
桑木文庫
洋書

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

FÜNFTER BAND.

VORLESUNGEN
ÜBER DIE
THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1915.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

KARL WEIERSTRASS.

BEARBEITET
VON
J. KNOBLAUCH.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1915.

VORWORT.

Der folgenden Darstellung der Theorie der elliptischen Functionen liegt für die Kapitel 1 bis 9, 12 und 13 ein Manuscript zu Grunde, das Weierstrass im Jahre 1863 Herrn F. Mertens dictirt hat. Für einige specielle Abschnitte der Anfangskapitel ist eine Ausarbeitung von Herrn Felix Müller aus dem Winter-Semester 1864—65 zu Rathe gezogen worden.

Die Grundlage des 31. Kapitels bildet ein Weierstrassches Manuscript, dessen Entstehungszeit nicht bekannt ist.

Das Übrige ist nach meiner Nachschrift einer von Weierstrass im Winter-Semester 1874—75 gehaltenen Vorlesung ausgearbeitet worden, in wenigen Einzelheiten unter Heranziehung einer Ausarbeitung von Georg Hettner. Nach dem Gesammtplan von Weierstrass' Mathematischen Werken giebt die vorliegende Darstellung nicht Alles wieder, was in dieser Vorlesung und in dem erstgenannten Manuscript enthalten war. Dagegen kommt der Beweis für die Nichtexistenz von mehr als zwei Perioden in der Weierstrassschen Vorlesung über elliptische Functionen nicht vor.

Herr Rudolf Rothe hat sich der dankenswerthen Mühe unterzogen, die meisten Formeln zu controliren und von sämmtlichen Bogen mehrere Correcturen zu lesen.

Berlin, den 7. Februar 1915.

Johannes Knoblauch.

INHALTS-VERZEICHNISS.

EINLEITUNG.

Die für reelle und complexe Werthe des Argumentes u eindeutig erklärte Exponentialfunction $E(u) = e^u$ hat folgende Haupteigenschaften:

1) Sind die Argumente u, v und w durch die Gleichung

$$w = u + v$$

verbunden, so besteht zwischen den zugehörigen Functionswerthen

$$E(u) = x, \quad E(v) = y, \quad E(w) = z$$

die algebraische Gleichung

$$z = xy.$$

2) Die Function $E(u)$ genügt der algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dE(u)}{du} = E(u).$$

3) Zu einem gegebenen Werthe der Function gehören unendlich viele Werthe des Argumentes. Ist einer von ihnen bekannt, so erhält man jeden anderen durch Addition oder Subtraction eines Vielfachen von $2\pi i$; die Function ist periodisch mit der primitiven Periode $2\pi i$.

Diese Eigenschaften lassen sich, sinngemäss verallgemeinert, auf rationale, und weiter auf beliebige algebraische Functionen von $E(u)$ übertragen. Man kann von einer solchen Function z. B. ohne Schwierigkeit beweisen, dass ihre Werthe für die Argumente u, v und $u+v$ durch eine algebraische Gleichung verbunden sind, dass also, wie man sagt, die Function ein algebraisches Additionstheorem hat. Betrachtet man aber umgekehrt die Existenz eines solchen Additionstheorems als Fundamentaleigenschaft einer noch zu bestimmenden Function, so findet man, dass die algebraisch von $E(u)$ abhängigen Ausdrücke in einer Classe allgemeinerer Functionen enthalten sind, denen diese Eigenschaft zukommt, und die man als elliptische Functionen bezeichnet. Man könnte zu ihnen auch durch Verallgemeinerung einer der beiden anderen Grundeigenschaften von $E(u)$ gelangen. Denn jede elliptische Function genügt einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, in der u nicht explicite vorkommt, und ferner sind diese Functionen periodisch, und zwar in allgemeinerem Sinne als die Function $E(u)$. Es existiren nämlich für jede solche Function $\varphi(u)$ zwei constante Grössen 2ω und $2\omega'$ von der Art, dass für beliebige ganze Zahlen m und n die Gleichung

$$\varphi(u + 2m\omega + 2n\omega') = \varphi(u)$$

stattfindet, während die beiden Grössen 2ω und $2\omega'$ sich nicht, wie bei der Exponentialfunction, auf eine zurückführen lassen; ihr Verhältniss ist nicht rational und nicht reell. Man bezeichnet deshalb die elliptischen Functionen als doppelt periodisch.

Wollte man nun von der ersten Haupteigenschaft, also von der Forderung eines algebraischen Additionstheorems ausgehend in die Theorie der elliptischen Functionen einzudringen versuchen, so würde man, wie sich schon nach den ersten Schritten zeigt, eine grössere Anzahl von Sätzen der allgemeinen Functionenlehre kennen oder im voraus beweisen müssen. Es soll deshalb hier der historische Weg eingeschlagen werden, der von der Umkehrung eines sogenannten elliptischen Integrals erster Art

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

ausgeht. Ein Integral heisst dann ein elliptisches, wenn es die Form

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\, dx$$

hat, worin $R(x)$ eine ganze Function dritten oder vierten Grades ohne quadratischen Theiler, F eine rationale Function der beiden Argumente x und $\sqrt{R(x)}$ bedeutet. Diese Integrale führen ihren Namen nach dem für die Theorie völlig gleichgiltigen Umstande, dass eines von ihnen geeignet ist, den Bogen einer Ellipse darzustellen. Es war natürlich, dass man anfing sich mit solchen Integralen zu beschäftigen, nachdem man sich davon überzeugt hatte, dass Integrale derselben Form, in denen der Grad von $R(x)$ gleich 1 oder 2 ist, durch Kreisfunctionen und Logarithmen ausdrückbar sind. Der von Abel herrührende Gedanke, ein specielles elliptisches Integral umzukehren, nämlich in der Gleichung

$$\int^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u$$

die obere Grenze x als Function des Integralwerthes u zu betrachten, hat sich für die gesammte Analysis als besonders fruchtbar erwiesen.

Eine solche Umkehrung ist gleichbedeutend mit der Integration der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x).$$

Dass das Integral dieser Gleichung ein algebraisches Additionstheorem hat, lässt sich leicht mit Hilfe des von Euler gefundenen Resultates zeigen, wonach die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}$$

algebraisch integrirbar ist. Es ist zweckmässig, sich des von Euler in seinen Untersuchungen über das Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ angewendeten Verfahrens zu einem anderen Zweck zu bedienen, nämlich zur formalen Vereinfachung dieses Differentials, d. h. zur Herstellung einer Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}},$$

in der R_1 eine von R verschiedene Function bedeutet. Durch Umkehrung des aus dem transformirten Differential $\frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}$ entspringenden Integrals ergiebt sich, wenn $R_1(x_1)$ passenden Bedingungen unterworfen wird, eine Function von besonders einfachen Eigenschaften, die den weiteren Untersuchungen zu Grunde gelegt werden soll.

Erstes Kapitel.

Transformation des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$.

Das elliptische Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, in dem $R(x)$ eine allgemeine ganze Function vierten Grades bedeuten soll, ändert seine Form nicht, wenn an Stelle von x eine ganze oder gebrochene lineare Function von x eingeführt wird:

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \tag{1.}$$

Hierin bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle oder complexe Constanten, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht verschwinden soll.

Um diese wichtige Eigenschaft des elliptischen Differentials zu beweisen, setze man den aus (1.) folgenden Werth

$$x = \frac{\delta x_1 - \beta}{\alpha - \gamma x_1} \tag{2.}$$

zunächst in $R(x)$ ein, so geht diese Function in einen Quotienten über, dessen Nenner $(\alpha - \gamma x_1)^4$ und dessen Zähler wieder eine ganze Function vierten Grades ist. Es werde dann

$$R(x) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\alpha - \gamma x_1)^4} R_1(x_1)$$

oder, hiermit gleichbedeutend,

$$R_1(x_1) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\gamma x + \delta)^4} R(x)$$

gesetzt. Ist $\sqrt{R(x)}$ ein beliebiger der beiden Werthe, die die Quadratwurzel aus $R(x)$ haben kann, so soll $\sqrt{R_1(x_1)}$ durch die Gleichung

$$\sqrt{R_1(x_1)} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2} \sqrt{R(x)} \tag{3.}$$

oder

$$\sqrt{R(x)} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\alpha - \gamma x_1)^2} \sqrt{R_1(x_1)} \tag{4.}$$

definirt werden. Aus dieser Formel in Verbindung mit

$$dx = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\alpha - \gamma x_1)^2} dx_1$$

folgt dann in der That

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}.$$

Die Gleichungen (1.) und (3.) lehren, dass nicht nur x_1 eine rationale Function von x ist, sondern auch $\sqrt{R_1(x_1)}$ eine rationale Function von x und $\sqrt{R(x)}$. Setzt man $\sqrt{R(x)} = y$, $\sqrt{R_1(x_1)} = y_1$, so erhalten die beiden Gleichungen (3.) und (4.) die Form

$$y_1 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) y}{(\gamma x + \delta)^2}, \tag{5.}$$

$$y = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) y_1}{(\alpha - \gamma x_1)^2}. \tag{6.}$$

Es werde nun umgekehrt zu der Gleichung (1.) von vornherein eine Gleichung (5.) hinzugenommen, durch die y_1 als rationale Function von x und y erklärt wird, und zwischen x und y die Beziehung $y^2 = R(x)$ festgesetzt. Aus (1.) und (5.) folgen durch Auflösung die beiden Gleichungen (2.) und (6.), die x und y rational durch x_1 und y_1 ausdrücken, und ferner sieht man, dass x_1 und y_1 durch eine Gleichung $y_1^2 = R_1(x_1)$ verbunden sind, wo $R_1(x_1)$ eine Function derselben Art wie $R(x)$ bedeutet.

Dieses Ergebniss legt es nahe, sich folgende Aufgabe zu stellen:

Sind zwei Veränderliche x und y durch eine Gleichung

$$y^2 = R(x) \tag{7.}$$

verbunden, wo $R(x)$ eine ganze Function ohne quadratischen Theiler bedeutet, über deren Grad keine besondere Annahme gemacht wird, so sollen zwei rationale Functionen dieser Veränderlichen, $F(x, y)$ und $G(x, y)$, derart bestimmt werden, dass wenn man

$$x_1 = F(x, y), \quad y_1 = G(x, y) \tag{8.}$$

setzt, zwischen x_1 und y_1 eine Gleichung derselben Form

$$y_1^2 = R_1(x_1) \tag{9.}$$

besteht, während zugleich x und y rational durch x_1 und y_1 ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} x &= F_1(x_1, y_1), \\ y &= G_1(x_1, y_1). \end{aligned} \tag{10.}$$

Vermöge (7.) lässt sich die erste Gleichung (8.) auf die Form

$$x_1 = P + Qy$$

bringen, wo P und Q rationale Functionen von x sind. Die Elimination von y ergiebt dann zwischen x und x_1 eine Gleichung der Form

$$Lx_1^2 + Mx_1 + N = 0, \tag{11.}$$

in der L, M, N ganze Functionen von x ohne gemeinsamen Theiler bezeichnen. Unter der Voraussetzung, dass x_1 die irrationale Function $\sqrt{R(x)}$ wirklich enthalte, d. h. dass Q nicht Null sei, ist der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung nicht als Product zweier ganzen Functionen von x und x_1 darstellbar. Denn wäre dies der Fall, so müsste jede der Functionen in Bezug auf x_1 vom ersten Grade sein, sodass x_1 rational durch x allein darstellbar sein würde.

Wendet man dieselben Schlüsse auf die Gleichungen (9.) und (10.) an, die der Annahme nach geeignet sein sollen, (7.) und (8.) zu ersetzen, so sieht man, dass die Beziehung (11.) zwischen x und x_1 auch in der Form

$$L_1 x^2 + M_1 x + N_1 = 0 \tag{12.}$$

geschrieben werden kann, wo L_1, M_1, N_1 ganze Functionen von x_1 sind. Die Functionen L, M, N können also nicht von höherem als dem zweiten Grade sein. Die Vergleichung von

$$x_1 = P + Q\sqrt{R(x)}$$

mit dem aus (11.) folgenden Ausdruck

$$x_1 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}$$

ergiebt dann weiter, dass $R(x)$ höchstens vom vierten Grade sein kann.

Nimmt man nun die ganze Function $R(x)$ als gegeben an, so hat man zur Lösung der gestellten Aufgabe L, M, N so zu bestimmen, dass

$$M^2 - 4LN = k^2 R(x) \tag{13.}$$

wird, unter k eine Constante verstanden. Setzt man dann, nach Fixirung eines Werthes von $\sqrt{k^2 R(x)}$, der mit ky bezeichnet werden soll,

$$x_1 = \frac{-M + ky}{2L}, \tag{14.}$$

so ergiebt sich zwischen x und x_1 eine Gleichung der Form (11.) oder (12.), wo L_1, M_1, N_1 ganze Functionen zweiten Grades sind, oder auch

$$(2L_1 x + M_1)^2 = M_1^2 - 4L_1 N_1.$$

Wird nunmehr eine ganze Function $R_1(x_1)$ durch die Gleichung

$$M_1^2 - 4L_1 N_1 = k^2 R_1(x_1)$$

erklärt und ein Werth von $\sqrt{k^2 R_1(x_1)}$, der ky_1 heissen möge, mittels der Formel

$$y_1 = \frac{2L_1 x + M_1}{k} \tag{15.}$$

fixirt, in der L_1 und M_1 durch Einsetzen des Werthes (14.) für x_1 rational durch x und y dargestellt zu denken sind, so sind x_1 und y_1 rationale Functionen von x und y und mit einander durch die Gleichung

$$y_1^2 = R_1(x_1)$$

verbunden. Umgekehrt folgt

$$x = \frac{-M_1 + ky_1}{2L_1}, \tag{16.}$$

$$y = \frac{2Lx_1 + M}{k}, \tag{17.}$$

sodass, wenn noch der Ausdruck von x in die letzte Gleichung eingesetzt wird, x und y als rationale Functionen von x_1 und y_1 erscheinen.

Endlich ergiebt sich aus der Gleichung zwischen x und x_1,

$$f(x, x_1) = 0,$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 = 0,$$

die, wenn man $f(x, x_1)$ einmal gleich $L_1 x^2 + M_1 x + N_1$, dann gleich $L x_1^2 + M x_1 + N$ setzt, die Form annimmt:

$$(2 L_1 x + M_1)\, dx + (2 L x_1 + M)\, dx_1 = 0$$

oder

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dx_1}{y_1},$$

d. h.

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}. \tag{18.}$$

Man kann also noch hinzufügen, dass die Lösung der gestellten Aufgabe die Transformation des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ in eines von derselben Form, $\frac{-dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}$, nach sich zieht. Der Werth der Quadratwurzel aus $R(x)$ kann dabei beliebig fixirt werden, dagegen ist der Grösse $\sqrt{R_1(x_1)}$ der Werth beizulegen, der durch die Gleichungen (14., 15.) bestimmt wird. Diese Überführung des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ in ein anderes von derselben Gestalt ist zugleich die einzig mögliche, wenn, wie es hier der Fall ist, auch x und $\sqrt{R(x)}$ durch x_1 und $\sqrt{R_1(x_1)}$ rational ausdrückbar sein sollen.

Wir gehen nun auf die Bestimmung von L, M und N näher ein. Wird

$$\begin{aligned} L &= \lambda x^2 + \mu x + \nu, \\ M &= \lambda' x^2 + \mu' x + \nu', \\ N &= \lambda'' x^2 + \mu'' x + \nu'' \end{aligned}$$

gesetzt, so erfordert das Bestehen der Gleichung (13.), in der

$$R(x) = A x^4 + 4 B x^3 + 6 C x^2 + 4 B' x + A'$$

sein möge, fünf Bedingungsgleichungen, die in Bezug auf die zehn Constanten $\lambda, \mu, \ldots \nu''$ und k homogen und von der zweiten Dimension sind. Der Homogeneität wegen kann man, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, zunächst eine dieser Grössen gleich 1 setzen. Durch drei weitere Relationen kann bewirkt werden, dass $R_1(x_1)$ nur zwei, anstatt, wie $R(x)$, fünf Coefficienten enthält. Endlich lässt sich dadurch, dass eine der Constanten unbestimmt bleibt, erreichen, dass zu einem willkürlichen Werthe von x und einem der zugehörigen Werthe von $\sqrt{R(x)}$ ein ein für alle Mal bestimmter Werth von x_1 gehört, der auch unendlich gross sein kann.

Die drei an zweiter Stelle genannten Bedingungen sollen so beschaffen sein, dass $R_1(x_1)$ nur vom dritten Grade wird und ausserdem das Glied mit

x_1^2 nicht enthält, der Coefficient von x_1^3 aber einen festen Zahlenwerth hat. Die Bestimmung des Systems der Constanten wird sehr erleichtert, wenn man eine dieser Bedingungen vorwegnimmt.

Ordnet man $L x_1^2 + M x_1 + N$ nach Potenzen von x, so findet man

$$\begin{aligned} L_1 &= \lambda x_1^2 + \lambda' x_1 + \lambda'', \\ M_1 &= \mu x_1^2 + \mu' x_1 + \mu'', \\ N_1 &= \nu x_1^2 + \nu' x_1 + \nu''. \end{aligned}$$

Die Bedingung dafür, dass in

$$M_1^2 - 4 L_1 N_1 = k^2 R_1(x_1)$$

das Glied mit x_1^4 fehlt, lautet

$$\mu^2 - 4 \lambda \nu = 0,$$

sodass

$$\lambda L = \left(\lambda x + \frac{\mu}{2}\right)^2$$

wird. Der oben gemachten Bemerkung gemäss nehme man

$$\lambda = 1$$

und setze ausserdem, nur die Bezeichnung ändernd,

$$\frac{\mu}{2} = -x_0,$$

so erhält L die Form

$$L = (x - x_0)^2.$$

Der Inhalt der nunmehr zu berücksichtigenden Gleichung (13.) lässt sich dahin aussprechen, dass $M^2 - k^2 R(x)$ durch L theilbar werden muss. Sind M und k dieser Bedingung gemäss bestimmt, so ergiebt sich N von selbst durch Ausführung einer Division.

