Es sei

$$\frac{\omega'}{\omega} = \tau, \tag{7.}$$

$$\frac{u}{2\omega} = v, \tag{8.}$$

so wird

$$h = e^{\tau\pi i}, \tag{9.}$$

$$z = e^{v\pi i}, \tag{10.}$$

$$e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} = e^{2\omega\eta v^2}. \tag{11.}$$

Aus den obigen Formeln lassen sich in Folge der Definitionsgleichungen für $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$,

$$\sigma_\alpha u = e^{-\eta_\alpha u}\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{12.}$$

neue Ausdrücke für diese Functionen bilden. Man könnte übrigens auch ohne Weiteres die abgeleiteten Functionen als doppelt unendliche Producte von Primfactoren darstellen, deren jeder nur an einer Stelle Null wird (vgl. Kap. 12). Denn die Nullstellen sind bekannt, und das Verfahren zur Bestimmung von $e^{g(u)}$ ist nach dem Früheren vorgezeichnet.

Nimmt man nun erstens $\alpha = 1$, ersetzt also in (1.) u durch $u+\omega$ und demnach v durch $v+\frac{1}{2}$, so geht in

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi}e^{2\omega\eta v^2}\sin v\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\tau-v)\pi}{\sin n\tau\pi}\cdot\frac{\sin(n\tau+v)\pi}{\sin n\tau\pi} \tag{13.}$$

$\sin v\pi$ in $\cos v\pi$, der Zähler $\sin(n\tau-v)\pi . \sin(n\tau+v)\pi$ des allgemeinen Gliedes unter dem Productzeichen in $-\cos(n\tau-v)\pi . \cos(n\tau+v)\pi$ über. Das Argument des Exponentialfactors wird unter Hinzuziehung von $-\eta u$ (nach (12.))

$$2\omega\eta(v+\tfrac{1}{2})^2 - \eta . 2\omega v.$$

Der entstehende Ausdruck ist durch $\sigma\omega$, d. h. durch den für $u = 0$ oder $v = 0$ aus $e^{-\eta u}\sigma(u+\omega)$ hervorgehenden Werth zu dividiren. Dann ergiebt sich

$$\sigma_1 u = e^{2\omega\eta v^2}\cos v\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\tau-v)\pi}{\cos n\tau\pi}\cdot\frac{\cos(n\tau+v)\pi}{\cos n\tau\pi}. \tag{14.}$$

Bei directer Transformation der Formel (6.) ist zu beachten, dass z durch

$ze^{\frac{\pi i}{2}} = zi$ ersetzt werden muss. Es folgt

$$\sigma_1 u = e^{2\omega\eta v^2}\frac{z+z^{-1}}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n}z^{-2})}{(1+h^{2n})^2}. \tag{15.}$$

Der Schreibweise (3.) oder

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi}e^{2\omega\eta v^2}\sin v\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-h^{2n}\cos 2v\pi+h^{4n}}{(1-h^{2n})^2} \tag{16.}$$

entspricht

$$\sigma_1 u = e^{2\omega\eta v^2}\cos v\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2h^{2n}\cos 2v\pi+h^{4n}}{(1+h^{2n})^2}. \tag{17.}$$

Vermehrt man zweitens, für $\alpha = 3$, u um ω', ersetzt also v durch $v+\frac{1}{2}\tau$ multiplicirt mit $e^{-\eta' u}$ und dividirt durch $\sigma\omega'$, so erscheint als Argument der Exponentialgrösse

$$2\omega\eta(v^2+v\tau) - \eta' . 2\omega v = 2\omega\eta v^2 + 2v(\eta\omega'-\omega\eta') = 2\omega\eta v^2 + v\pi i$$

wegen $|h| < 1$ (S. 127, 130). Die Grösse z wird durch $zh^{\frac{1}{2}}$ vertreten. Vor dem Product steht, wenn jetzt die Transformation mit der Formel (6.) beginnt,

$$e^{2\omega\eta v^2}z\frac{zh^{\frac{1}{2}}-z^{-1}h^{-\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}-h^{-\frac{1}{2}}},$$

und unter dem Productzeichen

$$\frac{(1-h^{2n+1}z^2)(1-h^{2n-1}z^{-2})}{(1-h^{2n+1})(1-h^{2n-1})}.$$

Die Producte der einzelnen Theile dieses Ausdruckes können, wieder in Folge von $|h| < 1$, von einander getrennt werden; das ist ein ganz specieller Fall des auf S. 104—110 bewiesenen Satzes. Nun beginnt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-h^{2n+1}z^2}{1-h^{2n+1}} \quad \text{mit} \quad \frac{1-h^3z^2}{1-h^3},$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-h^{2n-1}z^{-2}}{1-h^{2n-1}} \quad \text{mit} \quad \frac{1-hz^{-2}}{1-h}.$$

Um das erste Product dem zweiten gleichgebildet zu machen, hat man also mit $\frac{1-hz^2}{1-h}$ zu erweitern. Vor dem Productzeichen steht dann, von $e^{2\omega\eta v^2}$

abgesehen, im Ganzen

$$z\frac{zh^{\frac{1}{4}}-z^{-1}h^{-\frac{1}{4}}}{h^{\frac{1}{4}}-h^{-\frac{1}{4}}}\,\frac{1-h}{1-hz^2} = 1.$$

Hiernach ist, wenn die beiden Theile wieder zusammengezogen werden,

$$(18.)\qquad \sigma_3 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-h^{2n-1}z^2)(1-h^{2n-1}z^{-2})}{(1-h^{2n-1})^2},$$

oder

$$(19.)\qquad \sigma_3 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2h^{2n-1}\cos 2v\pi+h^{4n-2}}{(1-h^{2n-1})^2}.$$

Die Wiedereinführung der trigonometrischen statt der Exponentialfunctionen liefert

$$(20.)\qquad \sigma_3 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((n-\frac{1}{2})\tau-v)\pi\,.\,\sin((n-\frac{1}{2})\tau+v)\pi}{\sin(n-\frac{1}{2})\tau\pi\,.\,\sin(n-\frac{1}{2})\tau\pi}.$$

Um endlich den Übergang von σu zu $\sigma_2 u$ zu machen, hätte man u um $\omega+\omega'$, also v um $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$ zu vermehren, mit $e^{-(\eta+\eta')u}$ zu multipliciren und dann durch den für $u=0$ entstehenden Ausdruck zu dividiren. Einfacher ist es,

$$\sigma_3(u+\omega) = e^{-\eta'(u+\omega)}\frac{\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma\omega'}$$

durch

$$\sigma_3\omega = e^{-\eta'\omega}\frac{\sigma(\omega+\omega')}{\sigma\omega'}$$

zu dividiren. Man erhält dann

$$(21.)\qquad \sigma_2 u = e^{-\eta u}\frac{\sigma_3(u+\omega)}{\sigma_3\omega};$$

d. h. σ_2 geht aus σ_3 in derselben Weise hervor wie σ_1 aus σ. Die entstehenden Gleichungen lauten

$$(22.)\qquad \sigma_2 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((n-\frac{1}{2})\tau-v)\pi\,.\,\cos((n-\frac{1}{2})\tau+v)\pi}{\cos(n-\frac{1}{2})\tau\pi\,.\,\cos(n-\frac{1}{2})\tau\pi},$$

$$(23.)\qquad \sigma_2 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+h^{2n-1}z^2)(1+h^{2n-1}z^{-2})}{(1+h^{2n-1})^2},$$

$$(24.)\qquad \sigma_2 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2h^{2n-1}\cos 2v\pi+h^{4n-2}}{(1+h^{2n-1})^2}.$$

Man kann den gefundenen Formeln einen allgemeineren Inhalt geben, wenn man an die Stelle von $(2\omega, 2\omega')$ ein anderes primitives Periodenpaar

$(2\bar\omega, 2\bar\omega')$ treten lässt. Es sei

$$2\bar\omega = 2p\omega+2q\omega',$$
$$2\bar\omega' = 2p'\omega+2q'\omega'$$

mit der Bedingung

$$pq'-qp' = \pm 1.$$

Der Ausdruck der σ-Function durch das unendliche Doppelproduct kann von der Wahl des primitiven Periodenpaares nicht abhängen; denn die σ-Function ist durch ihre Nullstellen vollständig bestimmt, und es muss daher gleichgiltig sein, ob man diese in der Form $w = 2m\omega+2n\omega'$ oder $w_1 = 2m_1\bar\omega+2n_1\bar\omega'$ schreibt. Aus dem Ausdruck selbst kann man dies in folgender Weise ableiten. Es sei (S. 120 (22.))

$$\sigma(u|\bar\omega,\bar\omega') = u\prod_{w_1}{}'\left\{\left(1-\frac{u}{w_1}\right)e^{\frac{u}{w_1}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_1^2}}\right\},$$

wo also das Product über alle positiven und negativen ganzen Zahlen m_1 und n_1, ausgenommen $m_1 = n_1 = 0$, zu erstrecken ist. Nun ist bei der Darstellung durch 2ω und $2\omega'$

$$w_1 = m_1(2p\omega+2q\omega')+n_1(2p'\omega+2q'\omega').$$

Schreibt man dies in der Form

$$2m\omega+2n\omega',$$

sodass

$$m = pm_1+p'n_1,\quad n = qm_1+q'n_1$$

ist, so entspricht jedem Paare ganzer Zahlen (m_1, n_1) ein ebensolches Paar (m, n), und wenn man m_1 und n_1 unabhängig von einander alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen lässt, so durchlaufen auch m und n diese Werthe. Umgekehrt gehören zu jedem Paar ganzer Zahlen (m, n) dann und nur dann auch ganzzahlige Werthe von m_1, n_1, wenn, wie hier bereits vorausgesetzt, $pq'-qp' = \pm 1$ ist (vgl. S. 64—65). Unter dieser Bedingung ist die Gesammtheit der in dem Product

$$u\prod_{w}{}'\left\{\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\} = \sigma(u|\omega,\omega')$$

enthaltenen Factoren mit der Gesammtheit der in jenem Product vorkommenden identisch, d. h.

$$\sigma(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \sigma(u\,|\,\omega, \omega').$$

Aus denselben Gründen ist auch die $\wp$-Function von der Wahl des primitiven Periodenpaares unabhängig. Betrachtet man die elliptischen und die mit ihnen zusammenhängenden Functionen als nicht nur von dem Argument u, sondern auch von den Grössen ω und ω' abhängend, so kann man sagen: Die σ-Function und die $\wp$-Function bleiben ungeändert, wenn auf ω, ω' eine homogene lineare Substitution mit der Determinante ± 1 angewendet wird; sie haben für eine solche Substitution den Charakter von Invarianten.

Von den Functionen $\sigma_\alpha u$ lässt sich nicht dasselbe behaupten, wenigstens nicht von $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$ einzeln, sondern nur von ihrer Gesammtheit. Betrachtet man z. B. die Function $\sigma_1(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$, die durch die Gleichung

$$\sigma_1(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = e^{-\tilde{\eta}_1 u}\frac{\sigma(u+\tilde{\omega}\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}{\sigma(\tilde{\omega}\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}$$

definirt ist, so hat man nach der eben bewiesenen Invarianz

$$\sigma_1(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = e^{-\tilde{\eta}_1 u}\frac{\sigma(u+\tilde{\omega}\,|\,\omega, \omega')}{\sigma(\tilde{\omega}\,|\,\omega, \omega')}. \tag{25.}$$

Da nun $\tilde{\omega} = p\omega + q\omega'$ z. B. beliebig gleich $\omega, \omega+\omega'$ oder ω' gesetzt werden darf, so geht die rechte Seite der Reihe nach in eine der drei Functionen $\sigma_1(u\,|\,\omega, \omega'), \sigma_2(u\,|\,\omega, \omega'), \sigma_3(u\,|\,\omega, \omega')$ über.

Ist

$$\wp\tilde{\omega} = e_\alpha, \quad \wp(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}') = e_\beta, \quad \wp\tilde{\omega}' = e_\gamma, \tag{26.}$$

wo α, β, γ, wie früher, von einander verschieden, also gleich den Zahlen 1, 2, 3, abgesehen von der Reihenfolge, sein sollen, so möge

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_1(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\alpha(u\,|\,\omega, \omega') \\ \sigma_2(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\beta(u\,|\,\omega, \omega') \\ \sigma_3(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\gamma(u\,|\,\omega, \omega') \end{aligned}\right. \tag{27.}$$

gesetzt werden. Von den Functionen auf den rechten Seiten können nicht zwei einander gleich werden, sonst würden nach der Formel

$$\sigma_\alpha^2 u = (\wp u - e_\alpha)\sigma^2 u$$

(S. 89) auch zwei der Grössen e_1, e_2, e_3 einander gleich sein.

Die erste Aufgabe ist, festzustellen, wie man aus dem Bildungsgesetz des neuen primitiven Periodenpaares, d. h. aus den beiden Paaren ganzer Zahlen $(pq), (p'q')$, die Werthe der Indices α, β, γ finden kann. Schon früher (S. 88) ist bewiesen worden, dass es dabei nicht sowohl auf die Werthe dieser Zahlen als auf ihre Reste für den Modul 2 ankommt, sodass für $p_1 \equiv p$, $q_1 \equiv q \mod 2$

$$\sigma_{p_1 q_1}(u) = \sigma_{pq}(u)$$

ist. Hiernach genügt es, p, q, p', q' die Werthe 0 und 1 beizulegen, wobei selbstverständlich noch $p = q = 0$, $p' = q' = 0$ auszuschliessen ist. Die Fälle, die der Bedingung

$$pq' - qp' = \pm 1$$

zufolge möglich sind, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Grösse $\tilde{\omega}$ ist darin der Reihe nach gleich $\omega, \omega+\omega', \omega'$ gesetzt; die eben genannte Bedingung ergiebt dann die zugehörigen Werthe von $\tilde{\omega}'$, und zwar sind jeder der drei Annahmen über das Zahlenpaar (pq) nur zwei für $(p'q')$ zuzuordnen, weil auch die gleichzeitigen Annahmen $p' = p$, $q' = q$ nicht zulässig sind.

	p	q	p'	q'
I	1	0	0	1
II	1	0	1	1
III	1	1	0	1
IV	1	1	1	0
V	0	1	1	0
VI	0	1	1	1

Nach der Formel (25.) gehören dabei für die Function $\sigma_1(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ die Annahmen I und II, III und IV, V und VI zusammen, da es auf $\tilde{\omega}'$ nicht ankommt; sie liefern der Reihe nach $\alpha = 1, 2, 3$. Ebenso kommt für

$$\sigma_3(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = e^{-\tilde{\eta}' u}\frac{\sigma(u+\tilde{\omega}'\,|\,\omega, \omega')}{\sigma(\tilde{\omega}'\,|\,\omega, \omega')}$$

nur das Zahlenpaar $(p'q')$ in Betracht. D. h. die Annahmen IV und V, II und VI, I und III gehören zusammen und geben $\gamma = 1, 2, 3$. Da nun die Zahlen α, β, γ stets mit den Zahlen 1, 2, 3 in ihrer Gesammtheit übereinstimmen, so lässt sich der Werth von β in jedem Falle sofort angeben, und es entsteht folgende Tabelle.

	α	β	γ
I	1	2	3
II	1	3	2
III	2	1	3
IV	2	3	1
V	3	2	1
VI	3	1	2

Hiernach kann man aus den aufgestellten Productformeln andere ableiten, in denen

$$\omega \quad \omega' \quad \eta \quad \eta' \quad \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad v \quad \tau$$

durch

$$\tilde{\omega} \quad \tilde{\omega}' \quad \tilde{\eta} \quad \tilde{\eta}' \quad \sigma_\alpha \quad \sigma_\beta \quad \sigma_\gamma \quad \frac{u}{2\tilde{\omega}} \quad \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$$

ersetzt sind. Doch sollen die Zeichen v und τ, sowie h und z in der allgemeineren Bedeutung beibehalten werden, sodass jetzt

$$\frac{u}{2\tilde{\omega}} = v, \quad e^{v\pi i} = z, \tag{28.}$$

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \tau, \quad e^{\tau\pi i} = h \tag{29.}$$

ist. Die allgemeinen Formeln lauten dann

$$\sigma u = \frac{2\tilde{\omega}}{\pi} e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}v^2} \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-h^{2n}z^2)(1-h^{2n}z^{-2})}{(1-h^{2n})^2}, \tag{30.}$$

$$\sigma_\alpha u = e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}v^2} \frac{z + z^{-1}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n}z^{-2})}{(1+h^{2n})^2}, \tag{31.}$$

$$\sigma_\beta u = e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}v^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+h^{2n-1}z^2)(1+h^{2n-1}z^{-2})}{(1+h^{2n-1})^2}, \tag{32.}$$

$$\sigma_\gamma u = e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}v^2} \prod_{u=1}^{\infty} \frac{(1-h^{2n-1}z^2)(1-h^{2n-1}z^{-2})}{(1-h^{2n-1})^2}. \tag{33.}$$

Siebzehntes Kapitel.

Weitere Umwandlung der Productausdrücke für die σ-Functionen.

Aus den gefundenen Formeln können durch Einführung der Quadratwurzeln aus den Differenzen der Grössen e_1, e_2, e_3 die in den Nennern vorkommenden Functionen von h entfernt werden.

Zunächst ergeben sich mittels der Beziehungen

$$\wp u - e_\lambda = \left(\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}\right)^2 \qquad (\lambda = \alpha, \beta, \gamma)$$

für bestimmte Werthe der Quadratwurzeln aus diesen Differenzen die nachstehenden Ausdrücke:

$$\begin{array}{lll}
\lambda = \alpha; & u = \tilde{\omega} + \tilde{\omega}', & \sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \dfrac{\sigma_\alpha(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')}{\sigma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')}, \\
 & u = \tilde{\omega}', & \sqrt{e_\gamma - e_\alpha} = \dfrac{\sigma_\alpha \tilde{\omega}'}{\sigma \tilde{\omega}'}, \\
\lambda = \beta; & u = \tilde{\omega}', & \sqrt{e_\gamma - e_\beta} = \dfrac{\sigma_\beta \tilde{\omega}'}{\sigma \tilde{\omega}'}, \\
 & u = \tilde{\omega}, & \sqrt{e_\alpha - e_\beta} = \dfrac{\sigma_\beta \tilde{\omega}}{\sigma \tilde{\omega}}, \\
\lambda = \gamma; & u = \tilde{\omega}, & \sqrt{e_\alpha - e_\gamma} = \dfrac{\sigma_\gamma \tilde{\omega}}{\sigma \tilde{\omega}}, \\
 & u = \tilde{\omega} + \tilde{\omega}', & \sqrt{e_\beta - e_\gamma} = \dfrac{\sigma_\gamma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')}{\sigma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')}.
\end{array}$$

Diese Wurzelwerthe gehören paarweise derart zusammen, dass sich immer zwei Wurzeln eines und desselben Paares auf dieselbe Differenz mit entgegengesetzten Vorzeichen beziehen. Der Zusammenhang zwischen zwei solchen Grössen ergiebt sich aus der eindeutigen Darstellung sofort. So erhält man mittels der Formeln S. 88 (4.) z. B.

$$\sqrt{e_\beta - e_\alpha} = -e^{\bar\eta(\bar\omega+\bar\omega')}\frac{\sigma\bar\omega'}{\sigma\bar\omega.\sigma(\bar\omega+\bar\omega')},$$

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = \quad e^{(\bar\eta+\bar\eta')\bar\omega}\frac{\sigma\bar\omega'}{\sigma\bar\omega.\sigma(\bar\omega+\bar\omega')},$$

also

$$\frac{\sqrt{e_\beta - e_\alpha}}{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}} = -e^{\bar\eta\bar\omega' - \bar\omega\bar\eta'} = -e^{\frac{\varepsilon\pi i}{2}},$$

$$\sqrt{e_\beta - e_\alpha} = -\varepsilon i\sqrt{e_\alpha - e_\beta},$$

wo $\varepsilon = +1$ ist, wenn der Annahme auf S. 127 entsprechend

$$\Re\left(\frac{\bar\omega'}{\bar\omega i}\right) > 0$$

vorausgesetzt wird.

Von den sechs Wurzelgrössen sollen $\sqrt{e_\beta - e_\gamma}$, $\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}$, $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$ beibehalten werden. Um den Werth der ersten aus der Formel

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = \frac{\sigma_\gamma(\bar\omega+\bar\omega')}{\sigma(\bar\omega+\bar\omega')}$$

in Verbindung mit den Gleichungen (30.) und (33.) (S. 160) zu finden, hat man

$$v = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tau, \quad z = ih^{\frac{1}{2}}$$

zu setzen. Dann wird

$$\sigma(\bar\omega+\bar\omega') = \frac{2\bar\omega}{\pi}e^{2\bar\omega\bar\eta(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau)^2}\frac{h^{\frac{1}{2}}+h^{-\frac{1}{2}}}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+h^{2n+1})(1+h^{2n-1})}{(1-h^{2n})^2},$$

$$\sigma_\gamma(\bar\omega+\bar\omega') = e^{2\bar\omega\bar\eta(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau)^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+h^{2n})(1+h^{2n-2})}{(1-h^{2n-1})^2}.$$

Es sei nun

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n}) = h_0, \tag{1.}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n}) = h_1, \tag{2.}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}) = h_2, \tag{3.}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n-1}) = h_3, \tag{4.}$$

sodass die in den Nennern von $\sigma u, \sigma_\alpha u, \sigma_\beta u, \sigma_\gamma u$ vorkommenden Functionen von h der Reihe nach gleich $h_0^2, h_1^2, h_2^2, h_3^2$ sind. Die Division von $\sigma(\bar\omega+\bar\omega')$ in $\sigma_\gamma(\bar\omega+\bar\omega')$ liefert, wenn die einzelnen Producte von einander getrennt und

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n+1}) = \frac{1}{1+h}\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}), \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-2}) = 2\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n})$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = 4\frac{\pi}{2\bar\omega}h^{\frac{1}{2}}\frac{h_1^2}{h_2^2}\frac{h_0^2}{h_2^2}.$$

Noch einfacher ergiebt sich

$$\sqrt{e_\alpha - e_\gamma} = \frac{\pi}{2\bar\omega}\frac{h_2^2}{h_3^2}\frac{h_0^2}{h_1^2},$$

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = \frac{\pi}{2\bar\omega}\frac{h_3^2}{h_2^2}\frac{h_0^2}{h_1^2}.$$

Hiernach lassen sich auch noch bestimmte Werthe der vierten Wurzeln aus $e_\beta - e_\gamma, \ldots$, mit $\sqrt{\frac{2\bar\omega}{\pi}}$ multiplicirt, als eindeutige Functionen von h darstellen:

$$\sqrt{\frac{2\bar\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = 2h^{\frac{1}{4}}\frac{h_0 h_1}{h_2 h_3}, \tag{5.}$$

$$\sqrt{\frac{2\bar\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \frac{h_0 h_2}{h_1 h_3}, \tag{6.}$$

$$\sqrt{\frac{2\bar\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = \frac{h_0 h_3}{h_1 h_2}. \tag{7.}$$

Unter $h^{\frac{1}{4}}$ wird dabei der durch die Reihe für $e^{\frac{1}{4}\tau\pi i}$ bestimmte Werth verstanden. Definirt man nun z. B. $\sqrt{\frac{2\bar\omega}{\pi}}$ als positiv, wenn $\bar\omega$ reell und positiv ist, sonst als im reellen Theile positiv, so sind die Werthe der vierten Wurzeln völlig bestimmt.

Die Ausdrücke selbst können in Folge einer zwischen h_0, h_1, h_2, h_3 stattfindenden Beziehung noch vereinfacht werden. Multiplicirt man diese vier unendlichen Producte gliedweise, so findet man

$$h_0 h_1 h_2 h_3 = (1-h^2)(1-h^4)(1-h^6)\cdots = h_0,$$

also

$$h_1 h_2 h_3 = 1, \tag{8.}$$

und demnach

$$(9.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = 2h^{\frac{1}{4}}h_0 h_1^2 = 2h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n})^2,$$

$$(10.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = h_0 h_2^2 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n-1})^2,$$

$$(11.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = h_0 h_3^2 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1-h^{2n-1})^2.$$

Ist, wie schon früher (S. 74), G die Discriminante der cubischen Gleichung $S = 0$, also

$$G = (e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2$$
$$= (e_\beta-e_\gamma)^2(e_\alpha-e_\gamma)^2(e_\alpha-e_\beta)^2,$$

und wird ein bestimmter Werth der achten Wurzel aus G durch die Formel

$$\sqrt[8]{G} = \sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}$$

erklärt, so folgt aus (9.), (10.), (11.)

$$(12.)\qquad \frac{2\tilde{\omega}}{\pi}\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G} = 2h^{\frac{1}{4}}h_0^3 = 2h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})^3.$$

Man multiplicire nun die letzte Gleichung mit der für σu, die drei, aus denen sie abgeleitet ist, der Reihe nach mit denen für $\sigma_\alpha u$, $\sigma_\beta u$, $\sigma_\gamma u$, schreibe ausserdem den Exponentialfactor wieder als Function von u, so erhält man für die σ-Functionen folgende Ausdrücke:

$$(13.)\qquad \sigma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[8]{G}}\,\frac{z-z^{-1}}{i}h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1-h^{2n}z^2)(1-h^{2n}z^{-2}),$$

$$(14.)\qquad \sigma_\alpha u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}(z+z^{-1})h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n}z^{-2}),$$

$$(15.)\qquad \sigma_\beta u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n-1}z^2)(1+h^{2n-1}z^{-2}),$$

$$(16.)\qquad \sigma_\gamma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1-h^{2n-1}z^2)(1-h^{2n-1}z^{-2}).$$

Darin ist $\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}$ als reciproker Werth der oben eingeführten Wurzelgrösse $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ definirt.

Achtzehntes Kapitel.

Die vier Theta-Functionen.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Transformation der für die σ-Functionen gefundenen Productausdrücke in unendliche Reihen. Dass eine solche Umwandlung möglich ist, ergiebt sich aus dem schon auf S. 155 herangezogenen Satze durch Vertauschung von Bezeichnungen. Die unendlichen Reihen enthalten unendlichviele Potenzen von z^2 mit positiven und negativen Exponenten. Bei der wirklichen Darstellung wird man eine der eben abgeleiteten Formeln (15.), (16.) vor (13.) und (14.) bevorzugen, weil diese im Gegensatz zu jenen vor dem Productzeichen noch $z \mp z^{-1}$ enthalten. Ferner ist $\sigma_\beta u$ noch vor $\sigma_\gamma u$ dadurch ausgezeichnet, dass die beiden Bestandtheile im zweiten und dritten Factor des allgemeinen Gliedes durch das Pluszeichen verbunden sind. Wir gehen also von $\sigma_\beta u$ aus; die Ausdrücke für die übrigen σ-Functionen lassen sich dann durch einfache Substitutionen herleiten.

Es sei

$$(1.)\qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n-1}z^2)(1+h^{2n-1}z^{-2}) = F(z),$$

und es werde

$$(2.)\qquad F(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu z^{2\nu}$$

gesetzt, wo die Coefficienten A_ν zu bestimmende Functionen von h sind. Für die Berechnung soll untersucht werden, wie $F(z)$ sich ändert, wenn das Argument u um eine Periode vermehrt wird. Die Vermehrung um $2\tilde{\omega}$ ist allerdings ohne Wirkung auf $F(z)$, denn z ändert dann nur sein Vorzeichen. Aber bei der Änderung von u um $2\tilde{\omega}$ geht v in $v+\tau$, z in hz über. In

$F(hz)$ kommt vor

$$(1+h^3z^2)(1+h^5z^2)\dots$$
$$(1+h^{-1}z^{-2})(1+hz^{-2})\dots;$$

will man $F(z)$ daraus wieder erhalten, so hat man mit $1+hz^2$ zu multipliciren und mit $1+h^{-1}z^{-2}$ zu dividiren:

$$F(z) = \frac{1+hz^2}{1+h^{-1}z^{-2}}F(hz),$$

oder

$$F(z) = hz^2 F(hz); \tag{3.}$$

also

$$\sum A_\nu z^{2\nu} = hz^2 \sum A_\nu h^{2\nu} z^{2\nu}$$
$$= \sum A_\nu h^{2\nu+1} z^{2\nu+2}.$$

Um links und rechts die Coefficienten vergleichen zu können, ersetze man rechts ν durch $\nu-1$; dann durchläuft ν wieder die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$. Aus

$$\sum A_\nu z^{2\nu} = \sum A_{\nu-1} h^{2\nu-1} z^{2\nu}$$

folgt

$$A_\nu = h^{2\nu-1} A_{\nu-1}$$

oder

$$A_\nu h^{-\nu^2} = A_{\nu-1} h^{-(\nu-1)^2};$$

d. h. $A_\nu h^{-\nu^2}$ bleibt ungeändert, wenn man ν durch $\nu-1$ ersetzt. Durch weiteres Hinabsteigen zu $\nu-2, \nu-3, \dots$ findet man

$$A_\nu h^{-\nu^2} = A_0,$$
$$A_\nu = A_0 h^{\nu^2}, \tag{4.}$$

wo A_0 noch zu bestimmen ist.

Nun lassen sich die drei unendlichen Producte, die in der Formel (1.) für $F(z)$ mit einander multiplicirt sind, aus einem und demselben Ausdruck herleiten. Es sei

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^n z) = f(h,z), \tag{5.}$$

so wird

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n}) = f(h^2,-1),$$
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}z^2) = f(h^2,h^{-1}z^2),$$
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}z^{-2}) = f(h^2,h^{-1}z^{-2}).$$

Solche Producte kommen schon bei Euler in der Introductio in analysin infinitorum vor, wo von der Theilung der Zahlen die Rede ist. Ferner werde

$$f(h,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{6.}$$

gesetzt. Da für $z=0$ $f(h,z)$ gleich Eins wird und die Reihe sich auf das Anfangsglied reducirt, so ist

$$a_0 = 1.$$

Zur Bestimmung der übrigen Coefficienten ersetze man wieder z durch hz und vergleiche die neue Function mit der ursprünglichen. Es ist

$$f(h,hz) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{n+1}z) = \frac{f(h,z)}{1+hz},$$
$$(1+hz)\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Multiplicirt man links aus, so fällt das Anfangsglied a_0 der ersten Summe gegen das Anfangsglied der rechten Seite weg; schreibt man dann in der zweiten Summe links n für $n+1$, so erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h^n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} h^n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

und durch Coefficientenvergleichung

$$(a_n + a_{n-1})h^n = a_n,$$
$$a_n = \frac{h^n}{1-h^n}a_{n-1}. \tag{7.}$$

Da a_0 bekannt ist, so sind sämmtliche Coefficienten bekannt, und zwar wird

$$a_n = \frac{h^n}{1-h^n}\,\frac{h^{n-1}}{1-h^{n-1}}\cdots\frac{h}{1-h}a_0,$$
$$a_n = \frac{h^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-h)(1-h^2)\dots(1-h^n)}. \tag{8.}$$

Setzt man nun, um die einzelnen Theile von $F(z)$ zu bilden,

$$f(h^2,h^{-1}z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n},$$

so findet man die Coefficienten c_n dadurch, dass man erstens in $a_n(h)$ h^2 für h

schreibt und zweitens die aus der Substitution $h^{-1}z^2$ für z hervorgehende Potenz von h berücksichtigt. Dann wird

$$c_n = h^{-n} a_n(h^2) = \frac{h^{n^2}}{(1-h^2)(1-h^4)\dots(1-h^{2n})}. \tag{9.}$$

Ebenso ist

$$f(h^2, h^{-1}z^{-2}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-2n},$$

wo c_n denselben Werth hat wie vorher, da nur z durch z^{-1} vertreten wird. Aus diesen Reihen setzt sich $F(z)$ in folgender Weise zusammen:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu z^{2\nu} = f(h^2,-1)(c_0 + c_1 z^2 + \cdots + c_\nu z^{2\nu} + \cdots).$$
$$(c_0 + c_1 z^{-2} + \cdots + c_\nu z^{-2\nu} + \cdots),$$

und die Coefficientenvergleichung ergiebt z. B. für irgend einen positiven Werth von ν

$$A_\nu = f(h^2,-1)(c_0 c_\nu + c_1 c_{\nu+1} + c_2 c_{\nu+2} + \cdots),$$
$$A_\nu = f(h^2,-1)\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda c_{\lambda+\nu}. \tag{10.}$$

Die Gleichung (4.) könnte hieraus sofort wieder abgeleitet werden. Benutzt man sie in der Form

$$A_0 = h^{-\nu^2} A_\nu$$

und setzt

$$f(h^2,-1)c_{\lambda+\nu} = f(h^2,-1)\frac{h^{(\lambda+\nu)^2}}{(1-h^2)(1-h^4)\dots(1-h^{2\lambda+2\nu})}$$
$$= h^{(\lambda+\nu)^2}(1-h^{2\lambda+2\nu+2})(1-h^{2\lambda+2\nu+4})\dots,$$

so findet man

$$A_0 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda h^{\lambda^2+2\lambda\nu}(1-h^{2\lambda+2\nu+2})(1-h^{2\lambda+2\nu+4})\dots. \tag{11.}$$

Dieser Ausdruck gilt für beliebige Werthe von ν, und man kann A_0 gleich seinem Grenzwerth für $\nu = \infty$ setzen, wenn ein solcher existirt. Nun ist der Annahme nach $|h| < 1$, mithin verschwinden mit unbegrenzt wachsendem ν alle Potenzen von h, in deren Exponenten ν überhaupt vorkommt; die unendlichen Producte werden zu Eins, ihre Coefficienten $c_\lambda h^{\lambda^2+2\lambda\nu}$ für $\lambda > 0$ zu Null. Nur für $\lambda = 0$ ist ν hierin garnicht enthalten. Das entsprechende Glied von A_0 ist

$$c_0(1-h^{2\nu+2})(1-h^{2\nu+4})\dots$$

und nähert sich für $\nu = \infty$ der Grenze c_0. Diese Grösse hat aber den Werth Eins, wie aus

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$$

sofort folgt. Also ist schliesslich

$$A_0 = 1,$$
$$F(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} h^{\nu^2} z^{2\nu}. \tag{12.}$$

Hiernach ist die Reihenentwickelung des in $\sigma_\beta u$ vorkommenden unendlichen Productes bekannt, und damit auch des in $\sigma_\gamma u$ enthaltenen, denn dieses ist gleich $F(zi)$.

Es sei ferner die in $\sigma_\alpha u$ auftretende Function von z und h mit $F_1(z)$ bezeichnet, also

$$(z+z^{-1})h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n}z^{-2}) = F_1(z)$$

gesetzt. Diese Grösse kann mit

$$F\left(zh^{\frac{1}{2}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n-2}z^{-2})$$
$$= \frac{z+z^{-1}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n}z^{-2})$$

verglichen werden, es ist

$$F_1(z) = zh^{\frac{1}{4}}F\left(zh^{\frac{1}{2}}\right).$$

Endlich wird

$$F_1(iz) = i(z-z^{-1})h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1-h^{2n}z^2)(1-h^{2n}z^{-2}),$$

und dieser Ausdruck kommt, vom Zeichen abgesehen, in σu vor.

Die Zusammenstellung der vier Formeln ergiebt

$$\sigma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[8]{G}}\,\frac{z}{i}h^{\frac{1}{4}}F\left(zih^{\frac{1}{2}}\right), \tag{13.}$$

$$\sigma_\alpha u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}}\,zh^{\frac{1}{4}}F\left(zh^{\frac{1}{2}}\right), \tag{14.}$$

$$(15.)\qquad \sigma_\beta u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde\omega}}\,\frac{e^{\frac{\tilde\eta u^2}{2\tilde\omega}}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}\,F(z),$$

$$(16.)\qquad \sigma_\gamma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde\omega}}\,\frac{e^{\frac{\tilde\eta u^2}{2\tilde\omega}}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}\,F(zi).$$

Die aus den rechten Seiten hervorgehenden Reihenentwickelungen können in verschiedenen Formen geschrieben werden, wenn für z und h ihre Werthe als Exponentialgrössen wieder eingesetzt oder auch h beibehalten und die Potenzen von z zu trigonometrischen Functionen von v vereinigt werden. Man kommt hierauf unmittelbar, wenn man die Glieder mit gleichen Potenzen von h zusammenzieht:

$$\begin{aligned}
F(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2}\left(z^{2n} + z^{-2n}\right)\\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2}\left(e^{2nv\pi i} + e^{-2nv\pi i}\right)\\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2}\cos 2nv\pi,\\
F(zi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^{n^2}\left(z^{2n} + z^{-2n}\right)\\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^{n^2}\cos 2nv\pi.
\end{aligned}$$

In

$$z h^{\frac{1}{4}} F\left(z h^{\frac{1}{2}}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} h^{(\nu+\frac{1}{2})^2} z^{2\nu+1}$$

hat man zu demselben Zweck die Glieder mit $\nu = n$ und $\nu = -(n+1)$ zusammenzunehmen. Das allgemeine Glied heisst dann

$$h^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\left(z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\right) = 2h^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\cos(2n+1)v\pi.$$

Ebenso ist in der Reihe für σu zu verfahren, nur erhalten dort die Potenzen von z, die mit derselben Potenz von h multiplicirt sind, entgegengesetzte Vorzeichen. Das allgemeine Glied wird:

$$\frac{(-1)^n}{i}\,h^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\left(z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\right) = 2(-1)^n h^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\sin(2n+1)v\pi.$$

Für diese Reihen sollen, wenn mit der in σu vorkommenden begonnen wird, folgende Bezeichnungen gelten, in die das in h enthaltene Periodenverhältniss τ aufgenommen wird:

$$\begin{aligned}
(17.)\quad & 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\sin(2n+1)v\pi = 2h^{\frac{1}{4}}\sin v\pi - 2h^{\frac{9}{4}}\sin 3v\pi\\
&\qquad + 2h^{\frac{25}{4}}\sin 5v\pi - \cdots = \vartheta_0(v\,|\,\tau),\\
(18.)\quad & 2\sum_{n=0}^{\infty} h^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\cos(2n+1)v\pi = 2h^{\frac{1}{4}}\cos v\pi + 2h^{\frac{9}{4}}\cos 3v\pi\\
&\qquad + 2h^{\frac{25}{4}}\cos 5v\pi + \cdots = \vartheta_1(v\,|\,\tau),\\
(19.)\quad & 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2}\cos 2nv\pi = 1 + 2h\cos 2v\pi + 2h^4\cos 4v\pi\\
&\qquad + 2h^9\cos 6v\pi + \cdots = \vartheta_2(v\,|\,\tau),\\
(20.)\quad & 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n h^{n^2}\cos 2nv\pi = 1 - 2h\cos 2v\pi + 2h^4\cos 4v\pi\\
&\qquad - 2h^9\cos 6v\pi + \cdots = \vartheta_3(v\,|\,\tau).
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke der σ-Functionen durch die ϑ-Functionen werden:

$$(21.)\qquad \sigma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde\omega}}\,\frac{e^{\frac{\tilde\eta u^2}{2\tilde\omega}}}{\sqrt[8]{G}}\,\vartheta_0\left(\frac{u}{2\tilde\omega}\,\middle|\,\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right),$$

$$(22.)\qquad \sigma_\alpha u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde\omega}}\,\frac{e^{\frac{\tilde\eta u^2}{2\tilde\omega}}}{\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}}\,\vartheta_1\left(\frac{u}{2\tilde\omega}\,\middle|\,\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right),$$

$$(23.)\qquad \sigma_\beta u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde\omega}}\,\frac{e^{\frac{\tilde\eta u^2}{2\tilde\omega}}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}\,\vartheta_2\left(\frac{u}{2\tilde\omega}\,\middle|\,\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right),$$

$$(24.)\qquad \sigma_\gamma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde\omega}}\,\frac{e^{\frac{\tilde\eta u^2}{2\tilde\omega}}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{2\tilde\omega}\,\middle|\,\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right).$$

Diese Formeln gestatten, auch die vorkommenden Wurzelgrössen, die auf S. 164 durch unendliche Producte dargestellt worden sind, in Form von Reihen auszudrücken. Da für $u = 0$ $\sigma_\alpha u = 1$ wird, so hat man aus (22.)

$$\begin{aligned}
(25.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} &= \vartheta_1(0\,|\,\tau) = 2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + \cdots\\
&= 2h^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty} h^{n(n+1)},
\end{aligned}$$

und ebenso aus (23.) und (24.)

$$(26.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \vartheta_2(0|\tau) = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots,$$

$$(27.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = \vartheta_3(0|\tau) = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots.$$

Sind beispielsweise e_1, e_2, e_3 reell, so giebt es ein primitives Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ mit einer reellen positiven und einer positiv imaginären Periode. Es sei dann $\tilde{\omega} = \omega$, wozu $\alpha = 1$ gehört, und ferner $\beta = 2$, $\gamma = 3$. Wegen

$$\frac{\omega'}{\omega} = \mu i, \quad \mu > 0$$

ist

$$h = e^{-\mu\pi}$$

reell, positiv und kleiner als Eins. Die Werthe der beiden Reihen auf den rechten Seiten von (25.) und (26.) sind, wie unmittelbar zu sehen, reell und positiv. Von der dritten kann man dies in folgender Art beweisen. Für hinreichend kleine Werthe von h ist $\vartheta_3(0|\tau)$ sicher positiv. Um negativ zu werden, müsste es der Stetigkeit wegen durch Null hindurchgehen. Nun verschwindet aber $\vartheta_3(v|\tau)$ allgemein nur dann, wenn $\sigma_3(u|\omega, \omega')$ verschwindet, also für

$$u = 2m\omega + 2(n - \tfrac{1}{2})\omega'.$$

Welches auch die Werthe von ω und $|\omega'|$ sein mögen, so ist hierunter kein reeller Werth enthalten.

Hiernach ergeben sich aus den obigen Formeln, nachdem $\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}$ als positiv erklärt ist (S. 163), die Werthe der vierten Wurzeln $\sqrt[4]{e_2 - e_3}$, $\sqrt[4]{e_1 - e_3}$, $\sqrt[4]{e_1 - e_2}$ ebenfalls als positiv.

Was die Darstellung von e_1, e_2, e_3 selbst durch $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ angeht, so folgt diese aus (25.), (26.), (27.), nämlich

$$e_\beta - e_\gamma = \left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 \vartheta_1^4(0),$$

$$e_\alpha - e_\gamma = \left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 \vartheta_2^4(0),$$

$$e_\alpha - e_\beta = \left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 \vartheta_3^4(0),$$

in Verbindung mit

$$e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0$$

in der Form

$$(28.)\qquad \begin{cases} e_\alpha = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 (\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)) \\ e_\beta = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 (\vartheta_1^4(0) - \vartheta_3^4(0)) \\ e_\gamma = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 (\vartheta_1^4(0) + \vartheta_2^4(0)). \end{cases}$$

Die drei hierin vorkommenden Werthe der Theta-Functionen für das Argument Null sind durch eine einfache Relation verbunden. Da nämlich in (25.), (26.), (27.) nur die Differenzen der Grössen e_λ auftreten, so ergiebt sich

$$(29.)\qquad \vartheta_1^4(0) + \vartheta_3^4(0) = \vartheta_2^4(0).$$

Man kann auch die Function ϑ_0 oder vielmehr ihre erste Ableitung für $v = 0$ in die Relationen einbeziehen, indem man die Gleichung (21.) hinzunimmt. Es ist (S. 32)

$$\sigma u = u + c_1 u^5 + \cdots = 2\tilde{\omega} v + \cdots,$$

$$e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}_1 v^2} = 1 + 2\tilde{\omega}\tilde{\eta}_1 v^2 + \cdots,$$

$$\vartheta_0(v) = v\vartheta_0'(0) + \tfrac{1}{6} v^3 \vartheta_0'''(0) + \cdots.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von v^1 ergiebt sich

$$2\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{1}{\sqrt[8]{G}}\,\vartheta_0'(0),$$

d. h.

$$(30.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G} = \frac{1}{2\tilde{\omega}}\vartheta_0'(0)$$

oder, da

$$\vartheta_0'(v) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) h^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \cos(2n+1)v\pi$$

ist,

$$(31.)\qquad \begin{aligned} \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G} &= \frac{\pi}{\tilde{\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) h^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \\ &= \frac{\pi}{\tilde{\omega}} h^{\frac{1}{4}} (1 - 3h^{1\cdot 2} + 5h^{2\cdot 3} - 7h^{3\cdot 4} + \cdots). \end{aligned}$$

Nun war

$$\sqrt[8]{G} = \sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}\,\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\,\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta},$$

also wird

$$(32.)\qquad \vartheta_0'(0) = \pi\,\vartheta_1(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0).$$

Endlich kann man aus derselben Potenzentwickelung einen Ausdruck von $\tilde{\eta}$ mittels der Theta-Reihen ableiten. Ein Glied mit v^3 kommt auf der linken Seite der Gleichung (21.) nicht vor; die Nullsetzung des Coefficienten dieser Potenz auf der rechten Seite liefert

$$(33.)\qquad \begin{aligned} 2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -\frac{1}{6}\,\frac{\vartheta_0'''(0)}{\vartheta_0'(0)} \\ &= \frac{\pi^2}{6}\,\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^3 h^{n(n+1)}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,h^{n(n+1)}} \\ &= \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h^{1\cdot 2}+5^3h^{2\cdot 3}-7^3h^{3\cdot 4}+\cdots}{1-3h^{1\cdot 2}+5h^{2\cdot 3}-7h^{3\cdot 4}+\cdots}. \end{aligned}$$

Aus den übrigen Beziehungen zwischen σ- und ϑ-Functionen ergeben sich veränderte Ausdrücke für dieselbe Grösse. Es ist, wie aus $\sigma_\alpha u = \sigma u\sqrt{\wp u - e_\alpha}$ und den Reihenentwickelungen von σu und $\wp u$ folgt,

$$\sigma_\alpha u = 1 - \tfrac{1}{2}e_\alpha u^2 + \cdots = 1 - 2e_\alpha\tilde{\omega}^2 v^2 + \cdots,$$

und ferner

$$\vartheta_1(v) = \vartheta_1(0) + \tfrac{1}{2}\vartheta_1''(0)\,v^2 + \cdots.$$

Behält man in (22.) den Coefficienten von v^2 bei, so findet man

$$-2e_\alpha\tilde{\omega}^2\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = \frac{1}{2}\vartheta_1''(0) + 2\tilde{\omega}\tilde{\eta}\,\vartheta_1(0).$$

Die vierte Wurzel kann hieraus mittels (25.) entfernt werden, und die Zusammenstellung der entstehenden Gleichung mit denen, die in derselben Weise aus (23) und (24.) hervorgehen, liefert

$$(34.)\qquad \left\{ \begin{aligned} 2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\alpha\tilde{\omega}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_1''(0)}{\vartheta_1(0)} \\ 2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\beta\tilde{\omega}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} \\ 2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\gamma\tilde{\omega}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} \end{aligned} \right.$$

oder

$$(35.)\qquad \left\{ \begin{aligned} 2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\alpha\tilde{\omega}^2 + \frac{\pi^2}{2}\,\frac{1+3^2h^{1\cdot 2}+5^2h^{2\cdot 3}+\cdots}{1+h^{1\cdot 2}+h^{2\cdot 3}+\cdots} \\ 2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\beta\tilde{\omega}^2 + 4\pi^2\,\frac{h+4h^4+9h^9+\cdots}{1+2h+2h^4+2h^9+\cdots} \\ 2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\gamma\tilde{\omega}^2 - 4\pi^2\,\frac{h-4h^4+9h^9-\cdots}{1-2h+2h^4-2h^9+\cdots}. \end{aligned} \right.$$

Neunzehntes Kapitel.

