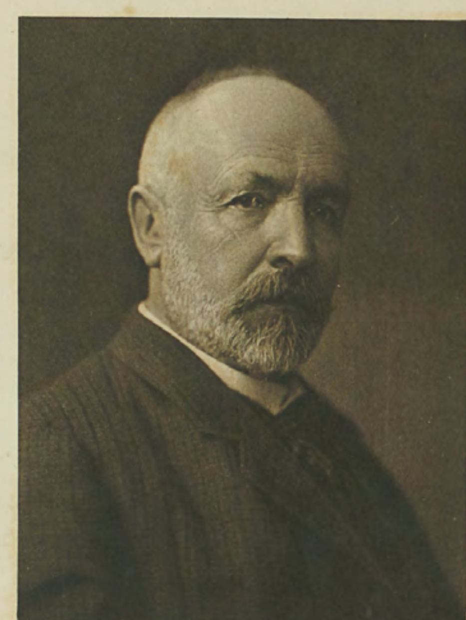
antor
elte
ungen



Georg Cantor.

# GEORG CANTOR
# GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

MATHEMATISCHEN UND PHILOSOPHISCHEN INHALTS

MIT ERLÄUTERNDEN ANMERKUNGEN SOWIE MIT ERGÄNZUNGEN AUS DEM BRIEFWECHSEL CANTOR-DEDEKIND

HERAUSGEGEBEN VON

ERNST ZERMELO

NEBST EINEM LEBENSLAUF CANTORS

VON

ADOLF FRAENKEL

MIT EINEM BILDNIS

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1932

Georg Cantor

# GEORG CANTOR
# GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

## MATHEMATISCHEN UND PHILOSOPHISCHEN INHALTS

MIT ERLÄUTERNDEN ANMERKUNGEN SOWIE MIT
ERGÄNZUNGEN AUS DEM BRIEFWECHSEL
CANTOR-DEDEKIND

HERAUSGEGEBEN VON

**ERNST ZERMELO**

NEBST EINEM LEBENSLAUF CANTORS
VON

**ADOLF FRAENKEL**

MIT EINEM BILDNIS

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1932

# Vorwort.

In der Geschichte der Wissenschaften ist es gewiß ein seltener Fall, wenn eine ganze wissenschaftliche Disziplin von grundlegender Bedeutung der schöpferischen Tat eines einzelnen zu verdanken ist. Dieser Fall ist verwirklicht in der Schöpfung Georg Cantors, der Mengenlehre, einer neuen mathematischen Disziplin, die während eines Zeitraumes von etwa 25 Jahren in einer Reihe von Abhandlungen ein und desselben Forschers in ihren Grundzügen entwickelt, seitdem zum bleibenden Besitze der Wissenschaft geworden ist, so daß alle späteren Forschungen auf diesem Gebiete nur noch als ergänzende Ausführungen seiner grundlegenden Gedanken aufzufassen sind. Aber auch abgesehen von dieser ihrer historischen Bedeutung sind die Cantorschen Originalabhandlungen noch für den heutigen Leser von unmittelbarem Interesse, in ihrer klassischen Einfachheit und Präzision ebenso zur ersten Einführung geeignet und darin noch von keinem neueren Lehrbuch übertroffen, wie auch für den Fortgeschrittenen durch die Fülle der zugrunde liegenden Gedanken eine genußreich anregende Lektüre. Der immer noch wachsende Einfluß der Mengenlehre auf alle Zweige der modernen Mathematik und vor allem ihre überragende Bedeutung für die heutige Grundlagenforschung haben bei Mathematikern wie bei Philosophen den Wunsch entstehen lassen, die in verschiedenen Zeitschriften zerstreuten und teilweise schwer zugänglichen Abhandlungen in ihrem natürlichen Zusammenhange lesen und studieren zu können. Diesem Bedürfnisse zu entsprechen ist die hier vorliegende Gesamtausgabe bestimmt, welche aber außer den rein mengentheoretischen auch alle übrigen wissenschaftlichen Abhandlungen Cantors mathematischen und philosophischen Inhalts umfaßt, einschließlich der (lateinisch geschriebenen) Dissertation und Habilitationsschrift sowie insbesondere auch der zuerst in der „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik“ erschienenen Aufsätze, in denen Cantor im Briefwechsel mit verschiedenen Mathematikern und Philosophen seinen Unendlichkeitsbegriff entwickelt und gegen philosophische und theologische Einwände verteidigt. Während nun die Aufnahme dieser mit der Mengenlehre im engsten Zusammenhange stehenden philosophischen Abhandlungen keiner besonderen Begründung bedarf, ist die Aufnahme der nicht sehr umfangreichen zahlentheoretischen Arbeiten hauptsächlich in biographischem Interesse erfolgt, um dem Leser auch die ersten Anfänge dieses Forscherlebens vor Augen zu führen. Endlich sind die funktionentheoretischen Untersuchungen Cantors, welche hauptsächlich die

Theorie der trigonometrischen Reihen betreffen und noch heute von gegenständlichem Interesse sind, schon deshalb unentbehrlich, weil sich an diesen Problemen zuerst die grundlegenden neuen Ideen, die dann zur Mengenlehre führten, Schritt für Schritt entwickelt haben.

Die Abhandlungen sind in der vorliegenden Ausgabe nach ihren Stoffgebieten in vier Hauptabschnitte eingeteilt, je nachdem sie die Zahlentheorie und Algebra, die Funktionentheorie, die Mengenlehre oder die Geschichte der Mathematik und die Philosophie betreffen, und in den einzelnen Abteilungen nach der Zeit ihres Erscheinens geordnet. Der Abdruck erfolgte originalgetreu, unter sorgfältiger Verbesserung aller nachweisbaren Versehen und Druckfehler des Originals und unter Einführung der heutigen Rechtschreibung; kürzere Zusätze des Herausgebers im Texte sind durch [eckige] Klammern kenntlich gemacht. Die „Anmerkungen" hinter den einzelnen Abhandlungen sind teils erläuternder, teils kritischer Natur und enthalten u. a. auch Hinweise auf die Bedeutung der betreffenden Arbeiten und auf die sich anschließende spätere Literatur. Doch sind diese Anmerkungen durchaus für den *mathematisch*, insbesondere mengentheoretisch interessierten Leser bestimmt; von einer spezifisch *philosophischen* Würdigung der einschlägigen Aufsätze wurde hier abgesehen. — Ein terminologischer Index der mengentheoretischen Grundbegriffe soll dazu dienen, das Studium der vielfach aufeinander bezugnehmenden Arbeiten nach Möglichkeit zu erleichtern.

Zur Ergänzung der Abhandlungen wurden als „Anhang" aus dem bisher unveröffentlichten Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind unter Ausscheidung alles rein Persönlichen einige längere und kürzere Stücke aufgenommen, die mir für den Leser des Cantorschen Lebenswerkes von besonderem Interesse zu sein schienen. Diese Ausführungen beziehen sich größtenteils auf die „inkonsistenten" Gesamtheiten *aller* Ordnungszahlen und *aller* Alefs und damit auf die später so sattsam diskutierten „Antinomien der Mengenlehre", die also, wie aus den Briefstellen deutlich hervorgeht, Cantor längst bekannt waren und von ihm bereits zutreffend aufgefaßt und gewertet wurden. In diesen Briefen findet sich aber auch Dedekinds bisher unbekannter Beweis des „Äquivalenzsatzes", der, mit Hilfe der „Ketten"-Theorie geführt, den Beweis des Herausgebers von 1908 antizipiert und bei dieser Gelegenheit zum ersten Male im Druck erscheint. Die Abschriften nach den Originalbriefen hat Herr Cavaillès (Paris) während seines Studienaufenthaltes in Göttingen herstellen lassen und mir für diese Ausgabe freundlichst zur Verfügung gestellt. Ich möchte nicht verfehlen, ihm hierfür auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Ganz besonderen Dank schulde ich vor allem Herrn Dr. Reinhold Baer, Privatdozent in Halle, der alle Korrekturen des Umbruches mitgelesen und mich durch vielfache Ratschläge und Literaturnachweise bei meiner Arbeit



wesentlich unterstützt hat, sowie auch meinen hiesigen Freunden und Kollegen, den Herren Dr. Arnold Scholz und Dr. Robert Breusch, die mir häufig bei Korrektur und Kommentar halfen, endlich auch Herrn Prof. Dr. Oskar Becker (Bonn) für seine freundlichen Auskünfte bezüglich der philosophischen Literatur. Aber auch der Verlagsbuchhandlung, die meinen Wünschen in bezug auf Anlage und Ausstattung des Werkes immer bereitwillig entgegenkam, sowie der Druckerei, die alle nicht immer leichten Korrekturen mit der größten Sorgfalt ausführte, bin ich zu größtem Danke verpflichtet.

Möge das Werk in der Form, wie sie hier vorliegt, recht viele Leser finden und in weiten Kreisen der Kenntnis und dem Verständnis des Cantorschen Lebenswerkes dienen im Sinne seines Urhebers und im Geiste echter Wissenschaft, unabhängig von Zeit- und Modeströmungen und unbeirrt durch die Angriffe derer, die in ängstlicher Schwäche eine Wissenschaft, die sie nicht mehr meistern können, zur Umkehr nötigen möchten. Diesen aber, sagt Cantor, „kann es leicht begegnen, daß genau an jener Stelle, wo sie der Wissenschaft die tödliche Wunde zu geben suchen, ein neuer Zweig derselben, schöner, wenn möglich, und zukunftsreicher als alle früheren, rasch vor ihren Augen aufblüht — wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vor den Augen des Chevalier de Meré".

Freiburg i. Br., 22. März 1932. **E. Zermelo.**

# Inhaltsverzeichnis.

### I. Abhandlungen zur Zahlentheorie und Algebra.



### II. Abhandlungen zur Funktionentheorie.



### III. Abhandlungen zur Mengenlehre.







### IV. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und zur Philosophie des Unendlichen.

# I. Abhandlungen zur Zahlentheorie und Algebra.

## 1. De aequationibus secundi gradus indeterminatis.

[Dissertation Berlin 1867.]

Problema de quo in sequentibus agimus hoc est: aequationis homogeneae secundi gradus $F(X, Y, Z) = 0$ solutiones omnes in numeris integris invenire. — Convenit problema cum illo: aequationis $F(\xi, \eta, 1) = 0$ omnes solutiones in numeris rationalibus invenire; — quod a Diophanti temporibus tum sagacitatem multorum mathematicorum ad disquisitionem elicuit, quum denique[1] ab ill. Lagrange primum ita investigatum est, ut nihil dubitationis relinqueretur.

Quodsi nihilominus denuo hanc quaestionem tractavi, causa mihi afferenda est, quae conatum probet. Quam ob rem solutione Lagrangii breviter exposita, ad ea adjumenta paucis verbis redeamus, quibus ill. Legendre et ill. Gauss rem perlucidiorem perfectioremque reddiderunt. —

Lagrange postquam substitutione rationali aequationem generalem ad formam $X^2 = AY^2 + BZ^2$ reduxit, ostendit, si haec aequatio solutionem admittat, semper alteram ejusdem formae aequationem exhiberi $X_1^2 = A_1 Y_1^2 + B_1 Z_1^2$, in qua $A_1 B_1 < AB$, quae et ipsa in numeris integris solvi possit; ex cujus solutione vice versa primae aequationis solutio proficiscitur. Quae transformatio si ad secundam aequationem rursus adhibetur et iterum iterumque repetitur, donec effici possit, perspicuum est, aut aequationem prodire, ad quam ratio processus nullo modo applicari possit, quae igitur irresolubilis sit et hanc indolem in omnes aequationes anteeuntes transferat, aut aequationem nasci, in qua productum $AB = \pm 1$; ergo aequationem ultimam hujus formae esse: $X^2 = Y^2 \pm Z^2$, qua omnes aequationes usque ad datam primam resolubiles fieri apparet. —

Patet hanc rationem problematis investigandi tam quaestionem de possibilitate solutionis in omni casu decernere, quam in casu resolubili solutiones patefacere.

Quae via etiam ex essentia problematis ita est hausta, ut Legendre[2] superstruere ei potuerit demonstrationem pulcherrimi illius theorematis, quod

[1] Histoire de l'Académie de Berlin **1767**, 167.

[2] Hist. de l'Académie de Paris **1784**, 507; nec minus: Legendre: Théorie des nombres **1**, 32 (1830).

conditiones necessarias et sufficientes resolubilitatis exhibet. — Si aequatio generalis substitutionibus rationalibus effectis ad hanc formam reducta est: $aXX + a'YY + a''ZZ = 0$, ubi $a, a', a''$ numeri integri sunt, qui alius ad alium primi inter se sunt neque ullos divisores quadricos implicant, ex theoremate ill. Legendre necessariae et sufficientes resolubilitatis conditiones hae sunt:

1) $a, a', a''$ eodem signo $\pm$ non affecti;

2) $-a'a''Ra$, $-a''aRa'$, $-aa'Ra''$, ubi littera $R$ duabus quantitatibus interposita indicat, priorem sequentis esse residuum quadraticum. —

Gauss profert in disq. arithmeticis[1] duas novas theorematis demonstrationes, quae in eo praecipue nituntur, quod illis conditionibus locum habentibus forma $aXX + a'YY + a''ZZ$ per substitutionem quandam rationalem et linearem in formam indefinitam determinantis 1 transit, quae ex § 277 ejusdem operis formae $YY - 2XZ$ aequivalet; quum aequatio $YY - 2XZ = 0$ in integris resolubilis sit, solutionem datae trahit. —

Ope unius solutionis aequationis $F(X, Y, Z) = 0$ formulae deducuntur, quae omnes solutiones complectuntur, et quae hanc ob causam problema absolvere omnibus visae sunt. Quae formulae tales sunt:

$$X : Y : Z = \varphi\left(\frac{p}{q}, 1\right) : \psi\left(\frac{p}{q}, 1\right) : \chi\left(\frac{p}{q}, 1\right),$$

ubi $\varphi, \psi, \chi$ sunt functiones secundi gradus integrae ipsius $\frac{p}{q}$, coefficientibus integris affectae.

Ad quemvis ipsius $\frac{p}{q}$ valorem rationalem solum duae solutiones $X_0, Y_0, Z_0, -X_0, -Y_0, -Z_0$, ejus indolis referuntur, ut nullus divisor communis numeros illos metiatur; repraesentantur hae solutiones, quas *irreducibiles* appellemus et ex quibus propter homogeneitatem aequationis omnia pendent, hisce formulis:

$$X_0 = \pm\frac{\varphi(p, q)}{t}; \qquad Y_0 = \pm\frac{\psi(p, q)}{t}; \qquad Z_0 = \pm\frac{\chi(p, q)}{t},$$

ubi ipsis $p$, $q$ omnes valores numerici attribuendi, qui inter se primi sunt, et ubi $t$ divisorem maximum communem ipsorum $\varphi, \psi, \chi$ denotat. —

*Sed quum ex hac numeri $t$ definitione non eluceat, quomodo $t$ generaliter e numeris $p$, $q$ pendeat, quumque igitur pro unoquoque binorum numerorum $p$, $q$ complexu peculiari operatione ad $t$ computandum opus sit,* mihi quidem in illis formulis solutio problema absolvens inesse non videtur.

Quum quae in hac solutione imperfecta sunt applicatione quadam problematis luce clariora mihi reddita sint, ad subtilem disquisitionem aggressus cognovi, omnes aequationis resolubilis $F(X, Y, Z) = 0$ solutiones irreducibiles

[1] C. F. Gauss Werke 1, 349. Göttingen 1863.



in multitudinem finitam systematum dicedere, quorum unumquodque sub forma

$$X_0 = \varphi_\lambda(p, q); \qquad Y_0 = \psi_\lambda(p, q); \qquad Z_0 = \chi_\lambda(p, q)$$

repraesentari potest, ubi $\varphi_\lambda, \psi_\lambda, \chi_\lambda$ formae sunt binariae, coefficientibus integris affectae; ubi $q$, $p$ eosdem numeros quos supra significant, ea conditione, ut campus horum numerorum in quovis systemate congruentiis linearibus circumscriptus sit. — Hinc fit ut in aspectu omnium systematum

$$\begin{gathered}\varphi_1\,\psi_1\,\chi_1\\ \varphi_2\,\psi_2\,\chi_2\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\\ \varphi_e\,\psi_e\,\chi_e,\end{gathered}$$

si ad peculiarem ipsorum $p$, $q$ variabilitatis modum intra fines uniuscujusque systematis attendis, modus perfectus et monogenes expositionis infinite multarum solutionum irreducibilium oriatur, ubi omnes operationes in omni generalitate sunt cogitatae. —

Quod problema quum subtiliter perscrutatus elucubrarem, iis formis $F(X, Y, Z)$ disquisitionem definivi, in quibus coefficientes ipsorum $XZ$, $YZ$, $XY$ evanescunt; ex quo sequitur, in hac commentatione tantum solutionem expletam hujus aequationis:

$aXX + a'YY + a''ZZ = 0$ contineri. —

§ 1.

Sit: $F(X, Y, Z) = aXX + a'YY + a''ZZ + 2bYZ + 2b'ZX + 2b''XY$

forma indefinita ternaria, ubi $a, a', a'', b, b', b''$ integros sine divisore communi designant; formam indefinitam eam esse inter omnes constat, quae tam positivos quam negativos valores admittat, ita ut pro ea de repraesentatione cifrae agi possit. —

Porro determinantem

$$D = abb + a'b'b' + a''b''b'' - aa'a'' - 2bb'b''$$

cifram non aequare suppono; atque per formam adjunctam hanc intellectam volo:

$$G(U, V, W) = dUU + d'VV + d''WW + 2eVW + 2e'WU + 2e''UV$$

ubi

$$\begin{aligned} d &= bb - a'a''; & d' &= b'b' - aa''; & d'' &= b''b'' - aa';\\ e &= ab - b'b''; & e' &= a'b' - bb''; & e'' &= a''b'' - bb'. \text{ —}\end{aligned}$$

Connectam variabiles $X, Y, Z, U, V, W$ his aequationibus:

$$U = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X}; \qquad V = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y}; \qquad W = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Z};$$

quibus rebus constitutis aequatio sequitur:

$$G(U,V,W) = D\cdot F(X,Y,Z). \; - \tag{1}$$

Si tres formae binariae quadraticae, coefficientibus integris affectae:

$$\varphi = \alpha xx + 2\alpha' xy + \alpha'' yy;\quad \psi = \beta xx + 2\beta' xy + \beta'' yy;\quad \chi = \gamma xx + 2\gamma' xy + \gamma'' yy$$

(in quibus coefficientem medium parem suppositum esse apparet) loco ipsorum $X$, $Y$, $Z$ resp. in formam $F$ substitutae, aequationi

$$F(\varphi,\psi,\chi) = 0 \tag{2}$$

identice respectu ipsorum $x$, $y$ satisfaciunt, appello $(\varphi,\psi,\chi)$ *solutionem formalem* aeq. $F=0$. — Statim breviter eas res algebraicas in medio ponam, quae ex identitate (2) manant, et a quibus initium considerationum arithmeticarum repetendum est. — Quod facillime efficitur.

Nam positis:

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha\xi + 2\alpha'\eta + \alpha''\zeta \\ Y &= \beta\xi + 2\beta'\eta + \beta''\zeta \\ Z &= \gamma\xi + 2\gamma'\eta + \gamma''\zeta \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

habemus aequationem

$$F(X,Y,Z) = 2K(\eta\eta - \xi\zeta), \tag{4}$$

ubi

$$K = -\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\alpha}\alpha'' = 2F(\alpha',\beta',\gamma'). \tag{5}$$

Determinante $\sum \pm \alpha\beta'\gamma''$ littera $\delta$ designato, e theoremate illo, determinantem formae datae multiplicatum per quadratum determinantis substitutionis aequalem esse determinanti formae transmutatae, si applicatur hoc theorema ad transformationem (4), prodit:

$$K^3 = 2D\delta^2;\quad \text{unde posito}\quad -\frac{K}{\delta} = H,$$

fit

$$K = \frac{2D}{H^2};\qquad \delta = -\frac{2D}{H^3}; \tag{5}$$

ubi $H$ ex definitione numerus rationalis. —

Ex aequationibus $\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\alpha}\alpha = 0;\qquad \sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\alpha}\alpha' = 0$ manant:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\alpha} = c(\beta\gamma' - \gamma\beta');\quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\beta} = c(\gamma\alpha' - \alpha\gamma');\quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\gamma} = c(\alpha\beta' - \beta\alpha');$$

pari modo inveniuntur:

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha'} = c'(\beta\gamma'' - \gamma\beta'');\qquad \frac{\partial F}{\partial\beta'} = c'(\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'');\qquad \frac{\partial F}{\partial\gamma'} = c'(\alpha\beta'' - \beta\alpha''),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\alpha''} = c''(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'');\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\beta''} = c''(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'');\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\gamma''} = c''(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''). \; -$$



Numerum $c$ invenias, si tres priores aeq. per $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ resp. multiplicatas addis; fit $c = H$. Eodem modo valores ipsorum $c'$, $c''$ evadunt, nempe:

$$c' = c'' = c = H;\ \text{ita ut denique assequaris:}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\alpha} = H(\beta\gamma' - \gamma\beta');\quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\beta} = H(\gamma\alpha' - \alpha\gamma');\quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\gamma} = H(\alpha\beta' - \beta\alpha') \\ &\frac{\partial F}{\partial\alpha'} = H(\beta\gamma'' - \gamma\beta'');\quad \frac{\partial F}{\partial\beta'} = H(\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'');\quad \frac{\partial F}{\partial\gamma'} = H(\alpha\beta'' - \beta\alpha'') \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\alpha''} = H(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'');\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\beta''} = H(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'');\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\gamma''} = H(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Qua in re annotandum est, quod, ut ex aequatione (4) aequationes (6) fluunt, ita ex his illa proficiscitur; quod facile persuasum tibi habeas. —

Solvendo aeq. (3) pro $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et rationem habendo aeq. (5), (6), prodit:

$$\begin{aligned} \frac{2D}{H^2}\xi &= -\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\alpha''}x = -\sum U\alpha'' \\ \frac{2D}{H^2}\eta &= +\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\alpha'}x = +\sum U\alpha' \\ \frac{2D}{H^2}\zeta &= -\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\alpha}x = -\sum U\alpha. \end{aligned}$$

Qui valores in aeq.: $G(U,V,W) = DF(X,Y,Z) = \frac{4D^2}{H^2}(\eta\eta - \xi\zeta)$ substituti, suppeditant:

$$G(U,V,W) = H^2\{(\alpha'U + \beta'V + \gamma'W)^2 - (\alpha U + \beta V + \gamma W)(\alpha''U + \beta''V + \gamma''W)\}.$$

Extemplo relationes hae deducuntur:

$$\begin{gathered} d = H^2(\alpha'\alpha' - \alpha\alpha'');\quad d' = H^2(\beta'\beta' - \beta\beta'');\quad d'' = H^2(\gamma'\gamma' - \gamma\gamma''); \\ 2e = H^2(2\beta'\gamma' - \beta\gamma'' - \gamma\beta'');\qquad 2e' = H^2(2\gamma'\alpha' - \alpha\gamma'' - \gamma\alpha''); \\ 2e'' = H^2(2\alpha'\beta' - \alpha\beta'' - \beta\alpha''), \end{gathered} \tag{7}$$

unde cognoscitur, determinantes formarum binariarum $\varphi,\psi,\chi$ ad numeros $d$, $d'$, $d''$ rationem quadraticam habere; numerus $H$ in eo characteristicum est solutioni $(\varphi,\psi,\chi)$, quod determinantes formarum $\varphi,\psi,\chi$ definit; *quare afficiam solutionem* $(\varphi,\psi,\chi)$ *definitione* $(H = H_0)$, ut ex. g. solutio $(H = \pm 1)$ talis sit in qua $H = \pm 1$, ergo:

$$\alpha'\alpha' - \alpha\alpha'' = d,\ \ldots.$$

Quae demonstravimus ostendunt, numerum rationalem $H_0$, ut proprius sit alcs. solutionis formalis $(\varphi,\psi,\chi)$, ea natura necessario gaudere, ut numeri

$$\frac{d}{H_0^2},\quad \frac{d'}{H_0^2},\quad \frac{d''}{H_0^2},\quad \frac{2e}{H_0^2},\quad \frac{2e'}{H_0^2},\quad \frac{2e''}{H_0^2},\quad \frac{2D}{H_0^2},\quad \frac{2D}{H_0^3}$$

integri fiant. Si $H_0$ valorem rationalem ejusmodi assecutus est, solutio unaquaeque $(H = \pm H_0)$ substitutionem (3) praebet, quae $F$ in $\frac{4D}{H_0^2}(\eta\eta - \xi\zeta)$

transformat; vice versa substitutio quaelibet

$$x = \alpha\xi + \bar{\alpha}'\eta + \alpha''\zeta$$
$$y = \beta\xi + \bar{\beta}'\eta + \beta''\zeta$$
$$z = \gamma\xi + \bar{\gamma}'\eta + \gamma''\zeta$$

quae $F$ in $\frac{4D}{H_0^2}(\eta\eta - \xi\zeta)$ traducat, suppeditat solutionem $(H = \pm H_0)$

$$\varphi = \alpha xx + 2\frac{\bar{\alpha}'}{2}xy + \alpha'' yy; \ldots .$$

Nam propter aequationes $\frac{d}{H_0^2} = \left(\frac{\bar{\alpha}'}{2}\right)^2 - \alpha\alpha'', \ldots,$

quae manifesto hic quoque locum habent, numeri $\frac{\bar{\alpha}'}{2}, \frac{\bar{\beta}'}{2}, \frac{\bar{\gamma}'}{2}$ erunt integri $\alpha', \beta', \gamma'$; quae deliberatio nobis multis locis usui erit. —

§ 2.

Si $(\varphi, \psi, \chi)$ est solutio formalis aeq. $F = 0$, ex ea infinite multas alias solutiones $f$. deducas, mutando variabiles $x$, $y$ substitutione integra $x = \lambda x' + \mu y'$; $y = \nu x' + \varrho y'$, ubi $\lambda\varrho - \mu\nu = \pm 1$; unde quum eluceat, duas solutiones $(\varphi, \psi, \chi)$, $(\varphi', \psi', \chi')$ ejusmodi idem solutionum in integris systema comprehendere, dicemus, solutiones $(\varphi, \psi, \chi)$, $(\varphi', \psi', \chi')$ *ad idem systema pertinere*, vel *aequivalentes esse*. —

Pro solutionibus formalibus ejusdem systematis, $H$ eodem vel contrario valore gaudet, prout substitutio, qua altera solutio in alteram mutatur, valorem $+1$ vel $-1$ habet.

Si duae solutiones formales substitutione $\begin{bmatrix}\lambda, \mu \\ \nu, \varrho\end{bmatrix}$ altera in alteram transformantur, ubi $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\varrho$ integros esse non oportet, praeter illam sola substitutio $\begin{bmatrix}-\lambda, -\mu \\ -\nu, -\varrho\end{bmatrix}$ datur, qua altera in alteram transeat. —

Itaque si duae solutiones $(\varphi, \psi, \chi)$, $(\varphi', \psi', \chi')$ proponuntur, quarum prima substitutione non integra, puta $\begin{Bmatrix}\sqrt{2}, 1 \\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{Bmatrix}$ in alteram transit, pro certo habemus illas ad idem systema non pertinere. —

Proposita forma $F_1(X_1, Y_1, Z_1)$ aequivalente formae $F$, quae substitutione integra: $X_1 = \sigma X + \tau Y + \vartheta Z$; $Y_1 = \sigma' X + \tau' Y + \vartheta' Z$; $Z_1 = \sigma'' X + \tau'' Y + \vartheta'' Z$ in $F$ transit, ubi $\Sigma \pm \sigma\tau'\vartheta'' = \pm 1$, ex unaquaque aequationis $F = 0$ solutione formali $(\varphi, \psi, \chi)$ prodit solutio $f(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$ aeq. $F_1 = 0$, harum formularum ope: $\varphi_1 = \Sigma\sigma\varphi$; $\psi_1 = \Sigma\sigma'\varphi$; $\chi_1 = \Sigma\sigma''\varphi$, et ex his formulis omnes solutiones formales $(H = \pm H_0)$ aeq. $F_1 = 0$ eruuntur, ponendo pro $(\varphi, \psi, \chi)$ omnes solutiones $(H = \pm H_0)$ ipsius $F = 0$. —



Si $(\varphi, \psi, \chi)$, $(\varphi', \psi', \chi')$ sunt duae solutiones ejusdem systematis ipsius $F = 0$, iis illarum formularum ope solutiones $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$, $(\varphi_1', \psi_1', \chi_1')$ respondent aeq. $F_1 = 0$, quae ad idem systema pertinent. —

Quodsi in proximo § theorema nobis demonstrandum est, solam finitam solutionum formalium $(H = \pm H_0)$ multitudinem dari, quae ad aeq. $F = 0$ spectant, licet formam $F$ in aequivalentem $F_1$ transformare et in hac transformata theorema probare. —

§ 3.

Theorema. *Multitudo systematum solutionum formalium aeq. $F = 0$, quae ad unum eundemque numerum characteristicum $\pm H_0$ referendae sunt, aut cifrae aequalis, aut finita est.* —

Demonstratio. — Sinit forma quaelibet $F$ transformationem in formam aequivalentem $F_1$, in qua aliquis trium priorum coefficientium formae adjunctae $G_1$, ex. g. tertius $d_1''$ valore negativo a cifra discrepante gaudet; quod propter aeq.: $\frac{d_1''}{H_0^2} = b_1'' b_1'' - a_1 a_1'$ efficit, ut $a_1$ et $a_1'$ a cifra discrepent et eodem signo affecti sint. — Etenim si inter $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1$ aequationes praecedentis § intercedunt, inter variabiles $U, V, W, U_1, V_1, W_1$, formarum $G$, $G_1$ locum habebunt aeq.:

$$U = \sigma U_1 + \sigma' V_1 + \sigma'' W_1; \qquad V = \tau U_1 + \tau' V_1 + \tau'' W_1;$$
$$W = \vartheta U_1 + \vartheta' V_1 + \vartheta'' W_1,$$

unde

$$d_1'' = G(\sigma'', \tau'', \vartheta'').$$

Sed quandoquidem $F$ et $G$ sunt formae indefinitae, $\sigma''$, $\tau''$, $\vartheta''$ ita accipere licet, ut $F(\sigma'', \tau'', \vartheta'') < 0$ fiat et ut hi tres numeri nullum divisorem communem habeant; quo facto ceteri substitutionis coefficientes ita assumantur ut $\Sigma \pm \sigma\tau'\vartheta'' = \pm 1$; quae si ita se habent, substitutio cum postulato congruit. —

Secundum annotationem ultimi § formam $F$ in demonstratione nostra ea indole supponere licet, ut $d'' < 0$, ergo $a \gtrless 0$, $a' \gtrless 0$, $a$, $a'$ eodem signo $\pm$ affecti. —

Quo posito proveniunt hae aequationes identicae (Disq. 271):

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{D}{d''}ZZ - \frac{d''}{a}\left(Y - \frac{e}{d''}Z\right)^2 + a\left(X + \frac{b''}{a}Y + \frac{b'}{a}Z\right)^2 \\ F &= \frac{D}{d''}ZZ - \frac{d''}{a'}\left(X - \frac{e'}{d''}Z\right)^2 + a'\left(Y + \frac{b''}{a'}X + \frac{b}{a'}Z\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Sit $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$ solutio formalis aliqua $(H = \pm H_0)$ ipsius $F = 0$, si exsistat; proin $\chi_1$ est forma determinantis negativi $\frac{d''}{H_0^2}$; secundum ill. Lagrange semper forma ipsi $\chi_1$ aequivalens exsistit:

$$\chi = \gamma xx + 2\gamma' xy + \gamma'' yy,$$

in qua inaequationes locum habent:

$$\gamma \leqq \sqrt{-\frac{4}{3}\frac{d''}{H_0^2}}; \qquad \gamma' \leqq \sqrt{-\frac{1}{3}\frac{d''}{H_0^2}}. \tag{2}$$

Applicemus transformationem, quae $\chi_1$ in $\chi$ traducit, ad solutionem $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$, qua re solutio transit in aequivalentem $(\varphi, \psi, \chi)$; ponimus

$$\varphi = \alpha xx + 2\alpha' xy + \alpha'' yy; \qquad \psi = \beta xy + 2\beta' xy + \beta'' yy.$$

Quibus rebus effectis habemus propter aeq. (4) § 1

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \qquad F(\alpha', \beta', \gamma') = \frac{D}{H_0^2};$$

tum autem ex formulis (1) hjs. §:

$$\begin{aligned}
-\frac{D}{d''} a\gamma\gamma &= -d''\left(\beta - \frac{e}{d''}\gamma\right)^2 + a^2\left(\alpha + \frac{b''}{a}\beta + \frac{b'}{a}\gamma\right)^2 \\
-\frac{D}{d''} a'\gamma\gamma &= -d''\left(\alpha - \frac{e'}{d''}\gamma\right)^2 + a'^2\left(\beta + \frac{b''}{a'}\alpha + \frac{b}{a'}\gamma\right)^2 \\
\frac{Da}{H_0^2} - \frac{D}{d''} a\gamma'\gamma' &= -d''\left(\beta' - \frac{e}{d''}\gamma'\right)^2 + a^2\left(\alpha' + \frac{b''}{a}\beta' + \frac{b'}{a}\gamma'\right)^2 \\
\frac{Da'}{H_0^2} - \frac{D}{d''} a'\gamma'\gamma' &= -d''\left(\alpha' - \frac{e'}{d''}\gamma'\right)^2 + a'^2\left(\beta' + \frac{b''}{a'}\alpha' + \frac{b}{a'}\gamma'\right)^2.
\end{aligned}$$

Quum $d''$ sit $< 0$ et $F$ forma indefinita, numeri $Da$, $Da'$ sunt positivi; hinc ex aequationibus ultimis ope inaeq. (2) inaequationes

$$\frac{4}{3}\frac{Da}{H_0^2} \geqq -d''\left(\beta - \frac{e}{d''}\gamma\right)^2; \qquad \frac{4}{3}\frac{Da}{H_0^2} \geqq -d''\left(\alpha - \frac{e'}{d''}\gamma\right)^2 \tag{3}$$

$$\frac{4}{3}\frac{Da'}{H_0^2} \geqq -d''\left(\beta' - \frac{e}{d''}\gamma'\right)^2; \qquad \frac{4}{3}\frac{Da'}{H_0^2} \geqq -d''\left(\alpha' - \frac{e'}{d''}\gamma'\right)^2 \tag{4}$$

derivantur. —

Jamvero si cum his inaequationibus confers aeq.

$$\alpha'\alpha' - \alpha\alpha'' = \frac{d}{H_0^2}; \qquad \beta'\beta' - \beta\beta'' = \frac{d'}{H_0^2}; \qquad \gamma'\gamma' - \gamma\gamma'' = \frac{d''}{H_0^2},$$

nullo negotio cernas, numeros omnes $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ inter certas limites jacere. —

Sed quoniam in systemate solutionum $(H = \pm H_0)$ quolibet solutio formalis $(\varphi, \psi, \chi)$ ejus indolis invenitur, theorema probatum est. —

---

Qua postrema transformatione ad aequationem $aXX + a'YY + a''ZZ = 0$ adhibita, in qua numeri $a, a', a''$ inter se alius ad alium sunt primi atque eodem signo non affecti, neque ullum divisorem quadraticum habent, propositio nascitur:



In quovis solutionum formalium systemate $(H = \pm 1)$ solutio $(\varphi, \psi, \chi)$ datur, in qua

$$\alpha \leqq \sqrt{\left(\frac{4}{3} a'a''\right)}; \qquad \beta \leqq \sqrt{\left(\frac{4}{3} a''a\right)}; \qquad \gamma \leqq \sqrt{\left(\frac{4}{3} aa'\right)};$$

ubi uncis indicamus, semper valores absolutos sumendos esse. —

Jam in § 10 demonstrabimus, si aequationis illius solutio irreducibilis $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ exsistat, etiam solutionem formalem $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$ $(H = \pm 1)$ exstare, ubi formae $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ numeros $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ pro primis coefficientibus habent. —

Quum igitur ex iis quae demonstravimus sequatur, in eodem systemate ad quod solutio $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$ pertineat, solutionem $(\varphi, \psi, \chi)$ quoque adesse, in qua $\alpha, \beta, \gamma$ intra limites jaceant, quumque porro

$$a\alpha\alpha + a'\beta\beta + a''\gamma\gamma = 0,$$

theorema obtinemus:

Si aequatio $aXX + a'YY + a''ZZ = 0$, ubi bini numerorum $a, a', a''$ inter se primi sunt, idemque nullo divisore quadratico neque eodem signo $\pm$ affecti sunt, in integris resolubilis est, eadem jam per numeros $\alpha, \beta, \gamma$ solvitur, qui intra limites inclusi sunt:

$$\alpha \leqq \sqrt{\left(\frac{4}{3} a'a''\right)}; \qquad \beta \leqq \sqrt{\left(\frac{4}{3} aa''\right)}; \qquad \gamma \leqq \sqrt{\left(\frac{4}{3} aa'\right)};$$

quod criterium manifesto in omni casu proposito quaestionem de resolubilitate ad discrimen adducit. —

## § 4.

Si data est aequatio $aXX + a'YY + a''ZZ = 0$ (quam brevitatis gratia posthac per $[a, a', a''] = 0$ designabimus), ubi $a, a', a''$ sine divisore communi, neque eodem signo affectos supponimus, solutiones in integris possibiles ad solutiones alius aeq. $[p, p', p''] = 0$ prorsus reduci possunt, in *qua bini numerorum* $p, p', p''$ *divisorem communem non habent; quales aequationes brevitatis gratia aequationes primarias nominabimus.*

Etenim designato divisore ipsis $a'$ et $a''$ communi per $hgg$, ips. $a''$ et $a$ per $h'g'g'$, ips. $a'$ et $a$ per $h''g''g''$, ubi $h$, $h'$, $h''$ divisorum quadraticorum expertes sunt, apparet solutiones in integris possibiles formis esse:

$$X = hgX_1; \quad Y = h'g'Y_1; \quad Z = h''g''Z_1,$$

ubi $X_1, Y_1, Z_1$ sunt solutiones aeq.

$$[b, b', b''] = 0,$$

si

$$b = \frac{ah}{h'h''g'^2g''^2}; \qquad b' = \frac{a'h'}{h''hg''^2g^2}; \qquad b'' = \frac{a''h''}{hh'g^2g'^2},$$

cujus aeq. determinans est

$$-bb'b'' = -\frac{aa'a''}{hh'h''(gg'g'')^2},$$

ergo minor quam determinans $-aa'a''$ prioris. —

Si aequatio $[b, b', b''] = 0$ non est primaria, eodem connexu ad aequationem $[c, c', c''] = 0$ procedas, ubi $cc'c'' < bb'b''$; et sic porro. — Quo modo, quum determinantes magis magisque diminuantur, patet aequationem primam $[a, a', a''] = 0$ applicatione reductionis successiva ita connecti posse cum primaria quadam $[p, p', p''] = 0$, ut solutiones in integris aeq. primae hisce aequationibus: $X = mX_0$; $Y = m'Y_0$; $Z = m''Z_0$, solutionibus in integris $X_0, Y_0, Z_0$ ultimae uno modo respondeant; facileque persuadeas tibi, *omni solutioni irreducibili* $X_0, Y_0, Z_0$ *solutionem irreducibilem* $X, Y, Z$ *respondere.*

Quamobrem abhinc solas primarias aequationes considerabimus, et statim pro iis aggredimur quaestionem de solutionibus formalibus, in quibus $H = \pm 1$; quas ob hanc causam inde ex hoc tempore simpliciter solutiones formales nominabimus, definitionem $(H = \pm 1)$ omittentes.

Quas solutiones formales quum in theoremate § 3, in multitudinem finitam systematum discedere demonstraverimus, problema quod ad eas referri potest plane constitutum est, id est, si omnino solutiones formales exsistant, solutione $(\varphi_\lambda, \psi_\lambda, \chi_\lambda)$ quodvis systema repraesentante allata, omnia systemata reperire. Quo problemate soluto, in §§ 10, 11 ostendemus, qui connexus inter hoc problema et primum sit, quod erat, totam solutionum irreducibilium multitudinem aeq. primariae invenire.

## § 5.

Sit $\quad \varphi = \alpha xx + 2\alpha' xy + \alpha'' yy; \qquad \psi = \beta xx + 2\beta' xy + \beta'' yy;$

$$\chi = \gamma xx + 2\gamma' xy + \gamma'' yy$$

solutio formalis aequationis primariae

$$[a, a', a''] = 0;$$

ex § 1 fluunt aequationes:

$$aXX + a'YY + a''ZZ = 4D(\eta\eta - \xi\zeta), \tag{1}$$

si inter $X, Y, Z, \xi, \eta, \zeta$ aequationes intercedunt:

$$X = \alpha\xi + 2\alpha'\eta + \alpha''\zeta; \;\; Y = \beta\xi + 2\beta'\eta + \beta''\zeta; \;\; Z = \gamma\xi + 2\gamma'\eta + \gamma''\zeta, \tag{2}$$

porro

$$\left.\begin{aligned} a\alpha &= \beta\gamma' - \gamma\beta'; & a'\beta &= \gamma\alpha' - \alpha\gamma'; & a''\gamma &= \alpha\beta' - \beta\alpha'; \\ 2a\alpha' &= \beta\gamma'' - \gamma\beta''; & 2a'\beta' &= \gamma\alpha'' - \alpha\gamma''; & 2a''\gamma' &= \alpha\beta'' - \beta\alpha''; \\ a\alpha'' &= \beta'\gamma'' - \gamma'\beta''; & a'\beta'' &= \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''; & a''\gamma'' &= \alpha'\beta'' - \beta'\alpha''; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$



$$\alpha'\alpha' - \alpha\alpha'' = -a'a''; \qquad \beta'\beta' - \beta\beta'' = -a''a; \qquad \gamma'\gamma' - \gamma\gamma'' = -aa'; \tag{4}$$

ad quas formulas semper recurremus. —

Annotandum est, hic $H = +1$ suppositum esse, quod manifesto licet; nam si $H = -1$ esset, ex eodem systemate aliam solutionem promere liceret, in qua $H = -1$ esset. —

Praecipue vero memoria teneamus, determinantes formarum $\varphi, \psi, \chi$ resp. $-a'a''$, $-a''a$, $-aa'$ esse (4).

Designemus maximum communem divisorem ipsorum $\alpha, \alpha', \alpha''$ per $l$, ipsorum $\beta, \beta', \beta''$ per $m$, ipsorum $\gamma, \gamma', \gamma''$ per $n$, et ponamus

$$\varphi = l\varphi_0; \qquad \psi = m\psi_0; \qquad \chi = n\chi_0,$$

ubi igitur $\varphi_0, \psi_0, \chi_0$ sunt formae primitivae (in eodem sensu ac in Disq. p. 226; 1863); tunc habemus:

Theorema. *Numeri* $l, m, n$ *formis sunt*

$$l = \mu\nu; \qquad m = \nu\lambda; \qquad n = \lambda\mu,$$

*ubi* $\lambda, \mu, \nu$ *alius ad alium inter se primi sunt, atque* $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ *est solutio formalis aequationis primariae*

$$\left[\frac{a}{\lambda\lambda}, \frac{a'}{\mu\mu}, \frac{a''}{\nu\nu}\right] = 0.$$

Dem. Numeros tres $l, m, n$ uno tantum modo sub hac forma:

$$l = \varrho\mu\nu\mathfrak{a}; \quad m = \varrho\nu\lambda\mathfrak{b}; \quad n = \varrho\lambda\mu\mathfrak{c}$$

semper repraesentari posse, perspicuum, ubi numeri $\lambda, \mu, \nu$ alius ad alium inter se sunt primi; idem pro $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ valet, nec minus $\mathfrak{a}$ est primus ad $\lambda$, $\mathfrak{b}$ ad $\mu$, $\mathfrak{c}$ ad $\nu$. Quare demonstrandum est, quod: $\varrho = \mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 1$. —

Numeri $l^2, m^2, n^2$ metiuntur resp. numeros $a'a'', a''a, aa'$; quos tres numeros nullos communis divisor metitur, quia $[a, a', a'']$ forma primaria est; ergo

$$\varrho = 1. -$$

Ex eo quod numeri $aa'$, $aa''$ per $\lambda^2$ divisibiles sunt et $a'$, $a''$ inter se primi, sequitur $a$ dividi per $\lambda^2$; ob eandem causam $a'$ per $\mu^2$, $a''$ per $\nu^2$ dividitur. —

Sit $\sigma l$ maximus communis divisor ipsorum $\alpha, 2\alpha', \alpha''$, $\tau m$ ips. $\beta, 2\beta', \beta''$, $\vartheta n$ ips. $\gamma, 2\gamma', \gamma''$, ubi numeros $\sigma, \tau, \vartheta$ praeter 1 et 2 alios valores non admittere patet. — Tum ex aeq. (3) hujus § nullo negotio congruentiae deducuntur:

$$\sigma\frac{a}{\lambda^2}\mathfrak{a} \equiv 0 \bmod \mathfrak{b}\mathfrak{c}; \qquad \tau\frac{a'}{\mu^2}\mathfrak{b} \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\mathfrak{a}; \qquad \vartheta\frac{a''}{\nu^2}\mathfrak{c} \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Ex quibus congruentiis sequitur numeris quoque $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ alios valores atque 1 et 2 non attribuendos esse, quum bini numerorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ primi inter se sint et idem pro numeris $\frac{a}{\lambda^2}, \frac{a'}{\mu^2}, \frac{a''}{\nu^2}$ valeat. —

Itaque si 4 nullum numerorum $\frac{a}{\lambda^2}$, $\frac{a'}{\mu^2}$, $\frac{a''}{\nu^2}$ metitur, ex eo quod $\frac{aa'}{\lambda^2\mu^2\mathfrak{c}^2}$, $\frac{a'a''}{\mu^2\nu^2\mathfrak{a}^2}$, $\frac{a''a}{\nu^2\lambda^2\mathfrak{b}^2}$ integri sunt, sequitur:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 1.$$

At si quis numerorum illorum per 4 dividitur, ex g. $\frac{a}{\lambda^2}$, erunt $\frac{a'}{\mu^2}$, $\frac{a''}{\nu^2}$ impares, ergo

$$\mathfrak{a} = 1.$$

Quodsi $\mathfrak{b} = 1$, $\mathfrak{c} = 2$ esset; $\tau$ fieret $= 1$, quia determinans formae primitivae $\psi_0$ ex hypothesi par est, et aequationis

$$\frac{a'}{\mu^2}\psi_0^2 = -\frac{a}{\lambda^2}\varphi_0^2 - 4\frac{a''}{\nu^2}\chi_0^2$$

altera pars identice per 4 divisibilis esset, altera non divideretur. —

Perinde ac illud ostenditur, hypothesin $\mathfrak{c} = 1$, $\mathfrak{b} = 2$ rejiciendam esse; quare in hoc casu quoque, necessario restat: $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 1$.

---

Itaque, quum quaevis aequationis primariae solutio formalis ope aequationum

$$\varphi = \mu\nu\varphi_0, \qquad \psi = \nu\lambda\psi_0, \qquad \chi = \lambda\mu\chi_0$$

ad solutionem $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ alterius primariae revocetur, in qua formae $\varphi_0$, $\psi_0$, $\chi_0$ sunt primitivae, considerationes ad solutiones formales hujusmodi restringere licet; quales solutiones $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ *primitivas* nominabimus, systema ad quod solutio primitiva pertinet, *systema primitivum*. Iam ut discrimen faciamus, solutionem

$$\varphi = \mu\nu\varphi_0, \qquad \psi = \nu\lambda\psi_0, \qquad \chi = \lambda\mu\psi_0,$$

in qua haud omnes numeri $\lambda, \mu, \nu = 1$ sunt, solutionem ex primitiva $\varphi_0$, $\psi_0$, $\chi_0$ derivatam nominamus, atque *eam ad ordinem $O$ $(\lambda, \mu, \nu)$ pertinere dicimus*; eandem notationem ad systema extendimus, ad quod $(\varphi, \psi, \chi)$ pertinet. —

Si $(\varphi, \psi, \chi)$ est solutio primitiva aeq. pr. $(a, a', a'') = 0$, ad summum una formarum $\varphi, \psi, \chi$ improprie primitiva esse potest, nam sint:

1) $a, a', a''$ impares. Si duae formarum $\varphi, \psi, \chi$ puta $\varphi$, $\psi$ improprie primitivae essent, propter aeq. $a\varphi^2 + a'\psi^2 + a''\chi^2 = 0$ tertia eodem charactere afficeretur; sequeretur:

$$-a'a'' \equiv 1, \qquad -a''a \equiv 1, \qquad -aa' \equiv 1 \bmod 4,$$

quae congruentiae manifesto eodem tempore coexistere nequeunt. —

2) Sit unus aliquis numerorum $a, a', a''$ par, puta $a$; formae $\psi$, $\chi$ hac de causa primitivae erunt, quia eorum determinantes $-aa''$, $-aa'$ pares sunt. —



§ 6.

Theorema. *Si $(\varphi, \psi, \chi)$ solutio primitiva aeq. prim. $[a, a', a''] = 0$ est, tres numeri $w, w', w''$, si resp. ad modulos $a, a', a''$ respicis, plane definiti ejus indolis inveniuntur, ut hae congruentiae identice pro omnibus valoribus ipsorum $x$, $y$ locum habeant:*

$$\begin{array}{lll} w\psi \equiv a''\chi; & w\chi \equiv -a'\psi; & \bmod a. \\ w'\chi \equiv a\varphi; & w'\varphi \equiv -a''\chi; & \bmod a'. \\ w''\varphi \equiv a'\psi; & w''\psi \equiv -a\varphi; & \bmod a''. \text{ —} \end{array}$$

Dem. Hic solam existentiam numeri $w$ cum primis duabus congruentiis probemus; disquisitionem enim pro ceteris eandem esse, perspicitur. —

Quum utique altera formarum $\psi$, $\chi$ proprie primitiva sit, formam $\psi$ talem supponere licet. —

Tunc tres numeri $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ ita determinari possunt, ut

$$\mathfrak{P}\beta + 2\mathfrak{Q}\beta' + \mathfrak{R}\beta'' = 1.$$

Quo facto si ponitur

$$w = (\mathfrak{P}\gamma + 2\mathfrak{Q}\gamma' + \mathfrak{R}\gamma'')a'',$$

primis duabus congruentiis satisfactum esse, contendimus. —

Habes enim

$$w\psi = (\mathfrak{P}\gamma + 2\mathfrak{Q}\gamma' + \mathfrak{R}\gamma'')(\beta xx + 2\beta' xy + \beta'' yy)a''. \text{ —}$$

Ex relationibus autem fundamentalibus (3) § 5 fluunt:

$$\gamma\beta' \equiv \beta\gamma'; \quad \gamma\beta'' \equiv \beta\gamma''; \quad \gamma'\beta'' \equiv \beta'\gamma'' \bmod a. \text{ —}$$

Ergo:

$$\begin{aligned} w\psi &\equiv (\mathfrak{P}\beta + 2\mathfrak{Q}\beta' + \mathfrak{R}\beta'')(\gamma xx + 2\gamma' xy + \gamma'' yy)a'' \\ &\equiv a''\chi \bmod a. \end{aligned}$$

Quibus effectis congruentia prima probata est. —

Porro habemus

$$w\chi = a''(\mathfrak{P}\gamma + 2\mathfrak{Q}\gamma' + \mathfrak{R}\gamma'')(\gamma xx + 2\gamma' xy + \gamma'' yy). \text{ —}$$

Contemplando singulas relationes in identitate (1) § 5 exhibitas ut congruentias mod $a$, obtinemus:

$$a''\gamma\gamma \equiv -a'\beta\beta; \quad a''\gamma\gamma' \equiv -a'\beta\beta'; \quad a''\gamma\gamma'' \equiv -a'\beta\beta'';$$
$$a''\gamma'\gamma' \equiv a'\beta'\beta'; \quad a''\gamma''\gamma'' \equiv -a'\beta''\beta'';$$

ad quod si attendis in aequatione supra allata, invenies

$$\begin{aligned} w\chi &\equiv -a'(\mathfrak{P}\beta + 2\mathfrak{Q}\beta' + \mathfrak{R}\beta'')(\beta xx + 2\beta' xy + \beta'' yy) \\ &\equiv -a'\psi \bmod a; \end{aligned}$$

quae altera congruentiarum est. Ubi igitur existentia numeri $w$ demonstrata est, facile ex congruentia

$$w\psi \equiv a''\chi \bmod a$$

colligitur, eundem numerum $\bmod a$ prorsus determinatum esse. —

Etenim si $w_1$ est alius numerus ejusdem indolis, erit:

$$(w - w_1)\,\psi \equiv 0 \bmod a,$$

id est

$$(w - w_1)\,\beta \equiv 0; \qquad (w - w_1)\,2\beta' \equiv 0; \qquad (w - w_1)\,\beta'' \equiv 0 \bmod a$$

adeoque

$$(w - w_1)(\mathfrak{P}\beta + 2\mathfrak{Q}\beta' + \mathfrak{R}\beta'') \equiv w - w_1 \equiv 0 \bmod a. \text{ —}$$

---

I. Multiplicando primas aequationes duas

$$w\psi \equiv a''\chi; \qquad w\chi \equiv -a'\psi \bmod a$$

alteram per alteram, contingit:

$$(w^2 + a'a'')\psi\chi \equiv \bmod a.$$

Unde si $a$ impar, proficiscitur:

$$w^2 + a'a'' \equiv 0 \bmod a,$$

quia $\psi$, $\chi$ sunt formae primitivae.

Si $a$ par est, utraque forma $\psi$ et $\chi$ proprie primitiva evadit; quare tunc quoque oritur:

$$w^2 + a'a'' \equiv 0 \bmod a.$$

Perinde atque in casu tractato hae congruentiae derivantur:

$$w'^2 + aa'' \equiv 0 \bmod a'; \qquad w''^2 + aa' \equiv 0 \bmod a''; \text{ —}$$

ex quibus redundat, si aequatio primaria $[a, a', a'']$ solutionem primitivam admittat, semper $-a'a''$ residuum quadraticum ipsius $a$ esse, $-aa''$ ips. $a'$, $-aa'$ ips. $a''$. — Quae igitur relationes numerorum $a, a', a''$ conditiones necessarias existentiae solutionum primitivarum aequationis primariae $[a, a', a''] = 0$ comprehendunt. —

II. Quum ex quavis solutione primitiva $(\varphi, \psi, \chi)$ secundum theorema hujus § certa combinatio $w, w', w''$ radicum congruentiarum

$$w^2 + a'a'' \equiv 0 \bmod a; \qquad w'^2 + aa'' \equiv 0 \bmod a'; \qquad w''^2 + aa' \equiv 0 \bmod a''$$

nascatur, solutionem prim. $(\varphi, \psi, \chi)$ ita cum radicibus $w, w', w''$ conjungere possumus, ut dicamus, *solutionem* $(\varphi, \psi, \chi)$ *ad combinationem* $(w, w', w'')$ *pertinere*; — atque quoniam omnes solutiones $(\varphi', \psi', \chi')$, quae ad idem systema cum $(\varphi, \psi, \chi)$ pertinent, ad easdem quoque radices $w, w', w''$ manifesto nos adducunt, etiam expressione utemur: *systema* $(\varphi, \psi, \chi)$ *ad combinationem* $(w, w', w'')$ *pertinere.*



III. Si systema quoddam primitivum $(\varphi, \psi, \chi)$ ad combinationem $(w, w', w'')$ pertinet, systema pr. $(-\varphi, -\psi, -\chi)$ ad eandem combinationem pertinet. — Qualia solutionum systemata semper differunt[1], nam solutiones $(\varphi, \psi, \chi)$, $(-\varphi, -\psi, -\chi)$ substitutione $\begin{Bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{Bmatrix}$ altera in alteram mutantur. Quaeritur, num praeter systemata concepta $(\varphi, \psi, \chi), (-\varphi, -\psi, -\chi)$ alia cogitari possint, quae ad eandem combinationem pertineant. —

Si 4 nullum numerorum $a, a', a''$ metitur, semper ex illis praeterea duo systemata $(\varphi', \psi', \chi')$ $(-\varphi', -\psi', -\chi')$ deducere potes, quae ad eandem combinationem pertinent. —

Namque distinguuntur casus tres, si moduli 2 rationem habes:

1) $\alpha, \beta, \gamma$ pares

2) $\alpha'', \beta'', \gamma''$ pares.

3) $\alpha + \alpha''$, $\beta + \beta''$, $\gamma + \gamma''$ pares; quorum casuum unusquisque ceteros excludit; — quod facillime formulae docent:

$$2a\alpha' = \beta\gamma'' - \gamma\beta''; \quad 2a'\beta' = \gamma\alpha'' - \alpha\gamma''; \quad 2a''\gamma' = \alpha\beta'' - \beta\alpha'',$$

si pareterea ad id respicis, quod $(\varphi, \psi, \chi)$ solutio primitiva est. —

Quodsi 4 nullum numerorum $a, a', a''$ metitur, systema illud $(\varphi', \psi', \chi')$ pro singulis casibus 1), 2), 3) seorsim definitur; nam $(\varphi', \psi', \chi')$ ex $(\varphi, \psi, \chi)$ substitutionibus

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \text{ resp. nascitur. —}$$

Quamobrem habebis in casu

primo:

$$\varphi' = \left(\frac{\alpha}{2}, \alpha', 2\alpha''\right); \qquad \psi' = \left(\frac{\beta}{2}, \beta', 2\beta''\right); \qquad \chi' = \left(\frac{\gamma}{2}, \gamma', 2\gamma''\right).$$

secundo:

$$\varphi' = \left(2\alpha, \alpha', \frac{\alpha''}{2}\right); \qquad \psi' = \left(2\beta, \beta', \frac{\beta''}{2}\right); \qquad \chi' = \left(2\gamma, \gamma', \frac{\gamma''}{2}\right).$$

tertio:

$$\varphi' = \left(2\alpha, \alpha + \alpha', \alpha' + \frac{\alpha + \alpha''}{2}\right); \qquad \psi' = \left(2\beta, \beta + \beta', \beta' + \frac{\beta + \beta''}{2}\right);$$

$$\chi' = \left(2\gamma, \gamma + \gamma', \gamma' + \frac{\gamma + \gamma''}{2}\right).$$

Facile confirmatur solutionem $(\varphi', \psi', \chi')$, tali modo definitam, primitivam adeoque systema $(\varphi', \psi', \chi')$ primitivam esse et ad eandem combinationem $(w, w', w'')$ pertinere. —

Sed quandoquidem casuum 1, 2, 3 alius alium excludit, statim sentias,

---

[1] Vgl. § 2.

eas substitutiones solas quae singulis casibus respondeant, ad solutiones formales integras nos adducere. —

Si eodem modo a systemate $(\varphi', \psi', \chi')$ profectus novum quoddam quaeris, ad systema $(\varphi, \psi, \chi)$ reverteris, quod nullo negotio colligitur. —

Denique si 4 aliquem numerorum $a, a', a''$ metitur, puta $a$, id tantum annotemus, quod solutio supra definita $(\varphi', \psi', \chi')$ primitiva non est, ea conditione semper servata, ut $(\varphi, \psi, \chi)$ talis sit. —

Probamus dictum pro casu 1), in quo $\alpha, \beta, \gamma$ pares sunt. —

Propter

$$-aa'' = \beta'\beta' - \beta\beta''; \qquad -aa' = \gamma'\gamma' - \gamma\gamma''$$

etiam $\beta', \gamma'$ pares evadunt, ergo $\beta''$ et $\gamma''$ impares, alioquin enim $(\varphi, \psi, \chi)$ solutio primitiva non esset. —

Quo admisso ex illis aeq. prodire liquet:

$$\beta = 0, \qquad \gamma = 0 \bmod 4,$$

unde formas $\psi', \chi'$ sub 1) definitas primitivas non esse perspicitur. Aequo modo in casibus 2) et 3) solutionem $(\varphi', \psi', \chi')$ primitivam non esse demonstratur. —

Itaque, casu $D \equiv 0 \bmod 4$ excepto, quum, si quod systema primitivum ad combinationem $(w, w', w'')$ pertinens notum est, omnino 4 talia systemata cognoverimus (quorum bina contraria sunt), quae ad eandem combinationem pertinent, quatuor haec systemata *conjuncta* vocamus.

In casu $D \equiv 0 \bmod 4$ systemata contraria $(\varphi, \psi, \chi)$, $(-\varphi, -\psi, -\chi)$ et ipsa *conjuncta* vocamus. —

Designationum defensionem in sequente theoremate invenies. —

## § 7.

Theorema. *Si $\sigma$ systemata primitiva conjuncta solutionem aequationis primariae $[a, a', a''] = 0$ proponuntur, (ubi ex § 6, plerumque $\sigma = 4$, in casu $D \equiv 0 \bmod 4$: $\sigma = 2$) quae ad combinationem $(w, w', w'')$ pertinent, praeter haec nulla systemata reperiuntur, quae ad eandem combinationem $(w, w', w'')$ pertineant.* —

Dem. Sit $(\varphi, \psi, \chi)$ solutio formalis ex aliquo systematum $\sigma$ datorum promta; supponimus aliquam solutionem $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$ primitivam, quae ad eandem combinationem $(w, w', w'')$ pertineat, ac demonstramus eam in casu $D \equiv 0 \bmod 4$ cuidam solutionum $(\varphi, \psi, \chi)$, $(-\varphi, -\psi, -\chi)$ aequivalere, in ceteris casibus cuidam solutionum $(\varphi, \psi, \chi)$, $(-\varphi, -\psi, -\chi)$, $(\varphi', \psi', \chi')$, $(-\varphi', -\psi', -\chi')$, ubi $(\varphi', \psi', \chi')$ ex definitionibus § 5 invenienda. —

Ex hypothesi locum habent congruentiae:

$$w\psi \equiv a''\chi \bmod a; \qquad w'\chi \equiv a\varphi \bmod a'; \qquad w''\varphi \equiv a'\psi \bmod a'';$$
$$w\varphi_1 \equiv a''\chi_1 \bmod a; \qquad w'\chi_1 \equiv a\varphi_1 \bmod a'; \qquad w''\varphi_1 \equiv a'\psi_1 \bmod a''.$$



Inducamus in calculum expressiones lineares

$$X = \alpha\xi + 2\alpha'\eta + \alpha''\zeta; \qquad Y = \beta\xi + 2\beta'\eta + \beta''\zeta;$$
$$X_1^{!} = \alpha_1\xi_1 + 2\alpha_1'\eta_1 + \alpha_1''\zeta_1; \qquad Y_1 = \beta_1\xi_1 + 2\beta_1'\eta_1 + \beta_1''\zeta_1;$$
$$Z = \gamma\xi + 2\gamma'\eta + \gamma''\zeta;$$
$$Z_1 = \gamma_1\xi_1 + 2\gamma_1'\eta_1 + \gamma_1''\zeta_1.$$

Hinc similiter atque antea erit:

$$wY \equiv a''Z \bmod a; \qquad w'Z \equiv aX \bmod a'; \qquad w''X \equiv a'Y \bmod a'';$$
$$wY_1 \equiv a''Z_1 \bmod a; \qquad w'Z_1 \equiv aX_1 \bmod a'; \qquad w''X_1 \equiv a'Y_1 \bmod a'',$$

unde, quum $a, a', a''$ inter se sint primi:

$$YZ_1 - ZY_1 \equiv 0 \bmod a; \; ZX_1 - XZ_1 \equiv 0 \bmod a'; \; XY_1 - YX_1 \equiv 0 \bmod a'', \tag{1}$$

quae congruentiae identicae pro $\xi\eta\zeta\ \xi_1\eta_1\zeta_1$ habendae sunt.

Ex § 1 sumatur:

$$F(X, Y, Z) = 4D(\eta\eta - \xi\zeta),$$
$$F(X_1, Y_1, Z_1) = 4D(\eta_1\eta_1 - \xi_1\zeta_1).$$

Itaque si quantitates $\xi, \eta, \zeta,\ \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ aequationibus

$$X = X_1; \qquad Y = Y_1; \qquad Z = Z_1 \tag{2}$$

connectuntur, erit:

$$\eta\eta - \xi\zeta = \eta_1\eta_1 - \xi_1\zeta_1. \tag{3}$$

Solvendo aequationes (2) provenit ut in § 1:

$$\left.\begin{aligned} 2aa'a''\xi &= a\alpha''X_1 + a'\beta''Y_1 + a''\gamma''Z_1 \\ 2aa'a''\eta &= -a\alpha'X_1 - a'\beta'Y_1 - a''\gamma'Z_1 \\ 2aa'a''\zeta &= a\alpha X_1 + a'\beta Y_1 + a''\gamma Z_1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Substitutis pro $X_1, Y_1, Z_1$ valoribus in $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ expressis eruuntur:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \lambda\xi_1 + \mu\eta_1 + \nu\zeta_1 \\ \eta &= \lambda'\xi_1 + \mu'\eta_1 + \nu'\zeta_1 \\ \zeta &= \eta''\zeta_1 + \mu''\eta_1 + \nu''\zeta_1 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

in quibus $\lambda, \mu, \nu \ldots$ sunt numeri rationales; atque contendimus hosce numeros $\lambda, \mu, \nu \ldots$ ad summum denominatore 2 affectos esse. Primum demonstrationem numeros $\lambda, \mu, \nu, \lambda'', \mu'', \nu''$ respicientem efficimus; tunc propter (3) idem pro $\lambda', \mu', \nu'$ valebit. —

Dextram partem primae aequationum (4), quam littera $P$ designabimus, per $aa'a''$ divisibilem esse dicimus; nam patet esse:

$$P \equiv a'\beta''Y_1 + a''\gamma''Z_1 \bmod a,$$

quare:

$$P \equiv a'a''(\gamma''Y_1 - \beta''Z_1) \bmod a;$$

ergo propter (1): $Pw \equiv 0 \bmod a$, $P \equiv 0 \bmod a$. —

Similiter ostendas: $P \equiv 0 \bmod a'$, $P \equiv 0 \bmod a''$, unde:

$$P \equiv 0 \bmod aa'a''. \text{ —}$$

Quae quum ita sint, numeri $\lambda, \mu, \nu$ ad summum denominatore 2 affecti sunt; pariter eundem numerorum $\lambda'', \mu'', \nu''$ characterem patefacias. —

Jamjam haud difficile probetur, substitutionem $\begin{Bmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{Bmatrix}$, quae formam $\eta\eta - \xi\zeta$ in se ipsam transformat et cujus numeri $\lambda, \mu \ldots\ldots$ ad summum denominatore 2 affecti sunt, in sequente schemate comprehendi:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \pm\frac{pp}{\tau}; & \mu &= \pm\frac{2pq}{\tau}; & \nu &= \pm\frac{qq}{\tau}; \\ \lambda' &= \pm\frac{pr}{\tau}; & \mu' &= \pm\frac{ps+qr}{\tau}; & \nu' &= \pm\frac{qs}{\tau}; \\ \lambda'' &= \pm\frac{rr}{\tau}; & \mu'' &= \pm\frac{2rs}{\tau}; & \nu'' &= \pm\frac{ss}{\tau}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ubi $p, q, r, s$ integros denotant, qui aequationi

$$ps - qr = \pm\tau$$

satisfaciunt, ubi $\tau = 1$, vel $= 2$ atque signum postremum $\pm$ e signo $\pm$ formularum (6) non pendet. —

Aequationes (6) autem nihil docent, nisi quod solutio $(\varphi, \psi, \chi)$ in $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$ transit aliqua harum quatuor substitutionum:

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \pm 1; \qquad \begin{vmatrix} \sqrt{-1}\,p & \sqrt{-1}\,q \\ \sqrt{-1}\,r & \sqrt{-1}\,s \end{vmatrix} = \pm 1;$$

$$\begin{vmatrix} \frac{p}{\sqrt{2}} & \frac{q}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} & \frac{s}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \pm 1; \qquad \begin{vmatrix} \frac{p}{\sqrt{-2}} & \frac{q}{\sqrt{-2}} \\ \frac{r}{\sqrt{-2}} & \frac{s}{\sqrt{-2}} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Si altera duarum substitutionum priorum valet, perspicuum est $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$ aut in systemate $(\varphi, \psi, \chi)$ aut in systemate $(-\varphi, -\psi, -\chi)$ contentam esse. —

Tertiae substitutioni aliqua harum trium formarum tribuenda:

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Bmatrix} E, \qquad \begin{Bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \cdot E, \qquad \begin{Bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \cdot E,$$

littera $E$ substitutionem determinantis $\pm 1$ designante.



Ex quo sequitur hanc substitutionem tertiam certo *non* valere, si $D \equiv 0 \bmod 4$; nam in § 5 demonstravimus quamvis substitutionum

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix},$$

simulatque ad solutionem primitivam applicantur, ad derivatam quandam adducere. —

Si $D$ non est $\equiv 0 \bmod 4$, e definitionibus paragraphi 5, solutionem $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$ in systemate $(\varphi', \psi', \chi')$ contineri, necessario sequitur.

Similiter colligas quartam substitutionem impossibilem esse, si $D = 0 \bmod 4$, in ceteris casibus ad systema $(-\varphi', -\psi', -\chi')$ adducere. —

Designemus per $\omega$ multitudinem numerorum primorum imparium, inter se differentium, qui determinanten $D = -aa'a''$ formae primariae $[a, a', a'']$ metiuntur. —

Si conditiones in § 6 inventae, ad existentiam solutionum formalium primitivarum necessariae

$$-a'a''Ra, \qquad -a''aRa', \qquad -aa'Ra''$$

admittuntur, ex notis theoriae congruentiarum quadraticarum theorematibus colliguntur $2^{\omega+\eta}$ combinationes $(w, w', w'')$ cogitabiles radicum congruentiarum

$$-a''a' \equiv w^2 \bmod a, \qquad -aa'' \equiv w'^2 \bmod a', \qquad -aa' \equiv w''^2 \bmod a'',$$

ubi

$$\begin{aligned} \eta &= 0, \quad \text{si} \quad D \text{ est impar, et si } D \equiv 2 \bmod 4; \\ \eta &= 1, \quad \text{si} \quad D \equiv 4 \bmod 8; \\ \eta &= 2, \quad \text{si} \quad D \equiv 0 \bmod 8. \text{ —} \end{aligned}$$

Qua de causa hae quaestiones oriuntur:

1) an conditiones necessariae in § 6, I prolatae ad existentiam solutionum formalium primitivarum sufficiunt, nec ne?

2) si sufficiant, an pro quavis combinationum $2^{\omega+\eta}$, quae cogitari possunt, systemata solutionum primitivarum inveniuntur?

Ad utramque quaestionem theorema I sequentis § respondebit. —

## § 8.

Theorema I. *Si forma $[a, a', a'']$ indefinita primaria conditionibus satisfacit*

$$-a'a''Ra, \qquad -a''aRa', \qquad -aa'Ra'',$$

*et si $(w, w', w'')$ aliqua combinationum $2^{\omega+\eta}$ est, quae cogitari possunt, ad* *hanc combinationem semper solutio primitiva* $(\varphi, \psi, \chi)$ *aequationis* $[a, a', a''] = 0$ *invenitur.* —

Dem. Demonstratio theorematis eadem ratione, qua ill. Gauss theorema ill. Legendre initio commentationis hujus commemoratum probavit, progreditur. —

Sed majore cura et cautione quam quae illic desiderabatur, opus est. — Constituimus has distinctiones[1]:

1) $a, a', a''$ impares; quum $a \equiv a' \equiv a'' \bmod 4$ esse non possit, supponimus: $a \equiv -a' \equiv -a'' \bmod 4$. —

2) $a \equiv 2 \bmod 4$, $a' \equiv -a'' \bmod 8$.

3) $a \equiv 2 \bmod 4$, $a + a' + a'' \equiv 0 \bmod 8$. —

4) $a \equiv 0 \bmod 4$; sit $2^\varkappa$ summa potestas numeri 2 quae numerum $a$ metiatur; $w^2 + a'a''$ aut per $2^{\varkappa+1}$ divisibilis, aut non esse potest, quare distinguimus:

4α) $w^2 + a'a'' \equiv 0 \bmod 2^{\varkappa+1}$; inde $w_0 \equiv w \bmod a$ ita definiri potest, ut

$$w_0^2 + a'a'' \equiv 0 \bmod 2^{\varkappa+2};$$

4β) $w^2 + a'a''$ *per* $2^{\varkappa+1}$ non dividitur; inde $w_0 \equiv w \bmod a$ ita definiri potest, ut in aequatione

$$w_0^2 + a'a'' = n \cdot 2^\varkappa$$

numerus $n$, prout placet, $\equiv 1$ aut $\equiv 3 \bmod 4$ evadat. —

Primum est ut numeros tres $A, B, C$ reperiri demonstremus, qui nullum communem divisorem habeant, quorum primus $A$ primus ad $a'a''$, secundus $B$ primus ad $a''a$, tertius $C$ primus ad $aa'$ sit, qui congruentiis satisfaciant:

$$\left.\begin{array}{ll} Bw \equiv Ca''; & Cw \equiv -Ba' \bmod a \\ Cw' \equiv Aa; & Aw' \equiv -Ca'' \bmod a' \\ Aw'' \equiv Ba'; & Bw'' \equiv -Aa \bmod a'' \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$aAA + a'BB + a''CC \equiv 0 \bmod 4aa'a''. \text{ —} \qquad (2)$$

Quod ut efficiatur, definiamus in casibus 1) 2) 3) numeros $A$, $B$, $C$ congruentiis:

$$\begin{array}{ll} B \equiv \mathfrak{A}a''; & C \equiv w\mathfrak{A} \bmod a \\ C \equiv \mathfrak{B}a; & A \equiv w'\mathfrak{B} \bmod a' \\ A \equiv \mathfrak{C}a'; & B \equiv w''\mathfrak{C} \bmod a'', \end{array} \qquad (3)$$

ubi $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ numeros quosdam significant, qui resp. ad $a, a', a''$ primi sint. Quo pacto congruentiis (1) ratio ducta est, et $A$ ad $a'a''$ primus est etc. Sed ut etiam congruentiae (2) satisfaciamus, hae conditiones superadditae, quas cum congruentiis (3) conjungere licet, statuendae nobis sunt:

[1] Ope legis reciprocitatis in theoria residuorum quadraticorum facile ostenditur, distinctiones 1, 2, 3 ex conditionibus $-a'a''Ra$, $-a''aRa'$, $-aa'Ra''$ manare. —



In casu

1) Aut $A$ impar, $B$ impar, $C$ par
aut $A$ impar, $B$ par, $C$ impar.

In casu

2) $A$ par; hic $B$ et $C$ jam ex (3) impares evadunt.

In casu

3) $A$ impar; hic quoque $B$ et $C$ impares ex (3).

Quibus rebus constitutis, numeros ita definitos congruentiae (2) satisfacere, sine difficultatibus intelligitur. —

Si quis divisor communis numeros $A, B, C$ metiatur, idem primus ad $2aa'a''$ est; id circo factorem illum communem rejicere poteris; ideoque numeri $A$, $B$, $C$ tali modo collecti omnibus conditionibus tandem satisfacient. —

In casu 4α) $A, B, C$ determinentur congruentiis:

$$\begin{array}{ll} B \equiv \mathfrak{A}a''; & C \equiv w_0\mathfrak{A} \bmod 4a. \\ C \equiv \mathfrak{B}a; & A \equiv w'\mathfrak{B} \bmod a' \\ A \equiv \mathfrak{C}a'; & B \equiv w''\mathfrak{C} \bmod a''; \end{array} \qquad (4)$$

in quibus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ eadem definitione gaudeant, ac supra, et $A$ praeterea par sit. — Illico congruentiarum (1), (2) rationem habitam esse patet; factorem communem ipsorum $A, B, C$, qui forte adsit, pariter deleas, atque antea; adeoque numeri omnes conditiones servant. —

In casu 4β) similiter $A$, $B$, $C$ congruentiis (4) definiantur, ubi $w_0 \equiv w \bmod a$ ita deligendum est, ut in aequatione: $w_0^2 + a'a'' = n \cdot 2^\varkappa$ numerus $n$ congruentiam patiatur:

$$\frac{a}{2^\varkappa} + a''n \equiv 0 \bmod 4. \text{ —}$$

Divisor numerorum $A, B, C$ communis ut antea everti potest; dehinc numeri rati omnibus conditionibus satisfaciunt. —

A quibus numeris $A, B, C$ tali modo computatis jam proficiscimur. —

Numeri $Aa, Ba', Ca''$ divisorem communem non habent; praeterea in omnibus casibus, ubi plurimum unus eorum par est. —

Tres numeri $\lambda', \mu', \nu'$ ejusmodi computari possunt, ut

$$Aa\lambda' + Ba'\mu' + Ca''\nu' = 1. \qquad (5)$$

Porro sex numeri $\lambda, \mu, \nu, \lambda'', \mu'', \nu''$ ita computentur, ut

$$2Aa' = \mu''\nu - \nu''\mu; \quad 2Ba' = \nu''\lambda - \lambda''\nu; \quad 2Ca'' = \lambda''\mu - \mu''\lambda \qquad (6)$$

his conditionibus superadditis: esse debent in casu:

1) $\lambda, \lambda''$ impares; simulque aut $\mu, \mu''$ pares, $\nu, \nu''$ impares aut $\mu, \mu''$ impares, $\nu, \nu''$ pares, prout $B$ par et $C$ impar aut $B$ impar et $C$ par est. —

In casu

2) $\lambda, \lambda''$ pares; $\mu, \mu'', \nu, \nu''$ impares.

In casu

3) $\lambda, \lambda'', \mu, \mu'', \nu, \nu''$ impares.

In casu

4α) $\lambda, \lambda''$ pares, $\mu, \mu'', \nu, \nu''$ impares.

In casu

4β) $\lambda, \lambda'', \mu, \mu'', \nu, \nu''$ impares. —

Possibilitas aequationum (6) cum conditionibus additis ex lemmate, Disq. 279 patefit, si praeterea res quasdam simplices meditaris. —

Nunc ponatur

$$\left.\begin{array}{lll} A' = \mu'\nu'' - \nu'\mu''; & B' = \nu'\lambda'' - \lambda'\nu''; & C' = \lambda'\mu'' - \mu'\lambda'' \\ A'' = \mu\nu' - \nu\mu'; & B'' = \nu\lambda' - \lambda\nu'; & C'' = \lambda\mu' - \mu\lambda', \end{array}\right\} \qquad (7)$$

quocirca propter: $\Sigma \pm \lambda\mu'\nu'' = 2$ contingit:

$$\begin{array}{lll} \lambda = Ba'C'' - Ca''B''; & \mu = Ca''A'' - AaC''; & \nu = AaB'' - Ba'A''. \text{—} \\ \lambda'' = Ca''B' - Ba'C''; & \mu'' = AaC' - Ca''A'; & \nu'' = Ba'A' - AaB'. \end{array} \qquad (8)$$

Quodsi substituis et ad characteres mod 2 et mod 4 omnium numerorum, qui adsunt diligenter attendis, veritatem congruentiarum sequentium intelliges:

$$\left.\begin{array}{l} a\lambda\lambda + a'\mu\mu + a''\nu\nu \equiv 0 \bmod 4D \\ a\lambda\lambda'' + a'\mu\mu'' + a''\nu\nu'' \equiv 0 \bmod 2D \\ a\lambda''\lambda'' + a'\mu''\mu'' + a''\nu''\nu'' \equiv 0 \bmod 4D \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Porro ex (1) hujus paragraphi congruentiae manant:

$$\left.\begin{array}{llll} \mu w \equiv \nu a''; & \nu w \equiv -\mu a'; & \mu'' w \equiv \nu'' a''; & \nu'' w \equiv -\mu'' a' \bmod a \\ \nu w' \equiv \lambda\alpha; & \lambda w' \equiv -\nu a''; & \nu'' w' \equiv \lambda'' a; & \lambda'' w' \equiv -\nu'' a'' \bmod a' \\ \lambda w'' \equiv \mu a'; & \mu w'' \equiv -\lambda a; & \lambda'' w'' \equiv \mu'' a'; & \mu'' w'' \equiv -\lambda'' a \bmod a'' \end{array}\right\} (10)$$

quod substituendo expressiones (8) demonstres. —

Denique numeros $\lambda, 2\lambda' D, \lambda''$ nullo alio divisore communi, nisi potestate ipsius 2 affectos esse patet; numeri $\lambda, \lambda', \lambda''$ enim propter (7) ad summum divisore communi 2 afficiuntur; si numeris $\lambda, \lambda''$ cum $D = -aa'a''$ divisor impar esset communis, ex (6) liqueret, $B$ non primum ad $aa''$, aut $C$ non primum ad $aa'$ futurum esse, contra hypothesin. —

Quotiescunque igitur $\lambda, \lambda''$ impares sunt, numeri $\lambda, 2\lambda' D, \lambda''$ divisorem communem non habent; idem pro numeris $\mu, 2\mu' D, \mu''$ quotiescunque $\mu, \mu''$ impares, et pro numeris $\nu, 2\nu' D, \nu''$, si $\nu, \nu''$ impares, evincas. —

Nunc forma $aXX + a'YY + a''ZZ$ substitutione

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda, & 2\lambda' D, & \lambda'' \\ \mu, & 2\mu' D, & \mu'' \\ \nu, & 2\nu' D, & \nu'' \end{array}\right\},$$

cujus valor $4D$ est, transformetur. —



Propter congruentias (9) forma transformata (notationibus Disq. servatis) hanc formam induit:

$$\begin{pmatrix} 4Dm, & 4Dm', & 4Dm'' \\ 2Dn, & 2Dn', & 2Dn'' \end{pmatrix} = 2D\begin{pmatrix} 2m, & 2m', & 2m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix}.$$

Forma $\begin{pmatrix} 2m, & 2m', & 2m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix}$ manifesto determinantem 2 habet, praeterea identice per 2 dividitur, ergo e Disq. 277. III formae $\begin{pmatrix} 0, & 2, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}$ aequivalet. —

Quocirca substitutio $\left\{\begin{array}{lll} \sigma'' & \tau'' & \vartheta'' \\ \sigma & \tau & \vartheta \\ \sigma' & \tau' & \vartheta' \end{array}\right\}$ datur, quae cum substitutione $\left\{\begin{array}{lll} \lambda, & 2\lambda' D, & \lambda'' \\ \mu, & 2\mu' D, & \mu'' \\ \nu, & 2\nu' D, & \nu'' \end{array}\right\}$ composita formam $aXX + a'YY + a''ZZ$ transmutat in

$$4D(\eta\eta - \xi\zeta). \text{—}$$

Substitutio composita ex annotatione finali § 1. formam exhibet:

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha, & 2\alpha', & \alpha'' \\ \beta, & 2\beta', & \beta'' \\ \gamma, & 2\gamma', & \gamma'' \end{array}\right\}$$

et praebet solutionem formalem:

$$\varphi = \alpha xx + 2\alpha' xy + \alpha'' yy; \qquad \psi = \beta xx + 2\beta' xy + \beta'' yy;$$
$$\chi = \gamma xx + 2\gamma' xy + \gamma'' yy$$

aequationis

$$[a, a', a''] = 0. \text{—}$$

*Haec solutio primitiva* est, nam propter $\Sigma \pm \sigma\tau'\vartheta'' = \pm 1$ divisor communis maximus ipsorum $\alpha, 2\alpha', \alpha''$ idem est qui ipsorum $\lambda, 2\lambda' D, \lambda''$, qui quum sola potestas ipsius 2 esse possit, quumque determinans $-a'a''$ formae $\varphi$ semper impar sit, forma $\varphi$ primitiva est. Pariter divisor communis ips. $\beta, 2\beta', \beta''$ idem est, qui ipsorum $\mu, 2\mu' D, \mu''$; quare in eo tantum casu, ubi $a \equiv 0 \bmod 4$, formam $\psi$ primitivam esse non oporteret; tunc autem $\mu, \mu''$ semper impares sunt, ut supra suppositum est, ergo etiam nunc $\psi$ primitiva; similiter $\chi$ primitivam esse perspicuum. —

Restat, ut solutionem formalem primitivam $(\varphi, \psi, \chi)$ quam reperimus, ad combinationem datam $(w, w', w'')$ pertinere demonstremus, congruentiis igitur satisfactum esse:

$$\begin{array}{ll} w\varphi \equiv a''\chi & w\chi \equiv -a'\psi \bmod a. \\ w'\chi \equiv a\varphi & w'\varphi \equiv -a''\chi \bmod a' \\ w''\psi \equiv a'\psi & w''\psi \equiv -a\varphi \bmod a''. \end{array}$$

Quod nullo negotio, ad congruentias (10) respicientes et pro $\alpha, 2\alpha' \ldots$ expressiones in $\lambda, \lambda', \ldots$ substituentes, eruimus. —

Quae quum ita sint, solutio formalis primitiva $(\varphi, \psi, \chi)$ evasit, quae ad combinationem datam $(w, w', w'')$ pertinet, ut theoremate contendimus. —

---

Quum autem, conditionibus necessariis existentiae solutionum primitivarum admissis, multitudo combinationum $(w, w', w'')$ $2^{\omega+\eta}$ sit, quum ad quamvis combinationem systema primitivum inveniatur, denique quum ad quamvis combinationem $(w, w', w'')$ ex theoremate § 7. $\sigma$ systemata primitiva pertineant, colligitur:

Theorema II. *Si quae forma primaria $[a, a', a'']$ ita est comparata, ut $-a'a''Ra$, $-a''aRa'$, $-aa'Ra''$, nec plus, nec minus quam $\sigma \cdot 2^{\omega+\eta}$ systemata solutionum primitivarum aequationis $[a, a', a''] = 0$ inveniuntur, ubi $\omega$ multitudinem numerorum primorum imparium in $D = -aa'a''$ designat, et ubi*

$$\begin{aligned} &\sigma = 2, \quad \text{si} \quad D \equiv 0 \bmod 4. \\ &\sigma = 4, \quad \text{in ceteris casibus.} — \\ &\eta = 0, \quad \text{si} \quad D \text{ impar, et si } D \equiv 2 \bmod 4. \\ &\eta = 1, \quad \text{si} \quad D \equiv 4 \bmod 8. \\ &\eta = 2, \quad \text{si} \quad D \equiv 0 \bmod 8. — \end{aligned}$$

---

Inter alia pro exemplo a Gauss disq. 298 selecto aequationis primariae $[23, -15, 7] = 0$, secundum methodum in demonstratione patefactam systemata primitiva computavimus.

Congruentia $15 \cdot 7 \equiv w^2 \bmod 23$ radicibus gaudet $w = \pm 6$, congruentia $-7 \cdot 23 \equiv w'^2 \bmod 15$ radicibus $w' = \pm 7, \pm 2$, congruentia: $15 \cdot 23 \equiv w''^2 \bmod 7$ radicibus $w'' = \pm 3$. —

Ad combinationem $w = 6$, $w' = 7$, $w'' = 3$ quatuor systemata solutionibus formalibus repraesentantur:

$$\begin{aligned} &\varphi = (8, 9, -3); \quad &&\psi = (18, 1, 9); \quad &&\chi = (22, -9, -12); \\ &\varphi' = (4, 9, -6); \quad &&\psi' = (9, 1, 18); \quad &&\chi' = (11, -9, -24), \end{aligned}$$

cum solutionibus oppositis.

Ad $w = -6$, $w' = 7$, $w'' = 3$ inveniuntur:

$$\begin{aligned} &\varphi = (2, -9, -12); \quad &&\psi = (22, 13, 15); \quad &&\chi = (-32, -21, -3); \\ &\varphi' = (1, -9, -24); \quad &&\psi' = (11, 13, 30); \quad &&\chi' = (-16, -21, -6), \end{aligned}$$

cum oppositis.

Ad $w = 6$, $w' = 2$, $w'' = 3$ inveniuntur:

$$\begin{aligned} &\varphi = (-2, 9, 12); \quad &&\psi = (6, 1, 27); \quad &&\chi = (-8, -9, 33); \\ &\varphi' = (-1, 9, 24); \quad &&\psi' = (3, 1, 54); \quad &&\chi' = (-4, -9, 66), \end{aligned}$$

cum oppositis. —



Ad $w = -6$, $w' = 2$, $w'' = 3$ inveniuntur:

$$\begin{aligned} &\varphi = (-8, 1, 13); \quad &&\psi = (10, -3, 17); \quad &&\chi = (-2, 19, -8); \\ &\varphi' = (-4, 1, 26); \quad &&\psi' = (5, -3, 34); \quad &&\chi' = (-1, 19, -16), \end{aligned}$$

cum oppositis. —

Ad ceteras combinationes solutiones ascribere opus non est; nam simplici quadam regula ex illis deducuntur; namque si ad $(w, w', w'')$ systema $(\varphi, \psi, \chi)$ pertinet, ad $(w, -w', -w'')$ systema $(\varphi, -\psi, -\chi)$ pertinebit; quocirca e datis octo systematis cetera per omnes signorum combinationes fluunt; quod revera multitudinem notam 64 systematum diversorum efficit. —

## § 9.

Relinquitur id quod nullam difficultatem objicit, ut quaestionem de aequatione data primaria propositam in discrimen vocemus, num omnino solutiones formales admittat, quibus in ordinibus illae quaerendae sint, quanta multitudo systematum diversorum solutionum sit. —

Id circo ponimus

$$a = bc^2; \qquad a' = b'c'^2; \qquad a'' = b''c''^2,$$

ubi $b, b', b''$ factores quadraticos excludunt. —

Solutio formalis quaevis sub hac forma (§ 5) repraesentatur:

$$\varphi = \mu\nu\varphi_0; \qquad \psi = \nu\lambda\psi_0; \qquad \chi = \lambda\mu\chi_0;$$

ubi $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ solutio primitiva aeq.: $\left[\frac{a}{\lambda^2}, \frac{a'}{\mu^2}, \frac{a''}{\nu^2}\right] = 0$; ex hoc conditiones necessariae existentiae solutionum formalium eruuntur, haec:

$$-b'b''Rb, \qquad -b''bRb', \qquad -bb'Rb''. —$$

Sufficiunt conditiones, quia, illis locum habentibus, ordo $O(c, c', c'')$ systematum solutionum datur.

Quamobrem, conditionibus illis satisfactum esse, supponimus. —

Numerum $a$ ita discerpamus: $a = bc_1^2c_2^2$, ut $c_1$ tales factores impares primos comprehendat, quorum $-b'b''$ residuum sit, $c_2$ tales factores impares, quorum $-b'b''$ sit non residuum; praeterea summa numeri 2 potestas, quae $a$ metitur et cujus $-b'b''$ residuum est, ad factorem $bc_1^2$ adjiciatur. —

Secundum eandem legem numeros $a', a''$ repraesentamus his formulis: $a' = b'c_1'^2c_2'^2$; $a'' = b''c_1''^2c_2''^2$, denique ponimus: $bc_1^2 = a_0$; $b'c_1'^2 = a_0'$; $b''c_1''^2 = a_0''$.

Unde sponte elucet, quamvis solutionem formalem $(\varphi, \psi, \chi)$ ipsius $[a, a', a''] = 0$ necessario hanc formam induere:

$$\varphi = c_2'c_2''\varphi'; \qquad \psi = c_2''c_2\psi'; \qquad \chi = c_2c_2'\chi',$$

ubi $(\varphi', \psi', \chi')$ est solutio formalis aequationis $[a_0, a_0', a_0''] = 0$, quae aequatio manifesto conditionibus necessariis et sufficientibus solutionum primitivarum satisfacit. —

Praeterea aequationi $[a_0, a_0', a_0''] = 0$ plerumque systemata solutionum ordinum derivatorum sunt; si $f^2$ est quis divisor quadraticus determinantis $-a_0 a_0' a_0''$, $f^2$ formam habet: $\lambda^2\mu^2\nu^2$, ubi $\frac{a_0}{\lambda^2}$, $\frac{a_0'}{\mu^2}$, $\frac{a_0''}{\nu^2}$ integri sunt. Respondet divisori $f^2$ ordo $O(\lambda, \mu, \nu)$; ergo multitudo ordinum systematum aeq. $[a_0, a_0', a_0''] = 0$, ideoque aeq. $[a, a', a''] = 0$ multitudinem divisorum diversorum numeri $c_1 c_1' c_1''$ aequat. —

In quovis ordine multitudo systematum ex theoremate II § 8 computari potest; quibus multitudinibus additis, haud difficile invenias multitudinem totam $\varrho$ systematum solutionum formalium aequationum $[a_0, a_0', a_0''] = 0$, $[a, a', a''] = 0$ hac ratione exprimendam esse:

$$\varrho = 4(\pi + 1)(\pi' + 1)\ldots, \quad \text{si} \quad -a_0 a_0' a_0'' = \pm p^\pi p'^{\pi'}\ldots,$$

ubi $p, p', \ldots$ sunt numeri primi impares diversi;

$$\varrho = 4\varkappa(\pi + 1)(\pi' + 1)\ldots, \quad \text{si} \quad -a_0 a_0' a_0'' = \pm 2^\varkappa p^\pi p'^{\pi'}\ldots, \quad \varkappa > 0.$$

## § 10.

Quum illud, quod in § 4 nuncupavimus, assecuti simus, quod erat, solutiones formales ($H = \pm 1$) aequationis primariae, si exsistant, invenire, restat, ut qui connexus problematis soluti cum problemate dato sit, ostendamus, ut infinitam multitudinem solutionum irreducibilium in integris eo sensu explicemus, de quo in introductione diximus. —

In § 4 demonstratum est, solutiones *irreducibiles* aequationis cujuslibet $[a, a', a'']$ cum solutionibus *irreducibilibus* aequationis primariae $[p, p', p''] = 0$ his aequationibus:

$$X = m X_0; \qquad Y = m' Y_0; \qquad Z = m'' Z_0$$

cohaerere.