Es sei

$$M = m_0 + m_1 (x - x_0) + m_2 (x - x_0)^2.$$

Sind m_0, m_1, m_2 und x_0 gefunden, so kennt man auch λ', μ', ν'. Ferner sei

$$R(x) = r_0 + r_1 (x - x_0) + r_2 (x - x_0)^2 + r_3 (x - x_0)^3 + r_4 (x - x_0)^4.$$

Wenn nun $M^2 - k^2 R(x)$ durch $L = (x - x_0)^2$ theilbar sein, d. h. in diesem

Ausdruck die Glieder mit $(x-x_0)^0$ und $(x-x_0)^1$ fehlen sollen, so müssen die Bedingungen

$$m_0^2 = k^2 r_0,$$
$$2m_0 m_1 = k^2 r_1$$

bestehen. Hieraus folgt, da nach der über die Function $R(x)$ gemachten Annahme r_0 und r_1 nicht gleichzeitig verschwinden können,

$$\frac{m_0}{2m_1} = \frac{r_0}{r_1},$$

sodass man setzen kann:

$$m_0 = -\frac{r_0}{g},\quad m_1 = -\frac{r_1}{2g},\quad k^2 = \frac{r_0}{g^2},$$

unter g eine willkürliche Constante verstanden. Es sei noch

$$m_2 = -\frac{h}{g},$$

wo h die Grösse m_2 vertreten soll, so wird

$$M = -\frac{1}{g}\left[h(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}r_1(x-x_0) + r_0\right],$$
$$N = \frac{M^2 - k^2 R(x)}{4L} = \frac{g^2 M^2 - r_0 R(x)}{4g^2(x-x_0)^2}$$
$$= \frac{1}{4g^2}\left[(h^2 - r_0 r_4)(x-x_0)^2 + (hr_1 - r_0 r_3)(x-x_0) + \left(\frac{1}{4}r_1^2 + 2hr_0 - r_0 r_2\right)\right].$$

Man kann sagen, dass durch die für L, M, N gefundenen Ausdrücke die fünf auf S. 8 erwähnten Bedingungsgleichungen und zwei von den noch hinzuzunehmenden Festsetzungen erfüllt werden. Um die noch übrigen Bedingungen aufzustellen, muss man $R_1(x_1)$ bilden.

Es sei

$$Lx_1^2 + Mx_1 + N = L'(x-x_0)^2 + M'(x-x_0) + N',$$

so hat man

$$L' = x_1^2 - \frac{h}{g}x_1 + \frac{h^2 - r_0 r_4}{4g^2} = \left(x_1 - \frac{h}{2g}\right)^2 - \frac{r_0 r_4}{4g^2},$$
$$M' = -\frac{r_1}{2g}x_1 + \frac{hr_1 - r_0 r_3}{4g^2} = -\frac{r_1}{2g}\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right) - \frac{r_0 r_3}{4g^2},$$
$$N' = -\frac{r_0}{g}x_1 + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{1}{4}r_1^2 + 2hr_0 - r_0 r_2\right) = -\frac{r_0}{g}\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right) - \frac{1}{4g^2}\left(r_0 r_2 - \frac{1}{4}r_1^2\right).$$

Nun war $R_1(x_1)$ durch die Gleichung (S. 7)

$$k^2 R_1(x_1) = M_1^2 - 4L_1 N_1$$

definirt, und da aus

$$L_1 x^2 + M_1 x + N_1 = L'(x-x_0)^2 + M'(x-x_0) + N'$$

die Beziehungen

$$L_1 = L',\quad M_1 = M' - 2L'x_0,\quad N_1 = N' - M'x_0 + L'x_0^2,$$
$$M_1^2 - 4L_1 N_1 = M'^2 - 4L'N'$$

folgen, so ergiebt sich

$$R_1(x_1) = \frac{(gM')^2 - 4g^2 L'N'}{r_0}$$

oder

$$R_1(x_1) = 4g\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right)^3 + r_2\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right)^2 + \frac{r_1 r_3 - 4r_0 r_4}{4g}\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right) + \frac{r_0 r_3^2 + r_4 r_1^2 - 4r_0 r_2 r_4}{16g^2}.$$

Hierin ist $4g$ der Coefficient von x_1^3, $r_2 - 6h$ der von x_1^2. Beide sollen vorläufig beibehalten, nur statt h eine Grösse g_1 mittels der Gleichung

$$r_2 - 6h = 6g_1$$

eingeführt werden. Die Rechnung liefert alsdann, wenn

$$r_0 r_4 - \frac{1}{4}r_1 r_3 + \frac{1}{12}r_2^2 = g_2,$$
$$\frac{1}{6}r_0 r_2 r_4 + \frac{1}{48}r_1 r_2 r_3 - \frac{1}{16}r_0 r_3^2 - \frac{1}{16}r_4 r_1^2 - \frac{1}{216}r_2^3 = g_3$$

gesetzt wird,

$$R_1(x_1) = 4g\left(x_1 + \frac{g_1}{2g}\right)^3 - \frac{g_2}{g}\left(x_1 + \frac{g_1}{2g}\right) - \frac{g_3}{g^2}.$$

Um die Transformation zu Ende zu führen, braucht man noch den Werth von M. Es ist

$$-gM = r_0 + \frac{1}{2}r_1(x-x_0) + \frac{1}{6}r_2(x-x_0)^2 - g_1(x-x_0)^2,$$

woraus in Verbindung mit (14.) und $g^2k^2 = r_0$ folgt:

$$gx_1 + \frac{1}{2}g_1 = \frac{\sqrt{r_0}\sqrt{R(x)} + r_0 + \frac{1}{2}r_1(x-x_0) + \frac{1}{6}r_2(x-x_0)^2}{2(x-x_0)^2}.$$

In diesen Formeln ist

$$r_0 = R(x_0),\quad r_1 = R'(x_0),\quad r_2 = \frac{1}{2}R''(x_0),\quad r_3 = \frac{1}{6}R'''(x_0),\quad r_4 = \frac{1}{24}R^{IV}(x_0) = A,$$

also

$$\frac{dr_0}{dx_0} = r_1, \quad \frac{dr_1}{dx_0} = 2r_2, \quad \frac{dr_2}{dx_0} = 3r_3, \quad \frac{dr_3}{dx_0} = 4r_4, \quad \frac{dr_4}{dx_0} = 0.$$

Benutzt man diese Gleichungen bei der Bildung von $\frac{dg_2}{dx_0}$ und $\frac{dg_3}{dx_0}$, so findet man

$$\frac{dg_2}{dx_0} = 0, \quad \frac{dg_3}{dx_0} = 0,$$

d. h. g_2 und g_3 sind von x_0 unabhängig. Man darf daher zur Bestimmung dieser beiden Grössen $x_0 = 0$ annehmen, also in den Formeln auf S. 11

$$r_0 = A', \quad r_1 = 4B', \quad r_2 = 6C, \quad r_3 = 4B, \quad r_4 = A$$

setzen; dadurch ergiebt sich

$$g_2 = AA' - 4BB' + 3C^2,$$
$$g_3 = ACA' + 2BCB' - A'B^2 - AB'^2 - C^3.$$

g_2 und g_3 sind die beiden Fundamental-Invarianten der Function $R(x)$.

Setzt man in die Formel für x_1 die Werthe von r_0, r_1 und r_2 ein, so erhält sie die Gestalt

$$(19.) \quad gx_1 + \frac{1}{2}g_1 = \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + R(x_0) + \frac{1}{2}R'(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{1}{24}R''(x_0).$$

Aus dieser, der Formel (14.) entsprechenden Gleichung geht hervor, dass x_1 für $x = x_0$ unendlich gross wird, vorausgesetzt, dass dabei der Wurzelgrösse $\sqrt{R(x)}$ derjenige Werth von $\sqrt{R(x_0)}$ beigelegt wird, der in den vorstehenden Formeln vorkommt. Anstatt nun weiter aus (15.) den Werth von $y_1 = \sqrt{R_1(x_1)}$ zu bilden, der die Differentialgleichung (18.) zur Folge hat, entnehme man umgekehrt hieraus

$$\frac{dx_1}{dx} = -\frac{\sqrt{R_1(x_1)}}{\sqrt{R(x)}}$$

und ziehe die aus der Formel für x_1 durch Differentiation hervorgehende Gleichung hinzu. Auf diese Weise ergiebt sich

$$(20.) \quad g\sqrt{R_1(x_1)} = \left(\frac{R(x)}{(x-x_0)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x)}{(x-x_0)^2}\right)\sqrt{R(x_0)} - \left(\frac{R(x_0)}{(x_0-x)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_0)}{(x_0-x)^2}\right)\sqrt{R(x)}.$$

Hiermit ist folgendes Resultat begründet:

Wenn man bei willkürlicher Annahme der Constanten g, g_1, x_0

$$R_1(x_1) = 4g\left(x_1 + \frac{g_1}{2g}\right)^3 - \frac{g_2}{g}\left(x_1 + \frac{g_1}{2g}\right) - \frac{g_3}{g^2}$$

setzt, unter g_2 und g_3 die beiden Invarianten von $R(x)$ verstanden, ferner x_1 durch die Gleichung (19.) definirt und unter $\sqrt{R_1(x_1)}$ denjenigen Werth dieser Wurzelgrösse versteht, der durch die Formel (20.) bestimmt wird, so besteht zwischen x und x_1 die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}.$$

Der Ausdruck von $R_1(x_1)$ lässt es als zweckmässig erscheinen,

$$g = 1$$

anzunehmen, d. h. dem Coefficienten der höchsten Potenz in $R_1(x_1)$ den Werth 4 beizulegen. Ferner sollte die zweite Potenz nicht vorkommen (S. 9), was durch

$$g_1 = 0$$

erreicht wird. Unter diesen Voraussetzungen soll s für x_1 geschrieben und

$$R_1(s) = S$$

gesetzt werden, sodass

$$(21.) \qquad S = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

wird. Bei Berücksichtigung der Werthe von g_2 und g_3 erhält man

$$(22.) \qquad S = -\begin{vmatrix} A, & B, & C-2s \\ B, & C+s, & B' \\ C-2s, & B', & A' \end{vmatrix}.$$

Wir sind somit zu folgendem Ergebniss gelangt:

Versteht man unter $R(x)$ eine beliebige ganze rationale Function dritten oder vierten Grades ohne quadratischen Theiler, unter $\sqrt{R(x)}$ einen beliebigen der beiden Werthe, die diese Wurzelgrösse haben kann, setzt dann

$$(\mathrm{I.}) \qquad s = \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + R(x_0) + \frac{1}{2}R'(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{1}{24}R''(x_0)$$

und definirt $\sqrt{S}$ durch die Formel

$$\text{(II.)}\quad \sqrt{S} = \left(\frac{R(x)}{(x-x_0)^3} - \frac{1}{4}\,\frac{R'(x)}{(x-x_0)^2}\right)\sqrt{R(x_0)} - \left(\frac{R(x_0)}{(x_0-x)^3} - \frac{1}{4}\,\frac{R'(x_0)}{(x_0-x)^2}\right)\sqrt{R(x)},$$

so wird

$$\text{(III.)}\qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}};$$

d. h. das elliptische Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ lässt sich mittels der Gleichungen (I.), (II.), die eine willkürliche Constante x_0 enthalten, in die specielle Form $\frac{-ds}{\sqrt{S}}$, die die Normalform heissen möge, transformiren. Die Coefficienten der ganzen Function dritten Grades $S = 4s^3 - g_2 s - g_3$ sind von x_0 unabhängig.

Nach der Theorie, die zu diesem Resultat geführt hat, müssen sich auch umgekehrt x und $\sqrt{R(x)}$ rational durch s und $\sqrt{S}$ darstellen lassen. Es war (S. 7 (16.))

$$x = \frac{-M_1 + ky_1}{2L_1}.$$

Führt man L' und M' statt L_1 und M_1 ein (S. 11), so kann man setzen:

$$x = x_0 + \frac{-M' + ky_1}{2L'}.$$

Hierin ist noch

$$k = \sqrt{R(x_0)},\quad y_1 = \sqrt{S}$$

zu nehmen, ferner

$$g = 1,\quad h = \frac{1}{12}R''(x_0)$$

in die auf S. 10 angegebenen Ausdrücke von L' und M' einzuführen. Dann ergiebt sich

$$x = x_0 + \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{S} + \frac{1}{2}R'(x_0)(s - \frac{1}{24}R''(x_0)) + \frac{1}{24}R(x_0)R'''(x_0)}{2(s - \frac{1}{24}R''(x_0))^2 - \frac{1}{2}AR(x_0)}$$

oder auch

$$x = \frac{P + \sqrt{R(x_0)}\sqrt{S}}{2Q},$$

wo P und Q bei Einführung der Coefficienten von $R(x)$ die Werthe annehmen:

$$P = 2x_0 s^2 + 2(Bx_0^2 + 2Cx_0 + B')s + (AB' - BC)x_0^2 + \frac{1}{2}(AA' + 4BB' - 5C^2)x_0 + BA' - B'C,$$

$$Q = s^2 - (Ax_0^2 + 2Bx_0 + C)s + (B^2 - AC)x_0^2 + (BC - AB')x_0 + \frac{1}{4}(C^2 - AA').$$

Der Werth von $\sqrt{R(x)}$ würde auch hier wieder am einfachsten nach dem auf S. 12 angewendeten Verfahren bestimmt werden können.

Für verschiedene Zwecke ist es nützlich, die Gleichung (I.) noch weiter umzuformen. Zieht man das auf den Quotienten folgende Glied $\frac{1}{24}R''(x_0)$ zu ihm hinzu, setzt für $R(x_0)$, $R'(x_0)$, $R''(x_0)$ ihre Werthe und definirt eine ganze Function von x und x_0 durch die Formel

$$R(x, x_0) = Ax^2x_0^2 + 2Bxx_0(x + x_0) + 6Cxx_0 + 2B'(x + x_0) + A',$$

so wird

$$\text{(IV.)}\qquad s = \frac{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(x_0)} + R(x, x_0)}{2(x - x_0)^2} + \frac{1}{2}C.$$

Schreibt man andererseits in der Gleichung (I.)

$$\sqrt{R(x)}\sqrt{R(x_0)} = \frac{1}{2}(\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(x_0)})^2 - \frac{1}{2}R(x) - \frac{1}{2}R(x_0)$$

und entwickelt $-\frac{1}{2}R(x)$ nach Potenzen von $x - x_0$, so ergiebt sich

$$\text{(V.)}\qquad s = \left(\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(x_0)}}{2(x - x_0)}\right)^2 - \frac{1}{4}A(x + x_0)^2 - B(x + x_0) - C.$$

Die Formeln (I.) und (II.) vereinfachen sich sehr, wenn die willkürliche Constante x_0 gleich einer Wurzel a der Gleichung $R(x) = 0$ angenommen wird. Man hat dann

$$\text{(VI.)}\qquad \begin{aligned} s &= \frac{1}{4}\,\frac{R'(a)}{x - a} + \frac{1}{24}R''(a), \\ \sqrt{S} &= \frac{1}{4}\,\frac{R'(a)}{(x - a)^2}\sqrt{R(x)}. \end{aligned}$$

Weil $R(x)$ keinen quadratischen Theiler haben sollte, so kann $R'(a)$ nicht gleich Null sein.

Will man ferner prüfen, was aus s für $x_0 = \infty$ wird, so bedient man sich zweckmässig der Gleichung (IV.). Es ist

$$\frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0^2} = \sqrt{A + 4Bx_0^{-1} + \cdots};$$

der Grenzwerth dieses Ausdrucks für unendlich grosses x_0 wird einer der Werthe der Quadratwurzel aus A, der jetzt, ebenso wie im allgemeinen Falle der von $\sqrt{R(x_0)}$, beliebig zu fixiren ist. Ferner hat man

$$\lim_{x_0 = \infty} \frac{R(x, x_0)}{x_0^2} = Ax^2 + 2Bx,$$

und da endlich der Nenner des Quotienten in (IV.) sich nach Absonderung des Factors x_0^2 dem Werthe 2 nähert, so wird für den Grenzfall

$$\text{(VII.)} \qquad s = \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x)} + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + \frac{1}{2}C.$$

In der Formel (II.) verschwindet für $x_0 = \infty$ das erste Glied, das zweite wird nach dem eben Bemerkten gleich $-\frac{1}{4}\sqrt{A}R'(x)$, und das dritte und vierte zusammen ergeben, da x_0^4 sich aus $R(x_0) - \frac{1}{4}R'(x_0)(x_0 - x)$ weghebt, ebenfalls einen endlichen Grenzwerth. Das Resultat ist

$$\text{(VIII.)} \qquad \sqrt{S} = -\frac{1}{4}\sqrt{A}R'(x) - (Ax + B)\sqrt{R(x)}.$$

Diese Untersuchung lässt zunächst nur erkennen, dass die Formeln für s und $\sqrt{S}$ auch noch für $x_0 = \infty$ einen Sinn behalten. Dass sie nach wie vor geeignet sind, die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

nach sich zu ziehen, kann durch Ausführung der Differentiation leicht festgestellt werden.

Nimmt man noch

$$A = 0$$

hinzu, d. h. fordert, das Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ für $R(x)$ als beliebige ganze Function dritten Grades auf die Normalform $\frac{-ds}{\sqrt{S}}$ zu bringen, wobei $s = \infty$ zu $x = \infty$ gehören soll, so geben die Gleichungen

$$\text{(IX.)} \qquad \begin{aligned} s &= Bx + \frac{1}{2}C, \\ \sqrt{S} &= -B\sqrt{R(x)} \end{aligned}$$

die Lösung dieser Aufgabe.

Zweites Kapitel.

Integration der Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ durch Reihenentwickelung.

Nach den Ergebnissen des ersten Kapitels lässt sich die Integration der Differentialgleichung

$$\text{(1.)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x),$$

die jetzt in Angriff genommen werden soll, auf die der einfacheren

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S$$

zurückführen. Dennoch bleiben wir, um uns von der Tragweite der Ergebnisse eine klare Vorstellung zu bilden, zunächst bei der Gleichung (1.) stehen.