Die allgemeine Theta-Function.

Die Theta-Functionen sind von Jacobi in die Analysis eingeführt worden. In seinem Werke Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum (1829) kommen erst zwei von ihnen vor, die mit $\Theta(u)$ und $\mathrm{H}(u)$ bezeichnet werden; und zwar stimmt $\mathrm{H}(u)$ überein mit der Reihe, durch die wir σu dargestellt haben, $\Theta(u)$ mit der in $\sigma_3 u$ auftretenden. Die hier mit h bezeichnete Grösse heisst bei Jacobi q, und demgemäss erscheinen die Functionen ϑ als abhängig von den beiden Argumenten v und q. Den Functionen

$$\vartheta_0(v|\tau), \quad \vartheta_1(v|\tau), \quad \vartheta_2(v|\tau), \quad \vartheta_3(v|\tau)$$

entsprechen bei Jacobi

$$\vartheta_1(v\pi, q), \quad \vartheta_2(v\pi, q), \quad \vartheta_3(v\pi, q), \quad \vartheta(v\pi, q).$$

Man hat also, um zu den Jacobischen Functionen überzugehen, überall den Index um eine Einheit zu vermehren und den Index 4 wegzulassen.

Während Jacobi bei der Begründung der elliptischen Functionen ursprünglich von der Umkehrung eines Integrals ausgegangen war, hat er später den Gang der Theorie ganz geändert. Unter der Voraussetzung, dass in

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u$$

x und k reell sind, konnte man leicht beweisen, dass $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ u. s. w. reguläre Functionen von u sind. Sobald man aber $\sin\operatorname{am} u$ allgemein für complexe Werthe von u und k erklären wollte, stiess man auf Schwierigkeiten. Sie hatten hauptsächlich darin ihren Grund, dass man die Theorie der Functionen complexer Argumente damals noch nicht so weit ausgebildet

hatte, um sich von der Bedeutung eines Integrals mit complexer oberer Grenze eine hinreichend genaue Vorstellung machen zu können. In der obigen Gleichung zwischen x und u gehören zu einem Werthe von x unendlich viele Werthe von u. Hat man einen solchen, so ergiebt sich ein zweiter in der Form $2K-u$, wo

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

und dann alle übrigen durch Addition einer beliebigen Periode. Die Aufgabe wäre nun gewesen, aus der Theorie der complexen Integrale nachzuweisen, dass das elliptische Integral alle diese unendlich vielen Werthe hat. Dann aber ist es leicht zu zeigen, dass umgekehrt, wenn x als Function von u betrachtet wird, x eine einwerthige Function von u ist. Jacobi bemerkt in seinen hinterlassenen Papieren, dass diese Schwierigkeit ihn bewogen habe, den ursprünglich eingeschlagenen Weg zu verlassen. Er nimmt die Theta-Reihen als gegeben an, gleichgiltig wie sie gefunden sind, und untersucht sie. Zuerst zeigt er, dass sie unter der hier immer festgehaltenen Voraussetzung über τ reguläre Functionen dieser Grösse sind, sodann, wie die vier Reihen aus einander entspringen. Weitere Sätze führen auf die Additionstheoreme der elliptischen Functionen. Endlich beweist Jacobi die Existenz einer Differentialgleichung erster Ordnung von der bekannten Form. Er bemerkt in jener Notiz: Wenn einst die Theorie der Integrale mit complexen Grenzen so ausgebildet sein wird, dass man sofort in die functionale Beziehung zwischen u und der oberen Grenze eine Einsicht erhält, so wird es vortheilhafter sein, von dem Integral auszugehen.

Nach den Formeln auf S. 169—171 erscheinen die vier Functionen ϑ ursprünglich, d. h. vor Einführung trigonometrischer Functionen, als Reihen, die nach beiden Seiten in's Unendliche fortschreiten. Es ist

$$(1.) \qquad \vartheta_0(v|\tau) = \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1},$$

$$(2.) \qquad \vartheta_1(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1},$$

$$(3.) \qquad \vartheta_2(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^{n^2} z^{2n},$$

$$(4.) \qquad \vartheta_3(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h^{n^2} z^{2n}.$$

Setzt man für h und z die Exponentialgrössen ein, durch die sie definirt sind (S. 160), so findet man

$$
\begin{aligned}
\vartheta_0(v\,|\,\tau) &= \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{((n+\frac{1}{2})^2\tau+(2n+1)v)\pi i},\\
\vartheta_1(v\,|\,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{((n+\frac{1}{2})^2\tau+(2n+1)v)\pi i},\\
\vartheta_2(v\,|\,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{(n^2\tau+2nv)\pi i},\\
\vartheta_3(v\,|\,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{(n^2\tau+2nv)\pi i}.
\end{aligned}
$$

Auch kann man noch $(-1)^n$ in dem allgemeinen Gliede von ϑ_3, $\frac{1}{i}(-1)^n$ in dem von ϑ_0 als Exponentialgrösse schreiben und erhält dann, unter Weglassung des zweiten Arguments τ,

$$\vartheta_0(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{(n+\frac{1}{2})(2v-1+(n+\frac{1}{2})\tau)\pi i}, \tag{5.}$$

$$\vartheta_1(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{(n+\frac{1}{2})(2v+(n+\frac{1}{2})\tau)\pi i}, \tag{6.}$$

$$\vartheta_2(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{n(2v+n\tau)\pi i}, \tag{7.}$$

$$\vartheta_3(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{n(2v-1+n\tau)\pi i}. \tag{8.}$$

Alle vier Ausdrücke können in die eine Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(2v+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\tau\right)\pi i} = \vartheta(v;\mu,\nu) \tag{9.}$$

zusammengefasst werden, wobei μ nur die Werthe -1 und 0, ν die Werthe 1 und 0 anzunehmen hat. Es ist nämlich

$$
\left\{
\begin{aligned}
\vartheta_0(v) &= \vartheta(v;-1,1)\\
\vartheta_1(v) &= \vartheta(v;\ \ \ 0,1)\\
\vartheta_2(v) &= \vartheta(v;\ \ \ 0,0)\\
\vartheta_3(v) &= \vartheta(v;-1,0).
\end{aligned}
\right. \tag{10.}
$$

Die vier Functionen genügen, wie die Differentiation von (9.) erkennen lässt, einer und derselben partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = 4\pi i\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}. \tag{11.}$$

Multiplicirt man, den Gleichungen S. 171 (21.), (22.), (23.), (24.) gemäss, die ϑ-Reihen mit $e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}$ und setzt

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right)\pi i} = \Theta(u;\mu,\nu), \tag{12.}$$

so sieht man, dass die σ- und ϑ-Functionen übereinstimmend in dem Ausdruck

$$C\Theta(u;\mu,\nu)$$

enthalten sind, wo der constante Factor C für die verschiedenen σ-Functionen verschiedene Werthe hat, $\tilde{\eta}$ aber eine Constante bedeutet, die für die ϑ-Functionen gleich Null, für die σ-Functionen gleich $\frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\omega}$ zu setzen ist. μ und ν haben die oben angegebenen speciellen Werthe. Abgesehen davon heisst $\Theta(u;\mu,\nu)$ eine Θ-Function mit den Parametern μ und ν.

Für die allgemeine Theorie der Θ-Functionen ist es wichtig, dass man die Function mit zwei Parametern aus $\Theta(u;0,0)$ durch Vermehrung des Arguments um eine passend gewählte, von den Parametern abhängige Grösse und Multiplication mit einem Exponentialfactor herleiten kann. Es sei

$$\Theta(u;0,0) = \Theta(u). \tag{13.}$$

Man bilde $\Theta(u+\overline{\omega})$, wo

$$\overline{\omega} = \mu\tilde{\omega}+\nu\tilde{\omega}' \tag{14.}$$

sein soll. Der Exponent im allgemeinen Gliede setzt sich dann zusammen aus dem Aggregat, das in $\Theta(u;\mu,\nu)$ als Exponent vorkommt, und den Gliedern

$$\frac{\tilde{\eta}u}{\tilde{\omega}}(\mu\tilde{\omega}+\nu\tilde{\omega}')-\frac{\nu u\pi i}{2\tilde{\omega}}+\frac{\tilde{\eta}}{2\tilde{\omega}}(\mu\tilde{\omega}+\nu\tilde{\omega}')^2-\frac{\nu^2\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\,\frac{\pi i}{4}-\frac{\mu\nu\pi i}{2}.$$

Diese können vereinfacht werden, wenn man eine durch die Gleichung

$$\tilde{\eta}\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}\tilde{\eta}' = \frac{\pi i}{2} \tag{15.}$$

definirte Grösse $\tilde{\eta}'$ einführt. Der Coefficient von u wird nämlich $\mu\tilde{\eta}+\nu\tilde{\eta}'$, und die von u freien Glieder erhalten die Form

$$\frac{\mu\tilde{\omega}+\nu\tilde{\omega}'}{2}(\mu\tilde{\eta}+\nu\tilde{\eta}')-\frac{\mu\nu\pi i}{4}.$$

Mithin ist

$$(16.)\qquad \Theta(u+\mu\tilde\omega+\nu\tilde\omega') = \Theta(u;\mu,\nu)\, e^{(\mu\tilde\eta+\nu\tilde\eta')\left(u+\frac{\mu\tilde\omega+\nu\tilde\omega'}{2}\right)-\frac{\mu\nu\pi i}{4}},$$

oder umgekehrt, wenn noch, dem Ansatz (14.) entsprechend,

$$(17.)\qquad \mu\tilde\eta+\nu\tilde\eta' = \bar\eta$$

geschrieben wird,

$$(18.)\qquad \Theta(u;\mu,\nu) = \Theta(u+\bar\omega)\, e^{-\bar\eta\left(u+\frac{1}{2}\bar\omega\right)+\frac{\mu\nu\pi i}{4}}.$$

Diese Gleichung ist deshalb von Bedeutung, weil sie gestattet, die Untersuchung der allgemeinen Theta-Function auf die der Function $\Theta(u)$ zurückzuführen. Das Argument der Exponentialfunction in dem allgemeinen Gliede der Reihe, die die σ- und ϑ-Functionen umfasst, nämlich, für $C = e^c$,

$$\frac{\tilde\eta u^2}{2\tilde\omega} + \left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{u}{\tilde\omega}+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right)\pi i + c,$$

ist eine vollständige ganze Function zweiten Grades der Variablen u und der ganzen Zahl n, über die summirt wird. Setzt man sie gleich

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}un + a_{22}n^2 + 2a_{13}u + 2a_{23}n + a_{33},$$

so haben $a_{11}, \dots a_{33}$ folgende Werthe:

$$a_{11} = \frac{\tilde\eta}{2\tilde\omega},\quad 2a_{12} = \frac{\pi i}{\tilde\omega},\quad a_{22} = \frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\pi i,$$

$$2a_{13} = \frac{\nu\pi i}{2\tilde\omega},\quad 2a_{23} = \left(\mu+\frac{\nu\tilde\omega'}{2\tilde\omega}\right)\pi i,\quad a_{33} = \frac{\nu}{2}\left(\mu+\frac{\nu}{2}\,\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right)\pi i + c.$$

Denkt man sich umgekehrt $a_{11}, \dots a_{33}$ gegeben, so wird $\tilde\omega$ durch die zweite dieser Gleichungen bestimmt, dann $\tilde\omega'$ und $\tilde\eta$ durch die dritte und erste, ν und sodann μ durch die vierte und fünfte, c durch die letzte Gleichung. Das heisst, man kann, wie auch $a_{11}, \dots a_{33}$ gewählt sein mögen,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a_{11}u^2+2a_{12}un+a_{22}n^2+2a_{13}u+2a_{23}n+a_{33}} = C\Theta(u;\mu,\nu)$$

setzen, bei passender Annahme der sechs Constanten $\tilde\omega, \tilde\omega', \tilde\eta, \mu, \nu, C$. Freilich hat dieses Resultat nur eine Bedeutung, wenn die Exponentialreihe con-

vergirt. Wegen des eben bewiesenen Zusammenhanges zwischen $\Theta(u;\mu,\nu)$ und $\Theta(u;0,0)$ kommt es aber bei der Beurtheilung der Convergenz nur auf diese Reihe an. Für $\mu=0$, $\nu=0$ wird $a_{13}=0$, $a_{23}=0$, $a_{33}=c$; mithin handelt es sich, von dem constanten Factor C abgesehen, um die Convergenz von

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a_{11}u^2+2a_{12}un+a_{22}n^2}.$$

Nun ist

$$\Theta(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\tilde\eta u^2}{2\tilde\omega}+n\left(\frac{u}{\tilde\omega}+n\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right)\pi i} = e^{\frac{\tilde\eta u^2}{2\tilde\omega}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{2\tilde\omega}\,\middle|\,\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right),$$

und für die Convergenz der Reihe ϑ_3 gilt die Bedingung

$$\Re\left(\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega i}\right) > 0.$$

Allerdings ist sie nur unter den Voraussetzungen abgeleitet worden, die in der Theorie der elliptischen Functionen gelten, dass nämlich $(2\tilde\omega, 2\tilde\omega')$ ein primitives Periodenpaar der $\wp$-Function bedeute, die der ganzen Theorie zu Grunde liegt, und dass

$$\tilde\eta = \frac{\sigma'}{\sigma}\tilde\omega$$

sei. Aber der Werth von $\tilde\eta$ ist offenbar nicht von Belang, da $\tilde\eta$ in ϑ_3 nicht vorkommt, vielmehr der Factor $e^{\frac{\tilde\eta u^2}{2\tilde\omega}}$ herausgezogen worden ist, wie man dies von vornherein auch mit $e^{a_{11}u^2}$ hätte machen können. Und ebenso ist die Bedeutung von $2\tilde\omega$ und $2\tilde\omega'$ als Perioden in der Theorie der ϑ-Reihen ganz in den Hintergrund getreten. Man sieht daher, dass die obige Convergenzbedingung nur in die neuen Bezeichnungen umgesetzt zu werden braucht. Da

$$a_{22} = -\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega i}\pi$$

ist, so lautet sie

$$\Re(a_{22}) < 0.$$

Ganz direct kann diese Bedingung in folgender Weise abgeleitet werden.

Zunächst sieht man sofort, dass sie nothwendig ist. Denn wäre $\Re(a_{22}) \geqq 0$, so würde in

$$\Theta(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a_{22} n^2}$$

das allgemeine Glied nicht mit wachsendem n beliebig klein werden.

Um zu untersuchen, ob die Bedingung auch hinreicht, setze man

$$a_{11} u^2 + 2 a_{12} u n + a_{22} n^2 = a_{22}\left(n + \frac{a_{12}}{a_{22}} u\right)^2 + \left(a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}}\right) u^2,$$

$$\Theta(u) = e^{\left(a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}}\right) u^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a_{22}\left(n + \frac{a_{12}}{a_{22}} u\right)^2},$$

wo es auf den Exponentialfactor vor dem Summenzeichen nicht ankommt. Es sei

$$a_{22} = \alpha + \beta i,$$

$$\frac{a_{12}}{a_{22}} u = \xi + \eta i,$$

also der Exponent im allgemeinen Gliede

$$(\alpha + \beta i)((n + \xi)^2 + 2(n + \xi)\eta i - \eta^2).$$

Betrachtet man die Reihe der absoluten Beträge,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(n+\xi)^2 - \alpha\eta^2 - 2\beta(n+\xi)\eta} = e^{-\frac{\beta^2\eta^2}{\alpha} - \alpha\eta^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\alpha\left(n + \xi - \frac{\beta\eta}{\alpha}\right)^2},$$

und setzt

$$\xi - \frac{\beta\eta}{\alpha} = \zeta,$$

so kommt die absolute Convergenz der Reihe für $\Theta(u)$ auf die Convergenz von

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(n+\zeta)^2}$$

hinaus. Bei positivem n wird der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder,

$$\frac{e^{\alpha(n+1+\zeta)^2}}{e^{\alpha(n+\zeta)^2}} = e^{2\alpha n} e^{\alpha(1+2\zeta)},$$

für $\Re(a_{22}) = \alpha < 0$ mit wachsendem n kleiner als Eins, ja sogar beliebig

klein. Ist n negativ, $n = -m$, handelt es sich also um den Bestandtheil

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{\alpha(-m+\zeta)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{\alpha(m-\zeta)^2},$$

so bleibt das Ergebniss bestehen, weil sich nur das Zeichen von ζ geändert hat. Demnach ist die Bedingung

(19.) $$\Re(a_{22}) < 0$$

für die Convergenz der allgemeinen Theta-Reihe nothwendig und hinreichend.

Zwanzigstes Kapitel.

Die Theta-Function mit zwei Parametern. Verwandlungsformeln für die Θ- und σ-Functionen.

Im zehnten Kapitel ist untersucht worden, wie die σ-Functionen sich ändern, wenn das Argument um eine der Grössen $2\tilde{\omega}$ oder $2\tilde{\omega}'$ vermehrt wird. Die Resultate wurden gebraucht, um das periodische Verhalten der σ-Quotienten genau festzustellen. Die entsprechenden Ergebnisse für die ϑ-Functionen würde man mit einem Blick übersehen können, wenn man die Veränderung der Θ-Function mit zwei Parametern bei der Vermehrung des Arguments um eine beliebige Grösse kennte. Denn von dieser Function konnte man zu den ϑ-Functionen dadurch übergehen, dass man $\tilde{\eta} = 0$ setzte, ohne Rücksicht darauf, welche Bedeutung dieser Grösse ursprünglich zukam, und ausserdem noch andere Constanten specialisirte (S. 179). Man steht daher vor der Aufgabe, die Änderung von $\Theta(u;\mu,\nu)$ bei Vermehrung von u um einen beliebigen Zuwachs zu untersuchen, unter der einzigen Annahme, dass die vorhin ermittelte Convergenzbedingung gelte. In Folge dieser Bedingung können $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ kein reelles Verhältniss haben, und man darf daher eine beliebige complexe Grösse $\overline{\omega}'$ in die Form

$$\mu'\tilde{\omega} + \nu'\tilde{\omega}'$$

setzen, für μ' und ν' als reelle Grössen.

Nach der Formel S. 180 (18.) wird nun

$$\Theta(u+\overline{\omega}';\mu,\nu) = \Theta(u+\overline{\omega}+\overline{\omega}')\, e^{-\overline{\eta}\left(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}+\overline{\omega}'\right)+\frac{\mu\nu\pi i}{4}}.$$

Da aber

$$\overline{\omega}+\overline{\omega}' = (\mu+\mu')\tilde{\omega} + (\nu+\nu')\tilde{\omega}'$$

ist, so kann man dieselbe Formel auch umgekehrt dazu verwenden, $\Theta(u+\overline{\omega}+\overline{\omega}')$ durch eine Θ-Function mit den beiden Parametern $\mu+\mu'$, $\nu+\nu'$ darzustellen. Setzt man, entsprechend S. 179 (14.) und S. 180 (17.),

$$\text{(1.)} \qquad \mu'\tilde{\omega}+\nu'\tilde{\omega}' = \overline{\omega}',$$

$$\text{(2.)} \qquad \mu'\tilde{\eta}+\nu'\tilde{\eta}' = \overline{\eta}',$$

so erhält man (S. 180 (16.))

$$\Theta(u+\overline{\omega}+\overline{\omega}') = \Theta(u;\mu+\mu',\nu+\nu')\, e^{(\overline{\eta}+\overline{\eta}')\left(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}+\frac{1}{2}\overline{\omega}'\right)-(\mu+\mu')(\nu+\nu')\frac{\pi i}{4}}.$$

Bei der Elimination von $\Theta(u+\overline{\omega}+\overline{\omega}')$ erscheint als Argument des Exponentialfactors

$$\overline{\eta}'\left(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}'\right)-\frac{1}{2}(\overline{\eta}\overline{\omega}'-\overline{\omega}\overline{\eta}')-(\mu\nu'+\mu'\nu+\mu'\nu')\frac{\pi i}{4}.$$

Nun ist nach (1.) und (2.)

$$\overline{\eta}\overline{\omega}'-\overline{\omega}\overline{\eta}' = (\mu\nu'-\mu'\nu)(\tilde{\eta}\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}\tilde{\eta}'),$$

und weiter, da $\tilde{\eta}'$ durch die Gleichung

$$\tilde{\eta}\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}\tilde{\eta}' = \frac{\pi i}{2}$$

erklärt war,

$$\overline{\eta}\overline{\omega}'-\overline{\omega}\overline{\eta}' = (\mu\nu'-\mu'\nu)\frac{\pi i}{2}.$$

Demnach wird schliesslich

$$\text{(3.)} \quad \Theta(u+\overline{\omega}';\mu,\nu) = e^{-\frac{\mu\nu'\pi i}{2}}\,\Theta(u;\mu+\mu',\nu+\nu')\, e^{\overline{\eta}'\left(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}'\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}.$$

Bei einer beliebigen Veränderung des Arguments wird also die Θ-Function mit zwei Parametern übergeführt in eine Θ-Function mit veränderten Parametern, multiplicirt mit zwei Exponentialfactoren von verschiedener Beschaffenheit. Der erste enthält einen der beiden Parameter der gegebenen Function, der zweite nur Grössen, die mit dem Bildungsgesetz des Increments $\overline{\omega}'$ zusammenhängen. Dieser zweite Factor bleibt mithin für alle Θ-Functionen derselbe.

Nun hatten in den Theta-Reihen, die aus der Theorie der elliptischen Functionen entspringen, die Parameter μ und ν nur die Werthe -1, 0 und $+1$, 0. Um die Formel (3.) auf diesen Fall anwenden zu können, braucht man eine Relation, durch die man, wenn μ' und ν' ganze Zahlen sind, die neuen Parameter $\mu+\mu'$, $\nu+\nu'$ wieder auf jene speciellen Werthe zurückführen kann. Es ist leicht, die Veränderung zu beurtheilen, die die Function

$$\Theta(u;\mu,\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right)\pi i}$$

erfährt, wenn die Parameter um gerade Zahlen vermehrt werden. Ersetzt man μ durch $\mu+2p$, so ändert sich das allgemeine Glied um den Factor

$$e^{\left(n+\frac{\nu}{2}\right)2p\pi i} = e^{\nu p\pi i},$$

der herausgezogen werden kann. Es wird also

$$\Theta(u;\mu+2p,\nu) = e^{\nu p\pi i}\,\Theta(u;\mu,\nu). \tag{4.}$$

Vermehrt man ν um $2q$, so tritt nur $n+q$ an die Stelle von n, und durchläuft ebenso wie dieses alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$. Die Θ-Function bleibt ungeändert:

$$\Theta(u;\mu,\nu+2q) = \Theta(u;\mu,\nu). \tag{5.}$$

Beide Formeln zusammen geben

$$\Theta(u;\mu+2p,\nu+2q) = e^{\nu p\pi i}\,\Theta(u;\mu,\nu). \tag{6.}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung kann man die Werthe der (ganzzahligen) Parameter auf ihre kleinsten Reste für den Modul 2, also auf 0 und $+1$ oder -1 zurückführen.

Für die elliptischen Θ-Functionen werde nun, den Gleichungen S. 178 (10.) gemäss,

$$\left\{\begin{aligned} \Theta(u;-1,1) &= \Theta_0(u) \\ \Theta(u;\;\;\,0,1) &= \Theta_1(u) \\ \Theta(u;\;\;\,0,0) &= \Theta_2(u) \\ \Theta(u;-1,0) &= \Theta_3(u) \end{aligned}\right. \tag{7.}$$

gesetzt. Bei der Beurtheilung der Veränderung dieser Functionen der Formel (3.) zufolge hat man vier Fälle zu unterscheiden, weil die (nunmehr ganzzahligen) Coefficienten μ', ν' des Incrementes $\mu'\tilde{\omega}+\nu'\tilde{\omega}'$, jeder für sich, gerade oder ungerade sein können. Es sei erstens

$$\bar{\omega}' = 2p\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}'.$$

Die Θ-Function auf der rechten Seite von (3.) hat die Parameter $\mu+2p$, $\nu+2q$, reducirt sich also nach (6.), von dem Exponentialfactor abgesehen, auf $\Theta(u;\mu,\nu)$ selbst. Das heisst in den Bezeichnungen (7.): Die Indices der Θ-Functionen bleiben ungeändert. Der an letzter Stelle in (3.) stehende, für alle vier Functionen übereinstimmende Factor lautet

$$e^{\bar{\eta}'(u+\frac{1}{2}\bar{\omega}')-pq\pi i}.$$

Ausserdem treten die beiden Exponentialfactoren $e^{-\frac{\mu\nu'\pi i}{2}}$ und $e^{\nu p\pi i}$ hinzu. Sie liefern, zusammengefasst, der Reihe nach

$$\begin{array}{lll} \text{für } \mu=-1,\ \nu=1: & e^{q\pi i+p\pi i} = (-1)^{p+q}, \\ \text{„}\ \ \mu=0,\ \ \nu=1: & e^{p\pi i} = (-1)^p, \\ \text{„}\ \ \mu=0,\ \ \nu=0: & 1, \\ \text{„}\ \ \mu=-1,\ \nu=0: & e^{q\pi i} = (-1)^q. \end{array}$$

Die entsprechenden Formeln gehen aus der ersten Zeile der Tabelle auf S. 188 hervor. Beispielsweise heisst die vierte, vollständig ausgeschrieben:

$$\Theta_3(u+2p\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}') = (-1)^q\,\Theta_3(u)\,e^{(2p\tilde{\eta}+2q\tilde{\eta}')(u+p\tilde{\omega}+q\tilde{\omega}')-pq\pi i}.$$

Ist zweitens

$$\bar{\omega}' = (2p+1)\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}',$$

so führen die Parameter, $\mu+2p+1$ und $\nu+2q$, auf $\mu+1$ und ν. Beim Ausgehen von der Function Θ_0 nehmen sie (nach (7.)) die Werthe 0 und 1 an, Θ_0 verwandelt sich in Θ_1. Für die Function Θ_1 sind die Parameterwerthe 0 und 1, die zunächst in 1 und 1 übergehen; um den Werth des ersten Parameters auf -1 zu bringen, benutzt man die Formel (4.) in der speciellen Gestalt

$$\Theta(u;\mu,\nu) = e^{-\nu\pi i}\,\Theta(u;\mu+2,\nu) \tag{8.}$$

und erhält

$$\Theta(u;-1,1) = -\Theta(u;1,1).$$

Die Function Θ_1 verwandelt sich also in $-\Theta_0$. Aus den Parameterwerthen $0, 0$ von Θ_2 gehen die Werthe $1, 0$ hervor, die wegen (8.), nämlich

$$\Theta(u;-1,0) = \Theta(u;1,0)$$

durch -1 und 0 ersetzt werden können. Θ_2 führt mithin auf Θ_3. Endlich geben die Parameterwerthe -1 und 0 von Θ_3 die Werthe 0 und 0, Θ_3 geht in Θ_2 über. In allen vier Fällen kommen auch hier die vorher ermittelten, aus

$$e^{-\frac{\mu\nu'\pi i}{2}+\nu p\pi i}$$

entstandenen Vorzeichen hinzu, weil der allein geänderte Parameter μ' in diesem Ausdruck nicht enthalten ist. Der für die vier Theta-Functionen übereinstimmende Exponentialfactor heisst

$$e^{((2p+1)\tilde{\eta}+2q\tilde{\eta}')(u+(p+\frac{1}{2})\tilde{\omega}+q\tilde{\omega}')-(p+\frac{1}{2})q\pi i}.$$

Die Formeln sind in der zweiten Zeile der Tabelle enthalten.

In derselben Weise erledigen sich die beiden noch übrigen Annahmen

$$\overline{\omega}' = (2p+1)\tilde{\omega}+(2q+1)\tilde{\omega}'$$

und

$$\overline{\omega}' = 2p\tilde{\omega}+(2q+1)\tilde{\omega}'.$$

Die Resultate sind in der dritten und vierten Zeile der Tabelle zusammengestellt.

$\overline{\omega}'$	$\Theta_0(u+\overline{\omega}')$	$\Theta_1(u+\overline{\omega}')$	$\Theta_2(u+\overline{\omega}')$	$\Theta_3(u+\overline{\omega}')$	Exponentialfactor
$2p\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}'$	$(-1)^{p+q}\Theta_0$	$(-1)^{p}\Theta_1$	Θ_2	$(-1)^{q}\Theta_3$	$e^{\overline{\eta}'(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}')-pq\pi i}$
$(2p+1)\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}'$	$(-1)^{p+q}\Theta_1$	$(-1)^{p+1}\Theta_0$	Θ_3	$(-1)^{q}\Theta_2$	$e^{\overline{\eta}'(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}')-(p+\frac{1}{2})q\pi i}$
$(2p+1)\tilde{\omega}+(2q+1)\tilde{\omega}'$	$(-1)^{q}i\Theta_2$	Θ_3	$(-1)^{p+1}\Theta_0$	$(-1)^{p+q}i\Theta_1$	$e^{\overline{\eta}'(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}')-(p+\frac{1}{2})(q+\frac{1}{2})\pi i}$
$2p\tilde{\omega}+(2q+1)\tilde{\omega}'$	$(-1)^{q}i\Theta_3$	Θ_2	$(-1)^{p}\Theta_1$	$(-1)^{p+q}i\Theta_0$	$e^{\overline{\eta}'(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}')-p(q+\frac{1}{2})\pi i}$

Alle hierin enthaltenen Formeln gehen also aus (3.) hervor, wenn die zusammengesetzten Parameter mittels (6.) reducirt werden. Sämmtliche sechzehn Verwandlungsformeln kann man sich in einer einzigen enthalten denken, wenn man (3.) und (6.) in passender Weise vereinigt. Es sei μ_0 gleich -1 oder 0, ν_0 gleich $+1$ oder 0 und in jedem Falle so gewählt, dass

$$\mu+\mu' \equiv \mu_0 \mod 2,$$
$$\nu+\nu' \equiv \nu_0 \mod 2,$$

d. h.

$$\mu+\mu' = \mu_0+2p_0,$$
$$\nu+\nu' = \nu_0+2q_0.$$

Übrigens wird q_0 nicht gebraucht, wie aus der speciellen Beziehung (5.) ersichtlich ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\Theta(u;\mu+\mu',\nu+\nu') &= \Theta(u;\mu_0+2p_0,\nu_0+2q_0)\\ &= e^{\nu_0 p_0\pi i}\,\Theta(u;\mu_0,\nu_0)\\ &= e^{\nu_0\frac{\mu+\mu'-\mu_0}{2}\pi i}\,\Theta(u;\mu_0,\nu_0),\end{aligned}$$

und demnach in Verbindung mit (3.)

$$(9.)\quad \Theta(u+\overline{\omega}';\mu,\nu) = e^{(\nu_0(\mu+\mu'-\mu_0)-\mu\nu')\frac{\pi i}{2}}\,\Theta(u;\mu_0,\nu_0)\,e^{\overline{\eta}'\left(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}'\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}.$$

Diese Gleichung enthält, der Definition der Zahlen μ_0 und ν_0 gemäss, auch rechts nur wieder eine der Functionen $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.

Aus den Verwandlungsformeln für diese Functionen bei Vermehrung des Arguments um eine beliebige ganzzahlige homogene lineare Function von $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ lassen sich die entsprechenden für $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ fast ohne Rechnung ableiten. Die Function

$$\Theta(u;\mu,\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right)\pi i}$$

geht in

$$\vartheta(v;\mu,\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(2v+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\tau\right)\pi i}$$

über, wenn

$$\tilde{\eta} = 0, \quad \tilde{\omega} = \tfrac{1}{2}, \quad \tilde{\omega}' = \tfrac{1}{2}\tau$$

gesetzt und v für u geschrieben wird (S. 179). Bei dieser Specialisirung der Constanten entsprechen den Functionen $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ der Reihe nach $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Der Tabelle für jene Functionen lässt sich daher eine für diese an die Seite stellen, die erkennen lässt, wie die Functionen ϑ sich ändern, wenn das Argument um $p+q\tau$ oder $p+\frac{1}{2}+q\tau$ u. s. w. vermehrt wird.

Der bei allen Functionen auftretende Exponentialfactor

$$e^{(\mu'\tilde{\eta}+\nu'\tilde{\eta}')\left(u+\frac{\mu'\tilde{\omega}+\nu'\tilde{\omega}'}{2}\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}$$

lässt sich hier vereinfachen. In der Definitionsgleichung für $\tilde{\eta}'$ (S. 179 (15.)) fällt das erste Glied weg, und wegen $\tilde{\omega}=\frac{1}{2}$ wird

$$\tilde{\eta}' = -\pi i.$$

Der Exponentialfactor heisst somit

$$e^{-\nu'\pi i\left(v+\frac{1}{4}\mu'+\frac{1}{4}\nu'\tau\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}$$

oder

$$e^{-\nu'\pi i\left(v+\frac{1}{4}\nu'\tau\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{2}}$$

oder, da ν' eine ganze Zahl sein sollte,

$$e^{-\frac{\mu'\nu'\pi i}{2}}\, e^{-\nu' v\pi i}\, h^{-\frac{1}{4}\nu'^2}.$$

Danach lautet die Tabelle für die Transformation der ϑ-Functionen jetzt folgendermassen:

$\overline{\omega}'$	$\vartheta_0(v+\overline{\omega}')$	$\vartheta_1(v+\overline{\omega}')$	$\vartheta_2(v+\overline{\omega}')$	$\vartheta_3(v+\overline{\omega}')$	Exponentialfactor
$p+q\tau$	$(-1)^{p+q}\vartheta_0$	$(-1)^p\vartheta_1$	ϑ_2	$(-1)^q\vartheta_3$	$h^{-q^2}e^{-2qv\pi i}$
$p+\frac{1}{2}+q\tau$	$(-1)^{p+q}\vartheta_1$	$(-1)^{p+1}\vartheta_0$	ϑ_3	$(-1)^q\vartheta_2$	$(-1)^q h^{-q^2}e^{-2qv\pi i}$
$p+\frac{1}{2}+(q+\frac{1}{2})\tau$	$(-1)^q i\vartheta_2$	ϑ_3	$(-1)^{p+1}\vartheta_0$	$(-1)^{p+q}i\vartheta_1$	$(-1)^{p+q}(-i)h^{-(q+\frac{1}{2})^2}e^{-(2q+1)v\pi i}$
$p+(q+\frac{1}{2})\tau$	$(-1)^q i\vartheta_3$	ϑ_2	$(-1)^p\vartheta_1$	$(-1)^{p+q}i\vartheta_0$	$(-1)^p h^{-(q+\frac{1}{2})^2}e^{-(2q+1)v\pi i}$

Von den hierin enthaltenen Formeln mögen speciell die aus der ersten Zeile in's Auge gefasst werden, die vor den übrigen dadurch ausgezeichnet

sind, dass die vier Functionen bei der Verwandlung in sich selbst übergehen. Sie heissen, vollständig ausgeschrieben:

$$(10.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v+p+q\tau) = (-1)^{p+q}h^{-q^2}e^{-2qv\pi i}\vartheta_0(v) \\ \vartheta_1(v+p+q\tau) = (-1)^p\,.\,h^{-q^2}e^{-2qv\pi i}\vartheta_1(v) \\ \vartheta_2(v+p+q\tau) = h^{-q^2}e^{-2qv\pi i}\vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(v+p+q\tau) = (-1)^q\,.\,h^{-q^2}e^{-2qv\pi i}\vartheta_3(v). \end{cases}$$

Besonders bemerkenswerth sind unter diesen wieder die für $q=0$, in denen keine Potenz von h und auch kein von v abhängiger Factor, sondern höchstens ein Vorzeichen auftritt. Es sei noch $p=1$; dann ergiebt sich

$$(11.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v+1) = -\vartheta_0(v) \\ \vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v) \\ \vartheta_2(v+1) = \vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(v+1) = \vartheta_3(v). \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen das periodische Verhalten der ϑ-Functionen hervortreten. Von welchem primitiven Periodenpaar $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ man auch ausgehen möge, so haben doch die ϑ-Functionen immer bestimmte ganze Zahlen zu Perioden; und zwar ϑ_2 und ϑ_3 die Zahl Eins, ϑ_0 und ϑ_1, wie durch Iterirung der beiden ersten Gleichungen folgt, die Zahl Zwei.

Man hätte dies auch aus den trigonometrischen Reihen ablesen können, durch die die vier Functionen erklärt worden sind (S. 171). Es war z. B.

$$\vartheta_0(v) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\sin(2n+1)v\pi.$$

Vermehrt man v um Eins, so ändert sich das Argument des Sinus um $(2n+1)\pi$, und der Sinus wechselt sein Zeichen. Ebenso verhält sich der Cosinus in $\vartheta_1(v)$. Dagegen enthalten ϑ_2 und ϑ_3 im allgemeinen Gliede $\cos 2nv\pi$, und bei einer Vermehrung des Arguments um ein gerades Vielfaches von π bleiben die trigonometrischen Functionen ungeändert.

Der Änderung von v um die Zahl Eins in den Formeln für die ϑ-Functionen entspricht wegen

$$v = \frac{u}{2\tilde{\omega}}$$

die von u um $2\tilde{\omega}$ in den Formeln für die σ- und Θ-Functionen. Während diese Functionen dabei mit einem Exponentialfactor multiplicirt werden, ändern also die ϑ-Functionen höchstens ihr Zeichen.

Der Vermehrung von u um $2\tilde{\omega}'$ entspricht eine Änderung von v um τ. Die Annahme $p=0$, $q=1$ in der ersten Zeile der Tabelle auf S. 190, d. h. in den Formeln (10.), ergiebt

$$(12.)\qquad \begin{cases} \vartheta_0(v+\tau) = -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_0(v) \\ \vartheta_1(v+\tau) = h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_1(v) \\ \vartheta_2(v+\tau) = h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(v+\tau) = -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_3(v). \end{cases}$$

Den Verwandlungsformeln (11.) stehen diejenigen an Einfachheit am nächsten, die man erhält, wenn man das Argument v um $\frac{1}{2}$ vermehrt. Sie gehen aus der zweiten Zeile der Tabelle für $p=0$, $q=0$ hervor:

$$(13.)\qquad \begin{cases} \vartheta_0(v+\frac{1}{2}) = \vartheta_1(v) \\ \vartheta_1(v+\frac{1}{2}) = -\vartheta_0(v) \\ \vartheta_2(v+\frac{1}{2}) = \vartheta_3(v) \\ \vartheta_3(v+\frac{1}{2}) = \vartheta_2(v). \end{cases}$$

Durch wiederholte Anwendung erhält man, wie unmittelbar ersichtlich, die Formeln (11.) wieder.

Endlich kann man solche Verwandlungsformeln auch für die σ-Functionen aufstellen, die sich von den Θ-Functionen um constante Factoren unterscheiden (S. 179). Wird

$$(14.)\qquad \begin{cases} \sigma u = C_0\Theta_0(u), & \sigma_\alpha u = C_\alpha\Theta_1(u), \\ \sigma_\beta u = C_\beta\Theta_2(u), & \sigma_\gamma u = C_\gamma\Theta_3(u) \end{cases}$$

gesetzt, so haben die multiplicativen Constanten die Werthe

$$(15.)\qquad \begin{cases} C_0 = \dfrac{\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[8]{G}}, & C_\alpha = \dfrac{\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}, \\[2ex] C_\beta = \dfrac{\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}, & C_\gamma = \dfrac{\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}} \end{cases}$$

(S. 171). Es handelt sich um die Bestimmung von $\sigma_\lambda(u+\mu'\tilde{\omega}+\nu'\tilde{\omega}')$. λ kann

die Werthe $0, \alpha, \beta, \gamma$ annehmen, wobei unter $\sigma_0 u$ die Function σu selbst zu verstehen ist. μ' und ν' bedeuten, wie zuletzt immer, ganze Zahlen.

Nun ist

$$\sigma_\lambda(u+\bar{\omega}') = C_\lambda\Theta_l(u+\bar{\omega}'),$$

wo l für jedes λ eine bestimmte, aus den Beziehungen (14.) zu entnehmende Zahl der Reihe $0, 1, 2, 3$ bezeichnet. Aus der Tabelle auf S. 188 folgt dann

$$\Theta_l(u+\bar{\omega}') = \varepsilon_{ll'}\, e^{\bar{\eta}'\left(u+\frac{1}{2}\bar{\omega}'\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}\,\Theta_{l'}(u);$$

l' bedeutet wieder eine bestimmte Zahl $0, 1, 2$ oder 3 und $\varepsilon_{ll'}$ den in der Tabelle vor $\Theta_{l'}(u)$ stehenden Factor ± 1 oder $\pm i$. Geht man nun vermöge der Gleichung

$$\sigma_{\lambda'}(u) = C_{\lambda'}\Theta_{l'}(u)$$

von der neuen Θ-Function zu der entsprechenden σ-Function zurück, so erhält man

$$(16.)\qquad \sigma_\lambda(u+\bar{\omega}') = \varepsilon_{ll'}\frac{C_\lambda}{C_{\lambda'}}\sigma_{\lambda'}(u)\, e^{\bar{\eta}'\left(u+\frac{1}{2}\bar{\omega}'\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}.$$

Was durch die Tabelle nicht mit gegeben wird, sind allein die Quotienten $\frac{C_\lambda}{C_{\lambda'}}$. Bei ihrer Zusammenstellung hat man zu berücksichtigen, dass die in der ersten Gleichung (15.) vorkommende achte Wurzel durch den Ausdruck

$$\sqrt[8]{G} = \sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}$$

bestimmt ist.

$\bar{\omega}'$	$\frac{C_0}{C_{\lambda'}}$	$\frac{C_\alpha}{C_{\lambda'}}$	$\frac{C_\beta}{C_{\lambda'}}$	$\frac{C_\gamma}{C_{\lambda'}}$
$2p\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}'$	1	1	1	1
$(2p+1)\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}'$	$\frac{1}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}$	$\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}$
$(2p+1)\tilde{\omega}+(2q+1)\tilde{\omega}'$	$\frac{1}{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}$	$\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}$
$2p\tilde{\omega}+(2q+1)\tilde{\omega}'$	$\frac{1}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}$	$\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}$

Zur Erläuterung dieser Tabelle möge beispielsweise

$$\sigma_3(u+(2m+1)\omega+(2n+1)\omega')$$

berechnet werden. Man setze

$$(17.)\quad \alpha = 1,\quad \beta = 2,\quad \gamma = 3;\quad \tilde{\omega} = \omega,\quad \tilde{\omega}' = \omega';\quad p = m,\quad q = n.$$

Die letzte Formel (14.) lautet

$$\sigma_3 u = C_3 \theta_3(u).$$

Nach der Tabelle auf S. 188 — vierte Spalte, dritte Zeile — wird $\theta_3(u+\bar{\omega}')$ im vorliegenden Falle in $(-1)^{p+q} i\theta_1(u)$ übergeführt, und von $\theta_1(u)$ leitet die zweite Formel (14.) zu $\sigma_1 u$ zurück. Das Constantenverhältniss $\frac{C_\gamma}{C_{\gamma'}}$ ist gleich $\frac{C_3}{C_1}$, sein Werth nach der Tabelle auf voriger Seite

$$\frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}}.$$

Der noch hinzutretende Exponentialfactor findet sich in der ersten Tabelle vor. Die gesuchte Formel ist

$$(18.)\quad \sigma_3(u+(2m+1)\omega+(2n+1)\omega')$$
$$= (-1)^{m+n} i \frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}} \sigma_1 u \,.\, e^{((2m+1)\eta+(2n+1)\eta')(u+(m+\frac{1}{2})\omega+(n+\frac{1}{2})\omega')-(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})\pi i}.$$

Setzt man noch specieller

$$m = 0,\quad n = 0,$$

so findet man

$$\sigma_3(u+\omega+\omega') = e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}} e^{(\eta+\eta')\left(u+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} \sigma_1(u).$$

Da jede der Zahlen α, β, γ für sich die Werthe 1, 2, 3 annehmen kann, wenn nur α, β, γ insgesammt und von der Reihenfolge abgesehen den Zahlen 1, 2, 3 gleich sind, so kann man den Werth der linken Seite von (18.) aus den vorangehenden Formeln noch auf verschiedenen anderen Wegen herleiten. Es sei z. B. $\alpha = 3$, $\tilde{\omega} = \omega'$, und etwa $\tilde{\omega}' = -\omega$. Man hat aus

$$\mu'\tilde{\omega} + \nu'\tilde{\omega}' = (2m+1)\omega + (2n+1)\omega'$$

die ganzen Zahlen μ' und ν' zu bestimmen und die beiden Tabellen auf's

neue zu benutzen. Die allgemeine Verwandlungsformel führt dann, wie von vornherein klar, wieder auf $\sigma_1 u$, und auch der erste Bestandtheil des Exponentialfactors,

$$e^{\bar{\eta}'(u+\frac{1}{2}\bar{\omega}')},$$

bleibt ungeändert. Was sich im Allgemeinen ändert, sind die vierten Wurzeln, das Vorzeichen und der zweite Theil des Exponentialfactors. Bei der Überführung des einen Ausdruckes in den andern ist nun zu beachten, dass die vierten Wurzeln, nach Festsetzung eines Werthes von $\sqrt{\frac{\pi}{2\bar{\omega}}}$, eindeutig bestimmt waren (S. 163), dass aber für die zweite Annahme die Grösse h, durch die die Bestimmung sich vollzieht, einen anderen Werth hat als für die erste (S. 160 (29.)).

Handelt es sich nur um die Darstellung von

$$\sigma_\lambda(u+\mu\omega+\nu\omega'), \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3)$$

so kann man sich bei Anwendung der Formeln (14.), (15.) und der Tabelle mit der Annahme (17.) begnügen.

Die Verwandlungsformeln enthalten insbesondere auch die Gleichungen S. 72 (12.) und S. 91 (12.), von denen zu Anfang dieses Kapitels schon die Rede gewesen ist.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Beziehungen zwischen σ-Functionen von mehrgliedrigen Argumenten.

