nu} < \alpha'_{\varrho_{\nu+1}} \ \ldots,$$

$$\alpha'_\mu < \alpha'_{\varrho_\nu} \quad \text{stets, wenn} \quad \mu < \varrho_\nu ,$$

und da offenbar $\nu \overline{\gtrless} \varrho_\nu$, so haben wir immer

$$\alpha'_\nu \leqq \alpha'_{\varrho_\nu} .$$

Man sieht hieraus, daß jede Zahl α'_ν, daher auch jede Zahl $\alpha' < \alpha$ von Zahlen α'_{ϱ_ν} für hinreichend große Werte von ν übertroffen wird.

α ist aber die auf alle Zahlen α' der Größe nach zunächst folgende Zahl, mithin auch die nächstgrößere Zahl in bezug auf alle α'_{ϱ_ν}. Setzen wir daher $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\alpha_{\varrho_{\nu+1}} = \alpha_{\nu+1}$, so ist

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu .$$

Aus den Sätzen B, C, ... K erhellt, daß die Zahlen der zweiten Zahlenklasse sich auf zwei Weisen aus kleineren Zahlen ergeben. Die einen, wir nennen sie *Zahlen erster Art*, erhält man aus einer nächstkleineren $\underline{\alpha}_1$ durch Hinzufügung der 1, nach der Formel

$$\alpha = \underline{\alpha}_1 + 1 ;$$

die anderen, wir nennen sie *Zahlen zweiter Art*, sind so beschaffen, daß es für sie *eine nächstkleinere $\underline{\alpha}_1$ gar nicht gibt*; diese gehen aber aus *Fundamentalreihen* $\{\alpha_\nu\}$ als deren *Grenzzahlen* hervor nach der Formel

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu .$$

α ist hier die auf sämtliche Zahlen α_ν der Größe nach *nächstfolgende* Zahl.

Diese beiden Weisen des Hervorgehens größerer Zahlen aus kleineren nennen wir das *erste und das zweite Erzeugungsprinzip* der Zahlen der zweiten Zahlenklasse.

§ 16.

Die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse ist gleich der zweitkleinsten transfiniten Kardinalzahl Alef-eins.

Bevor wir uns in den folgenden Paragraphen einer eingehenderen Betrachtung der Zahlen der zweiten Zahlenklasse und der sie beherrschenden Gesetzmäßigkeit zuwenden, wollen wir die Frage nach der Kardinalzahl beantworten, welche der Menge $Z(\aleph_0) = \{\alpha\}$ aller dieser Zahlen zukommt.

A. „*Die Gesamtheit $\{\alpha\}$ aller Zahlen α der zweiten Zahlenklasse bildet in ihrer Größenordnung eine wohlgeordnete Menge.*“

Beweis [21]. Verstehen wir unter A_α die Gesamtheit aller Zahlen der *zweiten* Zahlenklasse, die kleiner sind als eine gegebene Zahl α, in ihrer Größenordnung, so ist A_α eine wohlgeordnete Menge vom Typus $\alpha - \omega$. Dies geht aus Satz H, § 15 hervor. Die dort mit $\{\alpha'\}$ bezeichnete Menge aller Zahlen α' der *ersten* und *zweiten* Zahlenklasse ist aus $\{\nu\}$ und A_α zusammengesetzt, so daß

$$\{\alpha'\} = (\{\nu\},\ A_\alpha) .$$

Daher ist

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{\{\nu\}} + \overline{A_\alpha}$$

und da

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha , \quad \overline{\{\nu\}} = \omega ,$$

so ist

$$\overline{A_\alpha} = \alpha - \omega .$$

Sei J irgendeine Teilmenge von $\{\alpha\}$ derart, daß es Zahlen in $\{\alpha\}$ gibt, die größer sind als alle Zahlen von J. Sei etwa α_0 eine dieser Zahlen. Dann ist auch J eine Teilmenge von A_{α_0+1}, und zwar eine solche, daß mindestens die Zahl α_0 von A_{α_0+1} größer ist als alle Zahlen von J. Da A_{α_0+1} eine wohlgeordnete Menge ist, so muß (§ 12) eine Zahl α' von A_{α_0+1}, die daher auch eine Zahl von $\{\alpha\}$ ist, auf alle Zahlen von J zunächst folgen. Es ist somit die Bedingung II, § 12 an $\{\alpha\}$ erfüllt; die Bedingung I, § 12 ist auch erfüllt, weil $\{\alpha\}$ die kleinste Zahl ω hat.

Wendet man nun auf die wohlgeordnete Menge $\{\alpha\}$ die Sätze A und C, § 12 an, so erhält man die folgenden Sätze:

B. „*Jeder Inbegriff von verschiedenen Zahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse hat eine kleinste Zahl, ein Minimum.*"

C. „*Jeder Inbegriff von verschiedenen, in ihrer Größenordnung aufgefaßten Zahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse bildet eine wohlgeordnete Menge.*"

Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse von derjenigen der ersten, welche $\aleph_0$ ist, verschieden ist.

D. „*Die Mächtigkeit der Gesamtheit $\{\alpha\}$ aller Zahlen α der zweiten Zahlenklasse ist nicht gleich $\aleph_0$.*"

Beweis [22]. Wäre $\overline{\overline{\{\alpha\}}} = \aleph_0$, so könnte man die Gesamtheit $\{\alpha\}$ in die Form einer einfach unendlichen Reihe

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \ldots$$

bringen, so daß $\{\gamma_\nu\}$ die Gesamtheit *aller* Zahlen der zweiten Zahlenklasse in einer von der Größenordnung abweichenden Rangordnung darstellen würde, und es enthielte $\{\gamma_\nu\}$ ebensowenig wie $\{\alpha\}$ eine größte Zahl.

Von γ_1 ausgehend sei γ_{ϱ_2} das mit dem kleinsten Index versehene Glied jener Reihe $> \gamma_1$, γ_{ϱ_3} das mit dem kleinsten Index versehene Glied $> \gamma_{\varrho_2}$ u. s. w. Wir erhalten eine unendliche Reihe wachsender Zahlen

$$\gamma_1, \gamma_{\varrho_2}, \ldots \gamma_{\varrho_\nu}, \ldots,$$

so daß

$$1 < \varrho_2 < \varrho_3 \ldots \varrho_\nu < \varrho_{\nu+1}, \ldots,$$

$$\gamma_1 < \gamma_{\varrho_2} < \gamma_{\varrho_3} \ldots \gamma_{\varrho_\nu} < \gamma_{\varrho_{\nu+1}},$$

$$\gamma_\nu \leqq \gamma_{\varrho_\nu}.$$

Nach Satz C, § 15 [S. 326] würde es eine bestimmte Zahl δ der zweiten Zahlenklasse geben, nämlich

$$\delta = \operatorname*{Lim}_{\nu} \gamma_{\varrho_\nu},$$

welche größer wäre als alle γ_{ϱ_ν}; folglich wäre auch

$$\delta > \gamma_\nu$$

für jedes ν.

Nun enthält aber $\{\gamma_\nu\}$ *alle* Zahlen der zweiten Zahlenklasse, folglich auch die Zahl δ; es wäre also für ein bestimmtes ν_0

$$\delta = \gamma_{\nu_0},$$

welche Gleichung mit der Relation $\delta > \gamma_{\nu_0}$ unverträglich ist. Die Annahme $\overline{\overline{\{\alpha\}}} = \aleph_0$ führt also zu einem Widerspruch.

E. „*Ein beliebiger Inbegriff $\{\beta\}$ von verschiedenen Zahlen β der zweiten Zahlenklasse hat, wenn er unendlich ist, entweder die Kardinalzahl $\aleph_0$ oder die Kardinalzahl $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ der zweiten Zahlenklasse.*

Beweis. Die Menge $\{\beta\}$ in ihrer Größenordnung ist als Teilmenge der wohlgeordneten Menge $\{\alpha\}$ nach Satz O, § 13 entweder einem Abschnitte A_{α_0} der letzteren (d. h. dem Inbegriffe aller Zahlen der zweiten Zahlenklasse, welche $< \alpha_0$, in ihrer Größenordnung) oder der Gesamtheit $\{\alpha\}$ selbst ähnlich. Wie im Beweise von Satz A gezeigt wurde, ist $\overline{A}_{\alpha_0} = \alpha_0 - \omega$.

Wir haben also entweder $\overline{\{\beta\}} = \alpha_0 - \omega$ oder $\overline{\{\beta\}} = \overline{\{\alpha\}}$, daher auch $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ entweder $= \overline{\overline{\alpha_0 - \omega}}$ oder $= \overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Es ist aber $\overline{\overline{\alpha_0 - \omega}}$ entweder eine endliche Kardinalzahl oder $= \aleph_0$ (Satz I, § 15). Der erste Fall ist hier ausgeschlossen, weil $\{\beta\}$ als unendliche Menge vorausgesetzt ist. Somit ist die Kardinalzahl $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ entweder $= \aleph_0$ oder $= \overline{\overline{\{\alpha\}}}$.

F. „*Die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse $\{\alpha\}$ ist die zweitkleinste transfinite Kardinalzahl Alef-eins.*"

Beweis. Es gibt keine Kardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche $> \aleph_0$ und $< \overline{\overline{\{\alpha\}}}$ wäre. Denn sonst müßte nach § 2 eine unendliche Teilmenge $\{\beta\}$ von $\{\alpha\}$ existieren, so daß $\overline{\overline{\{\beta\}}} = \mathfrak{a}$.

Dem soeben bewiesenen Satze E zufolge hat aber die Teilmenge $\{\beta\}$ entweder die Kardinalzahl $\aleph_0$ oder die Kardinalzahl $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Es ist daher die Kardinalzahl $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ notwendig die auf $\aleph_0$ der Größe nach nächstfolgende Kardinalzahl, welche wir $\aleph_1$ nennen.

In der zweiten Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$ besitzen wir daher den natürlichen *Repräsentanten* für die zweitkleinste transfinite Kardinalzahl *Alef-eins*.

§ 17.

Die Zahlen von der Form $\omega^\mu \nu_0 + \omega^{\mu-1} \nu_1 + \cdots + \nu_\mu$. [23]

Es ist zweckmäßig, sich zunächst mit denjenigen Zahlen von $Z(\aleph_0)$ vertraut zu machen, welche ganze (rationale) Funktionen endlichen Grades von ω sind. Jede derartige Zahl läßt sich, und dies nur auf eine Weise, in die Form bringen

$$\varphi = \omega^\mu \nu_0 + \omega^{\mu-1} \nu_1 + \cdots + \nu_\mu, \tag{1}$$

wo μ, ν_0 endlich und von Null verschieden sind, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\mu$ aber auch Null sein können. Dies beruht darauf, daß

$$\omega^{\mu'} \nu' + \omega^\mu \nu = \omega^\mu \nu, \tag{2}$$

falls $\mu' < \mu$ und $\nu > 0$.

Denn nach (8), § 14 [S. 322] ist

$$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^{\mu}\nu = \omega^{\mu'}(\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu),$$

und nach Satz E, § 15 [S. 327]

$$\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu = \omega^{\mu-\mu'}\nu.$$

Es können daher in einem Aggregate von der Form

$$\cdots + \omega^{\mu'}\nu' + \omega^{\mu}\nu + \cdots$$

alle Glieder fortgelassen werden, denen nach rechts hin Glieder höheren Grades in ω folgen. Dies Verfahren kann so lange fortgesetzt werden, bis die in (1) gegebene Form erreicht ist. Wir heben noch hervor, daß

$$\omega^{\mu}\nu + \omega^{\mu}\nu' = \omega^{\mu}(\nu + \nu'). \tag{3}$$

Vergleichen wir nun die Zahl φ mit einer Zahl ψ derselben Art

$$\psi = \omega^{\lambda}\varrho_0 + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_{\lambda}. \tag{4}$$

Sind μ und λ verschieden und etwa $\mu < \lambda$, so haben wir nach (2)

$$\varphi + \psi = \psi,$$

daher

$$\varphi < \psi.$$

Sind $\mu = \lambda$, ν_0 und ϱ_0 verschieden, und etwa $\nu_0 < \varrho_0$, so ist nach (2)

$$\varphi + \left(\omega^{\lambda}(\varrho_0 - \nu_0) + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_{\mu}\right) = \psi,$$

daher auch

$$\varphi < \psi.$$

Ist endlich

$$\mu = \lambda, \quad \nu_0 = \varrho_0, \quad \nu_1 = \varrho_1, \ldots \nu_{\sigma-1} = \varrho_{\sigma-1}, \quad \sigma \lesseqgtr \mu,$$

dagegen ν_σ von ϱ_σ verschieden und etwa $\nu_\sigma < \varrho_\sigma$, so ist nach (2)

$$\varphi + \left(\omega^{\lambda-\sigma}(\varrho_\sigma - \nu_\sigma) + \omega^{\lambda-\sigma-1}\varrho_{\sigma+1} + \cdots + \varrho_{\mu}\right) = \psi,$$

daher wieder

$$\varphi < \psi.$$

Wir sehen also, daß nur bei völliger Identität der Ausdrücke φ und ψ die durch sie dargestellten Zahlen gleich sein können.

Die *Addition* von φ und ψ führt zu folgendem Resultat:

1) ist $\mu < \lambda$, so ist, wie schon oben bemerkt wurde,

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2) Ist $\mu = \lambda$, so hat man

$$\varphi + \psi = \omega^{\lambda}(\nu_0 + \varrho_0) + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_{\lambda}.$$

3) Ist $\mu > \lambda$, so hat man

$$\varphi + \psi = \omega^{\mu}\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \omega^{\lambda+1}\nu_{\mu-\lambda-1} + \omega^{\lambda}(\nu_{\mu-\lambda} + \varrho_0) + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_{\lambda}.$$

Um die Multiplikation von φ und ψ auszuführen, bemerken wir, daß, wenn ϱ eine endliche von Null verschiedene Zahl ist, die Formel besteht

$$\varphi\varrho = \omega^{\mu}\nu_0\varrho + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_{\mu}. \tag{5}$$

Sie ergibt sich leicht durch Ausführung der aus ϱ Gliedern bestehenden Summe $\varphi + \varphi + \cdots + \varphi$.

Durch wiederholte Anwendung des Satzes G, § 15 erhält man ferner, unter Berücksichtigung von F, § 15

$$\varphi\omega = \omega^{\mu+1}, \tag{6}$$

daher auch

$$\varphi\omega^{\lambda} = \omega^{\mu+\lambda}. \tag{7}$$

Nach dem distributiven Gesetze [(8), S. 322] ist

$$\varphi\psi = \varphi\omega^{\lambda}\varrho_0 + \varphi\omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varphi\omega\varrho_{\lambda-1} + \varphi\varrho_{\lambda}.$$

Die Formeln (4), (5) und (7) liefern daher folgendes Resultat:

1) Ist $\varrho_\lambda = 0$, so hat man

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\varrho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \omega^{\mu+1}\varrho_{\lambda-1} = \omega^{\mu}\psi.$$

2) Ist ϱ_λ nicht $= 0$, so ist

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\varrho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \omega^{\mu+1}\varrho_{\lambda-1} + \omega^{\mu}\nu_0\varrho_{\lambda} + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_{\mu}.$$

Zu einer bemerkenswerten Zerlegung der Zahlen φ kommen wir auf folgende Weise: Es sei

$$\varphi = \omega^{\mu}\varkappa_0 + \omega^{\mu_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau, \tag{8}$$

wo

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\tau \geqq 0$$

und $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\tau$ von Null verschiedene endliche Zahlen sind. Wir haben dann

$$\varphi = (\omega^{\mu_1}\varkappa_1 + \omega^{\mu_2}\varkappa_2 + \cdots + \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau)(\omega^{\mu-\mu_1}\varkappa_0 + 1).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhalten wir

$$\varphi = \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_\tau}\varkappa_{\tau-1} + 1)(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}}\varkappa_{\tau-2} + 1)\ldots(\omega^{\mu-\mu_1}\varkappa_0 + 1).$$

Nun ist aber [nach (5)]

$$\omega^{\lambda}\varkappa + 1 = (\omega^{\lambda} + 1)\varkappa,$$

falls $\varkappa$ eine von Null verschiedene endliche Zahl ist, daher

$$\varphi = \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_\tau}+1)\varkappa_{\tau-1}(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}}+1)\varkappa_{\tau-2}\cdots \qquad (9)$$
$$\ldots(\omega^{\mu-\mu_1}+1)\varkappa_0\,.$$

Die hier vorkommenden Faktoren $\omega^\lambda + 1$ sind sämtlich *unzerlegbar*, und es läßt sich eine Zahl φ in dieser Produktform nur *auf eine einzige Weise* darstellen. Ist $\mu_\tau = 0$, so ist φ von der *ersten* Art, in allen anderen Fällen von der *zweiten* Art.

Die scheinbare Abweichung der Formeln dieses Paragraphen von denjenigen, welche bereits in (III 4, Nr. 5, § 14, S. 203ff.) gegeben wurden, hängt nur mit der veränderten Schreibweise des Produktes zweier Zahlen zusammen, da wir nun den Multiplikandus links, den Multiplikator rechts setzen, damals jedoch die entgegengesetzte Regel befolgten.

§ 18.

Die Potenz γ^α im Gebiete der zweiten Zahlenklasse. [24]

Es sei ξ eine *Veränderliche*, deren Gebiet aus den Zahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse mit Einschluß der 0 besteht. γ und δ seien zwei demselben Gebiete angehörige *Konstanten*, und zwar

$$\delta > 0\,, \quad \gamma > 1\,.$$

Wir können dann folgenden Satz begründen:

A. *„Es gibt eine einzige, völlig bestimmte eindeutige Funktion $f(\xi)$ der Veränderlichen ξ, welche folgende Bedingungen erfüllt:*

1) $f(0) = \delta$.

2) *Sind ξ' und ξ'' zwei beliebige Werte von ξ, und ist*

$$\xi' < \xi'',$$

so ist

$$f(\xi') < f(\xi'')\,.$$

3) *Für jeden Wert von ξ ist*

$$f(\xi+1) = f(\xi)\gamma\,.$$

4) *Ist $\{\xi_\nu\}$ eine beliebige Fundamentalreihe, so ist auch $\{f(\xi_\nu)\}$ eine solche, und hat man*

$$\xi = \operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu\,,$$

so ist

$$f(\xi) = \operatorname*{Lim}_\nu f(\xi_\nu)\,.\text{“}$$

Beweis. Nach 1) und 3) haben wir

$$f(1) = \delta\gamma\,, \quad f(2) = \delta\gamma\gamma\,, \quad f(3) = \delta\gamma\gamma\gamma\,, \ldots$$

und man hat wegen $\delta > 0$, $\gamma > 1$

$$f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(\nu) < f(\nu+1)\,, \ldots.$$

Somit ist die Funktion $f(\xi)$ für das Gebiet $\xi < \omega$ völlig bestimmt.

Nehmen wir nun an, es stehe der Satz fest für alle Werte von ξ, die $< \alpha$ sind, wo α irgendeine Zahl der zweiten Zahlenklasse ist, so ist er auch gültig für $\xi \leqq \alpha$. Denn ist α von der *ersten* Art, so folgt aus 3)

$$f(\alpha) = f(\alpha_1)\gamma > f(\alpha_1);$$

es sind also auch die Bedingungen 2), 3), 4) für $\xi \leqq \alpha$ erfüllt. Ist aber α von der *zweiten* Art und $\{\alpha_\nu\}$ eine Fundamentalreihe derart, daß $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu = \alpha$, so folgt aus 2), daß auch $\{f(\alpha_\nu)\}$ eine Fundamentalreihe ist, und aus 4), daß $f(\alpha) = \operatorname*{Lim}_\nu f(\alpha_\nu)$. Nimmt man eine andere Fundamentalreihe $\{\alpha'_\nu\}$ derart, daß $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha'_\nu = \alpha$, so sind wegen 2) die beiden Fundamentalreihen $\{f(\alpha_\nu)\}$ und $\{f(\alpha'_\nu)\}$ *zusammengehörig* [S. 327]; also ist $f(\alpha) = \operatorname*{Lim}_\nu f(\alpha'_\nu)$. Der Wert $f(\alpha)$ ist also auch in diesem Falle *eindeutig* bestimmt.

Ist α' irgendeine Zahl $< \alpha$, so überzeugt man sich leicht, daß $f(\alpha') < f(\alpha)$. Es sind also die Bedingungen 2), 3), 4) auch für $\xi \lesseqgtr \alpha$ erfüllt. Daraus folgt die Gültigkeit des Satzes *für alle Werte* von ξ.

Denn gäbe es Ausnahmewerte von ξ, für welche er nicht bestände, so müßte nach Satz B, § 16 einer derselben, wir nennen ihn α, der *kleinste* sein. Es wäre dann der Satz gültig für $\xi < \alpha$, nicht aber für $\xi \leqq \alpha$, was mit dem soeben Bewiesenen in Widerspruch stehen würde.

Es gibt daher für das ganze Gebiet von ξ *eine* und nur eine Funktion $f(\xi)$, welche die Bedingungen 1) bis 4) erfüllt.

Legt man der Konstanten δ den Wert 1 bei, und wird alsdann die Funktion $f(\xi)$ mit

$$\gamma^\xi$$

bezeichnet, so können wir folgenden Satz formulieren:

B. *„Ist γ eine beliebige der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehörige Konstante > 1, so gibt es eine ganz bestimmte Funktion γ^ξ von ξ, so daß*

1) $\gamma^0 = 1$.

2) *Wenn $\xi' < \xi''$, so ist $\gamma^{\xi'} < \gamma^{\xi''}$.*

3) *Für jeden Wert von ξ ist $\gamma^{\xi+1} = \gamma^\xi\gamma$.*

4) *Ist $\{\xi_\nu\}$ eine Fundamentalreihe, so ist auch $\{\gamma^{\xi_\nu}\}$ eine solche, und man hat, falls $\xi = \operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu$, auch*

$$\gamma^\xi = \operatorname*{Lim}_\nu \gamma^{\xi_\nu}.\text{“}$$

§ 19.

Die Normalform der Zahlen der zweiten Zahlenklasse.

Es sei α irgendeine Zahl der zweiten Zahlenklasse. Die Potenz ω^{ξ} wird für hinreichend große Werte von ξ größer als α. Dies ist nach Satz F, § 18 stets der Fall für $\xi > \alpha$, im allgemeinen wird es aber auch schon für kleinere Werte von ξ eintreten.

Nach Satz B, § 16 muß unter den Werten von ξ, für welche

$$\omega^{\xi} > \alpha \text{ ist,}$$

einer *der kleinste* sein; wir nennen ihn β und überzeugen uns leicht, daß er *nicht* eine Zahl der *zweiten* Art sein kann. Wäre nämlich

$$\beta = \operatorname{Lim}_{\nu} \beta_{\nu},$$

so hätte man, da $\beta_{\nu} < \beta$,

$$\omega^{\beta_{\nu}} \leqq \alpha,$$

daher auch

$$\operatorname{Lim}_{\nu} \omega^{\beta_{\nu}} \leqq \alpha.$$

Es wäre also

$$\omega^{\beta} \leqq \alpha,$$

während doch

$$\omega^{\beta} > \alpha$$

sein sollte.

Also ist β von der *ersten* Art. Wir bezeichnen β_{-1} mit α_0, so daß $\beta = \alpha_0 + 1$, und können daher behaupten, *daß es eine völlig bestimmte Zahl α_0 der ersten oder zweiten Zahlenklasse gibt, welche die beiden Bedingungen erfüllt*

$$\omega^{\alpha_0} \leqq \alpha, \quad \omega^{\alpha_0}\omega > \alpha. \tag{1}$$

Aus der zweiten Bedingung schließen wir, daß *nicht für alle endlichen Zahlwerte von ν*

$$\omega^{\alpha_0}\nu \leqq \alpha$$

sein kann, da sonst auch $\operatorname{Lim}_{\nu} \omega^{\alpha_0}\nu = \omega^{\alpha_0}\omega \leqq \alpha$ wäre.

Die *kleinste endliche Zahl ν*, für welche

$$\omega^{\alpha_0}\nu > \alpha,$$

bezeichnen wir mit $\varkappa_0 + 1$. Wegen (1) ist $\varkappa_0 > 0$.

Es gibt also auch eine völlig bestimmte Zahl $\varkappa_0$ der ersten Zahlenklasse, so daß

$$\omega^{\alpha_0}\varkappa_0 \leqq \alpha, \quad \omega^{\alpha_0}(\varkappa_0 + 1) > \alpha \tag{2}$$

ist. Setzen wir $\alpha - \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \alpha'$, so haben wir

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha' \tag{3}$$

und

$$0 \leqq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \quad 0 < \varkappa_0 < \omega. \tag{4}$$

Es läßt sich aber α nur auf *eine einzige* Weise unter den Bedingungen (4) in der Form (3) darstellen. Denn aus (3) und (4) folgen rückwärts zunächst die Bedingungen (2) und daraus die Bedingungen (1).

Den Bedingungen (1) genügt aber nur die Zahl $\alpha_0 = \beta_{-1}$, und durch die Bedingungen (2) ist die endliche Zahl $\varkappa_0$ eindeutig bestimmt. Aus (1) und (4) folgt noch mit Rücksicht auf Satz F, § 18, daß

$$\alpha' < \alpha, \quad \alpha_0 \leqq \alpha.$$

Wir können daher die Richtigkeit des folgenden Satzes behaupten:

A. „*Jede Zahl α der zweiten Zahlenklasse läßt sich, und zwar nur auf eine einzige Weise, auf die Form bringen*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha',$$

so daß

$$0 \leqq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \quad 0 < \varkappa_0 < \omega;$$

α' ist immer kleiner als α, dagegen α_0 kleiner oder gleich α."

Ist α' eine Zahl der *zweiten* Zahlenklasse, so läßt sich auch auf sie der Satz A anwenden und wir haben

$$\alpha' = \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \alpha'', \tag{5}$$

$$0 \leqq \alpha'' < \omega^{\alpha_1}, \quad 0 < \varkappa_1 < \omega,$$

und es ist

$$\alpha_1 < \alpha_0, \quad \alpha'' < \alpha'. \text{ [25]}$$

Im allgemeinen erhalten wir eine weitere Folge analoger Gleichungen

$$\alpha'' = \omega^{\alpha_2}\varkappa_2 + \alpha''', \tag{6}$$

$$\alpha''' = \omega^{\alpha_3}\varkappa_3 + \alpha^{\mathrm{IV}}. \tag{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Diese Folge kann aber nicht unendlich sein, sie muß notwendig abbrechen.

Denn die Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ nehmen ihrer Größe nach ab, es ist

$$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \alpha''' \ldots.$$

Wäre eine Reihe von abnehmenden transfiniten Zahlen unendlich, so würde kein Glied derselben das kleinste sein; dies ist nach Satz B, § 16 unmöglich. Es muß daher für einen gewissen *endlichen* Zahlwert τ

$$\alpha^{(\tau+1)} = 0$$

sein. Verbinden wir nun die Gleichungen (3), (5), (6), (7) miteinander, so erhalten wir den Satz:

B. „*Jede Zahl α der zweiten Zahlenklasse läßt sich, und zwar nur auf eine einzige Weise in der Form darstellen*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau,$$

Wir können aber auch den Satz aussprechen:

C. „*Ist $f(\xi)$ die in Satz* A *charakterisierte Funktion von ξ, so ist*

$$f(\xi) = \delta\gamma^{\xi}."$$

Beweis. Im Hinblick auf (24), § 14 überzeugt man sich leicht, daß die Funktion $\delta\gamma^{\xi}$ nicht nur den Bedingungen 1), 2), 3) des Satzes A, sondern auch der Bedingung 4) desselben genügt. Wegen der Einzigkeit der Funktion $f(\xi)$ muß sie daher mit $\delta\gamma^{\xi}$ identisch sein.

D. „*Sind α und β zwei beliebige Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenklasse mit Einschluß der* 0, *so ist*

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}."$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\varphi(\xi) = \gamma^{\alpha+\xi}$.

Im Hinblick darauf, daß nach Formel (23), § 14

$$\operatorname*{Lim}_{\nu}(\alpha + \xi_{\nu}) = \alpha + \operatorname*{Lim}_{\nu}\xi_{\nu},$$

erkennen wir, daß $\varphi(\xi)$ folgende vier Bedingungen erfüllt:

1) $\varphi(0) = \gamma^{\alpha}$.
2) Wenn $\xi' < \xi''$, so ist $\varphi(\xi') < \varphi(\xi'')$.
3) Für jeden Wert von ξ ist $\varphi(\xi + 1) = \varphi(\xi)\gamma$.
4) Ist $\{\xi_{\nu}\}$ eine Fundamentalreihe derart, daß $\operatorname*{Lim}_{\nu}\xi_{\nu} = \xi$, so ist

$$\varphi(\xi) = \operatorname*{Lim}_{\nu}\varphi(\xi_{\nu}).$$

Nach Satz C ist daher, $\delta = \gamma^{\alpha}$ gesetzt,

$$\varphi(\xi) = \gamma^{\alpha}\gamma^{\xi}.$$

Setzen wir hierin $\xi = \beta$, so folgt

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}.$$

E. „*Sind α und β zwei beliebige Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenklasse mit Einschluß der* 0, *so ist*

$$\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^{\alpha})^{\beta}."$$

Beweis. Betrachten wir die Funktion $\psi(\xi) = \gamma^{\alpha\xi}$ und bemerken, daß nach (24), § 14 stets $\operatorname*{Lim}_{\nu}\alpha\xi_{\nu} = \alpha \operatorname*{Lim}_{\nu}\xi_{\nu}$, so können wir auf Grund des Satzes D folgendes behaupten:

1) $\psi(0) = 1$.
2) Wenn $\xi' < \xi''$, so ist $\psi(\xi') < \psi(\xi'')$.
3) Für jeden Wert von ξ ist $\psi(\xi + 1) = \psi(\xi)\gamma^{\alpha}$.
4) Ist $\{\xi_{\nu}\}$ eine Fundamentalreihe, so ist auch $\{\psi(\xi_{\nu})\}$ eine solche und man hat, falls $\xi = \operatorname*{Lim}_{\nu}\xi_{\nu}$, auch $\psi(\xi) = \operatorname*{Lim}_{\nu}\psi(\xi_{\nu})$.

Man hat daher nach Satz C, wenn darin $\delta = 1$ und γ^{α} für γ gesetzt wird,

$$\psi(\xi) = (\gamma^{\alpha})^{\xi}.$$

Über die *Größe* von γ^{ξ} im Vergleich mit ξ läßt sich der folgende Satz aussprechen:

F. „*Ist $\gamma > 1$, so hat man für jeden Wert von ξ*

$$\gamma^{\xi} \geqq \xi."$$

Beweis. In den Fällen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ leuchtet der Satz unmittelbar ein. Wir zeigen nun, daß, wenn er für alle Werte von ξ gilt, die kleiner sind als eine gegebene Zahl $\alpha > 1$, er auch für $\xi = \alpha$ richtig ist.

Ist α von der *ersten* Art, so ist vorausgesetztermaßen

$$\alpha_1 \leqq \gamma^{\alpha_1},$$

daher auch

$$\alpha_1\gamma \leqq \gamma^{\alpha_1}\gamma = \gamma^{\alpha},$$

mithin

$$\gamma^{\alpha} \geqq \alpha_1 + \alpha_1(\gamma - 1) = \alpha_1\gamma.$$

Da sowohl α_1 wie $\gamma - 1$ mindestens $= 1$ sind und $\alpha_1 + 1 = \alpha$ ist, so folgt

$$\gamma^{\alpha} \geqq \alpha.$$

Ist dagegen α von der *zweiten* Art und zwar

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{\nu}\alpha_{\nu},$$

so ist, wegen $\alpha_{\nu} < \alpha$, der Voraussetzung gemäß

$$\alpha_{\nu} \leqq \gamma^{\alpha_{\nu}},$$

daher auch

$$\operatorname*{Lim}_{\nu}\alpha_{\nu} \leqq \operatorname*{Lim}_{\nu}\gamma^{\alpha_{\nu}},$$

d. h.

$$\alpha \leqq \gamma^{\alpha}.$$

Würde es nun Werte von ξ geben, für welche

$$\xi > \gamma^{\xi},$$

so müßte unter ihnen nach Satz B, § 16 einer der *kleinste* sein; wird dieser mit α bezeichnet, so hätte man für $\xi < \alpha$

$$\xi \leqq \gamma^{\xi},$$

dagegen

$$\alpha > \gamma^{\alpha},$$

was dem vorhin Bewiesenen widerspricht. Somit haben wir für alle Werte von ξ

$$\gamma^{\xi} \geqq \xi.$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\tau$ Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenklasse sind, welche den Bedingungen genügen

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_\tau \geqq 0,$$

während $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\tau$, $\tau + 1$ von Null verschiedene Zahlen der ersten Zahlenklasse sind."

Die hier nachgewiesene Form der Zahlen der zweiten Zahlenklasse wollen wir ihre *Normalform* nennen; α_0 heiße der „*Grad*", α_τ der „*Exponent*" von α; für $\tau = 0$ sind Grad und Exponent einander gleich.

Je nachdem der Exponent α_τ gleich oder größer als 0, ist α eine Zahl der ersten oder der zweiten Art.

Nehmen wir eine andere Zahl β in der Normalform

$$\beta = \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma. \tag{8}$$

Sowohl zum Vergleich von α mit β wie auch zur Ausführung ihrer Summe und Differenz dienen die Formeln

$$\omega^{\alpha'}\varkappa' + \omega^{\alpha'}\varkappa = \omega^{\alpha'}(\varkappa' + \varkappa), \tag{9}$$

$$\omega^{\alpha'}\varkappa' + \omega^{\alpha''}\varkappa'' = \omega^{\alpha''}\varkappa'' \quad \text{für } \alpha' < \alpha''. \tag{10}$$

$\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ haben hier die Bedeutung endlicher Zahlen.

Es sind dies Verallgemeinerungen der Formeln (3) und (2), § 17.

Für die Bildung des Produkts $\alpha\beta$ kommen die folgenden Formeln in Betracht:

$$\alpha\lambda = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0\lambda + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau, \quad 0 < \lambda < \omega, \tag{11}$$

$$\alpha\omega = \omega^{\alpha_0 + 1}, \tag{12}$$

$$\alpha\omega^{\beta'} = \omega^{\alpha_0 + \beta'}, \quad \beta' > 0. \tag{13}$$

Die Potenzierung α^β ist leicht ausführbar auf grund der folgenden Formeln:

$$\alpha^\lambda = \omega^{\alpha_0\lambda}\varkappa_0 + \cdots, \quad 0 < \lambda < \omega. \tag{14}$$

Die auf der Rechten hinzukommenden Glieder haben niederen Grad als das erste. Hieraus folgt leicht, daß die Fundamentalreihen $\{\alpha^\lambda\}$ und $\{\omega^{\alpha_0\lambda}\}$ zusammengehörig sind, so daß

$$\alpha^\omega = \omega^{\alpha_0\omega}, \quad \alpha_0 > 0. \tag{15}$$

Daher ist auch infolge des Satzes E, § 18:

$$\alpha^{\omega^{\beta'}} = \omega^{\alpha_0\omega^{\beta'}}, \quad \alpha_0 > 0, \quad \beta' > 0. \tag{16}$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich folgende Sätze beweisen:

C. „*Sind die ersten Glieder $\omega^{\alpha_0}\varkappa_0$, $\omega^{\beta_0}\lambda_0$ der Normalformen der beiden Zahlen α und β nicht gleich, so ist α kleiner oder größer als β, je nachdem $\omega^{\alpha_0}\varkappa_0$ kleiner oder größer als $\omega^{\beta_0}\lambda_0$ ist. Hat man aber*

$$\omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \omega^{\beta_0}\lambda_0, \quad \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 = \omega^{\beta_1}\lambda_1, \ldots \omega^{\alpha_\varrho}\varkappa_\varrho = \omega^{\beta_\varrho}\lambda_\varrho,$$

und ist $\omega^{\alpha_{\varrho+1}}\varkappa_{\varrho+1}$ kleiner oder grösser als $\omega^{\beta_{\varrho+1}}\lambda_{\varrho+1}$, so ist auch α entsprechend kleiner oder größer als β."

D. „*Ist der Grad α_0 von α kleiner als der Grad β_0 von β, so ist*

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Ist $\alpha_0 = \beta_0$, so ist

$$\alpha + \beta = \omega^{\beta_0}(\varkappa_0 + \lambda_0) + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

Ist aber

$$\alpha_0 > \beta_0, \quad \alpha_1 > \beta_0, \ldots \alpha_\varrho \geqq \beta_0, \quad \alpha_{\varrho+1} < \beta_0,$$

so ist

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \cdots + \omega^{\alpha_\varrho}\varkappa_\varrho + \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.\text{“}$$

E. „*Ist β von der zweiten Art ($\beta_\sigma > 0$), so ist*

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0 + \beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0 + \beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\alpha_0 + \beta_\sigma}\lambda_\sigma = \omega^{\alpha_0}\beta;$$

ist aber β von der ersten Art ($\beta_\sigma = 0$), so ist

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0 + \beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0 + \beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\alpha_0 + \beta_{\sigma-1}}\lambda_{\sigma-1} + \omega^{\alpha_0}\varkappa_0\lambda_\sigma + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau.\text{“}$$

F. „*Ist β von der zweiten Art ($\beta_\sigma > 0$), so ist*

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta};$$

ist aber β von der ersten Art ($\beta_\sigma = 0$) und zwar $\beta = \beta' + \lambda_\sigma$, wo β' von der zweiten Art ist, so hat man

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta'}\alpha^{\lambda_\sigma}.\text{“}$$

G. „*Jede Zahl α der zweiten Zahlenklasse läßt sich und zwar nur auf eine einzige Weise in der Produktform darstellen*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}\varkappa_\tau(\omega^{\gamma_1} + 1)\varkappa_{\tau-1}(\omega^{\gamma_2} + 1)\varkappa_{\tau-2} \ldots (\omega^{\gamma_\tau} + 1)\varkappa_0,$$

und es ist

$$\gamma_0 = \alpha_\tau, \quad \gamma_1 = \alpha_{\tau-1} - \alpha_\tau, \quad \gamma_2 = \alpha_{\tau-2} - \alpha_{\tau-1}, \ldots \gamma_\tau = \alpha_0 - \alpha_1,$$

während $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\tau$ dieselbe Bedeutung wie in der Normalform haben. Die Faktoren $\omega^\gamma + 1$ sind alle unzerlegbar."

H. „*Jede der zweiten Zahlenklasse angehörige Zahl α zweiter Art läßt sich und zwar nur auf eine Weise in der Form*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}\alpha'$$

darstellen, wo $\gamma_0 > 0$ und α' eine der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehörige Zahl erster Art ist."

J. „*Damit zwei Zahlen α und β der zweiten Zahlenklasse die Relation*

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

erfüllen, ist es notwendig und hinreichend, daß sie die Form haben

$$\alpha = \gamma\mu, \quad \beta = \gamma\nu,$$

wo μ und ν Zahlen der ersten Zahlenklasse sind."

K. „*Damit zwei Zahlen α und β der zweiten Zahlenklasse, welche beide von der ersten Art sind, die Relation*

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

erfüllen, ist es notwendig und hinreichend, daß sie die Form haben

$$\alpha = \gamma^{\mu}, \quad \beta = \gamma^{\nu},$$

wo μ und ν Zahlen der ersten Zahlenklasse sind."

Um die Tragweite der nachgewiesenen *Normalform* und der mit ihr unmittelbar zusammenhängenden *Produktform* der Zahlen der zweiten Zahlenklasse zu exemplifizieren, mögen die sich darauf gründenden Beweise der beiden letzten Sätze J und K hier folgen.

Aus der Annahme

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

schließen wir zunächst, daß der Grad α_0 von α dem Grade β_0 von β gleich sein muß. Denn wäre etwa $\alpha_0 < \beta_0$, so hätte man (nach Satz D)

$$\alpha + \beta = \beta,$$

daher auch

$$\beta + \alpha = \beta,$$

was nicht möglich ist, da nach (2) § 14

$$\beta + \alpha > \beta.$$

Wir können daher setzen

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \quad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \beta',$$

wo die Grade der Zahlen α' und β' kleiner sind als α_0, μ und ν endliche von 0 verschiedene Zahlen sind.

Nach Satz D ist nun

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta', \quad \beta + \alpha = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha',$$

also

$$\omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta' = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha'.$$

Wegen Satz D, § 14 [S. 322] ist daher

$$\beta' = \alpha'.$$

Somit haben wir

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \quad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \alpha',$$

und wenn

$$\omega^{\alpha_0} + \alpha' = \gamma$$

gesetzt wird, nach (11)

$$\alpha = \gamma\mu, \quad \beta = \gamma\nu.$$

Setzen wir andrerseits [26] zwei der zweiten Zahlenklasse zugehörige Zahlen der *ersten Art* α und β voraus, welche die Bedingung

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

erfüllen, und nehmen an, daß

$$\alpha > \beta.$$

Wir denken uns nach Satz G beide Zahlen in ihrer Produktform und es sei

$$\alpha = \delta\alpha', \quad \beta = \delta\beta',$$

wo α' und β' ohne gemeinsamen linksseitigen Endfaktor (außer 1) seien.

Man hat alsdann

$$\alpha' > \beta'$$

und

$$\alpha'\delta\beta' = \beta'\delta\alpha'.$$

Alle hier und im weiteren vorkommenden Zahlen sind von der *ersten Art*, weil dies von α und β vorausgesetzt wurde.

Die letzte Gleichung läßt zunächst (im Hinblick auf Satz G) erkennen, daß α' und β' *nicht beide transfinit* sein können, weil ihnen in diesem Falle ein gemeinsamer linksseitiger Endfaktor anhaften würde. Auch können sie *nicht beide endlich* sein; denn es wäre alsdann δ transfinit und, wenn $\varkappa$ der endliche linksseitige Endfaktor von δ ist, so müßte

$$\alpha'\varkappa = \beta'\varkappa,$$

daher auch

$$\alpha' = \beta'$$

sein. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß

$$\alpha' > \omega, \quad \beta' < \omega.$$

Die endliche Zahl β' muß aber 1 sein:

$$\beta' = 1,$$

weil sie sonst in dem endlichen linksseitigen Endfaktor von α' als Teil enthalten wäre.

Wir kommen zu dem Resultat, daß $\beta = \delta$, folglich

$$\alpha = \beta\alpha',$$

wo α' eine der zweiten Zahlenklasse angehörige Zahl der ersten Art ist, die kleiner als α sein muß:

$$\alpha' < \alpha, \ [\text{weil } \beta\alpha = \alpha\beta > \alpha \ \text{ ist}].$$

Zwischen α' und β besteht die Relation

$$\alpha'\beta = \beta\alpha'.$$

Ist daher auch $\alpha' > \beta$, so schließt man in derselben Weise auf die Existenz einer transfiniten Zahl *erster Art* $\alpha'' < \alpha'$, so daß

$$\alpha' = \beta\alpha'', \quad \alpha''\beta = \beta\alpha''.$$

Falls auch α'' noch $> \beta$, existiert eine ebensolche Zahl $\alpha''' < \alpha''$, so daß

$$\alpha'' = \beta\alpha''', \quad \alpha'''\beta = \beta\alpha''',$$

u. s. w.

Die Reihe abnehmender Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ muß nach Satz B, § 16 *abbrechen*. Es wird daher für einen bestimmten endlichen Index ϱ_0

$$\alpha^{(\varrho_0)} \leqq \beta$$

sein. Ist

$$\alpha^{(\varrho_0)} = \beta,$$

so hat man

$$\alpha = \beta^{\varrho_0+1}, \quad \beta = \beta;$$

der Satz K wäre dann bewiesen, und man hätte

$$\gamma = \beta, \quad \mu = \varrho_0 + 1, \quad \nu = 1.$$

Ist aber

$$\alpha^{(\varrho_0)} < \beta,$$

so setzen wir

$$\alpha^{(\varrho_0)} = \beta_1$$

und haben

$$\alpha = \beta^{\varrho_0}\beta_1, \quad \beta\beta_1 = \beta_1\beta, \quad \beta_1 < \beta.$$

Daher gibt es auch eine endliche Zahl ϱ_1, so daß

$$\beta = \beta_1^{\varrho_1}\beta_2, \quad \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1, \quad \beta_2 < \beta_1.$$

Im allgemeinen hat man analog

$$\beta_1 = \beta_2^{\varrho_2}\beta_3, \quad \beta_2\beta_3 = \beta_3\beta_2, \quad \beta_3 < \beta_2$$

u. s. w.

Auch die Reihe abnehmender Zahlen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ muß nach Satz B, § 16 *abbrechen*.

Es existiert daher eine endliche Zahl $\varkappa$, so daß

$$\beta_{\varkappa-1} = \beta_\varkappa^{\varrho_\varkappa}.$$

Setzen wir

$$\beta_\varkappa = \gamma,$$

so ist

$$\alpha = \gamma^\mu, \quad \beta = \gamma^\nu,$$

wo μ und ν Zähler und Nenner des Kettenbruchs

$$\frac{\mu}{\nu} = \varrho_0 + \frac{1}{\varrho_1 + \ddots + \frac{1}{\varrho_\varkappa}}$$

sind.

§ 20.

Die ε-Zahlen der zweiten Zahlenklasse. [27]

Der Grad α_0 einer Zahl α ist, wie aus der Normalform

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots, \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots, \quad 0 < \varkappa_\nu < \omega \tag{1}$$

im Hinblick auf Satz F, § 18 sofort einleuchtet, niemals größer als α; es fragt sich aber, ob es nicht Zahlen α gibt, für welche $\alpha_0 = \alpha$ ist.

Jedenfalls müßte sich in einem solchen Falle die Normalform von α auf das erste Glied reduzieren und dieses $= \omega^\alpha$ sein [weil sonst $\alpha = \omega^\alpha\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 \cdots > \omega^\alpha$ wäre], d. h. es müßte α Wurzel der Gleichung

$$\omega^\xi = \xi \tag{2}$$

sein. Andrerseits würde jede Wurzel α dieser Gleichung zur Normalform ω^α haben; ihr Grad wäre ihr selbst gleich.

Die Zahlen der zweiten Zahlenklasse, die ihrem Grade gleich sind, stimmen also durchaus überein mit den Wurzeln der Gleichung (2). Es ist unsere Aufgabe, diese Wurzeln in ihrer Gesamtheit zu bestimmen. Um sie von allen übrigen Zahlen zu unterscheiden, nennen wir sie die „*ε-Zahlen der zweiten Zahlenklasse*".

Daß es aber solche ε-Zahlen gibt, geht aus folgendem Satze hervor:

A. „*Ist γ irgend eine der Gleichung* (2) *nicht genügende Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse, so bestimmt sie eine Fundamentalreihe $\{\gamma_\nu\}$ durch die Gleichungen*

$$\gamma_1 = \omega^\gamma, \quad \gamma_2 = \omega^{\gamma_1}, \ldots \gamma_\nu = \omega^{\gamma_{\nu-1}}, \ldots.$$

Die Grenze $\operatorname{Lim}_\nu \gamma_\nu = E(\gamma)$ dieser Fundamentalreihe ist stets eine ε-Zahl."

Beweis. Da γ keine ε-Zahl ist, so ist $\omega^\gamma > \gamma$, d. h. $\gamma_1 > \gamma$. Nach Satz B, § 18 ist daher auch $\omega^{\gamma_1} > \omega^\gamma$, d. h. $\gamma_2 > \gamma_1$ und in derselben Weise folgt, daß $\gamma_3 > \gamma_2$ u. s. w. Die Reihe $\{\gamma_\nu\}$ ist somit eine Fundamentalreihe. Ihre Grenze, die eine Funktion von γ ist, nennen wir $E(\gamma)$ und haben

$$\omega^{E(\gamma)} = \operatorname{Lim}_\nu \omega^{\gamma_\nu} = \operatorname{Lim}_\nu \gamma_{\nu+1} = E(\gamma).$$

$E(\gamma)$ ist daher eine ε-Zahl.

B. „*Die Zahl $\varepsilon_0 = E(1) = \operatorname{Lim}_\nu \omega_\nu$, wo*

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega^{\omega_1}, \quad \omega_3 = \omega^{\omega_2}, \ldots \omega_\nu = \omega^{\omega_{\nu-1}}, \ldots$$

ist die kleinste von allen ε-Zahlen."

Beweis. Sei ε' irgendeine ε-Zahl, so daß

$$\omega^{\varepsilon'} = \varepsilon'.$$

Da $\varepsilon' > \omega$, so ist $\omega^{\varepsilon'} > \omega^{\omega}$, d. h. $\varepsilon' > \omega_2$. Hieraus folgt ebenso $\omega^{\varepsilon'} > \omega^{\omega_2}$, d. h. $\varepsilon' > \omega_3$ u. s. w.

Wir haben allgemein

$$\varepsilon' > \omega_\nu$$

und daher

$$\varepsilon' \geqq \operatorname*{Lim}_\nu \omega_\nu,$$

d. h.

$$\varepsilon' \geqq \varepsilon_0.$$

Es ist also $\varepsilon_0 = E(1)$ die kleinste von allen ε-Zahlen.

C. *„Ist ε' irgendeine ε-Zahl, ε'' die nächstgrößere ε-Zahl und γ irgendeine zwischen beiden liegende Zahl*

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon'',$$

so ist $E(\gamma) = \varepsilon''$."

Beweis. Aus

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''$$

folgt

$$\omega^{\varepsilon'} < \omega^{\gamma} < \omega^{\varepsilon''},$$

d. h.

$$\varepsilon' < \gamma_1 < \varepsilon''.$$

Hieraus schließen wir ebenso

$$\varepsilon' < \gamma_2 < \varepsilon''$$

u. s. w. Wir haben allgemein

$$\varepsilon' < \gamma_\nu < \varepsilon'',$$

daher

$$\varepsilon' < E(\gamma) \leqq \varepsilon''.$$

$E(\gamma)$ ist nach Satz A eine ε-Zahl. Da ε'' die auf ε' der Größe nach nächstfolgende ε-Zahl ist, so kann nicht $E(\gamma) < \varepsilon''$ sein, und es muß daher

$$E(\gamma) = \varepsilon''$$

sein.

Da $\varepsilon' + 1$ schon aus dem Grunde keine ε-Zahl ist, weil alle ε-Zahlen, wie aus der Definitionsgleichung $\xi = \omega^{\xi}$ folgt, von der *zweiten* Art sind, so ist $\varepsilon' + 1$ sicherlich kleiner als ε'', und wir haben daher folgenden Satz:

D. *„Ist ε' irgendeine ε-Zahl, so ist $E(\varepsilon' + 1)$ die nächstgrößere ε-Zahl.*"

Auf die kleinste ε-Zahl ε_0 folgt also die nächstgrößere, die wir ε_1 nennen,

$$\varepsilon_1 = E(\varepsilon_0 + 1),$$

auf diese die nächstgrößere

$$\varepsilon_2 = E(\varepsilon_1 + 1)$$

u. s. w.

Allgemein haben wir für die der Größe nach $(\nu + 1)^{\text{te}}$ ε-Zahl die Rekursionsformel

$$\varepsilon_\nu = E(\varepsilon_{\nu-1} + 1). \tag{3}$$

Daß aber die unendliche Reihe

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots$$

keineswegs die Gesamtheit aller ε-Zahlen umfaßt, geht aus folgendem Satze hervor:

E. *„Ist $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ irgendeine unendliche Reihe von ε-Zahlen derart, daß*

$$\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' \ldots \varepsilon^{(\nu)} < \varepsilon^{(\nu+1)} \ldots,$$

so ist auch $\operatorname*{Lim}_\nu \varepsilon^{(\nu)}$ eine ε-Zahl und zwar die auf alle $\varepsilon^{(\nu)}$ der Größe nach nächstfolgende ε-Zahl."

Beweis.

$$\omega^{\operatorname*{Lim}_\nu \varepsilon^{(\nu)}} = \operatorname*{Lim}_\nu \omega^{\varepsilon^{(\nu)}} = \operatorname*{Lim}_\nu \varepsilon^{(\nu)}.$$

Daß aber $\operatorname*{Lim}_\nu \varepsilon^{(\nu)}$ die auf alle $\varepsilon^{(\nu)}$ der Größe nach *nächstfolgende ε-Zahl* ist, geht daraus hervor, daß $\operatorname*{Lim}_\nu \varepsilon^{(\nu)}$ die auf alle $\varepsilon^{(\nu)}$ der Größe nach *nächstfolgende Zahl der zweiten Zahlenklasse* ist.

F. *„Die Gesamtheit aller ε-Zahlen der zweiten Zahlenklasse bildet in ihrer Größenordnung eine wohlgeordnete Menge vom Typus Ω der in ihrer Größenordnung aufgefaßten zweiten Zahlenklasse und hat daher die Mächtigkeit Alef-eins.*"

Beweis. Die Gesamtheit aller ε-Zahlen der zweiten Zahlenklasse bildet nach Satz C, § 16 in ihrer Größenordnung eine wohlgeordnete Menge

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots \varepsilon_\omega,\ \varepsilon_{\omega+1}, \ldots \varepsilon_{\alpha'}, \ldots, \tag{4}$$

deren Bildungsgesetz in den Sätzen D und E ausgesprochen liegt.

Würde nun der Index α' nicht alle Zahlen der zweiten Zahlenklasse durchlaufen, so müßte es eine kleinste Zahl α geben, die er nicht erreicht. Dies widerspräche aber dem Satze D, wenn α von der ersten Art, und dem Satze E, wenn α von der zweiten Art wäre. Es nimmt daher α' alle Zahlwerte der zweiten Zahlenklasse an.

Bezeichnen wir den Typus der zweiten Zahlenklasse mit Ω, so ist der Typus von (4)

$$\omega + \Omega = \omega + \omega^2 + (\Omega - \omega^2);$$

da aber $\omega + \omega^2 = \omega^2$, so folgt hieraus

$$\omega + \Omega = \Omega.$$

Daher ist auch

$$\overline{\omega + \Omega} = \overline{\Omega} = \aleph_1 .$$

G. „*Ist ε irgendeine ε-Zahl und α eine beliebige Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse, die kleiner ist als ε:*

$$\alpha < \varepsilon ,$$

so genügt ε den drei Gleichungen

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon , \quad \alpha\varepsilon = \varepsilon , \quad \alpha^\varepsilon = \varepsilon .\text{“}$$

Beweis. Ist α_0 der Grad von α, so ist $\alpha_0 \leqq \alpha$, daher ist wegen $\alpha < \varepsilon$ auch $\alpha_0 < \varepsilon$. Der Grad von $\varepsilon = \omega^\varepsilon$ ist aber ε; es hat also α einen kleineren Grad als ε, mithin ist nach Satz D, § 19

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon ,$$

daher auch

$$\alpha_0 + \varepsilon = \varepsilon .$$

Andrerseits haben wir nach Formel (13), § 19 [S. 342]

$$\alpha\varepsilon = \alpha\omega^\varepsilon = \omega^{\alpha_0 + \varepsilon} = \omega^\varepsilon = \varepsilon ,$$

und daher auch

$$\alpha_0\varepsilon = \varepsilon .$$

Endlich ist im Hinblick auf Formel (16), § 19

$$\alpha^\varepsilon = \alpha^{\omega^\varepsilon} = \omega^{\alpha_0 \omega^\varepsilon} = \omega^{\alpha_0 \varepsilon} = \omega^\varepsilon = \varepsilon .$$

H. „*Ist α irgendeine Zahl der zweiten Zahlenklasse, so hat die Gleichung*

$$\alpha^\xi = \xi$$

keine anderen Wurzeln als die ε-Zahlen, welche größer sind als α.“

Beweis. Sei β eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha^\xi = \xi ,$$

also

$$\alpha^\beta = \beta ,$$

so folgt zunächst aus dieser Formel, daß

$$\beta > \alpha .$$

Andrerseits muß β von der zweiten Art sein, da sonst

$$[\alpha^\beta = \alpha^{\beta' + 1} = \alpha^{\beta'} \alpha > \alpha^{\beta'} 2 \geqq \beta' 2 \geqq \beta' + 1 = \beta \quad \text{d. h.}]$$

$$\alpha^\beta > \beta$$

wäre. Wir haben daher nach Satz F, § 19 [S. 343]

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0 \beta} ,$$

mithin

$$\omega^{\alpha_0 \beta} = \beta .$$

Es ist nach Satz F, § 18 [S. 339]

$$\omega^{\alpha_0 \beta} \geqq \alpha_0 \beta ,$$

daher

$$\beta \geqq \alpha_0 \beta .$$

Es kann aber nicht $\beta > \alpha_0 \beta$ sein; daher ist

$$\alpha_0 \beta = \beta ,$$

und mithin

$$\omega^\beta = \beta .$$

β ist also eine ε-Zahl, die größer ist als α.

[Anmerkungen.]

Die vorstehende, in zwei Abteilungen im Abstande von zwei Jahren erschienene Abhandlung, die letzte Veröffentlichung Cantors über die Mengenlehre, bildet den eigentlichen Abschluß seines Lebenswerkes. Hier erhalten die Grundbegriffe und Ideen, nachdem sie sich im Laufe von Jahrzehnten allmählich entwickelt haben, ihre endgültige Fassung, und viele Hauptsätze der „allgemeinen“ Mengenlehre finden erst hier ihre klassische Begründung. Abgesehen von einigen Unvollkommenheiten und Unklarheiten in der Begründung, auf die im einzelnen hingewiesen wird, ist nur aufs lebhafteste zu bedauern, daß es Cantor infolge gesundheitlicher Störungen und sachlicher Schwierigkeiten nicht möglich gewesen ist, die Abhandlung in der beabsichtigten Weise fortzusetzen, so daß auch diese letzte Veröffentlichung ebenso wie die Abhandlung III 4 über Punktmannigfaltigkeiten in gewissem Sinne Torso geblieben ist. Wie dort das gewünschte Endziel, der Nachweis, daß das Kontinuum die zweite Mächtigkeit habe, unerreicht blieb, so fehlt auch hier noch der den eigentlichen Abschluß der Mächtigkeitslehre bildende Nachweis, daß jede Menge einer Wohlordnung fähig, also jede Mächtigkeit ein Alef ist.

[1] Zu S. 282. Unter „Teilmenge“ versteht Cantor hier nur eine *echte* Teilmenge, die von der Menge selbst verschieden ist. Auch die Definition der „Vereinigungsmenge“ wird hier (unnötigerweise) auf den Fall unter sich elementefremder (exklusiver) Mengen eingeschränkt im Gegensatz zu dem früher (S. 145) eingeführten „kleinsten gemeinsamen Multiplum“.

Der Versuch, den zur „Kardinalzahl“ führenden Abstraktionsprozeß dadurch scheinbar zu erläutern, daß die Kardinalzahl als eine „aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge“ aufgefaßt wird, war kein glücklicher. Denn wenn die „Einsen“, wie es doch sein muß, alle untereinander *verschieden* sind, so sind sie eben weiter nichts als die Elemente einer neu eingeführten und mit der ersten äquivalenten Menge, und in der nun doch erforderlichen Abstraktion sind wir um keinen Schritt weiter gekommen.

[2] Zu S. 285 Satz B. Hier haben wir in klarster Formulierung den sogenannten „Äquivalenzsatz“, der heute nach seinem Beweise durch F. Bernstein u. a. einen der wichtigsten und elementarsten Hauptsätze der allgemeinen Mengenlehre bildet. Vgl. F. Hausdorff, Grundz. d. Mengenl. Kap. III § 2. Hier erscheint dieser grundlegende Satz als Folgerung des allgemeineren Satzes A, der die „Vergleichbarkeit“ beliebiger Mächtigkeiten behauptet, aber, wie wir heute wissen, weit weniger elementar, nur mit Hilfe der Wohlordnung bewiesen werden kann. Unter den übrigen hier angeführten „Folgerungen“ ist der Satz C so gut wie gleichbedeutend mit B und wird vielfach *vor* diesem bewiesen, während D und E von der allgemeinen „Vergleichbarkeit“ Gebrauch machen.

[3] Zu S. 287 § 4, Absatz 1. Unter „Belegung" einer Menge N mit Elementen von M versteht Cantor also eine Funktion $m = f(n)$, deren „Variabilitätsbereich" durch die Menge N und deren „Wertevorrat" durch die Menge M gebildet wird, oder anders ausgedrückt, eine eindeutige (wenn auch nicht umkehrbar eindeutige) Abbildung der Menge N auf einen (echten oder unechten) Teil von M.

[4] Zu § 5, S. 289. Die hier entwickelte Theorie der *endlichen* Kardinalzahlen (wie auch die im § 6 folgende Theorie der Kardinalzahl Alef-Null) ist, an modernem Maßstabe gemessen, wenig befriedigend, da die notwendige Grundlage einer solchen Theorie, eine scharfe begriffliche *Definition* der endlichen Mengen, noch fehlt und wohl überhaupt erst auf einer höheren Stufe der allgemeinen Theorie, z. B. mit Hilfe der Wohlordnung gewonnen werden kann. So wird z. B. auf S. 291 vom Gesetze der „vollständigen Induktion" Gebrauch gemacht, ohne daß die Gültigkeit dieses Gesetzes zuerst begründet wäre. Dieses Gesetz wird von anderen, wie z. B. von G. Peano, richtiger zur *Definition* der Zahlenreihe verwendet.