Der Aufgabe werde die Nebenbedingung hinzugefügt, dass x für $u = 0$ den beliebig vorgeschriebenen, endlichen Werth x_0 annehmen solle. Wir versuchen dann, der Differentialgleichung durch eine gewöhnliche Potenzreihe

$$\text{(2.)} \qquad x = x_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu u^\nu$$

zu genügen. Anstatt jedoch diese in (1.), d. h. in die Gleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x_0) + R'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}R''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}R'''(x_0)(x - x_0)^3 + A(x - x_0)^4$$

einzusetzen, differentiiren wir noch einmal nach u und stellen die Gleichung

$$\text{(3.)} \qquad \frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{2}R'(x) = \frac{1}{2}R'(x_0) + \frac{1}{2}R''(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{4}R'''(x_0)(x - x_0)^2 + 2A(x - x_0)^3$$

mit (2.) zusammen.

Da aus (2.)

$$\frac{d^2x}{du^2} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1)\, a_\nu u^{\nu-2}$$

folgt, so wird der Coefficient von u^ν auf der linken Seite von (3.) gleich

$$(\nu+1)(\nu+2)\, a_{\nu+2}.$$

Auf der rechten Seite ergiebt sich dafür ein Ausdruck, der ausser x_0 und den Coefficienten der Function

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

nur solche Grössen der Reihe $a_1, a_2, \dots$ enthält, deren Index nicht grösser als ν ist, und zwar ist dieser Ausdruck eine ganze rationale Function aller vorkommenden Grössen, mit rationalen Zahlcoefficienten; diese Function werde mit $G_\nu(x_0, a_1, \dots a_\nu)$ bezeichnet. Die Vergleichung beider Seiten liefert

$$\begin{aligned}
1.2\, a_2 &= G_0(x_0),\\
2.3\, a_3 &= G_1(x_0, a_1),\\
3.4\, a_4 &= G_2(x_0, a_1, a_2),\\
&\dots\dots\dots\\
(\nu+1)(\nu+2)\, a_{\nu+2} &= G_\nu(x_0, a_1, a_2, \dots a_\nu),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Diese Formeln bestimmen nach willkürlicher Annahme von x_0 und a_1 der Reihe nach $a_2, a_3, \dots$, und zwar wieder als ganze Functionen von $x_0, a_1, A, B, \dots A'$, mit rationalen Zahlcoefficienten. Aus der Gleichung (3.), der dann formal durch die Annahme (2.) genügt wird, folgt aber rückwärts nur

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x) + c,$$

sodass die Constante c zu Null gemacht werden muss. Da nun für $u = 0$

$$x = x_0, \qquad \frac{dx}{du} = a_1,$$

mithin

$$c = a_1^2 - R(x_0)$$

ist, so muss man

$$a_1 = \sqrt{R(x_0)}$$

setzen, um die gegebene Differentialgleichung (1.) zu befriedigen. Welcher ihrer beiden Werthe dabei der Wurzelgrösse beigelegt wird, bleibt gleichgiltig.

Nachdem so eine Reihe (2.) aufgestellt worden ist, die der Differentialgleichung (1.) formal genügt, kann man die Coefficienten a_ν von $\nu = 2$ an auch nach der Formel

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu x}{du^\nu}\right)_0$$

bestimmen, indem man mittels der Differentialgleichung die Ausdrücke von

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{du^2}, \quad \frac{1}{2.3}\frac{d^3x}{du^3}, \quad \dots$$

durch x und $\frac{dx}{du}$ darstellt und in ihnen

$$x = x_0, \qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{R(x_0)}$$

setzt. Die ersten Werthe der Differentialquotienten sind

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{2}R'(x), \qquad \frac{d^3x}{du^3} = \frac{1}{2}R''(x)\frac{dx}{du}, \qquad \frac{d^4x}{du^4} = \frac{1}{2}R(x)R'''(x) + \frac{1}{4}R'(x)R''(x).$$

Allgemein werden die Ableitungen gerader Ordnung ganze Functionen von x, die ungerader Ordnung Producte aus solchen Functionen mit $\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$. Setzt man

$$\frac{d^{2\nu}x}{du^{2\nu}} = F_{2\nu}(x), \qquad \frac{d^{2\nu+1}x}{du^{2\nu+1}} = F_{2\nu+1}(x)\frac{dx}{du},$$

so kann man die ganzen Functionen $F_2(x), F_3(x), \dots$ aus den Recursionsformeln

$$(4.)\qquad \begin{aligned}
F_{2\nu+1}(x) &= \frac{dF_{2\nu}(x)}{dx},\\
F_{2\nu+2}(x) &= R(x)\frac{dF_{2\nu+1}(x)}{dx} + \frac{1}{2}F_{2\nu+1}(x)\frac{dR(x)}{dx}
\end{aligned}$$

in Verbindung mit den Anfangswerthen

$$F_0(x) = x, \qquad F_1(x) = 1$$

bestimmen. Wird noch

$$(5.)\qquad \begin{aligned}
x_0 + \frac{1}{2}F_2(x_0)u^2 + \frac{1}{24}F_4(x_0)u^4 + \cdots &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{F_{2\nu}(x_0)}{(2\nu)!}u^{2\nu} = \varphi(u),\\
u + \frac{1}{6}F_3(x_0)u^3 + \frac{1}{120}F_5(x_0)u^5 + \cdots &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{F_{2\nu+1}(x_0)}{(2\nu+1)!}u^{2\nu+1} = \varphi_1(u)
\end{aligned}$$

gesetzt, so ist

$$(6.)\qquad x = \varphi(u) + \sqrt{R(x_0)}\,\varphi_1(u)$$

der allgemeinste Ausdruck von x in Form einer gewöhnlichen Potenzreihe, der der Differentialgleichung (1.) formal genügt und die Nebenbedingung erfüllt, für $u = 0$ den endlichen Werth x_0 anzunehmen.

Allein dieses Ergebniss würde bedeutungslos sein, wenn die Potenzreihe nicht innerhalb eines bestimmten Bereiches convergirte. Um die Convergenz zu beweisen, beachten wir zunächst, dass in den Reihen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ jeder Coefficient einer Potenz von u ein Product aus ganzen positiven Potenzen der Grössen $x_0, A, B, \dots A'$ und einer positiven Zahl ist, wie sich dies aus der Bildungsweise der Functionen $F_\lambda(x)$ $(\lambda = 2, 3, \dots)$ unmittelbar zu erkennen giebt, und dass in der zu untersuchenden Potenzreihe die Coefficienten theils den Werthen $F_\lambda(x_0)$ gleich, theils Producte aus solchen Werthen mit $\sqrt{R(x_0)}$ sind. Unter einer ganzen positiven Potenz soll dabei stets eine Potenz mit ganzzahligem positivem Exponenten verstanden werden. Aus der genannten Eigenschaft der Reihe folgt, dass der absolute Betrag eines jeden Coefficienten nicht grösser ist als der Werth, den man erhält, wenn man in der Formel für den Coefficienten jede der Constanten $x_0, A, B, \dots A'$ durch eine andere, die positiv und dem absoluten Betrage nach nicht kleiner ist, ersetzt. Convergirt demnach die dann entstehende Reihe, so wird die ursprüngliche mindestens innerhalb desselben Bereiches convergent sein. Nun genügt ferner die neue Reihe, ebenfalls zunächst formal, der Differentialgleichung, die aus (1.) entsteht, wenn $A, \dots A'$ durch jene positiven Zahlen ersetzt werden, und der Nebenbedingung, für $u = 0$ den Werth ξ_0 zu liefern, wenn ξ_0 diejenige positive Zahl bedeutet, die an die Stelle von x_0 tritt. Durch passende Wahl der neuen Zahlgrössen kann man aber bewirken, dass nach ihrer Einführung das Integral der Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ eine einfache Beurtheilung seiner Convergenz gestattet.

Setzt man z. B.

$$\alpha(x+\beta)^4$$

für $R(x)$, so erhält man

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{\alpha}(x+\beta)^2,$$

woraus durch Integration unter Berücksichtigung der Nebenbedingung

$$\frac{1}{\xi_0+\beta} - \frac{1}{x+\beta} = \sqrt{\alpha}\, u$$

oder

$$x+\beta = \frac{\xi_0+\beta}{1-(\xi_0+\beta)\sqrt{\alpha}\, u}$$

folgt. Die Potenzreihe, in die dieser Ausdruck entwickelt werden kann, convergirt, wenn

$$\frac{1}{(\xi_0+\beta)\sqrt{\alpha}} = r$$

gesetzt wird, für $|u| < r$.

Giebt man also α und β positive Werthe der Art, dass

$$\alpha,\ \alpha\beta,\ \alpha\beta^2,\ \alpha\beta^3,\ \alpha\beta^4$$

der Reihe nach nicht kleiner sind als die absoluten Werthe von

$$A,\ B,\ C,\ B',\ A',$$

und versteht unter ξ_0 den absoluten Betrag von x_0, so kann man sicher sein, dass die ursprünglich für x angenommene Reihe wenigstens für alle diejenigen Werthe von u convergirt, die dem absoluten Betrage nach kleiner als r sind. Der absoluten Convergenz wegen kann die Reihe im Besonderen so angeordnet werden, wie in der Gleichung (6.) geschehen ist.

Diese Ergebnisse gelten nur für einen endlichen Werth x_0. Doch lässt sich mit ihrer Hilfe leicht die Frage beantworten, ob es auch convergente Ausdrücke für x giebt, die der Differentialgleichung (1.) genügen und für $u = 0$ unendlich gross werden. Vermöge der Substitution

$$x = \frac{1}{z}$$

geht nämlich (1.) in

(7.) $$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \bar{R}(z)$$

über, wo

(8.) $$\bar{R}(z) = A'z^4 + 4B'z^3 + 6Cz^2 + 4Bz + A$$

aus $R(x)$, von der Bezeichnung der Variablen abgesehen, durch Vertauschung von A mit A', B mit B' hervorgeht. Zu $x = \infty$ gehört $z = 0$. Man hat also in den Ausdrücken (5.), nachdem man

$$A,\ B,\ C,\ B',\ A'$$

der Reihe nach in

$$A',\ B',\ C,\ B,\ A$$

verwandelt hat, $x_0 = 0$ anzunehmen, wodurch $\varphi(u)$ in $\overline{\varphi}(u)$, $\varphi_1(u)$ in $\overline{\varphi}_1(u)$ übergehen möge, und

$$z = \overline{\varphi}(u) + \sqrt{\overline{R}(0)}\,\overline{\varphi}_1(u)$$

zu setzen. Die Gleichung zwischen x und z liefert dann für x den Quotienten

$$x = \frac{1}{\overline{\varphi}(u) + \sqrt{A}\,\overline{\varphi}_1(u)},$$

der für hinreichend kleine Werthe von u wieder in eine absolut convergente Reihe entwickelt werden kann. Ist A nicht Null, d. h. die ganze Function $R(x)$ wirklich vom vierten Grade, so hat diese Reihe die Form

$$x = cu^{-1} + c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots,$$

für

$$c = \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Ist dagegen $R(x)$ nur vom dritten Grade, so fallen alle Potenzen von u mit ungeradem Exponenten weg, und es wird

$$x = c'u^{-2} + c'_0 + c'_1 u^2 + \cdots,$$

wo

$$c' = \frac{1}{B}$$

ist.

Drittes Kapitel.

Die Function $\wp u$.

Nach der am Anfang des vorigen Kapitels gemachten Bemerkung kann die Integration der allgemeinen Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

auf die der einfacheren

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 \tag{1.}$$

zurückgeführt werden, mit der wir uns im Nächstfolgenden beschäftigen wollen. Es sei

$$s = \wp u$$

eine specielle Lösung dieser Differentialgleichung, und zwar diejenige, die für $u = 0$ unendlich gross wird. Die letzte Formel für x auf S. 22 lehrt ein Element dieser Function kennen. Für hinreichend kleine Werthe von u ist nämlich wegen $B = 1$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c'_0 + c'_1 u^2 + c'_2 u^4 + \cdots. \tag{2.}$$

Eine Hauptaufgabe, die wir zu lösen haben, ist die, eine Darstellung für $\wp u$ zu finden, die für alle endlichen Werthe des Arguments u Giltigkeit hat.

Wenn man eine Formel kennte, mit deren Hilfe die $\wp$-Function eines zusammengesetzten Arguments $u+v$ rational durch $\wp u$, $\wp v$ und die zugehörigen Werthe der Ableitungen $\wp' u$, $\wp' v$ dargestellt wird, wie es entsprechend z. B. bei der Sinus-Function der Fall ist, so würde man sofort den Giltigkeitsbereich der Function erweitern können. Man brauchte nur $v = u$ zu setzen, danach $\frac{u}{2}$ für u zu schreiben, sodass $\wp u$ durch $\wp\frac{u}{2}$ und $\wp'\frac{u}{2}$ rational ausgedrückt erscheint, und für $\wp\frac{u}{2}$ und $\wp'\frac{u}{2}$ die aus (2.) folgenden Reihen einzuführen. Convergirt dann die Reihe (2.) für $|u| < r$, so gilt die neue Darstellung von $\wp u$ für $\left|\frac{u}{2}\right| < r$ oder $|u| < 2r$. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man den Bereich, in dem die Function definirt ist, beliebig weit ausdehnen.

Eine Formel für $\wp(u+v)$ lässt sich nun durch folgende Überlegung herstellen. Da die Differentialgleichung (1.) u nicht explicite enthält, so bleibt sie ungeändert, wenn $u+v$ für u gesetzt wird; d. h. es ist

$$(\wp'(u+v))^2 = 4\wp^3(u+v) - g_2\wp(u+v) - g_3.$$

Mit anderen Worten, die Function $\wp(u+v)$ genügt derselben Differentialgleichung wie $\wp u$, nur wird sie für $u = 0$ nicht unendlich gross, sondern gleich $\wp v$. Eine solche Function lässt sich aber nach den im ersten Kapitel entwickelten Transformationsformeln durch $\wp u$ und $\wp' u$ darstellen. Denn setzt man

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}} = du,$$

so sind jene Gleichungen geeignet, eine Beziehung zwischen einer Function x zu vermitteln, die der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

genügt und für $u = 0$ den Werth x_0 annimmt, und einer Function s, die die Gleichung

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S$$

befriedigt und für $u = 0$ unendlich gross wird. Für den hier vorliegenden Zweck hat man

$$R(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad x = \wp(u+v), \quad x_0 = \wp v$$

zu setzen, also

$$R(x_0) = 4\wp^3 v - g_2\wp v - g_3 = (\wp' v)^2.$$

Der in den Formeln auf S. 13, 14 vorkommende Werth $\sqrt{R(x_0)}$ ist hiernach gleich $\pm\wp' v$, ebenso wie $\sqrt{S} = \pm\wp' u$. Die Einführung von

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad B' = -\frac{1}{4}g_2, \quad A' = -g_3$$

in jene Formeln liefert

$$\wp(u+v) = \frac{(\wp u + \wp v)(2\wp u\,\wp v - \frac{1}{2}g_2) - g_3 + \varepsilon\wp' u\,\wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2},$$

wo $\pm 1 = \varepsilon$ gesetzt ist. Den Werth von ε kann man mit Hilfe der Transformationsformeln selbst bestimmen, indem man die Beziehung zwischen $\sqrt{R(x)}$ und $\sqrt{S}$ in Betracht zieht. Allein einfacher ist es, für die vorkommenden Functionen die für hinreichend kleine Werthe von u geltenden Reihenentwicklungen einzusetzen und die Anfangsglieder links und rechts zu vergleichen. Aus der Reihe (2.) oder

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u^2),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe mit nur positiven Potenzen bedeutet, folgt

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + \frac{d\mathfrak{P}(u^2)}{du},$$

ferner zwei entsprechende Gleichungen für $\wp v$ und $\wp' v$, sowie

$$\wp(u+v) = \frac{1}{(u+v)^2} + \mathfrak{P}((u+v)^2).$$

Die Durchführung der Rechnung ergiebt

$$\varepsilon = -1,$$

also

$$\wp(u+v) = \frac{(\wp u + \wp v)(2\wp u\,\wp v - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \wp' u\,\wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2}. \tag{3.}$$

Wollte man hieraus in Verbindung mit

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3,$$
$$(\wp' v)^2 = 4\wp^3 v - g_2\wp v - g_3$$

die Ableitungen $\wp' u$ und $\wp' v$ eliminiren, so würde man eine algebraische Gleichung zwischen $\wp u$, $\wp v$ und $\wp(u+v)$ erhalten. Das heisst:

Die $\wp$-Function hat ein algebraisches Additionstheorem.

Doch soll auch der Inhalt der Formel (3.) selbst, in der $\wp(u+v)$ als rationale Function von $\wp u$, $\wp v$ und $\wp' u$, $\wp' v$ erscheint, als Additionstheorem der $\wp$-Function bezeichnet werden.

Wir ziehen aus (3.) einige Folgerungen.

Da

(4.) $$\wp(-u) = \wp u,$$

so ist

(5.) $$\wp'(-u) = -\wp' u,$$

mithin

(6.) $$\wp(u-v) = \frac{(\wp u + \wp v)(2\wp u\,\wp v - \frac{1}{2}g_2) - g_3 + \wp' u\,\wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2}.$$

Durch Addition und Subtraction folgt aus (3.) und (6.)