Wir kommen jetzt zu einer Gruppe von Gleichungen zwischen σ-Functionen, deren Argumente aus mehrgliedrigen Ausdrücken bestehen. Diese Gleichungen lassen eine grosse Anzahl von Folgerungen zu, und namentlich kann man aus ihnen die Additionstheoreme der σ-Quotienten herstellen, die auf anderem Wege weit schwieriger abzuleiten sind. Man kann von der Formel

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

ausgehen. Stellt man sie noch für zwei andere Argumente v', v'' auf, befreit beide Formeln von den Nennern und multiplicirt, so erhält man

$$\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)\,\sigma(v'+v'')\,\sigma(v'-v'') = (\wp u - \wp v)(\wp v' - \wp v'')\,\sigma^2 u\, \sigma^2 v\, \sigma^2 v'\, \sigma^2 v''.$$

Hierin werde mit v, v', v'' zweimal hintereinander eine cyklische Vertauschung vorgenommen. Bei der Addition aller drei Gleichungen verschwindet die rechte Seite identisch, und es wird

$$\begin{aligned} (1.)\quad & \sigma(u+v)\,\sigma(u-v)\,\sigma(v'+v'')\,\sigma(v'-v'') + \sigma(u+v')\,\sigma(u-v')\,\sigma(v''+v)\,\sigma(v''-v) \\ & + \sigma(u+v'')\,\sigma(u-v'')\,\sigma(v+v')\,\sigma(v-v') = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Grundformel lassen sich solche für σ-Functionen mit Index dadurch ableiten, dass die Argumente um halbe Perioden vermehrt werden. Es seien

$$p \quad q \quad q' \quad q''$$

Incremente der Veränderlichen

$$u \quad v \quad v' \quad v''.$$

Dann muss z. B.

$$p + q = \tilde{\omega}_\lambda$$
$$p - q = \tilde{\omega}'_\lambda$$

sein, wo $\tilde{\omega}_\lambda, \tilde{\omega}'_\lambda$ incongruente halbe Perioden bedeuten. Es folgt

$$2p = \tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}'_\lambda, \quad 2q = \tilde{\omega}_\lambda - \tilde{\omega}'_\lambda,$$

sodass auch $2p$ und $2q$ im Allgemeinen gleich oder congruent halben Perioden werden. Setzt man nun weiter, der Gleichung

$$p + q = \tilde{\omega}_\lambda$$

entsprechend,

$$p + q' = \tilde{\omega}_\mu, \quad p + q'' = \tilde{\omega}_\nu, \quad 2p = \tilde{\omega}_\varrho,$$

also

$$(2.)\quad p = \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_\varrho, \quad q = \tilde{\omega}_\lambda - \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_\varrho, \quad q' = \tilde{\omega}_\mu - \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_\varrho, \quad q'' = \tilde{\omega}_\nu - \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_\varrho,$$

so wird

$$\begin{aligned} p - q &= \tilde{\omega}_\varrho - \tilde{\omega}_\lambda, \ \ldots \\ q' + q'' &= \tilde{\omega}_\mu + \tilde{\omega}_\nu - \tilde{\omega}_\varrho, \ \ldots \\ q' - q'' &= \tilde{\omega}_\mu - \tilde{\omega}_\nu, \ \ldots, \end{aligned}$$

d. h. alle zwölf in der Formel (1.) vorkommenden Argumente werden um halbe oder auch um ganze Perioden vermehrt.

Die formale Bevorzugung von u soll im Folgenden festgehalten werden, obgleich, wie unmittelbar ersichtlich, die Formel (1.) auch bei cyklischer Vertauschung aller vier Grössen u, v, v', v'' ungeändert bleibt.

Von halben Perioden kommen nur drei in Betracht, nämlich $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$ und $\tilde{\omega} + \tilde{\omega}'$, für die

$$\wp\tilde{\omega} = e_\alpha, \quad \wp(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}') = e_\beta, \quad \wp\tilde{\omega}' = e_\gamma$$

ist. Zu ihnen gehören die Functionen $\sigma_\alpha u, \sigma_\beta u, \sigma_\gamma u$ vermöge dreier Gleichungen, deren erste

$$\sigma_\alpha u = e^{-\tilde{\eta} u}\, \frac{\sigma(u + \tilde{\omega})}{\sigma\tilde{\omega}}$$

lautet. Setzt man demgemäss

$$(3.)\qquad \sigma(u + \tilde{\omega}_\lambda) = \sigma\tilde{\omega}_\lambda\, e^{\tilde{\eta}_\lambda u}\, \sigma_\lambda u$$

und wendet dieselbe Bezeichnungsweise auch für μ, ν und ϱ an, so müssen, wenn $\tilde{\omega}_\lambda, \ldots \tilde{\omega}_\varrho$ wirklich halbe (nicht ganze) Perioden sind, von den Functionen $\sigma_\lambda u, \ldots \sigma_\varrho u$ mindestens zwei einander gleich sein. Ist dagegen das Increment für irgend eines der in (1.) vorkommenden Argumente eine ganze Periode, so muss die Übergangsformel (3.) durch eine andere, S. 72 (12.), ersetzt werden. Man kann diese in der Form

$$\sigma(u + 2\tilde{\omega}_\lambda) = \pm e^{2\tilde{\eta}_\lambda (u + \tilde{\omega}_\lambda)} \sigma u$$

schreiben.

Es sei noch

$$\tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}_\mu \equiv \tilde{\omega}_{\lambda\mu},$$
$$\tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}_\mu + \tilde{\omega}_\nu \equiv \tilde{\omega}_{\lambda\mu\nu};$$

diese Grössen sind dann wieder halbe Perioden oder auch gleich Null. Ordnet man ihnen Functionen $\sigma_{\lambda\mu}(u)$, $\sigma_{\lambda\mu\nu}(u)$ zu, so geht z. B. aus dem ersten Gliede der Formel (1.), von constanten und Exponentialfactoren abgesehen, das Product

$$\sigma_\lambda(u+v)\, \sigma_{\lambda\varrho}(u-v)\, \sigma_{\mu\nu\varrho}(v'+v'')\, \sigma_{\mu\nu}(v'-v'') \tag{4.}$$

hervor.

Die zu den zusammengesetzten halben Perioden gehörenden Grössen $\tilde{\eta}_{\lambda\mu}, \ldots$ bestimmen sich aus der Formel

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(\tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}_\mu) = \frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\omega}_\lambda + \frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\omega}_\mu \tag{5.}$$

(vgl. S. 71 (11.)), die freilich für $\lambda = \mu$ nicht gilt. In diesem Falle tritt an die Stelle von (3.) die obige Gleichung für $\sigma(u + 2\tilde{\omega}_\lambda)$. Ihre Anwendung hat auf den Coefficienten von u im Exponentialfactor dieselbe Wirkung, als wenn man die Relation (5.),

$$\tilde{\eta}_{\lambda\mu} = \tilde{\eta}_\lambda + \tilde{\eta}_\mu,$$

auch für $\lambda = \mu$ gelten lassen wollte (vgl. S. 70 (9.)).

Zieht man nun aus dem im ersten Gliede von (1.) auftretenden Exponentialfactor alle Ausdrücke zusammen, die die Variablen enthalten, so findet man als Theil des Exponenten

$$\begin{aligned} &\tilde{\eta}_\lambda(u+v) + (\tilde{\eta}_\varrho - \tilde{\eta}_\lambda)(u-v) + (\tilde{\eta}_\mu + \tilde{\eta}_\nu - \tilde{\eta}_\varrho)(v'+v'') + (\tilde{\eta}_\mu - \tilde{\eta}_\nu)(v'-v'') \\ &= 2\tilde{\eta}_\lambda v + 2\tilde{\eta}_\mu v' + 2\tilde{\eta}_\nu v'' + \tilde{\eta}_\varrho(u - v - v' - v''). \end{aligned}$$

Die übrigen Theile kommen nur für den constanten Factor in Betracht, mit dem das Product (4.) noch behaftet ist.

Der eben angegebene Ausdruck bleibt nun ungeändert, wenn v, v', v'' und demnach auch λ, μ, ν cyklisch unter einander vertauscht werden. Soweit die Exponentialgrössen von den Variablen abhängen, fallen sie also aus der Gleichung weg, und es bleibt

$$\begin{aligned} &c_1 \sigma_\lambda(u+v)\ \sigma_{\lambda\varrho}(u-v)\ \sigma_{\mu\nu\varrho}(v'+v'')\, \sigma_{\mu\nu}(v'-v'') \\ &+ c_2 \sigma_\mu(u+v')\, \sigma_{\mu\varrho}(u-v')\, \sigma_{\nu\lambda\varrho}(v''+v)\ \sigma_{\nu\lambda}(v''-v) \\ &+ c_3 \sigma_\nu(u+v'')\, \sigma_{\nu\varrho}(u-v'')\, \sigma_{\lambda\mu\varrho}(v+v')\, \sigma_{\lambda\mu}(v-v') = 0. \end{aligned} \tag{6.}$$

Die Coefficienten, die eigentlich mit $c_{\lambda\mu\nu\varrho}, c'_{\lambda\mu\nu\varrho}, c''_{\lambda\mu\nu\varrho}$ bezeichnet werden müssten, sind von den vorkommenden halben Perioden abhängig, ändern sich also im Allgemeinen von einer Annahme zur anderen. Sie sind stets von Null verschieden.

Es sei nun beispielsweise

$$\tilde{\omega}_\lambda = \tilde{\omega}_\mu = \tilde{\omega}_\nu = \tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega}_\varrho = 0$$

vorausgesetzt, so ist

$$\lambda = \mu = \nu = \alpha, \quad \varrho = 0.$$

Die Zusammensetzung mit ϱ trägt zu dem Werthe eines Index nichts bei, d. h. es ist, in sofort verständlicher Bezeichnung,

$$(\lambda\varrho) = (\mu\varrho) = (\nu\varrho) = \alpha.$$

Der zweigliedrige Index $(\mu\nu)$ weist auf die Vermehrung des Arguments der Stammfunction um $\tilde{\omega}_\mu + \tilde{\omega}_\nu$ hin. Diese Grösse ist hier eine ganze Periode, $2\tilde{\omega}$, die σ-Function geht in sich selbst über, es ist

$$(\mu\nu) = 0,$$

und ebenso

$$(\nu\lambda) = 0, \quad (\lambda\mu) = 0,$$
$$(\mu\nu\varrho) = 0, \quad (\nu\lambda\varrho) = 0, \quad (\lambda\mu\varrho) = 0.$$

Die Formel (6.) lautet also

$$
(7.)\quad \begin{aligned}
&c_1\sigma_\alpha(u+v)\ \sigma_\alpha(u-v)\ \sigma(v'+v'')\sigma(v'-v'')\\
&+c_2\sigma_\alpha(u+v')\ \sigma_\alpha(u-v')\ \sigma(v''+v)\ \ \sigma(v''-v)\\
&+c_3\sigma_\alpha(u+v'')\sigma_\alpha(u-v'')\sigma(v\ +v')\ \sigma(v\ -v')=0.
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung der Coefficienten kann man einigen Veränderlichen specielle Werthe beilegen, z. B.

$$v' = v'' = 0$$

setzen. Die übrig bleibende Gleichung liefert dann

$$c_2 = c_3,$$

und wegen der Symmetrie der Gleichung (7.) muss der gemeinsame Werth von c_2 und c_3 auch gleich dem von c_1 sein. Da er nicht verschwindet, so heisst die Formel

$$
(8.)\quad \begin{aligned}
&\sigma_\alpha(u+v)\sigma_\alpha(u-v)\sigma(v'+v'')\sigma(v'-v'')+\sigma_\alpha(u+v')\sigma_\alpha(u-v')\sigma(v''+v)\sigma(v''-v)\\
&\qquad+\sigma_\alpha(u+v'')\sigma_\alpha(u-v'')\sigma(v+v')\sigma(v-v')=0.
\end{aligned}
$$

Wie es sich von selbst versteht, vertritt diese Gleichung ein System von dreien, weil α gleich 1, 2, 3 gesetzt werden kann.

Hiervon abgesehen, handelt es sich jetzt darum, sämmtliche Gleichungen zu bilden, die in (6.) für die verschiedenen Annahmen über die halben Perioden $\tilde\omega_\lambda, \dots \tilde\omega_\varrho$ enthalten sind. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Bei der äusserlichen Bevorzugung von u, also auch von $\tilde\omega_\varrho$, lassen z. B. die ersten sieben Zeilen, ausser der an die Spitze gestellten Gleichung (1.), folgende für $\tilde\omega_\varrho = 0$ geltenden Möglichkeiten hervortreten.

Zweite Zeile: die drei ersten halben Perioden einander gleich und von Null verschieden;

dritte Zeile: zwei von diesen Grössen einander gleich und gleich Null;

vierte und fünfte Zeile: zwei einander gleich und von Null verschieden, die dritte gleich Null oder nicht;

sechste und siebente Zeile: alle drei von einander verschieden, und zwar eine gleich Null oder nicht.

Die noch übrigen Zeilen geben dann alle für $\tilde\omega_\varrho \neq 0$ möglichen Annahmen wieder.

	$\tilde\omega_\lambda$	$\tilde\omega_\mu$	$\tilde\omega_\nu$	$\tilde\omega_\varrho$	λ	$(\lambda\varrho)$	$(\mu\nu\varrho)$	$(\mu\nu)$	μ	$(\mu\varrho)$	$(\nu\lambda\varrho)$	$(\nu\lambda)$	ν	$(\nu\varrho)$	$(\lambda\mu\varrho)$	$(\lambda\mu)$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	0	α	α	0	0	α	α	0	0	α	α	0	0
3	0	0	$\tilde\omega$	0	0	0	α	α	0	0	α	α	α	α	0	0
4	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	0	0	α	α	α	α	α	α	α	α	0	0	0	0
5	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega'$	0	α	α	β	β	α	α	β	β	γ	γ	0	0
6	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	0	0	α	α	β	β	β	β	α	α	0	0	γ	γ
7	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	$\tilde\omega'$	0	α	α	α	α	β	β	β	β	γ	γ	γ	γ
8	0	0	0	$\tilde\omega$	0	α	α	0	0	α	α	0	0	α	α	0
9	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	α	0	α	0	α	0	α	0	α	0	α	0
10	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega'$	α	β	γ	0	α	β	γ	0	α	β	γ	0
11	0	0	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	0	α	0	α	0	α	0	α	α	0	α	0
12	0	0	$\tilde\omega$	$\tilde\omega'$	0	γ	β	α	0	γ	β	α	α	β	γ	0
13	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	0	$\tilde\omega$	α	0	0	α	α	0	0	α	0	α	α	0
14	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	0	$\tilde\omega'$	α	β	β	α	α	β	β	α	0	γ	γ	0
15	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega'$	$\tilde\omega$	α	0	γ	β	α	0	γ	β	γ	β	α	0
16	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega'$	$\tilde\omega'$	α	β	α	β	α	β	α	β	γ	0	γ	0
17	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	$\tilde\omega'$	α	β	0	γ	α	β	0	γ	β	α	γ	0
18	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	0	$\tilde\omega$	α	0	γ	β	β	γ	0	α	0	α	β	γ
19	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	0	$\tilde\omega'$	α	β	α	β	β	α	β	α	0	γ	0	γ
20	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	$\tilde\omega'$	$\tilde\omega'$	α	β	β	α	β	α	α	β	γ	0	0	γ

Setzt man

$$
\begin{aligned}
&(9.)\quad & u+v &= a, & u-v &= b, & v'+v'' &= c, & v'-v'' &= \partial,\\
&(10.)\quad & u+v' &= a', & u-v' &= b', & v''+v &= c', & v''-v &= \partial',\\
&(11.)\quad & u+v'' &= a'', & u-v'' &= b'', & v+v' &= c'', & v-v' &= \partial''
\end{aligned}
$$

und betrachtet an Stelle von u, v, v', v'' entweder a, b, c, ∂ oder a', b', c', ∂' oder $a'', b'', c'', \partial''$ als unabhängige Variable, so sind alle σ-Relationen, die überhaupt aus (6.), nämlich

$$(12.)\quad c_1\sigma_\lambda a\,\sigma_{\lambda\varrho} b\,\sigma_{\mu\nu\varrho} c\,\sigma_{\mu\nu}\partial + c_2\sigma_\mu a'\,\sigma_{\mu\varrho} b'\,\sigma_{\nu\lambda\varrho} c'\,\sigma_{\nu\lambda}\partial' + c_3\sigma_\nu a''\,\sigma_{\nu\varrho} b''\,\sigma_{\lambda\mu\varrho} c''\,\sigma_{\lambda\mu}\partial'' = 0$$

hervorgehen können, in der Tabelle enthalten. Um sie herzustellen, muss man da, wo ein einzelner der Indices α, β, γ vorkommt, diesem die Werthe 1, 2, 3 beilegen, und wo mehrere auftreten, ihnen auf alle möglichen Arten verschiedene Zahlenwerthe aus der Reihe 1, 2, 3 ertheilen.

Aber die Zusammenstellung enthält einige Gleichungen mehrfach. So lassen sich z. B. die σ-Producte, die der dritten Zeile entsprechen,

$$\sigma a\,\sigma b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha \mathfrak{d},\quad \sigma a'\,\sigma b'\,\sigma_\alpha c'\,\sigma_\alpha \mathfrak{d}',\quad \sigma_\alpha a''\,\sigma_\alpha b''\,\sigma c''\,\sigma \mathfrak{d}'',$$

aus den zu der zweiten Zeile gehörenden

$$\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma c\,\sigma \mathfrak{d},\quad \sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma c'\,\sigma \mathfrak{d}',\quad \sigma_\alpha a''\,\sigma_\alpha b''\,\sigma c''\,\sigma \mathfrak{d}'',$$

die dieselben Indices, nur in anderer Reihenfolge, enthalten, durch Vertauschung von Bezeichnungen ableiten. Aus (9.), (10.), (11.) folgt nämlich

$$(13.)\quad \begin{cases} a' = \frac{1}{2}(a+b+c+\mathfrak{d}), & b' = \frac{1}{2}(a+b-c-\mathfrak{d}) \\ c' = \frac{1}{2}(a-b+c-\mathfrak{d}), & \mathfrak{d}' = \frac{1}{2}(-a+b+c-\mathfrak{d}), \end{cases}$$

$$(14.)\quad \begin{cases} a'' = \frac{1}{2}(a+b+c-\mathfrak{d}), & b'' = \frac{1}{2}(a+b-c+\mathfrak{d}) \\ c'' = \frac{1}{2}(a-b+c+\mathfrak{d}), & \mathfrak{d}'' = \frac{1}{2}(a-b-c-\mathfrak{d}). \end{cases}$$

Vertauscht man nun a mit c, setzt $-\mathfrak{d}$ für b und $-b$ für $\mathfrak{d}$, um zunächst das Product $\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma c\,\sigma \mathfrak{d}$, vom Vorzeichen abgesehen, in das darüberstehende zu verwandeln, so gehen

$$a'\quad b'\quad c'\quad \mathfrak{d}'\qquad a''\quad b''\quad c''\quad \mathfrak{d}''$$

in

$$c'\quad \mathfrak{d}'\quad a'\quad b'\qquad a''\quad -b''\quad c''\quad -\mathfrak{d}''$$

über, und damit auch $\sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma c'\,\sigma \mathfrak{d}'$ in $\sigma a'\,\sigma b'\,\sigma_\alpha c'\,\sigma_\alpha \mathfrak{d}'$, während das dritte Product nur sein Zeichen ändert.

Die Tabelle

3	2	$a\|c,\quad b\|-\mathfrak{d}$
6	5	$a\|-a,\ \mathfrak{d}\|-\mathfrak{d}$
8	2	$a\|-c$
9	2	$b\|c$
11	2	$a\|-\mathfrak{d}$
12	10	$a\|-\mathfrak{d},\ b\|c$
13	2	$b\|\mathfrak{d}$
14	5	$b\|\mathfrak{d}$
15	10	$b\|\mathfrak{d}$
16	5	$b\|c$
17	10	$c\|\mathfrak{d}$
18	10	$b\|+\mathfrak{d},\ \mathfrak{d}\|-b,\ c\|-c$
19	5	$b\|-c$
20	5	$b\|-\mathfrak{d}$

enthält in der ersten Spalte die Nummern der Gleichungen, die mit anderen, daneben angezeigten, inhaltlich übereinstimmen. In der dritten Spalte sind Substitutionen (im Allgemeinen blosse Vertauschungen) angegeben, durch die die Gleichungen der zweiten Spalte in die entsprechenden der ersten übergeführt werden können.

Es kommt jetzt darauf an, die sechs unabhängigen Relationen, die zu den Zeilen 1, 2, 4, 5, 7 und 10 der Tabelle auf S. 201 gehören, vollständig herzustellen, d. h. für jede dieser Gleichungen die Verhältnisse der Coefficienten c_1, c_2, c_3 zu berechnen. Von der Ausgangsgleichung abgesehen, ist dies für die Annahme 2 bereits geschehen (S. 200). Die Voraussetzung 4 führt auf

$$c_1\,\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha \mathfrak{d} + c_2\,\sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma_\alpha c'\,\sigma_\alpha \mathfrak{d}' + c_3\,\sigma a''\,\sigma b''\,\sigma c''\,\sigma \mathfrak{d}'' = 0.$$

Nimmt man $v = v' = v'' = 0$, so sieht man, dass

$$c_1 = 1,\quad c_2 = -1$$

gesetzt werden darf. Eine zweite Gleichung, in der nunmehr der dritte Coefficient stehen bleibt, folgt dann für

$$v' = v'' = 0,\quad v = u,$$

nämlich

$$\sigma_\alpha(2u) - \sigma_\alpha^4 u + c_3\,\sigma^4 u = 0.$$

Die linke Seite ist nach Potenzen von u zu entwickeln und der Coefficient von u^4 gleich Null zu setzen. Dazu kann man die Formeln

$$\sigma_\alpha^2 u = (\wp u - e_\alpha)\,\sigma^2 u,$$

$$\wp u - e_\alpha = \frac{1}{u^2} - e_\alpha + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \cdots,$$

$$\sigma u = u - \frac{g_2}{240}u^5 + \cdots,$$

$$\sigma^2 u = u^2 - \frac{g_2}{120}u^6 + \cdots$$

benutzen, aus denen

$$\sigma_\alpha^2 u = 1 - e_\alpha u^2 + \frac{g_2}{24}u^4 + \cdots,$$

$$\sigma_\alpha u = 1 - \frac{1}{2}e_\alpha u^2 + \left(\frac{g_2}{48} - \frac{e_\alpha^2}{8}\right)u^4 + \cdots.$$

hervorgeht. Die Bestimmungsgleichung für c_3 lautet

$$\left(\frac{g_2}{3} - 2e_\alpha^2\right) - \left(e_\alpha^2 + \frac{g_2}{12}\right) + c_3 = 0$$

und liefert

$$c_3 = (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma).$$

Hiernach gilt die Relation

$$(15.)\quad \begin{aligned} &\sigma_\alpha(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\alpha(v'+v'')\,\sigma_\alpha(v'-v'') - \sigma_\alpha(u+v')\,\sigma_\alpha(u-v')\,\sigma_\alpha(v''+v)\,\sigma_\alpha(v''-v) \\ &\quad + (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\,\sigma(u+v'')\,\sigma(u-v'')\,\sigma(v+v')\,\sigma(v-v') = 0. \end{aligned}$$

Die Annahme 5 liefert die Gleichungsform

$$c_1\,\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\beta c\,\sigma_\beta \partial + c_2\,\sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma_\beta c'\,\sigma_\beta \partial' + c_3\,\sigma_\gamma a''\,\sigma_\gamma b''\,\sigma c''\,\sigma \partial'' = 0.$$

Dieselbe Specialisirung wie im vorigen Fall,

$$v = v' = v'' = 0,$$

führt zu demselben Ergebniss

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1.$$

Setzt man ferner

$$u = v' = v'' = 0,$$

so findet man

$$\sigma_\alpha^2 v - \sigma_\beta^2 v + c_3\,\sigma^2 v = 0,$$

d. h. wegen der Identität

$$\sigma_\alpha^2 v - \sigma_\beta^2 v + (e_\alpha - e_\beta)\,\sigma^2 v = 0$$

(S. 89 (7.)):

$$c_3 = e_\alpha - e_\beta.$$

Die neue Formel lautet

$$(16.)\quad \begin{aligned} &\sigma_\alpha(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\beta(v'+v'')\,\sigma_\beta(v'-v'') - \sigma_\alpha(u+v')\,\sigma_\alpha(u-v')\,\sigma_\beta(v''+v)\,\sigma_\beta(v''-v) \\ &\quad + (e_\alpha - e_\beta)\,\sigma_\gamma(u+v'')\,\sigma_\gamma(u-v'')\,\sigma(v+v')\,\sigma(v-v') = 0. \end{aligned}$$

Die Annahme 7 ergiebt

$$c_1\,\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha \partial + c_2\,\sigma_\beta a'\,\sigma_\beta b'\,\sigma_\beta c'\,\sigma_\beta \partial' + c_3\,\sigma_\gamma a''\,\sigma_\gamma b''\,\sigma_\gamma c''\,\sigma_\gamma \partial'' = 0.$$

Setzt man wieder v, v' und v'' gleich Null, sodass

$$c_1\,\sigma_\alpha^2 u + c_2\,\sigma_\beta^2 u + c_3\,\sigma_\gamma^2 u = 0$$

wird, und führt die auf der vorigen Seite benutzte Reihenentwickelung für

$\sigma_\alpha^2 u$ auch für $\sigma_\beta^2 u$ und $\sigma_\gamma^2 u$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ e_\alpha c_1 + e_\beta c_2 + e_\gamma c_3 &= 0, \end{aligned}$$

und daraus

$$c_1 : c_2 : c_3 = e_\beta - e_\gamma : e_\gamma - e_\alpha : e_\alpha - e_\beta,$$

$$(17.)\quad \begin{aligned} &(e_\beta - e_\gamma)\,\sigma_\alpha(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\alpha(v'+v'')\,\sigma_\alpha(v'-v'') \\ &+ (e_\gamma - e_\alpha)\,\sigma_\beta(u+v')\,\sigma_\beta(u-v')\,\sigma_\beta(v''+v)\,\sigma_\beta(v''-v) \\ &+ (e_\alpha - e_\beta)\,\sigma_\gamma(u+v'')\,\sigma_\gamma(u-v'')\,\sigma_\gamma(v+v')\,\sigma_\gamma(v-v') = 0. \end{aligned}$$

Die letzte Annahme, zur Zeile 10 der Tabelle gehörend, liefert eine Gleichung der Form

$$c_1\,\sigma_\alpha a\,\sigma_\beta b\,\sigma_\gamma c\,\sigma \partial + c_2\,\sigma_\alpha a'\,\sigma_\beta b'\,\sigma_\gamma c'\,\sigma \partial' + c_3\,\sigma_\alpha a''\,\sigma_\beta b''\,\sigma_\gamma c''\,\sigma \partial'' = 0.$$

Die Coefficientenbestimmung vollzieht sich genau wie auf S. 200, mithin wird

$$(18.)\quad \begin{aligned} &\sigma_\alpha(u+v)\,\sigma_\beta(u-v)\,\sigma_\gamma(v'+v'')\,\sigma(v'-v'') + \sigma_\alpha(u+v')\,\sigma_\beta(u-v')\,\sigma_\gamma(v''+v)\,\sigma(v''-v) \\ &\quad + \sigma_\alpha(u+v'')\,\sigma_\beta(u-v'')\,\sigma_\gamma(v+v')\,\sigma(v-v') = 0. \end{aligned}$$

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Die Additionstheoreme der σ-Quotienten. Relationen zwischen Theta-Functionen von mehrgliedrigen Argumenten.

Aus der grossen Anzahl von Folgerungen, die sich aus den sechs Formeln (1.), (8.), (15.), (16.), (17.), (18.) des vorigen Kapitels ziehen lassen, soll eine Gruppe hervorgehoben werden. Man kann die vier unabhängigen Variablen, von denen die Argumente sämmtlicher σ-Functionen abhängen, so wählen, dass als zusammengesetzte Argumente nur noch $u+v$ und $u-v$ auftreten, alle übrigen aber eingliedrig werden. Entfernt man dann aus zwei Formeln, in denen $u-v$ in einer und derselben σ-Function vorkommt, diese durch Division, so bekommt man eine Relation zwischen σ-Quotienten für die Argumente u, v und $u+v$.

Die sechs Ausgangsformeln lauten, für die Bezeichnungen $a, \dots \partial''$ zusammengestellt:

$$(1.)\qquad \sigma a\,\sigma b\,\sigma c\,\sigma\partial + \sigma a'\,\sigma b'\,\sigma c'\,\sigma\partial' + \sigma a''\,\sigma b''\,\sigma c''\,\sigma\partial'' = 0,$$

$$(2.)\qquad \sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma c\,\sigma\partial + \sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma c'\,\sigma\partial' + \sigma_\alpha a''\,\sigma_\alpha b''\,\sigma c''\,\sigma\partial'' = 0,$$

$$(3.)\qquad \sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha\partial - \sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma_\alpha c'\,\sigma_\alpha\partial' + (e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)\,\sigma a''\,\sigma b''\,\sigma c''\,\sigma\partial'' = 0,$$

$$(4.)\qquad \sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\beta c\,\sigma_\beta\partial - \sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma_\beta c'\,\sigma_\beta\partial' + (e_\alpha-e_\beta)\,\sigma_\gamma a''\,\sigma_\gamma b''\,\sigma c''\,\sigma\partial'' = 0,$$

$$(5.)\qquad (e_\beta-e_\gamma)\,\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha\partial + (e_\gamma-e_\alpha)\,\sigma_\beta a'\,\sigma_\beta b'\,\sigma_\beta c'\,\sigma_\beta\partial' + (e_\alpha-e_\beta)\,\sigma_\gamma a''\,\sigma_\gamma b''\,\sigma_\gamma c''\,\sigma_\gamma\partial'' = 0,$$

$$(6.)\qquad \sigma_\alpha a\,\sigma_\beta b\,\sigma_\gamma c\,\sigma\partial + \sigma_\alpha a'\,\sigma_\beta b'\,\sigma_\gamma c'\,\sigma\partial' + \sigma_\alpha a''\,\sigma_\beta b''\,\sigma_\gamma c''\,\sigma\partial'' = 0.$$

Hierin mögen a, b, c, ∂ als unabhängige Variable betrachtet werden, $a', \dots \partial''$ als deren Functionen, bestimmt durch die Ausdrücke (13.) und (14.) auf

S. 202. Es werde ferner

$$(7.)\qquad b = 0,\quad c = 0$$

angenommen, und die Bezeichnungen a, ∂ dadurch verändert, dass

$$(8.)\qquad a = u-v,\quad \partial = u+v$$

gesetzt wird, wo demnach jetzt u und v andere Bedeutung haben als vorher. Die übrigen Argumente erhalten die Werthe

$$(9.)\qquad \begin{cases} a' = u, & b' = -v, & c' = -v, & \partial' = -u \\ a'' = -v, & b'' = u, & c'' = u, & \partial'' = -v. \end{cases}$$

Hierfür werden die Gleichungen (1.) und (2.) identisch erfüllt; die übrigen liefern

$$(10.)\qquad \sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\alpha(u+v) = \sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\alpha^2 v - (e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v,$$

$$(11.)\qquad \sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\beta(u+v) = \sigma_\alpha u\,\sigma_\alpha v\,\sigma_\beta u\,\sigma_\beta v + (e_\alpha-e_\beta)\,\sigma u\,\sigma v\,\sigma_\gamma u\,\sigma_\gamma v,$$

$$(12.)\qquad (e_\beta-e_\gamma)\,\sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\alpha(u+v) = (e_\alpha-e_\gamma)\,\sigma_\beta^2 u\,\sigma_\beta^2 v - (e_\alpha-e_\beta)\,\sigma_\gamma^2 u\,\sigma_\gamma^2 v,$$

$$(13.)\qquad \sigma_\alpha(u-v)\,\sigma\,(u+v) = \sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta v\,\sigma_\gamma v + \sigma v\,\sigma_\alpha v\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u.$$

Es werde nun vorübergehend

$$(14.)\qquad \frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u = \varphi(u),\quad \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}u = \varphi_1(u),\quad \frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha}u = \varphi_2(u)$$

gesetzt. Giebt man α, β, γ, von der Reihenfolge abgesehen, die Werthe 1, 2, 3, so lassen sich alle zwölf σ-Quotienten durch diese drei Functionen rational darstellen. Durch Division folgt aus (10.) und (13.)

$$\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}(u+v) = \frac{\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta v\,\sigma_\gamma v + \sigma v\,\sigma_\alpha v\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u}{\sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\alpha^2 v - (e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v},$$

d. h.

$$(15.)\qquad \varphi(u+v) = \frac{\varphi(u)\,\varphi_1(v)\,\varphi_2(v) + \varphi(v)\,\varphi_1(u)\,\varphi_2(u)}{1-(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)\,\varphi^2(u)\,\varphi^2(v)}.$$

Mittels der Identität

$$\sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u + (e_\alpha-e_\beta)\,\sigma^2 u = 0,$$

in der β auch durch γ ersetzt werden kann, ergeben sich zwischen $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ die Beziehungen

$$1-\varphi_1^2(u) + (e_\alpha-e_\beta)\,\varphi^2(u) = 0,$$
$$1-\varphi_2^2(u) + (e_\alpha-e_\gamma)\,\varphi^2(u) = 0,$$

und demnach aus (15.) durch Elimination von φ_1 und φ_2 eine algebraische Gleichung zwischen $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ und $\varphi(u+v)$.

Stellt man ferner (10.) und (11.) durch Division zusammen, so findet man

$$\varphi_1(u+v) = \frac{\varphi_1(u)\varphi_1(v)+(e_\alpha-e_\beta)\varphi(u)\varphi(v)\varphi_2(u)\varphi_2(v)}{1-(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)\varphi^2(u)\varphi^2(v)} \tag{16.}$$

und nach Vertauschung von β und γ, also φ_1 und φ_2

$$\varphi_2(u+v) = \frac{\varphi_2(u)\varphi_2(v)+(e_\alpha-e_\gamma)\varphi(u)\varphi(v)\varphi_1(u)\varphi_1(v)}{1-(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)\varphi^2(u)\varphi^2(v)}. \tag{17.}$$

Diese Gleichungen lassen für die Functionen $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ einzeln dieselbe Folgerung zu wie für $\varphi(u)$.

Aus (15.), (16.), (17.) kann man die Additionstheoreme herleiten, die Jacobi für die Functionen $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ in seinem Grundwerk (vgl. S. 176) ohne Beweis mitgetheilt hat. Setzt man nämlich in (14.) $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, benutzt die Gleichungen S. 99 (12.) und S. 100 (13.), (14.), sowie die Definitionsgleichung für k^2,

$$k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},$$

schreibt endlich für $u\sqrt{e_1-e_3}$ und $v\sqrt{e_1-e_3}$ wieder u und v, so findet man

$$\sin\operatorname{am}(u+v) = \frac{\sin\operatorname{am} u\cos\operatorname{am} v\,\Delta\operatorname{am} v+\sin\operatorname{am} v\cos\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} u\sin^2\operatorname{am} v}, \tag{18.}$$

$$\cos\operatorname{am}(u+v) = \frac{\cos\operatorname{am} u\cos\operatorname{am} v-\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am} v\,\Delta\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} v}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} u\sin^2\operatorname{am} v}, \tag{19.}$$

$$\Delta\operatorname{am}(u+v) = \frac{\Delta\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} v-k^2\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{am} v\cos\operatorname{am} u\cos\operatorname{am} v}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} u\sin^2\operatorname{am} v}. \tag{20.}$$

Die in den Gleichungen (15.), (16.), (17.) enthaltenen Additionstheoreme für die σ-Quotienten sind nicht etwa die einzigen. Man erhält andere Formen theils durch anderweite Zusammenstellung der Formeln (10.) bis (13.), theils durch Veränderung der Annahmen (7, 8) in den Gleichungen (1.) bis (6.).

Den letzteren Gleichungen lassen sich entsprechende für die Theta-Functionen mit Hilfe der Beziehungen S. 192 (14.) und (15.) an die Seite stellen. Die beiden Gleichungen (1.) und (2.) liefern sofort:

$$\Theta_0 a\,\Theta_0 b\,\Theta_0 c\,\Theta_0 \partial+\Theta_0 a'\,\Theta_0 b'\,\Theta_0 c'\,\Theta_0 \partial'+\Theta_0 a''\,\Theta_0 b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0, \tag{21.}$$

$$\Theta_\lambda a\,\Theta_\lambda b\,\Theta_0 c\,\Theta_0 \partial+\Theta_\lambda a'\,\Theta_\lambda b'\,\Theta_0 c'\,\Theta_0 \partial'+\Theta_\lambda a''\,\Theta_\lambda b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3). \tag{22.}$$

In den drei Gliedern auf der linken Seite von (3.) erscheint nicht unmittelbar ein gemeinsamer Factor. Von den beiden ersten sondert sich C_α^4 ab, und von dem dritten $(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)C_0^4$. Die Ausdrücke von C_α und C_0 lehren jedoch, dass diese beiden Werthe einander gleich sind. Es wird also

$$\Theta_1 a\,\Theta_1 b\,\Theta_1 c\,\Theta_1 \partial-\Theta_1 a'\,\Theta_1 b'\,\Theta_1 c'\,\Theta_1 \partial'+\Theta_0 a''\,\Theta_0 b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0.$$

Aber die Gleichung bleibt nicht in dieser Form bestehen, wenn man den Index 1 in 2 verändert, d. h. in (3.) den Index α mit β vertauscht. Vergleicht man nämlich C_β^4 mit $(e_\beta-e_\gamma)(e_\beta-e_\alpha)C_0^4$, so sieht man, dass diese Werthe entgegengesetzt gleich sind, dass also

$$\Theta_2 a\,\Theta_2 b\,\Theta_2 c\,\Theta_2 \partial-\Theta_2 a'\,\Theta_2 b'\,\Theta_2 c'\,\Theta_2 \partial'-\Theta_0 a''\,\Theta_0 b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0$$

wird. Bei Vertauschung von 1 mit 3, d. h. α mit γ erscheinen dieselben Vorzeichen wie im ersten Fall; es ergiebt sich

$$\Theta_3 a\,\Theta_3 b\,\Theta_3 c\,\Theta_3 \partial-\Theta_3 a'\,\Theta_3 b'\,\Theta_3 c'\,\Theta_3 \partial'+\Theta_0 a''\,\Theta_0 b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0.$$

Die drei Relationen lassen sich in die eine

$$\Theta_\lambda a\,\Theta_\lambda b\,\Theta_\lambda c\,\Theta_\lambda \partial-\Theta_\lambda a'\,\Theta_\lambda b'\,\Theta_\lambda c'\,\Theta_\lambda \partial'+\varepsilon_\lambda\Theta_0 a''\,\Theta_0 b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0 \tag{23.}$$

zusammenziehen, wo

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} +1 & \text{für } \lambda = 1,\ \lambda = 3 \\ -1 & \text{„}\ \ \lambda = 2. \end{cases}$$

Führt man die entsprechende Überlegung für die Gleichung (4.) durch, wobei im Ganzen sechs Fälle zu berücksichtigen sind, so findet man

$$\Theta_\lambda a\,\Theta_\lambda b\,\Theta_\mu c\,\Theta_\mu \partial-\Theta_\lambda a'\,\Theta_\lambda b'\,\Theta_\mu c'\,\Theta_\mu \partial'+\varepsilon\,\Theta_\nu a''\,\Theta_\nu b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0 \tag{24.}$$

unter der Bedingung

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{für } (\lambda\mu\nu) = (123), (231), (132) \\ -1 & \text{„}\ \ (\lambda\mu\nu) = (312), (213), (321). \end{cases}$$

Bei der Transformation der beiden noch übrigen Gleichungen (5.) und (6.) kann nirgends ein doppeltes Vorzeichen auftreten. Es wird

$$\Theta_1 a\,\Theta_1 b\,\Theta_1 c\,\Theta_1 \partial-\Theta_2 a'\,\Theta_2 b'\,\Theta_2 c'\,\Theta_2 \partial'+\Theta_3 a''\,\Theta_3 b''\,\Theta_3 c''\,\Theta_3 \partial'' = 0, \tag{25.}$$

$$\Theta_\lambda a\,\Theta_\mu b\,\Theta_\nu c\,\Theta_0 \partial+\Theta_\lambda a'\,\Theta_\mu b'\,\Theta_\nu c'\,\Theta_0 \partial'+\Theta_\lambda a''\,\Theta_\mu b''\,\Theta_\nu c''\,\Theta_0 \partial'' = 0. \tag{26.}$$

Sehr einfach ist der Übergang von den Θ- zu den ϑ-Functionen. Je zwei entsprechende Functionen unterscheiden sich durch den Factor $e^{\frac{\bar{\eta} u^2}{2\bar{\omega}}}$. Aus den einzelnen Producten von vier Functionen treten also die Factoren

$$e^{\frac{\bar{\eta}}{2\bar{\omega}}(a^2+b^2+c^2+\partial^2)}, \quad e^{\frac{\bar{\eta}}{2\bar{\omega}}(a'^2+b'^2+c'^2+\partial'^2)}, \quad e^{\frac{\bar{\eta}}{2\bar{\omega}}(a''^2+b''^2+c''^2+\partial''^2)}$$

heraus. In Folge der Gleichungen S. 202 (13.), (14.) ist aber

$$a^2+b^2+c^2+\partial^2 = a'^2+b'^2+c'^2+\partial'^2 = a''^2+b''^2+c''^2+\partial''^2,$$

die Exponentialfactoren fallen weg, und es ergiebt sich für die Functionen $\vartheta_\lambda(v)$ genau dasselbe Formelsystem wie für die Functionen $\Theta_\lambda(u)$.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Das Multiplicationstheorem der $\wp$-Function.

Schon im dritten Kapitel (S. 26—27) ist bewiesen worden, dass $\wp(nu)$, wenn n eine positive ganze Zahl ist, rational durch $\wp u$ ausgedrückt werden kann. Es liegt nahe, zum Zweck der wirklichen Darstellung $\wp(nu)$ mit $\sigma(nu)$ ebenso in Verbindung zu bringen wie $\wp u$ mit σu.

Aus

$$\wp u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}$$

folgt durch Einführung von nu statt u

$$n^2 \wp(nu) = -\frac{d^2 \log \sigma(nu)}{du^2}.$$

Allerdings ist $\sigma(nu)$ ebensowenig bekannt wie $\wp(nu)$ selbst. Aber man kann mit Hilfe von $\sigma(nu)$ eine elliptische Function herstellen, mit der dann $\wp(nu)$ unmittelbar zusammenhängt.

Ersetzt man nämlich in der Formel

$$\sigma(u+2n\omega) = (-1)^n e^{2n\eta(u+n\omega)} \sigma u$$

(vgl. S. 72 (12.)) u durch nu, so erhält man

$$\sigma(n(u+2\omega)) = (-1)^n e^{2n^2\eta(u+\omega)} \sigma(nu). \tag{1.}$$

Derselbe Exponentialfactor wie hier tritt auch auf, wenn in

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)} \sigma u$$

beide Seiten zur Potenz n^2 erhoben werden:

$$\sigma^{n^2}(u+2\omega) = (-1)^{n^2} e^{2n^2\eta(u+\omega)} \sigma^{n^2}(u). \tag{2.}$$

Wird nun mit (2.) in (1.) dividirt, so fällt ausser dem Exponentialfactor auch die Potenz von (-1) weg, sodass

$$\text{(3.)}\qquad \frac{\sigma(n(u+2\omega))}{\sigma^{n^2}(u+2\omega)} = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$$

wird. Für die Function

$$\text{(4.)}\qquad \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = \varphi_n(u)$$

gilt also die Eigenschaft

$$\varphi_n(u+2\omega) = \varphi_n(u),$$

und ebenso

$$\varphi_n(u+2\omega') = \varphi_n(u).$$

Und da ferner $\varphi_n(u)$ offenbar im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function hat, so ist es eine elliptische Function mit den Perioden 2ω und $2\omega'$. Wäre $\varphi_n(u)$ als Function von $\wp u$ bekannt, so würde auch $\wp(nu)$ bekannt sein, in Folge der Relation

$$\text{(5.)}\qquad \frac{d^2 \log \varphi_n(u)}{du^2} = n^2(\wp u - \wp(nu)).$$

Der Zusammenhang zwischen $\wp(nu)$ und $\varphi_n(u)$ kann auch in einer anderen, von Differentialquotienten freien Form angegeben werden. Wird nämlich in

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

$v = nu$ gesetzt, so folgt

$$\begin{aligned}\wp u - \wp(nu) &= \frac{\sigma((n+1)u)\,\sigma((n-1)u)}{\sigma^2 u\, \sigma^2(nu)}\\ &= \frac{\sigma((n+1)u)}{(\sigma u)^{(n+1)^2}}\,\frac{\sigma((n-1)u)}{(\sigma u)^{(n-1)^2}}\left(\frac{(\sigma u)^{n^2}}{\sigma(nu)}\right)^2,\end{aligned}$$

oder

$$\text{(6.)}\qquad \wp u - \wp(nu) = \frac{\varphi_{n+1}(u)\,\varphi_{n-1}(u)}{\varphi_n^2(u)}.$$

Will man jetzt nach den Ergebnissen des fünfzehnten Kapitels $\varphi_n(u)$ durch $\wp u$ und $\wp' u$ ausdrücken, so muss man die Unendlichkeitsstellen der Function kennen. Da $\sigma(nu)$ im Endlichen nicht unendlich gross werden

kann, so fallen diese Stellen mit den Nullstellen des Nenners von $\varphi_n(u)$ zusammen. Aber σu verschwindet im Periodenparallelogramm nur einmal, für $u = 0$, und zwar von der ersten Ordnung. Und da $u = 0$ auch für $\sigma(nu)$ eine Nullstelle erster Ordnung ist, aber für den Nenner n^2mal gezählt werden muss, so wird $\varphi_n(u)$ an der Stelle $u = 0$ (und den congruenten) mit der Ordnungszahl n^2-1 unendlich gross. Setzt man also

$$n^2 - 1 = l,$$

so erhält man nach S. 147 die Darstellung

$$\varphi_n(u) = c + c'\wp u - \frac{1}{2}c''\wp' u + \cdots + (-1)^l \frac{c^{(l-1)}}{(l-1)!}\wp^{(l-2)}(u).$$

Der Ausdruck

$$G_1(\wp u) + \wp' u \,.\, G_2(\wp u),$$

auf den die rechte Seite führt, lässt sich hier von vornherein vereinfachen, weil $\varphi_n(u)$ entweder gerade oder ungerade ist. Denn bei einer Änderung des Vorzeichens von u ändert $\sigma(nu)$ ebenfalls das Zeichen, $\sigma^{n^2}(u)$ bleibt ungeändert oder geht in $-\sigma^{n^2}(u)$ über, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es wird also $\varphi_n(u)$ eine ungerade Function bei geradem, eine gerade bei ungeradem n. Im ersten Falle ist $\varphi_n(u)$ das Product von $\wp' u$ mit einer ganzen Function von $\wp u$, im zweiten eine ganze Function von $\wp u$ allein.