Quam ob rem sit aequatio data $[a, a', a''] = 0$ primaria. —

Si $(\alpha, \beta, \gamma)$ solutio irreducibilis in integris est, dicimus $(\alpha, \beta, \gamma)$ ad ordinem $O(\lambda, \mu, \nu)$ pertinere, si maximus divisor communis ipsorum $\beta, \gamma = \lambda$, ipsorum $\gamma, \alpha = \mu$, ipsorum $\alpha, \beta = \nu$ est. —

Itaque numeri $\alpha, \beta, \gamma$ in formas transeunt:

$$\alpha = \mu\nu\alpha_0, \qquad \beta = \nu\lambda\beta_0, \qquad \gamma = \lambda\mu\gamma_0$$

et $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ solutio in integris ordinis $O(1, 1, 1)$ aequationis primariae est: $\left[\frac{a}{\lambda^2}, \frac{a'}{\mu^2}, \frac{a''}{\nu^2}\right] = 0$. Porro theorema sequens habemus:



Theorema. *Si* $(\alpha, \beta, \gamma)$ *solutio in integris aequationis primariae* $[a, a', a''] = 0$ *ordinis* $O(\lambda, \mu, \nu)$ *est, semper unum neque plus quam unum systema solutionum formalium ejusdem ordinis* $O(\lambda, \mu, \nu)$ *datur, quod solutionem illam comprehendit.* —

(Si systema $(\varphi, \psi, \chi)$ solutionem $(\alpha, \beta, \gamma)$ comprehendere dicimus, nihil aliud volumus, nisi ut aequationibus

$$\varphi = \alpha, \qquad \psi = \beta, \qquad \chi = \gamma$$

valores integri pro $x, y$ substituti satisfaciunt. Insuper annotamus, si:

$$\varphi(p, q) = \alpha, \qquad \psi(p, q) = \beta, \qquad \chi(p, q) = \gamma$$

aequationibus illis, praeterea hos solos valores: $x = -p$, $y = -q$ satisfacere; quod inde cognoscitur, quod determinans $\Sigma \pm \alpha\beta'\gamma'' = \pm 2aa'a''$ non evanescit.). —

Dem. Sit

$$\alpha = \mu\nu\alpha_0; \qquad \beta = \nu\lambda\beta_0; \qquad \gamma = \lambda\mu\gamma_0.$$
$$\frac{a}{\lambda^2} = a_0; \qquad \frac{a'}{\mu^2} = a_0'; \qquad \frac{a''}{\nu^2} = a_0''. —$$

Nobis est demonstrandum, solutionem $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ aeq. $[a_0, a_0', a_0''] = 0$ semper in uno et tantum in uno systemate solutionum primitivarum aeq. ultimae comprehendi. Quod dictum si verum supponimus, evidenter in quovis talium systematum solutiones formales inveniuntur, in quibus formae $\varphi_0, \psi_0, \chi_0$ coefficientibus primis resp. $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ utuntur; itaque reliquum est, ut ostendamus, solutiones $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ ejusmodi dari et omnes aequivalere.

Ponamus:

$$\varphi_0 = (\alpha_0, \alpha', \alpha''); \qquad \psi_0 = (\beta_0, \beta', \beta'') \qquad \chi_0 = (\gamma_0, \gamma', \gamma'').$$

Demonstrandum est, numeros $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ ita definiri posse, ut aequationes fundamentales § 4, quae $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ solutionem formalem ipsius $[a_0, a_0', a_0'']$ definiunt, expleantur. —

Habemus aequationem

$$a_0\alpha_0\alpha_0 + a_0'\beta_0\beta_0 + a_0''\gamma_0\gamma_0 = 0. \tag{1}$$

Primum dico, aequationes tres

$$a_0\alpha_0 = \beta_0\gamma' - \gamma_0\beta'; \quad a_0'\beta_0 = \gamma_0\alpha' - \alpha_0\gamma'; \quad a_0''\gamma_0 = \alpha_0\beta' - \beta_0\alpha' \tag{2}$$

numeris integris $\alpha', \beta', \gamma'$ expleri. —

Congruentia enim: $\gamma_0\alpha' \equiv a_0'\beta_0 \bmod \alpha_0$, pro $\alpha'$ resolubilis est, quia $\gamma_0$ ad $\alpha_0$ primus est; ideoque numeri $\alpha', \gamma'$ tales inveniuntur, ut

$$a_0'\beta_0 = \gamma_0\alpha' - \alpha_0\gamma'.$$

Ex (1) fit

$$a_0'\beta_0\beta_0 + a_0''\gamma_0\gamma_0 \equiv 0 \bmod \alpha_0,$$

aut, quia $\beta_0, \gamma_0$ primi ad $\alpha_0$,

$$a'_0\beta_0 \equiv -a''_0\frac{\gamma_0\gamma_0}{\beta_0} \bmod \alpha_0; \quad \text{ergo}$$

$$\gamma_0\alpha' \equiv -a''_0\frac{\gamma_0\gamma_0}{\beta_0} \bmod \alpha_0, \quad \text{vel etiam}$$

$$\beta_0\alpha' + a''_0\gamma_0 \equiv 0 \bmod \alpha_0.$$

Quam ob rem numerus $\beta'$ invenitur, qui aequationi

$$\alpha''_0\gamma_0 = \alpha_0\beta' - \beta_0\alpha'$$

satisfaciat. —

Itaque tribus numeris $\alpha', \beta', \gamma'$ inventis duae aequationes priores (2) explentur; sed extemplo propter (1) iidem numeri aequationi tertiae (2) satisfaciunt. —

Denique multiplicando posteriores aequationes duas (2) alteram per alteram, erit:

$$\beta_0\gamma_0(a'_0\,a''_0 + \alpha'\alpha') \equiv \bmod \alpha_0. \text{ Pariter fit:}$$

$$\gamma_0\alpha_0(a''_0\,a_0 + \beta'\beta') \equiv \bmod \beta_0.$$

$$\alpha_0\beta_0(a_0\,a'_0 + \gamma'\gamma') \equiv \bmod \gamma_0.$$

Inveniuntur igitur etiam tres numeri $\alpha'', \beta'', \gamma''$, qui efficiunt:

$$-a'_0a''_0 = \alpha'\alpha' - \alpha_0\alpha''; \quad -a''_0a_0 = \beta'\beta' - \beta_0\beta''; -a_0a'_0 = \gamma'\gamma' - \gamma_0\gamma''. \tag{3}$$

Nunc facillime confirmatur, aequationes sex (2) et (3) $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ ut solutionem formalem definire. —

Aequationibus (2) praeter numeros $\alpha', \beta', \gamma'$ inventos manifesto soli numeri:

$$\alpha' + t\alpha_0, \qquad \beta' + t\beta_0, \qquad \gamma' + t\gamma_0$$

satisfaciunt, ex quo omnes solutiones $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ aequivalere, evidens est.

Denique systema unicum inventum primitivum esse agnoscimus, quia solutio $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ in eo comprehensa ordinis $O(1, 1, 1)$ est. —

§ 11.

Quum jam omnia systemata solutionum:

$$\begin{matrix} (\varphi_1 & \psi_1 & \chi_1) \\ (\varphi_2 & \psi_2 & \chi_2) \\ \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot \\ (\varphi_\varrho & \psi_\varrho & \chi_\varrho) \end{matrix} \tag{1}$$

coerceamus, e theoremate § 10 liquet, omnes solutiones irreducibiles aequationis primariae $[a, a', a''] = 0$ a nobis teneri, nec minus, quamvis solutionem $(\alpha, \beta, \gamma)$ ejus indolis in uno tantum systemate *ordinis respondentis* comprehendi; denique eandem solutionem una tantum repraesentatione in systemate



respondente contentam esse, nisi forte repraesentationes oppositas $x, y$; $-x, -y$ diversas ducimus. —

Unde hoc concludimus:

*Si variabilitatem numerorum $x, y$ intra fines cujus vis solutionum $(\varphi, \psi, \chi)$ schematis* (1) *eo limitamus, ut, si haec solutio formalis ad ordinem $O(\lambda, \mu, \nu)$ pertineat, solutiones in integris repraesentatae irreducibiles ejusdem ordinis $O(\lambda, \mu, \nu)$ fiant, in schemate* (1) *aspectus monogenes et perfectus solutionum irreducibilium exponitur.* —

Quae variabilitatis numerorum $x, y$ limitatio e sequentibus liquet.

Theorema. *Si $(\varphi, \psi, \chi)$ solutio primitiva aequationis primariae $[a, a', a'']$ $= 0$ est, et repraesentationes $x, y$ solutionum in integris ordinis $O(1, 1, 1)$ quaeruntur, conditiones necessariae et sufficientes tales sunt, ut numeri $x, y$ inter se primi sint et in campo binarum congruentiarum sequentium multitudinis $2D\varphi(2D)$ versantur:*

$$x \equiv I_\lambda, \quad y \equiv J_\lambda \bmod 2D; -$$

*ubi $\varphi$ signum functionis designat, quae multitudinem numerorum exhibet qui minores dato quodam et primi ad eundem sunt.* —

Dem. Ut demonstrationem tanquam uno impetu superemus, supponimus, si una formarum $\varphi, \psi, \chi$ improprie primitiva est, formam $\varphi$ hoc charactere affectam esse, si omnes proprie primitivae sint (quod nisi unus numerorum $a, a', a''$ par est, esse nequit) numerum $a$ parem esse. —

Prima theorematis pars, quae numeros $x, y$ inter se primos opus esse dicit per se evidens est. —

Tum autem supponimus numeros $x, y$ hac conditione restringi, ut numeri repraesentati $\varphi, \psi, \chi$ alius ad alium primi sint.

Solvendo aequationes

$$\varphi = \alpha xx + 2\alpha' xy + \alpha'' yy.$$

$$\psi = \beta xx + 2\beta' xy + \beta'' yy.$$

$$\chi = \gamma xx + 2\gamma' xy + \gamma'' yy \text{ pro } xx,\ xy,\ yy,$$

prodit

$$\left.\begin{aligned} 2aa'a''xx &= a\alpha''\varphi + a'\beta''\psi + a''\gamma''\chi \\ -2aa'a''xy &= a\alpha'\varphi + a'\beta'\psi + a''\gamma'\chi \\ 2aa'a''yy &= a\alpha\varphi + a'\beta\psi + a''\gamma\chi \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Porro ex hypothesi est:

$$a\varphi\varphi + a'\psi\psi + a''\chi\chi = 0. \tag{2}$$

Iam dicimus esse

I) $\psi$ primum ad $2aa''$; alioquin enim propter (2) $\psi, \varphi$ aut $\psi, \chi$ factores communes haberent. —

II) $\chi$ primum ad $a'$ causarum similium gratia. —

Porro dicimus si vice versa variabilitas numerorum $x, y$ primorum inter se eo limitetur, ut conditiones I et II serventur, solutionem repraesentatam $\varphi, \psi, \chi$ eam esse, quae quaerebatur. —

Etenim id quod primum est, numeri $\varphi, \psi, \chi$ divisorem communem non exhibent, nam si adesset, propter (1) etiam $2aa'a''$ metiretur. Quod fieri nequit, quia $\psi$ primus ad $2aa'', \chi$ ad $a'$ suppositi erant. —

Itaque divisor communis ipsorum $\psi, \chi$ propter (2) numerum $a$ metiretur, contra I; divisor communis ipsorum $\chi, \varphi, a'$ metiretur, contra II; denique factor communis ipsorum $\varphi, \psi, a''$ metiretur, contra I. —

E lemmate haud ignoto, quod in disquisitionibus ill. Dirichlet persaepe occurrit, ad conditionem I talibus congruentiis multitudinis $2aa''\varphi(2aa'')$

$$x \equiv i_\mu \qquad y \equiv j_\mu \bmod 2\,aa''$$

pervenitur; quippe quorum modulus $2aa''$, duplum determinantis formae $\psi$ est; similiter ad conditionem II binis congruentiis multitudine $\varphi(a')$ pervenitur:

$$x \equiv i'_\nu \qquad y \equiv j'_\nu \bmod a'.$$

Quum $a'$ et $2aa''$ primi inter se sint, ambo binarum congruentiarum systemata manifesto in $2D\varphi(2D)$ congruentias colligere licet:

$$x \equiv I_\lambda \qquad y \equiv J_\lambda \bmod 2\,D; \text{ —}$$

quae limitationes variabilitatis ipsorum $x, y$ de quibus in theoremate diximus, includunt.

Ut limitationes necessariae variabilium $x, y$ in solutione ordinis $O(\lambda, \mu, \nu)$ inveniantur, animus ad hanc rem advertatur, quod, si vis, ut solutio formalis

$$\varphi = \mu\nu\varphi_0, \qquad \psi = \nu\lambda\psi_0, \qquad \chi = \lambda\mu\chi_0$$

solutionem in integris ordinis $O(\lambda, \mu, \nu)$ praebeat:

1) solutionem in integris $\varphi_0, \psi_0, \chi_0$ ordinis $O(1, 1, 1)$ fieri necesse est, quae res congruentiis, quas in theoremate attulimus, efficitur. —

2) $\varphi_0$ et $\lambda$, $\psi_0$ et $\mu$, $\chi_0$ et $\nu$ inter se primi esse debent; quae res et ipsa congruentiis linearibus efficitur, quas cum primis comparare opus est, sed quas hoc loco mittamus, liceat. —

Quamquam omnia quae initio commentationis polliciti sumus plane ad finem perduximus, tamen multa, quae ad explicationem methodi desiderentur omissa esse, sponte concedimus. — Hoc quidem loco annotetur veritatem theorematum in § 8 a nobis secunda demonstratione probatum esse, quae in integra inductione posita est, et methodos a nobis indagatas esse, quae via multo simpliciore ad omnes solutiones primitivas aequationum primariarum perducunt.

## Vita.

Ego, Georgius Cantor, mense Martio anni MDCCCXLV patre Georgio, matre Maria, e gente Böhm, Petropoli natus sum, quo pater meus, negociator Copenhageniensis commigraverat. — Fidei addictus sum evangelicae. Primis litterarum elementis in schola S. Petri imbutus, puer undecim annorum Germaniam cum parentibus petivi.

Darmstadiae scholam realem, deinde scholam polytechnicam, quae rectore beato Pr. Dr. Külp florebant, quatuor per annos frequentavi, ubi anno MDCCCLXII testimonium maturitatis adeptus sum.

Sub hiemem ejusdem anni Turicum profectus sum, unde tamen morte patris mei, pia memoria per vitam colendi, jam ineunte vere anni MDCCCLXIII revocatus sum. Auctumno ejusdem anni, inter cives universitatis litterariae Friderico Guilelmae a rectore magnifico Beseler receptus, a decano spect. Müllenhoff philos. ordini adscriptus sum.

Per octo semestria studiis mathematicis me dedi fere continuo Berolini, nisi quod per semestre aestivum anni MDCCCLXVI in civitate Georgia Augusta Gottingensi versatus sum. Legentes audivi Berolini viros ill. Arndt, Dove, Kronecker, Kummer, Magnus, Trendelenburg, Weierstrass; Gottingiae viros ill. Lotze, Minnigerode, Schering, Weber.

Exercitationibus seminarii mathematici, quas moderantur viri ill. Kummer et ill. Weierstrass per quattuor semestria interfui.

Quibus viris omnibus maxime de me meritis, imprimis ill. Kronecker, ill. Kummer, ill. Weierstrass, qui benevolentissime tironem adjuverunt, summas, quas possum, gratias ago.

Anno proximo disquisitionibus arithmeticis cel. Gauss et theoriae numerorum cel. Legendre operam navavi, unde materiam dissertationis depromsi.

## Theses.

I. In arithmetica methodi mere arithmeticae analyticis longe praestant.

II. Num spatii ac temporis realitas absoluta sit, propter ipsam controversiae naturam dijudicari non potest.

III. In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.

# 2. Zwei Sätze aus der Theorie der binären quadratischen Formen.

[Schlömilch, Zeitschrift f. Math. u. Physik (Teubner) Jahrg. 13, S. 259–261 (1868).]

In seiner Inauguraldissertation „*de aequationibus secundi gradus indeterminatis*" leitet Göpel aus der Kettenbruch-Entwickelung der Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen interessante Sätze über gewisse Darstellungen der Form $x^2 - Dy^2$ ab, wenn $D$ eine Primzahl von den Formen $8n+3$, $8n+7$ oder das Doppelte einer solchen ist.

Jacobi teilt den Inhalt dieser Arbeit im 35. Bande des Crelleschen Journals in einer Notiz über Göpel mit, auf welche ich hier verweisen muß, da das obengenannte Schriftchen schwerlich im Buchhandel aufgefunden werden dürfte.

Es soll hier gezeigt werden, wie sich diese Sätze einfach und ohne Hilfe der Kettenbrüche nachweisen lassen und dabei gewisse Beschränkungen verlieren, welche ihnen bei jener Methode anhaften. Wir beweisen zu dem Ende die folgenden Sätze I. u. II., in denen, wie sich jeder überzeugen kann, die entsprechenden Sätze Göpels enthalten sind.

I. Ist $D = p$ oder $D = 2p$ und $p$ eine Primzahl $8n+3$ und bezeichnet man mit $\varphi$, $\psi$ eine von denjenigen Darstellungen der Zahl $D$ in der Form $D = \varphi^2 + 2\psi^2$, in welchen $\psi \equiv 1 \bmod 4$, wenn $D = p$, und $\psi \equiv 1$ oder $\equiv 3 \bmod 8$, wenn $D = 2p$, so ist die Form $(-2\psi, \varphi, \psi)$ äquivalent der Form $(1, 0, -D)$.

Beweis. Wir stützen uns auf einen Satz von Legendre, welcher unter anderm in seiner „*Théorie des nombres*, tome I, § VII" gefunden werden kann, nach welchem die Zahl $-2$ stets darstellbar ist in der Form:

$$-2 = s^2 - Dt^2, \tag{1}$$

wenn $D$ die in unserem Theorem verlangten Bedeutungen hat.

Die Form $(Dt, s, t)$, welche aus jenen Zahlen $s$, $t$ gewonnen wird, hat nach (1) die Determinante $-2$ und ist daher, nach einem bekannten Satze der Theorie der quadratischen Formen, der Form $(1, 0, 2)$ äquivalent.

Ist also $\begin{pmatrix} \alpha, & \gamma \\ \beta, & \delta \end{pmatrix}$ eine Substitution, durch welche letztere Form in die erste übergeht, so hat man:

$$Dt = \alpha^2 + 2\beta^2, \qquad s = \alpha\gamma + 2\beta\delta, \qquad t = \gamma^2 + 2\delta^2. \tag{2}$$



Wir behaupten nun, daß die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$, welche aus jener durch Vertauschung der Stellen von $\beta$ und $\gamma$ entsteht, die Form $(1, 0, -D)$ in eine von den beiden Formen $(-2\psi, \varphi, \psi)$, $(-2\psi, -\varphi, \psi)$ überführt.

Denn bezeichnet man die transformierte Form mit $(a, b, c)$, so ist

$$a = \alpha^2 - D\gamma^2, \qquad b = \alpha\beta - D\gamma\delta, \qquad c = \beta^2 - D\delta^2, \tag{3}$$

und man findet, wegen (2), daß

$$a = -2c; \tag{4}$$

im Falle $D = p$ ist $b$ ungerade, $c$ ungerade und

$$c = \beta^2 - D\delta^2 \equiv \beta^2 + \delta^2 \equiv 1 \bmod 4;$$

im Falle $D = 2p$ ist $b$ gerade, $c$ ungerade und

$$c \equiv \beta^2 + 2\delta^2 \equiv 1 \quad \text{oder} \quad \equiv 3 \bmod 8.$$

Da nun $D = b^2 - ac$, so folgt aus (4):

$$D = b^2 + 2c^2.$$

Hieraus sieht man, daß $b$, $c$ eine von den im Theoreme gemeinten Darstellungen $\varphi, \psi$ ist, und daß, da außer der Darstellung $\varphi, \psi$ nur noch die Darstellung $-\varphi, \psi$ existiert, $b = \pm\varphi$, $c = \psi$.

Es ist also die Form $(1, 0, -D)$ stets einer von den Formen

$$(-2\psi, \varphi, \psi), \qquad (-2\psi, -\varphi, \psi) \quad \text{äquivalent,}$$

woraus, wegen der Äquivalenz beider, die Richtigkeit des Satzes folgt.

II. Ist $D = p$ oder $= 2p$ und $p$ eine Primzahl $8n+7$, und bezeichnet man mit $\varphi$, $\psi$ irgendeine von den unendlich vielen Darstellungen der Zahl $D$ in der Form:

$$D = \varphi^2 - 2\psi^2, \quad \text{in welchen} \quad \psi \equiv 1 \bmod 4, \quad \text{wenn} \quad D = p,$$

$\psi \equiv 1$ oder $\equiv 3 \bmod 8$, wenn $D = 2p$, so ist die Form $(2\psi, \varphi, \psi)$ stets äquivalent der Form $(1, 0, -D)$.

Beweis. Hier ist nach derselben Quelle, welche wir im Beweise von I. angeführt, die Zahl $+2$ stets darstellbar in der Form:

$$+2 = s^2 - Dt^2.$$

Die Form $(Dt, s, t)$ hat die Determinante 2 und ist, der Theorie der quadratischen Formen gemäß, äquivalent der Form $(1, 0, -2)$.

Bezeichnen wir nun eine Substitution, durch welche letztere Form in erstere übergeht, mit $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, so findet man, ähnlich wie in dem Beweise von I., daß die Form $(1, 0, -D)$ durch die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in eine Form $(a, b, c)$

übergeht, in welcher $a = 2c$, und wo außerdem $c$ den Kongruenzbedingungen von $\psi$ genügt.

Da nun $D = bb - 2cc$, so folgt hieraus zunächst, daß es eine Darstellung $b = \varphi_0$, $c = \psi_0$ der Zahl $D$ in der Form: $D = \varphi\varphi - 2\psi\psi$ gibt, so daß die Formen $(1, 0, -D)$ und $(2\psi_0, \varphi_0, \psi_0)$ äquivalent sind.

Die übrigen Darstellungen $\varphi$, $\psi$ gehen aber, wie man aus der Theorie der quadratischen Formen der Determinante 2 sieht, aus einer $\varphi_0\,\psi_0$ vermittelst der Formeln

$$\varphi = \pm\varphi_0 u + 2v\psi_0, \quad \psi = \psi_0 u \pm \varphi_0 v \tag{1}$$

hervor, in welchen $u, v$ eine Lösung der Gleichung

$$u^2 - 2v^2 = 1$$

bedeutet, bei welcher $u$ positiv ist.

Die Zahlen $u, v$ sind ihrerseits in den Formen enthalten:

$$u = \omega^2 + 2\eta^2, \qquad v = 2\omega\eta,$$

wo unter $\omega, \eta$ eine Lösung einer der beiden Gleichungen

$$\omega^2 - 2\eta^2 = 1, \qquad \omega^2 - 2\eta^2 = -1$$

zu denken ist.

Man überzeugt sich nun leicht, daß die Form $(1, 0, -D)$ durch die Substitution $\begin{pmatrix} \pm\alpha\omega + 2\beta\eta, & \pm\alpha\eta + \beta\omega \\ \pm\gamma\omega + 2\delta\eta, & \pm\gamma\eta + \delta\omega \end{pmatrix}$ in $(2\psi, \varphi, \psi)$ übergeht, wenn das Zeichen $\pm$ in derselben mit dem Zeichen $\pm$ in den Formeln (1) übereinstimmend genommen wird.

**[Anmerkung.]**

Hier bedeutet das Symbol $(a, b, c)$ wie bei Gauß die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ und ihre „Determinante" den Wert $D = b^2 - ac$.

## 3. Über die einfachen Zahlensysteme.

[Schlömilch, Zeitschrift f. Math. u. Physik Jahrg. 14, S. 121–128 (1869).]

§ 1. Das Problem, bei einem beliebig gegebenen Systeme

$$a,\ a',\ a'',\ \ldots$$

von positiven ganzen Zahlen zu bestimmen, wie oft sich eine Zahl $n$ aus den Gliedern jenes Systemes durch Addition zusammensetzen läßt, ist durch Euler (*Introductio*, Abschnitt: *De partitione numerorum*) gleichsam des zahlentheoretischen Charakters entkleidet und als ein analytisches aufgefaßt worden, bei welchem es sich darum handelt, ein unendliches Produkt in eine Potenzreihe zu verwandeln.

Jenes Zahlensystem kann so beschaffen sein, daß alle Glieder desselben voneinander verschieden sind, es können aber auch darin mehrere Glieder, selbst in unendlicher Anzahl, einander gleich sein. Wir können uns daher das System so gegeben denken, daß die verschiedenen Glieder desselben, der Größe nach geordnet,

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots \tag{1}$$

sind, und daß sie entsprechend in den Anzahlen

$$\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c},\ \bar{d},\ \ldots \tag{2}$$

vorkommen, wo

$$\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c},\ \bar{d},\ \ldots$$

nicht bestimmte ganze Zahlen zu sein brauchen, sondern außerdem noch das unendliche Vorkommen der entsprechenden Zahlen in (1) angeben können.

Man sagt nun: *eine Zahl $n$ wird in dem gegebenen Systeme dargestellt*, wenn man $n$ auf die Weise

$$n = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots$$

erhalten kann, wo $\alpha$ die Werte

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \bar{a}$$

und allgemein die Zahl $\lambda$, welche ein beliebiges Glied $l$ der Reihe (1) multipliziert, die Werte

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \bar{l}$$

annehmen darf.

Um die Anzahl der verschiedenen Darstellungen einer Zahl $n$ in dem gegebenen Systeme zu finden, hat man nun nach Euler das Produkt

$$(1 + x^a + x^{2a} + \cdots + x^{\bar{a}a})(1 + x^b + x^{2b} + \cdots + x^{\bar{b}b}) \cdots$$

in eine Potenzreihe

$$1 + C_1 x^1 + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

umzuwandeln. Die Zahl $C_n$ stellt alsdann die gesuchte Anzahl vor, wie oft die Zahl $n$ in dem gegebenen Systeme dargestellt werden kann.

Wir wollen dieses Eulersche Partitionsproblem umkehren, indem wir fragen, welche Beschaffenheit das System haben muß, wenn die Zahlen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ gegeben sind, und wollen hier zunächst den einfachsten Fall nehmen, wo $C_1, C_2, C_3, \ldots$ alle gleich 1 sind. Demnach würde die Frage, welche wir behandeln, diese sein: Welches ist die Beschaffenheit eines Zahlensystemes, in welchem sich jede Zahl und jede nur auf eine einzige Weise darstellen läßt?

Die Zahlensysteme, welche die letzte Eigenschaft haben, verdienen vor allen übrigen ausgezeichnet zu werden; wir wollen sie *einfache Zahlensysteme* nennen. Unsere Aufgabe ist also keine andere, als zu bestimmen, welches die sämtlichen einfachen Zahlensysteme sind; sie scheint mir deshalb nicht ohne Interesse, weil das verbreitetste aller Zahlensysteme, das dekadische, bei welchem die Reihen (1) und (2) diese sind:

$$1,\quad 10,\quad 100,\quad 1000,\quad 10000,\quad \ldots \tag{1'}$$
$$9,\quad 9,\quad 9,\quad 9,\quad 9,\quad \ldots \tag{2'}$$

nebst sämtlichen analogen, nämlich denjenigen, in welchen die Grundzahl nicht 10, sondern irgendeine andere Zahl ist, nur ganz spezielle Fälle der allgemeinen einfachen Zahlensysteme bilden.

§ 2. Die Reihe (1), § 1, besteht, um es zu wiederholen, aus den verschiedenen Zahlen des Systemes, ihrer Größe nach geordnet, die Reihe (2), § 1, aus den Anzahlen, wie oft die entsprechenden Zahlen in dem Systeme vorkommen. Soll das System ein einfaches sein, so muß man haben:

$$(1 + x^a + x^{2a} + \cdots + x^{\bar{a}a})(1 + x^b + x^{2b} + \cdots + x^{\bar{b}b}) \cdots$$
$$= 1 + x + x^2 + \cdots,$$

oder anders:

$$\frac{1 - x^{a(\bar{a}+1)}}{1 - x^a} \cdot \frac{1 - x^{b(\bar{b}+1)}}{1 - x^b} \cdots = \frac{1}{1 - x}. \tag{1}$$

Da alle Zahlen, also auch die Einheit, sich im Systeme darstellen lassen, so muß die kleinste Zahl der Reihe (1), § 1, die wir $a$ genannt haben, die Einheit selbst sein.



Man hat alsdann:

$$(1 - x^{\bar{a}+1})(1 + x^b + \cdots)(1 + x^c + \cdots) \cdots = 1.$$

Bedenkt man, daß $b, c, \ldots$ größer als die Einheit sind, und daß $b < c < d \ldots$, so sieht man, daß sich diese Gleichung weder mit der Annahme $\bar{a} + 1 > b$, noch mit der Annahme $\bar{a} + 1 < b$ verträgt [damit sich die niedersten Potenzen von $x$ wegheben können]; es muß also $\bar{a} + 1 = b$ sein. Wir sehen hieraus, *daß in einem einfachen Systeme die Einheit so oft vorkommt, als die um 1 verminderte nächstgrößere Zahl beträgt.*

Durch Einführung dieses Resultates in (1) erhält man:

$$(1 - x^{b(\bar{b}+1)})(1 + x^c + \cdots)(1 + x^d + \cdots) \cdots = 1.$$

Diese Gleichung ist wiederum nur mit der Annahme

$$b(\bar{b} + 1) = c$$

verträglich, d. h.: *in einem einfachen Zahlensysteme ist die drittgrößte Zahl teilbar durch die zweitgrößte, und der Quotient aus der letzteren in die erstere um Eins vermindert gibt die Anzahl, wie oft die zweitgrößte Zahl im Systeme vorkommt.*

Setzen wir $\frac{c}{b} = b'$, so ist

$$c = b b', \qquad \bar{b} = b' - 1,$$

und man hat nun die neue Gleichung

$$(1 - x^{c(\bar{c}+1)})(1 + x^d + \cdots)(1 + x^e + \cdots) \cdots = 1,$$

aus welcher man ähnlich wie oben die Gleichung

$$c(\bar{c} + 1) = d$$

erschließt.

Indem man diese Schlüsse wiederholt, erkennt man ganz allgemein, daß bei einem einfachen Systeme jede Zahl $k$ der Reihe (1), § 1, in der nächstgrößeren ohne Rest aufgeht und daß der entsprechende Quotient um 1 vermindert uns die Anzahl $\bar{k}$ gibt, wie oft die Zahl $k$ im Systeme vorkommt.

Die Reihen (1) und (2) von § 1 haben also bei einem einfachen Systeme die Gestalten

$$1,\ b,\ b b',\ b b' b'',\ b b' b'' b''',\ \ldots \tag{2}$$
$$b - 1,\ b' - 1,\ b'' - 1,\ b''' - 1,\ b'''' - 1,\ \ldots \tag{3}$$

wo

$$b,\ b',\ b'',\ b''',\ \ldots \tag{4}$$

eine unendliche Reihe ganzer, von der Einheit verschiedener Zahlen ist. Es ist aber auch umgekehrt jedes Zahlensystem wie das durch die Reihen

(2), (3) definierte ein einfaches; denn man hat:

$$(1 + x + \cdots + x^{b-1})(1 + x^b + \cdots + x^{(b'-1)b}) \cdots$$
$$= \frac{1-x^b}{1-x} \cdot \frac{1-x^{bb'}}{1-x^b} \cdot \frac{1-x^{bb'b''}}{1-x^{bb'}} \cdots = \frac{1}{1-x},$$

also

$$C_n = 1.$$

Wir erhalten demnach das Resultat: *die einfachen Zahlensysteme sind diejenigen, bei denen jede Zahl $k$ in der nächstgrößeren $l$ ohne Rest aufgeht und $k$ so oft vorkommt, als* $\frac{l}{k} - 1$ *beträgt*, [also immer nur in endlicher Anzahl].

§ 3. Die einfachen Zahlensysteme haben eine weitergehende Bedeutung. Führt man außer den ganzen Zahlen des Systemes noch die Brüche

$$\frac{1}{b}, \quad \frac{1}{bb'}, \quad \frac{1}{bb'b''}, \quad \ldots \tag{1}$$

und zwar entsprechend in den Anzahlen

$$b-1, \quad b'-1, \quad b''-1, \quad \ldots \tag{2}$$

ein, so kann man in dem also erweiterten Zahlensysteme sämtliche Zahlengrößen [d. h. alle reellen Zahlen] und jede nur auf eine einzige Weise durch Addition unendlich vieler Glieder des Systemes erhalten; d. h. wenn $A$ eine beliebig gegebene Zahlengröße ist, so hat man stets nur auf eine einzige Weise die Gleichung:

$$A = \alpha + \beta b + \gamma bb' + \delta bb'b'' + \cdots + \frac{\lambda}{b} + \frac{\mu}{bb'} + \frac{\nu}{bb'b''} + \cdots,$$

in welcher die Reihe auf der rechten Seite unendlich ist und die Zahlen $\alpha, \lambda$ die Werte $0, 1, 2, \ldots b-1$, die Zahlen $\beta, \mu$ die Werte $0, 1, 2 \ldots b'-1$, die Zahlen $\gamma, \nu$ die Werte $0, 1, 2, \ldots b''-1$ annehmen dürfen. Der ganzzahlige Teil

$$A_0 = \alpha + \beta b + \gamma bb' + \cdots$$

ist [nach § 2 eindeutig] bestimmt durch die Bedingungen

$$A > A_0, \qquad A \leqq A_0 + 1,$$

die Zahl $\lambda$ durch die Bedingungen

$$(A - A_0) b > \lambda, \qquad (A - A_0) b \leqq \lambda + 1,$$

die Zahl $\mu$ durch die Bedingungen

$$(A - A_0) bb' - \lambda b' > \mu, \qquad (A - A_0) bb' - \lambda b' \leqq \mu + 1$$

usw. [1].

§ 4. Wenn ein einfaches Zahlensystem die Beschaffenheit hat, daß bei beliebig gedachter Zahl $q$ in der Reihe

$$1, \quad b, \quad bb', \quad bb'b'', \quad \ldots$$

von einem gewissen Gliede an *alle* durch $q$ teilbar sind, so läßt sich über



die Darstellbarkeit eines rationalen Bruches $\frac{p}{q}$ das folgende Theorem aussagen:

Theorem: *Ist*

$$A = \frac{p}{q}$$

*und*

$$A = A_0 + \frac{\lambda}{b} + \frac{\mu}{bb'} + \cdots,$$

*so hat die Zahlenreihe*

$$\lambda, \mu \ldots$$

*die Beschaffenheit, daß von einem gewissen Gliede an sämtliche Glieder die höchsten ihnen zustehenden Werte haben.*

Beweis: Man bezeichne $\mu$ mit $\lambda'$, $\nu$ mit $\lambda''$ usw. und setze

$$A_0 + \frac{\lambda}{b} + \frac{\lambda'}{bb'} + \cdots + \frac{\lambda^{(\varrho)}}{bb' \ldots b^{(\varrho)}} = \frac{m^{(\varrho)}}{n^{(\varrho)}},$$

wo

$$n^{(\varrho)} = bb' \ldots b^{(\varrho)}.$$

Dann ist einmal

$$\frac{p}{q} - \frac{m^{(\varrho)}}{n^{(\varrho)}} > 0,$$

andererseits

$$\frac{p}{q} - \frac{m^{(\varrho)}}{n^{(\varrho)}} \leqq \frac{b^{(\varrho+1)} - 1}{bb' \ldots b^{(\varrho+1)}} + \frac{b^{(\varrho+2)} - 1}{bb' \ldots b^{(\varrho+2)}} + \cdots$$

Das ist:

$$\frac{p}{q} - \frac{m^{(\varrho)}}{n^{(\varrho)}} \leqq \frac{1}{n^{(\varrho)}}.$$

Wir haben also

$$p\, n^{(\varrho)} - q\, m^{(\varrho)} > 0; \qquad p\, n^{(\varrho)} - q\, m^{(\varrho)} \leqq q.$$

Sei nun $n^{(\sigma)}$ das erste Glied der Reihe

$$1, \ b, \ bb', \ \ldots,$$

welches durch die Zahl $q$ teilbar ist; dann ist

$$z = p\, n^{(\sigma)} - q\, m^{(\sigma)}$$

eine durch $q$ teilbare ganze Zahl, die nach dem soeben Gezeigten in den Grenzen liegt

$$z > 0; \qquad z \leqq q;$$

es ist folglich

$$z = q,$$

mithin

$$\frac{p}{q} = \frac{m^{(\sigma)}}{n^{(\sigma)}} + \frac{1}{n^{(\sigma)}},$$

oder auch

$$A = A_0 + \frac{\lambda}{b} + \cdots + \frac{\lambda^{(s)}}{b\,b'\ldots b^{(s)}} + \frac{b^{(s+1)}-1}{b\,b'\ldots b^{(s+1)}} + \frac{b^{(s+2)}-1}{b\,b'\ldots b^{(s+2)}} + \cdots,$$

was zu beweisen war.

Korollar: *Hat bei einer Zahl*

$$A = A_0 + \frac{\lambda}{b} + \frac{\mu}{b\,b'} + \cdots$$

*die Reihe $\lambda, \mu, \ldots$ nicht die Beschaffenheit, welche in dem bewiesenen Theoreme für eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ gefordert ist, so ist die Zahl $A$ eine Irrationalzahl.*

Hierher gehört die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes:

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

§ 5. Von den einfachen Zahlensystemen wollen wir noch diejenigen berücksichtigen, bei denen die Reihe

$$b,\ b',\ b'' \ \ldots$$

von einem Glied $b^{(\varrho)}$ an *periodisch* ist.

Sei $\tau$ die Größe der Periode, deren Glieder wir mit

$$c,\ c',\ \ldots\ c^{(\tau-1)}$$

bezeichnen wollen, so daß

$$b^{(\varrho+\tau'+h\tau)} = c^{(\tau')}, \tag{1}$$

wo $\tau'$ die Zahlenwerte $0, 1, 2, \ldots \tau - 1$ annehmen kann und $h$ eine beliebige positive ganze Zahl oder die Null ist.

Wird ferner

$$b\,b' \ldots b^{(k)} = n^{(k)}$$

gesetzt und unter den drei [Symbolen]

$$b^{(-1)},\ c^{(-1)},\ n^{(-1)}$$

die positive Einheit verstanden, so hat man, wenn gesetzt wird

$$n^{(\varrho-1)} = M, \qquad c\,c' \ldots c^{(\tau-1)} = N, \tag{2}$$

die Gleichung

$$n^{(\varrho-1+\tau'+h\tau)} = M\,N^h\,c\,c' \ldots c^{(\tau'-1)}. \tag{3}$$

Es besteht hier das folgende

Theorem: *Ist in dem einfachen Zahlensysteme dieses Paragraphen eine Zahl*

$$\frac{\beta}{b} + \frac{\beta'}{b\,b'} + \cdots$$

*dargestellt, in welcher die Zahlenreihe $\beta, \beta', \ldots$ von einem Gliede an periodisch ist, so ist diese Zahl eine rationale Zahl, und umgekehrt, wird ein echter rationaler Bruch $\frac{p}{q}$ in dem Systeme dargestellt durch die Gleichung*

$$\frac{p}{q} = \frac{\beta}{b} + \frac{\beta'}{b\,b'} + \cdots,$$

*so ist die Reihe $\beta, \beta', \ldots$ von einem bestimmten Gliede an periodisch.*



Beweis: Den ersten Teil des Satzes zu beweisen, hat keine Schwierigkeit, weil sich die gegebene Reihe auf eine endliche Anzahl geometrischer Reihen zurückführen läßt und damit eine rationale Zahl stets zur Summe hat. Anders mit dem zweiten Teile, welcher die vollständige Umkehrung des ersten ist.

Wir denken uns den Bruch $\frac{p}{q}$ in der irreduktibeln Form gegeben, darin $p$ und $q$ ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, und bezeichnen die ganze Zahl

$$\beta^{(k)} + \beta^{(k-1)}\,b^{(k)} + \cdots + \beta\,b' \cdots b^{(k)}$$

mit $m^{(k)}$, so daß

$$\frac{p}{q} = \frac{m^{(k)}}{n^{(k)}} + \frac{\beta^{(k+1)}}{n^{(k+1)}} + \cdots$$

Dann ist

$$\frac{p}{q} - \frac{m^{(k)}}{n^{(k)}} > 0, \qquad \frac{p}{q} - \frac{m^{(k)}}{n^{(k)}} \leqq \frac{1}{n^{(k)}}.$$

Führen wir daher eine Zahlenreihe

$$\delta,\ \delta',\ \delta'' \ldots$$

durch die Gleichung

$$\delta^{(k+1)} = p\,n^{(k)} - q\,m^{(k)} \tag{4}$$

ein, so besteht dieselbe aus lauter positiven ganzen Zahlen, die sämtlich kleiner sind als $q + 1$. Diese Reihe der $\delta$ steht mit der Reihe der $\beta$ in einer solchen Verbindung, daß wenn die eine periodisch ist, es auch die andere ist, wegen der Periodizität der Reihe $b$.

Man hat nämlich

$$\frac{b^{(k+1)}\,\delta^{(k+1)}}{q} = \beta^{(k+1)} + \frac{\beta^{(k+2)}}{b^{(k+2)}} + \cdots \tag{5}$$

und daraus

$$\frac{b^{(k+1)}\,\delta^{(k+1)}}{q} > \beta^{(k+1)}, \qquad \frac{b^{(k+1)}\,\delta^{(k+1)}}{q} \leqq \beta^{(k+1)} + 1. \tag{6}$$

Durch die Gleichung (5) ist $\delta^{(k+1)}$ eindeutig aus den $\beta^{(k+1)}, \beta^{(k+2)}, \ldots$ bestimmt, durch die Ungleichheiten (6) hängt die ganze Zahl $\beta^{(k+1)}$ eindeutig von $\delta^{(k+1)}$ ab.

Wir haben also nur die Periodizität (von einem gewissen Gliede an) der Reihe

$$\delta,\ \delta',\ \delta'',\ \ldots$$

nachzuweisen. Man hat, wenn $k = \varrho - 1 + \tau' + h\tau$:

$$\delta^{(k+1)} = p\,M\,N^h\,c\,c' \ldots c^{(\tau'-1)} - q\,m^{(k)}.$$

Sei $s$ der größte gemeinschaftliche Teiler von $q$ und $M$, und es sei $q = sr$; sei $r = r'r''$, wo $r''$ alle Primfaktoren von $r$ enthält, die auch in $N$ vorkommen, so daß $r'$ relativ prim zu $N$ und zu $r''$ ist.

Man verstehe ferner unter $\vartheta$ die kleinste Zahl, für welche

$$N^{\vartheta} \equiv 1 \bmod r' \text{ ist,}$$

und unter $\pi$ die kleinste Zahl, für welche

$$N^{\pi} \equiv 0, \quad \bmod r'';$$

dann ist in bezug auf beide Moduln $r'$ und $r''$

$$N^{\pi+\vartheta'+g\vartheta} \equiv N^{\pi+\vartheta'},$$

wo $\vartheta'$ die Bedeutung einer der Zahlen $0, 1, 2, \ldots \vartheta - 1$ hat und $g$ eine beliebige ganze positive Zahl ist. Da $r'$ und $r''$ relativ prim zueinander sind, so hat die letzte Kongruenz auch für den Modul $r$ Gültigkeit; es ist

$$N^{\pi+\vartheta'+g\vartheta} \equiv N^{\pi+\vartheta'}, \bmod r.$$

Hieraus geht zunächst die Kongruenz hervor:

$$\delta^{(\varrho+\pi\tau+\tau'+\vartheta'\tau+g\vartheta\tau)} \equiv \delta^{(\varrho+\pi\tau+\tau'+\vartheta'\tau)} \bmod q. \tag{7}$$

Die Zahlen $\delta$ sind, wie wir gesehen haben, alle $> 0$ und $< q + 1$; sie können daher untereinander nur in dem Falle kongruent in bezug auf $q$ sein, wenn sie einander gleich sind. Man hat also, wenn

$$\varrho + \pi\tau = \Omega, \qquad \tau' + \vartheta'\tau = \Theta', \qquad \tau\vartheta = \Theta$$

gesetzt wird:

$$\delta^{(\Omega+\Theta'+g\Theta)} = \delta^{(\Omega+\Theta')}. \tag{8}$$

Berücksichtigt man die Wertreihe der $\tau'$ und die der $\vartheta'$, so findet man, daß die Wertreihe der $\Theta'$

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \Theta - 1$$

ist. Die Gleichung (8) zeigt uns also, daß die Reihe der $\delta$ vom Gliede $\delta^{(\Omega)}$ an periodisch mit der Periode $\Theta = \tau\vartheta$ ist. Einer früheren Bemerkung zufolge ist nun auch die Reihe der $\beta$ vom Gliede $\beta^{(\Omega)}$ an periodisch, und zwar mit derselben Periode $\Theta$, weil $\Theta$ teilbar ist durch $\tau$.

Das dekadische Zahlensystem ist derjenige Fall der in diesem Paragraphen behandelten Systeme, in welchem

$$\varrho = 0, \qquad \tau = 1, \qquad c = 10.$$

**[Anmerkung.]**

[1] Zu § 3, Schluß, S. 38. In der Tat wird dann, unter $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ verstanden,

$$\lambda = [(A - A_0)\, b] < b,$$
$$\mu = [(A - A_0)\, bb' - \lambda b'] < b' \quad \text{usw.}$$

und das Restglied der Entwicklung, das zum Gliede $\frac{K}{bb' \ldots b^{(\varrho)}}$ gehört, ist $< \frac{1}{bb' \ldots b^{(\varrho)}}$ konvergiert also gegen Null.

# 4. Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Produkte.

[Schlömilch, Zeitschrift f. Math. u. Physik Jahrg. 14, S. 152—158 (1869).]

In Eulers „*Introductio in analysin infinitorum*“, im Abschnitte „*De partitione numerorum*“ findet sich, § 328, das Produkt

$$(1 + x)(1 + x^2) \ldots (1 + x^{2^\lambda}) \ldots,$$

dessen Wert daselbst für $x < 1$ gleich $\frac{1}{1-x}$ gefunden wird [1].

Euler benutzt diese Gleichung nur dazu, die Zerlegung der ganzen Zahlen in die Summanden $1, 2, 4, 18, \ldots 2^\lambda, \ldots$ nachzuweisen.

Es ruht aber auf dieser Gleichung eine bemerkenswerte Darstellungsweise von Zahlengrößen [d. h. von reellen Zahlen] in der Form unendlicher Produkte, welche von zahlentheoretischem Interesse ist, in vieler Hinsicht der Darstellung der Zahlen als einfache Kettenbrüche

$$1 + \frac{1}{a +}\,\frac{1}{b + \cdots}$$

gegenübergestellt werden kann, mit ihr sogar einige Anknüpfungspunkte gemein hat und vor allen Dingen, *wie bei den Kettenbrüchen, auf alle Zahlengrößen sich bezieht und für jede bestimmte Zahlengröße eine einzige, bestimmte ist.*

Dies ist die Darstellung der Zahlengrößen $A > 1$ in der Form:

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \ldots,$$

wo $a, b, c, \ldots$ ganze Zahlen sind, die untereinander den Größenbedingungen unterworfen sind:

$$b \geqq aa, \qquad c \geqq bb, \qquad d \geqq cc. \quad \ldots$$

Es mag hier genügen, die wesentlichsten Gesetze dieser Darstellungen in den beiden folgenden Theoremen zu geben.

Theorem I. *Man kann eine jede Zahlengröße [jede reelle Zahl] $A > 1$, und zwar nur auf eine einzige Weise darstellen als Produkt*

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \ldots,$$

*wo $a, b, c, \ldots$ ganze Zahlen sind, so beschaffen, daß*

$$b \geqq aa, \qquad c \geqq bb, \qquad d \geqq cc. \quad \ldots$$

Beweis: Wir wollen zuerst zeigen, daß, wenn die gegebene Zahlengröße $A$ in jener Form darstellbar ist, sie es nur auf eine Weise ist.

Aus

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \dots$$

ergibt sich zunächst

$$A > 1 + \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a};$$

dann aber, da

$$b \geqq a^2, \qquad c \geqq a^4, \qquad d \geqq a^8 \quad \dots,$$

ist auch

$$A \leqq \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{a\,a}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a^{2^\lambda}}\right) \cdots$$

d. i. (nach Euler):

$$A \leqq 1 + \frac{1}{a-1} = \frac{a}{a-1}.$$

Man hat also, weil

$$a > \frac{1}{A-1} \quad \text{und} \quad a - 1 \leqq \frac{1}{A-1}$$

ist,

$$a + 1 > \frac{A}{A-1}, \qquad a \leqq \frac{A}{A-1}.$$

Diesen beiden Bedingungen genügt aber nur *eine* ganze Zahl $a$; man hat, wenn unter $E(x)$ die größte in $x$ enthaltene ganze Zahl verstanden wird:

$$a = E\left(\frac{A}{A-1}\right).$$

Wird nun

$$\frac{A\,a}{a+1} = B = \left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \cdots$$

gesetzt, so ergibt sich aus $B$, welche Größe offenbar ebenfalls $> 1$ ist, ebenso $b$, nämlich:

$$b = E\left(\frac{B}{B-1}\right),$$

und führt man allgemein

$$N = \frac{M\,m}{m+1} \tag{1}$$

ein, so hat man die Gleichungen

$$a = E\left(\frac{A}{A-1}\right); \qquad b = E\left(\frac{B}{B-1}\right); \qquad c = E\left(\frac{C}{C-1}\right) \cdots \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt, daß die $a, b, c, \dots$ ganz bestimmte, ohne Zweideutigkeit aus $A$ sich ergebende ganze Zahlen sind.



Nun ist zu zeigen, daß, wenn bei gegebener Zahl $A > 1$ die ganzen Zahlen $a, b, c, \dots$ den Gleichungen (1) und (2) entsprechend bestimmt werden, sowohl

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \cdots,$$

als auch

$$b \geqq a\,a, \qquad c \geqq b\,b, \qquad d \geqq c\,c. \quad \dots$$

Wir wollen zunächst den letzten Punkt erledigen, weil der erste damit zusammenhängt.

Man hat

$$b = E\left(\frac{B}{B-1}\right) \quad \text{und} \quad B = \frac{A\,a}{a+1};$$

daher

$$b = E\left(\frac{A\,a}{a\,(A-1) - 1}\right).$$

Ferner

$$a = E\left(\frac{A}{A-1}\right) = \frac{A}{A-1} - \alpha,$$

wo $\alpha$ eine positive Zahlengröße, die kleiner als 1 ist.

Man findet daraus:

$$A = \frac{a+\alpha}{a+\alpha-1}.$$

Setzt man diesen Wert in den letzten Ausdruck für $b$ ein, so folgt:

$$b = E\left(\frac{a\,(a+\alpha)}{1-\alpha}\right).$$

Hieraus sieht man unmittelbar, wegen der Bedeutung von $\alpha$, daß

$$b \geqq a\,a.$$

Ganz ebenso wird gezeigt, daß

$$c \geqq b\,b, \qquad d \geqq c\,c. \quad \dots$$

Bemerkt man außerdem, daß die ersten Zahlen der Reihe $a, b, c, \dots$ nur so oft $= 1$ sind, als die höchste in $A$ enthaltene Potenz von 2 beträgt, so folgt aus dem soeben Bewiesenen, daß diese Zahlen von einer gewissen an sehr stark ins Unendliche zunehmen. — Man setze nun, wenn $n$ eine beliebige von 1 verschiedene Zahl jener Reihe und $m$ die ihr voraufgehende ist:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m}\right) = X;$$

dann ist

$$A = X\,N.$$

Aus

$$n = E\left(\frac{N}{N-1}\right)$$

folgt aber

$$N > 1 + \frac{1}{n}, \qquad N \leqq 1 + \frac{1}{n-1};$$

daher

$$A > X, \qquad A < X + \frac{A}{n-1}.$$

Da nun $n$ beliebig groß angenommen werden kann, so ist:

$$A = \lim X = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\ldots$$

Hiermit ist der Satz in allen seinen Teilen bewiesen.

Ich will beispielsweise die Darstellungen einiger Quadratwurzeln in der Form unserer Produkte anführen, welche bei gehöriger Induktion ein einfaches Gesetz offenbaren, nach welchem die Zahlen $a, b, c, \ldots$ ins Unendliche wachsen. Man findet:

I. $$\sqrt{2} = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{17}\right)\left(1+\frac{1}{577}\right)\left(1+\frac{1}{667967}\right)\cdots$$

Man bemerkt, daß

$$17 = 2\cdot 3^2 - 1, \quad 577 = 2\cdot 17^2 - 1, \quad 667967 = 2\cdot 577^2 - 1.$$

II. $$\sqrt{3} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{97}\right)\left(1+\frac{1}{17617}\right)\cdots$$

$$7 = 2\cdot 2^2 - 1, \quad 97 = 2\cdot 7^2 - 1, \quad 17617 = 2\cdot 97^2 - 1;$$

III. $$\sqrt{5} = 2\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{161}\right)\left(1+\frac{1}{51841}\right)\left(1+\frac{1}{5374978561}\right)\cdots$$

$$161 = 2\cdot 9^2 - 1, \; 51841 = 2\cdot 161^2 - 1, \; 5374978561 = 2\cdot 51841^2 - 1;$$

IV. $$\sqrt{15} = 2\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{31}\right)\left(1+\frac{1}{1921}\right)\left(1+\frac{1}{7380481}\right)\cdots$$

$$31 = 2\cdot 4^2 - 1, \quad 1921 = 2\cdot 31^2 - 1, \quad 7380481 = 2\cdot 1921^2 - 1.$$

In diesen vier Beispielen tritt also bei der Zahlenreihe

$$a, \; b, \; c, \; d, \; \ldots$$

von einem bestimmten Gliede $k$ an, das Gesetz hervor:

$$l = 2kk - 1, \qquad m = 2ll - 1, \qquad n = 2mm - 1, \quad \ldots$$



Theorem II. *Ist $A$ eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$, so hat die unter* I *nachgewiesene Entwickelung von $A$ die spezielle Form*

$$A = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots$$
$$\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{kk}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^{2^\lambda}}\right)\cdots$$

*oder anders ausgedrückt: von einem bestimmten Gliede $k$ an ist in der Reihe $a, b, c, d, \ldots$ einfach:*

$$l = kk, \qquad m = ll, \qquad n = mm, \quad \ldots$$

Beweis: Seien $p, q$ relativ prim untereinander.

Man setze

$$\left.\begin{array}{ll} p\;a = \delta p', & q\;(a+1) = \delta q'; \\ p'\,b = \delta' p'', & q'(b+1) = \delta' q''; \\ p''c = \delta'' p''', & q''(c+1) = \delta'' q'''; \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{1}$$

wo unter $\delta$ der größte gemeinschaftliche Teiler von $pa$ und $q(a+1)$, unter $\delta'$ der größte gemeinschaftliche Teiler von $p'b$ und $q'(b+1)$ usw. zu denken ist.

Man hat alsdann

$$A = \frac{p}{q}, \qquad B = \frac{p'}{q'}, \qquad C = \frac{p''}{q''}, \quad \ldots \tag{2}$$

Aus (1) folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \delta(p'-q') = a(p-q) - q \\ \delta'(p''-q'') = b(p'-q') - q' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{3}$$

Betrachten wir nun die Zahlenreihe

$$p-q, \qquad p'-q', \qquad p''-q'', \quad \ldots \tag{4}$$

Aus (2) geht, da $A > 1$, $B > 1$, $C > 1, \ldots$ hervor, daß alle Glieder derselben positive ganze Zahlen sind; aus (3) erkennt man, daß zwei benachbarte Glieder derselben relativ prim zueinander sind; denn würden beispielsweise $p-q$, $p'-q'$ einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so wäre derselbe auch Teiler von $q$ und $p$. — Ferner nehmen die Glieder unserer Reihe (4) bis zu einer gewissen Grenze ab; denn aus

$$a = E\left(\frac{p}{p-q}\right)$$

folgt

$$a \leqq \frac{p}{p-q},$$

daher mit Berücksichtigung der ersten Gleichung (3)

$$\delta(p'-q') \leqq p-q;$$

um so mehr

$$p'-q' \leqq p-q.$$

Ganz ähnlich erkennt man, daß

$$p''-q'' \leqq p'-q', \qquad p'''-q''' \leqq p''-q'' \text{ etc.}$$

Die nachgewiesene Grenze, bis zu welcher die Glieder der Reihe (4) abnehmen, kann aber keine andere sein als die Einheit; denn wäre sie größer als 1, so hätte man zwei gleiche, von 1 verschiedene, benachbarte Glieder der Reihe (4), von denen soeben gezeigt worden ist, daß sie relativ prim zueinander sind.

Man hat also für ein gewisses $\lambda$:

$$p^{(\lambda)} - q^{(\lambda)} = p^{(\lambda+1)} - q^{(\lambda+1)} = \cdots = 1.$$

Setzt man

$$p^{(\lambda)} = k,$$

so ist

$$q^{(\lambda)} = k-1$$

und man hat

$$A = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{i}\right)K,$$

wo

$$K = \frac{p^{(\lambda)}}{q^{(\lambda)}} = \frac{k}{k-1};$$

nach unserer Quelle [d. h. nach der Eulerschen Ausgangsformel S. 43] hat man aber

$$K = \left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\cdots,$$

somit

$$A = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^{2^\lambda}}\right)\cdots,$$

was zu beweisen war.

Nehmen wir als Beispiel die Zahl:

$$A = \frac{164511}{87880}.$$



Man hat

$$a = E\left(\frac{164511}{76631}\right) = 2,$$

$$B = \frac{164511 \cdot 2}{87880 \cdot 3} = \frac{54837}{43940}, \qquad b = E\left(\frac{54837}{10897}\right) = 5;$$

$$C = \frac{54837 \cdot 5}{43940 \cdot 6} = \frac{18279}{17576}, \qquad c = E\left(\frac{18279}{703}\right) = 26;$$

$$D = \frac{18279 \cdot 26}{17576 \cdot 27} = \frac{677}{676},$$

daher

$$\frac{164511}{87880} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{26}\right)\left(1+\frac{1}{677}\right)\left(1+\frac{1}{677^2}\right)\cdots$$

Korollar. *Hat man ein Produkt*

$$A = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdots,$$

*in welchem $a, b, c, \ldots$ ganze Zahlen, und $b > aa$, $c > bb$, $d > cc \ldots$, so ist $A$ immer eine Irrationalzahl.*

Ich führe als Beispiel die Zahl an

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{aa}\right)\left(1-\frac{1}{a^4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a^{2^\lambda}}\right)\cdots,$$

wo $a$ eine beliebige ganze Zahl, außer 1 sei. Der umgekehrte Wert dieser Zahl ist:

$$\left(1+\frac{1}{a-1}\right)\left(1+\frac{1}{a^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{a^4-1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a^{2^\lambda}-1}\right)\cdots$$

Man findet aber:

$$a^{2^\lambda} - 1 = (a^{2^{\lambda-1}} - 1)(a^{2^{\lambda-1}} + 1) > (a^{2^{\lambda-1}} - 1)^2;$$

deshalb ist die letzte Zahl und mit ihr die ursprünglich gegebene eine Irrationalzahl [2].

**[Anmerkungen.]**

[1] Zu S. 43. Die Eulersche Formel ergibt sich leicht durch sukzessive Entwickelung:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{1-x^2} = (1+x)\cdot\frac{1+x^2}{1-x^4} = (1+x)(1+x^2)\frac{1+x^4}{1-x^8}\cdots$$
$$= (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^\lambda})\cdot\frac{1}{1-x^{2^{\lambda+1}}}$$

und durch Grenzübergang $\lambda \to \infty$ bei $|x| < 1$.

[2] Zu S. 49 (Schluß). Das dem oben erwähnten Eulerschen Produkt ganz analog gebaute unendliche Produkt

$$f(z) = (1-z)(1-z^2)(1-z^4)\cdots = \prod_{\lambda=0}^{\infty}(1-z^{2^\lambda}) = (1-z)\,f(z^2)$$

ist eine analytische Funktion des komplexen Argumentes $z$, welche innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ regulär ist und diesen zur „natürlichen Grenze“ hat. Ist nämlich $z_q$ eine „dyadische Einheitswurzel“, für welche

$$z_q^{2^q} = 1$$

ist, so wird für jedes $0 \leqq r < 1$ und $z = r z_q$

$$f(z) = f(r z_q) = \prod_{\lambda=0}^{q-1} (1 - z^{2^\lambda}) \cdot f(z^{2^q}) = P_q(r z_q) f(r^{2^q}),$$

wo der Faktor $P_q$ ein Polynom vom Grade $2^q - 1$ ist. Der zweite Faktor aber verschwindet von unendlich hoher Ordnung, wenn $r$ dem Werte 1 zustrebt:

$$\lim_{r \to 1} \frac{f(r^{2^q})}{(1-r)^m} = 0 \qquad \text{für beliebiges } m.$$

Die Funktion $f(z)$ hat also in $z = z_q$ eine „Stelle der Unbestimmtheit“, und diese Einheitswurzeln $z_q$ liegen überall dicht auf dem Einheitskreise, so daß über ihn hinaus eine analytische Fortsetzung unmöglich ist. Von dieser Transzendenten $f(z)$ zeigt hier Cantor, daß sie für alle reziproken ganzen Zahlen $z = \frac{1}{a}$ irrationale Werte annimmt.

## 5. De transformatione formarum ternariarum quadraticarum.

[Habilitationsschrift. Halle 1869.]

Sicut omnino formarum quadraticarum cujusdam variabilium numeri ita maxime formarum ternariarum quadraticarum proprium est, ut binae formae, quarum determinans non evanescat, lineariter invicem in se transformari possint. Duabus igitur hujusmodi formis:

$$F(x, y, z) \quad \text{et} \quad F_1(x_1, y_1, z_1)$$

datis, substitutionem:

$$x_1 = \pi x + \sigma y + \tau z, \quad y_1 = \pi' x + \sigma' y + \tau' z, \quad z_1 = \pi'' x + \sigma'' y + \tau'' z$$

adhibere possumus, in qua aequatio identica tenet locum:

$$F(x, y, z) = F_1(x_1, y_1, z_1).$$

Sed in theoria harum formarum id potissimum agendum est, ut substitutiones, quibus $F_1$ in $F$ transformatur, quaeque *in numero tripliciter infinito nobis occurrunt*, ad unam omnes enumerentur.

Sed quo simplicior res fiat, investigationem eo reducimus, ut binae formae aequales sint. Si enim $A$ substitutio propria est, qua facta $F_1$ in $F$ mutatur, substitutioni cuivis $S'$, qua $F_1$ in $F$ transformatur, certa quaedam $S$ respondeat necesse est, qua $F$ rursus in se transformetur, ita ut

$$S' = A \cdot S \quad \text{sit}^1.$$

Quibus rebus constitutis id agitur, ut demonstremus, quomodo substitutiones $S$, quibus formae $F$ rursus in se transformari possit, pendeant ex tribus numeris arbitrario assumtis $\lambda, \mu, \nu$. Quod propositum accuratius ita circumscribi potest:

*Sit forma data:*

$$F = axx + a'yy + a''zz + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

*cujus determinans*

$$D = abb + a'b'b' + a''b''b'' - aa'a'' - 2bb'b''$$

*non evanescit; substitutiones $S$, quarum determinans $+1$ valet, quibusque $F$ in*

[1] Sub $A \cdot S$ substitutionem ex $A$ et $S$ compositam intellectam volumus, ita quidem ut $A$ sit substitutio prima, $S$ secunda.

*se rursus transformatur, rationaliter tribus numeris arbitrario assumtis $\lambda, \mu, \nu$ ita obnoxiae sunt reddendae, ut primum quidem cujusque substitutionis $S$ unum tantum numerorum systema $\lambda, \mu, \nu$ proprium sit, deinde ut in expressionibus substitutionis elementorum, quae ex $\lambda, \mu, \nu$ pendeant, numeri quoque $a, a', a''$, $b, b', b''$ rationaliter insint.*

Quam in quaestionem cum nuper in commentatione de aequationibus Diophanticis componenda versarer incidi; namque ad formas ternarias accuratius perspiciendas disquisitione hujusmodi algebraica opus erat; itaque rem diligenter sum perscrutatus et ad finem quondam adduxisse mihi videor. Quod cum jam alio modo in commentariorum Crellicorum volumine 47 ab Hermitio in commentatione, quae inscribitur „Sur la thêorie des formes quadratiques“ optime factum sit, tamen, quod res in formarum ternariarum theoria, sive algebram ispam sive arithmeticam sublimiorem respicis, summi et principalis momenti esse videtur, si meam quoque sententiam exposuero, eo magis operae pretium erit, quo clarius et accuratius res ab alio alio modo tractata perspici atque intelligi solet. Sin autem extrema hac commentatione theorema aperuero, quod ad substitutiones $S$ numerorum integrorum certi cujusdam generis formarum ternariarum spectat, hoc a re haud alienum erit.

## § 1.

Nunc quidem ab eo initium capimus, ut formularum seriem deducamus ad substitutiones spectantes, quibus forma $F$ traducitur in formam specialem:

$$4D(\eta\eta - \xi\zeta).$$

Talem substitutionem in hac forma:

$$x = \alpha\xi + 2\alpha'\eta + \alpha''\zeta, \quad y = \beta\xi + 2\beta'\eta + \beta''\zeta, \quad z = \gamma\xi + 2\gamma'\eta + \gamma''\zeta$$

adhibemus, et praeterea statuimus, ut valor determinantis hujus substitutionis $= 4\,D$ sit, ita ut

$$\Sigma \pm \alpha\beta'\gamma'' = 2D \text{ sit.} \tag{1}$$

His autem signis nobis uti liceat:

$$\left.\begin{aligned} \gamma'\beta'' - \beta'\gamma'' &= A, & \gamma\beta'' - \beta\gamma'' &= 2A', & \gamma\beta' - \beta\gamma' &= A'' \\ \alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'' &= B, & \alpha\gamma'' - \gamma\alpha'' &= 2B', & \alpha\gamma' - \gamma\alpha' &= B'' \\ \beta'\alpha'' - \alpha'\beta'' &= C, & \beta\alpha'' - \alpha\beta'' &= 2C', & \beta\alpha' - \alpha\beta' &= C'' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ita ut

$$\Sigma \pm AB'C'' = 2D^2 \tag{3}$$

et

$$\left.\begin{aligned} C'B'' - B'C'' &= D\alpha, & CB'' - BC'' &= 2D\alpha', & CB' - BC' &= D\alpha'' \\ A'C'' - C'A'' &= D\beta, & AC'' - CA'' &= 2D\beta', & AC' - CA' &= D\beta'' \\ B'A'' - A'B'' &= D\gamma, & BA'' - AB'' &= 2D\gamma', & BA' - AB' &= D\gamma'' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$



Ex aequatione identica

$$F(x, y, z) = 4D(\eta\eta - \xi\xi)$$

proficiscuntur aequationes:

$$\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha}\alpha = 0, \quad \sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha'}\alpha' = D, \quad \sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha''}\alpha'' = 0.$$

$$\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha}\alpha' = \sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha'}\alpha = 0.$$

$$\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha''}\alpha' = \sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha'}\alpha'' = 0.$$

$$\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha}\alpha'' = \sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha''}\alpha = -2D.$$

Ex aequatione prima et quarta sequitur:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha} : \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \beta} : \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \gamma} = A'' : B'' : C''.$$

Ergo ita scribere possumus:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha} = KA'', \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \beta} = KB'', \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \gamma} = KC''.$$

Ut autem quid $K$ valeat exprimi possit, tres illae aequationes cum $\alpha'', \beta'', \gamma''$ resp. sunt multiplicandae et tum addendae. Cum autem

$$\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha}\alpha'' = -2D \quad \text{et} \quad \Sigma A''\alpha'' = -2D$$

sit, $K$ unitatem positivam aequare necesse est.

Quo igitur modo nascuntur tres primae aequationes hujus formularum systematis:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha} &= A'', & \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \beta} &= B'', & \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \gamma} &= C'' \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha'} &= A', & \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \beta'} &= B', & \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \gamma'} &= C' \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha''} &= A, & \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \beta''} &= B, & \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \gamma''} &= C; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

reliquae simili modo deducendae sunt.

Vulgo sub forma ad $F$ adjuncta haec intelligitur:

$$G(u, v, w) = duu + d'vv + d''wu + 2evw + 2e'wu + 2e''uv$$

in qua

$$d = bb - a'a'', \quad d' = b'b' - aa'', \quad d'' = b''b'' - aa'$$
$$e = ab - b'b'', \quad e' = a'b' - bb'', \quad e'' = a''b'' - bb'.$$

Conjuncta vero est cum forma ipsa $F$ relationibus linearibus

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = u, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = v, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} = w,$$

ita ut

$$G(u, v, w) = DF(x, y, z).$$

Sin autem aequationes

$$x = \alpha\xi + 2\alpha'\eta + \alpha''\zeta, \quad y = \beta\xi + 2\beta'\eta + \beta''\zeta, \quad z = \gamma\xi + 2\gamma'\eta + \gamma''\xi$$

pro $\xi, \eta, \zeta$, formularum (2) et (5) ratione adhibita, solvuntur, hae consequuntur:

$$2D\xi = \sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha''} x = \sum u a''$$

$$2D\eta = -\sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha'} x = -\sum u a'$$

$$2D\zeta = \sum \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha} x = \sum u a.$$

His vero ad aequationem

$$G(u, v, w) = DF(x, y, z) = 4D^2(\eta\eta - \xi\zeta)$$

adhibitis, *sequitur identitas, quae nobis maximo usui est:*

$$G(u, v, w) = (\alpha' u + \beta' v + \gamma' w)^2 - (\alpha u + \beta v + \gamma w)(\alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w). \quad (6)$$

Substitutione autem:

$$\begin{Bmatrix} A & 2A' & A'' \\ B & 2B' & B'' \\ C & 2C' & C'' \end{Bmatrix}$$

forma $G$ in formam $4D^2(\eta\eta - \xi\zeta)$ mutatur. Ergo secundum formularum systematum (5) et (6) analogiam, haec sine dispendio subscribere possumus:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial A} = D\alpha'', & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial B} = D\beta'', & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial C} = D\gamma'' \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial A'} = D\alpha', & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial B'} = D\beta', & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial C'} = D\gamma' \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial A''} = D\alpha, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial B''} = D\beta, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial C''} = D\gamma \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$DF(x, y, z) = (A'x + B'y + C'z)^2 - (Ax + By + Cz)(A''x + B''y + C''z). \quad (8)$$

## § 2.

Superstruimus theorematum, quae sequuntur, demonstrationes hoc *lemmate; si*

$$\begin{Bmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{Bmatrix}$$

*substitutio est, cuius determinans* $+1$ *valet et qua forma* $\eta\eta - \xi\zeta$ *in se ipsam revertitur, hujus substitutionis numerorum systema* $p, q, r, s$ *aequationi* $ps - qr = 1$



*sufficiens proprium est et praeter hoc nihil nisi contrarium* $-p, -q, -r, -s$, ita ut

$$\begin{array}{lll} \lambda = pp, & \mu = 2pq, & \nu = qq \\ \lambda' = pr, & \mu' = ps + qr, & \nu' = qs \\ \lambda'' = rr, & \mu'' = 2rs, & \nu'' = ss. \end{array}$$

Demonstratio: Ex aequatione identica:

$$\eta\eta - \xi\zeta = (\lambda'\xi + \mu'\eta + \nu'\zeta)^2 - (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta)(\lambda''\xi + \mu''\eta + \nu''\zeta)$$

sequuntur relationes:

$$\lambda'\lambda' - \lambda\lambda'' = 0 \quad (1)$$

$$\nu'\nu' - \nu\nu'' = 0 \quad (2)$$

$$\lambda\nu'' + \nu\lambda'' - 2\lambda'\nu' = 1 \quad (3)$$

$$\lambda\mu'' + \mu\lambda'' - 2\lambda'\mu' = 0 \quad (4)$$

$$\mu\nu'' + \nu\mu'' - 2\mu'\nu' = 0 \quad (5)$$

$$\mu'\mu' - \mu\mu'' = 1. \quad (6)$$

Ex (1) et (2) sequitur, ut quatuor numeri $p, q, r, s$ exsistant, ita ut

$$\lambda = pp, \quad \nu = qq, \quad \lambda'' = rr, \quad \nu'' = ss, \quad \lambda' = pr, \quad \nu' = qs.$$

Hi autem quatuor numeri cum propter (3) aequationi

$$(ps - qr)^2 = 1$$

satisfaciant, justa signorum mutatione facta, ita determinari possunt, ut

$$ps - qr = 1 \quad \text{sit.}$$

Ex (4) et (5) haec sequuntur:

$$\mu = 2\varepsilon pq, \quad \mu' = \varepsilon(ps + qr), \quad \nu' = 2\varepsilon rs.$$

Sed, aequationis $\sum \pm \lambda\mu'\nu'' = 1$ ratione habita, $\varepsilon = 1$ valere, apparet.

Praeter valores numerorum $p, q, r, s$ quos invenimus valores $-p, -q, -r, -s$ soli sufficiunt, quia

$$p = \sqrt{\lambda}, \quad q = \sqrt{\nu}, \quad r = \sqrt{\lambda''}, \quad s = \sqrt{\nu''}$$

et praeterea

$$p : r = \lambda : \lambda', \quad r : s = 2\lambda'' : \mu'', \quad s : q = \nu' : \nu \quad \text{est.}$$

## § 3.

Theorema. *Si*

$$\begin{Bmatrix} \pi & \sigma & \tau \\ \pi' & \sigma' & \tau' \\ \pi'' & \sigma'' & \tau'' \end{Bmatrix}$$

*substitutio $S$ est, cuius determinans $+1$ valet et qua forma $F$ in se ipsam rursus transformatur, aequationi*

$$tt - G(u, v, w) = 1$$

*sufficiens numerorum systema est $t, u, v, w$ et praeter hoc unum tantum idque contrarium $-t, -u, -v, -w$, ita ut*

$$\begin{aligned}
\pi &= -u\frac{\partial G}{\partial u} + 2t(vb' - wb'') + 2tt - 1\\
\sigma &= -v\frac{\partial G}{\partial u} + 2t(vb - wa')\\
\tau &= -w\frac{\partial G}{\partial u} + 2t(va'' - wb)\\
\pi' &= -u\frac{\partial G}{\partial v} + 2t(wa - ub')\\
\sigma' &= -v\frac{\partial G}{\partial v} + 2t(wb'' - ub) + 2tt - 1\\
\tau' &= -w\frac{\partial G}{\partial v} + 2t(wb' - ua'')\\
\pi'' &= -u\frac{\partial G}{\partial w} + 2t(ub'' - va)\\
\sigma'' &= -v\frac{\partial G}{\partial w} + 2t(ua' - vb'')\\
\tau'' &= -w\frac{\partial G}{\partial w} + 2t(ub - vb') + 2tt - 1.
\end{aligned}$$

Demonstratio: Sit

$$\begin{Bmatrix} \pi & \sigma & \tau \\ \pi' & \sigma' & \tau' \\ \pi'' & \sigma'' & \tau'' \end{Bmatrix}$$

data substitutio $S$; *adjumenti* causa *quamlibet* substitutionem

$$\begin{Bmatrix} \alpha & 2\alpha' & \alpha'' \\ \beta & 2\beta' & \beta'' \\ \gamma & 2\gamma' & \gamma'' \end{Bmatrix}$$

qua forma $F$ in $4D(\eta\eta - \xi\zeta)$ transformatur, adhibemus, eique signum $\varphi$ imponimus; inversae substitutioni quae ex § 1 hanc habet formam:

$$\begin{Bmatrix} -\frac{A}{2D} & -\frac{B}{2D} & -\frac{C}{2D} \\ +\frac{A'}{2D} & +\frac{B'}{2D} & +\frac{C'}{2D} \\ -\frac{A''}{2D} & -\frac{B''}{2D} & -\frac{C''}{2D} \end{Bmatrix}$$

signum $\psi$ tribuimus.



Sin autem substitutionem compositam effingimus:

$$P = \psi \cdot S \cdot \varphi,$$

hac $P$ formam $\eta\eta - \xi\zeta$ in se ipsam transformari luculenter apparet.

Ergo est certa quaedam substitutio $P$, quae $\eta\eta - \xi\zeta$ in se ipsam transformet, ita ut:

$$S = \varphi \cdot P \cdot \psi. \tag{1}$$

Sin autem invicem $P$ talis est, substitutio $S$ aequatione (1) data formam $F$ in se transformat.

Paragraphi vero secundae lemmate substitutiones $P$, itaque per (1) hujus paragraphi substitutiones $S$ conjunguntur cum quator numeris aequationi $ps - qr = 1$ sufficientibus $p, q, r, s$, ita ut cuique substitutioni $S$ bina numerorum systemata $p, q, r, s$ et $-p, -q, -r, -s$ et cuique numerorum systemati $p, q, r, s$ una substitutio $S$ sit adjudicanda.

Inducendi vero nunc sunt loco numerorum $p, q, r, s$ quatuor novi numeri $t, u, v, w$, qui cum illis aequationibus linearibus

$$\left.\begin{aligned}
p &= t - u\alpha' - v\beta' - w\gamma'\\
q &= \phantom{t} - u\alpha'' - v\beta'' - w\gamma''\\
r &= \phantom{t} + u\alpha + v\beta + w\gamma\\
s &= t + u\alpha' + v\beta' + w\gamma'
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

sunt conjuncti, ita ut invicem

$$t = \frac{p+s}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned}
2Du &= A''q - 2A'\frac{p-s}{2} - Ar\\
2Dv &= B''q - 2B'\frac{p-s}{2} - Br\\
2Dw &= C''q - 2C'\frac{p-s}{2} - Cr
\end{aligned}\right| \tag{3}$$

Cuique vero numerorum systemati $p, q, r, s$, quod aequationi $ps - qr = 1$ sufficiat, paragraphi primae (6) ratione habita, certum quoddam aequationi

$$tt - G(u, v, w) = 1 \tag{4}$$

sufficiens numerorum systema respondet:

$$t, u, v, w.$$

Si igitur valores numerorum $p, q, r, s$ secundum (2) hujus in expressionem $\varphi \cdot P \cdot \psi$ substitutionis $S$ substituimus, habemus substitutionis $S$ elementa expressa functionibus integris et homogeneis secundi gradus quatuor numerorum $t, u, v, w$, qui ut in nostro theoremate aequationi (4) sufficiunt. Ita autem substitutio $S$ e numeris $t, u, v, w$ pendet, ut cuique substitutioni $S$ duo tantum numerorum systemata $t, u, v, w$ et $-t, -u, -v, -w$ sunt adnumeranda. Restat, ut demonstremus, expressiones, quae postremo gignantur, ejusdem formae esse, quam theorema nostrum indicat, *ita ut numeri $\alpha, \beta, \ldots\ldots$ in quibus contemplationis nostrae fundamenta sita sunt, mirum in modum plane eliminentur.*

Si substitutioni

$$\begin{Bmatrix} \frac{d}{D} & \frac{e''}{D} & \frac{e'}{D} \\ \frac{e''}{D} & \frac{d'}{D} & \frac{e}{D} \\ \frac{e'}{D} & \frac{e}{D} & \frac{d''}{D} \end{Bmatrix} \text{ signum } M$$

et substitutioni

$$\begin{Bmatrix} A'' & 2A' & A \\ B'' & 2B' & B \\ C'' & 2C' & C \end{Bmatrix} \text{ signum } \chi$$

indimus, propter formulas (7) § 1

$$\varphi = M \cdot \chi, \quad \text{itaque}$$
$$S = M \cdot \chi \cdot P \cdot \psi \quad \text{est.} \tag{5}$$

Nunc vero si substitutionem $\chi \cdot P \cdot \psi$ quam ita

$$\begin{Bmatrix} \delta & \varepsilon & \theta \\ \delta' & \varepsilon' & \theta' \\ \delta'' & \varepsilon'' & \theta'' \end{Bmatrix}$$

scribere nobis liceat, componimus, et si brevitatis causa ponimus

$$\begin{aligned}
A''pp + 2A'pr + Arr &= X \\
A''pq + A'(ps + qr) + Ars &= Y \\
A''qq + 2A'qs + Ass &= Z \\
B''pp + 2B'pr + Brr &= X' \\
B''pq + B'(ps + qr) + Brs &= Y' \\
B''qq + 2B'qs + Bss &= Z' \\
C''pp + 2C'pr + Crr &= X'' \\
C''pq + C'(ps + qr) + Crs &= Y'' \\
C''qq + 2C'qs + Css &= Z'',
\end{aligned}$$



haec eruuntur:

$$\begin{aligned}
2D\delta &= -AX + 2A'Y - A''Z \\
2D\varepsilon &= -BX + 2B'Y - B''Z \\
2D\theta &= -CX + 2C'Y - C''Z \\
2D\delta' &= -AX' + 2A'Y' - A''Z' \\
2D\varepsilon' &= -BX' + 2B'Y' - B''Z' \\
2D\theta' &= -CX' + 2C'Y' - C''Z' \\
2D\delta'' &= -AX'' + 2A'Y'' - A''Z'' \\
2D\varepsilon'' &= -BX'' + 2B'Y'' - B''Z'' \\
2D\theta'' &= -CX'' + 2C'Y'' - C''Z''.
\end{aligned}$$

Sin autem quae $p, q, r, s$ numeri valent in $t, u, v, w$, formularum in § 1 inventorum ratione habita, substituimus, haec consequuntur:

$$\begin{aligned}
\delta &= -2Duu + a\,(2tt - 1) \\
\varepsilon &= -2Duv + b''(2tt - 1) - t\frac{\partial G}{\partial w} \\
\theta &= -2Duw + b'\,(2tt - 1) + t\frac{\partial G}{\partial v} \\
\delta' &= -2Dvu + b''(2tt - 1) + t\frac{\partial G}{\partial w} \\
\varepsilon' &= -2Dvv + a'\,(2tt - 1) \\
\theta' &= -2Dvw + b\,(2tt - 1) - t\frac{\partial G}{\partial u} \\
\delta'' &= -2Dwu + b'\,(2tt - 1) - t\frac{\partial G}{\partial v} \\
\varepsilon'' &= -2Dwv + b\,(2tt - 1) + t\frac{\partial G}{\partial u} \\
\theta'' &= -2Dww + a''(2tt - 1).
\end{aligned}$$

Ex identitate vero:

$$\begin{Bmatrix} \pi & \sigma & \tau \\ \pi' & \sigma' & \tau' \\ \pi'' & \sigma'' & \tau'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d}{D} & \frac{e''}{D} & \frac{e'}{D} \\ \frac{e''}{D} & \frac{d'}{D} & \frac{e}{D} \\ \frac{e'}{D} & \frac{e}{D} & \frac{d''}{D} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta & \varepsilon & \theta \\ \delta' & \varepsilon' & \theta' \\ \delta'' & \varepsilon'' & \theta'' \end{Bmatrix}$$

nunc sine ulla difficultate sequuntur expressiones elementorum $\pi, \sigma, \ldots$, quae a nobis in theoremate nostro sunt commemoratae.

## Corollarium.

Si quantitates $\frac{u}{t} = \lambda$, $\frac{v}{t} = \mu$, $\frac{w}{t} = \nu$ inducuntur, elementa $\pi, \sigma, \ldots$ rationales fiunt in $\lambda, \mu, \nu$ et cujusque substitutionis $S$, cum determinantis valore $+1$, unum tantum systema $\lambda, \mu, \nu$ proprium est. Haec forma elementorum substitutionum $S$ est, quam a nobis deductum iri in initio commentationis polliciti sumus.

## § 4.

Pauca autem expressionibus substitutionum $S$, quales in theoremate § 3 investigavimus, addemus, quae e nostra ratione sine ulla difficultate deduci possunt.

Si substitutionis $S$ systema $t, u, v, w$ proprium est, substitutioni inversae $S'$ systema $-t, u, v, w$ tribuendum est. Revera autem si ponis, $S$ in forma $\varphi P \psi$ et $S'$ in forma $\varphi P' \psi$ esse,

$$P \cdot P' = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

necessario esse apparet. Facile nunc demonstrare possumus, si substitutionis $P$ numeri $p, q, r, s$ proprii sunt, substitutioni $P'$ numeros $-s, q, r, -p$ tribuendos esse; quae, si formulas (3) § 4 contemplamur, ad ea, quae supra contendimus, nos adducunt.

Haud difficilius, nostra ratione adhibita, valores numerorum $t'', u'', v'', w''$, qui substitutioni $S \cdot S'$ respondent, si $t, u, v, w$ proprii sunt $S$ et $t', u', v', w'$ ad $S'$ referendi sunt, inveniri possunt. Haec ita circumscribimus:

Theorema. *Si $S$ et $S'$ duae substitutiones sunt, quibus $F$ in $F$ transformatur quibusque systemata*

$$\begin{matrix} t, & u, & v, & w \\ t', & u', & v', & w' \end{matrix}$$

*respondent, substitutio composita $S \cdot S'$ propria est systematis $t'', u'', v'', w''$, in quo*

$$t'' = tt' + duu' + d'vv' + d'ww' + e(vw' + wv') + e'(wu' + uw') + e''(uv' + vu')$$

$$u'' = tu' + ut' + a(vw' - wv') + b''(wu' - uw') + b'(uv' - vu')$$

$$v'' = tv' + vt' + b''(vw' - wv') + a'(wu' - uw') + b(uv' - vu')$$

$$w'' = tw' + wt' + b'(vw' - wv') + b(wu' - uw') + a''(uv' - vu').$$

Demonstratio: Si id quod § 3 fecimus, $S = \varphi \cdot P \cdot \psi$, $S' = \varphi \cdot P \cdot \psi$ ponimus, tunc etiam $SS' = \varphi \cdot PP' \cdot \psi$ esse consequitur.



Facile vero est intellectu, si substitutionis $P$ systema $p, q, r, s$, substitutionis $P'$ systema $p', q', r', s'$ proprium est, substitutionis $P'' = P \cdot P'$ systema

$$p'' = pp' + qr', \quad q'' = pq' + qs', \quad r'' = rp' + sr', \quad s'' = rq' + ss' \tag{1}$$

proprium esse.

Nunc habemus:

$$\left.\begin{aligned} p &= t - u\alpha' - v\beta' - w\gamma', & p' &= t' - u'\alpha' - v'\beta' - w'\gamma' \\ q &= \quad - u\alpha'' - v\beta'' - w\gamma'', & q' &= \quad - u'\alpha'' - v'\beta'' - w'\gamma'' \\ r &= \quad u\alpha + v\beta + w\gamma, & r' &= \quad u'\alpha + v'\beta + w'\gamma \\ s &= t + u\alpha' + v\beta' + w\gamma', & s' &= t' + u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et ratione habita formularum, quae in § 1 sub (5) leguntur:

$$t'' = \frac{p'' + s''}{2}.$$

$$2Du'' = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha} q'' - (p'' - s'')\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha'} - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha''} r''$$

$$2Dv'' = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \beta} q'' - (p'' - s'')\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \beta'} - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \beta''} r''$$

$$2Dw'' = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \gamma} q'' - (p'' - s'')\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \gamma'} - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \gamma''} r''$$

Sin autem ponimus

$$\left.\begin{aligned} q''\alpha - (p'' - s'')\alpha' - r''\alpha'' &= L \\ q''\beta - (p'' - s'')\beta' - \gamma''\beta'' &= M \\ q''\gamma - (p'' - s'')\gamma' - r''\gamma'' &= N \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

tunc est:

$$\left.\begin{aligned} 2Du'' &= aL + b''M + b'N \\ 2Dv'' &= b''L + a'M + bN \\ 2Dw'' &= b'L + bM + a''N \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Sin autem expressiones quantitatum $p'', q'', r'', s''$ in $t, u, v, w$, $t', u', v', w'$ quae ex combinatione formularum (1) et (2) hujus sequuntur, in (3) inscribimus, consequitur, § 1 semper adjuvante:

$$\left.\begin{aligned} L &= t\frac{\partial G}{\partial u'} + t'\frac{\partial G}{\partial u} + 2(vw' - wv')D \\ M &= t\frac{\partial G}{\partial v'} + t'\frac{\partial G}{\partial v} + 2(wu' - uw')D \\ N &= t\frac{\partial G}{\partial w'} + t'\frac{\partial G}{\partial w} + 2(uv' - vu')D \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$t'' = tt' + duu' + d'vv' + d''ww' + e(vw' + wv') + e'(uw' + wu') + e''(uv' + vu')$$

e quibus theorema nostrum satis probatur.

§ 5.

In theoria arithmetica formarum ternariarum, in quibus coefficientes sunt numeri integri, id maxime agendum est, ut substitutiones $S$, in quibus elementa sunt numeri integri, inveniamus.

Si pro $t, u, v, w$ integri aequationi

$$tt - G(u, v, w) = 1$$

sufficientes numeri eliguntur, substitutiones respondentes $S$ tales evadunt, ut elementa sint numeri integri. — Sed contrarium plerumque *non* tenet locum: integris *solis* $t, u, v, w$ tales substitutiones $S$ respondere.

Substitutiones vero illae $S$, quae numeris integris $t, u, v, w$ respondent, unum idque grave genus efficiunt, quod quanti faciendum sit, facillime intelligi potest. Hae enim, si componuntur cum finito numero aliarum substitutionum $S$, in quibus elementa sunt numeri integri, genus totum substitutionum (numerorum integrorum) gignunt, *ita* ut in hac substitutionum explicatione quaeque substitutio simul tantum appareat.

Quod theorema pro genere formarum ternariarum, quae repraesentationem zifrae admittunt, accurate demonstravimus. Nititur autem imprimis theoremate § 2 commentationis meae „de aequationibus secundi gradus indeterminatis" conscriptae.

Theses.

I. Eodem modo literis atque arte animos delectari posse.

II. Iure Spinoza mathesi (Eth. pars. I. prop. XXXVI, app.) eam vim tribuit, ut hominibus norma et regula veri in omnibus rebus indagandi sit.

III. Numeros integros simili modo atque corpora coelestia totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere.

## 6. Algebraische Notiz.

[Math. Annalen Bd. 5, S. 133—134 (1872).]

In der Algebra wird häufig von dem Satze Gebrauch gemacht: „*Wenn* $w_1, w_2, \ldots w_n$ *voneinander verschiedene gegebene Größen sind, so lassen sich in dem linearen Ausdrucke*

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n$$

*die unbestimmten Größen $x$ als ganze Zahlen stets so annehmen, daß derselbe für alle $n! = N$ verschiedenen Permutationen, die man mit $w_1, w_2, \ldots w_n$ vornehmen kann, voneinander verschiedene Werte annimmt.*"

Da von diesem Satze in den Lehrbüchern kein Beweis zu bemerken ist, so möge der folgende hier eine Stelle finden.

Man bezeichne die Differenzen von je zwei der $N$ linearen Ausdrücke, welche aus dem gegebenen mittels der $N$ Permutationen der Größen $w_1, w_2, \ldots w_n$ hervorgehen, mit

$$\begin{aligned} a &= x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n \\ b &= x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \cdots + x_n \beta_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zum Teil gleich Null sind, zum Teil die Werte $w_\lambda - w_\mu$ haben.

Dies sind $\frac{N(N-1)}{2} = \varrho$ neue lineare Ausdrücke, von welchen keiner, wie aus ihrer Entstehungsweise hervorgeht, identisch gleich Null ist und von welchen zu zeigen wäre, daß sie durch bestimmte ganzzahlige Werte der $x$ sämtlich von Null verschieden gemacht werden können; ist dies nämlich nachgewiesen, so ist damit auch gezeigt, daß die $N$ linearen Ausdrücke, von welchen wir ausgingen, voneinander verschiedene Werte bei ganzzahligen $x$ annehmen können.

Man teile die $\varrho$ Ausdrücke $a, b, c, \ldots$ folgenderweise in Gruppen:

Sei $x'$ irgend eine der Unbestimmten $x$; dann bringe man in die *erste Gruppe* sämtliche Ausdrücke (A) (und es ist einleuchtend, daß es solche gibt), in welchen $x'$ einen von Null verschiedenen Koeffizienten hat.

Sei $x''$ eine der übrigen Unbestimmten, welche zum mindesten in einem der übriggebliebenen Ausdrücke (A) mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten behaftet ist; die *zweite Gruppe* soll nun *alle* die übriggebliebenen Ausdrücke (A) aufnehmen, in welchen $x''$ in dieser Weise vorkommt.

Sei $x'''$ ein drittes $x$, welches in einem der nun übriggebliebenen Ausdrücke wirklich vorkommt; die *dritte Gruppe* enthalte *alle* diese Ausdrücke, in welchen $x'''$ einen von Null verschiedenen Koeffizienten besitzt.

In dieser Weise fahre man fort; dann gelangt man, wenn einmal auf diesem Wege die Ausdrücke (A) alle erschöpft sind, zu einer bestimmten Verteilung derselben in eine Anzahl Gruppen, welche Anzahl mit $\nu$ bezeichnet werde. Das Gruppierungsgesetz ist allgemein dieses:

*Die Ausdrücke der $\pi^{\text{ten}}$ Gruppe enthalten $x^{(\pi)}$ mit Koeffizienten, die von Null verschieden sind; dagegen enthalten sie die früheren Unbestimmten $x'$, $x''$, ... $x^{(\pi-1)}$ gar nicht oder, was dasselbe ist, mit Koeffizienten die gleich Null sind.*

Wenn die $\nu$ Unbestimmten $x', x'', \ldots x^{(\nu)}$ *nicht* sämtliche $x_1, x_2, \ldots x_n$ erschöpfen, so gebe man den übrigen irgendwelche ganzzahlige Werte.

Nun kann man $x^{(\nu)}$ ganzzahlig so bestimmen, daß die Ausdrücke der $\nu^{\text{ten}}$ Gruppe, welche ja $x', x'', \ldots x^{(\nu-1)}$ nicht enthalten, sämtlich von Null verschieden ausfallen; man hat zu dem Ende $x^{(\nu)}$ ganzzahlig so groß zu nehmen, daß in allen Ausdrücken dieser Gruppe das $x^{(\nu)}$ enthaltende Glied die bekannte Summe der übrigen numerisch überwiegt.

Alsdann kann man ebenso $x^{(\nu-1)}$ ganzzahlig so nehmen, daß die Ausdrücke der $\nu - 1^{\text{ten}}$ Gruppe von Null verschieden ausfallen usw. Zuletzt wird $x'$ ganzzahlig so gewählt, daß die Ausdrücke der ersten Gruppe alle von Null verschieden werden.

Damit sind nun für $x_1, x_2, \ldots x_n$ ganzzahlige Werte gewonnen, für welche die Ausdrücke (A) sämtlich von Null verschieden und die Ausdrücke, welche aus

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n$$

durch die $N$ Permutationen der Größen $w$ hervorgehen, *voneinander verschieden* ausfallen.

# 7. Zur Theorie der zahlentheoretischen Funktionen.

[Math. Annalen Bd. 16, S. 583–588 (1880).]