(7.) $$\wp(u+v) + \wp(u-v) = \frac{(\wp u + \wp v)(2\wp u\,\wp v - \frac{1}{2}g_2) - g_3}{(\wp u - \wp v)^2},$$

(8.) $$\wp(u+v) - \wp(u-v) = \frac{-\wp' u\,\wp' v}{(\wp u - \wp v)^2}.$$

Multiplicirt man ferner beiderseits (3.) mit (6.), so erhält man unter Berücksichtigung der Ausdrücke von $(\wp' u)^2$ und $(\wp' v)^2$ als Functionen von $\wp u$ und $\wp v$ für den Zähler der rechten Seite

$$((\wp u + \wp v)(2\wp u\,\wp v - \frac{1}{2}g_2) - g_3)^2 - (4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3)(4\wp^3 v - g_2\wp v - g_3).$$

Diese ganze Function von $\wp u$ und $\wp v$ ist durch $(\wp u - \wp v)^2$ theilbar, und es wird

(9.) $$\wp(u+v)\,\wp(u-v) = \frac{(\wp u\,\wp v + \frac{1}{4}g_2)^2 + g_3(\wp u + \wp v)}{(\wp u - \wp v)^2}.$$

Nach Division durch den Werth (6.) von $\wp(u-v)$ ergiebt sich hieraus

(10.) $$\wp(u+v) = \frac{2(\wp u\,\wp v + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3(\wp u + \wp v)}{(\wp u + \wp v)(2\wp u\,\wp v - \frac{1}{2}g_2) - g_3 + \wp' u\,\wp' v}.$$

Im Gegensatz zu der Ausgangsformel (3.) ist diese auch für $v = u$ brauchbar und liefert

(11.) $$\wp(2u) = \frac{(\wp^2 u + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3\wp u}{4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3};$$

$\wp(2u)$ lässt sich also rational durch $\wp u$ allein, ohne $\wp' u$, darstellen. Diese Eigenschaft bleibt, wenn n eine positive ganze Zahl ist, für $\wp(nu)$ bestehen. Denn angenommen, es sei für einen bestimmten Werth von n eine Formel

(12.) $$\wp(nu) = F(\wp u),$$

in der F eine rationale Function bedeutet, als giltig nachgewiesen, dann

liefert das Additionstheorem:

$$\wp((n+1)u) = \frac{(\wp u + \wp(nu))(2\wp u\,\wp(nu) - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \wp' u\,\wp'(nu)}{2(\wp u - \wp(nu))^2}$$
$$= \frac{(\wp u + F(\wp u))(2\wp u\,F(\wp u) - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \frac{1}{n}F'(\wp u)(\wp' u)^2}{2(\wp u - F(\wp u))^2}.$$

Es lässt sich also, da $(\wp' u)^2$ durch $4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3$ ersetzt werden kann, $\wp((n+1)u)$ wieder als rationale Function von $\wp u$ darstellen.

Nunmehr können die oben (S. 23, 24) angedeuteten Schlüsse angewendet werden, nur insofern vereinfacht, als in der Formel für $\wp(nu)$ die Ableitung $\wp' u$ nicht vorkommt. Es sei

$$\wp(nu) = \frac{G_1(\wp u)}{G_2(\wp u)},$$

wo G_1 und G_2 ganze rationale Functionen bezeichnen. Setzt man im Zähler und Nenner die unter der Annahme $|u| < r$ geltende Reihe für $\wp u$ ein, die nur die eine negative Potenz u^{-2} enthält, und ordnet wieder nach Potenzen von u, so entstehen zwei Potenzreihen, die ebenfalls innerhalb jenes Bereiches convergiren und nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen aufweisen. Durch Erweiterung des Quotienten mit einer passend gewählten positiven Potenz kann man die Reihen in gewöhnliche Potenzreihen überführen, sodass

$$\wp(nu) = \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(u)}{\overline{\mathfrak{P}}_2(u)}$$

oder

$$\wp u = \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1\left(\frac{u}{n}\right)}{\overline{\mathfrak{P}}_2\left(\frac{u}{n}\right)}$$

wird. Die beiden Potenzreihen gelten für

$$\left|\frac{u}{n}\right| < r;$$

vermittelst des Multiplicationstheorems, wie man den Inhalt der Formel (12.) bezeichnen kann, ergiebt sich also eine Darstellung der $\wp$-Function, die für

$$|u| < nr,$$

d. h., da n willkürlich angenommen werden darf, für beliebig grosse Werthe des Arguments Geltung hat.

Freilich muss bewiesen werden, dass die Function bei Erweiterung ihres Giltigkeitsbereiches fortfährt, der Differentialgleichung (1.) zu genügen. Es werde

$$\overline{\mathfrak{P}}_1\left(\frac{u}{n}\right) = \mathfrak{P}_1(u), \quad \overline{\mathfrak{P}}_2\left(\frac{u}{n}\right) = \mathfrak{P}_2(u)$$

gesetzt, d. h. die Potenzen der Zahl n in die Reihen-Coefficienten aufgenommen, sodass

$$\wp u = \frac{\mathfrak{P}_1(u)}{\mathfrak{P}_2(u)}$$

wird. Für $|u| < r$ muss der Quotient der beiden Potenzreihen sich in die Reihe (2.) entwickeln lassen. Für diesen Bereich gilt also die Gleichung

$$\left(\frac{d}{du}\,\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2}\right)^2 = 4\left(\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2}\right)^3 - g_2\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2} - g_3$$

oder

$$(13.) \qquad \left(\mathfrak{P}_2\frac{d\mathfrak{P}_1}{du} - \mathfrak{P}_1\frac{d\mathfrak{P}_2}{du}\right)^2 = 4\mathfrak{P}_1^3\mathfrak{P}_2 - g_2\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2^3 - g_3\mathfrak{P}_2^4.$$

Hier sind die Ausdrücke auf der linken und rechten Seite gewöhnliche Potenzreihen von u. Sollen sie für alle Werthe des angegebenen Bereiches einander gleich sein, so müssen in ihnen die Coefficienten gleicher Potenzen paarweise übereinstimmen. Dann gilt aber die Gleichung (13.) oder die unmittelbar vorhergehende für alle Werthe des Bereiches, innerhalb dessen die beiden Reihen überhaupt convergiren, d. h. für $|u| < nr$.

Die Darstellung der $\wp$-Function durch den Quotienten der beiden Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(u)$ und $\mathfrak{P}_2(u)$ hat den Übelstand, dass sie noch von der Zahl n abhängt. Im nächsten Kapitel wird gezeigt werden, dass man $\wp u$ durch den Quotienten zweier beständig convergenten Reihen ausdrücken kann, deren Coefficienten allein Functionen von g_2 und g_3 sind. Zunächst aber wollen wir in der Reihe (2.) die Coefficienten c_0', c_1', c_2' bestimmen, die dort ebenfalls gebraucht werden.

Diese Reihe ist aus der Entwickelung des reciproken Werthes einer gewöhnlichen Potenzreihe $\overline{\varphi}(u)$ entstanden (S. 22). Dabei war $\overline{\varphi}(u)$ allgemein

eine für $u = 0$ verschwindende Lösung der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \overline{R}(z),$$

in der $\overline{R}(z)$ die für $A = 0$ aus der Formel (8.) (S. 21) hervorgehende Function bedeutet. Im vorliegenden Falle, wo

$$R(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

ist, hat man noch

$$B = 1, \quad C = 0, \quad B' = -\frac{1}{4}g_2, \quad A' = -g_3$$

zu setzen. Unter diesen Annahmen, deren erste zur Bestimmung des Coefficienten von u^{-2} in der Reihe für $\wp u$ benutzt worden ist (S. 23), möge $G(z)$ für $\overline{R}(z)$ geschrieben werden, sodass

$$G(z) = 4z - g_2 z^3 - g_3 z^4$$

wird. Anstatt nun das auf S. 18 entwickelte Recursionsverfahren anzuwenden, kann man die Coefficienten von $\overline{\varphi}(u)$ direct mittels der Differentialgleichung

$$(14.) \qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = G(z)$$

berechnen, indem man, weil nur gerade Potenzen vorkommen und das Anfangsglied gleich Null ist,

$$z = \overline{\varphi}(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{d^{2\nu}z}{du^{2\nu}}\right)_0 \frac{u^{2\nu}}{(2\nu)!}$$

setzt. Um die Coefficienten in der Reihe (2.) bis zu dem von u^4 zu bestimmen, muss man in der Reihe für $\overline{\varphi}(u)$ bis u^8 fortgehen.

Nun folgt aus (14.)

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{1}{2}G'(z),$$

$$\frac{d^3z}{du^3} = \frac{1}{2}G''(z)\frac{dz}{du},$$

$$\frac{d^4z}{du^4} = \frac{1}{4}G'(z)G''(z) + \frac{1}{2}G(z)G'''(z).$$

Da z für $u = 0$ verschwindet und

$$G(0) = 0, \quad G'(0) = 4, \quad G''(0) = 0, \quad G'''(0) = -6g_2, \quad G^{\mathrm{IV}}(0) = -24g_3$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{du^2}\right)_0 = 1$$

und

$$\left(\frac{d^4 z}{du^4}\right)_0 = 0.$$

Die weiteren Differentiationen liefern folgende Ergebnisse, in denen zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{3}{4}G'(z)G'''(z) + \frac{1}{4}G''(z)^2 + \frac{1}{2}G(z)G^{IV}(z),$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2}G''(z) + \frac{3}{2}\frac{d\alpha}{dz}G'(z) + \frac{d^2\alpha}{dz^2}G(z)$$

gesetzt ist:

$$\frac{d^5 z}{du^5} = \alpha\frac{dz}{du},$$

$$\frac{d^6 z}{du^6} = \frac{\alpha}{2}G'(z) + \frac{d\alpha}{dz}G(z),$$

$$\frac{d^7 z}{du^7} = \beta\frac{dz}{du},$$

$$\frac{d^8 z}{du^8} = \frac{\beta}{2}G'(z) + \frac{d\beta}{dz}G(z).$$

Diese Formeln ergeben

$$\left(\frac{d^6 z}{du^6}\right)_0 = \frac{1}{2}\alpha_0 G'(0) = -36 g_2,$$

$$\left(\frac{d^8 z}{du^8}\right)_0 = \frac{1}{2}\beta_0 G'(0) = 15 G'(0) G^{IV}(0) = -4.15.24 g_3,$$

also

$$\bar{\varphi}(u) = u^2 - \frac{g_2}{20}u^6 - \frac{g_3}{28}u^8 + \cdots,$$

woraus

$$\wp u = \frac{1}{u^2}\frac{1}{1 - \frac{g_2}{20}u^4 - \frac{g_3}{28}u^6 + \cdots}$$

folgt.

Für hinreichend kleine Werthe von u lässt sich der Quotient, der mit $\frac{1}{u^2}$ multiplicirt die $\wp$-Function darstellt, in eine Potenzreihe

$$1 + \frac{g_2}{20}u^4 + \frac{g_3}{28}u^6 + \cdots$$

entwickeln, wo die nur angedeuteten Glieder mindestens die achte Potenz von u enthalten. Hiernach wird schliesslich

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \cdots, \tag{15.}$$

d. h.

$$c_0' = 0, \quad c_1' = \frac{g_2}{20}, \quad c_2' = \frac{g_3}{28}.$$

Dass $\bar{\varphi}(u)$ kein Glied mit u^4, also $\wp u$ kein constantes Glied enthält, rührt, wie man sieht, daher, dass in der ganzen Function dritten Grades $R(x)$ die zweite Potenz von x fehlt. Denn hierdurch wird das Fehlen von z^2 in $G(z)$, d. h. die Gleichung $G''(0) = 0$ bedingt.

Die Coefficienten von $\bar{\varphi}(u)$ sind ganze rationale Functionen der Invarianten g_2 und g_3 (S. 18), und dasselbe gilt für die Coefficienten der Reihe für $\wp u$.

Viertes Kapitel.

Die Function σu.

Aus der Reihe

$$(1.)\qquad \wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \cdots,$$

die nur die eine negative Potenz u^{-2} enthält, kann man eine andere, in der negative Potenzen garnicht vorkommen, dadurch herleiten, dass man zweimal hinter einander integrirt und den dann auftretenden Logarithmus durch Übergang zur Exponentialfunction wegschafft. Wir bezeichnen die neue Reihe mit σu und setzen, da der Logarithmus mit dem negativen Zeichen behaftet auftritt,

$$(2.)\qquad \wp u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2},$$

vervollständigen ausserdem die Definition der Function σu durch die Festsetzung, dass die beiden bei der Integration auftretenden Constanten gleich Null sein sollen. Aus der Gleichung

$$-\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = -\frac{d^2 \log u}{du^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \cdots$$

folgt dann

$$(3.)\qquad -\frac{d \log \frac{\sigma u}{u}}{du} = \frac{g_2}{20}\frac{u^3}{3} + \frac{g_3}{28}\frac{u^5}{5} + \cdots,$$

und weiter

$$\log \frac{\sigma u}{u} = -\frac{g_2}{20}\frac{u^4}{3.4} - \frac{g_3}{28}\frac{u^6}{5.6} - \cdots = -\mathfrak{P}(u^2),$$

also

$$(4.)\qquad \sigma u = u e^{-\mathfrak{P}(u^2)} = u - \frac{g_2}{2}\frac{u^5}{5!} - 6 g_3 \frac{u^7}{7!} - \cdots,$$

wo die hingeschriebenen Glieder die einzigen sind, die keine höhere als die siebente Potenz von u enthalten.

Die beiden der Differentialgleichung (2.) hinzugefügten Nebenbedingungen lassen sich dahin aussprechen, es solle für $u = 0$

$$\frac{d \log \frac{\sigma u}{u}}{du} = 0, \qquad \frac{\sigma u}{u} = 1$$

sein.

Nach der Entstehung der Reihe (4.) sind ihre Coefficienten wieder ganze rationale Functionen der Invarianten. Ferner ist hervorzuheben, dass σu eine ungerade Function ist:

$$(5.)\qquad \sigma(-u) = -\sigma u,$$

also $\sigma' u$ gerade:

$$(6.)\qquad \sigma'(-u) = \sigma' u.$$

Wir werden häufig auch die ungerade Function $\frac{d \log \sigma u}{du} = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$ gebrauchen, für die zur Abkürzung $\frac{\sigma'}{\sigma} u$ geschrieben werden soll. Die Gleichung (3.) liefert für sie die Entwickelung

$$(7.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma} u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60}u^3 - \frac{g_3}{140}u^5 + \cdots.$$

Nach der Herleitung der Gleichung (4.) convergirt die Reihe für σu zunächst nur innerhalb eines beschränkten Bereiches, $|u| < r$. Es ist jedoch von der grössten Wichtigkeit, dass sie beständig, d. h. für alle endlichen Werthe von u convergent ist. Um dies zu beweisen, stellen wir $\wp(2u)$ in einer anderen Form dar als auf S. 26, und leiten aus dem neuen Ausdruck einen solchen für $\sigma(2u)$ her.

Setzen wir zu diesem Zweck in der Formel des Additionstheorems (S. 25 (3.)) $v = u + h$ und entwickeln nach Potenzen von h, so ergiebt sich als Anfangsglied links $\wp(2u)$, rechts im Nenner $2h^2 \wp'^2 u$. Im Zähler verschwinden, wie es hiernach sein muss, die Coefficienten von h^0 und h^1, und zwar auf Grund der Differentialgleichung der $\wp$-Function und der aus ihr abgeleiteten

$$\wp'' u = 6 \wp^2 u - \frac{1}{2} g_2.$$

Der Coefficient von h^3 liefert, durch $2\wp'^2 u$ dividirt, die Formel

$$\wp(2u) = \frac{3}{2}\frac{\wp^2 u\,\wp'' u}{\wp'^2 u} + \wp u - \frac{1}{8} g_2 \frac{\wp'' u}{\wp'^2 u} - \frac{1}{4}\frac{\wp''' u}{\wp' u}.$$

Entfernt man noch die Invariante g_2 mittels der Gleichung für $\wp'' u$, so erhält man

$$\wp(2u) = \wp u - \frac{1}{4}\frac{d}{du}\frac{\wp'' u}{\wp' u}. \tag{8.}$$

Die Beziehung (2.) zwischen der $\wp$-Function und der σ-Function ergiebt nun

$$\frac{1}{4}\frac{d^2 \log \sigma(2u)}{du^2} = \frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} + \frac{1}{4}\frac{d}{du}\frac{\wp'' u}{\wp' u},$$

und nach Ausführung einer Integration

$$\frac{d \log \sigma(2u)}{du} = 4\frac{d \log \sigma u}{du} + \frac{\wp'' u}{\wp' u} + c.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten c beachte man, dass die links und an erster Stelle rechts stehenden Functionen in Folge von (7.) kein constantes Glied enthalten. Dieselbe Thatsache tritt für den Quotienten an zweiter Stelle nach Einführung der Reihenentwicklungen

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{10} u + \cdots,$$

$$\wp'' u = \frac{6}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \cdots$$

hervor. Mithin muss

$$c = 0$$

sein. Die nochmalige Integration liefert nach Bestimmung der multiplicativen Constanten aus den Anfangsgliedern

$$\sigma(2u) = -\sigma^4 u . \wp' u, \tag{9.}$$

d. h.

$$\sigma(2u) = \sigma^4 u \cdot \frac{d^3 \log \sigma u}{du^3}$$

oder

$$\sigma(2u) = \sigma^3 u\, \sigma''' u - 3\sigma^2 u\, \sigma' u\, \sigma'' u + 2\sigma u\, \sigma'^3 u. \tag{10.}$$

Wird hierin $\frac{u}{2}$ für u gesetzt, so stehen in der Gleichung

$$\sigma u = \sigma^3\left(\frac{u}{2}\right)\sigma'''\left(\frac{u}{2}\right) - 3\sigma^2\left(\frac{u}{2}\right)\sigma'\left(\frac{u}{2}\right)\sigma''\left(\frac{u}{2}\right) + 2\sigma\left(\frac{u}{2}\right)\sigma'^3\left(\frac{u}{2}\right)$$

links und rechts gewöhnliche Potenzreihen von u, die für alle Werthe

$$|u| < r$$

übereinstimmen und demnach identisch sein müssen. Da aber die einzelnen Bestandtheile des rechts stehenden Ausdruckes für

$$\left|\frac{u}{2}\right| < r$$

convergiren, so muss auch die Reihe für σu innerhalb des Bereiches

$$|u| < 2r$$

convergent sein. Die Wiederholung dieses Schlusses ergiebt unmittelbar die beständige Convergenz der σ-Reihe.

Durch die Formel (2.) oder die mit ihr übereinstimmende

$$\wp u = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u\, \sigma'' u}{\sigma^2 u} \tag{11.}$$

wird nunmehr die $\wp$-Function für alle endlichen Werthe des Arguments als Quotient zweier beständig convergenten Potenzreihen definirt. Dass der Ausdruck (11.) der Differentialgleichung

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3$$

genügt, ergiebt sich durch dieselben Schlüsse wie auf S. 28. Und ferner leuchtet nach dem für das Additionstheorem (S. 25) gegebenen Beweise ein, dass auch dieses Theorem für beliebige Werthe des Arguments giltig bleibt.