Um die Grade dieser ganzen rationalen Functionen zu bestimmen, hat man zu beachten, dass

$$\begin{aligned}\wp^{(2\mu)}(u) &= G(\wp u)_{\mu+1},\\ \wp^{(2\mu+1)}(u) &= \wp'(u)\,\overline{G}(\wp u)_\mu\end{aligned}$$

ist, wo die rechts beigefügten Indices die Grade von G und $\overline{G}$ bedeuten. Die höchste in $\wp' u \,.\, G_2(\wp u)$ oder in $G_1(\wp u)$ vorkommende Potenz von $\wp u$ entspringt aus der höchsten, nämlich der $(l-2)^{\text{ten}}$ Ableitung. Bei ungeradem n, wo l gerade ist, muss für diese

$$2\mu = l-2 = n^2-3, \quad \mu+1 = \frac{n^2-1}{2},$$

bei geradem n

$$2\mu+1 = n^2-3, \quad \mu = \frac{n^2-4}{2}$$

gesetzt werden, d. h. es ist

bei ungeradem n

$$(7.)\quad \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = A_0 + A_1\wp u + \cdots + A_{\frac{n^2-1}{2}}(\wp u)^{\frac{n^2-1}{2}} = G(\wp u)_{\frac{n^2-1}{2}},$$

bei geradem n

$$(8.)\quad \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = \wp' u\left(B_0 + B_1\wp u + \cdots + B_{\frac{n^2-4}{2}}(\wp u)^{\frac{n^2-4}{2}}\right) = \wp' u\,\overline{G}(\wp u)_{\frac{n^2-4}{2}},$$

wo G und $\overline{G}$ eine andere Bedeutung haben als vorher. Die vollständige Darstellung von $\varphi_n(u)$ und damit auch von $\wp(nu)$ würde die Bestimmung der Coefficienten A_ν und B_ν als Functionen von g_2 und g_3 erfordern. Sie hängt mit der Ermittelung der Nullstellen der beiden ganzen Functionen auf das Engste zusammen.

Die Function $\varphi_n(u)$ kann nur verschwinden, wenn der Zähler Null wird, also für

$$u = \frac{2\bar{\omega}}{n} = \frac{2\mu\omega + 2\nu\omega'}{n}.$$

Die incongruenten unter diesen Stellen findet man, wenn man den ganzen Zahlen μ und ν unabhängig von einander die Werthe $0, 1, \dots n-1$ beilegt. Von den so entstehenden Zahlenpaaren (μ, ν) ist das Paar $(0, 0)$ auszuschliessen, denn für $u = 0$ wird $\varphi_n(u)$ nicht Null, sondern unendlich gross. Die Anzahl der übrig bleibenden Stellen ist n^2-1, übereinstimmend mit dem Satze, dass die Anzahl der Nullstellen der der Unendlichkeitsstellen gleich sein muss.

Um die ganze Function von $\wp u$ darzustellen, die für alle $u = \frac{2\bar{\omega}}{n}$ verschwindet, hat man eine weitere Reduction vorzunehmen, in Folge der Gleichungen

$$\wp(2\omega - u) = \wp u, \quad \wp(2\omega' - u) = \wp u.$$

Es sei zuerst n ungerade. Dann genügt es z. B. für $\nu = 0$, die Zahl μ die Hälfte aller eben genannten Zahlenwerthe durchlaufen zu lassen; und entsprechend für $\mu = 0$. Ist μ von Null verschieden, so reicht es ebenfalls aus, dieser Zahl die Werthe $1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}$ zu ertheilen, wenn nur ν alle Werthe von 1 bis $n-1$ annimmt oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Werthe $\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{n-1}{2}$. Bei Vertauschung von μ mit ν ergiebt sich offenbar nichts

Neues. Die Zusammenstellungen

$$\begin{array}{ll} \mu = 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}; & \nu = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{n-1}{2} \\ \mu = 0; & \nu = \quad 1, \quad 2, \cdots \quad \frac{n-1}{2} \\ \mu = 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}; & \nu = 0 \end{array}$$

geben insgesammt

$$2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{2}$$

Nullstellen $\frac{2\bar{\omega}}{n}$. Bezeichnet man sie in irgend einer Folge mit v_λ $\left(\lambda = 1, \cdots \frac{n^2-1}{2}\right)$, so kann die Function

$$\prod_\lambda (\wp u - \wp v_\lambda)$$

von $G(\wp u)_{\frac{n^2-1}{2}}$ nur um einen constanten Factor verschieden sein. Nun beginnt das Product mit $(u^{-2})^{\frac{n^2-1}{2}}$, die Function $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$ mit $nu^{-(n^2-1)}$, also muss

$$(9.)\quad G(\wp u)_{\frac{n^2-1}{2}} = n\prod_\lambda (\wp u - \wp v_\lambda)$$

werden.

Zweitens sei n gerade. Unter den Zahlenpaaren (μ, ν) sind drei besonders ausgezeichnet,

$$\left(\frac{n}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), \quad \left(0, \frac{n}{2}\right).$$

Sie liefern die Nullstellen

$$\omega, \quad \omega + \omega', \quad \omega'$$

der in der Formel (8.) enthaltenen Function $\wp' u$. Zur Darstellung der ausserdem vorkommenden ganzen Function von $\wp u$ hat man zu setzen — unter Berücksichtigung der Gleichungen $\wp(\omega + u) = \wp(\omega - u)$, $\wp(\omega' + u) = \wp(\omega' - u)$:

$$\begin{array}{ll} \mu = 1, 2, \cdots \frac{n-2}{2}; & \nu = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{n-2}{2} \\ \mu = 0, \frac{n}{2}; & \nu = \quad 1, \quad 2, \cdots \quad \frac{n-2}{2} \\ \mu = 1, 2, \cdots \frac{n-2}{2}; & \nu = 0, \frac{n}{2}. \end{array}$$

Die Gesammtanzahl der Nullstellen ist:

$$2\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 2\,\frac{n-2}{2} + 2\,\frac{n-2}{2} = \frac{n^2-4}{2},$$

sodass, wenn jetzt λ die Werthe $1, \cdots \frac{n^2-4}{2}$ durchläuft, das Product

$$\prod_\lambda (\wp u - \wp v_\lambda)$$

von $\overline{G}(\wp u)_{\frac{n^2-4}{2}}$ nur um einen constanten Factor verschieden ist. $\wp' u$ fängt mit $-2u^{-3}$ an, das Product mit $(u^{-2})^{\frac{n^2-4}{2}}$. Vergleicht man das Product dieser Glieder mit dem Anfangsgliede von $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$, so sieht man, dass

$$\overline{G}(\wp u)_{\frac{n^2-4}{2}} = -\frac{n}{2}\prod_\lambda (\wp u - \wp v_\lambda) \tag{10.}$$

ist.

Der wirkliche Ausdruck der beiden ganzen Functionen wird freilich durch die Formeln (9.) und (10.) nicht geliefert, denn die Werthe $\wp v_\lambda$ können nicht als bekannt gelten. Vielmehr erscheint das Problem der Periodentheilung, nämlich der Aufsuchung der Grössen $\wp\frac{2\bar\omega}{n}$, an die Lösung der algebraischen Gleichungen $G = 0$ und $\overline{G} = 0$ geknüpft, deren Coefficienten anderweitig ermittelt werden müssen.

Kiepert hat im 76. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik (1873) ein Verfahren angegeben, durch das zwar nicht unmittelbar die betrachteten Ausdrücke gefunden, aber doch für $\varphi_n(u)$ eine independente Darstellung durch die Function $\wp u$ und ihre Ableitungen, und zwar in Form einer Determinante, geliefert wird.

Eine einfache Abzählung lehrt, dass auf Grund der Formel (6.) in Verbindung mit den Bildungsgesetzen (7.) und (8.) das Multiplicationstheorem der $\wp$-Function die Form hat

$$\wp(nu) = \frac{g(\wp u)_{n^2}}{\overline{g}(\wp u)_{n^2-1}}, \tag{11.}$$

wo die Indices der ganzen Functionen im Zähler und Nenner deren Grade in Bezug auf $\wp u$ bedeuten.

Für den Nenner möge die Bezeichnung $\varphi_n^2(u)$ beibehalten, der Zähler gleich $P_n(\wp u)$ gesetzt werden, sodass

$$\wp(nu) = \frac{P_n}{\varphi_n^2} \tag{12.}$$

ist. Es sollen für P_n und φ_n Recursionsformeln entwickelt werden. Der grösseren Übersichtlichkeit der Rechnung wegen empfiehlt es sich dabei, gleichzeitig $\wp'(nu)$ und $\wp''(nu)$ einzuführen. Setzt man

$$\wp'(nu) = \frac{Q_n}{\varphi_n^3}, \tag{13.}$$

so ist

$$Q_n = \frac{1}{n}(\varphi_n P_n'(\wp u)\wp' u - 2\varphi_n' P_n(\wp u)).$$

Die Striche an $\wp$ und φ_n kennzeichnen hierin die Ableitungen nach u, dagegen die an P_n die Ableitungen nach dem Argument $\wp u$. Bei ungeradem n war φ_n eine ganze Function von $\wp u$, also φ_n' das Product aus einer solchen mit $\wp' u$, und demnach weiter auch Q_n ein ebensolches Product. Für gerades n hatte φ_n die Form $\wp' u . G(\wp u)$, also wird $\varphi_n' = \wp'^2 G' + G\wp''$, eine ganze Function von $\wp u$ allein, und dieselbe Form hat auch Q_n. Wird endlich

$$\wp''(nu) = \frac{2R_n}{\varphi_n^4} \tag{14.}$$

gesetzt, so ist R_n offenbar eine ganze Function von $\wp u$.

Die Benutzung der Formel (12.) hat mit $n = 2$ zu beginnen. Nach S. 37 ist

$$\varphi_2(u) = \frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u} = -\wp' u, \tag{15.}$$

also

$$P_2 = (\wp' u)^2 \wp(2u),$$

und da $\wp(2u)$ nach S. 26 (11.) bekannt ist, so gilt dasselbe auch für P_2.

Für das Folgende ist es zweckmässiger, $\wp(2u)$ in eine andere Form zu setzen. Unter Benutzung von (15.) liefert die Gleichung (5.), nämlich

$$\wp(nu) = \wp u + \frac{1}{n^2}\,\frac{\varphi_n'(u)^2 - \varphi_n(u)\varphi_n''(u)}{\varphi_n(u)^2}, \tag{16.}$$

für $n = 2$:

$$\wp(2u) = \wp u + \frac{1}{4}\,\frac{(\wp'' u)^2 - \wp' u\,\wp''' u}{(\wp' u)^2}.$$

Wegen

$$\wp''' u = 12\wp u\,\wp' u$$

kann man auch schreiben

$$\wp(2u) = -2\wp u + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'' u}{\wp' u}\right)^2. \tag{17.}$$

Die Differentiation ergiebt

$$\wp'(2u) = -\wp' u + 3\,\frac{\wp u\,\wp'' u}{\wp' u} - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'' u}{\wp' u}\right)^3, \tag{18.}$$

und hieraus könnte Q_2 gebildet werden.

Nun möge in (17.) und (18.) nu statt u geschrieben und dann (12.), (13.) und (14.) hinzugezogen werden. Der Factor 2 in (14.) ist wegen des in (17.) und (18.) auftretenden Factors $\frac{1}{4}$ eingeführt worden. Es ergiebt sich

$$\wp(2nu) = \frac{P_{2n}}{\varphi_{2n}^2} = \frac{-2P_n Q_n^2 + R_n^2}{Q_n^2\,\varphi_n^2}, \tag{19.}$$

$$\wp'(2nu) = \frac{Q_{2n}}{\varphi_{2n}^3} = \frac{-Q_n^4 + 6P_n Q_n^2 R_n - 2R_n^3}{Q_n^3\,\varphi_n^3}, \tag{20.}$$

und es fragt sich jetzt, ob in diesen Formeln Zähler und Zähler, Nenner und Nenner einander gleichgesetzt werden dürfen. Zunächst soll bewiesen werden, dass in den Quotienten

$$\frac{P_n}{\varphi_n^2} \quad \text{und} \quad \frac{Q_n}{\varphi_n^3}$$

Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Theiler haben können. Die Function $\varphi_n(u)$ verschwindet, wenn $\sigma(nu) = 0$, nu gleich einer Periode ist, Null ausgenommen. Es sei $u_0 = \frac{2\bar{\omega}}{n}$ $(n > 1)$ eine solche Nullstelle. Sie ist von der ersten Ordnung, sodass man setzen kann

$$\varphi_n(u) = (u-u_0)\left(A + (u-u_0)\,\mathfrak{P}_0(u-u_0)\right),$$

für A als eine von Null verschiedene Constante. Daraus folgt weiter

$$\frac{d\log\varphi_n(u)}{du} = \frac{1}{u-u_0} + \mathfrak{P}_1(u-u_0),$$

$$\frac{d^2\log\varphi_n(u)}{du^2} = -\frac{1}{(u-u_0)^2} + \mathfrak{P}_2(u-u_0),$$

und nach (5.), da $\wp u$ in der Nähe der von Null verschiedenen Stelle u_0 in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelt werden kann,

$$\wp(nu) = \frac{1}{n^2(u-u_0)^2} + \mathfrak{P}(u-u_0).$$

Wenn nun P_n für $u = u_0$ verschwände, so würde $\frac{P_n}{\varphi_n^2}$ nicht, wie es doch der Fall ist, mit $(u-u_0)^{-2}$ beginnen.

Dasselbe folgt für Q_n aus der Vergleichung von $\frac{Q_n}{\varphi_n^3}$ mit

$$\wp'(nu) = \frac{1}{n}\wp' u - \frac{1}{n^3}\,\frac{d^3\log\varphi_n(u)}{du^3}$$

vermöge der Darstellung

$$\frac{d^3\log\varphi_n(u)}{du^3} = \frac{2}{(u-u_0)^3} + \mathfrak{P}_3(u-u_0).$$

Da diese Schlüsse für jeden Werth von n gelten, so erscheint auch $\wp(2nu)$, in der Form $\frac{P_{2n}}{\varphi_{2n}^2}$ geschrieben, als Bruch mit dem kleinsten Nenner. Der in (19.) rechts vorkommende Nenner $Q_n^2\varphi_n^2$ muss also von der Form $S\varphi_{2n}^2$ sein, wo S, ebenso wie $Q_n^2\varphi_n^2$ und φ_{2n}^2, eine ganze Function von $\wp u$ bedeutet. Zur Berechnung von S bestimme man die Anfangsglieder der Entwickelung in der Nähe der Stelle $u = 0$:

$$\varphi_n(u) = nu^{-(n^2-1)} + \cdots,$$
$$\wp(nu) = n^{-2}u^{-2} + \cdots,$$
$$n\wp'(nu) = -2n^{-2}u^{-3} + \cdots,$$

woraus

$$Q_n = \varphi_n^3\,\wp'(nu) = -2u^{-3n^2} + \cdots,$$
$$Q_n\varphi_n = -2nu^{-(4n^2-1)} + \cdots,$$
$$\varphi_{2n}(u) = 2nu^{-(4n^2-1)} + \cdots.$$

Da die Anfangsglieder von φ_{2n}^2 und $Q_n^2\varphi_n^2$ übereinstimmen, so muss $S = 1$,

$$\varphi_{2n}^2 = Q_n^2\varphi_n^2,$$

und weiter, wie aus den Anfangsgliedern ersichtlich,

$$\varphi_{2n} = -Q_n\varphi_n \tag{21.}$$

sein.

Hiernach werden in den beiden Ausdrücken (20.) von selbst die Nenner bis auf das Vorzeichen einander gleich, und die Gleichsetzung der Zähler in (19.) und (20.) liefert nun

$$P_{2n} = -2P_n Q_n^2 + R_n^2, \tag{22.}$$

$$Q_{2n} = Q_n^4 - 6P_n Q_n^2 R_n + 2R_n^2. \tag{23.}$$

Zur Berechnung von R_{2n} kann man sich der Gleichung

$$\wp'' u - 6\wp^2 u = -\frac{1}{2} g_2$$

bedienen, nachdem man darin wieder u durch nu ersetzt hat. Es folgt

$$\frac{2R_n}{\varphi_n^4} - 6\frac{P_n^2}{\varphi_n^4} = -\frac{1}{2} g_2,$$

d. h. die linke Seite behält bei Änderung von n ihren Werth. Demnach wird

$$\frac{2R_{2n}}{\varphi_{2n}^4} - 6\frac{P_{2n}^2}{\varphi_{2n}^4} = \frac{2R_n}{\varphi_n^4} - 6\frac{P_n^2}{\varphi_n^4},$$

$$R_{2n} - 3P_{2n}^2 = (R_n - 3P_n^2)\, Q_n^4. \tag{24.}$$

In ähnlicher Weise können die Ausdrücke mit dem Index $2n+1$ aus denen mit den Indices n und $n+1$ zusammengesetzt werden. Man hat dazu in dem Additionstheorem der $\wp$-Function $(n+1)u$ für u, nu für v zu schreiben, den Werth von $\wp'((2n+1)u)$ hinzuzunehmen und wie vorher die Gleichungen (12.), (13.) und (14.) zu benutzen. Von $\varphi_1 = 1$, $P_1 = \wp u$, $Q_1 = \wp' u$, $R_1 = \frac{1}{2}\wp'' u$ und den nach dem Vorhergehenden als bekannt zu betrachtenden Werthen von $\varphi_2, P_2, \ldots$ ausgehend kann man dann der Reihe nach $\wp(3u)$ aus $\wp u$ und $\wp(2u)$, $\wp(4u)$ und $\wp(5u)$ aus $\wp(2u)$ und $\wp(3u)$ berechnen, u. s. w. Es könnte einfacher erscheinen, $\wp((n+1)u)$ aus $\wp(nu)$ und $\wp u$ nach dem Additionstheorem zu entwickeln. Dann enthalten aber Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler, dessen Aufsuchung viel schwieriger ist als die Anwendung des eben besprochenen Verfahrens.

Das Studium der Multiplicationsformeln ist für die Theorie der elliptischen Functionen von grosser Bedeutung gewesen, namentlich ist Abel dadurch zu seinen Untersuchungen veranlasst worden. Vor Abel und Jacobi hatte man nur die elliptischen Integrale betrachtet. Wird die Beziehung

zwischen u und $s\ (= \wp u)$ in der Form

$$u = -\int_\infty^s \frac{ds'}{\sqrt{4s'^3 - g_2 s' - g_3}}$$

angenommen, und ist $\wp(nu) = s_n$, so hat man

$$nu = -\int_\infty^{s_n} \frac{ds'}{\sqrt{4s'^3 - g_2 s' - g_3}},$$

also

$$n\int_\infty^s \frac{ds'}{\sqrt{4s'^3 - g_2 s' - g_3}} = \int_\infty^{s_n} \frac{ds'}{\sqrt{4s'^3 - g_2 s' - g_3}}.$$

Dass s_n eine rationale Function von s wird, hatten schon Euler und Lagrange gefunden. Wenn nun das Integral mit der Grenze s_n gegeben ist, und sein n^{ter} Theil wieder als Integral dargestellt werden soll, so wird s Wurzel einer algebraischen Gleichung. In der Theorie der trigonometrischen Functionen lautet die entsprechende Aufgabe, x und x_n vermöge der Gleichung

$$n\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - x'^2}} = \int_0^{x_n} \frac{dx'}{\sqrt{1 - x'^2}}$$

zu bestimmen, und wenn speciell die rechte Seite gleich 2π angenommen wird, so ist $\cos\frac{2\pi}{n}$ zu ermitteln. Die Verallgemeinerung dieser functionalen Beziehung ist in Legendrescher Form

$$n\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{(1 - x'^2)(1 - k^2 x'^2)}} = \int_0^{x_n} \frac{dx'}{\sqrt{(1 - x'^2)(1 - k^2 x'^2)}}.$$

Während man nun in der Theorie der trigonometrischen Functionen auf eine Gleichung n^{ten} Grades kam, wurde die entsprechende in der Theorie der elliptischen Functionen von höherem Grade. n von deren Wurzeln geben eine Function von $\frac{2\omega}{n}, \frac{4\omega}{n}, \frac{6\omega}{n}, \cdots$; durch das Vorhandensein von mehr als n Wurzeln wurde Abel auf die Existenz einer imaginären Periode geführt.

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Die Multiplicationstheoreme der σ-Quotienten.

Will man untersuchen, wie die σ-Quotienten sich darstellen, wenn das Argument mit einer beliebigen positiven ganzen Zahl multiplicirt wird, so kann man sich dazu eines ähnlichen Verfahrens bedienen wie im vorigen Kapitel. Entsprechend der Gleichung S. 212 (4.) kann man nämlich versuchen, eine elliptische Function zu bilden, deren Zähler $\sigma_\alpha(nu)$ ist.

Nach S. 91 (13.) war

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha u \tag{1.}$$

und nach S. 92 (14.)

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\beta) = e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha u; \qquad (\beta \gtrless \alpha) \tag{2.}$$

die wiederholte Anwendung dieser Formeln ergiebt

$$\sigma_\alpha(u+2n\omega_\alpha) = (-1)^n e^{2n\eta_\alpha(u+n\omega_\alpha)}\sigma_\alpha u, \tag{3.}$$

$$\sigma_\alpha(u+2n\omega_\beta) = e^{2n\eta_\beta(u+n\omega_\beta)}\sigma_\alpha u. \tag{4.}$$

Setzt man nu für u, so wird

$$\sigma_\alpha(n(u+2\omega_\alpha)) = (-1)^n e^{2n^2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha(nu), \tag{5.}$$

$$\sigma_\alpha(n(u+2\omega_\beta)) = e^{2n^2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha(nu). \tag{6.}$$

Um den Exponentialfactor und gleichzeitig das Vorzeichen zum Wegfall zu bringen, dividire man $\sigma_\alpha(nu)$ für ungerades n durch $\sigma_\alpha u . (\sigma u)^{n^2-1}$, für gerades n durch $(\sigma u)^{n^2}$. Die Formeln (1.) und

$$\sigma(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

lassen dann erkennen, dass wenn man für ungerades n

$$\frac{\sigma_\alpha(nu)}{\sigma_\alpha u . (\sigma u)^{n^2-1}} = \psi_n(u), \tag{7.}$$

für gerades n

$$\frac{\sigma_\alpha(nu)}{(\sigma u)^{n^2}} = \overline{\psi}_n(u) \tag{8.}$$

setzt, die Eigenschaften

$$\psi_n(u+2\omega_\alpha) = \psi_n(u), \quad \psi_n(u+2\omega_\beta) = \psi_n(u),$$
$$\overline{\psi}_n(u+2\omega_\alpha) = \overline{\psi}_n(u), \quad \overline{\psi}_n(u+2\omega_\beta) = \overline{\psi}_n(u)$$

gelten. $\psi_n(u)$ und $\overline{\psi}_n(u)$ sind also elliptische Functionen, und ausserdem gerade. Die Stelle $u = 0$ ist Unendlichkeitsstelle beider Functionen, und zwar für ψ_n mit der Ordnungszahl n^2-1, für $\overline{\psi}_n$ mit der Ordnungszahl n^2. Die zweite Function wird offenbar im Periodenparallelogramm an keiner weiteren Stelle unendlich gross. Aber auch die erste nicht; denn $\sigma_\alpha u$ verschwindet zwar für $u = \omega_\alpha$, allein da n ungerade ist, so wird $n\omega_\alpha$ der Grösse ω_α congruent, und der Zähler verschwindet ebenfalls mit der Ordnungszahl Eins. Hiernach lassen sich beide Functionen als ganze Functionen von $\wp u$ darstellen; den Gleichungen S. 214 (7.) und (8.) entsprechend ist

$$\psi_n(u) = C_0 + C_1\wp u + \cdots + C_{\frac{n^2-1}{2}}(\wp u)^{\frac{n^2-1}{2}} = G_\alpha(\wp u)_{\frac{n^2-1}{2}}, \tag{9.}$$

$$\overline{\psi}_n(u) = \overline{C}_0 + \overline{C}_1\wp u + \cdots + \overline{C}_{\frac{n^2}{2}}(\wp u)^{\frac{n^2}{2}} = \overline{G}_\alpha(\wp u)_{\frac{n^2}{2}}. \tag{10.}$$

Auch hier mögen die Coefficienten in Beziehung zu den Nullstellen gesetzt werden. Die Werthe, für die der Zähler von $\psi_n(u)$ verschwindet, haben die Form

$$\frac{(2\mu+1)\omega_\alpha + 2\nu\omega_\beta}{n}.$$

Scheidet man zunächst, wie immer, die congruenten Stellen aus, so sieht man, dass höchstens folgende Zahlenwerthe in Betracht kommen können:

$$2\mu+1 = 1, 3, \dots 2n-1, \quad \text{d. h.} \quad \mu = 0, 1, \dots n-1,$$
$$2\nu = 0, 2, \dots 2n-2, \quad \text{d. h.} \quad \nu = 0, 1, \dots n-1.$$

Aber für ungerades n fällt das Werthepaar

$$\mu = \frac{n-1}{2}, \quad \nu = 0,$$

das ω_α liefert, weg, weil ω_α auch Nullstelle des Nenners ist, und es bleiben, wie es sein muss, n^2-1 Nullstellen für $\psi_n(u)$ übrig.

Dieselben Überlegungen wie auf S. 213—216 zeigen nun, dass für die Darstellung von $\psi_n(u)$ als ganze Function von $\wp u$ folgende Zahlenwerthe in Betracht kommen:

$$\mu = 0, 1, \cdots \frac{n-3}{2}; \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{n-1}{2},$$
$$\mu = \frac{n-1}{2}; \qquad \nu = \quad 1, \quad 2, \cdots \quad \frac{n-1}{2}.$$

Ihre Zusammenstellung ergiebt

$$\frac{n-1}{2}\left(1+2\frac{n-1}{2}\right)+\frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{2}$$

Grössen

$$\frac{(2\mu+1)\,\omega_\alpha+2\nu\omega_\beta}{n} = \overset{\alpha}{v}_\lambda.$$

Es wird

$$G_\alpha(\wp u)_{\frac{n^2-1}{2}} = \prod_\lambda (\wp u - \wp \overset{\alpha}{v}_\lambda), \tag{11.}$$

denn $\psi_n(u)$ und das Product rechts beginnen beide mit $u^{-(n^2-1)}$.

Bei geradem n ist keiner der betrachteten Argumentwerthe auch Nullstelle des Nenners, die Anzahl dieser Werthe also gleich n^2. Für den Ausdruck von $\bar\psi_n(u)$ durch $\wp u$ sind beizubehalten

$$\mu = 0, 1, \cdots \frac{n-2}{2}; \qquad \nu = 0, \pm 1, \cdots \pm \frac{n-2}{2}, \frac{n}{2},$$

insgesammt

$$\frac{n}{2}\left(1+2\frac{n-2}{2}+1\right) = \frac{n^2}{2}$$

Zusammenstellungen. Es wird

$$\bar G_\alpha(\wp u)_{\frac{n^2}{2}} = \prod_\lambda (\wp u - \wp \overset{\alpha}{v}_\lambda), \tag{12.}$$

wenn jetzt λ die Werthe $1, 2, \cdots \frac{n^2}{2}$ durchläuft.

Man kann diese Formeln und schon die entsprechenden des vorigen Kapitels anders schreiben, indem man die Relation

$$\wp u - \wp v = (\wp u - e_\alpha) - (\wp v - e_\alpha) = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_\alpha v}{\sigma v}\right)^2$$

benutzt. Wiederum sei zuerst n ungerade. Die Gleichungen S. 214 (7.) und S. 215 (9.) geben

$$\frac{\sigma(nu)}{(\sigma u)^{n^2}} = n \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}} \frac{\sigma_\alpha^2 u\, \sigma^2 v_\lambda - \sigma^2 u\, \sigma_\alpha^2 v_\lambda}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v_\lambda},$$

d. h. bei richtiger Bestimmung des Vorzeichens

$$\sigma(nu) = n\, \sigma u\, (\sigma_\alpha u)^{n^2-1} \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_\alpha^2 v_\lambda\, \sigma^2 u}{\sigma^2 v_\lambda\, \sigma_\alpha^2 u}\right). \tag{13.}$$

In gleicher Weise folgt aus S. 223 (7.), (9.) und (11.)

$$\frac{\sigma_\alpha(nu)}{\sigma_\alpha u\,(\sigma u)^{n^2-1}} = \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}} \frac{\sigma_\alpha^2 u\, \sigma^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda - \sigma^2 u\, \sigma_\alpha^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda},$$

also

$$\sigma_\alpha(nu) = (\sigma_\alpha u)^{n^2} \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_\alpha^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda\, \sigma^2 u}{\sigma^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda\, \sigma_\alpha^2 u}\right). \tag{14.}$$

Man kann rechts auch noch eine σ-Function mit einem anderen Index einführen, indem man in der oben benutzten Relation β statt α annimmt. Dann wird

$$\sigma_\alpha(nu) = \sigma_\alpha u\, (\sigma_\beta u)^{n^2-1} \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_\beta^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda\, \sigma^2 u}{\sigma^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda\, \sigma_\beta^2 u}\right). \tag{15.}$$

Mittels der Formeln (13.), (14.) und (15.) werden die σ-Functionen des $n$fachen Arguments rational durch σ-Functionen des einfachen Arguments dargestellt. Durch Division erhält man aus (13.) und (14.)

$$\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}(nu) = n\,\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\,R\left(\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\right)^2\right); \tag{16.}$$

ferner aus (14.) und

$$\sigma_\beta(nu) = \sigma_\beta u\,(\sigma_\alpha u)^{n^2-1}\prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}}\left(1-\frac{\sigma_\alpha^2\overset{\beta}{v}_\lambda\,\sigma^2 u}{\sigma^2\overset{\beta}{v}_\lambda\,\sigma_\alpha^2 u}\right):$$

$$\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}(nu) = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}u\,R_1\left(\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\right)^2\right) = \overline{R}_1\left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}u\right); \tag{17.}$$

endlich durch Vertauschung von β mit γ

$$\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha}(nu) = \frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha}u\,R_2\left(\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\right)^2\right) = \overline{R}_2\left(\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha}u\right). \tag{18.}$$

Die mit $R, R_1, \ldots$ bezeichneten Functionen hängen rational von ihren Argumenten ab. Die zweiten Ausdrücke auf den rechten Seiten von (17.) und (18.) rühren daher, dass sich nach der Formel

$$\sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u + (e_\alpha - e_\beta)\,\sigma^2 u = 0$$

(S. 96 (2.)) das Quadrat jedes σ-Quotienten rational durch einen beliebigen anderen σ-Quotienten darstellen lässt.

Für gerades n ist von der aus S. 214 (8.) und S. 216 (10.) folgenden Formel

$$\frac{\sigma(nu)}{(\sigma u)^{n^2}} = -\frac{n}{2}\wp' u\prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-4}{2}}(\wp u - \wp v_\lambda)$$

auszugehen, in der ausser dem Product auch die $\wp'$-Function durch σ-Functionen zu ersetzen ist, vermittelst

$$\wp' u = -2\,\frac{\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u} = -2\,\frac{\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u}{\sigma^3 u}$$

(S. 90 (9.)). Der Gleichung (13.) entspricht jetzt

$$\sigma(nu) = n\,\sigma u\,(\sigma_\alpha u)^{n^2-3}\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u\prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-4}{2}}\left(1-\frac{\sigma_\alpha^2 v_\lambda\,\sigma^2 u}{\sigma^2 v_\lambda\,\sigma_\alpha^2 u}\right). \tag{19.}$$

Aus S. 223 (8.), (10.) und S. 225 (12.) folgt

$$\sigma_\alpha(nu) = (\sigma_\alpha u)^{n^2}\prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2}{2}}\left(1-\frac{\sigma_\alpha^2\overset{\alpha}{v}_\lambda\,\sigma^2 u}{\sigma^2\overset{\alpha}{v}_\lambda\,\sigma_\alpha^2 u}\right) \tag{20.}$$

oder auch

$$\sigma_\alpha(nu) = (\sigma_\beta u)^{n^2}\prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2}{2}}\left(1-\frac{\sigma_\beta^2\overset{\alpha}{v}_\lambda\,\sigma^2 u}{\sigma^2\overset{\alpha}{v}_\lambda\,\sigma_\beta^2 u}\right). \tag{21.}$$

Die Division liefert

$$\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}(nu) = n\,\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\,\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}u\,\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha}u\,R\left(\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\right)^2\right), \tag{22.}$$

$$\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}(nu) = R_1\left(\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\right)^2\right) = \overline{R}_1\left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}u\right), \tag{23.}$$

$$\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha}(nu) = R_2\left(\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\right)^2\right) = \overline{R}_2\left(\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha}u\right). \tag{24.}$$

Die Gleichungen (16.), (17.), (18.) und (22.), (23.), (24.) geben für ungerades und gerades n die Multiplicationstheoreme der σ-Quotienten. Im Besonderen enthalten sie auch die ganzzahlige Multiplication für die Functionen $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

Die elliptischen Integrale.

Ein beliebiges elliptisches Integral

$$J = \int \bar{F}(x, \sqrt{R(x)})\,dx$$

(S. 2) oder, in anderer Schreibweise,

$$J = \int \bar{\bar{F}}_0(x, \sqrt{R(x)})\,\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

kann durch die im ersten Kapitel besprochene rationale Transformation auf die Form

$$J = \int F(s, \sqrt{S})\,\frac{-ds}{\sqrt{S}}$$

gebracht und sodann mittels der Substitution

$$s = \wp u$$

weiter umgewandelt werden. Die zu integrirende Function geht damit in eine rationale Function von $\wp u$ und $\wp' u$ über, und J selbst ist als Integral einer beliebigen elliptischen Function aufzufassen.

Nun ist eine solche Function auf S. 144 in eine für die Integration unmittelbar brauchbare Form gesetzt worden. Aus der Gleichung

$$f(u) = C'' + \sum_{\mu=1}^{m}\Big\{c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu) + c'_\mu \wp(u-v_\mu) - \frac{1}{2}c''_\mu \wp'(u-v_\mu) + \cdots \\ + \frac{(-1)^{l_\mu}}{(l_\mu-1)!}c_\mu^{(l_\mu-1)}\wp^{(l_\mu-2)}(u-v_\mu)\Big\}$$

folgt

$$(1.)\quad \int f(u)\,du = C + C''u + \sum_{\mu=1}^{m}\Big\{c_\mu \log\sigma(u-v_\mu) - c'_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu) \\ - \frac{1}{2}c''_\mu \wp(u-v_\mu) + \cdots + \frac{(-1)^{l_\mu}}{(l_\mu-1)!}c_\mu^{(l_\mu-1)}\wp^{(l_\mu-1)}(u-v_\mu)\Big\}.$$

Wird auf den zweiten Bestandtheil der Summe die auch a. a. O. vorgenommene Transformation

$$(2.)\quad \sum_{\mu=1}^{m} c'_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu) = \frac{\sigma'}{\sigma}u\sum_{\mu=1}^{m} c'_\mu - \sum_{\mu=1}^{m} c'_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}v_\mu + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m} c'_\mu \frac{\wp' u + \wp' v_\mu}{\wp u - \wp v_\mu}$$

angewendet, die folgenden Bestandtheile nebst der letzten Summe in (2.) zu einer elliptischen Function $f_1(u)$ vereinigt und die Constante $\sum c'_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}v_\mu$ mit C zusammengezogen, so ergiebt sich

$$(3.)\quad \int f(u)\,du = f_1(u) + C' + C''u - \frac{\sigma'}{\sigma}u\sum_{\mu=1}^{m} c'_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \log\sigma(u-v_\mu).$$

Auf den Integrationsweg, längs dessen das Integral erstreckt wird, ist dabei keine Rücksicht genommen. Die Rechnung hat nur den Zweck, eine Function darzustellen, deren erste Ableitung der gegebenen Function gleich ist.

Die rechte Seite von (3.) entspricht in ihren einzelnen Theilen der aus der Integralrechnung bekannten Zerlegung des Integrals J, betrachtet als Function von s. Das Integral zerfällt nämlich in eine rationale Function von s und $\sqrt{S}$, je ein Integral $\int\frac{ds}{\sqrt{S}}$ und $\int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}}$ und eine endliche Anzahl von Integralen $\int\frac{ds}{(s-s_\mu)\sqrt{S}}$. Um den Zusammenhang genauer zu untersuchen, hat man vor allem zu beachten, dass die Gesammtheit der Werthe von u, die für ein gegebenes Werthepaar $(s, \sqrt{S})$ durch die Gleichungen

$$\wp u = s, \quad \wp' u = -\sqrt{S}$$

definirt werden, mit den durch das Integral

$$\int_\infty^s \frac{-ds}{\sqrt{S}} \;\text{ oder }\; \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} = J(s)$$

dargestellten Werthen übereinstimmt, wenn dieses Integral auf beliebigem Wege von dem gegebenen Werthe s in's Unendliche erstreckt wird. Aus irgendeinem Werthe von u gehen alle übrigen durch Addition von $2m\omega + 2n\omega'$

hervor. Die Perioden der zu dem Integral gehörenden $\wp$-Function werden deshalb auch als Perioden des Integrales selbst bezeichnet.

Entwickelt man das elliptische Integral erster Art $J(s)$ für hinreichend grosse Werthe von s nach fallenden Potenzen dieser Grösse (vgl. S. 53), so findet man

$$J(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(1+\frac{1}{3}G_1 s^{-1}+\frac{1}{5}G_2 s^{-2}+\frac{1}{7}G_3 s^{-3}+\cdots\right).$$

Die Coefficienten lassen sich nach dem auf S. 51 und 52 angegebenen Verfahren berechnen, wobei noch von den Formeln auf S. 46 Gebrauch zu machen ist:

$$G_1 = 0, \quad G_2 = \frac{1}{8}g_2, \quad G_3 = \frac{1}{8}g_3, \quad \cdots.$$

Es ergiebt sich danach

$$J(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(1+\frac{g_2}{40}\frac{1}{s^2}+\frac{g_3}{56}\frac{1}{s^3}+\cdots\right). \tag{4.}$$

Handelt es sich um das Integral $\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{S}}$, so ist einer von dessen Werthen gleich $J(s_0)-J(s)$.

Für das elliptische Integral zweiter Art $J'(s)$ besteht bei Einführung von u die Beziehung

$$\int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = \int -\wp u\,du = \int\frac{d^2\log\sigma u}{du^2}du = C+\frac{\sigma'}{\sigma}u.$$

Es gilt also die Gleichung

$$J'(s) = \frac{\sigma'}{\sigma}u \tag{5.}$$

in dem Sinne, dass durch die Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ ein Werth der Integralfunction dargestellt wird. Dieser Zusammenhang lässt sich genauer aussprechen. Entwickelt man nämlich auch hier das Integral für grosse Werthe von s, so erhält man unter Weglassung der additiven Constante

$$J'(s) = \sqrt{s}\left(1-\frac{g_2}{24}\frac{1}{s^2}-\frac{g_3}{40}\frac{1}{s^3}-\cdots\right). \tag{6.}$$

Dieselbe Darstellung ergiebt sich aber auch für $\frac{\sigma'}{\sigma}u$, wenn in die Reihe S. 33 (7.) $u = J(s)$ aus (4.) eingesetzt wird. Der durch $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ bestimmte Werth heisst das Normalintegral zweiter Art.

Bei Änderung des Integrationsweges von $J(s)$ geht u in $u+2m\omega+2n\omega'$ über, und bei entsprechender Änderung des Integrationsweges von $J'(s)$ die Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ in $\frac{\sigma'}{\sigma}u+2m\eta+2n\eta'$. Die Grössen 2η, $2\eta'$ können daher als die den Perioden 2ω und $2\omega'$ von $J(s)$ entsprechenden Perioden des Normalintegrales zweiter Art bezeichnet werden.

Als elliptisches Integral dritter Art soll nicht $\int\frac{ds}{(s-s_0)\sqrt{S}}$, sondern

$$\int\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0}\frac{ds}{\sqrt{S}} = J(s, s_0) \tag{7.}$$

betrachtet werden. Der Übergang zu u und s_0 ($=\wp v$) liefert

$$J(s, s_0) = \int\frac{1}{2}\frac{\wp' u+\wp' v}{\wp u-\wp v}du. \tag{8.}$$

Benutzt man auf's neue die Beziehung

$$\frac{1}{2}\frac{\wp' u+\wp' v}{\wp u-\wp v} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)-\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{\sigma'}{\sigma}v = -\frac{\sigma'}{\sigma}(v-u)-\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{\sigma'}{\sigma}v,$$

so findet man

$$J(s, s_0) = \log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma u}+u\frac{\sigma'}{\sigma}v+C.$$

Die Gleichung (bei passender Wahl der Integrationsconstante C)

$$J(s, s_0) = \log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma u\,\sigma v}+u\frac{\sigma'}{\sigma}v \tag{9.}$$

besteht also in demselben Sinne wie vorher die Gleichung (5.). Die rechte Seite definirt das Normalintegral dritter Art.

Der Werth $s = s_0$ ist hier vor den übrigen ausgezeichnet. Entwickelt man in dessen Nähe, so erhält man

$$\begin{aligned}
S &= S_0+\frac{dS_0}{ds_0}(s-s_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2S_0}{ds_0^2}(s-s_0)^2+\frac{1}{6}\frac{d^3S_0}{ds_0^3}(s-s_0)^3 \\
&= S_0(1+G(s-s_0)), \\
\frac{1}{\sqrt{S}} &= \frac{1}{\sqrt{S_0}}(1+G(s-s_0))^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{S_0}}(1+(s-s_0)\mathfrak{P}(s-s_0)), \\
\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0} &= \frac{2\sqrt{S_0}}{s-s_0}+\mathfrak{P}_1(s-s_0),
\end{aligned}$$

mithin

$$\int \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int \frac{ds}{s-s_0} + \mathfrak{P}_2(s-s_0),$$

d. h.

$$J(s,s_0) = \log(s-s_0) + \mathfrak{P}_2(s-s_0). \tag{10.}$$

Für grosse Werthe von s wird

$$1+\frac{\sqrt{S_0}}{\sqrt{S}} = 1+\frac{\sqrt{S_0}}{2s\sqrt{s}}\left(1+\frac{g_2}{8s^2}+\cdots\right),$$

$$\frac{1}{s-s_0} = \frac{1}{s}\frac{1}{1-\frac{s_0}{s}} = \frac{1}{s}\left(1+\frac{s_0}{s}+\cdots\right),$$

folglich

$$\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0}\frac{1}{\sqrt{S}} = \frac{1}{s}\left(1+\frac{s_0}{s}+\frac{\sqrt{S_0}}{2s\sqrt{s}}+\cdots\right)$$

und weiter

$$J(s,s_0) = \frac{1}{2}\left(\log s - \frac{s_0}{s}+\cdots\right), \tag{11.}$$

wieder bei Weglassung einer Integrationsconstante.

Die Entwickelungen (10.) und (11.) lehren, dass das Integral dritter Art für $s=s_0$ und $s=\infty$ logarithmisch unendlich gross wird.

Für kleine Werthe von u, die zu grossen Werthen von s gehören, ist andererseits

$$\log \sigma(v-u) = \log\sigma v - u\frac{d\log\sigma v}{dv} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2\log\sigma v}{dv^2}+\cdots,$$

mithin nach (9.)

$$J(s,s_0) = -\log\sigma u - \frac{u^2}{2}\wp v + \cdots$$

oder nach S. 32

$$J(s,s_0) = -\log u - \frac{u^2}{2}\wp v + g_2\frac{u^4}{240}+\cdots. \tag{12.}$$

Um die rechte Seite in eine Function von s zu verwandeln, hat man aus (4.)

$$u = s^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{s^2}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{s}\right)\right),$$

also

$$\log u = -\frac{1}{2}\log s + \frac{1}{s^2}\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{s}\right)$$

einzusetzen. Aus $-\frac{u^2}{2}\wp v$ ergiebt sich $-\frac{1}{2}s_0\, s^{-1}$ als Anfangsglied, ein constantes Glied kommt nirgends vor, die Darstellung (12.) geht in (11.) über.

Um nun zu dem allgemeinen elliptischen Integral zurückzukehren, so kann man in der Formel (3.) das letzte Glied rechts wegen (9.) schreiben

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \log\sigma(v_\mu-u) = \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu J(s,s_\mu) + \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \log\sigma u + \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \log\sigma v_\mu - u\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}v_\mu.$$

Die zweite Summe fällt wegen $\sum c_\mu = 0$ weg, die dritte ändert nur die Constante C', und die letzte den Coefficienten von u. Es wird also

$$\int F(s,\sqrt{S})\frac{-ds}{\sqrt{S}} = C_0 + F_1(s,\sqrt{S}) + C\int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} - \int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}}\sum_{\mu=1}^{m} c'_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \int \frac{1}{2}\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_\mu}}{s-s_\mu}\frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{13.}$$

d. h. jedes elliptische Integral lässt sich darstellen als Summe einer rationalen Function von s und $\sqrt{S}$, je eines Integrals erster und zweiter Art und einer endlichen Anzahl von Integralen dritter Art in der hier angenommenen Normalform.

Bei der Anwendung dieser Formel treten häufig Vereinfachungen ein. Wird z. B. die zu integrirende elliptische Function an allen Stellen v_μ nur von der ersten Ordnung unendlich gross, so fällt nicht blos das Integral zweiter Art, sondern auch die Function $F_1(s,\sqrt{S})$ weg, wie man aus ihrer Entstehung erkennt. Es bleiben also nur Integrale erster und dritter Art übrig.

Vertauscht man in (9.) u mit v und stellt die beiden Formeln durch Subtraction zusammen, so erhält man, unter k eine ganze Zahl verstehend,

$$J(s,s_0) - J(s_0,s) = u\frac{\sigma'}{\sigma}v - v\frac{\sigma'}{\sigma}u + (2k+1)\pi i. \tag{14.}$$

Diese Gleichung enthält den Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter bei elliptischen Integralen dritter Art.

Das elliptische Integral zweiter Art kann als Entwickelungscoefficient des Integrales dritter Art dargestellt werden. Wird nämlich die rechte Seite von (9.) jetzt nach Potenzen von v entwickelt, indem

$$\sigma(v-u) = -\sigma(u-v) = -\sigma u + v\sigma' u + \cdots,$$

$$\sigma v = v - \frac{g_2}{2}\frac{v^5}{5!} + \cdots$$

gesetzt wird (S. 32 (4.)), so ergiebt sich

$$\frac{\sigma(v-u)}{\sigma u \sigma v} = \frac{-\sigma u + v\sigma' u + \cdots}{v\sigma u\left(1 - \frac{g_2}{2}\frac{v^4}{5!} + \cdots\right)} = -v^{-1}\left(1 - v\frac{\sigma'}{\sigma}u + \cdots\right).$$

Der Logarithmus der Klammergrösse lässt sich als Reihe darstellen, die mit

$$-v\frac{\sigma'}{\sigma}u$$

beginnt. Aus

$$\frac{\sigma'}{\sigma}v = \frac{1}{v} - \frac{g_2}{60}v^3 + \cdots$$

kommt kein Glied mit der ersten Potenz von v. Demnach kann man setzen

$$\text{(15.)} \qquad \frac{\sigma'}{\sigma}u = -\left[\log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma u \sigma v} + u\frac{\sigma'}{\sigma}v\right]_{v^1}.$$

Sechsundzwanzigstes Kapitel.