[5] Zu § 6, S. 292. Da die „kleinste transfinite Kardinalzahl" hier durch die „Gesamtheit aller endlichen Kardinalzahlen" definiert wird, ohne daß diese (im § 5) genügend definiert wären, so fehlt auch hier die eigentliche begriffliche Grundlage der Theorie. Und doch genügt es, die fragliche Kardinalzahl zu definieren durch den *kleinsten Abschnitt einer wohlgeordneten* (transfiniten) *Menge, welcher kein letztes Element besitzt.* Dazu hätte freilich eine *allgemeine Theorie der wohlgeordneten* Mengen vorausgehen müssen. Die Ausführungen dieses (wie des vorausgehenden) Paragraphen leiden sichtlich unter der gewählten Anordnung, nach welcher das (scheinbar) Elementarste auch zuerst behandelt werden sollte, während es doch gerade der *allgemeinen* Theorie zu seiner befriedigenden Begründung bedarf.

[6] Zu S. 293. Der „Beweis" des Satzes A, der rein anschaulich und logisch unbefriedigend ist, erinnert an den bekannten primitiven Versuch, durch sukzessive Herausnahme beliebiger Elemente zur *Wohlordnung* einer vorgelegten Menge zu gelangen. Zu einem korrekten Beweis gelangen wir erst, wenn wir von einer bereits *wohlgeordneten* Menge *ausgehen*, deren kleinster transfiniter Abschnitt dann in der Tat die verlangte Kardinalzahl $\aleph_0$ besitzt.

[7] Zu S. 294. Zum Beweise der Formel (8) vgl. die entsprechende Konstruktion zum Beweise des Satzes C' in der Abhandlung III 2 auf S. 131—132 und die zugehörige Erläuterung des Herausgebers auf S. 133.

[8] Zu S. 295. Die Sätze C und D, die hier (auf rein anschaulicher und damit unsicherer) Grundlage „bewiesen" werden, dienen bei Dedekind („Was sind und was sollen die Zahlen?") und anderen Autoren einfach zur begrifflichen *Definition* der „endlichen" und der „unendlichen" Mengen.

[9] Zu S. 295—296. Das hier gegebene Versprechen, welches sich auf das *Gesamtsystem* aller transfiniten Kardinalzahlen in seinem natürlichen Aufbau bezieht, ist von Cantor nicht eingelöst worden: seine eigenen Untersuchungen (im zweiten Teile dieser Abhandlung) gehen nicht über die „zweite Zahlenklasse" hinaus, reichen also nur bis Alef-eins, wenn auch die von ihm verwendeten Methoden einer sehr viel weiteren Ausdehnung fähig sind. Der Grund dieser Unterlassung scheint einerseits auf dem noch fehlenden Nachweise zu beruhen, daß jede Mächtigkeit ein Alef ist, andererseits aber auch darin zu liegen, daß die ihm bereits bekannte „Burali-Fortische Antimonie" skeptische Bedenken gegen den Begriff „aller" Ordnungs- oder Kardinalzahlen bei Cantor erregt haben und ihn dadurch zu einer sachlich unberechtigten Einschränkung seiner Untersuchungen veranlaßt haben mag. Hierüber vgl. auch die briefliche Darlegung im „Anhang" S. 443 ff.

[10] Zu § 7, S. 296. Hier wird zuerst der fundamentale Begriff des „Ordnungstypus" (einfach geordneter Mengen) in voller Klarheit entwickelt, wenn auch seine versuchte Veranschaulichung durch eine aus „lauter Einsen" bestehende Menge ebenso verfehlt sein dürfte wie die entsprechende für die Kardinalzahl im § 1 dieser Abhandlung. Eine korrekte Definition müßte vom Begriffe der „ähnlichen Abbildung" ausgehend den Ordnungstypus als die „Invariante" dieser Abbildungsgruppe definieren, als dasjenige, was eine geordnete Menge mit allen „ähnlich" geordneten gemein hat, ebenso wie die „Kardinalzahl" das ist, was eine Menge mit allen „äquivalenten" gemein hat. Frege, Russell u. a. wollen die Kardinalzahl, bzw. die Ordinatzahl definieren als die „Klasse" oder den „Begriffsumfang" aller einer gegebenen Menge äquivalenten, bzw. ähnlichen Mengen. Aber da eine solche „Klasse" bekanntlich (vgl. den „Anhang" S. 443 ff.) keine eigentliche, „konsistente" *Menge* ist, so ergibt sich bei dieser Definition schon gleich im Anfang die (von Russell immer abgelehnte) Notwendigkeit, zwischen „Mengen" und „Klassen" zu unterscheiden.

[11] Zu S. 299 Abs. 4. Hier wird auf die Möglichkeit der „Automorphismen" hingewiesen, d. h. ähnlicher Abbildungen einer geordneten Menge auf sich selbst, welche von der Identität verschieden sind.

[12] Zu S. 300 vorl. Abs. Daß der Ordnungstypus *alles* überhaupt „Anzahlmäßige" umfassen und „keine weitere Verallgemeinerung" zulassen soll, scheint doch eine etwas willkürliche Behauptung zu sein. Es kommt eben darauf an, was man unter „anzahlmäßig" versteht — und das ist eine rein subjektive Auffassung. Cantor versteht eben den Ordnungstypus darunter, während man ebenso gut auch die Kardinalzahl oder etwas anderes darunter verstehen könnte.

[13] Zu § 9, S. 303. Dieser Paragraph bringt mit der eindeutigen Charakterisierung des Typus η ein sehr schönes und vielleicht überraschendes Resultat. Der Beweis ist durchsichtig und korrekt. Nur auf S. 306, Z. 6 v. o., wo es heißt „wie man sich *leicht* überzeugt", findet der Leser eine gewisse Schwierigkeit. Hierzu sei folgendes bemerkt. Die Elemente $r_{\lambda+1}, r_{\lambda+2}, \ldots r_{\lambda+\sigma-1}$ liegen *außerhalb* des durch $r_1, r_2 \ldots r_\lambda$ bestimmten Teilintervalles, in welchem $r_{\lambda+\sigma}$ liegen soll, d. h. teils vor, teils hinter diesem Teilintervall. Entsprechend liegen dann aber auch die entsprechenden Elemente $m_{\iota_{\lambda+1}}$, $m_{\iota_{\lambda+2}}, \ldots m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$ teils vor, teils hinter dem entsprechenden Teilintervall, das durch $m_{\iota_1}, m_{\iota_2}, \ldots m_{\iota_\lambda}$ bestimmt ist, in welchem $m_{\nu+1}$ gelegen ist, haben also zu diesem die gleiche Rangbeziehung wie $r_{\lambda+1}, \ldots r_{\lambda+\sigma-1}$ zu $r_{\lambda+\sigma}$.

[14] Zu S. 309. Die Begriffe „in sich dicht", „abgeschlossen" und „perfekt" auf Ordnungstypen angewendet, stimmen nicht genau überein mit den entsprechenden Begriffen in der Theorie der *Punktmengen*, wo sie eine nur *relative* Bedeutung haben in bezug auf das als gegeben vorausgesetzte Kontinuum, in dem die betreffenden Punktmengen eingebettet sind. Eine Punktmenge heißt „abgeschlossen", wenn sie alle Punkte dieses *Kontinuums* enthält, die „Grenzpunkte" oder „Häufungspunkte" der Punktmenge darstellen. Hier dagegen handelt es sich um eine *innere* Eigenschaft des Ordnungstypus: er heißt „abgeschlossen", wenn jede in ihm gebildete „Fundamentalreihe" in ihm ein „Grenzelement" besitzt. Eine abgeschlossene Punktmenge in einem begrenzten (endlichen) Intervall des Linearkontinuums (einschließlich der Grenzpunkte) hat gewiß auch einen „abgeschlossenen" Ordnungstypus, da jeder ihrer „Fundamentalreihen" auch ein „Häufungspunkt" im Kontinuum und damit auch ein „Grenzpunkt" in ihr selbst entspricht. Aber umgekehrt braucht *nicht* notwendig eine solche Punktmenge M von „abgeschlossenem" Ordnungstypus selbst „abgeschlossen" zu sein, z. B. die Menge

der Punkte mit den Koordinaten $1 - \frac{1}{\nu}$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$ zusammen mit dem Punkte 2 im Intervall (0,2), welche zwar für sich den „abgeschlossenen" Ordnungstypus $\omega + 1$ besitzt, aber ihren Häufungspunkt 1 nicht enthält. Vgl. hier S. 193, 226, 228.

[15] Zum § 11, S. 310ff. Von den beiden Eigenschaften, durch welche hier Cantor den Ordnungstypus des Linearkontinuums charakterisiert, ist von grundlegender Bedeutung und die eigentliche Cantorsche Entdeckung die von ihm als 2) bezeichnete Eigenschaft: die Existenz einer in M „überall dichten" abzählbaren Teilmenge S. Weniger glücklich erscheint uns heute seine Formulierung der Eigenschaft 1), durch welche die Menge als „perfekt" gekennzeichnet werden soll. Einmal nämlich würde bereits ihre „Abgeschlossenheit" genügen; denn „in sich dicht" ist sie so wie so schon vermöge ihrer Eigenschaft 2), da jedes Element von M zugleich auch „Grenzelement" von S und damit auch von M ist. Vor allem aber führt die Cantorsche Definition des „Grenzelementes" durch „Fundamentalreihen", die augenscheinlich durch seine Theorie der Irrationalzahlen (vgl. hier S. 186) mitbestimmt ist, hier auf unnötige Komplikationen. Am einfachsten wäre es wohl, nach Dedekind die Menge als „stetig" oder besser als „lückenlos" (F. Hausdorff, Grundzüge Kap. IV § 5) zu charakterisieren durch die folgende Eigenschaft: bei jedem „Schnitt", d. h. jeder Zerlegung der (einfach geordneten) Menge M in einen „Abschnitt" A und einen „Rest" B (vgl. § 13, S. 314) besitzt *entweder* der Abschnitt A ein höchstes *oder* der Rest B ein niederstes Element. Beides gleichzeitig ist im Falle des Linearkontinuums durch die Eigenschaft 2) ausgeschlossen. Durch diese Abänderung der Eigenschaft 1) vereinfacht sich auch der Nachweis der Eindeutigkeit. Nachdem mit Cantor zunächst die Teilmenge S auf die Menge R der Rationalzahlen vom Typus η abgebildet ist, wird jedes weitere Element m von M durch einen „Schnitt" der Menge S charakterisiert und so umkehrbar eindeutig auf das Element x von X abgebildet, das durch den entsprechenden „Schnitt" der Menge R bestimmt ist. Hier erweist sich also die Verwendung „zusammengehöriger Fundamentalreihen" als unnötig.

[16] Zu S. 312. Am einfachsten erscheint es, eine „wohlgeordnete" Menge als eine solche „einfach geordnete" zu charakterisieren, in welcher jeder „Rest" ein niederstes Element besitzt, während die (scheinbar noch einfachere) Eigenschaft A (S. 313), daß auch *jede Teilmenge* ein niederstes Element hat, wohl besser mit Cantor als *beweisbare* Folgerung nachgestellt wird, da sie die in der „einfachen Anordnung" bereits enthaltene „Transitivität" wiederholt.

[17] Zu S. 315. Die Sätze A—M dieses Paragraphen sind großenteils lediglich Hilfssätze zum Beweise des „Ähnlichkeitssatzes" N (S. 319), in welchem die elementare Theorie der wohlgeordneten Mengen gipfelt. Hier lassen sich aber die Sätze B—F einfacher als bei Cantor beweisen bzw. ersetzen durch Voranstellung des allgemeinen (vom Herausgeber herrührenden) *Hilfssatzes*: „Bei *keiner* ähnlichen Abbildung einer wohlgeordneten Menge auf einen ihrer Teile wird ein Element a auf ein *vorangehendes* $a' \prec a$ abgebildet". (Vgl. G. Hessenberg, Grundbegriffe d. Mngl. § 33, Satz XX, sowie Hausdorff a. a. O. Kap. V § 2.)

[18] Zu S. 323. Die Formeln (12) und (13) ergeben sich aus der Definition (10) der Differenz, weil in der Tat

$$(\gamma + \alpha) + (\beta - \alpha) = \gamma + (\alpha + \beta - \alpha) = \gamma + \beta$$

und

$$\gamma\alpha + \gamma(\beta - \alpha) = \gamma(\alpha + \beta - \alpha) = \gamma\beta$$

ist.

[19] Zu S. 324, letzter Absatz. Hier macht sich wieder geltend das Fehlen einer scharfen Definition für den Begriff einer „*endlichen*" Menge. In diesem Zusammenhange wäre die

„endliche" Menge zu *definieren* als eine wohlgeordnete, in welcher jeder Abschnitt wie auch die ganze Menge ein letztes Element hat, oder als eine *geordnete* Menge, in welcher jede Teilmenge *sowohl ein erstes wie ein letztes* Element enthält. Dann wäre zu zeigen, daß diese Eigenschaft von der gewählten Anordnung *unabhängig* ist und daß jede solche Menge nur nach einem *einzigen* Typus, der durch ihre Kardinalzahl bestimmt ist, geordnet werden kann. Vgl. hier § 5 (S. 289) und Anm. [4].

[20] Zu S. 327, Z. 1. Die Menge G ist abzählbar als Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren bzw. endlichen Mengen.

[21] Zu § 16, S. 331. Zum Beweise des Satzes A genügt es wegen B § 12 (S. 313) zu zeigen, daß jede Teilmenge J von $\{\alpha\}$ eine kleinste Zahl α' enthält. Es sei α_0 eine Zahl aus J, welche noch nicht die kleinste ist. Dann gehören alle Zahlen $\alpha < \alpha_0$ aus J dem durch α_0 bestimmten Abschnitte A_{α_0} an, der nach H § 15 eine wohlgeordnete Menge vom Typus α_0 ist, und bilden daher auch selbst eine wohlgeordnete Menge mit einem niedersten Element α', das wegen $\alpha' < \alpha_0 < \beta$ auch jedem etwa nicht zu A_{α_0} gehörenden Element β von J vorangeht, also jedenfalls das niederste Element von J überhaupt darstellt.

[22] Zu S. 332. Auch der Beweis des Satzes D könnte einfacher auf den Satz H § 15 zurückgeführt werden. Wäre die nach Satz A wohlgeordnete Menge $\{\alpha\}$ abzählbar, so wäre sie es auch nach Hinzufügung aller Zahlen der ersten Zahlenklasse, und die entstehende wohlgeordnete Menge S hätte als Ordnungstypus eine Zahl σ der zweiten Zahlenklasse, so daß der zugehörige Abschnitt A_σ nach H § 15 den gleichen Ordnungstypus σ hätte. Es wäre also die ganze Menge S einem ihrer Abschnitte ähnlich, entgegen B § 13.

[23] Zu § 17, S. 333ff. Es handelt sich in diesem Paragraphen um einen einfachen Spezialfall der später in § 19 entwickelten allgemeinen „Normalform" für die Zahlen der zweiten Zahlenklasse. Der Unterschied besteht nur darin, daß die Exponenten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ in Satz B § 19 hier alle als *endlich* angenommen werden. Auch die Produktentwickelung (9) von § 17 geht aus der des Satzes G § 19 durch die entsprechende Spezialisierung hervor. Augenscheinlich ist für Cantor das Studium des Spezialfalles für die Auffindung der allgemeinen Darstellungsform maßgebend gewesen.

[24] Zu § 18, S. 336ff. Die Einführung eines neuen *Potenzbegriffes*, der von dem früher für die Kardinalzahlen gegebenen wesentlich verschieden ist, ermöglicht erst eine formal-arithmetische Theorie der transfiniten Ordnungszahlen, und zwar nicht nur in der zweiten Zahlenklasse. Die zu ihrer Einführung hier verwendete Methode der „Definition durch transfinite Induktion" (Hausdorff, a. a. O. Kap. V, § 3) ist seitdem vorbildlich geworden für alle solchen transfiniten Konstruktionen. Insbesondere hat die hier eingeführte Funktion $f(\xi)$ den Charakter einer „Normalfunktion" (Hausdorff, a. a. O., S. 114), ein Begriff, der sich später als einer der wichtigsten in der gesamten Theorie der transfiniten Ordnungszahlen erwiesen hat.

[25] Zu S. 341. Hier ist $\alpha_1 < \alpha_0$, weil sonst

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \alpha'' \\ &\geqq \omega^{\alpha_0}(\varkappa_0 + \varkappa_1) + \alpha'' \geqq \omega^{\alpha_0}(\varkappa_0 + 1) \end{aligned}$$

wäre im Widerspruch mit der Annahme (2).

[26] Zu S. 345. Der Beweis des Satzes K stützt sich im wesentlichen auf die *Eindeutigkeit der Produktdarstellung* G und die aus ihr folgende Existenz eines (linksseitigen) „größten gemeinsamen Teilers" zweier transfiniten Zahlen α, β in der Form $\alpha = \delta\alpha'$, $\beta = \delta\beta'$. Soll für zwei solche Zahlen α, β von erster Art $\alpha\beta = \beta\alpha$ sein, so ergibt sich zunächst, daß die größere von ihnen durch die kleinere teilbar sein muß, $\alpha = \beta\alpha'$. Dann ist aber auch α' mit β „vertauschbar" und $\alpha' < \alpha$, weil wegen $\beta > 1$ hier $\beta\alpha = \alpha\beta > \alpha$ ist.

Jedem Zahlenpaare α, β von der betrachteten Eigenschaft entspricht also ein „kleineres" Paar α', β (in welchem die *größere* der beiden Zahlen kleiner ist als im ersten) von der gleichen Eigenschaft, und wenn das kleinere Paar die verlangte Darstellung $\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}$ gestattet, so gilt das gleiche auch von α, β selbst. Gäbe es nun transfinite Zahlenpaare α, β von der genannten Eigenschaft, welche *nicht* so darstellbar wären, so gäbe es unter diesen auch ein *kleinstes* (eines mit kleinstem $\alpha > \beta$), und dies widerspräche dem eben Bewiesenen. Durch diese einfache Überlegung läßt sich also die Cantorsche Beweisführung wesentlich vereinfachen.

[27] Zu § 20, S. 347. Die Cantorschen ε-Zahlen sind in moderner Bezeichnungsweise nichts anderes als die „kritischen Zahlen" der speziellen „*Normalfunktion*" $f(\xi) = \omega^{\xi}$ (vgl. Hausdorff, Kap. V, § 3), und ihre Theorie ist damit wegweisend gewesen für die ganze moderne Theorie der Normalfunktionen, wodurch sie eine weit über ihre ursprüngliche Bedeutung hinausgehende Wichtigkeit gewinnen. Die ganze Gedankenentwickelung dieses Paragraphen bis zum Satz F inkl. läßt sich ohne weiteres auf die „kritischen Zahlen" jeder beliebigen Normalfunktion übertragen.

IV. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und zur Philosophie des Unendlichen.

1. Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

[Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle 1873, S. 34–42.]
[Anmerkungen hierzu S. 367.]

In den vier Jahren, welche ich die Ehre habe, der Naturforschenden Gesellschaft als Mitglied anzugehören, ist mir oft die Gelegenheit zuteil geworden, bei den hier gehaltenen Vorträgen Forschungen kennenzulernen, welche zu ihrer Entwickelung mehr oder weniger mathematischer Begriffe und Methoden sich bedienen.

Bei gewissen Gebieten der Naturwissenschaft ist der hilfreiche, fördernde, oft unerläßliche Anteil der Mathematik seit langen Zeiten zugestanden: Die Astronomie besteht in ihrer einen Hälfte aus analytischen Theorien, welche die sich ändernden Zustände des Weltraumes zu ihrem Gegenstande haben; in der Physik macht sich einerseits überall, wo man ein durch die Beobachtung gefundenes Gesetz in einen einfachen, durchsichtigen Ausdruck bringen will, das Bedürfnis nach der algebraischen Formel geltend, andrerseits wirkt aber die Mathematik, wenn man sie in ausgedehnterem Maße auf physikalische Daten anwendet, wahrhaft schöpferisch und läßt auf Tatsachen schließen, die teils der Beobachtung entgangen sind, teils aber auch ein so kompliziertes Gewebe haben, daß die Empirie, welche sie nachträglich zu bestätigen sucht, aus eigenem Antriebe schwerlich zu ihrer Entdeckung gelangt sein würde; die Chemie ist erst von der Zeit zu einer systematischen, sich mit ungewöhnlicher Schnelligkeit weiter entwickelnden Wissenschaft geworden, als man sich die Zusammensetzung der Naturkörper durch Auffindung der sogenannten Atomgewichte an bestimmten Zahlverhältnissen vergegenwärtigen konnte. Aber auch in den übrigen Zweigen der Naturwissenschaft macht sich, wie ich höre, teils der Einfluß der mathematischen Methode, teils das Bedürfnis nach ihrer Anwendung mehr und mehr geltend; ich glaubte daraus den Schluß ziehen zu dürfen, daß neben den in diesen Sitzungen über alle Teile der Naturforschung sich verbreitenden Vorträgen auch einmal ein solcher nicht ohne Interesse sein würde, in welchem ein für die Naturwissenschaft fruchtbringender Teil der Mathematik, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, von historischen Gesichtspunkten aus betrachtet wird.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet der historischen Untersuchung ein nach vielen Beziehungen angenehm zu behandelndes Feld; über das Jahrhundert, in welchem ihre Entstehung allein gesucht werden kann, braucht man nicht zu streiten, denn, darüber sind alle Gelehrten einig, es ist das siebenzehnte, welches an großen Denkern und an weittragenden Entdeckungen so reich erscheint, daß man geneigt wäre, es für das ruhmvollste von allen Jahrhunderten zu halten; die Nationen, welche einander den Besitz an geistigen Errungenschaften fortwährend streitig machen, erschweren uns die Betrachtung ebensowenig; denn sie können in diesem Falle nicht umhin, die Wiege der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Frankreich zu erblicken, wo um die Mitte des siebenzehnten Jahrhunderts die beiden Gelehrten Fermat und Pascal im regen brieflichen Verkehr über mathematische Fragen auch auf solche Aufgaben verfielen, welche zu ihrer Lösung die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung nötig hatten, und es stellte sich zu beider Genugtuung heraus, daß sie unabhängig voneinander zu denselben gelangt waren; während die gleichzeitigen Erfinder der Differential- und Integralrechnung Isaac Newton und Gottfried Leibniz sich zu einem Prioritätsstreit haben hinreißen lassen, der, von ihren Schülern und Nachfolgern in erbitterter Weise fortgeführt, noch heutiges Tages in seinen Wirkungen bemerkbar ist und dem Historiker den Blick zu trüben sucht, — sehen wir die Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung friedlich über ihren gemeinschaftlichen Fund sich freuen, um die Zukunft und um ihre Ansprüche an dieselbe wenig besorgt.

Pierre Fermat (geb. in Beaumont de Lomagne bei Toulouse 1601, gest. in Toulouse 1665) war Rat im Parlamente dieser Stadt und soll in dieser Eigenschaft sich als Jurist einen bedeutenden Namen erworben haben. In den beiden Hauptteilen der Mathematik, in der Geometrie und Arithmetik, werden ihm die wichtigsten Entdeckungen verdankt, von welchen ich nur die Tangentenmethode, welche in ihrer allgemeinen Ausbildung zur Differential- und Integralrechnung führen mußte, und die nach ihm benannten Sätze in der Zahlentheorie erwähnen möchte, deren Beweise später so fruchtbringende Mühe den Mathematikern gekostet haben.

Blaise Pascal (geb. in Clermont Ferrand 1623, gest. in Paris 1662) lebte ohne öffentliches Amt abwechselnd in Clermont, Rouen und Paris; seine gegen die sittenverderbende Lehre der Jesuiten gerichtete, noch bis auf den heutigen Tag wegen des vortrefflichen Stiles, der feinen Ironie und des witzigen, gewandten Vortrages vielgelesene Schrift, Lettres Provinciales, begründete eine neue Epoche in der Prosaliteratur; Pascals eigentliche Stärke darf aber wohl in seinen mathematischen und mechanischen Arbeiten

angenommen werden, von denen leider eine Theorie der Kegelschnitte verloren gegangen ist; als Erinnerung an letztere sehen wir in fast allen Darstellungen dieses Gegenstandes den sogenannten *Pascal'schen Satz* den vornehmsten Platz einnehmen.

Pascal und Fermat sind also die Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung; ihr Zusammengehen darin tritt besonders lebhaft an der folgenden Stelle in einem Briefe Pascals an Fermat hervor (d. 29. Juli 1654):

„Je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable ou je me trouve avec vous. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris".

Wir erfahren nun einen Umstand, welcher als besonderer Anlaß dieser Besprechungen angesehen werden kann. Ein gewisser Chevalier de Meré, Mann von Ansehen und von Geist, will bei einer das Würfelspiel betreffenden Aufgabe die Autorität des Mathematikers durchaus nicht anerkennen; er hat sich eine andere Lösung in den Kopf gesetzt und in der Meinung, sie sei die richtige, klagt er die Mathematik öffentlich an, daß sie sich selbst widerspreche. Es handelte sich um folgendes. Wenn man mit *einem* Würfel viermal werfen darf, so kann man mit *Vorteil* darauf wetten, mindestens einmal die 6 zu werfen. Spielt man mit *zwei* Würfeln, so findet sich, daß man *nicht mit Vorteil* annehmen kann, eine doppelte 6 unter vier und zwanzig Würfen zu erhalten. Nichtsdestoweniger verhalten sich beim zweiten Spiele die Zahl 24 zu der Anzahl der möglichen Fälle 36, wie 4 zu 6, d. h. wie beim ersten Spiele die entsprechenden Zahlen; und dies wollte dem Chevalier nicht einleuchten [1]. Pascal in seiner lebhaften Weise berichtet an Fermat wie folgt:

„Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Meré; car il est très bon esprit, mais il n'est pas géomètre. C'est comme vous savez un grand defaut, et même il ne comprend pas qu'une ligne mathematique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre infini, et jamais je n'ai pu l'en tirer; si vous le pouviez faire on le rendrait parfait" [2]; und nachdem er die Streitfrage gezeichnet, fährt er fort: „voila quel était son grand scandale, qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'Arithmetique se démentait."

Der Chevalier de Meré darf, wie ich glaube, allen Widersachern der exakten Forschung, und es gibt deren zu jeder Zeit und überall, als ein warnendes Beispiel hingestellt werden; denn es kann auch diesen leicht begegnen, daß genau an jener Stelle, wo sie der Wissenschaft die tödliche Wunde zu geben suchen, ein neuer Zweig derselben, schöner, wenn möglich, und zukunftreicher als alle früheren, rasch vor ihren Augen aufblüht — wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vor den Augen des Chevalier de Meré [3].

Sehen wir auf diese Weise Pascal und Fermat im brieflichen Verkehr das Fundament der nachherigen Wissenschaft legen und verschiedene, zum Teil komplizierte Aufgaben derselben stellen und lösen, so sprechen sie sich doch so gut wie gar nicht über die von ihnen befolgten Prinzipien aus, welche gewissermaßen nur zwischen den Zeilen zu erkennen sind, und es muß daher die erste systematische Zusammenstellung und Begründung derselben besonders hoch geachtet werden. Bereits nach 3 Jahren unternahm es Huygens diese Lücke auszufüllen. Als Anhang zu Schootens Exercitationum mathematicarum libri quinque erschien sein Tractatus de ratiociniis in ludo aleae. Hier werden die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, freilich noch nicht in der einfachsten Weise, entwickelt; der Verfasser wendet sie hauptsächlich auf die mit Würfeln angestellten Spiele an; er bezieht sich auf die Arbeiten seiner Vorgänger, mußte jedoch fast ganz von vorn anfangen, weil sich jene über ihre Methoden nicht ausgesprochen hatten. In der Einleitung zum Huygens'schen Werke heißt es: „Sciendum vero, quod jam pridem inter praestantissimos tota Gallia geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primae inventionis gloriam hac in re tribuat. Caeterum illi, dificillimis quibusque quaestionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuere, adeo ut a primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit."

Zu den frühesten Dokumenten der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört auch ein Brief des Amsterdamer Philosophen Benedictus de Spinoza (geb. in Amsterdam 1632, gest. im Haag 1677). Während seines einsamen Landlebens in Voorburg löst er eine ihm von einem Freunde gestellte arithmetische Aufgabe und teilt demselben seine Lösung mit. Der Brief (in der Bruderschen Ausgabe von Sp.'s Werken der 43.) ist datiert den 1. Oktober 1666; sehen wir uns seinen Inhalt genauer an, so finden wir darin gewisse Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der diesem Philosophen eigenen, fast unerreichbaren Strenge der Begriffskonstruktion kurz enthalten. Ich muß es den Kennern überlassen, zu entscheiden, ob Spinoza in den Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat eingeweiht gewesen, ob er den Huygensschen Tractat gekannt hat, oder ob er unabhängig von allen Vorgängern zu seinen Resultaten gelangt ist. —

Wenn man das Wesen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine einfache und zugleich allgemeine Weise bezeichnen will, so muß man es in dem Grundsatze erblicken, daß die mathematische Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines erwarteten Ereignisses durch einen echten Bruch gemessen wird, dessen Nenner die Anzahl aller denkbaren, sowohl günstigen, wie ungünstigen Fälle, welche eintreten können, dessen Zähler aber nur die Anzahl der dem Ereignisse günstigen Fälle angibt, vorausgesetzt, daß ein jeder von den sämtlichen in Betracht zu ziehenden Fällen, mit Rücksicht auf unseren Wissenszustand, gleich möglich ist. — Man ist also bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf die Berechnung vom Zähler und Nenner derselben angewiesen, was je nach der Natur der betreffenden Aufgabe verschiedene Hilfsmittel erfordert.

Jacob Bernoulli (geb. in Basel 1654, gest. in Basel 1705) hat in seinem Werke Ars conjectandi, welches nach seinem Tode von seinem Sohne Nikolaus 1713 herausgegeben worden ist, die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für die bei den Hazardspielen denkbaren Aufgaben allgemein durchzuführen gesucht; er bemerkte, daß sie auf die Aufgabe zurückkommt, aus gegebenen Elementen nach einem vorgeschriebenen Modus alle möglichen Zusammenstellungen zu bilden; von den verschiedenen Modis, welche dabei erdacht werden können, wurden die häufigst vorkommenden ins Auge gefaßt, die Permutationen, Kombinationen und Variationen genannt und in dem zweiten Teile seines Buches ausführlich behandelt werden; in den ersten Teil desselben nahm er den Huygensschen Tractat auf, dem er eigene Bemerkungen hinzufügte; der dritte Teil ist den Anwendungen auf das Hazardspiel gewidmet; der vierte Teil des unvollendet gebliebenen Werkes kann als der bedeutendste von allen betrachtet werden; wir sehen Bernoulli hier ganz neue Bahnen betreten, welche, für alle späteren Bearbeitungen maßgebend, der jungen Wissenschaft eine unvorhergesehene Tragweite und das unbestrittene Recht verschafften, in allen Gebieten des Lebens ein gewichtiges Wort mitreden zu dürfen.

Die Überschrift ist: „Pars quarta, tradens usum et applicationem praecedentis doctrinae in civilibus, moralibus et oeconomicis." Die Kapitel dieses Teiles sind folgendermaßen betitelt:

„Cap. I. Praeliminaria quaedam de certitudine, probabilitate, necessitate et contingentia rerum."

„Cap. II. De scientia et conjectura. De arte conjectandi. De argumentis conjecturarum. Axiomata quaedam generalia huc pertinentia."

„Cap. III. De variis argumentorum generibus, et quomodo eorum pondera aestimentur ad supputandas rerum probabilitates."

„Cap. IV. De duplici modo investigandi numeros casuum. Quid sentiendum de illo, qui instituitur per experimenta, problema singulare eam in rem propositum."

Wenn wir in der Gegenwart alle weisen Staatsverwaltungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung als eines sicheren, zuverlässigen Instrumentes sich bedienen sehen, wenn wir bemerken, daß die modernen volkswirtschaftlichen Theorien durch sie umgestaltet und gefördert werden, so können wir nicht ohne eine gewisse Genugtuung auf das Buch des Baseler Universitätslehrers blicken, wo in den hier bezeichneten Kapiteln die praktische Seite der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum ersten Male wissenschaftlich vorbereitet wird.

Nur an den mathematischen Teil dieser Arbeit möchte ich hier wenige Bemerkungen knüpfen; derselbe gipfelt in dem von **Bernoulli** gefundenen Satze, welcher das Verhältnis der sogenannten Wahrscheinlichkeit a priori zu der Wahrscheinlichkeit a posteriori bestimmt. Viele Ereignisse haben ein so zusammengesetztes Gefüge, daß es nicht möglich ist, ihre Wahrscheinlichkeit direkt, d. h. a priori anzugeben; **Bernoulli** lehrt uns, wie sie a posteriori, d. h. durch Beobachtungen gefunden werden kann. Dieser Satz wird uns leicht verständlich durch ein Beispiel. Man denke sich eine Urne, welche schwarze und weiße Kugeln enthält. Wenn man weiß, daß die Anzahl der schwarzen Kugeln p ist, die Anzahl sämtlicher Kugeln n, so ist die Wahrscheinlichkeit w des Ziehens einer schwarzen Kugel $w = \frac{p}{n}$, gleich der Anzahl der günstigen Fälle, dividiert durch die Anzahl aller Fälle.

Denken wir uns aber dieses Verhältnis der schwarzen zu allen in der Urne enthaltenen Kugeln unbekannt, so ziehen wir blind eine Anzahl von Malen, die ich n' nennen will, je eine Kugel, die jedesmal wieder in die Urne zurückgeworfen wird; hierbei möge p' die Anzahl angeben, wie oft eine schwarze Kugel gezogen worden ist; dann gibt uns der **Bernoulli**sche Satz eine bestimmte Beziehung zwischen der gesuchten Wahrscheinlichkeit $w = \frac{p}{n}$ und dem auf diese Weise durch Versuche auffindbaren Bruche $\frac{p'}{n'}$ an; der Satz lautet:

Man kann die Wahrscheinlichkeit, daß der Bruch $\frac{p'}{n'}$ von der Wahrscheinlichkeit w um weniger als eine beliebig vorgegebene Größe abweicht, der Gewißheit beliebig nahe bringen, wenn nur die Anzahl n' hinreichend vergrößert wird.

Hieraus folgt nun, daß man für die Wahrscheinlichkeit w eines Ereignisses annäherungsweise mit großer Glaubwürdigkeit den aus der Beobachtung sich ergebenden Bruch $\frac{p'}{n'}$ substituieren kann, wenn nur n' groß genug angenommen wird.

Bernoulli legte diesem Resultate mit Recht einen um so größeren Wert bei, als er zu dessen Begründung erhebliche Schwierigkeiten besiegen mußte. Sein Beweis enthält zwar einige Beschränkungen, kann aber, wie ich gefunden habe, ohne das dabei befolgte Prinzip zu ändern, vollkommen strenge gemacht werden; er hat vor dem später durch **Laplace** gelieferten den großen Vorzug, daß in ihm nur die elementarsten Mittel zur Anwendung kommen. Es wird erzählt, daß **Bernoulli**, obgleich er von der Bedeutung seiner Arbeit durchdrungen war, dieselbe 20 Jahre lang unter seinen Papieren habe liegen lassen. —

Bereits im Jahre 1708 erschien der Essai d'analyse sur les jeux de hazard von **Pierre Rémond de Montmort** (geb. in Paris 1678, gest. in Paris 1719),

Canonicus an Notredame und Mitglied der Académie zu Paris. Obgleich der Herausgabe nach älter als die Ars conjectandi, welche erst 1713 erschien, ist dieses Werk doch nicht unabhängig von dem **Bernoulli**schen. Der Verfasser sagt, daß er die Anregung dazu dem verdanke, was er berichtweise über die **Bernoulli**schen Forschungen erfahren habe, und wir können uns über den Inhalt der **Montmort**schen Arbeit dahin aussprechen, daß sie im wesentlichen mit den drei ersten Teilen der Ars conjectandi parallel geht.

Von **Moivre** erschien 1711 (Phil. Trans.) eine Abhandlung De mensura sortis, welcher im Jahre 1718 die Schrift folgte Doctrine of chances. **Abraham de Moivre** (geb. in Vitry in der Champagne 1667, gest. in London 1754) verließ nach Aufhebung des Ediktes von Nantes als Protestant sein Vaterland und lebte als Privatlehrer der Mathematik in London, wo er in die Royal Society aufgenommen wurde.

In den **Moivre**schen Arbeiten sehen wir mehr als in allen früheren über die Wahrscheinlichkeitsrechnung das Wesentliche von dem Unwesentlichen geschieden; dem **Huygens**schen Tractate gegenüber erscheinen seine Methoden als die mehr genuinen und im Vergleiche zu der Ars conjectandi macht sich eine zum Teil gewandtere Analyse geltend.

Im Jahre 1740 erschien in London von **Thom. Simpson** ein Treatise on the nature and laws of chance; es ist derselbe **Simpson**, welchem wir wertvolle Bereicherungen in der Geometrie verdanken; die sogenannten **Simpson**schen Regeln haben die Lehre von der näherungsweisen Quadratur angebahnt.

Indem wir der Entwickelung der Wahrscheinlichkeitsrechnung weiter folgen, treten wir in die Epoche der französischen Revolution; die Gedankenrichtung, welche dieses Ereignis vorbereitete und durch eine schonungslose, auf den Umsturz des Bestehenden hinzielende Kritik der Zustände des staatlichen und des Familienlebens bezeichnet ist, konnte ein Instrument nicht ungenutzt lassen, welches, wie kein anderes, die Befähigung gibt, die verschiedensten Kulturelemente allgemeinen Gesichtspunkten unterzuordnen. Zu den Lieblingsideen dieser Aufklärungszeit gehörte dann auch, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung einer der wichtigsten Gegenstände des öffentlichen Unterrichts sei, denn sie sei die Rechnung des gesunden Menschenverstandes, durch deren Belehrungen allein der falsche Einfluß von Hoffnung, Furcht und allen Gemütsbewegungen auf unser Urteil vernichtet und somit Vorurteil und Aberglaube aus dem Urteil im bürgerlichen Leben verdrängt werden könne.

Vornehmlich begegnet uns hier der zu den Girondisten gezählte **Marquis de Condorcet** (geb. in Ribemont 1743, gest. in dem Gefängnis zu Bourg la Reine 1794), Mitglied und später Sekretär der Pariser Akademie. Sein Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix (Paris 1784) zeichnet sich durch seinen philosophischen Gehalt sowohl, wie auch durch die Neuheit der darin behandelten Probleme aus. —

Durch Pierre Simon Marquis de Laplace (Beaumont en Auge 1749 — Paris 1827) erhält die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine außerordentliche Vollendung in ihren analytischen Bestandteilen und in ihren Anwendungen auf das Leben.

Laplace war erst Lehrer der Mathematik an der Militärschule seiner Vaterstadt, dann in Paris Examinator beim k. Artilleriekorps und später Professor der Mathematik an der École Normale, daneben Mitglied der Académie und des Bureau des Longitudes, auch unter der Konsularregierung kurze Zeit Minister des Innern. Er hat zwei Werke über die Wahrscheinlichkeitsrechnung hinterlassen; das größere, die Théorie analytique des probabilités (Paris 1812) widmete er, wie schon früher seinen Traité de mécanique céleste dem ersten Napoleon; in der Widmung heißt es:

„Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont, en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité. Il doit, sous ce rapport, interesser votre Majesté dont le génie sait si bien apprécier et si dignement encourager tout ce qui peut contribuer au progrès des lumières, et de la prosperité publique.“

Das zweite Werk ist sein: Essai philosophique sur les probabilités (Paris 1814); hier sehen wir, daß Laplace nicht nur Meister in der Behandlung der schwierigsten analytischen Fragen ist, sondern auch, daß es ihm, wie keinem andern gegeben war, dieselben Gegenstände gemeinfaßlich in der vollendetsten Form zu behandeln.

Deutschland erhält einen entschiedenen Anteil an der Ausbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erst durch Gauß, welcher besonders eine Seite ihrer Anwendungen untersucht und begründet hat.

Stets, wenn in der Natur Größenmessungen vorgenommen werden, sind die Resultate derselben mit Fehlern behaftet, die teils vom Zufalle herbeigeführt, teils von störenden äußeren Umständen abhängig sind, teils aber auch in den Täuschungen ihre Ursache haben, welchen wir selbst, unserer Natur nach, beim Beobachten unterworfen sind.

Um nun diese Fehler, welche nach der einen oder andern Seite hin möglich sind, zu verkleinern, ist man schon frühe auf den Gedanken gekommen, eine und dieselbe Messung oder, allgemeiner gesprochen, ein und dasselbe System von Messungen öfter, als die Zahl der zu bestimmenden Größen fordert, und unter den verschiedensten Umständen vorzunehmen; die Resultate, welche man auf diese Weise erhält, sind nun zwar alle von dem richtigen aus den angeführten Gründen verschieden, aber es läßt sich annehmen, daß man durch eine verständige Kombination derselben ein solches aus ihnen

herleiten kann, welchem man eine größere Glaubwürdigkeit beilegen muß als jeder der ursprünglichen Messungen für sich.

In der Astronomie, wo das hier berührte Problem besonders dringend auftrat, hat bereits de Laplace eine Methode entworfen, welche zu dem angegebenen Ziele führt.

Gauß wandte zum ersten Male auf diese Aufgabe die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung an und fand nicht nur eine einfachere Lösung derselben, sondern auch diejenige, welcher von allen möglichen die größte Glaubwürdigkeit zukommt. Die unter dem Namen „Methode der kleinsten Quadrate“ von ihm begründete Näherungsmethode erschien zuerst als ein Bestandteil seines großen Werkes: Theoria motus corporum coelestium 1809, welches hauptsächlich der Bahnbestimmung der Planeten aus drei Bahnelementen gewidmet ist.

In den Jahren 1821, 1823 und 1826 widmete er dieser Theorie drei akademische Abhandlungen: Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Pars I. und II. und Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.

Es liegt in der Aufgabe, welche ich mir gestellt, nur dasjenige kurz zu berühren, was in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als maßgebend hervortritt; es sind aus diesem Grunde viele verdienstvolle Abhandlungen und Kompendien von dieser Besprechung ausgeschlossen, die zur Vertiefung sowohl, wie zur Verbreitung der Wissenschaft Ausgezeichnetes beigetragen haben. Ich darf jedoch ein Moment nicht unerwähnt lassen, welches wesentlich zu unserer Wissenschaft gehört, ich meine ihre philosophische Begründung — die Franzosen nennen es die Metaphysik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Jede Wissenschaft, welche sich wie die unsrige auf Begriffe und Grundsätze stützt, die nicht bloß spontan gebildet und mathematisch verwertet werden, sondern auch eine gewisse reale Gültigkeit in Anspruch nehmen, so daß die Resultate der Rechnung eine Anwendung auf die Wirklichkeit erhalten sollen, jede derartige Wissenschaft erfordert nach Inhalt und Umfang eine philosophische Kritik. Die Mathematiker beschränken sich freilich in den meisten Fällen bei der Herleitung der Grundbegriffe, wie *mathematische Wahrscheinlichkeit, möglicher Fall, Gewißheit* und dergl., auf synthetische Begriffserklärungen, die Bedingungen ihrer Anwendbarkeit werden oft als etwas Selbstverständliches nicht weiter erörtert. Um die fundamentalen Sätze, wie z. B. den für die Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ereignisse zu beweisen, wird ein konkreter Fall, wie etwa der einer Urne mit schwarzen und weißen Kugeln behandelt; und es wird manchmal stillschweigend die Richtigkeit derartiger Sätze auf Fälle übertragen, in welchen ihre Gültigkeit mindestens zweifelhaft ist.

Nirgends ist die Gelegenheit in dem Grade vorhanden wie hier, die Kunst der Analysis in glänzender Weise zu entfalten; aber auch nirgends tritt der Fall häufiger auf, daß die mit Scharfsinn durchgeführte Rechnung von gar keinem Werte ist, weil sie sich auf unrichtige Voraussetzungen stützt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat also stets und besonders, wenn ihr ein neues Feld der Anwendung gegeben wird, eine Erörterung nötig, worin die Gültigkeit ihrer Berechnungen genau festgestellt wird.

Diese Seite der Wissenschaft, nämlich ihre philosophische, finden wir denn auch von allen ihren Vertretern gewürdigt und gepflegt. Bernoulli hat, wie wir sahen, das vierte Buch seiner Ars conjectandi hauptsächlich der Kritik gewidmet; Condorcet geht in seinem Werke von philosophischen Gesichtspunkten aus; Laplace schrieb seinen Essai philosophique sur les probalilités; in Lacroix's „Traité élémentaire du calcul des probabilités" finden wir die philosophische Seite durchgehends vertreten. Hierbei bietet sich eine Bemerkung dar: die englischen und französischen Mathematiker gehen bei ihren philosophischen Betrachtungen zumeist von den Grundsätzen des Hume'schen Skeptizismus und des Locke'schen Sensualismus aus; darnach finden wir bei ihnen auch die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von diesen Gesichtspunkten aus; seitdem aber in Deutschland Kant neue, die Erkenntnis betreffende Lehren angebahnt hat, wird auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Kantischen Sinne kritisch untersucht, und es sei mir in dieser Beziehung gestattet, nur an die Schrift von Jac. Fr. Fries zu erinnern, betitelt: Versuch einer Kritik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Obgleich ich nun mit *meinem* Versuche, aus den mir bekannt gewordenen Schriften und Überlieferungen ein flüchtiges Bild der Wissenschaft zu entwerfen, eigentlich zu Ende bin, kann ich der Versuchung doch nicht widerstehen, die Nützlichkeit und den Wert der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorzuheben, indem ich die Schlußworte aus dem Essai philosophique von Laplace in Übersetzung hier anführe:

„Man sieht", sagt er, „daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Grunde nichts anderes ist als der in Rechnung gebrachte gesunde Menschenverstand; sie lehrt dasjenige mit Genauigkeit bestimmen, was ein richtiger Verstand durch eine Art von Instinkt fühlt, ohne sich immer Rechenschaft davon geben zu können. Sie läßt keine Willkür bei der Wahl von Ansichten zu, da sie zeigt, welche von ihnen die glaubwürdigste sei. So bildet sie einen Ersatz für die natürliche Unwissenheit und Schwäche des menschlichen Geistes. Betrachtet man die analytischen Methoden, welche erst durch diese Theorie entstanden sind, die Wahrheit der Grundsätze, auf denen sie beruht, die feine und genaue Logik, welche ihr Gebrauch bei der Auflösung von Aufgaben erfordert, den Nutzen der auf sie gegründeten öffentlichen Anstalten und die Ausdehnung, welche sie auf die wichtigsten Aufgaben der Naturwissenschaft und der moralischen Wissenschaften erhalten hat und noch mehr erhalten kann; und berücksichtigt man zugleich, daß sie selbst bei Gegenständen, die der Rechnung nicht unterworfen werden können, die richtigsten Ansichten verschafft, welche die Urteile darüber leiten können, und daß sie vor verwirrenden Täuschungen sich hüten lehrt, so wird man einsehen, daß keine Wissenschaft des Nachdenkens würdiger ist und keine mit mehr Nutzen in das System des öffentlichen Unterrichts aufgenommen werden kann."

[Anmerkungen.]

Es handelt sich hier um einen in der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle gehaltenen populärwissenschaftlichen Vortrag, der augenscheinlich auf tiefergehende historische Studien des Verfassers gegründet ist. Wie Cantor dazu kam, sich gerade mit der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beschäftigen, ohne doch jemals selbst auf irgendeinem Gebiete der angewandten Mathematik forschend tätig gewesen zu sein, entzieht sich unserer heutigen Kenntnis. Eigentümlich an diesem Vortrag und uns Heutigen seltsam anmutend ist der durchgehende Zug eines fröhlichen Optimismus, jener „rationalistische" Glaube des achtzehnten Jahrhunderts an die Macht der menschlichen Vernunft und des mathematisch rechnenden Verstandes, der auch auf allen Gebieten des praktischen, ja des politischen Lebens zur Führung berufen sein soll.

[1] Zu S. 359 In der Tat sind die beiden von Chevalier de Meré irrtümlich identifizierten Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung voneinander verschieden. Es ist nämlich

$$w_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}518 > \frac{1}{2}$$

und

$$w_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}492 < \frac{1}{2}.$$

[2] ibid. Immerhin kann man sich eine *Linie* ganz wohl als *Gesamtheit ihrer Punkte* denken, als eine „Menge" im Cantorschen Sinne; nur sind ihre „Teile" dann nicht diese Punkte selbst sondern wieder „Punktmengen", darunter freilich auch solche, die aus einzelnen Punkten bestehen. Erst die scharfe Unterscheidung zwischen einer aus einem einzigen Element bestehenden „Menge" und diesem Elemente selbst ermöglicht die Festhaltung des Grundsatzes, daß jeder „Teil" dem Ganzen „gleichartig" sein müsse.

[3] ibid. Die auf diesen Chevalier de Meré bezügliche Schlußbemerkung Cantors könnte mit fast noch größerem Rechte auf das Schicksal der *Mengenlehre* und ihrer Widersacher bezogen werden: eine merkwürdige Vorausschau zu einer Zeit, wo der künftige Bahnbrecher sein eigentliches Lebenswerk kaum noch begonnen hatte: seine erste mengentheoretische Arbeit III 1 erschien erst 1873. Die vorliegende Äußerung charakterisiert treffend das Schicksal jeder reaktionären Richtung in der Wissenschaft und wird immer wieder aktuell sein.

2. Ludwig Scheeffer (Nekrolog).

[Bibliotheca mathematica (herausg. v. Eneström) Bd. 1, S. 197—199 (1885).]

Die mathematische Wissenschaft hat in diesem Jahre den Verlust eines ihrer tüchtigsten jüngeren Arbeiter zu beklagen gehabt, den ein frühzeitiger Tod aus seiner vielversprechenden wissenschaftlichen Tätigkeit herausgerissen hat.

Karl Ludwig Scheeffer war geboren in Königsberg i. Pr. den 1. Juni 1859, hatte dort und zuletzt in Berlin die Gymnasialbildung erhalten und studierte seit Ostern 1876 in Heidelberg, Leipzig, Berlin Mathematik. Am 1. März 1880 promovierte er in Berlin mit einer Arbeit: *Über Bewegungen starrer Punktsysteme in einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit,* hatte jedoch keine Neigung für die Universitätskarriere, da er die Einseitigkeit der Mathematik fürchtete, obgleich er andererseits sich aus vollster Überzeugung dieser Wissenschaft gewidmet hatte. Er machte daher im Laufe des folgenden Jahres das Examen *pro facultate docendi* (in Mathematik, Physik, philosophischer Propädeutik und beschreibenden Naturwissenschaften), und absolvierte von Ostern 1881 bis 1882 sein pädagogisches Probejahr am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu Berlin (Schellbachsches Seminar). Während der Zeit keimte bei ihm das Bewußtsein, dennoch zum höheren [akademischen] Lehrfache berufen zu sein und er ging, nachdem er den Sommer 1882 seiner Gesundheit wegen in den Alpen zugebracht hatte, mit Mut ans Werk. Er wählte München, weil die Nähe der Gebirgsnatur, die er über alles liebte, ihn lockte, und habilitierte sich dort (gegen Ostern 1884). Nur noch ein weiteres Jahr vergönnte ihm das Schicksal für seine wissenschaftliche Tätigkeit, dann raffte ihn der Tod dahin. Von einer Ferienreise, die er nach Italien machte, zurückgekehrt, wurde er vom Typhus ergriffen, dem er am 11. Juni 1885 erlag, nach eben vollendetem 26^{ten} Lebensjahre.

Es möge hier eine Aufzählung seiner mathematischen Publikationen, abgesehen von der bereits erwähnten Inauguralschrift, folgen:

1. Über einige bestimmte Integrale betrachtet als Funktionen eines komplexen Parameters. Berlin, Dreijer 1883.
   4°, 21 p. — Habilitationsschrift (München).
2. Beweis des Laurent'schen Satzes.
   Acta Mathem. 4, 375—380 (1884).
3. Allgemeine Untersuchungen über Rektifikation der Kurven.
   Acta Mathem. 5, 49—82 (1884).

4. Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen.
   Acta Mathem. 5, 1884, 183—194, 279—296.
5. Zur Theorie der Funktionen
   $$\Gamma(z),\quad Q(z),\quad P(z).$$
   Journ. für Mathem. 97, 1884, 230—241.
6. Über die Bedeutung der Begriffe „Maximum und Minimum" in der Variationsrechnung.
   Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. (Math. Kl.) 1885, 92—105. Abgedruckt: Mathem. Ann. 26, 1885, 197—208.
7. Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen.
   Mathem. Ann. 25, 1885, 522—595.

Außer diesen zu Lebzeiten des Verfassers erschienenen Abhandlungen ist noch eine Arbeit desselben über Maxima und Minima von Funktionen zweier Veränderlicher vorhanden, welche demnächst, einem Wunsche des Verstorbenen gemäß, in dem *Journal für die reine und angewandte Mathematik* herausgegeben werden soll.

Aus diesen Anführungen geht bereits hervor, daß der Verfasser sich durch eine seltene Vielseitigkeit auszeichnete; das genauere Studium seiner Arbeiten läßt aber auch den Schluß auf eine eminente Beanlagung ihres Autors zu.

Eine gründliche Gelehrsamkeit, verbunden mit Reichtum an eigenen Gedanken, welche mit musterhafter Einfachheit, Klarheit und Eleganz der Sprache zur Darstellung kommen, bildet das wesentliche Merkmal seiner Produktionen. Von den schönen Resultaten, zu welchen ihn seine mit eisernem Fleiß gepflogenen Untersuchungen geführt haben, möge hier der in Nr. 4 gelieferte Beweis für den folgenden Satz hervorgehoben werden:

„Wenn man von einer stetigen Funktion einer Veränderlichen weiß, daß ihr Differentialquotient Null ist für alle Werte eines Intervalls, mit *Ausnahme derjenigen, welche irgendeiner gegebenen unendlichen Punktmenge erster Mächtigkeit entsprechen,* so folgt hieraus, daß die Funktion in dem gedachten Intervalle eine Konstante ist."

Schließlich sei es gestattet, auf die Nr. 6 und 7 seiner Arbeiten noch besonders aufmerksam zu machen, weil darin einige neue und entwicklungsfähige Ideen der Variationsrechnung zugeführt zu sein scheinen.

3. Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche.

(Aus einem Schreiben des Verf. an Herrn G. Eneström in Stockholm vom 4. Nov. 1885.)

[Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik Bd. 88, S. 224—233; Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten. I. Abteilung, 92 S. Halle a. S.: C. E. M. Pfeffer 1890.]

[Anmerkungen hierzu S. 376.]

. . . Ihr heute in meine Hände gelangter Brief vom 31. Okt. d. J. enthält folgende Frage: „Avez vous vu et étudié l'écrit de l'Abbé Moigno intitulé: ‚Impossibilité du nombre actuellement infini; la science dans ses rapports avec la foi.' (Paris, Gauthier-Villars, 1884)?" Allerdings habe ich mir dieses Schriftchen vor einigen Wochen verschafft. Was Moigno hier über die angebliche Unmöglichkeit der aktual unendlichen Zahlen sagt, und die Nutzanwendung, welche er von diesem falschen Satze auf die Begründung gewisser Glaubenslehren macht, ist mir dem wesentlichen nach bereits aus Cauchy's: „Sept leçons de physique générale" (Paris, Gauthier-Villars, 1868) bekannt gewesen. Cauchy scheint zu dieser für einen Mathematiker höchst seltsamen Spekulation durch das Studium des P. Gerdil geführt worden zu sein. Letzterer (Hyacinth Sigmund, 1718—1802) war eine hochgestellte, sehr respektable Persönlichkeit und ein angesehener Philosoph, der als Professor eine Zeitlang in Turin wirkte, später Erzieher des nachmaligen Königs Karl Emanuel IV. von Piemont, dann vom Papst Pius VI. 1776 nach Rom berufen, zu mancherlei Geschäften des heil. Stuhles gebraucht und endlich zum Bischof von Ostia, wie auch zum Kardinal erhoben wurde. Ihnen wird er vielleicht als Verfasser einiger Arbeiten über Geometrie und über historische Gegenstände bekannt sein. Cauchy nimmt pag. 26 Bezug auf eine Abhandlung Gerdil's, welche den Titel führt: „Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanents, soit successifs." (Opere edite ed inedite del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil, t. IV, p. 261, Rome 1806). Derselbe Gegenstand findet sich auch von ihm dargestellt im „Mémoire de l'infini absolu considéré dans la grandeur" (ibid. t. V. p. 1, Rome 1807).

Ich stehe durchaus nicht in prinzipiellem Gegensatz zu diesen Autoren, sofern sie eine Harmonie zwischen Glauben und Wissen erstreben, halte aber das Mittel, dessen sie sich hier dazu bedienen, für ein gänzlich verfehltes.

Wenn die Glaubenssätze zu ihrer Stütze eines so *grundfalschen* Satzes, wie derjenige von der Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen (der in der bekannten Formulierung „numerus infinitus repugnat" uralt ist; neuerdings findet er sich z. B. bei Tongiorgi: „Instit. philos. t. II, l. 3, a. 4, pr. 10" in der Form: „Multitudo actu infinita repugnat"; auch u. a. bei Chr. Sigwart „Logik, Bd. II. S. 47, Tübingen 1878" und bei K. Fischer „System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre S. 275, Heidelberg 1865 kann er gefunden werden) bedürften, so wäre es mit ihnen sehr schlecht bestellt und es scheint mir höchst bemerkenswert, daß der heil. Thomas von Aquino in I p, q. 2, a. 3 seiner „Summa theologica", wo er mit fünf Argumenten die Existenz Gottes beweist, von diesem fehlerhaften Satze *keinen* Gebrauch macht, obwohl er im übrigen kein Gegner desselben ist; jedenfalls erschien er ihm für diesen Zweck doch zu unsicher. (Vergl. Constantin Gutberlet: „Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet", Mainz 1878, S. 9). So hoch ich Cauchy als Mathematiker und Physiker schätze, so sympathisch mir seine Frömmigkeit ist und so sehr mir im besondern auch jene „Sept Leçons de physique générale", abgesehen von dem in Rede stehenden Irrtum gefallen, muß ich doch entschieden gegen seine Autorität protestieren da, wo er gefehlt hat.

Es sind jetzt gerade zwei Jahre her, daß mich Herr Rudolf Lipschitz in Bonn auf eine gewisse Stelle im Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher aufmerksam machte, wo ersterer gegen *jede* Heranziehung des Aktual-Unendlichen in die Mathematik sich ausspricht (Brief v. 12. Juli 1831); ich habe ausführlich geantwortet und die Autorität von Gauß, welche ich in allen anderen Beziehungen so hoch halte, *in diesem Punkte* abgelehnt, sowie ich heute das Zeugnis Cauchy's und wie ich in meinem Schriftchen „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883" [hier III 4, Nr. 5, S. 165 ff.] u. a. auch die Autorität Leibnizens, der in dieser Frage eine merkwürdige Inkonsequenz begangen hat, zurückweise.

Wenn Sie sich das soeben genannte Schriftchen (nicht die Übersetzung in den Acta mathematica t. II, wo nur ein Teil davon abgedruckt ist) genauer ansehen wollten, so würden Sie finden, daß ich in den §§ 4—8 im Grunde auf alle Einwürfe geantwortet habe, welche wider die Einführung aktual unendlicher Zahlen gemacht werden können. Sind mir auch damals die erwähnten Schriften von Gerdil, Cauchy und Moigno über unsern Gegenstand noch nicht bekannt gewesen, so werden doch die betreffenden Scheingründe dieser Autoren ebensowohl getroffen, wie die petitiones principii der von mir dort so reichlich angeführten Philosophen.

Alle sogenannten Beweise wider die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen sind, wie in jedem Falle besonders gezeigt und auch aus allgemeinen Gründen geschlossen werden kann, der Hauptsache nach dadurch fehlerhaft, und darin *liegt ihr πρῶτον ψεῦδος, daß sie von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdrängen, während die unendlichen Zahlen doch andrerseits, wenn sie überhaupt in irgendeiner Form denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur der Dinge durchaus abhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkür oder unserer Vorurteile ist.*

Pascal hat, wie ich erst kürzlich gesehen, das Bedenkliche, wenn nicht Widersinnige solcher Deduktionen, wie sie uns bei den genannten Schriftstellern begegnen, wohl erkannt und er spricht sich deshalb auch, ebenso wie sein Freund Antoine Arnauld *für* die aktual-unendlichen Zahlen aus, nur daß er aus einem andern widerlegbaren Grunde, auf den ich hier nicht näher eingehen will, den menschlichen Geist in Hinsicht seiner Auffassungskraft des Aktual-Unendlichen zu gering schätzt. (Vgl. Pascal, Oeuvres complètes, t. I p. 302—303, Paris, Hachette & Co. 1877; ferner: Logique de Port-Royal, ed. par C. Jourdin, 4[e] partie, chap. 1, Paris, Hachette & Co. 1877).