Eine kürzlich von Herrn R. Lipschitz in den C. R. der Pariser Akademie (8. Dez. 1879) veröffentlichte Notiz über die Sätze

$$\sum_n f(n)\, n^{-s} = (\zeta(s))^2 \tag{1}$$

$$\sum_n g(n)\, n^{-s} = \zeta(s)\, \zeta(s-1) \tag{2}$$

$$\sum_n \varphi(n)\, n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \tag{3}$$

(wo $\zeta(s) = \sum_n n^{-s}$, $f(n)$ die Anzahl der Divisoren von $n$, $g(n)$ die Summe derselben, $\varphi(n)$ die Anzahl der Zahlen ist, welche rel. prim zu $n$ und kleiner als $n$ sind; wo in den Summen der Buchstabe $n$, wie auch im folgenden die Buchstaben $\nu, \mu, \nu_0, \nu_1, \ldots$ usw. alle positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen haben, wenn nicht Besonderes über sie bestimmt wird),
brachte mir eine Untersuchung wieder in Erinnerung, welche ich vor einer längeren Reihe von Jahren unter dem Eindrucke der Arbeit Riemanns: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe (Monatsb. d. Berl. Akad. Nov. 1859) ausgeführt und in welcher ich nicht nur *jene*, sondern auch noch *allgemeinere* Sätze entwickelt und *Folgerungen* aus ihnen gezogen habe, wovon ich hier einiges mitteilen möchte.

Die oben angeführten Sätze und alle desselben Charakters beruhen auf der von Lejeune Dirichlet häufig gebrauchten Eulerschen Identität:

$$\prod_p \sum_\alpha \psi(p^\alpha)\, p^{-\alpha s} = \sum_n \psi(n) \cdot n^{-s}, \tag{4}$$

wo der Buchstabe $\alpha$ die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ zu durchlaufen hat, während in dem Produkte der Buchstabe $p$ alle Primzahlwerte $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ erhält; es bedeutet $\psi(n)$ *irgend* eine Funktion von $n$, welche der Funktionalgleichung

$$\psi(m)\, \psi(n) = \psi(m n) \tag{5}$$

genügt, wenn $m$ und $n$ relativ prim zueinander sind.

Unter $\eta(n)$ verstehen wir im folgenden diejenige zahlentheoretische Funktion, welche, wenn $n$ durch *kein* von 1 verschiedenes Quadrat teilbar ist, die Werte $+1$ oder $-1$ erhält, je nachdem die Anzahl der in $n$ aufgehenden Primzahlen gerade oder ungerade ist; in den übrigen Fällen hat $\eta(n)$ den Wert 0. [Es handelt sich um die sonst mit $\mu(n)$ bezeichnete „Möbiussche Funktion".] Man hat alsdann

$$\sum_n \eta(n)\, n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)}. \tag{6}$$

Die Gleichung (3) läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\sum_\mu \mu^{-s} \cdot \sum_\nu \varphi(\nu)\, \nu^{-s} = \sum_n n \cdot n^{-s}$$

und ergibt, wenn beide Seiten verglichen werden, den bekannten Satz:

$$\sum_\nu \varphi(\nu) = n, \tag{7}$$

wo die Summation über alle Zahlen $\nu$ auszudehnen ist, welcher der Gleichung $\nu\mu = n$ genügen, d. h. über alle Divisoren $\nu$ von $n$.

Multipliziert man aber die aus (3) fließenden $\varrho$ Gleichungen

$$\sum_{\nu_0} \varphi(\nu_0)\, \nu_0^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}; \qquad \sum_{\nu_1} \varphi(\nu_1)\, \nu_1^{-(s+1)} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)}; \ldots$$

$$\sum_{\nu_{\varrho-1}} \varphi(\nu_{\varrho-1})\, \nu_{\varrho-1}^{-(s+\varrho-1)} = \frac{\zeta(s+\varrho-2)}{\zeta(s+\varrho-1)}$$

ineinander und mit der Gleichung

$$\sum_{\nu_\varrho} \nu_\varrho^{-(s+\varrho-1)} = \zeta(s+\varrho-1),$$

so erhält man [aus dem $n^{\text{ten}}$ Gliede der Entwicklung von $\zeta(s-1)$ mit dem Faktor $n^{s+\varrho-1}$] den allgemeinen Satz:

$$\sum_{\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_{\varrho-1}} \nu_0^{\varrho-1}\, \nu_1^{\varrho-2} \cdots \nu_{\varrho-3}^2\, \nu_{\varrho-2}^1\, \varphi(\nu_0)\, \varphi(\nu_1) \cdots \varphi(\nu_{\varrho-1}) = n^\varrho. \tag{8}$$

Hier ist die Summe auszudehnen über alle verschiedenen Lösungen $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_\varrho$ der Gleichung:

$$\nu_0\, \nu_1\, \nu_2 \cdots \nu_{\varrho-1}\, \nu_\varrho = n.$$

Daß dieser Satz (8) auch auf rein zahlentheoretischem Wege als eine Folge von (7) (freilich nicht durch Potenzierung) abgeleitet werden kann, geht schon aus dem *bekannten* Umstande hervor, daß der Satz (7) für die Funktion $\varphi(n)$ *bestimmend* ist, indem *nur* $\varphi(n)$ dieser Gleichung genügt [1].

Ist $f_{\varrho-1}(n)$ die *Anzahl* jener Lösungen, so genügt $f_{\varrho-1}(n)$ der Funktionalgleichung (5), und wenn $p$ eine Primzahl ist, so hat man:

$$f_{\varrho-1}(p^\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\varrho)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\varrho}. \tag{9}$$



Daraus folgt unter Anwendung von (4)

$$\sum_n f_{\varrho-1}(n)\, n^{-s} = (\zeta(s))^{\varrho+1}. \tag{10}$$

Im engen Zusammenhange mit $f_{\varrho-1}(n)$, [welche für $\varrho = 1$ in $f_0(n) = f(n)$ übergeht], steht eine Funktion $\Theta_{\varrho-1}(n)$, die auch der Funktionalgleichung (5) unterworfen ist und für welche, wenn $p$ eine Primzahl ist,

$$\Theta_{\varrho-1}(p^\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\varrho) - (\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-\varrho)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\varrho}. \tag{11}$$

Man erhält bei Anwendung von (4)

$$\sum_n \Theta_{\varrho-1}(n)\, n^{-s} = \frac{(\zeta(s))^{\varrho+1}}{\zeta((\varrho+1)s)}, \tag{12}$$

und es ergeben sich nun aus (6), (10) und (12) leicht die Sätze:

$$\sum_\nu f_{\varrho-2}(\nu) \quad = f_{\varrho-1}(n); \ \ldots \{\nu\mu \quad = n\}. \tag{13}$$

$$\sum_\nu \Theta_{\varrho-1}(\nu) \quad = f_{\varrho-1}(n); \ \ldots \{\nu\mu^{\varrho+1} = n\}. \tag{14}$$

$$\sum_{\nu,\mu} \eta(\mu)\, f_{\varrho-1}(\nu) = \Theta_{\varrho-1}(n); \ldots \{\nu\mu^{\varrho+1} = n\}. \tag{15}$$

Wir haben hier neben jede dieser Formeln in Klammer $\{\ldots\}$ die Gleichung gesetzt, welcher in der betreffenden Summe die Buchstaben $\nu, \mu$ unterworfen sind.

Im besonderen erhält man aus diesen Sätzen folgende Resultate:

$$\text{es ist} \quad \Theta_0(p^\alpha) = 2; \qquad \Theta_1(p^\alpha) = 3\,\alpha; \qquad \Theta_2(p^\alpha) = 2\,(\alpha^2+1);$$

$$\Theta_3(p^\alpha) = \frac{5}{6}\,\alpha(\alpha^2+5);$$

versteht man daher, wenn $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$, unter $\tilde\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primzahlen $p, q, r, \ldots$, unter $\bar\varkappa(n)$ das Produkt $\alpha\beta\gamma\ldots$, unter $\lambda(n)$ das Produkt $(\alpha^2+1)\ (\beta^2+1)\ldots$; unter $\lambda_1(n)$ das Produkt $(\alpha^2+5)(\beta^2+5)\ldots$, $\varkappa(1) = 1$, $\lambda(1) = \lambda_1(1) = 1$, so hat man:

$$f(n) = \sum_\nu 2^{\tilde\omega(\nu)} \qquad \ldots \{\nu\mu^2 = n\}. \tag{16}$$

$$f_1(n) = \sum_\nu 3^{\tilde\omega(\nu)}\, \varkappa(\nu) \qquad \ldots \{\nu\mu^3 = n\}. \tag{17}$$

$$f_2(n) = \sum_\nu 2^{\tilde\omega(\nu)}\, \lambda(\nu) \qquad \ldots \{\nu\mu^4 = n\}. \tag{18}$$

$$f_3(n) = \sum_\nu \left(\frac{5}{6}\right)^{\tilde\omega(\nu)} \varkappa(\nu)\, \lambda_1(\nu) \ldots \{\nu\mu^5 = n\}. \tag{19}$$

Durch Vergleichung der Formeln (1), (2), (3), (10) ergeben sich noch die Sätze:

$$g(n) = \sum_{\nu,\mu} \varphi(\nu) f(\mu); \; \ldots \{\nu\mu = n\}. \tag{20}$$

$$n f(n) = \sum_{\nu,\mu} \varphi(\nu) g(\mu); \ldots \{\nu\mu = n\}. \tag{21}$$

$$\sum_{\nu,\mu} f(\nu) g(\mu) = \sum_{\mu,\nu} \mu f_1(\nu); \quad \ldots \{\nu\mu = n\}. \tag{22}$$

Bei Anwendung der Formel (4) findet man noch folgende Sätze:

$$\sum_n \varkappa(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}, \tag{23}$$

$$\sum_n \varrho(n) n^{-s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}, \tag{24}$$

$$\sum_n \sigma(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s)}{\zeta(3s)}, \tag{25}$$

wo, wenn $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ gesetzt wird, $\varrho(n) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$ wird und

$$\sigma(n) = \frac{3+(-1)^\alpha}{2} \cdot \frac{3+(-1)^\beta}{2} \cdot \frac{3+(-1)^\gamma}{2} \cdots; \; \varrho(1) = \sigma(1) = 1.$$

Zu diesen Formeln könnten wir noch manche anderen hinzufügen, welche sich aus demselben Prinzipe ergeben und verschiedene Folgerungen zulassen; es würde dies jedoch hier zu weit führen.

Um die hier vorkommenden zahlentheoretischen Funktionen $\varphi(n)$, $f(n)$, $g(n)$, $\eta(n)$, usw. ... in *analytische* Formen zu bringen, bedienen wir uns einer Methode, welche derjenigen verwandt ist, welche Lejeune Dirichlet, Riemann und Kronecker (vgl. Monatsb. d. Berl. Akad. Febr. 1838, Nov. 1859 und Jan. 1878) in ähnlichen Fällen gebraucht haben[1].

Sei $\psi(n)$ irgend eine zahlentheoretische Funktion der ganzen, positiven Zahl $n$, welche nur die Bedingung erfüllt, daß die unendliche Reihe

$$\sum_n \psi(n) n^{-s} = F(s) \tag{26}$$

für solche komplexe Werte von $s = u + vi$, in welchen $u$ positiv ist und eine angebbare Grenze überschreitet, absolut konvergiert. Sei $\sigma$ ein reeller positiver, im folgenden als *konstant* gebrauchter Wert von $s$, für welchen jene Bedingung erfüllt ist, so daß sicher die Reihe

$$F(\sigma + s) = \sum_n \psi(n) n^{-\sigma} \cdot n^{-s} \tag{27}$$

[1] Man vergleiche noch Dirichlet: Über die Best. d. mittleren Werte usw. Abh. Berl. Akad. **1849**; ferner Dirichlet: Sur l'usage etc. Crelles J. Math. **18** u. Recherches etc. Crelles J. f. Math. **19** u. **21**.



für alle Werte von $s = u + vi$, in welchen $u$ *nicht* negativ ist, absolut konvergiert.

Wir betrachten die Funktion $F(s)$ für die Werte von $s$, für welche die Reihe (26) konvergiert, als *bekannt*, was beispielsweise für die Annahmen $\psi(n) = f(n), g(n), \varphi(n), \varkappa(n)$ durch die Sätze (1), (2), (3), (23) erfüllt ist, und suchen aus $F(s)$ einen Ausdruck für $\psi(n)$ zu gewinnen.

Zu dem Ende führen wir hilfsweise eine Funktion $G(x)$ durch die für alle Werte von $x$, deren reeller Teil nicht negativ ist, *absolut* und gleichmäßig konvergente Reihe ein

$$G(x) = \sum_n \psi(n) n^{-\sigma} e^{-nx}. \tag{28}$$

Es ist bekanntlich, unter $\Gamma(s)$ die bekannte Euler-Legendresche Funktion verstanden:

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx,$$

und daher

$$F(\sigma + s) \cdot \Gamma(s) = \int_0^\infty G(x) x^{s-1} dx.$$

Setzt man hierin $x = e^y$, $s = u + vi$, wo $u \geqq 0$, so kommt:

$$F(\sigma + s) \cdot \Gamma(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(e^y) e^{y(u+vi)} dy.$$

Diese Gleichung werde mit $\frac{1}{2\pi} e^{-iv\eta} dv$ multipliziert und nach $v$ in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integriert. Unter Anwendung der bekannten Fourierschen Formel

$$f(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iv(y-\eta)} dy$$

auf die Funktion $f(\eta) = G(e^\eta) \cdot e^{\eta u}$ erhält man:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + s) \Gamma(s) e^{-iv\eta} dv = G(e^\eta) e^{\eta u},$$

und wenn man in dieser Gleichung $\eta$ durch $y = \log x$ ersetzt,

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + s) \Gamma(s) \cdot x^{-s} dv. \tag{30}$$

Durch diesen Ausdruck ist die Funktion $G(x)$ auf die als bekannt vorausgesetzte Funktion $F(s)$ allerdings, wie aus der Ableitung hervorgeht, zunächst nur für *reelle* positive Werte von $x$ zurückgeführt; man ist aber nach den bekannten neueren analytischen Fortsetzungsmethoden imstande, daraus die Funktion $G(x)$ auch für die übrigen Werte von $x$ auszudrücken.

Betrachten wir daher $G(x)$ für rein imaginäre Werte von $x$ als bekannt und setzen $x = ti$, so folgt nach geläufiger Weise aus (28):

$$\psi(n) = \frac{n^\sigma}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} G(ti)\, e^{nti}\, dt. \tag{31}$$

Auf eine umformende Behandlung dieser Formeln (30) und (31) möchte ich bei einer späteren Gelegenheit eingehen, wo es sich zeigen wird, wie dieselben zur Bestimmung der asymptotischen Gesetze der betreffenden zahlentheoretischen Funktionen $\psi(n)$ dienen können [2].

**[Anmerkungen.]**

[1] Zu S. 66. Die in bezug auf die Herleitung des Satzes (8) gemachte Bemerkung ist wohl nicht überzeugend.

[2] Zu S. 70. Die in der Schlußbemerkung vom Verfasser geäußerte Absicht ist augenscheinlich unausgeführt geblieben; wenigstens hat Cantor über den Gegenstand nichts Weiteres publiziert.

# II. Abhandlungen zur Funktionentheorie.

## 1. Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz.

[Crelles Journal f. Mathematik Bd. 72, S. 130—138 (1870).]

Zu den folgenden Arbeiten bin ich durch Herrn Heine angeregt worden. Derselbe hat die Güte gehabt, mich mit seinen Untersuchungen über trigonometrische Reihen frühzeitig bekannt zu machen. Aus dem Versuche, seine Resultate in der Richtung zu erweitern, daß jedwede Voraussetzung über die *Art* der Konvergenz bei den auftretenden Reihen vermieden wird, sind beide hervorgegangen.

Riemanns Forschungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen sind in der Abhandlung „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Göttingen 1867“ bekannt geworden.

Dieselben beziehen sich zunächst in den §§ 7—10 auf Reihen, in welchen die Koeffizienten unendlich klein werden; die übrigen Reihen werden alsdann, wenn nur Konvergenz für einen Wert der Veränderlichen vorhanden ist, auf jene zurückgeführt.

Ich will im folgenden den Satz beweisen:

„Wenn zwei unendliche Größenreihen: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ so beschaffen sind, daß die Grenze von

$$a_n \sin nx + b_n \cos nx$$

für jeden Wert von $x$, der in einem gegebenen Intervalle $(a < x < b)$ des reellen Größengebietes liegt, mit wachsendem $n$ gleich Null ist, so konvergiert sowohl $a_n$ wie $b_n$ mit wachsendem $n$ gegen die Grenze Null.“

Wird dieser Satz auf die trigonometrischen Reihen angewandt, so gibt er die Einsicht, daß eine derartige Reihe

$$\tfrac{1}{2} b_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \cdots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \cdots$$

nur dann für alle Werte von $x$ in einem gegebenen Intervalle $(a < x < b)$ des reellen Größengebietes konvergieren kann, wenn die Koeffizienten $a_n, b_n$ mit wachsendem $n$ unendlich klein werden.

Diese Tatsache ist, wie aus mehreren Stellen der oben zitierten Abhandlung hervorgeht, Riemann bekannt gewesen; es scheint jedoch, daß er sie nur im Hinblicke auf diejenigen Fälle bewiesen hat, wo die Koeffizienten $a_n$, $b_n$ in der Form der Integralausdrücke

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\,dt, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

vorausgesetzt werden können.

§. 1.

Ich schicke das Lemma voraus:

„Hat man eine unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen

$$(R.)\quad u,\ v,\ w,\ x,\ \ldots$$

von der Beschaffenheit, daß

$$v > 4u,\quad w > 8v,\quad x > 16w,\ \ldots,$$

so gibt es eine Zahlengröße $\Omega$, welche die Eigenschaft hat, daß das Produkt $n\Omega$, wenn man für $n$ eine der Zahlen $(R.)$ setzt, die Form hat

$$n\Omega = 2z_n + 1 \pm \Theta_n,$$

wo $z_n$ eine vom Index $n$ abhängende positive ganze Zahl und $\Theta_n$ eine zu $n$ gehörige positive Größe ist, welche unendlich klein wird, wenn man $n$ in der Zahlenreihe $(R.)$ ins Unendliche fortschreiten läßt."

Beweis. Ich bestimme auf Grundlage der Reihe $(R.)$ eine neue Reihe $(S.)$ von ungeraden ganzen Zahlen

$$(S.)\quad 2g+1,\quad 2h+1,\quad 2i+1,\ \ldots$$

nach folgendem Gesetze:

$2g+1$ werde bestimmt durch die Bedingung, daß

$$2g+1-\frac{v}{u}$$

dem absoluten Werte nach kleiner oder gleich 1 sei.

Falls in dieser Bestimmung eine Zweideutigkeit enthalten ist, entscheide man sich für die kleinere der beiden ihr genügenden ungeraden Zahlen. Wenn $2g+1$ bestimmt ist, so wird $2h+1$ durch die Bedingung: $2h+1-(2g+1)\frac{w}{v}$ dem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich 1 bestimmt, wobei man sich im Falle der Zweideutigkeit wie im ersten Falle zu verhalten hat.

Analog werde die dritte Zahl $2i+1$ bestimmt durch die Bedingung:

$$\left|2i+1-(2h+1)\frac{x}{w}\right| \leqq 1$$

und ebenso alle folgenden Zahlen der Reihe $(S.)$.



Man bilde aus $(R.)$ und $(S.)$ die unendliche Reihe rationaler Brüche

$$(N.)\quad \frac{1}{u},\quad \frac{2g+1}{v},\quad \frac{2h+1}{w},\quad \frac{2i+1}{x},\ \ldots.$$

Diese Brüche nähern sich einer festen von Null verschiedenen Grenze, einer Zahlengröße, welche ich mit $\Omega$ bezeichnen will.

Um dies zu sehen, bemerke man, daß, der Entstehungsweise der Reihe $(S.)$ zufolge, die nachstehenden Ungleichheiten Geltung haben:

$$\left|\frac{1}{u}-\frac{2g+1}{v}\right| \leqq \frac{1}{v},\qquad \left|\frac{2g+1}{v}-\frac{2h+1}{w}\right| \leqq \frac{1}{w},\ \ldots.$$

Mithin ist die Differenz des ersten und irgend eines folgenden Bruches der Reihe $(N.)$ nicht größer als die Summe

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\cdots \text{ in infinitum;}$$

ebenso ist die Differenz des zweiten und irgend eines folgenden Bruches nicht größer als die Summe

$$\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\cdots \text{ in infinitum;}$$

und das ähnliche gilt für die Differenzen der übrigen Brüche in der Reihe $(N.)$.

Da die Reihe $\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\cdots$, wegen der Bedingungen, denen die Zahlen $(R.)$ unterworfen sind, konvergiert, so folgt hieraus, daß die Differenz zweier Brüche $(N.)$, wenn dieselben beliebig in der Reihe $(N.)$ stets weiter ins Unendliche rücken, unendlich klein wird, was die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß sich die Brüche $(N.)$ einer festen Grenze $\Omega$ nähern.

Diese Zahlengröße $\Omega$ ist von Null verschieden; denn sie unterscheidet sich nach dem Gesagten von dem ersten Näherungsbruche $\frac{1}{u}$ höchstens um die Summe

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\cdots;$$

die letztere ist aber kleiner als $\frac{1}{v}\left(1+\frac{1}{8}+\cdots\right)$, d. h. kleiner als $\frac{5}{4v}$, also auch kleiner als $\frac{5}{16u}$; es liegt daher $\Omega$ in den Grenzen

$$\frac{11}{16u} \quad\text{und}\quad \frac{21}{16u}.$$

Es ist nun nicht schwer einzusehen, daß $\Omega$ die im Lemma ausgesagten Eigenschaften hat, wenn man

$$z_u = 0,\quad z_v = g,\quad z_w = h,\quad z_x = i,\ \ldots$$

nimmt. Man hat nämlich

$$\left|\Omega-\frac{1}{u}\right| \leqq \frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\cdots, \quad \text{also} \quad |\Omega u-1|<\tfrac{1}{2};$$

ferner

$$\left|\Omega-\frac{2g+1}{v}\right| \leqq \frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\cdots, \quad \text{also} \quad |\Omega v-2g-1|<\tfrac{1}{4};$$

ebenso ist

$$|\Omega w-2h-1|<\tfrac{1}{8} \text{ usw.}$$

Es nehmen also die Differenzen

$$u\Omega-2z_u-1, \quad v\Omega-2z_v-1, \quad w\Omega-2z_w-1, \ldots,$$

welche ich mit

$$\pm\Theta_u, \quad \pm\Theta_v, \quad \pm\Theta_w, \ \ldots$$

bezeichnet habe, schneller ab als die Brüche

$$\tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{8}, \ \ldots.$$

Dies war zu beweisen.

## § 2.

„Die Zahlengröße $\Omega$ kann durch eine Modifikation des für sie festgestellten Entstehungsgesetzes so bestimmt werden, daß sie in ein gegebenes Intervall des reellen Größengebietes zu liegen kommt.“

Ist das Intervall von 0 bis 2 in $2\nu$ gleiche Intervalle geteilt und soll $\Omega$ in das $\mu^{\text{te}}$ von ihnen fallen, so befolge man nachstehende Regel:

Man benutze die Reihe $(R.)$ erst von demjenigen Gliede an, welches größer ist als $6\nu$; setzen wir der Kürze wegen voraus, daß schon $u>6\nu$, so bestimme man die ungerade Zahl $2f+1$ so, daß der Bruch $\frac{2f+1}{u}$ in den Grenzen $\frac{3\mu-2}{3\nu}$ und $\frac{3\mu-1}{3\nu}$ liege; die ungeraden Zahlen $2g+1$, $2h+1, \ldots$ haben in ähnlichem Sinne wie oben den Bedingungen

$$\left|2g+1-(2f+1)\frac{v}{u}\right| \leqq 1,$$
$$\left|2h+1-(2g+1)\frac{w}{v}\right| \leqq 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

zu genügen, so daß man hat:

$$\left|\frac{2f+1}{u}-\frac{2g+1}{v}\right| \leqq \frac{1}{v},$$
$$\left|\frac{2g+1}{v}-\frac{2h+1}{w}\right| \leqq \frac{1}{w},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$



Es fällt alsdann die Grenze $\Omega$, welcher die Näherungsbrüche

$$\frac{2f+1}{u}, \quad \frac{2g+1}{v}, \quad \frac{2h+1}{w}, \ \ldots$$

zustreben, zwischen $\frac{2f+1}{u}-\frac{5}{16u}$ und $\frac{2f+1}{u}+\frac{5}{16u}$, mithin auch wegen der Bestimmungen, die wir für $2f+1$ und $u$ getroffen haben, zwischen

$$\frac{3\mu-2}{3\nu}-\frac{5}{6\cdot16\cdot\nu} \quad \text{und} \quad \frac{3\mu-1}{3\nu}+\frac{5}{6\cdot16\cdot\nu}$$

und um wie vielmehr zwischen

$$\frac{\mu-1}{\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{\nu}.$$

Die Zahlengröße $\Omega$ hat auch hier die im Lemma ausgesagten Eigenschaften, wenn man

$$z_u=f, \quad z_v=g, \quad z_w=h, \ \ldots$$

nimmt.

## § 3.

Wenn ich von einer unendlichen Größenreihe

$$(G.) \qquad \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_n, \ldots$$

sage, daß $\lim \varrho_n=0$, so verstehe ich darunter, daß, wenn $\delta$ eine beliebig gegebene Größe $>0$ ist, man aus der Reihe $(G.)$ eine endliche Anzahl von Gliedern aussondern kann, so daß die übriggebliebenen sämtlich kleiner sind als $\delta$.

In dieser Definition liegt, daß, wenn $\lim \varrho_n=0$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ irgend eine aus der Reihe der positiven ganzen Zahlen ausgehobene unendliche Zahlenreihe ist, in der Größenreihe

$$(G'.) \qquad \varrho_\alpha, \varrho_\beta, \varrho_\gamma, \ \ldots$$

Glieder gefunden werden können, welche kleiner sind als eine beliebig gegebene Größe $\delta$.

Es ist folgenreich, daß dieser Ausspruch sich durch den Satz umkehren läßt:

„Ist eine unendliche Größenreihe $(G.)$ gegeben und weiß man, daß in jeder aus $(G.)$ gehobenen unendlichen Größenreihe $(G'.)$ Glieder gefunden werden können, welche kleiner sind als eine willkürlich gegebene Größe $\delta$, so ist $\lim \varrho_n=0$.“

Beweis. Sei $\Delta', \Delta'', \ldots$ eine beliebige Reihe beständig abnehmender, unendlich klein werdender Größen, z. B. die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Man hebe aus der Reihe $(G.)$ zuerst diejenigen Glieder aus, welche größer als $\Delta'$, dann von den übriggebliebenen diejenigen, welche größer sind als

$\Delta''$, usw.; bei keiner von diesen Operationen gelangt man zum Ausheben unendlich vieler Glieder, weil sonst eine unendliche Reihe $(G'.)$ vorhanden wäre, deren Glieder sämtlich größer sind als eine von Null verschiedene Größe $\Delta^{(\nu)}$, was gegen die Voraussetzung ist; die Größenreihe $(G.)$ ist also von der Beschaffenheit, daß, bei beliebig klein gegebener Größe $\Delta^{(\nu)}$ eine endliche Anzahl von Gliedern aus derselben ausgesondert werden kann, so daß die übrig bleibenden sämtlich kleiner sind als $\Delta^{(\nu)}$; es ist also $\lim \varrho_n = 0$.

Daraus ergibt sich als Korollar folgendes:

„Ist eine unendliche Größenreihe $(G.)$ gegeben und kann man aus jeder aus $(G.)$ gehobenen Größenreihe $(G.)'$ eine neue Größenreihe

$$(G''.) \quad \varrho_u, \varrho_v, \varrho_w, \dots$$

ausheben, in welcher die Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden, so ist

$$\lim \varrho_n = 0.\text{“} \ [1]$$

§. 4.

**Lehrsatz:** „Wenn für jeden reellen Wert von $x$ zwischen gegebenen Grenzen $(a < x < b)$

$$\lim (a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0,$$

so ist sowohl

$$\lim a_n = 0 \quad \text{wie} \quad \lim b_n = 0.\text{“}$$

**Beweis.** Wir wollen $a_n \sin nx + b_n \cos nx$ in die Form bringen $\varrho_n \cos(\varphi_n - nx)$, wo $\varrho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und $\varphi_n$ der zwischen 0 und $2\pi$ liegende Bogen sei, dessen Sinus gleich $\frac{a_n}{\varrho_n}$, dessen Kosinus gleich $\frac{b_n}{\varrho_n}$ ist; es ist bei dieser Bezeichnung nur zu zeigen, daß $\lim \varrho_n = 0$, um alsdann unmittelbar schließen zu können, daß $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$.

Wir bezeichnen die Reihe $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n, \dots$ mit $(G.)$. Sei

$$(G'.) \quad \varrho_\alpha, \varrho_\beta, \dots$$

irgend eine aus $(G.)$ gehobene unendliche Reihe; dann will ich zeigen, daß sich aus $(G'.)$ eine unendliche Reihe

$$(G''.) \quad \varrho_u, \varrho_v, \varrho_w, \dots$$

ausheben läßt, deren Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Betrachten wir zu dem Ende die unendliche Reihe

$$(1.) \quad \varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\gamma, \dots;$$

es muß, da die Glieder derselben alle zwischen 0 und $2\pi$ liegen, ein Intervall von der Größe $\frac{\pi}{4}$ angegeben werden können, innerhalb dessen unendlich viele Glieder der Reihe (1.) liegen.



Um die Ideen zu fixieren, sei $\left(\Phi \leqq \varphi \leqq \Phi + \frac{\pi}{4}\right)$ ein solches Intervall, (wo also $\Phi$ eine bestimmte zwischen 0 und $\frac{7\pi}{4}$ gelegene Größe ist) und sei

$$(2.) \quad \varphi_{\alpha'}, \varphi_{\beta'}, \varphi_{\gamma'}, \dots$$

eine aus (1.) gehobene unendliche Größenreihe, deren Glieder sämtlich in diesem Intervalle liegen.

Aus der Zahlenreihe

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots$$

hebe ich eine unendliche Zahlenreihe

$$(R.) \quad u, v, w, \dots$$

aus, welche den Bedingungen des Lemmas im § 1 entspricht, und bei welcher außerdem $u$ so groß genommen ist, daß man die im § 2 definierte Zahlengröße $\Omega$ in das Intervall $\left(\frac{a}{\pi} \cdots \frac{b}{\pi}\right)$, mithin auch in das größere $\left(\frac{2a}{\pi} \cdots \frac{2b}{\pi}\right)$ verlegen kann. Die unendliche Größenreihe

$$(G''.) \quad \varrho_u, \varrho_v, \varrho_w, \dots,$$

welche offenbar aus $(G'.)$ gehoben ist, ist es nun, von welcher ich nachweisen werde, daß ihre Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Vorerst hebe ich hervor, daß die Glieder der mit $(G''.)$ parallel laufenden Reihe

$$(F.) \quad \varphi_u, \varphi_v, \varphi_w, \dots$$

in dem Intervalle $\left(\Phi \cdots \Phi + \frac{\pi}{4}\right)$ enthalten sind, und unterscheide die beiden Fälle, daß dieses Intervall eine der beiden Größen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ enthält oder keine von ihnen enthält.

Erster Fall.

I. In dem Intervalle $\left(\Phi \cdots \Phi + \frac{\pi}{4}\right)$ liegt weder $\frac{\pi}{2}$ noch $\frac{3\pi}{2}$. Ich kann eine von Null verschiedene Größe $\varepsilon$ angeben, so daß $\cos\varphi$ seinem absoluten Werte nach größer als $\varepsilon$ ist für jeden Wert von $\varphi$ im Intervalle $\left(\Phi \cdots \Phi + \frac{\pi}{4}\right)$.

Man bestimme nach den Vorschriften des § 2 eine Zahlengröße $\Omega$ so beschaffen, daß

1. $\Omega$ zwischen $\frac{a}{\pi}$ und $\frac{b}{\pi}$ zu liegen kommt,

2. $\Omega n - (2z_n + 1) = \pm \Theta_n$ unendlich klein wird, wenn man für $n$ die steigenden Zahlen der Reihe $(R.)$ setzt.

Setzt man in der mit den Reihen $(G''.)$ und $(F.)$ parallel laufenden Reihe

$$(P.) \qquad \varrho_u \cos(\varphi_u - ux), \quad \varrho_v \cos(\varphi_v - vx), \quad \varrho_w \cos(\varphi_w - wx), \ \ldots$$

$x = \pi\Omega$, so ist klar, daß die Kosinusse der Reihe $(P.)$, von einem gewissen Index an, sämtlich ihrem absoluten Werte nach größer sind als $\frac{\varepsilon}{2}$. [Denn für diese Werte $n = u, v, w, \ldots$ wird sich der Kosinus von

$$\varphi_n - nx = \varphi_n - n\pi\Omega = \varphi_n - (2z_n + 1)\pi \mp \Theta_n \pi$$

von $\cos\varphi_n$ selbst mit wachsendem $n$ beliebig wenig unterscheiden.]

Die Glieder selbst der Reihe $(P.)$ werden der Voraussetzung gemäß, welche im Theorem liegt, für jeden Wert von $x$ in den Grenzen $a$ und $b$, mithin auch für $x = \pi\Omega$, mit wachsendem Index unendlich klein; daraus folgt, daß die Glieder der Reihe $(G''.)$ mit wachsendem Index unendlich klein werden.

## Zweiter Fall.

II. In dem Intervalle $\left(\Phi \cdots \Phi + \frac{\pi}{4}\right)$ liegt entweder $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$; dann liegt in dem Intervalle $\left(\Phi + \frac{\pi}{2} \cdots \Phi + \frac{3\pi}{4}\right)$ kein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, und ich kann eine von Null verschiedene Größe $\varepsilon'$ angeben, so daß $\cos\varphi$ seinem absoluten Betrage nach größer ist als $\varepsilon'$ für jeden Wert von $\varphi$ im Intervalle $\left(\Phi + \frac{\pi}{2} \cdots \Phi + \frac{3\pi}{4}\right)$.

Man bestimme nach den Vorschriften des § 2 eine Zahlengröße $\Omega$, so beschaffen, daß

1. $\Omega$ zwischen $\frac{2a}{\pi}$ und $\frac{2b}{\pi}$ zu liegen kommt,

2. $\Omega n - (2z_n + 1) = \pm\Theta_n$ unendlich klein wird, wenn man für $n$ die steigenden Zahlen der Reihe $(R.)$ setzt.

Setzt man in der Reihe:

$$(P.) \qquad \varrho_u \cos(\varphi_u - ux), \quad \varrho_v \cos(\varphi_v - vx), \ \ldots$$

$x = \frac{\pi}{2}\Omega$, so ist klar, daß die Kosinusse in derselben, von einem gewissen Index an, sämtlich ihrem absoluten Werte nach größer sind als $\frac{\varepsilon'}{2}$.

Von den Gliedern selbst der Reihe $(P.)$ gilt das nämliche wie unter I.; sie werden mit wachsendem Stellenzeiger für jeden Wert von $x$ in den Grenzen $a$ und $b$, mithin auch für $x = \frac{\pi}{2}\Omega$ unendlich klein; es folgt also auch in diesem Falle, daß die Glieder der Reihe $(G''.)$ mit wachsendem Index unendlich klein werden.



Wir haben somit gezeigt, daß, wenn $(G.')$ irgend eine aus $(G.)$ ausgehobene unendliche Reihe ist, man aus dieser eine Reihe $(G''.)$ ausheben kann, deren Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Dem Korollar des § 3 zufolge reicht dies aus, um schließen zu können:

$$\lim \varrho_n = 0.$$

**[Anmerkungen.]**

Mit dieser Abhandlung beginnen die Untersuchungen Cantors über die Theorie der trigonometrischen Reihen, die sich fast unmittelbar an die Riemannschen anschließen. Der hier bewiesene (und später in II, 4 wieder aufgenommene) Satz ist von unmittelbarem Interesse, wenn er auch ursprünglich wohl nur bestimmt war, dem Eindeutigkeitstheorem II, 2 als Grundlage zu dienen, hierfür aber, wie nachher in II, 3 gezeigt wird, doch schließlich entbehrt werden konnte. Der in der ersten Darstellung etwas umständliche Beweis des Satzes wurde im folgendem Jahre in erneuter Bearbeitung (II, 4) unter Beibehaltung des Grundgedankens wesentlich vereinfacht und übersichtlicher gestaltet. Beidemal handelt es sich um die Konstruktion eines im vorgelegten Intervall enthaltenen Argumentwertes $x$ von der Beschaffenheit, daß der trigonometrische Faktor $\cos(\varphi_n - nx)$ des $n^{\text{ten}}$ Gliedes für unendlich viele $n$ oberhalb einer festen Grenze bleibt, der Zahlenfaktor $\varrho_n$ also für diese Indizes nach Null konvergieren muß.

[1] Zu S. 76. Im wesentlichen handelt es sich hier um den folgenden Satz: Eine unendliche (beschränkte) Zahlenmenge, welche nur einen einzigen Häufungswert (Null) besitzt, konvergiert gegen diesen.

## 2. Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von $x$ durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt.

[Crelles Journal f. Math. Bd. 72, S. 139—142 (1870).]

Wenn eine Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen $x$ durch eine für jeden Wert von $x$ konvergente, trigonometrische Reihe

$$f(x) = \tfrac{1}{2} b_0 + (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \cdots + (a_n \sin nx + b_n \cos nx) + \cdots$$

gegeben ist, so ist es von Wichtigkeit, zu wissen, ob es noch andre Reihen von derselben Form gibt, welche ebenfalls für jeden Wert von $x$ konvergieren und die Funktion $f(x)$ darstellen. Diese Frage, welche erst in neuester Zeit angeregt worden ist, kann nicht etwa, wie gewöhnlich angenommen wird, dadurch entschieden werden, daß man jene Gleichung mit $\cos n(x - t) dx$ multipliziert und Glied für Glied von $-\pi$ bis $+\pi$ integriert (wobei in der Tat auf der rechten Seite nur das aus dem $n^{\text{ten}}$ Gliede hervorgehende Integral nicht wegfallen würde); denn, abgesehen davon, daß hierbei die Möglichkeit der Integration von $f(x)$ vorausgesetzt würde, kann die Integration einer Reihe

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots,$$

in welcher die $A_n$ Funktionen einer Veränderlichen $x$ sind, durch Integration ihrer Teile nur dann ohne Bedenken ausgeführt werden, wenn der Rest, welcher nach Abtrennung der $n$ ersten Glieder übrigbleibt, für alle Werte von $x$, welche im Integrationsintervalle liegen, *gleichzeitig* unendlich klein wird. Also muß, wenn man

$$f(x) = A_0 + A_1 + \cdots + A_n + R_n$$

setzt, bei gegebener Größe $\varepsilon$, eine ganze Zahl $m$ vorhanden sein, so beschaffen, daß für $n \geqq m$, $R_n$ seinem absoluten Betrage nach kleiner ist als $\varepsilon$ für alle Werte von $x$, welche in Betracht kommen. [Es handelt sich hier um die sogenannte „gleichmäßige Konvergenz".]

Es ist nämlich die kleinste ganze Zahl $m$, welche für ein gegebenes $x$ die Bedingung erfüllt, daß der absolute Betrag von $R_n$ kleiner ist als $\varepsilon$, wenn $n \geqq m$, als eine unstetige Funktion von $x$ und $\varepsilon$ zu betrachten; bezeichnet man sie unter diesen Umständen genauer mit $m(x, \varepsilon)$, so weiß man nicht, ob



die Funktion $m(x, \varepsilon)$ bei gegebenem $\varepsilon$ für alle Werte von $x$ unterhalb einer endlichen Grenze liegt; es ist sogar leicht einzusehen, daß, wenn $f(x)$ für $x = x_1$ eine Unstetigkeit hat, die Funktion $m(x, \varepsilon)$ Werte annehmen muß, welche jede angebbare Grenze übersteigen, wenn, bei festgehaltenem $\varepsilon$, $x$ dem Werte $x_1$ unendlich nahe rückt.

Hieraus geht hervor, daß die Eindeutigkeit der Darstellung einer Funktion durch eine für jeden Wert von $x$ konvergente trigonometrische Reihe auf diesem Wege nicht ergründet werden kann.

Durch die Riemannsche Abhandlung „Über die Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Göttingen 1867" bin ich auf einen andern, das Ziel erreichenden Weg geführt worden, welchen ich hier kurz angeben will.

Zuerst hebe ich hervor, daß, wie in meinem Aufsatze „Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz" [hier II, 1 S. 71] bewiesen ist, bei einer trigonometrischen Reihe

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots,$$

welche für sämtliche Werte von $x$ in einem gegebenen, übrigens beliebig kleinen Intervalle des reellen Größengebietes konvergiert, die Koeffizienten $a_n$, $b_n$ mit wachsendem $n$ unendlich klein werden.

Denkt man sich nun zwei trigonometrische Reihen, welche für jeden reellen Wert von $x$ konvergieren und denselben Wert annehmen, mithin dieselbe Funktion $f(x)$ darstellen, so folgt durch Abziehen der einen von der andern eine für jeden Wert von $x$ konvergente Darstellung der Null:

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots \tag{1}$$

wo $C_0 = \frac{1}{2} d_0$, $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$ und wo die Koeffizienten $c_n$, $d_n$ mit wachsendem $n$, nach dem soeben Gesagten, unendlich klein werden. Ich bilde mit Riemann aus der Reihe (1.) die Funktion:

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \cdots - \frac{C_n}{nn} - \cdots. \tag{2}$$

Sie ist eine in der Nähe eines jeden Wertes von $x$ stetige Funktion von $x$,* welche dem Lehrsatze 1 im § 8 der vorhin genannten Abhandlung zufolge die Eigenschaft hat, daß für jeden Wert von $x$ der zweite [„mittlere"] Differenzenquotient

$$\frac{F(x + \alpha) - 2F(x) + F(x - \alpha)}{\alpha\alpha}$$

mit unendlich abnehmendem $\alpha$ sich der Grenze Null nähert.

* Um dies einzusehen, würde es ausreichen, wenn man nur wüßte, daß die $c_n$, $d_n$ unter einer angebbaren Grenze liegen, der Nachweis davon dürfte jedoch dieselben Mittel in Anspruch nehmen, mit welchen gezeigt wird, daß $\lim c_n = 0$ und $\lim d_n = 0$.

Halten wir diese beiden Data für die Funktion $F(x)$ fest:

I. daß sie stetig in der Nähe eines jeden Wertes von $x$,

II. daß die Grenze ihres zweiten Differenzenquotienten mit unendlich abnehmendem $\alpha$ für jeden Wert von $x$ gleich Null ist,

so läßt sich daraus zeigen, daß $F(x)$ eine ganze Funktion ersten Grades $cx + c'$ ist. Der folgende Beweis hiervon ist mir von Herrn **Schwarz** in Zürich mitgeteilt worden[1].

Man denke sich bei einer in einem Intervalle $(a \dots b)$ der reellen Veränderlichen $x$ gegebenen Funktion $F_1(x)$ die Bedingungen I. und II. erfüllt, und zwar die erste in der Nähe eines jeden Wertes von $x$ im Intervalle, die zweite für jeden Zwischenwert $x$ [für $a < x < b$], und betrachte, indem man unter $i$ die positive oder negative Einheit, unter $\varkappa$ irgend eine reelle Größe versteht, die Funktion

$$\varphi(x) = i\left\{F_1(x) - F_1(a) - \frac{x-a}{b-a}(F_1(b) - F_1(a))\right\} - \frac{\varkappa^2}{2}(x-a)(b-x).$$

Aus den Voraussetzungen über $F_1(x)$ folgt, daß $\varphi(x)$ im Intervalle $(a \dots b)$ stetig ist, und daß die Grenze des zweiten Differenzenquotienten von $\varphi(x)$ gleich $\varkappa^2$ ist für jeden Zwischenwert $x$ bei unendlich abnehmendem $\alpha$; ferner ist $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$. Bezeichnen wir daher

$$\varphi(x+\alpha) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\alpha) \quad \text{mit} \quad \varphi(x, \alpha),$$

so ist $\varphi(x, \alpha)$ für jeden Zwischenwert $x$, bei unendlich abnehmendem $\alpha$ annähernd gleich $\varkappa^2\alpha^2$, also positiv und von Null verschieden für hinreichend kleine Werte von $\alpha$. Daraus folgt, daß $\varphi(x)$ für keinen Wert von $x$ im Intervalle positiv ist. In der Tat an den Grenzen ist $\varphi(x) = 0$; würde $\varphi(x)$ für einen Zwischenwert positiv sein, so wäre das *Maximum* der Werte, welche $\varphi(x)$ annehmen kann, ebenfalls eine positive Größe und würde zum mindesten für einen *Zwischenwert* $x_0$ von $x$ *erreicht;* es wäre also für hinreichend kleine Werte von $\alpha$

$$\varphi(x_0 + \alpha) - \varphi(x_0) \leqq 0, \; \varphi(x_0 - \alpha) - \varphi(x_0) \leqq 0,$$

mithin auch $\varphi(x_0, \alpha) \leqq 0$, während doch $\varphi(x_0, \alpha)$ für hinreichend kleine

[1] Dieser Beweis stützt sich im wesentlichen auf den in den Vorlesungen des Herrn **Weierstraß** häufig vorkommenden und bewiesenen Satz:

„Eine in einem Intervalle $(a \dots b)$ (die Grenzen inkl.) der reellen Veränderlichen $x$ gegebene, stetige Funktion $\varphi(x)$ *erreicht* das Maximum [gemeint ist: „die obere Grenze"] $g$ der Werte, welche sie annehmen kann, zum mindesten für einen Wert $x_0$ der Veränderlichen, so daß $\varphi(x_0) = g$".

Einen ähnlichen, auch hierauf beruhenden Beweis für den Fundamentalsatz der Differentialrechnung hat **Ossian Bonnet** geführt; derselbe findet sich in J. A. Serret, Cours de calcul differentiel et intégral **1**, 17—19. Paris 1868.

[Vgl. H. A. **Schwarz**: Ges. Abhandl. **2**, 341—343.]



Werte von $\alpha$ positiv ist. Man hat also für jeden Wert von $x$ im Intervalle $(a \dots b)$, für $i = \pm 1$ und für einen beliebigen reellen Wert von $\varkappa$

$$\varphi(x) \leqq 0;$$

läßt man hierin $\varkappa$ unendlich klein werden, so folgt:

$$i\left\{F_1(x) - F_1(a) - \frac{x-a}{b-a}(F_1(b) - F_1(a))\right\} \leqq 0 \quad \text{für } i = \pm 1,$$

also

$$F_1(x) = F_1(a) + \frac{x-a}{b-a}(F_1(b) - F_1(a)).$$

Es ist also unter den gemachten Voraussetzungen $F_1(x)$ eine ganze Funktion ersten Grades von $x$.

Daraus ergibt sich für unsere Funktion $F(x)$ (da hier das Intervall beliebig erweitert werden kann) die für alle Werte von $x$ gültige Form: $F(x) = cx + c'$, und man hat daher für jeden Wert von $x$

$$C_0\frac{xx}{2} - cx - c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{nn} + \cdots.$$

Aus der Periodizität auf der rechten Seite ergibt sich zunächst, daß sowohl $c = 0$ wie auch $C_0 = \frac{d_0}{2} = 0$, und man behält daher die Gleichung

$$-c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{nn} + \cdots. \tag{3}$$

Die Reihe rechts ist von der Art, daß man, bei gegebenem $\varepsilon$, eine ganze Zahl $m$ angeben kann, so daß, wenn $n \gtreqless m$, der Rest $R_n$ seinem absoluten Betrage nach kleiner als $\varepsilon$ ist *für alle Werte von* $x$ [d. h. die Reihe ist „gleichmäßig konvergent"].

Man kann daher die Gleichung (3) nach Multiplikation mit $\cos n(x-t)\,dx$ *Glied für Glied* von $-\pi$ bis $+\pi$ integrieren; das Resultat ist

$$c_n \sin nt + d_n \cos nt = 0,$$

wo unter $t$ eine beliebige reelle Größe zu verstehen ist; man hat also: $c_n = 0$, $d_n = 0$, während schon vorher gefolgert wurde, daß $d_0 = 0$.

Es ergibt sich also das Resultat, daß eine für jeden einzelnen reellen Wert von $x$ konvergente Darstellung der Null durch eine trigonometrische Reihe (1) nicht anders möglich ist, als wenn die Koeffizienten $d_0$, $c_n$, $d_n$ sämtlich gleich Null sind, und man hat den Satz:

„Wenn eine Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen $x$ durch eine für jeden Wert von $x$ konvergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so gibt es keine andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Wert von $x$ konvergiert und die nämliche Funktion $f(x)$ darstellt."

# 3. Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von $x$ durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt.

[Crelles Journal f. Mathematik Bd. 73, S. 294—296 (1871).]

Im folgenden will ich einige Bemerkungen dem obigen Aufsatze hinzufügen.

Durch die erste[1] wird der Beweis, welchen ich a. a. O. für die Eindeutigkeit trigonometrischer Reihendarstellungen versuche, in gewisser Beziehung vereinfacht, indem er von dem für das Gebiet dieser Untersuchungen merkwürdigen Satze, welchen ich in einer vorhergehenden Arbeit [II 1, S. 71] aufstelle und streng beweise, unabhängig gemacht wird.

Unter $u$ irgend eine feste Größe verstehend, setze man in der Gleichung

$$0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots \tag{1}$$

für $x$ einmal $u + x$, das andere Mal $u - x$ und addiere beide Gleichungen. Man erhält dadurch eine neue:

$$0 = e_0 + e_1 \cos x + e_2 \cos 2x + \cdots, \tag{1'}$$

von welcher die Gültigkeit für jeden Wert von $x$ eine unmittelbare Folge der unbeschränkten Gültigkeit von (1) ist, die vorausgesetzt wurde. — Die Koeffizienten von (1') $e_n = c_n \sin nu + d_n \cos nu$ werden aber mit wachsendem $n$ schon aus dem Grunde unendlich klein, weil sie mit den Gliedern $C_n$ von (1), wenn in ihnen $x$ gleich $u$ gesetzt wird, übereinstimmen.

Werden daher die Schlüsse, welche im Aufsatze sich auf die Gleichung (1) beziehen, ohne Änderung auf (1') bezogen, so erhält man:

$$e_n = c_n \sin nu + d_n \cos nu = 0,$$

und man schließt sodann wegen der Willkürlichkeit der Größe $u$ auf das Verschwinden der Koeffizienten $c_n$, $d_n$.

[1] Ich verdanke sie einer gefälligen, mündlichen Mitteilung des Herrn Professor Kronecker.



Die zweite Bemerkung bezieht sich auf eine gewisse Erweiterung des die Eindeutigkeit betreffenden Satzes. So wie derselbe im Aufsatze bewiesen ist, läßt er sich wie folgt ausdrücken:

„Hat man *eine für jeden Wert* von $x$ gültige, d. h. konvergente Darstellung des Wertes Null durch eine trigonometrische Reihe (1), so sind die Koeffizienten $c_n$, $d_n$ dieser Darstellung gleich Null.“

Es lassen sich nun hierbei die Voraussetzungen in dem Sinne modifizieren, daß man für gewisse Werte von $x$ entweder die Darstellung der Null durch (1) oder die Konvergenz der Reihe aufgibt.

Sei $\ldots x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ die unendliche Wertreihe von $x$ (der Größe nach mit dem Index steigend), für welche entweder die Konvergenz der Reihe (1) aufhört oder die rechte Seite einen von Null verschiedenen Wert annimmt, und seien die $x_\nu$ an die Beschränkung gebunden, in endlichen Intervallen in *nur endlicher Anzahl* vorzukommen; es geht alsdann aus dem Aufsatze hervor, daß die dort mit $F(x)$ bezeichnete Funktion in jedem Intervalle $(x_\nu \ldots x_{\nu+1})$ einer linearen Funktion $k_\nu x + l_\nu$ gleich ist; und bleibt daher nur die Identität dieser linearen Funktionen darzutun, um die weiteren Schlüsse im Aufsatze auf $F(x)$ anwenden zu können, welche zum Verschwinden der Koeffizienten $c_n$, $d_n$ führen.

Dieser Nachweis der Identität geschieht für je zwei benachbarte Funktionen $k_\nu x + l_\nu$, $k_{\nu+1} x + l_{\nu+1}$ und damit für alle durch das nämliche Verfahren, welches Herr Professor Heine bei einer analogen Frage in der Abhandlung „Über trigonometrische Reihen“, Bd. 71, Seite 353 dieses Journals einführt; man hat nur die Stetigkeit der Funktion $F(x)$, sowie den zweiten Riemannschen Satz in dessen Abhandlung (Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Abh. d. Göttinger Ges. d. Wiss. Bd. 13) für den Wert $x_{\nu+1}$ von $x$ in Betracht zu ziehen; man findet:

$$F(x_{\nu+1}) = k_\nu x_{\nu+1} + l_\nu \quad \text{und}$$

$$\lim \frac{x_{\nu+1}(k_{\nu+1} - k_\nu) + l_{\nu+1} - l_\nu + \alpha(k_{\nu+1} - k_\nu)}{\alpha} = 0 \quad \text{für} \quad \lim \alpha = 0,$$

was nur möglich ist, wenn $k_\nu = k_{\nu+1}$ und $l_\nu = l_{\nu+1}$.

Diese Erweiterung des Satzes ist keineswegs die letzte; es ist mir gelungen, eine ebenfalls auf strengem Verfahren beruhende, um vieles weitergehende Ausdehnung desselben zu finden, welche ich bei Gelegenheit mitteilen werde. [II 5, S. 92].

Schließlich sei mir gestattet, einen *Ausdruck* in der hier besprochenen Arbeit zu verändern.

Ich führe daselbst [hier S. 82; vgl. die Parenthese des Herausgebers] in einer Note den Satz an:

„Eine in einem Intervalle $(a \ldots b)$ (inkl. der Grenzen) der reellen Veränderlichen $x$ gegebene, stetige Funktion $\varphi(x)$ erreicht das *Maximum* $g$ der Werte, welche sie annehmen kann, zum mindesten für einen Wert $x_0$ der Veränderlichen, so daß $\varphi(x_0) = g$."

Ich verstand hierbei, wie aus dem Sinne hervorgeht, unter *Maximum* nicht den gewöhnlich mit diesem Worte verbundenen Begriff (in welchem das Erreichtwerden schon liegt), sondern die *obere Grenze* der Funktionswerte von $\varphi(x)$; und es würde dem entsprechend auch der letzte Ausdruck vorzuziehen sein.

Aus dem Begriffe einer in einem endlichen Bereiche *gegebenen* (definierten) *Wertmenge* wird gefolgert, daß dieselbe stets eine obere Grenze besitzt, *d. i. eine Größe $g$, welche eine solche Beziehung zur Wertmenge hat, daß bei beliebig angenommener positiver Größe $\varepsilon$ zum wenigsten ein Wert der Menge vorhanden ist, der größer als $g-\varepsilon$ und kleiner oder gleich $g$ ist, daß es aber keinen Wert der Menge gibt, welcher größer wäre als $g$.*

Nimmt man beispielsweise die Wertmenge, welche aus sämtlichen Werten einer in einem Intervalle $(a \ldots b)$ (mit Einschluß der Grenzen) gegebenen endlichen, eindeutigen Funktion $\varphi(x)$ besteht, so hat also diese Wertmenge eine obere Grenze $g$. Fügt man noch die Bedingung der durchgängigen Stetigkeit von $\varphi(x)$ hinzu, so folgert man weiter, daß die obere Grenze $g$ von der Funktion auch erreicht wird, d. h. daß es einen Wert $x_0$ von $x$ gibt, für welchen $\varphi(x_0) = g$. Dies ist der Sinn des angeführten Satzes, im Einklange mit der für ihn angeführten Quelle.

**[Anmerkung.]**

Aus der Limes-Formel für $\alpha \to 0$ auf S. 85 folgt zunächst durch Multiplikation mit $\alpha$

$$x_{\nu+1}(k_{\nu+1} - k_\nu) + l_{\nu+1} - l_\nu = 0$$

und sodann weiter: $k_{\nu+1} - k_\nu = 0$, also auch $l_{\nu+1} - l_\nu = 0$. Die am Schlusse angekündigte weitere Verallgemeinerung des Satzes wurde von **Cantor** bereits 1872 in der hier mit II,5 bezeichneten Abhandlung ausgeführt.

## 4. Über trigonometrische Reihen.

[Math. Annalen Bd. 4, S. 139—143 (1871).]

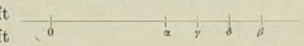
Im 72. Bande des Journals f. d. r. u. angew. Math. [hier II, 1 S. 71] leite ich einen Satz her, welcher zum Gegenstande hat das Unendlichkleinwerden der Koeffizienten trigonometrischer Reihen unter gewissen Voraussetzungen. Ich möchte eine Darstellung des dazu erforderlichen Beweises geben, welche vielleicht in bezug auf Übersichtlichkeit und Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen wird. In der Reihe der Sätze, welche ich im folgenden ableiten werde, ist es der letzte, um den es sich hier handelt, während die übrigen als Hilfssätze auftreten.

I. „*Ist $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ eine gegebene unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen, welche nur an die Bedingungen gebunden ist, daß*

$$x_2 \geqq k x_1, \quad x_3 \geqq k^2 x_2, \quad x_n \geqq k^{n-1} x_{n-1}, \quad \ldots,$$

*wo $k > 1$ ist, so gibt es Zahlengrößen $\Omega$, welche eine solche Beziehung zur Zahlenreihe $x_1, x_2, \ldots$ haben, daß das Produkt $x_n \Omega$ sich von einer ungeraden ganzen Zahl $2y_n + 1$ um eine Größe $\Theta_n$ unterscheidet, welche unendlich klein wird, wenn man $n$ ins Unendliche wachsen läßt, und zwar kann die Zahlengröße $\Omega$ innerhalb eines willkürlich vorgegebenen Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ gefunden werden.*"

Beweis. Ich will die Größe des Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ mit $i$ bezeichnen und dasselbe im Positiven voraussetzen, was erlaubt ist, da, wenn eine Zahlengröße $\Omega$ die behauptete Eigenschaft hat, auch $-\Omega$ dieselbe Eigenschaft behält, wenn nur statt $2y_n + 1$ die Zahl $-(2y_n + 1)$ genommen wird. Man




teile das Intervall in drei gleiche Teile; seien $\gamma$ und $\delta$ die Teilpunkte, so daß: $\overline{\alpha\gamma} = \overline{\gamma\delta} = \overline{\delta\beta} = \frac{i}{3}$.

Sei $x_\nu$ die erste der Zahlen $x_n$, welche größer ist als der größere der beiden Werte $\frac{3}{(k-1)i}$ und $\frac{6}{i}$.

Wir nehmen die ungerade Zahl $2y_\nu + 1$ so an, daß der Bruch $\frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}$ in das Intervall $(\gamma \ldots \delta)$ fällt; dies ist möglich, weil $x_\nu > \frac{6}{i}$; alsdann denken wir uns die ungeraden Zahlen $2y_{\nu+1} + 1$, $2y_{\nu+2} + 1, \ldots\ldots$ so bestimmt, daß, wenn unter $|z|$ immer der absolute Betrag von $z$ verstanden wird,

$$\begin{array}{c} \left|2 y_{\nu+1}+1-(2 y_{\nu}+1) \frac{x_{\nu+1}}{x_{\nu}}\right| \leqq 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left|2 y_{n+1}+1-(2 y_{n}+1) \frac{x_{n+1}}{x_{n}}\right| \leqq 1. \end{array} \tag{A}$$

Ich füge noch hinzu, daß, wenn hierbei irgendwo eine Zweideutigkeit für die Zahl $2 y_n + 1$ eintreten sollte, stets die kleinere Zahl genommen werden soll; alsdann ist durch das Bedingungssystem (A) eine Reihe ungerader Zahlen $2 y_n + 1$ von $n = \nu$ an eindeutig definiert; für kleinere Werte von $n$ setze man der Gleichförmigkeit wegen für $2 y_n + 1$ irgendwelche ungerade Zahlen fest.

Die Zahlen $x_n$ und $y_n$ bestimmen nun eine unendliche Reihe von Brüchen

$$\frac{2 y_1+1}{x_1}, \quad \frac{2 y_2+1}{x_2}, \quad \ldots \quad \frac{2 y_n+1}{x_n}, \quad \ldots \tag{A}$$

welche sich mit wachsendem $n$ einer bestimmten Grenze $\Omega$ nähern; denn wegen des Bedingungssystems (A) und da die Reihe $\frac{1}{x_\nu}+\frac{1}{x_{\nu+1}}+\cdots$ konvergent ist, sieht man leicht, daß die Differenz

$$\frac{2 y_{n+m}+1}{x_{n+m}}-\frac{2 y_n+1}{x_n}$$

unendlich klein wird, wenn, was auch $m$ sei, $n$ unendlich groß wird.

Aus (A) ergibt sich nun, wenn $n \geqq \nu$, für $\Omega$ die Relation:

$$\left|\Omega-\frac{2 y_n+1}{x_n}\right| \leqq \frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_{n+2}}+\cdots$$

oder

$$\left|\Omega x_n-2 y_n-1\right| \leqq \frac{x_n}{x_{n+1}}+\frac{x_n}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}+\cdots;$$

es ist aber

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \leqq \frac{1}{k^n}, \qquad \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} \leqq \frac{1}{k^{n+1}}, \qquad \ldots.$$

Daraus folgt

$$\left|\Omega x_n-2 y_n-1\right| \leqq \frac{1}{k^n}+\frac{1}{k^{2n+1}}+\frac{1}{k^{3n+3}}+\cdots<\frac{1}{k^n}+\frac{1}{k^{2n}}+\frac{1}{k^{3n}}+\cdots,$$

also

$$\left|\Omega x_n-2 y_n-1\right|<\frac{1}{k^n-1}. \tag{B}$$

Hieraus ersieht man, daß, da $k > 1$, die Differenz $\Theta_n = x_n \Omega - 2 y_n - 1$ mit wachsendem $n$ unendlich klein wird, und es ist somit der erste Teil des Satzes bewiesen.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die hier gefundene Zahlengröße $\Omega$ im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ liegt; dies ergibt sich aus (B), wenn man darin $n = \nu$



setzt; man hat

$$\left|\Omega-\frac{2 y_\nu+1}{x_\nu}\right|<\frac{1}{x_\nu(k^\nu-1)}$$

und um so mehr

$$\left|\Omega-\frac{2 y_\nu+1}{x_\nu}\right|<\frac{1}{x_\nu(k-1)}.$$

Es war aber $x_\nu$ so angenommen, daß $\frac{1}{x_\nu(k-1)}<\frac{i}{3}$; man hat also

$$\left|\Omega-\frac{2 y_\nu+1}{x_\nu}\right|<\frac{i}{3}. \tag{C}$$

Der Bruch $\frac{2 y_\nu+1}{x_\nu}$ liegt, wie zu Anfang festgesetzt wurde, im Intervalle $(\gamma \ldots \delta)$; die Größe $\Omega$ liegt also wegen (C) jedenfalls im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$.

II. „*Ist eine unendliche Größenreihe*

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots$$

*so beschaffen, daß man aus jeder in ihr enthaltenen unendlichen Reihe*

$$c_{\nu_1}, \quad c_{\nu_2}, \quad \ldots, \quad c_{\nu_n}, \quad \ldots,$$

*eine neue Größenreihe*

$$c_{\nu_{\mu_1}}, \quad c_{\nu_{\mu_2}}, \quad \ldots, \quad c_{\nu_{\mu_n}}, \quad \ldots$$

*ausheben kann, deren Glieder* $c_{\nu_{\mu_n}}$ *mit wachsendem* $n$ *unendlich klein werden, so werden auch die Glieder* $c_n$ *der ursprünglichen Reihe mit wachsendem* $n$ *unendlich klein.*“

Beweis. Ist $\varepsilon$ eine beliebig angenommene positive Größe, so ist die Anzahl der Glieder in der Reihe $c_n$, welche ihrem absoluten Betrage nach größer als $\varepsilon$ sind, endlich; denn würde sie unendlich sein, so hätte man eine in der ersten enthaltene unendliche Reihe $c_{\nu_n}$, deren Glieder sämtlich größer wären als $\varepsilon$, aus welcher sich daher keine Größenreihe $c_{\nu_{\mu_n}}$ ausheben ließe, deren Glieder mit wachsendem $n$ unendlich klein würden.

Wenn aber in einer Reihe $c_n$ die Anzahl der Glieder, welche größer als eine willkürlich angenommene Größe $\varepsilon$ sind, endlich ist, so heißt dies nichts anderes, als daß $\lim c_n = 0$ für $n = \infty$.

III. „*Wenn für jeden Wert von* $x$ *zwischen* 0 *und* $\frac{i}{2}$ (*wo* $i$ *eine beliebige positive Größe ist*) $\lim (c_n \sin n x) = 0$ *ist, so ist* $\lim c_n = 0$.“

Beweis. Sei $c_{\nu_n}$ irgend eine in der Reihe $c_n$ enthaltene unendliche Reihe; dann will ich zeigen, daß sich aus der Reihe $c_{\nu_n}$ eine neue Reihe $c_{\nu_{\mu_n}}$ ausheben läßt, so daß $\lim c_{\nu_{\mu_n}} = 0$ für $n = \infty$.

Die Reihe $c_{\nu_{\mu_n}}$ werde so aus $c_{\nu_n}$ gehoben, daß bei irgend einer fest gewählten Zahl $k > 1$ stets

$$\nu_{\mu_n} \geqq k^{n-1} \nu_{\mu_{n-1}}. \tag{1}$$

Eine solche Aushebung ist immer möglich.

Man bestimme nun nach I. eine Zahlengröße $\Omega$ im Intervalle $\left(0 \ldots \frac{i}{\pi}\right)$ so, daß

$$\Omega \nu_{\mu_n} - (2 y_n + 1) = \Theta_n$$

mit wachsendem $n$ unendlich klein wird, wobei $y_n$ eine ganze Zahl ist.

Die Zahlengröße $\Omega' = \Omega \frac{\pi}{2}$ (wo $\pi$ die Verhältniszahl des Umfangs zum Durchmesser beim Kreise ist), liegt alsdann im Intervalle $\left(0 \ldots \frac{i}{2}\right)$ und es wird

$$\Omega' \nu_{\mu_n} - \frac{\pi}{2}(2 y_n + 1) = \Theta_n' \tag{2}$$

mit wachsendem $n$ unendlich klein.

Wenden wir nun die Voraussetzung, welche dem Satze zugrunde liegt (daß nämlich $\lim c_n \sin n x = 0$ für jeden Wert von $x$ im Intervalle $\left(0 \ldots \frac{i}{2}\right)$ sein soll), auf den Fall $x = \Omega'$ an, so hat man

$$\lim (c_n \sin n \Omega') = 0$$

und daher auch

$$\lim \left(c_{\nu_{\mu_n}} \sin \nu_{\mu_n} \Omega'\right) = 0 \text{ für } n = \infty.$$

Wegen (2) kann man hier $\sin \nu_{\mu_n} \Omega'$ durch $\pm \cos \Theta_n'$ ersetzen und man hat also

$$\lim \left(c_{\nu_{\mu_n}} \cos \Theta_n'\right) = 0 \text{ für } n = \infty. \tag{3}$$

Da nun aber $\Theta_n'$ mit wachsendem $n$ unendlich klein wird, so folgt ohne weiteres aus (3)

$$\lim c_{\nu_{\mu_n}} = 0 \text{ für } n = \infty.$$

Mit Zuhilfenahme des Satzes II. schließt man nun, daß

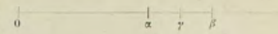
$$\lim c_n = 0 \text{ für } n = \infty.$$

IV. „*Wenn für jeden reellen Wert von $x$ zwischen gegebenen Grenzen $\alpha \ldots \beta$ die Bedingung erfüllt ist*

$$\lim (a_n \sin n x + b_n \cos n x) = 0,$$

*so ist sowohl* $\lim a_n = 0$, *wie* $\lim b_n = 0$."






Beweis. Sei $\gamma$ der in der Mitte zwischen $\alpha \ldots \beta$ gelegene Wert; die Größe des Intervalles will ich hier wieder $i$ nennen. Setzen wir

$$a_n \cos n\gamma - b_n \sin n\gamma = c_n$$
$$a_n \sin n\gamma + b_n \cos n\gamma = d_n,$$

so ist

$$a_n = \phantom{-} c_n \cos n\gamma + d_n \sin n\gamma$$
$$b_n = - c_n \sin n\gamma + d_n \cos n\gamma.$$

Wenn wir nun zeigen könnten, daß $\lim c_n = 0$, $\lim d_n = 0$, so würde daraus folgen, daß $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$. Es ist aber wegen der Voraussetzung, welche dem Satze zugrunde liegt, wenn man sie auf $x = \gamma$ anwendet:

$$\lim d_n = 0$$

und es verbleibt daher nur noch zu beweisen, daß $\lim c_n = 0$.

Dies geschieht auf folgende Weise:

Man hat für jeden positiven Wert von $x < \frac{i}{2}$ die beiden Relationen

$$\lim (a_n \sin n(\gamma + x) + b_n \cos n(\gamma + x)) = 0$$
$$\lim (a_n \sin n(\gamma - x) + b_n \cos n(\gamma - x)) = 0,$$

aus welchen durch Subtraktion (wenn man außerdem durch 2 dividiert) hervorgeht:

$$\lim (c_n \sin n x) = 0 \text{ für } n = \infty,$$

wenn $x$ irgend ein positiver Wert kleiner als $\frac{i}{2}$ ist. Wegen des Satzes III. ist also

$$\lim c_n = 0. \quad \text{q. e. d.}$$

**[Anmerkung.]**

Wie schon in der Anmerkung zu II, 1 bemerkt, handelt es sich hier um eine Vereinfachung des dort entwickelten Beweisverfahrens unter Beibehaltung des Grundgedankens. Hierbei wird u. a. Gebrauch gemacht von der schon in II, 3 zum Beweise des Eindeutigkeitssatzes verwendeten Kroneckerschen Idee, das Argument $x$ durch die beiden $\gamma \pm x$ zu ersetzen.

## 5. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.

[Math. Annalen Bd. 5, S. 123—132 (1872).]

Im folgenden werde ich eine gewisse Ausdehnung des Satzes, daß die trigonometrischen Reihendarstellungen eindeutig sind, mitteilen.

Daß zwei trigonometrische Reihen

$$\tfrac{1}{2} b_0 + \sum (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2} b_0' + \sum (a_n' \sin nx + b_n' \cos nx),$$

welche für jeden Wert von $x$ konvergieren und dieselbe Summe haben, in ihren Koeffizienten übereinstimmen, habe ich im „Journal f. d. r. u. angew. Math. Bd. 72, S. 139“ [hier II 2, S. 80] nachzuweisen versucht; in einer auf diese Arbeit sich beziehenden Notiz habe ich a. a. O. ferner gezeigt, daß dieser Satz auch erhalten bleibt, wenn man für eine endliche Anzahl von Werten des $x$ entweder die Konvergenz oder die Übereinstimmung der Reihensummen aufgibt.

Die *hier* beabsichtigte Ausdehnung besteht darin, daß für eine *unendliche* Anzahl von Werten des $x$ im Intervalle $(0 \ldots 2\pi)$ auf die Konvergenz oder auf die Übereinstimmung der Reihensummen verzichtet wird, ohne daß die Gültigkeit des Satzes aufhört.

Zu dem Ende bin ich aber genötigt, wenn auch zum größten Teile nur andeutungsweise, Erörterungen voraufzuschicken, welche dazu dienen mögen, Verhältnisse in ein Licht zu stellen, die stets auftreten, sobald Zahlengrößen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind; dabei werde ich zu gewissen Definitionen hingeleitet, welche hier nur zum Behufe einer möglichst gedrängten Darstellung des beabsichtigten Satzes, dessen Beweis im § 3 gegeben wird, aufgestellt werden.

### § 1.

Die rationalen Zahlen bilden die Grundlage für die Feststellung des weiteren Begriffes einer Zahlengröße; ich will sie das Gebiet $A$ nennen (mit Einschluß der Null).

Wenn ich von einer Zahlengröße im weiteren Sinne rede, so geschieht es zunächst in dem Falle, daß eine durch ein Gesetz gegebene unendliche Reihe



von rationalen Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,\ \ldots \tag{1}$$

vorliegt, welche die Beschaffenheit hat, daß die Differenz $a_{n+m} - a_n$ mit wachsendem $n$ unendlich klein wird, was auch die positive ganze Zahl $m$ sei, oder mit anderen Worten, daß bei beliebig angenommenem (positiven, rationalen) $\varepsilon$ eine ganze Zahl $n_1$ vorhanden ist, so daß $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, wenn $n \geq n_1$ und wenn $m$ eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: „*Die Reihe* (1) *hat eine bestimmte Grenze b.*“

Es haben also diese Worte zunächst keinen anderen Sinn als den eines Ausdruckes für *jene* Beschaffenheit der Reihe, und aus dem Umstande, daß wir mit der Reihe (1) ein besonderes Zeichen $b$ verbinden, folgt, daß bei verschiedenen derartigen Reihen auch verschiedene Zeichen $b, b', b'', \ldots$ zu bilden sind.

Ist eine zweite Reihe

$$a_1',\ a_2',\ \ldots\ a_n',\ \ldots \tag{1'}$$

gegeben, welche eine bestimmte Grenze $b'$ hat, so findet man, daß die beiden Reihen (1) und (1') eine von den folgenden 3 Beziehungen stets haben, die sich gegenseitig ausschließen: entweder 1. wird $a_n - a_n'$ unendlich klein mit wachsendem $n$ oder 2. $a_n - a_n'$ bleibt von einem gewissen $n$ an stets größer als eine positive (rationale) Größe $\varepsilon$ oder 3. $a_n - a_n'$ bleibt von einem gewissen $n$ an stets kleiner als eine negative (rationale) Größe $-\varepsilon$.

Wenn die erste Beziehung stattfindet, setze ich

$$b = b',$$

bei der zweiten $b > b'$, bei der dritten $b < b'$.

Ebenso findet man, daß eine Reihe (1), welche eine Grenze $b$ hat, zu einer rationalen Zahl $a$ nur eine von den folgenden 3 Beziehungen hat. Entweder 1. wird $a_n - a$ unendlich klein mit wachsendem $n$, oder 2. $a_n - a$ bleibt von einem gewissen $n$ an immer größer als eine positive (rationale) Größe $\varepsilon$ oder 3. $a_n - a$ bleibt von einem gewissen $n$ an immer kleiner als eine negative (rationale) Größe $-\varepsilon$.

Um das Bestehen dieser Beziehungen auszudrücken, setzen wir resp.

$$b = a,\ b > a,\ b < a.$$

Aus diesen und den gleich folgenden Definitionen ergibt sich als *Folge*, daß, wenn $b$ die Grenze der Reihe (1) ist, alsdann $b - a_n$ mit wachsendem $n$ unendlich klein wird, womit *nebenbei* die Bezeichnung „Grenze der Reihe (1)“ für $b$ eine gewisse Rechtfertigung findet.

Die Gesamtheit der Zahlengrößen $b$ möge durch $B$ bezeichnet werden.

Mittels obiger Festsetzungen lassen sich die Elementaroperationen, welche mit rationalen Zahlen vorgenommen werden, ausdehnen auf die beiden Gebiete $A$ und $B$ zusammengenommen.

Sind nämlich $b, b', b''$ drei Zahlengrößen aus $B$, so dienen die Formeln

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad \frac{b}{b'} = b''$$

als Ausdruck dafür, daß zwischen den den Zahlen $b, b', b''$ entsprechenden Reihen

$$\begin{gathered} a_1, \; a_2, \; \ldots \\ a_1', \; a_2', \; \ldots \\ a_1'', \; a_2'', \; \ldots \end{gathered}$$

resp. die Beziehungen bestehen

$$\lim (a_n \pm a_n' - a_n'') = 0, \qquad \lim (a_n a_n' - a_n'') = 0,$$
$$\lim \left(\frac{a_n}{a_n'} - a_n''\right) = 0 \; [\text{für } a_n' \neq 0],$$

wo ich auf die Bedeutung des lim-Zeichens nach dem Vorhergehenden nicht näher einzugehen brauche. Ähnliche Definitionen werden für die Fälle aufgestellt, daß von den drei Zahlen eine oder zwei dem Gebiete $A$ angehören.

Allgemein wird sich daraus jede mittels einer endlichen Anzahl von Elementaroperationen gebildete Gleichung

$$F(b, b', \ldots b^{(\varrho)}) = 0$$

als der Ausdruck für eine bestimmte Beziehung ergeben, welche unter den Reihen stattfindet, durch welche die Zahlengrößen $b, b', b'', \ldots b^{(\varrho)}$ gegeben sind[1].

Das Gebiet $B$ ergab sich aus dem Gebiete $A$; es erzeugt nun in analoger Weise in Gemeinschaft mit dem Gebiete $A$ ein neues Gebiet $C$.

Liegt nämlich eine unendliche Reihe

$$b_1, \; b_2, \; \ldots \; b_n, \; \ldots \tag{2}$$

von Zahlengrößen aus den Gebieten $A$ und $B$ vor, welche nicht sämtlich dem Gebiete $A$ angehören, und hat diese Reihe die Beschaffenheit, daß $b_{n+m} - b_n$ mit wachsendem $n$ unendlich klein wird, was auch $m$ sei, eine

[1] Wenn z. B. eine Gleichung $\mu^{\text{ten}}$ Grades $f(x) = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten eine reelle Wurzel $\omega$ besitzt, so heißt dies im allgemeinen nichts anderes, als daß eine Reihe

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

von der Beschaffenheit der Reihe (1) vorliegt, für deren Grenze das Zeichen $\omega$ gewählt ist, welche außerdem die Eigenschaft hat

$$\lim f(a_n) = 0.$$



Beschaffenheit, die nach den vorangegangenen Definitionen begrifflich etwas ganz Bestimmtes ist, so sage ich von dieser Reihe aus, daß sie eine bestimmte Grenze $c$ hat.

Die Zahlengrößen $c$ konstituieren das Gebiet $C$.

Die Definitionen des Gleich-, Größer- und Kleinerseins, sowie der Elementaroperationen sowohl unter den Größen $c$, wie auch zwischen ihnen und den Größen der Gebiete $B$ und $A$ werden dem früheren analog gegeben.

Während sich nun die Gebiete $B$ und $A$ so zueinander verhalten, daß zwar jedes $a$ einem $b$, nicht aber umgekehrt jedes $b$ einem $a$ gleichgesetzt werden kann, stellt es sich hier heraus, daß sowohl jedes $b$ einem $c$, wie auch umgekehrt jedes $c$ einem $b$ gleichgesetzt werden kann.

Obgleich hierdurch die Gebiete $B$ und $C$ sich gewissermaßen gegenseitig decken, ist es bei der hier dargelegten Theorie (in welcher die Zahlengröße, zunächst an sich im allgemeinen gegenstandslos, nur als Bestandteil von Sätzen erscheint, welchen Gegenständlichkeit zukommt, des Satzes z. B., daß die entsprechende Reihe die Zahlengröße zur Grenze hat) wesentlich, an dem begrifflichen Unterschiede der beiden Gebiete $B$ und $C$ festzuhalten, indem ja schon die Gleichsetzung zweier Zahlengrößen $b, b'$ aus $B$ ihre Identität nicht einschließt, sondern nur eine bestimmte Relation ausdrückt, welche zwischen den Reihen stattfindet, auf welche sie sich beziehen.

Aus dem Gebiete $C$ und den vorhergehenden geht analog ein Gebiet $D$, aus diesen ein $E$ hervor usw.; durch $\lambda$ solcher Übergänge (wenn ich den Übergang von $A$ zu $B$ als den ersten ansehe) gelangt man zu einem Gebiete $L$ von Zahlengrößen. Dasselbe verhält sich, wenn man die Kette der Definitionen für Gleich-, Größer- und Kleinersein und für die Elementaroperationen von Gebiet zu Gebiet vollzogen denkt, zu den vorhergehenden, mit Ausschluß von $A$ so, daß eine Zahlengröße $l$ stets gleichgesetzt werden kann einer Zahlengröße $k, i, \ldots c, b$ und umgekehrt.

Auf die Form solcher Gleichsetzungen lassen sich die Resultate der Analysis (abgesehen von wenigen bekannten Fällen) zurückführen, obgleich (was hier nur mit Rücksicht auf jene Ausnahmen berührt sein mag) der Zahlenbegriff, soweit er hier entwickelt ist, den Keim zu einer in sich notwendigen und absolut unendlichen Erweiterung in sich trägt.

Es scheint sachgemäß, wenn eine Zahlengröße im Gebiete $L$ gegeben ist, sich des Ausdruckes zu bedienen: *sie ist als Zahlengröße, Wert oder Grenze* $\lambda^{\text{ter}}$ *Art gegeben*, woraus ersichtlich ist, daß ich mich der Worte *Zahlengröße*, *Wert* und *Grenze* im allgemeinen in gleicher Bedeutung bediene.

Eine mittels einer endlichen Anzahl von Elementaroperationen aus Zahlen $l, l', \ldots l^{(\varrho)}$ gebildete Gleichung $F(l, l', \ldots l^{(\varrho)}) = 0$ erscheint bei der hier angedeuteten Theorie genau genommen als der Ausdruck für eine bestimmte Beziehung zwischen $\varrho + 1$, *im allgemeinen $\lambda$fach unendlichen Reihen rationaler Zahlen*; es sind dies die Reihen, welche aus den einfach unendlichen, auf die sich die Größen $l, l', \ldots l^{(\varrho)}$ zunächst beziehen, hervorgehen, indem man in ihnen die Elemente durch ihre entsprechenden Reihen ersetzt, die entstehenden, im allgemeinen zweifach unendlichen Reihen ebenso behandelt und diesen Prozeß so lange fortführt, bis man nur rationale Zahlen vor sich sieht.

Es sei mir vorbehalten, auf alle diese Verhältnisse bei einer andern Gelegenheit ausführlicher zurückzukommen. *Wie* die in diesem § auftretenden Festsetzungen und Operationen mit Nutzen der Infinitesimalanalysis dienen können, darauf einzugehen ist hier gleichfalls nicht der Ort. Auch das folgende, wo der Zusammenhang der Zahlengrößen mit der Geometrie der geraden Linie dargelegt wird, beschränkt sich fast nur auf die notwendigen Sätze, aus welchen, wenn ich nicht irre, das übrige mittels rein logischer Beweisführung abgeleitet werden kann. Zum Vergleiche mit § 1 und § 2 sei das 10. Buch der „Elemente des Euklides" erwähnt, welches für den darin behandelten Gegenstand maßgebend bleibt.

## § 2.

Die Punkte einer geraden Linie werden dadurch begrifflich bestimmt, daß man unter Zugrundelegung einer Maßeinheit ihre Abszissen d. h. ihre Entfernungen von einem festen Punkte $o$ der geraden Linie mit dem $+$ oder $-$ Zeichen angibt, je nachdem der betreffende Punkt in dem (vorher fixierten) positiven oder negativen Teile der Linie von $o$ aus liegt.

Hat diese Entfernung zur Maßeinheit ein rationales Verhältnis, so wird sie durch eine Zahlengröße des Gebietes $A$ ausgedrückt; im andern Falle ist es, wenn der Punkt etwa durch eine Konstruktion *bekannt* ist, immer möglich, eine Reihe

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots \tag{1}$$

anzugeben, welche die in § 1 ausgedrückte Beschaffenheit und zur fraglichen Entfernung eine solche Beziehung hat, daß die Punkte der Geraden, denen die Entfernungen $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ zukommen, dem zu bestimmenden Punkte mit wachsendem $n$ unendlich nahe rücken.

Dies drücken wir so aus, daß wir sagen: *Die Entfernung des zu bestimmenden Punktes von dem Punkte $o$ ist gleich $b$, wo $b$* die der Reihe (1) entsprechende Zahlengröße ist.

Hierauf wird nachgewiesen, daß das Größer-, Kleiner- und Gleichsein von bekannten Entfernungen in Übereinstimmung ist mit dem in § 1 definierten Größer-, Kleiner- und Gleichsein der entsprechenden Zahlengrößen, welche die Entfernungen angeben.



Daß nun ebenso auch die Zahlengrößen der Gebiete $C, D, \ldots$ befähigt sind, bekannte Entfernungen zu bestimmen, ergibt sich ohne Schwierigkeit. Um aber den in diesem § dargelegten Zusammenhang der Gebiete der in § 1 definierten Zahlengrößen mit der Geometrie der geraden Linie vollständig zu machen, ist nur noch ein *Axiom* hinzuzufügen, welches einfach darin besteht, daß auch umgekehrt zu jeder Zahlengröße ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Koordinate gleich ist jener Zahlengröße, und zwar in dem Sinne gleich, wie solches in diesem § erklärt wird[1].

Ich nenne diesen Satz ein *Axiom*, weil es in seiner Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein.

Durch ihn wird denn auch nachträglich für die Zahlengrößen eine gewisse Gegenständlichkeit gewonnen, von welcher sie jedoch ganz unabhängig sind.

*Dem Obigen gemäß betrachte ich einen Punkt der Geraden als bestimmt, wenn seine Entfernung von $o$ mit dem gehörigen Zeichen versehen, als Zahlengröße, Wert oder Grenze $\lambda^{\text{ter}}$ Art gegeben ist.*

---

Wir wollen nun, unserm eigentlichen Gegenstande näher tretend, Beziehungen betrachten, welche auftreten, sobald Zahlengrößen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind.

Nach dem Vorhergehenden können die Zahlengrößen den Punkten einer Geraden zugeordnet gedacht werden. Der Anschaulichkeit wegen (nicht daß es wesentlich zur Sache gehörte) bedienen wir uns dieser Vorstellung im folgenden und haben, wenn wir von Punkten sprechen, stets Werte im Auge, durch welche sie gegeben sind.

Eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Zahlengrößen nenne ich der Kürze halber eine *Wertmenge* und dem entsprechend eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Punkten einer Geraden eine *Punktmenge*. Was im folgenden von Punktmengen ausgesprochen wird, läßt sich dem gesagten gemäß unmittelbar auf Wertmengen übertragen.

Wenn in einem endlichen Intervalle eine Punktmenge gegeben ist, so ist mit ihr im allgemeinen eine zweite Punktmenge, mit dieser im allgemeinen eine dritte usw. gegeben, welche für die Auffassung der Natur der ersten Punktmenge wesentlich sind.

Um diese abgeleiteten Punktmengen zu definieren, haben wir den Begriff *Grenzpunkt [„Häufungspunkt"] einer Punktmenge* vorauszuschicken.

[1] Es gehört also zu jeder Zahlengröße ein bestimmter Punkt, einem Punkte kommen aber unzählig viele gleiche Zahlengrößen als Koordinaten im obigen Sinne zu; denn es folgt, wie schon oben angedeutet wurde, aus rein logischen Gründen, daß gleichen Zahlengrößen *nicht* verschiedene Punkte entsprechen können und daß ungleichen Zahlengrößen als Koordinaten *nicht* ein und derselbe Punkt zukommen kann.

Unter einem „Grenzpunkt einer Punktmenge $P$“ verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, daß in jeder Umgebung desselben *unendlich* viele Punkte aus $P$ sich befinden, wobei es vorkommen kann, daß er außerdem selbst zu der Menge gehört. Unter „Umgebung eines Punktes“ sei aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches den Punkt *in seinem Innern* hat. Darnach ist es leicht zu beweisen, daß eine aus einer unendlichen Anzahl von Punkten bestehende [„beschränkte“] Punktmenge stets zum wenigsten *einen* Grenzpunkt hat.

Es ist nun ein bestimmtes Verhalten eines jeden Punktes der Geraden zu einer gegebenen Menge $P$, entweder ein Grenzpunkt derselben oder kein solcher zu sein, und es ist daher mit der Punktmenge $P$ die Menge ihrer Grenzpunkte *begrifflich* mit gegeben, welche ich mit $P'$ bezeichnen und „*die erste abgeleitete Punktmenge* von $P$“ nennen will.

Besteht die Punktmenge $P'$ nicht aus einer bloß endlichen Anzahl von Punkten, so hat sie gleichfalls eine abgeleitete Punktmenge $P''$, ich nenne sie *die zweite abgeleitete von* $P$. Man findet durch $\nu$ solcher Übergänge den Begriff der $\nu^{\text{ten}}$ abgeleiteten Punktmenge $P^{(\nu)}$ von $P$.

Besteht beispielsweise die Menge $P$ aus allen Punkten der Geraden, denen rationale Abszissen zwischen 0 und 1, die Grenzen ein- oder ausgeschlossen, zukommen, so besteht die abgeleitete Menge $P'$ aus *allen* Punkten des Intervalles $(0 \ldots 1)$, die Grenzen 0 und 1 mit eingeschlossen. Die folgenden Mengen $P''$, $P'''$, ... stimmen hier mit $P'$ überein. Oder, besteht die Menge $P$ aus den Punkten, welchen die Abszissen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$ zukommen, so besteht die Menge $P'$ aus dem *einen* Punkte 0 und hat selbst keine Abgeleitete.

Es kann eintreffen, und dieser Fall ist es, welcher uns hier ausschließlich interessiert, daß nach $\nu$ Übergängen die Menge $P^{(\nu)}$ aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht, mithin selbst keine abgeleitete Menge hat; in diesem Falle wollen wir die ursprüngliche Punktmenge *$P$ von der $\nu^{\text{ten}}$ Art* nennen, woraus folgt, daß alsdann $P', P'', \ldots$ von der $\overline{\nu - 1}^{\text{ten}}, \overline{\nu - 2}^{\text{ten}} \ldots$ Art sind.

Es wird also bei dieser Auffassungsweise das Gebiet aller Punktmengen bestimmter Art als ein besonderes Genus innerhalb des Gebietes aller denkbaren Punktmengen betrachtet, von welchem Genus die sogenannten Punktmengen $\nu^{\text{ter}}$ Art eine besondere Art ausmachen.

Ein Beispiel einer Punktmenge $\nu^{\text{ter}}$ Art bietet schon ein einzelner Punkt dar, wenn seine Abszisse als Zahlengröße $\nu^{\text{ter}}$ Art, welche gewissen, leicht festzustellenden Bedingungen genügt, gegeben ist. Löst man nämlich alsdann diese Zahlengröße in die Glieder $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Art der ihr entsprechenden Reihe auf, diese Glieder wieder in die sie konstituierenden Glieder $\overline{(\nu - 2)}^{\text{ter}}$ Art usw., so erhält man zuletzt eine unendliche Anzahl rationaler Zahlen; denkt man sich die diesen Zahlen entsprechende Punktmenge, so ist dieselbe von der $\nu^{\text{ten}}$ Art[1].



Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun imstande, den beabsichtigten Satz im folgenden § kurz anzugeben und zu beweisen.

## § 3.

Theorem. *Wenn eine Gleichung besteht von der Form*

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots, \tag{1}$$

wo $C_0 = \frac{1}{2} d_0$; $C_n = c_n \sin n x + d_n \cos n x$, *für alle Werte von $x$ mit Ausnahme derjenigen, welche den Punkten einer im Intervalle $(0 \ldots 2\pi)$ gegebenen Punktmenge $P$ der $\nu^{\text{ten}}$ Art entsprechen, wobei $\nu$ eine beliebig große ganze Zahl bedeutet, so ist*

$$d_0 = 0\,, \; c_n = d_n = 0\,.$$

Beweis: In diesem Beweise hat man, wie durch den Fortgang ersichtlich wird, wenn von $P$ die Rede ist, nicht bloß die gegebene Menge $\nu^{\text{ter}}$ Art der Ausnahmepunkte im Intervalle $(0 \ldots 2\pi)$, sondern diejenige Menge im Auge, welche auf der ganzen, unendlichen Linie aus der periodischen Wiederholung jener hervorgeht.

Betrachten wir nun die Funktion

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \cdots - \frac{C_n}{nn} - \cdots$$

Aus der Natur einer Punktmenge $\nu^{\text{ter}}$ Art ergibt sich leicht, daß ein Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ vorhanden sein muß, in welchem kein Punkt der Menge $P$ liegt; für alle Werte von $x$ in diesem Intervalle wird also wegen der vorausgesetzten Konvergenz unserer Reihe (I) sein

$$\lim\,(c_n \sin nx + d_n \cos nx) = 0,$$

mithin ist einem bekannten Satze gemäß (Math. Ann. Bd. 4, S. 139) [hier II 4, S. 87]

$$\lim c_n = 0\,, \quad \lim d_n = 0\,.$$

Die Funktion $F(x)$ hat also (siehe Riemann: Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, § 8) folgende Eigenschaften:

1. sie ist stetig in der Nähe eines jeden Wertes von $x$,

[1] Daß dies nicht stets der Fall ist, möchte vielleicht noch ausdrücklich hervorgehoben zu werden verdienen. Im allgemeinen kann die auf jene Weise aus einer Zahlengröße $\nu^{\text{ter}}$ Art hervorgehende Punktmenge sowohl von niederer wie auch von höherer als der $\nu^{\text{ten}}$ Art oder selbst gar nicht von bestimmter Art sein.

2. es ist $\lim \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, wenn $\lim \alpha = 0$, für alle Werte von $x$ mit Ausnahme der den Punkten der Menge $P$ entsprechenden Werte,

3. es ist $\lim \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha} = 0$, wenn $\lim \alpha = 0$, für jeden Wert von $x$ ohne Ausnahme.

Ich will nun zeigen, daß $F(x) = cx + c'$ ist.

Dazu betrachte ich zuerst irgend ein Intervall $(p \ldots q)$, in welchem nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge $P$ liegt; diese Punkte seien $x_0, x_1, \ldots x_r$, ihrer Aufeinanderfolge nach geschrieben.

Ich behaupte, daß $F(x)$ im Intervalle $(p \ldots q)$ *linear* ist; denn $F(x)$ ist wegen der Eigenschaften 1. und 2. eine lineare Funktion in jedem der Intervalle, in welche $(p \ldots q)$ durch die Punkte $x_0, x_1, \ldots x_r$ geteilt wird; da nämlich in keines dieser Intervalle Ausnahmepunkte fallen, so gelten hier die im Aufsatze (siehe Journal f. d. r. u. angew. Math. Bd. 72, S. 139) [hier II, 2 S. 80] angewandten Schlüsse; es bleibt daher nur übrig, die Identität dieser linearen Funktionen nachzuweisen.

Ich will dies für je zwei benachbarte tun und wähle dazu die in den beiden Intervallen $(x_0 \ldots x_1)$ und $(x_1 \ldots x_2)$.