Die Additionstheoreme der Integrale erster, zweiter und dritter Art.

Es war ein Hauptsatz der Theorie der $\wp$-Function, dass die Function der Summe zweier Argumente mit den Functionswerthen für die einzelnen Argumente durch eine algebraische Gleichung verbunden ist. Meist ist dieses Additionstheorem in der Form

$$\text{(1.)} \qquad \wp(u_1+u_2) = \frac{(\wp u_1 + \wp u_2)(2\wp u_1 \wp u_2 - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \wp' u_1 \wp' u_2}{2(\wp u_1 - \wp u_2)^2}$$

benutzt worden, die aussagt, dass sich $\wp(u_1+u_2)$ rational durch die Werthe der Function selbst und ihrer ersten Ableitung für die Einzelargumente darstellen lässt. Wird

$$u = J(s)$$

gesetzt, so erscheint der Inhalt dieses Satzes in einer anderen Gestalt. Es sei für $u_1 + u_2 = u_3$:

$$\wp u_\lambda = s_\lambda, \quad \wp' u_\lambda = -\sqrt{S_\lambda}, \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

so besteht die Gleichung

$$\text{(2.)} \qquad J(s_1) + J(s_2) = J(s_3)$$

oder

$$\int_\infty^{s_1}\frac{-ds}{\sqrt{S}} + \int_\infty^{s_2}\frac{-ds}{\sqrt{S}} = \int_\infty^{s_3}\frac{-ds}{\sqrt{S}}$$

gleichzeitig mit

$$\text{(3.)} \qquad s_3 = \frac{(s_1+s_2)(2s_1s_2 - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \sqrt{S_1}\sqrt{S_2}}{2(s_1-s_2)^2}.$$

Das heisst: Zwei elliptische Integrale erster Art mit einer Grenze ∞ (Normalintegrale) lassen sich durch Addition zu einem einzigen solchen Integral vereinigen, dessen andere Grenze algebraisch aus den anderen Grenzen der beiden gegebenen Integrale zusammengesetzt ist. Dieser Satz heisst das Additionstheorem der Integrale erster Art. Um ihn auf Normalintegrale zweiter Art auszudehnen, hat man für $J'(s_1)+J'(s_2) = \frac{\sigma'}{\sigma}u_1 + \frac{\sigma'}{\sigma}u$ einen Ausdruck durch $\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+u_2)$ zu suchen. Ein solcher ergiebt sich aber unmittelbar aus der oft benutzten Formel (S. 37 (15.))

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+u_2) - \frac{\sigma'}{\sigma}u_1 - \frac{\sigma'}{\sigma}u_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}.$$

Es wird

$$J'(s_1) + J'(s_2) = J'(s_3) + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}{s_1 - s_2} \tag{4.}$$

oder

$$\int^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} + \int^{s_2}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = \int^{s_3}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}{s_1-s_2},$$

wo die Integrale durch die Festsetzungen auf S. 230 genauer bestimmt sind. Die Summe zweier Normalintegrale zweiter Art lässt sich also durch ein ebensolches Integral darstellen, vermehrt um einen algebraischen Ausdruck. Die obere Grenze s_3 des neuen Integrales wird, wie vorher, durch die Formel (3.) gegeben.

Für die entsprechende Untersuchung beim Integral dritter Art sind einige Vorbereitungen nötig. Es sollen nur Integrale mit demselben Parameter betrachtet werden. Vergleicht man dann

$$J(s_1, s_0) + J(s_2, s_0) = \log\frac{\sigma(v-u_1)}{\sigma u_1\,\sigma v} + u_1\frac{\sigma'}{\sigma}v + \log\frac{\sigma(v-u_2)}{\sigma u_2\,\sigma v} + u_2\frac{\sigma'}{\sigma}v$$

mit

$$J(s_3, s_0) = \log\frac{\sigma(v-u_3)}{\sigma u_3\,\sigma v} + u_3\frac{\sigma'}{\sigma}v,$$

so sieht man, dass aus $J(s_1,s_0)+J(s_2,s_0)-J(s_3,s_0)$ die Glieder mit $\frac{\sigma'}{\sigma}v$ von vornherein wegfallen. Die unter dem Zeichen log stehende Function werde, wenn u statt v geschrieben wird, mit $f(u)$ bezeichnet, sodass

$$\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma^2 u\,\sigma u_1\,\sigma u_2}\,\frac{\sigma u\,\sigma u_3}{\sigma(u-u_3)} = f(u)$$

ist. Der erste der hierin miteinander multiplicirten Quotienten kann nach dem Hauptsatze auf S. 139 durch Multiplication mit $\frac{\sigma(u+u_3)}{\sigma u}$ in eine elliptische Function verwandelt werden; durch Multiplication mit dem reciproken Factor geht dann zugleich auch aus dem zweiten Quotienten eine elliptische Function hervor. Es sei

$$\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u+u_3)}{\sigma^3 u\,\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3} = \varphi(u), \tag{5.}$$

also

$$f(u) = \varphi(u)\,\frac{\sigma u\,\sigma u_3}{\sigma(u-u_3)}\,\frac{\sigma u\,\sigma u_3}{\sigma(u+u_3)}.$$

Wird weiter

$$\frac{\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 u_3} = \psi(u)$$

gesetzt, so ist

$$\psi(u) = \wp u_3 - \wp u.$$

Es handelt sich darum, in

$$f(u) = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$$

auch den Zähler durch die $\wp$-Function auszudrücken.

Die Function $\varphi(u)$ hat nur eine einzige Unendlichkeitsstelle, $u = 0$, und es gilt in Folge dessen für sie die Darstellung auf S. 147, die sich hier, wegen der Ordnungszahl 3, auf

$$\varphi(u) = c_0 + c'\wp u - \tfrac{1}{2}c''\wp' u$$

reducirt. Die Coefficienten c' und c'' sind aus der Entwickelung

$$\varphi(u) = c' u^{-2} + c'' u^{-3} + \mathfrak{P}(u)$$

zu entnehmen.

Nun geht aus der Definitionsgleichung (5.) hervor, dass der Coefficient von u^{-3} gleich $+1$ ist. Zur Bestimmung von c' hat man den Coefficienten von u^1 im Zähler durch $\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3$ zu dividiren. Es ist

$$\sigma(u-u_1) = -\sigma(u_1-u) = -\sigma u_1 + u\,\sigma' u_1 + \cdots,$$

und entsprechend für $\sigma(u-u_2)$ und $\sigma(u-u_3)$. Mithin wird

$$\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3\,c' = -\sigma' u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3 - \sigma' u_2\,\sigma u_1\,\sigma u_3 + \sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma' u_3,$$

$$c' = \frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+u_2) - \frac{\sigma'}{\sigma}u_1 - \frac{\sigma'}{\sigma}u_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2},$$

und es muss sein

$$\varphi(u) = c_0 + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}\,\wp u - \frac{1}{2}\,\wp' u.$$

Die Constante c_0 kann aus $\varphi(u_1) = 0$, nämlich

$$0 = c_0 + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}\,\wp u_1 - \frac{1}{2}\,\wp' u_1$$

bestimmt werden. Der gesuchte Ausdruck lautet

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}(\wp u - \wp u_1) - \frac{1}{2}(\wp' u - \wp' u_1).$$

Nun ist die Function $\varphi(u)$ durch $\psi(u) = \wp u_3 - \wp u$ zu dividiren, dann $u = v$ zu setzen; an Stelle von u_1, u_2, u_3 sind überall die zugehörigen $\wp$-Functionen s_1, s_2, s_3 einzuführen, für s_3 der Ausdruck aus (3.) zu schreiben. Man kann jedoch den Quotienten $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$ noch weiter so umformen, dass s_3 darin garnicht enthalten ist. Die algebraische Beziehung zwischen s_1, s_2, s_3 kommt dann nur insoweit in Betracht, als s_3 obere Grenze des Integrales dritter Art ist, mittels dessen die Summe der beiden gegebenen ausgedrückt werden soll.

Als lineare Function von $\wp' u$ werde $\varphi(u)$ mit

$$G - H\wp' u$$

bezeichnet. Hierin ist G eine lineare Function von $\wp u$, H eine Constante, gleich $\frac{1}{2}$. Das Product

$$(G - H\wp' u)(G + H\wp' u) = G^2 - H^2(\wp' u)^2$$

ist eine ganze Function dritten Grades von $\wp u$, die für die Nullstellen von $\varphi(u)$, nämlich $u = u_1, u_2$ und $-u_3$, d. h. für $\wp u = s_1, s_2$ und s_3, zu Null wird. Sie kann sich von

$$(\wp u - s_1)(\wp u - s_2)(\wp u - s_3)$$

nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Nun beginnt dieses Product, in der Nähe von $u = 0$ entwickelt, mit u^{-6}. Das Anfangsglied von $G^2 - H^2(\wp' u)^2$ ist das des zweiten Bestandtheils, also $-u^{-6}$. Mithin wird

$$G^2 - H^2(\wp' u)^2 = -(\wp u - s_1)(\wp u - s_2)(\wp u - s_3)$$

und

$$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = \frac{G - H\wp' u}{s_3 - \wp u} = \frac{(\wp u - s_1)(\wp u - s_2)}{G + H\wp' u}.$$

Für die Darstellung von $J(s_1, s_0) + J(s_2, s_0) - J(s_3, s_0)$ wird

$$\log f(v) = \log\frac{\varphi(v)}{\psi(v)} = -\log\frac{G_0 + H_0\wp' v}{(\wp v - s_1)(\wp v - s_2)}$$

gebraucht. Dabei ist

$$\begin{aligned} G_0 + H_0\wp' v &= \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}(\wp v - \wp u_1) + \frac{1}{2}(\wp' v + \wp' u_1) \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}{s_1 - s_2}(s_0 - s_1) - \frac{1}{2}(\sqrt{S_0} + \sqrt{S_1}), \end{aligned}$$

und eine einfache Umformung liefert schliesslich

$$(6.)\quad J(s_1, s_0) + J(s_2, s_0) = J(s_3, s_0) - \log\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{s_1 - s_2}\left(\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_0}}{s_1 - s_0} - \frac{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_0}}{s_2 - s_0}\right)\right).$$

Die Summe zweier elliptischen Integrale dritter Art mit demselben Parameter lässt sich also darstellen durch ein Integral derselben Beschaffenheit, vermehrt um den Logarithmus eines algebraischen Ausdrucks.

Auf die Ausdehnung der Additionstheoreme (2.), (4.) und (6.) auf Summen von mehr als zwei Integralen soll hier nicht eingegangen werden, und ebensowenig auf die Herleitung des Additionstheorems der Integrale zweiter Art aus dem der Integrale dritter Art, die mittels der Formel S. 234 (15.) ausgeführt werden kann.

Siebenundzwanzigstes Kapitel.

Formeln zur Berechnung der Perioden.

Im neunten Kapitel sind zwei primitive Perioden der $\wp$-Function für reelle Invarianten durch bestimmte Integrale dargestellt worden, und zwar war bei positiver Discriminante

$$(1.)\qquad \omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}},$$

$$(2.)\qquad \omega' = i \int_{-e_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s + g_3}}$$

(S. 78 (9.)). Die Ausdrücke können leicht so umgeformt werden, dass sie unter dem Integralzeichen blos eine Constante enthalten, und zwar liegt der Grund hiervon in dem Zusammenhange zwischen der Differentialgleichung der $\wp$-Function mit denen für die σ-Quotienten, wie er durch die Gleichung

$$\wp u - e_\alpha = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2$$

vermittelt wird. Aus der Form z. B. der Differentialgleichung S. 97 (7.) ist ersichtlich, dass man nur $\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}\,\frac{\sigma}{\sigma_\gamma} u$ gleich einer neuen Grösse zu setzen braucht, um auf eine Normalform eines elliptischen Differentials mit einer einzigen Constanten zu kommen (vgl. S. 99).

Um die Transformation direct an dem bestimmten Integral (1.) durchzuführen, setze man in

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$$

$$(3.)\qquad s - e_3 = \frac{e_1 - e_3}{t^2},$$

so wird

$$\omega = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(e_1 - e_3 - (e_2 - e_3)t^2)}}.$$

Gilt, wie auf S. 99, die Definitionsgleichung

$$(4.)\qquad \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2,$$

wo k^2 unterhalb Eins liegt, und ferner

$$(5.)\qquad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = K,$$

so geht die Gleichung für ω in

$$(6.)\qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} K$$

über.

Aus dem Integralausdruck für ω folgte der für $\frac{\omega'}{i}$ durch Vertauschung von

$$e_1,\quad e_2,\quad e_3$$

mit

$$-e_3,\ -e_2,\ -e_1.$$

Macht man diese Vertauschungen auch in der Substitutionsgleichung und dem Resultat, so erhält man, wenn man

$$(7.)\qquad \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = k'^2,$$

$$(8.)\qquad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}} = K'$$

setzt,

$$(9.)\qquad \omega' = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} K'.$$

Die beiden in K und K' vorkommenden Constanten k und k', die **Moduln** der elliptischen Integrale, sind durch die Gleichung

$$(10.)\qquad k^2 + k'^2 = 1$$

verbunden. Der eine heisst der Complementärmodul des anderen.

Um nun K in eine für die Berechnung zweckmässige Form zu setzen, entwickele man für $k^2 t^2 < 1$

$$(1-k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 t^2 + \frac{1.3}{2.4} k^4 t^4 + \cdots + \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} k^{2n} t^{2n} + \cdots$$

oder, wenn

$$c_0 = 1, \quad \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} = c_n \qquad (n > 0)$$

definirt wird,

$$(1-k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n} t^{2n}. \tag{11.}$$

Bei der Multiplication mit $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ erscheint im allgemeinen Gliede $\frac{t^{2n}\, dt}{\sqrt{1-t^2}}$, und man kann nach einer aus der Integralrechnung bekannten Reductionsformel schreiben:

$$\frac{t^{2n}\, dt}{\sqrt{1-t^2}} = c_n \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - c_n\, d\left(t\, G_n(t) \sqrt{1-t^2}\right), \qquad (n > 0) \tag{12.}$$

wo

$$G_1(t) = 1, \quad G_2(t) = 1 + \frac{2}{3} t^2, \quad \ldots,$$

$$G_n(t) = 1 + \frac{2}{3} t^2 + \cdots + \frac{2.4 \ldots (2n-2)}{3.5 \ldots (2n-1)} t^{2n-2}. \tag{13.}$$

Demnach wird

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k^{2n}\, d\left(t\, G_n(t) \sqrt{1-t^2}\right).$$

Nun werde bleibend

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k^{2n} = \mathfrak{K} \tag{14.}$$

und ausserdem

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k^{2n}\, t\, G_n(t) = G(t)$$

gesetzt. Was die Convergenz der Reihen $\mathfrak{K}$ und $G(t)$ angeht, so ist die erste wegen $c_n \leqq 1$ für $k^2 < 1$ convergent, weil ihre Glieder nicht grösser sind als die entsprechenden der geometrischen Reihe

$$1 + k^2 + k^4 + \cdots = \frac{1}{1-k^2} = \frac{1}{k'^2}.$$

Die Reihe $G(t)$ convergirt, wenn die durch Umordnung ihrer Glieder ent-

standene

$$\begin{aligned} & t\,(c_1^2 k^2 + c_2^2 k^4 + c_3^2 k^6 + \cdots) \\ & + \frac{2}{3} t^3 (c_2^2 k^4 + c_3^2 k^6 + \cdots) \\ & + \frac{2.4}{3.5} t^5 (c_3^2 k^6 + \cdots) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

convergent ist. Die in den Klammern stehenden Reihen convergiren nun aus demselben Grunde wie vorher die Reihe $\mathfrak{K}$, und ihre Summen sind kleiner als $\frac{k^2}{k'^2}, \frac{k^4}{k'^2}, \frac{k^6}{k'^2}, \cdots$ Die betrachtete Reihe ist demnach Glied für Glied kleiner als

$$\frac{t k^2}{k'^2}\left(1 + \frac{2}{3} t^2 k^2 + \frac{2.4}{3.5} t^4 k^4 + \cdots\right).$$

Durch Vergleichung mit der geometrischen Reihe

$$1 + t^2 k^2 + t^4 k^4 + \cdots$$

erkennt man jetzt, dass ihre Summe und demnach auch $G(t)$ einen endlichen Werth hat, sobald $t^2 k^2 < 1$ ist. Und diese Bedingung ist auch für $t = 1$ erfüllt. Man darf daher die Gleichung

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \mathfrak{K} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - d\left(G(t) \sqrt{1-t^2}\right).$$

zwischen den Grenzen 0 und 1 integriren. Dabei fällt der zweite Bestandtheil weg, und es wird

$$K = \frac{\pi}{2} \mathfrak{K} \tag{15.}$$

und ebenso

$$K' = \frac{\pi}{2} \mathfrak{K}'. \tag{16.}$$

Die Reihe $\mathfrak{K}$ convergirt um so stärker, je näher k^2 bei Null liegt. Da nun $\mathfrak{K}'$ die Grösse $1-k^2$ ebenso enthält wie $\mathfrak{K}$ die Grösse k^2, so tritt im Allgemeinen der Übelstand ein, dass von den beiden gleichzeitig gebrauchten Reihen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die eine schwach convergirt, wenn die andere stark convergent ist. Durch eine Transformation kann dem abgeholfen werden.

In der Formel (5.) werde

$$1 - k^2 t^2 = \frac{1}{t_1^2} \tag{17.}$$

gesetzt. Ausserdem soll die Definition der Grösse k', von der bis jetzt nur das Quadrat vorgekommen ist, durch die Bestimmung

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

vervollständigt werden. Dann findet man

$$K = \int_1^{\frac{1}{k'}} \frac{dt_1}{\sqrt{(t_1^2-1)(1-k'^2 t_1^2)}}.$$

Es werde nun zwischen 1 und $\frac{1}{k'}$ ein beliebiger Werth t_0 eingeschoben. Durch eine weitere Transformation des zweiten Bestandtheils in

$$K = \int_1^{t_0} \frac{dt_1}{\sqrt{(t_1^2-1)(1-k'^2 t_1^2)}} + \int_{t_0}^{\frac{1}{k'}} \frac{dt_1}{\sqrt{(t_1^2-1)(1-k'^2 t_1^2)}} \tag{18.}$$

kann bewirkt werden, dass die eine Grenze gleich Eins wird, während die Form des Differentials sich nicht ändert. Dies hat den Vortheil, dass man allein das erste der beiden Integrale weiter zu behandeln braucht und bei der Reihenentwickelung des zweiten nur t_0 durch die noch zu bestimmende obere Grenze des zweiten zu ersetzen hat. Da K von t_0 unabhängig ist, so sind von beiden Entwickelungen schliesslich blos die von t_0 freien Glieder beizubehalten.

Eine Substitution, durch welche die Grenze $\frac{1}{k'}$ in 1 verwandelt wird, ist

$$t_1 = \frac{1}{k't'}. \tag{19.}$$

Mit der ursprünglichen Grösse t hängt t' durch die Gleichung

$$k^2 t^2 + k'^2 t'^2 = 1 \tag{20.}$$

zusammen. Die andere Grenze wird $\frac{1}{k't_0}$, und es handelt sich demnach, wenn die Integrationsvariable wieder mit t bezeichnet wird, um die Entwickelung von

$$\int_1^{\frac{1}{k't_0}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k'^2 t^2)}}.$$

Man hat für $k'^2 t^2 < 1$ nach (11.)

$$(1-k'^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n k'^{2n} t^{2n} \tag{21.}$$

zu setzen, was dem Integrations-Intervall nach offenbar gestattet ist, und die Formel (12.) in der Gestalt

$$\frac{t^{2n}\,dt}{\sqrt{t^2-1}} = c_n \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + c_n\, d\left(t\, G_n(t) \sqrt{t^2-1}\right) \tag{22.}$$

zu benutzen. Sie gilt nicht für $n = 0$, aber man kann bei der Summation, wie schon vorher, das zu c_0 gehörende Glied in den ersten Theil des bei der Integration entstehenden Ausdruckes aufnehmen. Wird alles dieses zunächst auf das erste in (18.) enthaltene Integral angewendet, so ergiebt sich

$$\int_1^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k'^2 t^2)}} = \mathfrak{K}' \log\left(t_0 + \sqrt{t_0^2-1}\right) + t_0 \sqrt{t_0^2-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} G_n(t_0).$$

In dem zweiten Integral ist dann also t_0 durch $\frac{1}{k't_0}$ zu ersetzen:

$$\int_1^{\frac{1}{k't_0}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k'^2 t^2)}} = \mathfrak{K}' \log \frac{1+\sqrt{1-k'^2 t_0^2}}{k' t_0} + \frac{\sqrt{1-k'^2 t_0^2}}{k'^2 t_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} G_n\left(\frac{1}{k't_0}\right).$$

Beide Ausdrücke sind nach Potenzen von t_0 zu entwickeln und die constanten Glieder beizubehalten. Es wird

$$t_0 + \sqrt{t_0^2-1} = t_0\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{t_0^2}}\right) = t_0\left(2-\frac{1}{2}\frac{1}{t_0^2}+\cdots\right) = 2t_0\left(1-\frac{1}{4}\frac{1}{t_0^2}+\cdots\right),$$

$$\log\left(t_0+\sqrt{t_0^2-1}\right) = \log 2 + \log t_0 + \frac{1}{t_0^2}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{t_0^2}\right),$$

woraus

$$\log \frac{1+\sqrt{1-k'^2 t_0^2}}{k' t_0} = \log 2 - \log k' - \log t_0 + k'^2 t_0^2\, \mathfrak{P}(k'^2 t_0^2).$$

Bei der Addition fällt $\log t_0$ weg; der erste Theil von K wird also

$$\mathfrak{K}' \log \frac{4}{k'}.$$

Dazu tritt noch

$$\left[t_0 \sqrt{t_0^2-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} G_n(t_0)\right]_{t_0^0},$$

und zwar mit dem Factor 2, weil es für das constante Glied nicht darauf ankommt, ob die Variable in der Potenzreihe mit t_0 oder $\frac{1}{k't_0}$ bezeichnet wird.

Um $\sqrt{t_0^2-1}$ zu entwickeln, hat man von

$$(t_0^2-1)^{-\frac{1}{2}} = t_0^{-1}\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

auszugehen; nach (11.) sind die Coefficienten der hieraus entstehenden Reihe bereits bekannt. Es ist

$$\frac{d\sqrt{t_0^2-1}}{dt_0} = \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2-1}} = \left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t_0^{-2n},$$

also

$$\sqrt{t_0^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t_0^{-2n+1}}{-2n+1},$$

da die hinzutretende Constante, wie der directe Ansatz der Anfangsglieder von $\sqrt{t_0^2-1}$ lehrt, gleich Null ist.

Es sei nun

$$[t_0\sqrt{t_0^2-1}\, G_n(t_0)]_{t_0^0} = a_n,$$

sodass die noch zu berechnende Grösse gleich

$$2\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} a_n$$

ist. Man findet a_n durch Multiplication von

$$\sqrt{t_0^2-1} = t_0 - c_1 t_0^{-1} - \frac{1}{3} c_2 t_0^{-3} - \frac{1}{5} c_3 t_0^{-5} - \cdots$$

mit

$$t_0 G_n(t_0) = t_0 + \frac{2}{3} t_0^3 + \frac{2.4}{3.5} t_0^5 + \cdots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)} t_0^{2n-1}$$

und Beibehaltung des constanten Gliedes:

$$\begin{aligned} a_n &= -c_1 - \frac{2}{3}\frac{c_2}{3} - \frac{2.4}{3.5}\frac{c_3}{5} - \cdots - \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{c_n}{2n-1} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1.3}{2.4} - \frac{2.4}{3.5}\frac{1}{5}\frac{1.3.5}{2.4.6} - \cdots - \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{1}{2n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \\ &= -\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.4} - \frac{1}{5.6} - \cdots - \frac{1}{(2n-1)2n}. \end{aligned}$$

Hiernach wird schliesslich

$$K = \mathfrak{K}' \log\frac{4}{k'} - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(2\nu-1)2\nu}. \tag{23.}$$

Das zweite Glied der rechten Seite kann noch in anderer Form geschrieben werden. Von dem Factor -2 abgesehen, heissen die Anfangsglieder

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1.2} c_1^2 k'^2 + \left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}\right) c_2^2 k'^4 + \left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}\right) c_3^2 k'^6 + \cdots \\ &\qquad = \frac{1}{1.2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} + \frac{1}{3.4}\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} + \frac{1}{5.6}\sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} + \cdots. \end{aligned}$$

Hierin ist die erste Summe bis auf das Anfangsglied gleich der Reihe $\mathfrak{K}'$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} = \mathfrak{K}' - 1;$$

ebenso

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} = \mathfrak{K}' - 1 - c_1^2 k'^2,$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} = \mathfrak{K}' - 1 - c_1^2 k'^2 - c_2^2 k'^4, \ \ldots.$$

Die n Anfangsglieder zusammen mögen $\mathfrak{K}'_n$ geben, also

$$1 + c_1^2 k'^2 + c_2^2 k'^4 + \cdots + c_{n-1}^2 k'^{2n-2} = \mathfrak{K}'_n \tag{24.}$$

sein, so ist

$$K = \mathfrak{K}' \log\frac{4}{k'} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}'_n}{(2n-1)2n}. \tag{25.}$$

Wenn nun die Reihe $\mathfrak{K}$ schwach, demnach $\mathfrak{K}'$ stark convergent ist, so benutze man diese Formel, worauf ω und ω' selbst durch (6.) und (9.) bestimmt werden. Dies gilt also, wenn k^2 nahe bei Eins, k'^2 nahe bei Null liegt. Ist dagegen k^2 wenig von Null verschieden, so hat man umgekehrt zu verfahren, nämlich zu setzen

$$K = \frac{\pi}{2}\mathfrak{K},$$

$$K' = \mathfrak{K} \log\frac{4}{k} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_n}{(2n-1)2n}, \tag{26.}$$

wo $\mathfrak{K}_n$ für $\mathfrak{K}$ dieselbe Bedeutung hat wie $\mathfrak{K}'_n$ für $\mathfrak{K}'$.

Achtundzwanzigstes Kapitel.

Bestimmung eines primitiven Periodenpaares der $\wp$-Function für beliebige Grössen e_α.

Die im vorigen Kapitel gewonnenen Formeln können unter allgemeineren Voraussetzungen zur Bestimmung eines primitiven Periodenpaares von $\wp u$ dienen. Es seien e_1, e_2, e_3 beliebige complexe, nur durch die Gleichung

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

verbundene Grössen, und es sei wie bisher

$$\text{(1.)} \qquad \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2, \quad \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = k'^2,$$

$$\text{(2.)} \qquad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K, \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} = K'.$$

Die Functionen unter den Integralzeichen sind jetzt im Allgemeinen complex. Der Integrationsweg sei die gerade Verbindungslinie der beiden Punkte 0 und 1 in der Ebene der Grösse t, also ein Stück der Axe des Reellen; die zu integrirenden Ausdrücke werden demnach längs des Integrationsweges als complexe Functionen einer reellen Veränderlichen betrachtet. Endlich werde

$$\text{(3.)} \qquad \omega = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega' = \frac{K'i}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

gesetzt. Alle vorkommenden Quadratwurzeln mögen im reellen Theile positiv sein.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass die beiden Grössen ω und ω' den Gleichungen

$$\wp\omega = e_1, \quad \wp\omega' = e_3$$

genügen müssen. Denn durch Umkehrung der Transformation S. 240 (3.) kann man von K zu der Integraldarstellung S. 240 (1.) für ω zurückkehren, die $\wp\omega = e_1$ nach sich zieht, und für $\wp\omega'$ ergiebt sich das Entsprechende aus S. 76—78. Um zu zeigen, dass $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar ist, brauchte man nur die Legendresche Relation

$$\text{(4.)} \qquad \eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\varepsilon\pi i}{2}$$

(S. 130 (23.)) als giltig nachzuweisen. Zwar ist diese bis jetzt nur als nothwendig für ein primitives Periodenpaar hingestellt worden; dass sie aber auch hinreichend ist, erkennt man durch folgende Schlüsse.

Ist $\tilde\omega, \tilde\omega'$ ein beliebiges Paar halber Perioden, so ergiebt sich durch wörtliche Wiederholung der Überlegung auf S. 72, wenn man von $\sigma(u + 2\tilde\omega)$ (S. 71 unten) und $\sigma(u + 2\tilde\omega')$ ausgeht, die Gleichung

$$\tilde\eta\tilde\omega' - \tilde\omega\tilde\eta' = \frac{l\pi i}{2},$$

also speciell

$$\tilde\eta\omega - \tilde\omega\eta = \frac{m\pi i}{2},$$

$$\tilde\eta\omega' - \tilde\omega\eta' = \frac{m'\pi i}{2},$$

bei ganzzahligen l, m, m'. Gilt nun die Gleichung (4.), so folgt durch Auflösung

$$2\tilde\omega = 2\varepsilon m'\omega - 2\varepsilon m\omega',$$

d. h. es ist $2\tilde\omega$, und weiter jede beliebige Periode, durch 2ω und $2\omega'$ als homogene lineare Function mit ganzzahligen Coefficienten darstellbar.

Die Relation (4.) möge hier auch in der Form wiedergegeben werden, wie sie bei Legendre selbst vorkommt. Den Integralen K und K' treten dort die entsprechend definirten

$$\text{(5.)} \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = E, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k'^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = E'$$

an die Seite. Lässt man in dem ersten Ausdruck die obere Grenze zunächst unbestimmt und wendet die Jacobischen Bezeichnungen an, indem man

$$t = \sin\operatorname{am} u', \quad \sqrt{1-k^2t^2} = \Delta\operatorname{am} u'$$

setzt, so erhält man

$$\int_0^t \frac{(1-k^2t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{u'} (\Delta\,\mathrm{am}\,u')^2\,du'.$$

Nun war (S. 100 (18.))

$$\Delta\,\mathrm{am}\,u' = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}\left(\frac{u'}{\sqrt{e_1-e_3}}\right),$$

also wird für $u' = u\sqrt{e_1-e_3}$

$$\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^t \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^u \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}u\right)^2 du$$
$$= \int_0^u \frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3}\,du$$
$$= \int_0^u \left(1 - \frac{e_2-e_3}{\wp u - e_3}\right) du.$$

Aus

$$\sigma_3 u = e^{-\eta' u}\,\frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'}$$

folgt aber

$$\frac{d^2\log\sigma_3 u}{du^2} = \frac{d^2\log\sigma(\omega'+u)}{du^2} = -\wp(\omega'+u) = -e_3 - \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\wp u - e_3}$$

und demnach

$$\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^t \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = u + \frac{1}{e_1-e_3}\int_0^u \left(e_3 + \frac{d^2\log\sigma_3 u}{du^2}\right) du,$$

$$\text{(6.)}\qquad \int_0^t \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left(e_1 u + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}u\right).$$

Giebt man jetzt der oberen Grenze t den Werth 1, d. h. lässt man die Integrationsvariable die gerade Verbindungslinie der Punkte 0 und 1 durchlaufen, so geht u auf directem Wege von Null bis

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}} = \omega,$$

sodass

$$E = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left(e_1\omega + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}\omega\right)$$

wird. Aus der eben benutzten Formel für $\sigma_3 u$ folgt aber

$$\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}u = -\eta' + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'+u),$$
$$\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}\omega = -\eta' + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'+\omega) = \eta,$$

und daraus schliesslich

$$\text{(7.)}\qquad E = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}(e_1\omega + \eta).$$

Durch Vertauschung von e_1 mit e_3 ergiebt sich

$$\text{(8.)}\qquad E' = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}(e_3\omega' + \eta').$$

Berechnet man umgekehrt aus (7.) und (8.)

$$\text{(9.)}\qquad \eta = \sqrt{e_1-e_3}\,E - e_1\omega,$$
$$\text{(10.)}\qquad \eta' = -i\sqrt{e_1-e_3}\,E' - e_3\omega'$$

und setzt diese Werthe zusammen mit denen für ω und ω' in (4.) ein, so erhält man die gesuchte Legendresche Gleichung in der Form

$$\text{(11.)}\qquad EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2};$$

denn in Folge der auf S. 127 gemachten Festsetzungen wird $\varepsilon = +1$.

Nach dem auf S. 249 Gesagten kommt es also nun auf die Feststellung an, dass die Gleichung

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2}$$

wirklich gilt. Für diesen Nachweis bedarf es einer weiteren Umwandlung der Formel (9.). Es ist

$$\eta = \sqrt{e_1-e_3}\,E - \frac{e_1}{\sqrt{e_1-e_3}}K = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^1 \frac{-e_3-(e_1-e_3)k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt$$

oder

$$\text{(12.)}\qquad \eta = -\frac{e_3}{\sqrt{e_1-e_3}}K - \sqrt{e_1-e_3}\int_0^1 \frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Die wirkliche Berechnung des rechts stehen gebliebenen Integrals kann nach derselben Methode ausgeführt werden wie die von K. Man setzt unter Voraussetzung der Convergenz

$$k^2t^2(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n+2} t^{2n+2}$$

(vgl. S. 242), multiplicirt mit $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ und integrirt gliedweise unter Benutzung der Formel

$$\frac{t^{2n+2}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = c_{n+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - c_{n+1}\,d\left(t\,G_{n+1}(t)\sqrt{1-t^2}\right).$$

Wegen der Grenzen 0 und 1 fällt das zweite Glied weg, und es bleibt

$$\int_0^1 \frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n+1} k^{2n+2}\frac{\pi}{2}.$$

Aus der Erklärung der Grösse c_n folgt

$$c_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}c_n.$$

Wird demnach

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2n+2}c_n^2 k^{2n+2} = \mathfrak{J} \tag{13.}$$

gesetzt, woraus

$$\int_0^1 \frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{\pi}{2}\mathfrak{J}$$

hervorgeht, so liefert die Gleichung (12.)

$$\eta = -\frac{e_3}{\sqrt{e_1-e_3}}\mathfrak{K}\frac{\pi}{2} - \sqrt{e_1-e_3}\,\mathfrak{J}\frac{\pi}{2}. \tag{14.}$$

Es bedarf nun noch der Darstellung von η' als Function von k^2. Von den beiden Gliedern der rechten Seite von (10.) ist das zweite wegen (3.) und S. 247 (26.) bekannt. Im ersten kommt das Integral E' vor, das Function von k'^2 ist, und dieses werde durch eine der Substitution S. 243 (17.) entsprechende, nämlich

$$1-k'^2t^2 = \frac{1}{t'^2} \tag{15.}$$

umgewandelt:

$$E' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt'}{t'^2\sqrt{(t'^2-1)(1-k^2t'^2)}}. \tag{16.}$$

Bei der Transformation von K, um die es sich a. a. O. handelte, bestand der zweite Schritt darin, zwischen die Grenzen einen Werth einzuschieben, das Integral zu zerlegen und den zweiten Theil nochmals umzuwandeln, um dann von beiden Theilen die constanten Glieder beizubehalten. Der Substitution

S. 244 (19.) entspricht hier

$$t' = \frac{1}{kt_1}, \tag{17.}$$

und nach deren Anwendung auf das Integral mit den Grenzen t_0 und $\frac{1}{k}$ wird

$$E' = \int_1^{t_0}\frac{dt}{t^2\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} + \int_1^{\frac{1}{kt_0}}\frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

Aber die beiden Differentiale haben hier nicht, wie dort, dieselbe Form. Um dies zu erreichen, kann man

$$\frac{d}{dt}\frac{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}{t} = \frac{1-k^2t^4}{t^2\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

bilden und daraus

$$\frac{dt}{t^2\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = d\,\frac{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}{t} + \frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

in das erste Integral einsetzen; dann kommt

$$E' = \frac{\sqrt{(t_0^2-1)(1-k^2t_0^2)}}{t_0} + \int_1^{t_0}\frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} + \int_1^{\frac{1}{kt_0}}\frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \tag{18.}$$

Benutzt man jetzt die Formel S. 244 (22.) für $n+1$ statt n, so erhält man für das Integral

$$\int_1^{t_0}\frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

den Ausdruck $\mathfrak{J}\log\left(t_0+\sqrt{t_0^2-1}\right)$, vermehrt um das Product von $\sqrt{t_0^2-1}$ mit einer nach Potenzen von k^2 und t_0 fortschreitenden Reihe, deren Bildungsgesetz in genau derselben Weise ermittelt werden kann wie dort. Dem Logarithmus ist hier und im Folgenden sein Hauptwerth beizulegen. Der Werth des anderen Integrals folgt aus dem des ersten durch die Einführung von $\frac{1}{kt_0}$ anstatt t_0. Entwickelt man nun nach Potenzen von t_0, so hat das constante Glied aus der Summe der beiden Integrale den Werth

$$\mathfrak{J}\log\frac{4}{k} + k^2\mathfrak{P}_1(k^2)$$

(vgl. S. 245). Aber ausserdem ist hier noch das constante Glied aus dem von Integralzeichen freien Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(t_0^2-1)(1-k^2 t_0^2)}}{t_0} = \sqrt{1-\frac{1}{t_0^2}}\sqrt{1-k^2 t_0^2}$$

hinzuzunehmen. Die Entwickelung beider Factoren ist aus S. 245 abzulesen. Wesentlich ist, dass ein von k freies Glied, nämlich $+1$, auftritt, und dazu ein Potenzreihe von k^2, die gleichzeitig mit k verschwindet. Danach wird

$$E' = \mathfrak{J} \log \frac{4}{k} + 1 + k^2 \mathfrak{P}_2(k^2), \tag{19.}$$

$$\eta' = -i\sqrt{e_1-e_3}\left(\mathfrak{J}\log\frac{4}{k}+1\right) - e_3\,\omega' + k^2\mathfrak{P}_3(k^2). \tag{20.}$$

In Verbindung mit (14.) und

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\mathfrak{K}\,\frac{\pi}{2}, \tag{21.}$$

$$\omega' = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\mathfrak{K}\log\frac{4}{k} + k^2\mathfrak{P}(k^2) \tag{22.}$$

(nach S. 247 (26.) und S. 242 (14.)) ergiebt sich nun aus dieser Formel

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2} + k^2\overline{\mathfrak{P}}(k^2).$$

Es muss aber

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{l\pi i}{2}$$

sein, für l als ganze Zahl (S. 249). Andererseits erscheint nach der vorhergehenden Gleichung $\eta\omega'-\omega\eta'$ als stetige Function von k. Und da sich l nur sprungweise ändern könnte, so muss es für alle Werthe von k denselben Werth haben. Für $k=0$ folgt

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2},$$

und dies war es, was bewiesen werden sollte.

Neunundzwanzigstes Kapitel.

Bestimmung von u aus der Gleichung $\wp u = s$.

Die Formeln und Entwickelungen des vorigen Kapitels lassen sich in mehreren Richtungen verallgemeinern. Erstens darf man e_1, e_2, e_3 durch $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ ersetzen, wobei nur darauf zu achten ist, dass diese Grössen der Convergenz der vorkommenden Reihen wegen bei der Bildung von k^2 in passender Weise angeordnet werden. Zweitens gelten die Methoden nicht nur für die Berechnung einer halben Periode, also einer Grösse $\tilde{\omega}$, die der Gleichung

$$\wp\tilde{\omega} = e_\alpha$$

genügt, sondern allgemein für die Bestimmung einer Grösse u aus der Gleichung

$$\wp u = s \tag{1.}$$

bei gegebenem s. Zwar ist schon im sechsten Kapitel gezeigt worden, dass man diese Gleichung mittels einer endlichen Anzahl von Reihenentwickelungen lösen kann; aber für die praktische Berechnung sind jene Reihen wenig brauchbar.

Der in den beiden letzten Kapiteln beständig benutzte Zusammenhang zwischen den Differentialen $\frac{ds}{\sqrt{S}}$ und $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ beruhte auf der Beziehung zwischen der $\wp$-Function und den σ-Quotienten (S. 89). Es ist gleichgiltig, ob man u der Gleichung (1.) oder z. B. der Gleichung

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 = s - e_\alpha$$

gemäss zu bestimmen sucht. An Stelle von $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}$ soll jetzt der Quotient $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$

bevorzugt werden. Wird

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u = \xi \tag{2.}$$

gesetzt, so ist wegen

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u\right)^2 = \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - e_\beta}$$

ξ mit s durch die Bedingung

$$\xi^2 = \frac{s - e_\alpha}{s - e_\beta} \tag{3.}$$

verbunden. Die Function $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u$ genügt nach S. 98 (10.) der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u\right)^2\right)\left(e_\alpha - e_\gamma - (e_\beta - e_\gamma)\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u\right)^2\right).$$

Wird also

$$\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\gamma} = k^2 \tag{4.}$$

gesetzt, so ist

$$u = \frac{1}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}} \int_1^\xi \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \tag{5.}$$

ein Ausdruck, der die Gleichung (2.) befriedigt. Verfährt man nun nach der Methode auf S. 244, so findet man

$$u = \frac{\mathfrak{K} i}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}} \log\left(\xi + i\sqrt{1-\xi^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}} G(\xi)\sqrt{1-\xi^2}, \tag{6.}$$

wo der Logarithmus für $\xi = 1$ verschwindet. Der Werth von u ist demnach eindeutig bestimmt, wenn $\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}$ und $\sqrt{1-\xi^2}$ fixirt sind. Aber für die Aufgabe selbst sind diese Wurzelwerthe ohne Bedeutung. Denn ihre Änderung kann höchstens das Vorzeichen von u umkehren, und die Gleichung (2.) bleibt erfüllt, weil $\sigma_\alpha u$ und $\sigma_\beta u$ gerade Functionen von u sind. Denkt man sich nun für ein gegebenes s die Grösse ξ durch die Gleichung (3.) erklärt, und zwar unter der Bedingung, dass $\xi = +1$, $s = \infty$ zusammengehören, so erhält man

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u\right)^2 = \frac{s - e_\alpha}{s - e_\beta},$$

d. h.

$$\frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - e_\beta} = \frac{s - e_\alpha}{s - e_\beta}$$

oder, weil $e_\alpha \neq e_\beta$,

$$\wp u = s.$$

Giebt man auch dem Logarithmus einen beliebigen seiner Werthe, so ändert sich u um ein positives oder negatives Vielfaches von

$$\frac{2\mathfrak{K}\pi}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}}.$$

Nun darf man nach dem oben zuerst Bemerkten in Verbindung mit S. 254 (21.) als bewiesen betrachten, dass

$$\frac{\mathfrak{K}\pi}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}} = 2\tilde{\omega}$$

eine Periode der $\wp$-Function ist. Das Doppelte hiervon ist eine Periode des Quotienten $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$ (S. 93). Mithin bleibt auch der geänderte Werth von u eine Lösung der Gleichung (2.).

Die Formel (6.) liefert hiernach eine bestimmte Lösung der Aufgabe, ferner den entgegengesetzten Werth und alle die Werthe, die sich durch Vielfache einer bestimmten Periode von diesen unterscheiden. Die Giltigkeit der Formel ist an die Convergenz der darin vorkommenden Reihen gebunden. Von einer der Bedingungen,

$$\left|\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\gamma}\right| < 1,$$

kann man sich dadurch frei machen, dass man statt k^2 eine andere Grösse in die Reihenentwickelungen einführt.

Aus den Beziehungen zwischen σ- und ϑ-Functionen (S. 171) folgt für die linke Seite der Gleichung (2.)

$$\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}} \frac{\vartheta_1(v|\tau)}{\vartheta_2(v|\tau)}, \tag{7.}$$

und ebenso

$$\frac{\sigma_\gamma u}{\sigma_\beta u} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}} \frac{\vartheta_3(v|\tau)}{\vartheta_2(v|\tau)}. \tag{8.}$$

Aus (8.) ergiebt sich

$$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\,\sigma_\beta u - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\,\sigma_\gamma u}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\,\sigma_\beta u + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\,\sigma_\gamma u} = \frac{\vartheta_2(v|\tau) - \vartheta_3(v|\tau)}{\vartheta_2(v|\tau) + \vartheta_3(v|\tau)}. \tag{9.}$$

Nun ist nach S. 171 (19.) und (20.)

$$\vartheta_2(v|\tau)+\vartheta_3(v|\tau) = 2\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)\,h^{n^2}\cos 2nv\pi\Big),$$
$$\vartheta_2(v|\tau)-\vartheta_3(v|\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n)\,h^{n^2}\cos 2nv\pi.$$

In der vorletzten Formel wird der Coefficient von $h^{n^2}\cos 2nv\pi$ für ungerades, in der letzten für gerades n zu Null, mithin

$$\vartheta_2(v|\tau)+\vartheta_3(v|\tau) = 2\Big(1+2\sum_{m=1}^{\infty}h^{4m^2}\cos 4mv\pi\Big),$$
$$\vartheta_2(v|\tau)-\vartheta_3(v|\tau) = 4\sum_{m=0}^{\infty}h^{(2m+1)^2}\cos 2(2m+1)v\pi.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen können, von dem Factor 2 abgesehen, aus den Reihen für $\vartheta_2(v|\tau)$ und $\vartheta_1(v|\tau)$ dadurch hergeleitet werden, dass h durch h^4, v durch $2v$ ersetzt wird. Die erste Annahme kommt darauf hinaus, 4τ für τ zu setzen, d. h. $4\tilde{\omega}'$ für $\tilde{\omega}'$, während $\tilde{\omega}$ ungeändert bleibt. Es wird also

$$\vartheta_2(v|\tau)+\vartheta_3(v|\tau) = 2\vartheta_2(2v|4\tau), \tag{10.}$$
$$\vartheta_2(v|\tau)-\vartheta_3(v|\tau) = 2\vartheta_1(2v|4\tau). \tag{11.}$$

Geht man von dem primitiven Periodenpaar $(2\tilde{\omega}, 8\tilde{\omega}')$ aus, so ändert sich naturgemäss die $\wp$-Function, und damit auch die Grössen e_1, e_2, e_3. Werden die neuen Grössen mit e_1', e_2', e_3' bezeichnet, so entspricht der Gleichung (7.) die folgende:

$$\frac{\sigma_\alpha(u|\tilde{\omega}, 4\tilde{\omega}')}{\sigma_\beta(u|\tilde{\omega}, 4\tilde{\omega}')} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha'-e_\gamma'}}{\sqrt[4]{e_\beta'-e_\gamma'}}\,\frac{\vartheta_1(v|4\tau)}{\vartheta_2(v|4\tau)}. \tag{12.}$$

Und da aus (9.), (10.) und (11.)

$$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\,\sigma_\beta u-\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\,\sigma_\gamma u}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\,\sigma_\beta u+\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\,\sigma_\gamma u} = \frac{\vartheta_1(2v|4\tau)}{\vartheta_2(2v|4\tau)}$$

hervorgeht, so ergiebt sich schliesslich

$$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\,\sigma_\beta u-\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\,\sigma_\gamma u}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\,\sigma_\beta u+\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\,\sigma_\gamma u} = \frac{\sqrt[4]{e_\beta'-e_\gamma'}}{\sqrt[4]{e_\alpha'-e_\gamma'}}\,\frac{\sigma_\alpha(2u|\tilde{\omega}, 4\tilde{\omega}')}{\sigma_\beta(2u|\tilde{\omega}, 4\tilde{\omega}')}. \tag{13.}$$

Nach S. 171, 172 (25.), (26.) und (27.) wird

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\beta'-e_\gamma'} = \vartheta_1(0|4\tau),$$
$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\alpha'-e_\gamma'} = \vartheta_2(0|4\tau),$$
$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\alpha'-e_\beta'} = \vartheta_3(0|4\tau).$$

Setzt man also in (10.) und (11.) $v = 0$, so findet man

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt[4]{e_\alpha'-e_\gamma'} &= \frac{1}{2}\big(\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}+\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\big)\\ \sqrt[4]{e_\beta'-e_\gamma'} &= \frac{1}{2}\big(\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}-\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\big). \end{aligned}\right. \tag{14.}$$

Zusammen mit

$$e_\alpha'+e_\beta'+e_\gamma' = 0$$

stellen diese Formeln die neuen Grössen e_1', e_2', e_3', die der Multiplication der Periode $2\tilde{\omega}'$ mit 4 entsprechen, algebraisch durch die ursprünglichen dar.