Wenn man die verschiedenen Ansichten, welche sich in bezug auf unsern Gegenstand, das *Aktual-Unendliche* (im folgenden Kürze halber mit A.-U. bezeichnet), im Laufe der Geschichte geltend gemacht haben, übersichtlich gruppieren will, so bieten sich dazu mehrere Gesichtspunkte dar, von denen ich heute nur einen hervorheben möchte.

Man kann nämlich das A.-U. in *drei Hauptbeziehungen* in Frage stellen: *erstens, sofern es in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante*, wo es das *Absolute* heißt, *zweitens* sofern es *in concreto seu in natura naturata* vorkommt, wo ich es *Transfinitum* nenne und *drittens* kann das A.-U. *in abstracto* in Frage gezogen werden, d. h. sofern es von der menschlichen Erkenntnis in Form von *aktual-unendlichen*, oder wie ich sie genannt habe, von *transfiniten Zahlen* oder in der noch allgemeineren Form der *transfiniten Ordnungstypen* (ἀριθμοὶ νοητοί oder εἰδητικοί) aufgefaßt werden könne.

Sehen wir zunächst von dem *ersten* dieser drei Probleme ab und beschränken uns auf die beiden letzteren, so ergeben sich von selbst *vier verschiedene Standpunkte*, welche auch wirklich in Vergangenheit und Gegenwart sich vertreten finden.

Man kann *erstens* das A.-U. sowohl *in concreto*, wie auch *in abstracto* verwerfen, wie dies z. B. von Gerdil, Cauchy, Moigno in den angeführten Schriften, von Herrn Ch. Renouvier (vergl. dessen Esquisse d'une classification systématique des doctrines philosophiques, t. I. pag. 100, Paris, au Bureau de la Critique philosophique, 1885) und von allen sogenannten *Positivisten* und deren Verwandten geschieht.

Zweitens kann man das A.-U. *in concreto* bejahen, dagegen *in abstracto* verwerfen; dieser Standpunkt findet sich, wie ich in meinen „Grundlagen, pag. 16“ [hier S. 175ff.] hervorhob, bei Descartes, Spinoza, Leibniz, Locke und vielen anderen. Soll ich auch hier einen neueren Autor nennen, so erwähne ich Hermann Lotze, der in einem Aufsatze betitelt: „L'Infini actuel est-il contradictoire? Réponse à Monsieur Renouvier“ in der Revue philos. de Ribot, t. IX, 1880 das A.-U. in concreto verteidigt; die Replik Renouviers findet sich in demselben Bande dieser Zeitschrift.

Es kann *drittens* das A.-U. *in abstracto* bejaht, dagegen *in concreto* verneint werden; auf diesem Standpunkt befindet sich ein Teil der *Neuscholastiker*, während ein andrer, und vielleicht der größere Teil dieser, durch die Enzyklika Leo's XIII, vom 4. August 1879: „De philosophia Christiana ad mentem Sancti Thomae Aquinatis Doctoris Angelici in scholis catholicis instauranda“ mächtig angespornten Schule den ersten dieser vier Standpunkte noch zu verteidigen sucht.

Endlich kann *viertens* das A.-U. sowohl *in concreto*, wie auch *in abstracto bejaht* werden; auf diesem Boden, den ich für den *einzig richtigen* halte, stehen nur wenige; vielleicht bin ich der zeitlich erste, der diesen Standpunkt mit voller Bestimmtheit und in allen seinen Konsequenzen vertritt, doch das weiß ich sicher, daß ich nicht der letzte sein werde, der ihn verteidigt!

Wird auch die Stellung der Philosophen zu dem Problem des A.-U. *in Deo* berücksichtigt, so erhält man eine Klassifikation der Schulen in *acht Standpunkte*, welche merkwürdigerweise sämtlich vertreten zu sein scheinen. Eine Schwierigkeit der Einordnung in diese *acht* Klassen könnte sich nur bei denjenigen Autoren ergeben, welche in bezug auf eine oder mehrere der *drei* das A.-U. betreffenden Fragen keine bestimmte Position genommen haben.

Daß das sogenannte *potentiale* oder *synkategorematische Unendliche* (Indefinitum) zu keiner derartigen Einteilung Veranlassung gibt, hat darin seinen Grund, daß es ausschließlich als *Beziehungsbegriff*, als *Hilfsvorstellung* unseres Denkens Bedeutung hat, für sich aber keine *Idee* bezeichnet; in jener Rolle hat es allerdings durch die von Leibniz und Newton erfundene Differential- und Integralrechnung seinen großen Wert als Erkenntnismittel und Instrument unseres Geistes bewiesen; eine weitergehende Bedeutung kann dasselbe nicht für sich in Anspruch nehmen.

Vielleicht sind Sie zu Ihrer Fragestellung durch eine Bemerkung in meinem Aufsatze „Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen“ in Acta mathematica, t. VII, p. 123 [hier III 7, S. 275] veranlaßt worden, wo ich unter anderen Cauchy als Gewährsmann für meine Ansicht in bezug auf die *Konstitution der Materie* genannt; ich habe hierbei besonders denjenigen Bestandteil meiner Hypothese im Auge gehabt, in welchem ich die *strenge räum-*

liche Punktualität oder *Ausdehnungslosigkeit der letzten Elemente,* wie sie nach dem Vorgange Leibnizens auch von dem Pater Boskovič, in dessen Schrift „Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium, Venetiis, 1763" gelehrt wurde, behaupte; und allerdings findet sich diese Ansicht von Cauchy in seinen „Sept leçons" und vor ihm von André Marie Ampère (Cours du collège de France 1835—1836), nach ihm von de Saint-Venant (Vergl. dessen „Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues, et sur la nature probable des dernières particules des corps". Bulletin de la Société philomatique de Paris, 20 Janvier 1844; ebenso dessen größere Arbeit in den Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 2e année), bei uns in Deutschland vornehmlich von H. Lotze (vergl. dessen „Mikrokosmos", Bd. I) und von G. Th. Fechner (vergl. dessen: „Über die physikalische und philosophische Atomlehre", Leipzig, 1864) meisterhaft verteidigt. Dagegen kann ich nicht in Abrede stellen, daß Cauchy wenigstens in jenem Schriftchen (und wohl auch die übrigen zuletzt genannten Autoren, mit Ausnahme von Leibniz) gegen den zweiten Bestandteil meiner Hypothese, die *aktual-unendliche Zahl der letzten Elemente* polemisieren; mit welchem Rechte ist von mir oben gezeigt worden. Daß Cauchy jedoch *bei anderen Gelegenheiten* dieser das A.-U. betreffenden Meinung nicht treu geblieben ist, wie es ja auch nicht anders sein konnte, will ich später einmal nachweisen . . .

Trotz wesentlicher Verschiedenheit der Begriffe des *potentialen* und *aktualen* Unendlichen, indem ersteres eine *veränderliche* endliche, über alle endliche Grenzen hinaus *wachsende* Größe, letzteres ein *in sich festes, konstantes,* jedoch jenseits aller endlichen Größen liegendes Quantum bedeutet, tritt doch leider nur zu oft der Fall ein, daß das eine mit dem andern verwechselt wird. So beruht z. B. die nicht selten vorkommende Auffassung der *Differentiale,* als wären sie *bestimmte* unendlich kleine Größen (während sie doch nur *veränderliche,* beliebig klein anzunehmende Hilfsgrößen sind, die aus den Endresultaten der Rechnungen gänzlich verschwinden und darum schon von Leibniz als bloße *Fiktionen* charakterisiert werden, z. B. in der Erdmannschen Ausgabe, S. 436), auf einer Verwechselung jener Begriffe. Wenn aber aus einer berechtigten Abneigung gegen solches *illegitime* A. U. sich in breiten Schichten der Wissenschaft, unter dem Einflusse der modernen epikureisch-materialistischen Zeitrichtung, ein gewisser *Horror Infiniti* ausgebildet hat, der in dem erwähnten Schreiben von Gauß seinen klassischen Ausdruck und Rückhalt gefunden, so scheint mir die damit verbundene unkritische Ablehnung des *legitimen* A. U. kein geringeres Vergehen wider die Natur der Dinge zu sein, die man zu nehmen hat, wie sie sind, und es läßt sich dieses Verhalten auch als eine Art *Kurzsichtigkeit* auffassen, welche die Möglichkeit raubt, das A. U. zu sehen, obwohl es in seinem höchsten,

absoluten Träger uns geschaffen hat und erhält und in seinen sekundären, transfiniten Formen uns allüberall umgibt und sogar unserm Geiste selbst innewohnt.

Eine *andere* häufige *Verwechselung* geschieht mit den beiden Formen des *aktualen* Unendlichen, indem nämlich das *Transfinite* mit dem *Absoluten* vermengt wird, während doch diese Begriffe streng geschieden sind, insofern ersteres ein *zwar Unendliches,* aber doch *noch Vermehrbares,* das letztere aber wesentlich als *unvermehrbar* und daher mathematisch *undeterminierbar* zu denken ist; diesem Fehler begegnen wir z. B. im *Pantheismus,* und er bildet die *Achillesferse* der *Ethik Spinozas,* von welcher zwar F. H. Jacobi behauptet hat, daß sie mit Vernunftgründen nicht zu widerlegen sei. Auch bemerkt man, daß sich seit Kant die falsche Vorstellung unter den Philosophen einbürgert, als sei das *Absolute* die ideale Grenze des *Endlichen,* während in Wahrheit diese Grenze nur als ein *Transfinitum,* und zwar als das *Minimum alles Transfiniten* (entsprechend der von mir mit ω bezeichneten, *kleinsten* überendlichen Zahl) gedacht werden kann. Ohne ernste kritische Vorerörterung wird der Unendlichkeitsbegriff von Kant in dessen „Kritik der reinen Vernunft", in dem Kapitel über die „Antinomien der reinen Vernunft" an *vier* Fragen behandelt, um den Nachweis zu liefern, daß sie mit gleicher Strenge *bejaht* und *verneint* werden können. Es dürfte kaum jemals, selbst bei Mitberücksichtigung der Pyrrhonischen und Akademischen Skepsis, mit welcher Kant so viele Berührungspunkte hat, mehr zur Diskreditierung der menschlichen Vernunft und ihrer Fähigkeiten geschehen sein, als mit diesem Abschnitt der „kritischen Transzendentalphilosophie". Ich werde gelegentlich zeigen, daß es diesem Autor nur durch einen *vagen, distinktionslosen* Gebrauch des Unendlichkeitsbegriffs (wenn unter solchen Verhältnissen überhaupt noch von Begriffen die Rede sein kann) gelungen ist, seinen *Antinomien* Geltung zu verschaffen, und dies auch nur bei denen, die gleich ihm einer gründlichen mathematischen Behandlung solcher Fragen gern ausweichen. [1]

Hier möchte ich auch auf *zwei* Angriffe antworten, welche gegen meine Arbeiten unternommen worden sind.

Herbart faßt bekanntlich die Definition des Unendlichen so, daß unter sie nur das *potentiale Unendliche* fallen kann, um darauf einen sogenannten Beweis zu gründen, daß das A. U. in sich widersprechend sei. Er hätte mit *demselben Rechte* den Kegelschnitt als eine Kurve definieren können, deren Punkte von einem Zentrum alle gleich weit abstehen, um darauf fußend, gegen Apollonios von Perga den Satz zu vertreten: „Es gibt keine anderen Kegelschnitte als den *Kreis* und, was du da *Ellipse, Hyperbel* und *Parabel* nennst, sind widerspruchsvolle Begriffe." Von solcher Ware sind die Einwände, welche die Herren *Herbartianer* gegen meine „Grundlagen" vorgebracht haben. (Vergl. Zeitschr. f. exakte Philos. von Th. Allihn und A. Flügel, Bd. 12, S. 389.)

Herr W. Wundt nimmt in *zweien* seiner Schriften, in seiner „Logik, Bd. II", sowie in der Abhandlung „Kants kosmologische Antinomien und das Problem der Unendlichkeit, Philos. Studien, Bd. II", wenn auch in eigenartiger Weise, bezug auf meine Arbeiten, und es treten bei ihm die *von mir eingeführten* Worte „transfinit = überendlich" des öfteren hervor; doch kann ich nicht finden, daß er mich richtig verstanden habe.

In dem *ersteren* Werke stellt z. B. der ganze Satz, S. 127 unten, welcher anfängt mit den Worten: „Wenn wir eine . . ." das genaue *Gegenteil vom Richtigen* dar. Auch werden die Begriffe des *potentialen* und *aktualen Unendlichen* (welche ich in meinen „Grundlagen" *Uneigentlich-Unendliches* und *Eigentlich-Unendliches* genannt habe) von ihm ganz falsch bestimmt. Die Zusammenstellung mit Hegel muß gleichfalls als unzutreffend abgelehnt werden. Der *pantheistische* Hegel kennt keine wesentlichen Unterschiede im A. U., während es doch gerade das *mir* Eigentümliche ist, solche Unterschiede, die ich fand, scharf hervorgehoben und durch Aufdeckung des *fundamentalen* Gegensatzes von „*Mächtigkeit*" und „*Ordnungszahl*" bei Mengen, den Herr Wundt ganz übersehen zu haben scheint, obgleich er fast auf jeder Seite meiner Arbeiten zur Geltung kommt, streng mathematisch ausgebildet zu haben. Ebensowenig Ähnlichkeit haben meine Untersuchungen mit den „mathematischen", mit denen sie gleichwohl von Herrn Wundt in eine Linie gestellt werden. Die Begriffsschwankungen und die damit zusammenhängende Verwirrung, welche seit ungefähr *hundert* Jahren zuerst vom fernen Osten Deutschlands her in die Philosophie hineingetragen wurden, zeigen sich nirgends deutlicher als in den das *Unendliche* betreffenden Fragen, wie aus unzählig vielen, sei es *kritizistisch* oder *positivistisch*, *psychologistisch* oder *philologistisch* gehaltenen Publikationen unsrer heutigen philosophischen Literatur hervorgeht. Nicht unerwähnt kann es daher bleiben, daß Herr Wundt das Wort „Infinitum" ausschließlich in der Bedeutung des potentialen Unendlichen gebrauchen will. Nun ist aber dieses Wort von altersher *ganz allgemein* auf den positivsten aller Begriffe, den Gottes, bezogen worden; man muß über den sonderlichen Einfall staunen, wonach das Wort „Infinitum" fortan nur in dem allereingeschränktesten, synkategorematischen Sinne verwandt werden solle.

[Anmerkungen.]

Mit dem vorstehenden Aufsatze beginnt die Reihe der Erörterungen, in denen Cantor den seinen *mathematischen* Untersuchungen zugrunde liegenden Unendlichkeitsbegriff gegenüber *philosophischen* und *theologischen* Einwänden verteidigt. Die polemisch-apologetische Absicht und die briefliche Form, in der diese (zuerst in der Fichteschen Zeit-

schrift erschienen und später in den „Gesammelten Abhandlungen" wieder abgedruckten und zusammengefaßten) Aufsätze entstanden sind, sowie das (nicht immer erfolgreiche) Bestreben, auch Nicht-Mathematikern verständlich zu sein, bedingt einen gewissen Mangel an Systematik und mathematischer Schärfe. Dem mathematisch Vorgebildeten seiner mengentheoretischen Arbeiten werden sie kaum etwas Neues zu bieten haben, ohne doch andererseits den Wert und die Bedeutung einer spezifisch philosophischen Leistung beanspruchen zu können. Für die heutigen Leser dürften diese Aufsätze hauptsächlich von psychologisch-biographischem Interesse sein.

[1] Zu S. 375. Der Kantischen Lehre von den „Antinomien der reinen Vernunft" scheint hier Cantor doch nicht gerecht zu werden. Nicht um eine Widerlegung oder Ablehnung des Unendlichkeits*begriffes* handelte es sich hier bei Kant, sondern um seine Anwendung auf das *Weltganze*, um die Tatsache, daß die menschliche Vernunft sich durch ihre innere Natur ebenso gedrängt findet, die Welt als begrenzt wie als unbegrenzt, als endlich wie als unendlich anzunehmen — eine Tatsache, die weder durch mathematische Theorien wie die Cantorsche Mengenlehre noch durch seine wohl nicht sehr tiefgreifende Polemik aus der Welt geschafft werden kann. Auch wer wie der Herausgeber die Kantische Theorie der Mathematik, wonach alle mathematischen Sätze auf „reine Anschauung" gegründet sein sollen, grundsätzlich *ablehnt*, wird doch zugeben müssen, daß in dieser Lehre von den „Antinomien" eine tiefere Einsicht, ein Einblick in die „dialektische" Natur des menschlichen Denkens zum Ausdruck kommt. Und ein eigentümliches Schicksal fügte es, daß gerade die „Antinomien der Mengenlehre", deren mindestens *formale* Analogie mit den Kantischen nicht wohl in Abrede gestellt werden kann, ein ganzes Menschenalter hindurch der Ausbreitung und Anerkennung der Cantorschen Leistungen im Wege gestanden haben.

4. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.

[Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik Bd. 91, S. 81—125 (1887); Bd. 92, S. 240—265 (1888); Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten 2. Teil.]
[Anmerkungen hierzu vgl. S. 439.]

In dem vorhergehenden Aufsatze habe ich, veranlaßt durch gewisse, gegen die Möglichkeit der unendlichen Zahlen geschriebene ältere und neuere Arbeiten, den Versuch gemacht, die sich an das aktuale Unendliche knüpfenden Fragen nach ihren obersten Scheidungen, von dem allgemeinsten Gesichtspunkte aus abzugrenzen, um auf diese Weise eine Übersicht der hauptsächlichsten Positionen zu gewinnen, welche in bezug auf diesen Gegenstand eingenommen werden können. Es wurde das A.-U. nach *drei* Beziehungen unterschieden: *erstens* sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein, *in Deo* realisiert ist, wo ich es *Absolutunendliches* oder kurzweg *Absolutes* nenne; *zweitens* sofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; *drittens* sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken *in abstracto* aufgefaßt werden kann. In den *beiden* letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und *insofern dem Endlichen verwandtes* A.-U. sich darstellt, nenne ich es *Transfinitum* und setze es dem *Absoluten* strengstens entgegen.

In jeder von den drei Beziehungen kann die Möglichkeit des aktualen Unendlichen bejaht oder verneint werden; daraus folgen im ganzen *acht* verschiedene Standpunkte, die sämtlich in der Philosophie vertreten sind und von welchen ich denjenigen einnehme, der *unbedingt affirmativ* ist, *in bezug auf alle drei Rücksichten*.

Liegt es besonders der *spekulativen Theologie* ob, dem *Absolutunendlichen* nachzuforschen und dasjenige zu bestimmen, was menschlicherseits von ihm gesagt werden kann, so fallen andrerseits die auf das *Transfinite* hingerichteten Fragen hauptsächlich in die Gebiete der *Metaphysik* und der *Mathematik*; sie sind es vorzugsweise, mit denen ich mich seit Jahren beschäftige.

Da ich das Glück hatte, darüber mit mehreren Gelehrten, welche meinen Arbeiten ein freundliches Interesse gewidmet, zu korrespondieren und mir hierbei Gelegenheit geworden ist, das bisher Veröffentlichte in gemeinverständlicher Weise zu erläutern und aufzuklären, so meine ich in diesem, aus lebendigem Gedankenaustausch hervorgegangenen Material geeignete Anknüpfungspunkte für weitere, ein größeres Publikum interessierende Ausführungen zu besitzen. Ich möchte daher zunächst im folgenden mehrere dieser

von mir geschriebenen Briefe veröffentlichen, ohne wesentliche Änderungen an ihnen vorzunehmen. Wo es jedoch mir nötig erscheinen wird, will ich in Noten unter dem Text Erklärungen dazu geben.

Zu den Briefen I, III, IV und VIII möchte ich folgendes als Einleitung vorausschicken.

Ad I und VIII. Hier findet sich die von mir seit etwa *vier* Jahren vertretene und in meinen Vorlesungen vielfach ausgebildete Auffassungsweise der *ganzen Zahlen* und *Ordnungstypen* als *Universalien*, die sich auf *Mengen* beziehen und aus ihnen sich ergeben, wenn von der *Beschaffenheit der Elemente abstrahiert* wird. Jede Menge wohlunterschiedener Dinge kann *als ein einheitliches Ding für sich* angesehen werden, in welchem jene Dinge Bestandteile oder konstitutive Elemente sind. Abstrahiert man *sowohl* von der Beschaffenheit der Elemente, *wie auch* von der Ordnung ihres Gegebenseins, so erhält man die *Kardinalzahl* oder *Mächtigkeit* der Menge, einen Allgemeinbegriff, in welchem die Elemente, als sogenannte Einsen, gewissermaßen organisch ineinander derartig zu einem einheitlichen Ganzen verwachsen sind, daß keine vor den anderen ein bevorzugtes Rangverhältnis hat. Daraus ergibt sich bei eingehender Erwägung, daß zweien verschiedenen Mengen dann und nur dann eine und dieselbe Kardinalzahl zukommt, wenn sie das zueinander sind, was ich *äquivalent* nenne, und *es liegt kein Widerspruch* vor, wenn, wie dies bei *unendlichen* Mengen häufig eintritt, zwei Mengen, von denen die eine ein *Teil* oder *Bestandteil* der andern ist, *völlig gleiche* Kardinalzahl haben. In dem *Verkennen dieser Tatsache* sehe ich das Haupthindernis, welches der Einführung unendlicher Zahlen von alters her entgegengebracht worden ist.

Wird jener Abstraktionsakt an einer gegebenen, nach einer oder mehreren Beziehungen (Dimensionen) geordneten Menge nur in bezug auf die *Beschaffenheit* der Elemente vorgenommen, so daß die *Rangordnung*, in welcher sie zueinander stehen, auch im Allgemeinbegriff beibehalten bleibt, der auf solche Weise gewissermaßen eine, aus verschiedenen Einsen, welche eine bestimmte Rangordnung, nach einer oder nach mehreren Richtungen, untereinander bewahren, hervorgehende einheitliche organische Bildung wird, so hat man damit ein solches *universale*, welches von mir im allgemeinen *Ordnungstypus* oder *Idealzahl*, in dem besonderen Falle wohlgeordneter Mengen aber *Ordnungszahl* genannt wird[1]; letztere stimmt überein mit dem, was ich früher (Grundl. e. allg. Mannigfaltigkeitslehre) [III 4, S. 168] „Anzahl einer wohlgeordneten Menge" genannt habe. Zwei geordneten Mengen kommt dann und nur dann *ein und derselbe Ordnungstypus* zu, wenn sie zueinander im Verhältnis der *Ähnlichkeit* oder *Konformität* stehen, welches Verhältnis genau definiert werden wird.

[1] Vgl. Gutberlet: Das Problem des Unendlichen. Z. Philos. u. philos. Krit. 88, 183.

Hier sind die *Wurzeln* aufgedeckt, aus welchen sich der *Organismus* der transfiniten *Typentheorie* oder Theorie der *Idealzahlen* und im besondern der transfiniten *Ordnungszahlen* mit logischer Notwendigkeit herausentwickelt und den ich, in systematischer Gestalt, bald hoffe publizieren zu können.

In einer Rezension, die ich für die „Deutsche Literaturzeitung" [hier IV 5, S. 440] zu liefern hatte, habe ich die Bestimmungen über *Kardinal-* und *Ordnungszahl* wie folgt formuliert: „Ich nenne Mächtigkeit eines Inbegriffs oder einer Menge von Elementen (wobei letztere gleich- oder ungleichartig, einfach oder zusammengesetzt sein können) denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle Mengen, welche der gegebenen Menge äquivalent sind, und nur diese fallen. Zwei Mengen werden hierbei äquivalent genannt, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen. Ein anderes ist, was ich ‚Anzahl oder Ordnungszahl' nenne; ich schreibe sie nur ‚wohlgeordneten Mengen' zu, und zwar verstehe ich unter der ‚Anzahl oder Ordnungszahl einer gegebenen wohlgeordneten Menge' denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle wohlgeordneten Mengen, welche der gegebenen ähnlich sind, und nur diese fallen. ‚Ähnlich' nenne ich zwei wohlgeordnete Mengen, wenn sie sich gegenseitig eindeutig und vollständig, unter Wahrung der gegebenen Elementenfolge auf beiden Seiten, aufeinander abbilden lassen. Bei *endlichen* Mengen fallen die beiden Momente ‚Mächtigkeit' und ‚Anzahl' gewissermaßen zusammen, weil eine endliche Menge in jeder Anordnung ihrer Elemente als ‚wohlgeordnete' Menge eine und dieselbe Ordnungszahl hat; dagegen tritt bei unendlichen Mengen der Unterschied von ‚Mächtigkeit' und ‚Ordnungszahl' aufs stärkste zutage, wie dies in meinem Schriftchen ‚Grundl. e. allgem. Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883' gezeigt worden ist."

Die Kardinalzahlen sowohl, wie die Ordnungstypen sind *einfache* Begriffsbildungen; jede von ihnen ist eine *wahre Einheit* (*μονάς*), weil in ihr eine Vielheit und Mannigfaltigkeit von *Einsen einheitlich* verbunden ist.

Die Elemente der uns gegenüberstehenden Menge M sind getrennt vorzustellen; in dem intellektualen Abbilde $\overline{M}$ derselben (siehe Abschn. VIII, Nr. 9 dieses Aufsatzes [S. 420]), welches ich ihren Ordnungstypus nenne, sind dagegen die Einsen zu einem Organismus vereinigt. In gewissem Sinne läßt sich jeder Ordnungstypus als ein Kompositum aus *Materie* und *Form* ansehen; die darin enthaltenen, begrifflich unterschiedenen Einsen liefern die *Materie*, während die unter diesen bestehende Ordnung das der *Form* entsprechende ist.

Sehen wir uns die Definition bei Euklides für die endliche Kardinalzahl an, so muß zunächst *anerkannt* werden, daß er die Zahl, ebenso wie wir es tun, *ihrem wahren Ursprung gemäß*, auf die *Menge* bezieht und aus der Zahl nicht etwa ein bloßes „Zeichen" macht, das *Einzeldingen* beim subjektiven Zählprozeß beigelegt wird. Es heißt in seinen Elementen, lib. VII:

Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται und: *'Αριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.*

Dann scheint es mir aber, daß er die *Einsen* in der Zahl ebenso getrennt wähnt, wie die Elemente in der diskreten Menge, auf welche sie sich bezieht. Wenigstens fehlt in der Euklidischen Definition der ausdrückliche Hinweis auf den *einheitlichen Charakter* der Zahl, welcher ihr *durchaus wesentlich* ist[1].

Es ist nicht überflüssig, wenn ich hervorhebe, daß der Begriff der Ordnungszahl, wie er vorhin bestimmt worden ist, in dem Falle *endlicher* Ordnungszahlen durchaus nicht zusammenfällt mit dem, was man gewöhnlich „Ordinalzahlwörter" (erstes, zweites etc.) nennt; diese sind nichts als *Bezeichnungen* für den Ordnungsrang der Elemente einer wohlgeordneten Menge und ergeben sich *ohne weiteres* durch Anknüpfung an *unsere Ordnungszahlen*, indem das *letzte* Element einer endlichen wohlgeordneten Menge als das $n$te in der vorliegenden Reihenfolge bezeichnet wird, wenn n die derselben wohlgeordneten Menge zukommende Ordnungszahl vorstellt.

[1] Dem hier hervorgehobenen Bedürfnis, den organischen innerlich-einheitlichen Charakter der Zahl betont zu sehen, scheint Nikomachus mehr entgegenzukommen, wenn es bei ihm (Arith. intr. I, 7, 1) heißt: *'Αριθμός ἐστι πλῆθος ὡρισμένον ἢ μονάδων σύστημα ἢ ποσότητος χύμα* (von *χέω*, gießen) *ἐκ μονάδων συγκείμενον.* Und Boetius, inst. arithm. I, 3 sagt: „numerus est unitatum collectio, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus." Leibniz drückt sich im Jahre 1666 in der Schrift: Dissertatio de arte combinatoria, im Prooemium, als er in seinem Entwicklungsgange der Philosophie der Vorzeit noch näher stand, über den Zahlbegriff wie folgt aus: „Omnis *relatio* aut est *unio* aut *convenientia*. In unione autem res, inter quas haec relatio est, dicuntur *partes*, sumtae cum unione, *totum*. Hoc contingit quoties plura simul tanquam *unum* supponimus. *Unum* autem esse intelligitur quicquid *uno actu intellectus*, s. simul, cogitamus, v. g. quemadmodum numerum aliquem quantumlibet magnum, saepe caeca quadam cogitatione simul aprehendimus, cyphras nempe in charta legendo, cui explicate intuendo ne Methusalae quidem aetas suffectura sit. Abstractum autem ab uno est unitas, *ipsumque totum abstractum ex unitatibus, seu totalitas dicitur numerus.*" *Schon nach drei* Jahren findet sich von demselben Autor in einem Brief an Thomasius (Edit. Erdmann p. 53) die *bedenkliche* Erklärung: „numerum definio unum, et unum, et unum etc., seu unitates." Die Addition von Einsen kann aber niemals zur Definition einer Zahl dienen, weil hier die Angabe der Hauptsache, nämlich *wie oft* die Einsen addiert werden sollen, nicht ohne die zu definierende Zahl selbst erfolgen kann. Dies beweist, daß die Zahl, durch einen einzigen Abstraktionsakt gewonnen, nur als organische Einheit von Einsen zu erklären ist. Daraus folgt ferner, wie grundfalsch es ist, den Zahlbegriff vom Zeitbegriff oder der sog. Zeitanschauung abhängig machen zu wollen. Es ist dies in der neueren Philosophie seit ihrer Fortbildung durch Kant vielfach geschehen; Sir William Rowan Hamilton hat beispielsweise die Arithmetik als „The science of pure time" erklärt, und viele andere tun dasselbe. Sie könnten *mit genau demselben Rechte jede andere Wissenschaft*, z. B. die Geometrie, als „the sc. of pure time" ausgeben, weil wir bei der Bildung geometrischer oder sonstiger Begriffe *subjektiv* nicht weniger auf die „Zeit" als die Existenzform des diesseitigen Lebens angewiesen sind wie bei der Aneignung der arithmetischen Begriffe.

Während so von meinem Standpunkte aus die „Ordinalzahlwörter" als das *Letzte* und *Unwesentlichste* in der wissenschaftlichen Theorie der Zahlen sich ergeben, werden sie in zwei kürzlich publizierten Arbeiten zum Ausgangspunkt für die Entwickelung des Zahlbegriffs genommen. Es geschieht dies in den zwei Abhandlungen, welche Herr H. v. Helmholtz und Herr L. Kronecker in der Sammlung „Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktor-Jubiläum gewidmet. Leipzig, bei Fues, 1887" haben drucken lassen[1]. Sie vertreten den extremen empiristisch-psychologischen Standpunkt mit einer Härte, die man nicht für möglich halten würde, wenn sie nicht, in Fleisch und Blut zweimal verkörpert, hier entgegen träte. Es wäre irrtümlich, wollte man glauben, der Gegensatz dieser Auffassungen und der meinigen wäre etwa der von *Nominalismus* oder *Konzeptualismus* einerseits, zum maßvollen *aristotelischen Realismus* andererseits, den ich vertrete; vielmehr ist es *höchst instruktiv*, sich zu überzeugen, daß bei diesen beiden Forschern die Zahlen in erster Linie *Zeichen*, aber nicht etwa Zeichen für Begriffe, die sich auf Mengen beziehen, sondern *Zeichen für die beim subjektiven Zählprozeß gezählten Einzeldinge* sein sollen. Es versteht sich daher von selbst, daß, meinem Standpunkte gegenüber, der Gedankengang dieser Arbeiten als ein vollendetes *Hysteron-Proteron* sich darstellt.

In eben solchem Gegensatz stehen sie aber auch zu den die Zahlen betreffenden Auffassungen, welche wir im griechischen Altertum, nicht nur bei Philosophen, sondern auch bei Mathematikern finden. Die oben angeführte Definition des Euklides ist ein Beleg hierfür, und in bezug auf Platon und Aristoteles bedarf es kaum einer Hervorhebung.

Welche Stellung man nun aber auch zu den Alten einnehmen mag, so dürfte es jedermann von vornherein höchst unwahrscheinlich vorkommen, daß die besten unter ihnen sich bei den einfachsten, bestimmtesten und allgemein bekanntesten Dingen von der Wahrheit sehr weit entfernt haben sollten und daß erst im 19. Jahrhundert nach Chr. die richtige Erkenntnis über diesen Gegenstand eingetreten wäre. Und allerdings hat ja auch in der grauen Vorzeit eine *Sekte* bestanden, an welche man durch die Arbeiten der Herren v. Helmholtz und Kronecker lebhaft erinnert wird; es ist die *antike Skepsis*, und ich verweise dazu, was im besonderen die Zahlen angeht, auf des Sextus Empiricus Pyrrhoniarum Hypotyposeon, Lib. 3, cap. 18. Doch auch aus dem „Jahrhundert der Aufklärung", welches auf den Geist der vornehmen und gelehrten Akademien einen so nachhaltigen, immer noch

[1] Beide Autoren nennen „Ordnungszahl" das, was ich „Ordinalzahlwort" nenne, während bei mir das Wort „Ordnungszahl" eine andere Bedeutung hat. Ich würde meine „Ordnungszahl" mit „numerus ordinarius", dagegen das „Ordinalzahlwort" mit „nota ordinalis" übersetzen. Diese notae ordinales sind es, welche nach den beiden genannten Autoren das Wesen der Zahlen bestimmen sollen.

fortbestehenden Einfluß geübt hat, ist ein vorzüglich gearbeitetes Werk zu verzeichnen, welches sogar von einem Mitgliede der *Berliner Akademie der Wissenschaften* geschrieben worden ist:

Louis Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques (Génève aux dépens de l'Auteur 1778).

Das Titelblatt dieser zweibändigen Schrift zeigt einen Kupferstich; im Vordergrunde ein Schäfer, der seine heimkehrende Herde mustert, im Hintergrunde ein Jäger, dessen Pfeil den ausgedehnten Raum durchfliegt; dazu das Motto: Tu Pastor numeros, extensi tu rationes Pandito Venator.

Gleich das erste Kapitel fängt so an: „Dans les commencemens, les hommes furent chasseurs ou bergers. *Ces derniers eurent d'abord occassion de compter:* il leur importait de ne pas perdre leurs bestiaux; et pour cela il fallait s'assurer le soir si tous étaient revenus du pâturage: celui qui n'en aurait que quatre ou cinq, aurait pu voir d'un coup d'œil si tous étaient rentrés; *mais un coup d'œil n'aurait pas suffi à celui qui en aurait eu vingt.* Considérant donc ces bestiaux revenant *les uns après les autres*, il aurait imaginé *une suite de mots* en pareil nombre, *et gardant ces mots dans sa mémoire* il les aurait répétées le lendemain à mesure que ses bestiaux seraient rentrés; afin d'être sûr, s'ils eussent cessé d'entrer avant qu'il eût achevé ses mots, *qu'autant qu'il lui restait de mots a prononcer, autant il lui manquait des bestiaux* etc."

Man sieht, es ist, mutatis mutandis, dasselbe Zahlenprinzip wie bei den Herren v. Helmholtz und Kronecker; es handelt sich also hier nicht um etwas Neues, sondern nur, wie so oft, wieder um „alte, verkannte Wahrheit" (Ben Akiba).

Übrigens tritt auch bei beiden Gelehrten das *gegnerische Motiv* wider das aktuale Unendliche offen zutage, und da anerkanntermaßen selbst die „*endlichen*" Irrationalzahlen ohne *entschiedene* Heranziehung aktual-unendlicher Mengen wissenschaftlich-streng *nicht* zu begründen sind[1], so sind die Bestrebungen bei beiden, namentlich bei Herrn Kronecker mit unerbittlicher Folgerichtigkeit und Strenge darauf gerichtet, die seit Pythagoras und Platon allgemein anerkannten Irrationalzahlen mit Hilfe ihnen geeignet scheinender, künstlich ausgedachter Subsidiärtheorien durchaus „unnötig" und überflüssig zu machen[2] — anstatt sie naturgemäß zu erforschen und zu erklären. So sehen wir die in Deutschland als Reaktion gegen den überspannten Kant-Fichte-Hegel-Schellingschen Idealismus eingetretene, jetzt herrschende und mächtige *akademisch-positivistische Skepsis* endlich auch bei der *Arithmetik* angelangt, wo sie, mit der äußersten, für sie

[1] Man vgl. meine „Grundlagen" S. 21 [hier III 4, S. 183ff.] und den letzten Abschnitt meiner Abhandlung in Bih. till K. Sv. Vet.-Akad. Hdl. 11, Nr. 19.

[2] Man vgl. Kronecker: Crelles J. 99, 336, und Molks Abhandlung in Acta math. 6.

selbst vielleicht verhängnisvollsten Konsequenz, die letzten, ihr noch möglichen Folgerungen zu ziehen scheint. Denn was sollte ihr, nach Aufgebot *solchen* Scharfsinns und *solcher* Kräfte, zu ihrer Vollendung noch fehlen?

Eine eingehende Würdigung der beiden Arbeiten liegt nicht in meiner Absicht; es läßt sich annehmen, daß, entsprechend der Dignität ihrer Verfasser, auch *andere* sie berücksichtigen und prüfen werden. Nur wenige Bemerkungen mögen mir noch erlaubt sein.

Die Arbeit des Herrn Kronecker (Philos. Aufsätze, S. 263) beschränkt sich auf die Elemente der Zahlentheorie, steht aber in engem Zusammenhang mit seinen früheren algebraischen und zahlentheoretischen Untersuchungen und kann daher wohl auch nur in diesem Zusammenhang vollständig gewürdigt werden. Einige Andeutungen des Aufsatzes geben der Erwartung Raum, daß die Theorie später in extenso weitergeführt werden soll. Man wird erst dann ein abschließendes Urteil über sein System fällen können, wenn die Beziehung seiner Zahlen zu der Geometrie und Mechanik hergestellt erscheinen wird. Solange dies nicht der Fall ist, wird ein Zweifel an der Brauchbarkeit seiner Theorie jedermann erlaubt sein. Ich glaube sogar ohne jeden Zweifel vorhersagen zu können, daß es ihm nicht möglich sein wird, mit dem „ideellen Vorrat" (S. 266) seiner „Bezeichnungen" den *aktual unendlichen Punktvorrat* des räumlichen und zeitlichen Kontinuums „vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben" (diese Ausdrucksweise bezieht sich auf G. Kirchhoff, Vorl. üb. math. Phys., 1. Vorl.; Kronecker, Crelles J., Bd. 92, S. 93), und zwar hängt diese meine Überzeugung damit zusammen, daß ich im Jahre 1873 den Satz bewiesen habe: die Mächtigkeit eines Kontinuums ist höher als die Mächtigkeit des Inbegriffs aller endlichen, ganzen Zahlen (vgl. Crelles J., Bd. 77, S. 258ff.) [hier III 1, S. 115].

In der Einleitung des Kroneckerschen Aufsatzes (Phil. Aufs. S. 264) kommt ein kleines parodiertes Gedicht von Schiller (Archimedes und der Jüngling) zum Abdruck, welches der „ewigen Zahl" gewidmet ist. Wenn, wie hier und in der v. Helmholtzschen Arbeit, die ursprüngliche Bedeutung der Zahlen auf bloße „Zahlzeichen" herabgedrückt werden soll, so will mir ihr Zusammenhang mit der „Ewigkeit" nicht recht einleuchten, weil ich bei diesem Worte stets die unübertroffene Definition des Boetius (De consolatione philosophiae, lib. 5, prosa 6) im Sinne habe.

Zum Schluß hebe ich hervor, daß mir der Beweis des Hauptsatzes (S. 268) in dem Kroneckerschen Gedankengange nicht stringent zu sein scheint; es soll dort gezeigt werden, daß die „Anzahl" von der beim Zählen befolgten Ordnung unabhängig ist. Wenn man den Beweis genau verfolgt, so findet sich, daß darin in andrer Form derselbe Satz vorausgesetzt und gebraucht wird, welcher bewiesen werden soll; es liegt also das Versehen einer petitio principii vor.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich mir erlauben, ein andres Versehen zu berichtigen, welches Herr Kronecker gegenüber meinem verewigten Freunde und Kollegen Eduard Heine begangen hat. Letzterer wird in Crelles J., Bd. 99, S. 336, Jahrg. 1886 hauptsächlich verantwortlich gemacht für die von ihm in der Abhandlung „Elemente der Funktionentheorie", Crelles J., Bd. 74, Jahrg. 1872, auf Grund des Begriffs der „Fundamentalreihe" (welchen Herr Heine „Zahlenreihe" nennt) entwickelte Theorie der Irrationalzahlen, obgleich Herr Heine in der Einleitung seiner Arbeit ausdrücklich gesagt hat, daß er den Grundgedanken von mir „entlehnt" habe, und daß er mir für „mündliche Mitteilungen verpflichtet" sei, welche einen „bedeutenden Einfluß" auf die Gestaltung seiner Arbeit ausgeübt hätten. Gleichzeitig erschien von mir in Bd. 5 der „Mathematischen Annalen", [hier II 5, S. 92] in demselben Jahre 1872 eine Arbeit unter dem Titel: „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", darin ich die wesentlichen Punkte meiner Theorie der Irrationalzahlen kurz entwickelt habe; auch bin ich später noch einmal in den „Grundlagen", S. 23 [hier IV 4, S. 183ff.] auf diesen Gegenstand zurückgekommen. Ich muß also die Verantwortung für die, von Herrn Kronecker so schwer angegriffene Theorie *für mich* in Anspruch nehmen, indem ich den seligen Herrn Heine von der vermeintlichen, seitens des Herrn Kronecker ihm zugeschriebenen Hauptschuld hiermit entlaste.

Ad III und IV. Von *theologischer* Seite ist mir eingewendet worden, daß dasjenige, was ich Transfinitum in natura naturata nannte, (Vgl. diese Ztschr. Bd. 88, S. 227 [S. 372]) „sich nicht verteidigen ließe und in einem gewissen Sinne", den ich jedoch dem Begriffe „nicht zu geben schiene", „den Irrtum des Pantheismus enthalten würde." Auf dieses Bedenken antwortete ich mit dem Briefe III, auf welchen hin ich die Gunst eines ausführlichen an mich gerichteten Schreibens erfuhr, welches ich mir erlaube hier wörtlich, unter Weglassung einiger Epitheta höflich-verbindlichen Charakters, abzudrucken.

Es wurde mir auf den Brief III folgendes geantwortet:

„Aus Ihrem Aufsatze „Zum Problem des Aktual-Unendlichen" ersehe ich zu meiner Genugtuung, wie Sie das Absolut Unendliche und das, was Sie das *Aktual-Unendliche* im Geschaffenen nennen, sehr wohl unterscheiden. Da Sie das letztere für ein „*noch Vermehrbares*" (natürlich in indefinitum, d. h. ohne je ein nicht mehr Vermehrbares werden zu können) ausdrücklich erklären und dem Absoluten als „wesentlich Unvermehrbaren" entgegenstellen, was selbstverständlich ebenso von der Möglichkeit und Unmöglichkeit der Verkleinerung oder Abnahme gelten muß; so sind die beiden Begriffe des Absolut-Unendlichen und des Aktual-Unendlichen im Geschaffenen oder Transfinitum wesentlich verschieden, so daß man im Vergleiche beider nur das

Eine als *eigentlich Unendliches*, das andere als uneigentlich und aequivoce Unendliches bezeichnen muß. So aufgefaßt liegt, soweit ich bis jetzt sehe, in Ihrem Begriffe des Transfinitum keine Gefahr für religiöse Wahrheiten. Jedoch in einem gehen Sie ganz gewiß irre gegen die unzweifelhafte Wahrheit; dieser Irrtum folgt aber nicht aus Ihrem Begriffe des Transfinitum, sondern aus der mangelhaften Auffassung des Absoluten. In Ihrem werten Schreiben an mich sagen Sie nämlich erstens richtig (vorausgesetzt, daß Ihr Begriff des Transfinitum nicht bloß religiös unverfänglich, sondern auch *wahr* ist, worüber ich nicht urteile), ein Beweis geht vom Gottesbegriffe aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum. In der Voraussetzung, daß Ihr Transfinitum *actuale* in sich keinen Widerspruch enthält, ist Ihr Schluß auf die *Möglichkeit der Schöpfung* eines Transfinitum aus dem Begriffe von Gottes Allmacht ganz richtig. Allein zu meinem Bedauern gehen Sie weiter und schließen ‚aus seiner Allgüte und Herrlichkeit *auf die Notwendigkeit* einer tatsächlich erfolgten Schöpfung des Transfinitum'. Gerade weil Gott an sich das absolute unendliche Gut und die absolute Herrlichkeit ist, welchem Gute und welcher Herrlichkeit nichts zuwachsen und nichts abgehen kann, ist die *Notwendigkeit* einer Schöpfung, welche immer diese sein mag, ein Widerspruch, und die *Freiheit* der Schöpfung eine ebenso notwendige Vollkommenheit Gottes, wie alle seine anderen Vollkommenheiten, oder besser, Gottes unendliche Vollkommenheit ist (nach unseren notwendigen Unterscheidungen) ebenso *Freiheit*, als Allmacht, Weisheit, Gerechtigkeit etc. Nach Ihrem Schlusse auf die *Notwendigkeit* einer Schöpfung des Transfinitum müßten Sie noch viel weiter gehen. Ihr Transfinitum actuale ist ein Vermehrbares; nun wenn Gottes unendliche Güte und Herrlichkeit die Schöpfung des Transfinitum überhaupt mit Notwendigkeit fordert, so folgt, aus ganz demselben Grunde der Unendlichkeit seiner Güte und Herrlichkeit, die Notwendigkeit der Vermehrung, bis es nicht mehr vermehrbar wäre, was Ihrem eigenen Begriffe des Transfinitum widerspricht. Mit andern Worten: wer die Notwendigkeit einer Schöpfung aus der Unendlichkeit der Güte und Herrlichkeit Gottes erschließt, der muß behaupten, daß alles Erschaffbare wirklich von Ewigkeit erschaffen ist; und daß es vor Gottes Auge kein Mögliches gibt, das seine Allmacht ins Dasein rufen könnte. Diese Ihre unglückliche Meinung von der Notwendigkeit der Schöpfung wird Ihnen auch in Ihrer Bekämpfung der Pantheisten sehr hinderlich sein und wenigstens die Überzeugungskraft Ihrer Beweise abschwächen. Ich habe mich bei diesem Punkte so lange aufgehalten, weil ich innigst wünsche, daß Ihr Scharfsinn sich freimachte von einem so verhängnisvollen Irrtum, dem freilich manche andere, selbst solche, die sich für rechtgläubig halten, verfallen sind."

Mit allem, was in diesem Schreiben steht, stimme ich vollkommen überein, wie aus den wenigen Zeilen, welche unter V abgedruckt sind, hervorgeht. Denn da für mich die absolute Freiheit Gottes außer Frage stand, so war die „Notwendigkeit" an der betreffenden Stelle des Briefes IV meinerseits nicht so verstanden, wie es hier vorausgesetzt und mit Recht bekämpft wird. Macht man sich aber mit dem richtigen Sinn meiner Argumentation genauer vertraut, so scheint, wie ich bei einer späteren Gelegenheit erklären will, der in IV versuchsweise angedeutete apriorische Beweis für die tatsächlich *erfolgte* Schöpfung einer transfiniten Welt eine weitere Erwägung und Prüfung zu verdienen.

I.[1]

Unter *Mächtigkeit* oder *Kardinalzahl* einer Menge M (die aus wohlunterschiedenen, begrifflich getrennten Elementen $m, m', \ldots$ besteht und insofern bestimmt und abgegrenzt ist) verstehe ich den Allgemeinbegriff oder Gattungsbegriff (universale), welchen man erhält, indem man bei der Menge sowohl von der Beschaffenheit ihrer Elemente, wie auch von allen Beziehungen, welche die Elemente, sei es unter einander, sei es zu anderen Dingen haben, also im besondern auch von der Ordnung, welche unter den Elementen herrschen mag, abstrahiert und nur auf das reflektiert, was allen Mengen gemeinsam ist, die mit M *äquivalent* sind. Ich nenne aber zwei Mengen M und N *äquivalent*, wenn sie sich gegenseitig eindeutig Element für Element einander zuordnen lassen. (Vgl. Crelles Journal Bd. 84 pag. 242) [IV 2, S. 119]. Daher bediene ich mich auch des kürzeren Ausdrucks *Valenz* für Mächtigkeit oder Kardinalzahl. Von Mengen gleicher Valenz sage ich, sie gehören zu derselben Mächtigkeitsklasse. *Valenz* einer Menge M ist also der Allgemeinbegriff, unter dem alle Mengen derselben Klasse wie M und nur diese stehen.

Eine der wichtigsten Aufgaben der Mengenlehre, welche ich der Hauptsache nach in der Abhandlung „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883" [III 4] gelöst zu haben glaube, besteht in der Forderung, die verschiedenen Valenzen oder Mächtigkeiten der in der Gesamtnatur, soweit sie sich unsrer Erkenntnis aufschließt, vorkommenden Mannigfaltigkeiten zu bestimmen; dazu bin ich durch die Ausbildung des allgemeinen

[1] Dieser Brief ist vor drei Jahren, am 15. Febr. 1884, an Herrn Prof. Dr. Kurd Laßwitz in Gotha geschrieben worden. Er gibt im wesentlichen den Inhalt eines Vortrags wieder, welchen ich im September 1883 in der mathematischen Sektion der Naturforscherversammlung in Freiburg (Baden) gehalten habe. Infolge dieses Vortrags erhielt ich bald darauf einen Brief von Herrn R. Lipschitz (welchen ich in Z. Philos. u. philos. Krit. 88, 225 [hier S. 371] erwähnt habe), worin mich dieser ausgezeichnete Mathematiker auf die Korrespondenz (vom 12. Juli 1831) zwischen Gauß und Schumacher aufmerksam macht, in welcher sich Gauß gegen jede Hereinziehung des aktualen Unendlichen in die Mathematik ausspricht.

Anzahlbegriffs wohlgeordneter Mengen oder, was dasselbe bedeutet, des *Ordnungszahlbegriffs*[1], gelangt.

Die Definition dessen, was ich unter einer *wohlgeordneten* Menge $\mathfrak{M}$ verstehe, findet sich in den „Grundlagen" S. 4 [hier III 4, S. 168].

Zwei *wohlgeordnete* Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ nenne ich von gleichem *Typus* oder auch *einander ähnlich*, wenn sie sich gegenseitig eindeutig *derart* auf einander beziehen lassen, daß wenn m und m' irgend zwei Elemente der ersten, n und n' die entsprechenden Elemente der anderen sind, *alsdann* immer das Rangverhältnis von m' zu m dasselbe ist wie das Rangverhältnis von n' zu n. Ich sage auch von zwei solchen *wohlgeordneten* Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, daß sie *auf einander abzählbar* sind.

So sind beispielsweise die wohlgeordneten Mengen

$$(a, a', a'') \text{ und } (b, b', b'')$$

ebenso aber auch die wohlgeordneten Mengen

$$(a, a', a'' \ldots a^{(\nu)} \ldots) \text{ und } (b, b', b'' \ldots b^{(\nu)} \ldots)$$

und auch

$$(a, a', a'' \ldots a^{(\nu)} \ldots c, c', c'') \text{ und } (b, b', b'' \ldots b^{(\nu)} \ldots d, d', d'')$$

von gleichem Typus oder, was dasselbe heißt, auf einander abzählbar.

Unter *Anzahl* oder *Ordnungszahl* einer wohlgeordneten Menge $\mathfrak{M}$ verstehe ich den *Allgemeinbegriff* (Gattungsbegriff, universale), welchen man erhält, indem man bei der wohlgeordneten Menge $\mathfrak{M}$ von der Beschaffenheit und Bezeichnung ihrer Elemente abstrahiert und nur auf die Rangordnung reflektiert, durch welche die Elemente in Beziehung zu einander stehen; die *Anzahl* oder *Ordnungszahl* von $\mathfrak{M}$ ist also sämtlichen wohlgeordneten Mengen *desselben Typus* gemeinsam, gewissermaßen dasjenige, was ihnen allen immanent ist. Hier tritt uns die Aufgabe entgegen, die in der Natur vorkommenden Ordnungszahlen oder Anzahlen wohlgeordneter Mengen zu bestimmen und sachgemäß mit Hilfe geeigneter Zeichen zu unterscheiden. Dazu führen folgende Definitionen und Sätze:

Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ irgend zwei *wohlgeordnete Mengen*, α und β die zu ihnen gehörigen Ordnungszahlen; es ist immer

$$\mathfrak{M} \text{ vereinigt mit darauffolgendem } \mathfrak{N}$$

wieder eine *wohlgeordnete Menge von bestimmtem* Typus, die zugehörige

[1] Der Begriff *Ordnungszahl* ist ein besonderer Fall des Begriffes *Ordnungstypus*, welcher sich in derselben Weise auf jede *einfach* oder *mehrfach geordnete* Menge bezieht, wie die Ordnungszahl auf eine *wohlgeordnete* Menge. Herr C. Gutberlet hat auf meinen Wunsch hierauf Bezügliches nach einem Manuskript von mir in seinen Aufsatz (Z. Philos. u. philos. Krit. 88, 183) eingefügt.

Ordnungszahl sei γ. Wir definieren γ als die Summe von α und β, $\gamma = \alpha + \beta$, und nennen α den Augend, β den Addend dieser Summe. Sind α und β irgend zwei verschiedene, d. h. verschiedenen Typen entsprechende Ordnungszahlen, so kann bewiesen werden, daß *entweder* die Gleichung $\beta = \alpha + \xi$, *oder* die Gleichung $\alpha = \beta + \xi$ nach ξ (d. h. nach dem *Addenden*) und zwar nur auf eine Weise auflösbar ist; im ersten Falle nennen wir α kleiner als β, im zweiten α größer als β; ξ wird die Differenz beider Zahlen genannt; im ersteren Falle ist $\xi = \beta - \alpha$, im zweiten $\xi = \alpha - \beta$.

Man beweist leicht, daß wenn $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ alsdann auch $\alpha < \gamma$. Ferner zeigt man, daß immer das Assoziationsgesetz besteht:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Ähnlich wird das Produkt zweier Ordnungszahlen definiert, wobei aber zwischen *Multiplikator* und *Multiplikandus* wohl zu unterscheiden ist, denn im allgemeinen ist $\alpha \cdot \beta$ von $\beta \cdot \alpha$ verschieden. Dagegen beweist man auch hier, ich möchte fast sagen, mit einem Blick, daß

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \text{ (Assoziations-Gesetz)},$$

sowie auch, daß

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \text{ (Distributions-Gesetz mit } \alpha \text{ als Multiplikandus)}.$$

Ich habe in den „Grundlagen" den Multiplikator *links*, den Multiplikandus *rechts* geschrieben; es hat sich mir aber gezeigt, daß der entgegengesetzte Gebrauch, den *Multiplikandus links zuerst* und *dann rechts den Multiplikator* zu schreiben, für die weitere Entwickelung der transfiniten Ordnungszahlenlehre der zweckmäßigere, ja fast unentbehrliche ist; aus diesem Grunde kehre ich also die betreffende Schreibweise der „Grundlagen", soweit sie sich auf *Produkte* bezieht, von jetzt ab *immer um*. Von der Wichtigkeit dieser Änderung überzeugt man sich, sobald man transfinite Ordnungszahlen der Form α^{β} in Betracht zieht, für welche nach *dieser* Schreibweise das allgemeine Gesetz gilt: $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$. Dieses selbe Gesetz würde aber nach dem Schreibmodus der „Grundlagen" die abstoßende Form annehmen:

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\gamma+\beta}.$$

Ich hebe noch folgendes hervor: wenn in einer wohlgeordneten Menge $\mathfrak{M}$ irgend zwei Elemente m und m' ihre Plätze in der gesamten Rangordnung wechseln, so wird dadurch der Typus nicht verändert, also auch nicht die „Anzahl" oder „Ordnungszahl". Daraus folgt, daß *solche Umformungen* einer wohlgeordneten Menge die *Anzahl* derselben ungeändert lassen, welche sich auf eine endliche oder unendliche Folge von *Transpositionen* von je zwei Elementen zurückführen lassen, d. h. alle solchen Änderungen, welche durch

Permutation der Elemente entstehen. Da nun bei einer *endlichen* Menge, wenn der Inbegriff ihrer Elemente derselbe bleibt, *jede* Umformung sich auf eine Folge von Transpositionen zurückführen läßt, so liegt hierin der Grund, warum bei *endlichen* Mengen Ordnungszahl und Kardinalzahl gewissermaßen zusammenfallen, indem hier Mengen derselben Valenz in jeder Form, als wohlgeordnete Mengen gedacht, immer eine und dieselbe Ordnungszahl haben. Bei unendlichen Mengen tritt jedoch der Unterschied von *Kardinalzahl* und *Ordnungszahl* auf das entschiedenste alsbald hervor. Ebenso hängen mit jenem Umstande bei *endlichen* Mengen die Kommutationsgesetze der Addition und Multiplikation zusammen, indem daraus sehr leicht bewiesen wird, daß, wenn μ und ν zwei endliche Ordnungszahlen sind, alsdann stets $\mu + \nu = \nu + \mu$ und $\mu \cdot \nu = \nu \cdot \mu$.

Für die kleinste transfinite Ordnungszahl, es ist diejenige, welche den wohlgeordneten Mengen vom Typus

$$(a, a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots)$$

entspricht, muß ein *neues* Zeichen genommen werden; ich habe dazu den letzten Buchstaben des griechischen Alphabets ω gewählt.

Unter Ordnungszahlen der *zweiten* Zahlenklasse verstehe ich diejenigen Zahlen, welche zu wohlgeordneten Mengen von der Mächtigkeit der *ersten* Zahlenklasse $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ gehören; dieser Inbegriff von Ordnungszahlen konstituiert eine *neue* Valenz und zwar die auf die vorhergehende Valenz *nächstfolgende*, wie ich streng gezeigt habe (Grundlagen p. 35—38). Und derselbe Gedankengang führt uns zu höheren Zahlenklassen und zu den ihnen zukommenden höheren Valenzen. — Das ist eine wunderbare, ins Große gehende Harmonie, deren genaue Durchführung das Thema der transfiniten Zahlenlehre ist.

Ich glaubte dies alles, in der gedrängten Kürze freilich, vorausschicken zu müssen, um auf einige Bemerkungen, die ich in Ihrem Schreiben finde, eingehen zu können. Zunächst mache ich auf die *Allgemeinheit, Schärfe* und *Bestimmtheit* meiner Zahldefinitionen aufmerksam; sie sind *gleichlautend*, gleichviel ob sie auf *endliche* oder auf *unendliche* Mengen bezogen werden. Jede transfinite Zahl der zweiten Zahlenklasse z. B. hat ihrer Definition nach *dieselbe Bestimmtheit, dieselbe Vollendung in sich wie jede endliche Zahl*.

Der Begriff ω beispielsweise enthält *nichts Schwankendes*, nichts *Unbestimmtes, nichts Veränderliches, nichts Potenzielles*, er ist kein *ἄπειρον*, sondern ein *ἀφωρισμένον*, und das gleiche gilt von allen andern transfiniten Zahlen. Er bildet ebenso wie jede endliche Zahl, z. B. 7 oder 3, einen *Gegensatz* zu den unbestimmten Zeichen x, a, b der Buchstabenrechnung, mit welchen *Sie* unzutreffenderweise die transfiniten Zahlen in Ihrem Schreiben vergleichen. Sie weichen hierbei von dem Sinn, welchen die transfiniten

Zahlen bei mir haben, ebenso ab, wie es Herr Wundt in der Auffassung getan hat, welche sich über diesen Gegenstand in seiner Methodenlehre, Logik, Bd. II, S. 126—129 findet. Wundt's Auseinandersetzung zeigt, daß er sich des fundamentalen Unterschieds von Uneigentlichunendlichem = veränderlichem Endlichem = synkategorematice infinitum (*ἄπειρον*) einerseits und Eigentlichunendlichem = Transfinitum = Vollendetunendlichem = *Unendlichseiendem* = kategorematice infinitum (*ἀφωρισμένον*) andrerseits nicht klar und deutlich bewußt ist; sonst würde er nicht *jenes* ebensowohl wie *dieses* als *Grenze* bezeichnen; Grenze ist immer an sich etwas *festes, unveränderliches*, daher kann von den beiden Unendlichkeitsbegriffen nur das *Transfinitum* als *seiend* und unter Umständen und in gewissem Sinne auch als *feste Grenze* gedacht werden. Daher irrt Wundt auch darin, wenn er glaubt, das Transfinitum habe keine physikalische Bedeutung, wohl aber das potentiale Unendliche; streng genommen ist das *Gegenteil* hiervon richtig, weil das potentiale Unendliche nur Hilfs- und Beziehungsbegriff ist und stets auf ein zugrunde liegendes *transfinitum* hinweist, ohne welches es weder sein noch gedacht werden kann. Der Unterschied von Uneigentlichunendlichem und Eigentlichunendlichem ist von den Philosophen sehr frühe, d. h. schon von den alten Griechen erkannt worden, freilich nicht überall mit gleicher Klarheit; ebenso findet man ihn bei den Neueren, mit Ausnahme vielleicht von Kant, Herbart und den Materialisten, Empiristen, Positivisten etc. deutlich ausgesprochen. Doch verdient hierbei Hegel nicht, wie Wundt zu meinen scheint, eine besondere Erwähnung, zumal bei Hegel alles widerspruchsvoll, dunkel und konfuse ist, ja sogar der *Widerspruch* als hervortretendes Element seiner Philosophie von ihm selbst zum charakteristischen Eigentum seiner Denkweise erhoben worden ist, um welches *ich* wenigstens ihn *nicht* beneide. Dazu kommt, daß, was Hegel etwa zutreffendes über den hier erörterten Unterschied gesagt haben mag, wie so manches andere bei ihm, dem Spinoza entlehnt ist. Bei allen Philosophen fehlt jedoch das *Prinzip des Unterschiedes* im Transfinitum, welches zu verschiedenen transfiniten Zahlen und zu verschiedenen Mächtigkeiten führt. Die meisten verwechseln sogar das Transfinitum mit dem seiner Natur nach *unterschiedslosen höchsten Einen*, mit dem Absoluten, dem absoluten Maximum, welches natürlich keiner Determination zugänglich und daher der Mathematik nicht unterworfen ist.