In $(x_0 \ldots x_1)$ sei $F(x) = kx + l$.

In $(x_1 \ldots x_2)$ sei $F(x) = k'x + l'$.

Wegen 1. ist $F(x_1) = kx_1 + l$; ferner ist für hinreichend kleine Werte von $\alpha$

$$F(x_1+\alpha) = k'(x_1+\alpha) + l'; \quad F(x_1-\alpha) = k(x_1-\alpha) + l.$$

Wegen 3. hat man also

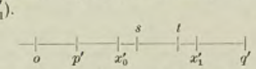
$$\lim \frac{(k'-k)\,x_1 + l' - l + \alpha\,(k'-k)}{\alpha} = 0\,, \quad \text{für } \lim \alpha = 0\,,$$

was nicht anders möglich ist, als wenn [vgl. unsere Anmerkung zu II, 3]

$$k = k', \quad l = l'.$$

(A) „*Ist $(p \ldots q)$ irgend ein Intervall, in welchem nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge P liegt, so ist $F(x)$ in diesem Intervalle linear.*“

Weiter betrachte ich irgend ein Intervall $(p' \ldots q')$, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten $x'_0, x'_1, \ldots x'_r$ der ersten abgeleiteten Menge $P'$ enthält, und behaupte zunächst, daß in jedem der Teilintervalle, in welche $(p \ldots q)$ durch die Punkte $x'_0, x'_1, \ldots$ zerfällt, die Funktion $F(x)$ linear ist, z. B. in $(x'_0 \ldots x'_1)$.




Denn jedes dieser Teilintervalle enthält zwar im allgemeinen unendlich viele Punkte aus $P$, so daß das Resultat (A) nicht unmittelbar auf dasselbe



Anwendung findet; dagegen enthält jedes Intervall $(s \ldots t)$, welches ganz innerhalb $(x'_0 \ldots x'_1)$ fällt, nur eine endliche Anzahl von Punkten aus $P$ (weil sonst zwischen $x'_0$ und $x'_1$ noch andere Punkte der Menge $P'$ fallen würden), und die Funktion ist also in $(s \ldots t)$ wegen (A) linear. Indem man aber die Endpunkte $s$ und $t$ den Punkten $x'_0$ und $x'_1$ beliebig nahe bringen kann, wird ohne weiteres geschlossen, daß die stetige Funktion $F(x)$ auch linear ist in $(x'_0 \ldots x'_1)$.

Nachdem dies für jedes der Teilintervalle von $(p' \ldots q')$ nachgewiesen ist, erhält man durch dieselben Schlüsse wie diejenigen, welche das Resultat (A) erzielten, folgendes:

(A′) „*Ist $(p' \ldots q')$ irgend ein Intervall, in welchem nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge $P'$ liegt, so ist $F(x)$ in diesem Intervalle linear.*“

Der Beweis geht in diesem Sinne fort. *Steht nämlich einmal fest, daß $F(x)$ eine lineare Funktion ist in irgend einem Intervalle $(p^{(k)} \ldots q^{(k)})$, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten aus der $k^{\text{ten}}$ abgeleiteten Punktmenge $P^{(k)}$ von $P$ enthält, so folgert man ebenso wie bei dem Übergange von* (A) *zu* (A′) *weiter, daß $F(x)$ auch eine lineare Funktion ist in irgend einem Intervalle $(p^{(k+1)} \ldots q^{(k+1)})$, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten der $(k+1)^{\text{ten}}$ abgeleiteten Punktmenge $P^{(k+1)}$ in sich faßt.*

Wir schließen so durch eine *endliche* Anzahl von *Übergängen*, daß $F(x)$ in jedem Intervalle, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge $P^{(\nu)}$ enthält, *linear* ist. Nun ist aber die Menge $P$ von der $\nu^{\text{ten}}$ Art, wie vorausgesetzt wurde, es enthält mithin überhaupt ein beliebig in der Geraden angenommenes Intervall $(a \ldots b)$ nur eine endliche Anzahl Punkte aus $P^{(\nu)}$. Es ist also $F(x)$ linear in jedem willkürlich angenommenen Intervalle $(a \ldots b)$, und daraus folgt, wie leicht zu sehen, für $F(x)$ die Form: $F(x) = cx + c'$ für alle Werte des $x$. Nachdem dies dargetan ist, geht der Beweis in der nämlichen Weise weiter wie in der schon zweimal zitierten Abhandlung von dem Momente an, wo darin ebenfalls für $F(x)$ die lineare Form nachgewiesen ist.

Dem hier bewiesenen Satze kann auch die folgende Fassung gegeben werden:

„*Eine unstetige Funktion $f(x)$, welche für alle Werte von $x$, welche den Punkten einer im Intervalle $(0 \ldots 2\pi)$ gegebenen Punktmenge $P$ der $\nu^{\text{ten}}$ Art entsprechen, von Null verschieden oder unbestimmt, für alle übrigen Werte des $x$ aber gleich Null ist, kann durch eine trigonometrische Reihe nicht dargestellt werden.*“

**[Anmerkung.]**

Diese Abhandlung bringt die in II 3 (S. 85) in Aussicht gestellte Verallgemeinerung des Eindeutigkeitstheorems auf den Fall, wo die Ausnahmewerte des Argumentes eine *unendliche* Menge $P$ bilden, die nur endlich viele (nicht verschwindende) „Ableitungen" $P', P'', \ldots P^{(\nu)}$ besitzt.

Wiewohl diese Ausdehnung des Satzes noch nicht seine äußerste Grenze darstellt, so ist die Abhandlung doch wichtig in zweifacher Beziehung:

1. Sie bringt im § 1 in gedrängter Darstellung zum ersten Male die sog. „Cantorsche Theorie der Irrationalzahlen", worin diese als „Grenzwerte" konvergenter Reihen von Rationalzahlen (später von Cantor „Fundamentalreihen" genannt) erklärt werden. Unter einer „Zahlengröße" wird hier immer das verstanden, was heute gewöhnlich als „reelle Zahl" bezeichnet wird.

2. Im § 2 wird aus dem Begriffe des „Grenzpunktes" einer unendlichen Punkt- oder Zahlenmenge (heute gewöhnlich „Häufungspunkt" genannt), der Begriff der „abgeleiteten Punktmenge" entwickelt, der dann $\alpha$ mal iteriert zur Definition von „Punktmengen $\alpha$ter Art" führt. Seine weitere Ausdehnung über jeden endlichen Index $\alpha$ hinaus hat den Forscher dann mit innerer Notwendigkeit zur Begriffsschöpfung „transfiniter" Ordnungszahlen $\omega, \omega + 1, \ldots \omega^2, \ldots$ geführt. In diesem Begriffe der „höheren Ableitungen" einer Punktmenge haben wir somit den eigentlichen Keimpunkt und in der Theorie der trigonometrischen Reihen die Geburtsstätte der Cantorschen „Mengenlehre" zu erblicken.

## 6. Bemerkung über trigonometrische Reihen.

[Math. Annalen Bd. 16, S. 113–114 (1880).]

Auf Seite 95 im 64ten Teile des Archivs der Math. u. Physik versucht Herr Appell für einen von mir in Crelles Journal Bd. 72 [II 2, S. 80] bewiesenen Satz einen einfacheren Beweis zu geben.

Es handelt sich darum, zu zeigen, daß, wenn für jeden speziellen Wert von $x$ in einem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ die Bedingung erfüllt ist:

$$\operatorname{Lim}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$$
$$\text{für} \quad n = \infty,$$

alsdann $a_n$ und $b_n$ mit wachsendem $n$ unendlich klein werden.

Herr Appell versteht unter $B_n$ den absolut größten Wert, welchen die Funktion $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ für alle Werte von $x$ im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ annimmt, und sagt: „cette valeur $B_n$ tend également sur 0 quand $n$ augmente indéfiniment."

Diese Behauptung jedoch, auf welche sich der ganze Beweis des Herrn Appell gründet, ist, wenn sie nicht speziell begründet wird, durchaus *unzulässig* und *gleichbedeutend* mit der *Annahme*, daß die Funktion

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

für alle Werte von $x$ im gedachten Intervalle in *gleichem Grade* gegen Null konvergiert[1], wenn $n$ in das Unendliche wächst.

Daß mit *Hinzuziehung* dieser *Annahme* der Beweis des Satzes *leicht* geführt werden kann, ist bereits von Herrn Heine in Crelles Journal Bd. 71, S. 357 gezeigt worden.

Übrigens habe ich eine etwas vereinfachende Darstellung meines, auf die *Annahme* der Konvergenz in gleichem Grade [der „gleichmäßigen Konvergenz"] sich *in keiner Weise* stützenden Beweises in den Math. Ann. Bd. 4, S. 139 [II 4, S. 87] gegeben. Eine noch größere Vereinfachung läßt sich, meines Erachtens, bei der Natur des Gegenstandes nicht erreichen.

---

[1] Man sagt von einer $f(n, x)$, daß sie mit unbegrenzt wachsendem $n$ für alle Werte von $x$ eines Intervalls $(\alpha \ldots \beta)$ *in gleichem Grade* unendlich klein wird oder sich der Null nähert, wenn, bei beliebig vorgegebener positiver Größe $\delta$, eine Zahl $n_\delta$ angegeben werden kann, so daß für $n \geq n_\delta$ und *für alle Werte von* $x$ im betrachteten Intervalle dem absoluten Betrage nach $f(n, x)$ kleiner ist als $\delta$.

# 7. Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen.

[Math. Annalen Bd. 16, S. 267–269 (1880).]

Zur näheren Erläuterung dessen, was ich auf S. 113 dieses Bandes [hier S. 103] gesagt habe, erlaube ich mir noch folgendes hinzuzufügen:

Daß der, von Herrn **Appell** im Archiv d. Math. u. Physik, 64 T. S. 96, *implizite* angewandte Satz:

„*Wenn für jeden speziellen Wert von $x \geqq \alpha$ und $\leqq \beta$:*

$$\operatorname{Lim} f(n, x) = 0 \quad \textit{für} \quad n = \infty,$$

*wo $f(n, x)$ für jedes spezielle $n$ eine stetige Funktion von $x$ bedeutet, deren absolutes Maximum $B_n$ sei, so ist*

$$\operatorname{Lim} B_n = 0 \quad \textit{für} \quad n = \infty\text{“}$$

im allgemeinen *falsch* ist, geht unter anderem aus dem folgenden einfachen Beispiele hervor:

$$f(n, x) = \frac{n\,x(1-x)}{n^2 x^2 + (1-x)^2}$$

für

$$0 \leqq x \leqq 1.$$

Hier ist für jedes spezielle $x \geqq 0$ und $x \leqq 1$

$$\operatorname{Lim} f(n, x) = 0 \quad \text{für} \quad n = \infty;$$

es ist ferner $f(n, x)$ eine stetige Funktion von $x$; *nichtsdestoweniger* ist $B_n = f\left(n, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}$ und es wird also in diesem Falle $B_n$ *nicht* unendlich klein.

Daß für den Fall

$$f(n, x) = a_n \cos n x + b_n \sin n x,$$

(wenn die Bedingung

$$\operatorname{Lim} f(n, x) = 0 \quad \text{für} \quad x = \infty,$$

für jeden speziellen Wert von $x \geqq \alpha$ und $\leqq \beta$ erfüllt ist) *in der Tat* auch

$$\operatorname{Lim} B_n = 0 \quad \text{für} \quad n = \infty,$$



*ergibt sich erst als eine unmittelbare Folge meines Beweises* (Math. Ann. Bd. 4, S. 139) [II, 4 S. 87]; es darf aber diese Tatsache nicht ohne Beweis *vorausgesetzt* werden, da sonst hiermit, wie bei Herrn **Appell**, gewissermaßen ein circulus vitiosus begangen wird.

Einen andern Beweis für den in Rede stehenden Satz über trigonometrische Reihen hat Herr P. **du Bois-Reymond** in einer Abhandlung „Beweis, daß die Koeffizienten usw. § 15., Note 12, Abh. d. königl. bayr. Ak. der W. II. Cl. XII. Bd. 1. Abt.“ versucht; derselbe beruht jedoch auf ähnlichen Voraussetzungen wie die des Herrn **Appell** und ist daher ebenso unzulässig.

Durch das oben gegebene Beispiel wird übrigens noch eine andere Frage berührt.

Bekanntlich haben **Abel** und später **Seidel** auf das Vorkommen der „ungleichmäßigen Konvergenz“ unendlicher Reihen aufmerksam gemacht, **Abel**, indem er auf einen Irrtum **Cauchys** in dessen Analyse algébrique hinwies, in welcher **Cauchy** aus dem Umstande der Konvergenz einer Reihe für alle Werte von $x \geqq \alpha$ und $\leqq \beta$ auf die Stetigkeit der Reihensumme einen Schluß zog und dabei unbewußt die *Voraussetzung* der *gleichmäßigen* Konvergenz eintreten ließ, welche in der Tat, wenn die einzelnen Glieder der Reihe stetige Funktionen von $x$ sind, die Stetigkeit der Reihensumme zur Folge hat. **Seidel** hat das Vorkommen der ungleichmäßigen Konvergenz in der „Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche diskontinuierliche Funktionen darstellen“ (Denkschriften der Münchener Akademie, Jahrgang 1848) ausführlich diskutiert und gezeigt, wie Reihen, welche für jeden Wert von $x \geqq \alpha$ und $\leqq \beta$ konvergieren und unstetige Funktionen darstellen, *ungleichmäßig* konvergieren müssen. *Ungewiß* blieb darnach, ob die Unstetigkeit der dargestellten Funktion eine wesentliche Bedingung für das Vorkommen der ungleichmäßigen Konvergenz sei. Herr **Heine** bezeichnet ausdrücklich in seiner Arbeit „Über trigonometrische Reihen, § 1“ (Crelles Journal Bd. 71, S. 353) diesen Gegenstand als *noch nicht aufgeklärt*.

Es ist sogar von Herrn O. **Stolz** der Versuch gemacht worden (Bericht des naturw. medizinischen Vereins in Innsbruck v. Dezember 1874), den Satz zu beweisen, daß[1], wenn in einer für jeden Wert von $x \geqq \alpha$ und $\leqq \beta$ gültigen Gleichung

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \varphi_\nu(x)$$

sowohl $f(x)$, wie auch die $\varphi_\nu(x)$ stetige Funktionen von $x$ sind, alsdann die Reihe rechts in *gleichem Grade* konvergiert. Daß dieser Satz nicht zugestanden

[1] Herr **Stolz** hat selbst bereits im Jahrb. Fortschr. Math. 7, 157 auf die Ungültigkeit seines Beweises aufmerksam gemacht, nachdem ich in einem Briefwechsel mit ihm (April 1875) meine Bedenken gegen seinen Beweis zur Geltung gebracht hatte.

werden kann, wird *nun* durch folgendes Beispiel gezeigt; setzt man

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\nu\, x(1-x)}{\nu^2 x^2 + (1-x)^2} - \frac{(\nu+1)\, x(1-x)}{(\nu+1)^2 x^2 + (1-x)^2},$$

so ist für $0 \leqq x \leqq 1$

$$\frac{x(1-x)}{x^2 + (1-x)^2} = \sum_1^\infty \varphi_\nu(x).$$

Trennt man die ersten $n-1$ Glieder der Reihe ab, so ist der Rest

$$R_n(x) = \frac{n\, x(1-x)}{n^2 x^2 + (1-x)^2};$$

er wird zwar für jedes einzelne $x$ mit unendlich wachsendem $n$ unendlich klein, aber, wie oben gezeigt wurde, *nicht* in gleichem Grade, weil es kein noch so großes $n$ gibt, so daß für alle Werte von $x \geqq 0$ und $\leqq 1$ die Ungleichung bestünde

$$R_n(x) < \frac{1}{2}.$$

In der Tat hat man für jedes $n$

$$R_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Wie ich nachträglich von befreundeter Seite aufmerksam gemacht werde, hat sowohl Herr du Bois-Reymond in der oben zitierten Abhandlung, Note 1, ein ähnliches, wenn auch komplizierteres Beispiel gegeben, wie auch Herr Darboux in seiner mir bisher unbekannt gebliebenen Abhandlung „Mémoire sur les fonctions discontinues“ die nämliche Frage diskutiert, so daß ich den genannten Herren in diesem Punkte mit Vergnügen die Priorität zugestehen kann. Das folgende von Herrn Darboux herrührende Beispiel bietet noch ein besonderes Interesse dar, indem es nicht nur eine Reihe liefert, die ungleichmäßig konvergiert und dennoch eine stetige Funktion darstellt, sondern auch die *bestimmte gliedweise* Integration in einem Intervalle, dessen einer Endwert 0 ist, *nicht* zuläßt.

Man hat für jedes reelle $x$

$$2xe^{-x^2} = \sum_1^\infty \left(2\nu x e^{-\nu x^2} - 2(\nu+1)\, x e^{-(\nu+1)x^2}\right);$$

der Rest nach Abtrennung der $n-1$ ersten Glieder ist hier

$$R_n(x) = 2nxe^{-nx^2} \quad \text{und man hat} \quad \int_0^\beta R_n(x)\,dx = (1 - e^{-n\beta^2}),$$

welches Integral mit wachsendem $n$ *nicht* unendlich klein wird.

## 8. Über ein neues und allgemeines Kondensationsprinzip der Singularitäten von Funktionen.

[Math. Annalen Bd. 19, S. 588—594 (1882).]

Bekanntlich hat H. Hankel, dessen scharfsinnige Publikationen den Verlust, welchen die Wissenschaft durch sein frühzeitiges Hinscheiden zu beklagen hat, aufs deutlichste hervortreten lassen, kurze Zeit vor seinem Ende eine Abhandlung veröffentlicht in Form eines Tübinger Universitätsprogramms (zum 6. März 1870): „Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen, ein Beitrag zur Feststellung des Begriffs der Funktion überhaupt.“

Es finden sich in dieser Schrift geistvolle, dem damaligen Standpunkte der betreffenden Fragen vollkommen entsprechende, auf genauer Kenntnis der einschlägigen Literatur beruhende, wenn auch in mancher Beziehung nicht ganz strenge Erörterungen über den Umfang des allgemeinen Funktionsbegriffs und die ersten beachtenswerten Versuche, Unterschiede ausfindig zu machen, auf welche eine naturgemäße Klassifikation der betreffenden Begriffsgebiete gegründet werden könne. Jedenfalls hat diese Arbeit anregend auf die bezügliche Richtung der mathematischen Forschung gewirkt, wie man an vielen später erschienenen Untersuchungen anderer Mathematiker ersehen kann, z. B. an dem verdienstvollen Werke von Herrn Ulisses Dini: „Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali“.

Dasselbe enthält einzelne Kapitel, welche ausdrücklich der genaueren Untersuchung und Umgrenzung von Fragen gewidmet sind, die H. Hankel, wesentlich angeregt durch Riemanns Forschungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen, zum ersten Male in obengenannter Abhandlung einer ausführlichen und selbständigen Besprechung unterzogen hat.

Der interessanteste Abschnitt in der Hankelschen Arbeit, auf dessen völlige Klarstellung die Bestrebungen des Herrn Dini mit Erfolg gerichtet waren, bezieht sich auf eine Methode, welche von Hankel „*Kondensationsprinzip der Singularitäten*“ genannt wird und mit welcher es ihm gelingt, aus Funktionen $\varphi(x)$, die an einer gegebenen Stelle, $(x = 0)$, irgend eine Singularität (wie etwa eine Unstetigkeit oder den Mangel eines bestimmten Differentialquotienten) darbieten, andere Funktionen herzustellen, welche dieselbe Art von Singularität nicht allein an unendlich vielen Stellen zeigen, sondern sogar an einer Mannigfaltigkeit von Stellen, welche, wie ich mich ausdrücke, in jedem Intervalle *überalldicht* ist (s. Math. Ann. Bd. 15, S. 2) [hier III 4, S. 140]. Es ist dies die Menge aller Stellen, für welche $x$ eine rationale Zahl ist.

Das besagte Prinzip besteht einfach in der Bildung folgender Funktion:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \, \varphi(\sin(\nu \pi x)), \tag{I}$$

wobei durch angemessene Wahl der Reihenkoeffizienten $c_\nu$ für die Konvergenz dieser Reihe sowohl wie der aus ihr hervorgehenden Reihen, soweit letztere gebraucht werden, gesorgt werden muß.

Diese von Hankel erfundene Methode der Kondensation von gegebenen Singularitäten auf alle rationalen Stellen der Veränderlichen $x$ birgt, so einfach sie scheint und so verdienstlich sie zweifellos auch gewesen ist, doch mancherlei Mängel in sich, die schon in einer kurzen Besprechung hervortreten, welche ich sehr bald nach Erscheinen der Hankelschen Schrift über dieselbe gegeben habe. (M. s. Literarisches Zentralblatt v. 1871, S. 150, v. 18. Februar).

*Erstens* ist die Untersuchung der Funktion $f(x)$ dadurch erschwert, daß die auf eine Stelle $x = \frac{p}{q}$ übertragene Singularität an unendlich vielen Gliedern der Reihe gleichzeitig auftritt, nämlich an allen denjenigen Gliedern, in welchen, wenn $p$ und $q$ relativ prim sind, $\nu$ ein Vielfaches von $q$ ist; dadurch tritt die Möglichkeit einer gegenseitigen Kompensation der Irregularitäten ein und es wird bestenfalls die Mühe gefordert, den Nachweis zu führen, daß diese Eventualität nicht vorliege.

*Zweitens* führt man durch die Anwendung des Sinus unter dem Funktionszeichen $\varphi$ Schwankungen herbei, die den Gang der Funktion $f(x)$ in überflüssiger und mit dem gesetzten Ziele gar nicht zusammenhängender Weise komplizieren.

*Drittens* endlich entbehrt die Hankelsche Methode insofern der *Allgemeinheit*, als die Mannigfaltigkeit der Stellen, auf welche die Singularität von $\varphi(x)$ übertragen wird, die Menge der *rationalen Zahlen* ist, und es ist nicht abzusehen, inwieweit sich das Prinzip auf andere Mengen von Singularitätsstellen verallgemeinern ließe. Nun aber bildet die Menge aller rationalen Zahlen ebenso wie andere Mannigfaltigkeiten, welche viel umfassender und inhaltreicher sind, wie beispielsweise die Menge *aller algebraischen Zahlen*, wie ich vor acht Jahren gefunden, eine sogenannte *abzählbare Menge* (m. s. Crelles Journal Bd. 77, S. 258; Bd. 84, S. 250; ferner Math. Ann. Bd. 15, S. 4) [hier III 1, S. 115; III 2, S. 119; III 4, S.142]; d. h. man kann eine solche Menge, *unerachtet* und trotz ihres *Überalldichtseins* in jedem Intervalle,



(auf viele Weisen) nach einem bestimmten leicht zu definierenden Gesetze in die Form einer einfach unendlichen Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\omega_\nu$, wo $\nu$ ein positiver unbeschränkter ganzzahliger Index ist, bringen, so daß jedes Glied oder Element der Menge an einer bestimmten Stelle $\nu$ dieser Reihe steht und auch umgekehrt jedes Glied $\omega_\nu$ der Reihe ein Element der gedachten Mannigfaltigkeit ist. — Diese Bemerkung führt, worauf mich Herr Weierstraß aufmerksam gemacht hat, zu einer viel einfacheren Methode der *Kondensation von Singularitäten*, als die Hankelsche ist, und, was die Hauptsache zu sein scheint, es ist diese Methode zugleich frei von allen Umständen, welche die Anwendung jener älteren zugleich beschränken und erschweren. Ist wiederum $\varphi(x)$ eine gegebene Funktion mit der einzigen singulären Stelle $x = 0$ und hat man eine beliebige *abzählbare* Menge von Werten, die wir $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$ nennen, beispielsweise die Menge aller *algebraischen* Zahlen, so setze man:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \, \varphi(x - \omega_\nu), \tag{II}$$

wo durch passende Wahl der Koeffizienten für die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe für $f(x)$ und nötigenfalls auch der aus ihr abgeleiteten oder mit ihr zusammenhängenden Reihen gesorgt werde.

Man erhält auf diese Weise Funktionen, welche an *allen* Stellen $x = \omega_\mu$ dieselbe Art der Singularität haben, wie $\varphi(x)$ an der Stelle $x = 0$, und an den übrigen Stellen, welche von den Stellen $\omega_\mu$ verschieden sind, wird sich $f(x)$ im allgemeinen regulär verhalten. Der Vorzug unserer Methode vor der älteren dürfte neben der einfacheren Bildungsweise auf den Umstand zurückzuführen zu sein, daß die auf die Stelle $x = \omega_\mu$ übertragene Singularität *ausschließlich* dem *einen* Gliede der Reihe (II) zu verdanken ist, in welchem $\nu = \mu$ ist, während alle übrigen Glieder, in denen $\nu$ von $\mu$ verschieden ist, sich an der Stelle $x = \omega_\mu$ regulär verhalten und auch ihre Gesamtheit bei gehöriger Wahl der Koeffizienten $c_\nu$ keine fremdartige Komplikation herbeiführt.

Auf diese Weise scheint, da sowohl die Funktion $\varphi(x)$ nach Maßgabe des jeweiligen Bedürfnisses und desgleichen auch die *abzählbare* Menge der Singularitätsstellen $\omega_\mu$ *frei* gewählt werden können, ein ziemlich weites Feld für singuläre Funktionsbildungen und deren Untersuchung eröffnet, welches denjenigen Fachgenossen vielleicht nicht unwillkommen sein wird, die sich für die Ausbildung der Funktionenlehre in der auch von Hankel mit Erfolg betretenen Richtung interessieren.

Indem ich mir vorbehalte, auf diesen Gegenstand ausführlicher zurückzukommen, möchte ich hier nur auf zwei besondere Fälle aufmerksam machen, die ich der Güte meines hochverehrten früheren Lehrers, des Herrn Weierstraß verdanke.

Das erste betrifft die Annahme $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$, womit bei passender Wahl der positiven Koeffizienten $c_\nu$ eine Funktion $f(x)$ gewonnen wird, die endlich und stetig für alle endlichen reellen Werte von $x$ ist, mit $x$ gleichzeitig zu- und abnimmt, und dennoch die Eigentümlichkeit hat, an allen Stellen $x = \omega_\nu$ einen unendlich großen Differentialquotienten zu besitzen. Das zweite Beispiel erlaube ich mir wörtlich, abgesehen von unbedeutenden Vereinfachungen, in der Darlegung des großen Mathematikers zu geben.

Es sei $x$ eine reelle Veränderliche und

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2}\, x \sin\left(\frac{1}{2}\log(x^2)\right), \tag{1}$$

wo dem Logarithmus von $x^2$ sein reeller Wert gegeben werden soll; so ist $\varphi(x)$ differentiierbar für jeden von Null verschiedenen Wert der Größe $x$ und es liegt der Differentialquotient

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 1 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\log(x^2)\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\log(x^2)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log(x^2)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

beständig in dem durch die beiden Grenzen $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ bezeichneten Intervalle. Sind daher $x_1$, $x_2$ irgend zwei bestimmte Werte und setzt man

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (x_2 - x_1)\,\varphi(x_1, x_2), \tag{3}$$

so ergibt sich zunächst für den Fall, wo $x_1$, $x_2$ dasselbe Zeichen haben, daß der Wert von $\varphi(x_1, x_2)$ ebenfalls in dem angegebenen Intervalle liegt. Da aber $\varphi(x)$ eine durchweg stetige Funktion ist, so gilt das Gesagte auch, wenn eine der Größen $x_1$, $x_2$ gleich Null ist. Haben endlich diese Größen verschiedene Zeichen, so hat man

$$\varphi(x_2) = x_2\,\varphi(0, x_2), \qquad \varphi(x_1) = x_1\,\varphi(x_1, 0),$$

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (x_2 - x_1)\left\{\frac{x_2}{x_2 - x_1}\,\varphi(0, x_2) + \frac{-x_1}{x_2 - x_1}\,\varphi(x_1, 0)\right\},$$

und es ist demnach, da $\frac{x_2}{x_2 - x_1}$, $\frac{-x_1}{x_2 - x_1}$ positive Größen und die Summe derselben gleich 1 ist, $\varphi(x_1, x_2)$ ein Mittelwert zwischen $\varphi(0, x_2)$ und $\varphi(x_1, 0)$, also nach dem eben Bemerkten auch jetzt in dem genannten Intervalle enthalten. Man hat daher in allen Fällen

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Dies vorausgeschickt sei nun

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_\nu,\ \ldots \tag{5}$$

*irgend eine abzählbare* Mannigfaltigkeit von reellen untereinander verschie-



denen Zahlwerten, ferner

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_\nu,\ \ldots \tag{6}$$

eine unendliche Reihe *positiver* Größen, welche nur die Bedingungen zu erfüllen hat, daß die *beiden* Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} |\omega_\nu|\, c_\nu$$

konvergieren. (Ich bemerke, daß, was auch die Reihe (5) sei, die Reihe (6) immer so gewählt werden kann, daß diese beiden Bedingungen zugleich realisiert sind. Besonders einfach läßt sich solches erreichen, wenn (5) aus *allen algebraischen* Zahlen in *derjenigen Anordnung* besteht, welche ich in Crelles Journal Bd. 77 [III 1, S. 115] aufgestellt habe. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß bei dieser Anordnung sämtlicher reellen algebraischen Zahlen immer $|\omega_\nu| < \nu$; es genügt also in diesem Falle $c_\nu = k^\nu$ zu setzen, um jenen beiden Bedingungen zu genügen, vorausgesetzt nur $k > 0$ und $< 1$) [1].

Nun definiere man eine Funktion $f(x)$ mittels der Gleichung

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, \varphi(x - \omega_\nu), \tag{7}$$

so ist $f(x)$ eine kontinuierliche Funktion, welche ebenso wie $\varphi(x)$ mit der Veränderlichen $x$ gleichzeitig wächst und abnimmt und über deren Differentiierbarkeit sich folgendes feststellen läßt:

1. Gibt man der Veränderlichen $x$ einen Wert $x_0$, der *nicht* in der Reihe (5) enthalten ist, so nähert sich der Quotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

wenn die Veränderliche $h$ irgendwie unendlich klein wird, einer bestimmten endlichen Grenze, und diese wird erhalten, wenn man in der angegebenen Reihe (7) von jedem einzelnen Gliede die Ableitung bestimmt und dann $x = x_0$ setzt.

Zunächst folgt aus (2) und der über die Größen $c_\nu$ gemachten Annahme, daß die Reihe

$$g(x_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, \varphi'(x_0 - \omega_\nu) \tag{8}$$

einen bestimmten endlichen Wert hat. Unter $\mu$ eine beliebige ganze positive Zahl verstanden, sei nun

$$\left.\begin{aligned} S_\mu &= \sum_{\nu=1}^{\mu} c_\nu\, \varphi'(x_0 - \omega_\nu), \\ S'_\mu &= \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu\, \varphi'(x_0 - \omega_\nu), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} f_\mu(x) &= \sum_{\nu=1}^{\mu} c_\nu\, \varphi(x-\omega_\nu), \\ F_\mu(x) = f(x) - f_\mu(x) &= \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu\, \varphi(x-\omega_\nu), \\ C_\mu &= \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

so wird

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f_\mu(x_0+h)-f_\mu(x_0)}{h} + \frac{F_\mu(x_0+h)-F_\mu(x_0)}{h},$$

und es ist nach dem Obigen für einen beliebigen von Null verschiedenen Wert der Größe $h$

$$C_\mu\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqq \frac{F_\mu(x_0+h)-F_\mu(x_0)}{h} \leqq C_\mu\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{11}$$

Man hat also

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = g(x_0) + \frac{f_\mu(x_0+h)-f_\mu(x_0)}{h} - S_\mu - S'_\mu + C_\mu\,\theta_\mu, \tag{12}$$

wo

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \theta_\mu \leqq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nun sei $\delta$ eine beliebig klein angenommene positive Größe, so kann man der Zahl $\mu$ einen so großen Wert geben, daß für jeden Wert von $h$ der absolute Betrag von

$$-S'_\mu + C_\mu\,\theta_\mu$$

kleiner als $\delta$ ist. Da nun ferner

$$\operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{f_\mu(x_0+h)-f_\mu(x_0)}{h} = S_\mu,$$

so folgt aus (12), daß der Wert von $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ stets zwischen $g(x_0)-2\delta$ und $g(x_0)+2\delta$ liegt, sobald der absolute Betrag von $h$ unterhalb einer bestimmten Grenze angenommen wird, d. h. daß $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, wenn $h$ unendlich klein wird, sich der bestimmten endlichen Grenze $g(x_0)$ nähert; w. z. b. w.

2. Gibt man dagegen der Veränderlichen $x$ einen in der Reihe (5) enthaltenen Wert $\omega_\lambda$, so nähert sich der Quotient

$$\frac{f(\omega_\lambda+h)-f(\omega_\lambda)}{h}$$

keiner bestimmten Grenze, sondern schwankt zwischen zwei verschiedenen endlichen Grenzen in der Art, daß es unter den Werten von $h$, welche



kleiner als eine beliebig angenommene Größe sind, stets solche gibt, für welche der in Rede stehende Quotient einen zwischen den genannten Grenzen beliebig anzunehmenden Wert hat.

Es gibt nämlich unter den Gliedern der Reihe (7) eines, das dem Werte $\nu=\lambda$ entspricht; trennt man dasselbe ab und setzt

$$f(x) = c_\lambda\,\varphi(x-\omega_\lambda) + F(x), \tag{13}$$

so hat man

$$\begin{aligned} \frac{f(\omega_\lambda+h)-f(\omega_\lambda)}{h} &= c_\lambda\,\frac{\varphi(h)}{h} + \frac{F(\omega_\lambda+h)-F(\omega_\lambda)}{h} \\ &= c_\lambda\left(1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\log(h^2)\right)\right) + \frac{F(\omega_\lambda+h)-F(\omega_\lambda)}{h}. \end{aligned} \tag{14}$$

Der Quotient $\frac{F(\omega_\lambda+h)-F(\omega_\lambda)}{h}$ nähert sich nach dem unter 1. Bewiesenen, wenn $h$ unendlich klein wird, einer bestimmten endlichen Grenze, die mit $G(\omega_\lambda)$ bezeichnet werde. Die Funktion $1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\log(h^2)\right)$ kann aber, eine wie kleine obere Grenze man auch für den absoluten Betrag von $h$ festsetzen möge, jeden in dem Intervalle

$$\frac{1}{2} \cdots \frac{3}{2}$$

enthaltenen Wert annehmen.

Der Wert des Quotienten $\frac{f(\omega_\lambda+h)-f(\omega_\lambda)}{h}$ schwankt also in der angegebenen Weise zwischen den Grenzen

$$\frac{1}{2}c_\lambda + G(\omega_\lambda) \quad \text{und} \quad \frac{3}{2}c_\lambda + G(\omega_\lambda),$$

was man auch so ausdrücken kann:

Der in Rede stehende Quotient kann für unendlich kleine Werte von $h$ jeden zwischen den angegebenen Grenzen liegenden Wert annehmen. Die Funktion $f(x)$ hat also für die der Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda, \ldots$ angehörigen Werte von $x$ keinen bestimmten Differentialquotienten, obwohl der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bei gegebenem Wert von $x$ für jeden Wert von $h$ zwischen zwei angebbaren Grenzen bleibt.

**[Anmerkung.]**

[1] Zu S. 111. Es genügt für unseren Zweck, die in der zitierten Arbeit (hier S. 116) angegebene Anordnung der algebraischen Zahlen auf die *rationalen* Zahlen allein anzuwenden, so daß jeder Bruch $\omega = \frac{p}{q}$ jedem anderen $\omega' = \frac{p'}{q'}$ vorangeht, für welchen die Summe $|p'|+|q'| > |p|+|q|$ ist. Denn da dann zu jedem ganzzahligen $s = |p|+|q|$ mindestens ein $\omega$ gehört, dessen absoluter Betrag $< s$ ist, so bleibt der Index $\nu$ von $\omega_\nu$ immer größer als das zugehörige $s_\nu$ und damit als der Betrag von $\omega_\nu$.

## 9. Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstraß-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen.

[Math. Annalen Bd. 33, S. 476 (1889).]

Es möge mir gestattet sein, nur *ganz kurz* auf die Bedenken zu antworten, welche Herr **Illigens** in bezug auf meine Theorie der Irrationalzahlen ausgesprochen hat. Seine Einwände scheinen mir alle darauf hinaus zu laufen, daß den mit Hilfe von sogenannten Fundamentalreihen eingeführten irrationalen Zahlbegriffen $b, b', b'', \ldots$ die Bedeutung einer anschaulichen *Vielheit* nicht zugesprochen werden könne. Darin hat er gewiß recht; es ist aber auch weder von mir noch von anderen jemals behauptet worden, daß die Zeichen $b, b', b'', \ldots$ *konkrete* Größen im eigentlichen Wortsinne seien. Als *abstrakte Gedankendinge* sind sie nur Größen im uneigentlichen oder übertragenen Sinne des Wortes. Für *entscheidend* muß hier angesehen werden, daß man, wie jeder mit meiner Theorie Vertraute weiß, mit Hilfe dieser abstrakten Größen $b, b', b'', \ldots$ *eigentliche konkrete* Größen, z. B. geometrische Strecken usw., quantitativ genau zu bestimmen imstande ist (vgl. Math. Ann. Bd. V, p. 127 [hier II, 5 S. 92]). Wenn dies gehörig berücksichtigt wird, so fallen alle von Herrn I. gemachten Einwände in bezug auf die in *übertragenem Sinne* gebrauchten Bezeichnungen des „Größer-", „Kleiner-" und „Gleichseins" der verschiedenen Zahlgrößen, und ebensowenig wird man Anstoß daran nehmen können, eine Zahlgröße $b$ in *übertragenem Wortsinne* als Grenze der Glieder der ihr zugehörigen Fundamentalreihe zu bezeichnen.

Daß es aber Herrn I. selbst, welcher am Schlusse seines Aufsatzes ausdrücklich die Irrationalzahlen anerkennt, an einer Definition der letzteren fehlt, erkennt man aus seiner Auflösung der Gleichung $x^2 = 3$, welche vermeintlich durch $\sqrt{3}$ geschieht; während offenbar $\sqrt{3}$ nichts anderes ist als eine Umschreibung der aufgeworfenen *Frage:* eine Zahl zu suchen, deren Quadrat 3 ist. $\sqrt{3}$ ist also nur ein *Zeichen* für eine Zahl, welche erst noch gefunden werden soll, nicht aber deren Definition. Letztere wird jedoch in meiner Weise, etwa durch

$$(1{,}7,\ 1{,}73,\ 1{,}732, \ldots)$$

befriedigend gegeben.

**[Anmerkung.]**

Die „Bemerkung" bezieht sich auf einen Aufsatz von **Eberh. Illigens** im gleichen Bande der „Mathematischen Annalen" S. 155—160, wo an der von **Cantor** zuerst in II, 5 ausführlicher entwickelten Theorie der Irrationalzahlen Kritik geübt wird.

# III. Abhandlungen zur Mengenlehre.

## 1. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

[Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, S. 258—262 (1874).]

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgröße $\omega$ verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{1}$$

wo $n, a_0, a_1, \ldots a_n$ ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen $n$ und $a_0$ positiv, die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ ohne gemeinschaftlichen Teiler und die Gleichung (1) irreduktibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, daß nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1) höchstens so viel reelle algebraische Zahlen $\omega$, welche ihr genügen, als ihr Grad $n$ angibt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit einen Inbegriff von Zahlgrößen, welcher mit $(\omega)$ bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, daß in jeder Nähe irgendeiner gedachten Zahl $\alpha$ unendlich viele Zahlen aus $(\omega)$ liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, daß man den Inbegriff $(\omega)$ dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen $\nu$, welcher durch das Zeichen $(\nu)$ angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so daß zu jeder algebraischen Zahl $\omega$ eine bestimmte ganze positive Zahl $\nu$ und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl $\nu$ eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl $\omega$ gehört, daß also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff $(\omega)$ in der Form einer unendlichen gesetzmäßigen Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \tag{2}$$

gedacht werden kann, in welcher sämtliche Individuen von $(\omega)$ vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2), welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet. Sobald man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, läßt sich dasselbe nach Willkür modifizieren; es wird daher genügen, wenn ich in § 1 denjenigen Anordnungsmodus mitteile, welcher, wie mir scheint, die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt.

Um von dieser Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen

Zahlen eine Anwendung zu geben, füge ich zu dem § 1 den § 2 hinzu, in welchem ich zeige, daß, wenn eine beliebige Reihe reeller Zahlgrößen von der Form (2) vorliegt, man in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ Zahlen $\eta$ bestimmen kann, welche *nicht* in (2) enthalten sind; kombiniert man die Inhalte dieser beiden Paragraphen, so ist damit ein neuer Beweis des zuerst von Liouville bewiesenen Satzes gegeben, daß es in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ unendlich viele *transzendente*, d. h. nicht algebraische reelle Zahlen gibt. Ferner stellt sich der Satz in § 2 als der Grund dar, warum Inbegriffe reeller Zahlgrößen, die ein sogenanntes Kontinuum bilden (etwa die sämtlichen reellen Zahlen, welche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind), sich nicht eindeutig auf den Inbegriff $(\nu)$ beziehen lassen; so fand ich den deutlichen Unterschied zwischen einem sogenannten Kontinuum und einem Inbegriffe von der Art der Gesamtheit aller reellen algebraischen Zahlen.

## § 1.

Gehen wir auf die Gleichung (1), welcher eine algebraische Zahl $\omega$ genügt und welche nach den gedachten Festsetzungen eine völlig bestimmte ist, zurück, so möge die Summe der absoluten Beträge ihrer Koeffizienten, vermehrt um die Zahl $n-1$, wo $n$ den Grad von $\omega$ angibt, die *Höhe* der Zahl $\omega$ genannt und mit $N$ bezeichnet werden; es ist also, unter Anwendung einer üblich gewordenen Bezeichnungsweise:

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|. \tag{3}$$

Die Höhe $N$ ist danach für jede reelle algebraische Zahl $\omega$ eine bestimmte positive ganze Zahl; umgekehrt gibt es zu jedem positiven ganzzahligen Werte von $N$ nur eine endliche Anzahl algebraischer reeller Zahlen mit der Höhe $N$; die Anzahl derselben sei $\varphi(N)$; es ist beispielsweise $\varphi(1) = 1$; $\varphi(2) = 2$; $\varphi(3) = 4$. Es lassen sich alsdann die Zahlen des Inbegriffes $(\omega)$, d. h. sämtliche algebraischen reellen Zahlen folgendermaßen anordnen: man nehme als erste Zahl $\omega_1$ die eine Zahl mit der Höhe $N = 1$; lasse auf sie, der Größe nach steigend, die $\varphi(2) = 2$ algebraischen reellen Zahlen mit der Höhe $N = 2$ folgen, bezeichne sie mit $\omega_2, \omega_3$; an diese mögen sich die $\varphi(3) = 4$ Zahlen mit der Höhe $N = 3$, ihrer Größe nach aufsteigend, anschließen; allgemein mögen, nachdem in dieser Weise sämtliche Zahlen aus $(\omega)$ bis zu einer gewissen Höhe $N = N_1$ abgezählt und an einen bestimmten Platz gewiesen sind, die reellen algebraischen Zahlen mit der Höhe $N = N_1 + 1$ auf sie folgen, und zwar der Größe nach aufsteigend; so erhält man den Inbegriff $(\omega)$ aller reellen algebraischen Zahlen in der Form:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$$

und kann mit Rücksicht auf diese Anordnung von der $\nu$ten reellen algebraischen Zahl reden, wobei keine einzige aus dem Inbegriffe $(\omega)$ vergessen ist.



## § 2.

Wenn eine nach irgendeinem Gesetze gegebene unendliche Reihe voneinander verschiedener reeller Zahlgrößen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \tag{4}$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eine Zahl $\eta$ (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4) nicht vorkommt; dies soll nun bewiesen werden.

Wir gehen zu dem Ende von dem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ aus, welches uns beliebig vorgegeben sei, und es sei $\alpha < \beta$; die ersten beiden Zahlen unserer Reihe (4), welche im Innern dieses Intervalles (mit Ausschluß der Grenzen) liegen, mögen mit $\alpha', \beta'$ bezeichnet werden, und es sei $\alpha' < \beta'$; ebenso bezeichne man in unserer Reihe die ersten beiden Zahlen, welche im Innern von $(\alpha' \ldots \beta')$ liegen, mit $\alpha'', \beta''$, und es sei $\alpha'' < \beta''$, und nach demselben Gesetze bilde man ein folgendes Intervall $(\alpha''' \ldots \beta''')$ u. s. w. Hier sind also $\alpha', \alpha'' \ldots$ der Definition nach bestimmte Zahlen unserer Reihe (4), deren Indizes im fortwährenden Steigen sich befinden, und das gleiche gilt von den Zahlen $\beta', \beta'' \ldots$; ferner nehmen die Zahlen $\alpha', \alpha'', \ldots$ ihrer Größe nach fortwährend zu, die Zahlen $\beta', \beta'', \ldots$ nehmen ihrer Größe nach fortwährend ab; von den Intervallen $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta''), \ldots$ schließt ein jedes alle auf dasselbe folgenden ein. — Hierbei sind nun zwei Fälle denkbar.

*Entweder* die Anzahl der so gebildeten Intervalle ist endlich; das letzte von ihnen sei $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$; da im Innern desselben höchstens eine Zahl der Reihe (4) liegen kann, so kann eine Zahl $\eta$ in diesem Intervalle angenommen werden, welche nicht in (4) enthalten ist, und es ist somit der Satz für diesen Fall bewiesen. —

*Oder* die Anzahl der gebildeten Intervalle ist unendlich groß; dann haben die Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, weil sie fortwährend ihrer Größe nach zunehmen, ohne ins Unendliche zu wachsen, einen bestimmten Grenzwert $\alpha^\infty$; ein gleiches gilt für die Zahlen $\beta, \beta', \beta'', \ldots$, weil sie fortwährend ihrer Größe nach abnehmen, ihr Grenzwert sei $\beta^\infty$; ist $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (ein Fall, der bei dem Inbegriffe $(\omega)$ aller reellen algebraischen Zahlen stets eintritt), so überzeugt man sich leicht, wenn man nur auf die Definition der Intervalle zurückblickt, daß die Zahl $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ *nicht* in unserer Reihe enthalten sein kann[1]; ist aber $\alpha^\infty < \beta^\infty$, so genügt jede Zahl $\eta$ im Innern des Intervalles $(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$ oder auch an den Grenzen desselben der gestellten Forderung, nicht in der Reihe (4) enthalten zu sein. —

[1] Wäre die Zahl $\eta$ in unserer Reihe enthalten, so hätte man $\eta = \omega_p$, wo $p$ ein bestimmter Index ist; dies ist aber nicht möglich, denn $\omega_p$ liegt *nicht* im Innern des Intervalles $(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)})$, während die Zahl $\eta$ ihrer Definition nach im Innern dieses Intervalles liegt.

Die in diesem Aufsatze bewiesenen Sätze lassen Erweiterungen nach verschiedenen Richtungen zu, von welchen hier nur eine erwähnt sei:

„Ist $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$ eine endliche oder unendliche Reihe voneinander linear unabhängiger Zahlen (so daß keine Gleichung von der Form $a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + \cdots + a_n \omega_n = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten, die nicht sämtlich verschwinden, möglich ist) und denkt man sich den Inbegriff $(\Omega)$ aller derjenigen Zahlen $\Omega$, welche sich als rationale Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten aus den gegebenen Zahlen $\omega$ darstellen lassen, so gibt es in jedem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ unendlich viele Zahlen, die nicht in $(\Omega)$ enthalten sind."

In der Tat überzeugt man sich durch eine ähnliche Schlußweise wie in § 1, daß der Inbegriff $(\Omega)$ sich in der Reihenform

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_\nu, \ldots$$

auffassen läßt, woraus, mit Rücksicht auf diesen § 2, die Richtigkeit des Satzes folgt.

Ein ganz spezieller Fall des hier angeführten Satzes (in welchem die Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n \ldots$ eine endliche und der Grad der rationalen Funktionen, welche den Inbegriff $(\Omega)$ liefern, ein vorgesehener ist) ist, unter Zurückführung auf Galoissche Prinzipien, von Herrn B. Minnigerode bewiesen worden. (Siehe Math. Annalen, Bd. 4, S. 497.)

**[Anmerkung.]**

Die vorstehende Abhandlung, welche die Reihe der mengentheoretischen Arbeiten eröffnet, hat es noch ausschließlich mit dem elementaren Begriff der „abzählbaren Mengen" zu tun, indem gezeigt wird, daß sowohl die Gesamtheit der rationalen wie die der *algebraischen* Zahlen unter diesen Begriff fallen, *nicht* aber die der reellen Zahlen eines endlichen Intervalles überhaupt. Der *erste* Nachweis, der merkwürdigerweise im Titel ausschließlich zum Ausdruck kommt, ist relativ leicht und ergibt sich eigentlich von selbst aus dem Begriff der algebraischen Zahl, sobald die Frage erst einmal gestellt ist. Dagegen ist der im § 2 geführte Beweis für die „Nichtabzählbarkeit" der reellen Zahlen Cantor, wie er selbst sagt, erst nach vergeblichen Versuchen unter Schwierigkeiten gelungen. Er bildet für uns heute das ungleich tiefere Ergebnis der vorliegenden Untersuchung und ist auch in seiner Methode typisch für die spezifisch mengentheoretische Schlußweise. Erst durch den Nachweis, daß es auch „nicht-abzählbare" wohldefinierte mathematische Gesamtheiten gibt, gewinnt der Begriff der „Abzählbarkeit" Sinn und Bedeutung, und der Übergang zum allgemeinen Begriff der „Mächtigkeit" ist dann nur noch ein zweiter Schritt. — Die Terminologie ist in dieser grundlegenden Arbeit noch nicht ausgebildet: anstatt „Menge" heißt es noch: „Gesamtheit" oder „Inbegriff", und auch das Wort „abzählbar" findet sich hier noch nicht: es ist immer nur von einer „eindeutigen Zuordnung" der Elemente einer Gesamtheit zu denen einer anderen die Rede. — Besondere Erläuterungen sind bei der Klarheit der Cantorschen Darstellung wohl nicht erforderlich. Nicht ganz ersichtlich ist übrigens, warum Cantor seinen Satz auf die „reellen" algebraischen Zahlen beschränkt, während doch seine ganze Beweisführung unmittelbar auf *alle* (reellen wie komplexen) algebraischen Zahlen anwendbar ist.

## 2. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

[Crelles Journal f. Mathematik Bd. 84, S. 242–258 (1878)].

Wenn zwei wohldefinierte Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$ sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen (was, wenn es auf eine Art möglich ist, immer auch noch auf viele andere Weisen geschehen kann), so möge für das Folgende die Ausdrucksweise gestattet sein, daß diese Mannigfaltigkeiten *gleiche Mächtigkeit* haben, oder auch, daß sie *äquivalent* sind. Unter einem *Bestandteil* einer Mannigfaltigkeit $M$ verstehen wir jede andere Mannigfaltigkeit $M'$, deren Elemente zugleich Elemente von $M$ sind. Sind die beiden Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$ nicht von gleicher Mächtigkeit, so wird entweder $M$ mit einem Bestandteile von $N$ oder es wird $N$ mit einem Bestandteile von $M$ gleiche Mächtigkeit haben; im ersteren Falle nennen wir die Mächtigkeit von $M$ *kleiner*, im zweiten Falle nennen wir sie *größer* als die Mächtigkeit von $N$.

Wenn die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten *endliche*, d. h. aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehende sind, so entspricht, wie leicht zu sehen, der Begriff der Mächtigkeit dem der *Anzahl* und folglich dem der *ganzen positiven Zahl*, da nämlich zweien solchen Mannigfaltigkeiten dann und nur dann gleiche Mächtigkeit zukommt, wenn die Anzahl ihrer Elemente die gleiche ist. Ein Bestandteil einer endlichen Mannigfaltigkeit hat immer eine kleinere Mächtigkeit als die Mannigfaltigkeit selbst; dieses Verhältnis hört gänzlich auf bei den *unendlichen*, d. i. aus einer unendlichen Anzahl von Elementen bestehenden Mannigfaltigkeiten. Aus dem Umstande allein, daß eine unendliche Mannigfaltigkeit $M$ ein Bestandteil einer andern $N$ ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, darf keineswegs geschlossen werden, daß ihre Mächtigkeit kleiner ist als die von $N$; dieser Schluß ist nur dann berechtigt, wenn man weiß, daß die Mächtigkeit von $M$ nicht gleich ist derjenigen von $N$; ebensowenig darf der Umstand, daß $N$ ein Bestandteil von $M$ ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, als ausreichend dafür betrachtet werden, daß die Mächtigkeit von $M$ größer sei als die von $N$.

Um an ein einfaches Beispiel zu erinnern, sei $M$ die Reihe der positiven ganzen Zahlen $\nu$, $N$ die Reihe der positiven geraden ganzen Zahlen $2\nu$; hier ist $N$ ein Bestandteil von $M$, und nichtsdestoweniger sind $M$ und $N$ von gleicher Mächtigkeit.

Die Reihe der positiven ganzen Zahlen $\nu$ bietet, wie sich leicht zeigen läßt, die kleinste von allen Mächtigkeiten dar, welche bei unendlichen Mannigfaltigkeiten vorkommen. Nichtsdestoweniger ist die Klasse der Mannigfaltigkeiten, welche diese kleinste Mächtigkeit haben, eine außerordentlich reiche und ausgedehnte. Zu dieser Klasse gehören beispielsweise alle diejenigen Mannigfaltigkeiten, welche Herr R. Dedekind in seinen wertvollen und schönen Untersuchungen über die algebraischen Zahlen „*endliche Körper*“ nennt (man vgl. Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, zweite Auflage, Braunschweig 1871, S. 425f.); ferner sind hier diejenigen, zuerst von mir in Betracht gezogenen, Mannigfaltigkeiten anzuführen, welche ich „*Punktmengen der $\nu^{ten}$ Art*“ genannt habe (man vgl. Math. Annalen, Bd. 5, S. 129) [hier II, 5 S. 98]. Jede als einfach unendliche Reihe, mit dem allgemeinen Gliede $a_\nu$, auftretende Mannigfaltigkeit gehört offenbar hierher; aber auch die Doppelreihen und allgemein die $n$-fachen Reihen mit dem allgemeinen Gliede $a_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n}$ (wo $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ unabhängig voneinander alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen) sind von dieser Klasse. Bei einer früheren Gelegenheit wurde sogar bewiesen, daß der Inbegriff $(\omega)$ aller reellen (und man könnte auch hinzufügen: aller komplexen) algebraischen Zahlen in Form einer Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\omega_\nu$ gedacht werden kann, was nichts anderes heißt, als daß die Mannigfaltigkeit $(\omega)$ sowohl, wie auch jeder unendliche Bestandteil derselben die Mächtigkeit der ganzen Zahlenreihe haben.

In bezug auf die Mannigfaltigkeiten dieser Klasse gelten die folgenden, leicht zu beweisenden Sätze:

„Ist $M$ eine Mannigfaltigkeit von der Mächtigkeit der positiven, ganzen Zahlenreihe, so hat auch jeder unendliche Bestandteil von $M$ gleiche Mächtigkeit mit $M$.“

„Ist $M', M'', M''', \ldots$ eine endliche oder einfach unendliche Reihe von Mannigfaltigkeiten, von denen jede die Mächtigkeit der positiven, ganzen Zahlenreihe besitzt, so hat auch die Mannigfaltigkeit $M$, welche aus der Zusammenfassung von $M', M'', M''', \ldots$ entsteht, dieselbe Mächtigkeit.“

Im folgenden sollen nun die sogenannten stetigen, $n$-fachen Mannigfaltigkeiten hinsichtlich ihrer Mächtigkeit untersucht werden.

Die Forschungen, welche Riemann[1] und Helmholtz[2] und nach ihnen

[1] Man vgl. Riemanns gesammelte mathematische Werke, S. 254f. Leipzig 1876.

[2] Man vgl. Helmholtz: Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie. Heidelberger Jb. 1868, Nr 46 u. 47 und: Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl. 1868, Nr 9; desselben Verfassers populäre Vorträge, H. 3, S. 21f. Braunschweig 1876.



andere[1] über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, angestellt haben, gehen bekanntlich von dem Begriffe einer $n$-fach ausgedehnten, stetigen Mannigfaltigkeit aus und setzen das wesentliche Kennzeichen derselben in den Umstand, daß ihre Elemente von $n$ voneinander unabhängigen, reellen, stetigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängen, so daß zu jedem Elemente der Mannigfaltigkeit ein zulässiges Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$, aber auch umgekehrt zu jedem zulässigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein gewisses Element der Mannigfaltigkeit gehört. Meist stillschweigend wird, wie aus dem Verlaufe jener Untersuchungen hervorgeht, außerdem die *Voraussetzung* gemacht, daß die zugrunde gelegte Korrespondenz der Elemente der Mannigfaltigkeit und des Wertsystemes $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine *stetige* sei, so daß jeder unendlich kleinen Änderung des Wertsystemes $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine unendlich kleine Änderung des entsprechenden Elementes und umgekehrt jeder unendlich kleinen Änderung des Elementes eine ebensolche Wertänderung seiner Koordinaten entspricht. Ob diese Voraussetzung als ausreichend zu betrachten, oder ob sie durch noch speziellere Bedingungen zu ergänzen sei, damit die beabsichtigte Begriffsbildung der $n$-fachen, stetigen Mannigfaltigkeit als eine gegen jeden Widerspruch gesicherte, in sich gefestigte betrachtet werden kann[2], — möge zunächst dahingestellt bleiben; hier soll allein gezeigt werden, daß, wenn sie fallen gelassen wird, d. i. wenn hinsichtlich der Korrespondenz zwischen der Mannigfaltigkeit und ihren Koordinaten keinerlei Beschränkung gemacht wird, alsdann jenes von den Autoren als wesentlich bezeichnete Merkmal (wonach eine $n$-fache stetige Mannigfaltigkeit eine solche ist, deren Elemente aus $n$ voneinander unabhängigen reellen, stetigen Koordinaten sich bestimmen lassen) durchaus hinfällig wird.

Wie unsere Untersuchung zeigen wird, ist es sogar möglich, die Elemente einer $n$-fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit durch eine einzige reelle stetige Koordinate $t$ eindeutig und vollständig zu bestimmen. Daraus folgt alsdann, daß, wenn für die Art der Korrespondenz keine Voraussetzungen gestellt werden, die Anzahl der unabhängigen, stetigen, reellen Koordinaten, welche zur eindeutigen und vollständigen Bestimmung der Elemente einer $n$-fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit zu benutzen sind, auf jede vorgegebene Zahl gebracht werden kann und also *nicht* als unveränderliches Merkmal einer gegebenen Mannigfaltigkeit anzusehen ist. Indem ich mir die Frage vorlegte, ob eine stetige Mannigfaltigkeit von $n$ Dimen-

[1] Man vgl. J. Rosanes: Über die neuesten Untersuchungen in betreff unserer Anschauung vom Raume, S. 13. Breslau 1871; O. Liebmann: Zur Analysis der Wirklichkeit, S. 58. Straßburg 1876; B. Erdmann: Die Axiome der Geometrie, S. 45. Leipzig 1877.

[2] Die Beantwortung dieser Frage, auf welche wir bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werden, scheint mir keinen nennenswerten Schwierigkeiten zu begegnen. [Hierzu vgl. die Abhandlung III 3 S. 134 und die zugehörigen Anmerkungen S. 138.]

sionen sich eindeutig und vollständig einer stetigen Mannigfaltigkeit von nur einer Dimension zuordnen läßt, so daß jedem Elemente der einen von ihnen ein und *nur* ein Element der andern entspricht, fand es sich, daß diese Frage bejaht werden muß.

Es läßt sich demnach eine stetige Fläche eindeutig und vollständig auf eine stetige Linie beziehen, das gleiche gilt von stetigen Körpern und von stetigen Gebilden mit beliebig vielen Dimensionen.

Unter Anwendung der oben eingeführten Ausdrucksweise können wir daher sagen, daß die Mächtigkeit eines beliebigen stetigen, $n$-fach ausgedehnten Gebildes *gleich* ist der Mächtigkeit einer einfach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit, wie beispielsweise einer begrenzten, stetigen geraden Strecke.

## § 1.

Da zwei stetige Gebilde von *gleicher* Dimensionenzahl sich mittels analytischer Funktionen aufeinander eindeutig und vollständig beziehen lassen, so kommt bei dem von uns verfolgten Zwecke (nämlich die Möglichkeit eindeutiger und vollständiger Zuordnungen von stetigen Gebilden mit verschiedener Dimensionenzahl nachzuweisen), wie man leicht einsieht, alles auf den Beweis des folgenden Satzes an:

(A.) „Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ $n$ voneinander unabhängige, veränderliche reelle Größen, von denen jede alle Werte, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, annehmen kann, und ist $t$ eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraum $(0 \leqq t \leqq 1)$, so ist es möglich, die eine Größe $t$ dem Systeme der $n$ Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ so zuzuordnen, daß zu jedem bestimmten Werte von $t$ ein bestimmtes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ und umgekehrt zu jedem bestimmten Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein gewisser Wert von $t$ gehört."

Als Folge dieses Satzes stellt sich alsdann der von uns in Aussicht genommene andere dar:

(B.) „Eine nach $n$ Dimensionen ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit läßt sich eindeutig und vollständig einer stetigen Mannigfaltigkeit von einer Dimension zuordnen; zwei stetige Mannigfaltigkeiten, die eine von $n$, die andere von $m$ Dimensionen, wo $n \gtreqless m$, haben gleiche Mächtigkeit; die Elemente einer nach $n$ Dimensionen ausgedehnten, stetigen Mannigfaltigkeit lassen sich durch eine einzige stetige, reelle Koordinate $t$ eindeutig bestimmen, sie lassen sich aber auch durch ein System von $m$ stetigen Koordinaten $t_1, t_2, \ldots t_m$ eindeutig und vollständig bestimmen."

## § 2.

Zum Beweise von (A.) gehen wir von dem bekannten Satze aus, daß jede *irrationale* Zahl $e \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}}$ sich auf eine völlig bestimmte Weise in der Form eines unendlichen Kettenbruches

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_\nu + \ddots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots)$$

darstellen läßt, wo die $\alpha_\nu$ positive, ganze rationale Zahlen sind.



Zu jeder irrationalen Zahl $e \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}}$ gehört eine bestimmte unendliche Reihe von positiven ganzen Zahlen $\alpha_\nu$, und umgekehrt bestimmt eine jede solche Reihe eine gewisse irrationale Zahl $e \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}}$.

Sind nun $e_1, e_2, \ldots e_n$ $n$ voneinander unabhängige veränderliche Größen, von denen jede alle irrationalen Zahlwerte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ und einen jeden von diesen nur einmal annehmen kann, so setze man:

$$\begin{array}{l} e_1 = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,\nu}, \ldots), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ e_n = (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,\nu}, \ldots); \end{array}$$

diese $n$ irrationalen Zahlen bestimmen eindeutig eine $\overline{n+1}^{\text{te}}$ irrationale Zahl $d \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}}$, nämlich

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots),$$

wenn man zwischen den Zahlen $\alpha$ und $\beta$ folgende Beziehung festsetzt:

$$\beta_{(\nu-1)n+\mu} = \alpha_{\mu,\nu} \begin{cases} \mu = 1, 2, \ldots n, \\ \nu = 1, 2, \ldots \text{in inf.} \end{cases} \tag{1}$$

Aber auch umgekehrt: wenn man von einer irrationalen Zahl $d \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}}$ ausgeht, so bestimmt dieselbe die Reihe der $\beta_\nu$ und vermöge (1.) auch die Reihen der $\alpha_{\mu,\nu}$, d. h. $d$ bestimmt eindeutig das System der $n$ irrationalen Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_n$. Aus dieser Betrachtung ergibt sich zunächst der folgende Satz:

(C.) „Sind $e_1, e_2, \ldots e_n$ $n$ voneinander unabhängige veränderliche Größen, von denen eine jede alle irrationalen Zahlwerte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ annehmen kann, und ist $d$ eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraum wie jene, so ist es möglich, die eine Größe $d$ und das System der $n$ Größen $e_1, e_2, \ldots e_n$ eindeutig und vollständig einander zuzuordnen."

## § 3.

Nachdem im vorigen Paragraphen der Satz (C.) bewiesen worden ist, muß es nun unsere Sache sein, den Beweis des folgenden Satzes zu führen:

(D.) „Eine veränderliche Größe $e$, welche alle irrationalen Zahlwerte des Intervalles $(0\dots 1)$ annehmen kann, läßt sich eindeutig einer Veränderlichen $x$ zuordnen, welche alle reellen d. h. rationalen und irrationalen Werte, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, erhält, so daß zu jedem irrationalen Werte von $e \gtrless {0 \atop 1}$ ein und nur ein reeller Wert von $x \mathop{\gtreqless}{0 \atop 1}$ und umgekehrt zu jedem reellen Werte von $x$ ein gewisser irrationaler Wert von $e$ gehört."

Denn ist einmal dieser Satz (D.) bewiesen, so denke man sich *nach ihm* den im § 2 mit $e_1, e_2, \dots e_n$ und $d$ bezeichneten $n+1$ veränderlichen Größen entsprechend die anderen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ und $t$ eindeutig und vollständig zugeordnet, wo jede dieser Veränderlichen ohne Beschränkung jeden reellen Wert, der $\geqq 0$ und $\leqq 1$, anzunehmen hat. Da zwischen der Veränderlichen $d$ und dem System der $n$ Veränderlichen $e_1, e_2, \dots e_n$ im § 2 eine eindeutige und vollständige Korrespondenz hergestellt ist, so erhält man auf diese Weise eine eindeutige und vollständige Zuordnung der einen stetigen Veränderlichen $t$ und des Systemes von $n$ stetigen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$, womit die Richtigkeit des Satzes (A.) nachgewiesen sein wird.

Wir werden uns also im folgenden nur noch mit dem Beweise des Satzes (D.) zu beschäftigen haben; dabei möge eine einfache Symbolik, welche wir zunächst beschreiben wollen, Kürze halber zur Anwendung kommen.

Unter einer *linearen* Mannigfaltigkeit reeller Zahlen wollen wir jede wohldefinierte Mannigfaltigkeit reeller, voneinander verschiedener, d. i. ungleicher Zahlen verstehen, so daß eine und dieselbe Zahl in einer linearen Mannigfaltigkeit nicht öfter als einmal als Element vorkommt.

Die reellen Veränderlichen, welche im Laufe dieser Untersuchung vorkommen, sind alle von der Art, daß der Spielraum einer jeden von ihnen, d. h. die Mannigfaltigkeit der Werte, welche sie annehmen kann, eine gegebene lineare Mannigfaltigkeit ist; wir wollen daher auch diese, überall stillschweigend gemachte Voraussetzung in dem Folgenden nicht mehr besonders hervorheben. Von zwei solcher Veränderlichen $a$ und $b$ wollen wir sagen, daß sie *keinen Zusammenhang* haben, wenn kein Wert, welchen $a$ annehmen kann, gleich ist einem Werte von $b$; d. h. die beiden Mannigfaltigkeiten der Werte, welche die Veränderlichen $a$, $b$ annehmen können, haben keine gemeinschaftlichen Elemente, wenn gesagt werden soll, daß $a$ und $b$ *ohne Zusammenhang* sind[1].

Hat man eine endliche oder unendliche Reihe $a', a'', a''', \dots, a^{(\nu)}, \dots$ wohldefinierter Veränderlichen oder Konstanten, die paarweise keinen Zusammenhang haben, so läßt sich eine Veränderliche $a$ dadurch definieren, daß ihr Spielraum aus der Zusammenfassung der Spielräume von $a', a'', \dots, a^{(\nu)}, \dots$ entsteht; umgekehrt läßt sich eine gegebene Veränderliche $a$ nach den verschiedensten Modis in andere $a', a'', \dots$ zerlegen, die paarweise keinen Zusammenhang haben; in diesen beiden Fällen drücken wir die Beziehung der Veränderlichen $a$ zu den Veränderlichen $a', a'', \dots, a^{(\nu)}, \dots$ durch folgende Formel aus:

$$a = \{a', a'', \dots, a^{(\nu)}, \dots\}.$$

Zum Bestehen dieser Formel gehört also: 1) daß jeder Wert, welchen irgend eine der Veränderlichen $a^{(\nu)}$ annehmen kann, auch ein der Veränderlichen $a$ zustehender Wert ist; 2) daß jeder Wert, welchen $a$ erhalten kann, auch von einer und nur einer der Größen $a^{(\nu)}$ angenommen wird. Um diese Formel zu erläutern, sei beispielsweise $\varphi$ eine Veränderliche, welche alle rationalen Zahlwerte, welche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, $e$ eine Veränderliche, welche alle irrationalen Zahlwerte des Intervalls $(0\dots 1)$, und endlich $x$ eine Veränderliche, welche alle reellen, rationalen und irrationalen Zahlwerte, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, annehmen kann, so ist

$$x = \{\varphi, e\}.$$

Sind $a$ und $b$ zwei veränderliche Größen von der Art, daß es möglich ist, dieselben eindeutig und vollständig einander zuzuordnen, haben, mit anderen Worten, ihre beiden Spielräume gleiche Mächtigkeit, so wollen wir $a$ und $b$ einander *äquivalent* nennen und dies durch eine der beiden Formeln

$$a \sim b \quad \text{oder} \quad b \sim a$$

ausdrücken. Nach dieser Definition der Äquivalenz zweier veränderlichen Größen folgt leicht, daß $a \sim a$; ferner daß, wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, alsdann auch immer $a \sim c$ ist.

In der folgenden Untersuchung wird der nachstehende Satz, dessen Beweis wir wegen seiner Einfachheit übergehen dürfen, an verschiedenen Stellen zur Anwendung kommen:

(E.) „Ist $a', a'', \dots, a^{(\nu)}, \dots$ eine endliche oder unendliche Reihe von Veränderlichen oder Konstanten, welche paarweise keinen Zusammenhang haben, $b', b'', \dots . b^{(\nu)}, \dots$ eine andere Reihe von derselben Beschaffenheit, entspricht jeder Veränderlichen $a^{(\nu)}$ der ersten Reihe eine bestimmte Veränderliche $b^{(\nu)}$ der zweiten, und sind diese entsprechenden Veränderlichen stets einander äquivalent, d. h. ist $a^{(\nu)} \sim b^{(\nu)}$, so ist auch immer

$$a \sim b,$$

wenn

$$a = \{a', \ a'', \ \dots \ a^{(\nu)}, \ \dots\}$$

und

$$b = \{b', \ b'', \ \dots \ b^{(\nu)}, \ \dots\}."$$

[1] Zwei Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$ haben entweder *keinen Zusammenhang*, wenn sie nämlich kein ihnen gemeinschaftlich angehöriges Element haben; oder sie hängen durch eine bestimmte dritte Mannigfaltigkeit $P$ zusammen, nämlich durch die Mannigfaltigkeit der ihnen gemeinschaftlichen Elemente [den „Durchschnitt" von $M$ und $N$].

## § 4.

Unsere Untersuchung ist nun so weit geführt, daß es uns nur noch auf den Beweis des Satzes (D.) in § 3 ankommt. Um zu diesem Ziele zu gelangen, gehen wir davon aus, daß die sämtlichen rationalen Zahlen, welche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, sich in der Form einer einfach unendlichen Reihe

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots, \quad \varphi_\nu, \quad \ldots$$

mit einem allgemeinen Gliede $\varphi_\nu$ schreiben lassen. Dies läßt sich am einfachsten wie folgt dartun: Ist $\frac{p}{q}$ die *irreduktible* Form für eine rationale Zahl, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ ist, wo also $p$ und $q$ ganze, nicht negative Zahlen mit dem größten gemeinschaftlichen Teiler 1 sind, so setze man $p + q = N$. Es gehört alsdann zu jeder Zahl $\frac{p}{q}$ ein bestimmter ganzzahliger, positiver Wert von $N$, und umgekehrt gehört zu einem solchen Werte von $N$ immer nur eine endliche Anzahl von Zahlen $\frac{p}{q}$. Werden nun die Zahlen $\frac{p}{q}$ in einer solchen Reihenfolge gedacht, daß die zu kleineren Werten von $N$ gehörigen denen vorangehen, für welche $N$ einen größeren Wert hat, daß ferner die Zahlen $\frac{p}{q}$, für welche $N$ einen und denselben Wert hat, ihrer Größe nach einander folgen, die größeren auf die kleineren, so kommt jede der Zahlen $\frac{p}{q}$ an eine ganz bestimmte Stelle einer einfach unendlichen Reihe, deren allgemeines Glied mit $\varphi_\nu$ bezeichnet werde. Dieser Satz kann aber auch aus dem s. Z. von mir[1] gebrachten geschlossen werden, wonach der Inbegriff $(\omega)$ aller reellen *algebraischen* Zahlen sich in der Form einer unendlichen Reihe

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_\nu, \quad \ldots$$

mit dem allgemeinen Gliede $\omega_\nu$ auffassen läßt; diese Eigenschaft des Inbegriffes $(\omega)$ überträgt sich nämlich auf den Inbegriff aller rationalen Zahlen, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$, weil diese Mannigfaltigkeit ein *Teil* von jener ist. Sei nun $e$ die im Satze (D.) vorkommende Veränderliche, welche alle reellen Zahlwerte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ anzunehmen hat, mit Ausnahme der Zahlen $\varphi_\nu$.

Man nehme ferner im Intervalle $(0 \ldots 1)$ irgend eine unendliche Reihe irrationaler Zahlen $\varepsilon_\nu$ an, welche nur an die Bedingungen gebunden ist, daß allgemein $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ und daß $\lim \varepsilon_\nu = 1$ für $\nu = \infty$; beispielsweise sei $\varepsilon_\nu = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}$.

Man bezeichne mit $f$ eine Veränderliche, welche alle reellen Werte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ annehmen kann, mit Ausnahme der Werte $\varepsilon_\nu$, mit

[1] Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. Crelles Journal f. Math. 77, 258f. [hier III, 1 S. 115].



$g$ eine andere Veränderliche, welche alle reellen Werte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ anzunehmen hat, mit Ausnahme der $\varepsilon_\nu$ und der $\varphi_\nu$.

Wir behaupten, daß

$$e \sim f.$$

In der Tat ist nach der Bezeichnungsweise des § 3

$$e = \{g, \quad \varepsilon_\nu\},$$

$$f = \{g, \quad \varphi_\nu\},$$

und da $g \sim g$, $\varepsilon_\nu \sim \varphi_\nu$, so schließen wir nach Satz (E.), daß

$$e \sim f.$$

Der zu beweisende Satz (D.) ist daher zurückgeführt auf folgenden Satz:

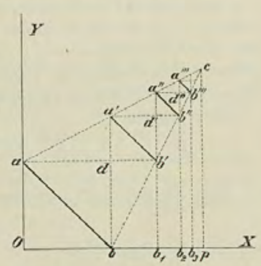
(F.) „Eine Veränderliche $f$, welche alle Werte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ annehmen kann, mit Ausnahme der Werte einer gegebenen Reihe $\varepsilon_\nu$, welche an die Bedingungen gebunden ist, daß $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ und daß $\lim \varepsilon_\nu = 1$ für $\nu = \infty$, läßt sich eindeutig und vollständig einer Veränderlichen $x$ zuordnen, welche alle Werte $\geqq 0$ und $\leqq 1$ anzunehmen hat; es ist, mit anderen Worten $f \sim x$."

## § 5.

Den Beweis von (F.) gründen wir auf die folgenden Sätze (G.), (H.), (J.):

(G.) „Ist $y$ eine Veränderliche, welche alle Werte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ mit Ausnahme des einen 0 anzunehmen hat, $x$ eine Veränderliche, welche alle Werte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ ohne Ausnahme erhält, so ist

$$y \sim x."$$




Der Beweis dieses Satzes (G.) wird am einfachsten [ ? ] durch die Betrachtung nebenstehender Kurve geführt, deren Abszissen von $O$ aus die Größe $x$, deren Ordinaten die Größe $y$ repräsentieren. Diese Kurve besteht aus den unendlich vielen einander parallelen, mit ins Unendliche wachsendem $\nu$ unendlich klein werdenden Strecken

$$\overline{ab}, \quad \overline{a'b'}, \quad \ldots, \quad \overline{a^{(\nu)}b^{(\nu)}}, \quad \ldots$$

und aus dem isolierten Punkte $c$, welchem sich jene Strecken asymptotisch nähern. Hierbei sind aber die Endpunkte $a, a', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ als *zur Kurve gehörig*, dagegen die Endpunkte $b, b', \ldots, b^{(\nu)}, \ldots$ als *von ihr ausgeschlossen* zu betrachten.

Die in der Figur vertretenen Längen sind:

$$\overline{Op} = \overline{pc} = 1; \quad \overline{Ob} = \overline{bp} = \overline{Oa} = \tfrac{1}{2};$$

$$\overline{a^{(\nu)}d^{(\nu)}} = \overline{d^{(\nu)}b^{(\nu)}} = \overline{b_{\nu-1}b_\nu} = \frac{1}{2^{\nu+1}}.$$

Man überzeugt sich, daß, während die Abszisse $x$ alle Werte von 0 bis 1 annimmt, die Ordinate $y$ alle diese Werte mit *Ausschluß* des einen Wertes 0 erhält.

Nachdem auf diese Weise der Satz (G.) bewiesen ist, erhält man zunächst durch die Anwendung der Transformationsformeln

$$y = \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}; \quad x = \frac{u-\alpha}{\beta-\alpha}$$

die folgende Verallgemeinerung von (G.):

(H.) „Eine Veränderliche $z$, welche alle Werte eines Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$, wo $\alpha \gtrless \beta$, mit Ausnahme des einen Endwertes $\alpha$ annehmen kann, ist äquivalent einer Veränderlichen $u$, welche alle Werte desselben Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ ohne Ausnahme erhält."

Von hier aus gelangen wir zunächst zu folgendem Satze:

(J.) „Ist $w$ eine Veränderliche, welche alle Werte des Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ mit Ausnahme der beiden Endwerte $\alpha$ und $\beta$ desselben anzunehmen hat, $u$ dieselbe Veränderliche wie in (H.), so ist

$$w \sim u."$$

In der Tat: es sei $\gamma$ irgend ein Wert zwischen $\alpha$ und $\beta$; man führe hilfsweise vier neue Veränderliche $w', w'', u''$ und $z$ ein.

$z$ sei dieselbe Veränderliche wie in (H.), $w'$ nehme alle Werte des Intervalles $(\alpha \ldots \gamma)$ an mit Ausnahme der beiden Endwerte $\alpha$ und $\gamma$; $w''$ erhalte alle Werte des Intervalles $(\gamma \ldots \beta)$ mit Ausnahme des einen Endwertes $\beta$, $u''$ sei eine Veränderliche, welche alle Werte des Intervalles $(\gamma \ldots \beta)$ mit Einschluß der Endwerte anzunehmen hat.

Es ist alsdann

$$w \equiv \{w', \quad w''\},$$

$$z \equiv \{w', \quad u''\}.$$

In Folge des Satzes (H.) ist aber

$$w'' \sim u'';$$

wir schließen daher, daß

$$w \sim z.$$

Nach Satz (H.) ist aber auch

$$z \sim u;$$

folglich hat man auch $w \sim u$, womit Satz (J.) bewiesen ist.



Nun können wir den Satz (F.) wie folgt beweisen:

Indem wir auf die Bedeutung der Veränderlichen $f$ und $x$ in der Ankündigung des Satzes (F.) verweisen, führen wir gewisse Hilfsveränderliche

$$f', \quad f'', \quad \ldots, \quad f^{(\nu)}, \quad \ldots$$

und

$$x'', \quad x^{\mathrm{IV}}, \ldots, \quad x^{(2\nu)}, \quad \ldots$$

ein, und zwar seien

$f'$ eine Veränderliche, welche alle Werte des Intervalles $(0 \ldots \varepsilon_1)$ mit Ausnahme des einen Endwertes $\varepsilon_1$ erhält, $f^{(\nu)}$ für $\nu > 1$ eine Veränderliche, die alle Werte des Intervalles $(\varepsilon_{\nu-1} \ldots \varepsilon_\nu)$ mit Ausnahme der beiden Endwerte $\varepsilon_{\nu-1}$ und $\varepsilon_\nu$ anzunehmen hat; $x^{(2\nu)}$ sei eine Veränderliche, welche alle Werte des Intervalles $(\varepsilon_{2\nu-1} \ldots \varepsilon_{2\nu})$ ohne Ausnahme erhält.

Fügt man zu den Veränderlichen $f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots$ noch die konstante Zahl 1, so haben alle diese Größen zusammengenommen denselben Spielraum wie $f$, d. h. man hat

$$f \equiv \{f', \quad f'', \quad \ldots, \quad f^{(\nu)}, \quad \ldots, \quad 1\}.$$

Ebenso überzeugt man sich, daß

$$x \equiv \{f', \quad x'' \quad f''', \quad x^{\mathrm{IV}}, \quad \ldots, \quad f^{(2\nu-1)}, \quad x^{(2\nu)}, \quad \ldots, \quad 1\}.$$

Dem Satze (J.) zufolge ist aber

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)};$$

ferner ist

$$f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)}; \quad 1 \sim 1;$$

daher ist wegen des Satzes (E.) § 3

$$f \sim x,$$

w. z. b. w.

## § 6.

Ich will nun für den Satz (D.) noch einen kürzeren Beweis geben; wenn ich mich auf diesen allein nicht beschränkt habe, so geschah es aus dem Grunde, weil die Hilfssätze (F.), (G.), (H.), (J.), welche bei der komplizierteren Beweisführung gebraucht wurden, an sich von Interesse sind.

Unter $x$ verstehen wir, wie früher, eine Veränderliche, welche alle reellen Werte des Intervalles $(0 \ldots 1)$, mit Einschluß der Endwerte, anzunehmen hat, $e$ sei eine Veränderliche, welche nur die irrationalen Werte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ erhält; und zu beweisen ist, daß $x \sim e$.

Die rationalen Zahlen $\geqq 0$ und $\leqq 1$ denken wir uns wie in § 4 in Reihenform mit dem allgemeinen Gliede $\varphi_\nu$, wo $\nu$ die Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots$ zu durchlaufen hat. Ferner nehmen wir eine beliebige unendliche Reihe von lauter irrationalen, voneinander verschiedenen Zahlen des Intervalles $(0 \ldots 1)$ an; das allgemeine Glied dieser Reihe sei $\eta_\nu$ $\left(\text{z. B. } \eta_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}\right)$.

Unter $h$ verstehe man eine Veränderliche, welche alle Werte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ mit Ausnahme der $\varphi_\nu$ sowohl wie der $\eta_\nu$ anzunehmen hat.

Nach der in § 3 eingeführten Symbolik ist alsdann

$$x \equiv \{h, \quad \eta_\nu, \quad \varphi_\nu\} \tag{1}$$

und

$$e \equiv \{h, \eta_\nu\}.$$

Die letzte Formel können wir auch wie folgt schreiben:

$$e \equiv \{h, \quad \eta_{2\nu-1}, \quad \eta_{2\nu}\}. \tag{2}$$

Bemerken wir nun, daß

$$h \sim h; \quad \eta_\nu \sim \eta_{2\nu-1}; \quad \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu}$$

und wenden auf die beiden Formeln (1) und (2) den Satz (E.) § 3 an, so erhalten wir

$$x \sim e,$$

w. z. b. w.

## § 7.

Es liegt der Gedanke nahe, zum Beweise von (A.) an Stelle des von uns benutzten Kettenbruches die Darstellungsform des unendlichen Dezimalbruches zu wählen; obgleich es den Anschein haben könnte, daß dieser Weg schneller zum Ziele geführt haben würde, so bringt derselbe trotzdem eine Schwierigkeit mit sich, auf welche ich hier aufmerksam machen will; sie war der Grund, weshalb ich auf den Gebrauch der Dezimalbrüche bei dieser Untersuchung verzichtet habe.

Hat man beispielsweise zwei Veränderliche $x_1$ und $x_2$ und setzt

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \cdots,$$

$$x_2 = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \cdots + \frac{\beta_\nu}{10^\nu} + \cdots$$

mit der Bestimmung, daß die Zahlen $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$ ganze Zahlen $\geqq 0$ und $\leqq 9$ werden und nicht von einem gewissen $\nu$ an stets den Wert 0 annehmen (ausgenommen wenn $x_1$ oder $x_2$ selbst gleich Null sind), so werden diese Darstellungen von $x_1$, $x_2$ in allen Fällen eindeutig bestimmt sein, d. h. $x_1$ und $x_2$ bestimmen die unendlichen Zahlenreihen $\alpha_\nu$ und $\beta_\nu$, und umgekehrt. Leitet man nun aus $x_1$ und $x_2$ eine Zahl

$$t = \frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \cdots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \cdots$$

her, indem man setzt

$$\gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu; \quad \gamma_{2\nu} = \beta_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

so ist hiermit eine eindeutige [ein-eindeutige] Beziehung zwischen dem System $x_1$, $x_2$ und der einen Veränderlichen $t$ hergestellt; denn *nur ein einziges* Wertsystem $x_1$, $x_2$ führt zu einem gegebenen Werte von $t$. Die Veränderliche $t$ nimmt aber, und dies ist der hier zu beachtende Umstand, nicht alle Werte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ an, sie ist in ihrer Veränderlichkeit beschränkt, während $x_1$ und $x_2$ keiner Beschränkung innerhalb desselben Intervalles unterworfen werden.



Alle Werte der Reihensumme:

$$\frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \cdots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \cdots,$$

bei welchen von einem gewissen $\nu > 1$ an alle $\gamma_{2\nu-1}$ oder alle $\gamma_{2\nu}$ den Wert Null haben, müssen als von dem Veränderlichkeitsgebiet von $t$ ausgeschlossen angesehen werden, weil sie auf ausgeschlossene, nämlich *endliche* Dezimalbruchdarstellungen von $x_1$ oder $x_2$ zurückführen würden.

## § 8.

Nachdem in den vorangehenden Paragraphen die beabsichtigte Untersuchung zu Ende geführt ist, mögen zum Schlusse einige erweiternde Bemerkungen Platz finden. Der Satz (A.) und demgemäß der Satz (B.) sind einer Verallgemeinerung fähig, wonach auch stetige Mannigfaltigkeiten von einer unendlich großen Dimensionenzahl dieselbe Mächtigkeit haben wie stetige Mannigfaltigkeiten von einer Dimension; diese Verallgemeinerung ist jedoch wesentlich an eine Voraussetzung gebunden, daß nämlich die unendlich vielen Dimensionen selbst eine Mannigfaltigkeit bilden, welche die Mächtigkeit der ganzen positiven Zahlenreihe hat.

An Stelle des Satzes (A.) tritt hier der folgende:

(A′.) „Ist $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$ eine einfach unendliche Reihe voneinander unabhängiger, veränderlicher, reeller Größen, von denen jede alle Werte, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, annehmen kann, und ist $t$ eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraume $(0 \leqq t \leqq 1)$ wie jene, so ist es möglich, die eine Größe $t$ dem Systeme der unendlich vielen $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$ eindeutig und vollständig zuzuordnen."

Dieser Satz (A′.) wird mit Hilfe des Satzes (D.), § 3 zurückgeführt auf den folgenden:

(C′.) „Ist $e_1, e_2, \ldots, e_\mu, \ldots$ eine unendliche Reihe voneinander unabhängiger veränderlicher Größen, von denen jede alle irrationalen Zahlwerte des Intervalles $(0 \ldots 1)$ annehmen kann, und ist $d$ eine andere irrationale Veränderliche mit dem nämlichen Spielraum, so ist es möglich, die eine Größe $d$ dem Systeme der unendlich vielen Größen $e_1, e_2, \ldots, e_\mu, \ldots$ eindeutig und vollständig zuzuordnen."

Der Beweis von (C′.) geschieht am einfachsten, indem man unter Anwendung der Kettenbruchentwicklung, wie in § 2 setzt

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots) \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots,$$

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda, \ldots)$$

und zwischen den ganzen positiven Zahlen $\alpha$ und $\beta$ den Zusammenhang herstellt

$$\alpha_{\mu,\nu} = \beta_\lambda,$$

wo

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}.$$

Es hat nämlich die Funktion $\mu + \frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}$, wie leicht zu zeigen, die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie alle positiven ganzen Zahlen und jede nur einmal darstellt, wenn in ihr $\mu$ und $\nu$ unabhängig voneinander ebenfalls jeden positiven, ganzzahligen Wert erhalten[1].

Mit dem Satze (A'.) scheint aber zugleich die Grenze erreicht zu sein, bis zu welcher eine Verallgemeinerung des Satzes (A.) und seiner Folgerungen möglich ist.

Da auf diese Weise für ein außerordentlich reiches und weites Gebiet von Mannigfaltigkeiten die Eigenschaft nachgewiesen ist, sich eindeutig und vollständig einer begrenzten, stetigen Geraden oder einem Teile derselben (unter einem Teile einer Linie jede in ihr enthaltene Mannigfaltigkeit von Punkten verstanden) zuordnen zu lassen, so entsteht die Frage, wie sich die verschiedenen Teile einer stetigen geraden Linie, d. h. die verschiedenen in ihr denkbaren unendlichen Mannigfaltigkeiten von Punkten hinsichtlich ihrer Mächtigkeit verhalten. Entkleiden wir dieses Problem seines geometrischen Gewandes und verstehen, wie dies bereits in § 3 auseinandergesetzt ist, unter einer *linearen* Mannigfaltigkeit reeller Zahlen jeden denkbaren Inbegriff unendlich vieler, voneinander verschiedener reeller Zahlen, so fragt es sich, in *wie viel* und in welche Klassen die linearen Mannigfaltigkeiten zerfallen, wenn Mannigfaltigkeiten von gleicher Mächtigkeit in eine und dieselbe Klasse, Mannigfaltigkeiten von verschiedener Mächtigkeit in verschiedene Klassen gebracht werden. Durch ein Induktionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, daß die Anzahl der nach diesem Einteilungsprinzip sich ergebenden Klassen linearer Mannigfaltigkeiten eine endliche und zwar, daß sie gleich *Zwei* ist[2].

Darnach würden die linearen Mannigfaltigkeiten aus zwei[1] Klassen bestehen, von denen die erste alle Mannigfaltigkeiten in sich faßt, welche sich auf die Form: functio ips. $\nu$ (wo $\nu$ alle positiven ganzen Zahlen durchläuft) bringen lassen; während die zweite Klasse alle diejenigen Mannigfaltigkeiten

---

[1] Daß diese beiden Klassen in Wirklichkeit verschieden sind, folgt aus dem in § 2 der vorhin zitierten Arbeit [hier III 1, S. 115] bewiesenen Satze, wonach, wenn eine gesetzmäßige, unendliche Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$ vorliegt, stets in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ Zahlen $\eta$ gefunden werden können, welche nicht in der gegebenen Reihe vorkommen.



in sich aufnimmt, welche auf die Form: functio ips. $x$ (wo $x$ alle reellen Werte $\geqq 0$ und $\leqq 1$ annehmen kann) zurückführbar sind. Entsprechend diesen beiden Klassen würden daher bei den unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten nur zweierlei Mächtigkeiten vorkommen; die genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.

**[Anmerkungen.]**

In dieser zweiten Abhandlung zur Mengenlehre, in welcher bereits der allgemeine Begriff der „Mächtigkeit" an der Spitze steht, wird die Aufgabe gestellt und gelöst, „stetige Mannigfaltigkeiten" beliebiger „Dimension" in bezug auf ihre Mächtigkeit miteinander zu vergleichen. Hier gelangt Cantor zu dem (damals noch paradoxen) Ergebnis, daß alle solchen Mannigfaltigkeiten von beliebiger endlicher, ja von (abzählbar) unendlicher Dimensionszahl von gleicher Mächtigkeit, nämlich sämtlich der Menge aller reellen Zahlen auf der (abgeschlossenen) Einheitsstrecke „äquivalent" sind, und schließt hieraus u. a., daß der Begriff der „Dimension" erst auf den der *stetigen* (und zwar der doppelseitig-stetigen) Abbildung der Mannigfaltigkeiten aufeinander gegründet werden muß.

Den *Beweis* dafür, daß z. B. die Punkte eines Quadrates denen einer Strecke eineindeutig zugeordnet werden können, gründet der Verfasser hier auf die (eindeutige) Kettenbruchentwicklung der reellen irrationalen Zahlen und die (mechanische) Zusammensetzung zweier solcher Entwicklungen

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \quad \text{und} \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$$

zu einer dritten

$$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \ldots).$$

Hieraus ergibt sich aber zunächst *nur* die Äquivalenz der in einem Quadrate bzw. einer Strecke enthaltenen *irrationalen* Punktmengen. Um das Ergebnis nun auch auf die (abgeschlossenen) Punktmengen (einschließlich der rationalen Punkte) auszudehnen, bedient sich Cantor hier eines etwas umständlichen Systems von Hilfssätzen, welche alle die *Abzählbarkeit* der in einer Strecke enthaltenen rationalen Punkte benutzen.

[1] zu S. 132.

Für jeden festen Wert $\sigma = \mu + \nu$ der Indexsumme entsprechen nämlich den Werten

$$\mu = 1, 2, \ldots, \sigma - 1$$

und

$$\nu = \sigma - 1, \sigma - 2, \ldots, 1$$

sukzessive die Werte

$$\lambda = \frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{2} + 1, \quad \frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{2} + 2, \ldots, \frac{\sigma(\sigma-1)}{2},$$

wobei jeder Zahl zwischen $\frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{2}$ und $\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}$ von der Funktion $\lambda$ genau einmal angenommen wird. Jedem konstanten Werte von $\mu + \nu$ entspricht also immer ein bestimmter durch zwei aufeinander folgende Trigonalzahlen begrenzter Teilabschnitt der Zahlenreihe und daher allen Wertepaaren $\mu, \nu$ mit $\mu + \nu \leqq \sigma$ der *ganze* Abschnitt $\lambda \leqq \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}$.

[2] zu S. 132. Hier äußert Cantor zum ersten Male seine Vermutung, daß dem Linearkontinuum die „zweite Mächtigkeit" zukomme: die Cantorsche „Kontinuum-Hypothese".

# 3. Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten.

[Göttinger Nachrichten, S. 127—135 (1879).]