Freilich würden diese Resultate einen grossen Theil ihrer Bedeutung einbüssen, wenn es nicht gelänge, die Coefficienten der σ-Reihe auf einem weniger beschwerlichen Wege zu bestimmen als dem, der zu den Ausdrücken für die ersten dieser Coefficienten geführt hat. Wir werden im nächsten Kapitel auf die Ermittelung des Bildungsgesetzes ausgehen. An dieser Stelle möge noch eine von Differentialquotienten freie Relation zwischen den beiden Functionen σu und $\wp u$ hergeleitet werden, die für die Theorie von grundlegender Wichtigkeit ist.

Mittels der Differentialgleichung der $\wp$-Function ist es möglich, die zweite Ableitung des Logarithmus von $\wp u$ oder von einer linearen Function von $\wp u$ durch die $\wp$-Function selbst darzustellen. Gelingt es, einen solchen

Ausdruck so umzuformen, dass er eine lineare Function von $\wp$-Functionen wird, so kann man nach Benutzung der Gleichung (2.) durch zweimalige Integration zum Ziel kommen. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{d^2\log(\wp u-\wp v)}{du^2} &= \frac{1}{\wp u-\wp v}\frac{d^2(\wp u-\wp v)}{du^2}-\frac{1}{(\wp u-\wp v)^2}\left(\frac{d(\wp u-\wp v)}{du}\right)^2\\ &= \frac{6\wp^2 u-\frac{1}{2}g_2}{\wp u-\wp v}-\frac{4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3}{(\wp u-\wp v)^2}\\ &= \frac{\frac{1}{2}g_2(\wp u+\wp v)+g_3+2\wp^3 u-6\wp^2 u\,\wp v}{(\wp u-\wp v)^2}.\end{aligned}$$

Das Aggregat der drei ersten Glieder des Zählers weist auf die Benutzung des Additionstheorems oder, da $\wp' u$ und $\wp' v$ nicht auftreten, der aus ihm folgenden Formel

$$\wp(u+v)+\wp(u-v) = \frac{(\wp u+\wp v)(2\wp u\,\wp v-\frac{1}{2}g_2)-g_3}{(\wp u-\wp v)^2}$$

(S. 26 (7.)) hin. Der Zähler erhält hierbei den Factor $(\wp u-\wp v)^2$, der sich gegen den Nenner hebt, sodass

$$\frac{d^2\log(\wp u-\wp v)}{du^2} = 2\wp u-\wp(u+v)-\wp(u-v) \tag{12.}$$

wird. Die rechte Seite hat die gewünschte, oben erwähnte Eigenschaft. Mittels der Gleichung (2.) folgt nun

$$\frac{d^2\log(\wp u-\wp v)}{du^2} = -2\frac{d^2\log\sigma u}{du^2}+\frac{d^2\log\sigma(u+v)}{du^2}+\frac{d^2\log\sigma(u-v)}{du^2},$$

und die Integration ergiebt

$$\frac{\wp' u}{\wp u-\wp v} = -2\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)+C.$$

Zur Bestimmung von C setze man $-u$ für u, so wird

$$\frac{-\wp' u}{\wp u-\wp v} = 2\frac{\sigma'}{\sigma}u-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)-\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v)+C.$$

Die Addition zur vorangehenden Gleichung liefert dann

$$C = 0.$$

Durch nochmalige Integration der so gefundenen Formel

$$\frac{\wp' u}{\wp u-\wp v} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u+v)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)-2\frac{\sigma'}{\sigma}u \tag{13.}$$

erhält man weiter

$$\wp u-\wp v = C'\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u}.$$

Bei der Entwickelung nach Potenzen von u entsteht links das Anfangsglied $\frac{1}{u^2}$, rechts $C'\frac{\sigma(v)\sigma(-v)}{u^2}$; es muss also

$$C' = -\frac{1}{\sigma^2 v}$$

sein. Daraus folgt die gesuchte Relation

$$\wp v-\wp u = \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}. \tag{14.}$$

Man kann sie z. B. dazu benutzen, die Gleichung (9.), auf die sich die Erweiterung des Convergenzbereichs der σ-Reihe stützte, auf anderem Wege herzuleiten als vorher. Setzt man nämlich in (14.)

$$v = u+h$$

und entwickelt nach Potenzen von h, so folgt

$$h\wp' u+\cdots = \frac{(\sigma(2u)+h\sigma'(2u)+\cdots)(-h+\cdots)}{\sigma^2 u(\sigma^2 u+\cdots)}$$

und durch Vergleichung der Anfangsglieder

$$\wp' u = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u}.$$

Um auch von der Formel (13.) eine Anwendung zu machen, setzen wir mit ihrer Hilfe das Additionstheorem der $\wp$-Function in eine andere Gestalt. Die Vertauschung von u und v liefert

$$\frac{-\wp' v}{\wp u-\wp v} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u+v)-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)-2\frac{\sigma'}{\sigma}v,$$

und die Addition dieser Gleichung zu der ursprünglichen:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) = \frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{\sigma'}{\sigma}v+\frac{1}{2}\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}. \tag{15.}$$

Differentiirt man nach u und geht allenthalben zur $\wp$-Function zurück, so erhält man

$$\wp(u+v) = \wp u-\frac{1}{2}\frac{d}{du}\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}. \tag{16.}$$

Dies ist schon ein Ausdruck für $\wp(u+v)$, der von dem auf S. 25 gegebenen nur der Form nach verschieden ist.

Führt man nun weiter die angedeutete Differentiation aus, vertauscht nochmals u mit v und addirt beide Gleichungen, so erhält man

$$2\wp(u+v) = \wp u + \wp v - \frac{1}{2}\frac{\wp'' u - \wp'' v}{\wp u - \wp v} + \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2.$$

Nun ist (S. 33)

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2.$$

Ersetzt man hierin u durch v und subtrahirt, so folgt

$$\text{(17.)} \qquad \frac{\wp'' u - \wp'' v}{\wp u - \wp v} = 6(\wp u + \wp v),$$

und mit Hilfe dieser Formel geht die vorstehende über in

$$\text{(18.)} \qquad \wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 - \wp u - \wp v.$$

Fünftes Kapitel.

Die partielle Differentialgleichung der σ-Function.

Die ungerade Function σu konnte nach S. 35 u. 33 durch eine beständig convergente Potenzreihe dargestellt werden, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind,

$$\sigma u = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(g_2, g_3)\, u^{2\nu+1}.$$

Aus der Gleichung (4.) des vorigen Kapitels, nämlich

$$\text{(1.)} \qquad \sigma u = u - \frac{g_2}{2}\frac{u^5}{5!} - 6 g_3 \frac{u^7}{7!} + \cdots$$

lassen sich die Ausdrücke der vier ersten Functionen $f_\nu(g_2, g_3)$ ablesen. Zu ihrer allgemeinen Bestimmung bietet sich der Weg dar, durch Zusammenstellung der Differentialgleichung der $\wp$-Function mit

$$\text{(2.)} \qquad -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = \wp u$$

eine Differentialgleichung für die σ-Function zu bilden. Allein die hierauf zu gründende Methode würde namentlich deshalb unzweckmässig sein, weil jene Differentialgleichung $\wp' u$ in der zweiten, $\wp u$ selbst sogar in der dritten Potenz enthält.

Wir betrachten von vornherein σu, und demnach auch $\wp u$, als Function der drei Argumente u, g_2, g_3 und setzen, wo dies ausdrücklich hervorgehoben werden soll,

$$\sigma u = \sigma(u; g_2, g_3), \qquad \wp u = \wp(u; g_2, g_3).$$

Werden die Grössen f_ν als ganze Functionen von g_2 und g_3 mit unbestimmten

Coefficienten eingeführt, so lässt sich schreiben:

$$\sigma u = \sum_{\lambda,\mu,\nu} C_{\lambda\mu\nu}\, g_2^\lambda g_3^\mu u^{2\nu+1}, \tag{3.}$$

wo λ, μ, ν unabhängig von einander alle positiven ganzzahligen Werthe, Null eingeschlossen, zu durchlaufen haben. Die Bestimmung der Grössen $C_{\lambda\mu\nu}$ gelingt mit Hilfe einer partiellen Differentialgleichung, der die Function $\sigma(u; g_2, g_3)$ genügt und die zunächst hergeleitet werden soll.

Die Grundlage der folgenden Untersuchung bildet wieder die Differentialgleichung der $\wp$-Function, die jetzt, wenn der Einfachheit wegen auch das Argument u weggelassen wird, in der Form

$$\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{4.}$$

zu schreiben ist. Differentiirt man sie nach u, g_2 und g_3 einzeln, so erhält man

$$2\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2} = 12\wp^2 - g_2,$$

$$2\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial^2\wp}{\partial u\,\partial g_2} = (12\wp^2 - g_2)\frac{\partial\wp}{\partial g_2} - \wp,$$

$$2\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial^2\wp}{\partial u\,\partial g_3} = (12\wp^2 - g_2)\frac{\partial\wp}{\partial g_3} - 1.$$

Wir richten im Folgenden unser Augenmerk auf die beständige Elimination der Potenzen von $\wp$ und auf die Herstellung linearer Verbindungen von Differentialquotienten.

Zunächst liefert die Elimination von $\wp^2$ aus den drei letzten Gleichungen

$$2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial^2\wp}{\partial u\,\partial g_2} - \frac{\partial\wp}{\partial g_2}\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2}\right) = -\wp,$$

$$2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial^2\wp}{\partial u\,\partial g_3} - \frac{\partial\wp}{\partial g_3}\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2}\right) = -1$$

oder

$$2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\dfrac{\partial\wp}{\partial g_2}}{\dfrac{\partial\wp}{\partial u}} = -\wp\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}, \tag{5.}$$

$$2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\dfrac{\partial\wp}{\partial g_3}}{\dfrac{\partial\wp}{\partial u}} = -\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}. \tag{6.}$$

Andererseits kann man eine homogene lineare Function der rechten Seiten dieser Gleichungen und der $\wp$-Function selbst dadurch herstellen, dass man bildet:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-1} = -\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}\left(6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2\right), \tag{7.}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\wp^2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) = -\wp^2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}\left(6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2\right) + 2\wp \tag{8.}$$

und wieder die höheren Potenzen von $\wp$ entfernt. Weil nach (4.)

$$6\wp^4 - \frac{1}{2}g_2\wp^2 = \frac{3}{2}\wp\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2 + g_2\wp^2 + \frac{3}{2}g_3\wp$$

ist, so wird die Gleichung (8.):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\wp^2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{2}\wp - \left(g_2\wp^2 + \frac{3}{2}g_3\wp\right)\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}.$$

Durch Elimination von $\wp^2$ aus dieser und der Gleichung (7.) folgt

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(6\wp^2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(g_2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) = 3\wp - 9g_3\wp\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2} - \frac{1}{2}g_2^2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}.$$

Zieht man nun (5.) und (6.) hinzu, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{6\wp^2 - g_2}{\dfrac{\partial\wp}{\partial u}} = 3\wp + 18g_3\frac{\partial}{\partial u}\frac{\dfrac{\partial\wp}{\partial g_2}}{\dfrac{\partial\wp}{\partial u}} + g_2^2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\dfrac{\partial\wp}{\partial g_3}}{\dfrac{\partial\wp}{\partial u}},$$

und hieraus durch Integration in Bezug auf u, nachdem man rechts im ersten Gliede $-\frac{\partial^2\log\sigma}{\partial u^2}$ an Stelle von $\wp$ gesetzt hat,

$$6\wp^2 - g_2 = -3\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\frac{\partial\wp}{\partial u} + 18g_3\frac{\partial\wp}{\partial g_2} + g_2^2\frac{\partial\wp}{\partial g_3} + C\frac{\partial\wp}{\partial u}.$$

Da nun die mit C multiplicirte Grösse $\frac{\partial\wp}{\partial u}$ eine ungerade, die in den übrigen Gliedern auftretenden Grössen aber sämmtlich gerade Functionen von u sind, so muss $C = 0$ sein. Man setze jetzt

$$-\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\frac{\partial\wp}{\partial u} = \frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\frac{\partial^3\log\sigma}{\partial u^3} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2\log\sigma}{\partial u^2}\right)^2$$

und eliminire $\wp^2$ mittels der Gleichung

$$6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2 = \frac{\partial^2\wp}{\partial u^2} = -\frac{\partial^4\log\sigma}{\partial u^4},$$

so erhält man

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \log \sigma}{\partial u}\right)^2 - 18 g_3 \frac{\partial^3 \log \sigma}{\partial u^2 \partial g_2} - g_2^2 \frac{\partial^3 \log \sigma}{\partial u^2 \partial g_3} + \frac{3}{2}\frac{\partial^4 \log \sigma}{\partial u^4} + \frac{1}{4} g_2 = 0.$$

Integrirt man weiter nach u, und zwar zweimal, so folgt

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\partial \log \sigma}{\partial u}\right)^2 - 18 g_3 \frac{\partial \log \sigma}{\partial g_2} - g_2^2 \frac{\partial \log \sigma}{\partial g_3} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u^2} + \frac{1}{8} g_2 u^2 + C'u + C'' = 0.$$

Die früher (S. 32) aufgestellte Reihenentwicklung

$$\log \sigma = \log u - \frac{g_2}{240} u^4 - \frac{g_3}{840} u^6 + \cdots$$

und die daraus abgeleiteten

$$\frac{\partial \log \sigma}{\partial g_2} = -\frac{u^4}{240} + \cdots, \quad \frac{\partial \log \sigma}{\partial g_3} = -\frac{u^6}{840} + \cdots$$

lehren, dass, von $C'u + C''$ abgesehen, nirgends die Potenzen u^4 oder u^6 vorkommen, dass also C' und C'' verschwinden müssen. Wird endlich das erste Glied vermöge der Relation

$$\left(\frac{\partial \log \sigma}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u^2} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}$$

mit dem vierten zusammengezogen, so ergiebt sich für die σ-Function die homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(9.)\qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} - 12 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} - \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma = 0.$$

Auf den ersten Anblick scheint es am nächsten zu liegen, an Stelle der beiden Ableitungen auf den linken Seiten von (7.) und (8.) nur eine, und zwar die von $\wp\left(\frac{\partial \wp}{\partial u}\right)^{-1}$ zu berechnen und demnach jene beiden Gleichungen durch

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\wp\left(\frac{\partial \wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) = -\wp\left(\frac{\partial \wp}{\partial u}\right)^{-2}\left(6\wp^2 - \frac{1}{2} g_2\right) + 1$$

zu ersetzen. Alsdann könnte man $\wp^2$ mittels der Differentialgleichung (4.) eliminiren und weiter so verfahren wie vorher. Auf diesem Wege ergiebt sich zunächst

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\wp\left(\frac{\partial \wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) = -\frac{1}{2} + 2 g_2 \frac{\partial}{\partial u}\frac{\frac{\partial \wp}{\partial g_2}}{\frac{\partial \wp}{\partial u}} + 3 g_3 \frac{\partial}{\partial u}\frac{\frac{\partial \wp}{\partial g_3}}{\frac{\partial \wp}{\partial u}}.$$

Die Integration nach u liefert

$$(10.)\qquad \wp = -\frac{1}{2} u \frac{\partial \wp}{\partial u} + 2 g_2 \frac{\partial \wp}{\partial g_2} + 3 g_3 \frac{\partial \wp}{\partial g_3};$$

denn das noch auftretende Glied $C\frac{\partial \wp}{\partial u}$ muss wegfallen, wie man sich durch Einsetzen der Reihenentwicklung für $\wp$ überzeugt. Führt man nun $\wp = -\frac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u^2}$ ein und integrirt noch zweimal nach u, so ergiebt sich

$$-\frac{1}{2} u \frac{\partial \log \sigma}{\partial u} + 2 g_2 \frac{\partial \log \sigma}{\partial g_2} + 3 g_3 \frac{\partial \log \sigma}{\partial g_3} + C'u + C'' = 0.$$

Die Bestimmung der beiden Constanten lässt sich mittels der auf der vorigen Seite angegebenen Reihenentwicklungen ausführen; danach wird

$$C' = 0, \quad C'' = \frac{1}{2},$$

sodass die partielle Differentialgleichung

$$(11.)\qquad u \frac{\partial \sigma}{\partial u} - 4 g_2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} - 6 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} - \sigma = 0$$

gilt. Sie ist insofern einfacher als die Gleichung (9.), als sie keine Ableitung zweiter Ordnung enthält. Allein für die Bestimmung der Coefficienten $C_{\lambda\mu\nu}$ ist sie nicht brauchbar, weil diese Grössen beim Einsetzen der Reihe (3.) herausfallen. Was die Differentialgleichung liefert, ist eine Relation zwischen den Exponenten λ, μ, ν.

Eine genauere Einsicht in die Bedeutung dieser Relation, die zur Vereinfachung der Coefficientenbestimmung benutzt werden soll, erhält man durch folgendes kürzere Verfahren. Es werde

$$u = mv$$

und gleichzeitig

$$\wp = \frac{q}{m^2}$$

gesetzt, unter m eine willkürliche Constante verstanden, sodass in der Differentialgleichung (4.) der $\wp$-Function die linke Seite und das erste Glied der rechten formal ungeändert bleiben. Zusammen mit der Nebenbedingung, q solle für $v = 0$ unendlich gross werden, lehrt die aus (4.) hervorgehende Differentialgleichung

$$\left(\frac{dq}{dv}\right)^2 = 4q^3 - m^4 g_2 q - m^6 g_3,$$

dass q eine $\wp$-Function von v mit den Invarianten $m^4 g_2$, $m^6 g_3$ ist. Die Gleichung $\wp = \frac{q}{m^2}$ kann demnach in der Form

$$\wp(u; g_2, g_3) = \frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right) \tag{12.}$$

geschrieben werden. Die Einführung der σ-Function ergiebt

$$\frac{\partial^2 \log \sigma(u; g_2, g_3)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \log \sigma\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right)}{\partial u^2},$$

und durch Integration folgt hieraus

$$\frac{\partial \log \sigma(u; g_2, g_3)}{\partial u} = \frac{\partial \log \sigma\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right)}{\partial u},$$

wo eine Constante nicht hinzutritt, weil, wie die Reihenentwicklung für $\log\sigma$ auf S. 42 zeigt, die beiden links und rechts stehenden Functionen kein constantes Glied enthalten. Eine nochmalige Integration ergiebt, nachdem die Constante aus derselben Reihenentwicklung bestimmt ist,

$$\sigma(u; g_2, g_3) = m\sigma\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right). \tag{13.}$$

Die Formeln (12.) und (13.) geben den wesentlichen Inhalt der Differentialgleichungen (10.) und (11.) wieder.