Ganz unzutreffend ist in der Wundt'schen Kritik auch die Zusammenstellung der neueren sogen. „metamathematischen" Spekulationen mit meinen Arbeiten, sie haben nicht die geringste Ähnlichkeit und keine eigentliche Berührung, auch darf das Transfinitum *nicht* als „transzendent" (d. h. doch wohl die menschlichen Verstandeskräfte übersteigend) bezeichnet werden.

In der Ballauf'schen Rezension[1], die namentlich in den Noten der Redaktion das Maximum des Unzutreffenden erreicht, ist *nicht einmal* die letzte,

[1] Ztschr. f. exakte Philos. **12**, 375. Ich habe von dieser Besprechung den Eindruck gewonnen, daß der Kritiker, welcher in mehreren Beziehungen meine Gedanken sehr gut verstanden hat, durch den Terrorismus der Schulführer zu einer viel schärferen Stellungnahme wider mich gezwungen worden ist, als mit seinen eigenen Überzeugungen verträglich scheint. Dies tritt in auffälligster Weise S. 389 hervor, wo die Redaktion (Theod. Allihn und Otto Flügel) seiner freien, unbefangenen Überlegung plötzlich in die Zügel fällt, um die ärmste in das dunkle, unterirdische Gefängnis der Herbartschen Dogmatik, wohin kein erlösender Lichtstrahl dringt, zurückzuführen. Dem in dieser Note unter dem Text von der Redaktion Gesagten können zwei Antworten nicht erspart bleiben. *Erstens* scheint sie meine Arbeit nicht gelesen zu haben, denn sie nimmt nicht Rücksicht darauf, daß ich in den „Grundlagen" das potentiale Unendliche, welches ich Uneigentlich-unendliches, von dem aktualen Unendlichen, welches ich Eigentlich-unendliches dort nannte, strengstens unterscheide. Herbart und seine Schüler erkennen nur das *erstere* an, geben ihm allein den Namen des Unendlichen und wissen nichts vom Transfiniten. Dagegen wäre formell nichts einzuwenden, non cuivis homini contingit adire Corinthum, und es wäre für ihren Sprachgebrauch allerdings eine contradictio in terminis, dem Unendlichen das Prädikat des Bestimmtseins zu erteilen. Wie läßt sich aber der *mir* gemachte Vorwurf formell rechtfertigen, wonach *ich* die Prädikate des Bestimmtseins und des Unbestimmtseins hätte vereinigen wollen, um daraus ein „Unbestimmtes Bestimmtes" zu machen, da ich doch gerade im Gegenteil das Potentialunendliche vom Transfiniten so streng getrennt habe, daß sie überall als toto genere Verschiedenes bei mir erscheinen? Die *andere* Antwort ist materieller Art und trifft mehr den Meister als dessen unglückliche Schüler. Nach Herbart IV, 88ff. soll der Begriff des Unendlichen „auf einer *wandelbaren Grenze*, welche in jedem Augenblick weiter fortgeschoben werden kann, bzw. muß" beruhen. „Von dieser *Wandelbarkeit* der Grenze absehen, heißt den Begriff des Unendlichen aufheben, heißt nichts Unendliches, sondern Endliches denken. Von dieser *Wandelbarkeit der Grenze* oder der beständigen Möglichkeit des Fortschreitens sieht man aber ab, sobald man das Unendliche als fertig oder als real vorhanden setzt, man setzt dann eben nicht mehr eine unendliche, sondern eine endliche Menge. Es handelt sich hierbei gar nicht um die subjektive Unfähigkeit, die außerstande ist, jemals mit dem Geschäft des Zählens oder Setzens zu Ende zu kommen, sondern um den Begriff des Unendlichen selbst, dessen wesentliches, nicht wegzudenkendes Merkmal eben jene *wandelbare Grenze ist, jenseits deren immer noch etwas zu finden ist.* In betreff des Zählens läßt sich das eben Gesagte auch dahin aussprechen: bei jeder endlichen Menge von Dingen, wie groß dieselbe auch sein mag, bietet sich sofort die Möglichkeit des objektiven Zählens dar (wenn die Menge etwa tausendmalmillionen Gegenstände umfaßt, so möchte ich bezweifeln, daß es den Herren Redakteuren *möglich* sein wird, die objektive Zählung *sofort* auszuführen; Anm. d. Verf.). Hingegen ist bei einer *unendlichen* Menge (also doch eine gewisse Anerkennung der unendlichen Menge!) die Möglichkeit des Zählens schlechthin ausgeschlossen (was in dem hier gemeinten Sinne von niemandem bezweifelt wird), weil eben das *wahrhaft Unendliche nur als ein Unbestimmtes, Unfertiges gefaßt werden kann.* (Also das „wahrhaft Unendliche" soll *schlechter* sein als das Endliche!?) Usw." Ist es den Herren gänzlich aus der Erinnerung gekommen, daß, von den Reisen abgesehen, die in der Phantasie oder im Traume ausgeführt zu werden pflegen, daß, sage ich, zum sichern Wandeln oder Wandern *fester Grund und Boden* sowie ein *geebneter Weg* unbedingt erforderlich

witzig sein sollende Wendung am Schlusse richtig, sondern beruht auf einem offenbaren Irrtum. Wenn wir eine von A anfangende unendliche Grade AO haben und wir setzen an ihren Anfang A die endliche Strecke BA, so erhalten wir wieder eine unendliche von B ausgehende Grade BO, in welcher das hinzukommende gerade Stück nicht die geringste Änderung in bezug auf die „Größe" hervorgebracht hat, was daraus erkannt wird, daß man die neue Grade zur völligen Kongruenz mit der alten bringen kann; der Gewinn, den sie durch das hinzugekommene Stück BA erhalten hat, ist zwar real vorhanden und unbestreitbar, *verschwindet* aber völlig, wenn man bloß auf das den beiden Linien AO und BO anhaftende *Akzidens* der Größe achtet. Wer hier wie überhaupt bei aktual-unendlichen Quantitäten einen Verstoß gegen das Widerspruchsprinzip findet, irrt durchaus, indem er den abstraktiven Charakter der „Größe" aus dem Auge verliert und sie fälschlich mit der substanziellen Entität des vorliegenden Quantums identifiziert[1]. In ein

(Fortsetzung des Textes auf S. 395.)

sind, ein Weg, der nirgends abbricht, sondern überall, wohin die Reise führt, gangbar sein und bleiben muß? Ist denn die Mahnung, welche Heinrich Hoffmann in seinem „Struwelpeter" (Frankfurt a. M.: Loening) mit dem „Hans Guck in die Luft" so deutlich uns allen zu Gemüte geführt hat, nur an den Herren Herbartianern ohne jeden Eindruck geblieben? Die weite Reise, welche Herbart seiner „*wandelbaren Grenze*" vorschreibt, ist *eingestandenermaßen nicht* auf einen endlichen Weg beschränkt; so muß denn ihr *Weg* ein *unendlicher*, und zwar, weil er *seinerseits nichts Wandelndes*, sondern überall fest ist, ein *aktualunendlicher Weg* sein. Es fordert also *jedes potentiale Unendliche* (die wandelnde Grenze) ein *Transfinitum* (den sichern Weg zum Wandeln) *und kann ohne letzteres nicht gedacht werden* (man vgl. hiermit Abschn. 5 V und VII 7 dieser Abhandlung). Da wir uns aber durch unsre Arbeiten der breiten Heerstraße des Transfiniten versichert, sie wohl fundiert und sorgsam gepflastert haben, so öffnen wir sie dem Verkehr und stellen sie als eiserne Grundlage, nutzbar allen Freunden des potentialen Unendlichen, im besondern aber der wanderlustigen Herbartschen „Grenze" bereitwilligst zur Verfügung; gern und ruhig überlassen wir die rastlose der Eintönigkeit ihres durchaus nicht beneidenswerten Geschicks; wandle sie nur immer weiter, es wird ihr von nun an nie mehr der Boden unter den Füßen schwinden. Glück auf die Reise!

[1] Auf diesen Irrtum gründen viele ihre sogenannten Beweise für die Unmöglichkeit aktual unendlicher Quantitäten oder Zahlen; man vergleiche beispielsweise: Renouvier, Ch.: Esquisse d'une classification systematique des doctrines philosophiques. 1, 100. Paris 1885. Tongiorgi, Salv.: Inst. philos. ed. X, 2 ontol., § 350, 3°. Pesch, T.: Inst. phil. nat. § 412; 1°, 2°, 3°, 4°. Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir noch auf andere Versehen aufmerksam zu machen, welche sich bei letzteren beiden Autoren, sowie auch bei vielen anderen finden. Tongiorgi sagt in ontol. § 349, prop. 9: „Danturne in eadem linea puncta, quae ab X actu infinite distent, an non? *Si non dantur haec puncta, linea est finita.*" Ebenso behauptet Pesch, § 425, arg. 3, 1°: „*Linea autem cujus omnia puncta inter se distantiam habent finitam, ipsa finita est.*" Während im Vordersatz das *Endlichsein* in *distributiver* Bedeutung *secundum partes* vorausgesetzt wird, schließt man im Nachsatz, ohne jede Berechtigung, auf das *Endlichsein* im *kollektiven* Sinne *quoad totum*; was sich, nach S. Th. Aq. Opusc. de fallaciis, cap. XI, als *fallacia secundum quid et simpliciter* zu erkennen gibt.

Betrachten wir ferner bei **Tongiorgi** § 350; 2⁰ (**Pesch**, § 412, 3⁰, 4⁰) folgende Argumentation: „Supponatur ex unitatum accumulatione multitudo infinita. Haec erit numerus infinitus, aequabitque *numerum qui ipsum immediate praecedit*, unitate adjecta. Iam *numerus praecedens* eratne infinitus, an vero non erat? Infinitum illum dicere non potes; nam crescere adhuc poterat, ac re ipsa crevit additione unitatis. Erat ergo finitus, et unitate addita, factus est infinitus. Nimirum ex duobus finitis infinitum emersit; id quod absurdum est."

Hier wird fälschlich vorausgesetzt, eine aktualunendliche Zahl müsse notwendig (weil man bei endlichen Zahlen daran gewöhnt ist) eine ihr zunächst vorhergehende ganze Zahl haben, aus welcher sie durch Hinzufügung einer Eins hervorginge. Diese Voraussetzung ist beispielsweise weder an der kleinsten Kardinalzahl ω, noch an der kleinsten Ordnungszahl ω erfüllt; ihnen gehen resp. die endlichen Kardinalzahlen, von denen keine die größte ist, und die endlichen Ordnungszahlen, welche auch kein Maximum haben, voran; es wäre also eine widersinnige Annahme, von einer der Kardinalzahl ω nächst vorhergehenden Kardinalzahl oder von einer der Ordnungszahl ω zunächst kleineren Ordnungszahl zu reden. Von falschen Prämissen kann aber keine wahre Folge erwartet werden. Die ganze Argumentation muß also für immer verworfen werden.

Herr **Gutberlet** sucht in seinem Werke (Das Unendliche metaph. und mathem. betrachtet, Mainz 1878, S. 18) dieselbe Beweisführung dadurch zu widerlegen, daß er, ähnlich wie es schon **Leibniz** getan, die *unendliche „Zahl"* preisgibt, dagegen die unendliche „Menge" zu retten sucht. Es kann aber m. E. den Gegnern des Transfiniten kein größerer Gefallen geschehen als mit dieser Wendung; denn unendliche Zahl und Menge sind unlösbar miteinander verknüpft; gibt man die eine auf, so hat man kein Recht mehr auf die andere. Ebensowenig kann ich mich damit einverstanden erklären, daß **Gutberlet**, verleitet durch zweideutige Erklärungen bei **Leibniz** und **Newton** und unter Berufung auf neuere „mathematische Autoritäten", wie **Lübsen**, **Klügel**, **R. Hoppe**, aus den „Differentialen" (welche nur als beliebig klein *werdende* Größen aufzufassen sind und die alle die **Null** zur gemeinschaftlichen Grenze haben; man vgl. die Abschn. VI und VII dieses Aufsatzes), indem er unzulässige Divisionen fingiert, Stützen für das A.-U. zu gewinnen sucht. Er wird in dieser Beziehung von dem R. P. T. **Pesch** (Inst. phil. nat. §§ 421, 422) mit den zutreffendsten Gründen widerlegt.

Um so mehr muß rühmend hervorgehoben werden, daß Herr Prof. **Gutberlet** mit Nachdruck und Erfolg (1. Abt., 1. Abschn. §§ 3, 5 und 6 seines Werkes) auf die Abhängigkeit des potentialen Unendlichen von einem zugrunde liegenden A.-U. hinweist; mit Recht wird von ihm betont, daß a parte rei eigentlich gar kein potentiales Unendliches existiert; was auch von **Stöckl**, der das P.-U. für ein ens rationis erklärt, anerkannt worden ist.

Dagegen finde ich aber an verschiedenen Stellen bei **Gutberlet** (z. B. S. 45 seines Werkes) die durchaus unhaltbare Thesis ausgesprochen, daß „im Begriffe der unendlich gedachten Größe der Ausschluß aller Möglichkeit der Vermehrung" liege. Dies kann nur in bezug auf das Absolutunendliche zugestanden werden, das Transfinite, obgleich als bestimmt und größer als jedes Endliche gefaßt, teilt mit dem Endlichen den Charakter unbeschränkter Vermehrbarkeit.

Das durch Gelehrsamkeit und Scharfsinn ausgezeichnete Werk des R. P. **Tilm Pesch** veranlaßt mich, was seinen dem Unendlichen gewidmeten Abschnitt betrifft, zu noch einer Bemerkung.

Der Verf. legt in § 403 seiner Untersuchung *zwei* verschiedene Definitionen des Unendlichen zugrunde, die er promiscue in seinen Beweisen benutzt, ohne den Nachweis

ähnliches Versehen scheint aber auch **Wundt** pag. 128 geraten zu sein. Es bedarf also keiner weiteren Rechtfertigung, daß ich in den „Grundlagen" gleich im Anfang zwei toto genere von einander verschiedene Begriffe unterscheide, welche ich das Uneigentlich-unendliche und das Eigentlich-unendliche nenne; sie müssen als in *keiner* Weise vereinbar oder verwandt angesehen werden. Die so oft zu allen Zeiten zugelassene Vereinigung oder Vermengung dieser beiden völlig disparaten Begriffe enthält meiner festen Überzeugung nach die Ursache unzähliger Irrtümer; im besonderen sehe ich aber hier den Grund, warum man nicht schon früher die *transfiniten Zahlen* entdeckt hat.

Um diese Verwechselung von vornherein auszuschließen, bezeichne ich die kleinste transfinite Zahl mit einem von dem gewöhnlichen, dem Sinne des Uneigentlich-unendlichen entsprechenden Zeichen ∞ *verschiedenen* Zeichen, nämlich mit ω.

Allerdings kann ω gewissermaßen als die Grenze angesehen werden, welcher die veränderliche endliche ganze Zahl ν zustrebt, doch nur in dem Sinne, daß ω die *kleinste* transfinite Ordnungs-Zahl, d. h. die kleinste *festbestimmte* Zahl ist, welche größer ist als *alle* endlichen Zahlen ν; ganz ebenso wie $\sqrt{2}$ die Grenze von gewissen veränderlichen, wachsenden, rationalen Zahlen ist, nur daß hier noch dies hinzukommt, daß die Differenz von $\sqrt{2}$ und diesen Näherungsbrüchen beliebig klein wird, wogegen $\omega - \nu$ immer gleich ω ist; dieser Unterschied ändert aber *nichts* daran, daß ω als ebenso bestimmt und vollendet anzusehn ist, wie $\sqrt{2}$, und ändert auch nichts daran, daß ω ebensowenig Spuren der ihm zustrebenden Zahlen ν an sich hat, wie $\sqrt{2}$ irgend etwas von den rationalen Näherungsbrüchen.

Die transfiniten Zahlen sind in gewissem Sinne selbst *neue Irrationalitäten* und in der Tat ist die in meinen Augen beste Methode, die *endlichen* Irrationalzahlen zu definieren, ganz ähnlich, ja ich möchte sogar sagen im Prinzip dieselbe wie meine oben beschriebene Methode der Einführung transfiniter Zahlen. Man kann unbedingt sagen: die transfiniten Zahlen *stehen oder fallen* mit den endlichen Irrationalzahlen; sie gleichen einander ihrem

geführt zu haben, daß sie sich auf Wechselbegriffe bezögen. Dies ist sicherlich schon formell unzulässig; im vorliegenden Fall würde aber sogar der Versuch eines Beweises für die Korrelation der beiden Begriffe zur Überzeugung geführt haben, daß es sich dabei um zwei toto genere verschiedene Dinge handelt. Die *erste* Definition: „infinitum illud dicitur, cujus aliquid semper est extra" (Aristoteles phys. l. 3, c. 4, 203a 20) paßt eigentlich nur auf das *ἄπειρον* oder potentiale Unendliche; die *zweite* Definition: „infinitum id est, quo non sit majus, nec esse possit" (welche sich übrigens in dem von **Pesch** angeführten Arist. l. 1 de coelo c. 5 *nicht* findet) entspricht dagegen nur dem Absolutunendlichen. Das *Transfinitum* ist also in diesem Werke ganz unberücksichtigt geblieben.

innersten Wesen nach; denn jene wie diese sind bestimmt abgegrenzte Gestaltungen oder Modifikationen (ἀφωρισμένα)[1] des aktualen Unendlichen.

II.[2]

So wenig es meinen Neigungen entspricht, anderer Ansichten zu kritisieren, habe ich doch, in Anbetracht der Wichtigkeit des Gegenstandes und auf Ihren ausdrücklichen, wiederholt kundgegebenen Wunsch hin, mir die, in Ihrem Aufsatze[3] „Das Problem des Unendlichen" angegebenen Gründe gegen das „Infinitum actuale existens seu in concreto", welche Ihrer Meinung nach nicht gleichermaßen gegen das „Inf. act. possibile" anwendbar wären, genau angesehen und gefunden, daß auch hier wieder, wie in allen dasselbe Ziel verfolgenden Beweisen, ein versteckter Zirkelschluß zugrunde liegt. In meinem Briefe an Herrn G. Eneström habe ich gesagt, daß alle sogen. Beweise gegen die aktual-unendlichen Zahlen auf einem *πρῶτον ψεῦδος* beruhen, über das man sich nicht volle Rechenschaft gibt, welches aber in jedem mir vorliegenden Falle nachzuweisen ich mich anheischig mache; es besteht darin, daß man von vornherein der aktual-unendlichen Größe sämtliche Eigenschaften der endlichen Größe zumutet, woraus leicht ein Widerspruch mit ihrem Nichtendlichsein gefolgert wird. Damit glaubt man dann einen Beweis für ihre Unmöglichkeit fertig zu haben, während man sich doch in Wahrheit nur im Zirkel bewegt hat. Ganz die nämliche Überzeugung habe ich in bezug auf alle Beweisversuche, durch welche das A.-U. in concreto seu in natura creata bestritten werden soll; nur daß sich hier noch andere, weit gewichtigere Gründe hinzufügen lassen, die aus der absoluten Omnipotenz Gottes fließen und denen gegenüber jede Negation der Möglichkeit eines „Transfinitum seu Infinitum actuale creatum" wie eine Verletzung jenes Attributes der Gottheit erscheint. Ich will jedoch das letztere Argument heute nicht weiter ausführen, weil es genügen wird, an Ihrem Beweise dasjenige hervorzuheben, was, entsprechend meiner vorhin ausgesprochenen Überzeugung und meiner unmaßgeblichen Meinung nach, daran unrichtig ist.

[1] Man vgl. Conimbricenses Phys. Lib. III, cap. 8, quaest. 1, art. 1. Diese Stelle bezieht sich auf Aristoteles *Φγ* 8 208a 6, wo dem *ἄπειρον δυνάμει* ein *ἄπειρον ὡς ἀφωρισμένον* entgegengestellt und, wie ich gelegentlich in extenso beweisen werde, mit gänzlich unzureichenden Gründen bekämpft wird. Man vgl. auch S. Thomas: Phys. III, lectio 13. Die Gründe des Stagiriten beweisen nichts anderes, als daß die Argumente, welche die alten Naturphilosophen für die *notwendige* Existenz eines *ἄπειρον ἀφωρισμένον* vorgebracht haben, nicht zwingend sind; *er beweist aber nicht die Unmöglichkeit* eines existierenden *ἄπειρον ἀφωρισμένον*; mit anderen Worten, *er beweist nicht*, daß letzterer Begriff, wenn man ihn als *Transfinitum* faßt, ein widersprechender sei, und es würde ihm solches auch schwer oder richtiger gesagt unmöglich gewesen sein.

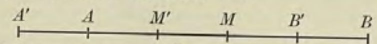
[2] Dieses Schreiben ist an Herrn Prof. Gutberlet in Fulda gerichtet worden und trägt das Datum vom 24. Januar 1886.

[3] Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik, 88, 199.

Ihre Überlegung lautet wörtlich wie folgt: „An dieser Stelle glaube ich aber den Nachweis führen zu sollen, daß eine aktual-unendliche Größe nicht existieren kann. Wenn eine unendliche Linie, ein unendlich langer Draht existierte, so könnte man an der Stelle, wo er mich streift, ein endliches Stück herausschneiden und sodann die beiden übrigbleibenden Stücke zusammenziehen und wieder miteinander verbinden. Nun ist aber keines der beiden Stücke mehr unendlich; denn beide sind aus der Unendlichkeit herausgerückt, beiden fehlt gerade so viel von der Unendlichkeit, als sie durch die Annäherung nach der Mitte hin verschoben worden sind. Beide sind also nach der Seite der Unendlichkeit hin begrenzt und ebenso begrenzt nach der Mitte. Eine Linie mag nun allerdings nach der einen Seite begrenzt und doch nach der andern unendlich sein, ist sie aber nach beiden Seiten begrenzt, dann ist sie ganz gewiß endlich. Sind aber die beiden Stücke endlich, dann auch die ganze Linie, und wenn sie jetzt, nach der Wegnahme eines endlichen Zwischenstückes, als endlich sich herausstellt, so war sie es auch mit diesem endlichen Zwischenstück, denn zwei Endliche machen kein Unendliches".

In dieser Argumentation erkenne ich den Fehler, daß die Eigenschaften einer endlichen starren Linie ohne weiteres auf eine unendliche starre Linie übertragen werden, deren Eigenschaften von der Natur des Unendlichen abhängen.

Wenn Sie eine endliche Gerade AB in ihrer Richtung so verrücken, daß ihr Anfangspunkt A um das Stück $AA' = 1$



nach A' geschoben wird, so ist dies nur so möglich, daß *jeder andre ihrer Punkte*, z. B. M nach M' um ein gleiches Stück $MM' = 1$ und *im besonderen auch der Endpunkt* B um das Stück $BB' = 1$ nach B' verrückt wird.

Denken wir uns aber statt der endlichen Linie AB in derselben Richtung und mit demselben Anfangspunkte eine aktual-unendliche Linie AO, die ihren Zielpunkt O im Unendlichen hat, so gilt zwar auch, daß jeder im Endlichen liegende Punkt M um $MM' = 1$ nach M' gerückt wird, falls A nach A' kommt, *wer sagt Ihnen aber, daß hier auch das gleiche gilt vom unendlich fernen Zielpunkt* O?

Ganz im Gegenteil führt letztere Annahme, wie Sie selbst gezeigt haben, zu einem Widerspruch; dieser Widerspruch berechtigt aber nicht, wie Sie annehmen, zur Leugnung der Möglichkeit der Existenz einer aktual-unendlichen Geraden AO, sondern er führt zu der nichts Widersprechendes involvierenden Eigenschaft der aktual-unendlichen Geraden AO, daß, während *alle anderen* Punkte M, A, B der Geraden AO um ein gleiches Stück $MM' = AA' = BB' = 1$ nach links gezogen werden, *allein der unendlich ferne Punkt* O *fest an seinem Platze bleibt*, d. h. auf diesem Wege aus der unendlichen Entfernung gar nicht ins Endliche gebracht werden kann, *auch dann nicht*, wenn Sie zur Hypothese einer unendlichen Zugkraft greifen wollen.

Da die gedachte aktual-unendliche Gerade AO ihrer Größe nach der von mir mit ω bezeichneten *kleinsten* transfiniten Ordnungszahl entspricht, so läßt sich das soeben Behauptete auch in der bekannten, nicht den geringsten Widerspruch involvierenden Gleichung $1 + \omega = \omega$ wiederfinden, wo auf der linken Seite $1 = A'A$ die Bedeutung des *Augendus*, $\omega = AO$ die des *Addendus* hat. Dagegen ist allerdings $\omega + 1$, wo ω als *Augendus*, 1 als *Addendus* figurieren, wie aus den Prinzipien meiner „Grundlagen" geschlossen wird, eine von ω *verschiedene* transfinite Zahl, nämlich die auf die kleinste ω *nächstfolgende ganze transfinite* Ordnungszahl; letzteres hat aber auf Ihr Exempel keine Anwendung, da bei Ihnen der *Augendus* eine endliche und im Endlichen liegende Größe $A'A = 1$, der Addendus $AO = \omega$ eine aktual-unendliche ist.

Da ich denselben Gegenstand von anderen Gesichtspunkten aus in einem dieser Tage von mir geschriebenen Briefe besprochen habe, so möchte ich Ihnen beifolgende Abschrift eines Auszuges[1] davon verehren mit dem Wunsche, daß Sie mir sowohl über das Vorliegende, wie auch über das in dem soeben erwähnten Briefe Gesagte Ihre Meinung gefälligst schreiben mögen[2].

Es war meine Absicht, diesem heutigen Schreiben noch einige andere Erinnerungen und Bedenken sowohl mit Bezug auf die in Ihrem Aufsatz vorkommenden Schlüsse, wie auch über verschiedenes in Ihrer Schrift: „Das Unendliche mathem. und metaph. betrachtet" beizufügen; doch halten mich andere Obliegenheiten davon ab, so daß ich mir diese Aufgabe für das nächste Mal zurücklege . . .

[1] Siehe unten III.

[2] In betreff vorstehender Ausführung läßt sich, wie es scheint, folgendes bemerken. Eben weil die zu verrückende Linie als *starr* vorausgesetzt ist, so muß mit Verschiebung von A nach A' *jeder* Punkt der Linie um ebensoviel verschoben werden, und somit auch der unendlich ferne Endpunkt O. Die Unendlichkeit könnte nur dann eine Unmöglichkeit des Verschiebens bedingen, wenn die ziehende Kraft wohl zur Verschiebung eines endlichen, nicht aber eines unendlichen Drahtes ausreichte. Aber darum können wir eine unendliche Zugkraft voraussetzen.

Nun kann man allerdings dagegen einwenden, daß wegen der *metaphysischen* Unmöglichkeit, eine unendliche Linie in die Endlichkeit hereinzuziehen, die Ausführung trotz der Erfüllung aller *physischen* Bedingungen, selbst unter Voraussetzung eines unendlich starken Einflusses, doch nicht möglich wird. Wir befinden uns hier in demselben Falle, den Suarez bei der Annahme einer ewigen (unveränderlichen) Welt voraussetzt. Feuer, so meint er, in Ewigkeit an Werg angelegt, würde dieses trotz seiner großen Verbrennbarkeit, nicht entzünden können. Denn der Verbrennungsprozeß von einigen Minuten müßte ein Stück von der Ewigkeit abschneiden und so dieselbe endlich machen.

Ich glaube aber kaum, daß jemand sich dazu verstehen wird, zu denken, daß das Feuer das Werg ewig unversehrt lasse. Darum muß eben die Annahme einer ewigen, mit Veränderungen verbundenen Welt als unstatthaft bezeichnet werden. Ähnliches scheint auch von dem unendlichen Draht zu gelten.

(Anm. des Herrn Prof. Gutberlet.)

III.[1]

Die Zeilen, welche Ew. . . . am 25. Dezember 1885 an mich zu richten die Güte hatten, enthalten einige Zweifel in bezug auf die philosophische Grundlage meiner, Ihnen zur Prüfung übersandten Arbeiten; vermutlich sind es gewisse von mir gebrauchte Worte, deren Bedeutung ich nicht genauer erklärt habe, welche meine Meinung nicht ganz bestimmt erscheinen lassen, und ich möchte mir daher erlauben, mich in Kürze genauer auszusprechen.

Die in meinem kleinen Aufsatze: „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuale Unendliche" vorkommenden Ausdrücke „Natura naturans" und „Natura naturata" gebrauche ich in derselben Bedeutung, welche ihnen die Thomisten gegeben haben, so daß der *erstere* Ausdruck Gott als den, außerhalb der aus nichts von ihm geschaffenen Substanzen stehenden Schöpfer und Erhalter derselben, der letztere aber die durch ihn geschaffene Welt bezeichnet. Dementsprechend unterscheide ich ein „Infinitum aeternum increatum sive Absolutum", das sich auf Gott und seine Attribute bezieht, und ein „Infinitum creatum sive Transfinitum", das überall dort ausgesagt wird, wo in der Natura creata ein Aktual-Unendliches konstatiert werden muß, wie beispielsweise in Beziehung auf die, meiner festen Überzeugung nach, aktual-unendliche Zahl der geschaffenen Einzelwesen sowohl im Weltall wie auch schon auf unserer Erde und, aller Wahrscheinlichkeit nach, selbst in jedem noch so kleinen, ausgedehnten Teil des Raumes, worin ich mit Leibniz ganz übereinstimme (Epistola ad Foucher, t. 2 operum ed. Dutens, p. I pag. 243).

Obwohl ich weiß, daß die Lehre vom „Infinitum creatum", zwar nicht von allen, doch von den meisten Kirchenlehrern bekämpft wird und im besonderen auch vom großen S. Thomas Aquinatus in seiner S. theol. p. 1. q 7. a. 4 gewisse Meinungen dagegen angeführt werden, so sind doch die Gründe, welche in dieser Frage im Verlauf zwanzigjähriger Forschung, ich kann sagen, wider Willen, weil im Gegensatz zu von mir stets hochgehaltener Tradition, von innen her sich mir aufgedrängt und mich gewissermaßen gefangen genommen haben, stärker als alles, was ich bisher dagegen gesagt fand, obgleich ich es in weitem Umfange geprüft habe. Auch glaube ich, daß die Worte der heil. Schrift, wie z. B. Sap. c. 11. v. 21: „Omnia in pondere, numero et mensura disposuisti.", in denen ein Widerspruch gegen die aktual-unendlichen Zahlen vermutet wurde, diesen Sinn nicht haben; denn, gesetzt den Fall, es gäbe, wie ich bewiesen zu haben glaube, aktual-unendliche „Mächtigkeiten", d. h. Kardinalzahlen und aktual-unendliche „Anzahlen wohl-

[1] Die folgenden zwei Briefe (III und IV) vom 22. und 29. Januar 1886 waren an einen großen Theologen [Kardinal Franzelin] gerichtet; derselbe ist, wie ich mit Schmerz erwähne, am 11. Dezember 1886 in die Ewigkeit abgerufen.

geordneter Mengen" d. h. Ordnungszahlen (welche zwei Begriffe, wie ich gefunden habe, bei aktual-unendlichen Mengen außerordentlich verschieden sind, während bei endlichen Mengen ihr Unterschied kaum bemerkbar ist), so würden ganz sicherlich auch diese transfiniten Zahlen in jenem heiligen Ausspruche mitgemeint sein und es darf daher, meines Erachtens, derselbe nicht als Argument gegen die aktual-unendlichen Zahlen genommen werden, wenn ein Zirkelschluß vermieden werden soll.

Daß aber ein „Infinitum creatum" als existent angenommen werden muß, läßt sich mehrfach beweisen. Um Ew. . . . nicht zu lange aufzuhalten, möchte ich mich in dieser Sache auf zwei kurze Andeutungen beschränken.

Ein Beweis geht vom Gottesbegriff aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum, sodann aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Notwendigkeit der tatsächlich erfolgten Schöpfung eines Transfinitum. Ein anderer Beweis zeigt a posteriori, daß die Annahme eines Transfinitum in natura naturata eine bessere, weil vollkommenere Erklärung der Phänomene, im besondern der Organismen und der psychischen Erscheinungen ermöglicht als die entgegengesetzte Hypothese. . . .

IV.

. . . Ew. . . . sage ich meinen herzlichsten Dank für die Ausführungen des gütigen Schreibens vom 26. Januar 1886, denen ich mit voller Überzeugung zustimme; denn in der kurzen Andeutung meines Briefes vom 22. ds. war es an der betreffenden Stelle nicht meine Meinung, von einer objektiven, metaphysischen Notwendigkeit zum Schöpfungsakt, welcher Gott, der *absolut Freie* unterworfen gewesen wäre, zu sprechen, sondern ich wollte nur auf eine gewisse subjektive Notwendigkeit *für uns* hinweisen, aus Gottes Allgüte und Herrlichkeit auf die tatsächlich *erfolgte* (*nicht* a parte Dei *zu erfolgende*) Schöpfung, *nicht bloß* eines *Finitum ordinatum, sondern* eines *Transfinitum ordinatum* zu schließen. . . .

V.[1]

Mit Vergnügen entnehme ich Ihrem Schreiben vom 23. ds., daß Sie dem Gegenstand meiner Untersuchungen ein Interesse zuwenden, für welches mein Dank um so größer ist, je seltener es mir von namhaften Naturforschern und Ärzten entgegengebracht wird; denn in diesen Kreisen ist das, was ich „horror infiniti" nenne, nach den verschiedensten Beziehungen und aus den mannigfaltigsten Ursachen, im allgemeinen ein tief eingewurzeltes Übel.

[1] Dieser Brief, datiert vom 28. Februar 1886, ist an Prof. Dr. med. A. Eulenburg in Berlin gerichtet.

Fassen wir die Definitionen des potentialen und aktualen Unendlichen scharf ins Auge, so dürften die Schwierigkeiten, von denen Sie mir schreiben, bald beseitigt sein.

I. Das P.-U.[1] wird vorzugsweise dort ausgesagt, wo eine unbestimmte, *veränderliche endliche* Größe vorkommt, die entweder über alle endlichen Grenzen hinaus wächst (unter diesem Bilde denken wir uns z. B. die sogenannte Zeit, von einem bestimmten Anfangsmomente an gezählt) oder unter jede endliche Grenze der Kleinheit abnimmt (was z. B. die legitime Vorstellung eines sogenannten Differentials ist); allgemeiner spreche ich von einem P.-U. überall da, wo eine *unbestimmte* Größe in Betracht kommt, die unzählig vieler Bestimmungen fähig ist.

II. Unter einem A.-U.[2] ist dagegen ein Quantum zu verstehen, das einerseits *nicht veränderlich*, sondern vielmehr in allen seinen Teilen fest und bestimmt, eine richtige *Konstante* ist, zugleich aber andrerseits *jede endliche Größe* derselben Art an Größe übertrifft. Als Beispiel führe ich die Gesamtheit, den Inbegriff *aller* endlichen ganzen positiven Zahlen an; diese Menge ist *ein Ding für sich* und bildet, ganz abgesehen von der natürlichen Folge der dazu gehörigen Zahlen, ein in allen Teilen festes, bestimmtes Quantum, ein *ἀφωρισμένον*, das offenbar größer zu nennen ist als jede endliche Anzahl[3]. Ein anderes Beispiel ist die Gesamtheit *aller* Punkte, die auf einem

(Fortsetzung des Textes auf S. 404.)

[1] D. h. das potentiale Unendliche (*ἄπειρον*).

[2] D. h. das aktuale Unendliche (*ἀφωρισμένον*).

[3] Man vgl. die hiermit übereinstimmende Auffassung der ganzen Zahlenreihe als aktual-unendliches Quantum bei S. Augustin (De civitate Dei. lib. XII, cap. 19): Contra eos, qui dicunt ea, quae infinita sunt, nec Dei posse scientia comprehendi. Wegen der großen Bedeutung, welche diese Stelle für meinen Standpunkt hat, will ich sie wörtlich hier aufnehmen und behalte mir vor, dieselbe bei einer späteren Gelegenheit ausführlich zu besprechen. Das Kapitel lautet: „Illud autem aliud quod dicunt, nec Dei scientia quae infinita sunt posse comprehendi: restat eis, ut dicere audeant atque huic se voragini profundae inpietatis inmergant, quod non omnes numeros Deus noverit. Eos quippe infinitos esse, certissimum est; quoniam in quocumque numero finem faciendum putaveris, idem ipse, non dico uno addito augeri, sed quamlibet sit magnus et quamlibet ingentem multitudinem continens, in ipsa ratione atque scientia numerorum non solum duplicari, verum etiam multiplicari potest. *Ita vero suis quisque numerus proprietatibus terminatur, ut nullus eorum par esse cuicumque alteri possit. Ergo et dispares inter se atque diversi sunt, et singuli quique finiti sunt, et omnes infiniti sunt.* Itane numeros propter infinitatem nescit omnes Deus, et usque ad quandam summam numerorum scientia Dei pervenit, ceteros ignorat? *Quis hoc etiam dementissimus dixerit?* Nec audebunt isti contemnere numeros et eos dicere ad Dei scientiam non pertinere, apud quos Plato Deum magna auctoritate commendat numeris mundum fabricantem. Et apud nos Deo dictum legitur: *Omnia in mensura et numero et pondere disposuisti* (Sap. 11, 21); de quo et propheta dicit: *Qui profert numerose saeculum* (Esai. 40, 26) et Salvator in evangelio: Capilli, inquit, *vestri omnes numerati sunt* (Mt. 10, 30). Absit itaque ut dubitemus, quod ei notus sit omnis numerus, *cujus intelligentiae* (absolutae), sicut in psalmo canitur, *non est numerus*

(Ps. 147, 5). Infinitas itaque numeri, quamvis infinitorum numerorum nullus sit numerus [finitus], non est tamen inconprehensibilis ei, cujus intelligentiae [absolutae] non est numerus. Quapropter si, quidquid scientia conprehenditur, scientis conprehensione finitur: profecto et *omnis infinitas* quodam ineffabili modo Deo [de] finita [ἀφωρισμένον] est, quia scientiae ipsius inconprehensibilis non est. Quare si infinitas numerorum scientiae Dei, qua conprehenditur, esse non potest in [de] finita: qui tandem nos sumus homunculi, qui ejus scientiae limites figere praesumamus, dicentes quod, nisi eisdem circuitibus temporum eadem temporalia repetantur, non potest Deus cuncta quae facit vel praescire ut faciat, vel scire cum fecerit? cujus sapientia *simpliciter multiplex et uniformiter multiformis* tam inconprehensibili conprehensione omnia inconprehensibilia conprehendit, ut, *quaecumque nova et dissimilia consequentia praecedentibus si semper facere vellet, inordinata et inprovisa habere non posset, nec ea provideret ex proximo tempore, sed aeterna praescientia contineret.*“ An einzelnen Stellen habe ich (durch Klammern erkenntliche) Einschaltungen zu machen mir erlaubt, die den Sinn, welchen die betreffenden Worte an den betreffenden Stellen bei S. Augustin m. E. nach haben, deutlicher hervortreten lassen. Energischer, als dies hier von S. Augustin geschieht, kann das *Transfinitum* nicht verlangt, vollkommener nicht begründet und verteidigt werden. Denn, daß es sich bei der unendlichen Menge (ν) aller endlichen ganzen Zahlen ν nicht um das Absolut-Unendliche (IIb) handelt, wird wohl von niemandem in Zweifel gezogen werden.

Indem nun der h. Augustin die totale, intuitive Perzeption der Menge (ν), „quodam ineffabili modo“, a parte Dei behauptet, erkennt er zugleich diese Menge *formaliter* als ein aktual-unendliches Ganzes, als ein *Transfinitum* an, und wir sind gezwungen, ihm darin zu folgen. An dieser Stelle wird nun aber möglicherweise der Einwand erhoben werden, daß, wenn wir auch genötigt sind, die Menge (ν) als ein kategorematisches Unendliches anzusehen, es uns andrerseits nicht erlaubt ist, die dieser Menge entsprechende Ordnungszahl ω oder die ihr zukommende Kardinalzahl $\overline{\omega}$ in Betracht zu ziehen, und zwar sei uns dies aus dem Grunde nicht erlaubt, weil *wir* bei der Beschränktheit unsres Wesens nicht imstande sind, alle die unendlich vielen zur Menge (ν) gehörigen Zahlindividuen ν uno intuitu aktuell zu denken. Ich möchte nun aber denjenigen sehen, der etwa bei der *endlichen* Zahl „Tausendmal Million“ oder selbst bei noch viel kleineren Zahlen alle darin vorkommenden Einheiten uno intuitu distinkt und präzise sich vorstellen kann. Ein solcher lebt heutigestages unter uns ganz sicherlich *nicht*. Und trotzdem haben wir das Recht, die endlichen Zahlen, auch wenn sie noch so groß sind, als Gegenstände der *diskursiven, menschlichen* Erkenntnis anzusehen und sie wissenschaftlich nach ihrer Beschaffenheit zu untersuchen; *dasselbe Recht steht uns auch in bezug auf die transfiniten Zahlen zu.* Jenem Einwand gegenüber gibt es also nur eine Antwort: die Bedingung, welche Ihr selbst, sogar an den *kleinen, endlichen* Zahlen, nicht zu erfüllen und zu leisten imstande seid, dieselbe mutet Ihr uns zu in bezug auf die *unendlichen* Zahlen! Ist ein unbilligeres Verlangen von Menschen an Menschen jemals gestellt worden? Nach unsrer Organisation sind wir nur selten im Besitz eines Begriffes, von dem wir sagen könnten, daß er ein „conceptus rei proprius ex propriis“ wäre, indem wir durch ihn eine Sache adäquat, ohne Hilfe einer Negation, eines Symbols oder Beispiels, so auffassen und erkennen, wie sie an und für sich ist. Vielmehr sind wir beim Erkennen zumeist auf einen „conceptus proprius ex communibus“ angewiesen, welcher uns befähigt, ein Ding aus allgemeinen Prädikaten und mit Hilfe von Vergleichungen, Ausschließungen, Symbolen oder Beispielen derartig zu bestimmen, daß es von jedem andern Ding wohlunterschieden ist. Man vergleiche z. B. die Methode, nach welcher ich in den „Grundlagen“ (1883) und schon früher in den Math. Ann. 5 (1871), die *irrationalen* Zahlgrößen definiert habe. Ich gehe nun *so weit, unbedingt zu behaupten,* daß diese *zweite* Art der Bestimmung und Abgrenzung von Dingen für die *kleineren transfiniten Zahlen* (z. B. für ω oder $\omega + 1$ oder ω^{ν} bei kleiner endlicher ganzer Zahl ν) eine *unvergleichlich einfachere, bequemere* und *leichtere* ist als für sehr große *endliche* Zahlen, bei denen wir gleichwohl auch nur auf dasselbe, unserer unvollkommenen Natur entsprechende Hilfsmittel angewiesen sind.

Im Gegensatz zu Augustin findet sich bei Origenes eine entschiedene Stellungnahme *gegen* das Aktual-Unendliche, und er geht hierin so weit, daß es fast scheinen möchte, er wolle selbst die Unendlichkeit Gottes nicht behauptet wissen. Denn er sagt, man dürfe nicht durch einen falschen Euphemismus (*εὐφημίας χάριν*) die Begrenzung (circumscriptio = *περιγραφή*) der göttlichen Kraft leugnen. Ich erinnere daran, daß *πέρας* im Griechischen Ziel, Grenze und Vollendung zugleich bedeutet: mit dem *ἄπειρον* verbindet sich daher eigentlich der Begriff des Unbestimmten, Unvollkommenen. Auch im Lateinischen kommt infinitum in dem Sinne „unbestimmt“ bei Cicero und Quintilian vor (z. B. infinitior distributio partium, ein logischer Fehler in der Rede; infinitas quaestiones, ungenau bestimmte Fragen usw.). Auch finis bezeichnet, wie *πέρας*, die Vollendung, so in dem bekannten Titel des Ciceronischen Werkes de finibus bonorum, bei Tacitus finis aequi juris etc.

In Origenes de principiis (*περὶ ἀρχῶν*), ed. Redepenning (in den griechisch erhaltenen Fragmenten S. 10, in der Übersetzung des Rufinus S. 214) heißt es wörtlich: „— intueamur creaturae initium, quodcunque illud initium creantis Dei mens potuerit intueri. In illo ergo initio putandum est tantum numerum rationabilium creaturarum, vel intellectualium, vel quoquomodo appellandae sunt, quas mentes superius diximus, fecisse Deum quantum sufficere posse prospexit. Certum est quippe quod praefinito aliquo apud se numero eas fecit: *non enim, ut quidam volunt, finem putandum est non habere creaturas; quia ubi finis non est, nec conprehensio ulla nec circumscriptio esse potest.* (Es ist *höchst wahrscheinlich*, daß *jene* Auseinandersetzung bei Augustin im *durchaus bewußten* Gegensatz zu dieser Stelle bei Origines geschrieben worden ist.) *Quod si fuerit, utique nec contineri vel dispensari a Deo, quae facta sunt, poterunt.* Naturaliter nempe quidquid infinitum (Origines hat immer nur das *ἄπειρον* im Auge und sagt, wenn die göttliche Kraft *ἄπειρος* wäre, könnte Gott sich selbst nicht erkennen) fuerit, et incomprehensibile erit. Porro autem, sicut scriptura dicit: ‚In numero et mensura universa‘ (Sap. 11, 21) condidit Deus, et idcirco numerus quidem recte adaptabitur rationabilibus creaturis, vel mentibus, ut tantae sint, quantae a providentia Dei dispensari, regi et contineri possint. Mensura vero materiae corporali consequenter aptabitur: quam utique tantam a Deo esse creatam credendum est, quantum sibi sciret ad ornatum mundi posset sufficere (gr. *τοσαύτην ὕλην ὅσην ἠδύνατο κατακοσμῆσαι*).“ Ich habe diese *tiefsinnige* Betrachtung des Origines vollständig reproduziert, weil ich in ihr den *Ursprung* für die, wie ich anerkennen muß, *bedeutendsten* und *inhaltvollsten* Argumente erblicke, welche gegen das Transfinitum zur Geltung gebracht worden sind. Man findet dieselben oft wiederholt; ich will sie in der vollendetsten Form, die ihnen gegeben worden ist, hier anführen. In der S. Thomasschen Summa theol. I, q. 7, a. 4 heißt es: „1) Multitudinem actu infinitam dari, impossibile est, quia omnem multitudinem oportet esse *in aliqua specie* multitudinis. *Species autem multitudinis sunt secundum species numerorum. Nulla autem species numeri est infinita*, quia quilibet numerus est multitudo mensurata per unum. Unde impossibile est esse multitudinem infinitam actu; sive per se, sive per accidens. 2) Item omnis multitudo in rerum natura existens est creata; et omne creatum *sub aliqua certa intentione* creantis comprehenditur, *non enim in vanum agens aliquod operatur.* Unde necesse est quod sub certo numero omnia creata gegebenen Kreise (oder irgendeiner andern bestimmten Kurve) liegen. Ein drittes Beispiel ist die Gesamtheit aller streng punktartig vorzustellenden Monaden, welche zum Phänomen eines vorliegenden Naturkörpers als konstitutive Bestandteile beitragen.

Aus der Definition I folgt, daß Sie vollkommen Recht haben, wenn Sie fragen: „wäre es nicht besser, für das P.-U. den Ausdruck *Unendliches* ganz fallen zu lassen?"

Allerdings ist das P.-U. eigentlich kein Unendliches, darum habe ich es in meinen „Grundlagen" *uneigentliches* Unendliches genannt. Doch wird es schwer sein, den betreffenden Gebrauch zu beseitigen, um so schwerer, als das P.-U. der leichtere, angenehmere, oberflächlichere, unselbständigere Begriff und die schmeichlerische Illusion zumeist mit ihm verknüpft ist, als hätte man daran was Rechtes, was richtig Unendliches; während doch in Wahrheit das P.-U. nur eine geborgte Realität hat, indem es stets auf ein A.-U. hinweist, durch welches es erst möglich wird. Daher das dem P.-U. von den Scholastikern zutreffend gegebene Epitheton: συνκατηγορηματικως.

Sehen wir uns ferner die Definition II an, so folgt zunächst, daß daraus *mit nichten* geschlossen werden kann, daß das A.-U. seiner Größe nach *unvermehrbar sein müsse*; eine irrige Annahme, die nicht nur in der *alten* und in der sich an sie anschließenden *scholastischen*, sondern auch in der *neueren* und *neuesten* Philosophie, man kann fast sagen, allgemein ver-

comprehendantur. Impossibile est ergo esse multitudinem infinitam in actu, etiam per accidens."

Dies sind die beiden gewichtigsten Gründe, welche im Laufe der Zeiten gegen das Transfinitum vorgeführt worden sind; alle anderen Argumente, die man ausgesprochen findet, lassen sich verhältnismäßig leicht *negativ* entkräften, indem man bemerkt, daß sie auf einem Fehler im Schließen beruhen. *Diese beiden Gründe* dagegen sind *sehr wohl* fundiert und konnten *nur positiv* gelöst und erledigt werden, *indem man bewies und zeigte, daß die transfiniten Zahlen und Ordnungstypen im Reiche des Möglichen ebensowohl existieren, wie die endlichen Zahlen und daß im Transfiniten sogar ein weitaus größerer Reichtum an Formen und an „species numerorum" vorhanden und gewissermaßen aufgespeichert ist, als in dem verhältnismäßig kleinen Felde des unbeschränkten Endlichen. Daher standen die transfiniten Spezies den Intentionen des Schöpfers und seiner absolut unermeßlichen Willenskraft ganz ebenso verfügbar zu Gebote, wie die endlichen Zahlen.* Man möchte glauben, daß S. Thomas diesen Zusammenhang geahnt oder sogar gekannt und durchschaut und eben darum es verschmäht hat, die anderen, *federleichten* Argumente gegen die aktual-unendlichen Größen und Zahlen, welche sich unter anderem auch in den Schriften seines Lehrers Albertus Magnus finden, zu reproduzieren. Er blieb und bestand *mit großem Recht* auf jenen *inhaltsvollen* und *gewichtigen zwei* Gründen, die *nur positiv* gelöst werden konnten; gab aber die übrigen Gründe durchaus gern auf in dem berühmten Ausruf gegen die Murmurantes: „*Praeterea adhuc non est demonstratum, quod Deus non possit facere ut sint infinita actu.*" (Opusc. de aeternitate mundi.)

breitet ist[1]. Vielmehr sind wir hier genötigt, eine *fundamentale Distinktion* zu machen, indem wir unterscheiden:

II[a] Vermehrbares A.-U. oder *Transfinitum*.

II[b] Unvermehrbares A.-U. oder *Absolutum*.

Die vorhin für das A.-U. angeführten drei Beispiele gehören sämtlich in die Klasse II[a] des Transfiniten. Ebenso gehört hierher *die kleinste überendliche Ordnungszahl*, welche ich mit ω bezeichne; denn sie kann zur nächst größeren Ordnungszahl $\omega + 1$, diese wieder zu $\omega + 2$ usw. vergrößert resp. vermehrt werden. Aber auch die *kleinste aktual-unendliche Mächtigkeit oder Kardinalzahl* ist ein Transfinitum, und das gleiche gilt von der nächst größeren Kardinalzahl usw.

Das *Transfinite* mit seiner Fülle von Gestaltungen und Gestalten weist mit Notwendigkeit auf ein *Absolutes* hin, auf das „wahrhaft Unendliche", an dessen Größe keinerlei Hinzufügung oder Abnahme statthaben kann und welches daher quantitativ als *absolutes* Maximum anzusehen ist. Letzteres übersteigt gewissermaßen die menschliche Fassungskraft und entzieht sich namentlich mathematischer Determination; wogegen das *Transfinite* nicht nur das weite Gebiet des Möglichen in Gottes Erkenntnis erfüllt, sondern

[1] Da ich seit vier Jahren, nach Publikation der „Grundlagen", Zeit gefunden habe, mich in der Literatur der alten und der scholastischen Philosophie etwas genauer umzusehen, so weiß ich nun auch, daß das A.-U. in natura creata zu allen Zeiten seine Verteidiger innerhalb der christlichen Spekulation gehabt hat. Durch Bayles Dictionnaire bin ich vor etwa drei Jahren unter anderem auf den hervorragenden *Franziskanermönch* R. P. Emuanel Maignan* aus Toulouse (Cursus philosophicus, Lugduni, 1673) aufmerksam geworden, der dem kategorematischen Unendlichen eine sehr weite Sphäre zuweist. Darin schließt sich ihm an sein Schüler, der Franziskaner R. P. Joh. Saguens (vgl. dessen Werk: De perfectionibus divinis. Coloniae 1718). Von den Nominalisten (im Anschluß an Avicenna) soll der weitaus größte Teil die „unendliche Zahl" behauptet haben. Dasselbe wird den *Scotisten* nachgesagt. Der R. P. T. Pesch führt in seinen Inst. phil. nat. § 409 unter den Verteidigern der Möglichkeit der unendlichen Zahlen auch folgende Autoren an: Gabriel Vasquez (Comm. in Summ. p. 1, d. 26, c. 1), Hurtado (Phys. d. 13, § 16), Arriaga (Phys. d. 13. n. 32) und Oviedo (Phys. controv. 14, punct. 4, n. 6; punct. 5). Einen vermittelnden Standpunkt findet man bei den *Conimbricenses* (Phys. l. 3, c. 8, q. 2) und bei Amicus (Phys. tr. 18, q. 6, dub. 2).

* Die Bezeichnung Emanuel Maignans (er lebte von 1601 bis 1676) als eines *Franziskanermönches* ist nicht ganz zutreffend, da hierunter die dem Orden des S. Franciscus von Assisi angehörigen sogenannten *Minoriten* oder *Seraphischen Brüder* gewöhnlich verstanden werden. E. M. war aber (ebenso wie der als Freund des Cartesius bekannte Pater Mersenne) ein *Minime*, d. h. Angehöriger eines von Franciscus von Paula († 1507) im Jahre 1435 gestifteten, die Strenge des Franziskanerordens, an den er sich sonst anschloß, durch Enthaltung von allem Fleisch überbietenden Mönchsordens.

Ich verdanke diese Berichtigung der Güte des R. P. Ignatius Jeiler, O. S. Franz. Präfekten des Coll. S. Bonaventurae in Brozzi per Quaracchi, bei Florenz.

auch ein reiches, stets zunehmendes Feld idealer Forschung darbietet und meiner Überzeugung nach auch in der Welt des Geschaffenen bis zu einem gewissen Grade und in verschiedenen Beziehungen zur Wirklichkeit und Existenz gelangt, um die Herrlichkeit des Schöpfers, nach dessen absolut freiem Ratschluß, stärker zum Ausdrucke zu bringen, als es durch eine bloß „endliche Welt" hätte geschehen können. Dies wird aber auf allgemeine Anerkennung noch lange zu warten haben, zumal bei den *Theologen*, so wertvoll auch diese Erkenntnis als Hilfsmittel zur Förderung der von ihnen vertretenen Sache (der Religion) sich erweisen würde.

Endlich habe ich Ihnen noch zu erklären, in welchem Sinne ich das *Minimum* des Transfiniten als *Grenze des wachsenden Endlichen* auffasse. Dazu beachte man, daß der Begriff „Grenze" im Gebiete *endlicher* Zahlen *zwei* wesentliche Merkmale hat, welche hier reziprok auseinander folgen. Die Zahl 1 z. B. ist die Grenze der Zahlen $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$ (wo ν eine veränderliche endliche ganze, über alle endliche Grenzen hinaus wachsende Zahl bedeutet) und bietet *als Grenze* folgende zwei *auseinander ableitbare* Merkmale dar:

Erstens ist die Differenz $1 - z_\nu = \frac{1}{\nu}$ eine unendlich klein werdende Größe, d. h. die Zahlen z_ν *nähern* sich der Grenze 1 bis zu beliebiger Nähe.

Zweitens ist 1 die *kleinste von allen Zahlgrößen, welche größer sind als alle Größen* z_ν; denn nimmt man irgendeine Größe $1 - \varepsilon$, die kleiner ist als 1, so wird $1 - \varepsilon$ zwar größer sein als einige der z_ν; aber von einem gewissen ν an, nämlich für $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$, wird immer $z_\nu > 1 - \varepsilon$ sein; es ist also 1 das *Minimum* aller Zahlgrößen, die größer sind als alle z_ν.

Von diesen zwei Merkmalen charakterisiert, wie gesagt, jedes für sich vollständig die *endliche* Zahl 1 als *Grenze* der veränderlichen Größe $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$.

Will man nun den Begriff der Grenze auch auf transfinite Grenzen ausdehnen, so dient dazu nur *das zweite* der soeben angeführten Merkmale, das erste muß hier fallen gelassen werden, weil es nur für endliche Grenzen Bedeutung, für transfinite aber keinen Sinn hat.

Darnach nenne ich beispielsweise ω die „*Grenze*" der endlichen wachsenden ganzen Zahlen ν, weil ω die *kleinste* von allen Zahlen ist, die größer sind als alle endlichen Zahlen ν; genau ebenso wie 1 als die kleinste von allen Zahlen gefunden wird, die größer sind als alle Größen $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$; jede kleinere Zahl als ω ist eine endliche Zahl und wird von anderen endlichen Zahlen ν der Größe nach übertroffen. Dagegen ist hier $\omega - \nu$ stets gleich ω, und man kann also nicht sagen, daß die wachsenden endlichen Zahlen ν ihrem Ziele ω beliebig nahe kommen; vielmehr bleibt jede noch so große Zahl ν von ω *ebensoweit* entfernt wie die kleinste endliche Zahl.

Es tritt hier besonders deutlich der überaus wichtige und entscheidende Umstand hervor, daß meine kleinste transfinite Ordnungszahl ω und folglich auch alle größeren Ordnungszahlen *gänzlich außerhalb der endlosen Zahlenreihe* 1, 2, 3, usw. liegen. Das ω ist *nicht* etwa *Maximum* der endlichen Zahlen (ein solches gibt es ja nicht), sondern ω ist das *Minimum aller unendlichen* Ordnungszahlen. Es war das unglückliche Versehen Fontenelles[1], das Transfinite *innerhalb* der Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, wenn auch gewissermaßen am Schluß derselben (der ihr aber ja fehlt) zu suchen; indem er auf diese Weise seinen unendlichen Zahlen von vornherein einen unlöslichen Widerspruch mitgab, war das Schicksal seiner unfruchtbaren Theorie entschieden; sie mußte vor einer durchaus berechtigten Kritik[2] das Feld räumen. Wenn aber letztere durch die Totgeburt der Fontenelleschen unendlichen Zahlen sich außerdem verleiten ließ, über die aktual-unendlichen Zahlen ganz allgemein den Stab zu brechen, so weiß ich, daß sie ihrerseits durch die Tatsache meiner, von der Fontenelleschen total verschiedenen, vollständig widerspruchsfreien Theorie *widerlegt* ist.

VI[3].