In einer Arbeit, welche ich in Crelles Journal, Band 84 [hier III 2, S. 119] über gewisse Fragen aus der Mannigfaltigkeitslehre veröffentlicht habe, wurde der Nachweis geführt, daß zwei begrenzte oder unbegrenzte stetige Mannigfaltigkeiten der $\mu$ten und der $\nu$ten Ordnung, $M_\mu$ und $M_\nu$, wo $\mu < \nu$, sehr wohl in eine solche Beziehung zu einander gesetzt werden können, daß zu jedem Elemente von $M_\mu$ ein Element von $M_\nu$ und auch umgekehrt zu jedem Elemente von $M_\nu$ ein Element von $M_\mu$ gehört, und es wurde diese *Tatsache* dadurch ausgedrückt, daß man den Gebieten $M_\mu$ und $M_\nu$ *gleiche Mächtigkeit* zusprach.

Die Abhängigkeit, in welche auf diese Weise zwei *stetige* Gebiete von verschiedener Ordnung gebracht worden sind, war, wie sich aus den dort gegebenen, verhältnismäßig sehr einfachen Gesetzen unschwer erkennen ließ, eine durchgehends *unstetige* und es konnte mit ziemlich großer Wahrscheinlichkeit vorausgesehen werden, daß gerade an *diesen Umstand* die Möglichkeit, eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen stetigen Gebieten von verschiedener Ordnung herzustellen, *wesentlich* geknüpft sei.

Auf die sich hieraus ergebende Forderung eines *Beweises* für den Satz, daß eine $M_\mu$ und eine $M_\nu$, wenn $\mu < \nu$, sich *nicht* stetig und gegenseitig eindeutig auf einander abbilden lassen, habe ich daher schon damals hinweisen können, ohne jedoch auf diese Frage näher einzugehen.

Inzwischen ist dieselbe von verschiedenen Gesichtspunkten aufgenommen worden; zuerst von Lüroth in den Sitzungsberichten der physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen (d. 8. Juli 1878), wo die Fälle $\nu = 2$ und $\nu = 3$ behandelt wurden. Bald darauf gab Thomae in den Göttinger Nachrichten (August 1878) eine Andeutung, wie der fragliche Beweis für ein beliebiges $\nu$ zu liefern sei; es wurde aber *dagegen* von Lüroth in einer Sitzung der mathem. Sektion der Naturforscherversammlung in Kassel *mit Recht* bemerkt, daß diese Deduktion sich auf eine *Voraussetzung* der analysis situs stützt, welche von derselben *Tragweite* ist wie der fragliche Satz, so daß kein Grund ersehen werden kann, warum der Hilfssatz einer Begründung *entbehren* sollte, während die Notwendigkeit zugestanden wird, das mit ihm *gleichwertige* Theorem zu beweisen. Bei dieser Gelegenheit (in Kassel)



hielt E. Jürgens einen Vortrag, welcher im Anschluß an die Lürothsche Arbeit den Fall $\nu = 3$ unseres Satzes betraf. Zu diesen Beweisen ist neuerdings eine gleichfalls auf ein beliebiges $\nu$ sich beziehende Arbeit von Netto hinzugekommen. (Crelles Journal, Bd. 86, S. 263).

Im folgenden will ich eine von den bisher eingeschlagenen Wegen abweichende Methode versuchen, durch welche der in Rede stehende Satz, oder vielmehr eine gewisse Verallgemeinerung desselben, welche mit (III) bezeichnet werden wird, zurückgeführt werden soll auf einen in der Analyse oft zur Anwendung kommende Satz, in dessen Diskussion einzugehen, hier nicht der Ort wäre, nämlich auf folgendes bekannte Theorem:

(I) „Eine eindeutige, stetige reelle Funktion $f(t)$ einer reellen, stetigen Veränderlichen $t$, welche für $t = t_1$ einen positiven Wert $f(t_1) > 0$, für $t = t_2$ einen negativen Wert $f(t_2) < 0$ erhält, nimmt für mindestens einen Wert $t_0$ von $t$, der zwischen $t_1$ und $t_2$ liegt, den Wert Null an, so daß $f(t_0) = 0$ wird“[1].

Auf diesen Satz (I) gründet sich ein andrer (II), zu dessen Formulierung wir einige naheliegende Definitionen, welche auch für das Folgende erforderlich sind, vorausschicken.

Ist $M_\mu$ eine stetige Mannigfaltigkeit von der $\mu$ten Ordnung [Dimension], deren Elemente von $\mu$ stetigen, unabhängigen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ stetig und eindeutig abhängen, so verstehe man unter einer Kugel $\mu - 1$ter Ordnung $K_{\mu-1}$ ein zu $M_\mu$ gehöriges Gebiet $\mu - 1$ter Ordnung, welches aus $M_\mu$ durch eine Gleichung von der Form

$$F \equiv (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_\mu - a_\mu)^2 - r^2 = 0$$

ausgesondert ist.

Eine solche $K_{\mu-1}$ zerlegt das Gebiet $M_\mu$ in *drei* Teile, in einen Teil *außerhalb* $K_{\mu-1}$, für dessen Punkte der Ausdruck $F > 0$, einen Teil *innerhalb* $K_{\mu-1}$, für dessen Punkte $F < 0$ und endlich in den Teil, für welchen $F = 0$ ist, der daher nichts anderes als $K_{\mu-1}$ selbst ist[¹].

Die Punkte einer stetigen $M_\mu$ zerfallen in zwei Klassen, in sogenannte *innere Punkte* und in *Punkte auf der Begrenzung;* ein Punkt $p$ von $M_\mu$ heißt *innerer* Punkt, wenn sich um $p$ als Mittelpunkt eine $K_{\mu-1}$ von so kleinem $r$ beschreiben läßt, daß *alle* Punkte innerhalb und auf $K_{\mu-1}$ zum Gebiete $M_\mu$ gehören; jeder Punkt $p$ von $M_\mu$, bei welchem eine solche Konstruktion *nicht* möglich ist, wird zur *Begrenzung* von $M_\mu$ gezählt. Die vollständige Begrenzung eines stetigen Gebietes $M_\mu$ ist ein Gebiet niederer Ordnung, welches entweder ein stetig zusammenhängendes Stück bildet oder aus mehreren solchen getrennten Teilen besteht. Aus (I) folgt leicht der Satz:

(II) „Ist $K_{\mu-1}$ eine in $M_\mu$ gelegene Kugel $\mu - 1$ter Ordnung, $a$ ein Punkt von $M_\mu$ innerhalb $K_{\mu-1}$, $b$ ein Punkt von $M_\mu$ außerhalb $K_{\mu-1}$ und ist $N$

[1] Man vgl. Cauchy; Cours d'analyse algébrique, note III, p. 460.

im Innern von $M_\mu$ irgendein stetig zusammenhängendes Gebiet (von beliebiger Ordnung), welches die beiden Punkte $a$ und $b$ enthält, dann gibt es zum wenigsten einen Punkt $c$, welcher den beiden Gebieten $K_{\mu-1}$ und $N$ zugleich angehört.“

Den zu beweisenden Satz formulieren wir nun wie folgt:

(III) „Hat man zwischen zwei stetigen Gebieten $M_\mu$ und $M_\nu$ eine solche Abhängigkeit, daß zu jedem Punkte $z$ von $M_\mu$ *höchstens* ein Punkt $Z$ von $M_\nu$, zu jedem Punkte $Z$ von $M_\nu$ *mindestens* ein Punkt $z$ von $M_\mu$ gehört, und ist ferner diese Beziehung eine stetige, so daß unendlich kleinen Änderungen von $z$ unendlich kleine Änderungen von $Z$ und auch umgekehrt unendlich kleinen Änderungen von $Z$ unendlich kleine Änderungen von $z$ entsprechen, so ist $\mu \gtreqless \nu$.“

Für $\nu = 1$ ist die Richtigkeit dieses Satzes unmittelbar einleuchtend; wir wollen seine Gültigkeit für jedes $\nu$ dadurch nachweisen, daß wir ihn für $\nu = n - 1$ als zugestanden denken und *unter dieser Voraussetzung* zeigen, daß er auch für $\nu = n$ richtig ist; dies geschieht durch folgende Betrachtung.

Wäre der Satz (III) für $\nu = n$ nicht richtig, so könnte man eine $M_n$ auf eine $M_\mu$, wo $\mu < n$, so abbilden, daß zu jedem Punkte $z$ von $M_\mu$ *höchstens* ein Punkt $Z$ von $M_n$, zu jedem Punkte $Z$ von $M_n$ *mindestens* ein Punkt $z$ von $M_\mu$ gehört und daß die Beziehung zwischen $z$ und $Z$ eine stetige ist. Wir zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruche mit dem Satze (II) und folglich auch mit dem Satze (I) hinführt.

Sei $A$ ein *innerer* Punkt von $M_n$, zu welchem mindestens ein *innerer* Punkt $a$ von $M_\mu$ gehört; solche Punkte $A$ können wir annehmen, da sonst $M_n$ auf die Begrenzung von $M_\mu$ abgebildet wäre und man alsdann an Stelle von $M_\mu$ ein Gebiet von noch niedrigerer Ordnung setzen könnte. Zu dem Punkte $A$ von $M_n$ können außer $a$ noch andre Punkte von $M_\mu$ gehören, deren Inbegriff mit $(a')$ bezeichnet werde. $B$ sei irgendein nicht mit $A$ zusammenfallender Punkt von $M_n$, den Inbegriff aller ihm zugeordneten Punkte von $M_\mu$ nennen wir $(b)$.

Um $A$ als Mittelpunkt beschreiben wir in $M_n$ eine Kugel $K_{n-1}$ so, daß der Punkt $B$ außerhalb derselben zu liegen kommt.

Um $a$ als Mittelpunkt beschreiben wir in $M_\mu$ gleichfalls eine Kugel $K_{\mu-1}$ so klein, daß 1) alle Punkte des Inbegriffs $(b)$ außerhalb $K_{\mu-1}$ fallen, 2) daß auch das der Kugel $K_{\mu-1}$ entsprechende Bild $G$ in $M_n$ ganz innerhalb der Kugel $K_{n-1}$ zu liegen kommt.

Diesen *beiden* Bedingungen kann wegen der zugrunde gelegten Stetigkeit der Beziehung durch hinreichende Verkleinerung der Kugel $K_{\mu-1}$ genügt werden.

Auf der Kugel $K_{\mu-1}$ unterscheiden wir die Punkte $z'$, welchen Punkte



von $M_n$ entsprechen, von *den* Punkten $z''$, zu welchen überhaupt keine Bilder in $M_n$ gehören.

Die ersteren $z'$ bilden einen oder mehrere getrennte stetige Bestandteile von $K_{\mu-1}$, ihnen entspricht als Bild in $M_n$ das Gebilde $G$, welches ebenso aus einem oder mehreren getrennten, stetigen Teilen bestehen kann.

Jedem Punkte $z'$ von $K_{\mu-1}$ entspricht ein bestimmter Punkt $\zeta$ von $G$, während einem Punkte $\zeta$ von $G$ mehrere Punkte $z'$ von $K_{\mu-1}$ zugeordnet sein können.

Das Gebilde $G$ wird den Punkt $A$ zwar im allgemeinen nicht enthalten, es ist aber auch der Fall denkbar, daß $A$ ein Punkt von $G$ ist, wenn nämlich auf $K_{\mu-1}$ Punkte des Inbegriffes $(a')$ fallen. Ist nun $\zeta'$ ein von $A$ verschiedener Punkt $\zeta$ des Gebildes $G$, so ziehen wir in $M_n$ den gradlinigen Strahl $A\zeta'$; er trifft, in seiner Richtung verlängert, die Kugel $K_{n-1}$ in einem ganz bestimmten Punkte $Z'$.

Auf diese Weise erhält man zu jedem Punkte $z'$ auf $K_{\mu-1}$ mit Ausnahme derjenigen, welche zu $(a')$ gehören, einen ganz bestimmten Punkt $Z'$ auf $K_{n-1}$, und diese Beziehung zwischen $z'$ und $Z'$ ist, wie leicht zu erkennen, eine stetige.

Die Punkte $Z'$ können *nicht* die Kugel $K_{n-1}$ ganz bedecken; in der Tat würde, falls $Z'$ alle Stellen in $K_{n-1}$ einnehmen könnte, eine stetige Abbildung von $K_{n-1}$ auf $K_{\mu-1}$ existieren, wobei zu jedem Punkte von $K_{\mu-1}$ *höchstens* ein Punkt von $K_{n-1}$ und zu jedem Punkte von $K_{n-1}$ *mindestens* ein Punkt von $K_{\mu-1}$ gehörte, was, da $\mu - 1 < n - 1$, unserm für den Fall $\nu = n - 1$ als *richtig vorausgesetzten* Satze (III) widersprechen würde.

*Es müssen daher Punkte auf $K_{n-1}$ vorhanden sein, mit welchen $Z'$ nie zusammenfällt; verbindet man den Punkt $A$ mit einem solchen Punkte $P$ durch den gradlinigen Strahl $AP$, so trifft der Strahl $AP$ das Gebilde $G$ sicher in keinem von $A$ verschiedenen Punkte.*

Wird noch der Punkt $P$ mit dem Punkte $B$ durch eine einfache, stetige, ganz außerhalb $K_{n-1}$ in $M_n$ verlaufende Linie $PB$ verbunden, so haben wir nun eine stetige, von $A$ nach $B$ einfach hinführende Linie $APB$, welche außer etwa in ihrem Ausgangspunkte $A$, keinen einzigen Punkt mit $G$ gemeinschaftlich hat.

Dieser Linie $APB$ entspricht in $M_\mu$ ein vom Punkte $a$ ausgehendes und zu einem oder mehreren der Punkte $(b)$ hinführendes stetiges Gebiet $N$, welches *keinen* Punkt mit $K_{\mu-1}$ gemeinschaftlich hat; es kann in der Tat $N$ keinen der Punkte $(a')$ mit $K_{\mu-1}$ gemeinschaftlich haben, weil die Linie $APB$ in ihrem Verlaufe zum Punkte $A$ *nicht* zurückkehrt; ebensowenig kann $N$ einen der andern Punkte $z'$ mit $K_{\mu-1}$ teilen, weil $G$ mit $APB$ außer in $A$ nicht zusammentrifft; und endlich kann $N$ auch keinen der Punkte $z''$ von

$K_{\mu-1}$ enthalten, weil die $z''$ diejenigen Punkte von $K_{\mu-1}$ waren, welchen keine Bilder in $M_n$ entsprechen.

Wir haben somit ein vom Punkte $a$ ausgehendes und zu einem oder mehreren der außerhalb $K_{\mu-1}$ gelegenen Punkte $(b)$ hinführendes, stetiges Gebiet $N$, welches mit $K_{\mu-1}$ keinen Punkt gemeinsam hat; *dies widerspricht aber dem Satze* (II) *und also auch dem Satze* (I). Wir schließen daraus, daß unser Satz (III) auch für den Fall $\nu = n$ und daher allgemein für jedes $\nu$ richtig ist.

**[Anmerkung.]**

Der in der vorstehenden Abhandlung gegebene Beweis für den Fundamentalsatz der Dimensionstheorie kann ebenso wenig als ausreichend betrachtet werden wie die hier vom Verfasser zitierten und kritisierten vorangehenden Beweisversuche. Hierüber vergleiche insbesondere die kritischen Ausführungen von E. Jürgens im Jahresber. d. D. Math. Verg. Bd. 7, 1899, S. 50—55. Insbesondere fehlt bei Cantor „der Nachweis, daß bei der Beziehung zwischen den beiden Größen $z'$ und $Z'$ letztere stetig von der ersteren abhängt, welcher Nachweis um so größere Schwierigkeiten bieten dürfte, als $Z'$ eine vieldeutige Funktion von $z'$ ist". Überhaupt bedenklich sei hier die Verwendung unendlich vieldeutiger stetiger Funktionen, bei denen, wie Jürgens zeigt, nicht einmal der fundamentale Satz gilt, daß mit zwei Funktionswerten auch jeder Zwischenwert angenommen wird. Es war wohl kein glücklicher Gedanke Cantors, den Satz von der Invarianz der Dimensionszahl auf den hier entwickelten, scheinbar allgemeineren von der ein-vieldeutigen stetigen Abbildung zurückzuführen, da dieser letztere, soweit er zutrifft, gewiß schwerer zu beweisen wäre als der ursprüngliche.

Den ersten gültigen Beweis für den allgemeinen Satz, daß Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension nicht gleichzeitig ein-eindeutig und stetig aufeinander abgebildet werden können, gab zuerst L. E. I. Brouwer in den Math. Ann. Bd. 70, S. 161—165 (1910). Von neueren Beweisen sei hier erwähnt: E. Sperner, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionenzahl und des Gebietes, Abhandl. d. Math. Sem. d. Hamburger Univ. Bd. 6, S. 265—272 (1928).

[1] Zu S. 135. Es handelt sich hier um den heute sogenannten „Jordanschen Satz" für den Sonderfall einer mehrdimensionalen Kugel.

## 4. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten.

[Math. Annalen Bd. 15, S. 1—7 (1879); Bd. 17, S. 355—358 (1880); Bd. 20, S. 113—121 (1882); Bd. 21, S. 51—58 u. S. 545—586 (1883); Bd. 23, S. 453—488 (1884).]

[Anmerkungen] zu Nr. 1—2 siehe S. 148, zu Nr. 3, S. 157, zu Nr. 4, S. 164.

### Nr. 1.

In einer, im Crelleschen Journale, Bd. 84, herausgegebenen Abhandlung [hier III 2, S. 119] habe ich für ein sehr weitreichendes Gebiet von geometrischen und arithmetischen, sowohl kontinuierlichen wie diskontinuierlichen Mannigfaltigkeiten den Nachweis geführt, daß sie eindeutig und vollständig einer geraden Strecke oder einem diskontinuierlichen Bestandteile von ihr sich zuordnen lassen.

Hierdurch gewinnen die letzteren Mannigfaltigkeiten, wir nennen sie *lineare Punktmannigfaltigkeiten* oder kürzer *lineare Punktmengen*, welche also entweder eine kontinuierliche, endliche oder unendliche, gerade Strecke bilden oder doch mit allen ihren Punkten in einer solchen als Teile enthalten sind, ein besonderes Interesse, und es dürfte daher nicht unwert sein, wenn wir denselben eine Reihe von Betrachtungen widmen und zunächst im folgenden ihre Klassifikation untersuchen wollen. Verschiedene Gesichtspunkte und damit verbundene Klassifikationsprinzipien führen uns dazu, die linearen Punktmengen in gewisse Gruppen zu fassen. Um mit einem dieser Gesichtspunkte zu beginnen, erinnern wir an den Begriff der *Ableitung* einer gegebenen Punktmenge $P$, welcher in einer Arbeit über trigonometrische Reihen (Math. Ann., Bd. 5) [II 5, S. 92] dargelegt worden ist; in dem jüngst erschienenen Werke Dinis (Fondamenti per la teoria d. funzioni d. variabili reali, Pisa 1878) sehen wir diesen Begriff noch weiter entwickelt, indem er als Ausgangspunkt für eine Reihe bemerkenswerter Verallgemeinerungen von bekannten analytischen Sätzen genommen wird[1]. Der Begriff der *Ableitung* einer gegebenen Mannigfaltigkeit ist übrigens nicht auf die linearen Mannigfaltigkeiten beschränkt, sondern gilt in gleicher Weise auch für die *ebenen*, *räumlichen* und *n-fachen* stetigen und unstetigen Mannigfaltigkeiten. Auf ihn wird, wie wir später zeigen wollen, die einfachste und zugleich vollständigste Erklärung resp. Bestimmung eines *Kontinuums* gegründet.

Die Ableitung $P'$ einer linearen Punktmenge $P$ ist nämlich die Mannig-

[1] Man vgl. auch Ascoli: Nuove ricerche sulla serie di Fourier. Reale Academia dei Lincei 1877—78.

faltigkeit aller derjenigen Punkte, welche die Eigenschaft eines *Grenzpunktes* von $P$ besitzen, wobei es nicht darauf ankommt, ob der Grenzpunkt zugleich ein Punkt von $P$ ist oder nicht.

Da hiernach die Ableitung einer Punktmenge $P$ wieder eine bestimmte Punktmenge $P'$ ist, so kann auch von dieser die Ableitung gesucht werden, welche alsdann *zweite Ableitung* von $P$ genannt und mit $P''$ bezeichnet wird; durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man die $\nu^{\text{te}}$ Ableitung von $P$, welche mit $P^{(\nu)}$ bezeichnet wird.

Hier kann es nun vorkommen, daß der Progreß der Ableitungen $P', P'', \ldots$ zu einer Ableitung $P^{(n)}$ führt, welche aus Punkten besteht, die in jedem endlichen Bereiche nur in endlicher Anzahl vorkommen, so daß $P^{(n)}$ *keine* Grenzpunkte und folglich auch keine Ableitung hat; in diesem Falle sagen wir von der Punktmenge $P$, daß sie von der *ersten Gattung* und von der $n^{\text{ten}}$ *Art* sei. Bricht aber die Reihe der Ableitungen von $P$, die Reihe $P', P'', P''', \ldots P^{(\nu)}, \ldots$ *nicht* ab, so sagen wir, daß die Punktmenge $P$ von der *zweiten Gattung* sei.

Leicht erkennt man hieraus, daß wenn $P$ von der ersten Gattung und $n^{\text{ter}}$ Art ist, alsdann auch $P', P'', P''' \ldots$ zur ersten Gattung gehören und dabei resp. von der $\overline{n-1}^{\text{ten}}$, $\overline{n-2}^{\text{ten}}$, $\overline{n-3}^{\text{ten}} \ldots$ Art sind, daß ferner, wenn $P$ zur zweiten Gattung gehört, ein gleiches auch von allen ihren Ableitungen $P', P'' \ldots$ gilt. Bemerkenswert ist ferner, daß alle Punkte von $P'', P''' \ldots$ auch immer Punkte von $P'$ sind, während ein zu $P'$ gehöriger Punkt nicht notwendig auch ein solcher von $P$ ist.

Weiter ergeben sich wichtige Charaktere einer Punktmenge $P$, wenn ihr Verhalten zu einem gegebenen, kontinuierlichen Intervall $(\alpha \ldots \beta)$, (dessen Endpunkte wir als ihm zugehörig ansehen) ins Auge gefaßt wird. Hier kann es vorkommen, daß einzelne oder auch alle Punkte dieses Intervalles zugleich Punkte von $P$ sind, oder auch daß kein Punkt von $(\alpha \ldots \beta)$ Punkt von $P$ ist; im letzteren Fall sagen wir, daß $P$ ganz *außerhalb* des Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ liegt. Liegt $P$ teilweise oder ganz im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, so kann der bemerkenswerte Fall eintreten, daß *jedes noch so kleine* in $(\alpha \ldots \beta)$ enthaltene Intervall $(\gamma \ldots \delta)$ Punkte von $P$ enthält. In einem solchen Falle wollen wir sagen, daß *$P$ im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ überall-dicht* sei. *Beispiele* von solchen im Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ *überall-dichten* Punktmengen sind: 1) Jede Punktmenge, zu welcher alle Punkte des Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ als Elemente mitgehören, 2) die Punktmenge, welche aus allen denjenigen Punkten des Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ besteht, deren Abszissen rationale Zahlen sind, 3) die Punktmenge, welche aus allen denjenigen Punkten des Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ besteht, deren Abszissen rationale Zahlen der Form $\frac{2n+1}{2^m}$ (wo $n$ und $m$ ganze, rationale Zahlen sind).

Aus dieser Erklärung des Ausdruckes „*überall-dicht in einem gegebenen Intervalle*“ folgt, daß wenn eine Punktmenge in einem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$



*nicht überall-dicht* ist, ein in jenem enthaltenes Intervall $(\gamma \ldots \delta)$ *notwendig* existieren muß, in welchem kein einziger Punkt von $P$ liegt. Ferner läßt sich zeigen, daß wenn $P$ im Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ überall-dicht ist, alsdann von $P'$ nicht nur ein gleiches gilt, sondern daß auch $P'$ *alle Punkte* des Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ zu den ihren hat. Diese Eigenschaft von $P'$ ließe sich auch zum Ausgangspunkte der Erklärung des *Überall-dicht-seins* in einem Intervalle nehmen, indem man sagen kann: eine Punktmenge $P$ wird in einem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *überall-dicht* genannt, wenn ihre Ableitung $P'$ alle Punkte von $(\alpha \ldots \beta)$ als Elemente enthält.

Ist $P$ *überall-dicht* in einem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, so ist $P$ auch *überall-dicht* in jedem andern Intervalle $(\alpha' \ldots \beta')$, welches in jenem Intervalle enthalten ist.

Eine in einem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *überall-dichte* Punktmenge $P$ ist notwendig von der *zweiten Gattung*; denn auch $P'$ und daher auch $P'', P''', \ldots$ sind alsdann im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *überall-dicht*, dieser Progreß der Ableitungen von $P$ ist daher ein unbegrenzter, d. h. $P$ gehört der *zweiten Gattung* an.

Daraus ziehen wir den Schluß, daß eine Punktmenge $P$ der *ersten Gattung* in irgendeinem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ sicher *nicht* überall-dicht ist, daß folglich immer innerhalb $(\alpha \ldots \beta)$ ein Intervall $(\gamma \ldots \delta)$ gefunden werden kann, welches keinen einzigen Punkt von $P$ enthält.

Ob nun auch umgekehrt *jede* Punktmenge der *zweiten Gattung* so beschaffen ist, daß ein Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ existiert, in welchem sie *überall-dicht* ist, diese Frage wird uns später beschäftigen [S. 148].

Wir kommen nun zu einem ganz andern, nicht weniger bedeutungsvollen *Einteilungsgrunde* für lineare Punktmannigfaltigkeiten, nämlich zu ihrer *Mächtigkeit*.

In der oben angeführten Abhandlung[1] haben wir allgemein von zwei geometrischen, arithmetischen oder irgendeinem andern, scharf ausgebildeten Begriffsgebiete angehörigen Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$ gesagt, daß sie *gleiche Mächtigkeit* haben, wenn man imstande ist, sie nach irgendeinem bestimmten Gesetze so einander zuzuordnen, daß zu jedem Elemente von $M$ ein Element von $N$ und auch umgekehrt zu jedem Elemente von $N$ ein Element von $M$ gehört.

Je nachdem nun zwei Mannigfaltigkeiten von gleicher oder verschiedener Mächtigkeit sind, können sie *einer* und *derselben Klasse* oder *verschiedenen Klassen* zugeteilt werden. Diese allgemeinen Regeln lassen sich nun im besondern auf die *linearen Punktmengen* anwenden und es zerfallen daher dieselben in *bestimmte Klassen*; die Punktmengen einer Klasse sind alle von gleicher *Mächtigkeit*, während Punktmengen, welche verschiedenen Klassen zugeteilt sind, verschiedene Mächtigkeit haben.

[1] Crelles J. 84, 242 [III 2, S. 119].

Jede spezielle Punktmenge kann als *Repräsentant* derjenigen Klasse betrachtet werden, in welche sie gehört.

In *erster Linie* bietet sich hier die Klasse der *ins Unendliche abzählbaren* Punktmengen dar, d. h. diejenigen Punktmengen, welche mit der natürlichen Zahlenreihe: $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ gleiche Mächtigkeit haben und sich also in der Form einer einfach unendlichen Reihe, mit einem allgemeinen von $\nu$ abhängigen Gliede, vorstellen lassen. In diese Klasse gehören beispielsweise alle Punktmengen *der ersten Gattung*; aber auch viele Punktmengen der *zweiten Gattung* fallen in diese Klasse, wie beispielsweise 1) die Punktmenge, welche aus allen Punkten eines Intervalles besteht, deren Abszissen *rationale* Zahlen sind[1], 2) die Punktmenge, welche aus allen Punkten eines Intervalles besteht, deren Abszissen *algebraische* Zahlen sind[2].

*Sodann* tritt uns diejenige Klasse linearer Punktmengen entgegen, als deren Repräsentant wir ein beliebiges *stetiges Intervall*, z. B. die Menge aller Punkte betrachten, deren Abszissen $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind.

In diese Klasse gehören beispielsweise:

1) Jedes stetige Intervall $(\alpha \ldots \beta)$.

2) Jede Punktmenge, die aus mehreren getrennten, stetigen Intervallen $(\alpha \ldots \beta), (\alpha' \ldots \beta'), (\alpha'' \ldots \beta'') \ldots$, in endlicher oder unendlicher Anzahl besteht.

3) Jede Punktmenge, welche aus einem stetigen Intervalle dadurch hervorgeht, daß man eine *endliche* oder *abzählbar unendliche* Mannigfaltigkeit von Punkten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$ daraus entfernt[3].

Ob diese beiden Klassen die *einzigen* sind, in welche die linearen Punktmengen zerfallen, soll hier zunächst noch nicht untersucht werden; dagegen wollen wir den Nachweis führen, daß dieselben in *Wirklichkeit verschiedene* Klassen sind; um dies zu beweisen ist zu zeigen nötig, daß irgend zwei Repräsentanten dieser beiden Klassen sich *nicht* eindeutig und vollständig einander zuordnen lassen.

Als Repräsentanten der zweiten Klasse wählen wir auch hier das stetige Intervall $(0 \ldots 1)$; würde diese Mannigfaltigkeit zugleich in die erste Klasse gehören, so müßte eine einfach unendliche Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

existieren, die aus *allen reellen Zahlen* $\geqq 0$ und $\leqq 1$ besteht, so daß jede solche Zahl $\zeta$ an einer bestimmten Stelle in jener Reihe vorhanden wäre. Dem widerspricht aber ein sehr allgemeiner Satz, welchen wir in Crelles Journal, Bd. 77 [hier III 1, S. 115] mit aller Strenge bewiesen haben, nämlich der folgende Satz:

[1] Man vgl. Crelles J. 84, 250 [hier III 2, S. 126].
[2] Man vgl. Crelles J. 77, 258 [hier III 1, S. 115].
[3] Man vgl. Crelles J. 84, 254 [hier III 2, S. 129].



„*Hat man eine einfach unendliche Reihe*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

*von reellen, ungleichen Zahlen, die nach irgendeinem Gesetz fortschreiten, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle* $(\alpha \ldots \beta)$ *eine Zahl* $\eta$ *(und folglich lassen sich deren unendlich viele) angeben, welche* n i c h t *in jener Reihe (als Glied derselben) vorkommt.*"

In Anbetracht des großen Interesses, welches sich an diesen Satz, nicht bloß bei der gegenwärtigen Erörterung, sondern auch in vielen anderen sowohl arithmetischen, wie analytischen Beziehungen, knüpft, dürfte es nicht überflüssig sein, wenn wir die dort befolgte Beweisführung unter Anwendung vereinfachender Modifikationen hier deutlicher entwickeln.

Unter Zugrundelegung der Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

(welcher wir das Zeichen $(\omega)$ beilegen) und eines beliebigen Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$, wo $\alpha < \beta$ ist, soll also nun gezeigt werden, daß in diesem Intervalle eine reelle Zahl $\eta$ gefunden werden kann, welche in $(\omega)$ *nicht* vorkommt.

I. Wir bemerken zunächst, daß wenn unsre Mannigfaltigkeit $(\omega)$ in dem Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ *nicht überall-dicht* ist, innerhalb dieses Intervalles ein anderes $(\gamma \ldots \delta)$ vorhanden sein muß, dessen Zahlen sämtlich nicht zu $(\omega)$ gehören; man kann alsdann für $\eta$ irgendeine Zahl des Intervalls $(\gamma \ldots \delta)$ wählen, sie liegt im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ und kommt sicher in unsrer Reihe $(\omega)$ *nicht* vor. Dieser Fall bietet daher keinerlei besondere Umstände; und wir können zu dem *schwierigeren* übergehen.

II. Die Mannigfaltigkeit $(\omega)$ sei im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *überall-dicht*. In diesem Falle enthält jedes, noch so kleine in $(\alpha \ldots \beta)$ gelegene Intervall $(\gamma \ldots \delta)$ Zahlen unserer Reihe $(\omega)$. Um zu zeigen, daß *nichtsdestoweniger* Zahlen $\eta$ im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ existieren, welche in $(\omega)$ nicht vorkommen, stellen wir die folgende Betrachtung an.

Da in unserer Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

sicher Zahlen *innerhalb* des Intervalls $(\alpha \ldots \beta)$ vorkommen, so muß eine von diesen Zahlen den *kleinsten Index* haben, sie sei $\omega_{\varkappa_1}$, und eine andere $\omega_{\varkappa_2}$ mit dem nächst größeren Index behaftet sein.

Die kleinere der beiden Zahlen $\omega_{\varkappa_1}, \omega_{\varkappa_2}$ werde mit $\alpha'$, die größere mit $\beta'$ bezeichnet. (Ihre Gleichheit ist ausgeschlossen, weil wir voraussetzten, daß unsere Reihe aus lauter ungleichen Zahlen besteht.)

Es ist alsdann der Definition nach

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta,$$

ferner

$$\varkappa_1 < \varkappa_2;$$

und außerdem ist zu bemerken, daß alle Zahlen $\omega_\mu$ unserer Reihe, für welche $\mu \leqq \varkappa_2$, *nicht* im Innern des Intervalls $(\alpha' \ldots \beta')$ liegen, wie aus der Bestimmung der Zahlen $\omega_{\varkappa_1}, \omega_{\varkappa_2}$ sofort erhellt. Ganz ebenso mögen $\omega_{\varkappa_3}, \omega_{\varkappa_4}$ die beiden mit den kleinsten Indizes versehenen Zahlen unserer Reihen sein, welche in das *Innere* des Intervalls $(\alpha' \ldots \beta')$ fallen, und die kleinere der Zahlen $\omega_{\varkappa_3}, \omega_{\varkappa_4}$ werde mit $\alpha''$, die größere mit $\beta''$ bezeichnet.

Man hat alsdann

$$\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta',$$
$$\varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4,$$

und man erkennt, daß alle Zahlen $\omega_\mu$ unserer Reihe, für welche $\mu \leqq \varkappa_4$ *nicht* in das *Innere* des Intervalls $(\alpha'' \ldots \beta'')$ fallen.

Nachdem man unter Befolgung des gleichen Gesetzes zu einem Intervall $(\alpha^{(\nu-1)}, \ldots \beta^{(\nu-1)}$ gelangt ist, ergibt sich das folgende Intervall dadurch aus demselben, daß man die beiden ersten (d. h. mit niedrigsten Indizes versehenen) Zahlen unserer Reihe $(\omega)$ aufstellt (sie seien $\omega_{\varkappa_{2\nu-1}}$ und $\omega_{\varkappa_{2\nu}}$), welche in das *Innere* von $(\alpha^{(\nu-1)} \ldots \beta^{(\nu-1)})$ fallen; die kleinere dieser beiden Zahlen wird mit $\alpha^{(\nu)}$, die größere mit $\beta^{(\nu)}$ bezeichnet.

Das Intervall $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ liegt alsdann im *Innern* aller vorangegangenen Intervalle und hat zu unserer Reihe $(\omega)$ die *eigentümliche* Beziehung, daß alle Zahlen $\omega_\mu$, für welche $\mu \lesseqgtr \varkappa_{2\nu}$, *sicher nicht in seinem Innern* liegen. Da offenbar

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \ldots \;\; \varkappa_{2\nu-2} < \varkappa_{2\nu-1} < \varkappa_{2\nu} \ldots$$

und diese Zahlen als Indizes *ganze* Zahlen sind, so ist

$$\varkappa_{2\nu} \geqq 2\nu$$

und daher

$$\nu < \varkappa_{2\nu};$$

wir können daher, und dies ist für das folgende ausreichend, gewiß sagen,

*daß, wenn $\nu$ eine beliebige ganze Zahl ist, die Größe $\omega_\nu$ außerhalb des Intervalls $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ liegt.*

Da die Zahlen $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(\nu)}, \ldots$ ihrer Größe nach fortwährend wachsen, dabei jedoch im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eingeschlossen sind, so haben sie nach einem bekannten Fundamentalsatze der Größenlehre eine Grenze, die wir mit $A$ bezeichnen, so daß

$$A = \operatorname{Lim} \alpha^{(\nu)} \quad \text{für} \quad \nu = \infty.$$

Ein gleiches gilt für die Zahlen $\beta', \beta'', \beta''', \ldots, \beta^{(\nu)}, \ldots$, welche fortwährend



abnehmen und dabei ebenfalls im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ liegen; wir nennen ihre Grenze $B$, so daß

$$B = \operatorname{Lim} \beta^{(\nu)} \quad \text{für} \quad \nu = \infty.$$

Man hat offenbar

$$\alpha^{(\nu)} < A \leqq B < \beta^{(\nu)}.$$

Es ist aber leicht zu sehen, daß der Fall $A < B$ hier *nicht* vorkommen kann, da sonst jede Zahl $\omega_\nu$ unserer Reihe *außerhalb* des Intervalles $(A \ldots B)$ liegen würde, indem $\omega_\nu$ außerhalb des Intervalls $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ gelegen ist; unsere Reihe $(\omega)$ wäre im Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ *nicht überall-dicht*, gegen die Voraussetzung.

Es bleibt daher nur der Fall $A = B$ übrig und es zeigt sich nun, daß die Zahl

$$\eta = A = B$$

in unserer Reihe $(\omega)$ *nicht* vorkommt.

Denn, würde sie ein Glied unserer Reihe sein, etwa das $\nu^{\text{te}}$, so hätte man $\eta = \omega_\nu$.

Die letztere Gleichung ist aber für keinen Wert von $\nu$ möglich, weil $\eta$ im *Innern* des Intervalls $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$, $\omega_\nu$ aber *außerhalb* desselben liegt.

## Nr. 2.

Um die folgende Darstellung durch Abkürzung zu erleichtern, sei mir zunächst gestattet, einiges Formale festzustellen.

Die Identität zweier Punktmengen $P$ und $Q$ werde durch die Formel $P \equiv Q$ ausgedrückt. Haben zwei Mengen $P$ und $Q$ kein gemeinschaftliches Element, so sagen wir, sie seien *ohne Zusammenhang*. Entsteht eine Menge $P$ aus der Zusammenfassung mehrerer: $P_1, P_2, P_3, \ldots$, in endlicher oder unendlicher Anzahl, welche paarweise keinen Zusammenhang haben, so schreiben wir:

$$P \equiv \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}.$$

Gehören alle Punkte einer Menge $P$ zu einer andern Menge $Q$, so sagen wir: $P$ sei in $Q$ *enthalten* oder auch $P$ sei ein Divisor von $Q$, $Q$ ein Multiplum von $P$. Sind $P_1, P_2, P_3, \ldots$ irgendwelche Punktmengen in endlicher oder unendlicher Anzahl, so gehört zu ihnen sowohl ein kleinstes gemeinsames Multiplum, welches wir mit

$$\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \ldots) \quad \text{[die „Vereinigungsmenge“]}$$

bezeichnen und welches die Menge ist, die aus allen verschiedenen Punkten von $P_1, P_2, P_3, \ldots$ besteht und sonst keine anderen Punkte als Elemente besitzt, wie auch ein größter gemeinsamer Divisor, den wir mit

$$\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \ldots) \qquad \text{[„Durchschnitt“]}$$

bezeichnen und welcher die Menge der Punkte ist, die allen $P_1, P_2, P_3, \ldots$ gemeinsam sind. Beispielsweise können wir, wenn $P', P'', P''', \ldots$ die aufeinander folgenden Ableitungen einer Punktmenge $P$ sind (s. Nr. 1, S. 140), sagen, daß $P''$ ein Divisor von $P'$, $P'''$ sowohl Divisor von $P''$, wie auch von $P'$, allgemein $P^{(\nu)}$ Divisor von $P^{(\nu-1)}, P^{(\nu-2)}, \ldots P'$ ist; dagegen ist $P'$ *im allgemeinen kein* Divisor von $P$; wenn aber $P$ selbst die erste Ableitung einer Menge $Q$ ist, so ist $P'$ Divisor von $P$.

Es ist ferner zweckmäßig, ein Zeichen zu haben, welches die Abwesenheit von Punkten ausdrückt, wir wählen dazu den Buchstaben $O$; $P \equiv O$ bedeutet also, daß die Menge $P$ *keinen einzigen* Punkt enthält, also streng genommen als solche gar nicht vorhanden ist. Um auch hierfür ein Beispiel zu geben, so ist eine Punktmenge *erster Gattung* und $n^{\text{ter}}$ Art dadurch charakterisiert, daß

$$P^{(n+1)} \equiv O,$$

dagegen $P^{(n)}$ von $O$ verschieden ist.

Zwei Mengen *hängen* durch ihren größten gemeinsamen Divisor *zusammen*, und wenn der letztere $\equiv 0$ ist, so sind sie *ohne Zusammenhang*.

Besitzen zwei Punktmengen, $P$ und $Q$ gleiche *Mächtigkeit*, gehören sie also zu *einer* Klasse (Art. 1, S. 141), so nennen wir sie *äquivalent* und drücken diese Beziehung durch die Formel aus:

$$P \sim Q.$$

Hat man $P \sim Q$ und $Q \sim R$, so ist auch immer

$$P \sim R.$$

Ist ferner $P_1, P_2, P_3, \ldots$ eine Reihe von Mengen, welche paarweise keinen Zusammenhang haben, $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ eine andere Reihe, von welcher das gleiche gilt, und hat man $P_1 \sim Q_1$; $P_2 \sim Q_2$; $P_3 \sim Q_3$; ..., so ist auch

$$\{P_1, P_2, P_3, \ldots\} \sim \{Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\}.$$

Die Punktmengen der ersten Gattung lassen sich, wie wir soeben gesehen, durch den Begriff der Ableitung, soweit er bisher entwickelt ist, vollkommen charakterisieren, für die der zweiten Gattung reicht jener Begriff nicht aus, hier wird eine Erweiterung desselben notwendig, die sich bei tieferem Erfassen wie von selbst darbietet.

Man beachte, daß in der Reihe der Ableitungen $P', P'', P''', \ldots$ einer Menge $P$ jedes Glied ein Divisor der vorangehenden ist, jede neue Ableitung $P^{(\nu)}$ also aus der vorhergehenden $P^{(\nu-1)}$ durch *Wegfall* gewisser Punkte entsteht, *ohne* daß neue Punkte hinzukommen.



Gehört $P$ zur zweiten Gattung, so wird $P'$ sich aus zwei wesentlich verschiedenen Punktmengen $Q$ und $R$ zusammensetzen, so daß

$$P' \equiv \{Q, R\},$$

die eine $Q$ besteht aus denjenigen Punkten von $P'$, welche bei hinreichendem Fortschreiten in der Folge $P', P'', P''', \ldots$ verloren gehen, die andere $R$ umfaßt diejenigen Punkte, welche in *allen* Gliedern der Folge $P', P'', P''', \ldots$ erhalten bleiben, es ist also $R$ definiert durch die Formel

$$R \equiv \mathfrak{D}(P', P'', P''', \ldots).$$

Wir haben aber auch offenbar

$$R \equiv \mathfrak{D}(P'', P''', P^{IV}, \ldots)$$

und allgemein

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(n_1)}, P^{(n_2)}, P^{(n_3)}, \ldots),$$

wo $n_1, n_2, n_3, \ldots$ irgendeine Reihe ins Unendliche wachsender ganzer, positiver Zahlen ist.

Diese aus der Menge $P$ hervorgehende Punktmenge $R$ werde nun durch das Zeichen

$$P^{(\infty)}$$

ausgedrückt und „Ableitung von $P$ der Ordnung $\infty$" genannt. [An Stelle des vieldeutigen $\infty$ hat Cantor hierfür später das Zeichen $\omega$ verwendet. Vgl. hier S. 195.]

Die erste Ableitung von $P^{(\infty)}$ werde mit $P^{(\infty+1)}$, die $n^{\text{te}}$ Ableitung von $P^{(\infty)}$ mit $P^{(\infty+n)}$ bezeichnet; $P^{(\infty)}$ wird aber auch eine, im allgemeinen von $O$ verschiedene Ableitung von der Ordnung $\infty$ haben, wir nennen sie $P^{(2\infty)}$. Durch Fortsetzung dieser Begriffskonstruktionen kommt man zu Ableitungen, die konsequenterweise durch

$$P^{(n_0\infty+n_1)}$$

zu bezeichnen sind, wo $n_0, n_1$ positive ganze Zahlen sind. Wir kommen aber auch darüber hinaus, indem wir

$$\mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(2\infty)}, P^{(3\infty)}, \ldots)$$

bilden und dafür das Zeichen $P^{(\infty^2)}$ festsetzen.

Hieraus ergibt sich durch Wiederholung derselben Operation und Kombinierung mit den früher gewonnenen der allgemeinere Begriff

$$P^{(n_0\infty^2+n_1\infty+n_2)},$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommt man zu

$$P^{(n_0\infty^\nu+n_1\infty^{\nu-1}+\cdots+n_\nu)},$$

wo $n_0, n_1, \ldots, n_\nu$ positive ganze Zahlen sind. Zu weiteren Begriffen gelangt man, indem man $\nu$ variabel werden läßt; man setze:

$$P^{(\infty^\infty)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(\infty^2)}, P^{(\infty^3)}, \ldots).$$

Durch konsequentes Fortschreiten gewinnt man sukzessive die weiteren Begriffe:

$$P^{(n\infty^\infty)}, \quad P^{(\infty^{\infty+1})}, \quad P^{(\infty^{\infty+n})}, \quad P^{(\infty^{n\infty})}, \quad P^{(\infty^{\infty^n})}, \quad P^{(\infty^{\infty^\infty})}, \quad \text{u.s.w.};$$

wir sehen hier eine dialektische Begriffserzeugung, welche immer weiter führt und dabei frei von jeglicher Willkür in sich notwendig und konsequent bleibt.

Für die Punktmengen der ersten Gattung ist, wie aus ihrem Begriffe folgt,

$$P^{(\infty)} \equiv O;$$

es ist bemerkenswert, daß auch das Umgekehrte bewiesen werden kann: jede Punktmenge, für welche jene Gleichung besteht, ist von der ersten Gattung; die Mengen erster Gattung sind also durch jene Gleichung *völlig charakterisiert.*

Es ist leicht, das Beispiel einer Punktmenge zweiter Gattung zu bilden, für welche $P^{(\infty)}$ aus einem Punkte $p$ besteht; man nehme in Intervallen, die auf einander folgen, an einander grenzen und dabei unendlich klein werdend gegen $p$ konvergieren, Punktmengen der ersten Gattung an, deren Ordnungszahlen über alle Grenzen hinaus wachsen, wenn die entsprechenden Intervalle sich dem $p$ nähern, — so bilden sie zusammengenommen ein derartiges Beispiel, welches zugleich die in Nr. 1 [S. 141] aufgeworfene Frage erledigt, ob zu einer Punktmenge zweiter Gattung ein Intervall immer gehören müsse, in welchem sie *überalldicht* ist; wir sehen an diesem Beispiel, daß dies *keineswegs* erforderlich ist.

Mit gleicher Leichtigkeit konstruiert man Punktmengen der zweiten Gattung, für welche $P^{(\infty+n)}$ oder $P^{(2\infty)}$ oder allgemeiner

$$P^{(n_0\infty^\nu + n_1\infty^{\nu-1} + \cdots + n_\nu)}$$

aus einem vorgeschriebenen Punkte $p$ bestehen.

Alle derartigen Mengen sind in *keinem* Intervalle überalldicht und gehören außerdem der *ersten* Klasse an; sie gleichen in diesen beiden Beziehungen den Punktmengen erster Gattung.

**[Anmerkung.]**

Die vorliegende, durch eine Reihe von Annalen-Bänden in den Jahren 1879—1884 sich hinziehende Abhandlung geht in ihren Ausführungen weit über das hinaus, was der Titel verspricht, und faßt in Wahrheit die gesamten bis zum Jahre 1884 von Cantor gewonnenen Resultate auf dem Gebiete der abstrakten wie der angewandten Mengenlehre systematisch zusammen, so insbesondere die Theorie der Äquivalenz und der Mächtigkeit wie die der Wohlordnung und der Ordnungszahlen. Sie bringt aber auch in ausführlicher Darstellung die Cantorsche Theorie der Irrationalzahlen (Nr. 5 § 9) sowie (ebenfalls in Nr. 5 § 4ff) eine philosophische Auseinandersetzung mit den Gegnern des Aktual-unendlichen, die dann später in IV 3 und IV 4 wieder aufgenommen wird.



## Nr. 3.

In den beiden vorangegangenen Artikeln 1. und 2. haben wir uns streng an den in der Überschrift bezeichneten Gegenstand gehalten und uns ausschließlich mit *linearen* Punktmengen d. h. mit gesetzmäßig gegebenen Mannigfaltigkeiten von Punkten beschäftigt, welche einer unendlichen stetigen geraden Linie angehören. Mit Absicht hatte ich der Darstellung zunächst diese Grenze gezogen, weil, namentlich im Hinblick auf meine in der Abhandlung „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ (Crelles Journal, Bd. 84, S. 242) [III 2, S. 119] gewonnenen Resultate, durch welche ebene, räumliche und allgemein $n$-fach ausgedehnte Gebilde in eindeutige Beziehung zu linearen Punktmengen gesetzt worden sind, von vornherein angenommen werden konnte, daß die meisten an linearen Punktmengen hervortretenden Eigenschaften und Beziehungen mit naheliegenden Modifikationen bei Punktmengen sich nachweisen lassen, die in stetigen Flächen, Räumen oder $n$-dimensionalen Gebieten enthalten sind. Diese Verallgemeinerung möchte ich aber nun deutlicher hervortreten lassen, da sie nicht nur an sich und mit Rücksicht auf Anwendungen in der Funktionentheorie von Interesse ist, sondern auch neue Gesichtspunkte für die Erkenntnis des Gebietes der linearen Punktmengen liefert.

Um mit einem anzufangen, so sind die bisher vorgekommenen Begriffe der *Ableitungen* verschiedener Ordnung, wobei letztere nicht bloß durch eine endliche ganze Zahl bestimmt wird, sondern unter Umständen auch durch gewisse scharf bestimmte Unendlichkeitssymbole charakterisiert werden muß, ohne weiteres auf die in stetigen $n$-dimensionalen Gebieten vorkommenden Punktmengen ausdehnbar. Der Ableitungsbegriff stützt sich auch hier auf den Begriff des *Grenzpunktes* zu einer gegebenen Punktmenge $P$, welcher dadurch definiert ist, daß in jeder noch so kleinen *Umgebung* desselben von ihm verschiedene Punkte der Menge $P$ vorkommen, wobei es gleichgültig ist, ob ein solcher Grenzpunkt zur Menge $P$ mitgehört oder nicht. Der Satz, daß jede aus unendlich vielen Punkten bestehende in einem $n$-fach ausgedehnten stetigen und im Endlichen liegenden Gebiete verbreitete Punktmenge *zum wenigsten einen* Grenzpunkt besitzt, dürfte in dieser Allgemeinheit zuerst von C. Weierstraß ausgesprochen, bewiesen und aufs umfassendste in der Funktionentheorie verwertet worden sein.

Der Inbegriff *aller* Grenzpunkte einer Menge $P$ bildet eine im allgemeinen von $P$ verschiedene neue Punktmenge $P'$, welche ich die *erste Ableitung* von $P$ nenne. Daraus ergeben sich durch Iteration dieser Begriffsbildung in endlicher oder selbst in *unendlicher* Folge mit in gewissem Sinne notwendiger Dialektik die Begriffe der Ableitungen höherer Ordnung. Hierbei tritt immer die leicht zu begründende Erscheinung auf, daß jede Ableitung mit Ausnahme der ersten als Bestandteil in den vorangehenden mit Einschluß der ersten Ableitung $P'$ enthalten ist, während die ursprünglich gegebene Menge $P$

im allgemeinen ganz andere Punkte enthält als ihre Ableitungen. Ebenso ist der Begriff des *Überalldichtseins*, welchen wir zunächst nur an den linearen Punktmengen in Betracht gezogen haben, ohne weiteres auf Mengen in höheren Dimensionen zu übertragen; eine in einem stetigen $n$-dimensionalen Gebiete $A$ vorkommende Punktmenge $P$ wird nämlich, wenn $a$ ein stetiges Teilgebiet von $A$ ist, *in dem Gebiete $a$ überalldicht* genannt, wenn jedes stetige Theilgebiet $a'$ von $a$, welches mit $a$ gleiche Dimensionenzahl hat, Punkte der Menge $P$ in seinem Innern hat.

Die erste Ableitung $P'$ (und ebenso alle folgenden) von einer in einem stetigen Gebiete $a$ überalldichten Punktmenge $P$ enthält das stetige Gebiet $a$ selbst mit allen Punkten der Begrenzung des letzteren, und es kann auch umgekehrt diese Eigenschaft der Punktmenge $P$ als Ausgangspunkt für die Definition des Überalldichtseins derselben in dem Gebiete $a$ genommen werden.

Auch der *Mächtigkeitsbegriff*, welcher den Begriff der ganzen Zahl, dieses Fundament der Größenlehre, als Spezialfall in sich faßt und als das allgemeinste genuine Moment bei Mannigfaltigkeiten angesehen werden dürfte, ist so wenig auf die linearen Punktmengen beschränkt, daß er vielmehr als Attribut einer jeglichen *wohldefinierten* Mannigfaltigkeit betrachtet werden kann, welche begriffliche Beschaffenheit ihre Elemente auch haben mögen.

Eine Mannigfaltigkeit (ein Inbegriff, eine Menge) von Elementen, die irgendwelcher Begriffssphäre angehören, nenne ich *wohldefiniert*, wenn auf Grund ihrer Definition und infolge des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten es als *intern bestimmt* angesehen werden muß, *sowohl* ob irgendein derselben Begriffssphäre angehöriges Objekt zu der gedachten Mannigfaltigkeit als Element gehört oder nicht, *wie auch*, ob zwei zur Menge gehörige Objekte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebenseins einander gleich sind oder nicht.

Im allgemeinen werden die betreffenden Entscheidungen nicht mit den zu Gebote stehenden Methoden oder Fähigkeiten in Wirklichkeit sicher und genau ausführbar sein; darauf kommt es aber hier durchaus nicht an, sondern *allein* auf die *interne Determination*, welche in konkreten Fällen, wo es die Zwecke fordern, durch Vervollkommnung der Hilfsmittel zu einer *aktuellen* (*externen*) *Determination* auszubilden ist.

Ich erinnere hier zur Erläuterung an die Definition der Menge aller algebraischen Zahlen, welche zweifellos so gefaßt werden kann, daß mit ihr die interne Determination dafür gegeben ist, ob eine beliebig angenommene bestimmte Zahl $\eta$ zu den algebraischen Zahlen gehört oder nicht; nichtsdestoweniger zählt das Problem, für eine gegebene Zahl $\eta$ diese Entscheidung tatsächlich auszuführen, wie bekannt, oft zu den *schwierigsten* und es ist beispielsweise noch immer eine offene Frage von eminentem Interesse, ob die Zahl $\pi$, welche das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser ausdrückt, eine algebraische, oder, wie höchst wahrscheinlich, eine transzendente Zahl ist[1]. Für die Grundzahl $e$ des natürlichen Logarithmensystems ist diese Aufgabe erst vor acht Jahren von Ch. Hermite in der bewundernswerten Abhandlung „Sur la fonction exponentielle, Paris 1874“ gelöst worden; hier wird gezeigt, daß die Zahl $e$ keiner algebraischen Gleichung mit ganzzahligen rationalen Koeffizienten als Wurzel genügt.



Hat man es mit einer geometrischen Mannigfaltigkeit zu tun, deren *Elemente* nicht allein Punkte, sondern auch Linien, Flächen oder Körper sein können, so tritt, wenn sie *wohldefiniert* ist, auch hier sofort die Frage nach ihrer Mächtigkeit auf und es wird letztere entweder *gleich* sein einer bei Punktmengen vorkommenden Mächtigkeit oder *größer* sein als alle solche Mächtigkeiten.

Was im besonderen die in $n$-dimensionalen stetigen Gebieten enthaltenen *Punktmengen* anbetrifft, so habe ich (Crelles Journal Bd. 84, S. 242) [III 2, S. 119] strenge gezeigt, daß ihre Mächtigkeiten mit denen der *linearen* Punktmengen übereinstimmen; es kann nämlich diese Tatsache als eine einfache Folge des dort bewiesenen Satzes aufgefaßt werden, wonach ein $n$-fach ausgedehntes stetiges Gebilde in gegenseitig-eindeutige, durchaus gesetzmäßige und verhältnismäßig einfache Beziehung zu einem eindimensionalen stetigen Gebiete, also zum geraden *Linearkontinuum* gebracht werden kann; die Frage nach den verschiedenen Mächtigkeiten bei *Punktmengen* kann somit, ohne daß hierdurch ihre Allgemeinheit eingeschränkt wird, an den *linearen* Punktmengen untersucht werden, wie ich schon am Schlusse der soeben zitierten Abhandlung hervorgehoben habe.

Den Ausdruck „*Mächtigkeit*“ habe ich J. Steiner entlehnt[1], der ihn in einem ganz speziellen, immerhin jedoch verwandten Sinne gebraucht, um auszusprechen, daß zwei Gebilde durch *projektivische* Zuordnung so aufeinander bezogen sind, daß jedem Element des einen ein und nur ein Element des andern entspricht; bei dem hier gemeinten absoluten Mächtigkeitsbegriff wird zwar an der gegenseitig-eindeutigen Beziehbarkeit festgehalten, dagegen für das Gesetz der Zuordnung keinerlei Beschränkung, namentlich keine Beschränkung in bezug auf Stetigkeit und Unstetigkeit gemacht, so daß zweien Mengen dann, aber auch nur dann *gleiche* Mächtigkeit zugestanden wird, wenn sie nach irgendeinem Gesetze einander gegenseitig-eindeutig zugeordnet werden können; sind die beiden Mengen *wohldefiniert*, so ist es als *intern determiniert* anzusehen, ob sie gleiche Mächtigkeit haben oder nicht, die *aktuelle* Entscheidung darüber gehört aber in den konkreten Fällen oft zu den mühsamsten Aufgaben. So ist es mir erst nach vielen fruchtlosen Versuchen vor acht Jahren mit Hilfe eines Satzes, den ich sowohl in Crelles J. Bd. 77, S. 260 [hier III 1, S. 115], wie auch in Nr. 1 dieser Abhandlung [S. 142]

[1] Siehe dessen Vorlesungen über synthetische Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Schröter, § 2.

bewiesen habe, gelungen zu zeigen, daß das Linearkontinuum *nicht* gleiche Mächtigkeit mit der natürlichen Zahlenreihe hat.

Die *Mannigfaltigkeitslehre* in der ihr hier zuteil gewordenen Auffassung, umspannt, wenn wir das Mathematische allein ins Auge fassen und die übrigen Begriffssphären vorläufig unberücksichtigt lassen, die Gebiete der Arithmetik, der Funktionenlehre und der Geometrie; sie faßt sie auf Grund des Mächtigkeitsbegriffs zu einer höheren Einheit zusammen. *Unstetiges* und *Stetiges* findet sich solcherweise von demselben Gesichtspunkte aus betrachtet und mit gemeinschaftlichem Maße gemessen.

Die *kleinste* Mächtigkeit, welche überhaupt an *unendlichen*, d. h. aus unendlich vielen Elementen bestehenden Mengen auftreten kann, ist die Mächtigkeit der positiven ganzen rationalen Zahlenreihe; ich habe die Mannigfaltigkeiten dieser Klasse *ins unendliche abzählbare Mengen* oder kürzer und einfacher *abzählbare Mengen* genannt; sie sind dadurch charakterisiert, daß sie sich (auf viele Weisen) in der Form einer einfach unendlichen, gesetzmäßigen Reihe

$$E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$$

darstellen lassen, so daß jedes Element der Menge an einer bestimmten Stelle dieser Reihe steht und auch die Reihe keine anderen Glieder enthält als Elemente der gegebenen Menge.

Jeder unendliche Bestandteil einer abzählbaren Menge bildet wieder eine ins unendliche abzählbare Menge.

Hat man eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Mengen $(E)$, $(E')$, $(E'')$, ..., deren jede ihrerseits abzählbar ist, so ist auch die aus der Zusammenfassung aller Elemente von $(E)$, $(E')$, $(E'')$, ... hervorgehende Menge abzählbar.

Diese beiden einfachen, leicht zu beweisenden Sätze bilden die Grundlage für den Nachweis der Abzählbarkeit. So erkennt man aus ihnen bald, wie ich schon wiederholt bemerkt habe, daß alle Mengen, die in Form einer $n$-fach unendlichen Reihe mit dem allgemeinen Gliede $E_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}$ (wo $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ unabhängig von einander alle positiven ganzen Zahlenwerte zu erhalten haben) gegeben sind, abzählbare Mengen sind, d. h. sich in Form *einfach* unendlicher Reihen darstellen lassen; aber auch Mengen, deren allgemeines Glied die Form hat

$$E_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu},$$

wo nun auch $\mu$ alle positiven ganzen Zahlwerte zu erhalten hat, gehören in diese Klasse; ein besonders merkwürdiger Fall der letzten Art ist der Inbegriff aller algebraischen Zahlen (Crelles J. Bd. 77, S. 258) [ III 1, S. 115]. Arithmetik und Algebra bieten demnach eine unerschöpfliche Fülle von Beispielen der Abzählbarkeit; doch nicht weniger ergiebig ist in dieser Rücksicht die Geometrie. Der folgende Satz, welcher manche schönen Anwendungen in der



Zahlentheorie und Funktionenlehre gestattet, dürfte eine Vorstellung hiervon geben:

Satz. In einem $n$-dimensionalen überall ins Unendliche ausgedehnten stetigen Raume $A$ sei eine unendliche Anzahl von $n$-dimenisonalen stetigen[1], von einander getrennten und höchstens an ihren Begrenzungen zusammenstoßenden Teilgebieten $(a)$ definiert; *die Mannigfaltigkeit* $(a)$ *solcher Teilgebiete ist immer abzählbar.*

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß hier keinerlei Voraussetzung über die Verteilung und über die Größe des Rauminhaltes der Gebiete $a$ gemacht wird, sie können mit beliebiger Kleinheit ihrer Ausdehnung an jeden ihnen nicht zugehörigen Punkt von $A$ unendlich nahe heranrücken, der Satz hat keinerlei Ausnahme, wenn nur jedes Teilgebiet $a$ (alle $a$ sind vorausgesetztermaßen $n$-dimensional) einen bestimmten (beliebig kleinen) Rauminhalt hat und die verschiedenen $a$ höchstens in ihren Begrenzungen zusammenfallen.

Der Beweis dieses Satzes läßt sich wie folgt führen: es werde der $n$-dimensionale unendliche Raum $A$ mittels reziproker radii vectores auf ein innerhalb eines $\overline{n+1}$-dimensionalen unendlichen Raumes $A'$ verlaufendes $n$-fach ausgedehntes Gebilde $B$ bezogen, welches dadurch bestimmt ist, daß dessen Punkte von einem festen Punkte des Raumes $A'$ die konstante Entfernung 1 haben. (Im Falle $n = 1$ ist dies ein Einheitskreis, im Falle $n = 2$ eine Einheitskugel.) Jedem $n$-dimensionalen Teilgebiete $a$ von $A$ entspricht ein $n$-dimensionales Teilgebiet $b$ von $B$ mit bestimmtem Rauminhalt; läßt sich nun die Abzählbarkeit für die Menge $(b)$ nachweisen, so folgt hieraus wegen der gegenseitig eindeutigen Zuordnung die Abzählbarkeit der Menge $(a)$.

Die Menge $(b)$ ist aber aus dem Grunde abzählbar, weil die Anzahl der Gebiete $b$, welche ihrem Rauminhalte nach größer sind als eine beliebig gegebene Zahl $\gamma$, notwendig eine endliche ist; denn ihre Summe ist kleiner als die Zahl $2^n\pi$ [[2]], nämlich kleiner als der Rauminhalt des Gebildes $B$, in welchem die $b$ alle enthalten sind; daraus folgt, daß die Gebiete $b$ nach der Größe ihres Rauminhaltes in eine einfach unendliche Reihe geordnet werden können, so daß die kleineren den größeren folgen und in dieser Folge zuletzt unendlich klein werden.

Der Fall $n = 1$ liefert folgenden Satz, welcher für die weitere Ausbildung der Theorie der linearen Punktmengen wesentlich ist: *jeder Inbegriff von getrennten, höchstens in ihren Endpunkten zusammenfallenden Intervallen* $(\alpha \ldots \beta)$, *welche in einer unendlichen geraden Linie definiert sind, ist notwendig ein abzählbarer Inbegriff*; das gleiche gilt folglich auch von der Menge

[1] Bei jedem „stetigen" Gebilde werden die Punkte seiner Begrenzung als ihm zugehörig betrachtet. [Gemeint sind die „abgeschlossenen" Gebilde, welche alle ihre Häufungspunkte enthalten.]

der Endpunkte $\alpha$ und $\beta$, jedoch nicht immer von der Ableitung der letzteren Punktmenge.

Der Fall $n = 2$, welcher die Eigenschaft der Abzählbarkeit einem jeden Inbegriffe von getrennten, höchstens in ihren Begrenzungen zusammenstoßenden Flächenteilen in einer unendlichen Ebene zuweist, scheint in der Funktionentheorie komplexer Größen von Bedeutung zu sein. Hierbei bemerke ich, daß es nicht schwer ist, diesen Satz auch auf Inbegriffe getrennter Flächenteile auszudehnen, die in einem Gebiete definiert sind, welches die Ebene $m$-fach oder selbst abzählbar unendlich oft bedeckt.

Was die abzählbaren *Punktmengen* anbetrifft, so bieten sie eine merkwürdige Erscheinung dar, welche ich im folgenden zum Ausdruck bringen möchte. Betrachten wir irgendeine Punktmenge $(M)$, welche innerhalb eines $n$-dimensionalen stetig zusammenhängenden Gebietes $A$ *überalldicht* verbreitet ist und die Eigenschaft der Abzählbarkeit besitzt, so daß die zu $(M)$ gehörigen Punkte sich in der Reihenform

$$M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$$

vorstellen lassen; als Beispiel diene die Menge aller derjenigen Punkte unseres dreidimensionalen Raumes, deren Koordinaten in bezug auf ein orthogonales Koordinatensystem $x, y, z$ alle drei *algebraische* Zahlenwerte haben. Denkt man sich aus dem Gebiete $A$ die abzählbare Punktmenge $(M)$ entfernt und das alsdann übrig gebliebene Gebiet mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet, so besteht der merkwürdige Satz, daß für $n \gtreqless 2$ das Gebiet $\mathfrak{A}$ *nicht aufhört, stetig zusammenhängend* zu sein, daß mit anderen Worten je zwei Punkte $N$ und $N'$ des Gebietes $\mathfrak{A}$ immer verbunden werden können durch eine *stetige Linie*, welche mit allen ihren Punkten dem Gebiete $\mathfrak{A}$ angehört, so daß auf ihr kein einziger Punkt der Menge $(M)$ liegt.

Es genügt, diesen Satz für den Fall $n = 2$ als richtig zu erkennen; sein Beweis beruht wesentlich auf dem in Art. 1 bewiesenen Satze, daß, wenn irgendeine gesetzmäßige Reihe reeller Größen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

(unter denen auch gleiche vorkommen können, was an dem Wesen des Satzes offenbar nichts ändert) vorliegt, in jedem noch so kleinen willkürlich gegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ reelle Größen $\eta$ gefunden werden können, die in jener Reihe *nicht* vorkommen.

Sei in der Tat $A$ irgendein zusammenhängendes stetiges Stück der unendlichen Ebene, in $A$ nehme man die überalldichte abzählbare Punktmenge $(M)$ an und es seien $N$ und $N'$ irgend zwei der Menge $(M)$ nicht angehörige Punkte des Gebietes $A$, die wir zunächst unbekümmert um die Punkte $(M)$ durch eine stetige innerhalb $A$ verlaufende Linie $l$ miteinander verbinden;



es soll nun gezeigt werden, daß die Linie $l$ durch eine andere stetige Linie $l'$ ersetzt werden kann, welche gleichfalls die Punkte $N$ und $N'$ miteinander verbindet, ebenfalls im Innern von $A$ verläuft, jedoch keinen einzigen Punkt der Menge $(M)$ enthält.

Auf $l$ werden im allgemeinen unendlich viele Punkte der Menge $(M)$ liegen, jedenfalls bilden sie auf ihr einen Bestandteil von $(M)$, also gleichfalls eine *abzählbare* Menge.

Folglich gibt es, dem soeben erwähnten arithmetischen Satze zufolge, in jedem noch so kleinen Intervalle der Linie $l$ Punkte, welche nicht zu $(M)$ gehören. Von diesen Punkten der Linie $l$ fassen wir eine endliche Anzahl $N_1, N_2, \ldots, N_k$ derart ins Auge, daß die geraden Strecken $NN_1, N_1N_2, \ldots, N_kN'$ ebenfalls ganz im Innern von $A$ liegen. Diese Strecken lassen sich nun immer durch Kreisbögen mit denselben Endpunkten ersetzen, welche gleichfalls innerhalb $A$ verlaufen, keinen einzigen Punkt der Menge $(M)$ enthalten und in ihrer Zusammensetzung eine stetige Linie $l'$ von der oben charakterisierten Beschaffenheit bilden.

Es wird genügen, wenn wir diese Tatsache an einer der Strecken, wir nehmen die erste $NN_1$, nachweisen.

Die durch die Punkte $N$ und $N_1$ hindurchgehenden Kreise bilden eine einfach unendliche Schar, ihre Mittelpunkte liegen auf einer bestimmten Geraden $g$; die Lage eines solchen Mittelpunktes werde durch den Abstand $u$ von einem festen Punkte $O$ der Geraden $g$ mit Vorzeichen bestimmt; jedenfalls kann alsdann der Größe $u$ ein Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ als Spielraum derart zugewiesen werden, daß für jeden einem solchen $u$ entsprechenden Kreis einer der beiden $N$ und $N_1$ verbindenden Kreisbögen ganz im Gebiete $A$ zu liegen kommt.

Die Mittelpunkte derjenigen Kreise unserer Kreisschar, welche durch die Punkte

$$M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$$

der Menge $(M)$ gehen, bilden auf der Geraden $g$ eine abzählbare Punktmenge

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots,$$

die zugehörigen Werte von $u$ seien

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

Nimmt man alsdann im Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ eine Zahl $\eta$ an, welche keinem $\omega_\nu$ gleich ist (was nach dem angeführten Satze immer möglich ist), so erhält man durch die Annahme

$$u = \eta$$

einen Kreis der Schar, auf dessen Umfang kein einziger Punkt der Menge $(M)$ liegt und der uns, wegen $\alpha < \eta < \beta$, einen die Punkte $N$ und $N_1$ verbindenden Kreisbogen von der verlangten Beschaffenheit liefert.

Auf diese Weise ist gezeigt, daß je zwei Punkte $N$ und $N'$ des Gebietes $\mathfrak{A}$, welches nach Abzug einer überalldichten abzählbaren Punktmenge $(M)$ vom Gebiete $A$ übrigbleibt, sich durch eine stetige aus einer endlichen Anzahl von Kreisbögen zusammengesetzte Linie $l'$ verbinden lassen, welche mit allen ihren Punkten dem Gebiete $\mathfrak{A}$ angehört, d. h. keinen einzigen Punkt der Menge $(M)$ enthält. Übrigens würde es mit demselben Hilfsmittel auch möglich sein, die Verbindung der Punkte $N$ und $N'$ durch eine nach einem *einzigen analytischen Gesetze* verlaufende kontinuierliche Linie herzustellen, welche ganz im Gebiete $\mathfrak{A}$ enthalten ist.

An diese Sätze knüpfen sich Erwägungen über die Beschaffenheit des der realen Welt, zum Zwecke begrifflicher Beschreibung und Erklärung der in ihr vorkommenden Erscheinungen, zugrunde zu legenden dreidimensionalen Raumes. Bekanntlich wird derselbe sowohl wegen der in ihm auftretenden Formen, wie auch namentlich mit Rücksicht auf die darin vor sich gehenden Bewegungen als *durchgängig stetig* angenommen. Diese letztere Annahme besteht nach den gleichzeitigen, voneinander unabhängigen Untersuchungen Dedekinds (M. s. das Schriftchen: Stetigkeit und irrationale Zahlen von R. Dedekind, Braunschweig 1872) und des Verfassers (Mathem. Annalen Bd. V, S. 127 und 128) [II 5, S. 96] in nichts anderem, als daß jeder Punkt, dessen Koordinaten $x, y, z$ in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch *irgendwelche* bestimmte reelle, rationale oder irrationale Zahlen vorgegeben sind, als *wirklich zum Raume gehörig* gedacht wird, wozu im allgemeinen kein innerer Zwang vorliegt und worin daher ein freier Akt unserer gedanklichen Konstruktionstätigkeit gesehen werden muß. Die *Hypothese der Stetigkeit des Raumes* ist also nichts anderes, als die an sich willkürliche Voraussetzung der vollständigen, gegenseitig-eindeutigen Korrespondenz zwischen dem dreidimensionalen *rein arithmetischen Kontinuum* $(x, y, z)$ und dem der Erscheinungswelt zugrunde gelegten Raume[1].

Unser Denken kann aber mit gleicher Leichtigkeit von einzelnen Raumpunkten, sogar wenn sie überalldicht vorkommen, sehr wohl abstrahieren und

[1] Ich glaube hier als bekannt voraussetzen zu können, daß eine allgemeine, rein arithmetische, d. h. von allen geometrischen Anschauungsgrundsätzen vollkommen unabhängige Größenlehre möglich und in ihren Grundzügen auch ausgebildet ist; ich verweise in dieser Beziehung außer auf die zitierten, freilich nur sehr kurz gehaltenen Aufsätze von Dedekind und mir noch auf die ausgezeichnete Schrift des Herrn Lipschitz: Grundlagen der Analysis. Bonn 1877. Die meisten prinzipiellen Schwierigkeiten, welche in der Mathematik gefunden werden, scheinen mir ihren Ursprung darin zu haben, daß die Möglichkeit einer rein arithmetischen Größen- und Mannigfaltigkeitslehre verkannt wird. Namentlich sind hierauf die Irrtümer derjenigen Autoren zurückzuführen, welche das *Unendlichkleine* als *Größe* und nicht als einen *Modus* der Veränderlichkeit von Größen auffassen. Vom Standpunkte der reinen *arithmetischen Analysis* aus *gibt es keine* unendlich kleinen Größen, wohl aber unendlich klein *werdende*, veränderliche Größen.



sich den Begriff eines *unstetigen* dreidimensionalen Raumes $\mathfrak{A}$ von der im vorhergehenden charakterisierten Beschaffenheit bilden. Die sich alsdann ergebende Frage, ob auch in so *unstetigen* Räumen $\mathfrak{A}$ *stetige Bewegung* gedacht werden könne, muß nach dem Vorhergehenden unbedingt *bejaht* werden, weil wir gezeigt haben, daß je zwei Punkte eines Gebildes $\mathfrak{A}$ durch unzählig viele stetige, vollkommen reguläre Linien verbunden werden können. Es stellt sich also merkwürdigerweise heraus, daß aus der bloßen Tatsache der stetigen Bewegung auf die durchgängige Stetigkeit des zur Erklärung der Bewegungserscheinungen gebrauchten dreidimensionalen Raumbegriffs zunächst kein Schluß gemacht werden kann. Daher liegt es nahe, den Versuch einer modifizierten, für Räume von der Beschaffenheit $\mathfrak{A}$ gültigen Mechanik zu unternehmen, um aus den Konsequenzen einer derartigen Untersuchung und aus ihrem Vergleich mit Tatsachen möglicherweise wirkliche Stützpunkte für die Hypothese der durchgängigen Stetigkeit des der Erfahrung unterzulegenden Raumbegriffs zu gewinnen.

**[Anmerkungen.]**

[1] zu S. 151. Die Transzendenz von $\pi$ wurde zuerst bewiesen von F. Lindemann in den Math. Ann. 20, S. 213 (1882).

[2] zu S. 153. Die genaue Formel für den Inhalt des betrachteten $n+1$-dimensionalen Gebildes hat Cantor später (Math. Ann. 21, S. 58) angegeben wie folgt

$$\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \leqq 2^n \pi \quad \text{für} \quad n \geqq 2\,.$$

## Nr. 4.

[Anmerkung hierzu S. 164.]

Es sollen jetzt im Anschluß an die vorangegangenen Entwicklungen verschiedene neue Sätze aufgestellt und bewiesen werden, die sowohl an sich von Interesse, wie auch in der Funktionentheorie von Nutzen sind. Dabei bedienen wir uns der folgenden Bezeichnungen.

Sind mehrere Punktmengen $P_1, P_2, P_3$, paarweise ohne Zusammenhang, so wollen wir, wenn $P$ die aus ihrer Zusammenfassung hervorgehende Menge ist, an Stelle einer früher gebrauchten Formulierung [hier S. 145] die bequemere wählen:

$$P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \cdots.$$

Und im Einklange hiermit möge, wenn $Q$ eine in $P$ enthaltene Menge und $R$ diejenige Menge ist, welche übrig bleibt, wenn man $Q$ von $P$ entfernt, geschrieben werden:

$$R \equiv P - Q\,.$$

Eine Punktmenge $Q$, die wir uns in einem $n$-dimensionalen stetigen Raume liegend denken, kann so beschaffen sein, daß *kein* zu ihr gehöriger Punkt zugleich Grenzpunkt derselben ist; eine solche Menge, für welche also

$$\mathfrak{D}(Q, Q') = 0,$$

nennen wir eine *isolierte* Punktmenge. Hat man *irgend* eine Punktmenge $P$, die *nicht* isoliert ist, so geht aus ihr eine *isolierte* $Q$ dadurch hervor, daß man von ihr die Menge $\mathfrak{D}(P, P')$ entfernt.

Hier ist also

$$Q \equiv P - \mathfrak{D}(P, P')$$

und folglich

$$P \equiv Q + \mathfrak{D}(P, P').$$

Jede Punktmenge kann also zusammengesetzt werden aus einer isolierten Menge $Q$ und aus einer andern $R$, welche Divisor der Ableitung $P'$ ist. Beachten wir ferner, worauf wiederholt aufmerksam gemacht worden ist, daß jede höhere Ableitung von $P$ in der vorhergehenden Ableitung enthalten ist, so folgt, daß

$$P' - P'',\ P'' - P''',\ \ldots,\ P^{(\nu)} - P^{(\nu+1)},\ \ldots$$

lauter *isolierte* Mengen sind.

Man hat aber die für das folgende wichtigen Zerlegungen

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \cdots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}$$

und

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \cdots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \cdots P^{(\infty)}.$$

Von isolierten Punktmengen gilt nun der folgende Satz:

Theorem I. *Jede isolierte Punktmenge ist abzählbar, gehört also zur ersten Klasse.*

Beweis. $Q$ sei irgendeine innerhalb eines $n$-dimensionalen Raumes gelegene *isolierte* Punktmenge, $q$ sei ein Punkt derselben, $q', q'', q''', \ldots$ seien die übrigen Punkte von $Q$.

Die Entfernungen $\overline{qq'}, \overline{qq''}, \overline{qq'''}, \ldots$ haben eine *untere Grenze*, welche mit $\varrho$ bezeichnet werde.

Ebenso sei $\varrho'$ die untere Grenze der Entfernungen $\overline{q'q}, \overline{q'q''}, \overline{q'q'''}, \ldots$, $\varrho''$ die untere Grenze der Entfernungen $\overline{q''q}, \overline{q''q'}, \overline{q''q'''}, \ldots$ usw.

Alle diese Größen $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ *sind von Null verschieden*, weil $Q$ eine *isolierte* Menge ist.

Man beschreibe mit $q$ als Mittelpunkt dasjenige $(n-1)$-dimensionale Gebilde, dessen Punkte von $q$ die Entfernung $\frac{\varrho}{2}$ haben; dieses Gebilde begrenzt eine $n$-dimensionale Vollkugel, welche wir mit $K$ bezeichnen wollen. Ganz ebenso bilde man eine zum Punkte $q'$ als Mittelpunkt gehörige Vollkugel $K'$ mit dem Radius $\frac{\varrho'}{2}$, eine zum Punkte $q''$ als Mittelpunkt gehörige Vollkugel $K''$ mit dem Radius $\frac{\varrho''}{2}$ usw.



Es ist nun wesentlich, daß irgend zwei dieser Vollkugeln, z. B. $K$ und $K'$ sich höchstens berühren können, sonst aber ganz außer einander liegen.

Dies hängt damit zusammen, daß, wie aus der Definition der Größen $\varrho$ und $\varrho'$ folgt, beide kleiner oder gleich $\overline{qq'}$, also die Radien $\frac{\varrho}{2}, \frac{\varrho'}{2}$ der beiden Kugeln $K$ und $K'$ nicht größer sind als die Hälfte der Zentrallinie $\overline{qq'}$.

Somit bilden die Vollkugeln $K, K', \ldots$ einen Inbegriff von außer einander liegenden $n$-dimensionalen Teilgebieten des zugrunde gelegten $n$-dimensionalen Raumes; ein derartiger Inbegriff ist aber, wie [hier S. 153] bewiesen worden ist, immer *abzählbar*. Folglich bilden auch die Mittelpunkte $q, q', q'', \ldots$ eine abzählbare Menge, d. h. $Q$ ist abzählbar.

Wir sind nun imstande, die folgenden Sätze zu beweisen:

Theorem II. *Ist die Ableitung $P'$ einer Punktmenge $P$ abzählbar, so ist $P$ gleichfalls abzählbar.*

Beweis. Man bezeichne den größten gemeinsamen Divisor von $P$ und $P'$ mit $R$, so daß

$$R \equiv \mathfrak{D}(P, P'),$$

und setze

$$P - R \equiv Q.$$

$Q$ ist alsdann, wie wir schon oben gesehen haben, eine *isolierte* Menge, also abzählbar nach Th. I.

$R$ ist abzählbar, weil es ein Bestandteil der als abzählbar vorausgesetzten Menge $P'$ ist.

Die Zusammenfassung zweier abzählbaren Mengen ergibt aber stets wieder eine abzählbare Menge; daher ist $P \equiv Q + R$ abzählbar.

Theorem III. *Jede Punktmenge der ersten Gattung und $n^{\text{ter}}$ Art ist abzählbar.*

$1^{\text{ter}}$ Beweis. Für Punktmengen $0^{\text{ter}}$ Art ist der Satz einleuchtend, weil solche offenbar *isolierte* Punktmengen sind. Wir wollen nun eine vollständige Induktion ausführen, indem wir annehmen, es sei der Satz für Punktmengen $0^{\text{ter}}, 1^{\text{ter}}, 2^{\text{ter}} \ldots (n-1)^{\text{ter}}$ Art richtig und wollen unter dieser Voraussetzung zeigen, daß er auch richtig ist für Punktmengen der $n^{\text{ten}}$ Art.

Ist $P$ eine Pm. der $n^{\text{ten}}$ Art, so ist $P'$ von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Art; $P'$ ist also abzählbar der Voraussetzung nach, folglich auch $P$ abzählbar nach Th. II.

2ter **Beweis.** Ist $P$ eine Punktmenge $n^{\text{ter}}$ Art, so ist $P^{(n)}$ von der $0^{\text{ten}}$ Art, also eine isolierte Punktmenge.

Man hat nun

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \cdots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}.$$

Hier sind alle Bestandteile auf der rechten Seite $(P' - P'')$, $(P'' - P''')$, $\ldots$, $(P^{(n-1)} - P^{(n)})$ und $P^{(n)}$ *isolierte* Mengen, also nach Th. I sämtlich abzählbar, folglich ist auch die aus ihrer Zusammenfassung entstehende Menge $P'$ abzählbar, daher nach Th. II auch $P$ abzählbar.

**Theorem IV.** *Jede Punktmenge $P$ der zweiten Gattung, für welche $P^{(\infty)}$ abzählbar, ist selbst abzählbar.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der Zerlegung:

$$P' \equiv (P' - P'') + \cdots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \cdots \text{ in inf.} + P^{(\infty)}.$$

Da nämlich alle Bestandteile der rechten Seite abzählbar sind und die *Anzahl* dieser Bestandteile eine *abzählbar unendliche* ist, so folgt daraus die Abzählbarkeit von $P'$ und nach Th. II diejenige von $P$.

Versteht man unter $\alpha$ irgendeines der in Bd. 17, S. 357 [hier S. 147] eingeführten *Unendlichkeitssymbole*, so hat man den umfassenderen Satz:

**Theorem V.** *Jede Punktmenge $P$ zweiter Gattung, für welche $P^{(\alpha)}$ abzählbar, ist selbst abzählbar.*

Der Beweis dieses Satzes wird mit Hilfe vollständiger Induktion ebenso geführt wie die Beweise der Theoreme III und IV.

Die letzten Sätze kann man auch in folgender Weise formulieren:

*Ist $P$ eine **nicht abzählbare** Punktmenge, so ist auch $P^{(\alpha)}$ **nicht abzählbar**, sowohl wenn $\alpha$ eine endliche ganze Zahl, wie auch wenn es eines der Unendlichkeitssymbole ist.* —

Bei Untersuchungen, welche die Herren **du Bois-Reymond** und **Harnack** über gewisse Verallgemeinerungen von Sätzen der Integralrechnung angestellt haben, werden lineare Punktmengen gebraucht, welche die Beschaffenheit haben, daß sie sich in eine endliche Anzahl von Intervallen einschließen lassen, *so daß die Summe aller Intervalle kleiner ist als eine beliebig vorgegebene Größe.*

Damit eine lineare Punktmenge die hierdurch ausgedrückte Eigenschaft besitze, ist es offenbar notwendig, daß sie in keinem noch so kleinen Intervalle überall dicht sei; doch scheint diese letztere Bedingung nicht auszureichen, um einer Punktmenge die erwähnte Beschaffenheit zu verleihen. Dagegen sind wir imstande, den folgenden Satz zu beweisen.



**Theorem VI.** *Ist eine in einem Intervalle $(a, b)$ enthaltene lineare Punktmenge $P$ so beschaffen, daß ihre Ableitung $P'$ abzählbar ist, so ist es immer möglich, $P$ in eine endliche Anzahl von Intervallen mit beliebig kleiner Intervallsumme einzuschließen.*

Bei dem gleich folgenden Beweise werden hilfsweise die folgenden Sätze gebraucht, von denen der erste eine bekannte Eigenschaft stetiger Funktionen ausspricht, die beiden anderen von unseren früheren Betrachtungen her bekannt sind.

**Hilfssatz I.** Eine in einem Intervalle $(c, d)$ der stetigen Veränderlichen $x$ gegebene, stetige Funktion $\varphi(x)$, welche an den Grenzen *ungleiche* Werte $\varphi(c)$ und $\varphi(d)$ hat, nimmt irgend einen in den Grenzen $\varphi(c)$ und $\varphi(d)$ liegenden Wert $y$ zum mindesten einmal an.

**Hilfssatz II.** Eine in einer unendlichen Geraden liegende unendliche Anzahl von Intervallen, die außer einander liegen, höchstens an ihren Grenzen zusammenstoßen, ist immer abzählbar [S. 153 oben].

**Hilfssatz III.** Hat man eine abzählbar unendliche Menge von Größen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle eine Größe $\eta$ finden, welche unter jenen Größen nicht vorkommt. [Vgl. Nr. 1, S. 143 sowie III 1, S. 117.]

**Beweis von Theorem VI.** Das Intervall $(a, b)$, in welchem $P$ liegt, nehmen wir zur Vereinfachung so an, daß $a = 0$, $b = 1$, auf welchen Fall sich der allgemeine durch Transformation leicht zurückführen läßt. $P$ liegt also im Intervall $(0, 1)$, das gleiche gilt offenbar von $P'$ und von derjenigen Menge, welche aus der Zusammenfassung der Punkte von $P$ und $P'$ hervorgeht und die wir mit $Q$ bezeichnen wollen.

Es ist

$$Q \equiv \mathfrak{M}(P, P').$$

Wir bezeichnen ferner mit $R$ diejenige Punktmenge im Intervalle $(0, 1)$, welche von letzterem nach Abzug der Menge $Q$ übrig bleibt, so daß

$$(0, 1) \equiv Q + R. \tag{1}$$

Mit der vorausgesetzten Abzählbarkeit der Menge $P'$ hängt zunächst folgendes zusammen:

1. Es ist auch $P$ abzählbar nach Th. II, *daher ist auch $Q$ abzählbar.*

2. Es ist $P$ und daher auch $P'$ in *keinem* Intervalle überall dicht; wäre nämlich $P$ überalldicht im Intervalle $(i, k)$, so würden alle Punkte des letzteren zu $P'$ gehören und es könnte $P'$ nicht abzählbar sein nach Hilfssatz III. *Daher ist auch $Q$ in keinem Intervalle überalldicht.* Die Koordinatenwerte, welche den Punkten der abzählbaren Menge $Q$ entsprechen, mögen sein

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots. \tag{2}$$

Betrachten wir nunmehr die Menge $R$, so läßt sich zeigen, daß die ihren Punkten entsprechenden Koordinatenwerte übereinstimmen mit sämtlichen *inneren* Werten einer unendlichen Reihe von Intervallen

$$(c_1, d_1),\ (c_2, d_2),\ \ldots,\ (c_\nu, d_\nu),\ \ldots, \tag{3}$$

welche außer einander liegen und natürlich im Intervalle $(0, 1)$ enthalten sind. Da nur die *inneren* Werte dieser Intervalle zu Punkten der Menge $R$ gehören, so folgt aus der Relation (1) sofort, daß die Grenzen $c_\nu$ und $d_\nu$ dieser Intervalle Punkten der Menge $Q$ entsprechen, also in der Reihe (2) vorkommen.

In der Tat sei $r$ ein Punkt von $R$, so können Punkte von $Q$ nicht unendlich nahe an $r$ herantreten, weil sonst $r$ ein Grenzpunkt von $P$ wäre, folglich zu $Q$ gehören würde. Es muß nun links von $r$ ein Punkt $c$ und rechts von $r$ ein Punkt $d$ liegen, so daß im Innern des Intervalles $(c, d)$ kein Punkt von $Q$ liegt, dagegen, falls nicht $c$ und $d$ isolierte Punkte von $Q$ sind, außerhalb dieses Intervalles Punkte von $Q$ in beliebiger Nähe von $c$ und $d$ vorkommen; weil aber jeder Grenzpunkt von $Q$ zu $Q$ mitgehört, so sind $c$ und $d$ auch im letzteren Falle selbst zu $Q$ gehörige Punkte. Die unendlich vielen Intervalle $(c, d)$, welche auf solche Weise entstehen, liegen alle offenbar außer einander und bilden daher nach Hilfssatz II eine abzählbare Menge (3), wie zu beweisen war.

Die Größe des Intervalles $(c_\nu, d_\nu)$ ist, da wir $c_\nu < d_\nu$ voraussetzen,

$$= d_\nu - c_\nu .$$

Die Summe aller dieser Intervallgrößen wollen wir $\sigma$ nennen, sodaß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(d_\nu - c_\nu) = \sigma . \tag{4}$$

Von vornherein sieht man, daß $\sigma \leqq 1$, weil die Intervalle alle außer einander liegen und im Intervalle $(0, 1)$ enthalten sind. Wären wir nun imstande, zu zeigen, daß $\sigma = 1$, also die Möglichkeit $\sigma < 1$ ausgeschlossen ist, so würde damit, wie eine höchst einfache an die Bedeutung der Intervalle $(c_\nu, d_\nu)$ anknüpfende Betrachtung zeigt [1], unser Theorem VI bewiesen sein.

Es geht also unser Beweis darauf aus, zu zeigen, daß die Annahme $\sigma < 1$ zu einem Widerspruche führt.

Zu dem Ende definieren wir für $0 < x \leqq 1$ eine Funktion $f(x)$ wie folgt: Man summiere die Größen aller Intervalle $(c_\nu, d_\nu)$, soweit die letzteren in das Innere des Intervalles $(0, x)$ hineinfallen, und setze diese Summe $= f(x)$. (Dabei soll von einem Intervalle $(c_\nu, d_\nu)$, welches teilweise außerhalb $(0, x)$ liegt, nur der entsprechende in das Innere von $(0, x)$ fallende Teil in diese Summe aufgenommen werden.)

Man hat offenbar

$$f(1) = \sigma .$$



Setzt man außerdem fest, daß $f(0) = 0$ sei, so folgt leicht, daß $f(x)$ eine *stetige* Funktion von $x$ ist für $0 \leqq x \leqq 1$.

Aus der Definition von $f(x)$ folgt nämlich unmittelbar, daß, wenn $x$ und $x + h$ zwei verschiedene Werte des Intervalles $(0, 1)$ sind, man für positive Werte von $h$ hat

$$0 < f(x + h) - f(x) \leqq h .$$

Hieraus folgert man die Stetigkeit von $f(x)$.

Es zeigt sich ferner sofort, wenn man auf die Definition von $f(x)$ zurückgeht, daß, *wenn $x$ und $x + h$ zwei verschiedene Werte eines und desselben Teilintervalles $(c_\nu, d_\nu)$ sind, man hat*

$$f(x + h) - f(x) = h ,$$

also auch

$$(x + h) - f(x + h) = x - f(x) .$$

Führt man daher die Funktion

$$\varphi(x) = x - f(x)$$

ein, so ist auch $\varphi(x)$ eine *stetige* Funktion von $x$, welche, wenn $x$ von 0 bis 1 wächst, sich ohne Abnahme von 0 bis $1 - \sigma$ ändert. *Diese Änderung geschieht so, daß innerhalb eines der Teilintervalle $(c_\nu, d_\nu)$ die stetige Funktion $\varphi(x)$ einen konstanten Wert behält.*

Daraus folgt für die Funktion $\varphi(x)$ die Eigentümlichkeit, daß *alle von ihr angenommenen Werte durch die Wertreihe*

$$\varphi(u_1),\ \varphi(u_2),\ \ldots,\ \varphi(u_\nu),\ \ldots \tag{5}$$

*erschöpft werden.*

In der Tat kann $x$ entweder einem der Werte $u_\nu$ gleich sein, in diesem Falle haben wir

$$\varphi(x) = \varphi(u_\nu) .$$

Oder es ist $x$ ein Wert im Innern eines der Intervalle $(c_\nu, d_\nu)$; in diesem Falle haben wir wegen der Konstanz von $\varphi(x)$ innerhalb eines solchen Intervalles

$$\varphi(x) = \varphi(c_\nu) = \varphi(d_\nu) .$$

Nun gehören aber, wie wir oben gesehen, die Werte $c_\nu$ und $d_\nu$ gleichfalls zu der Reihe (2), es ist etwa

$$c_\nu = u_\lambda .$$

Folglich hat man auch in diesem Falle

$$\varphi(x) = \varphi(u_\lambda) .$$

In der Reihe (5) sind also alle Werte enthalten, welche $\varphi(x)$ überhaupt annehmen kann.