Angenommen nun, es sei ein Werth u ermittelt, für den

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(2u|\tilde{\omega}, 4\tilde{\omega}') = \xi' \tag{15.}$$

wird, so würde, wenn

$$\frac{\sqrt[4]{e_\beta'-e_\gamma'}}{\sqrt[4]{e_\alpha'-e_\gamma'}} = l \tag{16.}$$

gesetzt wird, nach (13.)

$$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\,\sigma_\beta u-\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\,\sigma_\gamma u}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\,\sigma_\beta u+\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\,\sigma_\gamma u} = l\xi' \tag{17.}$$

oder

$$\frac{\sigma_\gamma u}{\sigma_\beta u} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}\,\frac{1-l\xi'}{1+l\xi'}$$

werden. Ist nun s mit ξ' durch die Gleichung

$$\sqrt{\frac{s-e_\gamma}{s-e_\beta}} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}\,\frac{1-l\xi'}{1+l\xi'} \tag{18.}$$

verbunden, in der der Wurzelwerth links beliebig ist, so folgt

$$\frac{\wp u-e_\gamma}{\wp u-e_\beta} = \frac{s-e_\gamma}{s-e_\beta},$$

d. h. wieder

$$\wp u = s.$$

Die Lösung der an die Spitze gestellten Aufgabe kann hiernach auch von der der Gleichung (15.) abhängig gemacht werden.

Verfährt man zu diesem Zweck genau wie vorher, so findet man, dem Ausdruck (5.) als Lösung von (2.) entsprechend,

$$(19.)\qquad 2u = \frac{1}{\sqrt[4]{e'_\alpha - e'_\gamma}} \int_1^{\xi'} \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(1-l^4 t'^2)}}.$$

Die Formeln, die aus den Reihenentwickelungen entspringen, mögen hier zusammengestellt werden.

Es sei

$$(20.)\qquad l = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}$$

(aus (16.) und (14.)),

$$(21.)\qquad l\xi' = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\sqrt{s-e_\beta} - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\sqrt{s-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\sqrt{s-e_\beta} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\sqrt{s-e_\gamma}}$$

(aus (17.)),

$$(22.)\qquad \mathfrak{L} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 l^{4n}$$

(der Grösse $\mathfrak{K}$, S. 242 (14.) entsprechend),

$$(23.)\qquad G_n(t) = 1 + \frac{2}{3}t^2 + \cdots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}t^{2n-2}$$

(S. 242 (13.)),

$$(24.)\qquad G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 l^{4n}\, t\, G_n(t),$$

so wird nach S. 256 (6.)

$$(25.)\qquad \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\right)^2 u = i\mathfrak{L}\log\left(\xi' + i\sqrt{1-\xi'^2}\right) - G(\xi')\sqrt{1-\xi'^2}.$$

Die Reihen convergiren für

$$|l| < 1, \quad |l\xi'| < 1$$

(vgl. S. 242).

Es fragt sich noch, ob und aus welchen Gründen diese Bedingungen als erfüllt vorausgesetzt werden dürfen. Nach (20.) und (21.) sind l und $l\xi'$

von der Form

$$\frac{1-(p+qi)}{1+(p+qi)}.$$

Der absolute Betrag einer solchen Grösse ist kleiner als Eins für

$$p > 0.$$

Der Quotient

$$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}$$

müsste also, wenn die Reihe $\mathfrak{L}$ convergiren soll, im reellen Theile positiv sein. Durch passende Wahl einer der beiden vierten Wurzeln kann man dies zwar stets erreichen; es bleibt dann aber zu untersuchen, ob die oben benutzten Formeln S. 171, 172 (25.), (26.), (27.) und die bei Einführung von e'_1, e'_2, e'_3 ihnen entsprechenden (S. 259), für die die Gleichung

$$\frac{\sqrt[4]{e'_\beta - e'_\gamma}}{\sqrt[4]{e'_\alpha - e'_\gamma}} = \frac{\vartheta_1(0|4\tau)}{\vartheta_2(0|4\tau)},$$

d. h.

$$(26.)\qquad l = 2\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} h^{(2n+1)^2}}{1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} h^{4n^2}}$$

nothwendig ist, bestehen bleiben. Man erreicht dies am einfachsten, indem man bei gegebenem l die Grösse h durch diese Gleichung bestimmt. Dabei ergiebt sich eine Reihe von besonders starker Convergenz, sodass wenige Anfangsglieder praktisch ausreichen:

$$(27.)\qquad h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \cdots$$

Die Einzelheiten der hierzu erforderlichen Rechnung, sowie die einfachen Überlegungen über die Folge der Definitionen und die Verkettung der Gleichungen, durch die man schliesslich zu der Formel (25.) zurückgelangt, mögen hier übergangen werden. Das, worauf es im Wesentlichen ankommt, wird bei der Anwendung auf besondere Fälle, im dreissigsten Kapitel, hervortreten.

Was die Bedingung $|l\xi'| < 1$ angeht, so kann sie wegen

$$l\xi' = \frac{1 - \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}} \frac{\sqrt{s - e_\gamma}}{\sqrt{s - e_\beta}}}{1 + \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}} \frac{\sqrt{s - e_\gamma}}{\sqrt{s - e_\beta}}}$$

durch passende Wahl eines der beiden Quadratwurzelwerthe immer erfüllt werden. Es könnte höchstens zweifelhaft erscheinen, ob eine solche Annahme nach der Natur der Functionen, aus denen der Ausdruck entstanden war, gestattet ist. Von allgemeinen Erwägungen abgesehen, kann man hier einfach so schliessen: Da nach S. 93

$$\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\beta}(u + 2\omega_\gamma) = -\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\beta} u$$

war, so braucht man in dem Ausdruck

$$\frac{1 + f(u)}{1 - f(u)},$$

in dem

$$f(u) = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}} \frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\beta} u$$

ist, nur u um $2\omega_\gamma$ zu vermehren, um ihn in die Form

$$\frac{1 - f(u)}{1 + f(u)}$$

überzuführen. Das heisst: Wenn man u eine stetige Reihe von Werthen ertheilt, für die $|l\xi'| > 1$ ist, so kann man durch Veränderung von u in $u + 2\omega_\gamma$ bewirken, dass $|l\xi'| < 1$ wird.

Löst man die Gleichung (18.), nämlich (nach (20.))

$$\frac{s - e_\gamma}{s - e_\beta} = \left(\frac{1 + l}{1 - l}\right)^2 \left(\frac{1 - l\xi'}{1 + l\xi'}\right)^2$$

nach s auf, so findet man die Form

$$s = \frac{P_2(\xi')}{Q_2(\xi')}, \tag{28.}$$

d. h. s ist eine rationale Function von ξ', deren Zähler und Nenner vom zweiten Grade sind.

Diese Vorlesungen sind (S. 4) mit einer linearen Transformation eines elliptischen Differentials erster Art begonnen worden. Die Untersuchungen von Legendre hatten ergeben, dass ein solches Differential in eins von derselben Form übergeht, wenn man eine Transformation zweiten oder dritten Grades anwendet, und Legendre glaubte, dass hiermit die rationalen Transformationen abgeschlossen wären. Aber Jacobi, dessen erste Untersuchungen über elliptische Functionen an die Ergebnisse von Legendre anknüpften, fand durch eine einfache Constanten-Abzählung, dass das Bestehen einer Gleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}} = \frac{dx}{M\sqrt{R(x)}},$$

wo M eine rationale Function von x oder eine Constante bedeutet, auch durch die Substitution

$$x_1 = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$$

bewirkt werden kann, in der $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ ganze Functionen beliebigen (n^{ten}) Grades bezeichnen. Für unseren Fall wäre die Aufgabe, durch eine Annahme der Form (28.) das Differential $\frac{ds}{\sqrt{S}}$ in die Legendresche Normalform überzuführen und zwar so, dass die dann auftretenden Reihenentwickelungen möglichst stark convergent sind. Offenbar hätte man zu diesem Zweck ziemlich verwickelte Rechnungen durchzuführen. Es ist hier einer der vielen Fälle, in denen sich die besondere Brauchbarkeit der ϑ-Functionen zeigt. Die Formeln, auf die es ankommt, wenn man sich von der Nothwendigkeit einer bestimmten Anordnung der Grössen $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ befreien will, sind ohne die geringste Schwierigkeit aus dem Bildungsgesetz dieser Functionen erschlossen worden.

Die Aufgabe, die nunmehr als gelöst gelten kann, ist für die Anwendungen wichtig. Die dort vorkommenden elliptischen Integrale können durch Integrale der drei Arten dargestellt werden, und die der zweiten und dritten Art mittels der σ-Functionen, deren Argument u ist, also der Werth des Integrales erster Art. Lässt man an die Stelle der σ-Functionen die ϑ-Functionen treten, so wird u durch das Argument v ersetzt, das sich von jenem nur um einen constanten Factor unterscheidet.

Dreissigstes Kapitel.

Anwendung der Formeln des achtzehnten und neunundzwanzigsten Kapitels auf den Fall reeller Invarianten.

Obgleich man die Reihen, die für die Berechnung von u als Function von s gebraucht werden, bei jeder Anordnung der Grössen e_1, e_2, e_3 convergent machen kann, so wird man doch bei den Anwendungen darauf achten, dass die Convergenz möglichst stark werde. Dies soll für reelle Invarianten weiter verfolgt werden.

Es sei

I. $$G > 0,$$

also e_1, e_2, e_3 reell, und es werde dann, wie früher,

$$e_1 > e_2 > e_3$$

vorausgesetzt. Man nehme

a. $$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3$$

und wähle die vierten Wurzeln reell und positiv. Die Formel S. 260 (20.) liefert

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3} - \sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}}. \tag{1.}$$

Die ursprünglich zur Berechnung benutzte Grösse

$$k^2 = \frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\beta}$$

wird gleich der im siebenundzwanzigsten Kapitel definirten (S. 241 (4.)).

Setzt man allgemein

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

also

$$k'^2 = \frac{e_\alpha - e_\beta}{e_\alpha - e_\gamma},$$

so kann man

$$l = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}} \tag{2.}$$

schreiben, und diese Formel lässt unmittelbar erkennen, dass l um so kleiner wird, je näher k'^2 bei 1, also k^2 bei Null liegt, d. h. je weniger e_β von e_γ, hier e_2 von e_3 verschieden ist.

Nach S. 172 (26.) und (27.) ist

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\left(\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\right) = 2(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots). \tag{3.}$$

Im vorliegenden Falle ist die durch die Formel S. 261 (27.) bestimmte Grösse h gleichzeitig mit l reell und positiv, sodass sich aus (3.) $2\tilde{\omega}$ als reelle Grösse ergiebt. Bezeichnet man sie mit 2ω, so liefert die Gleichung

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}}(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots) \tag{4.}$$

zugleich den Werth der Quadratwurzel als positiv. Der Formel

$$h = e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i}$$

gemäss definire man nun ω' durch den Ausdruck

$$\omega' = \frac{\omega i}{\pi} \log \frac{1}{h}, \tag{5.}$$

wo dem Logarithmus der reelle Werth beizulegen ist. ω' wird rein imaginär. Zur Darstellung der σ-Functionen durch die ϑ-Reihen fehlt noch die Grösse η, die z. B. nach S. 174 (33.) aus

$$2\omega\eta = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1 - 3^3h^2 + 5^3h^6 - 7^3h^{12} + \cdots}{1 - 3h^2 + 5h^6 - 7h^{12} + \cdots} \tag{6.}$$

bestimmt werden kann. Die Formeln S. 171 (21.) bis (24.) geben für $\frac{u}{2\omega} = v$, $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$

$$(7.)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[8]{G} \qquad \sigma u = e^{2\omega\eta v^2}\vartheta_0(v|\tau) \\ \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u = e^{2\omega\eta v^2}\vartheta_1(v|\tau) \\ \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u = e^{2\omega\eta v^2}\vartheta_2(v|\tau) \\ \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u = e^{2\omega\eta v^2}\vartheta_3(v|\tau). \end{cases}$$

Ist k^2 wenig von 1, also e_2 wenig von e_1 verschieden, so bekommt man stärker convergente Reihen, wenn man

$$\text{b.}\qquad \alpha = 3,\quad \beta = 2,\quad \gamma = 1$$

setzt. In der allgemeinen Formel

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}$$

werden dann die Radicanden

$$e_\alpha - e_\gamma = e_3 - e_1 \quad \text{und} \quad e_\alpha - e_\beta = e_3 - e_2$$

negativ, und es sei für $e^{\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{i}$

$$\sqrt[4]{e_3-e_1} = -i\sqrt{i}\sqrt[4]{e_1-e_3},\quad \sqrt[4]{e_3-e_2} = -i\sqrt{i}\sqrt[4]{e_2-e_3},\quad \sqrt[4]{e_2-e_1} = -i\sqrt{i}\sqrt[4]{e_1-e_2},$$

wo die Wurzelwerthe auf den rechten Seiten reell und positiv sind. Die Grössen l und h mögen hier zur Unterscheidung mit l_1 und h_1 bezeichnet werden, sodass

$$(8.)\qquad l_1 = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3} - \sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_2-e_3}} = \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}$$

und

$$(9.)\qquad h_1 = \frac{l_1}{2} + 2\left(\frac{l_1}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_1}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_1}{2}\right)^{13} + \cdots$$

wiederum reell, positiv und kleiner als Eins ausfallen. Die aus (3.) hervorgehende Gleichung gilt in der Form

$$(10.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde\omega}{\pi i}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3}}(1+2h_1^4+2h_1^{16}+\cdots),$$

wenn $\tilde\omega$ positiv imaginär und der Werth der Quadratwurzel reell und positiv ist. Wird die rein imaginäre Periode, wie vorher, mit $2\omega'$ bezeichnet, so ist jetzt

$$2\tilde\omega = 2\omega',$$

und weiter

$$(11.)\qquad \tilde\omega' = \frac{\omega' i}{\pi}\log\frac{1}{h_1},$$

$\tilde\omega'$ also eine reelle negative Grösse; es sei

$$2\tilde\omega' = -2\omega.$$

$(2\omega, 2\omega')$ ist dann wieder ein primitives Periodenpaar. Der Unterschied gegen vorher ist nur der, dass man, wenn l eine kleine Grösse ist, zuerst ω berechnen wird, dagegen bei kleinem l_1 zuerst ω'. Ebenso wie unter (6.) wird

$$(12.)\qquad 2\omega'\eta' = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h_1^2+5^3h_1^6-\cdots}{1-3h_1^2+5h_1^6-\cdots}.$$

Der in der Formel für σu vorkommende Werth der achten Wurzel aus G ist, wie immer, gleich

$$\sqrt[4]{e_3-e_1}\sqrt[4]{e_3-e_2}\sqrt[4]{e_2-e_1} = (-i\sqrt{i})^3\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_2},$$

also, wenn jetzt unter $\sqrt[8]{G}$ der reelle positive Werth verstanden wird, gleich

$$-\sqrt{i}\sqrt[8]{G} = \frac{1}{i\sqrt{i}}\sqrt[8]{G}.$$

Es sei noch

$$\frac{ui}{2\tilde\omega} = \frac{ui}{2\omega'} = v',$$

sodass v' gleichzeitig mit u reell ist; ferner

$$v = \frac{v'}{i}.$$

Da $\vartheta_0(v)$ eine ungerade Function, so wird

$$\vartheta_0\left(\frac{v'}{i}\right) = \vartheta_0(-v'i) = -\vartheta_0(v'i),$$

und die erste Übergangsformel lautet, wenn

$$\tau_1 = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = -\frac{\omega}{\omega'} = -\frac{1}{\tau}$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{\frac{2\omega'}{\pi i}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = \frac{1}{i}e^{-2\omega'\eta' v'^2}\vartheta_0\left(v'i\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right). \tag{13.}$$

Die übrigen werden

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\omega'}{\pi i}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u &= e^{-2\omega'\eta' v'^2}\vartheta_3\left(v'i\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)\\ \sqrt{\frac{2\omega'}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u &= e^{-2\omega'\eta' v'^2}\vartheta_2\left(v'i\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)\\ \sqrt{\frac{2\omega'}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u &= e^{-2\omega'\eta' v'^2}\vartheta_1\left(v'i\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right). \end{aligned}\right. \tag{14.}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} -i\vartheta_0(v'i|\tau_1) &= h_1^{\frac{1}{4}}\left(e^{v'\pi}-e^{-v'\pi}\right)-h_1^{\frac{9}{4}}\left(e^{3v'\pi}-e^{-3v'\pi}\right)+\cdots,\\ \vartheta_1(v'i|\tau_1) &= h_1^{\frac{1}{4}}\left(e^{v'\pi}+e^{-v'\pi}\right)+h_1^{\frac{9}{4}}\left(e^{3v'\pi}+e^{-3v'\pi}\right)+\cdots,\\ \vartheta_2(v'i|\tau_1) &= 1+h_1\left(e^{2v'\pi}+e^{-2v'\pi}\right)+h_1^4\left(e^{4v'\pi}+e^{-4v'\pi}\right)+\cdots,\\ \vartheta_3(v'i|\tau_1) &= 1-h_1\left(e^{2v'\pi}+e^{-2v'\pi}\right)+h_1^4\left(e^{4v'\pi}+e^{-4v'\pi}\right)-\cdots. \end{aligned}$$

Es sei

II. $$G < 0,$$

also eine der Grössen e_λ reell, die beiden anderen conjugirt complex. Wie früher werde die reelle Grösse mit e_2 bezeichnet. Von den beiden conjugirten sei e_1 im imaginären Theile positiv, also $e_1 - e_3$ positiv imaginär. Nach dem im achtundzwanzigsten Kapitel Bewiesenen ist $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar, wenn

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{15.}$$

$$\omega' = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} \tag{16.}$$

gesetzt wird (vgl. S. 248). Nun sind $e_2 - e_1$ und $e_2 - e_3$ conjugirt, ebenso

$$k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$$

und

$$k'^2 = \frac{e_2-e_1}{e_3-e_1},$$

ferner längs des Integrationsweges $\sqrt{1-k^2t^2}$ und $\sqrt{1-k'^2t^2}$, endlich auch $\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}$ und $\frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}$. Demnach sind ω und ω' ebenfalls conjugirt, und wenn man

$$\omega = A - Bi,$$

mithin

$$\omega' = A + Bi$$

setzt, so ist den damaligen Festsetzungen zufolge

$$A > 0.$$

Es soll auch hier, wie für $G > 0$, zu einem primitiven Periodenpaar übergegangen werden, dessen eine Periode $2\tilde{\omega}$ reell ist, und zwar sei

$$\tilde{\omega} = \omega + \omega' = 2A.$$

Die andere Periode $2\tilde{\omega}'$ ist so zu wählen, dass $\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}i}$ im reellen Theile positiv wird, und wegen

$$\wp\omega = e_1, \quad \wp\omega' = e_3$$

trifft dies für

$$\tilde{\omega}' = \omega'$$

zu. Daher ist, in Folge von $\wp\tilde{\omega}' = e_\gamma$,

a. $$\gamma = 3;$$

ferner, aus $\wp\tilde{\omega} = e_\alpha$, $\wp(\omega+\omega') = e_2$:

$$\alpha = 2,$$

und sonach

$$\beta = 1.$$

Die Grösse l wird durch die Formel

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}-\sqrt[4]{e_2-e_1}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_1}}$$

bestimmt.

Man setze nun

$$e_2 - e_3 = re^{\psi i}, \qquad (0 < \psi < \pi)$$

also

$$e_2 - e_1 = re^{-\psi i}.$$

Die vierten Wurzeln können, unter Wahrung der für ihren Quotienten beständig festzuhaltenden Bedingung, ebenfalls als conjugirt angenommen werden, sodass der Nenner von l reell wird. Es sei

$$\sqrt[4]{e_2 - e_3} = \sqrt[4]{r}\, e^{\frac{\psi i}{4}},$$

$$\sqrt[4]{e_2 - e_1} = \sqrt[4]{r}\, e^{-\frac{\psi i}{4}},$$

wo $\sqrt[4]{r}$ reell und positiv ist, so kommt

$$(17.)\qquad l = \frac{e^{\frac{\psi i}{4}} - e^{-\frac{\psi i}{4}}}{e^{\frac{\psi i}{4}} + e^{-\frac{\psi i}{4}}} = i \operatorname{tg} \frac{\psi}{4},$$

also

$$(18.)\qquad l = il_2,$$

wo l_2 reell, positiv und kleiner als Eins. Hieraus folgt weiter

$$(19.)\qquad h = i\left(\frac{l_2}{2} + 2\left(\frac{l_2}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_2}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_2}{2}\right)^{13} + \cdots\right).$$

Zur wirklichen Berechnung von $\tilde{\omega}$ und gleichzeitig zur Fixirung des Werthes von $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ dient die Gleichung

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_2 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_1}}(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots).$$

Setzt man nach (19.)

$$(20.)\qquad h = ih_2,$$

wo auch h_2 reell und positiv ist, und beachtet, dass $h^{4n} = h_2^{4n}$, so erhält man

$$(21.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt[4]{r} \cos \frac{\psi}{4}}(1 + 2h_2^4 + 2h_2^{16} + \cdots).$$

$2\tilde{\omega}$ wird danach, wie es sein muss, reell und positiv. $\tilde{\omega}'$ bestimmt sich dann aus

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \frac{i}{\pi} \log \frac{1}{ih_2},$$

wobei der Logarithmus so gewählt werden muss, dass die zweite Coordinate von $\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$ positiv ausfällt. Dies erreicht man, indem man $\left(\text{wegen } \log i = \frac{\pi i}{2}\right)$

$$(22.)\qquad \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \log \frac{1}{h_2}$$

setzt, unter $\log \frac{1}{h_2}$ den reellen Werth verstehend.

Es werde jetzt

$$\omega + \omega' = \omega''$$

gesetzt, sodass

$$\tilde{\omega} = \omega''$$

wird; ausserdem sei

$$\omega' - \omega = \omega''',$$

also

$$\tilde{\omega}' = \frac{\omega'' + \omega'''}{2}.$$

Von den beiden Bestandtheilen des nicht primitiven Periodenpaares $(2\omega'', 2\omega''')$ ist der erste reell und positiv, der zweite positiv imaginär. Ist weiter

$$\frac{\omega'''}{\omega''} = \tau',$$

so kommt

$$\tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau',$$

mithin nach (22.)

$$\tau' = \frac{2i}{\pi} \log \frac{1}{h_2};$$

auch τ' ist positiv imaginär. In Folge von (19.) und (20.) bestimmt sich dabei h_2 aus der Formel

$$(23.)\qquad h_2 = \frac{l_2}{2} + 2\left(\frac{l_2}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_2}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_2}{2}\right)^{13} + \cdots.$$

In der Gleichung (21.) ist links $\sqrt{\frac{2\omega''}{\pi}}$ für $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ zu schreiben. Hierzu tritt

$$(24.)\qquad 2\omega''\eta'' = \frac{\pi^2}{6} \frac{1 + 3^3 h_2^2 - 5^3 h_2^6 - 7^3 h_2^{12} + \cdots}{1 + 3h_2^2 - 5h_2^6 - 7h_2^{12} + \cdots}.$$

Für die erste Übergangsformel braucht man

$$\sqrt[8]{G} = \sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt[4]{e_2 - e_3}\sqrt[4]{e_2 - e_1}.$$

Da $G < 0$, so ist als reelle positive Grösse $\sqrt[8]{-G}$ einzuführen. Es ist

$$e_1 - e_3 = 2ri\sin\psi,$$

und es werde

$$\sqrt[4]{e_1-e_3} = e^{\frac{\pi i}{8}}\sqrt[4]{2r\sin\psi}$$

gesetzt, die vierte Wurzel rechts als positiv angenommen. Dann kommt

$$\sqrt[8]{G} = e^{\frac{\pi i}{8}}\sqrt[8]{-G}.$$

Die vier Übergangsformeln lauten für $v = \frac{u}{2\omega''}$:

$$(25.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega''}{\pi}}\sqrt[8]{-G}\,\sigma u = e^{-\frac{\pi i}{8}} e^{2\omega''\eta'' v^2}\vartheta_0\left(v\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right.\right),$$

ferner wegen

$$\sqrt[4]{e_1-e_2} = e^{\frac{\pi i}{8}}\sqrt[4]{i(e_2-e_1)},$$

wo $i(e_2-e_1)$ eine reelle positive Grösse,

$$(26.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega''}{\pi}}\sqrt[4]{i(e_2-e_1)}\,\sigma_2 u = e^{-\frac{\pi i}{8}} e^{2\omega''\eta'' v^2}\vartheta_1\left(v\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right.\right),$$

endlich

$$(27.)\qquad \begin{cases} \sqrt{\frac{2\omega''}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u = e^{2\omega''\eta'' v^2}\vartheta_2\left(v\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right.\right) \\ \sqrt{\frac{2\omega''}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1}\,\sigma_3 u = e^{2\omega''\eta'' v^2}\vartheta_3\left(v\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right.\right). \end{cases}$$

Die Anfangsglieder der ϑ-Reihen sind:

$$e^{-\frac{\pi i}{8}}\vartheta_0\left(v\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right.\right) = 2h_2^{\frac{1}{4}}(\sin v\pi + h_2^2\sin 3v\pi - h_2^6\sin 5v\pi - h_2^{12}\sin 7v\pi + \cdots),$$

wo immer zwei positive und zwei negative Zeichen abwechseln;

$$e^{-\frac{\pi i}{8}}\vartheta_1\left(v\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right.\right) = 2h_2^{\frac{1}{4}}(\cos v\pi - h_2^2\cos 3v\pi - h_2^6\cos 5v\pi + h_2^{12}\cos 7v\pi + \cdots),$$

$$\vartheta_2\left(v\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right.\right) = 1 + 2h_2^4\cos 4v\pi + 2h_2^{16}\cos 8v\pi + \cdots + i(2h_2\cos 2v\pi + 2h_2^9\cos 6v\pi + \cdots),$$

$$\vartheta_3\left(v\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right.\right) = 1 + 2h_2^4\cos 4v\pi + 2h_2^{16}\cos 8v\pi + \cdots - i(2h_2\cos 2v\pi + 2h_2^9\cos 6v\pi + \cdots).$$

Auch in diesem Falle werden also für reelles u σu und $\sigma_2 u$ reell, $\sigma_1 u$ und $\sigma_3 u$ dagegen conjugirt complex.

Die Formeln sind wegen

$$l_2 = \operatorname{tg}\frac{\psi}{4}$$

(aus (17.) und (18.)) besonders brauchbar für $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$. Dieser Fall lässt sich von dem, wo ψ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt, durch das Vorzeichen von e_2 unterscheiden. Denn es ist

$$(e_2-e_3)+(e_2-e_1) = 3e_2 = 2r\cos\psi.$$

Für die erste Annahme ist $l_2 < \frac{2}{5}$; für die zweite wählt man zweckmässiger ein anderes primitives Periodenpaar, dessen einer Bestandtheil rein imaginär statt, wie vorher, reell ist.

Es sei nämlich

$$\tilde{\omega} = \omega' - \omega = \omega'''$$

$$\tilde{\omega}' = -\omega = \frac{\omega'''-\omega''}{2},$$

d. h. wegen

$$\wp\tilde{\omega} = \wp(\omega'-\omega) = \wp(\omega'+\omega) = e_3,$$

$$\wp\tilde{\omega}' = \wp\omega = e_1:$$

b.

$$\gamma = 1,$$

$$\alpha = 2,\ \ \beta = 3.$$

Die vierten Wurzeln aus den Differenzen der Grössen e_λ seien jetzt in folgender Weise fixirt:

$$\sqrt[4]{e_3-e_1} = e^{-\frac{\pi i}{8}}\sqrt[4]{i(e_3-e_1)},$$

$$\sqrt[4]{e_2-e_1} = \sqrt[4]{r}\,e^{-\frac{\psi i}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt[4]{r}\,e^{\frac{(\pi-\psi)i}{4}},$$

$$\sqrt[4]{e_2-e_3} = e^{-\frac{\pi i}{2}}\sqrt[4]{r}\,e^{\frac{\psi i}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt[4]{r}\,e^{-\frac{(\pi-\psi)i}{4}}.$$

Aus

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_2-e_1}-\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_2-e_1}+\sqrt[4]{e_2-e_3}}$$

folgt

$$(28.)\qquad l = i\operatorname{tg}\frac{\pi-\psi}{4} = il_2.$$

l_2 ist also unterhalb $\frac{2}{5}$ gelegen, wenn ψ dem Intervall $\left(\frac{\pi}{2}\cdots\pi\right)$ angehört.

Die weiteren Bestimmungsgleichungen werden

$$(29.)\qquad h = i\left(\frac{l_3}{2} + 2\left(\frac{l_3}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_3}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_3}{2}\right)^{13} + \cdots\right) = ih_3,$$

$$(30.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega'''}{\pi i}} = \frac{1}{\sqrt{r}\cos\frac{\pi-\psi}{4}}(1 + 2h_3^4 + 2h_3^{16} + \cdots),$$

$$\tilde{\omega}' = \frac{\tilde{\omega} i}{\pi}\log\frac{1}{ih_3} = \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{\tilde{\omega} i}{\pi}\log\frac{1}{h_3} = \frac{\omega'''}{2} - \frac{\omega'''}{\pi i}\log\frac{1}{h_3}.$$

Nachdem also $2\omega'''$ (positiv imaginär) aus (30.) berechnet ist, findet man $2\omega''$ mittels der Formel

$$\omega'' = \frac{2\omega'''}{\pi i}\log\frac{1}{h_3}.$$

Hat τ' denselben Werth $\frac{\omega'''}{\omega''}$ wie vorher, so wird jetzt

$$\tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\omega''}{\omega'''} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau'}.$$

Die Gleichung für $\tilde{\eta} = \eta'''$ heisst

$$(31.)\qquad 2\omega'''\eta''' = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1 + 3^3 h_3^2 - 5^3 h_3^6 - \cdots}{1 + 3h_3^2 - 5h_3^6 - \cdots},$$

und die Bestimmung für $\sqrt[8]{G}$:

$$\sqrt[8]{G} = \frac{1}{i}e^{-\frac{\pi i}{8}}\sqrt[8]{-G}.$$

Aus demselben Grunde wie auf S. 267 werde

$$\frac{ui}{2\omega'''} = v', \qquad v = \frac{v'}{i}$$

gesetzt. Dann vermitteln folgende Formeln den Zusammenhang zwischen den σ- und ϑ-Functionen:

$$(32.)\qquad \begin{cases} \sqrt{\frac{2\omega'''}{\pi i}}\sqrt[8]{-G}\quad \sigma u = \frac{1}{i}e^{-\frac{\pi i}{8}}e^{-2\omega'''\eta'''v'^2}\vartheta_0\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right) \\ \sqrt{\frac{2\omega'''}{\pi i}}\sqrt[4]{i(e_3-e_1)}\,\sigma_2 u = e^{-\frac{\pi i}{8}}e^{-2\omega'''\eta'''v'^2}\vartheta_1\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right) \\ \sqrt{\frac{2\omega'''}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\quad \sigma_3 u = e^{-2\omega'''\eta'''v'^2}\vartheta_2\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right) \\ \sqrt{\frac{2\omega'''}{\pi i}}\sqrt[4]{e_3-e_2}\quad \sigma_1 u = e^{-2\omega'''\eta'''v'^2}\vartheta_3\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right). \end{cases}$$

Für die in den letzten beiden Formeln vorkommenden vierten Wurzeln gelten die Definitionen

$$\sqrt[4]{e_1-e_2} = e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt[4]{e_2-e_1},$$
$$\sqrt[4]{e_3-e_2} = e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt[4]{e_2-e_3}.$$

Die ϑ-Reihen haben folgende Ausdrücke:

$$\frac{1}{i}e^{-\frac{\pi i}{8}}\vartheta_0\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right) = h_3^{\frac{1}{4}}\left\{\left(e^{v'\pi} - e^{-v'\pi}\right) + h_3^2\left(e^{3v'\pi} - e^{-3v'\pi}\right) - h_3^6\left(e^{5v'\pi} - e^{-5v'\pi}\right) - \cdots\right\},$$

$$e^{-\frac{\pi i}{8}}\vartheta_1\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right) = h_3^{\frac{1}{4}}\left\{\left(e^{v'\pi} + e^{-v'\pi}\right) - h_3^2\left(e^{3v'\pi} + e^{-3v'\pi}\right) - h_3^6\left(e^{5v'\pi} + e^{-5v'\pi}\right) + \cdots\right\},$$

$$\vartheta_2\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right) = 1 + h_3^4\left(e^{4v'\pi} + e^{-4v'\pi}\right) + h_3^{16}\left(e^{8v'\pi} + e^{-8v'\pi}\right) + \cdots$$
$$+ i\left\{h_3\left(e^{2v'\pi} + e^{-2v'\pi}\right) + h_3^9\left(e^{6v'\pi} + e^{-6v'\pi}\right) + \cdots\right\},$$

$$\vartheta_3\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right) = 1 + h_3^4\left(e^{4v'\pi} + e^{-4v'\pi}\right) + h_3^{16}\left(e^{8v'\pi} + e^{-8v'\pi}\right) + \cdots$$
$$- i\left\{h_3\left(e^{2v'\pi} + e^{-2v'\pi}\right) + h_3^9\left(e^{6v'\pi} + e^{-6v'\pi}\right) + \cdots\right\}.$$

Sämmtliche Formeln dieses Kapitels beruhen auf der Annahme, dass eine Periode entweder reell oder rein imaginär sei. Da man die primitiven Perioden auf unendlichviele Weisen ändern kann, so giebt es auch unendlichviele Möglichkeiten der Darstellung der σ- durch die ϑ-Functionen. Während die Gesammtheit der σ-Functionen bei einem Übergange von einem primitiven Periodenpaare zu einem beliebigen anderen ungeändert bleibt, ist dies für die ϑ-Functionen nicht der Fall.

Einunddreissigstes Kapitel.

Transformation der elliptischen Functionen.

Im Vorhergehenden sind die elliptischen Functionen fast überall als Functionen von u allein betrachtet worden. Nur an wenigen Stellen, z. B. bei der Untersuchung des Bildungsgesetzes der σ- und damit auch der $\wp$-Reihe, wurden ausser u auch die Invarianten oder die Perioden ausdrücklich als Argumente behandelt. Es kann vorkommen, dass zwischen elliptischen Functionen mit verschiedenen Fundamentalperioden algebraische Beziehungen bestehen. So hat die Function $\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}$ mit der zugehörigen $\wp$-Function eine Periode, 2ω, gemein, während die andere primitive Periode $2\omega'$ durch $4\omega'$ vertreten wird (S. 94). Zwischen diesen beiden elliptischen Functionen besteht die Gleichung

$$\left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2 = \wp u - e_1.$$

Nach einem Hauptsatze der Theorie kann man eine Function $\wp_1 u$ mit den Fundamentalperioden des σ-Quotienten bilden, durch die sich dann $\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}$ algebraisch darstellen lässt (S. 146). Mithin besteht zwischen $\wp u$ und $\wp_1 u$ eine algebraische Gleichung.

Diese einfachen Überlegungen führen auf die allgemeine Aufgabe, die Bedingungen zu suchen, unter denen zwischen zwei elliptischen Functionen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ eine algebraische Gleichung besteht.

Mit dieser Aufgabe, deren Lösung auf den ersten Anblick sehr schwierig scheint, beginnt Jacobi seine Fundamenta, nachdem schon Legendre einige specielle Fälle entdeckt hatte. Sie hängt mit der Transformation der elliptischen Integrale eng zusammen. Von dem hier eingenommenen Standpunkt

aus lässt sich die ganze Theorie ohne Schwierigkeit entwickeln, und namentlich kann man die Aufgabe selbst sogleich sehr vereinfachen.

Da nämlich jede elliptische Function durch eine passend gewählte $\wp$-Function und ihre erste Ableitung rational ausdrückbar ist, so muss eine algebraische Gleichung zwischen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ auch eine solche zwischen $\wp u$ und $\wp_1 u$ nach sich ziehen. Dies folgt sofort durch ein Eliminationsverfahren, das die beiden Ableitungen $\wp' u$ und $\wp_1' u$ mit umfasst. Umgekehrt ergiebt sich aus einer algebraischen Gleichung zwischen $\wp u$ und $\wp_1 u$ eine ebensolche zwischen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$.

Die Aufgabe wird nicht allgemeiner, wenn man in einer der beiden Functionen das Argument u durch mu ersetzt, unter m eine beliebige Constante verstanden. Denn nach S. 44 ist

$$\wp(mu; g_2, g_3) = \frac{1}{m^2}\wp(u; m^4 g_2, m^6 g_3).$$

Man kommt also wieder auf eine Beziehung zwischen zwei $\wp$-Functionen von demselben Argument u und verschiedenen Invariantenpaaren.

Trotz der Vereinfachungs-Möglichkeit sollen die Grundbegriffe und einige Hauptergebnisse der Transformationstheorie an die algebraische Gleichung zwischen zwei beliebigen elliptischen Functionen

$$G(\varphi(u), \varphi_1(u)) = 0 \tag{1.}$$

angeschlossen werden, weil sie dort ebenso einfach formulirt werden können wie in dem besonderen Falle der $\wp$-Functionen. Es ist sogar nicht einmal nöthig, in der Gleichung (1.) beide Functionen als elliptische vorauszusetzen es sei vielmehr nur $\varphi(u)$ eine solche, $\varphi_1(u)$ dagegen blos eine eindeutige Function, die überall im Endlichen den Charakter einer rationalen Function hat. Ersetzt man in (1.) das Argument u durch $u + 2\nu\omega$, wo 2ω eine Periode von $\varphi(u)$, so erhält man

$$G(\varphi(u), \varphi_1(u + 2\nu\omega)) = 0.$$

Die Gleichung (1.) sei in Bezug auf $\varphi_1(u)$ vom n^{ten} Grade. Giebt man dann ν der Reihe nach die Werthe $1, 2, \dots n$, so erhält man, die Ausgangsgleichung eingerechnet, $n+1$ Gleichungen, alle von derselben Form

$$G(\varphi(u), z) = 0,$$

die durch

$$z = \varphi_1(u),\ \varphi_1(u+2\omega),\ \dots\ \varphi_1(u+2n\omega)$$

befriedigt werden. Da aber eine Gleichung n^{ten} Grades höchstens n verschiedene Wurzeln haben kann, so müssen in dieser Reihe mindestens zwei Werthe einander gleich sein:

$$\varphi_1(u+2\nu_1\omega) = \varphi_1(u+2\nu_2\omega)$$

oder, wenn $u-2\nu_2\omega$ statt u eingeführt und

$$\nu_1 - \nu_2 = m$$

gesetzt wird,

$$\varphi_1(u+2m\omega) = \varphi_1(u).$$

Ebenso findet man

$$\varphi_1(u+2m'\omega') = \varphi_1(u),$$

d. h. $\varphi_1(u)$ ist ebenfalls eine elliptische Function.

$\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ haben das Periodenpaar $(2m\omega, 2m'\omega')$ gemein und lassen sich demnach rational durch die Function

$$\wp(u \mid m\omega, m'\omega')$$

und ihre erste Ableitung darstellen. Solche elliptischen Functionen nun, die durch eine und dieselbe dritte und deren Ableitung rational ausdrückbar sind, werden als verwandt bezeichnet. Man hat also den Satz, dass zwischen zwei Functionen, unter denen eine algebraische Beziehung besteht, Verwandtschaft stattfindet. Dass umgekehrt zwei verwandte elliptische Functionen durch eine algebraische Gleichung verbunden sind, ist schon oben erwähnt worden. Mithin kann die Verwandtschaft auch durch das Bestehen einer Gleichung der Form (1.) gekennzeichnet werden.

Zwei Functionen, die mit einer dritten verwandt sind, sind unter einander verwandt. Denn sind

$$G_1(\varphi(u), \varphi_1(u)) = 0,$$
$$G_2(\varphi(u), \varphi_2(u)) = 0$$

zwei algebraische Gleichungen, so folgt durch Elimination von $\varphi(u)$ wieder eine algebraische Gleichung

$$G(\varphi_1(u), \varphi_2(u)) = 0.$$

Der Zusammenhang zwischen den Perioden zweier verwandten Functionen soll jetzt genauer untersucht werden. Es sei $(2\omega_0, 2\omega_0')$ ein beiden Functionen gemeinsames Periodenpaar, $(2\omega, 2\omega')$ ein beliebiges Periodenpaar von $\varphi(u)$, $(2\omega_1, 2\omega_1')$ ein solches von $\varphi_1(u)$. Ein primitives Periodenpaar von $\varphi(u)$ sei mit $(2\tilde\omega, 2\tilde\omega')$ bezeichnet, sodass sowohl 2ω, $2\omega'$ wie auch $2\omega_0$, $2\omega_0'$ als homogene lineare Functionen mit ganzzahligen Coefficienten durch $2\tilde\omega, 2\tilde\omega'$ dargestellt werden können. Es sei

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha\,\tilde\omega + \beta\,\tilde\omega', \\ \omega_0' &= \alpha'\tilde\omega + \beta'\tilde\omega', \\ \omega\ &= \lambda\,\tilde\omega + \mu\,\tilde\omega', \\ \omega' &= \lambda'\tilde\omega + \mu'\tilde\omega'. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt durch Auflösung

$$\begin{aligned} (\lambda\mu'-\mu\lambda')\tilde\omega &= \mu'\omega - \mu\omega', \\ (\lambda\mu'-\mu\lambda')\tilde\omega' &= -\lambda'\omega + \lambda\omega'. \end{aligned}$$

Die Determinante $\lambda\mu'-\mu\lambda'$ ist nicht Null, weil sonst 2ω und $2\omega'$ in einem rationalen Verhältniss stünden. Ebensowenig verschwindet $\alpha\beta'-\beta\alpha'$. Die Einführung der Werthe von $\tilde\omega$ und $\tilde\omega'$ in die beiden ersten Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} \omega_0 &= p\,\omega + q\,\omega', \\ \omega_0' &= p'\omega + q'\omega', \end{aligned}$$

wo $p, \dots q'$ rationale Zahlen bedeuten. Ihre Determinante ist ebenfalls nicht Null, denn sie ist gleich

$$\frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{\lambda\mu'-\mu\lambda'}.$$

In der gleichen Weise findet man

$$\begin{aligned} \omega_0 &= p_1\omega_1 + q_1\omega_1', \\ \omega_0' &= p_1'\omega_1 + q_1'\omega_1', \end{aligned}$$

und durch Gleichsetzung beider Werthepaare und Auflösung:

$$(2.)\qquad \left\{ \begin{aligned} \omega\ &= a\,\omega_1 + b\,\omega_1' \\ \omega' &= a'\omega_1 + b'\omega_1'. \end{aligned} \right.$$

Auch hier sind $a, \dots b'$ rationale Zahlen von nicht verschwindender Determinante.

Gleichungen der Form (2.) müssen also immer stattfinden, wenn $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ verwandte elliptische Functionen, $(2\omega, 2\omega')$ und $(2\omega_1, 2\omega_1')$ beliebige Periodenpaare dieser Functionen sind.

Es sei jetzt $\varphi(u)$ eine beliebige elliptische Function. Eines ihrer Periodenpaare $(2\omega, 2\omega')$ werde beliebig ausgewählt und vier rationale Zahlen $a, \dots b'$ willkürlich, nur so angenommen, dass $ab'-a'b$ von Null verschieden ist. Alsdann sollen ω_1 und ω_1' durch die Ausdrücke

$$\text{(3.)} \qquad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{b'\omega - b\omega'}{ab'-ba'} \\[2ex] \omega_1' = \dfrac{a\omega' - a'\omega}{ab'-ba'} \end{cases}$$

(wie sie aus (2.) durch Auflösung folgen würden) definirt und unter $\varphi_1(u)$ irgend eine elliptische Function mit den Perioden $2\omega_1$, $2\omega_1'$ verstanden werden. Dann sind, so wird behauptet, $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ verwandte Functionen. Es seien nämlich g, g' zwei ganze Zahlen, die so beschaffen sind, dass die Producte $ga, gb, g'a', g'b'$ ganze Zahlen werden. Dann lässt sich in den Gleichungen (2.), die ja mit (3.) identisch sind,

$$\begin{aligned} 2g\omega &= 2m\,\omega_1 + 2n\,\omega_1', \\ 2g'\omega' &= 2m'\omega_1 + 2n'\omega_1' \end{aligned}$$

setzen, für $m, \dots n'$ als ganze Zahlen. Die Function $\varphi(u)$ hat die Perioden $2g\omega$, $2g'\omega'$, und da sich die Grössen als homogene lineare ganzzahlige Functionen von $2\omega_1$ und $2\omega_1'$ darstellen lassen, so müssen sie auch Perioden von $\varphi_1(u)$ sein. Beide Functionen sind demnach rational darstellbar durch die $\wp$-Function mit den primitiven Perioden $2g\omega$, $2g'\omega'$,

$$\wp(u\,|\,g\omega, g'\omega'),$$

und ihre erste Ableitung.