Sie erwähnen in Ihrem Schreiben die Frage über die aktual *unendlich kleinen* Größen. An mehreren Stellen meiner Arbeiten werden Sie die Ansicht ausgesprochen finden, daß dies *unmögliche*, d. h. *in sich widersprechende* Gedankendinge sind, und ich habe schon in meinem Schriftchen „Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre" pag. 8 im § 4, wenn auch damals noch mit einer gewissen Reserve, angedeutet, daß die strenge Begründung dieser Position aus der Theorie der transfiniten Zahlen herzuleiten wäre. Erst in diesem Winter fand sich die Zeit dazu, meine diesen Gegenstand betreffenden Ideen in die Gestalt eines förmlichen Beweises zu bringen. Es handelt sich um den Satz:

„*Von Null verschiedene lineare Zahlgrößen* ζ (*d. h. kurz gesagt, solche Zahlgrößen, welche sich unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken vorstellen lassen*), *welche kleiner wären als jede noch so kleine endliche Zahlgröße, gibt es nicht*, d. h. *sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgröße*." Der Gedankengang meines Beweises ist einfach folgender: ich gehe von der *Voraussetzung* einer linearen Größe ζ aus, die so klein sei, daß ihr n-faches

$$\zeta \cdot n$$

[1] Man vgl. Fontenelle: Éléments de la Géometrie de l'infini. Paris 1727.

[2] Man vgl. Maclaurin: Traité des Fluxions. Traduction du R. P. Pezenas, t. I introduction pag. XLI. Paris 1749; ferner Gerdil: Opere edite ed ined. t. IV, pag. 261; t. V, p. 1. Rome 1806.

[3] Das Folgende findet sich fast übereinstimmend in zwei Briefen; der eine vom 13. Mai 1887 ist an Herrn Gymnasiallehrer F. Goldscheider in Berlin, der andere vom 16. Mai 1887 an Herrn Professor Dr. K. Weierstraß von mir geschrieben worden.

für *jede noch so große endliche ganze Zahl* n kleiner ist als die Einheit, und beweise nun aus dem Begriff der linearen Größe und mit Hilfe gewisser Sätze der transfiniten Zahlenlehre, daß alsdann auch

$$\zeta \cdot \nu$$

kleiner ist als *jede noch so kleine endliche Größe*, wenn ν irgendeine noch so große *transfinite* Ordnungszahl (d. h. Anzahl oder Typus einer wohlgeordneten Menge) aus irgendeiner noch so hohen Zahlenklasse bedeutet. Dies heißt aber doch, daß ζ *auch durch keine noch so kräftige actual unendliche* Vervielfachung *endlich* gemacht werden, also sicherlich nicht *Element* endlicher Größen sein kann. Somit widerspricht die gemachte Voraussetzung dem Begriff linearer Größen, welcher derartig ist, daß nach ihm jede lineare Größe als integrierender Teil von anderen, im besonderen von endlichen linearen Größen gedacht werden muß. Es bleibt also nichts übrig, als die Voraussetzung fallen zu lassen, wonach es eine Größe ζ gäbe, die für jede endliche ganze Zahl n kleiner wäre als $\frac{1}{n}$, und hiermit ist unser Satz bewiesen. [¹]

Es scheint mir dies eine wichtige Anwendung der transfiniten Zahlenlehre zu sein, ein Resultat, welches alte, weit verbreitete und tiefwurzelnde Vorurteile zu beseitigen geeignet ist.

Die Tatsache der aktual-unendlich großen Zahlen ist also so wenig ein Grund für die Existenz aktual-unendlich kleiner Größen, daß vielmehr gerade mit Hilfe der ersteren die Unmöglichkeit der letzteren bewiesen wird.

Ich glaube auch nicht, daß man dieses Resultat auf anderem Wege *voll* und *streng* zu erreichen imstande ist.

Das *Bedürfnis* unseres Satzes ist besonders einleuchtend gegenüber neueren Versuchen von O. Stolz und P. Dubois-Reymond, welche darauf ausgehen, die Berechtigung aktual-unendlich kleiner Größen aus dem sogenannten „Archimedischen Axiom" abzuleiten. (Vgl. O. Stolz, Math. Annalen Bd. 18, S. 269; ferner seine Aufsätze in den Berichten des naturw. medizin. Vereines in Innsbruck, Jahrgänge 1881—82 und 1884; sie sind betitelt: „Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes" und: „Die unendlich kleinen Größen"; endlich vergleiche man desselben Autors: „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik", Leipzig 1885, I. Teil, S. 205.)

Archimedes scheint nämlich zuerst darauf aufmerksam geworden zu sein, daß der in Euklids Elementen gebrauchte Satz, wonach aus jeder noch so kleinen begrenzten geradlinigen Strecke durch *endliche, hinreichend große* Vervielfachung *beliebig große endliche* Strecken erzeugt werden können, eines Beweises bedürftig sei, und er glaubte darum diesen Satz als „Annahme" (*λαμβανόμενον*) bezeichnen zu sollen.

(Vgl. Eukl. *Elem.* lib. V, def. 4: *λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέδη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν*; ferner insbesondere Elem. lib. X, pr. 1. Archimedes: de sphaera et cylindro I, postul. 5 und die Vorrede zu seiner Schrift: de quadratura parabolae.)

Nun ist der Gedankengang jener Autoren (O. Stolz a. a. O.) der, daß wenn man dieses vermeintliche „Axiom" fallen ließe, daraus ein Recht auf aktual unendlich-kleine Größen, welche dort „Momente" genannt werden, hervorgehen würde. Aber aus dem oben von mir angeführten Satze folgt, wenn er auf geradlinige stetige Strecken angewandt wird, unmittelbar die *Notwendigkeit der Euklidischen Annahme.* Also ist das sogenannte „Archimedische Axiom" *gar kein Axiom, sondern ein, aus dem linearen Größenbegriff mit logischem Zwang folgender Satz.*

VII.[1]

Wenn man sich über den Ursprung des weitverbreiteten Vorurteils gegen das aktuale Unendliche, des horror infiniti in der Mathematik volle Rechenschaft geben will, so muß man vor allem den Gegensatz scharf ins Auge fassen, der zwischen dem aktualen und potentialen Unendlichen besteht. Während das potentiale Unendliche nichts anderes bedeutet als eine unbestimmte, stets endlich bleibende, veränderliche Größe, die Werte anzunehmen hat, welche entweder kleiner werden als jede noch so kleine, oder größer werden als jede noch so große endliche Grenze, bezieht sich das aktuale Unendliche auf ein in sich festes, konstantes Quantum, das größer ist als jede endliche Größe derselben Art. So stellt uns beispielsweise eine veränderliche Größe x, die nacheinander die verschiedenen endlichen ganzen Zahlwerte $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ anzunehmen hat, ein potentiales Unendliches vor, wogegen die durch ein Gesetz begrifflich durchaus bestimmte Menge (ν) aller ganzen endlichen Zahlen ν das einfachste Beispiel eines aktual-unendlichen Quantums darbietet.

Die wesentliche Verschiedenheit, welche hiernach zwischen den Begriffen des potentialen und aktualen Unendlichen besteht, hat es merkwürdigerweise nicht verhindert, daß in der Entwickelung der neueren Mathematik mehrfach Verwechselungen beider Ideen vorgekommen sind, derart, daß in Fällen, wo nur ein potentiales Unendliches vorliegt, fälschlich ein Aktual-Unendliches angenommen wird, oder daß umgekehrt Begriffe, welche nur vom Gesichtspunkte des aktualen Unendlichen einen Sinn haben, für ein potentiales Unendliches gehalten werden.

[1] Dieser Brief ist im Mai 1886 an Herrn S. Giulio Vivanti in *Mantua* gerichtet worden. Sein Inhalt ist in den letzten Abschnitt des Aufsatzes: Über die verschiedenen Ansichten in bezug auf die aktual-unendlichen Zahlen in Bihang till. K. Svenska Vet. Akad. Hdl. 11, Nr 19 aufgenommen worden.

Beide Arten der Verwechselung müssen als Irrtümer betrachtet werden.

Die erste tritt unter anderem dort auf, wo man, wie es z. B. Poisson (Traité de Mécanique, 2. e édit. t. I, p. 14) getan hat, die sogenannten Differentiale als aktual-unendlich kleine Größen auffaßt, obgleich sie nur die Deutung veränderlicher, beliebig klein anzunehmender Hilfsgrößen zulassen, wie schon von beiden Entdeckern der Infinitesimalrechnung, Newton und Leibniz bestimmt ausgesprochen worden ist. Dieser Irrtum kann, dank Ausbildung der sogenannten Grenzmethode, an welcher die französischen Mathematiker unter Führung des großen Cauchy so ruhmvoll beteiligt sind, wohl als überwunden angesehen werden.

Um so mehr scheint mir aber in der Gegenwart die Gefahr des andern Fehlers zu drohen, welcher darin besteht, von dem Aktual-Unendlichen nichts wissen zu wollen und es auch dort zu verleugnen, wo keine Möglichkeit vorhanden ist, ohne einen richtigen Gebrauch desselben den Dingen auf den Grund zu kommen.

Hier ist in erster Linie die Theorie der irrationalen Zahlgrößen anzuführen, deren Begründung nicht durchführbar ist, ohne daß das A.-U. in irgendeiner Form herangezogen wird. Daß diese Heranziehung auf mehreren Wegen geschehen kann, findet sich in § 9 der „*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*“ kurz auseinander gesetzt. Ich habe mich dazu schon früher (Math. Ann. Bd. 5, S. 123) [II 5, S. 92] besonderer aktual-unendlicher Mengen rationaler Zahlen bedient, welche ich *Fundamentalreihen* nenne. Herr E. Heine ist mir darin gefolgt (Crelles Journ. Bd. 74, S. 172); seine Abweichungen beziehen sich nur auf die Ausdrucksweise, in der Sache stimmt er mit mir ganz überein. Ich erwähne hier den eigentümlichen, meines Erachtens rückschrittlichen Versuch des Herrn Molk (Acta math. t. VI), die irrationalen Zahlen gänzlich aus dem Gebiet der höheren Arithmetik zu vertreiben; Herr Kronecker geht sogar noch weiter und will diese Zahlen auch in der Funktionentheorie nicht dulden, aus welcher er sie *durch höchst künstliche Subsidiärtheorien zu* verdrängen sucht; es bleibt abzuwarten, welchen Erfolg und welche Dauer diese unnötigen Bemühungen haben werden. (Vgl. Crelle J. Bd. 99, S. 336.)

Man kann aber noch aus einem andern Gesichtspunkte das Vorkommen des Aktual-Unendlichen und seine Unentbehrlichkeit sowohl in der Analysis, wie auch in der Zahlentheorie und Algebra unwiderleglich dartun. Unterliegt es nämlich keinem Zweifel, daß wir die *veränderlichen* Größen im Sinne des potentialen Unendlichen nicht missen können, so läßt sich daraus auch die Notwendigkeit des Aktual-Unendlichen folgendermaßen beweisen: Damit eine solche veränderliche Größe in einer mathematischen Betrachtung verwertbar sei, muß strenggenommen das „Gebiet“ ihrer Veränderlichkeit durch eine Definition vorher bekannt sein; dieses „Gebiet“ kann aber nicht

selbst wieder etwas Veränderliches sein, da sonst jede feste Unterlage der Betrachtung fehlen würde; also ist dieses „Gebiet“ eine bestimmte aktual-unendliche Wertmenge.

So setzt jedes potentiale Unendliche, soll es streng mathematisch verwendbar sein, ein Aktual-Unendliches voraus.

Diese „Gebiete der Veränderlichkeit“ sind die eigentlichen Grundlagen der Analysis sowohl wie der Arithmetik und sie verdienen es daher in hohem Grade, selbst zum Gegenstand von Untersuchungen genommen zu werden, wie dies von mir in der „Mengenlehre“ (théorie des ensembles) geschehen ist.

Hat aber hiermit das Aktual-Unendliche in Form aktual-unendlicher *Mengen* sein Bürgerrecht in der Mathematik geltend gemacht, so ist die Forderung eine unabweisliche geworden, auch den aktual-unendlichen *Zahlbegriff* durch geeignete *naturgemäße Abstraktionen* auszubilden, ähnlich wie die endlichen Zahlbegriffe, das Material der bisherigen Arithmetik, durch Abstraktion aus endlichen Mengen gewonnen worden sind. Dieser Gedankengang hat mich auf die *transfinite Zahlenlehre* geführt, deren Anfänge sich in den „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“ vorfinden.

VIII.[1]

1. Abstrahieren wir bei einer gegebenen Menge M, welche aus bestimmten, wohlunterschiedenen konkreten Dingen oder abstrakten Begriffen, welche Elemente der Menge genannt werden, besteht und als ein Ding für sich gedacht wird, sowohl von der Beschaffenheit der Elemente wie auch von der Ordnung ihres Gegebenseins, so entsteht in uns ein bestimmter Allgemeinbegriff (universale, unum versus alia, in der Bedeutung: unum aptum inesse multis)[2], den ich die *Mächtigkeit* von M oder die der Menge M zukommende *Kardinalzahl* nenne. Ich setze fest, daß $\overline{\overline{M}}$ ein Zeichen für die Mächtigkeit von M sei. Die *zwei* Striche über dem M sollen andeuten, daß an M ein *zwei-*

[1] Dieser Abschnitt VIII gibt einen kurzen Abriß der Fundamente der *Theorie der Ordnungstypen*; er ist der Hauptsache nach vor bald drei Jahren verfaßt worden und schon damals zur Aufnahme in ein andres Journal bestimmt gewesen. Nachdem der erste Bogen bereits gesetzt war, machten sich zu meiner Überraschung Opportunitätsrücksichten geltend, die mich bestimmten, den Aufsatz zurückzuziehen. Habent sua fata libelli.

[2] Man vgl. P. Matth. Liberatore S. J.: Inst. philos., 2a ed. novae formae, vol. 1, Logica pars II, 104. Paris 1883. Allen, welche gern oder ungern sich ein getreues Bild von der thomistischen Philosophie verschaffen wollen, kann ich dieses billige Werk (2 vol. 8 Fr. 50 cent) als die m. E. vorzüglichste Einführung in dieses System empfehlen. Von demselben Autor existieren noch ein kürzeres einbändiges Handbuch: Comp. Logicae et Metaphysicae, 2a ed., Napoli 1869 (4 Fr. 30 Cent) und andere geistvolle, sorgfältigst gearbeitete Schriften, unter denen ich noch das Werk: Della conoscenza intellettuale, 3a ed., hervorhebe.

facher Abstraktionsakt vollzogen ist, sowohl in bezug auf die Beschaffenheit der Elemente, wie auch in bezug auf ihre Ordnung zueinander. In Nr. 9 wird uns die Bezeichnung $\overline{M}$ mit *nur einem* Strich für dasjenige universale begegnen, welches aus M hervorgeht, wenn daran nur die erstere Art der Abstraktion ausgeübt wird. Die Elemente behalten hierbei auch im Begriff diejenige Ordnung zueinander, mit welcher sie in concreto in M gedacht werden; so wird dasjenige gewonnen werden, was ich den *Ordnungstypus* von M nenne. Zunächst bleiben wir jedoch bei den *Kardinalzahlen*.

2. Zwei bestimmte Mengen M und M_1 nennen wir *äquivalent* (in Zeichen: $M \sim M_1$), wenn es möglich ist, dieselben gesetzmäßig, gegenseitig eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuzuordnen.

Ist $M \sim M_1$ und $M_1 \sim M_2$, so ist auch $M \sim M_2$.

Beispiele. a) Die Menge der *Regenbogenfarben* (Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett,) und die Menge der *Tonstufen* (C, D, E, F, G, A, H) sind äquivalente Mengen und stehen beide unter dem Allgemeinbegriff *Sieben*.

b) Die Menge der *Finger* meiner *beiden Hände* und die Menge der *Punkte* in dem sog. *arithmetischen Dreieck* ∴∵. (M. v. Pascal, Oeuvres compl. Paris, 1877, Hachette & Cie., tom. III, pag. 243: Traité du triangle arithmetique) sind äquivalent; ihnen kommt die Kardinalzahl *Zehn* zu.

c) Die aktual-unendliche Menge (ν) aller positiven, endlichen ganzen Zahlen ν ist äquivalent der Menge $(\mu + \nu i)$ aller komplexen ganzen Zahlen von der Form $\mu + \nu i$, wo μ und ν unabhängig voneinander alle ganzzahligen positiven Werte erhalten; diese beiden Mengen sind äquivalent der Menge $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ aller positiven rationalen Zahlen $\frac{\mu}{\nu}$, wo μ und ν relativ prim zueinander sind; letzteres erscheint um so merkwürdiger, als die den rationalen Zahlen entsprechenden sog. rationalen Punkte einer Geraden in dieser „überalldicht" liegen (vgl. Math. Ann. Bd. 15, S. 2) [hier S. 140], während die den ganzen Zahlen ν entsprechenden Punkte der Geraden in Abständen von der Größe der zugrunde gelegten Längeneinheit aufeinander folgen. Aber auch der Inbegriff aller sog. *algebraischen* Zahlen hat, wie ich bewiesen habe, *nur* die Mächtigkeit des Inbegriffs (ν), welches die *kleinste* Mächtigkeit ist von allen, die bei aktualunendlichen Mengen überhaupt vorkommen.

d) Dagegen ist die Menge *aller reellen* (d. h. der rationalen und irrationalen, der algebraischen und transzendenten) Zahlgrößen *nicht* äquivalent der Menge (ν), wie ich zuerst in Bd. 77 von Crelles J. [III 1, S. 115] und später noch einmal in Bd. 15 der Math. Ann. [III 4, S. 143] und in Acta math. Bd. 2 bewiesen habe. Wohl ist aber auch der nicht weniger merkwürdige Satz von mir bewiesen worden, daß sog. n-dimensionale stetige Gebilde hinsichtlich ihres Punktbestandes *äquivalent* sind dem Linear-

kontinuum, also mit diesem *gleiche*, von (ν) verschiedene Mächtigkeit haben. [Vgl. hier III 2) S. 119.]

3. Aus Nr. 1 und 2 wird bewiesen, daß äquivalente Mengen immer eine und dieselbe Mächtigkeit oder Kardinalzahl haben und daß auch umgekehrt Mengen von derselben Kardinalzahl äquivalent sind. In Zeichen können wir diesen Doppelsatz so formulieren: Ist $M \sim M_1$, so ist auch $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{M_1}}$ und umgekehrt[1].

Die Kenntnis nur eines *Zuordnungsgesetzes* für zwei Mengen M und M_1 *genügt*, um die Äquivalenz derselben zu konstatieren; doch gibt es immer viele, im allgemeinen sogar unzählig viele Zuordnungsgesetze, durch welche zwei äquivalente Mengen in gegenseitig eindeutige und vollständige Beziehung zueinander gebracht werden können.

4. Steht es nach irgendeinem Beweise fest, daß zwei gegebene Mengen M und N *nicht* äquivalent sind, so tritt einer von folgenden zwei Fällen ein: *entweder* es läßt sich aus N ein Bestandteil N' absondern, so daß $M \sim N'$ oder es läßt sich aus M ein Bestandteil M' absondern, so daß $M' \sim N$. Im *ersten* Falle heißt M kleiner als N, im *zweiten* nennen wir M größer als N.

Hier kann nicht genug betont werden, daß das exklusive Verhalten der beiden Fälle, welches der Definition des Größer- und Kleinerseins bei *Kardinalzahlen* zugrunde liegt, wesentlich von der gemachten Voraussetzung abhängt, daß M und N *nicht* gleiche Mächtigkeit haben. Sind nämlich die beiden Mengen äquivalent, dann kann es sehr wohl vorkommen, daß Bestandteile M' und N' derselben existieren, für welche sowohl $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N'}}$, wie auch $\overline{\overline{M'}} = \overline{\overline{N}}$. Man hat den Satz: sind M und N zwei solche Mengen, daß Bestandteile M' und N' von ihnen abgesondert werden können, von denen sich zeigen läßt, daß $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N'}}$ und $\overline{\overline{M'}} = \overline{\overline{N}}$, so sind M und N äquivalente Mengen.

---

[1] Die Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ einer Menge M bleibt nach 1. ungeändert dieselbe, wenn an Stelle der Elemente $m, m', m'', \ldots$ von M andere Dinge substituiert werden. Ist nun $M \sim M_1$, so existiert ein Zuordnungsgesetz, durch welches den Elementen $m, m', m'', \ldots$ von M die Elemente $m_1, m_1', m_1'', \ldots$ von M_1 entsprechen; man kann sich an die Stelle der Elemente $m, m', m'', \ldots$ in M mit einem Male die Elemente $m_1, m_1', m_1'', \ldots$ von M_1 substituiert denken; dadurch geht die Menge M in M_1 über, und da bei diesem Übergange an der Kardinalzahl nichts geändert wird, so ist $\overline{\overline{M_1}} = \overline{\overline{M}}$.

Die Umkehrung dieses Satzes ergibt sich aus der Bemerkung, daß zwischen den Elementen einer Menge M und den Einsen ihrer Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ein gegenseitig eindeutiges und vollständiges Zuordnungsverhältnis besteht, so daß wir sagen können, es ist: $M \sim \overline{\overline{M}}$. Hat man daher zwei Mengen M und M_1 mit *gleicher* Kardinalzahl, so ist letztere sowohl der Menge M wie auch der Menge M_1 äquivalent; folglich sind auch M und M_1 äquivalent; denn es besteht der Satz: sind zwei Mengen einer dritten äquivalent, so sind sie auch untereinander äquivalent. [Vgl. III 9, S. 283—285 und die bezügliche Anmerkung S. 351.]

5. Die durch Vereinigung zweier Mengen M und N hervorgehende Menge werde mit $M + N$ bezeichnet, wo später das Nähere über die Ordnung der Elemente in dieser neuen Menge gesagt werden wird, auf welche Ordnung es ja hier bei den Kardinalzahlen nicht ankommt. Hat man zwei andere Mengen M' und N', so daß $M \sim M'$ und $N \sim N'$, so sieht man leicht, daß auch $M + N \sim M' + N'$, sofern die Summanden keine gemeinsamen Elemente haben.

Auf diesen Satz wird die Definition der *Summe* zweier und folglich auch mehrerer *Kardinalzahlen* oder *Mächtigkeiten* gegründet: ist $\mathfrak{a} = \overline{M}$ und $\mathfrak{b} = \overline{N}$, so versteht man unter $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ diejenige Kardinalzahl, welche der Menge $M + N$ zukommt, d. h. man definiert:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{M + N}.$$

Das *kommutative* Gesetz $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a})$ und das *assoziative* Gesetz $(\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c})$ bedürfen, wie man sich leicht überzeugt, *hier bei den Kardinalzahlen keiner weitläufigen Beweise*, weil die Kardinalzahl durch den Abstraktionsakt, welcher sie liefert (m. v. Nr. 1), von vornherein von der Ordnung ihrer Elemente *unabhängig ist.*

6. Sind M und N zwei Mengen, so verstehe man unter $M \cdot N$ irgendeine dritte Menge, die dadurch aus N hervorgeht, daß man *an Stelle jedes* einzelnen Elementes von N je eine Menge setzt, die äquivalent ist der Menge M; über die Ordnung der Elemente dieser neuen Menge wird erst in Nr. 11 eine Bestimmung getroffen werden; hier kommt es darauf nicht an. Man beweist nun sehr leicht, daß *alle* nach dem bezeichneten Modus zu gewinnenden Mengen $M \cdot N$ untereinander äquivalent sind, und gründet hierauf die Definition des Produkts zweier Kardinalzahlen. Ist $\mathfrak{a}$ die Mächtigkeit von M, $\mathfrak{b}$ die von N, so definiert man:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \overline{M \cdot N}.$$

$\mathfrak{a}$ heißt der *Multiplikandus*, $\mathfrak{b}$ der *Multiplikator* in diesem Produkt.

Auch hier wird leicht bewiesen, daß das *kommutative* Gesetz: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$ und das *assoziative* Gesetz: $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$ für *Mächtigkeiten* oder *Kardinalzahlen* allgemeine Gültigkeit haben. Ebenso besteht, wie man leicht zeigen kann, das *distributive* Gesetz: $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

7. Alles Vorangehende bezieht sich gleichmäßig auf *endliche* sowohl, wie auch auf *aktual-unendliche* Mengen und Kardinalzahlen.

Für *endliche* Mengen läßt sich nun *weiter beweisen*, daß, wenn von drei *endlichen* Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die letztere gleich ist der Summe der beiden ersteren, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, alsdann niemals $\mathfrak{c}$ gleich einem der Summanden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sein kann[1].

[1] Der Beweis dieses Satzes muß sorgfältigst geführt werden; denn gerade wegen seiner fundamentalen Einfachheit und weil er für selbstverständlich gehalten wird, liegt hier die Gefahr einer Erschleichung besonders nahe. — Die Bedeutung des Satzes ist

Wenn aber von der Voraussetzung der *Endlichkeit* bei den drei Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ abgesehen wird, so hört dieser Satz auf richtig zu sein, und darin liegt der *tiefste* Grund der *wesentlichen Verschiedenheit* zwischen *endlichen* und *aktual-unendlichen* Zahlen und Mengen, einer Verschiedenheit, welche so groß ist, daß man die Berechtigung hat, die unendlichen Zahlen ein *ganz neues Zahlengeschlecht* zu nennen.

Hier liegt nun *der große Stein des Anstoßes*, den von altersher Philosophen und Mathematiker nicht haben wegräumen können, und der die

diese: Ist M eine *endliche* Menge, M' ein echter, von M verschiedener Bestandteil von M, so sind M und M' *nicht* äquivalent.

Unter einer *endlichen* Menge verstehen wir eine solche M, welche aus *einem* ursprünglichen Element durch sukzessive Hinzufügung neuer Elemente derartig hervorgeht, daß auch *rückwärts* aus *M durch sukzessive* Entfernung der Elemente *in umgekehrter Ordnung* das ursprüngliche Element gewonnen werden kann. [Hierzu vergleiche III 9, § 5, S. 289 ff. und die zugehörige Anmerkung S. 352.]

Ich schicke folgenden allgemeinen, höchst einleuchtenden *Hilfssatz* voraus: sind irgend zwei Mengen M und N äquivalent, so können sie (im allgemeinen auf viele Weisen) so in gegenseitig eindeutige und vollständige Zuordnung gebracht werden, daß bei *dieser* Zuordnung einem beliebig vorgegebenen Elemente m von M ein ebenso beliebig gewähltes Element n von N entspricht.

Und nun wird zum Beweise des in Rede stehenden Satzes ein *vollständiges Induktionsverfahren* eingeleitet.

Man setze eine Menge M voraus, welche keinem ihrer Bestandteile äquivalent ist; ich will zeigen, daß alsdann auch die aus M durch Hinzufügung *eines* neuen Elementes l hervorgehende Menge $M + l$ *dieselbe Eigenschaft* hat, mit keinem *ihrer* Bestandteile äquivalent zu sein. Sei N irgendein Bestandteil von $M + l$, so kann er zwei Fälle darbieten. 1) Es gehört das Element l mit zu N, so daß $N = N' + l$. N' ist dann offenbar auch Bestandteil von M. Wäre nun $N \sim M + l$, so könnte nach obigem *Hilfssatze* zwischen den Mengen N und $M + l$ eine solche gegenseitig eindeutige und vollständige Korrespondenz hergestellt werden, daß das Element l von N dem Element l von $M + l$ entspricht; durch diese Zuordnung würde auch eine Zuordnung zwischen N' und M hergestellt sein und es wäre M seinem Bestandteil N' äquivalent, gegen unsere Voraussetzung. 2) Es gehört l nicht mit zu N; dann ist N nicht nur Bestandteil von $M + l$, sondern auch von M. Wäre in diesem Falle $N \sim M + l$, so nehme man *irgendeine* gegenseitig eindeutige und vollständige Zuordnung der beiden Mengen $M + l$ und N und es möge bei derselben dem Elemente l von $M + l$ das Element n von N entsprechen. Ist $N = N' + n$, so wäre durch diese Zuordnung auch eine gegenseitig eindeutige und vollständige Korrespondenz zwischen N' und M hergestellt, was, da auch hier N' Bestandteil von M ist, gegen die gemachte Voraussetzung streitet, wonach M keinem ihrer Bestandteile äquivalent ist.

Der in Rede stehende Satz ist unmittelbar einleuchtend für den Fall einer aus *zwei* Elementen bestehenden Menge. Vermöge des soeben Bewiesenen wird die Richtigkeit desselben auf *jede endliche* Menge übertragen.

Als *durchaus wesentliches* Merkmal *endlicher* Mengen muß es angesehen werden, daß eine solche *keinem ihrer Bestandteile* äquivalent ist. Denn eine aktual unendliche Menge ist *immer* so beschaffen, daß auf mehrfache Weise ein Bestandteil von ihr bezeichnet werden kann, der ihr äquivalent ist.

meisten von ihnen bestimmt hat, allen Versuchen, die Lehre vom Unendlichen einen weiteren Schritt vorwärts zu bringen, standhaft und hartnäckig, mit aller Zähigkeit eines uralten und, wenn auch falschen, doch darum nicht weniger fest eingewurzelten Prinzips entgegenzutreten. *Man täuschte sich mit der Annahme, es sei ein Widerspruch, wenn einer unendlichen Menge M dieselbe Zahl zukommt wie einem Bestandteil M′ von M.* Daß diese Annahme auf einem Trugschluß beruht, kann wie folgt bewiesen werden. Ist etwa $M = M' + M''$, so ist die Behauptung, der Menge M komme dieselbe Kardinalzahl zu wie der Menge M', nach Nr. 1 *gleichbedeutend* mit dem Satze: die Mengen M und M' stehen unter einem und demselben Allgemeinbegriff, der durch Abstraktion von der Beschaffenheit und der Anordnung ihrer Elemente gewonnen wird; mit anderen Worten, es wird mit jener Behauptung gesagt, daß $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{M'}}$ ist. Seit wann wäre aber ein Widerspruch darin zu sehen, daß der Bestandteil eines Ganzen, nach irgendeiner Hinsicht, unter einem und demselben „universale" steht wie das Ganze? Man erwidert vielleicht hierauf, es sei wohl im allgemeinen zuzugeben, daß ein Ganzes und sein Bestandteil unter einem und demselben „universale" stehen können, allein hier handle es sich um eine besondere Art von Allgemeinbegriffen, um *Zahlen*, und bei *Zahlen* treffe dies nicht zu. Dann könnte meinerseits verlangt werden, daß für letztere Behauptung, wonach bei den Zahlen in der bezeichneten Richtung ein Ausnahmefall stattfände, der Beweis gebracht werde. Es mag ja sein, daß man ihn hier und da versuchen wird. *Gelingen* wird er aber *nur dann*, wenn stillschweigend die Voraussetzung hinzugenommen wird, daß es sich um *endliche* Mengen handle; und diese Voraussetzung ist es ja gerade, welche hier vermieden werden muß. Um aber nach meinen Kräften *unnützen* Bemühungen, die sich nur im Kreise bewegen würden, vorzubeugen, will ich die Sache noch stärker beleuchten und bemerke: die Behauptung, der Menge M komme dieselbe Kardinalzahl zu, wie ihrem Bestandteil M', *ist nicht gleichbedeutend* mit der Aussage, *daß den konkreten Mengen M und M′ eine und dieselbe Realität zukomme*; denn wenn auch an den zugehörigen Allgemeinbegriffen $\overline{\overline{M}}$ und $\overline{\overline{M'}}$ die Bedingung des Gleichseins erfüllt ist, *so ist damit schlechterdings nicht der vorausgesetzten Tatsache widersprochen, daß die Menge M sowohl die Realität von M′, wie auch diejenige von M″ umfaßt.* Sind nicht *eine Menge* und *die zu ihr gehörige Kardinalzahl* ganz verschiedene Dinge? Steht uns nicht *erstere* als Objekt *gegenüber*, wogegen letztere ein abstraktes Bild davon *in unserm* Geiste ist? Der alte, so oft wiederholte Satz: „Totum est majus sua parte" darf ohne Beweis nur in bezug auf die, dem Ganzen und dem Teile zugrunde liegenden *Entitäten* zugestanden werden; *dann* und *nur dann* ist er eine unmittelbare Folge aus den Begriffen „totum" und „pars". Leider ist jedoch dieses „Axiom"

und „pars". Leider ist jedoch dieses „Axiom" unzählig oft[1], ohne jede Begründung und unter Vernachlässigung der notwendigen Distinktion zwischen „Realität" und „Größe" resp. „Zahl" einer Menge, gerade in derjenigen Bedeutung gebraucht worden, in welcher es im *allgemeinen falsch* wird, sobald es sich um *aktual-unendliche* Mengen handelt und in welcher es für *endliche* Mengen nur aus dem Grunde richtig ist, weil man hier imstande ist, es als richtig zu beweisen. Ein Beispiel möge alles erläutern.

Sei M die Gesamtheit (ν) aller endlichen Zahlen ν, M' die Gesamtheit (2ν) aller geraden Zahlen 2ν. Hier ist unbedingt richtig, daß M seiner Entität nach *reicher* ist, als M'; enthält doch M außer den geraden Zahlen, aus welchen M' besteht, noch außerdem alle ungeraden Zahlen M''. Andererseits ist ebenso unbedingt richtig, daß den beiden Mengen M und M' nach Nr. 2 und 3 *dieselbe* Kardinalzahl zukommt. Beides ist sicher und keines steht dem andern im Wege, wenn man nur auf die Distinktion von *Realität* und *Zahl* achtet. Man muß also sagen: *die Menge M hat mehr Realität wie M′, weil sie M′ und außerdem M″ als Bestandteile enthält; die den beiden Mengen M und M′ zukommenden Kardinalzahlen sind aber gleich.* Wann endlich werden alle Denker diese so einfachen und einleuchtenden Wahrheiten (gewiß nicht zu ihrem Nachteile) anerkennen?

8. Nach den Auseinandersetzungen und Erklärungen der vorigen Nummer wird man an Sätzen, wie etwa die folgenden:

$$\mathfrak{a} + \nu = \mathfrak{a}; \qquad \mathfrak{a} \cdot \bar{\nu} = \mathfrak{a}; \qquad \mathfrak{a}^{\bar{\nu}} = \mathfrak{a}$$

(wo $\bar{\nu}$ die Bedeutung irgendeiner *endlichen*, $\mathfrak{a}$ die Bedeutung irgendeiner

[1] Ich führe im folgenden eine im Verhältnis zum vorhandenen Material verschwindende Zahl von Autoren an, welche das hier charakterisierte Versehen begangen zu haben scheinen und infolgedessen als Gegner der aktual unendlichen Zahlen zu bezeichnen sind.

Fullerton: The conception of the infinite, chap. 2. Philadelphia 1887.

Renouvier: Esq. d'une classif. syst. d. doctr. philos. 1, 100. Paris 1885.

Moigno: Imposs. d. nombre act. inf. Paris 1884. Hier werden Galilei, Gerdil, Toricelli, Guldin, Cavalieri, Newton, Leibniz als solche angeführt, welche sogenannte Beweise gegen die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen geführt hätten.

Cauchy: Sept. leçons d. phys. gén. 23. Paris 1868.

Salv. Tongiorgi, S. J. Inst. phil. Paris, ed. 10a, t. 2, Ont. § 350ff.

Sanseverino: Él. d. l. phil. chrétienne 2e, Ontol. § 252. Avignon 1876.

Pesch, Tilm. S. J.: Inst. phil. nat. § 412. Freiburg 1880.

Zigliara, Card. Th. Maria: O. P. Summa phil. Ed. 5a, Vol. 1, Ont. Lib. 2, cap. 3, art. 5, II, III.

Gerdil, Card.: Op. ed. et ined. 4, 261; 5, 1. Rom 1806.

Leibniz: Ed. Erdmann S. 138, 244, 236.

Goudin: O. P. Phil. juxta D. Thomae dogm. 2, 189. Paris 1851.

Pererius, Bened. S. J.: De comm. omn. rer. nat. princ. et affect. lib. 10, cap. 9. Lugduni (1585).

transfiniten Kardinalzahl hat), ich sage, man wird an solchen Sätzen keinen Anstoß mehr nehmen können, falls man gegen sie nichts anderes vorzubringen findet, als daß sie mit den hergebrachten Sätzen für *nur endliche* Zahlen nicht übereinstimmen. Denn, wie schon gesagt, es handelt sich bei unsern *transfiniten* Zahlen um ein *neues Zahlengeschlecht*, dessen Beschaffenheit man zu erforschen, nicht aber nach dem Rezept von Vorurteilen eigenmächtig zu präparieren hat. Jene Sätze sowie alle anderen, die ich in diesem kurzen Abriß nicht anführen kann, haben ihren *festen Bestand durch die logische Kraft von Beweisen, die, von den vorher gegebenen, nicht willkürlichen oder gekünstelten, sondern aus dem Quell naturgemäßer Abstraktion entsprungenen Definitionen ausgehend, mit Hilfe von Syllogismen zum Ziele gelangen.* Es empfiehlt sich dabei namentlich, diejenigen Methoden weiter auszubilden, welche in Crelle J. Bd. 84, S. 253, Acta math. Bd. 4, S. 381, Bd. 7, S. 105, Math. Ann. Bd. 23, S. 453 [hier III 2, III 6, III 7, III 4] eingeführt worden sind[1].

(Fortsetzung des Textes auf S. 420.)

---

[1] In den Nummern 1 bis 8 dieses Aufsatzes sind die Fundamente der allgemeinen finiten sowohl wie transfiniten Kardinalzahlenlehre in möglichster Kürze gelegt. Zur Vervollständigung will ich noch einiges in bezug auf die *endlichen* Kardinalzahlen hinzufügen. Unter einer *endlichen* Kardinalzahl verstehe ich eine solche, welche einer *endlichen* Menge in der Weise entspricht, wie dies in den Nummern 1 bis 3 erklärt worden ist. Was hierbei unter einer *endlichen Menge* verstanden werden muß, findet sich in der Note zu Nr. 7, S. 61. Hiernach hebe ich zunächst hervor, daß jede endliche (ebenso wie jede transfinite) Kardinalzahl für sich eine *durchaus unabhängige* ideale Existenz und Stellung hat mit Bezug auf alle die anderen Kardinalzahlen. Zur Bildung des Allgemeinbegriffs „fünf" bedarf es *nur einer* Menge (z. B. der vollzähligen Finger meiner rechten Hand), welcher diese Kardinalzahl zukommt; der Abstraktionsakt mit Bezug auf die Beschaffenheit und Ordnung, in welcher diese wohlunterschiedenen Dinge mir entgegentreten, bewirkt oder vielmehr weckt in meinem Geiste den Begriff „fünf". Es ist also die „fünf" an und für sich unabhängig von der „vier" oder „drei" und von irgendwelcher anderen Zahl. Jede Zahl ist ihrem Wesen nach ein *einfacher* Begriff, in welchem eine Mannigfaltigkeit von Einsen organisch-einheitlich in *spezieller Weise* zusammengefaßt ist, so daß darin die verschiedenen Einsen sowie auch die aus ihrer teilweisen Zusammenfassung hervorgehenden Zahlen *virtuelle* Bestandteile sind. Der Umstand, daß nach der in Nr. 5 gegebenen Summendefinition die Gleichung

$$\bar{5} = \bar{2} + \bar{3}$$

besteht, *darf uns nicht zu der Annahme verleiten*, als seien in dem Begriff $\bar{5}$ die Begriffe $\bar{2}$ und $\bar{3}$ als *Teile real* enthalten; wäre dies der Fall, so würde nimmermehr $\bar{5}$ auch $= \bar{1} + \bar{4}$ sein können. Wohl aber lassen sich $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ und $\bar{4}$ als *virtuelle Bestandteile* von $\bar{5}$ bezeichnen, wenn hierunter nichts anderes verstanden wird, als daß in jeder *konkreten* Menge M von der Kardinalzahl $\bar{5}$ sich Teilmengen M' vorfinden, denen die Kardinalzahlen $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ oder $\bar{4}$ entsprechen. Jene Gleichung hat also die Bedeutung einer bestimmten *idealen Beziehung* der drei für sich bestehenden Kardinalzahlen $\bar{2}$, $\bar{3}$ und $\bar{5}$, und dieser idealen Beziehung entspricht als Korrelat die *Tatsache*, daß *jede konkrete*

Menge von der Kardinalzahl $\bar{5}$ aus zwei Teilmengen *real* zusammengesetzt werden kann, welchen die Kardinalzahlen $\bar{2}$ und $\bar{3}$ entsprechen.

Analog sind alle zwischen Kardinalzahlen bestehenden, auf Grund der Definitionen in Nr. 1 bis 6 aufgebauten Gleichungen und Ungleichheiten zu deuten; sie stellen feste ideale Beziehungen und Gesetze unter Zahlbegriffen dar, die ihr Korrelat und in gewissem Sinne, nämlich für unsere menschliche Erkenntnisweise, ihr Fundament in bestimmten Beziehungen konkreter Mengen haben.

Unter den gesetzmäßigen Beziehungen, welche in mannigfaltigst umschlungener Verkettung das Reich der endlichen Kardinalzahlen zu einem idealen, organischen Ganzen verbinden, verdient diejenige zunächst hervorgehoben werden, durch welche wir nach der in Nr. 4 gegebenen Definition (man berücksichtige hierbei auch die Note S. 414 zu Nr. 7), von *je zwei verschiedenen* Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die eine als die kleinere, die andere als die größere zu bezeichnen haben. Hat man noch eine dritte $\mathfrak{c}$, so beweist man leicht, daß, wenn $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, alsdann auch immer $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ ist.

Die *Gesamtheit aller endlichen Kardinalzahlen* bildet also, wenn in ihr die kleineren Zahlen einen niedrigeren Rang erhalten als die größeren, *in dieser Rangordnung* das, was ich eine *einfach geordnete Menge* nenne. Doch noch mehr; sie stellt sich uns *in dieser Rangordnung* als eine *wohlgeordnete Menge* (vgl. Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre S. 4) [S. 168] vor. Denn wir haben hier ein *dem Rang nach niedrigstes Element*, die kleinste Kardinalzahl $\bar{1}$ und eine auf jede endliche Kardinalzahl $\bar{\nu}$ *dem Range*, d. h. hier der Größe nach nächstfolgende endliche Kardinalzahl $\bar{\nu} + \bar{1}$. So erhalten wir die *Gesamtheit aller endlichen Kardinalzahlen* in der sogenannten *natürlichen endlosen Folge*: $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \bar{\nu}, \ldots$, in welcher Folge sie eine *wohlgeordnete Menge vom Ordnungstypus* ω darstellt.

Die Endlosigkeit dieser Folge gibt den Beweis, daß die *Gesamtheit aller endlichen Zahlen*, als *ein Ding für sich* betrachtet, eine *aktual unendliche Menge*, ein *Transfinitum* ist. *Denn für die Behauptung, daß eine Menge aktual unendlich sei, ist die Bestimmtheit aller ihrer Elemente sowie das Größersein der Anzahl derselben im Vergleich mit jeder endlichen Zahl das allein Wesentliche; nicht aber ist erforderlich, daß die Menge in irgendeiner Form durch ein letztes, zu ihr gehöriges Glied begrenzt sei. Abgegrenzt ist eine Menge vollkommen schon dadurch, daß alles zu ihr Gehörige in sich bestimmt und von allem nicht zu ihr Gehörigen wohl unterschieden ist.* Dies stimmt vollkommen mit demjenigen überein, was S. Augustin in dem pag. 32 abgedruckten Kapitel seiner Hauptschrift De Civitate Dei, lib. XII, cap. 19, sagt: „Ita vero suis quisque numerus proprietatibus terminatur, ut nullus eorum par esse cuicumque alteri possit. Ergo et dispares inter se atque diversi sunt, et *singuli quique finiti sunt, et omnes infiniti sunt.*"

Bietet sich solcherweise die Anordnung: $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \bar{\nu}, \ldots$ der endlichen Kardinalzahlen *wie von selbst* dar und ist dies der Grund, warum sie allgemein die Benennung der „natürlichen Folge der ganzen Zahlen" erhalten hat, so darf darum nicht übersehen werden, daß diese gesetzmäßige Repräsentation der Menge $(\bar{\nu})$, bei der vorhin hervorgehobenen *idealen Unabhängigkeit jeder Zahl von allen anderen und wegen der Mannigfaltigkeit von Beziehungen der Zahlen untereinander, nur eine von unzählig vielen möglichen gesetzmäßigen Zusammenfassungen und Anordnungen aller endlichen Kardinalzahlen* ist, so daß es in gewissem Sinne wohl als willkürlich bezeichnet werden muß, wenn gerade diese, *auf die Größenbeziehung basierende* Rangordnung der endlichen Kardinalzahlen die „natürliche Folge" derselben genannt worden ist. Später werden wir sehen, daß auch die Gesamtheit *aller Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten* (der endlichen und der überendlichen), wenn man sie sich nach ihrer Größe geordnet denkt, eine *wohlgeordnete* Menge bildet.

Um die *Kardinalzahlenlehre*, für welche in den acht ersten Nummern dieses Abschnitts VIII die obersten Begriffsbestimmungen gegeben worden sind, in das Gebiet des *Transfiniten* sicher hinüberzuführen und dort zu strenger Ausbildung zu bringen, ist man, wie ich im Abschnitt I angedeutet habe, auf die Heranziehung der transfiniten *Ordnungszahlen* angewiesen, welche selbst nur spezielle Formen der *Ordnungstypen* oder *Idealzahlen* (*ἀριθμοὶ νοηθοί* oder *εἰδητικοί*) sind. Die transfiniten *Ordnungszahlen* sind nämlich nichts anderes, als Typen derjenigen unendlichen einfach geordneten Mengen, welche von mir *wohlgeordnete Mengen* genannt worden sind. (Vgl. Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitsl. § 2) [S. 168]. In den folgenden Nummern dieses Abschnittes VIII. entwickele ich daher zunächst die Prinzipien der allgemeinen Theorie der Ordnungstypen, und es sollen alsdann in einem spätern Aufsatze die Grundzüge der speziellen Theorie der Ordnungszahlen, nebst ihrer Anwendung auf die Kardinalzahlenlehre folgen.

9. Stellen wir uns, wie in Nr. 1 dieses Abschnitts, eine bestimmte Menge M vor, die aus gegebenen, wohlunterschiedenen Elementen $E, E', E'', \ldots$ besteht, welche konkrete Dinge oder abstrakte Begriffe (letztere aber, ebenso wie jene, im Sinne von uns gegenüberstehenden Objekten gedacht) sein können; sie mögen nach n voneinander unabhängigen Beziehungen[1], welche ich *Richtungen* (dieses Wort nicht bloß im geometrischen, sondern in allgemeinerem Sinne verstanden) nennen will, *geordnet* sein. Diese n Richtungen mögen als 1^{te}., 2^{te}., $\ldots$, ν^{te}., $\ldots$, n^{te}. Richtung unterschieden werden. Eine solche Menge M nennen wir eine *n-fach geordnete Menge*.

Zum genauen Verständnis dieses Begriffs heben wir die folgenden Eigenschaften und Bestimmungen desselben hervor.

Sind E und E' *irgend zwei* Elemente von M, so besteht unter ihnen *nach jeder der n Richtungen* ein bestimmtes Verhältnis des *niederen, gleichen* oder *höheren Ranges* (des *πρότερον καὶ ὕστερον κατὰ τάξιν*). Bedienen wir uns der gebräuchlichen Bezeichnungen $<$, $=$, $>$ für das Kleiner-, Gleich- und Größersein zur Andeutung dieser drei *Rangverhältnisse*, so wird also, wenn ν eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ bedeutet, nach der ν^{ten} Richtung E entweder $<$, oder $=$, oder $>$ als E' sein. Für *verschiedene* Richtungen kann das Rangverhältnis von E zu E' übereinstimmen oder differieren.

Sind E, E' und E'' *irgendwelche* drei Elemente von M und bestehen nach der ν^{ten} Richtung die Beziehungen

$$E \leqq E' \quad \text{und} \quad E' \leqq E'',$$

so ist *nach derselben* ν^{ten} Richtung auch immer

$$E \leqq E'',$$

[1] Hier hat n die Bedeutung einer endlichen Kardinalzahl mit Einschluß von $n = 1$.

wobei hier das Zeichen $=$ *dann und nur dann* gültig ist, wenn es in den *beiden* vorangehenden Relationen Geltung hat.

Dies sind die Voraussetzungen, unter denen ich eine gegebene Menge M eine *n-fach geordnete Menge mit Bezug auf jene n Ordnungsrichtungen, letztere in einer bestimmten Reihenfolge als* 1^{te}, 2^{te}, $\ldots$, n^{te} *Richtung gedacht*, nenne.

Zur Erläuterung führe ich einige Beispiele von mehrfach geordneten Mengen an, bei denen die Rangordnung der Elemente nach mehreren Richtungen durch *Natur* oder *Kunst* gegeben ist.

Erstes Beispiel. Im *Raume* seien m bestimmte Punkte irgendwie gelegen. Bezieht man sie in der üblichen Weise auf ein dreiachsiges, orthogonales Koordinatensystem, setzt die x-Achse als erste, die y-Achse als zweite und die z-Achse als dritte Ordnungsrichtung fest und läßt demgemäß das Rangverhältnis von je zwei Punkten E und E' nach der 1^{ten}, 2^{ten} und 3^{ten} Richtung durch die Größenbeziehung resp. ihrer Koordinaten x und x', y und y', z und z' bestimmt sein, so ist hiermit unser aus m Punkten bestehendes Punktsystem als eine *dreifach geordnete Menge* aufgefaßt. Auf die Entfernungen und sonstigen geometrischen Beziehungen der m Punkte kommt es bei dieser Auffassung gar nicht an; nur die gegenseitige Rangordnung der m Punkte nach den drei Ordnungsrichtungen ist hier wesentlich.

Zweites Beispiel. Ebenso lassen sich m Punkte in einer *Ebene*, unter Zugrundelegung eines zweiachsigen orthogonalen Koordinatensystems als eine *zweifach geordnete Menge* auffassen, wobei wiederum die Entfernungen und sonstigen geometrischen Beziehungen der m Punkte nicht in Betracht kommen.

Drittes Beispiel. Man nehme ein *Tonstück*, sei es eine einfache Melodie oder ein kompliziertes musikalisches Kunstwerk, etwa eine Symphonie oder ein Oratorium. Dasselbe setzt sich aus einer bestimmten Zahl m verschiedener Töne zusammen, die nach vier voneinander unabhängigen Richtungen geordnet sind.

Als *erste* Richtung nehme man die *Folge* der Töne in der *Zeit*; in dieser Beziehung erhalten die beiden Töne E und E' gleichen Rang, wenn sie gleichzeitig erfolgen oder, wie man sich ausdrückt, einem Akkord angehören, andernfalls E einen niederen oder höheren Rang als E' hat, je nachdem E früher oder später als E' eintritt.

Die *zweite* Richtung werde von der *Dauer*, welche jeder Ton für sich in der Zeit hat, bestimmt, so daß in dieser Beziehung zwei Töne E und E' gleichen Rang erhalten, wenn sie gleiche Dauer haben, wogegen der Rang von E hier niedriger oder höher ist als der von E', je nachdem die Dauer von E kleiner oder größer ist als die von E'.

Die *dritte* Richtung sei durch die *Höhe* der Töne gegeben, so daß hier E und E' gleichen Rang haben, wenn sie von gleicher Höhe sind, hingegen E niederen oder höheren Rang als E' erhält, je nachdem E tiefer oder höher ist als E'.

Endlich werde die *vierte* Ordnungsrichtung in analogem Sinne durch die *Intensität* der Töne bestimmt. So aufgefaßt stellt demnach jedes Tonstück eine *vierfach geordnete Menge* vor.

Viertes Beispiel. Betrachten wir ein Gemälde und fassen darin m bestimmte Punkte ins Auge, etwa so viele und solche, daß sie in der Entfernung, von welcher aus das Bild gesehen wird, den Eindruck des kontinuierlichen Ganzen hervorbringen. Beziehen wir das Bild auf eine horizontale und vertikale Richtung als auf ein zweiachsiges Koordinatensystem, so läßt es sich nach folgenden Gesichtspunkten als eine *vierfach geordnete Menge* auffassen.

Die x-Koordinaten mögen zur Bestimmung der *ersten*, die y-Koordinaten zur Bestimmung der *zweiten* Ordnungsrichtung dienen. Die *dritte* Richtung werde durch die *Farbe* der Punkte gegeben, so daß zwei Punkte E und E' in dieser Richtung gleichen Rang haben, wenn sie von gleicher Farbe sind, dagegen E niedrigeren oder höheren Rang als E' einnimmt, je nachdem der Farbe von E eine kleinere oder größere *Wellenlänge* entspricht als derjenigen von E'. Endlich bestimme die *Farbenintensität* der m Punkte die *vierte* Ordnungsrichtung.

In diesen vier Beispielen haben wir *endliche*, d. h. aus einer endlichen Zahl von Elementen zusammengesetzte mehrfach geordnete Mengen in Betracht gezogen. Unser Begriff bezieht sich aber auch auf Mengen mit einer *unendlichen Zahl* von Elementen; es handelt sich dann jedoch immer um nur *Aktualunendliches*, da nur solche Mengen ein Interesse für uns haben, die in sich bestimmt sind und von welchen daher sämtliche Elemente als fertig zusammen bestehend gedacht werden müssen. Das potentiale Unendliche kommt hier nicht zur Geltung, weil es seinem Begriffe nach nur auf unbestimmte, resp. veränderliche Dinge bezogen werden kann.

So können wir beispielsweise *alle* diejenigen Punkte des Raumes ins Auge fassen, bei denen, unter Zugrundelegung eines dreiachsigen, orthogonalen Koordinatensystems, alle drei Koordinaten rationales Verhältnis zur Längeneinheit haben; sie bilden, wenn, wie im ersten Beispiel, die Größe ihrer Koordinaten zur Bestimmung ihrer Rangordnung verwendet wird, eine bestimmte *dreifach geordnete aktual-unendliche Punktmenge*.

Nach diesen Erläuterungen gehe ich ohne weiteres zur Erklärung dessen über, was ich den *Ordnungstypus* oder die *Idealzahl* einer geordneten Menge nenne.

Sei M irgendeine bestimmte, aus einer endlichen oder aktual unendlichen Zahl von Elementen $E, E', E'', \ldots$ bestehende n-fach geordnete Menge. Abstrahieren wir an ihr von der Beschaffenheit der Elemente, unter Beibehaltung ihrer Rangordnung nach den n verschiedenen Richtungen, so wird in uns ein intellektuales Bild, ein Allgemeinbegriff (universale) erzeugt, welchen ich den der Menge M zukommenden n-fachen Ordnungstypus oder auch die der Menge M entsprechende Idealzahl nenne und mit $\overline{M}$ bezeichne.

Es entspricht also jedem Punktsystem im Raume (im Sinne des 1. Beispiels) ein dreifacher, jedem Punktsystem in der Ebene (im Sinne des 2. Beispiels) ein zweifacher, jeder Punktmenge in der geraden Linie ein einfacher *bestimmter* Ordnungstypus, während einem Tonstück (unserm 3. Beispiel gemäß) und einem Gemälde (in der Auffassung unseres 4. Beispiels) bestimmte vierfache Ordnungstypen zukommen. Ist es daher nicht undenkbar, daß einem Tonstück und einem Gemälde zufällig ein und derselbe Ordnungstypus zugrunde liege, so sieht man hieraus, wie unter Umständen die heterogensten Dinge durch das *gemeinsame Band der Idealzahlen* verbunden sein können.

10. Fassen wir den aus einer geordneten Menge M vermöge des beschriebenen Abstraktionsakts gewonnenen Ordnungstypus $\overline{M}$ genauer ins Auge.

Den einzelnen Elementen $E, E', E'', \ldots$ der Menge M entsprechen in ihrem Ordnungstypus $\overline{M}$ lauter *Einsen* $e = 1, e' = 1, e'' = 1, \ldots$, die als solche zwar alle gleich sind, sich aber durch ihre Stellung innerhalb des Ordnungstypus $\overline{M}$ voneinander unterscheiden; es herrscht unter ihnen dieselbe Rangordnung wie unter den Elementen der Menge M.

Wir haben uns daher unter einem n-fachen Ordnungstypus das *ideale Paradigma* einer n-fach geordneten Menge, gewissermaßen eine *n-dimensionale ganze reale Zahl*, d. h. eine begriffliche, organisch-einheitliche Zusammenfassung von *Einsen* $e = 1, e' = 1, e'' = 1, \ldots$ zu denken, die nach n verschiedenen und voneinander unabhängigen Beziehungen, welche auch hier Richtungen genannt werden sollen, geordnet sind. Nimmt man *irgend welche* zwei von diesen Einsen e und e', so hat nach der ν^{ten} Richtung (für $\nu = 1, 2, \ldots, n$) e entweder gleichen Rang mit e', oder es ist der Rang von e niedriger, oder er ist höher wie derjenige von e'. Das Rangverhältnis derselben zwei Einsen e und e' kann nach der ν^{ten} und nach einer andern μ^{ten} Richtung übereinstimmen oder differieren. Sind e, e', e'' *irgendwelche* drei jener Einsen und hat man nach der ν^{ten} Richtung:

$$e \leqq e' \quad \text{und} \quad e' \leqq e'',$$

so ist nach derselben ν^{ten} Richtung:

$$e \leqq e'',$$

wo das Zeichen $=$ dann und nur dann gilt, wenn in *beiden* vorangehenden Relationen das Zeichen $=$ Geltung hat[1].

Ich nenne den Ordnungstypus einen *reinen Ordnungstypus*, wenn *je zwei* seiner Einsen e und e' *zum wenigsten nach einer der n Richtungen verschiedenen Rang* haben.

[1] Ich erinnere daran, daß hier (vgl. Nr. 9) die Zeichen $<$, $=$ und $>$ zur Angabe von *Rangverhältnissen* verwandt werden.

Andernfalls nenne ich ihn einen *gemischten Ordnungstypus*; bei diesem vereinigen sich die Einsen zu bestimmten Gruppen, so daß die einer und derselben Gruppe angehörigen Einsen *nach allen n Richtungen* gleichen Rang haben und daher zu einer *bestimmten Kardinalzahl* zusammenfließen, während die, verschiedenen Gruppen angehörigen Einsen zum wenigsten nach einer der n Richtungen verschiedenen Rang haben.

Jeder gemischte Ordnungstypus geht folglich aus einem bestimmten reinen Ordnungstypus dadurch hervor, daß in letzteren an Stelle der Einsen gewisse Kardinalzahlen substituiert werden.

Es erhebt sich nun die Frage, *wann* zwei verschiedene n-fach geordnete Mengen M und N *einen und denselben Ordnungstypus* haben und *wann nicht*? Zur Beantwortung derselben bedienen wir uns des Beziehungsbegriffs der *Ähnlichkeit geordneter Mengen.*

Zwei n-fach geordnete Mengen M und N werden „ähnlich" genannt, wenn es möglich ist, sie gegenseitig eindeutig und vollständig, Element für Element, einander so zuzuordnen, daß, wenn E und E' irgend zwei Elemente von M, F und F' die beiden entsprechenden Elemente von N sind, alsdann für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ das Rangverhältnis von E zu E' nach der ν^{ten} Richtung innerhalb der Menge M genau dasselbe ist wie das Rangverhältnis von F zu F' nach der ν^{ten} Richtung innerhalb der Menge N. Wir wollen eine derartige Zuordnung von zwei einander ähnlichen Mengen eine Abbildung der einen auf die andere nennen.

Die Ähnlichkeit zweier Mengen M und N werde durch folgende Formel ausgedrückt:

$$M \simeq N$$

Wir können nun die aufgeworfene Frage durch folgenden Satz beantworten:

Zwei n-fach geordnete Mengen M und N haben dann und nur dann einen und denselben Ordnungstypus, wenn sie ähnlich sind; in Zeichen: wenn $M \simeq N$, so ist $\overline{M} = \overline{N}$ und umgekehrt: wenn $\overline{M} = \overline{N}$, so ist $M \simeq N$.

Beide Teile dieses Doppelsatzes ergeben sich leicht durch Zurückgehen auf die Begriffe des Ordnungstypus und der Ähnlichkeit geordneter Mengen in analoger Weise, wie wir in Nr. 3 dieses Abschnitts VIII den Satz bewiesen haben, daß zwei Mengen dann und nur dann gleiche Kardinalzahl haben, wenn sie äquivalent sind.

Der Ordnungstypus einer gegebenen n-fach geordneten Menge M ist also derjenige Allgemeinbegriff, unter welchem die Menge M und alle ihr ähnlichen Mengen stehen, der aber sonst keine anderen Dinge unter sich begreift, so daß sein Umfang durch M und die M ähnlichen Mengen genau bestimmt ist.

Die Ähnlichkeit zweier Mengen M und N begründet, wie man unmittelbar sieht (Vgl. Nr. 2) auch ihre Äquivalenz, während umgekehrt äquivalente Mengen nicht ähnlich zu sein brauchen.

Wir können daher sagen:

Haben zwei geordnete Mengen M und N einen und denselben Ordnungstypus, so kommt ihnen auch immer eine und dieselbe Kardinalzahl zu; in Zeichen: ist $\overline{M} = \overline{N}$, so hat man auch $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$.