Wendet man nun die in der Gleichung (13.) ausgesprochene Eigenschaft auf die Reihe (3.) an, so wird

$$\sigma u = \sum_{\lambda,\mu,\nu} C_{\lambda\mu\nu} m^{4\lambda+6\mu-2\nu} g_2^\lambda g_3^\mu u^{2\nu+1}.$$

Es darf also, da m beliebig ist, diese Grösse nicht vorkommen, d. h. es muss

$$4\lambda + 6\mu - 2\nu = 0$$

sein. Führt man den hieraus folgenden Werth von ν in die Reihenentwicklung ein und bezeichnet den Coefficienten $C_{\lambda\mu\nu}$, der dann nur noch von den beiden Zahlenwerthen λ und μ abhängt, mit $c_{\lambda\mu}$, so kann man schreiben:

$$\sigma u = \sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda\mu} g_2^\lambda g_3^\mu u^{4\lambda+6\mu+1}. \tag{14.}$$

Setzt man diese Reihe für σu in die partielle Differentialgleichung (9.) ein, so erhält man die Recursionsformel

$$(4\lambda+6\mu+1)(4\lambda+6\mu)c_{\lambda\mu} = 12(\lambda+1)c_{\lambda+1,\mu-1} + \frac{2}{3}(\mu+1)c_{\lambda-2,\mu+1} - \frac{1}{12}c_{\lambda-1,\mu}, \tag{15.}$$

in der $c_{00} = 1$ und alle Grössen $c_{\lambda\mu}$, in denen ein Index negativ ist, gleich Null zu setzen sind. Es ist zweckmässig, die Bezeichnung der Reihencoefficienten durch die Substitution

$$c_{\lambda\mu} = \frac{a_{\lambda\mu}}{2^{\lambda-\mu}.(4\lambda+6\mu+1)!}$$

zu ändern und demnach

$$\sigma u = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\left(\frac{g_2}{2}\right)^\lambda (2g_3)^\mu \frac{u^{4\lambda+6\mu+1}}{(4\lambda+6\mu+1)!} \tag{16.}$$

zu schreiben. Die aus der Formel

$$a_{\lambda\mu} = 3(\lambda+1)a_{\lambda+1,\mu-1} + \frac{16}{3}(\mu+1)a_{\lambda-2,\mu+1} - \frac{1}{3}(2\lambda+3\mu-1)(4\lambda+6\mu-1)a_{\lambda-1,\mu} \tag{17.}$$

der Reihe nach zu bestimmenden Grössen $a_{\lambda\mu}$ werden nämlich dann sämmtlich ganze Zahlen, wie nachher (S. 50) bewiesen werden wird.

Man kann von den Grössen $c_{\lambda\mu}$ zu einem System ganzer Zahlen auch dadurch übergehen, dass man

$$c_{\lambda\mu} = \frac{b_{\lambda\mu}}{2.6^{\lambda-1}(4\lambda+6\mu+1)!}$$

setzt. Die Relation (15.) verwandelt sich dann in

$$b_{\lambda\mu} = 2(\lambda+1)b_{\lambda+1,\mu-1} + 24(\mu+1)b_{\lambda-2,\mu+1} - (2\lambda+3\mu-1)(4\lambda+6\mu-1)b_{\lambda-1,\mu}, \tag{18.}$$

und diese Gleichung liefert für die Grössen $b_{\lambda\mu}$, abgesehen von der ersten,

$$b_{00} = \frac{1}{3},$$

in der That ganzzahlige Werthe, wenn man, dem Vorhergehenden entsprechend, alle diejenigen gleich Null setzt, in denen ein Index negativ wird. Die σ-Reihe erhält hierbei die Form

$$\sigma u = \sum_{\lambda,\mu} \frac{b_{\lambda\mu}}{2.6^{\lambda-1}} g_2^\lambda g_3^\mu \frac{u^{4\lambda+6\mu+1}}{(4\lambda+6\mu+1)!} \tag{19.}$$

oder

$$\sigma u = u + \sum_{\lambda,\mu}{}' \frac{b_{\lambda\mu}}{2.6^{\lambda-1}} g_2^\lambda g_3^\mu \frac{u^{4\lambda+6\mu+1}}{(4\lambda+6\mu+1)!}, \tag{20.}$$

wo der Strich an dem Summenzeichen, wie üblich, andeutet, dass die Combination $\lambda = 0$, $\mu = 0$ auszuschliessen ist.

Die partielle Differentialgleichung (9.), die zur Herleitung von Recursionsformeln für die Coefficienten der $\mathfrak{S}$-Reihe benutzt worden ist, lässt mancherlei Umformungen zu, von denen hier einige ausgeführt werden sollen.

Es seien e_1, e_2, e_3 die drei Werthe, die für s gesetzt die Gleichung

$$S \equiv 4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

befriedigen, also

$$S = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3).$$

Die drei Grössen e_λ sind durch die Gleichung

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \tag{21.}$$

verbunden und hängen mit g_2 und g_3 vermöge der Formeln

$$e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\frac{1}{4} g_2, \tag{22.}$$

$$e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3 \tag{23.}$$

zusammen.

Aus (21.) und (22.) folgt

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = \frac{1}{2} g_2, \tag{24.}$$

$$e_2^2 e_3^2 + e_3^2 e_1^2 + e_1^2 e_2^2 = \frac{1}{16} g_2^2, \tag{25.}$$

$$e_1^4 + e_2^4 + e_3^4 = \frac{1}{8} g_2^2. \tag{26.}$$

Aus (21.) ergiebt sich ferner

$$e_1^3 + e_2^3 + e_3^3 - 3 e_1 e_2 e_3 = 0,$$

also nach (23.)

$$e_1^3 + e_2^3 + e_3^3 = \frac{3}{4} g_3. \tag{27.}$$

Man führe nun statt der Invarianten g_2, g_3 zwei lineare Verbindungen der Grössen e_1, e_2, e_3, nämlich

$$e_1 - e_3 = \alpha, \qquad e_2 - e_3 = \beta \tag{28.}$$

ein. Aus (21.) folgt dann

$$e_1 = \frac{2\alpha - \beta}{3}, \quad e_2 = \frac{2\beta - \alpha}{3}, \quad e_3 = -\frac{\alpha + \beta}{3}, \tag{29.}$$

und es ist daher

$$g_2 = \frac{4}{3}(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta), \qquad g_3 = -\frac{4}{27}(\alpha+\beta)(2\alpha-\beta)(2\beta-\alpha). \tag{30.}$$

Die Formeln (24.) und (27.) liefern

$$dg_2 = 4e_1\,de_1 + 4e_2\,de_2 + 4e_3\,de_3,$$
$$dg_3 = 4e_1^2\,de_1 + 4e_2^2\,de_2 + 4e_3^2\,de_3,$$

woraus mit Benutzung von (29.)

$$\frac{\partial g_2}{\partial \alpha} = \frac{8}{3}e_1 - \frac{4}{3}e_2 - \frac{4}{3}e_3 = 4e_1,$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial \beta} = -\frac{4}{3}e_1 + \frac{8}{3}e_2 - \frac{4}{3}e_3 = 4e_2,$$
$$\frac{\partial g_3}{\partial \alpha} = \frac{8}{3}e_1^2 - \frac{4}{3}e_2^2 - \frac{4}{3}e_3^2,$$
$$\frac{\partial g_3}{\partial \beta} = -\frac{4}{3}e_1^2 + \frac{8}{3}e_2^2 - \frac{4}{3}e_3^2$$

folgt. Mit Hilfe dieser Formeln kann man in die Differentialgleichung (9.) ebenfalls α und β an Stelle von g_2 und g_3 einführen, wobei man sich der Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial \beta}$$

zu bedienen hat. Sie liefern

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \alpha} = 4e_1\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_2} + \frac{4}{3}(2e_1^2 - e_2^2 - e_3^2)\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_3},$$
$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \beta} = 4e_2\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_2} + \frac{4}{3}(2e_2^2 - e_3^2 - e_1^2)\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_3}.$$

Hieraus geht noch

$$-\left(\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \beta}\right) = 4e_3\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_2} + \frac{4}{3}(2e_3^2 - e_1^2 - e_2^2)\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_3}$$

hervor. Die drei letzten Gleichungen multiplicire man beiderseits der Reihe nach mit e_1^2, e_2^2, e_3^2 und vereinige sie dann durch Addition, so erhält man mit Berücksichtigung der Formeln (25.), (26.), (27.)

$$3g_3\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_2} + \frac{1}{6}g_2^2\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_3} = (e_1^2 - e_3^2)\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \alpha} + (e_2^2 - e_3^2)\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \beta} = -\frac{\alpha(2\beta-\alpha)}{3}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \alpha} - \frac{\beta(2\alpha-\beta)}{3}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \beta},$$

sodass die Differentialgleichung (9.) schliesslich in

$$(31.)\qquad \frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}+\frac{4}{3}\alpha(2\beta-\alpha)\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}+\frac{4}{3}\beta(2\alpha-\beta)\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}+\frac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)u^2\sigma = 0$$

übergeht.

Jetzt werde

$$(32.)\qquad e^{\frac{1}{2}e_3u^2}\sigma u = S_0(u)$$

gesetzt, und somit

$$(33.)\qquad \sigma u = e^{\frac{1}{6}(\alpha+\beta)u^2}S_0(u).$$

Dann hat man

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = e^{\frac{1}{6}(\alpha+\beta)u^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial u}+\frac{1}{3}(\alpha+\beta)uS_0\right),$$

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} = e^{\frac{1}{6}(\alpha+\beta)u^2}\left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial u^2}+\frac{2(\alpha+\beta)}{3}u\frac{\partial S_0}{\partial u}+\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)^2u^2S_0+\frac{\alpha+\beta}{3}S_0\right),$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} = e^{\frac{1}{6}(\alpha+\beta)u^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\alpha}+\frac{1}{6}u^2S_0\right),$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} = e^{\frac{1}{6}(\alpha+\beta)u^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\beta}+\frac{1}{6}u^2S_0\right),$$

und die Gleichung (31.) transformirt sich daher in die folgende:

$$(34.)\quad \frac{\partial^2 S_0}{\partial u^2}+\frac{2}{3}(\alpha+\beta)u\frac{\partial S_0}{\partial u}+\frac{4}{3}\alpha(2\beta-\alpha)\frac{\partial S_0}{\partial\alpha}+\frac{4}{3}\beta(2\alpha-\beta)\frac{\partial S_0}{\partial\beta}+\left(\alpha\beta u^2+\frac{\alpha+\beta}{3}\right)S_0 = 0.$$

Setzt man, unter m eine willkürliche Constante verstehend, $m^2\alpha$ und $m^2\beta$ für α und β, so geht g_2 in m^4g_2, g_3 in m^6g_3 über. Der durch die Gleichung (13.) dargestellten Eigenschaft der σ-Function entspricht demnach folgende der Function S_0:

$$(35.)\qquad S_0(u;\alpha,\beta) = mS_0\left(\frac{u}{m};m^2\alpha,m^2\beta\right).$$

Aus der Form der Entwickelung von σu (S. 39 (1.)) geht hervor, dass sich $S_0(u)$ durch eine Reihe

$$S_0(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu s_\nu\frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

darstellen lässt, in der s_ν eine ganze Function von g_2 und g_3, also auch von

α und β ist. Die vorstehende Relation (35.) zeigt, dass

$$s_\nu(\alpha,\beta) = \frac{1}{m^{2\nu}}s_\nu(m^2\alpha,m^2\beta),$$

d. h. s_ν eine homogene Function ν^{ten} Grades von α und β sein muss, sodass man

$$(36.)\qquad \alpha\frac{\partial s_\nu}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial s_\nu}{\partial\beta} = \nu s_\nu$$

hat. Die Gleichung (34.) aber führt zu der Relation

$$s_\nu-\frac{2}{3}(2\nu-1)(\alpha+\beta)s_{\nu-1}-\frac{4}{3}(2\beta-\alpha)\alpha\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha}-\frac{4}{3}(2\alpha-\beta)\beta\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta}$$
$$+(2\nu-2)(2\nu-1)\alpha\beta s_{\nu-2}-\frac{\alpha+\beta}{3}s_{\nu-1} = 0,$$

die man, unter Berücksichtigung von (36.), mit Hilfe der Gleichungen

$$(2\beta-\alpha)\alpha\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha}+(2\alpha-\beta)\beta\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta} = 3\alpha\beta\left(\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha}+\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta}\right)-(\alpha+\beta)\left(\alpha\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta}\right)$$
$$= 3\alpha\beta\left(\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha}+\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta}\right)-(\nu-1)(\alpha+\beta)s_{\nu-1}$$

in

$$(37.)\qquad s_\nu = (\alpha+\beta)s_{\nu-1}+4\alpha\beta\left(\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha}+\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta}\right)-2(\nu-1)(2\nu-1)\alpha\beta s_{\nu-2}$$

überführen kann. In dieser Recursionsformel ist

$$s_0 = 1$$

zu nehmen. Sie lehrt, dass die Coefficienten der ganzen Functionen s_ν ganze Zahlen sind.

Aus der Gleichung (32.), nämlich

$$(38.)\qquad \sigma u = e^{-\frac{1}{2}e_3u^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu s_\nu\frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

ergiebt sich nun, wenn man

$$\alpha = e_1-e_3,\quad \beta = e_2-e_3$$

einführt, σu als Function von u und e_1, e_2, e_3. Setzt man noch für die Exponentialgrösse die Reihenentwicklung,

$$e^{-\frac{1}{2}e_3u^2} = 1-\frac{e_3u^2}{2}+\frac{e_3^2}{4}\frac{u^4}{2!}-\cdots+(-1)^\nu\frac{e_3^\nu}{2^\nu}\frac{u^{2\nu}}{\nu!}+\cdots,$$

und schreibt (38.) in der Form

$$\sigma u = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \tag{39.}$$

so erkennt man, dass die ganzen Functionen r_ν der Grössen e_1, e_2, e_3 mit den Functionen s_ν derselben Art durch die Gleichung

$$\frac{r_\nu}{(2\nu+1)!} = (-1)^\nu \frac{s_\nu}{(2\nu+1)!} - (-1)^{\nu-1} \frac{s_{\nu-1}}{(2\nu-1)!} \frac{e_3}{2} + (-1)^{\nu-2} \frac{s_{\nu-2}}{(2\nu-3)!} \frac{1}{2!} \frac{e_3^2}{4} - \cdots$$
$$+ (-1)^\nu s_0 \frac{1}{\nu!} \frac{e_3^\nu}{2^\nu}$$

oder

$$r_\nu = (-1)^\nu \left(s_\nu + (2\nu+1) 2\nu \cdot \frac{e_3}{2} s_{\nu-1} + \frac{(2\nu+1)2\nu(2\nu-1)(2\nu-3)}{2!} \frac{e_3^2}{4} s_{\nu-2} + \cdots + \frac{(2\nu+1)\ldots 1}{\nu!} \frac{e_3^\nu}{2^\nu} \right)$$

verbunden sind. Der Coefficient von $(-1)^\nu e_3^\lambda s_{\nu-\lambda}$ hat hierin den Werth

$$\frac{(2\nu+1)!}{2^\lambda (2\nu-2\lambda+1)!\,\lambda!} = \frac{(2\nu+1)\,2\nu \ldots (2\nu-2\lambda+2)}{2^\lambda \lambda!}$$
$$= (2\nu+1)(2\nu-1)\ldots(2\nu-2\lambda+3) \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\lambda+1)}{\lambda!},$$

ist also eine ganze Zahl; demnach sind auch die Coefficienten der ganzen Functionen r_ν sämmtlich ganze Zahlen. Da nun die Function σu ihren Werth nicht ändert, wenn die Grössen e_1, e_2, e_3 in beliebiger Weise unter einander vertauscht werden, so ist auch r_ν eine ganze symmetrische Function, mit ganzzahligen Coefficienten, von e_1, e_2, e_3, und also auch eine Function der elementaren symmetrischen Functionen dieser Grössen, d. h. nach (22.) und (23.) von $\frac{g_2}{4}$ und $\frac{g_3}{4}$.

Durch Vergleich mit der Reihenentwicklung (16.) ergiebt sich

$$r_\nu = \sum a_{\lambda\mu} \left(\frac{g_2}{2}\right)^\lambda (2g_3)^\mu,$$

wo die Summe über alle ganzzahligen Werthe von λ und μ zu erstrecken ist, die durch die Bedingung

$$2\lambda + 3\mu = \nu$$

verknüpft sind. Mittels dieser Formel kann man nun leicht zeigen, dass die Grössen $a_{\lambda\mu}$ sämmtlich ganze Zahlen sein müssen. Wäre nämlich eine von ihnen ein Bruch, so würde der Recursionsformel (17.) zufolge der Nenner eine Potenz von 3 sein; dies ist aber nach dem vorher über r_ν Bemerkten nicht statthaft.

Sechstes Kapitel.

Lösung der Gleichung $\wp u = s$ durch Reihenentwicklung.

Um den analytischen Zusammenhang zwischen der $\wp$-Function und ihrem Argumente vollständig darzulegen, genügt es nicht, wie im Vorhergehenden geschehen ist, $\wp u$ mit Hilfe von Reihen, die nach Potenzen von u fortschreiten, auszudrücken, sondern es müssen auch Formeln entwickelt werden, vermittelst deren man alle Argumente finden kann, für welche die Function einen gegebenen Werth annimmt. Wir beginnen diese Untersuchung mit dem Nachweise, dass wenn s eine willkürlich angenommene Grösse bedeutet, sich stets Werthe von u finden lassen, die der Gleichung

$$\wp u = s \tag{1.}$$

genügen.