Dieser Satz ist die Umkehrung des vorher bewiesenen. Beide zusammen geben Veranlassung zu der Frage, in welcher Weise die Verwandtschaft zweier elliptischen Functionen genauer charakterisirt werden kann, wenn die Gleichungen (2.) nicht nur der Form nach, sondern auch in ihren Coefficienten gegeben sind. D. h. es ist zu untersuchen, was sich unter dieser Voraussetzung über die zwischen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ bestehende algebraische

Gleichung oder, nach der ursprünglichen Definition der Verwandtschaft, über die Form der Darstellung dieser beiden Functionen durch eine und dieselbe $\wp$-Function aussagen lässt.

Zuerst sollen die Gleichungen (2.) auf eine möglichst einfache Form gebracht werden.

Die rationalen Zahlen $a, \dots b'$, die nicht etwa sämmtlich positiv zu sein brauchen, können durch Multiplication mit einer und derselben ganzen Zahl in ganze Zahlen verwandelt werden. Unter den unendlichvielen Zahlen, durch die dieser Zweck erreicht werden kann, sei c die kleinste positive. Die ganzen Zahlen ca, cb, ca', cb' können einen gemeinsamen Theiler haben, der ebenfalls als positiv vorausgesetzt werden soll, und zwar sei m der grösste Theiler. Setzt man

$$ca = m\alpha, \quad cb = m\beta, \quad ca' = m\alpha', \quad cb' = m\beta',$$

so enthalten also $\alpha, \dots \beta'$ keinen Theiler mehr, der allen vier Zahlen gemeinsam wäre. Ferner sind offenbar c und m relative Primzahlen.

Werden nun $\alpha, \dots \beta'$ statt $a, \dots b'$ in (3.) eingeführt, so ergiebt sich z. B.

$$\omega_1 = \frac{c}{m}\,\frac{\beta'\omega - \beta\omega'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

c kann mit $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ einen gemeinsamen Theiler haben; der grösste positive heisse n_1, und es sei

$$c = m_1 n_1, \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = n n_1.$$

Durch Einsetzen der umgeformten Ausdrücke von $a, \dots b'$ in (2.) und (3.) erhält man

$$\text{(4.)} \qquad \begin{cases} \omega = \dfrac{m}{m_1 n_1}\,(\alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_1') \\[2ex] \omega' = \dfrac{m}{m_1 n_1}\,(\alpha'\omega_1 + \beta'\omega_1'), \end{cases}$$

$$\text{(5.)} \qquad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{m_1}{mn}\,(\beta'\omega - \beta\,\omega') \\[2ex] \omega_1' = \dfrac{m_1}{mn}\,(-\alpha'\omega + \alpha\,\omega'). \end{cases}$$

Der in den Gleichungen (4.) vor den Klammern stehende Bruch $\frac{m}{m_1 n_1}$ erscheint in der reducirten Form, weil m mit $c = m_1 n_1$ keinen gemeinsamen Theiler haben konnte. Aus demselben Grunde sind in den Formeln (5.) m_1 und m

relativ prim. Man überblickt aber sofort, dass m_1 auch mit n keinen gemeinsamen Theiler haben kann. Denn wäre

$$m_1 = m_1' d, \quad n = n' d,$$

so würde

$$c = m_1' n_1 d, \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = n' n_1 d$$

sein. Der Voraussetzung entgegen wäre also n_1 nicht der grösste gemeinsame Theiler der Zahl c und der Determinante.

Was die Vorzeichen der eingeführten ganzen Zahlen angeht, so war

$$c > 0, \quad m > 0, \quad n_1 > 0.$$

Wegen $c = m_1 n_1$ ist also auch

$$m_1 > 0.$$

Nimmt man das Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ so an, dass $\frac{\omega'}{\omega i}$ im reellen Theile positiv ist, und setzt die entsprechende Eigenschaft von $(2\omega_1, 2\omega_1')$ voraus, so kann man auch über das Zeichen von n noch etwas schliessen. Es findet sich nämlich

$$ab' - ba' > 0,$$

also, wegen

$$ab' - ba' = \frac{m^2}{c^2}(\alpha\beta' - \beta\alpha'):$$

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' > 0,$$

d. h.

$$n n_1 > 0.$$

Hiernach muss auch

$$n > 0$$

sein; die in den Gleichungen (4.) und (5.) vorkommenden Brüche sind unter den gemachten Annahmen positiv.

Die beiden durch (2.), (3.) oder (4.), (5.) verbundenen Periodenpaare seien jetzt primitiv. Dieser Annahme steht nichts entgegen, weil irgend zwei Periodenpaare der beiden verwandten Functionen zwei Relationen von der Form (2.) genügen mussten. Eine weitere Vereinfachung dieser Gleichungen soll durch Übergang zu anderen Paaren ebenfalls primitiver Perioden versucht werden.

Es seien $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ und $(2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_1')$ diese Periodenpaare. Die Bedingungen $\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega} i}\right) > 0$, $\Re\left(\frac{\tilde{\omega}_1'}{\tilde{\omega}_1 i}\right) > 0$ sollen festgehalten werden, sodass die Determinanten der Substitutions-Coefficienten den Werth $+1$ haben. Die Elimination der ursprünglichen Periodenpaare liefert

$$\tilde{\omega} = \frac{m}{m_1 n_1}(\alpha_0 \tilde{\omega}_1 + \beta_0 \tilde{\omega}_1'),$$

$$\tilde{\omega}' = \frac{m}{m_1 n_1}(\alpha_0' \tilde{\omega}_1 + \beta_0' \tilde{\omega}_1'),$$

wo $\alpha_0, \ldots \beta_0'$ wieder ganze Zahlen und

$$\alpha_0\beta_0' - \beta_0\alpha_0' = \alpha\beta' - \beta\alpha' = n n_1$$

ist. Man kann beweisen, dass bei passender Wahl der primitiven Periodenpaare jede Periode der einen Function sich mittels einer einzigen Periode der anderen darstellen lässt, dass nämlich

$$\alpha_0' = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_0' = 1$$

und demnach

$$\alpha_0 = n n_1$$

gesetzt werden darf.

Zu dem Ende nehme man, indem man nach wie vor $\alpha, \ldots \beta'$ als gegeben betrachtet, zwei ganze Zahlen α_1 und β_1 so an, dass $\alpha_1\beta - \beta_1\alpha$ und $\alpha_1\beta' - \beta_1\alpha'$ relative Primzahlen sind. Dies ist möglich, weil $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Wenn z. B. α und β relativ prim sind, so kann man $\alpha_1\beta - \beta_1\alpha = 1$ machen und dann die Determinante $\alpha_1\beta' - \beta_1\alpha'$ gleich irgend einer anderen Zahl setzen, wie sie sich durch Einführung der Zahlenwerthe α_1 und β_1 ergiebt. Dann mögen weiter α_2 und β_2 so bestimmt werden, dass

$$\alpha_2(\alpha_1\beta - \beta_1\alpha) + \beta_2(\alpha_1\beta' - \beta_1\alpha') = 1 \tag{6.}$$

ist, und für $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ die Definitionen

$$\begin{cases} \tilde{\omega} = (\alpha_1\beta' - \beta_1\alpha')\omega - (\alpha_1\beta - \beta_1\alpha)\omega' \\ \tilde{\omega}' = \alpha_2\omega + \beta_2\omega' \end{cases} \tag{7.}$$

gelten. Hierin sind also je zwei in einer und derselben Gleichung vorkommende Coefficienten relativ prim, und die Determinante aller vier Coefficienten gleich Eins, wie es unter den gemachten Voraussetzungen für den Übergang von einem primitiven Periodenpaar zu einem anderen erfordert wird.

Die Gleichung (6.) kann auch in der Form

$$\alpha_1(\alpha_2\beta+\beta_2\beta')-\beta_1(\alpha_2\alpha+\beta_2\alpha') = 1 \tag{8.}$$

geschrieben werden. Betrachtet man die linke Seite als Determinante eines Paares linearer Formen, so sieht man, dass man setzen kann:

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \alpha_1\omega_1+\beta_1\omega_1' \\ \tilde{\omega}_1' &= (\alpha_2\alpha+\beta_2\alpha')\,\omega_1+(\alpha_2\beta+\beta_2\beta')\,\omega_1'. \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

Diese Formeln enthalten für die zweite Function den Übergang von einem primitiven Periodenpaar zu einem anderen.

Eliminirt man jetzt wieder die ursprünglichen Periodenpaare $(2\omega, 2\omega')$ und $(2\omega_1, 2\omega_1')$ mittels (4.) oder (5.), so findet man

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \frac{mn}{m_1}\,\tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}' &= \frac{m}{m_1 n_1}\,\tilde{\omega}_1' \end{aligned}\right. \tag{10.}$$

oder umgekehrt

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \frac{m_1}{mn}\,\tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_1' &= \frac{m_1 n_1}{m}\,\tilde{\omega}'. \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

Damit ist die auf S. 283 ausgesprochene Behauptung bewiesen, und es zeigt sich, dass jede Verwandtschaft zwischen zwei elliptischen Functionen durch vier positive ganze Zahlen charakterisirt werden kann.

Die Bedeutung dieser Zahlen lässt sich in folgender Weise noch deutlicher erkennen.

Es sei $2\omega_1$ eine primitive Periode der Function $\varphi_1(u)$, also eine solche, die geeignet ist, mit einer anderen zusammen ein primitives Periodenpaar zu bilden. Sie drückt sich durch die Bestandtheile eines anderen primitiven Periodenpaares in der Form

$$2\omega_1 = 2\lambda_1\tilde{\omega}_1+2\mu_1\tilde{\omega}_1'$$

aus, wo λ_1 und μ_1 relative Primzahlen sind. Nach S. 280 muss bei passender Wahl der ganzen Zahl g_1

$$2g_1\omega_1 = 2g_1\lambda_1\frac{m_1}{mn}\,\tilde{\omega}+2g_1\mu_1\frac{m_1 n_1}{m}\,\tilde{\omega}'$$

eine Periode von $\varphi(u)$ sein. Da aber $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ ein primitives Periodenpaar dieser Function bedeutet, so sind $g_1\lambda_1\frac{m_1}{mn}$ und $g_1\mu_1\frac{m_1 n_1}{m}$ ganze Zahlen; d. h., weil $\frac{m_1}{mn}$ und $\frac{m_1 n_1}{m}$ reducirte Brüche sind, es muss $g_1\lambda_1$ durch mn, $g_1\mu_1$ durch m theilbar sein. Fasst man jetzt irgend einen Primfactor von m in's Auge, so muss er nach der zweiten Bedingung in $g_1\mu_1$ aufgehen. Angenommen, er sei Factor von μ_1, so kann er λ_1 nicht theilen, weil λ_1 und μ_1 überhaupt keinen gemeinsamen Theiler haben. Da aber nach der ersten Bedingung $g_1\lambda_1$ durch m theilbar sein muss, so geht der Factor in g_1 auf. Dies gilt für alle Primfactoren von m, von denen man nicht von vornherein weiss, dass sie in g_1 enthalten sind. Also: Sämmtliche Primfactoren von m müssen auch Theiler von g_1 sein, und zwar ebenso oft, wie sie in m vorkommen; g_1 ist durch m theilbar.

Ist nun

$$g_1 = h_1 m,$$

so muss noch $h_1\lambda_1$ durch n theilbar sein.

Es sei n'' der grösste gemeinsame Theiler von λ_1 und n, und

$$n = n'n''.$$

Dann muss n' in h_1 aufgehen,

$$h_1 = kn',$$

also

$$g_1 = kn'm$$

sein. Es werde im Besonderen

$$k = 1,$$

mithin

$$g_1 = mn'$$

angenommen, sodass

$$2g_1\omega_1 = 2mn'\omega_1 = 2\,\frac{n'\lambda_1 m_1}{n}\,\tilde{\omega}+2n'\mu_1 m_1 n_1\tilde{\omega}'$$

wird. Der Coefficient von $2\tilde{\omega}$ erscheint dann nur als Bruch, denn es war $n = n'n''$ und n'' Theiler von λ_1. Es ist also

$$2mn'\omega_1$$

eine Periode von $\varphi(u)$, d. h. es reicht aus, die Zahl g_1 gleich mn' zu nehmen, ohne noch einen Factor k hinzuzufügen. Dies gilt für irgend eine primitive

Periode $2\omega_1$ der Function $\varphi_1(u)$: wie auch diese Periode beschaffen sein möge, so ist doch stets die ganze Zahl g_1, die bewirkt, dass $2g_1\omega_1$ eine Periode von $\varphi(u)$ wird, ein Vielfaches von m. Der Factor n' bestimmt sich hierauf wie angegeben; ist der Ausdruck von $2\omega_1$ durch $2\tilde{\omega}_1$, $2\tilde{\omega}_1'$ bekannt, so suche man den grössten gemeinsamen Theiler n'' von λ_1 und n, dann ist $n' = \frac{n}{n''}$.

Man gehe nun umgekehrt, anstatt $2\omega_1$ als gegeben anzunehmen, von einem bestimmten Zahlenwerthe n' aus und suche diesem gemäss $2\omega_1$ so zu wählen, wie es die Bedeutung von n' erfordert. Es sei also n' ein beliebiger Theiler von n, diese Zahl selbst und die Einheit eingeschlossen, und

$$\frac{n}{n'} = n''$$

gesetzt. Auf unendlichviele Weisen lässt sich eine Zahl λ_1 so bestimmen, dass n'' der grösste gemeinsame Theiler von n und λ_1 ist, und alsdann noch auf unendlichviele Weisen eine Zahl μ_1, die mit λ_1 keinen gemeinsamen Theiler hat. Setzt man dann

$$2\omega_1 = 2\lambda_1\tilde{\omega}_1 + 2\mu_1\tilde{\omega}_1',$$

wo $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}_1'$ mit $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ durch die beiden Gleichungen (11.) zusammenhängen, so ist $2\omega_1$ eine Periode von $\varphi_1(u)$, die mit mn' multiplicirt in eine Periode von $\varphi(u)$ übergeht. Die kleinste Zahl, mit der multiplicirt überhaupt eine Grösse $2\omega_1$ eine Periode von $\varphi(u)$ liefert, wird für $n' = 1$ erhalten, ist also gleich m. Alle anderen Zahlen, die dies bewirken, haben die Form mn', sind mithin durch m theilbar.

Geht man von der Gleichungsform (11.) aus, so sieht man, dass m_1 die entsprechende Bedeutung für die Perioden der Function $\varphi(u)$ haben muss. Es ist die kleinste positive ganze Zahl, mit der multiplicirt eine primitive Periode von $\varphi(u)$ eine Periode von $\varphi_1(u)$ ergiebt.

Die beiden Zahlen m und m_1 gewinnen hierdurch für die Theorie der Verwandtschaft eine Bedeutung, die in der Rechnung, durch welche die Zahlen eingeführt wurden, nicht hervortritt.

Was n und n_1 angeht, so nehme man, wenn m und m_1 als bekannt gelten, n beliebig, nur relativ prim zu m_1 an, bestimme vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, die nicht alle einen gemeinsamen Theiler haben, so, dass $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ durch n theilbar wird, und setze

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = nn_1.$$

Dann definiren die Gleichungen zwischen primitiven halben Perioden

$$\omega = \frac{m}{m_1 n_1}(\alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_1'),$$
$$\omega' = \frac{m}{m_1 n_1}(\alpha'\omega_1 + \beta'\omega_1')$$

eine Verwandtschaft, die durch die vier Zahlen m, m_1, n, n_1 charakterisirt wird; in dem Sinne, dass es möglich ist, bei Einführung anderer primitiver Periodenpaare den Inhalt dieser beiden Gleichungen auch durch die Formeln (10.) wiederzugeben.

Durch dieses Ergebniss wird die Theorie der Verwandtschaft auf die sogenannte Transformation der elliptischen Functionen zurückgeführt. Eine elliptische Function heisst nämlich dann durch Transformation aus einer anderen entstanden, wenn eines ihrer primitiven Periodenpaare sich einem primitiven Periodenpaare der anderen so zuordnen lässt, dass jeder Bestandtheil des einen Paares aus einem Bestandtheil des zweiten durch Multiplication mit einer rationalen Zahl hervorgeht.

Zweiunddreissigstes Kapitel.

Transformation specieller Functionen.

Kehrt man zu den $\wp$-Functionen (S. 277) zurück, so hat man nach den allgemeinen Ergebnissen des letzten Kapitels nur nach der Verwandtschaft zwischen solchen Functionen zu fragen, für die zwei primitive Periodenpaare durch die Relationen

$$\tilde{\omega} = \frac{mn}{m_1}\tilde{\omega}_1, \quad \tilde{\omega}' = \frac{m}{m_1 n_1}\tilde{\omega}_1'$$

verbunden sind.

Wird

$$\frac{\tilde{\omega}}{mn} = \frac{\tilde{\omega}_1}{m_1} = \omega_0, \quad \frac{\tilde{\omega}'}{m} = \frac{\tilde{\omega}_1'}{m_1 n_1} = \omega_0'$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$(1.) \qquad \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{mn}, \frac{\tilde{\omega}'}{m}\right) = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}_1}{m_1}, \frac{\tilde{\omega}_1'}{m_1 n_1}\right) = \wp(u \,|\, \omega_0, \omega_0').$$

Die dritte $\wp$-Function, $\wp(u|\omega_0, \omega_0')$, geht also aus der ersten dadurch hervor, dass die erste Periode durch mn, die zweite durch m getheilt wird; aus der zweiten mittels Theilung der ersten Periode durch m_1, der zweiten durch $m_1 n_1$. Könnte man $\wp(u|\omega_0, \omega_0')$ sowohl durch $\wp(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ wie durch $\wp(u|\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_1')$ darstellen, so würde das Transformationsproblem gelöst sein.

Nun folgt aus S. 120 (25.)

$$(2.) \qquad \mu^2 \wp(\mu u \,|\, \omega, \omega') = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{\mu}, \frac{\omega'}{\mu}\right).$$

Die Anwendung dieser Eigenschaft auf (1.) liefert

$$(3.) \qquad m^2 \wp\left(mu \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = m_1^2 \wp\left(m_1 u \,\middle|\, \tilde{\omega}_1, \frac{\tilde{\omega}_1'}{n_1}\right),$$

wo die linke und rechte Seite nach wie vor gleich $\wp(u|\omega_0, \omega_0')$ ist.

Man sagt, eine $\wp$-Function entstehe aus einer anderen durch **primitive Transformation**, wenn eine Periode der neuen Function einer Periode der gegebenen Function gleich ist, während die zweite Periode jener Function aus der zweiten Periode der ursprünglichen durch Division mit einer positiven ganzen Zahl hervorgeht. Diese Zahl heisst die **Ordnung** der Transformation.

Hiernach enthält die Gleichung (3.) den Satz, dass jede Transformation sich auf zwei Multiplicationen und zwei primitive Transformationen zurückführen lässt.

Die Multiplication ist im dreiundzwanzigsten Kapitel behandelt worden. Es bleibt daher nur übrig, eine primitive Transformation durchzuführen, d. h. weil die beiden Perioden in gleichem Rechte sind, die Function

$$\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)$$

für eine beliebige ganze Zahl n durch $\wp(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ darzustellen. Diese Darstellung muss in rationaler Form möglich sein. Denn die transformirte Function, die die primitiven Perioden $\frac{2\tilde{\omega}}{n}$ und $2\tilde{\omega}'$ hat, besitzt auch die Perioden $2\tilde{\omega}$ und $2\tilde{\omega}'$, und der Satz S. 146 findet Anwendung. Nimmt man das obige Ergebniss hinzu, so erkennt man aus (3.), dass die algebraische Gleichung, die die Verwandtschaft der beiden $\wp$-Functionen kennzeichnet, in der Form

$$R(\wp(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')) = R_1(\wp(u|\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_1'))$$

geschrieben werden kann, unter R, R_1 rationale Functionen verstanden.

Die Benutzung von l statt k im neunundzwanzigsten Kapitel hängt, wie die Formeln auf S. 258 erkennen lassen, mit einer Transformation vierter Ordnung zusammen.

Zur wirklichen Herstellung des Ausdruckes von $\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)$ durch $\wp(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ braucht man ein vollständiges System von Unendlichkeitsstellen der transformirten Function, die in Bezug auf $2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}'$ incongruent sind, und ferner die Coefficienten der negativen Potenzen für die Entwickelungen in der Nähe dieser Stellen. Alle Unendlichkeitsstellen sind in der Formel

$$v = 2\lambda\frac{\tilde{\omega}}{n} + 2\mu\tilde{\omega}'$$

enthalten. Es sei

$$\lambda = \lambda' n + \nu,$$

also

$$v = 2\lambda'\tilde{\omega} + 2\mu\tilde{\omega}' + 2\nu\frac{\tilde{\omega}}{n}.$$

Hierin hat man λ' und μ alle ganzzahligen Werthe, ν aber nur die Reste nach dem Modul n,

$$\nu = 0, 1, \ldots n-1,$$

durchlaufen zu lassen. Jede Unendlichkeitsstelle ist demnach einer der Grössen $\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}$ congruent, diese aber sind unter einander incongruent. Und da die elliptische Function $\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)$ als $\wp$-Function von der zweiten Ordnung unendlichgross wird, so muss man setzen können:

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = c + \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(c_\nu\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u - \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right) + c'_\nu\wp\left(u - \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right).$$

Eine $\wp$-Function enthält aber kein Glied mit der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenz, und der Coefficient der $(-2)^{\text{ten}}$ ist gleich Eins, mithin wird

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = c + \sum_{\nu=0}^{n-1}\wp\left(u - \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right).$$

Zur Bestimmung von c entwickele man links und rechts in der Nähe der Stelle $u = 0$. Auf der linken Seite und in dem ersten Gliede der rechten, das gleich $\wp u$ selbst ist, kommt kein constantes Glied vor, also muss

$$c + \sum_{\nu=1}^{n-1}\wp\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right) = 0,$$

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = \wp u + \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\wp\left(u - \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right) - \wp\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right) \tag{4.}$$

sein.

Für die weitere Berechnung, die die Wegschaffung des zusammengesetzten Argumentes $u - \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}$ zum Zweck hat, ist ungerades und gerades n zu unterscheiden. Zur Abkürzung sei $\frac{2\tilde{\omega}}{n} = w$.

I. n ungerade.

Man zerlege die Summe in zwei Theile, indem man ν von 1 bis $\frac{n-1}{2}$, dann von $\frac{n+1}{2}$ bis n gehen lässt, und setze in dem zweiten $n-\nu$ statt ν. Wegen

$$\wp(u-(n-\nu)w) = \wp(u - 2\tilde{\omega} + \nu w) = \wp(u+\nu w)$$

wird

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = \wp u - G_1 + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}(\wp(u-\nu w) + \wp(u+\nu w)), \tag{5.}$$

wo

$$G_1 = \sum_{\nu=1}^{n-1}\wp(\nu w) = 2\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\wp(\nu w) \tag{6.}$$

ist. Die Gleichung (5.) ist insofern zweckmässiger als (4.), als sie sofort erkennen lässt, dass, wie es sein muss, bei Anwendung des Additionstheorems die Function $\wp' u$ nicht auftritt. Es kommt

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = \wp u - G_1 + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(\wp u + \wp(\nu w))(2\wp u\,\wp(\nu w) - \frac{1}{2}g_2) - g_3}{(\wp u - \wp(\nu w))^2}.$$

Der Ausdruck wird eine rationale Function, deren Nenner das Quadrat der ganzen Function

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}(\wp u - \wp(\nu w)) = G(\wp u)_{\frac{n-1}{2}} \tag{7.}$$

ist. Der Index kennzeichnet den Grad. Eine leichte Abzählung führt auf die Formel

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = \frac{H(\wp u)_n}{\left(G(\wp u)_{\frac{n-1}{2}}\right)^2}. \tag{8.}$$

Die ganze Function im Zähler enthält ausser $\wp u$ auch g_2, g_3 und $\wp w, \wp(2w), \ldots \wp\left(\frac{n-1}{2}w\right)$ rational, und zwar diese $\frac{n-1}{2}$ Grössen symmetrisch. Die Coefficienten von $H(\wp u)_n$ hängen also rational von denen der Function $G(\wp u)_{\frac{n-1}{2}}$ ab.

II. n gerade.

Die Summe in der Formel (4.) enthält eine ungerade Anzahl von Gliedern, und unter den Grössen νw kommt jetzt, für $\nu = \frac{n}{2}$, eine halbe Periode vor, nämlich $\tilde{\omega}$. Dem ersten Fall entsprechend findet man

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = \wp u + \wp(u - \tilde{\omega}) - G_1 + \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}(\wp(u-\nu w) + \wp(u+\nu w)) \tag{9.}$$

für

$$G_1 = \wp\tilde{\omega} + 2\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} \wp(\nu w). \tag{10.}$$

Nun ist (S. 66 (2.))

$$\wp(u-\tilde{\omega}) = \wp(u+\tilde{\omega}) = e_\alpha + \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha};$$

ein Ausdruck, der bei Benutzung der ohnedies auftretenden Invarianten oder auch nur einer von ihnen auf e_α allein zurückgeführt werden kann:

$$\wp(u-\tilde{\omega}) = e_\alpha + \frac{3e_\alpha^2 - \frac{1}{4}g_2}{\wp u - e_\alpha}.$$

Es sei jetzt

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} (\wp u - \wp(\nu w)) = \bar{G}(\wp u)_{\frac{n}{2}-1},$$

so wird

$$\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = \frac{\bar{H}(\wp u)_n}{(\wp u - e_\alpha)\left(\bar{G}(\wp u)_{\frac{n}{2}-1}\right)^2}. \tag{11.}$$

Über das rationale Vorkommen der Grössen g_2, g_3 und $\wp(\nu w)$ gilt dasselbe wie vorher, nur tritt jetzt zu $\wp w, \wp(2w), \cdots \wp\left(\frac{n-2}{2}w\right)$ noch die Grösse e_α hinzu.

In beiden Fällen steht im Zähler eine ganze Function n^{ten}, im Nenner eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Um die Verwandtschaft zwischen zwei $\wp$-Functionen vollständig darzustellen, hat man noch die Multiplication hinzuzunehmen (S. 289 (3.)). Nun war $\wp(mu)$ eine rationale Function des Grades m^2 von $\wp u$, d. h. bei der Darstellung von $\wp(mu)$ durch $\wp u$ tritt als höchster Potenzexponent m^2 auf (S. 216 (11.)),

$$\wp(mu) = R(\wp u)_{m^2}.$$

Hiernach wird die algebraische Gleichung zwischen den beiden $\wp$-Functionen

$$R(\wp(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'))_{m^2 n} = R_1(\wp(u|\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_1'))_{m_1^2 n_1}.$$

Mit der transformirten Function $\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)$, die jetzt mit $\bar{\wp} u$ bezeichnet werden soll, hängt eine »transformirte σ-Function« mittels der Gleichung

$$\frac{d^2 \log \bar{\sigma} u}{du^2} = -\bar{\wp} u$$

zusammen. Ihr Ausdruck ergiebt sich, zuerst wieder für ungerades n, aus (5.)

$$\bar{\wp} u = \wp u - G_1 + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} (\wp(u-\nu w) + \wp(u+\nu w))$$

durch Integration. Der erste Schritt liefert

$$\frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} u = \frac{\sigma'}{\sigma} u + G_1 u + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\nu w) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\nu w)\right).$$

Eine Constante tritt nicht hinzu, weil

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(-\nu w) + \frac{\sigma'}{\sigma}(\nu w)\right) = 0$$

ist und in den von dem Summenzeichen freien Gliedern u^0 überhaupt nicht vorkommt. Weiter folgt

$$\bar{\sigma} u = C \sigma u \, e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma(u-\nu w)\,\sigma(u+\nu w),$$

und aus dem Coefficienten von u^1 in der Entwickelung nach Potenzen von u:

$$1 = C \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma(-\nu w)\,\sigma(\nu w).$$

Mithin ist

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sigma(\nu w - u)\,\sigma(\nu w + u)}{\sigma^2(\nu w)}. \tag{12.}$$

Für gerades n ist von der Gleichung (9.) auszugehen,

$$\bar{\wp} u = \wp u - G_1 + \wp(u-\tilde{\omega}) + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} (\wp(u-\nu w) + \wp(u+\nu w)).$$

Die erste Integration und Constantenbestimmung ergiebt

$$\frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} u = \frac{\sigma'}{\sigma} u + G_1 u + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\tilde{\omega}) + \tilde{\eta} + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\nu \omega) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\nu w)\right),$$

und die zweite

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma u \, e^{\tilde{\eta} u} \frac{\sigma(\tilde{\omega} - u)}{\sigma \tilde{\omega}} \prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{\sigma(\nu w - u)\,\sigma(\nu w + u)}{\sigma^2(\nu w)}$$

oder

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma u \, \sigma_\alpha u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{\sigma(\nu w - u)\,\sigma(\nu w + u)}{\sigma^2(\nu w)}. \tag{13.}$$

Unter Benutzung von

$$\frac{\sigma(v-u)\,\sigma(v+u)}{\sigma^2 v\,.\,\sigma^2 u} = \wp u - \wp v$$

können die beiden Formeln durch folgende ersetzt werden:

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma^n u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} (\wp u - \wp(\nu w)), \tag{14.}$$

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma^{n-1} u\, \sigma_\alpha u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} (\wp u - \wp(\nu w)). \tag{15.}$$

Da man durch Differentiation von $\bar{\sigma} u$ zu $\bar{\wp} u$ zurückkehren kann, so lehren diese Ausdrücke, dass man in jedem Falle, um das Transformationsproblem zu lösen, nur das Product zu kennen braucht, das für ungerades n mit $G(\wp u)_{\frac{n-1}{2}}$, für gerades n mit $\bar{G}(\wp u)_{\frac{n}{2}-1}$ bezeichnet worden ist. Denn auch G_1 lässt sich (nach (6.) und (10.)) durch die Coefficienten dieser Functionen darstellen. Einer besonderen Berechnung von $H(\wp u)_n$ und $\bar{H}(\wp u)_n$ bedarf es nicht.

Während die $\wp$-Function in der Transformationstheorie als von u, $2\tilde{\omega}$ und $2\tilde{\omega}'$ abhängig erscheint, pflegt man σu als Function von u, g_2 und g_3 zu betrachten. Es seien G_2, G_3 die Invarianten von $\bar{\sigma} u$. Um sie darzustellen, gehe man zu den Gleichungen S. 121 (26.)

$$g_2 = 60 \sum_{\mu,\nu}{}' (2\mu\tilde{\omega} + 2\nu\tilde{\omega}')^{-4},$$
$$g_3 = 140 \sum_{\mu,\nu}{}' (2\mu\tilde{\omega} + 2\nu\tilde{\omega}')^{-6}$$

zurück. Bei einer primitiven Transformation n^{ter} Ordnung werden sie durch

$$G_2 = 60 \sum_{\mu,\nu}{}' \left(2\mu \frac{\tilde{\omega}}{n} + 2\nu\tilde{\omega}'\right)^{-4},$$
$$G_3 = 140 \sum_{\mu,\nu}{}' \left(2\mu \frac{\tilde{\omega}}{n} + 2\nu\tilde{\omega}'\right)^{-6}$$

vertreten. Setzt man

$$\mu = \lambda n + \varrho,$$

so erhält man alle Zahlen μ und jede nur einmal, wenn man λ alle ganzzahligen Werthe, ϱ die Werthe $0, 1, \ldots n-1$ ertheilt. Die Summen zerlegen

sich dann in Gruppen, z. B. wird

$$G_2 = 60 \sum_{\varrho=0}^{n-1} \sum_{\lambda,\nu} \left(\frac{2\varrho\tilde{\omega}}{n} + 2\lambda\tilde{\omega} + 2\nu\tilde{\omega}'\right)^{-4};$$

dabei ist die Annahme $\varrho = \lambda = \nu = 0$ auszuschliessen.

Mittels der Gleichung S. 120 (25.)

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{\mu,\nu}{}' ((u - 2\mu\tilde{\omega} - 2\nu\tilde{\omega}')^{-2} - (2\mu\tilde{\omega} + 2\nu\tilde{\omega}')^{-2})$$

lassen sich diese Ausdrücke anders darstellen. Es wird

$$\wp' u = -2 \sum_{\mu,\nu} (u - 2\mu\tilde{\omega} - 2\nu\tilde{\omega}')^{-3},$$
$$\wp'' u = 2.3 \sum_{\mu,\nu} (u - 2\mu\tilde{\omega} - 2\nu\tilde{\omega}')^{-4},$$
$$\wp^{\mathrm{IV}} u = 2.3.4.5 \sum_{\mu,\nu} (u - 2\mu\tilde{\omega} - 2\nu\tilde{\omega}')^{-6}.$$

Setzt man in den beiden letzten Formeln

$$u = -\frac{2\varrho\tilde{\omega}}{n}$$

und schreibt λ für μ, so werden $\wp''\left(\frac{2\varrho\tilde{\omega}}{n}\right)$ und $\wp^{\mathrm{IV}}\left(\frac{2\varrho\tilde{\omega}}{n}\right)$, von Zahlfactoren abgesehen, gleich bestimmten Bestandtheilen von G_2 und G_3. Nur für $\varrho = 0$ ist die Einführung des speciellen Argumentwerthes nicht zulässig, weil für $u = 0$ die $\wp$-Function und alle ihre Ableitungen unendlichgross werden. Aber der Bestandtheil von G_2 für $\varrho = 0$ ist gleich g_2, der entsprechende von G_3 gleich g_3. Hiernach kommt, wenn schliesslich für ϱ wieder ν gesetzt wird,

$$\left\{\begin{aligned} G_2 &= g_2 + 10 \sum_{\nu=1}^{n-1} \wp''(\nu w) \\ G_3 &= g_3 + \frac{7}{6} \sum_{\nu=1}^{n-1} \wp^{\mathrm{IV}}(\nu w). \end{aligned}\right. \tag{16.}$$

Die geraden Ableitungen der $\wp$-Function können als ganze rationale Functionen von $\wp u$ selbst, und demnach die Summen in den Formeln (16.) als ganze rationale symmetrische Functionen der Grössen $\wp\frac{2\tilde{\omega}}{n}, \wp\frac{4\tilde{\omega}}{n}, \cdots \wp\frac{2(n-2)\tilde{\omega}}{n}$, d. h. als rationale Functionen der Coefficienten der oben genannten Gleichungen dargestellt werden.

Für eine beliebige, durch vier Zahlen gekennzeichnete Transformation erledigt sich die Darstellung von G_2 und G_3 in fast ebenso einfacher Weise.

Bevor nun auf die Bildung der Gleichung eingegangen wird, deren Wurzeln die Grössen $\wp(\nu w)$ sind, sollen auch die Functionen $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$ transformirt werden. Die neuen Functionen würden bekannt sein, wenn $\bar{\wp} u-\bar{e}_\alpha$ für $\alpha=1,2,3$ bekannt wäre, wo $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ zu $\frac{2\tilde{\omega}}{n}, 2\tilde{\omega}'$ oder zu G_2, G_3 gehören. Es sei N der Nenner in der Formel für $\bar{\wp} u$, also

$$N=\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}(\wp u-\wp(\nu w))^2 \qquad \text{für ungerades } n,$$

$$N=(\wp u-\wp\tilde{\omega})\prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}}(\wp u-\wp(\nu w))^2 \text{ für gerades } n.$$

Setzt man

$$\bar{\wp} u-\bar{\wp} v=\frac{P}{N}, \tag{17.}$$

so verschwindet P für alle Werthe

$$u=\pm v+2\mu\frac{\tilde{\omega}}{n}+2\nu\tilde{\omega}',$$

und nach Ausscheidung der congruenten unter diesen für

$$\wp u=\wp\left(v+\frac{2\lambda\tilde{\omega}}{n}\right) \qquad (\lambda=0,1,\ldots n-1).$$

Demnach muss, da P nach (8.) und (11.) vom n^{ten} Grade ist,

$$P=\prod_{\nu=0}^{n-1}\left(\wp u-\wp\left(v+\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right) \tag{18.}$$

sein; denn die multiplicative Constante ergiebt sich gleich Eins bei der Entwickelung der Formel (17.) und Beibehaltung von u^{-2}.

Für den genannten Zweck werde dieser Ausdruck auf

$$v=\frac{\tilde{\omega}}{n}, \quad \frac{\tilde{\omega}}{n}+\tilde{\omega}', \quad \tilde{\omega}'$$

angewendet, wegen

$$\bar{\wp}\frac{\tilde{\omega}}{n}=\bar{e}_\alpha, \quad \bar{\wp}\left(\frac{\tilde{\omega}}{n}+\tilde{\omega}'\right)=\bar{e}_\beta, \quad \bar{\wp}\tilde{\omega}'=\bar{e}_\gamma.$$

Es sei dann

$$\bar{\wp} u-\bar{e}_\alpha=\frac{P_1}{N},$$

$$\bar{\wp} u-\bar{e}_\beta=\frac{P_2}{N},$$

$$\bar{\wp} u-\bar{e}_\gamma=\frac{P_3}{N}.$$

Bei ungeradem n ist

$$N=M^2,$$

wo

$$M=\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\wp u-\wp\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right),$$

ferner

$$\begin{aligned}
P_1 &= \prod_{\nu=0}^{n-1}\left(\wp u-\wp\left(\frac{\tilde{\omega}}{n}+\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right)\\
&= \left(\wp u-\wp\left(\frac{\tilde{\omega}}{n}+\frac{(n-1)\tilde{\omega}}{n}\right)\right)\prod_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}}\left(\wp u-\wp\frac{(2\nu+1)\tilde{\omega}}{n}\right)\cdot\prod_{\nu=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\left(\wp u-\wp\frac{(2\nu+1)\tilde{\omega}}{n}\right)\\
&= (\wp u-e_\alpha)\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\wp u-\wp\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right)\cdot\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\wp u-\wp\frac{(2n-2\nu+1)\tilde{\omega}}{n}\right)\\
&= (\wp u-e_\alpha)\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\wp u-\wp\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right)^2\\
&= (\wp u-e_\alpha)M_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \prod_{\nu=0}^{n-1}\left(\wp u-\wp\left(\frac{\tilde{\omega}}{n}+\tilde{\omega}'+\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right)\\
&= (\wp u-\wp(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}'))\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\wp u-\wp\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}+\tilde{\omega}'\right)\right)^2\\
&= (\wp u-e_\beta)M_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3 &= \prod_{\nu=0}^{n-1}\left(\wp u-\wp\left(\tilde{\omega}'+\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right)\\
&= (\wp u-\wp\tilde{\omega}')\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(\wp u-\wp\left(\tilde{\omega}'+\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right)\\
&= (\wp u-e_\gamma)\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\wp u-\wp\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}+\tilde{\omega}'\right)\right)^2\\
&= (\wp u-e_\gamma)M_3^2,
\end{aligned}$$

also z. B.

$$\bar{\wp} u-\bar{e}_\alpha=\left(\frac{\bar{\sigma}_\alpha u}{\sigma u}\right)^2=(\wp u-e_\alpha)\frac{M_1^2}{M^2}=\left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2\frac{M_1^2}{M^2}.$$

Zieht man die Quadratwurzel und bestimmt das Vorzeichen aus den Anfangsgliedern, so findet man

$$\frac{\bar{\sigma}_\alpha u}{\sigma u}=\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\frac{M_1}{M},$$

und ebenso

$$\frac{\bar\sigma_\beta u}{\bar\sigma u} = \frac{\sigma_\beta u}{\sigma u}\,\frac{M_2}{M},$$
$$\frac{\bar\sigma_\gamma u}{\bar\sigma u} = \frac{\sigma_\gamma u}{\sigma u}\,\frac{M_3}{M}.$$

Nun ist nach (14.)

$$\bar\sigma u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma^n u \,.\, M,$$

folglich wird

$$\bar\sigma_\alpha u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma^{n-1}u\,\sigma_\alpha u\,.\,M_1,$$
$$\bar\sigma_\beta u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma^{n-1}u\,\sigma_\beta u\,.\,M_2,$$
$$\bar\sigma_\gamma u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma^{n-1}u\,\sigma_\gamma u\,.\,M_3.$$

Die hierin enthaltenen Ausdrücke M, M_1, M_2, M_3 lassen sich in verschiedenen Formen schreiben. Eine besonders wichtige Darstellung erhält man, wenn man aus

$$\wp u - e_\lambda = \left(\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}\right)^2, \quad \wp v - e_\lambda = \left(\frac{\sigma_\lambda v}{\sigma v}\right)^2$$

die Relation

$$\wp u - \wp v = \left(\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_\lambda v}{\sigma v}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}\right)^2\left(1 - \frac{\sigma_\lambda^2 v}{\sigma^2 v}\,\frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}\right)$$

ableitet und auf die in $M, \ldots$ vorkommenden Argumente v anwendet:

$$\bar\sigma u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma u\,\sigma_\lambda^{n-1}u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\sigma_\lambda^2\left(\frac{2\nu\tilde\omega}{n}\right)}{\sigma^2\left(\frac{2\nu\tilde\omega}{n}\right)}\,\frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}\right)$$

$$\bar\sigma_\alpha u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma_\alpha u\,\sigma_\lambda^{n-1}u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\sigma_\lambda^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde\omega}{n}\right)}{\sigma^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde\omega}{n}\right)}\,\frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}\right)$$

(19.)

$$\bar\sigma_\beta u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma_\beta u\,\sigma_\lambda^{n-1}u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\sigma_\lambda^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde\omega}{n}+\tilde\omega'\right)}{\sigma^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde\omega}{n}+\tilde\omega'\right)}\,\frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}\right)$$

$$\bar\sigma_\gamma u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma_\gamma u\,\sigma_\lambda^{n-1}u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\sigma_\lambda^2\left(\frac{2\nu\tilde\omega}{n}+\tilde\omega'\right)}{\sigma^2\left(\frac{2\nu\tilde\omega}{n}+\tilde\omega'\right)}\,\frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}\right).$$

Auch hier sieht man unmittelbar, dass die Vorzeichen richtig bestimmt sind.

Für gerades n hat man

$$N = (\wp u - e_\alpha)\,\overline{M}^2,$$

wo

$$\overline{M} = \prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(\wp u - \wp\frac{2\nu\tilde\omega}{n}\right).$$

Ferner wird

$$\begin{aligned}
P_1 &= \prod_{\nu=0}^{n-1}\left(\wp u - \wp\left(\frac{\tilde\omega}{n} + \frac{2\nu\tilde\omega}{n}\right)\right)\\
&= \prod_{\nu=1}^{n}\left(\wp u - \wp\frac{(2\nu-1)\tilde\omega}{n}\right)\\
&= \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}}\left(\wp u - \wp\frac{(2\nu-1)\tilde\omega}{n}\right)\cdot\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}}\left(\wp u - \wp\frac{(2n-2\nu+1)\tilde\omega}{n}\right)\\
&= \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}}\left(\wp u - \wp\frac{(2\nu-1)\tilde\omega}{n}\right)^2\\
&= \overline{M}_1^2,\\
P_2 &= \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}}\left(\wp u - \wp\left(\frac{(2\nu-1)\tilde\omega}{n} + \tilde\omega'\right)\right)^2\\
&= \overline{M}_2^2,\\
P_3 &= (\wp u - \wp\tilde\omega')(\wp u - \wp(\tilde\omega' + \tilde\omega))\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(\wp u - \wp\left(\frac{2\nu\tilde\omega}{n} + \tilde\omega'\right)\right)\cdot\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}+1}\left(\wp u - \wp\left(\frac{2\nu\tilde\omega}{n} + \tilde\omega'\right)\right)\\
&= (\wp u - e_\beta)(\wp u - e_\gamma)\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(\wp u - \wp\left(\frac{2\nu\tilde\omega}{n} + \tilde\omega'\right)\right)^2\\
&= (\wp u - e_\beta)(\wp u - e_\gamma)\,\overline{M}_3^2.
\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln folgt jetzt

$$\frac{\bar\sigma_\alpha u}{\bar\sigma u} = \frac{\sigma u}{\sigma_\alpha u}\,\frac{\overline{M}_1}{\overline{M}},$$
$$\frac{\bar\sigma_\beta u}{\bar\sigma u} = \frac{\sigma u}{\sigma_\alpha u}\,\frac{\overline{M}_2}{\overline{M}},$$
$$\frac{\bar\sigma_\gamma u}{\bar\sigma u} = \frac{\sigma u}{\sigma_\alpha u}\,\frac{\sigma_\beta u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_\gamma u}{\sigma u}\,\frac{\overline{M}_3}{\overline{M}},$$

und da (15.) in der Gestalt

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma^{n-1} u \, \sigma_\alpha u \, . \, \bar{M}$$

geschrieben werden kann, so ist

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\alpha u &= e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma^n u \, . \, \bar{M}_1, \\ \bar{\sigma}_\beta u &= e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma^n u \, . \, \bar{M}_2, \\ \bar{\sigma}_\gamma u &= e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma^{n-2} u \, \sigma_\beta u \, \sigma_\gamma u \, . \, \bar{M}_3. \end{aligned}$$

Dieselbe Veränderung wie oben liefert

$$(20.) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma} u &= e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma u \, \sigma_\alpha u \, \sigma_\lambda^{n-2} u \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(1 - \frac{\sigma_\lambda^2 \left(\frac{2 \nu \tilde{\omega}}{n} \right)}{\sigma^2 \left(\frac{2 \nu \tilde{\omega}}{n} \right)} \frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u} \right) \\ \bar{\sigma}_\alpha u &= e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma_\lambda^n u \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_\lambda^2 \left(\frac{(2\nu-1) \tilde{\omega}}{n} \right)}{\sigma^2 \left(\frac{(2\nu-1) \tilde{\omega}}{n} \right)} \frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u} \right) \\ \bar{\sigma}_\beta u &= e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma_\lambda^n u \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_\lambda^2 \left(\frac{(2\nu-1) \tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}' \right)}{\sigma^2 \left(\frac{(2\nu-1) \tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}' \right)} \frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u} \right) \\ \bar{\sigma}_\gamma u &= e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma_\beta u \, \sigma_\gamma u \, \sigma_\lambda^{n-2} u \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(1 - \frac{\sigma_\lambda^2 \left(\frac{2 \nu \tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}' \right)}{\sigma^2 \left(\frac{2 \nu \tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}' \right)} \frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u} \right). \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (19.) und (20.) kann die Transformation der σ-Quotienten sofort abgeleitet werden; im Besonderen auch die Formeln, die Jacobi für seine Functionen in den Fundamenten, doch nur für ungerades n, entwickelt hat. Der Index λ in den Formeln ist beliebig, gleich α oder β oder γ. Wählt man ihn so, dass er mit dem links vorkommenden übereinstimmt; und stellt dann zuerst die Formeln (19.) durch Division zusammen, so erhält man den wichtigen Satz, dass jeder σ-Quotient $\bar{\varphi}(u)$, der aus einem gegebenen $\varphi(u)$ durch primitive Transformation ungerader Ordnung hervorgeht, sich rational durch $\varphi(u)$ ausdrücken lässt.