Die Kardinalzahl einer geordneten Menge M ist daher immer auch die Kardinalzahl ihres Ordnungstypus $\overline{M}$ und geht aus letzterem durch die Abstraktion von der eigentümlichen Rangordnung seiner Einsen hervor. Ist α ein Zeichen für den Ordnungstypus $\overline{M}$, so sei $\overline{\alpha}$ ein Zeichen für die Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$. In diesem Sinne haben wir in den Nummern 1—8 dieses Abschnitts die Zeichen $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ für die endlichen *Ordnungszahlen*, dagegen die Zeichen $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \bar{\nu}, \ldots$ für die endlichen *Kardinalzahlen* gebraucht.

Je nachdem die Kardinalzahl einer Menge endlich oder transfinit ist, nennen wir die Menge selbst und ihren Ordnungstypus endlich oder transfinit.

Bei zwei *transfiniten* n-fach geordneten Mengen kann es, wenn sie ähnlich sind, vorkommen, daß es nicht bloß *eine* Abbildung der einen auf die andere, sondern deren *mehrere*, ja sogar unendlich viele Abbildungen derselben zwei ähnlichen Mengen auf einander gibt; in diesen Fällen läßt jede Menge des entsprechenden Ordnungstypus sich in mehrfacher Weise auf sich selbst abbilden, und ebenso können wir von dem betreffenden Ordnungstypus sagen, daß er *sich selbst auf mehrfache Weise ähnlich* ist. Hat man es mit *endlichen* n-fach geordneten Mengen von *reinem* Ordnungstypus zu tun, so existiert für je zwei ähnliche Mengen immer nur *eine einzige Abbildung*. Diese Eigenschaft ist jedoch nicht auf endliche Mengen beschränkt; es gibt auch Klassen von transfiniten geordneten Mengen, die *nur eine* Abbildung von zwei ähnlichen Mengen zulassen und dazu gehören beispielsweise alle diejenigen *einfach geordneten* Mengen, welche ich *wohlgeordnete* Mengen[1] genannt habe.

11. Ein n-facher Typus α setzt sich, wie wir in Nr. 10 sahen, aus gewissen Einsen $e, e', e'', \ldots$ zusammen, die nach n Richtungen ein bestimmtes Rangverhältnis zu einander haben. Faßt man nicht alle, sondern nur einen gewissen Teil von diesen Einsen ins Auge, so bestimmt derselbe für sich in der vorliegenden Rangordnung ebenfalls einen Typus γ, den wir als Teil von α (allerdings nur im virtuellen Sinne verstanden) ansehen können. So enthält also jeder Typus α andere Typen $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ als virtuelle *Teile*, welche gewissermaßen teils auseinanderfallen, teils ineinander eindringen. Die Mannigfaltigkeit von Beziehungen zwischen dem Ganzen und den Teilen ist bei den Typen eine so große, daß es geraten scheint, sich zunächst auf die

[1] Man vgl. Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre S. 4 [S. 168].

Betrachtung der einfachsten Verhältnisse zu beschränken; sie hängen mit den Operationen des *Addierens* und *Multiplizierens* von zwei n-fachen Typen α und β zusammen, und diese will ich jetzt mit der unerläßlichen Ausführlichkeit erklären.

a) *Definitionen von* $\alpha + \beta$. Wir denken uns zwei Mengen M und N, denen die Typen $\overline{M} = \alpha$, $\overline{N} = \beta$ zukommen, und setzen aus ihnen eine neue geordnete Menge, die wir mit $M + N$ bezeichnen, zusammen, und zwar mit folgenden Bestimmungen über die Rangordnung der Elemente. Die Elemente von M mögen innerhalb $M + N$ *untereinander* dieselbe Rangordnung nach allen n Richtungen behalten, welche sie in M hatten; ebenso mögen die Elemente von N innerhalb $M + N$ *untereinander* dieselbe Rangordnung nach allen n Richtungen bewahren, welche ihnen in N zukam; endlich mögen in $M + N$ alle Elemente von N nach jeder der n Richtungen höheren Rang haben als alle Elemente von M.

Alle Mengen $M + N$, welche diesen Anforderungen genügen, sind offenbar untereinander ähnliche n-fach geordnete Mengen und bestimmen denjenigen Typus, den wir als die Summe $\alpha + \beta$ betrachten wollen. Wir haben also folgende Definitionsgleichung:

$$\alpha + \beta = \overline{M + N},$$

und es heißt hier α der *Augendus*, β der *Addendus*.

Darnach beweist man leicht die Gültigkeit des *assoziativen* Gesetzes:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Das kommutative Gesetz hat dagegen hier *keine* allgemeine Herrschaft; abgesehen von Ausnahmen, sind $\alpha + \beta$ und $\beta + \alpha$ *verschiedene* Typen.

Man bemerke noch, daß die Kardinalzahl von $\alpha + \beta$ gleich ist der Summe der Kardinalzahlen von α und β (vgl. Nr. 5); in Zeichen:

$$\overline{\overline{\alpha + \beta}} = \overline{\overline{\alpha}} + \overline{\overline{\beta}}.$$

b) *Definition von* $\alpha \cdot \beta$. Man lege eine Menge N vom Typus β zugrunde, so daß $\overline{N} = \beta$, und bezeichne die Elemente, aus denen N besteht, mit $F_1, F_2, \ldots, F_\lambda, \ldots$

Ferner seien $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda, \ldots$ lauter Mengen vom Typus α, so daß

$$\overline{M}_1 = \overline{M}_2 = \cdots = \overline{M}_\lambda = \cdots = \alpha.$$

Diese einander ähnlichen Mengen denken wir uns auf einander abgebildet; es seien:

$$\begin{array}{l} E_{1,1},\ E_{1,2},\ \ldots,\ E_{1,\mu},\ \ldots \text{ die Elemente von } M_1 \\ E_{2,1},\ E_{2,2},\ \ldots,\ E_{2,\mu},\ \ldots \text{ die Elemente von } M_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_{\lambda,1},\ E_{\lambda,2},\ \ldots,\ E_{\lambda,\mu},\ \ldots \text{ die Elemente von } M_\lambda,\ \ldots \end{array}$$

und zwar mögen

$$E_{1,\mu},\ E_{2,\mu},\ \ldots,\ E_{\lambda,\mu}, \ldots$$

bei den zugrunde gelegten Abbildungen einander entsprechende Elemente von $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda, \ldots$ sein.

Es werde nun eine neue Menge, die ich mit $M \cdot N$ bezeichne, aus N dadurch gebildet, daß darin an Stelle der *Elemente* $F_1, F_2, \ldots, F_\lambda, \ldots$ resp. die *Mengen* $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda, \ldots$ substituiert werden, wobei die Rangordnung folgenden Bestimmungen unterworfen sei. Alle Elemente $E_{\lambda,\mu}$ $E_{\lambda,\mu'}$ *einer und derselben* Menge M_λ mögen innerhalb $M \cdot N$ *untereinander nach allen* n *Richtungen* dasselbe Rangverhältnis behalten, welches sie in M_λ hatten. Für zwei Elemente $E_{\varkappa,\mu}$ und $E_{\lambda,\mu'}$, welche zwei verschiedenen Mengen $M_\varkappa$ und M_λ angehören, muß dagegen eine Unterscheidung gemacht werden: 1) Haben $F_\varkappa$ und F_λ innerhalb N nach der ν^{ten} Richtung verschiedenen Rang, so sei die Rangbeziehung von $E_{\varkappa,\mu}$ zu $E_{\lambda,\mu'}$ innerhalb $M \cdot N$ in der ν^{ten} Richtung dieselbe, wie die von $F_\varkappa$ zu F_λ innerhalb N nach der ν^{ten} Richtung. 2) Haben $F_\varkappa$ und F_λ innerhalb N nach der ν^{ten} Richtung gleichen Rang, so sei das Rangverhältnis von $E_{\varkappa,\mu}$ zu $E_{\lambda,\mu'}$ innerhalb $M \cdot N$ in der ν^{ten} Richtung dasselbe, wie das von $E_{\varkappa,\mu}$ zu $E_{\varkappa,\mu'}$ innerhalb $M_\varkappa$ oder, was wegen der Abbildung von $M_\varkappa$ auf M_λ dasselbe bedeutet, wie das von $E_{\lambda,\mu}$ zu $E_{\lambda,\mu'}$ innerhalb M_λ nach der ν^{ten} Richtung.

Man überzeugt sich leicht, daß alle nach dieser Vorschrift gebildeten n-fach geordneten Mengen $M \cdot N$ untereinander *ähnlich* sind, und es gilt dies im besondern auch, wenn statt der zugrunde gelegten Abbildungen der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda, \ldots$ andere Abbildungen derselben vorausgesetzt werden, falls deren mehrere möglich sind.

Mit der Menge $M \cdot N$ ist also ein bestimmter Typus gegeben und dieser ist es, der das Produkt aus dem *Multiplikandus* α in den *Multiplikator* β genannt werden soll. Wir haben also folgende Definition:

$$\alpha \cdot \beta = \overline{M \cdot N}.$$

Man beweist auch hier das *assoziative* Gesetz:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma,$$

während $\alpha \cdot \beta$ im allgemeinen von $\beta \cdot \alpha$ verschieden ist.

Auch hat man das *distributive* Gesetz:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

mit α als *Multiplikandus*.

Ferner sieht man, im Hinblick auf Nr. 6, daß die Kardinalzahl des Produkts zweier Typen gleich ist dem Produkt aus den Kardinalzahlen der beiden Faktoren; in Zeichen:

$$\overline{\overline{\alpha \cdot \beta}} = \overline{\overline{\alpha}} \cdot \overline{\overline{\beta}}.$$

Ist ein Typus π nicht anders als Produkt zweier Typen α und β darstellbar, als daß der *Multiplikator* β dem Typus π selbst oder der Eins im n-fachen Ordnungssystem gleich ist, so nennen wir π einen *Primtypus.*

12. Mit einem gegebenen n-fachen Typus α hängen gewisse andere Typen eng zusammen, welche ich die mit α *konjugierten Typen* nenne.

Man kann die dem Typus α eigene Rangordnung so verändern, daß sämtliche Rangbeziehungen der Einsen $e, e', e'', \ldots$ mit Bezug auf die μ^{te} und ν^{te} Richtung miteinander vertauscht, nach allen anderen Richtungen aber erhalten bleiben.

Zwei Einsen e und e' haben demnach im transformierten Typus nach der μ^{ten} und ν^{ten} Richtung dieselben Rangbeziehungen, welche ihnen in α resp. nach der ν^{ten} und μ^{ten} Richtung zukommen, während nach den anderen $n-2$ Richtungen keine Änderung in der Rangordnung der Einsen eintritt. Diese Transformation nennen wir die *Vertauschungstransformation mit Bezug auf die μ^{te} und ν^{te} Richtung.*

Solcher Vertauschungstransformationen gibt es $n\frac{(n-1)}{2}$; ihre wiederholte Anwendung liefert, wenn der Typus α mitgezählt wird, im ganzen $n! = 1.2.3\ldots n$ im allgemeinen verschiedene konjugierte Typen.

Es läßt sich aber auch aus α dadurch ein im allgemeinen neuer Typus herstellen, daß alle Rangverhältnisse mit Bezug auf die ν^{te} Richtung *umgekehrt,* mit Bezug auf die anderen Richtungen aber konserviert werden. Zwei Einsen e und e' haben hier im transformierten Typus mit Bezug auf die ν^{te} Richtung das entgegengesetzte Rangverhältnis von demjenigen, welches sie nach derselben ν^{ten} Richtung in α haben; kommt den Einsen e und e' in α gleicher Rang in der ν^{ten} Richtung zu, so bleibt er natürlich bei der Transformation erhalten; nach allen übrigen Richtungen sind die Rangbeziehungen von e und e' in beiden Typen dieselben. Diese Transformation nennen wir *Umkehrtransformation mit Bezug auf die ν^{te} Richtung.* Solcher Umkehrtransformationen gibt es n; ihre sukzessive Anwendung liefert, wenn α mitgezählt wird, im ganzen 2^n verschiedene konjugierte Typen.

Setzt man die Vertauschungstransformationen und die Umkehrtransformationen beliebig zusammen, so erhält man, mit Einschluß von α, im ganzen $2^n \cdot \Pi\, n$ im allgemeinen verschiedene konjugierte Typen. In besonderen Fällen reduzieren sich dieselben auf eine geringere Zahl, unter Umständen sind sie sogar alle gleich.

13. Beschränken wir unsere weiteren Betrachtungen zunächst auf *endliche* n-fache Typen, d. h. auf solche, bei denen die zugehörige Kardinalzahl m *endlich* ist.

Die *reinen* einfachen Typen ($n = 1$) fallen hier mit den *endlichen* Ordnungszahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$ zusammen, weil die *endlichen einfach* geordneten Mengen von *reinem* Typus zugleich immer wohlgeordnete Mengen (vgl. über diesen Begriff; Grundl. e. allg. Mannigfaltigkeit. p. 4.) sind, deren Typen ich allgemein *Ordnungszahlen* nenne. Zu jeder endlichen Kardinalzahl m gibt es nur einen einzigen *reinen* einfachen Typus, d. h. *nur eine* Ordnungszahl; es hängt dies unmittelbar mit dem in Nr. 7 bewiesenen Satz zusammen, wonach eine *endliche Menge* niemals einem ihrer Bestandteile äquivalent ist.

Die Anzahl *aller* einfachen Typen ($n = 1$), d. h. der reinen und der gemischten, von gegebener Kardinalzahl m ist hingegen, wie man sich leicht überzeugt, gleich 2^{m-1}.

Fassen wir jetzt die *zweifachen* Typen ($n = 2$) von endlicher Kardinalzahl m näher ins Auge.

Ein solcher Typus α besteht (vgl. Nr. 10) aus m *Einsen,* die nach zwei voneinander unabhängigen Richtungen eine bestimmte Rangordnung haben.

Es mögen diese m Einsen im ganzen s verschiedene Rangstufen nach der *ersten* Richtung haben und t sei die Anzahl der verschiedenen Rangstufen nach der *zweiten* Richtung.

Die verschiedenen Rangstufen erster Richtung wollen wir als $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \ldots, s^{\text{te}}$ Rangstufe unterscheiden, und zwar so, daß die 1^{te} Rangstufe alle Einsen von α umfaßt, welche den niedrigsten Rang nach der ersten Richtung haben, die zweite alle Einsen enthält, welche den nächst höheren Rang nach der ersten Richtung haben usw.; auch werde mit g_1 die Anzahl der verschiedenen Einsen bezeichnet, welche nach der ersten Richtung den ersten Rang haben, mit g_2 die Anzahl der Einsen zweiten Ranges usw., mit g_s die Anzahl der Einsen s^{ten} Ranges in bezug auf die erste Richtung.

Ganz analog unterscheiden wir $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \ldots, t^{\text{te}}$ Rangstufe zweiter Richtung und bezeichnen mit $h_1, h_2, \ldots, h_t$ die Anzahlen der Einsen, welche resp. den $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, t^{\text{ten}}$ Rang nach der zweiten Richtung haben.

So entsprechen jedem Typus α gewisse *positive* ganze Zahlen $s, t, g_1, g_2, \ldots, g_s, h_1, h_2, \ldots, h_t$. Ihrer Bedeutung nach sind sie alle $\leq m$ und man hat immer

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_s = h_1 + h_2 + \cdots + h_t = m. \tag{1}$$

Zur vollständigen Bestimmung des zweifachen Typus α führen wir ein System von $s \cdot t$ Größen $k_{\mu,\nu}$ ein, wo der Index μ die Werte $1, 2, 3, \ldots, s$, der Index ν die Werte $1, 2, 3, \ldots, t$ erhält, und zwar habe $k_{\mu,\nu}$ die Bedeutung der Anzahl derjenigen Einsen in α, welche den μ^{ten} Rang nach der ersten und den ν^{ten} Rang nach der zweiten Richtung haben; falls solche Einsen in α nicht vorhanden sind, habe $k_{\mu,\nu}$ den Wert Null.

Wir wollen das so bestimmte System:

$$\begin{matrix} k_{1.t}, & k_{2.t}, & \ldots, & k_{s.t} \\ k_{1.t-1}, & k_{2.t-1}, & \ldots, & k_{s.t-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{1.2}, & k_{2.2}, & \ldots, & k_{s.2} \\ k_{1.1}, & k_{2.1}, & \ldots, & k_{s.1} \end{matrix} \tag{2}$$

die *Charakteristik* von α nennen.

Ist α ein *reiner* Typus, so haben die Größen $k_{\mu,\nu}$ nur die Werte 0 und 1; bei *gemischten* Typen α kommt unter den Größen $k_{\mu,\nu}$ wenigstens eine vor, die größer ist als 1.

Es bestehen hier folgende Gleichungen, die sich unmittelbar aus der Bedeutung der darin vorkommenden Buchstaben ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\substack{\mu=1,2,\ldots,s \\ \nu=1,2,\ldots,t}} k_{\mu.\nu} &= m \\ \sum_{\nu=1,2,\ldots,t} k_{\mu.\nu} &= g_\mu \\ \sum_{\mu=1,2,\ldots,s} k_{\mu.\nu} &= h_\nu \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

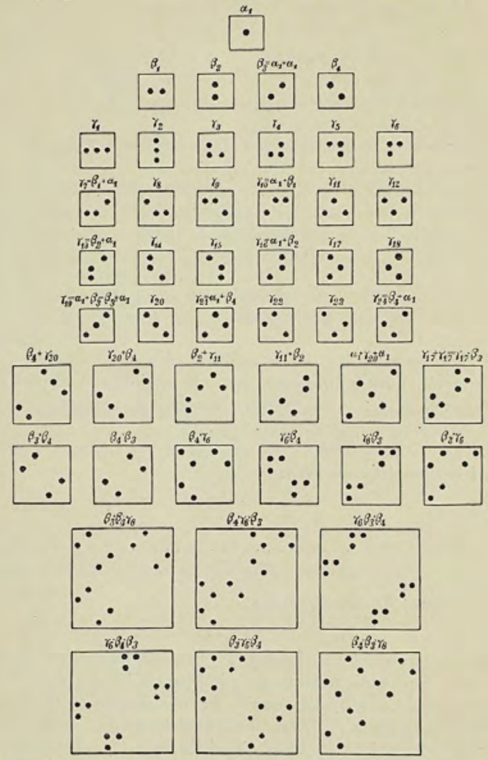
Es stellt daher das System (2) von *nicht negativen* ganzen Zahlen $k_{\mu,\nu}$ *dann und nur dann* die *Charakteristik* eines zweifachen Typus α vor, wenn die daraus nach (3) resultierenden Summen m, g_μ und h_ν *von Null verschiedene* positive ganze Zahlen sind, wie aus dem Sinn von m, g_μ und h_ν sich ergibt.

Unsere Aufgabe sei nun die Bestimmung der *Anzahl aller reinen zweifachen Ordnungstypen von gegebener Kardinalzahl m*; diese Anzahl, als Funktion von m gedacht, werde mit $\Phi(m)$ bezeichnet.

Bevor ich die Lösung entwickele, möchte ich in der nebenstehenden Tafel[1] die verschiedenen zweifachen *reinen* Typen für $m = 1$, 2 und 3 veranschaulichen, deren es für $m = 1$ *einen*: α_1, für $m = 2$ *vier*: β_1, β_2, β_3, β_4, für $m = 3$ *vierundzwanzig*: γ_1 bis γ_{24} gibt. Sie sind durch *Punktmengen* in der Ebene dargestellt, welche wir in dem Sinne als zweifach geordnete Mengen aufzufassen haben, daß die erste Ordnungsrichtung durch die horizontale Richtung von links nach rechts, die zweite Ordnungsrichtung durch die vertikale Richtung von unten nach oben bestimmt sind. Jeder *Punkt* repräsentiert eine *Eins* in dem betreffenden Ordnungstypus. Punkte, welche auf einer und derselben Vertikalen liegen, entsprechen im Typus Einsen, die

[1] Ich verdanke die zweckmäßige Herstellung derselben Herrn Dr. H. Wiener, Privatdozenten der Mathematik an der Universität in Halle.

nach der ersten Richtung gleichen Rang haben; liegen aber zwei Punkte nicht auf einer Vertikalen, so hat von den beiden durch sie dargestellten Einsen diejenige den niedrigeren Rang in der ersten Ordnungsrichtung,



welche dem links vom andern gelegenen Punkte entspricht. Ebenso haben Einsen, denen Punkte auf einer und derselben Horizontalen entsprechen, im Typus gleichen Rang nach der zweiten Ordnungsrichtung, wogegen von zwei Einsen, deren entsprechende Punkte nicht auf einer und derselben

Horizontalen liegen, diejenige den niedrigeren Rang nach der zweiten Ordnungsrichtung hat, für welche der entsprechende Punkt der niedriger in der Ebene gelegene ist.

Zur Erläuterung der Zahlen s, t, g, h bemerke ich, daß in α_1: $s=1$, $t=1$, in β_1: $s=2$, $t=1$, in β_2: $s=1$, $t=2$, in β_3 und β_4: $s=2$, $t=2$, in γ_1: $s=3$, $t=1$, in γ_2: $s=1$, $t=3$, in γ_3 bis γ_6: $s=2$, $t=2$, in γ_7 bis γ_{12}: $s=3$, $t=2$, in γ_{13} bis γ_{18}: $s=2$, $t=3$, in γ_{19} bis γ_{24}: $s=3$, $t=3$ ist. Ferner hat man beispielsweise in γ_6: $g_1=2$, $g_2=1$, $h_1=1$, $h_2=2$, in γ_{19} bis γ_{24}: $g_1=g_2=g_3=h_1=h_2=h_3=1$.

Die vier letzten Reihen in unsrer Tafel mögen die in Nr. 11 erklärten Operationen der *Addition* und *Multiplikation* von Typen veranschaulichen.

Es werde nun mit $\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ die Anzahl der *reinen* zweifachen Typen bezeichnet, in welchen s und t (beide $\leqq m$) sowohl wie auch $g_1, g_2, \ldots, g_s$ gegebene positive Werte haben, bei denen die Bedingungsgleichung (1) erfüllt sei. Dann setzt sich offenbar $\Phi(m)$ nach folgender Formel zusammen:

$$\Phi(m) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\cdots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots,m \\ t=1,2,\ldots,m}} \varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t). \tag{4}$$

Die Summation ist hier so zu verstehen, daß den Buchstaben s und t alle Werte von 1 bis m beizulegen sind und bei jedem Wertepaar s, t die Buchstaben $g_1, g_2, \ldots, g_s$ alle *positiven* Wertsysteme zu durchlaufen haben, die der Bedingungsgleichung (1) genügen.

$\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ ist nach (3) die Anzahl der Lösungssysteme $(k_{\mu,\nu})$, welche folgenden s Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} k_{1.1} + k_{1.2} + \cdots + k_{1.t} = g_1 \\ k_{2.1} + k_{2.2} + \cdots + k_{2.t} = g_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{s.1} + k_{s.2} + \cdots + k_{s.t} = g_s \end{array}\right\} \tag{5}$$

sowie auch den t *Nebenbedingungen*:

$$h_1 > 0, \; h_2 > 0, \; \ldots \; h_t > 0 \tag{6}$$

genügen, wobei die $s \cdot t$ Unbekannten $k_{\mu,\nu}$ *nur die Werte* 0 und 1 erhalten dürfen und wo die h_ν die Bedeutung der in (3) geschriebenen Summen haben.

Sei $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ die Anzahl der Lösungssysteme $(k_{\mu,\nu})$ für dasselbe Gleichungssystem (5), *wenn die Nebenbedingungen* (6) *fallen gelassen werden*; diese Anzahl ist, weil hier die Gleichungen (5) unabhängig voneinander aufzulösen sind, gleich dem *Produkt* aus den Anzahlen der Lösungen, welche die einzelnen Gleichungen (5), jede für sich, haben.

Die Anzahl der Lösungssysteme einer Gleichung von der Form:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_t = g$$

in ganzen Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_t$, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen dürfen, ist gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{t}{g} = \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-g+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ g}. \tag{7}$$

Man hat folglich:

$$\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) = \binom{t}{g_1} \cdot \binom{t}{g_2} \cdots \binom{t}{g_s}. \tag{8}$$

Zwischen den Funktionen φ und φ' besteht aber folgende Beziehung:

$$\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) = \sum_{\nu=0,1,2,\ldots,t-1.} \binom{t}{\nu} \cdot \varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t-\nu). \tag{9}$$

Das allgemeine Glied dieser Summe ist nämlich gleich der Anzahl derjenigen Lösungssysteme von (5), für welche ν der Summen $h_1, h_2, \ldots, h_t$ den Wert Null, die übrigen $t-\nu$ dieser Summen aber von Null verschiedene Werte haben; summiert man daher von $\nu=0$ bis $\nu=t-1$, so erhält man als Resultat die Anzahl $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$.

Aus (9) ergibt sich leicht, wenn man darin $t=1, 2, 3, \ldots, m$ setzt und diese m Gleichungen nach den Werten der Funktion φ' auflöst, folgende Umkehrung:

$$\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) = \sum_{\nu=0,1,\ldots,t-1} (-1)^\nu \binom{t}{\nu} \cdot \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t-\nu). \tag{10}$$

Wird dieser Wert von φ' in die Formel (4) eingesetzt, nachdem vorher der Buchstabe t in t' verwandelt worden ist, so erhält man:

$$\Phi(m) = \sum_{\substack{\nu=0,1,2,\ldots,t'-1 \\ g_1+g_2+\cdots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots,m \\ t'=1,2,\ldots,m}} (-1)^\nu \binom{t'}{\nu} \cdot \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t'-\nu).$$

Fassen wir hier diejenigen Glieder zusammen, in denen $t'-\nu$ einen und denselben Wert t hat, so erhält der Koeffizient von $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ folgenden Wert:

$$\sum_{\nu=0,1,2,\ldots,m-t} (-1)^\nu \binom{t+\nu}{\nu} = (-1)^{m-t} C(m, t),$$

wo demnach wegen $\binom{t+\nu}{\nu} = \binom{t+\nu}{t}$ die hier eingeführte Funktion $C(m, t)$ durch folgende Gleichung definiert ist

$$C(m, t) = \binom{m}{t} - \binom{m-1}{t} + \binom{m-2}{t} - \cdots (-1)^{m-t} \binom{t}{t}. \tag{11}$$

Wir haben daher

$$\Phi(m) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\cdots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots,m \\ t=1,2,\ldots,m}} (-1)^{m-t} C(m, t) \cdot \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t).$$

Wird also folgende Funktion:

$$D(m,t) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\cdots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots,m}} \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) \tag{12}$$

in die Betrachtung eingeführt, so haben wir:

$$\Phi(m) = \sum_{t=1,2,\ldots,m} (-1)^{m-t}\, C(m,t)\cdot D(m,t). \tag{13}$$

Hiermit ist die gesuchte Funktion $\Phi(m)$ auf die beiden Funktionen $C(m,t)$ und $D(m,t)$, welche durch die Formeln (11) und (12) definiert sind, zurückgeführt.

Zur praktischen Berechnung bieten sich Rekursionsformeln dar.

Für $C(m,t)$ beweist man leicht die Funktionalgleichung:

$$C(m+1, t+1) = C(m, t+1) + C(m, t). \tag{14}$$

Man hat außerdem für diese Funktion die Werte:

$$\left.\begin{aligned} &C(2m, 1) = m;\ C(2m+1, 1) = m+1; \\ &C(m, m) = 1;\ C(m, t) = 0,\ \text{wenn } t > m. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Daraus ergibt sich nebenstehende Tabelle für $C(m,t)$, die leicht zu vervollständigen ist. Andererseits haben wir nach (12):

$m=$ $t=$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	2	2	1			
4	2	4	3	1		
5	3	6	7	4	1	
6	3	9	13	11	5	1

$$D(m+1, t) = \sum_{\substack{g_0+g_1+\cdots+g_s=m+1 \\ s=0,1,2,\ldots,m}} \varphi(g_0, g_1, \ldots, g_s, t).$$

Für $s=0$, $g_0 = m+1$ nimmt das allgemeine Glied der letzten Summe den Wert $\binom{t}{m+1}$ an; man kann daher, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $g_1, g_2, \ldots, g_s$ positiv sind und daher $s \leqq m+1-g_0$ sein muß, schreiben:

$$D(m+1, t) = \binom{t}{m+1} + \sum_{\substack{g_1+g_2+\cdots+g_s=m+1-g_0 \\ s=1,2,3,\ldots,m+1-g_0 \\ g_0=1,2,3,\ldots,m}} \binom{t}{g_0} \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t).$$

Also ist

$$D(m+1,t) = \binom{t}{m+1} + \binom{t}{m} D(1,t) + \binom{t}{m+1} D(2,t) + \cdots + \binom{t}{1} D(m,t).$$

Setzt man daher fest, daß

$$D(0,t) = 1 \tag{16}$$

sei, so hat man folgende Rekursionsformel:

$$D(m+1,t) = \binom{t}{1} D(m,t) + \binom{t}{2} D(m-1,t) + \cdots + \binom{t}{m+1} D(0,t). \tag{17}$$

Man bemerke noch, daß stets

$$D(m,1) = 1 \tag{18}$$

ist.

Um hieraus $D(m,t)$ zu berechnen, bedürfen wir der nebenstehenden Tafel für den Binomialkoeffizienten $\binom{t}{m}$.

$m=$ $t=$	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2		1	3	6	10	15
3			1	4	10	20
4				1	5	15
5					1	6
6						1

So gewinnt man folgende zu vervollständigende Tafel für $D(m,t)$:

$m=$ $t=$	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	5	12	22	35	51
3	1	12	46	116	235	416
4	1	29	177	613	1580	3396
5	1	70	681	3240	10626	27732
6	1	169	2620	17124	71460	226454

Mit Hilfe dieser Tabellen ergeben sich aus (13) folgende Werte der Funktion $\Phi(m)$:

$$\Phi(1) = 1;\quad \Phi(2) = 4;\quad \Phi(3) = 24;\quad \Phi(4) = 196;$$
$$\Phi(5) = 2016;\quad \Phi(6) = 24976.$$

Dies sind für $m = 1$ bis 6 die Anzahlen der *reinen* zweifachen Ordnungstypen. Handelt es sich aber um die Anzahl *aller* zweifachen Ordnungstypen (der reinen und der gemischten) bei gegebener Kardinalzahl m, welche wir mit $\Psi(m)$ bezeichnen wollen, so kann derselbe Weg eingeschlagen werden wie für die Berechnung von $\Phi(m)$.

Das Gleichungssystem (5) wird jetzt so aufzulösen sein, daß die Unbekannten $k_{\mu,\nu}$ nicht bloß die Werte 0 und 1, sondern beliebige nicht negative ganzzahlige Werte annehmen dürfen.

An die Stelle der Funktion $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ tritt hier eine andere, die wir $\psi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ nennen wollen und welche durch die Gleichung definiert ist:

$$\psi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) = \binom{t+g_1-1}{g_1} \cdot \binom{t+g_2-1}{g_2} \cdots \binom{t+g_s-1}{g_s}. \tag{19}$$

Versteht man daher unter $E(m, t)$ folgende Funktion:

$$E(m, t) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\cdots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots,m}} \psi(g_1, g_2, \ldots g_s, t). \tag{20}$$

so hat man:

$$\Psi(m) = \sum_{t=1,2,\ldots,m} (-1)^{m-t} C(m, t) E(m, t). \tag{21}$$

Es besteht aber auch ein einfacher Zusammenhang zwischen $\Phi(m)$ und $\Psi(m)$, der durch Zurückgehen auf die Bedeutung dieser Anzahlen direkt geschlossen wird, in Gestalt folgender Gleichungen:

$$\Psi(m) = \Phi(m) + \binom{m-1}{1}\Phi(m-1) + \binom{m-1}{2}\Phi(m-2) + \cdots + \binom{m-1}{m-2}\Phi(2) + \Phi(1), \tag{22}$$

$$\Phi(m) = \Psi(m) - \binom{m-1}{1}\Psi(m-1) + \binom{m-1}{2}\Psi(m-2) + \cdots + (-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}\Psi(2) + (-1)^{m-1}\Psi(1). \tag{23}$$

Aus (22) erhält man mit Hilfe der gefundenen Werte von $\Phi(m)$:

$$\Psi(1) = 1; \quad \Psi(2) = 5; \quad \Psi(3) = 33; \quad \Psi(4) = 281;$$
$$\Psi(5) = 2961; \quad \Psi(6) = 37277.$$

14. Das Verfahren, durch welches wir die Anzahlen $\Phi(m)$ und $\Psi(m)$ der *zweifachen* Ordnungstypen in Nr. 13 bestimmt haben, läßt sich auch auf ein beliebiges n übertragen.

Es werde mit $\Phi(m, n)$ die Anzahl der *reinen*, mit $\Psi(m, n)$ die Anzahl der *reinen und gemischten* n-fachen Ordnungstypen von der Kardinalzahl m bezeichnet.

In einem n-fachen Typus α sind die Einsen nach n verschiedenen voneinander unabhängigen Richtungen, welche von uns als $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \ldots, \nu^{\text{te}}, \ldots, n^{\text{te}}$ Richtung unterschieden werden, geordnet.

Wir bezeichnen mit s_ν die Anzahl der verschiedenen in α vorkommenden *Rangstufen* nach der ν^{ten} Richtung.

$g_{\nu,\mu}$ sei die Anzahl der verschiedenen Einsen in α, welche den μ^{ten} Rang nach der ν^{ten} Richtung einnehmen; es erhält daher der Index μ die Werte $1, 2, 3, \ldots, s_\nu$.

Alle s_ν und $g_{\nu,\mu}$ sind *positive* ganze Zahlen $\leqq m$ und man hat für *jedes bestimmte* $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$\sum_{\mu=1,2,\ldots,s_\nu} g_{\nu,\mu} = m. \tag{24}$$

Unter der *Charakteristik* des Typus α verstehen wir ein System von $s_1, s_2, \ldots, s_n$ Zahlen

$$(k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}), \tag{25}$$

wo der Index λ_ν die Werte $1, 2, 3, \ldots, s_\nu$ anzunehmen hat, und zwar hat $k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ die Bedeutung der Anzahl aller in α vorkommenden Einsen, welche nach der ersten Richtung den $\lambda_1{}^{\text{ten}}$, nach der zweiten Richtung den $\lambda_2{}^{\text{ten}}$, u. s. w., nach der n^{ten} Richtung den $\lambda_n{}^{\text{ten}}$ Rang einnehmen; falls solche Einsen in α nicht existieren, soll $k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ den Wert Null haben. Ist α ein *reiner* Typus, so kommen den Größen k nur die Werte 0 und 1 zu.

Aus der Bedeutung der Größen k und g folgen unmittelbar die Gleichungen:

$$\sum_{\substack{\lambda_1=1,2,\ldots,s_1 \\ \lambda_2=1,2,\ldots,s_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n=1,2,\ldots,s_n}} k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} = m \tag{26}$$

und

$$\sum k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu,\ldots,\lambda_n} = g_{\nu,\lambda_\nu}, \tag{27}$$

wo die Summierung sich über alle Werte der Indizes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ zu erstrecken hat, *mit Ausnahme* des Index λ_ν, der bei der Summation einen *konstanten Wert* der Reihe $1, 2, 3, \ldots, s_\nu$ behält.

Das System (25) von *nicht negativen* ganzen Zahlen $k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ bildet *dann und nur dann* die Charakteristik eines bestimmten n-fachen Typus α, wenn die aus ihnen nach (26) und (27) resultierenden Summen $m, g_{\nu,\mu}$ *von Null verschiedene positive* ganze Zahlen sind.

In der nun folgenden Betrachtung spielt die *erste* der n Ordnungsrichtungen eine bevorzugte Rolle, und wir wollen daher für die sich auf sie beziehenden Größen einfachere Bezeichnungen einführen. Wir setzen:

$$s_1 = s, \; g_{1.1} = g_1, \; g_{1.2} = g_2, \ldots, g_{1.s} = g_s.$$

Es sei $\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, s_2, s_3, \ldots, s_n)$ die Anzahl der *reinen* n-fachen Typen, für welche die Größen $s, s_2, \ldots, s_n$ bestimmte positive ganzzahlige Werte $\leqq m$ und ebenso $g_1, g_2, \ldots, g_s$ bestimmte der Gleichung

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_s = m$$

genügende positive ganzzahlige Werte haben.

Man hat alsdann:

$$\Phi(m, n) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\cdots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots,m \\ s_2=1,2,\ldots,m \\ \cdots\cdots\cdots \\ s_n=1,2\ldots,m}} \varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, s_2, s_3, \ldots, s_n). \tag{28}$$

Die Funktion φ' läßt sich nun, wie die in Nr. 13 mit demselben Zeichen vorkommende, auf die durch Formel (8) definierte Funktion $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ zurückführen; setzen wir die Bezeichnungen

$$s_2 = t_1,\ s_3 = t_2, \ldots, s_n = t_{n-1}$$

fest, so besteht die Gleichung:

$$\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$$

$$= \sum_{\substack{\mu_1=0,1,\ldots,t_1\\ \mu_2=0,1,\ldots,t_2\\ \mu_{n-1}=0,1,\ldots,t_{n-1}}} (-1)^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}} \binom{t_1}{\mu_1}\cdot\binom{t_2}{\mu_2}\cdots\binom{t_{n-1}}{\mu_{n-1}} \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t). \qquad (29)$$

In dieser Summe hat der Buchstabe t die Bedeutung

$$t = (t_1 - \mu_1)(t_2 - \mu_2)\ldots(t_{n-1-\mu_{n-1}}).$$

Wird dieser Wert in (28) eingesetzt, so erhält man, wenn $t'_1, t'_2, \ldots, t'_{n-1}$ an Stelle von $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t'$ an Stelle von t gesetzt werden:

$$\Phi(m, n) = \sum_{\substack{\mu_1=0,1,\ldots,t'_1\\ \mu_2=0,1,\ldots,t'_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ \mu_{n-1}=0,1,\ldots,t'_{n-1}}} (-1)^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}} \sum_{\substack{g_1+g_2+\cdots+g_s=m\\ s=1,2,\ldots,m\\ t'_1=1,2,\ldots,m\\ t'_{n-1}=1,2,\ldots,m}} \binom{t'_1}{\mu_1}\binom{t'_2}{\mu_2}\cdots\binom{t'_{n-1}}{\mu_{n-1}} \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t').$$

Es ist hier

$$t' = (t'_1 - \mu_1)(t'_2 - \mu_2)\ldots(t'_{n-1} - \mu_{n-1}).$$

Fassen wir diejenigen Glieder zusammen, in welchen $t'_1 - \mu_1, t'_2 - \mu_2, \ldots, t'_{n-1} - \mu_{n-1}$ entsprechend die bestimmten Werte $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ haben, so erhält der Koeffizient von $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, (t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{n-1}))$ den Wert

$$(-1)^{m(n-1)-t_1-t_2-\cdots-t_{n-1}} C(m, t_1)\, C(m, t_2)\ldots C(m, t_{n-1}).$$

Führen wir daher die folgende Funktion ein:

$$C(m, n, t)$$

$$= \sum_{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}=1} (-1)^{m(n-1)-t_1-t_2-\cdots-t_{n-1}} C(m, t_1)\, C(m, t_2)\ldots C(m, t_{n-1}), \qquad (30)$$

wo $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ alle positiven ganzzahligen Wertsysteme anzunehmen haben, bei denen die Gleichung

$$t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots, t_{n-1} = t \qquad (31)$$

mit den Nebenbedingungen

$$t_1 \leqq m,\ t_2 \leqq m, \ldots, t_{n-1} \leqq m \qquad (32)$$

erfüllt ist, so ergibt sich ohne weiteres die Formel:

$$\Phi(m, n) = \sum_{t=1,2,3,\ldots,m^{n-1}} C(m, n, t)\cdot D(m, t). \qquad (33)$$

Für den Fall $n = 2$ ist $C(m, 2, t) = (-1)^{m-t}\, C(m, t)$ und es geht die Formel (32) in die Formel (13) für $\Phi(m)$ über.

Ebenso findet man:

$$\Psi(m, n) = \sum_{t=1,2,3,\ldots,m^{n-1}} C(m, n, t)\cdot E(m, t). \qquad (34)$$

Auch bestehen zwischen $\Phi(m, n)$ und $\Psi(m, n)$ die Gleichungen:

$$\Psi(m, n) = \Phi(m, n) + \binom{m-1}{1}\Phi(m-1, n)$$

$$+ \binom{m-1}{2}\Phi(m-2, n) + \cdots + \binom{m-1}{m-2}\Phi(2, n) + \Phi(1, n), \qquad (35)$$

$$\Phi(m, n) = \Psi(m, n) - \binom{m-1}{1}\Psi(m-1, n)$$

$$+ \binom{m-1}{2}\Psi(m-2, n) - \cdots - (-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}\Psi(2, n) + (-1)^{m-1}\Psi(1, n). \qquad (36)$$

[Anmerkungen.]

Dieser Aufsatz ist in seiner ersten Hälfte eine Fortsetzung des vorangehenden IV 3 und bestimmt, die Cantorsche Auffassung des Aktual-Unendlichen gegen philosophische und theologische Einwände zu verteidigen. Die zweite Hälfte dagegen (S. 420ff.) bringt eine ausführliche, rein mathematische Theorie der Ordnungstypen „mehrfach geordneter Mengen", insbesondere der endlichen. Augenscheinlich hat Cantor eine Anwendung dieser Ordnungstypen, vielleicht auf physikalische Theorien der Materie und des Äthers vorgeschwebt. Ob sich diese speziellen Untersuchungen später noch einmal als fruchtbar erweisen werden, steht dahin.

[1] zu S. 408. Die Nicht-Existenz „aktual-unendlichkleiner Größen" läßt sich ebensowenig beweisen, wie die Nicht-Existenz der Cantorschen Transfiniten, und der Fehlschluß ist in beiden Fällen ganz der nämliche, indem den neuen Größen gewisse Eigenschaften der gewöhnlichen „endlichen" zugeschrieben werden, die ihnen nicht zukommen können. Es handelt sich hier um die sogenannten „*nicht-archimedischen*" Zahlensysteme bzw. Körper, deren Existenz heute als einwandfrei nachgewiesen betrachtet werden kann. Vgl. Van der Waerden, Moderne Algebra, Kap. X. In einem nicht-archimedisch geordneten Körper, in welchem z. B. $n\zeta < 1$ ist für jedes endliche ganzzahlige n, existiert auch keine „obere Grenze" γ dieser Größen $n\zeta$, die mit $\omega\zeta$ bezeichnet werden könnte, weil das Intervall $(\gamma - \zeta, \gamma)$ höchstens *eine* Größe $n\zeta$ enthalten könnte, und die Multiplikation mit weiteren Transfiniten $\alpha > \omega$ wird gegenstandslos. Mit dem „Archimedischen Axiom" fällt eben gleichzeitig auch das „Stetigkeitsaxiom", wie z. B. in D. Hilberts „Grundlagen der Geometrie" hervorgehoben wird. Ob ein Satz ein „Axiom" ist oder nicht, hängt nicht von seinem Inhalte ab, sondern vom Aufbau des ganzen Systems, von den das System definierenden Grundeigenschaften oder Axiomen. Indem Cantor das *Stetigkeitsaxiom* als gültig voraussetzt, schließt er in der Tat alle nicht-archimedischen Zahlensysteme aus, beweist aber nichts gegen die Existenz solcher „geordneten Körper", in welchen *weder* das archimedische *noch* das Stetigkeitsaxiom gilt.

5. Die Grundlagen der Arithmetik.

(Rezension der Schrift von G. Frege, „Die Grundlagen der Arithmetik“, Breslau 1884.)
[Deutsche Literaturzeitung, VI. Jahrg. S. 728—729. Berlin 1885.]

Der Zweck dieses Schriftchens, die Grundlagen der Arithmetik einer erneuten Untersuchung zu unterwerfen, ist ein löblicher, denn es unterliegt keinem Zweifel, daß dieser Zweig der Mathematik, welcher allen anderen mathematischen Disziplinen zur Basis dient, eine weit tiefere Erforschung seiner Grundbegriffe und Methoden verlangt, als sie ihm bisher im allgemeinen zu Teil geworden ist. Auch muß anerkannt werden, daß der Verf. den richtigen Gesichtspunkt erfaßt hat, indem er die Forderung aufstellt, daß sowohl die räumliche wie die zeitliche Anschauung und ebenso alle psychologischen Momente von den arithmetischen Begriffen und Grundsätzen ferngehalten werden müssen, weil nur auf diesem Wege ihre streng logische Reinheit und damit die Berechtigung gewonnen werden kann, das Hilfsmittel der Arithmetik auf die anschaulichen Erkenntnisobjekte anzuwenden. Den weitaus größten Raum widmet der Verf. einer von diesem Gesichtspunkt aus unternommenen kritischen Beleuchtung von bisherigen, auf die Begründung der Arithmetik hinzielenden Versuchen; die Ausstellungen, welche er den bezüglichen Lehren Kants, Stuart Mills und anderer entgegensetzt, sind meist zutreffend und können der Beachtung empfohlen werden. Weniger erfolgreich dagegen scheint mir sein eigener Versuch zu sein, den Zahlbegriff streng zu begründen. Der Verf. kommt nämlich auf den unglücklichen Gedanken — und es scheint, daß er dabei einer Andeutung Ueberwegs in dessen „System der Logik“ § 53 gefolgt ist — dasjenige, was in der Schullogik der „Umfang eines Begriffes“ genannt wird, zur Grundlage des Zahlbegriffs zu nehmen; er übersieht ganz, daß der „Umfang eines Begriffs“ quantitativ im allgemeinen etwas völlig Unbestimmtes ist; nur in gewissen Fällen ist der „Umfang eines Begriffs“ quantitativ bestimmt, dann kommt ihm allerdings, wenn er endlich ist, eine bestimmte Zahl und, falls er unendlich ist, eine bestimmte Mächtigkeit zu. Für eine derartige quantitative Bestimmung des „Umfangs eines Begriffs“ müssen aber die Begriffe „Zahl“ und „Mächtigkeit“ vorher von anderer Seite her bereits gegeben sein, und es ist eine *Verkehrung des Richtigen*, wenn man unternimmt, die letzteren Begriffe auf den Begriff „Umfang eines Begriffs“ zu gründen. Wenn dem Verf. diese Sachlage entgangen ist, so muß dies wohl dem Umstand zugeschrieben werden, daß sein prinzipieller Irrtum allerdings ziemlich versteckt in der Umhüllung seiner

äußerst subtilen Distinktionen verborgen liegt. Ich halte es daher auch nicht für zutreffend, wenn der Verf. in § 85 die Meinung ausspricht, dasjenige, was ich „Mächtigkeit“ nenne, stimme mit dem überein, was er „Anzahl“ nennt. Ich nenne „Mächtigkeit eines Inbegriffs oder einer Menge von Elementen“ (wobei letztere gleich- oder ungleichartig, einfach oder zusammengesetzt sein können) denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle Mengen, welche der gegebenen Menge äquivalent sind, und nur diese fallen. Zwei Mengen werden hierbei „äquivalent“ genannt, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen. Ein anderes ist es, was ich „Anzahl“ oder „Ordnungszahl“ nenne; ich schreibe sie nur „wohlgeordneten Mengen“ zu, und zwar verstehe ich unter der „Anzahl oder Ordnungszahl einer wohlgeordneten Menge“ denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle wohlgeordneten Mengen, welche der gegebenen *ähnlich* sind, und nur diese fallen. „Ähnlich“ nenne ich zwei wohlgeordnete Mengen, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element, unter Wahrung der gegebenen Elementenfolge auf beiden Seiten, aufeinander abbilden lassen. Bei *endlichen* Mengen fallen die beiden Momente „Mächtigkeit“ und „Anzahl“ gewissermaßen zusammen, weil eine endliche Menge in jeder Anordnung ihrer Elemente als „wohlgeordnete Menge“ eine und dieselbe Ordnungszahl hat; dagegen tritt bei *unendlichen* Mengen der Unterschied von „Mächtigkeit“ und „Ordnungszahl“ aufs stärkste zutage, wie dies in meinem Schriftchen „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“, Leipzig 1883, deutlich gezeigt worden ist.

Was der Verf. gegen meinen Gebrauch des Wortes „Anzahl“ sagt, erscheint wenig begründet: er beruft sich auf den populären Sprachgebrauch, der bei Fixierung wissenschaftlicher Begriffe überhaupt nicht maßgebend sein darf, im vorliegenden Falle aber, wo er sich doch wohl nur auf *endliche* Mengen bezieht, durch die bei mir vollzogene Verschärfung des Anzahlbegriffs kaum verletzt sein dürfte.

[Anmerkung.]

Der Fregeschen Schrift, die heute immer mehr anerkannt wird und wenigstens nach der Meinung des Herausgebers vielleicht das beste und klarste darstellt, was über ihren Gegenstand, den Anzahlbegriff, bisher überhaupt erschienen ist, wird Cantor in seiner Rezension doch nur teilweise gerecht. In der Tat versteht Frege unter „Anzahl“ genau das gleiche, was Cantor mit „Kardinalzahl“ bezeichnet, nämlich die Invariante, das, was allen unter sich äquivalenten (Frege sagt „gleichzahligen“) Mengen (Frege sagt „Begriffen“) gemeinsam ist. Nur identifiziert Frege diese Klasseninvariante mit dem „Umfange des Begriffes: gleichzahlig mit dem Begriff F“. Dieser Begriffsumfang ist aber nichts anderes als eine logische „Klasse“, eben die Klasse der zu F äquivalenten „Mengen“ oder „Begriffe“ F. Er braucht also keineswegs „quantitativ bestimmbar“ zu sein, denn nicht ihm, sondern dem Begriffe F selbst soll das Prädikat der „Anzahl“

zukommen. Die Einführung des „Begriffsumfanges“ mag gewiß, wie Frege selbst zugibt, seine Nachteile und Bedenken haben, aber sie ist im Grunde unwesentlich, und Cantors Kritik scheint hier auf einem Mißverständnis zu beruhen. Andererseits war Cantor gewiß berechtigt, für *transfinite* Mengen, die Frege gar nicht in Betracht zieht, *seinen* Begriff der „Anzahl“ als eines Ordnungstypus einzuführen. Uns Heutigen kann es nur auffallend und bedauerlich erscheinen, daß die beiden Zeitgenossen, der große Mathematiker und der verdienstvolle Logiker, wie diese Rezension beweist, sich untereinander so wenig verstanden haben.

Anhang.

Aus dem Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind.

1. Cantor an Dedekind.

Halle, 28. Juli 1899.

... Sie wissen, daß ich schon vor vielen Jahren zu einer wohlgeordneten Folge von Mächtigkeiten oder transfiniten Kardinalzahlen gelangt bin, die ich die „Alefs“ nenne:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \dots \aleph_{\omega_0}, \dots .$$

$\aleph_0$ bedeutet die Mächtigkeit der im gebräuchlichen Sinne „abzählbaren“ Mengen, $\aleph_1$ ist die nächstgrößere Kardinalzahl,

$\aleph_2$ die dann nächstgrößere usf.; $\aleph_{\omega_0}$ ist die auf alle $\aleph_\nu$ nächstfolgende (d. h. nächstgrößere) und gleich

$$\lim_{\nu \to \omega_0} \aleph_\nu ,$$

usw.

Die große Frage war, ob es außer den Alefs noch andere Mächtigkeiten von Mengen gibt; schon seit zwei Jahren bin ich im Besitz eines Beweises dafür, daß es keine anderen gibt, so daß z. B. dem arithmetischen Linearkontinuum (der Gesamtheit aller reeller Zahlen) ein bestimmtes Alef als Kardinalzahl zukommt.

Gehen wir von dem Begriff einer bestimmten Vielheit (eines Systems, eines Inbegriffs) von Dingen aus, so hat sich mir die Notwendigkeit herausgestellt, zweierlei Vielheiten (ich meine immer *bestimmte* Vielheiten) zu unterscheiden.

Eine Vielheit kann nämlich so beschaffen sein, daß die Annahme eines „Zusammenseins“ *aller* ihrer Elemente auf einen Widerspruch führt, so daß es unmöglich ist, die Vielheit als eine Einheit, als „ein fertiges Ding“ aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich *absolut unendliche* oder *inkonsistente Vielheiten*.

Wie man sich leicht überzeugt, ist z. B. der „Inbegriff alles Denkbaren“ eine solche Vielheit; später werden sich noch andere Beispiele darbieten.

Wenn hingegen die Gesamtheit der Elemente einer Vielheit ohne Widerspruch als „zusammenseiend“ gedacht werden kann, so daß ihr Zusammengefaßtwerden zu „*einem* Ding“ möglich ist, nenne ich sie eine *konsistente Vielheit* oder eine „Menge“. (Im Französischen u. Italienischen wird dieser

Begriff durch die Worte „ensemble" und „insieme" treffend zum Ausdruck gebracht).

Zwei äquivalente Vielheiten sind entweder beide „Mengen', oder beide inkonsistent.

Jede Teilvielheit einer Menge ist eine Menge.

Jede Menge von Mengen ist, wenn man die letzteren in ihre Elemente auflöst, auch eine Menge.

Liegt eine Menge M vor, so nenne ich den Allgemeinbegriff, welcher ihr und nur noch allen ihr äquivalenten Mengen zukommt, ihre *Kardinalzahl* oder auch ihre *Mächtigkeit* und bezeichne sie mit $\mathfrak{m}$. Zu dem System aller Mächtigkeiten, von dem sich später herausstellen wird, daß es eine *inkonsistente* Vielheit ist, komme ich nun auf folgendem Wege.

Eine Vielheit heißt „einfach geordnet", wenn zwischen ihren Elementen eine Rangordnung derart besteht, daß von je zweien ihrer Elemente eins das frühere, das andre das spätere ist, und daß von je dreien ihrer Elemente eines das frühste, ein anderes das mittlere und das übrig bleibende das dem Range nach letzte unter ihnen ist.

Ist die einfach geordnete Vielheit eine *Menge*, so verstehe ich unter ihrem *Typus* μ den Allgemeinbegriff, unter welchem sie sowohl, wie auch nur noch alle ihr *ähnlichen* geordneten Mengen stehen. (Der Begriff *Ähnlichkeit* ist in einem eingeschränkteren Sinne von mir gebraucht, als es bei Ihnen geschieht; ich nenne zwei einfach geordnete Vielheiten *ähnlich*, wenn sie eineindeutig so aufeinander bezogen werden können, daß das Rangverhältnis entsprechender Elemente bei beiden dasselbe ist.)

Eine Vielheit heißt *wohlgeordnet*, wenn sie die Bedingung erfüllt, daß jede *Teilvielheit* ein *erstes* Element hat; eine solche Vielheit nenne ich kurz eine „Folge".

Jeder Teil einer „Folge" ist eine „Folge".

Hat nun eine Folge F den Mengencharakter, so nenne ich den Typus von F ihre „*Ordnungszahl*" oder kürzer ihre „*Zahl*"; so daß, wenn ich im folgenden von Zahlen schlechthin spreche, ich nur Ordnungszahlen, d. h. Typen wohlgeordneter Mengen im Sinne haben werde.

Ich fasse nun das System *aller Zahlen* ins Auge und bezeichne es mit Ω.

In den Math. Annalen Bd. 49 S. 216 [hier III 9, S. 320] ist bewiesen, daß von zwei verschiedenen Zahlen α und β immer die eine die kleinere, die andere die größere ist und daß, wenn von drei Zahlen $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, dann auch $\alpha < \gamma$.

Ω ist also ein einfach geordnetes System.

Aber aus den im § 13 über wohlgeordnete Mengen bewiesenen Sätzen folgt auch leicht, daß jede Vielheit von Zahlen, d. h. jeder Teil von Ω eine *kleinste* Zahl enthält.

Das System Ω bildet daher in seiner natürlichen Größenordnung eine „Folge".

Fügen wir zu dieser Folge noch als Element die 0, und zwar setzen wir sie an die erste Stelle, so erhalten wir eine Folge Ω':

$$0, 1, 2, 3, \ldots \omega_0, \quad \omega_0 + 1, \ldots, \quad \gamma, \ldots,$$

von welcher man sich leicht überzeugt, daß *jede* in ihr vorkommende Zahl γ *Typus* der *Folge aller ihr vorangehenden Elemente* (mit Einschluß der 0) ist. (Die Folge Ω hat diese Eigenschaft erst für $\omega_0 + 1$).

Es kann Ω' (und daher auch Ω) *keine konsistente* Vielheit sein; wäre Ω' konsistent, so würde ihr als einer wohlgeordneten Menge eine Zahl δ zukommen, die größer wäre als alle Zahlen des Systems Ω; im System Ω kommt aber, weil es *alle* Zahlen umfaßt, auch die Zahl δ vor; es wäre also δ größer als δ, was ein Widerspruch ist. Also:

A. *Das System Ω aller Zahlen ist eine inkonsistente, eine absolut unendliche Vielheit.*

Da die *Ähnlichkeit* wohlgeordneter Mengen zugleich ihre *Äquivalenz* begründet, so gehört zu jeder Zahl γ eine bestimmte Kardinalzahl $\aleph(\gamma) = \bar{\gamma}$, nämlich die Kardinalzahl der wohlgeordneten Mengen, deren Typus γ ist.

Die Kardinalzahlen, welche den *transfiniten* Zahlen des Systems Ω in diesem Sinne zukommen, nenne ich „Alefs", und das *System aller Alefs* heiße ת (*Taw*, letzter Buchstabe des hebräischen Alphabets).

Das System aller Zahlen γ, welche zu einer und derselben Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ gehören, nenne ich eine „*Zahlenklasse*", und zwar die Zahlenklasse $\mathfrak{Z}(\mathfrak{c})$. Man sieht leicht, daß in jeder Zahlenklasse eine kleinste Zahl γ_0 vorhanden ist, und daß es eine außerhalb von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{c})$ fallende Zahl γ_1 gibt, so daß die Bedingung

$$\gamma_0 \leqq \gamma < \gamma_1$$

gleichbedeutend ist mit der Zugehörigkeit der Zahl γ zur Zahlenklasse $\mathfrak{Z}(\mathfrak{c})$. Jede Zahlenklasse ist also ein bestimmter „Ausschnitt" der Folge Ω*.

Gewisse Zahlen des Systems Ω bilden jede *einzeln für sich* eine Zahlenklasse, es sind die „*endlichen*" Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, denen die verschiedenen „endlichen" Kardinalzahlen $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \bar{\nu}, \ldots$ zukommen.

ω_0 sei die kleinste transfinite Zahl, das ihr zukommende Alef nenne ich $\aleph_0$, so daß

$$\aleph_0 = \bar{\omega}_0;$$

$\aleph_0$ ist das *kleinste* Alef und bestimmt die Zahlenklasse

$$\mathfrak{Z}(\aleph_0) = \Omega_0.$$

* Hier wird immerzu der schon [S. 444] erwähnte Satz gebraucht, daß *jeder* Inbegriff von Zahlen, also *jede* Teilvielheit von Ω ein *Minimum*, eine *kleinste Zahl* hat.

Die Zahlen α von $\mathsf{Z}(\aleph_0)$ erfüllen die Bedingung

$$\omega_0 \leq \alpha < \omega_1$$

und sind dadurch charakterisiert; hier ist ω_1 die kleinste transfinite Zahl, deren Kardinalzahl nicht gleich $\aleph_0$ ist. Wird

$$\overline{\overline{\omega}}_1 = \aleph_1$$

gesetzt, so ist nicht nur $\aleph_1$ von $\aleph_0$ verschieden, sondern es ist das nächstgrößere Alef, denn man kann beweisen, daß es überhaupt keine Kardinalzahl gibt, die zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$ wäre. So erhält man die sich unmittelbar an Ω_0 anschließende Zahlenklasse $\Omega_1 = \mathsf{Z}(\aleph_1)$. Sie umfaßt alle Zahlen β, welche die Bedingung erfüllen

$$\omega_1 \leq \beta < \omega_2;$$

hier ist ω_2 die kleinste transfinite Zahl, deren Kardinalzahl verschieden ist von $\aleph_0$ und $\aleph_1$.

$\aleph_2$ ist das dem $\aleph_1$ nächstgrößere Alef und bestimmt die auf Ω_1 unmittelbar folgende Zahlenklasse $\Omega_2 = \mathsf{Z}(\aleph_2)$, bestehend aus allen Zahlen γ, die $\geq \omega_2$ und $< \omega_3$, wo ω_3 die kleinste transfinite Zahl ist, deren Kardinalzahl verschieden ist von $\aleph_0$, $\aleph_1$ und $\aleph_2$ usw. Ich hebe noch hervor:

$$\overline{\overline{\Omega}}_0 = \aleph_1, \qquad \overline{\overline{\Omega}}_1 = \aleph_2 \ldots \overline{\overline{\Omega}}_\nu = \aleph_{\nu+1},$$
$$\sum_{\nu'=0,\,1,\,2\ldots\nu} \aleph_{\nu'} = \aleph_\nu,$$

was alles leicht zu beweisen ist.