Zu diesem Zweck setzen wir

$$du = \frac{d\wp u}{\wp' u}$$

und entnehmen aus der Differentialgleichung

$$(\wp' u)^2 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$$

den Ausdruck

$$\frac{1}{\wp' u} = \frac{-1}{2} (\sqrt{\wp u})^{-3} (1 - e_1 \wp^{-1} u)^{-\frac{1}{2}} (1 - e_2 \wp^{-1} u)^{-\frac{1}{2}} (1 - e_3 \wp^{-1} u)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.}$$

Unter

$$(1+x)^m$$

soll dabei, wenn x dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist, stets derjenige Werth dieser Potenz verstanden werden, der durch die binomische Reihe

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \cdots$$

gegeben wird. Dann gilt die Gleichung (2.), deren linke Seite eindeutig bestimmt ist, bei passender Wahl des Werthes von $\sqrt{\wp u}$. Das negative Zeichen auf der rechten Seite ist dabei aus dem Grunde gesetzt, damit dieser Werth für reelle Invarianten und bei reellen, hinreichend kleinen Werthen von u negativ werde.

Nach Multiplication der drei Reihen für

$$(1-e_\lambda \wp^{-1}u)^{-\frac{1}{2}} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

erhält man

$$\frac{1}{\wp' u} = \frac{-1}{2\sqrt{\wp u}}\left(\wp^{-1}u + G_1 \wp^{-2}u + G_2 \wp^{-3}u + \cdots\right),$$

wo $G_1, G_2, \ldots$ ganze rationale symmetrische Functionen von e_1, e_2, e_3, d. h. ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind, und demnach

$$du = \frac{-1}{2\sqrt{\wp u}}\left(\wp^{-1}u + G_1 \wp^{-2}u + G_2 \wp^{-3}u + \cdots\right) d\wp u.$$

Daraus folgt, mit Berücksichtigung der Eigenschaft von $\wp u$, für $u = 0$ unendlich gross zu werden,

$$\text{(3.)} \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\wp u}}\left(1 + \frac{1}{3} G_1 \wp^{-1}u + \frac{1}{5} G_2 \wp^{-2}u + \cdots\right).$$

Diese Beziehung zwischen u und $\wp u$ gilt, so lange

$$\text{(4.)} \qquad |e_\lambda \wp^{-1}u| < 1 \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

ist, d. h. für alle Werthe von u, für die $\wp u$ dem absoluten Betrage nach grösser ist als jede der Grössen e_1, e_2, e_3.

Nun besteht für alle endlichen Werthe von u eine Entwickelung der Form

$$\wp u = \frac{H(u)}{G(u)},$$

in der $G(u)$ und $H(u)$ beständig convergirende, nach ganzen positiven Potenzen des Arguments fortschreitende Reihen bedeuten (S. 28), die nur gerade Potenzen enthalten. Betrachtet man im Besonderen alle Werthe des Bereiches, für den die Ungleichungen (4.) gelten, so kann man setzen:

$$\wp u = \frac{\mathfrak{H}(\wp^{-1}u)}{\mathfrak{G}(\wp^{-1}u)}$$

oder

$$\text{(5.)} \qquad \mathfrak{G}(\wp^{-1}u)\,\wp u = \mathfrak{H}(\wp^{-1}u),$$

wo auch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ gewöhnliche Potenzreihen sind. Da aber die Reihen auf der linken und rechten Seite dieser Gleichung für alle Werthe des Arguments $\wp u$ innerhalb eines bestimmten Bereiches einander gleich sind, so müssen sie in den Coefficienten übereinstimmen.

Dieses vorausgeschickt, sei nun s ein beliebiger Werth, der dem absoluten Betrage nach grösser als e_1, e_2, e_3 ist, und es werde bei beliebiger Annahme des Zeichens von $\sqrt{s}$

$$\text{(I.)} \qquad u = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(1 + \frac{1}{3} G_1 s^{-1} + \frac{1}{5} G_2 s^{-2} + \cdots\right)$$

gesetzt, so ist

$$G(u) = \mathfrak{G}(s^{-1}), \quad H(u) = \mathfrak{H}(s^{-1}),$$

also

$$\wp u = \frac{\mathfrak{H}(s^{-1})}{\mathfrak{G}(s^{-1})}.$$

Aus dieser Gleichung folgt in Verbindung mit der Identität

$$\mathfrak{G}(s^{-1}).s = \mathfrak{H}(s^{-1}):$$
$$\wp u = s,$$

d. h. die Gleichung (1.) wird durch die Formel (I.) erfüllt, wenn nur

$$|s| > |e_\lambda| \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

ist.

Angenommen weiter, es sei für irgend einen bestimmten, von e_1, e_2, e_3 verschiedenen Werth s_0 ein Argument u_0 gefunden, für das

$$\wp u_0 = s_0$$

ist, so hat man

$$\frac{(\wp' u)^2}{(\wp' u_0)^2} = \frac{4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3}{4 s_0^3 - g_2 s_0 - g_3} = \frac{\wp u - e_1}{s_0 - e_1}\,\frac{\wp u - e_2}{s_0 - e_2}\,\frac{\wp u - e_3}{s_0 - e_3},$$

oder wenn

$$\wp' u_0 = t_0$$

gesetzt wird,

$$(\wp' u)^2 = t_0^2\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_1 - s_0}\right)\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_2 - s_0}\right)\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_3 - s_0}\right).$$

Nimmt man u so nahe bei u_0 an, dass $\wp u - s_0$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als jede der Differenzen $e_1 - s_0, e_2 - s_0, e_3 - s_0$, so lässt sich aus

$$\frac{1}{\wp' u} = \frac{1}{t_0}\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_1 - s_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_2 - s_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_3 - s_0}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

eine Darstellung der Form

$$(6.)\qquad \frac{1}{\wp' u} = \frac{1}{t_0}\Big(1 + G_1(s_0)(\wp u - s_0) + G_2(s_0)(\wp u - s_0)^2 + \cdots\Big)$$

ableiten, in der die Coefficienten $G_1(s_0), G_2(s_0), \ldots$ aus s_0, g_2 und g_3 rational zusammengesetzt sind. Nach Multiplication mit $d\wp u$ liefert die Ausführung der Integration

$$(7.)\quad u - u_0 = \frac{1}{t_0}\Big((\wp u - s_0) + \frac{1}{2}G_1(s_0)(\wp u - s_0)^2 + \frac{1}{3}G_2(s_0)(\wp u - s_0)^3 + \cdots\Big).$$

Genau wie vorher kann man sich mittels der Gleichung

$$G(u)\wp u = H(u)$$

davon überzeugen, dass wenn man

$$(\text{II.})\qquad u - u_0 = \frac{1}{t_0}\Big((s - s_0) + \frac{1}{2}G_1(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{3}G_2(s_0)(s - s_0)^3 + \cdots\Big)$$

setzt, die Gleichung

$$\wp u = s$$

gelten muss, sobald nur $s - s_0$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als jede der Differenzen $e_1 - s_0, e_2 - s_0, e_3 - s_0$, was mit dem Ausdrucke: s liege in der Umgebung von s_0, bezeichnet werden soll.

Die Formeln (I., II.) reichen nun aus, um zu jedem gegebenen, nur von e_1, e_2, e_3 verschiedenen Werthe von s einen Werth von u zu berechnen, der die Gleichung (1.) befriedigt. Man nehme nämlich, was auf unendlich viele Weisen geschehen kann, eine Reihe von Grössen $s_0, s_1, \ldots s_n$ dergestalt an, dass die erste dem absoluten Betrage nach grösser ist als e_1, e_2, e_3, jede der übrigen in der Umgebung der ihr in der Reihe vorangehenden liegt, und schliesslich s in der Umgebung von s_n. Dann bestimme man vermittelst der Formel (I.) ein Argument u_0, für das

$$\wp u_0 = s_0$$

ist, darauf nach der Formel (II.), indem man in ihr

$$t_0 = \wp' u_0$$

nimmt, ein zweites, u_1, für das

$$\wp u_1 = s_1$$

ist; aus diesem auf dieselbe Weise ein drittes, u_2, wofür

$$\wp u_2 = s_2$$

wird, bis man, so fortfahrend, zu einem Argumente u_n gelangt, für das

$$\wp u_n = s_n$$

ist, und von dem man dann zu dem gesuchten übergehen kann. Über das Zeichen von $\sqrt{s_0}$ darf man bei der Berechnung von u_0 willkürlich verfügen. Ist dieses Zeichen aber fixirt, so sind die Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$, u eindeutig bestimmt, und es ist leicht zu sehen, dass wenn man den entgegengesetzten Werth von $\sqrt{s_0}$ nimmt, man schliesslich auch $-u$ für u erhält. Man kann daher bewirken, dass $\wp' u$ sowohl dem einen als dem anderen der beiden Werthe von $\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}$ gleich wird; das erhaltene Resultat lässt sich somit folgendermassen aussprechen:

Sind s und t irgend zwei durch die Gleichung

$$t^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

verbundene Grössen, so lässt sich durch eine endliche Anzahl von Reihenentwicklungen stets ein Argument u dergestalt bestimmen, dass

$$\wp u = s, \quad \wp' u = t$$

wird.

Hierbei ist jedoch der Fall, dass s einer der Grössen e_1, e_2, e_3 gleich ist, noch nicht berücksichtigt und muss besonders behandelt werden.

Zu dem Ende nehme man einen Werth s_0 in der Umgebung von e_1 an, denke sich auf die angegebene Weise ein zugehöriges Argument u_0 bestimmt und beschränke dann u auf einen diesen Werth enthaltenden Bereich von so geringer Ausdehnung, dass $\wp u$ beständig in der Umgebung von e_1 liegt. Dann setze man

$$\frac{1}{\wp' u} = \frac{1}{2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}}\,\frac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}}\left(1 - \frac{\wp u - e_1}{e_2 - e_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\wp u - e_1}{e_3 - e_1}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

nach willkürlicher Annahme des Werthes von $\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}$, wodurch dann auch der von $\sqrt{\wp u - e_1}$ bestimmt ist; durch Reihenentwicklung folgt hieraus

$$\frac{1}{\wp' u} = \frac{1}{2\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}\,\frac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}}\left(1+\overline{G}_1(e_1)(\wp u - e_1)+\overline{G}_2(e_1)(\wp u - e_1)^2+\cdots\right),$$

wo die Coefficienten $\overline{G}_1(e_1)$, $\overline{G}_2(e_1)$, ... aus e_1, g_2 und g_3 rational zusammengesetzt sind. Durch das schon zweimal angewendete Verfahren ergiebt sich

$$u = \omega_1 + \frac{\sqrt{\wp u - e_1}}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}\left(1+\frac{1}{3}\overline{G}_1(e_1)(\wp u - e_1)+\frac{1}{5}\overline{G}_2(e_1)(\wp u - e_1)^2+\cdots\right),$$

unter ω_1 eine Constante verstanden. Zu ihrer Bestimmung setze man $u = u_0$, so wird

$$\omega_1 = u_0 - \frac{\sqrt{\wp u_0 - e_1}}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}\left(1+\frac{1}{3}\overline{G}_1(e_1)(\wp u_0 - e_1)+\cdots\right)$$

oder

$$(8.)\quad \omega_1 = u_0 - \frac{\wp' u_0}{2(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\left(1-\frac{\wp u_0 - e_1}{e_2-e_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\wp u_0 - e_1}{e_3-e_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{3}\overline{G}_1(e_1)(\wp u_0 - e_1)+\cdots\right).$$

Aus der letzteren Darstellung geht hervor, dass ω_1 durch u_0 eindeutig bestimmt ist.

Wie vorher folgt dann weiter, dass wenn man

$$(\text{III.})\quad u = \omega_1 + \frac{\sqrt{s-e_1}}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}\left(1+\frac{1}{3}\overline{G}_1(e_1)(s-e_1)+\frac{1}{5}\overline{G}_2(e_1)(s-e_1)^2+\cdots\right)$$

setzt und dabei das Zeichen von $\sqrt{s-e_1}$ beliebig annimmt, man immer

$$\wp u = s$$

erhält, sobald nur s in der Umgebung von e_1 liegt. Für s gleich e_1 selbst ergiebt sich

$$\wp \omega_1 = e_1.$$

Vertauscht man endlich e_1 mit e_2 oder e_3 und nimmt u_0 so an, dass $\wp u_0$ in der Umgebung von e_2 oder e_3 liegt, so erhält man, der Formel (8.) entsprechend, zwei Argumente ω_2, ω_3, die den Gleichungen

$$\wp \omega_2 = e_2, \quad \wp \omega_3 = e_3$$

genügen.

Siebentes Kapitel.

Bestimmung aller Lösungen der Gleichung $\wp u = s$.

Nachdem im vorigen Kapitel bewiesen worden ist, dass man stets einen oder vielmehr zwei nur durch das Vorzeichen unterschiedene Werthe von u finden kann, für welche $\wp u$ einen gegebenen Werth s annimmt, kommt es jetzt darauf an, alle Argumente zu ermitteln, die die Gleichung

$$\wp u = s$$

befriedigen. Die Beantwortung der Frage, ob es, wenn $\wp u' = s$ ist, ausser $\pm u'$ überhaupt Argumentwerthe giebt, für welche die $\wp$-Function denselben Werth erhält, kann mit Hilfe des Additionstheorems angebahnt werden. Hierbei wird es zum ersten Mal von praktischer Bedeutung, dass dieses Theorem für beliebige Werthe von u gilt. Dass dem in der That so ist, ersieht man aus dem im dritten Kapitel geführten Beweise. Wenn die abgeleiteten Resultate dort auf die Werthe innerhalb eines bestimmten Bereiches beschränkt blieben, so hatte dies seinen Grund nur darin, dass die $\wp$-Function noch nicht darüber hinaus definirt war.

Es werde nun angenommen, für einen von $\pm u'$ verschiedenen Werth u'' sei

$$\wp u'' = \wp u'.$$

Aus

$$4\wp^3 u'' - g_2 \wp u'' - g_3 = 4\wp^3 u' - g_2 \wp u' - g_3$$

oder

$$(\wp' u'')^2 = (\wp' u')^2$$

folgt dann

$$\wp' u'' = \pm \wp' u'.$$

Falls hierin das obere Zeichen gilt, so ergiebt sich aus der Formel des

Additionstheorems (S. 25),

$$\wp(u+u') = \frac{(\wp u+\wp u')(2\wp u\,\wp u'-\frac{1}{2}g_2)-g_3-\wp' u\,\wp' u'}{2(\wp u-\wp u')^2},$$

in der u irgend einen endlichen Werth bezeichnen soll, für den auch $\wp u$ endlich ist, die Gleichung

$$\wp(u+u') = \wp(u+u'').$$

Ist aber

$$\wp' u'' = -\wp' u',$$

so folgt

$$\wp(u-u') = \wp(u+u'').$$

Im ersten Falle ersetze man u durch $u-u'$, im zweiten durch $u+u'$, so wird

$$\wp u = \wp(u+u''-u')$$

und

$$\wp u = \wp(u+u''+u')$$

und weiter, wenn

$$u''\pm u' = w$$

gesetzt wird,

$$\wp u = \wp(u+w).$$

Da die $\wp$-Function für $u=0$ unendlich wird, so muss auch $\wp w$ unendlich gross sein. Das heisst:

Wenn es Werthe u'' ausser u' giebt, für die die $\wp$-Function den Werth $\wp u'$ annimmt, so muss sich u'' in der Form

$$u'' = \pm u'+w$$

darstellen lassen, wo w eine Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function bedeutet.

Ob es solche Stellen ausser $u=0$ wirklich giebt, ist bis jetzt freilich nicht entschieden. Um aber überhaupt die Frage nach der Existenz von Argumenten u'' auf die nach dem Vorhandensein der Unendlichkeitsstellen w zurückführen zu können, hat man zuerst noch zu untersuchen, ob jede Unendlichkeitsstelle für den vorliegenden Zweck brauchbar ist, ob also, wenn von w nichts weiter bekannt ist, als dass $\wp u$ für $u=w$ unendlich gross wird, immer behauptet werden kann, es sei

$$\wp(\pm u'+w) = \wp u'.$$

Das doppelte Vorzeichen kann weggelassen werden; denn wenn

$$\wp(u+w) = \wp u$$

ist, so folgt daraus

$$\wp(\pm u+w) = \wp(\pm u) = \wp u.$$

Der Werth von $\wp(u+w)$ kann aus dem Additionstheorem durch einen Grenzübergang abgeleitet werden. Sondert man im Zähler und Nenner der Formel für $\wp(u+v)$ den Factor $\wp^2 v$ ab und lässt v sich einem Werthe w nähern, für den $\wp w$ unendlich gross wird, so wird der Nenner gleich 2. Im Zähler

$$\left(\frac{\wp u}{\wp v}+1\right)\left(2\wp u-\frac{g_2}{2\wp v}\right)-\frac{g_3}{\wp^2 v}-\frac{\wp' u\,\wp' v}{\wp^2 v}$$

reducirt sich das von den Ableitungen freie Aggregat auf $2\wp u$, und das letzte Glied fällt weg, weil $\wp' v$ von derselben Ordnung unendlich wird wie $(\wp v)^{\frac{3}{2}}$. Demnach ist in der That

$$\wp(u+w) = \wp u,$$

woraus folgt, dass wenn w eine beliebige Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function bedeutet, die Annahme

$$u'' = \pm u'+w$$

immer die Gleichung

$$\wp u'' = \wp u'$$

nach sich zieht.