Für gerades n ändert sich dies etwas. Man kann dann nicht immer behaupten, dass $\bar{\varphi}(u)$ eine rationale Function von $\varphi(u)$ allein ist. Es werde die letzte Formel (20.) betrachtet und darin etwa $\lambda = \alpha$ gesetzt, ebenso in der ersten, dann die erste durch die letzte dividirt, so ergiebt sich

$$\frac{\bar{\sigma} u}{\bar{\sigma}_\gamma u} = \frac{\sigma u \, \sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u \, \sigma_\gamma u} R\left(\left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} \right)^2 \right).$$

Die rationale Function R ist auch als rational in $\frac{\sigma u}{\sigma_\gamma u}$ aufzufassen, weil die Quadrate der σ-Quotienten rational durch einander ausdrückbar sind. Der Factor kann geschrieben werden:

$$\frac{\sigma u \, \sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u \, \sigma_\gamma u} = \frac{\sigma u}{\sigma_\gamma u} \frac{\sigma_\gamma^2 u}{\sigma_\beta^2 u} \frac{\sigma_\alpha u \, \sigma_\beta u}{\sigma_\gamma^2 u}.$$

In Folge von S. 97 (6.) wird dann

$$\frac{\bar{\sigma} u}{\bar{\sigma}_\gamma u} = \bar{R}\left(\frac{\sigma u}{\sigma_\gamma u} \right) \frac{d}{du} \frac{\sigma u}{\sigma_\gamma u},$$

d. h. für $\varphi(u) = \frac{\sigma u}{\sigma_\gamma u}$ lässt sich die transformirte Function $\bar{\varphi}(u)$ rational durch $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ darstellen.

Die Formeln (19.) und (20.) können auch dazu benutzt werden, die Werthe der Grössen $\bar{e}_\lambda$ für die transformirten Functionen durch die ursprünglichen auszudrücken. Man bildet zu diesem Zweck die Entwickelungen

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda u &= 1 - \tfrac{1}{2} e_\lambda u^2 + \cdots, \\ \bar{\sigma}_\lambda u &= 1 - \tfrac{1}{2} \bar{e}_\lambda u^2 + \cdots \end{aligned}$$

und behält die Coefficienten von u^2 bei. Die noch auftretende Grösse G_1 kann durch Subtraction eliminirt werden, denn man braucht wegen der Identität

$$\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = 0$$

nur die Differenzen der Grössen $\bar{e}_\lambda$ zu berechnen.

Dreiunddreissigstes Kapitel.

Zur Transformation der $\wp$-Function.

In der Formel S. 290 (4.) war $2\tilde{\omega}$ eine beliebige primitive Periode. Es scheint daher auf den ersten Anblick, dass die Anzahl der durch Transformation aus einer gegebenen $\wp$-Function hervorgehenden Functionen unendlich gross sein müsste. Allein in der Darstellung von $2\tilde{\omega}$ durch ein spezielles primitives Periodenpaar,

$$2\tilde{\omega} = 2\lambda\omega + 2\mu\omega',$$

dürfen die ganzen Zahlen λ und μ nach dem Modul n reducirt werden, wie die Formel (4.) selbst lehrt. Von den Zahlenpaaren, die dadurch entstehen, dass λ und μ unabhängig von einander die Werthe $0, 1, \ldots n-1$ durchlaufen, sind ausser $(0, 0)$ alle diejenigen wegzulassen, deren Bestandtheile einen gemeinsamen Factor haben. Denn solche Paare können keine Periode liefern, die mit einer anderen zusammen ein primitives Periodenpaar bildet.

Aber die Anzahl kann noch weiter verringert werden. Wir ersetzen die Annahme, dass λ und μ keinen gemeinsamen Theiler haben sollen, durch die allgemeinere, dass sie keinen gemeinsamen Theiler mit n haben. Zuerst soll gezeigt werden, dass sich jedem Zahlenpaare (λ', μ') von dieser Beschaffenheit ein anderes (λ, μ) so zuordnen lässt, dass λ und μ relative Primzahlen sind. Es sei

$$\lambda' = \lambda_0 r, \quad \mu' = \mu_0 r,$$

wo also λ_0, μ_0 und r zu n relativ prim sind. An Stelle von

$$w = \frac{2\lambda'\omega + 2\mu'\omega'}{n}$$

werde

$$w' = w + 2s\omega$$

eingeführt, wo s eine passend zu bestimmende ganze Zahl bedeutet. In

$$w' = \frac{2(\lambda_0 r + ns)\omega + 2\mu_0 r\omega'}{n}$$

kann man s immer so wählen, dass $\lambda_0 r + ns$ und $\mu_0 r$ keinen gemeinsamen Theiler haben. In dem Ausdruck

$$w' = \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}$$

sind dann λ und μ Zahlen von der verlangten Beschaffenheit. Die Bestimmung von s ist möglich, weil $\lambda_0 r, \mu_0 r$ und n nicht alle drei einen gemeinsamen Theiler haben.

Dass man hierbei sämmtliche Zahlenpaare (λ, μ) erhalten muss, ist klar; denn die Paare, die überhaupt keinen gemeinsamen Theiler haben, sind bereits unter denen enthalten, die keinen Theiler mit n gemein haben. Doch könnte es sein, dass man bei der Reduction nach dem Modul n zwei Zahlen, die relativ prim sind, mehrmals erhielte. Man wird also bei der Anwendung der Grössen w, die zu den Paaren (λ', μ') gehören, darauf zu sehen haben, dass nur von einander verschiedene transformirte $\wp$-Functionen auftreten.

Um eine deutliche Übersicht über die Grössen w dieser Art zu gewinnen hat man vor allem noch zu beachten, dass die transformirte $\wp$-Function ungeändert bleibt, falls man w durch kw ersetzt, wenn nur k irgend eine ganze Zahl bedeutet, die zu n relativ prim ist. Zunächst ist kw wieder von der Form $\frac{2\lambda'\omega + 2\mu'\omega'}{n}$. Bei der Bildung der Summen $\sum\wp(u - \nu w)$ und $\sum\wp(\nu w)$ nach S. 290 (4.) tritt $k\nu$ an die Stelle von ν. Setzt man nun

$$k\nu = qn + \nu'$$

und nimmt für ν der Reihe nach die Werthe $0, 1, \ldots n-1$, so durchläuft ν' dieselben Werthe, abgesehen von der Reihenfolge, während das aus qn herrührende Vielfache von $2\tilde{\omega}$ nicht in Betracht kommt. Die Summen ändern sich also durch die Substitution von kw für w nicht. Eine Grösse w_1 soll nun als zu w gehörig bezeichnet werden, wenn w_1 einem solchen kw gleich oder congruent ist. Dann lässt sich beweisen, dass auch umgekehrt w zu w_1 gehört.

Es sei

$$w_1 \equiv k_1 w,$$

sodass

$$k w_1 \equiv k k_1 w$$

ist. Die ganze Zahl k und eine zweite k' können, weil k_1 relativ prim zu n ist, so gewählt werden, dass

$$k k_1 - k' n = 1,$$

also

$$k w_1 \equiv w + k' n w \equiv w + k' . 2\bar{\omega},$$

d. h., wie behauptet,

$$k w_1 \equiv w$$

ist. Hiernach kann man w und w_1 als zusammengehörig bezeichnen.

Sind zwei Grössen w_1, w_2 einer dritten zugehörig, so sind sie zusammengehörig. Denn ist

$$w_1 = k_1 w, \quad w_2 = k_2 w$$

und wird nach dem eben Bewiesenen

$$w = k w_1$$

gesetzt, so findet sich

$$w_2 = k_2 k w_1.$$

Fassen wir jetzt die Reihe aller Grössen w in's Auge, wie sie auf S. 302 definirt worden sind, und bezeichnen eine dieser Grössen mit w_1, ferner mit $k_1, k_2, \dots k_r$ alle Zahlen, die kleiner als n und zu n relativ prim sind, so ist $k_\varrho w_1$ $(\varrho = 1, 2, \dots r)$ wieder einer Grösse w gleich oder congruent. Unter den Zahlen k_ϱ ist die Eins enthalten, sie sei mit k_r bezeichnet. Dann entspringen also aus einem gegebenen w_1 r Grössen der Art, dass

$$w_1, \; k_1 w_1, \; \dots \; k_{r-1} w_1,$$

in den Ausdruck der transformirten $\wp$-Function eingeführt, sämmtlich dieselbe Function liefern. Diese r Grössen sind auch wirklich von einander verschieden. Denn wäre

$$k_\alpha w_1 \equiv k_\beta w_1, \qquad (\alpha \gtrless \beta)$$

so müsste

$$\frac{(k_\alpha - k_\beta)(2\lambda'\omega + 2\mu'\omega')}{n}$$

eine Periode, d. h. $(k_\alpha - k_\beta)\lambda'$ und $(k_\alpha - k_\beta)\mu'$ durch n theilbar sein. Und da λ' und μ' mit n keinen gemeinsamen Theiler haben, so müsste $k_\alpha - k_\beta$ durch n theilbar sein, was nicht angeht, weil k_α und k_β kleiner als n sind.

Dagegen muss jedes zu w_1 gehörige w einer Grösse der vorstehenden Reihe gleich oder congruent sein. Es sei k irgend eine Zahl, die zu n relativ prim ist, und

$$k w_1 \equiv w'.$$

Man setze

$$k = l n + k',$$

wo k' relativ prim zu n und kleiner als n, so wird

$$w' \equiv (l n + k') w_1 \equiv k' w_1;$$

hier ist k' in der Reihe $1, k_1, \dots k_{r-1}$ enthalten.

Wenn nun w_1 und die hieraus abgeleitete Reihe von $r-1$ Grössen nicht sämmtliche incongruenten Grössen w erschöpfen, so sei w_2 eine neue Grösse dieser Art, die demnach nicht zu w_1 gehört. Es entsteht wie vorher eine neue Reihe zusammengehöriger Grössen

$$w_2, \; k_1 w_2, \; \dots \; k_{r-1} w_2,$$

die sämmtlich mitzuzählen sind. Denn dass keine Grösse $k_\varrho w_2$ zu w_1 gehören kann, ist leicht zu sehen. Wäre dies der Fall, so würde auch w_1 zu $k_\varrho w_2$ gehören; und da für w_2 dasselbe gilt, so würde auch w_2 zu w_1 gehören.

Enthalten auch die beiden aus w_1 und w_2 abgeleiteten Reihen zusammen noch nicht alle Grössen w, so nehme man eine neue w_3 an, die weder zu w_1 noch zu w_2 gehört, und bilde aus ihr $r-1$ andere Grössen, die von einander und von denen der beiden ersten Reihen verschieden sind. Die Gesammtanzahl N der Grössen w zerfällt so in Gruppen von je r und ist demnach durch r theilbar,

$$N = r r'. \tag{1.}$$

Um hieraus schliessen zu können, dass die Anzahl der verschiedenen transformirten $\wp$-Functionen gleich r' ist, muss man sich überzeugen, dass von den Functionen, die aus den r' Grössen $w_1, w_2, \dots$ entstehen, keine zwei einander gleich sind. Die zu w_α und w_β gehörenden $\wp$-Functionen haben die Unendlichkeitsstellen $p w_\alpha + 2q\tilde{\omega}'$ und $p' w_\beta + 2q'\tilde{\omega}'$. Sollen sie übereinstimmen, so muss z. B. w_β einem Vielfachen von w_α congruent sein, und zwar, nach der Definition der Grössen w überhaupt, einem solchen Vielfachen, in dem der Multiplicator relativ prim zu n ist. w_β müsste also dann zu w_α gehören.

Nun ist die Zahl r, die Anzahl der relativen Primzahlen zu n, die kleiner als n sind, aus der Zahlentheorie bekannt. Sind $a, b, c, \dots$ die verschiedenen in n enthaltenen Primfactoren, und

$$n = a^\lambda b^\mu c^\nu \dots,$$

so ist

$$(2.)\quad r = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots = a^\lambda\left(1-\frac{1}{a}\right)b^\mu\left(1-\frac{1}{b}\right)c^\nu\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots.$$

Zu bestimmen bleibt die Zahl N, die Anzahl der Paare von Zahlen λ', μ', die kleiner als n sind und mit n keinen gemeinsamen Theiler haben. Man setze, vorläufig ohne Rücksicht darauf, ob λ' und μ' kleiner als n sind oder nicht,

$$\frac{\lambda'}{n} = \lambda_0 + \left(\frac{a_0}{a^\lambda} + \frac{a_1}{a^{\lambda-1}} + \dots + \frac{a_{\lambda-1}}{a}\right) + \left(\frac{b_0}{b^\mu} + \frac{b_1}{b^{\mu-1}} + \dots + \frac{b_{\mu-1}}{b}\right) + \cdots,$$

$$\frac{\mu'}{n} = \mu_0 + \left(\frac{a'_0}{a^\lambda} + \frac{a'_1}{a^{\lambda-1}} + \dots + \frac{a'_{\lambda-1}}{a}\right) + \left(\frac{b'_0}{b^\mu} + \frac{b'_1}{b^{\mu-1}} + \dots + \frac{b'_{\mu-1}}{b}\right) + \cdots,$$

wo $a_0, a_1, \dots a_{\lambda-1}$ kleiner als a; $b_0, b_1, \dots b_{\mu-1}$ kleiner als b; u. s. f. Sollten λ und μ' einen gemeinsamen Theiler mit n haben, so müsste das einer der Primfactoren $a, b, c, \dots$ von n sein oder allgemein ein Product von Potenzen dieser Primfactoren. Aus

$$\lambda' = n\lambda_0 + \frac{n}{a^\lambda}(a_0 + a_1 a + \dots + a_{\lambda-1}a^{\lambda-1}) + \cdots,$$

$$\mu' = n\mu_0 + \frac{n}{a^\lambda}(a'_0 + a'_1 a + \dots + a'_{\lambda-1}a^{\lambda-1}) + \cdots$$

sieht man, dass wenn a_0 und a'_0 gleich Null sind, λ' und μ' den Factor a haben. Ist aber z. B. a_0 von Null verschieden, so kann a kein Theiler von λ' sein; denn sämmtliche Glieder bis auf $\frac{n}{a^\lambda}a_0$ sind von vornherein durch a theilbar, $\frac{n}{a^\lambda}$ aber nicht, weil a^λ die höchste in n enthaltene Potenz von a, und a_0 ebensowenig, weil es kleiner als a ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass λ' den Theiler a mit n gemein hat, ist also $a_0 = 0$. Sie ist auszuschliessen, wenn λ', wie gefordert, zu n relativ prim sein soll. Im übrigen können $a_0, a_1, \dots a_{\lambda-1}$ unabhängig von einander alle Werthe

$0, 1, \dots a$ annehmen, was im ganzen a^λ Werthsysteme liefert. Für $a'_0, a'_1, \dots a'_{\lambda-1}$ gilt dasselbe, und da λ' und μ' zu einem Zahlenpaar vereinigt werden sollen, so ist jedes Werthsystem $(a_0, \dots a_{\lambda-1})$ mit jedem Werthsystem $(a'_0, \dots a'_{\lambda-1})$ zusammenzustellen; das sind im Ganzen $a^{2\lambda}$ Möglichkeiten. Von diesen sind alle, die zu $a_0 = 0$, $a'_0 = 0$ gehören, abzuziehen, also, da $a_1, \dots a_{\lambda-1}$, $a'_1, \dots a'_{\lambda-1}$ wieder je a Werthe annehmen, $a^{2(\lambda-1)}$ Systeme. Es bleiben

$$a^{2\lambda} - a^{2\lambda-2} = a^{2\lambda}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)$$

Combinationen übrig. Ebenso $b^{2\mu}\left(1-\frac{1}{b^2}\right)$ Combinationen, wenn λ' und μ' nicht durch b theilbar sein sollen, u. s. w. Die Gesammtheit aller für die Herstellung von Grössen w möglichen Annahmen ist

$$a^{2\lambda}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)b^{2\mu}\left(1-\frac{1}{b^2}\right)c^{2\nu}\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\cdots.$$

Es fragt sich aber noch, ob diese bei der Reduction nach dem Modul n wirklich verschiedene Zahlenpaare liefern. Wird

$$\lambda' = n\lambda_0 + \frac{nA}{a^\lambda} + \frac{nB}{b^\mu} + \cdots,$$

$$\bar{\lambda}' = n\bar{\lambda}_0 + \frac{n\bar{A}}{a^\lambda} + \frac{n\bar{B}}{b^\mu} + \cdots$$

gesetzt, und soll

$$\lambda' \equiv \bar{\lambda}' \mod n$$

sein, so heisst das, es ist

$$(A-\bar{A})b^\mu c^\nu \cdots + (B-\bar{B})a^\lambda c^\nu \cdots + \cdots$$

durch $a^\lambda b^\mu c^\nu \dots$ theilbar. Alle Glieder bis auf das erste sind durch a^λ theilbar, folglich muss $A-\bar{A}$ durch a^λ theilbar sein. Es ist aber

$$A = a_0 + a_1 a + \dots + a_{\lambda-1}a^{\lambda-1} < a^\lambda,$$

und ebenso $\bar{A}$, mithin kann nur $A = \bar{A}$ sein, und ebenso $B = \bar{B}, \dots$. Immer gilt das Gleiche für μ'. Das heisst: Wenn die Coefficientensysteme in den Zahlenpaaren (λ', μ') und $(\bar{\lambda}', \bar{\mu}')$ verschieden sind, wie es angenommen worden ist, so kommt man auch bei der Reduction nach dem Modul n zu verschiedenen Zahlenpaaren. Deren Anzahl ist demnach gleich der eben ermittelten,

$$(3.)\quad N = a^{2\lambda}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)b^{2\mu}\left(1-\frac{1}{b^2}\right)c^{2\nu}\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\cdots.$$

Die Anzahl der verschiedenen $\wp$-Functionen, die aus einer gegebenen durch primitive Transformation n^{ter} Ordnung entstehen, war

$$r' = \frac{N}{r}.$$

Demnach wird schliesslich

$$r' = a^{\lambda}\left(1+\frac{1}{a}\right)b^{\mu}\left(1+\frac{1}{b}\right)c^{\nu}\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots \tag{4.}$$

Ist die Ordnung n eine Primzahl a, also $\lambda = 1$, $\mu = \nu = \cdots = 0$, so hat man

$$r' = a+1. \tag{5.}$$

Dass die primitiven Transformationen von zusammengesetzter Ordnung sich auf solche von Primzahlordnung zurückführen lassen, erkennt man unmittelbar. Es sei

$$n = n_1 n_2,$$

so wird

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n_1 n_2}, \tilde{\omega}'\right) = R_1\left(\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n_2}, \tilde{\omega}'\right)\right),$$

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n_2}, \tilde{\omega}'\right) = R_2(\wp(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')),$$

also

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n_1 n_2}, \tilde{\omega}'\right) = R\,(\wp(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')),$$

wo R bekannt ist, sobald R_1 und R_2 bestimmt sind. Zerlegt man nun n_1 und n_2, wenn sie zusammengesetzt sind, weiter, so kann man bis zu den Primfactoren von n hinabsteigen.

Hierbei tritt hinsichtlich der Anzahl der transformirten Functionen eine kleine Schwierigkeit auf. Wenn man bis zu einer Primzahlpotenz gekommen ist, z. B. $n_1 = a^2$, und nun die transformirten Functionen dadurch herstellen will, dass man der Reihe nach zwei Transformationen a^{ter} Ordnung anwendet, so erhält man aus jeder der $a+1$ Functionen, die durch die erste Transformation entstehen, $a+1$ neue, sodass die Gesammtanzahl $(a+1)^2$ wird, während nach der allgemeinen Formel (4.) nur

$$a^2\left(1+\frac{1}{a}\right) = a^2+a$$

herauskommen können. Es erscheinen also $a+1$ Functionen zuviel. Dies findet seine Erklärung darin, dass nicht alle Functionen, die die zweimalige Transformation a^{ter} Ordnung liefert, als solche zu betrachten sind, die auch durch Transformation der Ordnung a^2 entstehen. Wendet man nämlich die ursprüngliche Definition einer primitiv-transformirten Function — wonach eine beliebige Periode durch a getheilt wird, während die andere ungeändert bleibt — auf eine Function der ersten Reihe

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{a}, \tilde{\omega}'\right)$$

an, für welche $2\tilde{\omega}'$ eine Periode ist, so erhält man u. a.

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{a}, \frac{\tilde{\omega}'}{a}\right).$$

Es ist aber

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{a}, \frac{\tilde{\omega}'}{a}\right) = a^2\wp(au\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'). \tag{6.}$$

Diese Function gehört nicht zu den gesuchten, denn sie entsteht nicht dadurch aus der gegebenen, dass eine Periode durch a^2 getheilt, die andere ungeändert gelassen wird. Vielmehr sind beide Perioden ungeändert geblieben, das Argument aber mit a multiplicirt worden. Bei der ersten Transformation erhält man sicher $a+1$ transformirte Functionen, dann aus jeder von diesen mindestens eine, in der, bei ungeänderten Perioden, das Argument u durch au ersetzt ist. Auf diese Weise würde man

$$(a+1)^2-(a+1) = a^2+a$$

transformirte Functionen der Ordnung a^2 bekommen. Da man aber schon weiss, dass dies die richtige Anzahl ist, so hat man zu schliessen, dass aus jeder Function der ersten Reihe nur eine einzige Function hervorgeht, die nicht zu den gesuchten zu rechnen ist.

Die schon öfters benutzte Gleichung (6.) enthält den Satz, dass zwei primitive Transformationen derselben Ordnung, nacheinander auf jede der Perioden angewendet, zur Multiplication führen.

Sind die Factoren von n relativ prim, so tritt der eben gekennzeichnete Umstand nicht ein, sondern jede transformirte Function der ersten Reihe liefert wirklich eine transformirte Function der zusammengesetzten Ordnung.

Es sei

$$n_1 = a_1^{\lambda_1} b_1^{\mu_1} \ldots,$$
$$n_2 = a_2^{\lambda_2} b_2^{\mu_2} \ldots.$$

Die Anzahl primitiv-transformirter Functionen der Ordnung n_1 ist

$$n_1\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\cdots.$$

Aus jeder gehen durch Transformation der Ordnung n_2

$$n_2\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots$$

Functionen hervor. Das Product liefert, da $a_2, b_2, \ldots$ sämmtlich von $a_1, b_1, \ldots$ verschieden sind,

$$n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots$$

Functionen, also die richtige Anzahl.

Die vollständige Lösung des Transformationsproblems kommt auf die Bildung einer Function

$$\prod_\nu \left(\wp u - \wp\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)$$

hinaus (S. 291, 292). Verschwindet diese Function, so wird die transformirte $\wp$-Function unendlich gross. Andererseits wird für $u = \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}$ auch $\wp(nu\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ unendlich. Demnach müssen die Werthe $\wp(\nu w)$ unter den Wurzeln der Theilungsgleichung enthalten sein, die man erhält, wenn man in den Formeln des Multiplicationstheorems (S. 215, 216) den Nenner gleich Null setzt.

Bei der Möglichkeit, eine beliebige Transformation auf primitive, eine primitive Transformation von zusammengesetzter Ordnung auf solche von Primzahlordnung zurückzubringen, braucht man die eben genannte Function nur für n gleich 2 und gleich einer beliebigen ungeraden Primzahl zu kennen. Bei der wirklichen Durchführung der Transformation ist darauf zu achten, dass überall die Functionen weggelassen werden, die nicht mit einer Transformation höherer Ordnung, sondern mit der Multiplication zusammenhängen (S. 309).

Für $n = 2$ werden die Formeln sehr einfach, und man kann sich sofort auf die transformirte Function $\bar{\wp}u$ selbst beziehen, ohne erst $\bar{\sigma}u$ zu benutzen.

Nach S. 290 (4.) wird

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{2}, \tilde{\omega}'\right) = \wp u + \wp(u-\tilde{\omega}) - \wp\tilde{\omega},$$

d. h.

$$\bar{\wp}u = \wp u + \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha}, \tag{7.}$$

eine rationale Function zweiten Grades (vgl. S. 292 (11.)). Setzt man $\alpha = 1, 2, 3$, so erhält man drei transformirte Functionen, wie es nach S. 308 (5.) sein muss.

Für ungerades n, gleichgiltig ob Primzahl oder nicht, sei

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} (s - \wp(\nu w)) = \varphi(s). \tag{8.}$$

Die Frage nach der Herstellung dieser Function soll nicht unter der Voraussetzung discutirt werden, dass die Periode, deren n^{ter} Theil gleich w ist, gegeben ist; das Hauptaugenmerk wird vielmehr auf die Ordnung n der Transformation selbst gerichtet, also hier auf die Gesammtheit aller verschiedenen Functionen $\varphi(s)$, die bei der n-Theilung irgend einer Periode entstehen.

Es sei

$$w_1,\ w_2,\ \ldots\ w_{r'}$$

(S. 305) ein vollständiges System von Grössen w, deren keine zwei zusammengehören. Multiplicirt man sie mit den Zahlen

$$k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_r,$$

die relativ prim zu n und kleiner als n sind, so erhält man das System

$$\begin{array}{llll} k_1 w_1, & k_2 w_1, & \ldots & k_r w_1, \\ k_1 w_2, & k_2 w_2, & \ldots & k_r w_2, \\ . & . & . & . \\ k_1 w_{r'}, & k_2 w_{r'}, & \ldots & k_r w_{r'} \end{array}$$

von der Beschaffenheit, dass keine darin vorkommende Grösse einer anderen congruent ist, dass aber jedes w, das es überhaupt giebt, einer von ihnen congruent ist. Betrachtet man demnach den Ausdruck $\wp w$, so kann dieser höchstens so viele Werthe haben, wie Grössen w in diesem Systeme enthalten sind. Nun ist, wenn $k_\varrho < n$ und relativ prim zu n, auch $n - k_\varrho$ eine

Zahl derselben Eigenschaft, und man hat

$$\wp((n-k_\varrho)w) = \wp(k_\varrho w),$$

d. h. die in dem System enthaltenen Grössen lassen sich paarweise so zusammenstellen, dass die entsprechenden $\wp$-Functionen einander gleich werden. Bei der Reduction mögen

$$\begin{array}{l} w_1,\ w_1',\ \ldots\ w_1^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}, \\ w_2,\ w_2',\ \ldots\ w_2^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ w_{r'},\ w_{r'}',\ \ldots\ w_{r'}^{\left(\frac{r}{2}-1\right)} \end{array}$$

übrig bleiben; und es sollen die Functionen $\varphi = \varphi(s, \wp w)$ untersucht werden, die durch Einführung aller dieser Grössen für w entstehen. Aus der Definitionsgleichung (8.)

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} (s - \wp(\nu w)) = \varphi(s, \wp w)$$

folgt, dass φ sich nicht ändert, wenn w durch $k_\varrho w$ ersetzt wird, denn es ändert sich dann nur die Folge der Factoren (vgl. S. 304). Demnach ist

$$\begin{array}{l} \varphi(s, \wp w_1) = \varphi(s, \wp w_1') = \cdots = \varphi\left(s, \wp w_1^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}\right) = \varphi_1, \\ \varphi(s, \wp w_2) = \varphi(s, \wp w_2') = \cdots = \varphi\left(s, \wp w_2^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}\right) = \varphi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Die Anzahl dieser Functionen ist gleich r'. Fasst man sie als Wurzeln einer Gleichung vom Grade r' auf, so werden deren Coefficienten ganze symmetrische Functionen von $\wp w_1, \ldots \wp w_{r'}$. Diese Grössen wieder sind Wurzeln einer Gleichung desselben Grades, die mit der Theilungsgleichung in einem leicht erkennbaren Zusammenhange steht. Die Theilungsgleichung entstand durch Nullsetzung des Nenners von $\wp(nu)$ oder des Zählers von $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$ (S. 216). Ihre Wurzeln sind

$$\frac{2\alpha\omega + 2\beta\omega'}{n};$$

ausser den Grössen w liefern sie auch solche Argumente, in denen α und β einen gemeinsamen Theiler mit n haben. Diese können als Wurzeln von

Theilungsgleichungen für kleinere Zahlen n gekennzeichnet werden, denn sie haben nach Weglassung des gemeinsamen Factors die Form

$$\frac{2\alpha'\omega + 2\beta'\omega'}{n'}.$$

Hat man also n in Factoren zerlegt, die Theilungsgleichungen für n selbst und für die Factoren aufgestellt, so hat man die Wurzeln der letzteren Gleichungen, soweit sie zugleich Wurzeln der ersten sind, abzutrennen und weiss dann von vornherein, dass die reducirte Theilungsgleichung vom Grade r' sein muss. Diese Absonderung, die auf die Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzer rationaler Functionen hinauskommt, ist eine rationale Operation. Und da die Coefficienten der Theilungsgleichungen rationale Functionen von g_2 und g_3 sind, so werden auch die Coefficienten der reducirten Theilungsgleichung in g_2 und g_3 rational.

Dies festgestellt, werden auch die Coefficienten der Gleichung, durch die die verschiedenen Functionen φ bestimmt werden, rationale Functionen von g_2 und g_3. Es giebt specielle Methoden, die Rechnung, die auf dem beschriebenen Wege sehr umständlich werden würde, zu vereinfachen. Das Hauptergebniss aber ist, dass die Gleichung für $\varphi(s)$ gleichzeitig mit der Theilungsgleichung als bekannt zu betrachten ist.

Vierunddreissigstes Kapitel.

Die Transformation zweiter Ordnung.

Die einfachste besondere Annahme über die Ordnung der Transformation, $n = 2$, giebt zu verschiedenen bemerkenswerthen Folgerungen Veranlassung. Für

$$\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\bar{\omega}}{2}, \bar{\omega}'\right) = \bar{\wp} u \tag{1.}$$

galt nach S. 311 (7.) die Darstellung

$$\bar{\wp} u = \wp u + \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha}. \tag{2.}$$

Die Grössen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, die zu $\bar{\wp} u$ gehören, werden wegen

$$(\bar{\wp}' u)^2 = 4(\bar{\wp} u - \bar{e}_1)(\bar{\wp} u - \bar{e}_2)(\bar{\wp} u - \bar{e}_3)$$

durch Nullsetzung von $\bar{\wp}' u$ gefunden. Nun ist nach (2.)

$$\bar{\wp}' u = \frac{\wp' u}{(\wp u - e_\alpha)^2}\left((\wp u - e_\alpha)^2 - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\right). \tag{3.}$$

Um also die Gleichung

$$\bar{\wp}' u = 0$$

zu befriedigen, hat man entweder

$$\wp' u = 0,$$

d. h.

$$(\wp u - e_\alpha)(\wp u - e_\beta)(\wp u - e_\gamma) = 0,$$

oder

$$(\wp u - e_\alpha)^2 - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) = 0$$

zu setzen. Nach der Form des Ausdruckes von $\bar{\wp}' u$ ist $\wp u = e_\alpha$ auszuscheiden, und die Annahmen $\wp u = e_\beta$, $\wp u = e_\gamma$ liefern übereinstimmend

$$\bar{e}_\lambda = e_\beta + e_\gamma - e_\alpha = -2e_\alpha.$$

Die beiden anderen gesuchten Grössen folgen aus der zweiten Bedingung:

$$\left.\begin{matrix} \bar{e}_\mu \\ \bar{e}_\nu \end{matrix}\right\} = e_\alpha \pm 2\sqrt{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}.$$

Es seien insbesondere die Grössen e_1, e_2, e_3 reell, und, wie gewöhnlich,

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Dann sind für $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ auch $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ reell und genügen den Bedingungen

$$\bar{e}_\mu > \bar{e}_\nu > \bar{e}_\lambda,$$

wenn $\sqrt{(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)}$ den reellen positiven Werth bedeutet. Wird auch

$$\bar{e}_1 > \bar{e}_2 > \bar{e}_3$$

vorausgesetzt, so hat man also

$$\mu = 1, \quad \nu = 2, \quad \lambda = 3,$$

d. h.

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = e_1 + 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \\ \bar{e}_2 = e_1 - 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \\ \bar{e}_3 = -2e_1 \end{cases} \tag{4.}$$

zu nehmen.

Aus diesen Formeln folgt

$$\begin{cases} \bar{e}_1 - \bar{e}_2 = 4\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_1 - e_2} \\ \bar{e}_1 - \bar{e}_3 = \left(\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_1 - e_2}\right)^2 \\ \bar{e}_2 - \bar{e}_3 = \left(\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2}\right)^2, \end{cases} \tag{5.}$$

also weiter, wenn

$$\sqrt{e_1 - e_3} = a, \quad \sqrt{e_1 - e_2} = b, \tag{6.}$$

$$\tfrac{1}{4}\bar{e}_\alpha = e'_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{7.}$$

$$\sqrt{e'_1 - e'_3} = a', \quad \sqrt{e'_1 - e'_2} = b' \tag{8.}$$

gesetzt wird,

$$\left\{\begin{aligned} a' &= \tfrac{1}{2}(a+b) \\ b' &= \sqrt{ab}. \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

Es ist demnach a' das arithmetische, b' das geometrische Mittel der beiden entsprechenden Grössen a und b.

Diese einfachen Beziehungen regen die Frage an, zu welcher $\wp$-Function e_1', e_2', e_3' gehören. Multiplicirt man für irgend eine $\wp$-Function die Grössen e_α mit $\frac{1}{n^2}$, so kommt das darauf hinaus, g_2 mit $\frac{1}{n^4}$, g_3 mit $\frac{1}{n^6}$ zu multipliciren. Nun ist (S. 44 (12.))

$$\wp(u;\, g_2, g_3) = \frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m};\, m^4 g_2, m^6 g_3\right),$$

also für $m = \frac{1}{n}$:

$$\wp(u;\, g_2, g_3) = n^2 \wp\left(nu;\, \frac{g_2}{n^4}, \frac{g_3}{n^6}\right). \tag{10.}$$

Ferner war (S. 288 (2.))

$$\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right) = n^2 \wp(nu \,|\, \omega, \omega')$$

oder, falls ω, ω' durch $n\omega, n\omega'$ ersetzt werden,

$$\wp(u \,|\, \omega, \omega') = n^2 \wp(nu \,|\, n\omega, n\omega'). \tag{11.}$$

Die Vergleichung von (10.) und (11.) liefert, wenn wieder u für nu, $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$ für ω, ω' geschrieben wird:

$$\wp\left(u;\, \frac{g_2}{n^4}, \frac{g_3}{n^6}\right) = \wp(u \,|\, n\tilde{\omega}, n\tilde{\omega}'). \tag{12.}$$

Wendet man diesen Zusammenhang auf die $\wp$-Function mit dem primitiven Periodenpaar $\left(\frac{2\tilde{\omega}}{n}, 2\tilde{\omega}'\right)$, den Invarianten G_2, G_3 (S. 294) und den Grössen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ an, so sieht man, dass zu

$$e_\alpha' = \frac{1}{n^2}\bar{e}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

die Function

$$\wp(u \,|\, \tilde{\omega}, n\tilde{\omega}')$$

gehört. Diese entsteht also aus der ursprünglichen, $\wp(u \,|\, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$, durch Multiplication einer primitiven Periode mit n, während die andere primitive Periode ungeändert bleibt.

Für $n = 2$ hängt die Function $\wp(u \,|\, \tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ mit der ursprünglichen $\wp(u \,|\, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ in derselben Weise zusammen wie diese mit $\wp\left(u \,|\, \tilde{\omega}, \frac{\tilde{\omega}'}{2}\right)$, nur hat man in der aus (2.) bei Vertauschung von α mit γ folgenden Gleichung

$$\wp\left(u \,|\, \tilde{\omega}, \frac{\tilde{\omega}'}{2}\right) = \wp u + \frac{(e_\alpha - e_\gamma)(e_\beta - e_\gamma)}{\wp u - e_\gamma}$$

die Grössen e_1, e_2, e_3 durch e_1', e_2', e_3' zu ersetzen, um $\wp(u \,|\, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ als rationale Function von $\wp(u \,|\, \tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ darzustellen. Es wird also

$$\wp(u \,|\, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \wp(u \,|\, \tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}') + \frac{(e_\alpha' - e_\gamma')(e_\beta' - e_\gamma')}{\wp(u \,|\, \tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}') - e_\gamma'}, \tag{13.}$$

und speciell für $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ und wenn noch

$$\wp(u \,|\, \omega, 2\omega') = s_1 \tag{14.}$$

gesetzt wird,

$$s = s_1 + \frac{(e_1' - e_3')(e_2' - e_3')}{s_1 - e_3'}. \tag{15.}$$

Da beständig e_1, e_2, e_3 als bekannt gelten sollen, so sind aus dieser Relation noch e_1', e_2', e_3' zu entfernen. Dazu können die Gleichungen (5.) bis (9.) und die aus der letzten Formel (4.) hervorgehende

$$e_3' = -\tfrac{1}{2} e_1$$

dienen. Es ergiebt sich

$$e_2' - e_3' = a'^2 - b'^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$(e_1' - e_3')(e_2' - e_3') = \left(\frac{a^2 - b^2}{4}\right)^2 = \frac{(e_2 - e_3)^2}{16},$$

$$s = s_1 + \frac{1}{16}\,\frac{(e_2 - e_3)^2}{s_1 + \frac{1}{2} e_1}. \tag{16.}$$

Die Gleichung lässt eine andere Deutung zu, wenn auf das Integral erster Art

$$u = \int_\infty^s \frac{-ds}{\sqrt{S}}$$

zurückgegriffen wird. Da nämlich gleichzeitig

$$u = \int_\infty^{s_1} \frac{-ds_1}{\sqrt{S_1}}$$

ist, für

$$S_1 = 4(s_1-e_1')(s_1-e_2')(s_1-e_3'),$$

und ferner vermöge der Relation (16.) $s=\infty$ und $s_1=\infty$ zusammengehören, so kann man sagen, dass das Integral $\int_\infty^s \frac{-ds}{\sqrt{S}}$ durch diese Substitution in $\int_\infty^{s_1} \frac{-ds_1}{\sqrt{S_1}}$ übergeführt wird; oder, was dasselbe ist, dass die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}$$

ein Particularlösung der Form (16.) hat.

Die Fortsetzung dieser Transformation kann zur angenäherten Berechnung eines elliptischen Integrals erster Art zweckmässig verwendet werden. Es sei

$$\wp(u\,|\,\omega, 4\omega') = s_2,$$

so gilt zwischen s_2 und s_1 die Beziehung

$$s_1 = s_2 + \frac{1}{16}\,\frac{(e_2'-e_3')^2}{s_2+\frac{1}{2}e_1'}, \tag{17.}$$

und wenn e_1'', e_2'', e_3'' zu der $\wp$-Function mit den Perioden 2ω, $8\omega'$ gehören und

$$4(s_2-e_1'')(s_2-e_2'')(s_2-e_3'') = S_2$$

gesetzt wird, so ergiebt sich

$$u = \int_\infty^{s_2} \frac{-ds_2}{\sqrt{S_2}}.$$

Werden noch die Grössen a'' und b'' den Formeln (6.) und (8.) entsprechend definirt, so ist

$$a'' = \tfrac{1}{2}(a'+b'),$$
$$b'' = \sqrt{a'b'}.$$

Wie die Kette von Gleichungen, die mit (16.) und (17.) beginnt, weiterzuführen ist, leuchtet unmittelbar ein. Dabei wird der Unterschied zwischen a''' und b''', $a^{(4)}$ und $b^{(4)}$, …, kleiner und kleiner; der gemeinsame Grenzwerth heisst nach Gauss das arithmetisch-geometrische Mittel der beiden Grössen a und b. Wegen

$$a^{(n)} = \sqrt{e_1^{(n)}-e_3^{(n)}},$$
$$b^{(n)} = \sqrt{e_1^{(n)}-e_2^{(n)}}$$

werden beim Übergang zur Grenze die Grössen $e_2^{(n)}$ und $e_3^{(n)}$ einander gleich, das elliptische Integral reducirt sich auf ein elementares, die $\wp$-Functionen, die die Integrationsgrenzen bilden, gehen in trigonometrische Functionen über.

Auf was für Functionen man kommt, wird am deutlichsten, wenn man u durch einen Integralausdruck ersetzt, der die Differenz e_2-e_3 enthält. Es ist der, der am directesten zur Legendreschen Normalform führt,

$$u = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-(e_1-e_3)\xi^2)(1-(e_2-e_3)\xi^2)}}$$

(S. 99). Vermöge dieser Gleichung ist

$$\xi = \frac{\sigma}{\sigma_3}u,$$

und ferner war

$$\left(\frac{\sigma_3}{\sigma}u\right)^2 = \wp u - e_3.$$

Dieselben Schlüsse wie vorher leiten demnach zu dem Ergebniss, dass die Gleichung

$$\int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-(e_1-e_3)\xi^2)(1-(e_2-e_3)\xi^2)}} = \int_0^{\xi_1} \frac{d\xi_1}{\sqrt{(1-(e_1'-e_3')\xi_1^2)(1-(e_2'-e_3')\xi_1^2)}} \tag{18.}$$

in Folge einer Transformation zwischen ξ und ξ_1 stattfindet, die aus (16.) und

$$\frac{1}{\xi^2} = s-e_3, \quad \frac{1}{\xi_1^2} = s_1-e_3' \tag{19.}$$

durch Elimination von s und s_1 hervorgeht. Anstatt diese rein algebraisch auszuführen, wollen wir einen etwas anderen Weg einschlagen, auf dem sich Gelegenheit bietet, die Ausgangsgleichung (16.) in eine interessante Form zu setzen.

Die Auflösung nach s_1 liefert

$$s_1 = \frac{1}{2}s - \frac{1}{4}e_1 + \sqrt{\frac{1}{4}\left(s-\frac{1}{2}e_1\right)^2 + \frac{1}{2}e_1 s - \frac{1}{16}(e_2-e_3)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}e_1 + \sqrt{\left(s+\frac{1}{2}e_1\right)^2 - \frac{1}{4}(e_2-e_3)^2}\right).$$

Hier und im unmittelbar Folgenden sollen die Quadratwurzelwerthe zunächst unbestimmt gelassen werden. Der Radicandus lässt sich in zwei Factoren zerlegen,

$$s+\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}(e_2-e_3) = s-e_3,$$
$$s+\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}(e_2-e_3) = s-e_2.$$

Man erhält dann

$$s_1-e_3' = \frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{2}e_1+\sqrt{(s-e_2)(s-e_3)}\right),$$
$$4(s_1-e_3') = \left(\sqrt{s-e_2}+\sqrt{s-e_3}\right)^2,$$
$$\sqrt{s_1-e_3'} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{s-e_2}+\sqrt{s-e_3}\right).$$

Nunmehr setze man

$$\sqrt{\wp u-e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u$$

und belege die zu s_1 gehörenden σ-Functionen mit einem oberen Index 1; dann folgt schliesslich

$$\frac{\sigma_3^{(1)}}{\sigma^{(1)}}u = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}u+\frac{\sigma_3}{\sigma}u\right). \tag{20.}$$

In dieser Formel ist das Vorzeichen richtig bestimmt, denn die linke und die rechte Seite beginnen mit u^{-1}.

Werden jetzt ξ und ξ_1 vermöge (19.) eingeführt und die Relation

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}u\right)^2-\left(\frac{\sigma_3}{\sigma}u\right)^2+e_2-e_3 = 0$$

benutzt, so ergiebt sich durch Auflösung nach ξ

$$\xi = \frac{\xi_1}{1+\frac{e_2-e_3}{4}\xi_1^2}. \tag{21.}$$

Dies ist die Substitution, die die Gleichung (18.) nach sich zieht.

Setzt man

$$e_2-e_3 = a^2-b^2 = c^2$$

und entsprechend

$$e_2'-e_3' = a'^2-b'^2 = c'^2,$$

so kann man das Ergebniss dahin aussprechen, dass die Gleichung

$$\int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-a^2\xi^2)(1-c^2\xi^2)}} = \int_0^{\xi_1}\frac{d\xi_1}{\sqrt{(1-a'^2\xi_1^2)(1-c'^2\xi_1^2)}}$$

vermöge der speciellen rationalen Substitution

$$\xi = \frac{\xi_1}{1+\frac{c^2}{4}\xi_1^2}$$

stattfindet. Die Grössen a', c' sind dabei mit den ursprünglichen a, c durch die Relationen

$$a' = \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right),$$
$$c' = \frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-c^2}\right)$$

verbunden.

Bei Fortsetzung der Transformation und Übergang zur Grenze tritt schliesslich Null an die Stelle von c, und das elliptische Integral geht in einen Arcussinus über.

Durch eine weitere Veränderung der Bezeichnungen kann man mittels dieser Resultate den von Gauss gefundenen Ausdruck für das arithmetisch-geometrische Mittel ableiten. Einfacher aber gelangt man zu dieser Grösse, wenn man sich der ϑ-Functionen bedient. Es war (S. 172)

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = \vartheta_2(0|\tau),$$
$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2} = \vartheta_3(0|\tau),$$

mithin wird

$$a = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2(0|\tau),$$
$$b = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2(0|\tau).$$

Denn dass hierin die linken Seiten die positiven Werthe der Quadratwurzeln aus e_1-e_3 und e_1-e_2 bedeuten, leuchtet ein.

Der Übergang zu den Grössen e_1', e_2', e_3', d. h. zu a' und b' war gleichbedeutend mit der Multiplication der Periode $2\omega'$ mit Zwei. Wegen

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

ist also

$$a' = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2(0\,|\,2\tau),$$

$$b' = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2(0\,|\,2\tau),$$

und allgemein

$$a^{(n)} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2(0\,|\,2^n\tau),$$

$$b^{(n)} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2(0\,|\,2^n\tau).$$

Nun gelten für

$$h = e^{\tau\pi i} = e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i}$$

die Reihenentwickelungen

$$\vartheta_2(0\,|\,\tau) = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots,$$
$$\vartheta_3(0\,|\,\tau) = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots.$$

Bei der Multiplication von τ mit 2^n tritt h^{2^n} an die Stelle von h und wird wegen $|h| < 1$ mit unbegrenzt wachsendem n beliebig klein, die beiden Reihen reduciren sich auf ihr Anfangsglied Eins, und es kommt

$$\lim_{n=\infty} a^{(n)} = \lim_{n=\infty} b^{(n)} = \frac{\pi}{2\omega}. \tag{22.}$$

Die Darstellung des arithmetisch-geometrischen Mittels von a und b durch ein elliptisches Integral ist damit gefunden, denn es ist

$$\omega = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(e_1 - e_3 - (e_2 - e_3)\xi^2)}}$$

oder in den hier gebrauchten Bezeichnungen

$$\omega = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(a^2 - (a^2 - b^2)\xi^2)}}. \tag{23.}$$

ALPHABETISCHES INHALTS-VERZEICHNISS.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).