Von den transfiniten Zahlen des Systems Ω, denen keines der $\aleph_\nu$ [mit endlichem ν] als Kardinalzahl zukommt, ist wieder eine kleinste vorhanden, die wir ω_{ω_0} nennen, und wir erhalten mit ihr ein neues Alef

$$\aleph_{\omega_0} = \overline{\overline{\omega}}_{\omega_0},$$

welches auch durch die Gleichung

$$\aleph_{\omega_0} = \sum_{\nu=0,\,1,\,2\ldots} \aleph_\nu$$

definierbar ist und das man als die den sämtlichen $\aleph_\nu$ *nächstgrößere* Kardinalzahl erkennt.

Man überzeugt sich, daß dieser Bildungsprozeß der Alefs und der ihnen entsprechenden Zahlenklassen des Systems Ω *absolut* grenzenlos ist.

B. *Das System* ת *aller Alefs*

$$\aleph_0, \aleph_1, \ldots \aleph_{\omega_0}, \aleph_{\omega_0+1}, \ldots \aleph_{\omega_1}, \ldots$$

bildet in ihrer Größenordnung eine dem System Ω ähnliche und daher ebenfalls inkonsistente absolut unendliche Folge.

Es erhebt sich nun die Frage, ob in diesem System ת *alle transfiniten Kardinalzahlen* enthalten sind. Gibt es, mit anderen Worten, eine *Menge*, deren Mächtigkeit *kein Alef* ist?

Diese Frage ist zu *verneinen* und der Grund dafür liegt in der von uns erkannten *Inkonsistenz* der Systeme Ω und ת.

Beweis. Nehmen wir eine bestimmte Vielheit V und setzen voraus, daß ihr *kein Alef als Kardinalzahl* zukommt, so schließen wir, daß V *inkonsistent* sein muß.

Denn man erkennt leicht [1], daß unter der gemachten Voraussetzung das ganze System Ω in die Vielheit V hineinprojizierbar ist, d. h. daß eine Teilvielheit V' von V existieren muß, die dem System Ω äquivalent ist.

V' ist *inkonsistent*, weil Ω es ist, es muß also auch dasselbe von V behauptet werden. [Vgl. S. 444 oben.]

Mithin muß jede transfinite *konsistente Vielheit*, jede transfinite Menge ein *bestimmtes Alef* als Kardinalzahl haben. Also

C. *Das System* ת *aller Alefs ist nichts anderes als das System aller transfiniten Kardinalzahlen.*

Alle Mengen sind daher in einem *erweiterten Sinne* „*abzählbar*", im besonderen alle „*Kontinua*".

Wir erkennen ferner aus C die Richtigkeit des Math. Annalen Bd. 46 [hier III 9, § 2, S. 285] ausgesprochenen Satzes:

„Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige Kardinalzahlen, so ist entweder $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$."

Denn die *Alefs* haben, wie wir gesehen, diesen Größencharakter.

2. Cantor an Dedekind.

Hahnenklee, 28. Aug. 1899.

. . . Man muß die Frage aufwerfen, woher ich denn wisse, daß die wohlgeordneten Vielheiten oder Folgen, denen ich die Kardinalzahlen

$$\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_{\omega_0}, \ldots \aleph_{\omega_1}, \ldots$$

zuschreibe, auch wirklich „Mengen" in dem erklärten Sinne des Wortes, d. h. „konsistente Vielheiten" seien. Wäre es nicht denkbar, daß schon *diese* Vielheiten „inkonsistent" seien, und daß der Widerspruch der Annahme eines „Zusammenseins aller ihrer Elemente" sich *nur noch nicht bemerkbar* gemacht hätte? Meine Antwort hierauf ist, daß diese Frage auf *endliche Vielheiten ebenfalls auszudehnen* ist und daß eine genaue Erwägung zu dem Resultate führt: sogar für endliche Vielheiten ist ein „Beweis" für ihre „Konsistenz" *nicht* zu führen. Mit anderen Worten: Die Tatsache der „Konsistenz" endlicher Vielheiten ist eine einfache, unbeweisbare Wahrheit, es ist „*Das Axiom* der Arithmetik" (im alten Sinne des Wortes). Und ebenso ist die „Konsistenz" der Vielheiten, denen ich die Alefs als Kardinalzahlen zuspreche „das Axiom der erweiterten transfiniten Arithmetik".

3. Cantor an Dedekind.

Hahnenklee, 31. Aug. 1899.

... Äquivalente „Mengen" wollen wir einer und derselben Mächtigkeits*klasse* zuweisen, nichtäquivalente Mengen verschiedenen Klassen, und wir betrachten das System

S aller denkbaren Klassen.

Unter $\mathfrak{a}$ verstehe ich gleichzeitig die Kardinalzahl oder Mächtigkeit der Mengen der betreffenden Klasse, welche ja für alle diese Mengen eine und dieselbe ist.

$M_{\mathfrak{a}}$ sei irgendeine bestimmte Menge der Klasse $\mathfrak{a}$.

Ich behaupte, daß das völlig bestimmte wohldefinierte System S *keine „Menge"* ist.

Beweis. Wäre S eine Menge, so würde auch

$$T = \sum M_{\mathfrak{a}},$$

diese Summe ausgeführt über alle Klassen $\mathfrak{a}$, eine *Menge* sein; es würde also T zu einer bestimmten Klasse, wir wollen sagen zu der Klasse $\mathfrak{a}_0$ gehören.

Nun aber besteht folgender Satz:

„Ist M irgendeine Menge von der Kardinalzahl $\mathfrak{a}$, so läßt sich aus ihr stets eine andere Menge M' ableiten, deren Kardinalzahl $\mathfrak{a}'$ größer ist als $\mathfrak{a}$."

Ich habe diesen Satz für die uns am nächsten liegenden Fälle, daß $\mathfrak{a}$ gleich $\aleph_0$ (Abzählbarkeit im gewöhnlichen Sinne des Wortes) und gleich $\mathfrak{c}$ ist, wo $\mathfrak{c}$ die Mächtigkeit des arithmetischen Kontinuums bedeutet, durch ein *gleichmäßiges Verfahren* in dem *ersten* Bande der Berichte der „Deutschen Mathematikervereinigung" [hier III 8, S. 278] bewiesen. Dieses Verfahren läßt sich *ohne jegliche Schwierigkeit* auf ein beliebiges $\mathfrak{a}$ übertragen. Die Bedeutung dieser Methode läßt sich einfach durch die Formel

$$2^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}$$

aussprechen.

Sei daher $\mathfrak{a}_0'$ irgendeine Kardinalzahl, die größer ist als $\mathfrak{a}_0$. Es enthält alsdann T mit der Mächtigkeit $\mathfrak{a}_0$ als Teil die Menge $M_{\mathfrak{a}_0'}$ von der größeren Mächtigkeit $\mathfrak{a}_0'$, was ein Widerspruch ist.

Das System T, mithin auch das System S sind daher *keine Mengen. Es gibt also* bestimmte Vielheiten, die *nicht zugleich Einheiten* sind, d. h. solche Vielheiten, bei denen ein reales „Zusammensein aller ihrer Elemente" *unmöglich* ist. Diese sind es, welche ich „inkonsistente Systeme", die anderen aber „Mengen" nenne.

4. Dedekind an Cantor.

29. August 1899.

Satz der Systemlehre.

Ist das System U ein Teil des Systems T, dieses ein Teil des Systems S, und ist S ähnlich dem U, so ist S auch ähnlich dem T.

Beweis[2]: Der Satz ist evident trivial, wenn T mit S oder mit U identisch ist. Im entgegengesetzten Falle, wo T echter Teil von S ist, sei A das System aller derjenigen Elemente von S, welche nicht in T enthalten sind, also (nach der Bezeichnung von Dedekind, Cantor, Schröder)

$$S = \mathfrak{M}(A, T) = (A, T) = A + T.$$

Nach Annahme ist S ähnlich dem (echten) Teile U von T, es gibt also eine ähnliche Abbildung φ von S in sich selbst, durch welche S in $S' = \varphi(S) = U$ übergeht; es sei A_0 die „Kette von A"[3] (§ 4 meiner Schrift: „Was sind und was sollen die Zahlen?"), also

$$A_0 = A + A_0';$$

da A_0 Teil von S, also $A_0' = \varphi(A_0)$ Teil von $S' = \varphi(S) = U$, mithin A_0' auch echter Teil von T ist, so haben A und A_0' kein gemeinsames Element, und A_0 ist auch echter Teil von S. Es sei B das System aller derjenigen Elemente von S, welche nicht in A_0 enthalten sind, also

$$S = A + T = A_0 + B, T = A_0' + B,$$

wo A_0' als Teil von A_0 kein Element mit B gemeinsam hat. Jetzt definieren wir eine Abbildung ψ von S, indem wir

$$\psi(s) = \varphi(s) \quad \text{oder} \quad \psi(s) = s$$

setzen, je nachdem das Element s von S in A_0 oder in B enthalten ist. Diese Abbildung ψ von S ist ähnlich; denn wenn s_1, s_2 verschiedene Elemente von S bedeuten, so sind sie *entweder* in A_0 enthalten; dann ist $\psi(s_1) = \varphi(s_1)$ verschieden von $\psi(s_2) = \varphi(s_2)$, weil φ eine ähnliche Abbildung von S ist (was hier zuerst und nur hier zur Geltung kommt); *oder* sie sind in B enthalten; dann ist $\psi(s_1) = s_1$ verschieden von $\psi(s_2) = s_2$;

oder das eine Element s_1 ist in A_0, das andere s_2 in B enthalten, dann ist $\psi(s_1) = \varphi(s_1)$ verschieden von $\psi(s_2) = s_2$, weil $\psi(s_1)$ in A_0', aber s_2 in B enthalten ist.

Durch diese ähnliche Abbildung ψ geht $S = A_0 + B$ in

$$\psi(S) = \psi(B) + \psi(A_0) = \varphi(A_0) + B = T$$

über, weil $\psi(A_0) = \varphi(A_0) = A_0'$ und $\psi(B) = B$ ist. W. z. b. w.

5. Cantor an Dedekind.

Hahnenklee, 30. Aug. 1899.

Vielen Dank für Ihr freundl. Schreiben, das ich noch gestern abend erhielt, im besonderen auch für die Aufzeichnung des einfachen Beweises, welchen Sie für den Satz C (und damit zugleich für den Satz B) meiner Abhandlung mit den Hilfsmitteln Ihrer Schrift: „Was sind und was sollen die Zahlen“ geführt haben. Abgesehen von der Form stimmt derselbe (wenn ich nicht irre) überein mit dem zuerst von Schröder im Herbst 1896 auf der Naturforscherversammlung in Frankfurt a. M. mitgeteilten und 1½ Jahre später in einer Abhandlung der Leopoldina veröffentlichten Beweise, den um Ostern 1897 herum der junge Herr Felix Bernstein im Hallischen Seminar selbständig wiedergegeben hat. Es wäre doch *sehr wertvoll*, wenn Sie mit denselben Hilfsmitteln auch den Hauptsatz A (aus dem die übrigen B, C, D, E als Korrolare leicht folgen) beweisen würden.

Machen wir uns klar, was zu diesem Ziele außer dem bereits geleisteten Beweise von B gehören würde!

Zwei beliebige Mengen M und N bieten vom rein logischen Standpunkte aus *vier* sich gegenseitig ausschließende Fälle dar:

I. Es gibt einen Teil von N, der äquivalent (nach Ihrer Ausdrucksweise „ähnlich“) ist M, dagegen ist kein Teil von M vorhanden, der äquivalent wäre N.

II. Es gibt keinen Teil von N, der äquivalent M wäre, dafür existiert aber ein Teil M_1 von M, der äquivalent ist N.

III. Es gibt einen Teil N_1 von N, der äquivalent ist M, und es gibt auch einen Teil M_1 von M, der äquivalent ist N.*

IV. Es gibt weder einen Teil von N, der äquivalent M, noch einen Teil von M, der äquivalent N wäre.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Kardinalzahlen M und N, so ist nach der von mir aufgestellten Definition des „Kleiner“ und „Größer“

In Fall I: $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$

In Fall II: $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$.

Zu beweisen ist daher, daß *sowohl* im Fall III, *wie auch* im Fall IV die Mengen M und N äquivalent sind, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist. Für den Fall III ist dies von Ihnen, den Herren Schröder und F. Bernstein durch den direkten Beweis des Satzes C geschehen. *Es bleibt also der Beweis des folgenden Satzes zu tun übrig*: „Sind zwei Mengen M und N so beschaffen, daß weder M einem Teil (nach Ihrer Sprache „echten Teil“) von N, noch N einem Teil von M äquivalent ist, so sind M und N äquivalent (und daher beide endliche Mengen).“

Schröder erklärt ausdrücklich, diesen Satz nicht beweisen zu können, mir ist der Beweis *ebensowenig mit den einfachen Mitteln* geglückt, die Sie zum Beweise von C resp. B geführt haben; ich kann ihn *nur indirekt* beweisen aus A, wofür ich den Beweis in meinem Briefe vom 3ten Aug. skizziert habe.

* N. B. Wenn ich von „Teil“ spreche, meine ich immer „echten Teil“.

[Anmerkungen.]

Der hier abgedruckte Teil aus dem (bisher unveröffentlichten) Briefwechsel der beiden Forscher bildet vor allem dadurch eine wesentliche und unentbehrliche Ergänzung der Abhandlungen, daß er Cantors letzte Gedanken über das System *aller* Ordnungszahlen und *aller* Alefs sowie über „konsistente“ und „inkonsistente“ Gesamtheiten überhaupt zum Ausdrucke bringt. Auch die Erörterungen über den „Äquivalenzsatz“ und die Frage der „Vergleichbarkeit“ beliebiger Mengen dürften für den modernen Leser von Interesse sein, vor allem aber der versuchte Beweis für den Satz, daß jede Mächtigkeit ein Alef sei. Der Dedekindsche (bis vor kurzem noch unbekannte und hier zuerst abgedruckte) Beweis des Äquivalenzsatzes [S. 449] kann noch heute als klassisch gelten, während der Cantorsche Versuch [S. 447], jede Mächtigkeit als Alef zu erweisen, augenscheinlich vom Autor selbst später als unzureichend erkannt wurde.

[1] Zu S. 447. Gerade hier liegt die Schwäche des skizzierten Beweises. Daß die ganze Zahlenreihe Ω in jede Vielheit V, die kein Alef zur Kardinalzahl hat, „hineinprojizierbar“ sein müßte, wird *nicht* bewiesen, sondern einer etwas vagen „Anschauung“ entnommen. Augenscheinlich denkt sich Cantor den Zahlen von Ω sukzessive und willkürlich Elemente von V zugeordnet in der Weise, daß jedes Element von V nur *einmal* zur Verwendung kommt. Dieses Verfahren müßte *entweder* einmal zum Abschlusse kommen, indem alle Elemente von V erschöpft wären, und dann wäre V einem *Abschnitte* der Zahlenreihe zugeordnet und seine Mächtigkeit wäre ein Alef gegen die Annahme. *Oder* aber V bliebe unerschöpflich und enthielte dann einen dem ganzen Ω äquivalenten, also inkonsistenten Bestandteil. Hier wird also die Zeitanschauung angewendet auf einen über alle Anschauung hinausgehenden Prozeß und ein Wesen fingiert, daß *sukzessive* willkürliche Auswahlen treffen könne und dadurch eine Teilmenge V' von V definieren, die durch die gestellten Bedingungen eben *nicht* definierbar ist. Erst durch Anwendung des „Auswahl-Axioms“, das die Möglichkeit einer *simultanen* Auswahl postuliert und das Cantor unbewußt und instinktiv überall anwendet, aber nirgends ausdrücklich formuliert, könnte V' als Teilmenge von V definiert werden. Aber auch dann bliebe immer noch das Bedenken bestehen, daß der Beweis mit „inkonsistenten“ Vielheiten, ja möglicherweise mit widerspruchsvollen Begriffen operiert und schon deswegen logisch unzulässig wäre. Bedenken dieser Art haben denn auch wenige Jahre später den Herausgeber bestimmt, seinen eigenen Beweis des Wohlordnungssatzes (Math. Ann. 59, S. 514; 1904) rein auf das Auswahlaxiom *ohne* Verwendung inkonsistenter Vielheiten zu begründen.

[2] Zu S. 449. Der vorliegende Beweis des hier formulierten, sachlich mit dem Schröder-Bernsteinschen „Äquivalenzsatze“ gleichbedeutenden Theorems arbeitet rein logisch mit den Begriffen der Dedekindschen „Ketten“-Theorie und ist nur unwesentlich verschieden von dem Beweise, den der Herausgeber 1908 ohne Kenntnis des Dedekindschen in den Math. Annalen Bd. 65, S. 271—272 veröffentlichte. Warum weder Dedekind noch Cantor sich damals zu einer Publikation dieses immerhin nicht unwichtigen Beweises entschlossen haben, ist heute nicht recht verständlich.

[3] ibid. Ist ein System (= Menge) S auf einen Teil S' von sich eineindeutig („ähnlich“) abgebildet und A ein beliebiger Bestandteil von S, so versteht Dedekind unter der „Kette von A“ den Durchschnitt aller solchen Bestandteile A_1 von S, welche 1. A selbst umfassen und 2. mit jedem ihrer Elemente s auch immer das zugehörige Bildelement s' enthalten. Diese „Kette“ A_0 ist dann nichts anderes als die Vereinigung der Mengen $A, A', A'', \ldots$, welche aus A durch fortgesetzte Anwendung der Abbildung φ von S auf S' hervorgehen.

Das Leben Georg Cantors.

Von Professor Dr. Adolf Fraenkel, Kiel.

1. Periode der Entwicklung (1845—1871).

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, der Schöpfer der Mengenlehre, einer der ganz großen Neugestalter im Reiche der Wissenschaft, wurde am 19. Februar alten Stils (3. März n. St.) 1845 in Petersburg geboren. Sein Vater Georg Woldemar Cantor war aus Kopenhagen gebürtig; er hatte in Petersburg, wohin er in jungen Jahren gekommen war, ein Maklergeschäft inne, das er unter seinem eigenen Namen, zeitweise auch unter der Firma „Cantor & Co.“ betrieb. Ein tüchtiger und erfolgreicher Kaufmann, brachte er es zu bedeutendem Wohlstand und hinterließ bei seinem Tode (1863) ein recht beträchtliches Vermögen; er scheint sowohl in Petersburg wie später in Deutschland sich hohen Ansehens erfreut zu haben. Eines Lungenleidens wegen siedelte er mit seiner Familie 1856 nach Deutschland über und nahm bald seinen Wohnsitz in Frankfurt a. M., wo er als Rentner lebte. Die Mutter, Maria geb. Böhm, entstammte einer kunstbegabten Familie, deren Einschlag sich offenbar im Phantasiereichtum des Sohnes fühlbar machte. Der Großvater Ludwig Böhm war Kapellmeister, dessen in Wien lebender Bruder Joseph war Lehrer des berühmten Violinvirtuosen Joachim; auch Maria Cantors Bruder war Musiker, ihre Schwester Annette hatte eine Tochter, die Malerin und Lehrerin an der Münchener Kunstgewerbeschule war. Bei den Geschwistern Georg Cantors selbst ist die künstlerische Ader gleichfalls merkbar: sein Bruder Constantin war ein talentvoller Klavierspieler, seine Schwester Sophie ist zeichnerisch besonders veranlagt.

Der begabte Knabe, der in Petersburg die Elementarschule besucht hatte, zeigte schon frühzeitig den brennenden Wunsch, das Studium der Mathematik zu ergreifen. Sein Vater war aber hiermit nicht einverstanden, sondern hielt das Brotstudium des Ingenieurfaches für geeigneter; der Sohn fügte sich zunächst und bezog, nachdem er vorübergehend das Gymnasium in Wiesbaden sowie Privatschulen in Frankfurt a. M. besucht hatte, Ostern 1859 die Großherzoglich-Hessische Provinzialrealschule in Darmstadt, an der auch Latein Lehrgegenstand war; von ihr trat er 1860 in den allgemeinen Kursus der Höheren Gewerbeschule (späteren Technischen Hochschule) über. Der Vater leitete die Erziehung von ungewöhnlich hohen Gesichtspunkten aus; Energie und Charakterfestigkeit sowie eine das ganze

Leben durchdringende Religiosität schwebten ihm als besonders wesentlich vor, im einzelnen betonte er dem Sohne gegenüber namentlich die Wichtigkeit völliger Beherrschung der hauptsächlichen modernen Sprachen. Der anläßlich der Konfirmation (in einem Brief aus dem Jahre 1860) zum Ausdruck kommenden väterlichen Mahnung, sich aller Gegnerschaft zum Trotz stets aufrecht zu erhalten und durchzusetzen, wird sich der Sohn später in gar manchen schweren Stürmen erinnert haben; vielleicht ist es dieser väterlichen Erziehung mit zu danken, wenn der schöpferische Geist nicht vorzeitig gebrochen und die Nachwelt nicht um seine Früchte betrogen worden ist.

Die tiefe Neigung des Sohnes zur Mathematik blieb auf die Dauer nicht ohne Eindruck und Wirkung auf seinen Vater, dessen Verehrung gegenüber der Wissenschaft auch aus seinen Briefen ersichtlich wird. Der Sohn konnte sich für die Einwilligung des Vaters zu seinen Plänen durch folgenden Brief an ihn bedanken, der vom 25. Mai 1862 aus Darmstadt datiert ist und der den ältesten erhaltenen Brief Cantors darstellt: „Mein lieber Papa! Wie sehr Dein Brief mich freute, kannst Du Dir denken; er bestimmt meine Zukunft. Die letzten Tage vergingen mir im Zweifel und der Unentschiedenheit; ich konnte zu keinem Entschluß kommen. Pflicht und Neigung bewegten sich im steten Kampfe. Jetzt bin ich glücklich, wenn ich sehe, daß es Dich nicht mehr betrüben wird, wenn ich in meiner Wahl dem Gefühle folge. Ich hoffe, Du wirst noch Freude an mir erleben, teurer Vater, denn meine Seele, mein ganzes Ich lebt in meinem Berufe; was der Mensch will und kann, und wozu ihn eine unbekannte, geheimnisvolle Stimme treibt, das führt er durch! . . .“

Im Herbst 1862 nahm Cantor sein Studium in Zürich auf, von wo er indes schon nach dem ersten Semester infolge des Todes seines Vaters wieder wegging. Vom Herbst 1863 an studierte er Mathematik, Physik und Philosophie in Berlin, wo das Dreigestirn Kummer, Weierstraß, Kronecker die besten Begabungen anzog und auf den (damals noch recht kleinen) Hörerkreis Anregungen nach den verschiedensten Richtungen ausstrahlte. Nur das Sommersemester 1866 verbrachte er in Göttingen. Den weitaus größten Einfluß auf seine wissenschaftliche Entwicklung hat Weierstraß ausgeübt. Es ist bemerkenswert und gleicherweise für die Weite des Gesichtskreises von Weierstraß wie für sein vorurteilsfreies und vorausblickendes Urteil bezeichnend, daß er die tiefe Verehrung, die sein Schüler ihm entgegenbrachte und unbeschadet vorübergehender Trübungen zeitlebens bewahrt hat, mit einem frühzeitigen verständnisvollen Eingehen auf dessen neuartige Ideen erwiderte. In seiner Berliner Zeit hat Cantor außer dem Mathematischen Verein noch einem engeren Kreise junger Fachgenossen angehört, die sich allwöchentlich in der Rähmelschen Weinstube trafen; neben gelegentlichen Gästen umfaßte dieser Kreis namentlich noch Henoch (den nachmaligen Herausgeber der „Fortschritte“), Lampe, Mertens, Max Simon, Thomé, unter denen sich der letztgenannte besonders eng an Cantor anschloß. Ferner gehörte zu seinen Berliner Studiengenossen der um zwei Jahre ältere H. A. Schwarz, der freilich später entgegen dem Beispiel seines Lehrers Weierstraß den Ideen Cantors äußerstes Mißtrauen entgegenbrachte und sogar gleich Kronecker die Studenten ausdrücklich und bis in die letzte Zeit vor ihnen warnte.

Am 14. Dezember 1867 promovierte der 22jährige Student auf Grund tiefergehenden Studiums der *Disquisitiones arithmeticae* sowie der Zahlentheorie Legendres an der Berliner Universität mit der von der Fakultät als „dissertatio docta et ingeniosa“ bezeichneten Arbeit [I 1][1]; sie ist seinen und seiner Geschwister Vormündern gewidmet. Im mündlichen Examen erhielt er „magna cum laude“. Von den bei der Promotion verteidigten Thesen ist besonders charakteristisch die dritte: „In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.“ Vielleicht sind auch auf dem Gebiete der Mengenlehre die von ihm erreichten *Resultate* nicht ganz so wesentlich wie die revolutionären *Problemstellungen*, die noch so weit über sein eigenes Werk hinaus fortwirken.

Es scheint, daß Cantor in Berlin kurze Zeit an einer Mädchenschule unterrichtet hat; jedenfalls war er 1868, nach bestandener Staatsprüfung, Mitglied des bekannten Schellbachschen Seminars für Lehrer der Mathematik.

Die Habilitationsschrift [I 5], auf Grund deren er sich im Frühjahr 1869 als Privatdozent in Halle niederließ, gehörte ebenso wie einige kleinere in den Jahren 1868—72 veröffentlichte Noten noch diesem seinem ersten, arithmetischen Arbeitsgebiete an, auf das er später nur mehr selten zurückgekommen ist[2]. Diese wohl vornehmlich von Kronecker angeregte Beschäftigung mit der Zahlentheorie ist ihm indes nicht nur eine zufällige Angelegenheit gewesen; vielmehr hat sich ihm die besondere Reinheit und Schönheit dieser Disziplin tiefinnerlich geoffenbart, wie das außer der ersten Doktorthese auch die dritte der bei seiner Habilitation verteidigten Thesen zeigt: „Numeros integros simili modo atque corpora coelestia totum quoddam

[1] Sie knüpft an die Gaußschen Formeln zur Lösung der diophantischen Gleichung $a x^2 + a' x'^2 + a'' x''^2 = 0$ an, um eine dort nicht auf explizite Form gebrachte Abhängigkeit zu ermitteln. — Die Abhandlungen Cantors werden nachstehend mit den in eckige Klammern gesetzten Nummern (der Abteilungen und Aufsätze innerhalb einer Abteilung) zitiert, unter denen sie in diesem Buch erscheinen. Eine eingehende Erörterung des Inhalts der Cantorschen Abhandlungen findet man in meiner ausführlichen Cantor-Biographie, die im *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*, Bd. 39 (1930), S. 189—266, sowie auch in selbständiger Form erschienen ist: Georg Cantor. Leipzig und Berlin 1930.

[2] Das Ziel von [I 5] ist die Bestimmung aller Transformationen, die eine ternäre quadratische Form in sich selbst überführen; Cantor schlägt hierzu einen Weg ein, der verschieden ist von demjenigen, den schon 1854 Hermite beschritten hatte.

legibus et relationibus compositum efficere.“ Aus früher Zeit, vielleicht schon aus dieser Periode, stammt auch die Aufstellung von Zusammenhängen zwischen verschiedenen zahlentheoretischen Funktionen und der Riemannschen Zetafunktion (im Anschluß an Riemanns Primzahlenarbeit), die Cantor erst 1880 in [I 7] unter dem Eindruck einer Pariser Comptes-Rendus-Note von Lipschitz veröffentlicht. Von weiteren zahlentheoretischen Interessen Cantors kennen wir außer einer Zahlentabelle[1] nur noch den 1884 bestehenden, aber nicht zur Ausführung gelangten Plan, in den *Acta Mathematica* eine Arbeit über quadratische Formen zu veröffentlichen[2].

E. Heine, der Ordinarius in Halle war, als sich Cantor dort habilitierte, erkannte sogleich, in wie glücklicher Weise der junge Kollege mit ungewöhnlichem Scharfsinn eine außerordentliche Phantasie verband. Es wurde von entscheidender Bedeutung, daß er Cantor alsbald nach seiner Niederlassung in Halle anregte, sich mit der Theorie der trigonometrischen Reihen zu beschäftigen. Der Eifer, mit dem dieser sich auf den Gegenstand stürzte, zeitigte nicht nur an und für sich eine Reihe wesentlicher Erfolge, sondern führte ihn auch auf den Weg zur Theorie der Punktmengen und gleichzeitig zu den transfiniten Ordnungszahlen. Während nämlich die Arbeiten [II 1], [II 4], [II 6] und [II 7] eine Behauptung Riemanns über trigonometrische Reihen präzisieren (und nebenbei in einer Polemik gegen Appell auf den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz näher eingehen), beweist Cantor in [II 2] den Eindeutigkeitssatz der trigonometrischen Darstellung[3]. Das Bestreben, dieses Ergebnis in dem Sinne zu erweitern, daß über das Verhalten der Reihe in gewissen Ausnahmemengen nichts vorausgesetzt werde, nötigt ihn nun in [II 5] zur andeutungsweisen Entwicklung von Ideen, „welche dazu dienen mögen, Verhältnisse in ein Licht zu stellen, die stets auftreten, sobald Zahlengrößen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind“; es handelt sich um die Einführung der Grenzpunkte und Ableitungen (endlicher Ordnung) von Punktmengen. Zu diesem Zwecke entwickelt er einerseits seine Theorie der Irrationalzahlen[4] als Fundamentalreihen, die seinen Namen nächst der Mengenlehre in zweiter

[1] Zur empirischen Verifikation des Goldbachschen Theorems bis zur Zahl 1000. Cantor hatte die Tabelle um 1884 herstellen lassen, veröffentlichte sie aber erst 1895 in den C. R. der *Association Française pour l'Avancement des Sciences*, 23^{me} Session (Caen 1894).

[2] Vgl. Acta Math. 50, 20.

[3] Es ist bemerkenswert, daß Kronecker, der (vgl. [II 3]) zu Cantors Eindeutigkeitssatz positiv Stellung nimmt, später das Ergebnis völlig ignoriert, indem er z. B. in den „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale“ (1894) die Eindeutigkeitsfrage als noch offen hinstellt (S. 94f.)!

[4] Die von Heine in seinen *Elementen der Funktionenlehre* (J. Math. 74, 172—188 [1872]) entwickelte Einführung der Irrationalzahlen geht ganz und gar auf Cantors Ideen zurück; vgl. die Einleitung zu Heines Aufsatz sowie [IV 4] (oben S. 385).

Linie unsterblich gemacht hat, und vollzieht andererseits den Übergang zur Geometrie durch die Aufstellung eines besonderen Axioms (Axiom von Cantor), das in etwas anderer Form und Tragweite gleichzeitig und unabhängig auch in Dedekinds Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ erscheint.

2. Zeit der schöpferischen Höchstleistung (1871—1884).

Mit der ebengenannten Abhandlung [II 5] beginnt das Leben Cantors aus der bisherigen normalen Entwicklung eines begabten Gelehrten herauszutreten; in eine zweite Periode, die die Jahre von etwa 1871—1884 umfaßt, fällt die äußerste und von Erfolg gekrönte Kraftanstrengung des genialen Forschers.

Die Jahre 1872—74 bringen zunächst zwei bedeutsame Ereignisse in Cantors persönlichem Leben. Auf einer der Reisen nach der Schweiz, die in seinen jüngeren Jahren nicht selten gewesen sind, macht er 1872 in Gersau ganz zufällig die Bekanntschaft Dedekinds. Sie führt neben öfteren persönlichen Zusammenkünften, die späterhin meist in Harzburg erfolgten, auch zu einem Briefwechsel, von dem uns aus den Jahren 1873—79 sowie aus dem Jahre 1899 38 Briefe erhalten sind. Wenn auch der mathematische Ertrag dieser Korrespondenz beschränkt ist, so geben sie doch einen wertvollen Einblick in die Arbeitsweise und Stimmung Cantors zu den betreffenden Zeiten und in die Gegensätzlichkeit der beiden Naturen, die gleichwohl durch dauerhafte Freundschaft und gegenseitige Wertschätzung verbunden blieben. Dabei erscheint, um die Ostwaldschen Termini zu benutzen, Cantor als der „Romantiker“ gegenüber dem „Klassiker“ Dedekind; dieser Unterschied, den auch das Tempo der Briefe Cantors, die sich in wissenschaftlichen Sturm- und Drangzeiten förmlich überstürzen, im Gegensatz zu dem mit stets gleichbleibender Pünktlichkeit antwortenden Dedekind zeigt, sowie die namentlich im Anfang des Briefwechsels recht fühlbare Altersdifferenz (Dedekind war 14 Jahre älter) lassen im großen und ganzen Cantor als den Fragenden und Nehmenden in diesem Briefwechsel erscheinen. Wie er in einem der ersten Briefe sein Bedürfnis äußert, sich über wissenschaftliche Gegenstände mit Dedekind auszusprechen und ihm im persönlichen Verkehr näherzutreten, so sehen wir ihn dauernd eine verehrungsvolle Dankbarkeit bewahren für das, was diese Verbindung ihm gibt, sowie für die „vielfache Anregung und reichliche Belehrung“, die er von Dedekinds „klassischen Schriften empfangen“ habe (Brief vom 31. August 1899). Weit mehr allerdings, als es aus den Briefen ersichtlich wird, zeigen mittelbar die Verschiedenheiten in der Anlage der frühen und der späteren mengentheoretischen Veröffentlichungen Cantors den tiefgreifenden Einfluß der abstrakteren, mit Vorliebe analytisch vorgehenden Art Dedekinds, die nach abgerundeter Systematik drängt,

gegenüber dem mehr konstruktiven Stil des jüngeren Cantor, der gerne zum Einzelstoß vorwärtsstürmt — eine Verschiebung, die in manchen Zügen gewissen heutzutage sehr ausgeprägten Tendenzgegensätzen in der Grundlagenforschung entspricht.

Um die nämliche Zeit lernte Cantor seine künftige Gattin Vally Guttmann kennen. Nachdem er 1872 in Halle Extraordinarius geworden war, fand im Frühjahr 1874 die Verlobung, im Sommer die Hochzeit statt. Auf der Hochzeitsreise traf das junge Paar in Interlaken mit Dedekind zusammen. Aus der Ehe gingen vier Töchter und zwei Söhne hervor; spezifisch-mathematische Begabung ist bei keinem der Kinder hervorgetreten.

Die siebziger Jahre schenkten Cantor verschiedene äußere Erfolge: neben der ihm schon 1869 übertragenen ordentlichen Mitgliedschaft der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle vor allem die Wahl zum Korrespondierenden Mitglied der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1878 — anscheinend der einzigen deutschen Akademie oder Universität außer Halle, die Cantors Verdienst überhaupt öffentlich geehrt hat —, ferner eine von ihm abgelehnte Berufung an die Akademie in Münster 1878 und die Beförderung zum Ordinarius in Halle 1879.

Die 1874 erschienene Abhandlung [III 1], neben dem Mittelstück von [II 5] die erste in die Mengenlehre einschlagende Veröffentlichung Cantors, tut gleich den entscheidenden Schritt klarer Abgrenzungen im Transfiniten, und zwar hinsichtlich des Mächtigkeitsbegriffes; während beim naiven „Unendlich“ alle Unterschiede verschwimmen und auch Cantor selbst zuerst noch das Kontinuum als abzählbar vermutet hatte, folgt hier auf den Satz von der Abzählbarkeit der Menge der algebraischen Zahlen der Beweis, daß die Menge aller reellen Zahlen nicht mehr abzählbar ist; Cantor konstruiert nämlich zu jeder Folge reeller Zahlen eine darin nicht enthaltene Zahl auf Grund der Methode des Schachtelungsprinzips. Aus der Gegenüberstellung beider Resultate folgt ein Existenzbeweis für unendlich viele transzendente Zahlen in jedem Intervall.

Der Versuch lag nahe, über die beiden so gefundenen transfiniten Mächtigkeiten zu höheren dadurch aufzusteigen, daß man vom eindimensionalen zu mehrdimensionalen Kontinuen übergeht. Dieser Gedanke beschäftigte unseren Forscher schon im Sommer 1874, wie seine Korrespondenz mit Dedekind zeigt. Welch neue Einstellung es erforderte, hier überhaupt ein Problem zu sehen, zeigt eine briefliche Bemerkung Cantors, wonach ihm in Berlin von einem Freunde die Idee einer Abbildbarkeit des linearen Kontinuums auf das ebene „gewissermaßen als absurd erklärt wurde, da es sich von selbst verstünde, daß zwei unabhängige Veränderliche sich nicht auf eine zurückführen lassen“; einen ähnlichen Bescheid erhielt er später bei einem Besuch in Göttingen gelegentlich des Gauß-Jubiläums 1877.

In einem Brief vom 20. Juni 1877 aber teilt er nach jahrelangen Bemühungen einen Versuch der Abbildung eines eindimensionalen Kontinuums auf ein mehrdimensionales an Dedekind mit, indem er den Freund um Prüfung des Beweises bittet; das Resultat kam ihm selbst höchst überraschend („je le vois, mais je ne le crois pas") und schien ihm den Dimensionsbegriff bzw. die Charakterisierbarkeit der Dimension durch die Anzahl der unabhängigen Koordinaten zu erschüttern. Die Antwort Dedekinds weist auf eine (später von Julius König durch einen einfachen Kunstgriff beseitigte) Lücke im Beweis hin, was Cantor veranlaßt, von den zuerst benutzten Dezimalbruchentwicklungen zu Kettenbruchdarstellungen überzugehen; weiter hebt Dedekind hinsichtlich des von ihm verteidigten Dimensionsbegriffes die Bedeutung hervor, die der *Stetigkeit* bei der Zuordnung zukommt.

Im wesentlichen ist es der darauf brieflich an Dedekind mitgeteilte verbesserte Beweis, mit dem Cantor in [III 2] die Unabhängigkeit der Mächtigkeit eines Kontinuums von seiner Dimensionenzahl nachweist. In dieser Arbeit finden sich u. a. bereits der Äquivalenzbegriff, eine Einführung der Mächtigkeit und die Kontinuumshypothese; wenn Cantor hier ohne Beweis auch die Vergleichbarkeit der Mächtigkeiten behauptet, so sieht er offenbar zu dieser Zeit (und noch lange danach) diese Eigenschaft als selbstverständlich an.

Allerdings war das Erscheinen dieser Arbeit im Crelleschen Journal nicht ohne Schwierigkeit vor sich gegangen; sie blieb bei der Redaktion, der sie am 12. Juli 1877 eingereicht war, zunächst etwas über das damals übliche Maß und weit über Cantors Ungeduld liegen, obgleich sich Weierstraß für sie einsetzte. Im November beklagte sich der Autor gegenüber Dedekind bitter darüber, daß sich der Druck trotz des gegenteiligen Versprechens der Redaktion „in einer für mich auffallenden unerklärlichen Weise" verzögere und zugunsten später eingelaufener Arbeiten aufgeschoben werden solle; der Grund lag vielleicht in der Paradoxie des Resultates für die damalige Zeit. Glücklicherweise gelang es Dedekind, den Freund unter Hinweis auf eigene Erfahrung von der überstürzten Absicht, das Manuskript zurückzuziehen und als gesonderte Schrift zu publizieren, noch zurückzuhalten; auch bei Crelle lösten sich die eingetretenen Schwierigkeiten bald auf, und die Arbeit konnte rechtzeitig erscheinen. Doch ist dies die letzte Veröffentlichung Cantors im Crelleschen Journal; der Verzögerung scheint, wenn sie auch vielleicht von Cantor zunächst zu schwer genommen wurde, schon der ablehnende Standpunkt Kroneckers zu den Ideen seines vormaligen Schülers zugrundezuliegen, aus dem sich dann die Krisis des Jahres 1884 entwickeln sollte.

Fühlte sich Cantor durch diese Dinge ungemein deprimiert, so hatte ihn andererseits die Ernennung zum ordentlichen Professor in Halle nur in beschränktem Maße befriedigt, da er sich nach einem anderen Ort und einem

größeren Wirkungskreise sehnte. Schon 1874 äußert er sich zu Dedekind: „In den Ferien habe ich bis jetzt nie lange hierselbst ausgehalten, denn das einzige, was mich an Halle seit fünf Jahren gewissermaßen bindet, ist der einmal gewählte Universitätsberuf." Seine Annahme, daß die Nichtberufung nach auswärts sich auf eine kritische Beurteilung seiner Arbeiten durch einflußreiche Fachgenossen gründe, wird bei dem Ansehen, das Kronecker damals fast unbestritten genoß, durchaus berechtigt gewesen sein. So ist auch 1883 eine Bewerbung Cantors beim Minister um eine Stelle in Berlin, mit der er nicht sowohl unmittelbaren Erfolg zu erzielen als vielmehr künftigen Gegenschritten von Schwarz und Kronecker im voraus zu begegnen hoffte, ohne Erfolg geblieben; vielmehr rief sie eine kräftige Gegenwirkung bei Kronecker hervor.

Eine überraschende und kaum bekanntgewordene Bemerkung Cantors scheint zu beweisen, daß er schon zu Anfang der siebziger Jahre die Tragweite der ihm vorschwebenden Gedanken wie auch den ihnen erwachsenden Widerstand klar vor Augen gehabt hat; also zu einer Zeit, da er eben erst durch die Untersuchungen über trigonometrische Reihen auf das Aktual-Unendliche geführt worden war und als seine erste im engeren Sinne mengentheoretische Arbeit [III 1] noch nicht die Öffentlichkeit erreicht hatte. Die Absicht, in der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle einmal einen Vortrag zu halten, dessen Thema naturgemäß allgemeinverständlich sein mußte, lenkte ihn auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit der er sich schon seit einigen Jahren beschäftigt hatte. In dem dann am 6. Dezember 1873 gehaltenen Vortrag [IV 1] bemerkt er in bezug auf den Franzosen de Meré (17. Jahrh.), der gegenüber Blaise Pascal die Autorität des Mathematikers in einer Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestritt: „Der Chevalier de Meré darf, wie ich glaube, allen Widersachern der exakten Forschung, und es gibt deren zu jeder Zeit und überall, als ein warnendes Beispiel hingestellt werden; denn es kann auch diesen leicht begegnen, daß genau an jener Stelle, wo sie der Wissenschaft die tödliche Wunde zu geben suchen, ein neuer Zweig derselben, schöner, wenn möglich, und zukunftsreicher als alle früheren, rasch vor ihren Augen aufblüht — wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vor den Augen des Chevalier de Meré." — Hierzu sei nur noch vermerkt, daß Cantor in seinen späteren Briefen an Mittag-Leffler von Kronecker regelmäßig unter dem Spitznamen „Herr von Meré" spricht.

Im Gegensatz zu Kronecker bewies Weierstraß schon um jene Zeit volles Verständnis für die neuen Ideen seines früheren Schülers. Wie er bereits für dessen Seminarvortrag, worin er schon als Student die rationalen Zahlen zu einer einfachen Folge anordnete, Interesse gezeigt hatte, so verstand er es nach kurzem anfänglichem Stutzen auch sehr rasch, den ihm Ende 1873 mitgeteilten Begriff der Abzählbarkeit im allgemeinen zu würdigen, und machte alsbald eine Anwendung von der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen auf eine Frage der reellen Funktionen[1]. Ebenso war es eine Anregung von Weierstraß, auf die hin Cantor selbst zum erstenmal (in [II 8]) den Begriff der Abzählbarkeit in der Analysis anwandte, während umgekehrt Weierstraß 1885 durch Cantors Inhaltstheorie in [III 6] zur Beschäftigung mit der Theorie der reellen Funktionen angeregt wurde[2].

In engem Zusammenhang mit [III 2], gewissermaßen als Gegenstück, steht die Arbeit [III 3], die die Bedeutung der Stetigkeit für den Dimensionsbegriff zu erweisen sucht; dieser Gedanke ist wesentlich aus der Korrespondenz mit Dedekind erwachsen. Bekanntlich ist die in dem (unzureichenden) Beweise enthaltene Invarianz der Dimensionenzahl erst viele Jahrzehnte später durch L. E. J. Brouwer auf feste Grundlagen gestellt worden.

Der Beginn der achtziger Jahre bringt das intensivste Schaffen Cantors, die gewaltigste, alle scheinbar festgefügten Grenzen überflutende Entfaltung seiner genialen Ideen, aber auch die schwere und bis zum Schluß fortwirkende Krisis in seinem Leben.

Die in den Jahren 1879—84 in sechs Teilen erschienene Abhandlung [III 4] gehört zu den Erscheinungen in der Geschichte, wo sich ein durchaus neuer, mit den Anschauungen der Vergangenheit und Gegenwart in völligem Widerspruch stehender Gedanke von epochemachender Bedeutung durchringt und mit wachsender Deutlichkeit herauskristallisiert, in seiner Kühnheit und Neuartigkeit auch dem Schöpfer selbst nur allmählich bewußt werdend. 1870 taucht in ihm zum erstenmal der Gedanke der transfiniten Zahlen auf; 1873 erkennt er die Bedeutung der *Abzählbarkeit* und die zwischen ihr und dem *Kontinuum* gähnende Kluft; erst jetzt aber entschließt er sich, seine Ideen in weitem Rahmen der Mitwelt vorzulegen, und zwar im vollen Bewußtsein ihrer Auswirkungsmöglichkeit: so spricht er hier z. B. „von den Gebieten, welche unter der Mannichfaltigkeitslehre stehen oder mit ihr die innigste Berührung haben, wie beispielsweise von der modernen Funktionentheorie einerseits und von der Logik und Erkenntnislehre andererseits". Zum mindesten im fünften Teil, der auch selbständig mit besonderem Vorwort erschienen ist[3], hat diese Abhandlung [III 4] nicht bloß für Mathematik und Philosophie, sondern für die Geschichte der Wissenschaft und des menschlichen Denkens überhaupt Bedeutung; sie wird sich zweifellos noch von so manchem zunächst fernerliegenden Gesichtspunkt aus als aufschluß-

[1] Siehe den Brief von Weierstraß an P. du Bois-Reymond vom 15. Dez. 1874 (Acta Mathematica 39, 206 [1924]).

[2] Siehe den Brief von Weierstraß an Sonja Kowalewsky vom 16. Mai 1885 (ebenda, S. 195f.).

[3] Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig 1883.

reich und wertvoll erweisen. Die Redaktion der *Mathematischen Annalen* hat sich ein hohes Verdienst erworben, indem sie die Spalten ihrer Zeitschrift diesen Ideen öffnete, die damals die mathematische und philosophische Welt vor den Kopf stießen und noch über ein Jahrzehnt lang einen bitteren Kampf um ihre Anerkennung zu führen hatten.

Auf die Aufsatzfolge [III 4] geht in erster Linie die Theorie der Punktmengen zurück[1]; sie enthält in Verbindung mit den sie ergänzenden Arbeiten [III 5—7] vor allem die Theorie der Ableitungen, die Untersuchung der Struktur der Punktmengen und die Inhaltstheorie sowie die Theorie der Ordnungszahlen, insbesondere die der zweiten Zahlklasse. Von Einzelheiten, die sich nicht unmittelbar auf diese Hauptthemen beziehen und von allgemeinerer Bedeutung sind, seien die folgenden genannt: die Erhaltung der Zusammenhangseigenschaft des R_n, falls man aus ihm eine dichte abzählbare Menge entfernt, wonach sich auch in einem solchermaßen unstetigen Raume eine stetige Bewegung als möglich erweist; das Bekenntnis zu Beginn von [III 4_5], daß ohne eine Erweiterung der Zahlenreihe in das Transfinite eine gedeihliche Fortführung seiner Untersuchungen nicht möglich sei, doch werde sich eine solche Erweiterung, so anstößig sie der mathematischen Welt auch zunächst erscheinen möge, schließlich durchsetzen; die Ablehnung der unendlich kleinen Größen sowie der finitistischen Auffassung Kroneckers und die Auseinandersetzung mit den finitistisch orientierten Philosophen des Altertums und Mittelalters bis zu Spinoza, Leibniz und Kant; die historisch-kritische und logisch-mathematische Analyse des Wesens des Kontinuums; die allgemeine Methode der Intervall-Schachtelung.

Zwischen diese Aufsatzfolge schiebt sich die Abhandlung [II 8] ein, in der Cantor den Begriff der Abzählbarkeit auf Anregung von Weierstraß zu einer Methode der Kondensation von Singularitäten benutzt.

In der ungeheuren geistigen Anspannung, die mit der Konzeption der umwälzenden Ideen von [III 4] — namentlich der Theorie der transfiniten Ordnungszahlen — und deren Behauptung gegenüber dem Widerstreben der zeitgenössischen Forscher verbunden war, treten als verschärfende Momente zwei spezielle Schwierigkeiten hervor: das Ringen mit dem *Kontinuumproblem* und die Zuspitzung des Gegensatzes zu Kronecker. Über beide sind wir durch die von A. Schoenflies herausgegebenen Briefe Cantors an Mittag-Leffler[2] aus dem Jahre 1884, das eine entscheidende Wendung in seinem Leben bedeutet, gut unterrichtet.

[1] Ein noch geplant gewesener siebenter Artikel ist (jedenfalls infolge der Erkrankung Cantors) nicht mehr zustande gekommen.

[2] A. Schoenflies, Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen. Acta Math. **50**, 1—23 (1928). Vgl. auch Mittag-Leffler, ebenda S. 25f.

Als zu Beginn des Jahres 1884 die grundlegende Abhandlung [III 4] fertig vorlag, hatte Cantor die bereits in [III 1] aufgefundene und in [III 2] unterstrichene Zweiteilung der unendlichen Punktmengen — in abzählbare und dem Linearkontinuum äquivalente — weitgehend durchgeführt, wobei vor allem die „perfekten" Mengen sich als zur zweiten Kategorie gehörig erwiesen. Auf der anderen Seite hatte er, gleichfalls ausgehend von den Punktmengen, die transfiniten Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse (als Symbole der Vielfachheit der Ableitungen) eingeführt, indem er sie durch analoge Grenzprozesse konstruierte, wie solche als Fundamentalreihen die irrationalen Zahlen hervorbringen. So lag die Vermutung, die er in der Tat am Schluß von [III 4_6] behauptet mittels seiner bisherigen Sätze beweisen zu können, außerordentlich nahe, daß die zweite Zahlklasse selbst von der Mächtigkeit des Kontinuums sei; der Beweis dieser Vermutung hätte einen krönenden Abschluß seiner bisherigen Resultate bedeutet. Indes bleiben die Versuche, den Beweis durchzuführen, sowohl damals wie auch im Sommer und Herbst des Jahres 1884, wo er mit immer neuen Methoden an das Problem herangeht, erfolglos[1]; ja im November nimmt er seine Vermutung sogar einmal zurück zugunsten eines vermeintlich gefundenen Beweises dafür, daß dem Kontinuum überhaupt kein Alef als Mächtigkeit zukomme — um dieser Meinung freilich schon tags darauf zu widersprechen. So folgt den immer wieder vergeblichen Bemühungen die Abspannung, die Mutlosigkeit, die Resignation; im Herbst 1884, also nach der bald zu erwähnenden gesundheitlichen Krisis, kommt eine Stimmung der Abkehr von der Mathematik überhaupt zum Durchbruch. Er will sich von ihr ganz und gar abwenden und erwägt eine Bitte an das Ministerium, man möge ihn in der Vorlesungstätigkeit von der Mathematik zur Philosophie übergehen lassen[2]. Vor allem ergibt er sich aber um jene Zeit, offenbar im Zusammenhang mit der gesundheitlichen Störung, mit größter Energie der Aufgabe, nachzuweisen, daß Francis Bacon der Autor der Shakespeareschen Dramen sei[3]; wie er seine Bemühungen auch nach dieser Richtung mit der ihm eigenen Hin-

[1] Ein gleichfalls aus dem Sommer 1884 stammender Versuch P. Tannerys, die Vermutung Cantors zu beweisen, beruht auf einem Fehlschluß (Bull. Soc. Math. France **12**, 90—96 [1884]).

[2] In der Tat hat Cantor gelegentlich Übungen philosophischer Richtung gehalten, so z. B. über Leibniz, um durch Vergleich mit dessen Gedanken seine eigene Theorie des Aktual-Unendlichen zu erläutern. Er betonte dabei gern, daß er als Ordinarius der Philosophischen Fakultät selbst über Sanskrit zu lesen das Recht habe.

[3] „Francis Bacon, er und nur er allein kann der Autor dieser Meisterwerke gewesen sein; denn es ist ein und derselbe Feuergeist, der uns in den Dramen einerseits und in den ‚Moral essays' sowie den übrigen Werken Bacons andererseits entgegentritt . . ." heißt es in Cantors Brief an Mittag-Leffler vom 17. Dez. 1884, in dem anscheinend zum erstenmal von diesem Gegenstande die Rede ist.

gabe und Hartnäckigkeit verfolgt, das bezeugen u. a. die von ihm zu diesem Gegenstand herausgegebenen Schriften[1]; nach seinem Brief an Dedekind vom 28. Juli 1899 ist diese Frage, der er in Depressionszeiten sogar in den Vorlesungen und Übungen nachging, nur aus Mangel an Zeit und Geld schließlich zur äußeren Ruhe bei ihm gekommen, das lebhafteste Interesse dafür aber hat ihn durchs ganze Leben begleitet. Mit aus dieser Stimmung der mathematischen Resignation heraus und wohl nur zum Teil vermöge des wirklichen Sachverhaltes wird es sich erklären, wenn er sich zu jener Zeit dahin äußert, er habe „das mühsame und wenig Dank verheißende Geschäft der Untersuchung von Punktmengen" hauptsächlich deshalb unternommen, um die Resultate „auf die Naturlehre der Organismen" anzuwenden, für die die bisherigen mechanischen Prinzipien nicht hinreichend seien und mit der er sich schon seit 14 Jahren beschäftige.

Bei diesem Entschluß zur Abkehr von der Mathematik, dem er freilich schon im Laufe des Jahres 1885 wiederholt durch rein mathematisches Forschen entgegenhandelt, ist indes noch stärker als der Mißerfolg mit dem Kontinuumproblem wahrscheinlich die Enttäuschung wirksam gewesen, die Cantor damals über die Aufnahme seines bisherigen Werkes in der mathematischen und philosophischen Welt empfand. Der im 40. Lebensjahr stehende Forscher, der seit nunmehr zehn Jahren in der Öffentlichkeit mit seinen neuen Ideen hervorgetreten war, hegte den begreiflichen Wunsch nach Anerkennung seines Werkes durch die Fachgenossen und nach wissenschaftlichem Einfluß auf die angehenden Forscher. Im ganzen war ihm dies versagt geblieben. Nur zu einer recht beschränkten Erfüllung seiner Wünsche verhalf ihm die Freundschaft mit Mittag-Leffler, die bis zum Ende fortgedauert hat und so fest gegründet war, daß sie auch gewissen (teils wirklichen, teils nur befürchteten) sachlichen Differenzen der Jahre 1884—85 Trotz bieten konnte. Als Mittag-Leffler, 1881 an die neugeschaffene Stockholmer Universität gekommen, sogleich an die Gründung der *Acta Mathematica* schritt, forderte er Cantor nicht bloß auf, sich des neuen Journals für seine Veröffentlichungen zu bedienen, sondern veranlaßte überdies die Übersetzung der Arbeiten [II 4], [II 5], [III 1], [III 2] und vor allem des größten Teiles von [III 4_{1-5}] ins Französische

[1] Resurrectio Divi Quirini Francisci Baconi Baronis de Verulam Vicecomitis Sancti Albani CCLXX annis post obitum eius IX die aprilis anni MDCXXVI. (Pro manuscripto.) Cura et impensis G[eorgii] C[antoris]. Halis Saxonum MDCCCXCVI. [Mit englischer Vorrede von „Dr. phil. George Cantor, Mathematicus".]

Confessio fidei Francisci Baconi Baronis de Verulam . . . cum versione Latina a G. Rawley . . ., nunc denuo typis excusa cura et impensis G. C. Halis Saxonum MDCCCXCVI. [Mit lateinischer Vorrede (5 S.) von G. C.]

Die Rawleysche Sammlung von 32 Trauergedichten auf Francis Bacon. Ein Zeugnis zugunsten der Bacon-Shakespeare-Theorie. Mit einem Vorwort herausgegeben von Georg Cantor. Halle 1897.

und publizierte sie so im 2. Band der *Acta*. Schon an sich bedeutete diese Unterstützung seitens des angesehenen Forschers, der vermöge seiner Beziehungen zu Weierstraß und zu den Pariser Mathematikerkreisen sich eines erheblichen Einflusses erfreute, moralisch viel für Cantor zu einer Zeit, als ihm das Crellesche Journal verschlossen war und sich der beherrschende Einfluß der Berliner (anscheinend auch der Göttinger) Mathematiker in offener Gegnerschaft zu ihm betätigte. Nicht minder aber ist auch eine eigentlich wissenschaftliche Auswirkung des Bundes mit Mittag-Leffler unverkennbar; außer den 1883 beginnenden, sozusagen parallel zu Cantors Schaffen gerichteten Arbeiten Bendixsons und Phragméns über Punktmengen erschienen in den 1883—84 herauskommenden Bänden der *Acta* eine ganze Reihe gewichtiger Anwendungen der mengentheoretischen Begriffe und Ergebnisse auf funktionentheoretische und geometrische Probleme, die Mittag-Leffler selbst sowie die eben aufgehenden Sterne Poincaré und Scheeffer zu Verfassern hatten. Poincarés Arbeit, die zur Untersuchung der Struktur des Existenzgebietes automorpher Funktionen die Lehre von den Punktmengen heranzog, war von Cantor zunächst übersehen worden; er überzeugte sich aber gelegentlich einer Pariser Reise im Frühjahr 1884 davon, daß Poincaré seine Arbeiten kannte und würdigte[1]. Größere Hoffnungen setzte er auf die Wirkung der Mittag-Lefflerschen Abhandlung, die auf einem im Mittelpunkt des damaligen Interesses stehenden Feld der Weierstraßschen Funktionentheorie — in der Frage der Erzeugungsmöglichkeit analytischer Funktionen aus geeignet vorgegebenen singulären Stellen — die Kraft und Bedeutung der Ideen Cantors dartat. Um so tiefer ist seine Betrübnis, daß vielmehr gerade umgekehrt die Bezugnahme auf Cantor der Aufnahme der Arbeit zunächst vielfach zum Schaden gereicht, namentlich auf Grund der auch in Paris stark wirkenden Haltung Kroneckers.

Nicht minder zögernd als die Mathematiker nahmen die Philosophen von Cantors Errungenschaften Kenntnis; die erste ausführliche und verständnisvolle Darstellung, in der man auch Hinweise auf die vorangegangenen unzureichenden Berücksichtigungen Cantors von philosophischer Seite (Ballauf, Wundt[2], Laas, H. Cohen) findet, stammt von B. Kerry[3]. Sie schließt mit der bezeichnenden Mahnung, die Philosophie, die „vordem die Lehre vom Stetigen in seinem Verhältnisse zu einem dasselbe eventuell konstituierenden Diskreten als ihr Eigenstes betrachten durfte", scheine in den Mannigfaltigkeitsuntersuchungen wieder „eine neue Disziplin aus sich herausgeboren zu haben", mit der die Mutterwissenschaft zwar vertraut bleiben solle, der sie aber ihr selbständiges Dasein nicht verkümmern dürfe. Zur gleichen Zeit gab auch der — selbst aktiv mit Cantors Ideen beschäftigte — Mathematiker P. Tannery eine für Philosophen bestimmte und an den philosophischen Problemen orientierte Einführung in Gedankengänge der Mengenlehre[1], von der Cantor anscheinend keine Notiz genommen hat.

[1] Nach dem Zeugnis Mittag-Lefflers (Acta Math. **50**, 26 [1928]) hat Poincaré die grundlegenden Abhandlungen [III 4] für die Acta ins Französische übersetzt.

[2] Auf dessen Einwände sowie die der Herbartschen Schule (vgl. Ztschr. exakte Philos. **12**) kommt auch Cantor selbst am Schluß von [IV 3] sowie in [IV 4] zu sprechen; an der letzteren Stelle (s. o. S. 392ff.) auch auf die Rezension Ballaufs.

[3] „Über Georg Cantors Mannigfaltigkeitsuntersuchungen". Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos. **9**, 191—232 (1885).