Die Wertmenge, welche die stetige Funktion $\varphi(x)$ annehmen kann, ist somit *abzählbar*.

Wäre nun $\sigma < 1$, also $1 - \sigma$ von Null verschieden, so würde nach Hilfssatz I die stetige Funktion $\varphi(x)$ jeden Wert $y$ zwischen $0$ und $1 - \sigma$ mindestens einmal annehmen. Folglich würden in der Reihe (5), welche, wie soeben gezeigt worden ist, alle von der Funktion $\varphi(x)$ angenommenen Werte erschöpft, alle möglichen Zahlen des Intervalles $(0, 1 - \sigma)$ vorkommen, was dem Hilfssatze III entgegensteht. Somit bleibt nur die Annahme $\sigma = 1$ übrig, was zu beweisen war.

**[Anmerkung.]**

[1] Zu S. 162. Die hier von Cantor nur angedeutete Schlußfolgerung kann folgendermaßen ausgeführt werden:

Hat die Intervallsumme (4) wirklich den Wert $\sigma = 1$, so kann man für jedes $\varepsilon > 0$ eine *endliche* Teilsumme $\sigma_n$ von $n$ Gliedern so abspalten, daß $\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} (d_\nu - c_\nu) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ wird und die ganze Menge $Q$ sich auf die (höchstens) $n + 1$ Zwischenräume dieser $n$ Intervalle einschließlich ihrer Endpunkte verteilt. Diese $n + 1$ Zwischenintervalle $\Delta'_\nu$ kann man dann wieder so vergrößern, daß sie alle Punkte von $Q$ im *Innern* enthalten, während ihre Summe von $\sigma'_n = 1 - \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2}$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ abweicht. Dann ist die Punktmenge $Q$ und damit auch $P$ in diesen endlich vielen vergrößerten $\Delta''_\nu$ enthalten, deren Gesamtlänge $\sigma''_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ beträgt. Es läßt sich also in der Tat $P$ in eine endliche Intervallmenge von beliebig kleiner Gesamtlänge einschließen.



## Nr. 5.

## Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Leipzig 1883).

[Anmerkungen des Verfassers vgl. S. 204; des Herausgebers S. 208.]

### § 1.

Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannigfaltigkeitslehre[1]) ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von niemandem gesucht worden ist.

Die Abhängigkeit, in welche ich mich von dieser Ausdehnung des Zahlbegriffs versetzt sehe, ist eine so große, daß es mir ohne letztere kaum möglich sein würde, zwanglos den kleinsten Schritt weiter vorwärts in der Mengenlehre auszuführen; möge in diesem Umstande eine Rechtfertigung oder, wenn nötig, eine Entschuldigung dafür gefunden werden, daß ich scheinbar fremdartige Ideen in meine Betrachtungen einführe. Denn es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus; so gewagt dies auch scheinen möchte, kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung, sondern die feste Überzeugung aussprechen, daß diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche wird angesehen werden müssen. Dabei verhehle ich mir keineswegs, daß ich mit diesem Unternehmen in einen gewissen Gegensatz zu weitverbreiteten Anschauungen über das mathematische Unendliche und zu häufig vertretenen Ansichten über das Wesen der Zahlgröße mich stelle.

Was das mathematische Unendliche anbetrifft, soweit es eine berechtigte Verwendung in der Wissenschaft bisher gefunden und zum Nutzen derselben beigetragen hat, so scheint mir dasselbe in erster Linie in der Bedeutung einer veränderlichen, entweder über alle Grenzen hinaus wachsenden oder bis zu beliebiger Kleinheit abnehmenden, aber stets *endlich* bleibenden Größe aufzutreten. Ich nenne dieses Unendliche das *Uneigentlich-unendliche*.

Daneben hat sich aber in der neueren und neuesten Zeit sowohl in der Geometrie wie auch namentlich in der Funktionentheorie eine andere ebenso berechtigte Art von Unendlichkeitsbegriffen herausgebildet, wonach beispielsweise bei der Untersuchung einer analytischen Funktion einer komplexen veränderlichen Größe es notwendig und allgemein üblich geworden ist, sich in der die komplexe Variable repräsentierenden Ebene einen einzigen im Unendlichen liegenden, d. h. unendlich entfernten aber bestimmten Punkt zu denken und das Verhalten der Funktion in der Nähe dieses Punktes ebenso zu prüfen wie dasjenige in der Nähe irgend eines anderen Punktes; dabei zeigt es sich, daß das Verhalten der Funktion in der Nähe des unendlich fernen Punktes genau dieselben Vorkommnisse darbietet wie an jedem andern, im Endlichen gelegenen Punkte, so daß hieraus die volle Berechtigung dafür gefolgert wird, das Unendliche in diesem Falle in einen ganz bestimmten Punkt verlegt zu denken.

Wenn das Unendliche in solch einer bestimmten Form auftritt, so nenne ich es *Eigentlich-Unendliches.*

Diese beiden Erscheinungsarten, in welchen das mathematische Unendliche hervorgetreten ist, wobei es in beiden Formen die größten Fortschritte in der Geometrie, in der Analysis und in der mathematischen Physik bewirkt hat, halten wir zum Verständnis des Folgenden wohl auseinander.

In der ersteren Form, als Uneigentlich-Unendliches, stellt es sich als ein *veränderliches Endliches* dar; in der andern Form, wo ich es Eigentlich-unendliches nenne, tritt es als ein durchaus *bestimmtes* Unendliches auf. Die unendlichen realen ganzen Zahlen, welche ich im folgenden definieren will und zu denen ich schon vor einer längeren Reihe von Jahren geführt worden bin, ohne daß es mir zum deutlichen Bewußtsein gekommen war, in ihnen konkrete Zahlen von realer Bedeutung zu besitzen, haben durchaus nichts gemein mit der ersten von jenen beiden Formen, mit dem Uneigentlich-unendlichen, dagegen ist ihnen derselbe Charakter der Bestimmtheit eigen, wie wir ihn bei dem unendlich fernen Punkte in der analytischen Funktionentheorie antreffen; sie gehören also zu den Formen und Affektionen des Eigentlich-unendlichen. — Während aber der Punkt im Unendlichen der komplexen Zahlenebene vereinzelt dasteht gegenüber allen im Endlichen liegenden Punkten, erhalten wir nicht bloß eine einzige unendliche ganze Zahl, sondern eine unendliche Folge von solchen, die voneinander wohl unterschieden sind und in gesetzmäßigen zahlentheoretischen Beziehungen zueinander sowohl wie zu den endlichen ganzen Zahlen stehen. Diese Beziehungen sind nicht etwa solche, welche sich im Grunde auf Beziehungen endlicher Zahlen untereinander zurückführen lassen; die letztere Erscheinung tritt allerdings, aber auch nur bei den verschiedenen Stärken und Formen des Uneigentlich-unendlichen, häufig auf, z. B. bei unendlich klein oder unendlich groß werdenden Funktionen einer Veränderlichen $x$, falls sie bestimmte endliche Ordnungszahlen des Unendlich-werdens haben. Solche Beziehungen können in der Tat nur als verschleierte Verhältnisse des Endlichen oder doch als auf letztere unmittelbar zurückführbar angesehen werden; die Gesetze unter den zu definierenden eigentlich-unendlichen ganzen Zahlen sind dagegen von Grund aus verschieden von den im Endlichen herrschenden Abhängigkeiten, womit aber nicht ausgeschlossen ist, daß die endlichen reellen Zahlen selbst gewisse neue Bestimmungen mit Hilfe der bestimmt-unendlichen Zahlen erfahren können.

Die *beiden Erzeugungsprinzipe*, mit deren Hilfe, wie sich zeigen wird, die neuen bestimmt unendlichen Zahlen definiert werden, sind solcher Art, daß durch ihre vereinigte Wirkung jede Schranke in der Begriffsbildung realer



ganzer Zahlen durchbrochen werden kann; glücklicherweise stellt sich ihnen aber, wie wir sehen werden, ein *drittes* Prinzip, welches ich das *Hemmungs-* oder *Beschränkungsprinzip* nenne, entgegen, wodurch dem durchaus endlosen Bildungsprozeß sukzessive gewisse Schranken auferlegt werden, so daß wir natürliche Abschnitte in der absolut unendlichen Folge der realen ganzen Zahlen erhalten, welche Abschnitte ich *Zahlenklassen* nenne.

Die *erste* Zahlenklasse (I) ist die Menge der endlichen ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, auf sie folgt die *zweite* Zahlenklasse (II), bestehend aus gewissen in bestimmter Sukzession einander folgenden unendlichen ganzen Zahlen; erst nachdem die zweite Zahlenklasse definiert ist, kommt man zur dritten, dann zur vierten usw.

Von der größten Bedeutung scheint mir zunächst die Einführung der neuen ganzen Zahlen für die Entwickelung und Verschärfung des in meinen Arbeiten (Crelles J. Bd. 77, S. 257; Bd. 84, S. 242) [S. 115 bzw. 119] eingeführten und in den früheren Nummern dieses Aufsatzes vielfach verwandten *Mächtigkeitsbegriffes.* Jeder wohldefinierten Menge kommt danach eine bestimmte Mächtigkeit zu, wobei zwei Mengen dieselbe Mächtigkeit zugeschrieben wird, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen.

Bei endlichen Mengen fällt die Mächtigkeit mit der *Anzahl* der Elemente zusammen, weil solche Mengen in jeder Anordnung bekanntlich dieselbe Anzahl von Elementen haben.

Bei unendlichen Mengen hingegen war bisher überhaupt weder in meinen Arbeiten noch sonst wo von einer präzis definierten *Anzahl* ihrer Elemente die Rede, wohl aber konnte auch ihnen eine bestimmte, von ihrer Anordnung völlig unabhängige *Mächtigkeit* zugeschrieben werden.

Die *kleinste* Mächtigkeit unendlicher Mengen mußte, wie leicht zu rechtfertigen war, denjenigen Mengen zugeschrieben werden, welche sich gegenseitig eindeutig der *ersten* Zahlenklasse zuordnen lassen und daher mit ihr gleiche Mächtigkeit haben. Dagegen fehlte es bisher an einer ebenso einfachen, natürlichen Definition der *höheren* Mächtigkeiten.

Unsere oben erwähnten Zahlenklassen der bestimmt-unendlichen realen ganzen Zahlen weisen sich nun als die natürlichen, in einheitlicher Form sich darbietenden Repräsentanten der in gesetzmäßiger Folge aufsteigenden Mächtigkeiten von wohldefinierten Mengen aus. Ich zeige aufs bestimmteste, daß die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse (II) nicht nur verschieden ist von der Mächtigkeit der ersten Zahlenklasse, sondern daß sie auch tatsächlich die *nächst höhere* Mächtigkeit ist; wir können sie daher die *zweite* Mächtigkeit oder die Mächtigkeit *zweiter Klasse* nennen. Ebenso ergibt die dritte Zahlenklasse die Definition der dritten Mächtigkeit oder der Mächtigkeit dritter Klasse usw.

## § 2.

Ein anderer großer, den neuen Zahlen zuzuschreibender Gewinn besteht für mich in einem *neuen*, bisher noch nicht vorgekommenen Begriffe, in dem Begriffe der *Anzahl* der Elemente einer *wohlgeordneten* unendlichen Mannigfaltigkeit; da dieser Begriff immer durch eine ganz bestimmte Zahl unseres erweiterten Zahlengebietes ausgedrückt wird, wofern nur die sogleich näher zu definierende Ordnung der Elemente der Menge bestimmt ist, und da andererseits der Anzahlbegriff in unserer inneren Anschauung eine unmittelbare gegenständliche Repräsentation erhält, so ist durch diesen Zusammenhang zwischen Anzahl und Zahl die von mir betonte Realität der letzteren auch in den Fällen, daß sie bestimmt-unendlich ist, erwiesen.

Unter einer *wohlgeordneten* Menge ist jede wohldefinierte Menge zu verstehen, bei welcher die Elemente durch eine bestimmt vorgegebene Sukzession miteinander verbunden sind, welcher gemäß es ein *erstes* Element der Menge gibt und sowohl auf jedes einzelne Element (falls es nicht das letzte in der Sukzession ist) ein bestimmtes anderes folgt, wie auch zu jeder beliebigen endlichen oder unendlichen Menge von Elementen ein bestimmtes Element gehört, welches das ihnen allen *nächstfolgende* Element in der Sukzession ist (es sei denn, daß es ein ihnen allen in der Sukzession folgendes überhaupt nicht gibt). Zwei „wohlgeordnete" Mengen werden nun von derselben *Anzahl* (mit bezug auf die für sie vorgegebenen Sukzessionen) genannt, wenn eine gegenseitig eindeutige Zuordnung derselben derart möglich ist, daß, wenn $E$ und $F$ irgend zwei Elemente der einen, $E_1$ und $F_1$ die entsprechenden Elemente der anderen sind, immer die Stellung von $E$ und $F$ in der Sukzession der ersten Menge in Übereinstimmung ist mit der Stellung von $E_1$ und $F_1$ in der Sukzession der zweiten Menge, so daß, wenn $E$ dem $F$ vorangeht in der Sukzession der ersten Menge, alsdann auch $E_1$ dem $F_1$ vorangeht in der Sukzession der zweiten Menge. Diese Zuordnung ist, wenn überhaupt möglich, wie man leicht sieht, immer eine durchaus bestimmte, und da sich in der erweiterten Zahlenreihe stets eine und nur eine Zahl $\alpha$ findet, so daß die ihr *vorangehenden* Zahlen (von 1 an) in der natürlichen Sukzession dieselbe Anzahl haben, so wird man genötigt, die „Anzahl" jener beiden „wohlgeordneten" Mengen geradezu gleich $\alpha$ zu setzen, wenn $\alpha$ eine unendlich große Zahl ist, und gleich der der Zahl $\alpha$ nächstvorangehenden Zahl $\alpha - 1$, wenn $\alpha$ eine endliche ganze Zahl ist.

Der wesentliche Unterschied zwischen den endlichen und unendlichen Mengen zeigt sich nun darin, daß eine endliche Menge in *jeder* Sukzession, welche man ihren Elementen geben kann, *dieselbe* Anzahl von Elementen darbietet; dagegen werden einer aus unendlich vielen Elementen bestehenden Menge im allgemeinen *verschiedene* Anzahlen zukommen, je nach der Sukzession, welche man den Elementen gibt. Die *Mächtigkeit* einer Menge ist,



wie wir gesehen, ein von der Anordnung unabhängiges Attribut derselben; die *Anzahl* der Menge weist sich aber als ein von einer gegebenen Sukzession der Elemente im allgemeinen abhängiger Faktor aus, sobald man es mit unendlichen Mengen zu tun hat. Indessen besteht dennoch auch bei den unendlichen Mengen ein gewisser Zusammenhang zwischen der *Mächtigkeit* der Menge und der bei gegebener Sukzession bestimmten *Anzahl* ihrer Elemente.

Nehmen wir zuerst eine Menge, welche die Mächtigkeit der ersten Klasse hat und geben den Elementen *irgend* eine bestimmte Sukzession, so daß sie zu einer „wohlgeordneten" Menge wird, so ist ihre Anzahl immer eine bestimmte Zahl der *zweiten* Zahlenklasse und kann niemals durch eine Zahl einer anderen als der zweiten Zahlenklasse bestimmt werden. Andrerseits läßt sich jede Menge von der ersten Mächtigkeit in eine solche Sukzession ordnen, daß ihre Anzahl, mit Bezug auf diese Sukzession, gleich einer beliebig vorgezeichneten Zahl der zweiten Zahlenklasse wird. Wir können diese Sätze auch folgendermaßen ausdrücken: jede Menge von der Mächtigkeit *erster* Klasse ist *abzählbar durch* Zahlen der *zweiten* Zahlenklasse und nur durch solche, und zwar kann der Menge stets eine solche Sukzession ihrer Elemente gegeben werden, daß sie in dieser Sukzession durch eine beliebig vorgegebene Zahl der zweiten Zahlenklasse abgezählt wird, welche Zahl die *Anzahl* der Elemente der Menge mit Bezug auf jene Sukzession angibt.

Die analogen Gesetze gelten für die Mengen höherer Mächtigkeiten. So ist jede wohldefinierte Menge von der Mächtigkeit *zweiter* Klasse abzählbar *durch* Zahlen der *dritten* Zahlenklasse und nur durch solche, und zwar kann der Menge stets eine solche Sukzession ihrer Elemente gegeben werden, daß sie in dieser Sukzession durch eine *beliebig vorgegebene* Zahl der *dritten* Zahlenklasse abgezählt[1] wird, welche Zahl die Anzahl der Elemente der Menge mit Bezug auf jene Sukzession bestimmt.

## § 3.

Der Begriff der *wohlgeordneten Menge* weist sich als fundamental für die ganze Mannigfaltigkeitslehre aus. Daß es immer möglich ist, jede *wohldefinierte* Menge in die *Form* einer *wohlgeordneten* Menge zu bringen, auf dieses, wie mir scheint, grundlegende und folgenreiche, durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdige Denkgesetz werde ich in einer späteren Abhandlung zurückkommen. Hier beschränke ich mich auf den Nachweis, wie aus dem Begriffe der *wohlgeordneten* Menge die Grundoperationen für die ganzen, sei

[1] Was ich bisher in den früheren Nummern dieses Aufsatzes „abzählbar" genannt habe, ist nach der jetzt eingeführten, zugleich verschärften und verallgemeinerten Definition nichts anderes als Abzählbarkeit *durch* Zahlen der ersten Klasse (endliche Mengen) oder *durch* Zahlen der zweiten Klasse (Mengen von der ersten Mächtigkeit).

es endlichen oder bestimmt-unendlichen Zahlen, in der einfachsten Weise sich ergeben und wie die Gesetze derselben aus der unmittelbaren inneren Anschauung mit apodiktischer Gewißheit erschlossen werden. Sind zunächst zwei *wohlgeordnete* Mengen $M$ und $M_1$, denen als Anzahlen die Zahlen $\alpha$ und $\beta$ entsprechen, gegeben, so ist $M + M_1$ wieder eine *wohlgeordnete* Menge, welche entsteht, wenn zuerst die Menge $M$ und auf sie folgend die Menge $M_1$ gesetzt und mit jener vereinigt wird; es entspricht also auch der Menge $M + M_1$ in bezug auf die sich ergebende Sukzession ihrer Elemente eine bestimmte Zahl als Anzahl; diese Zahl wird die *Summe* von $\alpha$ und $\beta$ genannt und mit $\alpha + \beta$ bezeichnet; hier zeigt sich sofort, daß, wenn nicht $\alpha$ und $\beta$ beide endlich sind, $\alpha + \beta$ im allgemeinen von $\beta + \alpha$ verschieden ist. Das *kommutative* Gesetz hört also bereits bei der Addition auf, im allgemeinen gültig zu sein. Es ist nun so einfach, den Begriff der Summe von *mehreren* in bestimmter Folge gegebenen Summanden, wobei diese Folge selbst eine bestimmt-unendliche sein kann, zu bilden, daß ich hier nicht näher darauf einzugehen brauche, und ich bemerke daher nur, daß das *assoziative* Gesetz allgemein sich als gültig erweist. Man hat im besondern $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Nimmt man eine durch eine Zahl $\beta$ bestimmte Sukzession von lauter gleichen und gleichgeordneten Mengen, bei welchen einzeln die Anzahl der Elemente gleich $\alpha$ ist, so erhält man eine neue wohlgeordnete Menge, deren zugehörige Anzahl die Definition für das Produkt $\beta\alpha$ liefert, wo $\beta$ der Multiplikator, $\alpha$ der Multiplikandus ist; auch hier findet sich, daß $\beta\alpha$ im allgemeinen von $\alpha\beta$ verschieden, also das kommutative Gesetz auch bei der Multiplikation der Zahlen im allgemeinen *ungültig* ist. Dagegen findet sich das assoziative Gesetz auch bei der Multiplikation als allgemein herrschend, so daß man hat: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Von den neuen Zahlen zeichnen sich gewisse vor den anderen dadurch aus, daß sie Primzahleigenschaft haben, doch muß letztere hier in etwas bestimmterer Weise charakterisiert werden, indem man unter Primzahl eine solche Zahl $\alpha$ versteht, für welche die Zerlegung $\alpha = \beta\gamma$, wo $\beta$ Multiplikator, nicht anders möglich ist, als wenn $\beta = 1$ oder $\beta = \alpha$; dagegen wird im allgemeinen auch bei Primzahlen $\alpha$ der Multiplikandus einen gewissen Spielraum der Unbestimmtheit haben, was nach der Natur der Dinge nicht abgeändert werden kann. Nichtsdestoweniger soll in einer späteren Abhandlung gezeigt werden, daß die Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren stets auf eine im wesentlichen *einzige* und sogar hinsichtlich der Folge der Faktoren (soweit dieselben nicht endliche im Produkt benachbart auftretende Primzahlen sind) *bestimmte* Weise erfolgen kann. Dabei stellen sich zwei Arten von bestimmt-unendlichen Primzahlen heraus, von denen die erste den endlichen Primzahlen näher steht, wogegen die Primzahlen der zweiten Art einen ganz andern Charakter haben.



Ferner wird es mir nun mit Hilfe der neuen Erkenntnisse möglich sein, demnächst eine strenge Begründung des in der Abhandlung: „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ (Crelles J. Bd. 84, S. 257) [hier III 2, S. 132] am Schlusse derselben angeführten Satzes über die sogenannten linearen unendlichen Mannigfaltigkeiten zu bringen.

In der letzten Nummer (4) dieses Aufsatzes [Th. V, S. 160] leitete ich für Punktmengen $P$, die in einem $n$-dimensionalen stetigen Gebiete enthalten sind, einen Satz her, der sich mit Anwendung der neuen, vorhin definierten Ausdrucksweise, wie folgt, aussprechen läßt: „Ist $P$ eine Punktmenge, deren Ableitung $P^{(\alpha)}$ identisch verschwindet, wo $\alpha$ eine beliebige ganze Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse ist, so ist die erste Ableitung $P^{(1)}$, und daher auch $P$ selbst, eine Punktmenge von der Mächtigkeit *erster* Klasse.“ Es scheint mir höchst merkwürdig, daß sich dieser Satz wie folgt umkehren läßt: „Ist $P$ eine Punktmenge, deren erste Ableitung $P^{(1)}$ die Mächtigkeit *erster* Klasse hat, so gibt es der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse angehörige ganze Zahlen $\alpha$, für welche $P^{(\alpha)}$ identisch verschwindet, und es ist von den Zahlen $\alpha$, für welche diese Erscheinung eintritt, eine die kleinste.“

Den Beweis dieses Satzes werde ich in der nächsten Zeit, infolge einer freundlichen Aufforderung meines hochverehrten Freundes, des Herrn Prof. Mittag-Leffler in Stockholm, in dem ersten Bande des von ihm redigierten neuen mathematischen Journals publizieren. Im Anschlusse hieran wird Herr Mittag-Leffler einen Aufsatz veröffentlichen, in welchem er zeigen wird, wie auf Grund dieses Satzes seinen und des Herrn Prof. Weierstraß Untersuchungen über die Existenz eindeutiger analytischer Funktionen mit gegebenen Singularitätsstellen eine erhebliche Verallgemeinerung gegeben werden kann.

## § 4.

Die erweiterte ganze Zahlenreihe kann, wenn es die Zwecke fordern, ohne weiteres zu einer kontinuierlichen Zahlenmenge vervollständigt werden, indem man zu jeder ganzen Zahl $\alpha$ alle reellen Zahlen $x$, die größer als Null und kleiner als Eins sind, hinzufügt.

Es wird nun vielleicht hieran die Frage geknüpft werden, ob man, da doch auf diese Weise eine bestimmte Erweiterung des reellen Zahlengebietes in das Unendlichgroße erreicht ist, nicht auch mit gleichem Erfolge bestimmte unendlich kleine Zahlen oder, was auf dasselbe hinauslaufen möchte, endliche Zahlen definieren könnte, welche mit den rationalen und irrationalen Zahlen (die als Grenzwerte von Reihen rationaler Zahlen auftreten) nicht zusammenfallen, sondern sich an mutmaßlichen Zwischenstellen inmitten der reellen Zahlen ebenso einfügen möchten, wie die irrationalen Zahlen in die Kette der rationalen oder wie die transzendenten Zahlen in das Gefüge der algebraischen Zahlen sich einschieben?

Die Frage der Herstellung solcher Interpolationen, auf welche von einigen Autoren viel Mühe verwandt worden ist, läßt sich, meines Erachtens und wie ich zeigen werde, erst mit Hilfe unsrer neuen Zahlen und namentlich auf Grund des allgemeinen Anzahlbegriffes wohlgeordneter Mengen klar und deutlich beantworten; während die bisherigen Versuche, wie mir scheint, teils auf einer irrtümlichen Verwechslung des Uneigentlich-unendlichen mit dem Eigentlich-unendlichen beruhen, teils auf einer durchaus unsicheren, schwankenden Basis ausgeführt worden sind.

Das Uneigentlich-unendliche ist oft von neueren Philosophen „schlechtes" Unendliche genannt worden, meines Erachtens mit Unrecht, da es sich in der Mathematik und in den Naturwissenschaften als ein sehr gutes, höchst brauchbares Instrument bewährt hat. Die unendlichkleinen Größen sind meines Wissens bisher überhaupt *nur* in der Form des Uneigentlich-unendlichen zum Nutzen ausgebildet und sind als solches aller jener Verschiedenheiten, Modifikationen und Beziehungen fähig, welche in der Infinitesimalanalysis sowohl wie in der Funktionentheorie gebraucht werden und zum Ausdruck kommen, um dort die reiche Fülle der analytischen Wahrheiten zu begründen. Dagegen müßten alle Versuche, dieses Unendlichkleine gewaltsam zu einem *eigentlichen* Unendlichkleinen zu machen, als zwecklos endlich aufgegeben werden. Wenn anders überhaupt eigentlich-unendlichkleine Größen existieren, d. h. definierbar sind, so stehen sie sicherlich in keinem unmittelbaren Zusammenhange mit den gewöhnlichen, unendlich klein *werdenden* Größen.

Im Gegensatz zu den erwähnten Versuchen über das Unendlichkleine und zu der Verwechselung der beiden Erscheinungsformen des Unendlichen findet sich eine Ansicht über das Wesen und die Bedeutung der Zahlgrößen vielfach vertreten, nach welcher keine anderen Zahlen als wirklich existierend aufgefaßt werden als die *endlichen realen ganzen* Zahlen unsrer Zahlenklasse (I).

Höchstens den aus ihnen unmittelbar hervorgehenden *rationalen* Zahlen wird eine gewisse Realität zugestanden. Was aber die irrationalen anbetrifft, so soll denselben in der reinen Mathematik eine bloß *formale* Bedeutung zukommen, indem sie gewissermaßen nur als Rechenmarken dazu dienen, Eigenschaften von Gruppen ganzer Zahlen zu fixieren und auf einfache, einheitliche Weise zu beschreiben. Das eigentliche Material der Analysis wird ausschließlich, dieser Ansicht zufolge, von den endlichen, realen, ganzen Zahlen gebildet, und alle in der Arithmetik und Analysis gefundenen oder noch der Entdeckung harrenden Wahrheiten sollen als Beziehungen der endlichen ganzen Zahlen untereinander aufzufassen sein; es wird die Infinitesimalanalysis und mit ihr die Funktionentheorie nur insoweit für legalisiert gehalten, wie ihre Sätze sich nachweisbar als unter ganzen endlichen Zahlen herrschende Gesetze deuten lassen. Mit dieser Auffassung der reinen Mathematik,



obgleich ich ihr nicht zustimmen kann, sind unstreitig gewisse Vorzüge verbunden, die ich hier hervorheben möchte; spricht doch für ihre Bedeutung auch der Umstand, daß zu ihren Vertretern ein Teil der verdienstvollsten Mathematiker der Gegenwart gehört.

Sind, wie es hier angenommen wird, nur die endlichen ganzen Zahlen wirklich, alle übrigen aber nichts anderes als Beziehungsformen, so kann verlangt werden, daß die Beweise der analytischen Sätze nach ihrem „zahlentheoretischen Gehalte" geprüft werden und daß man jede Lücke, die sich in ihnen zeigt, nach den Grundsätzen der Arithmetik ausfülle; in der Tunlichkeit solcher Ergänzung wird der wahre Prüfstein für die Echtheit und vollendete Strenge der Beweise gesehen. Es ist nicht zu leugnen, daß auf diesem Wege die Begründung vieler Sätze vervollkommnet und auch sonstige methodische Verbesserungen in verschiedenen Teilen der Analysis bewirkt werden können; auch sieht man in der Befolgung der aus jener Anschauung fließenden Grundsätze eine Sicherung vor jeder Art von Ungereimtheiten oder Fehlern.

Auf diese Weise ist ein bestimmtes, wenn auch ziemlich nüchternes und naheliegendes Prinzip gesetzt, das als Richtschnur allen empfohlen wird; es soll dazu dienen, den Flug der mathematischen Spekulations- und Konzeptionslust in die wahren Grenzen zu weisen, wo sie keine Gefahr läuft, in den Abgrund des „Transzendenten" zu geraten, dorthin, wo, wie zur Furcht und zum heilsamen Schrecken gesagt wird, „alles möglich" sein soll. Dies dahingestellt, wer weiß, ob nicht gerade der Gesichtspunkt der Zweckmäßigkeit es allein gewesen ist, welcher die Urheber der Ansicht bestimmt hat, sie den aufstrebenden, so leicht durch Übermut und Maßlosigkeit in Gefahr kommenden Kräften zum Schutz vor allen Irrtümern als ein wirksames Regulativ zu empfehlen, obgleich ein *fruchtbares* Prinzip darin nicht gefunden werden kann; denn die Annahme, daß sie selbst bei Auffindung neuer Wahrheiten von diesen Grundsätzen ausgegangen wären, ist für mich deshalb ausgeschlossen, weil ich, soviel gute Seiten ich diesen Maximen auch abgewinne, sie streng genommen für *irrig* halten muß; wir verdanken denselben keine wahren Fortschritte, und wenn es wirklich genau nach ihnen zugegangen wäre, so würde die Wissenschaft zurückgehalten oder doch in die engsten Grenzen gebannt worden sein. Glücklicherweise stehen die Dinge in Wahrheit nicht so schlimm, und die Anpreisung sowohl wie die Befolgung jener unter Umständen und Voraussetzungen nützlichen Regeln sind nie so ganz wörtlich genommen worden; auch hat es bis jetzt auffallenderweise, so viel mir bekannt geworden, an jemandem gefehlt, der es unternommen hätte, sie vollständiger und besser zu formulieren, als es hier von mir versucht worden ist.

Sehen wir uns in der Geschichte um, so zeigt sich, daß ähnliche Ansichten öfter vertreten waren und schon bei Aristoteles vorkommen. Bekanntlich findet sich im Mittelalter durchgehends bei allen **Scholastikern** das „infinitum actu non datur“ als unumstößlicher, von **Aristoteles** hergenommener Satz vertreten. Wenn man aber die Gründe betrachtet, welche **Aristoteles**[2]) gegen die reale Existenz des Unendlichen vorführt (vgl. z. B. seine „Metaphysik“, Buch XI, Kap. 10), so lassen sie sich der Hauptsache nach auf eine Voraussetzung zurückführen, die eine *petitio principii* involviert, auf die Voraussetzung nämlich, daß es nur *endliche* Zahlen gebe, was er daraus schloß, daß ihm nur Zählungen an endlichen Mengen bekannt waren. Ich glaube aber oben bewiesen zu haben und es wird sich dies im folgenden dieser Arbeit noch deutlicher zeigen, daß ebenso bestimmte Zählungen wie an endlichen auch an unendlichen Mengen vorgenommen werden können, vorausgesetzt, daß man den Mengen ein bestimmtes Gesetz gibt, wonach sie zu *wohlgeordneten* Mengen werden. Daß ohne eine solche gesetzmäßige Sukzession der Elemente einer Menge keine Zählung mit ihr vorgenommen werden kann — dies liegt in der Natur des Begriffes *Zählung*; auch bei endlichen Mengen kann eine Zählung nur bei einer bestimmten Aufeinanderfolge der gezählten Elemente ausgeführt werden, es zeigt sich aber hier als eine besondere Beschaffenheit *endlicher* Mengen, daß das Resultat der Zählung — die *Anzahl* — *unabhängig* ist von der jeweiligen Anordnung; während bei unendlichen Mengen, wie wir gesehen haben, eine solche Unabhängigkeit im allgemeinen *nicht* zutrifft, sondern die Anzahl einer unendlichen Menge eine durch das Gesetz der Zählung *mitbestimmte* unendliche ganze Zahl ist; hierin liegt eben und hierin allein der in der Natur selbst begründete und daher niemals fortzuschaffende wesentliche Unterschied zwischen dem Endlichen und Unendlichen; nimmermehr wird aber um dieses Unterschiedes willen die Existenz des Unendlichen geleugnet, dagegen die des Endlichen aufrecht erhalten werden können; läßt man das eine fallen, so muß man mit dem andern auch aufräumen; wo würden wir also auf diesem Wege hinkommen?

Ein anderes von **Aristoteles** gegen die Wirklichkeit des Unendlichen gebrauchtes Argument besteht in der Behauptung, daß das Endliche vom Unendlichen, wenn dieses existierte, aufgehoben und zerstört werden würde, weil die endliche Zahl durch eine unendliche Zahl angeblich vernichtet wird; die Sache verhält sich, wie man im folgenden deutlich sehen wird, in Wahrheit so, daß zu einer unendlichen Zahl, wenn sie als bestimmt und vollendet gedacht wird, *sehr wohl* eine endliche hinzugefügt und mit ihr vereinigt werden kann, *ohne* daß hierdurch eine Aufhebung der letzteren bewirkt wird (vielmehr wird die unendliche Zahl durch eine solche Hinzufügung einer endlichen Zahl zu ihr modifiziert); nur der *umgekehrte* Vorgang, die Hinzufügung einer unendlichen Zahl zu einer endlichen, wenn diese zuerst gesetzt wird, bewirkt die Aufhebung der letzteren, ohne daß eine Modifikation der ersteren eintritt. — Dieser richtige Sachverhalt hinsichtlich des Endlichen und Unendlichen, der von **Aristoteles** gänzlich verkannt worden ist, dürfte nicht nur in der Analysis, sondern auch in anderen Wissenschaften, namentlich in den Naturwissenschaften zu neuen Anregungen führen. [Vgl. S. 177 den Schluß von § 5.]



Zu dem Gedanken, das Unendlichgroße nicht bloß in der Form des unbegrenzt Wachsenden und in der hiermit eng zusammenhängenden Form der im siebzehnten Jahrhundert zuerst eingeführten konvergenten unendlichen Reihen zu betrachten, sondern es auch in der bestimmten Form des Vollendet-unendlichen mathematisch durch Zahlen zu fixieren, bin ich fast wider meinen Willen, weil im Gegensatz zu mir wertgewordenen Traditionen, durch den Verlauf vieljähriger wissenschaftlicher Bemühungen und Versuche logisch gezwungen worden, und ich glaube daher auch nicht, daß Gründe sich dagegen werden geltend machen lassen, denen ich nicht zu begegnen wüßte.

### § 5.

Wenn ich soeben von Traditionen sprach, so verstand ich dieselben nicht bloß im engeren Sinne des Erlebten, sondern führe sie auf die Begründer der neueren Philosophie und Naturwissenschaften zurück. Zur Beurteilung der Frage, um die es sich hier handelt, gebe ich nur einige der wichtigsten Quellen an. Man vergleiche:

**Locke**, Essay o. h. u. lib. II, cap. XVI und XVII.

**Descartes**, Briefe und Erläuterungen zu seinen Meditationen; ferner Principia I, 26.

**Spinoza**, Brief XXIX; cogitata metaph. pars I und II.

**Leibniz**, Erdmannsche Ausg. pag. 138, 244, 436, 744; Pertzsche Ausg. II, 1 pag. 209; III, 4 pag. 218; III, 5 pag. 307, 322, 389; III, 7 pag. 273*).

Stärkere Gründe, als man sie hier gegen die Einführung unendlicher ganzer Zahlen zusammen findet, können wohl auch heute nicht ersonnen werden; man prüfe daher und vergleiche sie mit den meinigen für dieselben. Eine ausführliche und eingehende Besprechung dieser Stellen und namentlich des höchst bedeutenden, inhaltsvollen Briefes **Spinozas** an **L. Meyer** behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor, beschränke mich aber hier auf folgendes.

So verschieden auch die Lehren dieser Schriftsteller sind, in der Beurteilung des Endlichen und Unendlichen stimmen sie an jenen Stellen im wesentlichen darin überein, daß zu dem Begriffe einer Zahl die Endlichkeit derselben gehöre, und daß andrerseits das wahre Unendliche oder Absolute, welches in Gott ist, keinerlei Determination gestattet. Was den letzteren Punkt anbetrifft, so stimme ich, wie es nicht anders sein kann, demselben völlig bei, denn der Satz: „omnis determinatio est negatio“ steht

*) Beachtenswert ist auch: Hobbes, De corpore Cap. VII, 11. Berkeley, Treatise on the principles of human knowledge, 128—131.

für mich ganz außer Frage; dagegen sehe ich im ersteren, wie ich schon oben bei Erörterung der Aristotelischen Gründe gegen das „infinitum actu" gesagt habe, eine petitio principii, welche manche Widersprüche erklärlich macht, die sich bei allen diesen Autoren und namentlich auch bei Spinoza und Leibniz finden. Die Annahme, daß es außer dem Absoluten, durch keine Determination Erreichbaren und dem Endlichen keine Modifikationen geben sollte, die, obgleich sie nicht endlich, dennoch durch Zahlen bestimmbar und folglich das sind, was ich Eigentlich-Unendliches nenne — diese Annahme finde ich durch nichts gerechtfertigt und sie steht m. E. sogar im Widerspruch zu gewissen von den beiden letzteren Philosophen aufgestellten Sätzen. Was ich behaupte und durch diese Arbeit, wie auch durch meine früheren Versuche bewiesen zu haben glaube, ist, daß es nach dem Endlichen ein *Transfinitum* (welches man auch *Suprafinitum* nennen könnte), d. i. eine unbegrenzte Stufenleiter von bestimmten Modis gibt, die ihrer Natur nach nicht endlich, sondern unendlich sind, welche aber ebenso wie das Endliche durch bestimmte, wohldefinierte und voneinander unterscheidbare *Zahlen* determiniert werden können. Mit den endlichen Größen ist daher meiner Überzeugung nach der Bereich der definierbaren Größen *nicht* abgeschlossen, und die Grenzen unseres Erkennens lassen sich entsprechend weiter ausdehnen, ohne daß es dabei nötig wäre, unsrer Natur irgendwelchen Zwang anzutun. An Stelle des in § 4 besprochenen Aristotelisch-scholastischen Satzes setze ich daher den andern:

Omnia seu finita seu infinita *definita* sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt[3]).

Man führt so oft die Endlichkeit des menschlichen *Verstandes* als Grund an, warum nur endliche Zahlen denkbar sind; doch sehe ich in dieser Behauptung wieder den erwähnten Zirkelschluß. Stillschweigend wird nämlich bei der „Endlichkeit des Verstandes" gemeint, daß sein Vermögen rücksichtlich der Zahlenbildung auf endliche Zahlen beschränkt sei. Zeigt es sich aber, daß der Verstand auch in bestimmtem Sinne unendliche, d. i. *überendliche* Zahlen definieren und voneinander unterscheiden kann, so muß entweder den Worten „endlicher Verstand" eine erweiterte Bedeutung gegeben werden, wonach alsdann jener Schluß aus ihnen nicht mehr gezogen werden kann; oder es muß auch dem menschlichen Verstand das Prädikat „unendlich" in gewissen Rücksichten zugestanden werden, was meines Erachtens das einzig Richtige ist. Die Worte „endlicher Verstand", welche man so vielfach zu hören bekommt, treffen, wie ich glaube, in keiner Weise zu: so beschränkt auch die menschliche Natur in Wahrheit ist, vom Unendlichen haftet ihr doch sehr *vieles* an, und ich meine sogar, daß wenn sie nicht in vielen Beziehungen selbst unendlich wäre, die feste Zuversicht und Gewißheit hinsichtlich des Seins des Absoluten, worin wir uns alle einig wissen, nicht zu



erklären sein würde. Und im besondern vertrete ich die Ansicht, daß der menschliche Verstand eine unbegrenzte Anlage für die stufenweise Bildung von ganzen Zahlenklassen hat, die zu den unendlichen Modis in einer bestimmten Beziehung stehen und deren *Mächtigkeiten* von aufsteigender Stärke sind.

Die Hauptschwierigkeiten in den zwar äußerlich verschiedenartigen, innerlich aber durchaus verwandten Systemen der beiden zuletzt genannten Denker lassen sich, wie ich glaube, auf dem von mir eingeschlagenen Wege der Lösung näher bringen und selbst manche von ihnen schon jetzt befriedigend lösen und aufklären. Es sind dies Schwierigkeiten, welche zu dem späteren Kritizismus mit Veranlassung gegeben haben, der bei all seinen Vorzügen einen ausreichenden Ersatz für die gehemmte Entwickelung der Lehren Spinozas und Leibnizens mir nicht zu gewähren scheint. Denn neben oder an Stelle der mechanischen Naturerklärung, die innerhalb ihrer Sphäre alle Hilfsmittel und Vorteile mathematischer Analyse zur Verfügung hat, von welcher aber die Einseitigkeit und Unzulänglichkeit so treffend durch Kant aufgedeckt worden ist, ist bisher eine mit derselben mathematischen Strenge ausgerüstete, über jene hinausgreifende *organische* Naturerklärung nicht einmal dem Anfange nach getreten; sie kann, wie ich glaube, nur durch Wiederaufnahme und Fortbildung der Arbeiten und Bestrebungen jener angebahnt werden.

Ein besonders schwieriger Punkt in dem Systeme des Spinoza ist das Verhältnis der endlichen Modi zu den unendlichen Modis; es bleibt dort unaufgeklärt, wieso und unter welchen Umständen sich das Endliche gegenüber dem Unendlichen oder das Unendliche gegenüber dem noch stärker Unendlichen in seiner Selbständigkeit behaupten könne. Das im § 4 bereits berührte Beispiel scheint mir in seiner schlichten Symbolik den Weg zu bezeichnen, auf welchem man der Lösung dieser Frage vielleicht näher kommen kann. Ist $\omega$ die erste Zahl der zweiten Zahlenklasse, so hat man $1 + \omega = \omega$, dagegen $\omega + 1 = (\omega + 1)$, wo $(\omega + 1)$ eine von $\omega$ durchaus verschiedene Zahl ist. Auf die *Stellung* des Endlichen zum Unendlichen kommt also, wie man hier deutlich sieht, alles an; tritt das erstere vor, so geht es in dem Unendlichen auf und verschwindet darin; *bescheidet* es sich aber und nimmt seinen Platz *hinter* dem Unendlichen, so bleibt es erhalten und verbindet sich mit jenem zu einem neuen, weil modifizierten Unendlichen.

## § 6.

Wenn es Schwierigkeiten bereiten sollte, *unendlich große, abgeschlossene*, unter sich und mit den endlichen Zahlen vergleichbare, unter sich und mit den endlichen Zahlen durch feste Gesetze verbundene ganze Zahlen aufzufassen, so werden diese Schwierigkeiten mit der Wahrnehmung zusammenhängen, daß die neuen Zahlen zwar in vielen Beziehungen den Charakter der früheren, in viel mehr anderen Rücksichten aber eine durchaus eigenartige Natur haben, die es sogar oft mit sich bringt, daß verschiedene Merkmale an einer und derselben Zahl sich vereinigt finden, die bei den endlichen Zahlen nie zusammen vorkommen, sondern disparat sind. Findet sich doch schon an einer der im vorigen § zitierten Stellen die Überlegung, eine unendliche ganze Zahl müßte, falls sie existierte, *sowohl* eine gerade *wie* auch eine ungerade Zahl sein, und da diese beiden Merkmale nicht vereinigt auftreten können, so existiert deshalb *keine* solche Zahl.

Man nimmt hier offenbar stillschweigend an, daß Merkmale, welche an den hergebrachten Zahlen disjunkt sind, auch an den neuen Zahlen dieses Verhältnis zueinander haben müßten, und schließt daraus auf die Unmöglichkeit der unendlichen Zahlen. Wem springt hier der Paralogismus nicht in die Augen? Ist denn nicht jede Verallgemeinerung oder Erweiterung von Begriffen mit einem Aufgeben von Besonderheiten verbunden, ja selbst ohne ein solches undenkbar? Hat man nicht erst in neuerer Zeit den für die Entwickelung der Analysis so wichtigen, zu den größten Fortschritten hinleitenden Gedanken gefaßt, die komplexen Größen einzuführen, ohne ein Hindernis darin zu sehen, daß sie weder positiv noch negativ genannt werden können? Und nur ein ähnlicher Schritt ist es, den ich hier wage; es wird vielleicht sogar dem allgemeinen Bewußtsein viel leichter werden mir zu folgen, als es möglich war, von den reellen Zahlen zu den komplexen überzugehen; denn die neuen ganzen Zahlen haben, wenn sie sich auch durch intensivere, substantielle Bestimmtheit vor den hergebrachten auszeichnen, dennoch als „Anzahlen" durchaus die gleichartige Realität mit diesen gemein, wogegen der Einführung der komplexen Größen sich so lange Schwierigkeiten entgegenstellten, bis man ihre geometrische Repräsentation durch Punkte oder Strecken in einer Ebene nach vielen Mühen gefunden hatte.

Um auf jene Überlegung mit dem Gerade- und Ungeradesein noch kurz zurückzukommen, betrachten wir wieder die Zahl $\omega$, um an ihr zu zeigen, wie jene an den endlichen Zahlen unvereinbaren Merkmale sich hier ohne jeglichen Widerspruch beisammen finden. In dem § 3 sind die allgemeinen Definitionen für die Addition und die Multiplikation aufgestellt, und ich habe hervorgehoben, daß bei diesen Operationen das kommutative Gesetz im allgemeinen *keine* Gültigkeit hat; hierin erblicke ich einen wesentlichen Unterschied zwischen den unendlichen und endlichen Zahlen. Beachte man noch, daß ich in einem Produkt $\beta\alpha$ unter $\beta$ den Multiplikator, unter $\alpha$ den Multiplikandus verstehe. Ohne weiteres ergeben sich alsdann für $\omega$ folgende zwei Formen: $\omega = \omega \cdot 2$ und $\omega = 1 + \omega \cdot 2$. Ihnen gemäß kann also $\omega$ sowohl als eine gerade, wie als eine ungerade Zahl aufgefaßt werden. Von einem andern Gesichtspunkt, wenn nämlich 2 als Multiplikator genommen wird,



ließe sich aber auch sagen, daß $\omega$ weder eine gerade noch eine ungerade Zahl ist, weil, wie man leicht beweisen kann, $\omega$ weder in der Form $2 \cdot \alpha$, noch in der Form $2 \cdot \alpha + 1$ sich darstellen läßt. Es hat also in der Tat die Zahl $\omega$ im Vergleich zu den hergebrachten Zahlen eine ganz eigenartige Natur, da alle diese Merkmale und Eigenschaften in ihr vereinigt sind. Um noch vieles eigenartiger sind die übrigen Zahlen der zweiten Zahlenklasse, wie ich dies später zeigen werde.

## § 7.

Obgleich ich in § 5 viele Stellen aus Leibniz' Werken angeführt habe, in welchen er sich gegen die unendlichen Zahlen ausspricht, indem er unter anderm dort sagt: „Il n'y a point de nombre infini ni de ligne ou autre quantité infinie, si on les prend pour des Touts veritables." „L'infini véritable n'est pas une modification, c'est l'absolu; au contraire, dès qu'on modifie on se borne ou forme un fini" (wobei ich ihm in der letzteren Stelle in bezug auf die erste Aussage zustimme, hinsichtlich der zweiten aber nicht), bin ich doch andrerseits in der glücklichen Lage, Aussprüche desselben Denkers nachweisen zu können, in welchen er gewissermaßen im Widerspruch mit sich selbst *für* das Eigentlich-Unendliche (vom Absoluten verschiedene) in der unzweideutigsten Weise sich ausspricht. So sagt er in Erdm. pag. 118:

„Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée; et par conséquent la moindre particelle doit être considerée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes."

Doch den entschiedensten Verteidiger hat das Eigentlich-unendliche, wie es uns beispielsweise in den wohldefinierten Punktmengen oder in der Konstitution der Körper aus punktuellen Atomen (ich meine also hier nicht die chemisch-physikalischen (Demokritischen) Atome, weil ich sie weder im Begriffe noch in der Wirklichkeit für existent halten kann, so viel Nützliches auch mit dieser Fiktion bis zu einer gewissen Grenze zu Wege gebracht wird) entgegentritt, in einem höchst scharfsinnigen Philosophen und Mathematiker unseres Jahrhunderts, in Bernhard Bolzano gefunden, der seine betreffenden Ansichten namentlich in der schönen und gehaltreichen Schrift: „Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851" entwickelt hat, deren Zweck es ist, nachzuweisen, wie die von Skeptikern und Peripatetikern *aller Zeiten* im Unendlichen gesuchten Widersprüche gar nicht vorhanden sind, sobald man sich nur die freilich nicht immer ganz leichte Mühe nimmt, die Unendlichkeitsbegriffe allen Ernstes ihrem wahren Inhalte nach in sich aufzunehmen. In dieser Schrift findet man daher auch eine in vielen Beziehungen zutreffende

Erörterung über das mathematische Uneigentlich-Unendliche, wie es in der Gestalt von Differentialen erster und höherer Ordnung oder in den unendlichen Reihensummen oder bei sonstigen Grenzprozessen auftritt. Dieses Unendliche (von einigen Scholastikern „synkategorematisches Unendliches“ genannt) ist ein bloßer Hilfs- und Beziehungsbegriff unseres Denkens, welcher seiner Definition nach die Veränderlichkeit einschließt und von dem somit das „datur“ niemals im eigentlichen Sinne ausgesagt werden kann.

Es ist sehr bemerkenswert, daß hinsichtlich *dieser* Art des Unendlichen keinerlei wesentliche Meinungsverschiedenheit auch unter den Philosophen der Gegenwart herrscht, wenn ich davon absehen darf, daß gewisse moderne Schulen von sogenannten Positivisten oder Realisten[4]) oder Materialisten in diesem *synkategorematischen* Unendlichen, von welchem sie selbst zugeben müssen, daß es kein *eigentliches* Sein hat, den *höchsten Begriff* zu sehen glauben.

Doch findet sich schon bei Leibniz der im wesentlichen richtige Sachverhalt an vielen Orten angegeben; denn auf dieses Uneigentlich-Unendliche bezieht sich beispielsweise die folgende Stelle Erdmann pag. 436:

„Ego philosophice loquendo non magis statuo magnitudines infinite parvas quam infinite magnas, seu non magis infinitesimas quam infinituplas. Utrasque enim per modum loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad calculum aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in Algebra. Interim demonstravi, magnum has expressiones usum habere ad compendium cogitandi adeoque ad inventionem; et in errorem ducere non posse, cum pro infinite parvo substituere sufficiat tam parvum quam quis volet, ut error sit minor dato, unde consequitur errorem dari non posse.“

Bolzano ist vielleicht der einzige, bei dem die eigentlich-unendlichen Zahlen zu einem gewissen Rechte kommen, wenigstens ist von ihnen vielfach die Rede; doch stimme ich gerade in der Art, wie er mit ihnen umgeht, ohne eine rechte Definition von ihnen aufstellen zu können, ganz und gar *nicht* mit ihm überein und sehe beispielsweise die §§ 29—33 jenes Buches als haltlos und irrig an. Es fehlt dem Autor zur wirklichen Begriffsfassung bestimmt-unendlicher Zahlen sowohl der allgemeine *Mächtigkeitsbegriff*, wie auch der präzise *Anzahlbegriff*. Beide treten zwar an einzelnen Stellen ihrem Keime nach in Form von Spezialitäten bei ihm auf, er arbeitet sich aber dabei zu der vollen Klarheit und Bestimmtheit, wie mir scheint, *nicht* durch, und daraus erklären sich viele Inkonsequenzen und selbst manche Irrtümer dieser wertvollen Schrift.

*Ohne* die erwähnten beiden Begriffe kommt man meiner Überzeugung nach in der Mannigfaltigkeitslehre *nicht* weiter, und das gleiche gilt, wie ich glaube, von den Gebieten, welche unter der Mannigfaltigkeitslehre stehen oder mit ihr die innigste Berührung haben, wie beispielsweise von der modernen Funktionentheorie einerseits und von der Logik und Erkenntnislehre andrerseits. Fasse ich das Unendliche so auf, wie dies von mir hier und bei meinen früheren Versuchen geschehen ist, so folgt daraus für mich ein wahrer Genuß, dem ich mich dankerfüllt hingebe, zu sehen, wie der ganze Zahlbegriff, der im Endlichen nur den Hintergrund der *Anzahl* hat, wenn wir aufsteigen zum Unendlichen, sich gewissermaßen *spaltet* in *zwei* Begriffe, in denjenigen der *Mächtigkeit*, welche unabhängig ist von der Ordnung, die einer Menge gegeben wird, und in den der *Anzahl*, welche notwendig an eine gesetzmäßige Ordnung der Menge gebunden ist, vermöge welcher letztere zu einer *wohlgeordneten Menge* wird. Und steige ich wieder herab vom Unendlichen zum Endlichen, so sehe ich ebenso klar und schön, wie die beiden Begriffe wieder Eins werden und *zusammenfließen* zum Begriffe der endlichen ganzen Zahl.



§ 8.

Wir können in *zwei* Bedeutungen von der Wirklichkeit oder Existenz der ganzen Zahlen, der endlichen sowie der unendlichen sprechen; genau genommen sind es aber dieselben zwei Beziehungen, in welchen allgemein die Realität von irgend welchen Begriffen und Ideen in Betracht gezogen werden kann. Einmal dürfen wir die ganzen Zahlen insofern für wirklich ansehen, als sie auf Grund von Definitionen in unserm Verstande einen ganz bestimmten Platz einnehmen, von allen übrigen Bestandteilen unseres Denkens aufs beste unterschieden werden, zu ihnen in bestimmten Beziehungen stehen und somit die Substanz unseres Geistes in bestimmter Weise modifizieren; es sei mir gestattet, diese Art der Realität unsrer Zahlen ihre *intrasubjektive* oder *immanente Realität* zu nennen[5]). Dann kann aber auch den Zahlen insofern Wirklichkeit zugeschrieben werden, als sie für einen Ausdruck oder ein Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt gehalten werden müssen, als ferner die verschiedenen Zahlenklassen (I), (II), (III) u. s. w. Repräsentanten von Mächtigkeiten sind, die in der körperlichen und geistigen Natur tatsächlich vorkommen. Diese zweite Art der Realität nenne ich die *transsubjektive* oder auch *transiente Realität* der ganzen Zahlen.

Bei der durchaus realistischen, zugleich aber nicht weniger idealistischen Grundlage meiner Betrachtungen unterliegt es für mich keinem Zweifel, daß diese beiden Arten der Realität stets sich zusammenfinden in dem Sinne, daß ein in der ersteren Hinsicht als existent zu bezeichnender Begriff immer in gewissen, sogar unendlich vielen Beziehungen auch eine transiente Realität besitzt[6]), deren Feststellung freilich meist zu den mühsamsten und schwierigsten Aufgaben der Metaphysik gehört und oft den Zeiten überlassen werden muß, in welchen die natürliche Entwickelung einer der übrigen Wissenschaften die transiente Bedeutung des in Frage stehenden Begriffs enthüllt.

Dieser Zusammenhang beider Realitäten hat seinen eigentlichen Grund in der *Einheit* des *Alls, zu welchem wir selbst mitgehören.* — Der Hinweis auf diesen Zusammenhang hat nun hier den Zweck, eine mir sehr wichtig scheinende Konsequenz für die Mathematik daraus herzuleiten, daß nämlich letztere bei der Ausbildung ihres Ideenmaterials *einzig* und *allein* auf die *immanente* Realität ihrer Begriffe Rücksicht zu nehmen und daher *keinerlei* Verbindlichkeit hat, sie auch nach ihrer *transienten* Realität zu prüfen. Wegen dieser ausgezeichneten Stellung, die sie von allen anderen Wissenschaften unterscheidet und die eine Erklärung für die verhältnismäßig leichte und zwanglose Art der Beschäftigung mit ihr liefert, verdient sie ganz besonders den Namen der *freien Mathematik*, eine Bezeichnung, welcher ich, wenn ich die Wahl hätte, den Vorzug vor der üblich gewordenen „reinen" Mathematik geben würde.

Die Mathematik ist in ihrer Entwickelung völlig frei und nur an die selbstredende Rücksicht gebunden, daß ihre Begriffe sowohl in sich widerspruchslos sind, als auch in festen durch Definitionen geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten, bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen[1]). Im besondern ist sie bei der Einführung neuer Zahlen nur verpflichtet, Definitionen von ihnen zu geben, durch welche ihnen eine solche Bestimmtheit und unter Umständen eine solche Beziehung zu den älteren Zahlen verliehen wird, daß sie sich in gegebenen Fällen unter einander bestimmt unterscheiden lassen. Sobald eine Zahl allen diesen Bedingungen genügt, kann und muß sie als existent und real in der Mathematik betrachtet werden. Hierin erblicke ich den in § 4 angedeuteten Grund, warum man die rationalen, irrationalen und die komplexen Zahlen für durchaus ebenso existent anzusehen hat wie die endlichen positiven ganzen Zahlen.

Es ist, wie ich glaube, nicht nötig, in diesen Grundsätzen irgendeine Gefahr für die Wissenschaft zu befürchten, wie dies von vielen geschieht; einerseits sind die bezeichneten Bedingungen, unter welchen die Freiheit der Zahlenbildung allein geübt werden kann, derartige, daß sie der Willkür einen äußerst geringen Spielraum lassen; dann aber trägt auch jeder mathematische Begriff das nötige Korrektiv in sich selbst einher; ist er unfruchtbar oder unzweckmäßig, so zeigt er es sehr bald durch seine Unbrauchbarkeit und er wird alsdann wegen mangelnden Erfolgs fallen gelassen. Dagegen scheint mir aber jede überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel größere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so größere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft wirklich keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das *Wesen* der *Mathematik* liegt gerade in ihrer *Freiheit*.

Würde mir diese Beschaffenheit der Mathematik nicht aus den erwähnten Gründen sich ergeben haben, so müßte mich doch die ganze Entwickelung



der Wissenschaft selbst, wie wir sie in unserm Jahrhundert wahrnehmen, genau zu denselben Ansichten hinführen.

Wären Gauß, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstraß, Hermite und Riemann verbunden gewesen, ihre neuen Ideen stets einer metaphysischen Kontrolle zu unterwerfen, wir würden uns fürwahr nicht des großartigen Aufbaues der neueren Funktionentheorie zu erfreuen haben, der, obgleich völlig frei und ohne transeunte Zwecke entworfen und errichtet, dennoch schon jetzt in Anwendungen auf Mechanik, Astronomie und mathematische Physik seine transiente Bedeutung, wie nicht anders zu erwarten war, offenbart; wir würden nicht den großen Aufschwung in der Theorie der Differentialgleichungen durch Fuchs, Poincaré und viele andere herbeigeführt sehen, wenn diese ausgezeichneten Kräfte durch fremdartige Einflüsse gehemmt und eingeschnürt gewesen wären; und wenn Kummer die folgenreiche Freiheit der Einführung sogenannter „idealer" Zahlen in die Zahlentheorie sich nicht genommen haben würde, wir wären heute nicht in der Lage, die so wichtigen und vorzüglichen algebraischen und arithmetischen Arbeiten Kroneckers und Dedekinds zu bewundern.

So berechtigt daher die Mathematik ist, sich durchaus frei von allen metaphysischen Fesseln zu bewegen, vermag ich doch andrerseits der „angewandten" Mathematik, wie beispielsweise der analytischen Mechanik und der mathematischen Physik dasselbe Recht nicht zuzugestehen; diese Disziplinen sind m. E. in ihren Grundlagen sowohl, wie in ihren Zielen *metaphysisch*; suchen sie sich hiervon frei zu machen, wie dies neuerdings seitens eines berühmten Physikers[1] vorgeschlagen worden ist, so arten sie in eine „Naturbeschreibung" aus, welcher der frische Hauch des freien mathematischen Gedankens ebensowohl wie die Macht der *Erklärung* und *Ergründung* von Naturerscheinungen fehlen muß.

## § 9.

Bei der großen Bedeutung, welche den sogenannten reellen, rationalen und irrationalen Zahlen in der Mannigfaltigkeitslehre zukommt, möchte ich es nicht unterlassen, über ihre Definitionen das wichtigste hier zu sagen. Ich gehe auf die Einführung der rationalen Zahlen nicht näher ein, da hiervon streng arithmetische Darstellungen vielfach ausgebildet sind; von den mir näher stehenden hebe ich diejenigen von H. Grassmann (Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1861) und J. H. T. Müller (Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik, Halle 1855) hervor. Dagegen möchte ich in Kürze die drei mir bekannten und wohl auch im wesentlichen einzigen Hauptformen der streng arithmetischen Einführung der allgemeinen reellen Zahlen genauer besprechen. Es sind dies *erstens* die Einführungsart, welcher sich Herr Prof. Weierstraß seit vielen Jahren in seinen Vorlesungen über analytische Funktionen bedient und von welcher man einige Andeutungen in der Programmabhandlung von Herrn E. Kossak (Die Elemente der Arithmetik, Berlin 1872) finden kann. *Zweitens* hat Herr R. Dedekind in seiner Schrift: Stetigkeit und irrationale Zahlen, (Braunschweig 1872) eine eigenartige Definitionsform publiziert und *drittens* ist von mir im Jahre 1871 (Math. Ann. Bd. 5, S. 123) [hier S. 92] eine Definitionsform angegeben worden, die äußerlich eine gewisse Ähnlichkeit mit der Weierstraßschen hat, so daß sie von Herrn H. Weber (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 27. Jahrg., historisch liter. Abt., S. 163) mit dieser verwechselt werden konnte; m. E. ist aber diese *dritte*, später auch von Herrn Lipschitz (Grundlagen der Analysis, Bonn 1877) entwickelte Definitionsform die einfachste und natürlichste von allen, und man hat an ihr den Vorteil, daß sie sich dem analytischen Kalkül am unmittelbarsten anpaßt.

Zur Definition einer irrationalen reellen Zahl gehört stets eine wohldefinierte unendliche Menge erster Mächtigkeit von rationalen Zahlen; hierin besteht das gemeinschaftliche aller Definitionsformen, ihr Unterschied liegt in dem Erzeugungsmoment, durch welches die Menge mit der durch sie definierten Zahl verknüpft ist und in den Bedingungen, welche die Menge zu erfüllen hat, damit sie als Grundlage für die betreffende Zahlendefinition sich eigne.

Bei der *ersten* Definitionsform wird eine Menge positiver rationaler Zahlen $a_\nu$ zugrunde gelegt, die mit $(a_\nu)$ bezeichnet werde und welche die Bedingung erfüllt, daß, wie viele und welche auch von den $a_\nu$ in endlicher Anzahl summiert werden, diese Summe immer unterhalb einer angebbaren Grenze bleibt. Hat man nun zwei solche Aggregate $(a_\nu)$ und $(a'_\nu)$, so wird strenge gezeigt, daß sie drei Fälle darbieten können: entweder ist jeder Teil $\frac{1}{n}$ der Einheit in beiden Aggregaten, sofern man ihre Elemente in hinreichender, vergrößerungsfähiger, endlicher Anzahl summiert, stets gleich oft enthalten; oder es ist $\frac{1}{n}$, von einem gewissen $n$ an, in dem ersten Aggregat stets öfter als in dem zweiten, oder drittens es ist $\frac{1}{n}$, von einem gewissen $n$ an, in dem zweiten stets öfter als in dem ersten enthalten. Diesen Vorkommnissen entsprechend wird, wenn $b$ und $b'$ die durch die beiden Aggregate $(a_\nu)$ und $(a'_\nu)$ zu definierenden Zahlen sind, im ersten Falle $b = b'$, im zweiten $b > b'$, im dritten $b < b'$ gesetzt. Vereinigt man die beiden Aggregate zu einem neuen $(a_\nu, a'_\nu)$, so gibt dieses die Grundlage für die Definition von $b + b'$; bildet man aber aus den beiden Aggregaten $(a_\nu)$ und $(a'_\nu)$ das neue $(a_\nu \cdot a'_\mu)$, in welchem die Elemente die Produkte aus allen $a_\nu$ in alle $a'_\mu$ sind, so wird dieses neue Aggregat zur Grundlage der Definition für das Produkt $bb'$ genommen.

Man sieht, daß hier das Erzeugungsmoment, welches die Menge mit der durch sie zu definierenden Zahl verknüpft, in der *Summenbildung* liegt; doch



muß als *wesentlich* hervorgehoben werden, daß nur die Summation einer stets *endlichen* Anzahl von rationalen Elementen zur Anwendung kommt und *nicht* etwa von vornherein die zu definierende Zahl $b$ als die Summe $\Sigma a_\nu$ der unendlichen Reihe $(a_\nu)$ gesetzt wird; es würde hierin ein *logischer Fehler* liegen, weil vielmehr die Definition der Summe $\Sigma a_\nu$ erst durch Gleichsetzung mit der notwendig vorher schon definierten *fertigen* Zahl $b$ gewonnen wird. Ich glaube, daß dieser erst von Herrn Weierstraß vermiedene logische Fehler in früheren Zeiten fast allgemein begangen und aus dem Grunde nicht bemerkt worden ist, weil er zu den seltenen Fällen gehört, in welchen wirkliche Fehler keinen bedeutenderen Schaden im Kalkül anrichten können. — Trotzdem hängen, meiner Überzeugung nach, mit dem bezeichneten Fehler alle Schwierigkeiten zusammen, welche in dem Begriff des Irrationalen gefunden worden sind, wogegen bei Vermeidung dieses Fehlers die irrationale Zahl mit derselben Bestimmtheit, Deutlichkeit und Klarheit sich in unserm Geiste festsetzt wie die rationale Zahl.

Die Definitionsform von Herrn Dedekind legt die *Gesamtheit aller* rationalen Zahlen, diese aber in zwei Gruppen derart geteilt zugrunde, daß, wenn die Zahlen der ersten Gruppe mit $\mathfrak{A}_\nu$, die der zweiten Gruppe mit $\mathfrak{B}_\mu$ bezeichnet werden, stets $\mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{B}_\mu$ ist; eine solche Teilung der rationalen Zahlenmenge nennt Herr Dedekind einen „Schnitt" derselben, bezeichnet ihn mit $(\mathfrak{A}_\nu \mid \mathfrak{B}_\mu)$ und ordnet ihm eine Zahl $b$ zu. Vergleicht man zwei solche Schnitte $(\mathfrak{A}_\nu \mid \mathfrak{B}_\mu)$ und $(\mathfrak{A}'_\nu \mid \mathfrak{B}''_\mu)$ miteinander, so finden sich ebenso wie bei der *ersten* Definitionsform im ganzen *drei* Möglichkeiten, denen entsprechend die durch die beiden Schnitte repräsentierten Zahlen $b$ und $b'$ einander gleich oder $b > b'$ oder $b < b'$ gesetzt werden. Der erste Fall findet, abgesehen von gewissen leicht zu regulierenden Ausnahmen, welche bei dem Rationalsein der zu definierenden Zahlen vorkommen, nur bei völliger Identität der beiden Schnitte statt, und hierbei tritt der nicht wegzuleugnende entschiedene Vorzug dieser Definitionsform vor den beiden anderen hervor, daß jeder Zahl $b$ nur ein *einziger* Schnitt entspricht, welchem Umstande aber der große Nachteil gegenübersteht, daß die Zahlen in der Analysis sich *niemals* in der Form von „Schnitten" darbieten, in welche sie erst mit großer Kunst und Umständlichkeit gebracht werden müssen[?].

Nun folgen auch hier die Definitionen für die Summe $b + b'$ und das Produkt $bb'$ auf Grund neuer aus den beiden gegebenen hervorgehenden Schnitte.

Der Nachteil, der mit der *ersten* und *dritten* Definitionsform verbunden ist, daß nämlich hier dieselben d. h. gleichen Zahlen unendlich oft sich darbieten und somit eine eindeutige Übersicht über sämtliche reellen Zahlen nicht unmittelbar erhalten wird, kann mit der größten Leichtigkeit durch Spezialisierung der zugrunde gelegten Mengen $(a_\nu)$ beseitigt werden, indem man irgendeine der bekannten eindeutigen Systembildungen, wie das Dezimalsystem oder die einfache Kettenbruchentwickelung heranzieht.

Ich komme nun zu der *dritten* Definitionsform der reellen Zahlen. Auch hier wird eine unendliche Menge rationaler Zahlen $(a_\nu)$ von der ersten Mächtigkeit zugrunde gelegt, von ihr jedoch eine andere Beschaffenheit verlangt als bei der **Weierstraß**schen Definitionsform; ich fordre, daß nach Annahme einer beliebig kleinen rationalen Zahl $\varepsilon$ eine endliche Anzahl von Gliedern der Menge abgeschieden werden kann, sodaß die übrig bleibenden paarweise einen Unterschied haben, der seiner absoluten Größe nach kleiner ist als $\varepsilon$. Jede derartige Menge $(a_\nu)$, welche auch durch die Forderung

$$\lim_{\nu=\infty} (a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0 \quad \text{(bei beliebig gelassenem } \mu)$$

charakterisiert werden kann, nenne ich eine *Fundamentalreihe* und ordne ihr eine durch sie zu definierende Zahl $b$ zu, für welche man sogar zweckmäßig das Zeichen $(a_\nu)$ selbst gebrauchen kann, wie dies von Herrn **Heine**, der in diesen Fragen nach vielen mündlichen Erörterungen sich mir angeschlossen hatte, in Vorschlag gebracht worden ist. (Man vergl. Crelles J. Bd. 74 S. 172). Eine solche *Fundamentalreihe* bietet, wie sich streng aus ihrem Begriffe deduzieren läßt, drei Fälle dar: entweder es sind ihre Glieder $a_\nu$ für hinreichend große Werte von $\nu$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig vorgegebene Zahl; oder es sind dieselben von einem gewissen $\nu$ an größer als eine bestimmt angebbare positive rationale Zahl $\varrho$; oder sie sind von einem gewissen $\nu$ an kleiner als eine bestimmt angebbare negative rationale Größe $-\varrho$. In dem ersten Falle sage ich, daß $b$ gleich Null, im zweiten, daß $b$ größer als Null oder positiv, im dritten, daß $b$ kleiner als Null oder negativ sei.

Nun kommen die Elementaroperationen. Sind $(a_\nu)$ und $(a'_\nu)$ zwei *Fundamentalreihen*, durch welche die Zahlen $b$ und $b'$ determiniert seien, so zeigt sich, daß auch $(a_\nu \pm a'_\nu)$ und $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ *Fundamentalreihen* sind, die also drei neue Zahlen bestimmen, welche mir als Definitionen für die Summe und Differenz $b \pm b'$ und für das Produkt $b \cdot b'$ dienen.

Ist zudem $b$ von Null verschieden, wofür im Vorhergehenden die Definition gegeben ist, so beweist man, daß auch $\left(\frac{a'_\nu}{a_\nu}\right)$ eine *Fundamentalreihe* ist, deren zugehörige Zahl die Definition für den Quotienten $\frac{b'}{b}$ liefert.

Die Elementaroperationen zwischen einer durch eine Fundamentalreihe $(a_\nu)$ gegebenen Zahl $b$ und einer direkt gegebenen rationalen Zahl $a$ sind in den soeben festgesetzten eingeschlossen, indem man $a'_\nu = a$, $b' = a$ sein läßt.

Jetzt erst kommen die Definitionen des Gleich-, Größer- und Kleinerseins zweier Zahlen $b$ und $b'$ (von denen $b'$ auch $= a$ sein kann) und zwar



sagt man, daß $b = b'$ oder $b > b'$ oder $b < b'$ ist, je nachdem $b - b'$ gleich Null oder größer oder kleiner als Null ist.

Nach allen diesen Vorbereitungen ergibt sich als erster *streng beweisbarer* Satz, daß, wenn $b$ die durch eine Fundamentalreihe $(a_\nu)$ bestimmte Zahl ist, alsdann $b - a_\nu$ mit wachsendem $\nu$ dem absoluten Betrage nach kleiner wird als jede denkbare rationale Zahl, oder was dasselbe heißt, daß

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = b\,.$$

Man achte wohl auf diesen Kardinalpunkt, dessen Bedeutung leicht übersehen werden kann: bei der *dritten* Definitionsform wird nicht etwa die Zahl $b$ definiert als „Grenze" der Glieder $a_\nu$ einer Fundamentalreihe $(a_\nu)$; denn dies würde ein ähnlicher logischer Fehler sein wie der bei Besprechung der *ersten* Definitionsform hervorgehobene, und zwar aus dem Grunde, weil alsdann die *Existenz* der Grenze $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu$ präsumiert würde; vielmehr verhält sich die Sache umgekehrt so, daß durch unsere vorangegangenen Definitionen der Begriff $b$ mit solchen Eigenschaften und Beziehungen zu den rationalen Zahlen bedacht worden ist, daß daraus mit logischer Evidenz der Schluß gezogen werden kann: $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu$ existiert und ist gleich $b$. Man verzeihe mir hier die Ausführlichkeit, welche ich mit der Wahrnehmung motiviere, daß an dieser unscheinbaren Kleinigkeit die meisten vorübergehen und sich alsdann leicht in Zweifel und Widersprüche mit Bezug auf das Irrationale verstricken, von denen sie bei Beobachtung der hier hervorgehobenen Umstände völlig verschont bleiben würden; denn sie würden alsdann klar erkennen, daß die irrationale Zahl vermöge der ihr *durch die Definitionen gegebenen Beschaffenheit* eine ebenso bestimmte Realität in unserm Geiste hat wie die rationale, selbst wie die ganze rationale Zahl, und daß man sie nicht erst durch einen Grenzprozeß zu *gewinnen* braucht, sondern vielmehr im Gegenteil durch ihren *Besitz* von der Tunlichkeit und Evidenz der Grenzprozesse allgemein überzeugt wird[8]); denn nun erweitert man mit Leichtigkeit den soeben angeführten Satz zu folgendem: Ist $(b_\nu)$ irgend eine Menge rationaler oder irrationaler Zahlen mit der Beschaffenheit, daß $\lim\limits_{\nu=\infty} (b_{\nu+\mu} - b_\nu) = 0$ (was auch $\mu$ sei), so gibt es eine durch eine Fundamentalreihe $(a_\nu)$ bestimmte Zahl $b$, sodaß

$$\lim_{\nu=\infty} b_\nu = b\,.$$

Es zeigt sich also, daß *dieselben* Zahlen $b$, welche auf Grund von Fundamentalreihen $(a_\nu)$ (ich nenne diese Fundamentalreihen von der *ersten* Ordnung) derart definiert sind, daß sie sich als Grenzen der $a_\nu$ ausweisen, auf mannigfache Weisen auch als Grenzen von Reihen $(b_\nu)$ darstellbar sind, wo jedes der $b_\nu$ durch eine Fundamentalreihe erster Ordnung $(a_\mu^{(\nu)})$ (mit festem $\nu$) definiert ist.

Ich nenne daher eine solche Menge $(b_\nu)$, wenn sie die Beschaffenheit hat, daß $\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} (b_{\nu+\mu} - b_\nu) = 0$ (bei beliebigem $\mu$), eine Fundamentalreihe *zweiter* Ordnung.

Ebenso lassen sich Fundamentalreihen *dritter, vierter, ... $n^{\text{ter}}$* Ordnung, aber auch Fundamentalreihen $\alpha^{\text{ter}}$ Ordnung bilden, wo $\alpha$ eine beliebige Zahl der zweiten Zahlenklasse ist.

Alle diese Fundamentalreihen leisten für die Bestimmung einer reellen Zahl $b$ genau dasselbe wie die Fundamentalreihen *erster* Ordnung, und der Unterschied liegt nur in der komplizierteren, ausgebreiteteren Form des Gegebenseins. Nichtsdestoweniger scheint es mir, wofern man sich auf den Standpunkt der dritten Definitionsform überhaupt stellen will, in hohem Grade angemessen, diesen Unterschied in der bezeichneten Weise zu fixieren, wie ich dies auch am angeführten Orte (Math. Ann. Bd. V, S. 123) [II 5, S. 92] in ähnlicher Weise schon getan habe. Ich bediene mich deshalb jetzt der Ausdrucksweise: die Zahlengröße $b$ ist durch eine Fundamentalreihe $n^{\text{ter}}$ resp. $\alpha^{\text{ter}}$ Ordnung gegeben. Entschließt man sich hierzu, so erreicht man damit eine außerordentlich leichtflüssige und zugleich faßliche Sprache, um die Fülle der vielgestaltigen, oft so komplizierten Gewebe der Analysis in der allereinfachsten und bezeichnendsten Weise zu beschreiben, womit ein nach meiner Meinung nicht zu unterschätzender Gewinn an Klarheit und Durchsichtigkeit erzielt wird. Ich trete hiermit dem Bedenken entgegen, welches Herr Dedekind in der Vorrede seiner Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen" hinsichtlich dieser Unterscheidungen ausgesprochen hat; es lag mir nicht entfernt im Sinne, durch die Fundamentalreihen zweiter, dritter Ordnung etc. *neue* Zahlen einzuführen, die nicht schon durch die Fundamentalreihen erster Ordnung bestimmbar wären, sondern ich hatte nur die begrifflich verschiedene Form des Gegebenseins im Auge; es geht dies aus einzelnen Stellen meiner Arbeit selbst deutlich hervor.

Auf einen merkwürdigen Umstand möchte ich hierbei aufmerksam machen, daß nämlich in diesen von mir durch Zahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse unterschiedenen Ordnungen von Fundamentalreihen alle überhaupt denkbaren in der Analysis bereits gefundenen oder noch ungefundenen Formen mit dem üblichen Reihencharakter durchaus erschöpft sind in dem Sinne, daß es Fundamentalreihen, deren Ordnungszahl etwa durch eine Zahl der dritten Zahlenklasse bezeichnet werden möchte, gar nicht gibt, wie ich bei anderer Gelegenheit streng beweisen werde.

Ich will nun in Kürze versuchen, die Zweckmäßigkeit der *dritten* Definitionsform zu erklären.



Zur Bezeichnung dafür, daß eine Zahl $b$ auf Grund einer Fundamentalreihe $(e_\nu)$ irgendwelcher Ordnung $n$ oder $\alpha$ gegeben ist, bediene ich mich der Formeln

$$b \sim (e_\nu) \quad \text{oder} \quad (e_\nu) \sim b\,.$$

Liegt beispielsweise eine konvergente Reihe mit dem allgemeinen Gliede $c_\nu$ vor, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz bekanntlich diese, daß $\lim_{\nu=\infty} (c_{\nu+1} + \cdots + c_{\nu+\mu}) = 0$ (wo $\mu$ beliebig).

Man definiert daher die Summe der Reihe durch die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sim \left(\sum_{n=0}^{\nu} c_n\right).$$

Sind z. B. alle $c_n$ definiert auf Grund von Fundamentalreihen $k^{\text{ter}}$ Ordnung, so gilt ein gleiches von $\sum_{n=0}^{\nu} c_n$ und es tritt uns hier die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ als definiert durch eine Fundamentalreihe $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung entgegen.

Soll beispielsweise der gedankliche Inhalt des Satzes $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ beschrieben werden, so kann man sich etwa $\frac{\pi}{2}$ und dessen Potenzen gegeben denken durch die Formeln:

$$\frac{\pi}{2} \sim (a_\nu), \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \sim \left(a_\nu^{2m+1}\right),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$2\sum_{n=0}^{\nu} \frac{(-1)^n}{2n+1} = a_\nu\,.$$

Ferner wird sein

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim \left(\sum_{m=0}^{\mu} (-1)^m \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right),$$

d. h. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ist auf Grund einer Fundamentalreihe zweiter Ordnung definiert, und durch jenen Satz wird also das Gleichsein der rationalen Zahl 1 und einer auf Grund einer Fundamentalreihe zweiter Ordnung gegebenen Zahl $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ausgedrückt.

In ähnlicher Weise läßt sich der gedankliche Inhalt komplizierterer Formeln, wie beispielsweise derjenigen aus der Theorie der Thetafunktionen, präzis und verhältnismäßig einfach beschreiben, während die Zurückführung unendlicher Reihen auf solche, die aus lauter rationalen Gliedern, zumal mit stets gleichem Vorzeichen, gebildet sind und unbedingt konvergieren, meistens mit der größten Umständlichkeit verbunden ist, die hier bei der *dritten* Definitionsform im Gegensatze zur *ersten* gänzlich vermieden wird und offenbar auch vermieden werden kann, so lange es sich nicht um eine numerische näherungsweise Bestimmung von Reihensummen mittelst rationaler Zahlen, sondern allein um unbedingt scharfe *Definitionen* derselben handelt. Die *erste* Definitionsform scheint mir allerdings nicht so leicht brauchbar zu sein, wenn es sich um die präzise Definition der Summen von Reihen handelt, die nicht unbedingt konvergieren, bei denen vielmehr die Anordnung ihrer sowohl positiven wie negativen Glieder eine bestimmt vorgezeichnete ist. Doch selbst bei Reihen mit unbedingter Konvergenz wird die Herstellung der Summe, wenn auch letztere unabhängig von der Anordnung ist, nur bei einer bestimmten Anordnung wirklich ausführbar sein; man ist daher auch in solchen Fällen versucht, der *dritten* Definitionsform den Vorzug vor der ersten zu geben. Endlich scheint mir für die *dritte* Definitionsform ihre Verallgemeinerungsfähigkeit auf *überendliche* Zahlen zu sprechen, während eine solche Ausbildung der *ersten* Definitionsform ganz *unmöglich* ist; dieser Unterschied liegt einfach daran, daß bei den überendlichen Zahlen das kommutative Gesetz schon bei der Addition im allgemeinen ungültig ist; die erste Definitionsform ist aber mit diesem Gesetze *untrennbar verknüpft*, sie steht und fällt mit demselben. Doch bei allen Zahlenarten, wo das kommutative Additionsgesetz gültig ist, erweist sich die *erste* Definitionsform, abgesehen von den bezeichneten Punkten, als ganz vortrefflich.

## § 10.

Der Begriff des „Kontinuums" hat in der Entwicklung der Wissenschaften überall nicht nur eine bedeutende Rolle gespielt, sondern auch stets die größten Meinungsverschiedenheiten und sogar heftige Streitigkeiten hervorgerufen. Dies liegt vielleicht daran, daß die ihm zugrunde liegende Idee in ihrer Erscheinung bei den Dissentierenden einen verschiedenen Inhalt aus dem Grunde angenommen hat, weil ihnen die genaue und vollständige Definition des Begriffs nicht überliefert worden war; vielleicht aber auch, und dies ist mir das wahrscheinlichste, ist die Idee des Kontinuums schon von denjenigen Griechen, welche sie zuerst gefaßt haben mögen, nicht mit der Klarheit und Vollständigkeit gedacht worden, welche erforderlich gewesen wäre, um die Möglichkeit verschiedener Auffassungen seitens der Nachfolger auszuschließen. So sehen wir, daß Leukipp, Demokrit und Aristoteles das Kontinuum als ein Kompositum betrachten, welches ex partibus sine fine divisibilibus besteht, dagegen Epikur und Lucretius dasselbe aus ihren Atomen als endlichen Dingen zusammensetzen, woraus nachmals ein großer Streit unter den Philosophen entstanden ist, von denen einige dem Aristoteles, andere dem Epikur gefolgt sind; andere wieder statuierten, um diesem Streit fern zu bleiben, mit Thomas von Aquino[9]), daß das Kontinuum weder aus unendlich vielen, noch aus einer endlichen Anzahl von



Teilen, sondern aus *gar keinen* Teilen bestehe; diese letztere Meinung scheint mir weniger eine Sacherklärung als das stillschweigende Bekenntnis zu enthalten, daß man der Sache nicht auf den Grund gekommen ist und es vorzieht, ihr vornehm aus dem Wege zu gehen. Hier sehen wir den *mittelalterlich-scholastischen Ursprung* einer Ansicht, die wir noch heutigentages vertreten finden, wonach das Kontinuum ein unzerlegbarer Begriff oder auch, wie andere sich ausdrücken, eine reine *apriorische* Anschauung sei, die kaum einer Bestimmung durch Begriffe zugänglich wäre; jeder arithmetische Determinationsversuch dieses *Mysteriums* wird als ein unerlaubter Eingriff angesehen und mit gehörigem Nachdruck zurückgewiesen; schüchterne Naturen empfangen dabei den Eindruck, als ob es sich bei dem „Kontinuum" nicht um einen *mathematisch-logischen Begriff*, sondern viel eher um ein *religiöses Dogma* handle.

Mir liegt es sehr fern, diese Streitfragen wieder heraufzubeschwören, auch würde mir zu einer genaueren Besprechung derselben in diesem engen Rahmen der Raum fehlen; ich sehe mich nur verpflichtet, den Begriff des Kontinuums, so logisch-nüchtern wie ich ihn auffassen muß und in der Mannigfaltigkeitslehre ihn brauche, hier möglichst kurz und auch nur mit Rücksicht auf die *mathematische* Mengenlehre zu entwickeln. Diese Bearbeitung ist mir aus dem Grunde nicht leicht geworden, weil unter den Mathematikern, auf deren Autorität ich mich gern berufe, kein einziger sich mit dem Kontinuum in dem Sinne genauer beschäftigt hat, wie ich es hier nötig habe.

Man hat zwar unter Zugrundelegung einer oder mehrerer reellen oder komplexen kontinuierlichen Größen (oder, wie ich glaube richtiger mich auszudrücken, kontinuierlicher Größenmengen) den Begriff eines von ihnen ein- oder mehrdeutig abhängigen Kontinuums, d. h. den stetigen Funktionsbegriff nach den verschiedensten Richtungen aufs beste ausgebildet, und es ist auf diese Weise die Theorie der sogenannten *analytischen* Funktionen, wie auch der allgemeineren Funktionen mit ihren höchst merkwürdigen Erscheinungen (wie Nichtdifferentiierbarkeit und ähnliches) entstanden; aber das *unabhängige* Kontinuum selbst ist von den mathematischen Autoren nur in jener einfachsten Erscheinungsform vorausgesetzt und keiner eingehenderen Betrachtung unterworfen worden.

Zunächst habe ich zu erklären, daß meiner Meinung nach die Heranziehung des *Zeitbegriffs* oder der *Zeitanschauung* bei Erörterung des viel ursprünglicheren und allgemeineren Begriffs des Kontinuums *nicht* in der Ordnung ist; die *Zeit* ist meines Erachtens eine Vorstellung, die zu ihrer deutlichen Erklärung den von ihr unabhängigen Kontinuitätsbegriff zur Voraussetzung hat und sogar mit Zuhilfenahme desselben weder objektiv als eine Substanz, noch subjektiv als eine notwendige apriorische Anschauungsform aufgefaßt werden kann, sondern nichts anderes als ein *Hilfs- und Beziehungsbegriff* ist, durch welchen die Relation zwischen verschiedenen in der Natur vorkommenden und von uns wahrgenommenen Bewegungen festgestellt wird. So etwas wie *objektive* oder *absolute Zeit* kommt in der Natur nirgends vor und es kann daher auch nicht die *Zeit* als Maß der *Bewegung*, viel eher könnte diese als Maß der *Zeit* angesehen werden, wenn nicht dem letzteren entgegenstünde, daß die *Zeit* selbst in der bescheidenen Rolle einer *subjektiv notwendigen apriorischen* Anschauungsform es zu keinem ersprießlichen, unangefochtenen Gedeihen hat bringen können, obgleich ihr seit Kant die Zeit dazu nicht gefehlt haben würde.

Ebenso ist es meine Überzeugung, daß man mit der sogenannten *Anschauungsform* des *Raumes* gar nichts anfangen kann, um Aufschluß über das *Kontinuum* zu gewinnen, da auch der *Raum* und die in ihm gedachten Gebilde nur mit Hilfe eines begrifflich bereits *fertigen* Kontinuums denjenigen Gehalt erlangen, mit welchem sie Gegenstand nicht bloß ästhetischer Betrachtungen oder philosophischen Scharfsinnes oder ungenauer Vergleiche, sondern nüchtern-exakter mathematischer Untersuchungen werden können.

Somit bleibt mir nichts anderes übrig, als mit Hilfe der in § 9 definierten reellen Zahlbegriffe einen möglichst allgemeinen rein arithmetischen Begriff eines Punktkontinuums zu versuchen. Als Grundlage dient mir hierbei, wie dies nicht anders sein kann, der $n$-dimensionale ebene *arithmetische* Raum $G_n$ d. h. der Inbegriff aller Wertsysteme

$$(x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_n),$$

in welchen jedes $x$ unabhängig von den anderen *alle reellen* Zahlenwerte von $-\infty$ bis $+\infty$ erhalten kann. Jedes besondere derartige Wertsystem nenne ich einen *arithmetischen* Punkt von $G_n$. Die Entfernung zweier solcher Punkte wird durch den Ausdruck

$$\left| \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + \cdots + (x_n' - x_n)^2} \right|$$

definiert und unter einer *arithmetischen* in $G_n$ enthaltenen Punktmenge $P$ jeder gesetzmäßig gegebene Inbegriff von Punkten des Raumes $G_n$ verstanden. Die Untersuchung läuft also darauf hinaus, eine scharfe und zugleich möglichst allgemeine Definition dafür aufzustellen, *wann $P$ ein Kontinuum zu nennen ist.*

Ich habe in Crelles J. Bd. 84, S. 242 [hier III 2, S. 119] bewiesen, daß alle Räume $G_n$, wie groß auch die sogenannte Dimensionenanzahl $n$ sei, *gleiche* Mächtigkeit haben und folglich *ebenso mächtig* sind wie das Linearkontinuum, wie also etwa der Inbegriff aller reellen Zahlen des Intervalles $(0 \ldots 1)$. Es reduziert sich daher die Untersuchung und Feststellung der Mächtigkeit von $G_n$ auf dieselbe Frage, spezialisiert auf das Intervall $(0 \ldots 1)$, und ich hoffe, sie schon bald durch einen strengen Beweis dahin beantworten zu können, daß die gesuchte Mächtigkeit keine andere ist als diejenige unserer *zweiten Zahlenklasse* (II)[2]. Hieraus wird folgen, daß sämtliche unendliche Punktmengen $P$



entweder die Mächtigkeit der ersten Zahlenklasse (I) oder die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse (II) haben. Es wird sich auch noch die weitere Konsequenz daraus ziehen lassen, daß der Inbegriff aller Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen, welche durch eine vorgegebene unendliche Reihenform, gleichviel welche, darstellbar sind, *auch nur* die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse (II) besitzt und daher *durch* Zahlen der dritten Zahlenklasse (III) *abzählbar* ist[10]). Dieser Satz wird sich also beispielsweise auf den Inbegriff aller „analytischen", d. h. durch Fortsetzung konvergenter Potenzreihen hervorgehenden Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen oder auf die Menge aller Funktionen einer oder mehrerer reellen Veränderlichen beziehen, die durch trigonometrische Reihen darstellbar sind.

Um nun dem allgemeinen Begriff eines innerhalb $G_n$ gelegenen Kontinuums näher zu kommen, erinnere ich an den Begriff der Ableitung $P^{(1)}$ einer beliebig gegebenen Punktmenge $P$, wie er zuerst in der Arbeit: Math. Ann. Bd. 5 [hier II 5, S. 92], dann [im Laufe dieser Abhandlung] sich entwickelt und zum Begriff einer Ableitung $P^{(\gamma)}$ erweitert findet, wo $\gamma$ irgendeine ganze Zahl einer der Zahlenklassen (I), (II), (III) etc. sein kann.

Es lassen sich nun die Punktmengen $P$ auch nach der Mächtigkeit ihrer ersten Ableitung $P^{(1)}$ in zwei Klassen einteilen. Hat $P^{(1)}$ die Mächtigkeit von (I), so zeigt sich, wie ich in § 3 dieser Schrift schon gesagt habe, daß es eine erste ganze Zahl $\alpha$ der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse (II) gibt, für welche $P^{(\alpha)}$ verschwindet. Hat aber $P^{(1)}$ die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse (II) [d. h. ist $P^{(1)}$ *nicht abzählbar*], so läßt sich $P^{(1)}$ stets, und zwar nur auf einzige Weise in zwei Mengen $R$ und $S$ zerlegen, sodaß

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

wo $R$ und $S$ eine äußerst verschiedene Beschaffenheit haben:

$R$ ist so beschaffen, daß sie durch den wiederholten Ableitungsprozeß einer fortwährenden Reduktion bis zur Annihilation fähig ist, so daß es immer eine erste ganze Zahl $\gamma$ der Zahlenklassen (I) oder (II) gibt, für welche

$$R^{(\gamma)} \equiv 0;$$

solche Punktmengen $R$ nenne ich *reduktibel.*

$S$ dagegen ist so beschaffen, daß bei dieser Punktmenge der Ableitungsprozeß gar keine Änderung hervorbringt, indem

$$S \equiv S^{(1)}$$

und folglich auch

$$S \equiv S^{(\gamma)}$$

ist; derartige Mengen $S$ nenne ich *perfekte* Punktmengen. Wir können daher sagen: ist $P^{(1)}$ von der Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse (II), so zerfällt $P^{(1)}$ in eine bestimmte *reduktible* und eine bestimmte *perfekte* Punktmenge.

Obgleich diese beiden Prädikate „reduktibel“ und „perfekt“ in einer und derselben Punktmenge nicht vereinbar sind, so ist doch andrerseits irreduktibel nicht soviel wie perfekt und ebensowenig imperfekt genau dasselbe wie reduktibel, wie man bei einiger Aufmerksamkeit leicht sieht.

Die *perfekten* Punktmengen $S$ sind keineswegs immer in ihrem Innern das, was ich in meinen vorhin genannten Arbeiten „überalldicht“ genannt habe[11]); deshalb eignen sie sich auch noch nicht allein zur vollständigen Definition eines Punktkontinuums, wenn man auch sofort zugeben muß, daß letzteres stets eine *perfekte* Menge sein muß.

Es ist vielmehr noch ein Begriff erforderlich, um im Verein mit dem vorhergehenden das Kontinuum zu definieren, nämlich der Begriff einer *zusammenhängenden* Punktmenge $T$.

Wir nennen $T$ eine *zusammenhängende* Punktmenge, wenn für je zwei Punkte $t$ und $t'$ derselben bei vorgegebener beliebig kleiner Zahl $\varepsilon$ immer eine *endliche* Anzahl Punkte $t_1, t_2, \ldots t_\nu$ von $T$ auf mehrfache Art vorhanden sind, sodaß die Entfernungen $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \ldots \overline{t_\nu t'}$ sämtlich kleiner sind als $\varepsilon$. [Es handelt sich also um eine „metrische“ Eigenschaft des Kontinuums.]

Alle uns bekannten geometrischen Punktkontinua fallen nun auch, wie leicht zu sehen, unter diesen Begriff der *zusammenhängenden* Punktmenge; ich glaube aber nun auch in diesen *beiden* Prädikaten „perfekt“ und „zusammenhängend“ die notwendigen und *hinreichenden* Merkmale eines Punktkontinuums zu erkennen und definiere daher ein Punktkontinuum innerhalb $G_n$ als eine *perfekt-zusammenhängende Menge*[12]). Hier sind „perfekt“ und „zusammenhängend“ nicht bloße Worte, sondern durch die vorangegangenen Definitionen aufs schärfste begrifflich charakterisierte, ganz allgemeine Prädikate des *Kontinuums*.

Die Bolzanosche Definition des Kontinuums (Paradoxien § 38) ist gewiß nicht richtig; sie drückt einseitig bloß *eine* Eigenschaft des Kontinuums aus, die aber auch erfüllt ist bei Mengen, welche aus $G_n$ dadurch hervorgehen, daß man sich von $G_n$ irgendeine „isolierte“ Punktmenge (man vgl. Math. Ann. Bd. 21, S. 51) [hier S. 157] entfernt denkt; desgleichen ist sie erfüllt bei Mengen, welche aus mehreren getrennten Kontinuis bestehen; offenbar liegt in solchen Fällen kein Kontinuum vor, obgleich nach Bolzano dies der Fall wäre. Wir sehen also hier einen Verstoß gegen den Satz: „ad essentiam alicujus rei pertinet id, quo dato res necessario ponitur et quo sublato res necessario tollitur; vel id, sine quo res, et vice versa quod sine re nec esse nec concipi potest.“

Ebenso scheint mir aber auch in der Schrift des Herrn Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen) nur eine *andere* Eigenschaft des Kontinuums einseitig hervorgehoben zu sein, diejenige nämlich, welche es mit *allen* „*perfekten*“ Mengen gemeinsam hat [also die „Lückenlosigkeit“ bei Hausdorff].



## § 11.

Es soll nun gezeigt werden, wie man zu den Definitionen der neuen Zahlen geführt wird und auf welche Weise sich die natürlichen Abschnitte in der absolut-unendlichen realen ganzen Zahlenfolge, welche ich *Zahlenklassen* nenne, ergeben. An diese Auseinandersetzung will ich alsdann nur noch die obersten Sätze über die *zweite* Zahlenklasse und ihr Verhältnis zur ersten hinzufügen. Die Reihe (I) der positiven realen ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ hat ihren Entstehungsgrund in der wiederholten Setzung und Vereinigung von zugrunde gelegten als gleich angesehenen Einheiten; die Zahl $\nu$ ist der Ausdruck sowohl für eine bestimmte endliche Anzahl solcher aufeinander folgenden Setzungen, wie auch für die Vereinigung der gesetzten Einheiten zu einem Ganzen. Es beruht somit die Bildung der endlichen ganzen realen Zahlen auf dem Prinzip der Hinzufügung einer Einheit zu einer vorhandenen schon gebildeten Zahl; ich nenne dieses Moment, welches, wie wir gleich sehen werden, auch bei der Erzeugung der höheren ganzen Zahlen eine wesentliche Rolle spielt, das *erste Erzeugungsprinzip*. Die Anzahl der so zu bildenden Zahlen $\nu$ der Klasse (I) ist unendlich und es gibt unter ihnen keine größte. So widerspruchsvoll es daher wäre, von einer größten Zahl der Klasse (I) zu reden, hat es doch andrerseits nichts Anstößiges, sich eine *neue* Zahl, wir wollen sie $\omega$ nennen[1], zu denken, welche der Ausdruck dafür sein soll, daß der ganze Inbegriff (I) in seiner natürlichen Sukzession dem Gesetze nach gegeben sei. (Ähnlich wie $\nu$ ein Ausdruck dafür ist, daß eine gewisse endliche Anzahl von Einheiten zu einem Ganzen vereinigt wird.) Es ist sogar erlaubt, sich die neugeschaffene Zahl $\omega$ als *Grenze* zu denken, welcher die Zahlen $\nu$ zustreben, wenn darunter nichts anderes verstanden wird, als daß $\omega$ die *erste* ganze Zahl sein soll, welche auf alle Zahlen $\nu$ folgt, d. h. größer zu nennen ist als jede der Zahlen $\nu$. Indem man auf die Setzung der Zahl $\omega$ weitere Setzungen der Einheit folgen läßt, erhält man mit Hilfe des *ersten* Erzeugungsprinzips die weiteren Zahlen

$$\omega + 1,\ \omega + 2,\ \ldots,\ \omega + \nu,\ \ldots,$$

da man hierbei wieder zu keiner größten Zahl kommt, so denkt man sich eine neue, die man $2\omega$ nennen kann [3] und welche die erste auf alle bisherigen Zahlen $\nu$ und $\omega + \nu$ folgende sein soll; wendet man auf die Zahl $2\omega$ das *erste* Erzeugungsprinzip wiederholt an, so kommt man zu der Fortsetzung

$$2\omega + 1,\ 2\omega + 2,\ \ldots,\ 2\omega + \nu,\ \ldots$$

der bisherigen Zahlen.

[1] Das Zeichen $\infty$, welches ich in Nr. 2 dieses Aufsatzes [hier S. 147] gebraucht habe, ersetze ich von nun an durch $\omega$, weil das Zeichen $\infty$ schon vielfach zur Bezeichnung von unbestimmten [d. h. potentiellen] Unendlichkeiten verwandt wird.

Die logische Funktion, welche uns die beiden Zahlen $\omega$ und $2\omega$ geliefert hat, ist offenbar verschieden von dem *ersten* Erzeugungsprinzip, ich nenne sie das *zweite Erzeugungsprinzip* ganzer realer Zahlen und definiere dasselbe näher dahin, daß, wenn irgendeine bestimmte Sukzession definierter ganzer realer Zahlen vorliegt, von denen keine größte existiert, auf Grund dieses zweiten Erzeugungsprinzips eine neue Zahl geschaffen wird, welche als *Grenze* jener Zahlen gedacht, d. h. als die ihnen allen nächst größere Zahl definiert wird.

Durch kombinierte Anwendung beider Erzeugungsprinzipien erhält man daher sukzessive die folgenden Fortsetzungen unserer bisher gewonnenen Zahlen

$$3\,\omega,\ 3\,\omega+1,\ \ldots,\ 3\,\omega+\nu,\ \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu\,\omega,\ \mu\,\omega+1,\ \ldots,\ \mu\,\omega+\nu,\ \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Doch wird auch hierdurch kein Abschluß erzielt, weil von den Zahlen $\mu\omega+\nu$ gleichfalls keine die größte ist.

Das zweite Erzeugungsprinzip veranlaßt uns daher zur Einführung einer auf alle Zahlen $\mu\omega+\nu$ nächstfolgenden, die $\omega^2$ genannt werden kann, an diese schließen sich in bestimmter Sukzession Zahlen

$$\lambda\,\omega^2+\mu\,\omega+\nu,$$

und man kommt dann unter Befolgung der beiden Erzeugungsprinzipien offenbar zu Zahlen von folgender Form

$$\nu_0\,\omega^\mu+\nu_1\,\omega^{\mu-1}\cdots+\nu_{\mu-1}\,\omega+\nu_\mu;$$

doch treibt uns alsdann das zweite Erzeugungsprinzip zum Setzen einer neuen Zahl, welche die diesen Zahlen allen nächst größere sein soll und passend mit

$$\omega^\omega$$

bezeichnet wird.

Die Bildung neuer Zahlen hat, wie man sieht, kein Ende; unter Befolgung der *beiden* Erzeugungsprinzipe erhält man immer wieder neue Zahlen und Zahlenreihen, die eine völlig bestimmte Sukzession haben.

Es wird daher zunächst der *Anschein* erweckt, als ob wir uns bei dieser Bildungsweise neuer ganzer bestimmt-unendlicher Zahlen ins *Grenzenlose* hin verlieren müßten, und daß wir außerstande seien, diesem endlosen Prozeß einen *gewissen vorläufigen* Abschluß zu geben, um dadurch eine ähnliche Beschränkung zu gewinnen, wie sie in bezug auf die ältere Zahlenklasse (I) in gewissem Sinne tatsächlich vorhanden war; dort wurde nur von dem *ersten* Erzeugungsprinzip Gebrauch gemacht und somit ein Heraustreten aus der Reihe (I) unmöglich. Das *zweite* Erzeugungsprinzip mußte aber nicht nur



über das bisherige Zahlengebiet hinausführen, sondern erweist sich allerdings als ein Mittel, welches im Verein mit dem *ersten* Erzeugungsprinzip die Befähigung gibt, *jede Schranke* in der Begriffsbildung der realen ganzen Zahlen zu *durchbrechen*.

Bemerken wir nun aber, daß alle bisher erhaltenen Zahlen und die zunächst auf sie folgenden eine gewisse Bedingung erfüllen, so erweist sich diese Bedingung, *wenn sie als Forderung an alle zunächst zu bildenden Zahlen gestellt wird,* als ein neues, zu jenen beiden hinzutretendes *drittes* Prinzip, welches von mir *Hemmungs- oder Beschränkungsprinzip* genannt wird und das, wie ich zeigen werde, bewirkt, daß die mit seiner Hinzuziehung definierte zweite Zahlenklasse (II) nicht nur eine höhere Mächtigkeit erhält als (I), sondern sogar genau die *nächst höhere*, also *zweite Mächtigkeit*.

Die erwähnte Bedingung, welche jede der bisher definierten unendlichen Zahlen $\alpha$, wie man sofort überzeugt, erfüllt, ist — daß die Menge der dieser Zahl in der Zahlenfolge vorausgegangenen Zahlen von der *Mächtigkeit der ersten Zahlenklasse* (I) ist. Nehmen wir z. B. die Zahl $\omega^\omega$, so sind die ihr vorausgehenden in der Formel enthalten:

$$\nu_0\,\omega^\mu+\nu_1\,\omega^{\mu-1}+\cdots+\nu_{\mu-1}\,\omega+\nu_\mu,$$

worin $\mu, \nu_0, \nu_1, \ldots \nu_\mu$ alle endlichen, positiven, ganzen Zahlenwerte mit Einschluß der Null und mit Ausschluß der Verbindung: $\nu_0=\nu_1=\cdots=\nu_\mu=0$ anzunehmen haben.

Wie bekannt, läßt sich diese Menge in die Form einer einfach unendlichen Reihe bringen und hat also die Mächtigkeit von (I). [Vergl. III 1, S. 115.]

Da ferner eine jede Folge von Mengen, von denen jegliche die *erste* Mächtigkeit hat, wenn jene Folge selbst von der *ersten* Mächtigkeit ist, immer wieder eine Menge ergibt, welche die Mächtigkeit von (I) hat, so ist klar, daß bei Fortsetzung unserer Zahlenfolge man *wirklich zunächst immer wieder nur solche Zahlen* erhält, bei denen jene Bedingung *tatsächlich* erfüllt ist.

Wir definieren daher die zweite Zahlenklasse (II) als *den Inbegriff aller mit Hilfe der beiden Erzeugungsprinzipe bildbaren, in bestimmter Sukzession fortschreitenden Zahlen* $\alpha$

$$\omega,\ \omega+1,\ \ldots,\ \nu_0\,\omega^\mu+\nu_1\,\omega^{\mu-1}+\cdots+\nu_{\mu-1}\,\omega+\nu_\mu,\ \ldots,\ \omega^\omega,\ \ldots,\ \alpha\ldots,$$

*welche der Bedingung unterworfen sind, daß alle der Zahl* $\alpha$ *vorausgehenden Zahlen, von* 1 *an, eine Menge von der Mächtigkeit der Zahlenklasse* (I) *bilden.*

## § 12.

Das erste, was wir nun zu zeigen haben, ist der Satz, *daß die neue Zahlenklasse* (II) *eine Mächtigkeit hat, welche von derjenigen der ersten Zahlenklasse* (I) *verschieden ist.*

Dieser Satz ergibt sich aus dem folgenden Satze:

„Ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ irgendeine die erste Mächtigkeit habende Menge von verschiedenen Zahlen der *zweiten* Zahlenklasse (so daß wir befugt sind, sie in jener einfachen Reihenform $(\alpha_\nu)$ anzunehmen), so ist entweder eine von ihnen die größte, sie sei $\gamma$, oder wenn dies nicht der Fall ist, so gibt es eine nicht unter den Zahlen $\alpha_\nu$ vorkommende bestimmte Zahl $\beta$ der zweiten Zahlenklasse (II), so daß $\beta$ größer ist als alle $\alpha_\nu$, daß dagegen jede ganze Zahl $\beta' < \beta$ von gewissen Zahlen der Reihe $(\alpha_\nu)$ in der Größe übertroffen wird; die Zahlen $\gamma$ resp. $\beta$ können füglich die „obere Grenze" der Menge $(\alpha_\nu)$ genannt werden."

Der Beweis dieses Satzes ist einfach folgender: sei $\alpha_{\varkappa_2}$ in der Reihe $(\alpha_\nu)$ die zuerst vorkommende Zahl, welche größer ist als $\alpha_1$, $\alpha_{\varkappa_3}$ die zuerst vorkommende, welche größer als $\alpha_{\varkappa_2}$ ist u. s. f.

Man hat alsdann

$$1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4 < \cdots$$

$$\alpha_1 < \alpha_{\varkappa_2} < \alpha_{\varkappa_3} < \alpha_{\varkappa_4} < \cdots$$

und

$$\alpha_\nu < \alpha_{\varkappa_\lambda},$$

sobald

$$\nu < \varkappa_\lambda.$$

Hier kann es nun vorkommen, daß von einer gewissen Zahl $\alpha_{\varkappa_\varrho}$ an alle in der Reihe $(\alpha_\nu)$ auf sie folgenden kleiner sind als sie; dann ist sie offenbar die größte von allen, und wir haben $\gamma = \alpha_{\varkappa_\varrho}$. Andernfalls denke man sich die Menge aller ganzen Zahlen von 1 an, die kleiner sind als $\alpha_1$, füge zu dieser Menge zunächst die Menge aller ganzen Zahlen, welche $\geqq \alpha_1$ und $< \alpha_{\varkappa_2}$, alsdann die Menge aller Zahlen, welche $\geqq \alpha_{\varkappa_2}$ und $< \alpha_{\varkappa_3}$ u. s. f., so erhält man einen bestimmten Teil sukzedierender Zahlen unserer ersten beiden Zahlklassen, und zwar ist diese Zahlenmenge offenbar von der *ersten* Mächtigkeit [als abzählbare Vereinigung abzählbarer Zahlenmengen] und es existiert daher (der Definition von (II) zufolge) eine bestimmte Zahl $\beta$ des Inbegriffes (II), welche die jenen Zahlen nächst größere ist. Es ist also $\beta > \alpha_{\varkappa_\lambda}$ und daher auch $\beta > \alpha_\nu$, weil $\varkappa_\lambda$ immer so groß angenommen werden kann, daß es größer wird als ein vorgegebenes $\nu$ und weil alsdann $\alpha_\nu < \alpha_{\varkappa_\lambda}$.

Andrerseits sieht man leicht, daß jede Zahl $\beta' < \beta$ von gewissen Zahlen $\alpha_{\varkappa_\nu}$ der Größe nach übertroffen wird; womit nun alle Teile des Satzes bewiesen sind.

Hieraus folgt nun der Satz, daß die Gesamtheit aller Zahlen der zweiten Zahlenklasse (II) *nicht* die Mächtigkeit von (I) hat; denn sonst würden wir uns den ganzen Inbegriff (II) in Form einer einfachen Reihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$$



denken können, die nach dem soeben bewiesenen Satze entweder ein größtes Glied $\gamma$ haben oder von einer gewissen Zahl $\beta$ aus (II) hinsichtlich der Größe aller ihrer Glieder $\alpha_\nu$ übertroffen werden würde; im ersten Falle würde die zur Klasse (II) gehörige Zahl $\gamma + 1$, im zweiten Falle die Zahl $\beta$ einerseits zur Klasse (II) gehörig sein, andrerseits nicht in der Reihe $(\alpha_\nu)$ vorkommen, was bei der vorausgesetzten Identität der Mengen (II) und $(\alpha_\nu)$ ein Widerspruch ist; folglich hat die Zahlenklasse (II) eine *andere* Mächtigkeit als die Zahlenklasse (I).

Daß von den beiden Mächtigkeiten der Zahlenklassen (I) und (II) wirklich die zweite die auf die erste *nächst folgende* ist, d. h. daß zwischen beiden Mächtigkeiten keine anderen existieren, geht mit Bestimmtheit aus einem Satze hervor, den ich sogleich angeben und beweisen will.

Werfen wir jedoch vorher einen Blick rückwärts und vergegenwärtigen uns die Mittel, welche sowohl zu einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs, wie auch zu einer neuen von der ersten verschiedenen Mächtigkeit wohldefinierter Mengen geführt haben, so waren es drei hervorspringende, voneinander zu unterscheidende logische Momente, die zur Wirksamkeit kamen. Es sind die *beiden* oben definierten *Erzeugungsprinzipe* und ein zu diesen hinzukommendes *Hemmungs-* oder *Beschränkungsprinzip*, welches in der Forderung besteht, *nur dann* mit Hilfe eines der beiden anderen Prinzipe die Schöpfung einer neuen ganzen Zahl vorzunehmen, wenn die Gesamtheit aller voraufgegangenen Zahlen die Mächtigkeit einer ihrem ganzen Umfange nach bereits *vorhandenen* definierten Zahlenklasse hat. Auf diesem Wege, mit Beobachtung dieser drei Prinzipe kann man mit der größten Sicherheit und Evidenz zu immer neuen Zahlenklassen und mit ihnen zu allen in der körperlichen und geistigen Natur vorkommenden, verschiedenen, sukzessive aufsteigenden Mächtigkeiten gelangen, und die hierbei erhaltenen neuen Zahlen sind dann immer durchaus von derselben konkreten Bestimmtheit und gegenständlichen Realität wie die früheren; ich wüßte daher fürwahr nicht, was uns von dieser Tätigkeit des Bildens neuer Zahlen zurückhalten sollte, sobald es sich zeigt, daß für den Fortschritt der Wissenschaften die Einführung einer neuen von diesen unzähligen Zahlenklassen in die Betrachtungen wünschenswert oder sogar unentbehrlich geworden ist. [Indessen würden die drei Cantorschen Prinzipe schon bei der Bildung der $\omega$ten Zahlklasse nicht ausreichen.]

## § 13.

Ich komme nun zu dem versprochenen Nachweise, daß die Mächtigkeiten von (I) und von (II) unmittelbar einander folgen, sodaß keine anderen Mächtigkeiten dazwischen liegen.

Wenn man aus dem Inbegriffe (II) nach irgendeinem Gesetze eine Menge $(\alpha')$ von verschiedenen Zahlen $\alpha'$ auswählt, d. h. irgendeine in (II) enthaltene

Menge ($\alpha'$) sich denkt, so hat eine solche Menge stets Eigentümlichkeiten, die sich in den folgenden Sätzen zum Ausdruck bringen lassen:

„Unter den Zahlen der Menge ($\alpha'$) gibt es immer eine *kleinste.*“ [4]

„Hat man im besonderen eine Folge von Zahlen des Inbegriffes (II): $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\beta, \ldots$, die ihrer Größe nach fortwährend abnehmen (sodaß $\alpha_\beta > \alpha_{\beta'}$ wenn $\beta' > \beta$), so bricht diese Reihe notwendig mit einer endlichen Gliederzahl ab und schließt mit der kleinsten der Zahlen; die Reihe kann keine unendliche sein.“

Es ist bemerkenswert, daß dieser Satz, welcher, wenn die Zahlen $\alpha_\beta$ endliche ganze Zahlen sind, unmittelbar klar ist, sich auch in dem Falle unendlicher Zahlen $\alpha_\beta$ nachweisen läßt. In der Tat, nach dem vorigen Satze, der aus der Definition der Zahlenreihe (II) sich leicht ergibt, ist unter den Zahlen $\alpha_\nu$, wenn man nur diejenigen von ihnen ins Auge faßt, bei denen der Index $\nu$ endlich ist, eine kleinste vorhanden; ist diese etwa $= \alpha_\varrho$, so ist einleuchtend, daß wegen $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ die Reihe $\alpha_\nu$ und somit auch die ganze Reihe $\alpha_\beta$ genau aus $\varrho$ Gliedern bestehen muß, also eine endliche Reihe ist.

Nun erhält man folgenden Fundamentalsatz:

„Ist ($\alpha'$) irgend eine in dem Inbegriffe (II) enthaltene Zahlenmenge, so können nur folgende drei Fälle vorkommen: entweder ($\alpha'$) ist ein endlicher Inbegriff, d. h. besteht aus einer endlichen Anzahl von Zahlen, oder es hat ($\alpha'$) die Mächtigkeit erster Klasse oder drittens es hat ($\alpha'$) die Mächtigkeit von (II); Quartum non datur.“

Der Beweis läßt sich folgendermaßen einfach führen: sei $\Omega$ die erste Zahl der *dritten* Zahlenklasse (III); es sind alsdann sämtliche Zahlen $\alpha'$ der Menge ($\alpha'$), weil letztere in (II) enthalten ist, kleiner als $\Omega$.

Wir denken uns nun die Zahlen $\alpha'$ ihrer Größe nach geordnet; $\alpha_\omega$ sei die kleinste unter ihnen, $\alpha_{\omega+1}$ die nächst größere usw., so erhält man die Menge ($\alpha'$) in der Form einer „wohlgeordneten“ Menge $\alpha_\beta$, wo $\beta$ Zahlen unserer natürlichen erweiterten Zahlenreihe von $\omega$ an durchläuft; offenbar bleibt hierbei $\beta$ immer kleiner oder gleich $\alpha_\beta$ und da $\alpha_\beta < \Omega$, so ist also auch $\beta < \Omega$. Die Zahl $\beta$ kann also nicht über die Zahlenklasse (II) hinausgehen, sondern verharrt innerhalb des Gebietes derselben; es können daher nur drei Fälle stattfinden: entweder es bleibt $\beta$ unterhalb einer angebbaren Zahl der Reihe $\omega + \nu$, alsdann ist ($\alpha'$) eine endliche Menge; oder es nimmt $\beta$ alle Werte der Reihe $\omega + \nu$ an, bleibt aber unterhalb einer angebbaren Zahl der Reihe (II), alsdann ist ($\alpha'$) offenbar eine Menge von der *ersten* Mächtigkeit; oder drittens es nimmt $\beta$ auch beliebig große Werte in (II) an, alsdann durchläuft $\beta$ *alle* Zahlen von (II); in diesem Falle hat der Inbegriff ($\alpha_\beta$), d. h. die Menge ($\alpha'$) offenbar die Mächtigkeit von (II); w. z. b. w.

Als unmittelbares Ergebnis des soeben bewiesenen Satzes erscheinen nun die folgenden:



„Hat man irgend eine wohldefinierte Menge $M$ von der Mächtigkeit der Zahlenklasse (II) und nimmt irgendeine unendliche Teilmenge $M'$ von $M$, so läßt sich der Inbegriff $M'$ entweder in Form einer einfach unendlichen Reihe denken, oder es ist möglich, die beiden Mengen $M'$ und $M$ gegenseitig eindeutig aufeinander abzubilden.“

„Hat man irgendeine wohldefinierte Menge $M$ von der zweiten Mächtigkeit, eine Teilmenge $M'$ von $M$ und eine Teilmenge $M''$ von $M'$ und weiß man, daß die letztere $M''$ gegenseitig eindeutig abbildbar ist auf die erste $M$, so ist immer auch die zweite $M'$ gegenseitig eindeutig abbildbar auf die erste und daher auch auf die dritte.“ [5]

Ich spreche diesen letzten Satz hier wegen des Zusammenhanges mit den vorangehenden unter der Voraussetzung aus, daß $M$ die Mächtigkeit von (II) hat; offenbar ist er auch dann richtig, wenn $M$ die Mächtigkeit von (I) hat; es scheint mir aber höchst bemerkenswert und hebe ich es daher ausdrücklich hervor, daß dieser Satz *allgemeine* Gültigkeit hat, gleichviel welche Mächtigkeit der Menge $M$ zukommen mag. Darauf will ich in einer späteren Abhandlung näher eingehen und alsdann das eigentümliche Interesse nachweisen, welches sich an diesen allgemeinen Satz knüpft.

## § 14.

Ich will nun noch zum Schlusse die Zahlen der zweiten Zahlenklasse (II) und die mit ihnen ausführbaren Operationen einer Betrachtung unterwerfen, wobei ich mich aber bei dieser Gelegenheit nur auf das Nächstliegende beschränken will, indem ich mir die Veröffentlichung eingehender Untersuchungen darüber auf später vorbehalte. [6]

Die Operationen des Addierens und Multiplizierens habe ich in § 1 allgemein definiert und gezeigt, daß sie für die unendlichen ganzen Zahlen im allgemeinen *nicht* dem kommutativen, wohl aber dem assoziativen Gesetze unterworfen sind; dies gilt also im besondern auch für die Zahlen der zweiten Zahlenklasse. Hinsichtlich des distributiven Gesetzes, so ist dasselbe nur in der folgenden Form allgemein gültig:

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

(wo $\alpha + \beta$, $\alpha$, $\beta$ als Multiplikatoren auftreten),

wie man aus der inneren Anschauung unmittelbar erkennt.

Die Subtraktion kann nach zwei Seiten hin betrachtet werden. Sind $\alpha$ und $\beta$ irgend zwei ganze Zahlen, $\alpha < \beta$, so überzeugt man sich leicht, daß die Gleichung

$$\alpha + \xi = \beta$$

immer eine und nur eine Auflösung nach $\xi$ zuläßt, wo, wenn $\alpha$ und $\beta$ Zahlen aus (II) sind, $\xi$ eine Zahl aus (I) oder (II) sein wird. Diese Zahl $\xi$ werde gleich $\beta - \alpha$ gesetzt.

Betrachtet man hingegen die folgende Gleichung:

$$\xi + \alpha = \beta$$

so zeigt sich, daß dieselbe oft nach $\xi$ gar nicht lösbar ist, z. B. tritt dieser Fall bei folgender Gleichung ein:

$$\xi + \omega = \omega + 1.$$

Aber auch in denjenigen Fällen, wo die Gleichung $\xi + \alpha = \beta$ nach $\xi$ lösbar ist, findet es sich oft, daß sie durch unendlich viele Zahlwerte von $\xi$ befriedigt wird; von diesen verschiedenen Auflösungen wird aber immer eine die kleinste sein.

Für diese kleinste Wurzel der Gleichung

$$\xi + \alpha = \beta,$$

falls letztere überhaupt lösbar ist, wählen wir die Bezeichnung $\beta_{-\alpha}$, was also von $\beta - \alpha$, welche letztere Zahl immer vorhanden ist, wenn nur $\alpha < \beta$, im allgemeinen verschieden ist.

Besteht ferner zwischen drei ganzen Zahlen $\beta$, $\alpha$, $\gamma$ die Gleichung

$$\beta = \gamma\alpha,$$

(wo $\gamma$ Multiplikator ist), so überzeugt man sich leicht, daß die Gleichung

$$\beta = \xi\alpha$$

nach $\xi$ keine andere Auflösung hat als $\xi = \gamma$, und man bezeichnet in diesem Falle $\gamma$ durch $\frac{\beta}{\alpha}$.

Hingegen findet man, daß die Gleichung

$$\beta = \alpha\xi$$

(wo $\xi$ Multiplikandus ist), wenn sie überhaupt auflösbar nach $\xi$ ist, oft mehrere und selbst unendlich viele Wurzeln hat, von denen aber eine immer die kleinste ist; diese kleinste der Gleichung $\beta = \alpha\xi$, falls letztere überhaupt auflösbar ist, genügende Wurzel werde mit

$$\frac{\beta}{\alpha}$$

bezeichnet.

Die Zahlen $\alpha$ der zweiten Zahlenklasse sind zweierlei Art: 1) solche $\alpha$, welche ein ihnen nächstvorangehendes Glied in der Reihe haben, welches alsdann $\alpha_{-1}$ ist, diese Zahlen nenne ich von der *ersten* Art, 2) solche $\alpha$, welche ein ihnen nächstvorangehendes Glied in der Reihe nicht haben, für welche also $\alpha_{-1}$ nicht existiert; diese Zahlen nenne ich von der *zweiten* Art. Die Zahlen $\omega$, $2\omega$, $\omega^{\nu} + \omega$, $\omega^{\omega}$ sind beispielsweise von der zweiten Art, dagegen $\omega + 1$, $\omega^2 + \omega + 2$, $\omega^{\omega} + 3$ von der ersten Art sind.

Dementsprechend zerfallen auch die *Primzahlen* der zweiten Zahlenklasse, welche ich allgemein in § 1 definiert, in Primzahlen der zweiten und in solche der ersten Art.



Primzahlen der zweiten Art sind in der Reihenfolge ihres Auftretens in der Zahlenklasse (II) folgende:

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^2},\ \omega^{\omega^3},\ \ldots,$$

sodaß unter allen Zahlen der Form

$$\varphi = \nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_{\mu}$$

nur die *eine* Primzahl $\omega$ der *zweiten* Art vorhanden ist; man schließe aber nicht aus dieser verhältnismäßig spärlichen Verteilung der Primzahlen zweiter Art, daß der Inbegriff von ihnen allen eine geringere Mächtigkeit habe als die Zahlenklasse (II) selbst; es findet sich, daß dieser Inbegriff dieselbe Mächtigkeit hat wie (II).

Die Primzahlen erster Art sind zunächst

$$\omega + 1,\ \omega^2 + 1,\ \ldots,\ \omega^{\mu} + 1,\ \ldots.$$

Dieses sind die einzigen Primzahlen erster Art, welche unter den soeben mit $\varphi$ bezeichneten Zahlen vorkommen; die Gesamtheit aller Primzahlen erster Art in (II) hat gleichfalls die Mächtigkeit von (II).

Die Primzahlen der zweiten Art haben eine Eigenschaft, welche ihnen einen ganz aparten Charakter gibt; ist $\eta$ eine solche Primzahl (zweiter Art), so ist stets $\eta\alpha = \eta$, wenn $\alpha$ irgend eine Zahl kleiner als $\eta$ ist; daraus folgt, daß, wenn $\alpha$ und $\beta$ irgend zwei Zahlen sind, die beide kleiner als $\eta$, alsdann immer auch das Produkt $\alpha\beta$ kleiner ist als $\eta$.

Beschränken wir uns hier zunächst auf die Zahlen der zweiten Zahlenklasse, welche die Form $\varphi$ haben, so finden sich für diese folgende Additions- und Multiplikationsregeln. Sei

$$\varphi = \nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu},$$
$$\psi = \varrho_0\omega^{\lambda} + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_{\lambda},$$

wo wir $\nu_0$ und $\varrho_0$ von Null verschieden voraussetzen.

*Addition.*

1) Ist $\mu < \lambda$, so hat man

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2) Ist $\mu > \lambda$, so hat man

$$\varphi + \psi = \nu_0\omega^{\mu} + \cdots + \nu_{\mu-\lambda-1}\omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \varrho_0)\,\omega^{\lambda} + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \varrho_2\omega^{\lambda-2} + \cdots + \varrho_{\lambda}.$$

3) Für $\mu = \lambda$ ist

$$\varphi + \psi = (\nu_0 + \varrho_0)\,\omega^{\lambda} + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_{\lambda}.$$

*Multiplikation.*

1) Ist $\nu_\mu$ von Null verschieden, so hat man

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} + \nu_\mu\varrho_0\omega^\lambda + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_\lambda.$$

Falls $\lambda = 0$, ist das letzte Glied rechterseits $\nu_\mu\varrho_0$.

2) Ist $\nu_\mu = 0$, so hat man

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} = \varphi\,\omega^\lambda.$$

Die Zerlegung einer Zahl $\varphi$ in ihre Primfaktoren ist folgende. Hat man

$$\varphi = c_0\,\omega^\mu + c_1\,\omega^{\mu_1} + c_2\,\omega^{\mu_2} + \cdots + c_\sigma\,\omega^{\mu_\sigma},$$

wo

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\sigma$$

und

$$c_0,\ c_1,\ \ldots\ c_\sigma$$

von Null verschiedene positive endliche Zahlen sind, so ist

$$\varphi = c_0(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)\,c_1(\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)\,c_2 \cdots c_{\sigma-1}(\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_\sigma} + 1)\,c_\sigma\,\omega^{\mu_\sigma};$$

denkt man sich noch $c_0, c_1, \ldots c_{\sigma-1} c_\sigma$ nach den Regeln der ersten Zahlenklasse in Primfaktoren zerlegt, so hat man alsdann die Zerlegung von $\varphi$ in Primfaktoren; denn die Faktoren $\omega^\varkappa + 1$ und $\omega$ sind, wie oben bemerkt, selbst Primzahlen. Diese Zerlegung von Zahlen der Form $\varphi$ ist einzig [eindeutig] bestimmt, auch hinsichtlich der Reihenfolge der Faktoren, wenn man von der Kommutabilität der Primfaktoren innerhalb der einzelnen $c$ abstrahiert und wenn bestimmt wird, daß der letzte Faktor eine Potenz von $\omega$ oder gleich Eins sein soll und daß $\omega$ nur an der letzten Stelle Faktor sein darf. Über die Verallgemeinerung dieser Zerlegung in Primfaktoren auf beliebige Zahlen $\alpha$ der zweiten Zahlenklasse (II) werde ich bei einer späteren Gelegenheit schreiben. [Vgl. III 9 § 19, S. 340ff.]

## Anmerkungen des Verfassers zu Nr. 5.

Zu § 1.

1) (S. 165.) *Mannigfaltigkeitslehre.* Mit diesem Worte bezeichne ich einen sehr viel umfassenden Lehrbegriff, den ich bisher nur in der speziellen Gestaltung einer arithmetischen oder geometrischen Mengenlehre auszubilden versucht habe. Unter einer „Mannigfaltigkeit“ oder „Menge“ verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, und ich glaube hiermit etwas zu definieren, was verwandt ist mit dem Platonischen *εἶδος* oder *ἰδέα*, wie auch mit dem, was Platon in seinem Dialoge „Philebos oder das höchste Gut“ *μικτόν* nennt. Er setzt dieses dem *ἄπειρον*, d. h. dem Unbegrenzten, Unbestimmten, welches ich Uneigentlich-unendliches nenne, sowie dem *πέρας* d. h. der Grenze entgegen und erklärt es als ein geordnetes „Gemisch“ der beiden letzteren. Daß diese Begriffe Pythagoreischen Ursprungs sind, deutet Platon selbst an; man vergleiche A. Boeckh, Philolaos des Pythagoreers Lehren. Berlin 1819.



Zu § 4.

2) (S. 174.) *Aristoteles.* Man vergleiche die Darstellung Zellers in seinem großen Werke: „Die Philosophie der Griechen“ III. Aufl., II. Teil, 2. Abt. S. 393 bis 403. Die Auffassung Platons vom Unendlichen ist eine ganz andere wie die des Aristoteles; denn man vergleiche Zeller II. Teil, 1. Abt. S. 628—646. Ebenso finde ich für meine Auffassungen Berührungspunkte in der Philosophie des Nicolaus Cusanus. Man vgl. R. Zimmermann, Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Vorgänger Leibnizens (Sitzungsberichte d. Wiener Akademie d. Wiss. Jahrg. 1852). Dasselbe bemerke ich in Beziehung auf Giordano Bruno, den Nachfolger des Cusaners. Man vgl. Brunnhofer, Giordano Brunos Weltanschauung und Verhängnis. Leipzig 1882.

Ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin, daß ich die verschiedenen Abstufungen des Eigentlich-unendlichen durch die Zahlenklassen (I), (II), (III) usw. ein für allemal dem Begriffe nach fixiere und es nun erst als Aufgabe betrachte, die Beziehungen der überendlichen Zahlen nicht nur mathematisch zu untersuchen, sondern auch allüberall, wo sie in der Natur vorkommen, nachzuweisen und zu verfolgen. Daß wir auf diesem Wege immer weiter, niemals an eine unübersteigbare Grenze, aber auch zu keinem auch nur angenäherten Erfassen des Absoluten gelangen werden, unterliegt für mich keinem Zweifel. Das Absolute kann nur anerkannt, aber nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden. Denn wie man innerhalb der ersten Zahlenklasse (I) bei jeder noch so großen endlichen Zahl immer dieselbe Mächtigkeit der ihr größeren endlichen Zahlen vor sich hat, ebenso folgt auf jede noch so große überendliche Zahl irgendeiner der höheren Zahlenklassen (II) oder (III) usw. ein Inbegriff von Zahlen und Zahlenklassen, der an Mächtigkeit nicht das mindeste eingebüßt hat gegen das Ganze des von 1 anfangenden absolut unendlichen Zahleninbegriffs. Es verhält sich damit ähnlich, wie Albrecht von Haller von der Ewigkeit sagt: „ich zieh' sie ab (die ungeheure Zahl) und Du (die Ewigkeit) liegst ganz vor mir.“ Die absolut unendliche Zahlenfolge erscheint mir daher in gewissem Sinne als ein geeignetes Symbol des Absoluten; wogegen die Unendlichkeit der ersten Zahlenklasse (I), welche bisher dazu allein gedient hat, mir, eben weil ich sie für eine faßbare Idee (nicht Vorstellung) halte, wie ein ganz verschwindendes Nichts im Vergleich mit jener vorkommt. Bemerkenswert erscheint mir auch dieses, daß jede der Zahlenklassen, also auch jede der Mächtigkeiten, einer ganz bestimmten Zahl des absolut-unendlichen Zahleninbegriffs zugeordnet ist und zwar so, daß auch zu jeder überendlichen Zahl $\gamma$ eine Mächtigkeit vorhanden ist, welche die $\gamma^{\text{te}}$ zu nennen ist; es bilden also auch die verschiedenen Mächtigkeiten eine absolut-unendliche Folge. Dies ist um so merkwürdiger, als die Zahl $\gamma$, welche die Ordnung einer Mächtigkeit angibt, (falls die Zahl $\gamma$ eine ihr nächst vorangehende hat) zu den Zahlen derjenigen Zahlenklasse, welche diese Mächtigkeit hat, in einem Größenverhältnis steht, dessen Kleinheit jeglicher Beschreibung spottet, und dies um so mehr, je größer $\gamma$ angenommen wird. [7]

Zu § 5.

3) (S. 176.) *determinari possunt.* Dem Unbestimmten, Veränderlichen, Uneigentlich-unendlichen, in welcher Form sie auch erscheinen, kann ich kein Sein zuschreiben, denn sie sind nichts als entweder Beziehungsbegriffe oder rein subjektive Vorstellungen resp. Anschauungen (imaginationes), in keinem Falle adäquate Ideen. Wenn also nur das Uneigentlich-unendliche in dem Satze „infinitum actu non datur“ gemeint wäre, so könnte ich ihn unterschreiben, er wäre aber alsdann ein rein tautologischer. Der Sinn dieses Satzes scheint mir aber an den bezeichneten Quellen vielmehr der zu sein, daß durch ihn die Unmöglichkeit des begrifflichen Setzens einer bestimmten Unendlichkeit ausgesprochen werden soll, und in dieser Bedeutung halte ich ihn für falsch.

### Zu § 7.

4) (S. 180.) *Realisten.* Man findet den positivistischen und realistischen Standpunkt in bezug auf das Unendliche beispielsweise in: Dühring, Natürliche Dialektik, Berlin 1865, S. 109—135 und in v. Kirchmann, Katechismus der Philosophie S. 124—130 auseinandergesetzt. Man vergleiche auch Ueberwegs Anmerkungen zu Berkeleys Abhandl. über d. Prinz. der menschlichen Erkenntnis in v. Kirchmanns Philosophischer Bibliothek. Ich kann nur wiederholen, daß in der Würdigung des Uneigentlich-unendlichen ich im wesentlichen mit allen diesen Autoren übereinstimme; der Differenzpunkt liegt nur darin, daß von ihnen dieses synkategorematische Unendliche für das *einzige* durch „Wendungen" oder Begriffe, und hier sogar durch bloße Beziehungsbegriffe faßbare Unendliche angesehen wird. Die Beweise Dührings gegen das Eigentlich-unendliche könnten mit viel weniger Worten geführt werden und scheinen mir entweder darauf hinauszulaufen, daß die bestimmte endliche Zahl, wenn sie auch noch so groß gedacht wird, niemals eine unendliche sein kann, was aus ihrem Begriff unmittelbar folgt, oder darauf, daß die veränderliche unbeschränkt große endliche Zahl nicht mit dem Prädikate der Bestimmtheit und daher auch nicht mit dem Prädikate des Seins gedacht werden kann, was wiederum aus dem Wesen der Veränderlichkeit unmittelbar sich ergibt. Daß hiermit gegen die Denkbarkeit bestimmter überendlicher Zahlen nicht das geringste ausgemacht sei, ist für mich nicht zweifelhaft; und dennoch werden jene Beweise für Beweise gegen die Realität überendlicher Zahlen gehalten. Mir erscheint diese Argumentation ähnlich, wie wenn man daraus, daß es unzählig viele Intensitäten des Grünen gibt, schließen wollte, daß es kein Rotes geben könne. Merkwürdig ist es aber allerdings, daß Dühring auf S. 126 seiner Schrift selbst zugesteht, daß für die Erklärung der „Möglichkeit der unbeschränkten Synthesis" ein Grund vorhanden sein muß, den er als „begreiflicher Weise völlig unbekannt" bezeichnet. Hierin liegt, wie mir scheint, ein Widerspruch.

Ebenso finden wir aber auch, daß dem Idealismus nahestehende oder selbst ihm ganz huldigende Denker den bestimmt-unendlichen Zahlen jede Berechtigung versagen.

Chr. Sigwart in seinem ausgezeichneten Werke: Logik, II. Bd. Die Methodenlehre (Tübingen 1878) argumentiert ganz ebenso wie Dühring und sagt auf S. 47: „eine unendliche Zahl ist eine Contradictio in adjecto".

Ähnliches findet sich bei Kant und J. F. Fries; man vergleiche des letzteren System der Metaphysik (Heidelberg 1824) in § 51 u. § 52. Auch die Philosophen der Hegelschen Schule lassen die eigentlich-unendlichen Zahlen nicht gelten; ich führe nur das verdienstvolle Werk von K. Fischer an, sein System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre, 2. Aufl. (Heidelberg 1865) S. 275.

### Zu § 8.

5) (S. 181.) Was ich hier „intrasubjektive" oder „immanente" Realität von Begriffen oder Ideen nenne, dürfte mit der Bestimmung „adäquat" in derjenigen Bedeutung, wie dieses Wort von Spinoza gebraucht wird, übereinstimmen, indem er sagt: Eth. pars II def. IV, „Per ideam adaequatam intelligo ideam, quae, quatenus in se sine relatione ad objectum consideratur, omnes verae ideae proprietates sive denominationes intrinsecas habet."

6) (S. 181.) Diese Überzeugung stimmt im wesentlichen sowohl mit den Grundsätzen des Platonischen Systems, wie auch mit einem wesentlichen Zuge des Spinozaschen Systems überein; in ersterer Beziehung verweise ich auf Zeller, Philos. d. Griechen, 3. Aufl. 2. Teil 1. Abt. S. 541—602. Es heißt hier gleich im Anfange des Abschnittes: „Nur das begriffliche Wissen soll (nach Plato) eine wahre Erkenntnis gewähren. So viel aber unsern Vorstellungen Wahrheit zukommt — diese Voraussetzung teilt Plato mit



andern (Parmenides) — ebensoviel muß ihrem Gegenstand Wirklichkeit zukommen, und umgekehrt. Was sich erkennen läßt, ist, was sich nicht erkennen läßt, ist nicht, und in demselben Maße, in dem etwas ist, ist es auch erkennbar."

Hinsichtlich Spinozas brauche ich nur an seinen Satz in Ethik, pars II, prop. VII zu erinnern: „ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum."

Auch in der Leibnizschen Philosophie läßt sich dasselbe erkenntnistheoretische Prinzip nachweisen. Erst seit dem neueren Empirismus, Sensualismus und Skeptizismus, sowie dem daraus hervorgegangenen Kantischen Kritizismus glaubt man die Quelle des Wissens und der Gewißheit in die Sinne oder doch in die sogenannten reinen Anschauungsformen der Vorstellungswelt verlegen und auf sie beschränken zu müssen; meiner Überzeugung nach liefern diese Elemente durchaus keine sichere Erkenntnis, weil letztere nur durch Begriffe und Ideen erhalten werden kann, die von äußerer Erfahrung höchstens angeregt, der Hauptsache nach durch innere Induktion und Deduktion gebildet werden als etwas, was in uns gewissermaßen schon lag und nur geweckt und zum Bewußtsein gebracht wird.

### Zu § 8 und § 9 (S. 182 und 187).

7), 8) Der Vorgang bei der korrekten Bildung von Begriffen ist m. E. überall derselbe; man setzt ein eigenschaftsloses Ding, das zuerst nichts anderes ist als ein Name oder ein Zeichen $A$, und gibt demselben ordnungsmäßig verschiedene, selbst unendlich viele verständliche Prädikate, deren Bedeutung an bereits vorhandenen Ideen bekannt ist, und die einander nicht widersprechen dürfen; dadurch werden die Beziehungen von $A$ zu den bereits vorhandenen Begriffen und namentlich zu den verwandten bestimmt; ist man hiermit vollständig zu Ende, so sind alle Bedingungen zur Weckung des Begriffes $A$, welcher in uns geschlummert, vorhanden und er tritt fertig ins Dasein, versehen mit der intrasubjektiven Realität, welche überall von Begriffen nur verlangt werden kann; seine transiente Bedeutung zu konstatieren ist alsdann Sache der Metaphysik.

### Zu § 10.

9) (S. 190.) Thomas von Aquino, Opuscula, XLII de natura generis, cap. 19 et 20; LII de natura loci; XXXII de natura materiae et de dimensionibus interminatis. Man vergleiche: C. Jourdin, la Philosophie de Saint Thomas d'Aquin, pag. 303—329; K. Werner, der heilige Thomas von Aquino (Regensburg 1859), 2. Bd. p. 177—201.

10) (S. 193.) Selbst der Inbegriff aller stetigen, aber auch derjenige aller integrierbaren Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen dürfte nur die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse (II) haben; läßt man jedoch alle Beschränkungen fallen und betrachtet den Inbegriff aller stetigen und unstetigen Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen, so hat diese Menge die Mächtigkeit der dritten Zahlenklasse (III). [8]

11) (S. 194.) Von den perfekten Mengen läßt sich der Satz beweisen, daß sie die Mächtigkeit von (I) niemals haben.

Als ein Beispiel einer perfekten Punktmenge, die in keinem noch so kleinen Intervall überall dicht ist, führe ich den Inbegriff aller reellen Zahlen an, die in der Formel

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots$$

enthalten sind, wo die Koeffizienten $c_\nu$ nach Belieben die beiden Werte $o$ und $2$ anzunehmen haben und die Reihe sowohl aus einer endlichen, wie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehen kann.

12) (S. 194.) Man beachte, daß diese Definition eines Kontinuums frei ist von jedem Hinweis auf das, was man die *Dimension* eines stetigen Gebildes nennt; die Definition

umfaßt nämlich auch solche Kontinua, die aus zusammenhängenden Stücken verschiedener Dimension, wie Linien, Flächen, Körper usw. bestehen. Bei einer späteren Gelegenheit will ich zeigen, wie man von diesem allgemeinen Kontinuum zu den spezielleren Kontinuis mit bestimmter Dimension ordnungsmäßig hinkommt. Ich weiß sehr wohl, daß das Wort „*Kontinuum*" in der Mathematik eine *feste* Bedeutung bisher *nicht* angenommen hat; es wird daher meine Definition desselben von einigen als *eng*, von anderen als zu *weit* beurteilt werden; hoffentlich ist es mir gelungen, dabei die *richtige Mitte* zu finden.

Nach meiner Auffassung kann unter einem *Kontinuum nur* ein *perfektes* und *zusammenhängendes* Gebilde verstanden werden. Darnach sind beispielsweise eine gerade Strecke, welcher der eine oder beide Endpunkte fehlen, desgleichen eine Kreisfläche, von welcher die Begrenzung ausgeschlossen ist, keine *vollkommenen* Kontinua; ich nenne derartige Punktmengen *Semikontinua*.

Allgemein verstehe ich unter einem *Semikontinuum* eine *imperfekte, zusammenhängende* und zur *zweiten Klasse* gehörige Punktmenge, welche so beschaffen ist, daß je zwei Punkte derselben durch ein *vollkommenes* Kontinuum, welches ein Bestandteil der Punktmenge ist, verbunden werden können. So ist z. B. der in Math. Ann. Bd. 20, S. 119 [hier S. 156] von mir mit $\mathfrak{A}$ bezeichnete Raum, welcher aus $G_n$ durch Entfernung irgendeiner Punktmenge *erster* Mächtigkeit entsteht, ein *Semikontinuum*.

Die *Ableitung* einer zusammenhängenden Punktmenge ist *stets* ein *Kontinuum*, wobei es gleichgültig ist, ob die zusammenhängende Punktmenge die *erste* oder *zweite* Mächtigkeit hat.

Ist eine zusammenhängende Punktmenge von der *ersten* Mächtigkeit, so kann ich sie *weder* ein Kontinuum *noch* ein Semikontinuum nennen.

Durch die von mir an die Spitze der Mannigfaltigkeitslehre gestellten Begriffe mache ich mich anheischig, die sämtlichen Gebilde der algebraischen sowohl wie der transzendenten Geometrie nach allen ihren Möglichkeiten zu erforschen, wobei die Allgemeinheit und Schärfe der Resultate von keiner andern Methode übertroffen werden dürfen.

**[Anmerkungen des Herausgebers zu Nr. 5.]**

[1] Zu S. 183. Hier wird angespielt auf G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, Leipzig 1876, wo der Verfasser im ersten Satze des § 1 es als Aufgabe der Mechanik bezeichnet „die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben".

[2] Zu S. 192. Hier wird also bereits die „Cantorsche Vermutung", wonach das Kontinuum die „zweite Mächtigkeit" habe, ausgesprochen und ein „strenger Beweis" dafür in Aussicht gestellt. Einen solchen Beweis hat aber weder Cantor noch ein anderer führen können, und die Frage muß auch noch heute als ungelöst gelten. Vgl. Anm. 10) S. 207.

[3] Zu S. 195. Hier und im folgenden stellt Cantor den Multiplikator voran und schreibt $2\omega$ für $\omega + \omega$; in der späteren systematischen Darstellung III 9 stellt er umgekehrt den Multiplikandus voran und schreibt $\omega 2$, was aus Gründen der Analogie entschieden vorzuziehen ist, weil auch bei der Addition nur der zweite Summand (der Addendus), wenn er endlich ist, die transfinite Summe modifiziert, vergrößert. Vgl. S. 302, 322.

[4] Zu S. 200. Daß es in jeder Menge $(\alpha')$ transfiniter Zahlen immer eine kleinste gibt, läßt sich folgendermaßen einsehen. Es sei $(\beta)$ die Gesamtheit aller (endlichen und unendlichen) Zahlen $\beta$, welche kleiner sind als alle Zahlen $\alpha'$; solche Zahlen muß es geben, z. B. die Zahl 1, sofern diese nicht selbst zu $\alpha'$ gehört und dann natürlich die kleinste der Menge ist. Unter den Zahlen $\beta$ gibt es nun entweder eine größte $\beta_1$, so daß die unmittelbar folgende $\beta_1'$ nicht zu $(\beta)$ gehört, aber $\leqq \alpha'$ ist für jedes $\alpha'$, dann gehört $\beta_1'$ selbst zu $(\alpha')$ und ist ihre kleinste. Oder aber die Zahlen $\beta$ enthalten keine größte, dann besitzen sie



(nach dem zweiten Erzeugungsprinzip) eine „Grenze" $\beta'$, welche auf alle $\beta$ zunächst folgt, also wieder $\leqq$ jedem $\alpha'$ ist, und diese Zahl $\beta'$ muß dann wieder notwendig zu $(\alpha')$ gehören und die kleinste aller $\alpha'$ darstellen.

[5] Zu S. 201. Der hier (ohne Beweis) ausgesprochene allgemeine Satz, nach welchem je zwei Mengen, deren jede einem Bestandteil der anderen „äquivalent" (gegenseitig eindeutig aufeinander abbildbar) ist, selbst einander äquivalent sein müssen, wurde erst im Jahre 1896 von E. Schröder und 1897 von F. Bernstein bewiesen und seitdem gilt dieser „Äquivalenzsatz" als einer der wichtigsten Sätze der gesamten Mengenlehre. Cantor selbst scheint der in der Bernsteinschen Form doch so einfache und anschauliche Beweis dieses Satzes entgangen zu sein: auch in der späteren Abhandlung III 9 von 1894, in welcher eine durchgehende Neubegründung der Mengenlehre unternommen wird, findet sich dieser Satz so wenig wie sein Beweis.

[6] Zu S. 201. Die hier entwickelten Grundzüge einer formal-arithmetischen Theorie, einer Algebra der transfiniten Ordnungszahlen werden in der späteren, die Cantorschen Untersuchungen abschließenden Arbeit III 9, § 14 ff. wieder aufgenommen und ausführlicher begründet mit Hilfe einer neuen Definition der Ordnungszahlen. In der hier vorliegenden Darstellung, die noch ganz auf der ursprünglichen rein konstruktiven Definition durch „Erzeugungsprinzipien" beruht, werden gelegentlich Resultate ohne hinreichende Begründung gegeben, oder es wird an Stelle eines Beweises auf die „Anschauung" verwiesen. Der Leser wird also an allen solchen Stellen, wo die Begründung lückenhaft erscheint, die ausführlichere Darstellung in der genannten Abhandlung zum Vergleich und zur Ergänzung heranziehen können.

[7] *Zum Schlußsatze der Anmerkung* 2) auf S. 205. Die Frage, ob eine transfinite Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ „zweiter Art" (in welcher der Index $\gamma$ eine Limeszahl ist) der ihres Index *gleich* sein könne, wird hier von Cantor offen gelassen und auch in späteren Arbeiten nirgends erörtert. In der Tat ist sie zu *bejahen*, wie aus der Theorie der „Normalfunktionen" (F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1. Aufl., Kap. V § 3), deren erstes Beispiel die Cantorschen $\varepsilon$-Zahlen darstellen, leicht zu beweisen ist: die $\zeta$-Zahlen, d. h. die Anfangszahlen $\omega_\zeta$ der Zahlenklassen, welche ihrem eigenen Index gleich sind, bilden ein unbegrenztes System vom gleichen Typus wie die ganze offene („absolut-unendliche") Zahlenreihe. Vgl. G. Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre (Göttingen 1906) § 58, S. 607. Nach der „Anschauung", auf die manche Philosophen und Mathematiker alle mathematische Erkenntnis gründen wollen, wäre die Existenz solcher Zahlen unbedingt zu verneinen gewesen. Der Analogieschluß „a fortiori", der dem naiven Denken so einleuchtend scheint, ist eben auf das Transfinite nicht anwendbar.

[8] Zu Anm. 10) S. 207. In der Annahme, daß die Menge aller (stetigen und) unstetigen Funktionen die Mächtigkeit der *dritten* Zahlenklasse habe, liegt bereits eine *Ausdehnung* der „Cantorschen Vermutung", wonach das Kontinuum selbst von der zweiten Mächtigkeit sei. Bis heute ist nur bewiesen, daß diese Menge der unstetigen Funktionen von der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{c}}$ ist, wenn man mit $\mathfrak{c}$ die des Kontinuums bezeichnet.

Nr. 6.

[Anmerkungen] hierzu S. 244—246.

§ 15.

In Nr. 5 dieser Abhandlung habe ich an verschiedenen Stellen im Interesse des Zusammenhangs gewisse Sätze der Mengenlehre ausgesprochen, ohne mich auf deren Beweise damals einzulassen, weil im Plane jener Mitteilung andere Gegenstände den Vorzug eingehenderer Behandlung erfahren mußten. Ich will jetzt die sonach gebliebenen Lücken auszufüllen suchen und in dieser Nummer sowohl, wie in der bald nächstfolgenden die fehlenden Beweise geben, wobei ich mich aber nicht darauf beschränken, sondern auch Sätze entwickeln will, die zwar in diesen Zusammenhang gehören, in den früheren Nummern aber teils noch gar nicht erwähnt, teils nicht mit der erforderlichen Genauigkeit formuliert worden sind.

Den Anfang mache ich mit der folgenden einfachen und sehr allgemeinen Betrachtung.

Wenn ein $n$-dimensionaler Teil $H$ eines nach $n$ Dimensionen ausgedehnten, stetigen, ebenen Raumes $G_n$ eine Punktmenge $P$ enthält, wobei $H$ auch der ganze Raum $G_n$ selbst sein kann, und wir zerlegen den Raumteil $H$ nach einem bestimmten, im übrigen beliebig gelassenen Gesetze in eine endliche oder unendliche Anzahl getrennter, in sich zusammenhängender, $n$-dimensionaler Teile

$$H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots$$

(deren *Inbegriff*, wenn er unendlich ist, nach Nr. 3 [hier S. 153] stets von der *ersten Mächtigkeit* ist und folglich in der Form jener einfach unendlichen Reihe $(H_\nu)$ gedacht werden kann), wobei die gegenseitigen Begrenzungen der aneinanderstoßenden Teile gehörig *vergeben* sind, (so daß ein und derselbe Punkt von $H$ *einem* und *nur einem* der Teile $H_\nu$ desselben angehört), so zerfällt die Punktmenge $P$ in eine entsprechende Anzahl von *Teilmengen*

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots,$$

wobei $P_\nu$ derjenige *Teil* von $P$ ist, welcher mit allen seinen Punkten dem Gebiete $H_\nu$ angehört; es kann also unter Umständen $P_\nu$ gleich *Null* sein, falls kein Punkt von $P$ in den Raumteil $H_\nu$ fällt.

Wir wollen nun mit dem Buchstaben $\Upsilon$ *irgendeine Eigenschaft* oder *Beschaffenheit* bezeichnen, welche von Punktmengen innerhalb $G_n$ ausgesagt werden kann und die *nur an die folgenden Voraussetzungen geknüpft ist:*

1) falls $P$ irgendeine, in einem *ganz im Endlichen* liegenden $n$-dimensionalen Teil $H$ von $G_n$ befindliche Punktmenge *von der Beschaffenheit* $\Upsilon$



ist und man zerlegt das Gebiet $H$ in der oben besprochenen Weise nach irgendeinem Gesetze in eine *endliche* Anzahl $m$ von Teilgebieten

$$H_1, H_2, \ldots, H_{m-1}, H_m,$$

wodurch $P$ in die Teilmengen

$$P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m$$

zerfällt, so *soll dieselbe Beschaffenheit* $\Upsilon$ auch *wenigstens einer* von den Teilmengen $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m$ zukommen;

2) ist $P$ irgendeine Punktmenge innerhalb $G_n$, *welcher die Beschaffenheit* $\Upsilon$ zukommt, und $Q$ eine *beliebige* andere Punktmenge innerhalb $G_n$, welche mit $P$ *keinen* Punkt *gemeinsam* hat, so soll die Menge $P + Q$ *stets auch* die Beschaffenheit $\Upsilon$ haben.

Als einfachstes Beispiel einer *Beschaffenheit* von Punktmengen, welche den Charakter $\Upsilon$ haben, führe ich diejenige Beschaffenheit einer unendlichen Punktmenge an, wonach sie aus *unendlich viel* Punkten besteht; offenbar genügt diese Beschaffenheit den beiden soeben formulierten Voraussetzungen. Es gilt nun folgender Satz:

Theorem I. *Ist $H$ irgendein ganz im Endlichen liegender $n$-dimensionaler Teil von $G_n$ und $P$ eine in $H$ enthaltene Punktmenge von der Beschaffenheit $\Upsilon$, so gibt es wenigstens einen Punkt $g$ von $H$ in solcher Lage, daß, wenn $K_n$ irgendeine $n$-dimensionale Vollkugel mit dem Mittelpunkt $g$ ist, derjenige Bestandteil von $P$, welcher in das Gebiet $K_n$ fällt, stets die Beschaffenheit $\Upsilon$ hat, der Radius der Vollkugel $K_n$ mag so klein genommen werden, wie man wolle*[1].

Zum Beweise dieses Satzes zerlegt man das *ganz im Endlichen liegende* Gebiet $H$ nach irgendeinem Gesetze in eine *endliche* Anzahl von $n$-dimensionalen Teilgebieten, in deren jedem sämtliche Distanzen von je zwei Punkten kleiner sind als 1; daß solches immer tunlich ist, sieht man leicht ein. Von den entsprechenden Teilmengen, in welche hierbei $P$ zerfällt, muß wenigstens eine die Beschaffenheit $\Upsilon$ haben (wegen der Voraussetzung 1), man wähle in gesetzmäßiger Weise eine von diesen Teilmengen und bezeichne sie mit $P_{(1)}$, den entsprechenden Teil von $H$, in welchem $P_{(1)}$ liegt, nennen wir $H_{(1)}$.

Nun zerlege man ebenso das Gebiet $H_{(1)}$ nach irgendeinem *Gesetze* in eine *endliche* Anzahl von $n$-dimensionalen Teilgebieten, in deren jedem sämtliche Distanzen kleiner sind als $\frac{1}{2}$; von den entsprechenden Teilmengen, in welche hierbei $P_{(1)}$ zerfällt, werde in gesetzmäßiger Weise *eine* genommen, die die Beschaffenheit $\Upsilon$ hat, wir nennen sie $P_{(2)}$, und den entsprechenden Teil von $H_{(1)}$, in welchem $P_{(2)}$ liegt, nennen wir $H_{(2)}$; so fahren wir fort und erhalten eine gesetzmäßige, *unendliche* Reihe von $n$-dimensionalen Teilgebieten

$$H_{(1)},\ H_{(2)},\ \ldots,\ H_{(\nu-1)},\ H_{(\nu)}\ \ldots,$$

von denen jedes in den vorhergehenden enthalten ist und wo sämtliche in $H_\nu$ vorkommenden Distanzen kleiner sind als $\frac{1}{\nu}$; gleichzeitig haben wir eine gesetzmäßige unendliche Reihe von Punktmengen

$$P_{(1)},\ P_{(2)},\ \ldots,\ P_{(\nu-1)},\ P_{(\nu)},\ \ldots,$$

von denen jede ein Bestandteil der vorhergehenden ist und stets die Beschaffenheit $\Upsilon$ hat; $P_{(\nu)}$ ist derjenige Bestandteil von $P$, welcher mit allen Punkten dem Gebiete $H_{(\nu)}$ angehört.

Nach einem bekannten Satze der arithmetischen Analysis gibt es nun einen *ganz bestimmten* Punkt $g$ von $H$, der *allen* den Teilgebieten $H_{(\nu)}$ *zugleich* angehört, und hieraus erkennt man leicht, daß dieser Punkt $g$ eine Lage hat, wie sie in unserem Theorem beschrieben worden ist.

Ich bemerke, daß die hier angewandte Beweismethode, welche wohl schwerlich durch eine wesentlich andere ersetzt werden kann, ihrem Kerne nach sehr alt ist; in neuerer Zeit findet man sie unter anderem in gewissen zahlentheoretischen Untersuchungen bei Lagrange, Legendre und Dirichlet, in Cauchy's *Cours d'analyse* (Note troisième) und in einigen Abhandlungen von Weierstraß und Bolzano; es scheint mir daher nicht richtig, sie vorzugsweise oder ausschließlich auf Bolzano zurückzuführen, wie solches in neuerer Zeit beliebt worden ist.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, daß unsere Beweismethode von einigen Geometern angegriffen wird. Die hierzu benutzten Argumente sind höchst subtil; sie haben viele in Verlegenheit gesetzt, eingeschüchtert und verwirrt, denen die Aufrechterhaltung der Beweisführung von größter Wichtigkeit gewesen wäre. Die vorgekommenen Einwände sind jedoch ihrem Wesen nach nicht neu, sondern haben die größte Ähnlichkeit mit jenen Paralogismen, die Zeno von Elea gebraucht hat, um die Möglichkeit der Bewegung oder der Vielheit der Dinge in Zweifel zu ziehen (vergl. Aristoteles, Physik VI, 9) Solche Erscheinungen lassen sich in fast jedem Zeitalter nachweisen; im siebenzehnten Jahrhundert beispielsweise lebte in Paris ein gewisser Chevalier de Méré, welcher durch seine *Sophismen* neben anderen Ursachen dazu beigetragen hat, einem der größten Geister Frankreichs, Pascal, die Beschäftigung mit der Mathematik völlig zu verleiden. Man findet hierüber sehr interessante Details in Bayle's Dictionnaire historique et critique, im Artikel über Zeno von Sidon (Schüler des Apollodorus, nicht zu verwechseln mit jenem Eleaten Zeno). Dieser Epikureische Philosoph ist durch ein Werk berühmt geworden, worin er die Gültigkeit der mathematischen Beweise angriff. Er erscheint daher als Vorläufer einer Richtung, welche sich heutzutage selbst „*Metamathematik*" nennt. Der Stoiker Posidonius hat gegen ihn ein Werk geschrieben, um seine wider die Mathematik gerichteten Angriffe zu nichte zu machen. Beide Bücher sind verloren gegangen.



Eine sehr umfassende *Klasse* von Punktmengen bilden diejenigen, welche die *erste* Mächtigkeit haben und die ich auch in den Nummern 1—4 *abzählbare* Mengen genannt habe. Die letztere Ausdrucksweise *kann* zwar im engeren Sinne auch ferner beibehalten werden, um diese Mengen von denen *höherer* Mächtigkeit zu unterscheiden, ich habe aber in Nr. 5 [hier S. 195f] *gezeigt* und *hervorgehoben*, daß man strenggenommen auch von den Mengen *zweiter*, *dritter* oder *höherer* Mächtigkeit *immer sagen kann*, sie seien *abzählbar*; der *Unterschied* ist nur der, daß, während die Mengen *erster* Mächtigkeit nur *durch* (*mit Hilfe von*) Zahlen der *zweiten* Zahlenklasse abgezählt werden können, die Abzählung bei Mengen *zweiter* Mächtigkeit *nur durch* Zahlen der *dritten* Zahlenklasse, bei Mengen *dritter* Mächtigkeit *nur* durch Zahlen der *vierten* Zahlenklasse u. s. w. erfolgen kann.

Denkt man sich *beispielsweise* den Inbegriff $(\varphi)$ aller rationalen Zahlen, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$, nach dem in Crelles J. Bd. 84, S. 250 [hier III 1, S. 115] angegebenen Gesetze in die Form einer einfach unendlichen Reihe

$$(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_\nu,\ \ldots)$$

gebracht, so bildet er in dieser Form eine „*wohlgeordnete Menge*", deren *Anzahl* nach den Definitionen von [S. 147 und 195] gleich $\omega$ ist.

Schreibt man aber denselben Inbegriff etwa in den beiden anderen *Formen wohlgeordneter* Mengen

$$(\varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_{\nu+1},\ \ldots,\ \varphi_1),$$

$$(\varphi_1,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_{2\nu-1},\ \ldots,\ \varphi_2,\ \varphi_4,\ \ldots,\ \varphi_{2\nu},\ \ldots),$$

so kommen ihm in *bezug* auf diese Formen resp. die *Anzahlen* $\omega + 1$ und $2\,\omega$ zu; und wenn $\alpha$ irgendeine Zahl der *zweiten* Zahlenklasse ist, so lassen sich unzählig viele *wohlgeordnete* Mengen denken, die ihrem *Bestande* nach völlig übereinstimmen und zusammenfallen mit dem Inbegriffe $(\varphi)$, aber ihrer *Form* nach die *vorgeschriebene* Zahl $\alpha$ zur *Anzahl* haben.

Durch Umformung einer *wohlgeordneten* Menge wird, wie ich dies in Nr. 5 wegen seiner Wichtigkeit wiederholt hervorgehoben habe, *nicht* ihre *Mächtigkeit* geändert, wohl aber kann dadurch ihre *Anzahl* eine andere werden.

Ganz ebenso läßt sich irgendeine Menge $(\psi)$ der *zweiten Mächtigkeit zunächst* in die Form einer wohlgeordneten Menge:

$$(\psi_\omega,\ \psi_{\omega+1},\ \ldots,\ \psi_\alpha,\ \ldots)$$

bringen, worin $\alpha$ sämtliche Zahlwerte der *zweiten* Zahlenklasse anzunehmen hat; in *dieser* Form ist ihre *Anzahl* gleich $\Omega$, wo $\Omega$ die *erste* d. h. *kleinste* Zahl der *dritten* Zahlenklasse ist; *dieselbe* Menge $(\psi)$ läßt sich aber auch, wenn A *irgend* eine *vorgegebene* Zahl der *dritten* Zahlenklasse ist, auf unzählig viele Weisen in die Form einer *wohlgeordneten Menge* bringen, welche *durch* die Zahl A *abgezählt* wird, u. s. w.

Die Frage, durch *welche* Umformungen einer wohlgeordneten Menge ihre Anzahl *geändert* wird, durch welche *nicht*, läßt sich einfach so beantworten, daß diejenigen und nur diejenigen Umformungen die Anzahl *ungeändert* lassen, welche sich zurückführen lassen auf eine endliche oder unendliche Menge von Transpositionen, d. h. von *Vertauschungen je zweier Elemente*. —

Ich will nun zwei Sätze über Punktmengen *erster* Mächtigkeit formulieren, welche in der Mengenlehre häufig angewandt werden:

Theorem II. *Ist eine im unendlichen Raume $G_n$ verbreitete Punktmenge $P$ so beschaffen, daß, wenn $H$ irgendein ganz im Endlichen befindlicher Teil von $G_n$ ist, der zu $H$ gehörige Bestandteil von $P$ endlich ist oder die erste Mächtigkeit besitzt, so hat auch $P$ selbst die erste Mächtigkeit (es sei denn, daß $P$ endlich ist).*

Der Beweis kann auf verschiedene Weisen dadurch geführt werden, daß man $G_n$ in eine unendliche Anzahl von gesonderten $n$-dimensionalen Teilen

$$H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_\nu,\ \ldots$$

zerlegt, von denen jeder ganz im Endlichen liegt; dadurch zerfällt $P$ in eine unendliche Anzahl von Teilmengen

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_\nu,\ \ldots;$$

da jede von diesen entweder endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist, so gilt ein gleiches von ihrer Zusammenfassung, welche nichts anderes als $P$ ist. Vgl. Nr. 3 [hier S. 152].

Theorem III. *Es sei $Q$ irgendeine Punktmenge innerhalb $G_n$, $Q^{(1)}$ ihre erste Ableitung und $R$ eine Punktmenge, welche mit $Q$ und ebenso mit $Q^{(1)}$ keinen Punkt gemeinsam und außerdem eine solche Beschaffenheit hat, daß, wenn $H$ irgendein Teil von $G_n$ ist, der weder Punkte von $Q$ noch Punkte von $Q^{(1)}$ enthält, alsdann der zum Gebiete $H$ gehörige Bestandteil von $R$ endlich ist oder die erste Mächtigkeit hat, dann ist auch $R$ selbst endlich oder von der ersten Mächtigkeit.*

Beweis. Sei $\varrho$ irgendeine positive Größe; um jeden Punkt $q$ von $\mathfrak{M}(Q, Q^{(1)})$ als Mittelpunkt werde eine $n$-dimensionale Vollkugel $K(q, \varrho)$ gedacht, wobei wir die $(n-1)$-dimensionale Grenze derselben zu ihr mitrechnen. Diese sämtlichen Vollkugeln $K(q, \varrho)$ können teilweise in einander eindringen, bestimmen jedoch in ihrer *Gesamtheit* einen *gewissen* zusammenhängenden oder nicht zusammenhängenden $n$-dimensionalen Teil des Raumes $G_n$; diesen Teil, nach der Ausdrucksweise von Nr. 2 d. Abh. [hier S. 145], das *kleinste gemeinschaftliche Multiplum* aller $K(q, \varrho)$ bei festem $\varrho$, in Zeichen $\mathfrak{M}(K(q, \varrho))$, wollen wir $\Pi(\varrho)$ und die Differenz $G_n - \Pi(\varrho)$ wollen wir $H(\varrho)$ nennen. $H(\varrho)$



enthält alsdann weder Punkte von $Q$ noch solche von $Q^{(1)}$; ist $\varrho' < \varrho$ so ist immer $H(\varrho)$ ein Bestandteil von $H(\varrho')$.

Unter Umständen kann $H(\varrho)$ gleich Null sein, man sieht aber in unserm Falle, wo $R$ von Null verschieden ist und weder mit $Q$ noch mit $Q^{(1)}$ Punkte gemein hat, daß, wenn $\varrho$ unter eine gewisse Grenze der Kleinheit sinkt, $H(\varrho)$ ein von Null verschiedener, $n$-dimensionaler Teil von $G_n$ ist, dem seiner Definition nach seine *Grenze* nicht zugehörig anzusehen ist.

Man erkennt aber auch ferner, daß, wenn $r$ *irgend* ein Punkt von $R$ ist, alsdann durch hinreichende Verkleinerung von $\varrho$ immer bewirkt werden kann, daß dieser Punkt $r$ zum Gebiete $H(\varrho)$ gehört. Denn da $R$ keinen Punkt mit $Q$ und $Q^{(1)}$ gemeinsam hat, so können an $r$ Punkte von $Q$ nicht beliebig nahe herantreten. Bezeichnet man daher mit $\varepsilon(r)$ die *untere* Grenze der Entfernungen zwischen $r$ und den Punkten von $Q$, *so ist $\varepsilon(r)$ von Null verschieden.*

Nimmt man nun $\varrho < \varepsilon(r)$, so muß notwendig der Punkt $r$ außerhalb des Gebietes $\Pi(\varrho)$ liegen und daher zum Gebiete $H(\varrho)$ gehören. Man denke sich nun folgende unendliche Reihe von Raumgebieten:

$$H(1),\quad \left(H\left(\tfrac{1}{2}\right) - H(1)\right),\quad \left(H\left(\tfrac{1}{3}\right) - H\left(\tfrac{1}{2}\right)\right),\ \ldots,$$
$$\left(H\left(\tfrac{1}{\nu}\right) - H\left(\tfrac{1}{\nu-1}\right)\right),\ \ldots,$$

so wird nach dem soeben Bewiesenen jeder Punkt $r$ von $R$ einem *ganz bestimmten* von diesen Gebieten angehören. Der Bestandteil $R_\nu$ von $R$, welcher einem beliebigen Gliede dieser Reihe

$$\left(H\left(\tfrac{1}{\nu}\right) - H\left(\tfrac{1}{\nu-1}\right)\right)$$

angehört, ist, weil das Gebiet

$$H\left(\tfrac{1}{\nu}\right) - H\left(\tfrac{1}{\nu-1}\right)$$

keinen Punkt von $Q$ oder $Q^{(1)}$ enthält, der *Voraussetzung* unseres Theorems gemäß, *endlich* oder von der *ersten Mächtigkeit*. Folglich ist auch $R$, d. h. die Gesamtheit der Punkte von $R_1, R_2, \ldots, R_\nu, \ldots$ *endlich* oder *von der ersten Mächtigkeit*, w. z. b. w.

§ 16.

Theorem A. *Eine in einem stetigen, $n$-dimensionalen Gebiete $G_n$ enthaltene Punktmenge $P$ kann, wenn sie von der ersten Mächtigkeit ist, nie eine perfekte Punktmenge sein*[1].

---

[1] Man vgl. Acta math. 2, 409. [Hier III 5, S. 247].

Beweis. Unter einer *perfekten* Punktmenge in einem stetigen Gebiete $G_n$ verstehe ich eine Menge $S$ von solcher Beschaffenheit, daß ihre *erste Ableitung* $S^{(1)}$ völlig mit ihr identisch ist, so daß

$$S^{(1)} \equiv S .$$

Infolgedessen ist auch *jede* höhere Ableitung $S^{(\alpha)}$ von $S$ mit $S$ identisch.

Ist also $s$ *irgend* ein Punkt einer *perfekten* Menge $S$, so ist $s$ gleichzeitig ein *Grenzpunkt* von $S$ und ist $s'$ *irgend* ein *Grenzpunkt* von $S$, d. h. irgendein *Punkt* von $S^{(1)}$, so ist $s'$ gleichzeitig auch ein *zu $S$ gehöriger Punkt*. —

Dies vorausgeschickt sei $P$ irgendeine Punktmenge *erster Mächtigkeit* innerhalb des Gebietes $G_n$, so können wir uns die sämtlichen Punkte $p$ von $P$ in die Form

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots$$

einer einfach unendlichen Reihe $(p_\nu)$ gebracht denken. Um nun zu zeigen, daß $P$ *nicht* eine *perfekte* Menge sein kann, wollen wir voraussetzen, daß *jeder* Punkt $p_\nu$ von $P$ ein *Grenzpunkt* von $P$ ist, und *alsdann beweisen*, daß immer gewisse andere *Grenzpunkte* $p'$ von $P$ vorkommen müssen, die nicht zugleich *Punkte* von $P$ sind, oder, was dasselbe ist, die mit keinem der Punkte $p_\nu$ zusammenfallen. Hiermit wird unser Theorem vollkommen bewiesen sein; denn wäre $P$ eine *perfekte* Menge, so müßte *nicht nur* jeder Punkt $p_\nu$ von $P$ ein *Grenzpunkt* von $P$ sein, sondern es müßte auch umgekehrt *jeder Grenzpunkt* $p'$ von $P$ ein zu $P$ gehöriger Punkt $p_\nu$ sein.

Man nehme $p_1$ zum Mittelpunkt eines *sphärischen Gebildes* von $(n-1)$ Dimensionen innerhalb $G_n$ und gebe demselben den Radius $\varrho_1 = 1$; wir wollen dieses sphärische Gebilde mit $K_1$ bezeichnen. Von allen Punkten der Reihe $(p_\nu)$, welche auf $p_1$ folgen, sei $p_{i_1}$ der erste (d. h. mit dem kleinsten Index versehene) von allen, die in das *Innere* der Sphäre $K_1$ fallen; daß solche Punkte in unzähliger Menge in der Reihe $(p_\nu)$ vorkommen, ist deshalb notwendig, weil unserer obigen Voraussetzung nach $p_1$ ein Grenzpunkt der Menge $(p_\nu)$ ist.

Wir bezeichnen mit $\sigma_1$ den *Abstand* der beiden Punkte $p_1$ und $p_{i_1}$ und nehmen $p_{i_1}$ zum Mittelpunkt einer *zweiten* Sphäre $K_2$, deren Radius $\varrho_2$ durch die Bedingung bestimmt ist, *gleich* der *kleinsten* von den beiden Größen

$$\frac{1}{2}\sigma_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\varrho_1 - \sigma_1)$$

zu sein.

Es liegt alsdann die Sphäre $K_2$ *ganz* im *Innern* von $K_1$, und die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{i_1-1}$ der Reihe $(p_\nu)$ liegen offenbar sämtlich *außerhalb* der Sphäre $K_2$; wir heben ferner hervor, dass der Radius $\varrho_2$ von $K_2$ kleiner ist als $\frac{1}{2}$.

Ebenso sei $p_{i_2}$ der erste unter den auf $p_{i_1}$ folgenden Punkten der Reihe $(p_\nu)$, welcher in das *Innere* der Sphäre $K_2$ fällt; solcher Punkte von $(p_\nu)$, die in das Innere der Sphäre $K_2$ fallen, gibt es nämlich unendlich viele, weil der Mittelpunkt $p_{i_1}$ von $K_2$ ein *Grenzpunkt* der Menge $(p_\nu)$ sein soll; den *Abstand* der beiden Punkte $p_{i_1}$ und $p_{i_2}$ nennen wir $\sigma_2$ und nehmen $p_{i_2}$ zum *Mittelpunkt* einer *dritten Sphäre* $K_3$, deren Radius $\varrho_3$ die *kleinste* von den beiden Größen

$$\frac{1}{2}\sigma_2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\varrho_2 - \sigma_2)$$

ist. Die Sphäre $K_3$ fällt alsdann *ganz* in das *Innere* der Sphäre $K_2$, und die Punkte

$$p_1, p_2, \ldots, p_{i_2-1}$$

der Reihe $(p_\nu)$ sind alle *außerhalb* der Sphäre $K_3$ gelegen; der Radius $\varrho_3$ von $K_3$ ist offenbar kleiner als $\frac{1}{4}$.

Nach dem schon hieraus sichtbaren Gesetze wird eine *unendliche* Reihe von Sphären

$$K_1, K_2, \ldots, K_\nu, \ldots$$

erhalten, die in Beziehung steht zu einer bestimmten unendlichen Reihe von *wachsenden ganzen* Zahlen

$$1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_\nu < i_{\nu+1} < \cdots$$

Jede Sphäre $K_\nu$ fällt *ganz* in das *Innere* der vorangehenden Sphäre $K_{\nu-1}$.

Das *Zentrum* $p_{i_\nu}$ der Sphäre $K_\nu$ ist definiert als der erste in der Reihe $(p_\nu)$ *auf $p_{i_{\nu-1}}$ folgende Punkt*, der in das Innere der Sphäre $K_{\nu-1}$ zu liegen kommt (wobei wieder zu bemerken ist, daß $p_{i_{\nu-1}}$, der Mittelpunkt von $K_{\nu-1}$, ein *Grenzpunkt* von $P$ ist); der Radius $\varrho_\nu$ der Sphäre $K_\nu$ ist definiert als die *kleinste* von beiden Größen

$$\frac{1}{2}\sigma_{\nu-1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\varrho_{\nu-1} - \sigma_{\nu-1}),$$

wobei $\sigma_{\nu-1}$ die *Distanz* der beiden Punkte $p_{i_{\nu-1}}$ und $p_{i_\nu}$ ist.

Die Punkte $p_1, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{\nu-1}}$ fallen, wie man leicht sieht [2], *außerhalb* der Sphäre $K_\nu$, und man hat

$$\varrho_\nu \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}} .$$

Es werden daher die Radien der Sphären $K_\nu$ *mit wachsendem $\nu$ unendlich klein*; hieraus, und weil immer $K_\nu$ *ganz* in das Innere von $K_{\nu-1}$ fällt, folgt nach einem bekannten Hauptsatze der Größenlehre, daß die Mittelpunkte $p_{i_\nu}$ der Sphäre $K_\nu$ mit wachsendem $\nu$ gegen einen bestimmten Grenzpunkt konvergieren, den wir $p'$ nennen wollen, so daß

$$\lim_{\nu=\omega}(p_{i_\nu}) = p'.$$

$p'$ ist offenbar ein *Grenzpunkt* von $P$, weil die Punkte $p_{i_\nu}$ sämtlich zu $P$ gehören. Andrerseits überzeugt man sich aber, daß $p'$ *nicht als Punkt zu $P$ gehören kann*; denn sonst würde für einen gewissen Wert des Index $n$ die Gleichung statthaben

$$p' = p_n;$$

sie ist aus dem Grunde *unmöglich*, weil $p'$ in das *Innere* der Sphären $K_\nu$ fällt, wie groß auch $\nu$ sei, dagegen $p_n$ *außerhalb* der Sphären $K_\nu$ liegt, sobald nur $\nu > n$ genommen wird.

Auf solche Weise haben wir gezeigt, daß eine Punktmenge $P$ von der *ersten Mächtigkeit niemals* eine *perfekte* Menge sein kann.

Theorem B. *Ist $\alpha$ irgendeine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse und $P$ innerhalb $G_n$ eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, daß*

$$P^{(\alpha)} \equiv 0\,,$$

*so ist $P^{(1)}$ sowohl wie auch $P$ von der ersten Mächtigkeit, es sei denn, daß $P$ resp. $P^{(1)}$ endliche Mengen sind.*

Beweis. Die *erste* Ableitung einer Punktmenge $P$ ist eine bestimmte neue Menge $P^{(1)}$, nämlich die Menge *aller* Grenzpunkte von $P$; unter der *zweiten* Ableitung $P^{(2)}$ von $P$ verstanden wir die *erste* Ableitung von $P^{(1)}$ und allgemein unter der $\nu^{\text{ten}}$ Ableitung $P^{(\nu)}$ die *erste* Ableitung von $P^{(\nu-1)}$.

Die Ableitung $P^{(2)}$ ist, wie leicht zu sehen, stets mit allen ihren Punkten in $P^{(1)}$ enthalten und allgemein ist $P^{(\nu)}$ ein *Bestandteil* aller Ableitungen $P^{(1)}$, $P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu-1)}$, welche ihr vorangehen.

Wir sahen aber auch, daß die *für die Erforschung der Natur einer Punktmenge $P$ so wichtige Begriffsbildung* von Ableitungen verschiedener Ordnung durch die soeben erwähnten Ableitungen mit *endlicher* Ordnungszahl $\nu$ *keineswegs* ihren Abschluß findet, daß es vielmehr im allgemeinen *notwendig* ist, aus $P$ *abgeleitete* Mengen mit in die Betrachtung zu ziehen, welche sich *naturgemäß* als Ableitungen der Menge $P$ auffassen lassen, deren *Ordnungen* durch bestimmte *transfinite* Zahlen der *zweiten, dritten* Zahlenklasse u. s. w. charakterisiert werden.

In Wirklichkeit stellt sich zwar, wie aus den später folgenden Theoremen aufs bestimmteste hervorgehen wird, die Sache so, daß bei den Punktmengen innerhalb eines beliebigen Gebietes $G_n$ strenggenommen nur diejenigen *Ableitungen* eine Rolle spielen, deren Ordnungszahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse angehört. Es zeigt sich nämlich die *höchst merkwürdige* Tatsache, daß für *jede* Punktmenge $P$ *von einer gewissen Ordnungszahl* $\alpha$ an, welche der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse, jedoch *keiner* höheren Zahlenklasse angehört, die Ableitung $P^{(\alpha)}$ entweder 0 oder eine *perfekte* Menge wird; daraus folgt, daß die Ableitungen höherer Ordnung als $\alpha$ mit der Ableitung $P^{(\alpha)}$ sämtlich identisch sind, ihre Inbetrachtnahme daher *überflüssig* wird.

Nichtsdestoweniger sind wir imstande, formell (d. h. dem Begriffe nach) Ableitungen einer Punktmenge $P$ zu definieren, deren Ordnungszahlen *beliebig hohen* Zahlenklassen angehören, vorausgesetzt, daß diese Zahlenklassen vorher ordnungsmäßig definiert sind. — Die Begriffe der Ableitungen mit *transfiniter* Ordnungszahl ergeben sich *sukzessive in derselben Folge wie die transfiniten Zahlen selbst.*



Zunächst erhält man

$$P^{(\omega)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)},\ P^{(2)},\ \ldots,\ P^{(\nu)},\ \ldots),$$

wo das Zeichen $\mathfrak{D}$ die Bedeutung hat, welche ich ihm [hier S. 145] gegeben habe.

Sodann erhalten wir $P^{(\omega+1)}$ als die erste Ableitung von $P^{(\omega)}$, $P^{(\omega+2)}$ als die erste Ableitung von $P^{(\omega+1)}$ u. s. w. Ist $\gamma$ *irgendeine transfinite* Zahl der *zweiten* oder einer *höheren* Zahlenklasse, so gründet sich der Begriff $P^{(\gamma)}$ auf die Begriffe der Ableitungen von *niedrigerer* Ordnung als $\gamma$ wie folgt: ist $\gamma$ eine transfinite Zahl der *ersten* Art, d. h. eine solche Zahl, welche einen ihr *nächst kleineren* Nachbar hat, den wir $\gamma_{-1}$ nennen, so ist $P^{(\gamma)}$ definiert als die *erste Ableitung* von $P^{(\gamma_{-1})}$; ist hingegen $\gamma$ eine transfinite Zahl der *zweiten* Art, d. h. eine solche Zahl, welche in der Reihe der ganzen Zahlen *keinen nächst vorangehenden* Nachbar hat (wie beispielsweise die Zahlen $\omega$, $\omega^{\omega}$ oder $\omega^{\omega^{\omega}} + \omega^2$), so geschieht die Definition von $P^{(\gamma)}$ mittelst der Formel

$$P^{(\gamma)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)},\ P^{(2)},\ \ldots,\ P^{(\gamma')},\ \ldots),$$

worin $\gamma'$ alle ganzen Zahlenwerte, die *kleiner* sind als $\gamma$, zu erhalten hat.

Jedes $P^{(\gamma)}$ wird daher ein bestimmter *Bestandteil* von $P^{(\gamma')}$, falls $\gamma' < \gamma$, so daß unter letzterer Voraussetzung die Differenz

$$P^{(\gamma')} - P^{(\gamma)}$$

gleichfalls die Bedeutung einer bestimmten in $P^{(1)}$ enthaltenen Punktmenge hat, nämlich derjenigen Menge, welche übrigbleibt, wenn man von $P^{(\gamma')}$ die sämtlichen der Menge $P^{(\gamma)}$ angehörigen Punkte entfernt.

Aus diesen Erklärungen ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit folgender Gleichung, die gültig ist für jede Zahl $\gamma$, mag diese endlich oder überendlich sein:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma'} (P^{(\gamma')} - P^{(\gamma'+1)}) + P^{(\gamma)}, \tag{1}$$

wo $\gamma'$ einen veränderlichen Index bedeutet, der alle ganzzahligen Werte von 1 an zu erhalten hat, die kleiner sind als die *gegebene* Zahl $\gamma$.

Dies alles vorausgeschickt, sei nun $\alpha$ irgendeine ganze Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse und $P$ eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, daß

$$P^{(\alpha)} \equiv 0\,.$$

Es soll gezeigt werden, daß $P^{(1)}$ und daher auch $P$ (vgl. hier S. 159) von der *ersten* Mächtigkeit sind.

Zu dem Ende wenden wir obige Formel (1) an, indem wir darin $\gamma = \alpha$ voraussetzen, und haben

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}),$$

wo $\alpha'$ ein veränderlicher Index ist, der alle ganzen Zahlen von 1 an zu durchlaufen hat, die *kleiner* sind als $\alpha$.

Das auf der *rechten* Seite eigentlich noch hinzukommende Glied $P^{(\alpha)}$ fällt hier nämlich fort, weil es gleich 0 *vorausgesetzt* ist.

*Jedes* Glied unserer Summe auf der Rechten

$$P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}$$

bildet eine *isolierte* Menge [vgl. hier S. 158] und ist *daher*, wie an der soeben zitierten Stelle gezeigt worden ist, falls sie aus unendlich viel Punkten besteht, von der *ersten Mächtigkeit*.

Der *Inbegriff aller* Glieder unserer Summe ist gleichfalls (falls er nicht *endlich* ist) von der *ersten* Mächtigkeit, weil nach der Definition der *zweiten* Zahlenklasse der Inbegriff aller Zahlen $\alpha'$, welche kleiner sind als eine *bestimmte* transfinite Zahl $\alpha$ der zweiten Zahlenklasse die *erste* Mächtigkeit hat. [Vgl. hier S. 198.]

Achtet man nun auf den [S. 152] angeführten Satz, so folgt aus dem eben Gesagten unmittelbar, daß $P^{(1)}$ und daher auch $P$ von der *ersten Mächtigkeit* ist, falls diese Mengen nicht aus einer *endlichen* Anzahl von Punkten bestehen.

Theorem C. *Ist $P$ eine innerhalb $G_n$ gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, daß ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ von der ersten Mächtigkeit ist, so gibt es immer Zahlen $\gamma$ der ersten oder zweiten Zahlenklasse derart, daß $P^{(\gamma)}$ gleich Null wird, und von allen solchen Zahlen $\gamma$ gibt es eine kleinste $\alpha$.*

Beweis. In der Formel (1) von § 16 werde die Zahl $\gamma = \Omega$ gesetzt, wo unter $\Omega$ die *kleinste* Zahl der *dritten* Zahlenklasse verstanden wird. [Man vgl. hier S. 200].

Man hat alsdann

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\Omega)}, \tag{2}$$

worin der Buchstabe $\gamma$ *alle* Zahlen der *ersten* und *zweiten* Zahlenklasse durchläuft.

In unserem Theorem wird vorausgesetzt, daß $P^{(1)}$ von der *ersten* Mächtigkeit sei; infolgedessen sind alle höheren Ableitungen $P^{(\gamma)}$, *weil* sie in $P^{(1)}$ *aufgehen*, gleichfalls von der *ersten* Mächtigkeit, wofern sie nicht aus einer *endlichen* Anzahl von Punkten bestehen; es kann daher die Differenz

$$P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}$$

nicht anders gleich Null werden, als indem $P^{(\gamma)}$ und daher auch $P^{(\gamma+1)}$ Null werden; denn im andern Falle wäre $P^{(\gamma)}$, wegen

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\gamma+1)}$$

eine *perfekte* Menge, was dem *Satze A* widersprechen würde.



Wären daher sämtliche Ableitungen $P^{(\gamma)}$, wie hoch wir auch $\gamma$ innerhalb der *ersten* oder der *zweiten* Klasse annehmen, von Null verschieden, so würden auch sämtliche Glieder

$$P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}$$

der Summe auf der Rechten unserer Gleichung (2) von Null verschieden sein.

Der Inbegriff *aller* dieser Glieder, oder, was dasselbe bedeutet, der Inbegriff aller *ganzen* Zahlen der *ersten* und *zweiten* Zahlenklasse zusammengenommen hat die *zweite* Mächtigkeit. [Man vgl. hier S. 199.] Wir würden daher auf der rechten Seite unserer Gleichung (2) eine Punktmenge stehen haben, die sicherlich von *höherer* Mächtigkeit wäre als die linke Seite unserer Gleichung, welche der Voraussetzung nach von der *ersten* Mächtigkeit ist.

Es führt also die Annahme, daß sämtliche Ableitungen $P^{(\gamma)}$ (unter $\gamma$ eine Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse verstanden) von Null verschieden seien, zu einem *offenbaren* Widerspruche mit der Voraussetzung, daß $P^{(1)}$ die erste Mächtigkeit hat.