In erster Linie hat freilich der ablehnende Standpunkt nicht etwa der Philosophen, sondern der großen Mehrheit seiner engeren Fachgenossen Cantor betroffen, und zwar speziell die Haltung Kroneckers. Hier liegt offenbar der Angelpunkt der Krisis von 1884. Bis gegen 1880 scheint das Verhältnis zwischen Kronecker und Cantor trotz der ablehnenden Haltung, die jener gegenüber den mengentheoretischen Interessen seines vormaligen Schülers von Anfang an einnahm, äußerlich gut gewesen zu sein; so z. B. noch bei einem Besuch Cantors bei Kronecker im Herbst 1879. Doch schon zwei bemerkenswerte Stellen aus der 1882 geschriebenen Arbeit [III 4_5], die sich gegen die Alleinherrschaft der natürlichen Zahl und für die unbevormundete Freiheit der mathematischen Schöpfung einsetzen, sind in nicht mißzuverstehender Weise gegen Kronecker gerichtet. Die ganze Bitterkeit seines Grolls gegen Kronecker, dessen Einfluß weit über Deutschlands Grenzen hinausreichte, sehen wir dann in den (im ganzen 52!) Briefen an Mittag-Leffler vom Jahre 1884 sich in ungebändigter Heftigkeit entladen. In den Zorn mischt sich auch die Besorgnis, eine zur Veröffentlichung in den *Acta Mathematica* in Aussicht genommene (tatsächlich aber dort nicht erschienene) Abhandlung Kroneckers möchte ihm nicht nur in der Öffentlichkeit weiteren Schaden zufügen, sondern auch noch den treu ergebenen Freund entfremden; sollte doch diese Darlegung der wissenschaftlichen Auffassung Kroneckers insbesondere zeigen, „daß die Ergebnisse der modernen Funktionentheorie und Mengenlehre von keiner realen Bedeutung sind". Auf Hermite und, wie es scheint, auch auf Weierstraß, die neben Kronecker damals in der mathematischen Welt führend waren, ist zeitweise in der Tat der Einfluß Kroneckers erfolgreich gegen Cantor gewesen. Freilich nicht lange; vielmehr sind beide — entgegen den auf Hermite bezüglichen Äußerungen Poincarés auf dem Internationalen Mathematikerkongreß zu Rom 1908 — bald warme Freunde Cantors und ehrliche Bewunderer seines

[1] „Le concept scientifique du continu: Zenon d'Élee et Georg Cantor". Rev. Philos. de la France et de l'Étranger **20**, 385—410 (1885).

Werkes geworden[1]. Indessen kommt es zunächst — sicherlich nicht ausschließlich infolge jenes Zwistes, aber zum mindesten durch ihn verschärft und vielleicht ausgelöst — zu einem geistigen Zusammenbruch bei Cantor im Frühjahr 1884, einer psychischen Erkrankung, deren Erscheinungen sich von nun an bis zu seinem Tode zeitweise wiederholten und ihn mehrmals zwangen, eine Nervenklinik aufzusuchen. Die nächste Folge war eine Depression, die in den eigenen Augen den Wert seiner Arbeiten herabsetzte, den Anteil seiner Schuld an den eingetretenen Verstimmungen erhöhte und ihn veranlaßte, sich bei Kronecker zu entschuldigen. Diese schriftlich und mündlich durchgeführte Aussöhnungsaktion hat zwar ein äußerlich befriedigendes Verhältnis zwischen beiden Forschern hergestellt, doch weder an der diametralen Verschiedenheit der Auffassungen noch an der Beharrlichkeit etwas geändert, mit der Kronecker bis zu seinem Tode aktiv gegen Cantors Ideen Stellung nahm.

3. Zeit verminderter Produktivität (1884—1897).

Sichtlich endet mit dem Jahre 1884 die zweite, wichtigste und fruchtbarste Periode in Cantors Schaffen; es beginnt ein weiterer, gleich dem vorigen etwa dreizehnjähriger Abschnitt, während dessen der schöpferische Wille zwar nicht erlahmt, aber unter dem Einfluß der erwähnten Momente und einer dadurch mitbedingten Veränderung seiner Interessen doch nur mehr Früchte heranreifen läßt, die an Originalität denen der zweiten Periode nachstehen. Auf der anderen Seite fangen die neuen Ideen in dieser Zeit an, sich allmählich in der Öffentlichkeit durchzusetzen.

Zu Beginn des Jahres 1885 ist die seelische Krise bei Cantor im wesentlichen überwunden, sein Vertrauen zur Bedeutung der eigenen Leistung wieder hergestellt. Nunmehr knüpfen an seine Ideen in steigendem Maße auch andere an (1885 zunächst Harnack, Lerch, Phragmén). Sogar für Zwecke des Schulunterrichts wird der mengentheoretische Gesichtspunkt bereits dargeboten: der Oberlehrer am Stadtgymnasium zu Halle, Fr. Meyer, der mit Cantor in regem persönlichem Verkehr stand, veröffentlicht 1885 die zweite Auflage seiner „Elemente der Arithmetik und Algebra“, die durch Cantors Forschungen über das Transfinite entscheidend beeinflußt sind und speziell den Zahlbegriff auf mengentheoretische Art einführen. Ob dieses für den Schulgebrauch geschriebene, wissenschaftlich hochstehende Buch auch zu entsprechender Wirkung gelangt ist, muß freilich

[1] Vgl. Briefe Cantors an W. H. Young aus dem Jahre 1908 (s. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **24**, 422f. [1926]) und an Jourdain aus dem Jahre 1905 (siehe G. Cantor, Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers. Translated, and provided with an introduction and notes, by Philip E. B. Jourdain [Chicago and London 1915], S. 48).

bezweifelt werden. — Auch von Cantor selbst erscheint in den nächsten Jahren eine Reihe weiterer Arbeiten, wobei die Darlegung und Verteidigung des bisher Gewonnenen, namentlich die Auseinandersetzung auf philosophischem Felde, gegenüber neuen Schöpfungen überwiegt; in mathematischer Hinsicht tritt mehr und mehr Cantors Interesse für die *Punktmengen* zurück hinter dem für die Erweiterung des *Zahlbegriffs*. In die nämliche Zeit fällt eine ausgedehnte Korrespondenz mit Mathematikern, Philosophen, Theologen und anderen Gelehrten, in der er seine Anschauungen über das Aktual-Unendliche genauer darlegt und Mißverständnissen gegenüber in Schutz nimmt. Auch zur Erweiterung seiner schon vorher erstaunlichen Kenntnis der älteren philosophischen und theologischen Literatur über das Problem des Unendlichen findet er in diesen Jahren noch Muße. Außer derartigen, weitgehend philosophisch orientierten und zum Teil polemischen Darlegungen, denen die Arbeiten [IV 3, 4] vornehmlich gewidmet sind, enthält der Schluß der letzten Arbeit noch eine eigentümliche Theorie der mehrfachen Ordnungstypen, über die von seinem Schüler, dem nachmaligen Philosophen Hermann Schwarz, eine Dissertation „Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen“ (1888) erschienen ist, welche durch eine Vorlesung Cantors aus dem Jahre 1887 angeregt worden war.

Aus der nämlichen Zeit stammt eine briefliche Äußerung Cantors an Vivanti, worin er diesen auf die Tatsache hinweist (und zu deren Beweis anregt), daß eine mehrdeutige analytische Funktion an einer gegebenen Stelle höchstens *abzählbar unendlich vieler* verschiedener Werte fähig ist[1].

Neben anderen Erwägungen hatte ihn vor allem sein Konflikt mit Kronecker zur Überzeugung gebracht, daß es zur Wahrung der Freiheit und wissenschaftlichen Unabhängigkeit des einzelnen, namentlich des aufstrebenden jungen Forschers, innerhalb der mathematischen Gesamtheit und zum Schutz gegen übermächtige Einflüsse einzelner Gelehrten zweckmäßig sei, einen Zusammenschluß der deutschen Mathematiker herbeizuführen. So geht auf ihn der erste Schritt zur Begründung der *Deutschen Mathematikervereinigung* zurück, der er von Anfang an mit Herz und Seele anhängt, deren Notwendigkeit im Namen der wissenschaftlichen Freiheit er nie müde geworden ist zu betonen. Im „Heidelberger Aufruf“ von 1889, der anläßlich der 62. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte den ersten öffentlichen Appell an die Fachgenossen aussandte, wie auch in den nächstjährigen „Bremer Beschlüssen“ der mathematisch-astronomischen Abteilung der Naturforscherversammlung, durch welche die Vereinigung konstituiert wurde, finden wir Cantor in der Reihe der Unterzeichner; von der Gründung an (18. September

[1] Beweise haben gleichzeitig (1888) Poincaré, Vivanti, Volterra gegeben: Palermo Rendiconti **2**, 150f. und 197ff.; Atti Lincei (4) 4, II, 355ff.

1890) war er Vorsitzender, ebenso Mitherausgeber der ersten zwei Bände des „Jahresberichtes“, und als er im Herbst 1893 aus Gesundheitsrücksichten den Vorsitz niederlegen mußte, wurde in dem Dank der Vereinigung betont, daß er es gewesen sei, der „den ersten Anstoß zur Gründung der Vereinigung gegeben und durch sein lebhaftes und tatkräftiges Eingreifen für diesen Plan die Verwirklichung desselben herbeigeführt hat“[1]. Persönliche Verstimmung zurückstellend, hatte er Kronecker aufgefordert, auf der ersten Tagung der Vereinigung in Halle (Herbst 1891) den Eröffnungsvortrag zu halten[2]; der Brief, den Kronecker, durch den Tod seiner Frau an der Einlösung seiner Zusage verhindert, an Cantor richtete und in dem er sich namentlich über das Für und Wider eines solchen Zusammenschlusses aussprach, ist im ersten Band des *Jahresberichtes* im wesentlichen abgedruckt. Gelegentlich dieser ersten Versammlung der Vereinigung hielt Cantor auch den berühmten Vortrag [III 8], der die Ableitung seines frühesten mengentheoretischen Ergebnisses derart vereinfacht, daß sich damit nicht bloß zwei, sondern beliebig viele verschiedene transfinite Mächtigkeiten auf Grund des Diagonalverfahrens unschwer nachweisen lassen. So tritt dem schon in [III 4_5] mittels der Zahlklassen geführte Beweis dafür, daß es unendlich viele Mächtigkeiten gibt, hier eine weit einfachere Ableitung zur Seite, die überdies den Umweg über die Ordnungszahlen vermeidet.

Ist auch Cantors umfassenderer Plan eines internationalen Zusammenschlusses der Mathematiker zu einer Weltorganisation nicht zur Verwirklichung gediehen, so hat er doch entschieden und erfolgreich daran gearbeitet, die Einrichtung der *Internationalen Mathematikerkongresse* ins Leben zu rufen.

Die nächsten Jahre bringen einen Abschluß der mathematischen Veröffentlichungen Cantors mit der 1895—97 erschienenen Doppelabhandlung [III 9]. Sie gibt den Hauptteil seiner Resultate aus der allgemeinen Mengenlehre in systematischem Zusammenhang wieder und ist in einem wesentlich anderen — man mag sagen: in klassisch-abgeklärtem — Geiste geschrieben als die älteren Arbeiten. Offenbar stellt sie die für ein mathematisches Publikum bestimmte, von kritischem und philosophischem Beiwerk entlastete Ausführung von [IV 4] dar; dabei kommt die dort noch fehlende Theorie der wohlgeordneten Mengen und der Ordnungszahlen zu einer sogar sehr ausführlichen Darstellung, während begreiflicherweise — infolge des Fehlens des Wohlordnungssatzes — die ursprünglich geplante Anwendung auf die Lehre von den Kardinalzahlen unterbleiben mußte. Von den „klassischen“ Sätzen der abstrakten Mengenlehre vermißt man in [III 9] nur mehr den

[1] Jahresber. d. D. Mathematikervereinigung **1**, 3—7 (1892) und **3**, 8 (1894).

[2] Weder diese Aufforderung noch die Art der Anrede in dem sogleich zu erwähnenden Briefe Kroneckers dürfen darüber hinwegtäuschen, daß das Verhältnis zwischen den beiden Männern das alte war; vgl. Cantors Brief an Mittag-Leffler vom 5. Sept. 1891.

Äquivalenzsatz, der zu eben jener Zeit die ersten Beweise findet (vgl. nachstehend S. 471).

Vergleicht man [III 9], die eine der zwei ganz großen und unsterblichen Arbeiten Cantors, mit der anderen [III 4], so sieht man zunächst den Schwerpunkt sich merklich von der Betrachtung der *Mengen* auf die der *Zahlen* verlagern, ferner einen Fortschritt in Richtung der Abklärung und Systematisierung, der diese Abhandlung auch heute noch didaktisch wertvoll macht. Bei dieser Entwicklung ist ein — ungewollter und wohl auch beiderseits unbewußter — Einfluß Dedekindscher Denkungsart fühlbar. Doch bleibt auch bei dieser späten Arbeit ein merklicher Abstand von den Auffassungen Dedekinds und Freges unverkennbar, sowohl was den Mengenbegriff betrifft wie auch in der Art des sukzessiven Aufsteigens von den endlichen Mengen aus und in der (sachlich nicht notwendigen) Beschränkung auf die zweite Zahlklasse.

Hervorhebenswert ist namentlich der Anfang der Abhandlung [III 9]. Sie beginnt mit der bekannten, von der früheren merklich unterschiedenen Mengendefinition (vgl. auch schon [IV 4_1], oben S. 387 und 411), um dann die Mächtigkeit im Sinne von [IV 4] einzuführen, nämlich als den Allgemeinbegriff, der aus der Menge durch die zweifache Abstraktion von der Beschaffenheit der Elemente und von der Ordnung ihres Gegebenseins hervorgeht — also nicht mehr wie in [III 4] durch Zurückführung auf die Äquivalenz. Auf die zweckmäßig modifizierte Definition der Größenordnung und der Mächtigkeiten folgt nunmehr die ausdrückliche Bemerkung, daß die „Vergleichbarkeit“ sich weder von selbst verstehe noch an dieser Stelle des Aufbaues beweisbar sein dürfte; er kündigt den Beweis für später an und stellt den „Äquivalenzsatz“ als Folgerung aus dem Vergleichbarkeitssatz in Aussicht.

4. Die Altersperiode und die Zeit der Anerkennung.

Mit dem Jahre 1897 schließen die Veröffentlichungen des erst 52jährigen Forschers. Um die gleiche Zeit setzt, allmählich immer rascher wachsend, die allgemeine Anerkennung seines Werkes durch die mathematische Welt ein.

Das Aufhören der eigentlichen Produktion bedeutet keineswegs, daß er sich mit den Problemen der Mengenlehre nicht mehr intensiv beschäftigt hätte. Zwar schenkte er den Anwendungen in der reellen Funktionentheorie wenig Aufmerksamkeit, da er vielmehr ein wesentliches Eingreifen der Mengenlehre in die klassische Analysis und in die Zahlentheorie erwartete. Dagegen stand auch weiterhin im Vordergrund seiner Aufmerksamkeit das *Kontinuumproblem*. Über seine Bemühungen um dieses liegt neben der aufregenden Episode vom Jahre 1904 (s. u. S. 473) noch Material aus dem Sommer 1899 im Briefwechsel mit Dedekind vor. Diese letzten uns erhaltenen Stücke aus dem Briefwechsel (siehe oben S. 443 ff.), die von den vorangehenden durch einen fast zwanzigjährigen Abstand getrennt sind, beginnen mit der Behauptung Cantors, er besitze seit 1897 den Beweis, daß *alle Mächtigkeiten Alefs seien*. Damit hat es folgende Bewandtnis:

Spätestens 1895, also zwei Jahre vor Burali-Fortis Veröffentlichung, war Cantor selbst auf die sogenannte Burali-Fortische Antinomie von der Menge aller Ordnungszahlen gestoßen und hatte sie u. a. 1896 an Hilbert mitgeteilt[1]. Er spricht nunmehr (1899) zu Dedekind auch von anderen widerspruchsvollen Systemen, z. B. von der Gesamtheit aller Mächtigkeiten oder alles Denkbaren, und nennt sie „inkonsistente" (auch „absolut unendliche") Systeme; der Gegenfall, in dem das System als Menge betrachtet werden dürfe, liege vor, „wenn die Gesamtheit der Elemente einer Vielheit ohne Widerspruch als zusammenseiend gedacht werden kann"[2]. Die aus der Menge aller Ordnungszahlen sich ergebende Antinomie zeige gerade, daß es „bestimmte Vielheiten gibt, die nicht zugleich Einheiten sind". Auf diese freilich nicht hinreichend scharfen Begriffe gestützt, entwickelt er weiterhin, daß äquivalente Vielheiten zugleich entweder Mengen oder inkonsistent sind und daß eine Teilvielheit einer Menge wiederum eine Menge ist. Von hier aus schließt er folgendermaßen: Ist W das System aller Ordnungszahlen, V eine Vielheit, die kein Alef als Mächtigkeit besitzt, so erkenne man leicht, daß „das ganze System W in die Vielheit V hineinprojizierbar ist", d. h. daß V eine zu W äquivalente Teilvielheit umfassen muß; hat also V überhaupt eine bestimmte Mächtigkeit, so muß diese ein Alef sein. Wie wenig dieser „Beweis" ihn selbst befriedigt, zeigt seine kurz darnach an Dedekind ausgesprochene Bitte, er möge mittels seiner Kettentheorie einen „direkten" Beweis der Vergleichbarkeit geben. So hat auf Cantor von 1884 bis zu seinem Tode das Offenbleiben des Kontinuumproblems nachhaltig eingewirkt und in ihm sogar zeitweise einen Zweifel entstehen lassen, ob die Mengenlehre in ihrer jetzigen Gestalt als wissenschaftliches Gebäude haltbar sei.

Auch sonst findet sich in diesen sich überstürzenden Briefen aus einer gesteigerten Tätigkeitsperiode Cantors (1899) noch einiges Erwähnenswerte. So teilt Dedekind am 29. August dem Freunde einen auf seine Kettentheorie

[1] In einem Brief an Young vom 9. März 1907 greift Cantor die bekannten Aufsätze Burali-Fortis in dem Rendiconti Palermo scharf an und kritisiert, B.-F. habe schon den Begriff der wohlgeordneten Menge nicht richtig verstanden (siehe Mathem. Gazette **14**, 101 [1929]).

[2] Den Gebrauch des Wortes „Vielheit" in diesem Zusammenhang präzisiert Cantor bald darauf dahin, daß er „Vielheiten *unverbundener Dinge*" im Auge habe, „d. h. solche Vielheiten, bei denen die Entfernung irgendeines oder mehrerer Elemente von keinem Einfluß auf das Bestehenbleiben der übrigen Elemente ist". (Man bemerkt, wie nahe Cantor hier an das Verbot der sog. nichtprädikativen Definitionen streift und somit auch die für seinen Aufbau der Mengenlehre grundlegende *Potenzmenge* unbewußt der Kritik aussetzt.)

gegründeten Beweis des Äquivalenzsatzes mit, auf dessen Möglichkeit er schon Pfingsten 1897 Bernstein aufmerksam gemacht habe[1]. Cantor formuliert ferner (s. o. S. 450) die bekannte zwiefache Disjunktion hinsichtlich der möglichen Äquivalenzrelationen zwischen zwei Mengen M und N: für jede von beiden besteht die Alternative, daß sie *irgendeiner* oder *keiner* Teilmenge der anderen äquivalent ist, und so erhält man vier an sich denkbare Kombinationen (von denen eine, die der „Unvergleichbarkeit", sich später auf Grund des Wohlordnungssatzes ausschließen ließ). Diese uns heute fast selbstverständlich gewordene Methode findet sich in Cantors Veröffentlichungen noch nicht; wie Schoenflies berichtet hat[2], wirkte ein Brief, in dem Cantor sie nach Göttingen mitteilte, dort wie eine Offenbarung und wanderte von Hand zu Hand. Im Verlauf der Briefe an Dedekind aus dem Jahre 1899 erklärt Cantor ferner die Existenz von Mengen (d. h. konsistenten Vielheiten) mit den Kardinalzahlen 1, 2, 3, ... $\aleph_0$, $\aleph_1$, ... $\aleph_\omega$, ... als *Axiome* der elementaren bzw. erweiterten Arithmetik; dies offenbar durchaus im Sinne der späteren Lehre Russells von den „individuals".

In dem nämlichen Jahr 1897, in dem Cantors letzte Arbeit erschien, fand in Zürich der erste „Internationale Mathematikerkongreß" statt. Die Anerkennung, die man ihm dort entgegenbrachte, war allgemein; neben einer Sektionsmitteilung von Hadamard, die die Begriffe der Mengenlehre schon als bekannte und unentbehrliche Werkzeuge heranzog, wies vor allem der in der ersten Hauptversammlung gehaltene Vortrag von Hurwitz „Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit" darauf hin, wie Cantors Ideen (einschließlich der am stärksten umstrittenen transfiniten Zahlen) zu einer neuen Befruchtung der Funktionentheorie geführt hätten. Überhaupt waren die drei miteinander befreundeten, schon damals führenden Forscher Hilbert, Hurwitz, Minkowski wohl die ersten im deutschen Sprachgebiet, die die Originalität Cantors und die Bedeutung seiner Mengenlehre erkannten und zur Geltung zu bringen suchten, „zu einer Zeit, als in damals maßgebenden mathematischen Kreisen der Name Cantor geradezu verpönt war und man in seinen transfiniten Zahlen lediglich schädliche Hirngespinste erblickte"[3]; nicht nur die Bedeutung dieser

[1] Der (lückenhafte) Schrödersche Beweis ist im Herbst 1896 auf der Frankfurter Naturforscherversammlung vorgetragen worden, während Bernstein den seinen im Winter 1896/97 fand und 1897 in einem Seminar Cantors vortrug. Der (unveröffentlichte) Dedekindsche Beweis ist im wesentlichen identisch mit dem späteren von Zermelo (Math. Ann. **65**, 271 [1908]).

[2] Jahresber. d. D. Mathematikervereinigung **31**, 101f. (1922).

[3] Vgl. Hilberts Gedächtnisrede auf Minkowski (Göttinger Nachrichten 1909; Minkowskis Gesammelte Abhandlungen, Bd. I), wo man auch eine einschlägige Bemerkung aus einem Vortrag Minkowskis über das Aktual-Unendliche in der Natur zitiert findet. In beiden Vorträgen wird der Opposition Kroneckers gegen Cantors Ideen gedacht.

Männer, sondern auch ihre besondere Verbindung mit den strengen Schlußmethoden der Zahlentheorie hat wohl dazu beigetragen, manche Vorurteile gegen die mengentheoretischen Gedankengänge zu zerstreuen.

Cantor, der sich über die ihm in Zürich gewordene Anerkennung außerordentlich freute, berichtete im nämlichen Jahre einem engeren Kreise deutscher Mathematiker gelegentlich der Braunschweiger Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung in nichtöffentlicher Form über Entstehung und Hauptresultate seiner Theorie; hierüber existieren nur ungedruckte Aufzeichnungen von P. Stäckel. Die ersten von anderer Hand stammenden zusammenhängenden Veröffentlichungen über Mengenlehre erfolgten in Frankreich; neben anderen vor allem Borels „Leçons sur la théorie des fonctions“[1], die zum großen Teil bereits ein Lehrbuch der Mengenlehre darstellten und u. a. den von Cantors Schüler Felix Bernstein gefundenen (ersten einwandfreien) Beweis des Äquivalenzsatzes zum erstenmal veröffentlichten. Mit diesem vielbenutzten Werk und dem 1899—1900 im Rahmen des *Jahresberichts der Deutschen Math.-Ver.* erschienenen ersten Schoenfliesschen Bericht über die „Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“ gelangte der Siegeszug der Mengenlehre zu einem gewissen Abschluß; sie war zu einer Disziplin geworden, die den übrigen Zweigen der Mathematik gleichberechtigt galt und die sogar rasch zu einer Vorzugsstellung gelangte. Wenn auch das erste wirkliche *Lehrbuch* der Mengenlehre in England (durch das Ehepaar Young 1906) veröffentlicht wurde und ein solches in Deutschland (die „Grundzüge“ Hausdorffs) erst 1914 erschien, so erweisen sich doch dem rückblickenden Beschauer die bitteren Worte als unberechtigt[2] oder doch höchstens hinsichtlich äußerer Ehrungen zutreffend, mit denen sich Cantor 1908 gegenüber W. H. Young (s. o. S. 466 Fußnote) darüber beklagt, daß man in Deutschland (im Gegensatz zu England) ihn nicht kenne. In Wirklichkeit sah z. B. schon mehrere Jahre vor der Jahrhundertwende der Plan der *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* einen (1898 erschienenen) Artikel über Mengenlehre vor, und zwar nicht etwa im Sinne einer geometri-

[1] Vgl. auch dessen Aufsätze in der Revue philosophique 1899 und 1900, die in der 2. (und 3.) Auflage des genannten Buches 1914 (1928) wieder abgedruckt sind. Wenn in Borels Lehrbuch Cantors Person nur flüchtig erwähnt ist und seine Ergebnisse auf völlig anderem als dem ursprünglichen Weg begründet werden, so verwahrt sich Borel in der Einleitung zu den genannten Aufsätzen ausdrücklich gegen den Verdacht, als sei darin eine Minderbewertung Cantors gelegen.

[2] Immerhin berührt uns heute seltsam, daß im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, das ab 1892 in Vivanti einen sachkundigen Referenten für Mengenlehre gewonnen hatte, die mengentheoretischen Arbeiten bis 1904 — soweit nicht der Geometrie eingeordnet — unter der Rubrik „Philosophie“ besprochen wurden, um dann in den darauffolgenden Unterabschnitt, zwischen Philosophie und Pädagogik, überzusiedeln (und erst unter der Redaktion Lichtensteins selbständig zu werden).

schen Sonderdisziplin in Band III, sondern unter den ersten Artikeln des I. Bandes, bei den grundlegenden Gebieten der Arithmetik.

Das Jahr 1899, in dem das Ehepaar Cantor im Harz die silberne Hochzeit feiert, zeigt uns den 54jährigen noch einmal mit aller Energie am mathematischen Schaffen (siehe oben S. 470f.). Zu wesentlichen Erfolgen oder einer Veröffentlichung kommt es jedoch nicht. Auch in der Folge hat er nicht etwa bewußt der mathematischen Produktion entsagt. So trägt er 1903 auf der Kasseler Naturforscherversammlung „Bemerkungen zur Mengenlehre“ vor, die nicht veröffentlicht worden sind und sich vor allem wohl mit gewissen Einwänden französischer Philosophen auseinandersetzten; mit Philipp E. B. Jourdain steht er um 1905 in einem höchst regen wissenschaftlichen Briefwechsel; 1908 verspricht er sogar Young, seine nächste Abhandlung der *London Mathematical Society* vorzulegen. Namentlich das Kontinuumproblem, das Hilbert in seinem Festvortrag auf dem Pariser Internationalen Mathematikerkongreß (1900) als erstes der „Mathematischen Probleme“ hervorgehoben hatte, beschäftigte ihn auch weiterhin. Wie Schoenflies berichtet[1], war ein besonders aufregendes Erlebnis für ihn der auf dem Heidelberger Internationalen Mathematikerkongreß (1904) gehaltene Vortrag von Julius König, der mittels einer von F. Bernstein herrührenden Alefrelation zeigen wollte, daß die Mächtigkeit des Kontinuums kein Alef sein könne. Nicht nur auf Cantor, der von der Wohlordnungsfähigkeit jeder Menge und sogar von der Gleichung $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ überzeugt war, sondern auf die ganze mathematische Welt, für die damals die Mengenlehre im Vordergrund des Interesses stand, machte der Vortrag tiefen Eindruck. Cantor war in der Folge fieberhaft bemüht, die Unhaltbarkeit des Resultates darzutun, und hatte auch bald die Genugtuung, bestätigt zu sehen, daß der Bernsteinsche Hilfssatz nur unter Einschränkungen richtig ist, so daß die von König aus ihm gezogene Folgerung sich erledigte.

In diesen Jahren verspäteter, aber um so willkommenerer wissenschaftlicher Anerkennung kamen dann auch äußere Ehrungen[2], über die er sich von Herzen freute: die Wahl zum Ehrenmitglied der London Mathematical Society (1901) und der Mathematischen Gesellschaft zu Charkow sowie zum korrespondierenden Mitglied des R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Venezia), die Verleihung des Dr. math. honoris causa durch die Universität Christiania (1902), der Sylvester-Medaille durch die Royal Society (1904), des Ehrendoktors der Universität St. Andrews (1911). Indes zwangen ihn seine nervösen Zustände in diesen Jahren wiederholt, seine Vorlesungs-

[1] Jahresber. d. Deutschen Math.-Verein. **31**, 100f. (1922).

[2] Schon aus dem Jahre 1896 datiert seine Wahl zum Vorstandsmitglied der Fachsektion für Mathematik und Astronomie der Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Naturforscher-Akademie in Halle, deren Mitglied er seit 1889 gewesen war.

tätigkeit zu unterbrechen; 1905 wurde er von den amtlichen Verpflichtungen entbunden, 1913 entsagte er endgültig dem Lehramt. Zu seinem 70. Geburtstag, der 1915 in internationalem Rahmen gefeiert werden sollte, kamen trotz des Krieges wenigstens deutsche Mathematiker von weither nach Halle, um ihm zu huldigen[1]; seine Büste in Marmor wurde damals gestiftet, sie steht seit 1928 im Treppenhaus der Universität Halle. Das goldene Doktorjubiläum konnte seines Befindens wegen nicht mehr öffentlich gefeiert werden; am 6. Januar 1918 ist er in der psychiatrischen Klinik in Halle gestorben.

5. Cantor als Lehrer und Persönlichkeit.

Die über vierzigjährige *Lehrtätigkeit* Cantors an der Universität Halle war in vorzüglichem Maße durch Strenge und durch Schärfe der Begriffserklärung ausgezeichnet. Sein Vortrag war nach den Berichten seiner Schüler klar und geordnet, lebhaft und anregend (wenigstens in den Zeiten seines Wohlbefindens, deren Unterbrechungen späterhin öfters ein längeres oder kürzeres Aussetzen der Vorlesungen erzwangen). Der Vorbereitung der Vorlesungen hat er nicht viel Zeit gewidmet. So kam es, daß die Darstellung der ihn interessierenden Gebiete, von der gar manche Schüler als von einem hohen ästhetischen Genuß berichten, sich merklich auszeichnete vor der Wiedergabe anderer Disziplinen; zu den letzteren gehörte u. a. auch die Funktionentheorie, die in Halle offenbar damals sehr im Hintergrund gestanden hat. Dagegen hat er z. B. für die Gruppentheorie entschiedenes Interesse gezeigt. Über seine mengentheoretischen Entdeckungen hat er gelegentlich im Seminar vorgetragen. Wenn die Anzahl seiner Schüler vielfach sehr klein war, nicht selten bei 1—3 verblieb, so lag das an der geringen mathematischen Frequenz von Halle überhaupt, die erst zu Beginn dieses Jahrhunderts wesentlich anstieg; das macht seinen Wunsch, nach einer anderen Universität überzusiedeln, nur allzu verständlich. Insgesamt hat er zwar naturgemäß eine große Anzahl von Lehramtskandidaten herangebildet, aber nur sehr wenige Dissertationen veranlaßt[2], nur selten Forschertalente in unmittelbarem Verkehr angeregt und großgezogen. Das hängt z. T. damit zusammen, daß Cantor seine Ideen in der Regel sofort selbst durchführte und so keinen großen Überschuß an lohnenden Problemen zur Verfügung hatte, wie sich denn auch kein wissenschaftlich wertvoller Nachlaß bei ihm gefunden hat. Ebenso war die Ausschließlichkeit seiner Hingabe an die ihn jeweils beschäftigenden Ideen dem mühsamen Heranziehen junger erst reifender Talente wenig günstig.

[1] Vgl. den Bericht Loreys in der Ztschr. f. math. u. naturw. Unterricht **46**, 269—274 (1915).

[2] Die (nicht wenigen) mathematischen Doktoranden jener Zeit in Halle kamen meistens, namentlich von Berlin, mit der fertigen Dissertation zu ganz kurzem Aufenthalt nach Halle.

Menschlich ist er seinen Schülern ein warmer und treuer Freund gewesen; sein Haus bot ihnen wie auch so manchen Studenten anderer Fächer eine behagliche, von Musik belebte Atmosphäre und reizende, jugendlich frische Geselligkeit, woran seine liebenswürdige Gattin wesentlichen Anteil hatte. Um seinen Schülern einen Dienst zu erweisen oder auch nur eine Freude zu bereiten, war ihm selbst noch in höherem Alter keine Anstrengung zu viel; besonders auch den jungen Privatdozenten gegenüber war er außerordentlich wohlwollend, und es war in ihrem Kreise bekannt, daß ein jeder für seine kleineren oder größeren Anliegen bei Cantor stets ein williges Ohr und freundlichen Rat finden konnte.

Was die *Persönlichkeit* Cantors im allgemeinen betrifft, so berichten alle, die ihn kannten, von seinem sprühenden, witzigen, originellen Naturell, das leicht zu Explosionen neigte und stets voll heller Freude über die eigenen Einfälle war; von dem niemals ermüdenden Temperament, das die Teilnahme seiner auch äußerlich imponierenden, großen Gestalt an einer Mathematikerversammlung zu einem ihrer lockendsten Reize machte, das bis in die späte Nacht wie auch in früher Morgenstunde seine Gedanken (zu seinen mathematischen und den vielseitigen außermathematischen Interessengebieten) förmlich überquellen ließ; von seinem lauteren Charakter, treu seinen Freunden, hilfreich, wo es nötig war, liebenswürdig im Verkehr; daneben auch von typischer Gelehrtenzerstreutheit. Im mündlichen wissenschaftlichen Gedankenaustausch war er mehr der Gebende; es lag ihm nicht, unmittelbar vorgetragene fremde Ideen sogleich aufzufassen. All seinen Gedanken war er mit der gleichen Liebe und Intensität hingegeben; in stärkerem Maße vielleicht noch als der aufgewandte Scharfsinn und selbst als die mit begrifflicher Gestaltungskraft gepaarte geniale Intuition ist die ungeheure Energie, mit der er seine Gedanken über alle Hindernisse und Hemmungen hinweg verfolgte und an ihnen festhielt, das Instrument gewesen, dem wir die Entstehung seines Lebenswerks zu danken haben. Solch unerschütterliche Zähigkeit entsprang seiner tiefen Überzeugung von der Wahrheit, ja Wirklichkeit seiner Ideen; „mögen *seine* Machwerke“, so schreibt er am 26. Jan. 1884 an Mittag-Leffler mit Bezug auf den Wunsch Kroneckers, der seine Arbeiten mit derselben Unparteilichkeit in die *Acta Mathematica* aufgenommen wissen wollte wie die Cantors, „der *Unparteilichkeit* und großer Nachsicht und Rücksichtnahme bedürfen, für *meine* Arbeiten *beanspruche* ich *Parteilichkeit*, aber nicht Parteilichkeit für meine vergängliche Person, sondern Parteilichkeit für die *Wahrheit*, welche *ewig* ist und mit der souveränen Verachtung auf die Wühler herabsieht, die sich einzubilden wagen, mit ihrem elenden Geschreibsel gegen sie auf die Dauer etwas ausrichten zu können.“ Und einige Monate später: „. . . es handelt sich hier *gewissermaßen* um eine *Machtfrage, und die kann niemals durch Überredung entschieden werden*; es wird sich fragen, *welche*

Ideen mächtiger, umfassender und fruchtbarer sind, die Kroneckers oder die meinigen; nur der Erfolg wird nach einiger Zeit unsern Kampf entscheiden!!"[1] Freilich ist es eben dieselbe zähe und energische Verbissenheit in seine Ideen, die ihn durch die Jahrzehnte an das *Bacon*problem fesselte, trotz aller Versuche seiner mathematischen Freunde, ihn hiervon abzulenken.

Die Überzeugung von der Größe und Wichtigkeit des eigenen Werkes hat indes Cantor nicht, wie manchen anderen hervorragenden Forscher, überheblich werden lassen. Das zeigen neben der Gestaltung seiner Freundschaftsverhältnisse mit Dedekind und Mittag-Leffler auch viele Einzelzüge. So fügt er noch 1905 seinem Bild, das er auf Wunsch von Mittag-Leffler diesem für die *Acta* einsendet, die Worte bei: „Lieber wäre es mir, wenn Sie mein Bild nicht publizieren, denn ich finde, es wäre eine viel zu große Ehre für mich." Charakteristisch in dieser Beziehung ist auch das Vorwort zur Sonderausgabe seiner wichtigsten Arbeit [III 4_5].

Wenn Cantor den Sinn für Freiheit und Unabhängigkeit unter den Mathematikern lobt und zu fördern bestrebt ist, so geschieht das keineswegs nur pro domo; daß er vielmehr auch an sich selbst die aus seiner Forderung fließenden Ansprüche stellt, zeigt z. B. sein Eintreten für Bendixson, dessen an ihn gerichteter Brief vom Mai 1883 auf Cantors Veranlassung ausgearbeitet und in Bd. 2 der *Acta* publiziert wurde, so daß ihm dann Mittag-Leffler für sein „edles und wahrhaft wissenschaftliches Benehmen gegen Herrn Bendixson" danken konnte[2]. Nicht minder bezeichnend ist seine Stellungnahme zu seinem größten Vorgänger hinsichtlich der Erfassung des Aktual-Unendlichen, zu Bernard Bolzano: er erkennt das Verdienst des „höchst scharfsinnigen Philosophen und Mathematikers", in dem er „den entschiedensten Verteidiger" des Eigentlich-Unendlichen erblickt, unumwunden an, wenn auch nicht ohne Kritik seiner Schwächen. Die vornehm zurückhaltende, den Angegriffenen in seinem Rechte nicht verkürzende Art der Polemik, wie sie auch sonst in Cantors Veröffentlichungen meistens zu finden ist[3], darf bei dem Maß von Selbstsicherheit, das ihn in den 80er Jahren bereits beseelte, keinesfalls als ein Symptom der Ängstlichkeit gedeutet werden, vielmehr als Ausfluß einer wahrhaft lauteren, innerlich bescheidenen Gesinnung. Nur wo Einseitigkeit oder Autoritätsglaube der Wahrheit in den Weg

[1] Vgl. auch in [IV 3]: „Vielleicht bin ich der zeitlich erste, der diesen Standpunkt [Bejahung des Aktual-Unendlichen in concreto und in abstracto] mit voller Bestimmtheit und in allen seinen Konsequenzen vertritt, doch das weiß ich sicher, daß ich nicht der letzte sein werde, der ihn verteidigt!" (Siehe oben S. 373.)

[2] Vgl. auch Mittag-Lefflers Fußnote zu Beginn von Cantors Arbeit [III 6], sowie die Art, in der Cantor in [III 4_6] Bendixsons Verdienst würdigt.

[3] Besonders charakteristisch in dieser Beziehung ist Cantors Rezension von Hermann Cohens „Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte" in der Deutschen Literaturzeitung 5, Sp. 266—268 (1884).

zu treten scheinen, schießt seine Erbitterung ungezügelt empor, gelegentlich dann wohl die sachlichen Grenzen überschreitend.

Gerade bei einem Forscher, der so sehr fast wider Willen sich durch die Kraft seiner Ideen vorwärts getrieben fühlt, ist es bemerkenswert, daß er von den Notwendigkeiten der Darstellung und der Terminologie keineswegs gering denkt. So schreibt er am 31. Jan. 1884 an Mittag-Leffler: „. . . namentlich freue ich mich stets darüber, wenn Sie die Kunst der Stilistik und die Ökonomie der Darstellung loben, denn darauf verwende ich allerdings einige Mühe, und wenn es gut gelingt, so ist dies mein eigenes Werk . . .". Und im Brief vom 20. Oktober 1884, der schon im wesentlichen die Arbeit [III 7] enthält, erwähnt Cantor, daß er sich zuvor mit Scheeffer über die neu einzuführenden Bezeichnungen beraten habe, „mit deren Wahl ich außerordentlich vorsichtig bin, da ich von der Ansicht ausgehe, daß es für die Entwicklung und Ausbreitung einer Theorie gar nicht wenig auf eine glückliche, möglichst zutreffende Namengebung ankommt". An der meist besonders glücklichen Wahl der Terminologie sowie an der lebhaften, undogmatischen, jede unnötige Komplizierung vermeidenden Art der Gedankenführung liegt es wesentlich, daß auch heute noch Cantors Originalabhandlungen sogar dem Anfänger zur Einführung empfohlen werden können — eine in der Mathematik nicht eben häufige Erscheinung.

Eine nähere Schilderung verdient noch das philosophische Interesse Cantors, seine damit zum Teil zusammenhängende mathematische Weltanschauung und seine Beziehung zur Religion.

Namentlich in den aus den 80er Jahren stammenden Aufsätzen [III 4_5] und [IV 3, 4] kommt eine ganz erstaunliche Vertrautheit Cantors mit der *philosophischen Literatur* zutage, und zwar nicht nur mit weiten Teilen der zeitgenössischen und etwas älteren Schriften, sondern auch mit den philosophischen Klassikern der früheren Jahrhunderte und bemerkenswerterweise speziell mit den wichtigeren philosophisch-theologischen Autoren der Scholastik sowie mit Aristoteles. Ein so tiefgehendes, fast überall auf die Quellen zurückgreifendes, aber auch die Literatur zweiter Hand in reichem Maße heranziehendes Studium von Vertretern der älteren griechischen Atomistik und ihren Gegnern, von Plato und Aristoteles, von Augustin und anderen Kirchenvätern, von Boëthius, Thomas von Aquino und vielen anderen Scholastikern, von Nicolaus Cusanus und Giordano Bruno, von Descartes, Spinoza, Locke, Leibniz, Kant und Fries wird auch vor einem halben Jahrhundert eine seltene Ausnahme gewesen sein bei einem Forscher, dessen Fachgebiet nicht die Philosophie selbst ist. So trat Cantor auch mit den in Halle sich für Philosophie habilitierenden jüngeren Kollegen Edmund Husserl und Hermann Schwarz in rege wissenschaftliche wie auch persönlich freundschaftliche Verbindung. Dagegen stand er den Bestrebungen der „mathematischen Logik“ (Schröder, Frege usw.) ablehnend gegenüber. Wie Felix Klein treffend bemerkt hat[1], ist es kein bloßer Zufall, daß Cantor gerade auch bei den Scholastikern in die Schule gegangen ist; mehr als in anderen mathematischen Disziplinen, wo das Synthetisch-Konstruktive und vielfach speziell das Rechnerische mehr hervortritt, sind die Gedankengänge wenigstens der abstrakten Mengenlehre ähnlich allgemein, aber auch gleichzeitig ähnlich subtil und analytisch-zergliedernd wie vielfach die scholastische Logik und Theologie; dieser ist die mathematische Lehre vom Aktual-Unendlichen auch manchmal an Kühnheit verwandt, wie andererseits der Scholastik gleich der Mathematik ein Ideal der Strenge in den Schlüssen vorschwebt. Überhaupt war für Cantor die Philosophie nicht etwa eine äußere Region, mit der er sich für seine mathematischen Zwecke auseinanderzusetzen hatte, sondern für ihn bestand ein innerliches Band zwischen beiden Gebieten. Wie wesentlich ihm auch bei seinen Lesern das Vorhandensein mathematischer *und* philosophischer Kenntnisse war, zeigt die Bemerkung im Vorwort zur Sonderausgabe von [III 4_5], er habe wesentlich für zwei Leserkreise geschrieben, „für Philosophen, welche der Entwicklung der Mathematik bis in die neueste Zeit gefolgt, und für Mathematiker, die mit den wichtigsten älteren und neueren Erscheinungen der Philosophie vertraut sind“.

An Einzelheiten von philosophischer Bedeutung sei etwa die Bemerkung über *Begriffsbildung* in [III 4_5][2] erwähnt; hier liegt, im Gegensatz zur „substantiellen“ Auffassung des Aristoteles, ein funktionaler Prozeß vor in dem Sinne, wie er sich in der modernen Lehre von der Begriffsbildung durch Rickert, Cassirer u. a. eingebürgert hat. Ferner ist hervorzuheben, wie lebhaft und wiederholt Cantor (gegenüber Hamilton, Cohen u. a.) die auch heute wieder vertretene Ansicht bekämpft, daß die Zahl oder der Größenbegriff sich auf den Zeitbegriff gründe; in [III 4_5] wendet er sich namentlich auch gegen Kants Lehre von der Zeit.

Was Cantors *Auffassung von der Mathematik überhaupt* betrifft, so ist hier wesentlich der Begriff der *Realität* wissenschaftlicher Ideen (z. B. der ganzen — endlichen wie auch unendlichen — Zahlen), der ihm in zwiefacher Bedeutung erscheint: als intrasubjektive oder immanente Realität, gesichert durch Definitionen, welche dem betreffenden Begriff im menschlichen Denken einen wohlbestimmten und von anderen Begriffen unterschiedenen Platz

[1] Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil I (Berlin 1926), S. 52. Folgender Satz sei hieraus zitiert: „Entkleidet man die scholastischen Spekulationen dieses [mystisch-metaphysisch gefärbten] Gewandes, das sie dem oberflächlichen Blick als rein theologische Spitzfindigkeiten erscheinen läßt, so erweisen sie sich häufig als die korrektesten Ansätze dessen, was wir heute als Mengenlehre bezeichnen.“ Übrigens hat für Bolzanos Beschäftigung mit dem Unendlichen die Scholastik offenbar sogar den direkten Ausgangspunkt gebildet.

[2] S. 207 der vorliegenden Ausgabe.

anweisen, womit der Begriff „die Substanz unseres Geistes in bestimmter Weise modifiziert“; dann als transsubjektive oder transiente Realität, indem der Begriff als „Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt“ erscheint (siehe [III 4_5]). Während Cantors Überzeugung allgemein dahin geht, daß jedem im ersten Sinne realen Begriff vermöge der Einheit des uns selbst mitumfassenden Alls auch eine transiente Realität zukomme, die festzustellen die oft höchst schwierige Aufgabe der Metaphysik bilde, erblickt er den charakteristischen Vorzug der Mathematik darin, daß sie „bei der Ausbildung ihres Ideenmaterials *einzig* und *allein* auf die *immanente* Realität ihrer Begriffe Rücksicht zu nehmen und daher *keinerlei* Verbindlichkeit hat, sie auch nach ihrer *transienten* Realität zu prüfen“[1]. Auf diese Charakterisierung, die ihm „die verhältnismäßig leichte und zwanglose Art der Beschäftigung“ mit der Mathematik zu erklären scheint, gründet er sein Eintreten für den Ehrennamen „Freie Mathematik“.

Wenn Cantor hier Eigenart und Bedeutung der Mathematik (und damit, darf man wohl hinzufügen, auch der theoretischen Logik) rein verstandesmäßig zeichnet, nämlich kurz: als *die* nicht-metaphysische Wissenschaft, so ist doch sein Verhältnis zu ihr keineswegs einseitig gewesen. Wie er sie vielmehr seit seiner Jugend auch in ästhetischer und in ethischer Hinsicht wertet, zeigen schon die beiden ersten Thesen seiner Habilitationsschrift [I 5]: „Eodem modo literis atque arte animos delectari posse“ und „Jure Spinoza mathesi eam vim tribuit, ut hominibus norma et regula veri in omnibus rebus indagandi sit“.

Gegenüber dem Nachdruck, mit dem Cantor das Wesen der Mathematik als in ihrer Freiheit liegend hervorhebt, sei noch ausdrücklich bemerkt, daß er gefühlsmäßig keineswegs geneigt war, als einziges Kriterium der mathematischen Existenz die Widerspruchsfreiheit anzusehen. Ist er doch zu den transfiniten Ordnungszahlen nicht etwa auf dem „freien“ Weg von [III 4_5], sondern gewissermaßen gezwungen durch die Iteration des Ableitungsprozesses, nämlich im Streben nach dessen allgemeiner Symbolisierung gelangt. Auch seine übertrieben scharfe Ablehnung des „Unendlichkleinen“ ist zweifellos aus dem Gefühl des Vorzugs zu erklären, der den transfiniten Zahlen — als von den „gegebenen“ Mengen[2] hergeleitet — im Vergleich zu allgemeinen nicht-archimedischen Größensystemen zukommt.

[1] Es fragt sich, ob Cantor hiermit etwa bewußt oder unbewußt an H. Hankel anknüpft, der in seiner schon 1867 erschienenen „Theorie der komplexen Zahlensysteme“ (S. 10) als Gegenstand der Mathematik „intellektuelle Objekte“ bezeichnet, „denen aktuelle Objekte oder Relationen solcher entsprechen *können*, aber nicht *müssen*“.

[2] Vgl. die Stelle in [IV 3]: „Steht uns nicht erstere (die Menge) als Objekt *gegenüber*, wogegen letztere (die zugehörige Kardinalzahl) ein abstraktes Bild davon in *unserm* Geiste ist?“

Im engsten Zusammenhang mit der oben erwähnten Auffassung Cantors, daß den mathematischen Begriffen neben der den Mathematiker allein angehenden *immanenten* Realität von selbst auch eine *transsubjektive* Realität zukomme, steht offenbar Cantors Meinung, die sich zugespitzt so ausdrücken läßt: der Mathematiker *erfindet* nicht die Gegenstände seiner Wissenschaft, sondern er *entdeckt* sie. Schon in der dritten These seiner Habilitationsschrift (siehe oben S. 62) zum Ausdruck kommend, findet sich diese Anschauung am Schlusse seines Schaffens wieder betont, wenn er der abschließenden Darstellung [III 9] die Mottosätze voranstellt: „Hypotheses non fingo" und „Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus." Während es im allgemeinen für das Werk des schaffenden Mathematikers gleichgültig sein wird, ob er seine Begriffe als Platonische Ideen, als willkürliche Schöpfungen des Verstandes oder vermittelnd (Hessenberg) als selbsttätige Schöpfungen der Vernunft ansieht, so werden solche Verschiedenheiten in der Weltanschauung merkwürdigerweise gerade für die das Überabzählbare betreffenden Problemstellungen der Mengenlehre zuweilen von erheblicher Bedeutung[1]. Gerade der Umstand, daß die Begriffe der Mathematik für Cantor (wie ausgesprochenermaßen auch z. B. für Bolzano) eine Existenz besitzen, die von ihrer Entdeckung und von unserem Denken überhaupt unabhängig ist und ihm gewissermaßen vorangeht, ist von offensichtlicher Bedeutung für die Art gewesen, in der Cantor an die Probleme (z. B. an das Kontinuumproblem) heranging. Auch für die Hartnäckigkeit, mit der er zwei Jahrzehnte hindurch als beinahe Vereinsamter zu seinen Ideen stand, ist jene Überzeugung eine feste Stütze gewesen. So ist es denn nicht nur Bescheidenheit, sondern vornehmlich der Ausfluß der erwähnten metaphysischen Auffassung, wenn er in einem Brief an Mittag-Leffler von Anfang 1884 schreibt: „... was das übrige [nämlich außer Stil und Ökonomie der Darstellung] betrifft, so ist dies nicht mein Verdienst, ich bin in bezug auf den Inhalt meiner Arbeiten nur Berichterstatter und Beamter." Allerdings läßt sich kaum verkennen, daß bei Cantor eine gewisse Unausgeglichenheit besteht zwischen den Thesen von der „Freiheit" der Mathematik einerseits und von der Gegebenheit der mathematischen Objekte andererseits.

Von den Anschauungen und Interessen Cantors hinsichtlich der Naturwissenschaften, namentlich der *Physik*, haben wir keine so genaue Kenntnis. Im Gegensatz zur „freien Mathematik" betrachtet er die mathematische Physik als eine „metaphysische Wissenschaft"[2], für die er gerade solche

[1] Vgl. meine „Einleitung in die Mengenlehre" (3. Aufl., Berlin 1928), S. 325—332.

[2] Das Wort „Metaphysik" hat übrigens für Cantor (ähnlich wie für Gauß) oft nicht die heute übliche Bedeutung, sondern in Anlehnung an den französischen Sprachgebrauch etwa den Sinn „philosophische Kritik" (einer Wissenschaft); vgl. den Schluß von [IV 1].

Fesseln, wie er sie für die Mathematik entschieden ablehnt, als berechtigt und notwendig erkennt im Hinblick auf die für die Naturwissenschaft zu fordernde transiente Realität. In einem wohl nicht ganz zwingenden Zusammenhang hiermit wendet er sich in [III 4_5] gegen die Auffassung eines „berühmten Physikers" (offenbar Kirchhoffs, dessen „Mechanik" 1874 erschienen war) von der Physik als einer „Naturbeschreibung", eine Auffassung, „welcher der frische Hauch des freien mathematischen Gedankens ebensowohl wie die Macht der *Erklärung* und *Ergründung* von Naturerscheinungen fehlen muß". Erwähnenswert von Cantors Ideen zur Naturwissenschaft ist auch die am Schluß von [III 7] geäußerte, einer uns heute ganz fernliegenden Atomistik entsprechende Auffassung[1], daß die materiellen Atome in der ersten, die Ätheratome in der zweiten Mächtigkeit vorhanden seien[2], sowie seine Beschäftigung mit der „Naturlehre der Organismen ..., auf welche sich die bisherigen mechanischen Prinzipien nicht anwenden lassen ..." und zu deren Bewältigung er neue, insbesondere mengentheoretische Hilfsmittel fordert (Brief an Mittag-Leffler vom 22. Sept. 1884; vgl. auch [III 4_5]); wenn auch die ihm hierbei vorschwebenden Methoden und Ziele schwerlich ganz zu klären sind, so darf doch angenommen werden, daß die (bis heute kaum in Angriff genommene) Theorie der mehrfach geordneten Mengen eine Hauptrolle dabei spielen sollte. Schließlich verdient noch Hervorhebung die in [III 4_3] sich findende Erörterung der Beziehungen zwischen dem arithmetischen Raum und dem von uns den Erscheinungen der realen Welt zugrundegelegten Raum, zwei Begriffen, deren gewöhnlich postulierte Korrespondenz „an sich willkürlich" und nur durch die Forderung der Abbildbarkeit, also nicht etwa schon durch die der stetigen Bewegung gewährleistet sei.

Das *religiöse Interesse* Cantors tritt vielfach in den Abhandlungen philosophischen Einschlags (wie auch in der Vorrede zu Bacons *Confessio fidei*) hervor; die Arbeit [IV 3] ist charakteristischerweise auch in der Zeitschrift „Natur und Offenbarung" erschienen. Von Vaters Seite her jüdischer Abstammung, selbst in der evangelischen Konfession erzogen, welcher der Vater schon vor der Geburt des Sohnes angehörte, schließlich durch die katholische Atmosphäre der mütterlichen Familie stark beeinflußt, teilte er keineswegs das

[1] Vgl. auch die auf Mitteilungen Cantors zurückgehenden Angaben in der Ztschr f. Phil. u. philos. Kritik, N. F. 88, 192f. (1886); ferner ebenda S. 229. Zu diesen physikalischen Anschauungen vgl. man neben Cauchy, auf den Cantor in [IV 3] und [IV 4] sich beruft, auch die Naturerklärung in R. Graßmanns Buch „Die Lebenslehre oder Biologie" (Stettin 1882/83).

[2] Die a. a. O. Cantor vorschwebenden und ihm offenbar sehr am Herzen liegenden Anwendungen der Punktmengentheorie auf die mathematische Physik erscheinen zwar im heutigen Entwicklungsstadium der Physik aussichtslos; physikalische Anwendungen anderer Art sind aber in der Tat erfolgt. Seine Gegnerschaft gegen die gewöhnliche Atomistik betont Cantor in [III 4_5] ausdrücklich.

Los vieler, für die solche Überschneidungen sich zu weitgehender Gleichgültigkeit in der religiösen Sphäre auswirken; vielmehr hat die schon zu Anfang erwähnte religiöse Seite seiner Erziehung offenbar nachhaltig fortgewirkt. Wenn er sich besonders eingehend mit der Stellung der Kirchenväter und der scholastischen Philosophie zum Aktual-Unendlichen[1] wie überhaupt mit dessen Beziehung zum Gottesbegriff beschäftigt und auseinandersetzt, so ist dabei neben dem Wunsch nach Verteidigung gegen die Einwände, die mit Argumenten theologischer Natur gegen seine Begriffsbildungen erhoben wurden, offenbar auch ein eigener innerer Antrieb mit im Spiel. Für seine religiöse Einstellung sind charakteristisch zunächst die in [IV 4] abgedruckten Briefe (deren ungenannter Adressat der Kardinal Franzelin war, siehe unten), in denen er die Existenz eines aktualen „Infinitum creatum" geradezu vom Gottesbegriff her beweisen will; ferner u. a. die in [IV 3] abgedruckte Stelle aus einem Brief Cantors an G. Eneström.

Im Verfolg seines Interesses für die theologische Behandlung des Problems des Unendlichen korrespondierte Cantor mit mehreren Jesuiten[2], so u. a. mit dem verbannten P. Tilman Pesch, dem Verfasser der von Cantor hochgeschätzten „Institutiones philosophiae naturalis", den er persönlich in Blyenbeck (Holland) aufsuchte, sowie mit dem Kardinal Franzelin, der im Anschluß an die Lehre Augustins die aktual-unendliche Mannigfaltigkeit verteidigte und von dem sich ein längerer Brief in [IV 4] findet; ganz besonders aber mit C. Gutberlet, Professor für Philosophie und Mathematik am Priesterseminar in Fulda und jahrzehntelangem Herausgeber des *Philosophischen Jahrbuchs der Görres-Gesellschaft*. Dieser hatte 1878 eine Schrift „Das Unendliche, metaphysisch und mathematisch betrachtet" veröffentlicht, in der er die in Theologie und Philosophie herkömmlichen Ansichten von der Unmöglichkeit einer unendlichen Größe bekämpfte, um allerdings nicht wie Cantor die *Existenz*, aber doch die *Möglichkeit* des Aktual-Unendlichen zu behaupten. Cantor erblickte daher in Gutberlet, dem seine Schrift viel Widerspruch und selbst Spott einbrachte, einen Bundesgenossen; er besuchte ihn in Fulda und verwies dabei für das von ihm bezeigte Interesse neben den sachlichen Gründen auch auf seine Beziehungen zum Katholizismus von der Mutterseite her[3]. Mit Unterstützung Gutberlets hat Cantor

[1] Man vgl. zu diesen Beziehungen zwischen Theologie und Aktual-Unendlichem an neuerer Literatur etwa A. Dempfs Schrift „Das Unendliche in der mittelalterlichen Metaphysik und in der Kantischen Dialektik" (Münster i. W. 1926) und einen Aufsatz von J. Ternus S. J. „Zur Philosophie der Mathematik" (Philos. Jahrb. der Görresgesellschaft **39**, 217—231 [1926]).

[2] Wie Ternus (a. a. O., S. 221) berichtet, bewahrt die Bibliothek der niederdeutschen Jesuitenprovinz noch manche „Hommages respectueux de l'auteur George Cantor" aus den 80er Jahren.

[3] Vgl. Philos. Jahrb. der Görres-Gesellschaft **32**, 366 (1919) und **41**, 262 (1928).

den tiefgehenden Einblick in die Auffassungen der mittelalterlichen Denker von dem Unendlichen gewonnen, von dem seine Arbeiten zeugen, wie auch umgekehrt Gutberlet einen weiteren Kreis philosophisch interessierter Leser mit den Gedankengängen der Mengenlehre Cantors vertraut gemacht und diese u. a. gegen die Einwände der Herbartschen Schule verteidigt hat[1].

Daß Cantor gleichwohl theologischen Vorurteilen auch ohne Umschweife und sogar mit Ironie entgegentreten konnte, wenn es darauf ankam, ersieht man beispielsweise aus den Bemerkungen zum Wesen des Kontinuums in [III 4_5], § 10.

Ein großer Bahnbrecher der Wissenschaft ist der mathematischen Welt in Georg Cantor geschenkt worden. Die allgemeine Verbreitung der Erkenntnis, daß durch sein Werk der *Analysis* neue Bahnen gewiesen und ganz neuartige Problemstellungen eröffnet wurden, hat er noch selbst zum großen Teile erlebt. Daß seine Ideen aber auch der *Geometrie* einen geradezu revolutionären Fortschritt auf Bahnen von unantastbarer Strenge ermöglicht haben, wird so recht erst in der Gegenwart, besonders dank den Arbeiten der jüngeren topologischen Schule, mehr und mehr deutlich und anerkannt. Ja selbst für physikalische Anwendungen haben sich die feinsten Ideen der Punktmengenlehre als wertvoll erwiesen. Hinsichtlich der *abstrakten* Mengenlehre, zu der neben den allgemeinen Theorien der Äquivalenz und der Ähnlichkeit namentlich auch das Reich der transfiniten Ordnungszahlen sowie die philosophische Deutung der Mengenlehre zu rechnen ist, sind freilich die Geister heute erneut in Unruhe und in Unsicherheit verstrickt. Doch auch hier wird sich im Laufe der Entwicklung früher oder später Hilberts Wort erfüllen von dem Paradiese, das Cantor uns geschaffen habe und aus dem uns niemand solle vertreiben können. Mögen da auch manche grundsätzlich neue Gedanken erforderlich sein und in Richtungen weisen, die uns heute noch fremd sind: die Eroberung des Aktual-Unendlichen für die Wissenschaft überhaupt ist eine historische Tatsache, und auf ihrem Boden, auf Cantors Ideen aufbauend, wird sich die Weiterentwicklung vollziehen im Sinne der Zuversicht, die Cantor seiner abschließenden Darstellung [III 9] als letztes Mottowort vorangestellt hat: „Veniet tempus, quo ista, quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."

[1] „Das Problem des Unendlichen". Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik, N. F. 88, 179 bis 223 (1886), Teil I. Vgl. auch Cantor, ebenda S. 232 und die Fußnote in [IV 4] (oben S. 388), nach der Gutberlet in seinen Aufsatz Stellen aus einem Manuskript Cantors (auf dessen Wunsch) eingefügt hat, sowie Cantors Einwände in [IV 4] (oben S. 394).

Index der mengentheoretischen Grundbegriffe.

(Die Zahlen bedeuten Seitenzahlen.)

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.