Daher *muß* es Zahlen $\gamma$ der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse geben, so daß

$$P^{(\gamma)} \equiv 0,$$

und von allen solchen Zahlen $\gamma$ muss es eine kleinste $\alpha$ geben, weil der *allgemeine* Satz besteht, daß in jedem *irgendwie definierten Inbegriffe* von ganzen Zahlen, die der ersten oder zweiten (oder auch einer höheren) Zahlenklasse angehören, ein *Minimum*, d. h. eine Zahl vorhanden sein muß, die *kleiner* ist als alle übrigen Zahlen desselben Inbegriffes. [Man vgl. hier S. 200.]

Theorem D. *Ist $P$ eine innerhalb $G_n$ gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, daß ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, so gibt es immer Punkte, welche allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich angehören, wo $\alpha$ irgendeine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse ist, und der Inbegriff aller dieser Punkte, der nichts anderes ist als $P^{(\Omega)}$, ist stets eine perfekte Punktmenge.*

Beweis. Daß es immer unter der gemachten Voraussetzung über $P^{(1)}$ solche Punkte gibt, die gleichzeitig allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ angehören, erkennt man aus Th. I in § 15 [S. 211], wenn man außerdem Theorem B dieses Paragraphen berücksichtigt. Infolge des letzteren hat nämlich $P$ die Beschaffenheit, daß alle ihre Ableitungen $P^{(\alpha)}$, wie hoch wir auch $\alpha$ in der zweiten Zahlenklasse annehmen, *von Null verschieden sind*. Diese Beschaffenheit von $P$ genügt den *beiden* Voraussetzungen einer Beschaffenheit, welche in Theorem I durch den Buchstaben $\Gamma$ bezeichnet wurde; folglich gibt es nach diesem Satze *wenigstens* einen Punkt, wir wollen ihn $s$ nennen, von solcher Lage, daß wenn wir ihn zum Mittelpunkte einer Vollkugel $K(\varrho)$ mit dem Radius $\varrho$ nehmen, der *Bestandteil* $P(\varrho)$ von $P$, welcher in diese Vollkugel fällt, ebenfalls die Beschaffenheit hat, daß alle seine Ableitungen $P^{(\alpha)}(\varrho)$

von Null verschieden sind, wie klein auch $\varrho$ gewählt werden möge; ist daher $\alpha$ irgendeine ganze, zur ersten oder zweiten Zahlenklasse gehörige Zahl, so ist (da $P^{(\alpha)}(\varrho)$ ein Bestandteil von $P^{(\alpha)}$ und da es somit in jeder Nähe von $s$ Punkte von $P^{(\alpha)}$ gibt) $s$ ein *Grenzpunkt* von $P^{(\alpha)}$, also ein *Punkt* von $P^{(\alpha+1)}$; nun ist aber $P^{(\alpha+1)}$ ein Bestandteil von $P^{(\alpha)}$, daher also auch $s$ ein Punkt von $P^{(\alpha)}$. Der Punkt $s$ gehört also *allen* Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich an.

Fassen wir nun den Inbegriff $S = P^{(\Omega)}$ aller Punkte $s$ ins Auge, welche sämtlichen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich angehören, so überzeugt man sich leicht, daß dieser Inbegriff $S$ eine *perfekte* Menge bildet. In der Tat muß jeder Punkt $s$ von $S$ ein Grenzpunkt von $S$ sein. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man um $s$ als Mittelpunkt eine Vollkugel $K(\varrho, s)$ mit hinreichend kleinem Radius $\varrho \leqq \varepsilon$ legen, so daß der Teil $P^{(1)}(\varrho, s)$ von $P^{(1)}$, welcher dieser Vollkugel angehört, eine Ableitung $P^{(\Omega)}(\varrho, s)$ hat, die aus dem einzigen Punkte $s$ besteht; es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ eine Reihe von abnehmenden, beliebig klein werdenden Größen, welche alle kleiner sind als $\varepsilon$, so daß dem soeben gemeinten $\varrho$ nach einander die Werte $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ gegeben werden können; man hat alsdann

$$\begin{aligned} P^{(1)}(\varepsilon, s) \equiv s + (P^{(1)}(\varepsilon, s) - P^{(1)}(\varepsilon_1, s)) + (P^{(1)}(\varepsilon_1, s) - P^{(1)}(\varepsilon_2, s)) + \cdots \\ + (P^{(1)}(\varepsilon_{\nu-1}, s) - P^{(1)}(\varepsilon_\nu, s)) + \cdots. \end{aligned} \tag{3}$$

Jedes der einzelnen Glieder auf der rechten Seite ist nun endlich oder von der ersten Mächtigkeit; denn die Menge

$$P^{(1)}(\varepsilon_{\nu-1}, s) - P^{(1)}(\varepsilon_\nu, s) = Q_\nu$$

ist so beschaffen, daß $Q_\nu^{(\Omega)}$ gleich Null ist, weil sonst in das Innere der Vollkugeln $K(\varrho, s)$ $(\varrho \leqq \varepsilon)$ außer $s$ noch andere Punkte von $S$ fallen würden; $Q_\nu$ kann daher nach dem vorher Bewiesenen keine höhere Mächtigkeit haben als die *erste*.

Es müßte also auch wegen (3) $P^{(1)}(\varepsilon, s)$ von keiner höheren als der ersten Mächtigkeit sein, was aber nach Theorem $C$ unverträglich damit ist, daß $P^{(\Omega)}(\varepsilon, s)$ von Null verschieden, nämlich gleich $s$ ist.

Wir sehen daher, daß jeder Punkt $s$ von $S$ ein *Grenzpunkt* von $S$ ist.

Es ist aber auch jeder Grenzpunkt $s'$ von $S$ ein Punkt von $S$, weil $P^{(\Omega+1)}$ ein Bestandteil von $P^{(\Omega)}$ ist.

Somit ist gezeigt, daß $S = P^{(\Omega)}$ eine *perfekte* Menge ist.

Theorem E. *Ist $P$ eine innerhalb $G_n$ gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, daß ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, und ist $S = P^{(\Omega)}$ die perfekte Menge, deren Existenz in Theorem D ausgesprochen ist, so ist die Differenz*

$$R \equiv P^{(1)} - S$$

*stets eine Punktmenge von höchstens der ersten Mächtigkeit, und wir können daher stets und nur auf eine Weise $P^{(1)}$ in zwei Bestandteile $R$ und $S$ zerlegen, so daß*



$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

*wo $S$ eine perfekte Punktmenge und $R$ eine Punktmenge ist, die entweder endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist.*

Beweis. Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, brauchen wir nur das Theorem III in § 15 und das soeben bewiesene Theorem D anzuwenden. Es hat hier nämlich $R$ ihrer Bedeutung nach *keinen* Punkt mit $S$ gemein und mithin, da $S^{(1)} \equiv S$, auch keinen Punkt mit $S^{(1)}$ gemein.

Wenn wir ferner irgendeinen stetigen Teil $H$ von $G_n$ betrachten, der keinen Punkt von $S$ und mithin auch keinen Punkt von $S^{(1)} \equiv S$ enthält, so muß die Teilmenge von $R$, wir wollen sie $\overline{R}$ nennen, welche dem Gebiete $H$ angehört, endlich oder von der ersten Mächtigkeit sein; denn wäre $\overline{R}$ von einer höheren als der ersten Mächtigkeit, so wäre nach Theorem $D$ die Menge $\overline{R}^{(\Omega)}$ von Null verschieden und es müßten also, da $\overline{R}$ ein Bestandteil von $P^{(1)}$ und folglich $\overline{R}^{(\Omega)}$ ein Bestandteil von $P^{(\Omega)} \equiv S$ ist, in dem Gebiete $H$ Punkte der Menge $S$ liegen, was unserer Voraussetzung nach nicht der Fall ist.

Es treffen also für unsere Menge $R$ alle diejenigen Annahmen zu, welche im Theorem III in § 15 in bezug auf die dort mit demselben Buchstaben $R$ bezeichnete Menge gemacht worden sind, wobei wir nur an Stelle der dort mit $Q$ bezeichneten Menge unsere Menge $S$ zu setzen haben.

Wir schließen daher mit Hilfe von Theorem III, § 15, daß unsere Menge $R$ höchstens von der *ersten* Mächtigkeit ist, was zu beweisen war.

Theorem F. *Ist $P$ innerhalb $G_n$ eine beliebige Punktmenge von solcher Beschaffenheit, daß ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, so gibt es stets eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenklasse zugehörige Zahl $\alpha$, so daß*

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\alpha+1)},$$

*und es ist folglich bereits die $\alpha^{\text{te}}$ Ableitung von $P$, d. i. $P^{(\alpha)}$ gleich der perfekten Menge $P^{(\Omega)} \equiv S$.*

Beweis. Nach dem Vorhergehenden ist

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

wo $R$ von der *ersten* Mächtigkeit und $S$ gleich der perfekten Menge $P^{(\Omega)}$ ist.

Nach Formel (2) dieses Paragraphen [S. 220] ist aber auch

$$P^{(1)} \equiv \sum_\gamma (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\Omega)}.$$

Vergleichen wir diese beiden Ausdrücke von $P^{(1)}$ und berücksichtigen, daß $P^{(\Omega)} \equiv S$, so ergibt sich für $R$ der Ausdruck:

$$R \equiv \sum_\gamma (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}). \tag{4}$$

wo der Buchstabe $\gamma$ *alle* Zahlen der *ersten* und *zweiten* Zahlenklasse zu durchlaufen hat.

Da $R$ von der *ersten* Mächtigkeit ist, dagegen die Menge der Glieder auf der rechten Seite von (3) die *zweite Mächtigkeit* hat [vgl. Nr. 5 § 12, S. 197], so schließen wir, daß es eine *kleinste* der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse angehörige Zahl $\alpha$ geben muß, so daß

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\alpha+1)}.$$

Hieraus folgt, daß $P^{(\alpha)}$ eine perfekte und daher mit $P^{(\Omega)} \equiv S$ zusammenfallende Menge ist.

Diese Sätze A, B, C, D, E, F sowohl, wie die hier entwickelten Beweise derselben waren mir zur Zeit der Abfassung von Nr. 5 dieser Abhandlung bekannt; indessen bin ich dort bei der Formulierung des Satzes E, auf S. 575, Bd. 21, [hier S. 193] etwas zu weit gegangen; so wie der Satz E dort steht, ist er nicht allgemein richtig. Aus dem Umstande nämlich, daß $R$ höchstens von der ersten Mächtigkeit und gleichzeitig ein Bestandteil von $P^{(1)}$ ist, glaubte ich folgern zu dürfen, daß $R$ die Ableitung eines gewissen Bestandteiles von $P$ wäre, und schloß daraus mit Hilfe des Theorems C ganz richtig, daß es ein $\alpha$ geben müßte, so daß $R^{(\alpha)} \equiv 0$. Es zeigt sich nun aber, daß im allgemeinen $R$ nicht Ableitung einer anderen Menge zu sein braucht.

Diese *wichtige* Bemerkung ist zuerst von Herrn Ivar Bendixson in Stockholm in einem an mich gerichteten Schreiben (Mai 1883) gemacht worden. Auf meinen Wunsch hat derselbe seine bei dieser Gelegenheit gefundenen Resultate, welche zum Teil mit den obigen Sätzen D, E, F übereinstimmen, ausgearbeitet und in Acta mathem. Bd. II, S. 415 publiziert.

Da hiernach $R^{(\gamma)}$ im allgemeinen für keinen Wert von $\gamma$ Null zu sein braucht, so ergab sich die Frage, durch *welche Eigenschaft* die abzählbare Menge $R$ sich von anderen Mengen der ersten Mächtigkeit unterscheide; die Beantwortung dieser Frage fand Herr Bendixson in folgendem Theorem:

Theorem G. *Ist $R$ die in Theorem E vorkommende Menge erster Mächtigkeit, so gibt es eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehörige Zahl $\alpha$, so daß*

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) = 0.$$

Beweis. Nach Theorem F gibt es ein *kleinstes* $\alpha$ der ersten oder zweiten Zahlenklasse, so daß

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\Omega)} \equiv S.$$

Nun hat $R$ mit $S$ keinen Punkt gemein, folglich ist auch

$$\mathfrak{D}(R, P^{(\alpha)}) = 0.$$



Da $R$ ein Bestandteil von $P^{(1)}$, mithin $R^{(\alpha)}$ ein Bestandteil von $P^{(\alpha)}$ ist, so hat man um so mehr auch

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

An diese Theoreme knüpfen sich erläuternde und zusätzliche Bemerkungen.

Schon in Nr. 2 dieser Abhandlung [S. 148] habe ich auf den merkwürdigen Umstand hingewiesen, daß, wenn eine Punktmenge $P$ so beschaffen ist, daß $P^{(\omega)} \equiv 0$, es alsdann immer auch eine *endliche* Zahl $\nu$ gibt, so daß schon $P^{(\nu)} \equiv 0$. Der hierin enthaltene Satz ist aber nur ein spezieller Fall eines allgemeineren, welchen man wie folgt ausdrücken kann:

*Ist $\beta$ irgendeine zur zweiten Zahlenklasse gehörige Zahl der zweiten Art (d. h. eine Zahl, welche in zwei Faktoren zerlegt werden kann, von denen der Multiplikandus $= \omega$ ist) und $P$ eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, daß $P^{(\beta)} \equiv 0$, so gibt es stets kleinere, zur ersten oder zweiten Zahlenklasse gehörige Zahlen $\beta' < \beta$, so daß auch für sie $P^{(\beta')} \equiv 0$ ist.* [Vgl. III 9 § 19, S. 340].

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, nehmen wir an, es sei zwar $P^{(\beta)} \equiv 0$, dagegen $P^{(\beta')}$ für jede Zahl $\beta' < \beta$ von Null verschieden. Nach Theorem I des § 15 würde es einen Punkt $g$ von solcher Lage geben, daß in jede Vollkugel $K_n$ mit dem Mittelpunkte $g$ und dem Radius $\varrho$ eine Teilmenge $P(\varrho)$ von $P$ fiele, für welche ebenfalls alle Ableitungen $P^{(\beta')}(\varrho)$, wenn $\beta' < \beta$, von Null verschieden wären. Da wir $\varrho$ beliebig klein annehmen können, so folgt hieraus leicht, daß der Punkt $g$ zu jeder der Ableitungen $P^{(\beta')}$, wenn $\beta' < \beta$, als Punkt gehören und mithin auch wegen der Formel

$$P^{(\beta)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\beta')}, \ldots)$$

ein Punkt von $P^{(\beta)}$ sein würde, was der Annahme widerspricht, wonach $P^{(\beta)} \equiv 0$ ist. Folglich ist die gleichzeitig von uns gemachte Voraussetzung, daß alle $P^{(\beta')}$ von Null verschieden seien, unstatthaft und es muß daher Zahlen $\beta'$ geben, die kleiner sind als $\beta$ und für welche $P^{(\beta')}$ ebenfalls gleich Null ist.

Aus diesem Satze folgern wir, *daß die in Theorem C mit $\alpha$ bezeichnete Zahl stets von der ersten Art ist*, so daß eine ihr nächst kleinere Zahl $\alpha_{-1}$ immer vorhanden ist; denn wäre $\alpha$ von der *zweiten* Art, so könnte nach dem soeben Bewiesenen $\alpha$ nicht die *kleinste* Zahl sein, für welche $P^{(\alpha)} \equiv 0$ wäre. Es gibt also, falls $P^{(1)}$ von der ersten Mächtigkeit ist, stets eine Zahl $\alpha_{-1}$, so daß zwar $P^{(\alpha_{-1})}$ von Null verschieden, dagegen $P^{(\alpha)}$ oder, was dasselbe ist, $P^{(\alpha_{-1}+1)}$ gleich Null ist.

§ 17.

Um die Sätze der beiden vorangehenden Paragraphen noch weiter zu vervollständigen, sowie um neue Untersuchungen im folgenden bequem ausführen zu können, ist es für mich unvermeidlich, *neue Definitionen* sowohl wie *Benennungen* festzusetzen.

Zunächst will ich bemerken, daß es sich als zweckmäßig erweist, das kleinste gemeinsame Multiplum mehrerer Mengen $P_1, P_2, \ldots$, wofür wir bisher das Zeichen $\mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots)$ (Ann. Bd. 17, p. 355) [hier S. 145] gebraucht haben, als *Summe* der einzelnen Mengen $P_1, P_2, \ldots$ auch in denjenigen Fällen zu schreiben, wo die Mengen $P_1, P_2, \ldots$ Punkte gemeinsam haben, wobei jeder gemeinsame Punkt nur *einfach* der Menge $\mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots)$ zugeteilt wird.

Wir haben also von jetzt ab in allen Fällen

$$P_1 + P_2 + \cdots \equiv \mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots). \qquad (1)$$

Man überzeugt sich nämlich leicht, daß die gewöhnlichen Kommutations- und Assoziationsregeln für die Summanden auch hier Gültigkeit haben. Nur muß beachtet werden, daß aus einer Gleichung

$$P \equiv P_1 + P_2 + \cdots$$

die folgende

$$P - P_1 \equiv P_2 + P_3 + \cdots$$

*nur in dem Falle geschlossen werden kann, wo $P_1$ mit keiner der übrigen $P_2, P_3, \ldots$ gemeinsame Punkte hat.*

Wenn ferner die Summe (1) aus einer nur *endlichen* Anzahl von Summanden besteht, sieht man ohne Schwierigkeit, daß immer folgende Regel für die Bildung der Ableitungen besteht:

$$(P_1 + P_2 + \cdots + P_\nu)^{(\alpha)} \equiv P_1^{(\alpha)} + P_2^{(\alpha)} + \cdots + P_\nu^{(\alpha)}, \qquad (2)$$

wo $\alpha$ irgendeine endliche oder transfinite ganze Zahl bedeutet.

Diese Regel hört jedoch im allgemeinen auf gültig zu sein, wenn die Anzahl der Teilmengen $P_1, P_2, \ldots$ unendlich groß ist.

Wenn eine Punktmenge $P$ so beschaffen ist, daß ihre Ableitung $P^{(1)}$ in ihr als Divisor enthalten ist oder, was dasselbe ist, daß

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) \equiv P^{(1)},$$

so wollen wir $P$ eine *abgeschlossene* Menge nennen. Zu dieser Art von Mengen gehören beispielsweise die Mengen der singulären Punkte analytischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Ferner entsteht aus jeder Menge $P$ eine *abgeschlossene*

$$\mathfrak{M}(P, P^{(1)}) \equiv P + P^{(1)}.$$

*Jede Menge, welche selbst erste Ableitung einer andern Menge ist, gehört auch, wie wir wissen, zu den abgeschlossenen Mengen.*

Dieser letztere Satz ist umkehrbar: *jede abgeschlossene Menge läßt sich auf unzählig viele Weisen darstellen als die erste Ableitung einer andern Menge.*



In der Tat sei $P$ eine abgeschlossene Menge, also $P^{(1)}$ ein Bestandteil von $P$; wir setzen

$$P \equiv Q + P^{(1)}.$$

Es ist dann $Q$ eine *isolierte* Menge und daher von der *ersten* Mächtigkeit; es mögen die zu ihr gehörigen Punkte mit

$$q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \ldots$$

bezeichnet werden.

Sei $\varrho_\nu$ die hier von Null verschiedene untere Grenze der Entfernungen des Punktes $q_\nu$ von allen übrigen Punkten der Menge $P$; um $q_\nu$ als Mittelpunkt werde eine $n$-dimensionale Vollkugel $K_\nu$ mit dem Radius $\frac{\varrho_\nu}{2}$ geschlagen.

Die sämtlichen Vollkugeln $K_\nu$ liegen außer einander und können sich höchstens berühren; in das Innere von $K_\nu$ fällt kein anderer Punkt von $P$ als ihr Mittelpunkt $q_\nu$. [3]

Man setze nun in jede dieser Vollkugeln $K_\nu$ eine Punktmenge $P_\nu$, deren Ableitung $P_\nu^{(1)}$ aus dem einzigen Punkte $q_\nu$ besteht, und bilde folgende Menge

$$M \equiv P^{(1)} + \sum P_\nu,$$

so hat $M$, wie leicht zu erkennen, zur Ableitung die Menge $P$, d. h. es ist

$$M^{(1)} \equiv P.$$

Denn man hat

$$P \equiv Q + P^{(1)}$$

und daher

$$P^{(1)} \equiv Q^{(1)} + P^{(2)},$$

mithin

$$P \equiv Q + Q^{(1)} + P^{(2)};$$

andererseits ist

$$M^{(1)} \equiv P^{(2)} + (\sum P_\nu)^{(1)}.$$

Es ist aber, wie man leicht erkennt,

$$(\sum P_\nu)^{(1)} \equiv Q + Q^{(1)},$$

woraus der zu beweisende Satz folgt.

Aus unsern Sätzen C, D, E, F in § 16 ergeben sich daher folgende Sätze für *abgeschlossene* Punktmengen:

Theorem C'. *Ist $P$ irgendeine abgeschlossene Punktmenge von der ersten Mächtigkeit, so gibt es immer eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenklasse zugehörige Zahl $\alpha$, so daß $P^{(\alpha)}$ gleich Null ist, oder was dasselbe heißen soll, solche Mengen sind immer reduktibel.*

Theorem E'. *Ist $P$ eine abgeschlossene Punktmenge von höherer als der ersten Mächtigkeit, so zerfällt $P$ und zwar nur auf eine Weise in eine perfekte Menge $S$ und eine Menge von der ersten Mächtigkeit $R$, so daß*

$$P \equiv R + S,$$

*und es existiert eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenklasse zugehörige Zahl* $\alpha$, *so daß* $P^{(\alpha)}$ *gleich* $S$ *wird.*

Es ist ferner wichtig den Fall ins Auge zu fassen, daß eine Menge $P$ *Divisor ihrer Ableitung* $P^{(1)}$ *ist* oder, was dasselbe ist, daß

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) = P;$$

unter solchen Umständen wollen wir $P$ eine *in sich dichte Menge* nennen.

*Ist* $P$ *irgendeine in sich dichte Menge, so ist ihre Ableitung* $P^{(1)}$ *stets eine perfekte Menge.*

Denn einerseits ist ja *immer* $P^{(2)}$ Divisor von $P^{(1)}$; in unserm Falle ist aber auch $P^{(1)}$ Divisor von $P^{(2)}$; denn schreiben wir

$$P^{(1)} \equiv N + P,$$

so folgt daraus

$$P^{(2)} \equiv N^{(1)} + P^{(1)};$$

d. h. $P^{(1)}$ ist mit allen seinen Punkten in $P^{(2)}$ enthalten. Folglich sind die beiden Mengen $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ identisch dieselben und es ist daher $P^{(1)}$ eine *perfekte* Menge.

Dann ist auch der Fall hervorzuheben, wo eine Menge $P$ eine solche Beschaffenheit hat, daß *kein* Bestandteil, d. h. *keine* Teilmenge von $P$ *in sich dicht* ist; in diesem Falle nennen wir die Menge $P$ eine *separierte Menge*.

Die *isolierten* Mengen bilden offenbar eine besondere Klasse von *separierten* Mengen. Ferner ist hervorzuheben, daß *alle abgeschlossenen Mengen erster Mächtigkeit* separierte Mengen sind, weil sie sonst nicht *reduktibel* wären, und daß auch alle diejenigen Mengen erster Mächtigkeit, welche in den Theoremen E, E′ und G (§ 16) vorkommen und dort mit $R$ bezeichnet wurden, *separierte* Mengen sind.

Würde nämlich $R$ einen Bestandteil $M$ haben, welcher *in sich dicht* ist, so würde $R^{(\alpha)}$ den Bestandteil $M^{(1)}$ haben, weil $M^{(1)}$ eine perfekte Menge ist, die in *allen* Ableitungen von $R$ erhalten bleibt; da zudem $M$ als in sich dichte Menge ein Bestandteil von $M^{(1)}$ ist, so würde der Bestandteil $M$ von $R$ ebenfalls in $R^{(\alpha)}$ enthalten sein, was in Widerspruch zu dem Bendixsonschen Satze $G$ (§ 16) treten würde. Also hat $R$ keinen Bestandteil, welcher *in sich dicht* ist, und es gehört also $R$ immer zu der Klasse der *separierten Mengen*.

Zu den *separierten* Mengen gehört auch *immer*, was auch $P$ sei, die Menge

$$P - \mathfrak{D}(P, P^{(\Omega)}),$$

von welcher man zugleich stets behaupten kann, daß sie von der ersten Mächtigkeit ist, was leicht mittels des Theorems III in § 15 [S. 214] bewiesen wird. Auf die Frage, ob eine *separierte* Menge auch von höherer als der ersten Mächtigkeit sein kann, kommen wir später.



Der Begriff „*in sich dicht*“ steht natürlich in einer gewissen Verwandtschaft zu dem schon früher oft von mir gebrauchten „*überalldicht*“, um so mehr müssen wir sie auseinander halten und jeder Verwechslung zwischen ihnen vorbeugen.

Der Ausdruck „*in sich dicht*“ bezeichnet *für sich* eine bestimmte Beschaffenheit einer Menge; dagegen hat „*überalldicht*“ an und für sich nicht die Bedeutung einer Mengenbeschaffenheit, sondern erlangt solche erst dadurch, daß man ihn in Verbindung mit einem bestimmten $n$-dimensionalen stetigen Bestandteil $H$ von $G_n$ braucht, indem man von einer Menge $P$ sagt, sie sei „*überalldicht in* $H$“.

Macht man sich diesen wesentlichen Unterschied klar, so folgt von selbst, daß eine Menge $P$ sehr wohl *in sich dicht* sein kann, *ohne* daß sie in irgendwelchem Teilgebiete $H$ von $G_n$ *überalldicht* wäre, und daß auch umgekehrt eine Menge $P$ *in einem Teilgebiete* $H$ *überalldicht* sein kann, ohne daß sie *in sich dicht* zu sein braucht, falls nämlich $P$ auch außerhalb des Gebietes $H$ zugehörige Punkte besitzt.

Liegt andrerseits $P$ ganz im Gebiete $H$ und ist *darin überalldicht*, so ist unmittelbar klar, daß in einem solchen Falle $P$ auch *in sich dicht* genannt werden muß.

## § 18.

[4] *Jeder* Punktmenge $P$ innerhalb $G_n$, sie mag *kontinuierlich* oder *diskontinuierlich* sein, kommt eine bestimmte *nicht negative Zahlgröße* zu, welche wir ihren *Inhalt* oder ihr *Volumen mit Bezug auf ihre Teilnehmerschaft an dem ebenen n-dimensionalen Raum* $G_n$, oder, wie wir uns kürzer ausdrücken wollen, *mit Bezug auf* $G_n$ nennen wollen. Diese Zahlgröße ist in allen Fällen, in welchen man bisher von *Volumen* oder *Inhalt* gesprochen hat (wenn nämlich $P$ ein aus einem oder mehreren $n$-dimensionalen Stücken bestehender Teil von $G_n$ ist) *gleich* dem $n$-fachen Integral

$$\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

wobei die Integration über alle Elemente des betreffenden Raumteiles $P$ ausgedehnt wird. Sie hat aber auch in *allen anderen* Fällen ihre *bestimmte Bedeutung* und einen *einzigen Wert*. Wegen ihrer Abhängigkeit sowohl von $P$ wie auch von dem ebenen Raume $G_n$, in welchem $P$ enthalten ist, wollen wir diese Zahlgröße mit

$$I(P \text{ in } G_n)$$

oder einfach mit

$$I(P)$$

bezeichnen, letzteres in den Fällen, wo in der laufenden Betrachtung die Heranziehung mehrerer *ebener* Räume $G_n, G'_m, \ldots$, denen $P$ gemeinschaftlich angehören könnte, ausgeschlossen und daher eine Verwechselung nicht möglich ist. Zu dieser Verallgemeinerung des *Inhaltsbegriffes* gelangt man durch die Betrachtung einer gewissen Funktion einer positiven unbeschränkten Variablen $\varrho$, die wir *die zu der gegebenen Punktmenge $P$ mit Bezug auf $G_n$ gehörige charakteristische Funktion nennen* und je nach Bedarf mit

$$F(\varrho, P \text{ in } G_n)$$

oder, falls dies ausreicht, einfacher mit

$$F(\varrho, P) = F(\varrho)$$

bezeichnen wollen.

Ist nämlich irgendeine *ganz in das Endliche fallende* Punktmenge $P$ innerhalb $G_n$ gegeben, so bilde man um *jeden* der abgeschlossenen Menge

$$\mathfrak{M}(P, P^{(1)}) \equiv P + P^{(1)}$$

zugehörigen Punkt $p$ eine $n$-dimensionale Vollkugel mit dem Mittelpunkt $p$ und dem Radius $\varrho$; wir wollen sie, als Menge mit allen inneren und auf der Begrenzung liegenden Punkten aufgefaßt, mit

$$K(\varrho, p)$$

bezeichnen.

Der Inbegriff *aller* dieser Vollkugeln, welchen man erhält, indem man $p$ *alle* Punkte der Menge $P + P^{(1)}$ durchlaufen läßt, hat nun ein bestimmtes kleinstes gemeinschaftliches Multiplum

$$\sum_p K(\varrho, p),$$

welcher Punktmenge wir die Bezeichnung

$$\Pi(\varrho, P \text{ in } G_n)$$

oder die einfachere

$$\Pi(\varrho, P)$$

oder

$$\Pi(\varrho)$$

je nach Umständen geben wollen.

Diese Punktmenge $\Pi(\varrho)$ ist nun, weil $P$ ganz im *Endlichen* liegend vorausgesetzt ist, wie man leicht sieht, immer ein aus einer *endlichen Anzahl* von Stücken bestehender Teil des Raumes $G_n$, wo *jedes dieser Stücke ein $n$-dimensionales Kontinuum mit dazu gehöriger Begrenzung darstellt*. Es hat also das $n$-fache Integral

$$\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

ausgeführt über alle Elemente des Raumteiles $\Pi(\varrho)$ einen bestimmten Wert, der sich mit $\varrho$ ändert; diesen Wert nennen wir $F(\varrho)$, so daß wir also folgende Definition der *zu einer gegebenen Punktmenge $P$ mit Bezug auf $G_n$*



*gehörigen charakteristischen Funktion erhalten:*

$$F(\varrho, P \text{ in } G_n) = \int\limits_{(\Pi(\varrho,\, P \text{ in } G_n))} dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \tag{1}$$

Bemerken wir nun, daß $F(\varrho)$, wie leicht erkannt wird, eine mit $\varrho$ gleichzeitig abnehmende stetige Funktion von $\varrho$ ist, deren Derivierte $F'(\varrho)$ sogar auch eine ganz bestimmte Bedeutung hat, indem sie nämlich in gewissem Sinne den Inhalt der Begrenzung von $\Pi(\varrho)$ ausdrückt, so folgt, daß mit beliebigem Abnehmen der Größe $\varrho$ die Funktion $F(\varrho)$ sich einem bestimmten, nicht negativen Grenzwert $\operatorname{Lim}\limits_{\varrho=0} F(\varrho)$ beliebig nähert; *diesen Grenzwert nennen wir den Inhalt oder das Volumen der Menge $P$ mit Bezug auf den ebenen Raum $G_n$* und haben daher die Definitionsgleichung

$$I(P \text{ in } G_n) = \operatorname{Lim}_{\varrho=0} F(\varrho, P \text{ in } G_n) \tag{2}$$

oder einfacher geschrieben

$$I(P) = \operatorname{Lim}_{\varrho=0} F(\varrho).$$

Sind $P$ und $Q$ zwei Punktmengen von solcher Lagenbeziehung, *daß völlig getrennte $n$-dimensionale Raumteile $H$ und $H'$ angegeben werden können, so daß $P$ ganz in $H$, $Q$ ganz in $H'$ enthalten ist*, so gilt, wie leicht zu zeigen, der Satz, daß

$$I(P + Q) = I(P) + I(Q).$$

Läßt man aber die gemachte Voraussetzung über $P$ und $Q$ fallen, so gilt dieser Satz im allgemeinen *nicht*.

Zunächst beweisen wir nun den *Fundamentalsatz, daß der Inhalt einer Menge $P$ stets gleich ist dem Inhalt ihrer Ableitung $P^{(1)}$ mit Bezug auf denselben ebenen Raum $G_n$, oder daß immer die Gleichung besteht*

$$I(P \text{ in } G_n) = I(P^{(1)} \text{ in } G_n). \tag{3}$$

Der Beweis dafür wird wie folgt geführt: sei $\varepsilon$ eine beliebige positive Größe, die wir fürs erste als gegeben ansehen, später aber gegen Null abnehmen lassen werden.

Sei ferner $H$ ein ganz im Endlichen gelegener $n$-dimensionaler Teil von $G_n$, der nur so groß anzunehmen ist, daß der Raumteil $\Pi(\varepsilon, P)$ und mithin auch die Mengen $P$ und $P^{(1)}$ ganz in ihn hineinfallen.

Wir wollen nun, während die zu $P$ gehörige charakteristische Funktion mit $F(\varrho)$ bezeichnet wird, die zu $P^{(1)}$ gehörige charakteristische Funktion mit $F_1(\varrho)$ bezeichnen, so daß also $F_1(\varrho)$ genau geschrieben gleich ist $F(\varrho, P^{(1)} \text{ in } G_n)$. Betrachten wir nun den Raumteil $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$, so ist derselbe enthalten in $\Pi(\varepsilon, P)$ und daher auch in $H$.

Der Raumteil

$$\Delta_1 \equiv H - \Pi(\varepsilon, P^{(1)})$$

wird nun samt seiner Begrenzung höchstens eine *endliche* Anzahl von Punkten der Menge $P$ enthalten, weil in ihm kein *einziger* Punkt der Menge $P^{(1)}$ vorkommt. Wir wollen die Menge dieser in endlicher Anzahl vorkommenden Punkte mit $Q$ bezeichnen.

Unter $\varrho$ wollen wir nun eine positive Größe verstehen, die kleiner als $\varepsilon$ ist und gegen Null konvergiert.

Wir haben alsdann erstens

$$F(\varrho) - F_1(\varrho) \geqq 0,$$

weil $\Pi(\varrho, P^{(1)})$ stets *innerhalb* $\Pi(\varrho, P)$ gelegen ist.

Andrerseits können wir $\varrho$ immer *so klein* nehmen, daß $\Pi(\varrho, P-Q)$ ganz in den Raumteil $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$ zu liegen kommt, weil die Punkte der Menge $P-Q$ nirgends der Begrenzung von $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$ unendlich nahe kommen (sonst würde diese Begrenzung Punkte von $P^{(1)}$ in sich haben, was ihrer Natur entgegen ist) [5]; von einem *hinreichend kleinen* $\varrho$ an ist also immer

$$F(\varrho, P-Q) < F_1(\varepsilon).$$

Folglich haben wir

$$F(\varrho) - F_1(\varrho) < (F_1(\varepsilon) - F_1(\varrho)) + (F(\varrho) - F(\varrho, P-Q)),$$

während schon vorher gesehen wurde, daß

$$F(\varrho) - F_1(\varrho) \geqq 0.$$

Nun haben aber die beiden Mengen $P$ und $P-Q$, weil sie sich nur um eine *endliche* Anzahl von Punkten unterscheiden, *gleiche* Inhalte, es wird also die Differenz $F(\varrho) - F(\varrho, P-Q)$ mit ins unendliche abnehmendem $\varrho$ selbst unendlich klein; wir schließen daher aus den beiden soeben geschriebenen Ungleichungen, daß

$$I(P) - I(P^{(1)})$$

seinem absoluten Betrage nach nicht größer ist als

$$F_1(\varepsilon) - I(P^{(1)}).$$

Hier ist $\varepsilon$ eine ganz beliebige positive Größe, die wir daher *jetzt* auch gegen Null konvergieren lassen können; unter solchen Verhältnissen nähert sich die letztere Differenz selbst der Null und es muß also $I(P)$ gleich $I(P^{(1)})$ sein, worin der zu beweisende Satz liegt.

Es besteht nun aber auch der allgemeinere Satz:

*Ist $\gamma$ irgendeine endliche oder der zweiten Zahlenklasse angehörige transfinite Zahl, $P$ eine beliebige Punktmenge in $G_n$, so ist immer*

$$I(P \text{ in } G_n) = I(P^{(\gamma)} \text{ in } G_n). \tag{4}$$

Zum Beweise wenden wir ein vollständiges Induktionsverfahren an; wir nehmen an, es sei bei *jeder* Punktmenge $P$ erwiesen, daß für *alle Werte*



*von $\gamma'$, die kleiner sind als ein gegebenes* der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehöriges $\gamma$, die Gleichung besteht

$$I(P) = I(P^{(\gamma')})$$

und wollen nun zeigen, daß alsdann auch

$$I(P) = I(P^{(\gamma)}).$$

In dem Falle, daß $\gamma$ eine Zahl der *ersten* Art ist, so daß eine ihr *nächst* vorhergehende Zahl $\gamma_{-1}$ existiert, hat dieses keine Schwierigkeit; denn da unter diesen Umständen

$$(P^{(\gamma_{-1})})^{(1)} = P^{(\gamma)},$$

so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze

$$I(P^{(\gamma_{-1})}) = I(P^{(\gamma)}),$$

und daher auch

$$I(P) = I(P^{(\gamma)}).$$

Nehmen wir nun *zweitens* an, es sei $\gamma$ eine *transfinite* Zahl der *zweiten* Art.

Betrachten wir hier den Raumteil

$$\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

innerhalb $H$ und bezeichnen die Differenz

$$H - \Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

mit $\Delta_\gamma$.

Was die positive Größe $\varepsilon$ anbetrifft, so wollen wir sie nur so gewählt denken, daß auf die Begrenzung von $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ *kein einziger* Punkt der *abzählbaren* Punktmenge $(P + P^{(1)}) - P^{(\gamma)}$ fällt; eine solche Wahl von $\varepsilon$ und selbst *unter jeder Kleinheitsgrenze* ist stets möglich, wie mit Anwendung meines in Nr. 1 dieser Abhandlung [hier S. 143] bewiesenen Satzes leicht erkannt wird.

In dem Raumteil $\Delta_\gamma$ ist ein gewisser, im allgemeinen aus unendlich viel Punkten zusammengesetzter Bestandteil von $P + P^{(1)}$ enthalten, den wir $Q_\gamma$ nennen wollen.

Die Menge $Q_\gamma$ ist nun offenbar von der Art, daß *ihre $\gamma^{\text{te}}$ Ableitung Null* ist; denn sonst würde außerhalb des Raumteiles

$$\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

zum mindesten ein Punkt von $P^{(\gamma)}$ liegen, was nicht der Fall ist.

Da $\gamma$ eine transfinite Zahl der *zweiten* Art ist, so muß es (s. § 16 gegen Schluß) [S. 225] sogar noch eine kleinere Zahl $\bar{\gamma} < \gamma$ geben, so daß auch die $\bar{\gamma}^{\text{te}}$ Ableitung von $Q_\gamma$ gleich Null ist.

Da aber unser zu beweisende Satz als richtig vorausgesetzt wird für alle Punktmengen, also auch für $Q_\gamma$, und für alle $\gamma' < \gamma$, so schließen wir, daß

$$I(Q_\gamma) = I\left(Q_\gamma^{(\bar{\gamma})}\right) = 0 \tag{5}$$

ist.

Da ferner die beiden Punktmengen $Q_\gamma$ und $(P + P^{(1)}) - Q_\gamma$ derart außer einander liegen, daß die eine in dem Raumteil $\Delta_\gamma$, die andere in dem davon gänzlich getrennten Raumteile $\Pi(\varepsilon - \varkappa, P^{(\gamma)})$ (für ein hinreichend kleines $\varkappa$, wie sogleich gezeigt wird) liegt, so haben wir

$$I(P) = I(P + P^{(1)}) = I((P + P^{(1)}) - Q_\gamma) + I(Q_\gamma)$$

und wegen $I(Q_\gamma) = 0$

$$I(P) = I((P + P^{(1)}) - Q_\gamma). \tag{6}$$

Unter $\varrho$ verstehen wir nun eine beliebige Größe, die kleiner ist als $\varepsilon$ und außerdem *so klein* ist, daß $\Pi(\varrho, (P + P^{(1)}) - Q_\gamma)$ ganz in den Raumteil $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ zu liegen kommt; letztere Bedingung ist erfüllbar, weil $\varepsilon$ so gewählt worden ist, daß auf der Begrenzung von $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ *kein einziger* Punkt der Menge $(P + P^{(1)}) - P^{(\gamma)}$ liegt; dies hat zur Folge, daß die Punkte der Menge $P + P^{(1)}$ *nicht beliebig nahe* an diese Begrenzung heranrücken, weil diese sonst einen Punkt von $P^{(\gamma)}$ in sich aufnehmen würde, was offenbar eine Unmöglichkeit ist, da *alle* Punkte von $P^{(\gamma)}$ zum *mindesten* in der Entfernung $\varepsilon$ von dieser Begrenzung abstehen.

Folglich haben wir für *hinreichend kleine* Werte von $\varrho$

$$F(\varrho, (P + P^{(1)}) - Q_\gamma) < F(\varepsilon, P^{(\gamma)}),$$

mithin auch

$$F(\varrho, P) - F(\varrho, P^{(\gamma)}) < (F(\varepsilon, P^{(\gamma)}) - F(\varrho, P^{(\gamma)})) \\ + (F(\varrho, P) - F(\varrho, (P + P^{(1)}) - Q_\gamma)).$$

Anderseits ist offenbar

$$F(\varrho, P) - F(\varrho, P^{(\gamma)}) \geqq 0.$$

Lassen wir nun $\varrho$ unendlich klein werden, so folgt in Rücksicht auf (6), daß die Differenz

$$I(P) - I(P^{(\gamma)})$$

ihrem absoluten Betrage nach nicht größer ist als

$$F(\varepsilon, P^{(\gamma)}) - I(P^{(\gamma)}).$$

Hier ist $\varepsilon$ eine beliebige positive Größe, die nur an gewisse Voraussetzungen geknüpft ist, *welche jedoch ihre Kleinheit nicht beschränken;* lassen wir daher $\varepsilon$ unendlich klein werden, so folgt, daß

$$I(P) = I(P^{(\gamma)}).$$

Wir können daher den Satz (4) als durch *vollständige* Induktion bewiesen ansehen; aus ihm ergeben sich nun die Folgerungen:

I. *Wenn $P$ eine reduktible Menge ist, so ist ihr Inhalt $I(P)$ immer gleich Null.*

In der Tat gibt es in diesem Falle, ein kleinstes $\alpha$, so daß

$$P^{(\alpha)} \equiv 0;$$

folglich ist $I(P^{(\alpha)})$ und daher auch $I(P)$ gleich Null.



Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung meines in Nr. 4 dieser Abhandlung [S. 161] für *lineare* reduktible Mengen bewiesenen Satzes.

II. *Wenn $P$ nicht reduktibel ist, so gibt es immer eine perfekte Menge $S$, die denselben Inhalt hat wie $P$, so daß*

$$I(P \text{ in } G_n) = I(S \text{ in } G_n). \tag{7}$$

Denn nach Th. $E$ in § 16 [S. 222] gibt es eine perfekte Menge $S$, so daß für ein kleinstes der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehöriges $\alpha$

$$P^{(\alpha)} \equiv S;$$

also haben wir nach (4)

$$I(P) = I(S).$$

Hieraus folgt, *daß die Bestimmung der Inhalte von beliebigen Punktmengen immer zurückgeführt ist auf die Herstellung der Inhalte perfekter Punktmengen.*

In einer späteren Abhandlung werde ich das letztere Problem ausführlich in seiner Allgemeinheit behandeln und beschränke mich daher hier auf folgende Bemerkungen.

Bei einer perfekten Punktmenge kommt es oft vor, daß ihr Inhalt gleich Null ist, doch kann dies nur dann eintreten, wenn die perfekte Punktmenge in *keinem* $n$-dimensionalen Teilgebiete von $G_n$ *überalldicht* ist.

Ein Beispiel von *linearen* perfekten Punktmengen mit *dem Inhalte Null* wird von mir in der Anmerkung[11]) zu Nr. 5 [S. 207] angeführt. Ähnliche Beispiele lassen sich innerhalb $G_n$ für $n > 1$ leicht bilden.

Ist dagegen eine perfekte Punktmenge innerhalb eines gewissen $n$-dimensionalen Raumteiles $H$ *überalldicht*, so ist ihr Inhalt offenbar von Null verschieden.

Andrerseits gibt es aber auch perfekte Mengen, die in *keinem noch so kleinen $n$-dimensionalen Raumteile überalldicht sind und deren Inhalt trotzdem einen von Null verschiedenen Wert hat.*

In den mathematisch-physikalischen Anwendungen der Mengenlehre [6], über welche ich demnächst die von mir angestellten Untersuchungen veröffentlichen werde, spielt ein noch allgemeinerer Begriff als der hier mit $I(P)$ bezeichnete eine wesentliche Rolle.

Ist $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ irgendeine *unbedingt* integrierbare Funktion der $n$ Koordinaten eines beliebigen Punktes von $G_n$ und $P$ irgendeine in $G_n$, ganz im Endlichen gelegene Punktmenge, $\Pi(\varrho, P \text{ in } G_n)$ der im vorigen definierte Raumteil, so stellt uns das Integral

$$\int\limits_{(\Pi(\varrho,\, P \text{ in } G_n))} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

eine stetige Funktion von $\varrho$ dar, deren Grenzwert für $\operatorname{Lim} \varrho = 0$ eine von $P$ sowohl wie von der Funktion $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ abhängige Zahl liefert, die ich mit $I(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), P \text{ in } G_n)$ oder kürzer mit $I(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), P)$ bezeichne, so daß unser $I(P)$ nichts andres ist als $I(1, P)$.

## § 19.

Wir wollen nun zu einer genaueren Untersuchung der *perfekten Mengen* übergehen.

Da jede solche Punktmenge gewissermaßen *in sich begrenzt, abgeschlossen* und *vollendet* ist, so zeichnen sich die *perfekten Mengen* vor allen anderen Gebilden durch besondere Eigenschaften aus.

Sie dürften aber auch noch aus dem Grunde eine generelle und ausführliche Behandlung verdienen, weil die sämtlichen *Kontinua*, wenn wir dieses Wort in dem Sinne nehmen, wie ich ihn in der vorigen Nummer dieser Abhandlung, in Nr. 5 § 10 [hier S. 194] gebraucht habe, zu ihnen gehören; denn unter einem *Kontinuum* im *eigentlichen Sinne* verstehe ich jede *perfekte* Punktmenge, die *in sich zusammenhängend* ist; was ich hierbei mit „*zusammenhängend*" sagen will, ist gleichfalls an der soeben erwähnten Stelle erklärt worden.

Alle *übrigen* Kontinua, welche ich am Schluß von Nr. 5 [S. 208] *Semikontinua* genannt habe, lassen sich gewissermaßen durch *Addition* und *Subtraktion* aus perfekten Punktmengen und aus solchen Punktmengen, die aus einer endlichen Anzahl von Punkten oder auch aus einer unendlichen Anzahl von der *ersten Mächtigkeit* zusammengesetzt sind, herstellen; aus diesem Grunde scheint mir die Untersuchung der *perfekten Kontinua* derjenigen der *Semikontinua* vorangehen zu müssen.

Bei aller Verschiedenheit, welche wir in der *reichhaltigen Klasse* der *perfekten Punktmengen* kennen lernen werden, indem sowohl in Ansehung ihres „*Inhaltes*" wie auch in bezug auf ihre *innere* und *äußere Gestaltung* die merkwürdigsten und zum Teil seltsamsten Varietäten sich unter ihnen vorfinden, haben sie doch *alle* ein *Gemeinsames*; sie sind *alle* von *gleicher Mächtigkeit* und folglich, da die *Kontinua* zu ihnen gehören, sind sie *alle von der Mächtigkeit des Linearkontinuums*, also beispielsweise von der Mächtigkeit des *Inbegriffs aller rationalen und irrationalen Zahlen, die größer oder gleich Null und kleiner oder gleich Eins sind.*

In Crelles Journ. Bd. 84 [hier III 2, S. 119] ist bereits gezeigt worden, daß die Mächtigkeit *n-dimensionaler Kontinua* dieselbe ist, wie die des *eindimensionalen Linearkontinuums.* Wir werden im weiteren Verlaufe dieser Untersuchung diese merkwürdige Tatsache von neuem zu bestätigen Veranlassung finden.

Zunächst aber will ich meine Betrachtungen wieder auf die linearen Punktmengen beschränken und einen Beweis für den Satz entwickeln, daß alle *linearen perfekten Mengen gleiche Mächtigkeit* haben oder, was dasselbe



heißt, daß je zwei solche Mengen in eine Beziehung zueinander gesetzt werden können, welcher gemäß gewissermaßen *die eine als eine [umkehrbar] eindeutige Funktion der andern* betrachtet werden kann.

Sei zunächst $S$ eine *lineare, perfekte, im Intervall* $(0 \ldots 1)$ *eingeschlossene Punktmenge, welche in keinem noch so kleinen Intervall überalldicht ist und welcher die Punkte* 0 *und* 1 *zugehörig sind*; alle anderen *in keinem noch so kleinen Intervalle überalldichten* Punktmengen lassen sich *projektivisch* auf die soeben charakterisierten zurückführen; wenn also von $S$ gezeigt sein wird, daß ihre Mächtigkeit gleich ist der Mächtigkeit des Linearkontinuums $(0 \ldots 1)$, so ist damit das gleiche bewiesen für alle linearen perfekten Mengen, *die in keinem Intervalle überalldicht* sind.

Den einfachen Betrachtungen zufolge, welche in Nr. 4 dieser Arbeit [S. 161] angestellt worden sind, gehört zu unsrer Menge $S$ eine *bestimmte unendliche Menge von in* $(0 \ldots 1)$ *enthaltenen*, völlig voneinander getrennten *Teilintervallen*, durch deren Endpunkte, welche zusammengenommen eine *in sich dichte, aber in keinem noch so kleinen Intervalle überalldichte* Punktmenge *erster Mächtigkeit* bilden, die *perfekte Menge S völlig bestimmt ist*, indem sie die *erste Ableitung* von jener, welche wir $J$ nennen wollen, darstellt, so daß

$$S \equiv J^{(1)}. \tag{1}$$

$S$ besteht sonach aus zwei zu unterscheidenden Bestandteilen, nämlich aus $J$ und aus einer *andern in sich dichten aber in keinem noch so kleinen Intervalle überalldichten* Punktmenge, die wir $L$ nennen wollen, so daß

$$S \equiv J + L. \tag{2}$$

Diese letztere Menge $L$ wird nämlich von allen *Grenzpunkten* der Menge $J$ gebildet, die nicht $J$ selbst zugehörig sind.

Wir wollen uns jene Teilintervalle, deren Endpunkte die Menge $J$ konstituieren, ihrer *Größe* nach geordnet denken, so daß die *kleineren* auf die *größeren* folgen, und wenn gleich große unter ihnen vorkommen, die mehr nach links gelegenen früher geschrieben werden, als die mehr nach rechts fallenden; in *dieser* Anordnung mögen sie folgende unendliche Reihe bilden:

$$(a_1 \ldots b_1),\ (a_2 \ldots b_2),\ \ldots,\ (a_\nu \ldots b_\nu) \ldots \tag{3}$$

Den Inbegriff aller Punkte $a_\nu$ wollen wir mit $\{a_\nu\}$, den aller Punkte $b_\nu$ mit $\{b_\nu\}$ bezeichnen und für einen beliebigen der zur Menge $L$ gehörigen Punkte das Zeichen $l$ wählen, so daß wir haben

$$J \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\}; \quad L \equiv \{l\}; \quad S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{l\}. \tag{4}$$

Ich will noch folgendes aus dem Begriffe von $S$ leicht sich ergebende ausdrücklich hervorheben:

Die Endpunkte 0 und 1 gehören dem Bestandteile $L$ von $S$ an; zwischen irgend zweien Intervallen $(a_\mu \ldots b_\mu)$ und $(a_\nu \ldots b_\nu)$ der Reihe (3) liegen immer unendlich viele andere Intervalle derselben Reihe; in jeder beliebigen Nähe eines einzelnen von den Punkten $a_\nu$ oder $b_\nu$ oder $l$ liegen Intervalle der Reihe (3) von beliebiger Kleinheit.

Nachdem wir solchermaßen den Begriff unsrer Menge $S$ vollständig analysiert haben, geben wir uns *irgendeine abzählbare* lineare Punktmenge

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots, \tag{5}$$

die nur folgenden Bedingungen unterworfen ist:

1. *alle Punkte $\varphi_\nu$ sind untereinander verschieden;*
2. *sie fallen alle in das Intervall* $(0\ldots 1)$;
3. *die Endpunkte* 0 *und* 1 *dieses Intervalles gehören nicht zu der Menge* $\{\varphi_\nu\}$ *und*
4. *die Menge $\{\varphi_\nu\}$ ist im Intervalle* $(0\ldots 1)$ *überalldicht.*

Ich behaupte nun folgendes:

*zwischen der Punktmenge $\{\varphi_\nu\}$ einerseits und der Intervallmenge $\{(a_\nu\ldots b_\nu)\}$ andrerseits läßt sich immer eine solche gesetzmäßige, gegenseitig eindeutige und vollständige Korrespondenz ihrer Elemente herstellen, daß, wenn $(a_\nu\ldots b_\nu)$ und $(a_\mu\ldots b_\mu)$ irgend zwei Intervalle der Intervallmenge, $\varphi_{\varkappa_\nu}$ und $\varphi_{\varkappa_\mu}$ die zu ihnen gehörigen Punkte der Punktmenge $\{\varphi_\nu\}$ sind, alsdann stets $\varphi_{\varkappa_\nu}$ links oder rechts von $\varphi_{\varkappa_\mu}$ liegt, je nachdem das Intervall $(a_\nu\ldots b_\nu)$ links oder rechts von dem Intervalle $(a_\mu\ldots b_\mu)$ fällt, oder, was dasselbe heißen soll, daß die Lagenbeziehung der Punkte $\varphi_{\varkappa_\nu}$ und $\varphi_{\varkappa_\mu}$ stets dieselbe ist wie die Lagenbeziehung der ihnen entsprechenden Intervalle $(a_\nu\ldots b_\nu)$ und $(a_\mu\ldots b_\mu)$.*

Um eine solche Beziehung zwischen den beiden Mengen $\{\varphi_\nu\}$ und $\{(a_\nu\ldots b_\nu)\}$ herzustellen, kann man wie folgt verfahren:

Man setze $\varkappa_1 = 1$, d. h. man ordne dem Intervall $(a_1\ldots b_1)$ den Punkt $\varphi_1$ zu; dem Intervalle $(a_2\ldots b_2)$ ordne man den mit *kleinstem Index* versehenen, also bei Verfolgung der Reihe (5) *zuerst* hervortretenden Punkt $\varphi_{\varkappa_2}$ zu, der zu $\varphi_1$ dieselbe Lagenbeziehung hat wie das Intervall $(a_2\ldots b_2)$ zum Intervall $(a_1\ldots b_1)$; dem Intervalle $(a_3\ldots b_3)$ ordne man den mit kleinstem Index versehenen, d. h. bei Verfolgung der Reihe (5) zuerst hervortretenden Punkt $\varphi_{\varkappa_3}$ zu, der *sowohl* zu $\varphi_1$, wie auch zu $\varphi_2$ dieselbe Lagenbeziehung hat, wie das Intervall $(a_3\ldots b_3)$ respektive zu den beiden Intervallen $(a_1\ldots b_1)$ und $(a_2\ldots b_2)$; nach diesem Gesetze gehen wir weiter, so daß, nachdem den *$\nu$ ersten* Intervallen der Reihe (3) die Punkte

$$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu}$$

zugeordnet sind, welche untereinander dieselbe Lagenbeziehung erhalten, wie sie die entsprechenden Intervalle untereinander haben, alsdann dem nächstfolgenden Intervall $(a_{\nu+1}\ldots b_{\nu+1})$ der Reihe (3) der mit dem *kleinsten Index* versehene Punkt $\varphi_{\varkappa_{\nu+1}}$ der Reihe (5) zugeordnet wird, welcher dieselbe Lagenbeziehung zu *allen* Punkten $\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu}$ besitzt, wie sie das Intervall



$(a_{\nu+1}\ldots b_{\nu+1})$ zu den entsprechenden Intervallen $(a_1\ldots b_1)$, $(a_2\ldots b_2)$, $\ldots$, $(a_\nu\ldots b_\nu)$ hat.

Klar ist zunächst, daß auf diese Weise *allen* Intervallen der Reihe (3) *bestimmte* Punkte der Reihe (5) zugeordnet werden; denn wegen des Überalldichtseins der Menge $\{\varphi_\nu\}$ im Intervall $(0\ldots 1)$, und weil die Endpunkte 0 und 1 nicht zu $\{\varphi_\nu\}$ gehören, gibt es in dieser Reihe unendlich viele Punkte, die eine *geforderte* Lagenbeziehung zu einer bestimmten endlichen Anzahl von Punkten derselben Menge $\{\varphi_\nu\}$ besitzen, und es erfährt daher der aus unsrer Regel resultierende Zuordnungsprozeß *keinen Stillstand.*

Die Punkte $\varphi_{\varkappa_\nu}$ konstituieren also eine gewisse in (5) enthaltene unendliche Reihe von Punkten

$$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu}, \ldots \tag{6}$$

und die Zuordnung der beiden Mengen $\{(a_\nu\ldots b_\nu)\}$ und $\{\varphi_{\varkappa_\nu}\}$ würde den gestellten Anforderungen völlig entsprechen, wenn wir uns nur noch davon überzeugen könnten, daß auch umgekehrt in der Reihe (6) die Reihe (5) *vollständig enthalten* ist, sich also von ihr *nur durch eine andere Anordnung der Glieder unterscheidet*; daß dies nun wirklich der Fall, erhellt aus folgender Überlegung.

Denken wir uns, es seien nach unsrer Regel die $\nu$ ersten Zuordnungen ausgeführt und damit die $\nu$ Punkte $\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots \varphi_{\varkappa_\nu}$ an die ersten $\nu$ Intervalle der Reihe (3) derart vergeben, daß auf beiden Seiten gleiche Lagenbeziehung unter entsprechenden Elementen vorhanden ist. Von den *übrig gebliebenen* Punkten unsrer Reihe (5) wird nun einer die unterste Stelle in dieser Reihe einnehmen oder, was dasselbe heißt, den kleinsten Index haben, wir nennen ihn $\varphi_\varrho$; es gibt nun, wie aus der oben angestellten Analysierung des Begriffes $S$ hervorgeht, unendlich viele Intervalle der Reihe (3), welche zu den $\nu$ Intervallen $(a_1\ldots b_1)\ldots(a_\nu\ldots b_\nu)$ *genau dieselbe Lagenbeziehung haben* wie der Punkt $\varphi_\varrho$ zu den entsprechenden Punkten

$$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu};$$

unter diesen unendlich vielen Intervallen sei $(a_\sigma\ldots b_\sigma)$ dasjenige, dessen Index der kleinste von allen ist. Es ist $\sigma > \nu$. Nach unsrer Regel muß nun offenbar[7] bei der $\sigma^{\text{ten}}$ Zuordnung der Punkt $\varphi_\varrho$ an die Reihe kommen, d. h. es ist

$$\varrho = \varkappa_\sigma. \tag{7}$$

Nach der $\sigma^{\text{ten}}$ Zuordnung sind alsdann jedenfalls *zum mindesten* die $\varrho$ ersten Punkte der Reihe (5)

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$$

*alle* vergeben.

$\varrho$ ist aber eine von $\nu$ abhängige, während $\nu$ wächst, nicht abnehmende und mit ins Unendliche wachsendem $\nu$ selbst eine über alle Grenzen hinaus wachsende Zahl. Folglich müssen nach unsrer Regel *alle Glieder* unsrer Reihe (5) bei der Vergebung *schließlich an die Reihe kommen,* und es ist daher die Reihe (5) vollständig in der Reihe (6) enthalten, diese beiden Reihen sind abgesehen von der Folge ihrer Glieder identisch dieselben; es ist

$$\{\varphi_\nu\} = \{\varphi_{\varkappa_\nu}\}. \tag{8}$$

Wir wollen nun der größeren Einfachheit halber schreiben

$$\varphi_{\varkappa_\nu} = \psi_\nu . \tag{9}$$

Alsdann können wir das voraufgehende Resultat wie folgt ausdrücken:

*Es läßt sich immer eine im Intervall* (0 . . . 1) *gelegene und darin überalldichte Punktmenge erster Mächtigkeit in folgender Reihenform aufstellen*

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_\nu,\ \ldots, \tag{10}$$

*zu welcher die Endpunkte* 0 *und* 1 *des Intervalls* (0 . . . 1) *nicht gehören, und die zu der in Reihenform* (3) *gegebenen Intervallmenge*

$$(a_1 \ldots b_1),\ (a_2 \ldots b_2),\ \ldots,\ (a_\nu \ldots b_\nu),\ \ldots \tag{3}$$

*ein solches Verhältnis hat, daß irgend je zwei Punkte von* (10) $\psi_\nu$ *und* $\psi_\mu$ *stets dieselbe Lagenbeziehung zueinander haben wie die entsprechenden Intervalle* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *und* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *der Reihe* (3); *und zwar kann jede beliebige im Intervall* (0 . . . 1) *gelegene, darin überalldichte und die Punkte* 0 *und* 1 *nicht in sich aufnehmende Punktmenge erster Mächtigkeit in eine Reihenform gebracht werden, so daß sie in dieser Reihenform die Beschaffenheit unsrer Reihe* (10) *annimmt.*

Wir wollen nun den Inbegriff aller derjenigen Punkte des Intervalles (0 . . . 1), welche nicht in der Menge $\{\psi_\nu\}$ vorkommen, mit $F$ und einen beliebigen Repräsentanten dieser letzteren Menge mit $f$ bezeichnen, so daß

$$F \equiv \{f\}, \quad (0 \ldots 1) \equiv \{\psi_\nu\} + \{f\}. \tag{11}$$

Die Menge $F$ ist, wie ich in Crelles J. Bd. 84, pag. 254 [hier S. 129] gezeigt, von gleicher Mächtigkeit wie das Linearkontinuum (0 . . . 1) und daher nach Nr. 1 dieser Arbeit [S. 143] von höherer Mächtigkeit als der ersten.

Unsere perfekte Menge $S$ ist nach (4) aus den drei Mengen $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$ und $\{l\}$ zusammengesetzt; es war

$$S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{l\}. \tag{4}$$

Schreiben wir nun die zweite Formel (11) wie folgt:

$$(0 \ldots 1) \equiv \{\psi_{2\nu}\} + \{\psi_{2\nu-1}\} + \{f\}, \tag{12}$$

so geht aus dem Vergleich dieser beiden Formeln nach Nr. 2 der Abh. [hier S. 146] hervor, daß wir zum Beweise unseres Satzes, daß $S$ und (0 . . . 1) von gleicher Mächtigkeit sind, gelangen werden, wenn es uns möglich ist, zu zeigen, daß die beiden Mengen $L$ und $F$ gleiche Mächtigkeit haben; letzteres ist aber wirklich der Fall, wie wir nun leicht sehen können.



Ist $f$ ein beliebiger Punkt von $F$, so können wir, da die Menge $\{\psi_\nu\}$ überalldicht ist, eine derselben zugehörige unendliche Reihe von Punkten aufstellen

$$\psi_{\lambda_1},\ \psi_{\lambda_2},\ \ldots,\ \psi_{\lambda_\nu},\ \ldots, \tag{13}$$

so daß

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \psi_{\lambda_\nu} = f .$$

Diese Punktreihe bestimmt eine entsprechende Reihe von Intervallen:

$$(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1}),\ (a_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_2}),\ \ldots,\ (a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu}),\ \ldots, \tag{14}$$

die sich notwendig einem bestimmten Punkte $l$ der Menge $L$ als Grenze nähern.

Daß sie sich einem bestimmten Grenzpunkte nähern müssen, folgt leicht aus der Lagenbeziehung der beiden Reihen (10) und (3) und ebenso, daß dieser Grenzpunkt nicht etwa ein zu $J$ gehöriger Punkt sein kann.

Nimmt man anstatt der Reihe (13) eine andere der Menge $\{\psi_\nu\}$ angehörige Punktfolge, die sich aber demselben Punkt $f$ als Grenzpunkt nähert, so kommt man zwar auch zu einer andern entsprechenden Intervallreihe an Stelle von (14), überzeugt sich aber ebenso leicht, daß diese keinen andern Grenzpunkt haben kann als den schon gefundenen $l$.

Geht man umgekehrt von einem beliebigen Punkt $l$ der Menge $L$ aus und wählt irgendeine Intervallreihe (14), die sich ihm als Grenzpunkt unendlich nähert, so kommt man mit Hilfe von (13) zu einem bestimmten zugehörigen Punkt $f$ der Menge $F$, welcher derselbe bleibt, sobald wir nur von ein und demselben Punkt $l$ der Menge $L$ ausgehen. Die sämtlichen Punkte $l$ unsrer Menge $L$ sind also in gegenseitig eindeutige und vollständige Beziehung zu sämtlichen Punkten $f$ der Menge $F$ gebracht, das heißt: die beiden Mengen $L$ und $F$ sind von gleicher Mächtigkeit, woraus, wie oben bemerkt, folgt, daß *die gegebene perfekte lineare Menge S gleiche Mächtigkeit hat mit dem Linearkontinuum* (0 . . . 1). [8]

Im vorhergehenden habe ich gezeigt, daß irgendeine perfekte lineare Menge, welche in keinem Intervall überalldicht ist, sich auf ein Linearkontinuum, z. B. auf das vollständige Intervall (0 . . . 1) vollständig mit gegenseitiger Eindeutigkeit beziehen läßt, folglich mit ihm von gleicher Mächtigkeit ist. Ich will nun zeigen, wie sich derselbe Satz in bezug auf eine *ganz beliebige* lineare perfekte Menge beweisen läßt.

Sei also jetzt $S$ irgendeine derartige Punktmenge im Intervall $(-\infty \cdots + \infty)$.

Es werden im allgemeinen gewisse, nicht aneinander grenzende, *keiner Vergrößerung fähige* Intervalle vorhanden sein, in denen $S$ *überalldicht* ist, und die folglich, da $S$ *perfekt* ist, mit *allen ihren Punkten* zu $S$ gehören. Sie bilden zusammen eine Intervallmenge von der *ersten* Mächtigkeit, wie in Nr. 3 dieser Abhandlung [S. 153] gezeigt worden ist.

Wir wollen diese Intervalle, in irgendeiner Ordnung als einfach unendliche Reihe gedacht, wie folgt schreiben:

$$(c_1 \ldots d_1),\ (c_2 \ldots d_2),\ \ldots,\ (c_\nu \ldots d_\nu),\ \ldots \tag{15}$$

Da wir sie so groß annehmen, daß sie bei keiner Vergrößerung die Beziehung zu $S$ behalten würden, wonach $S$ in ihnen überalldicht bleibt, so folgt daraus leicht, daß sie durch diese Bedingung für jedes $S$ völlig bestimmt sind, daß sie nicht aneinander grenzen und daß in dem Zwischenraum zwischen je zweien von ihnen die Menge $S$ nicht überalldicht ist.

Außer diesen Intervallen (15), welche mit ihrem vollen Punktbestand der Menge $S$ angehören, wird im allgemeinen eine andere Intervallmenge existieren, welche, wenn sie aus unendlich vielen Intervallen besteht, ebenfalls die *erste* Mächtigkeit hat und die gleichfalls durch die Menge $S$ bestimmt ist; jedes dieser Intervalle soll einen *perfekten Bestandteil* von $S$ enthalten, der in keinem Teilintervalle überalldicht ist und dem die Endpunkte des Intervalles zugehörig sind; auch sollen diese Intervalle so groß genommen werden, daß bei weiterer Vergrößerung sie aufhören würden, in der angegebenen Beziehung zu $S$ zu stehen. Diese *zweite* Intervallmenge wollen wir mit

$$(e_1 \ldots f_1),\ (e_2 \ldots f_2),\ \ldots,\ (e_\nu \ldots f_\nu),\ \ldots \tag{16}$$

bezeichnen.

Die in diesen Intervallen enthaltenen perfekten Bestandteile von $S$ wollen wir entsprechend mit

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_\nu,\ \ldots \tag{17}$$

bezeichnen.

Aus der Erklärung, welche wir gegeben haben, folgt ohne weiteres, daß die Intervalle von (1) *höchstens* an ihren Endpunkten mit Intervallen der Reihe (2) zusammenstoßen, im übrigen aber ganz außerhalb derselben zu liegen kommen.

Wir haben nun folgende Zerlegung der perfekten Menge $S$:

$$S \equiv \sum (c_\nu \ldots d_\nu) + \sum S_\nu. \tag{18}$$

Zu bemerken ist hierbei, (da $e_\nu$ und $f_\nu$ immer Punkte von $S_\nu$ sind und da es vorkommen kann, daß sich Intervalle in der Reihe (1) mit Intervallen der Reihe (2) berühren) daß Glieder der ersten Summe in unserer Gleichung (4) mit Gliedern der zweiten Summe einzelne Punkte gemein haben können; um die Zerlegung (4) der Menge $S$ von dieser Unbequemlichkeit zu befreien, wollen wir mit $\bar{S}_\nu$ diejenige Menge verstehen, welche aus $S_\nu$ dadurch hervorgeht, daß wir davon den Punkt oder die beiden Punkte in Abzug bringen,



welche $S_\nu$ mit höchstens zwei Intervallen der Reihe (1) (nämlich nach links oder nach rechts hin) gemeinsam haben könnte, so daß $S_\nu \equiv \bar{S}_\nu$ ist in allen Fällen, wo solche Berührungspunkte nicht existieren, dagegen in den übrigen Fällen entweder $S_\nu \equiv \bar{S}_\nu + e_\nu + f_\nu$, oder $\equiv \bar{S}_\nu + e_\nu$ oder $\equiv \bar{S}_\nu + f_\nu$ ist, je nachdem $S$ zu beiden Seiten an Intervalle der Reihe (1) grenzt, oder nur zu ihrer Linken oder nur zu ihrer Rechten mit einem dieser Intervalle einen Punkt gemein hat.

Wir können nun offenbar auch schreiben

$$S \equiv \sum (c_\nu \ldots d_\nu) + \sum \bar{S}_\nu, \tag{19}$$

und hier ist $S$ in Bestandteile $(c_\nu \ldots d_\nu)$ und $\bar{S}_\nu$ zerlegt, die untereinander keinen Zusammenhang haben.

Jeder Bestandteil $(c_\nu \ldots d_\nu)$ hat, weil er selbst ein Kontinuum ist, die Mächtigkeit von $(0 \ldots 1)$; das gleiche gilt aber auch, wie wir im vorhergehenden bewiesen haben, von jedem Bestandteil $S_\nu$, folglich auch vom Bestandteil $\bar{S}_\nu$, da er aus $S_\nu$ durch Abtrennung von höchstens zwei Punkten hervorgeht. (Letzteres ist leicht zu beweisen mit Anwendung der Methode, die ich in Crelles Journal, Bd. 84, pag. 254 [hier S. 127] gebraucht habe).

So haben wir nun in Formel (19) $S$ zerlegt in eine *endliche* oder *abzählbar unendliche* Anzahl von Teilmengen $(c_\nu \ldots d_\nu)$ und $\bar{S}_\nu$, von welchen *jede* die Mächtigkeit des Linearkontinuums hat.

Nach einem bekannten in Crelles Journal, Bd. 84 [hier III 2, S. 119] bewiesenen Satze hat folglich auch die perfekte Menge $S$ die Mächtigkeit von $(0 \ldots 1)$, und es haben daher *alle* linearen *perfekten* Mengen *gleiche* Mächtigkeit.

In einem späteren Paragraphen will ich denselben Satz für perfekte Mengen beweisen, die einem Raum mit $n$ Dimensionen angehören.

Zunächst will ich aber bei den *linearen* Punktmengen stehen bleiben und zeigen, welcher Schluß sich aus dem soeben bewiesenen Satze auf die Mächtigkeiten der *abgeschlossenen* linearen Mengen ziehen läßt.

Falls die *abgeschlossene* lineare Menge $P$ *nicht* von der *ersten* Mächtigkeit, d. h. in dem Falle, daß sie irreduktibel ist, zerfällt sie nach dem Theorem E' in § 17 in eine bestimmte Menge $R$ von der *ersten* Mächtigkeit und in eine bestimmte perfekte Menge $S$, so daß

$$P \equiv R + S.$$

Schreiben wir $R$ in der Form $\{r_\nu\}$, so haben wir

$$P \equiv \{r_\nu\} + S. \tag{20}$$

Sei $\{\eta_\nu\}$ irgendeine im Intervall $(0 \ldots 1)$ enthaltene Punktmenge *erster* Mächtigkeit, $\{u\}$ die Menge der übrigen Punkte dieses Intervalles und $\{\vartheta_\nu\}$

irgendeine in $\{u\}$ enthaltene Punktmenge *erster* Mächtigkeit, $\{v\}$ der Inbegriff aller übrigen Punkte der Menge $\{u\}$; wir haben alsdann

$$(0\ldots 1) \equiv \{\eta_\nu\} + \{\vartheta_\nu\} \quad + \{v\},$$

$$\{u\} \equiv \{\vartheta_{2\nu}\} + \{\vartheta_{2\nu-1}\} + \{v\},$$

und weil

$$\{\eta_\nu\} \sim \{\vartheta_{2\nu}\};\quad \{\vartheta_\nu\} \sim \{\vartheta_{2\nu-1}\};\quad \{v\} \sim \{v\},$$

so folgt hieraus

$$(0\ldots 1) \sim \{u\},$$

mithin ist auch

$$S \sim \{u\}. \tag{21}$$

Nun ist

$$(0\ldots 1) \equiv \{\eta_\nu\} + \{u\}. \tag{22}$$

Aus den Formeln (20), (21) und (22) folgt nun

$$P \sim (0\ldots 1), \tag{23}$$

d. h. wenn die abgeschlossene lineare Punktmenge $P$ nicht die *erste* Mächtigkeit hat, so hat sie die Mächtigkeit des Linearkontinuums.

Wir haben also folgenden Satz:

*Eine unendliche abgeschlossene lineare Punktmenge hat entweder die erste Mächtigkeit oder sie hat die Mächtigkeit des Linearkontinuums, sie kann also entweder in der Form Funkt.* ($\nu$) *oder in der Form Funkt.* ($x$) *gedacht werden, wo* $\nu$ *eine unbeschränkt veränderliche endliche ganze Zahl und* $x$ *eine unbeschränkt veränderliche beliebige Zahl des Intervalls* $(0\ldots 1)$ *ist.*

Daß dieser merkwürdige Satz eine weitere Gültigkeit auch für *nicht abgeschlossene* lineare Punktmengen und ebenso auch für alle $n$-dimensionalen Punktmengen hat, wird in späteren Paragraphen bewiesen werden. (Vergl. Crelles J., Bd. 84, pag. 257) [hier S. 132].

Hieraus wird mit Hilfe der in Nr. 5 § 13 [hier S. 200] *bewiesenen* Sätze geschlossen werden, daß das *Linearkontinuum die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse* (*II.*) *hat* [9].

**[Anmerkungen zu Nr. 6.]**

[1] Zu S. 211. Die hier charakterisierte Eigenschaft ist später von G. Peano (Genocchi-Peano, Differentialrechnung und Grundsätze der Integralrechnung, übersetzt von Bohlmann und Schepp, Leipzig 1899, Anhang V § 9, S. 378ff.) unter dem Namen „*distributive Eigenschaft*" unter Nennung des Autors in die Lehrbuch-Literatur eingeführt und dadurch weiteren Kreisen zugänglich gemacht worden. Durch das hier entwickelte Cantorsche Theorem ist ein wertvolles Hilfsmittel gewonnen, das, vielleicht immer noch nicht hinreichend bekannt, zu den verschiedensten mathematischen Theorien, die es mit Punktmengen zu tun haben, m. E. den leichtesten und natürlichsten Zugang eröffnet. Insbesondere gilt dies von dem Borelschen „Überdeckungssatze" und der auf



ihn gegründeten Theorie des Lebesgueschen „Maßes". Vgl. Zermelo „Über das Maß und die Diskrepanz von Punktmengen", Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 158, S. 154—167. 1927, wo freilich der Cantorsche Satz irrtümlicherweise Peano zugeschrieben wird.

[2] Zu S. 217. In der Tat ist immer $p_{i_\nu}$ der erste Punkt in der ganzen Reihe $(p_\nu)$, der in die Sphäre $K_{\nu-1}$ hineinfällt, wie man sich durch Induktion leicht überzeugt, da jedes $K_\nu$ in dem vorhergehenden enthalten ist. Weiter wird der Satz benutzt, daß eine Folge sukzessive in einander liegender abgeschlossener Raumteile bzw. Punktmengen immer mindestens einen Punkt bestimmt, der ihnen allen gemeinsam angehört.

[3] Zu S. 227. Dies gilt, weil der Abstand $r_{\mu\nu}$ je zweier Punkte $p_\mu, p_\nu$ nach der Definition gleichzeitig $\geqq \varrho_\mu$ und $\geqq \varrho_\nu$, also auch $\geqq \frac{\varrho_\mu + \varrho_\nu}{2}$ d. h. mindestens gleich der Summe der beiden Radien ist.

Die Menge $P_\nu$ kann so gebildet werden, daß man vom Grenzpunkte $q_\nu$ ausgehend eine Folge ineinander liegender Kugeln $k_{\nu\tau}$ mit nach Null abnehmenden Radien $\tau$ konstruiert und in jede Kugelschale zwischen zwei solcher Kugeln je einen Punkt beliebig einsetzt.

[4] Zu S. 229. In diesem § 18 wird der „Inhalt" einer Punktmenge in einer Weise definiert, die, so naheliegend sie erscheint, sich doch bisher als wenig fruchtbar erwiesen hat. Der erste wirklich brauchbare Inhaltsbegriff ist m. E. der des Lebesgueschen „Maßes" als der unteren Grenze einer die Punktmenge einschließenden *abzählbaren* Intervallmenge. Hierüber vgl. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918 und 1927, sowie die unter [1] bereits zitierte Note des Herausgebers in Crelles Journal Bd. 158.

[5] Zu S. 232. Zur Ergänzung der hier gegebenen, etwas kurz geratenen Begründung sei folgendes bemerkt. Gäbe es für *jedes* $\varrho > 0$ Punkte $q$ von $\Pi(\varrho, P - Q)$ *außerhalb* $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$, so könnte man für eine gegen Null konvergierende Reihe $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ eine Reihe entsprechender Punkte $q_n$ finden, die von Punkten $p_n$ der Menge $P - Q$ Abstände $< \varrho_n$ hätten, und diese Punkte $p_n$ besäßen mindestens einen Häufungspunkt $p'$ auf $P^{(1)}$, der zugleich auch Häufungspunkt der $q_n$ wäre. Dieser Häufungspunkt läge aber *innerhalb*, nicht auf der Begrenzung von $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$, während doch alle $q_n$ *außerhalb* $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$ liegen sollten.

[6] Zu S. 235. Die hier in Aussicht gestellte Veröffentlichung über die „mathematisch-physikalischen Anwendungen der Mengenlehre" ist als solche tatsächlich nicht erfolgt. Nur Andeutungen über diesbezügliche Ideen finden sich z. B. hier S. 275—276. Es wäre interessant gewesen, näheres darüber zu vernehmen, wenn auch die modernste Physik mit ihrer „Quantentheorie" solchen „infinitistischen" Begriffsbildungen ferner steht als je.

[7] Zu S. 239. In der Tat ist

1. $\sigma > \nu$, weil alle Intervalle mit Indizes $\leqq \nu$ schon als Vergleichs-Intervalle figurieren, zu ihnen also nicht in der verlangten Lagebeziehung stehen können;

2. $\varkappa_\sigma = \varrho$, weil alle $\varphi_\tau$ mit $\tau < \varrho$ bereits den vorangehenden Intervallen (mit Indizes $\leqq \nu$) zugeordnet sind, also $\varphi_\varrho$ das *erste* Intervall in der Reihe (5) von der verlangten Beschaffenheit darstellt.

Übrigens ist der hier bewiesene Satz nur ein Spezialfall des in III 9 § 9 gegebenen allgemeinen Satzes von der eindeutigen Charakterisierung des Ordnungstypus $\eta$ aller rationalen Zahlen eines Intervalles. Die in (3) S. 237 angegebene Intervallmenge $I$ ist eben „ähnlich" der Punktmenge $\{\varphi_\nu\}$ in ihrer räumlichen Anordnung.

[8] Zu S. 241. Eine ausführlichere Begründung finden diese Betrachtungen in der oben zitierten späteren Abhandlung III 9 in § 10—11, wo es sich um die „Fundamentalreihen" und um den „Ordnungstypus des Linearkontinuums" handelt.

[9] Zu S. 244. Das am Schlusse gegebene Versprechen hat Cantor nicht einlösen können, und die unerwarteten Schwierigkeiten, die sich bei der Durchführung des Beweises herausstellten, haben ihn zum vorzeitigen Abbruche dieser Reihe von Untersuchungen veranlaßt, deren Fortsetzung ursprünglich beabsichtigt war. Die Frage, ob das Kontinuum tatsächlich die „zweite Mächtigkeit" habe, muß auch noch heute, ein halbes Jahrhundert nach dieser Ankündigung, als ungelöstes Problem gelten. Auch die spätere Abhandlung III 9 in den Mathematischen Annalen (Bd. 46 und 49, 1895—97), die sich die Neubegründung der gesamten Mengenlehre zur Aufgabe stellt, kann nicht als die versprochene Fortsetzung betrachtet werden.

Die hiermit abgeschlossene Gesamtpublikation III 4 enthält gewissermaßen die Quintessenz des Cantorschen Lebenswerkes, so daß ihr gegenüber alle seine sonstigen Abhandlungen nur als Vorläufer oder Ergänzungen erscheinen.

## 5. Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à *n* dimensions.

Première Communication. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur.

[Acta Mathematica Bd. 2, S. 409—414 (1883).]

.......... M'étant proposé de vous communiquer les démonstrations de plusieurs théorèmes, que j'ai trouvés dans la théorie des ensembles, je vous prie de me permettre de commencer par les trois suivants, $A$, $B$ et $C$ dont j'ai fait mention dans le mémoire: »*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883». [Hier III 4, Nr. 6, § 16. S. 215ff.]

Comme j'aurai à citer ce travail en divers endroits, je prendrai la liberté de le désigner par les lettres »*Gr*».

Théorème A. »Un ensemble de points $P$ (situé dans un espace continu $G_n$ à $n$ dimensions) ayant la *première puissance* ne peut jamais être un ensemble *parfait*.»

Théorème B. »Le nombre $\alpha$ appartenant à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres, soit $P$ un ensemble de points tel, que son *ensemble dérivé* $P^{(\alpha)}$ d'ordre $\alpha$ s'évanouit, alors le *premier ensemble dérivé* $P^{(1)}$ de $P$ et *l'ensemble* $P$ lui même sont de la *première* puissance, sauf les cas où les ensembles $P$ ou $P^{(1)}$ sont finis.»

Théorème C. »$P$ étant un ensemble de points tel, que son premier ensemble *dérivé* $P^{(1)}$ est de la première puissance, il existe des nombres $\alpha$ de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres tels, qu'on a identiquement

$$P^{(\alpha)} \equiv 0,$$

et de tous ces nombres $\alpha$ il y a un qui en est le plus petit.»

Démonstration du théorème A.

D'après »*Gr.* § 10» j'appelle *ensemble parfait de points* un ensemble $S$ tel, que son premier dérivé $S^{(1)}$ coïncide avec $S$ lui-même, en sorte que tout point $s$ appartenant à $S$ est un point-limite de $S$ et qu'aussi tout point-limite $s'$ de $S$ est un point appartenant à $S$.

Soient maintenant

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots$$

les points qui constituent l'ensemble $P$; nous pouvons les imaginer donnés en cette forme de série $(p_\nu)$, parce que $P$ a d'après l'hypothèse, admise dans notre théorème, la *première puissance*.

Nous admettons que chaque point $p_\nu$ de $P$ est un *point-limite* de $P$ et nous voulons en conclure de *points-limites* de $P$ qui n'appartiennent pas comme *points* à $P$; il en suivra que $P$ ne peut pas être un ensemble parfait, car s'il en était ainsi, non seulement chaque *point* de $P$ devrait être un *point-limite* de $P$, mais aussi chaque *point-limite* de $P$ serait nécessairement un *point appartenant* à $P$.

Que l'on prenne $p_1$ pour centre d'un ensemble continu à $(n-1)$ dimensions, lieu des points de $G_n$ qui ont la distance $\varrho_1 = 1$ de $p_1$; nous nommerons un tel ensemble une sphère de rayon $\varrho_1$ et nous la désignerons ici par $K_1$.

De tous les points de la suite $(p_\nu)$ qui suivent $p_1$ soit $p_{i_2}$ le premier qui tombe dans *l'intérieur* de la sphère $K_1$ (et il y en a dans l'intérieur de $K_1$ un nombre infini, puisque le centre $p_1$ est, comme nous avons admis, un *point-limite* de $P$); nommons $\sigma_1$ la distance des points $p_1$ et $p_{i_2}$ et prenons $p_{i_2}$ comme centre d'une *seconde* sphère $K_2$, dont le rayon $\varrho_2$ est déterminé par la condition d'être la plus petite des deux quantités

$$\frac{1}{2}\sigma_1, \qquad \frac{1}{2}(\varrho_1 - \sigma_1).$$

La sphère $K_2$ est alors située toute entière à l'intérieur de $K_1$ et les points

$$p_1, p_2, \ldots, p_{i_2-1}$$

de la série $(p_\nu)$ sont situés tous en dehors de la sphère $K_2$; le rayon $\varrho_2$ de la dernière est, comme on voit, plus petit que $\frac{1}{2}$.

De même soit $p_{i_3}$ le premier point de la suite $(p_\nu)$ de tous ceux, qui suivent $p_{i_2}$ et qui tombent dans l'intérieur de la sphère $K_2$; il y en a un nombre infini, puisque $p_{i_2}$ est supposé être point-limite de $P$; nous désignons la distance des points $p_{i_2}$ et $p_{i_3}$ par $\sigma_2$ et prenons $p_{i_3}$ pour centre d'une troisième sphère $K_3$, dont le rayon $\varrho_3$ est déterminé par la condition d'être la plus petite des deux quantités

$$\frac{1}{2}\sigma_2, \qquad \frac{1}{2}(\varrho_2 - \sigma_2);$$

la sphère $K_3$ est alors située tout entière à l'intérieur de $K_2$ et les points

$$p_1, p_2, \ldots, p_{i_3-1}$$

de la série $(p_\nu)$ sont situés tous en dehors de la sphère $K_3$; le rayon $\varrho_3$ est évidemment plus petit que $\frac{1}{4}$.

On voit donc ici une *loi* d'après laquelle on peut former une suite infinie de sphères

$$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_\nu, \ldots$$

liée à une série déterminée de nombres entiers $i_\nu$ croissants avec leurs indices de sorte que l'on a

$$1 < i_2 < i_3 < \cdots.$$

Chaque sphère $K_\nu$ est située toute entière à l'intérieur de la précédente $K_{\nu-1}$.



Le centre $p_{i_\nu}$ de la sphère $K_\nu$ est défini par la condition qu'il est le premier point de la série $(p_\nu)$ de tous ceux qui suivent $p_{i_{\nu-1}}$ et qui sont situés à l'intérieur de la sphère $K_{\nu-1}$; le rayon $\varrho_\nu$ de $K_\nu$ est défini par la condition d'être le plus petit des deux nombres

$$\frac{1}{2}\sigma_{\nu-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\varrho_{\nu-1} - \sigma_{\nu-1}),$$

en désignant par $\sigma_{\nu-1}$ la distance des points $p_{i_{\nu-1}}$ et $p_{i_\nu}$.

Les points $p_1, p_2, \ldots p_{i_\nu-1}$ sont situés tous en dehors de la sphère $K_\nu$; mais il y a un nombre infini de points de la série $(p_\nu)$, qui sont situés à l'intérieur de $K_\nu$, puisque le centre $p_{i_\nu}$ est, comme nous l'avons admis, un point-limite de $P$. Comme on a évidemment

$$\varrho_\nu \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}},$$

les rayons des sphères $K_\nu$ deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$, et puisque les sphères $K_\nu$ sont emboîtées de telle sorte que $K_\nu$ est située à l'intérieur de $K_{\nu-1}$, celle-ci à l'intérieur de $K_{\nu-2}$ etc., on en conclut d'après un principe connu l'existence d'un point $t$, dont s'approchent indéfiniment les centres $p_{i_\nu}$ en sorte que l'on a

$$\lim_{\nu=\infty} p_{i_\nu} = t;$$

le point $t$ est donc *point-limite* de $P$. Mais de plus on s'assure, que $t$ n'est pas un *point* appartenant à $P$; car s'il l'était, on aurait $t = p_n$ pour une certaine valeur de l'indice $n$, équation *impossible*, puisque $t$ est situé à l'intérieur de la sphère $K_\nu$, quelque grand que soit $\nu$, quand au contraire on peut prendre $\nu$ assez grand, savoir $\nu > n$, de sorte que $p_n$ tombe en dehors de la sphère $K_\nu$.

Donc nous avons démontré, que $P$ ne peut pas être un *ensemble parfait*.

Démonstration du théorème B.

$\alpha$ étant un nombre donné quelconque de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres, on a, quel que soit l'ensemble $P$, l'identité suivante

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}) + P^{(\alpha)} \tag{1}$$

dans laquelle $\alpha'$ parcourt tous les nombres entiers positifs qui sont *inférieurs* à $\alpha$. La vérité de cette identité (1) découle facilement de la notion générale de *l'ensemble dérivé* $P^{(\alpha)}$ *de l'ordre* $\alpha$.

Lorsque $\alpha$ est un nombre tel, qu'il existe un autre $\alpha_{-1}$ qui précède $\alpha$ immédiatement, alors $P^{(\alpha)}$ est défini comme étant le *premier ensemble dérivé* de $P^{(\alpha_{-1})}$; mais lorsque $\alpha$ est un nombre tel (comme par exemple $\omega$ ou $\omega^\omega$ ou $\omega^{\omega^\omega} + \omega^2$), qu'il n'a point de voisin qui le précède immédiatement, alors $P^{(\alpha)}$ est défini comme étant le plus grand commun diviseur de tous les ensembles dérivés $P^{(\alpha')}$, dont les ordres $\alpha'$ sont *inférieurs* à $\alpha$.

D'après l'hypothèse admise dans notre théorème, $P^{(\alpha}$ s'évanouit, on a donc ici

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}).$$

Le nombre des valeurs de $\alpha'$ est ou fini ou infini selon que $\alpha$ appartient à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres; mais dans le dernier cas l'ensemble des valeurs de $\alpha'$ est de la *première* puissance (Cf. la définition de la seconde classe de nombres dans *Gr.* § 11).

Chaque terme

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de notre somme est un ensemble de points appartenant à la catégorie de ceux que j'appelle *ensembles isolés* (voir Annales math. T. 21 pag. 51) [S. 158]. Comme je l'ai démontré au même endroit, un ensemble *infini* et *isolé* est toujours de la *première puissance*. Donc le terme

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de notre somme est un ensemble ou fini, ou de la *première puissance*. Par là on conclut facilement que $P^{(1)}$ est aussi de la *première puissance*, donc aussi $P$ est de la première puissance, comme on le trouve démontré à l'endroit cité tout à l'heure.

Démonstration du théorème C.

En désignant par $\Omega$ le premier nombre de la *troisième* classe de nombres, on a, quel que soit l'ensemble $P$, l'identité suivante:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha} (P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}) + P^{(\Omega)}, \tag{2}$$

où $\alpha$ parcourt tous les nombres entiers positifs de la *première* et de la *seconde* classe de nombres.

L'ensemble $P$ est d'après l'hypothèse admise dans notre théorème tel, que son premier dérivé $P^{(1)}$ ait la *première puissance*; donc aussi les dérivés $P^{(\alpha)}$, qui sont tous des diviseurs de $P^{(1)}$, ont la même puissance, en tant qu'ils sont constitués par un nombre infini de points.

En nous appuyant maintenant sur le théorème $A$, démontré plus haut, nous concluons que la différence

$$(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$$

*ne peut pas s'annuler tant que $P^{(\alpha)}$ n'est pas zéro.*

Si donc tous les dérivés $P^{(\alpha)}$ étaient *différents* de zéro, tous les termes $(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$ de notre somme à droite de l'équation (2) le seraient de même et comme l'ensemble de ces *termes* est de la *seconde* puissance (Cf. *Gr.* § 12), il s'ensuivrait à plus forte raison, que l'ensemble de points à droite de notre équation (2) serait d'une puissance *non inférieure* à la *seconde*; ce qui serait



contraire à l'hypothèse, d'après laquelle l'ensemble $P^{(1)}$ à gauche de l'équation (2) est supposé de la *première* puissance. Donc les dérivés $P^{(\alpha)}$ ne peuvent pas être tous différents de zéro, il existe donc des nombres $\alpha$ de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres tels que l'on a

$$P^{(\alpha)} \equiv 0.$$

De ces nombres $\alpha$ il y en a un, qui est le plus petit, comme il est facile de le voir.

Dans le mémoire »*Gr.*« pag. 31, j'ai aussi indiqué une proposition se rapportant au cas où $P^{(1)}$ n'est pas de la première puissance, et qui, dans la forme où je l'ai exprimée, n'est pas tout à fait juste dans sa généralité. Comme je l'ai trouvé alors, il existe sans doute, une seule décomposition

$$P^{(1)} = R + S,$$

où $S$ est un ensemble parfait, mais $R$ un ensemble de la *première* puissance. Si passant de là je dis que $R$ est un ensemble réductible, ce n'est pas correct dans sa portée générale.

Monsieur Bendixson de Stockholm qui s'est occupé avec un succès distingué de l'examen de ma proposition, a trouvé que $R$ est toujours tel que, pour un certain $\gamma$ de la première ou de la seconde classe de nombres, on a l'équation

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) = 0.$$

Il résulte des communications que M. Bendixson a eu l'obligeance de me faire, qu'il a retrouvé d'une manière parfaitement indépendante mes développements d'alors concernant ce sujet, et qu'il les a complétés et rectifiés dans le sens indiqué. Sur ma demande, M. Bendixson a voulu bien rédiger ses recherches pour être publiées à la suite de cette communication.

**[Anmerkung.]**

Man vergleiche die ausführliche Darstellung des Gegenstandes in der zitierten Annalen-Arbeit III 4, Nr. 6 § 16, S. 215 ff und die dort gemachten Anmerkungen des Herausgebers.