Um nun zu zeigen, dass solche Werthe w, für die $\wp w$ unendlich gross wird, wirklich existiren, gehen wir von der Bemerkung aus, dass für jeden Werth von u die Gleichung

$$\wp(u+v) = \wp(u-v)$$

besteht, wenn $\wp' v$ verschwindet, d. h. wenn $\wp v$ einen der Werthe e_1, e_2, e_3 hat; daraus folgt dann

$$\wp(u+2v) = \wp u,$$

also

$$\wp(2v) = \infty.$$

Man kann daher für w jede der Grössen

$$2\omega_1,\ 2\omega_2,\ 2\omega_3$$

(S. 56) nehmen, von denen unter der hier zu machenden Voraussetzung, dass keine der Differenzen $e_2 - e_3$, $e_3 - e_1$, $e_1 - e_2$ verschwinde, keine zwei einander gleich sind.

Dieses vorausgeschickt, seien w' und w'' irgend zwei solche Werthe von w, so folgt aus der Gleichung

$$\wp(u+w') = \wp u:$$

$$\wp u = \wp(u+w') = \wp(u+2w') = \wp(u+3w') = \cdots$$

und auch

$$\wp u = \wp(u-w') = \wp(u-2w') = \wp(u-3w') = \cdots;$$

d. h. es ist für jeden ganzzahligen Werth von m

$$\wp(u+mw') = \wp u.$$

Ebenso hat man, wenn auch n eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$\wp(u+nw'') = \wp u.$$

Setzt man in dieser Gleichung $u+mw'$ für u, so ergiebt sich

$$\wp(u+mw'+nw'') = \wp u,$$

also

$$\wp(mw'+nw'') = \infty.$$

Auf diese Weise lassen sich aus w' und w'' unendlich viele andere Unendlichkeitsstellen w ableiten. Es lässt sich aber auch zeigen, und für die Theorie der $\wp$-Function ist dies von der wesentlichsten Bedeutung, dass bei passender Wahl von w' und w'' der Ausdruck

$$mw' + nw''$$

alle Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function enthält.

Um diesen Satz zu beweisen, denken wir uns sämmtliche Werthe w in bekannter Weise durch Punkte in einer Ebene dargestellt. Zu den Unendlichkeitsstellen gehört auch der Nullpunkt, der jetzt mit w_0 bezeichnet werden soll. Man verbinde ihn mit irgend einem anderen der betrachteten Punkte, w', und bezeichne mit w_1 diejenige Stelle w auf der Geraden $w_0 w'$, die der Stelle w_0 am nächsten liegt. Da die in der Nähe des Nullpunkts geltende Entwickelung

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u^2)$$

für alle Werthe eines bestimmten Bereiches convergirt, d. h. die $\wp$-Function

innerhalb dieses Bereiches nur für $u = 0$ unendlich gross wird, so muss w_1 nothwendig einen endlichen Abstand von w_0 haben.

Alle für ein beliebiges ganzzahliges m durch den Ausdruck

$$mw_1$$

dargestellten Punkte gehören ebenfalls dem System w an und liegen auf der durch w_0 und w_1 gehenden unbegrenzten geraden Linie. Ein in dieser Geraden ganz willkürlich angenommener Punkt ist durch

$$\mu w_1$$

darstellbar, wo μ eine reelle Grösse bedeutet. Gehört er zu den Unendlichkeitsstellen, so gehört dazu auch

$$\mu w_1 - m' w_1,$$

wenn m' die grösste in μ enthaltene ganze Zahl ist. Dieser Punkt liegt auf der Strecke $w_0 w_1$, fällt aber nicht mit w_1 zusammen. Nach der Erklärung von w_1 muss er daher mit w_0 zusammenfallen, d. h. es muss μ gleich der ganzen Zahl m' sein. Hiernach liefert der Ausdruck mw_1 alle in der genannten Linie enthaltenen Punkte des Systems.

Es giebt aber nothwendig noch Punkte w ausserhalb dieser Geraden. Denn aus

$$\wp(u+w_1) = \wp u$$

folgt

$$\wp'(u+w_1) = \wp' u,$$

und hieraus für $u = -\frac{w_1}{2}$, wo $\frac{w_1}{2}$ keine Unendlichkeitsstelle ist,

$$\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) = \wp'\left(-\frac{w_1}{2}\right) = -\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right),$$

d. h.

$$\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) = 0.$$

Es muss also $\wp\left(\frac{w_1}{2}\right)$ gleich einer der Grössen e_1, e_2, e_3 sein, die mit e bezeichnet werde. Versteht man nun unter w'' einen Werth, für den $\wp\left(\frac{w''}{2}\right)$ einer der beiden anderen Grössen, die e' heisse, gleich wird, so hat man auch

$$\wp w'' = \infty.$$

Läge nun w'' auf der geraden Linie $w_0 w_1$, so müsste bei passender Wahl von m

$$w'' = mw_1$$

sein. Dann wäre aber weiter für einen geraden Werth, $m = 2l$,

$$\wp\left(\frac{w''}{2}\right) = \wp(lw_1) = \infty,$$

und für einen ungeraden, $m = 2l+1$,

$$\wp\left(\frac{w''}{2}\right) = \wp\left(lw_1 + \frac{w_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) = e,$$

also in keinem Falle gleich e'.

Hiernach bilden die Punkte w_0, w_1, w'' ein Dreieck. Sind in diesem noch andere Stellen w vorhanden, so liegen sie doch sicher alle in endlichen Abständen von der Linie $w_0 w_1$. Denn in der Umgebung jedes zwischen w_0 und w_1 gelegenen Punktes lässt sich die $\wp$-Function in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickeln, die für alle Stellen eines bestimmten Bereiches convergirt, also nicht unendlich gross wird. In der Nähe von w_0 gilt die Entwickelung

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u^2),$$

die, wie bereits benutzt, innerhalb eines gewissen, den Punkt w_0 umgebenden Kreises nur in diesem Punkte eine Unendlichkeitsstelle hat. Endlich erhält man, wenn man $u - w = h$ setzt, die vorstehende Gleichung in der Form

$$\wp h = \frac{1}{h^2} + \mathfrak{P}(h^2)$$

benutzt und

$$\wp(u-w) = \wp u$$

berücksichtigt, für die $\wp$-Function in der Nähe irgend einer Unendlichkeitsstelle w, z. B. w_1, die Darstellung

$$\wp u = \frac{1}{(u-w)^2} + \mathfrak{P}((u-w)^2),$$

wo die Potenzreihe wieder einen endlichen Convergenzbereich hat.

Es sei nun w_2 diejenige in dem Dreieck $w_0 w_1 w''$ gelegene Unendlichkeitsstelle, die von $w_0 w_1$ den kleinsten Abstand hat. Sind mehrere Stellen in gleichem kürzesten Abstande vorhanden, so behalte man eine beliebige von ihnen bei, z. B. die dem Punkte w_0 zunächst gelegene. Innerhalb des Dreiecks $w_0 w_1 w_2$ befinden sich keine Unendlichkeitsstellen mehr. Zieht man dann von w_1 und w_2 aus Parallelen zu $w_0 w_2$ und $w_0 w_1$, die sich in w_3 schneiden mögen,

so enthält auch das Parallelogramm $w_0 w_1 w_3 w_2$ ausser seinen vier Ecken keinen weiteren Punkt des Systems w. Alle Punkte dieses Parallelogramms, die auf den Seiten eingeschlossen, werden nämlich durch den Ausdruck

$$\mu w_1 + \nu w_2$$

dargestellt, wenn den Zahlen μ und ν alle Werthe von 0 bis 1 beigelegt werden. Dabei liegt ein solcher Punkt in dem Dreieck $w_0 w_1 w_2$ oder $w_3 w_1 w_2$, je nachdem $\mu + \nu$ kleiner oder grösser als Eins ist. Jedem Punkte in dem ersten Dreieck entspricht nun einer in dem zweiten, der durch

$$(1-\mu) w_1 + (1-\nu) w_2 = w_1 + w_2 - (\mu w_1 + \nu w_2)$$

dargestellt wird. Beide gehören also gleichzeitig dem System an oder nicht an, woraus unmittelbar folgt, dass von den Punkten des zweiten Dreiecks nur diejenigen, die den Ecken des ersten entsprechen, Unendlichkeitsstellen sein können, d. h. ausser w_1 und w_2 nur noch w_3.

Endlich kann ein beliebiger Punkt der complexen Ebene, weil das Verhältniss $w_1 : w_2$ nicht reell ist, durch den Ausdruck

$$\alpha w_1 + \beta w_2$$

dargestellt werden, wo α und β reelle Zahlen sind. Bestimmt man zwei ganze Zahlen m und n so, dass für

$$0 \leqq \mu < 1, \quad 0 \leqq \nu < 1$$

die Gleichungen

$$\alpha = m + \mu, \quad \beta = n + \nu$$

gelten, so wird hierdurch jedem Punkte der Ebene ein Punkt im Innern und auf den Seiten $w_0 w_1$, $w_0 w_2$ des Parallelogramms $w_0 w_1 w_3 w_2$, deren Endpunkte w_1, w_2 ausgeschlossen, zugeordnet, und der angenommene Punkt gehört nach dem eben Bewiesenen nur dann zu den Unendlichkeitsstellen, wenn $\mu = \nu = 0$ ist. Das heisst:

Es existiren zwei Werthe w_1, w_2 des Arguments der $\wp$-Function von der Art, dass sämmtliche Unendlichkeitsstellen der Function in der Form

$$m w_1 + n w_2$$

enthalten sind; w_1 und w_2 sind dabei nur an die Bedingung gebunden, dass in dem Dreieck $w_0 w_1 w_2$ kein weiterer Unendlichkeitspunkt gelegen ist.

Nach der Erörterung, die auf die Stelle w geführt hat, kann man nun weiter behaupten:

Für jeden Werth s giebt es unendlich viele Werthe u, für die $\wp u = s$ wird. Ist u' einer von ihnen, so sind alle übrigen in der Form

$$u = \pm u' + mw_1 + nw_2$$

enthalten, und für das obere Vorzeichen hat $\wp' u$ dasselbe Zeichen wie $\wp' u'$, für das untere das entgegengesetzte.

Schon in der Einleitung ist als Periode einer Function eine Constante bezeichnet worden, deren Hinzufügung zum Argument den Werth der Function nicht ändert. Wir erkennen hier, für die $\wp$-Function, die Existenz zweier Perioden w_1 und w_2, deren Verhältniss $w_1 : w_2$ nicht reell ist, und durch die sich sämmtliche Perioden in der Form

$$mw_1 + nw_2$$

darstellen lassen, unter m und n ganze Zahlen verstanden. Die $\wp$-Function wird deshalb als doppelt periodisch bezeichnet, die beiden Grössen w_1 und w_2 bilden ein primitives Periodenpaar.

Wie schon aus der Construction auf S. 62 geschlossen werden kann, ist ein solches Periodenpaar nicht eindeutig bestimmt. Rein analytisch lässt sich dies in folgender Art beweisen: Es seien W_1 und W_2 zunächst zwei beliebige Perioden der $\wp$-Function, die sich also als homogene lineare Functionen von w_1 und w_2 mit ganzzahligen Coefficienten darstellen lassen müssen:

$$W_1 = pw_1 + qw_2,$$
$$W_2 = p'w_1 + q'w_2.$$

Unendlich viele Perioden werden durch den Ausdruck

$$aW_1 + bW_2$$

gegeben, in dem a und b ebenfalls ganze Zahlen bezeichnen. Sollen sämmtliche Perioden durch diesen Ausdruck darstellbar sein, so müssen a, b, p, q, p', q' sich so bestimmen lassen, dass für jedes Paar ganzer Zahlen m, n

$$mw_1 + nw_2 = aW_1 + bW_2$$

gesetzt werden kann, was die Gleichungen

$$ap + bp' = m,$$
$$aq + bq' = n$$

nach sich zieht. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die gestellte Forderung folgt hieraus in der Form

$$pq' - qp' = \pm 1.$$

Man kann also, nachdem man p und q als ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler angenommen hat, noch auf unendlich viele Weisen p' und q' so wählen, dass $aW_1 + bW_2$ dieselbe Mannigfaltigkeit von Grössen darstellt wie $mw_1 + nw_2$, d. h. dass (W_1, W_2) an die Stelle des primitiven Periodenpaares (w_1, w_2) treten darf.

Irgend eine Periode w, die mit einer anderen w' zusammen ein primitives Periodenpaar bilden kann, soll als primitive Periode bezeichnet werden. Setzt man

$$w = 2\omega,$$

so ist ω keine Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function, denn $\omega = \frac{w}{2}$ lässt sich nicht in der Form $mw + nw'$ darstellen; ω soll als halbe Periode bezeichnet werden. Nach S. 56 ist dann $\wp\omega$ gleich einer der Grössen e_λ, wir wollen annehmen: gleich e_1.

Es soll untersucht werden, wie die $\wp$-Function sich ändert, wenn ihr Argument um eine solche halbe Periode vermehrt wird. Nach dem Additionstheorem ist wegen $\wp'\omega = 0$:

$$\wp(u + \omega) = \frac{(\wp u + e_1)(2e_1 \wp u - \frac{1}{2} g_2) - g_3}{2(\wp u - e_1)^2}.$$

Nun ist (S. 46 (22., 23.))

$$e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\frac{1}{4} g_2,$$
$$e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3,$$

mithin

$$\wp(u + \omega) = \frac{(\wp u + e_1)(e_1 \wp u + e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) - 2e_1 e_2 e_3}{(\wp u - e_1)^2}.$$

Im Zähler fällt $e_1 \wp^2 u$ weg, wenn e_1 auf beiden Seiten der Gleichung subtrahirt wird. Unter Benutzung der Relation

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

erhält man dann

$$\wp(u + \omega) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp u - e_1}. \tag{1.}$$

Es sei ω' eine halbe Periode, die zu e_3 gehört, sodass

$$\wp\omega' = e_3$$

ist. Aus der eben abgeleiteten Gleichung folgt dann

$$\wp(\omega+\omega') = e_2.$$

Setzt man nun

$$\omega = \omega_1,$$
$$\omega+\omega' = \omega_2,$$
$$\omega' = \omega_3,$$

so ergiebt sich in gleicher Weise wie vorher die allgemeinere Formel

$$(2.)\qquad \wp(u+\omega_\alpha)-e_\alpha = \frac{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha},$$

wo α, β, γ die Zahlen 1, 2, 3 in irgend einer Reihenfolge bedeuten.

Achtes Kapitel.

Grundformeln der Theorie der σ-Function.

Mit der $\wp$-Function war die σ-Function durch die Relation (S. 35 (11.))

$$\wp u = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u\,\sigma'' u}{\sigma^2 u}$$

verbunden. Soll nun $\wp u$ für $u = w$ unendlich gross werden, so muss, weil $\sigma'^2 u - \sigma u \sigma'' u$ wegen der beständigen Convergenz der σ-Reihe für keinen endlichen Werth von u unendlich werden kann, der Nenner der rechten Seite, also σu selbst, für das Argument w verschwinden. D. h. jede Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function ist Nullstelle der σ-Function.

Aber auch das Umgekehrte gilt. Es werde nämlich angenommen, die Function σu verschwinde für $u = w$, und zwar nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen, sodass für hinreichend kleine Werthe von $|u-w|$

$$\sigma u = \frac{(u-w)^n}{n!}\sigma^{(n)} w + \cdots$$

oder

$$\sigma u = c(u-w)^n (1 + \mathfrak{P}_0(u-w))$$

gesetzt werden kann. Behufs Herstellung von

$$\wp u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}$$

bilde man

$$\log \sigma u = \log c + n \log(u-w) + \mathfrak{P}(u-w),$$

wo die Potenzreihe $\mathfrak{P}(u-w)$, immer für Werthe von u, die hinreichend nahe bei w liegen, aus der Entwickelung von $\log(1+\mathfrak{P}_0(u-w))$ entstanden ist; dann ergiebt sich

$$-\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = \frac{n}{(u-w)^2} - \mathfrak{P}''(u-w).$$

Hiernach wird in der That $\wp u$ für $u = w$ unendlich gross, und zwar von der zweiten Ordnung.

Vergleicht man nun andererseits diese Entwickelung mit der, die aus der Gleichung (S. 25)

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u^2)$$

dadurch folgt, dass $u-w$ für u gesetzt wird, nämlich

$$\wp(u-w) = \frac{1}{(u-w)^2} + \mathfrak{P}((u-w)^2),$$

so sieht man, dass

$$n = 1$$

sein muss. Die Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function sind also Nullstellen erster Ordnung der σ-Function; schon die erste Ableitung, $\sigma' u$, verschwindet für $u = w$ nicht mehr.

Aus der Gleichung

$$\frac{d^2 \log \sigma(u + m w_1 + n w_3)}{du^2} = \frac{d^2 \log \sigma u}{du^2},$$

durch welche die doppelte Periodicität der $\wp$-Function gekennzeichnet werden kann, folgt nun durch wiederholtes Differentiiren

$$\frac{d^r \log \sigma(u + m w_1 + n w_3)}{du^r} = \frac{d^r \log \sigma u}{du^r},$$

d. h. alle Ableitungen des Logarithmus der σ-Function, deren Ordnung grösser als Eins ist, sind doppelt periodische Functionen. Es kommt jedoch darauf an, die Änderung der ersten Ableitung dieses Logarithmus und namentlich auch die der σ-Function selbst bei einer Vermehrung ihres Arguments um eine Periode der $\wp$-Function zu untersuchen.

Im Folgenden sollen nur solche Perioden betrachtet werden, deren Hälften nicht wieder Perioden oder Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function sind.

Aus

$$\wp(u + 2\omega) = \wp u$$

folgt

$$\wp(u+\omega) = \wp(u-\omega)$$

oder

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega) - \frac{d}{du}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega) = 0.$$

Eine einmalige Integration liefert

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega) = C.$$

Zur Bestimmung der Constanten C darf man $u = 0$ setzen, weil die in der entstehenden Gleichung

$$C = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega - \frac{\sigma'}{\sigma}(-\omega)$$

auftretende Grösse $\sigma\omega$ von Null verschieden ist. Da

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(-u) = -\frac{\sigma'}{\sigma}u$$

ist (S. 33), so hat man

$$C = 2\frac{\sigma'}{\sigma}\omega$$

zu setzen und erhält dann

$$(1.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega) + 2\frac{\sigma'}{\sigma}\omega.$$

Daraus ergiebt sich schliesslich

$$(2.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2\frac{\sigma'}{\sigma}\omega.$$

Es sei nun ω' eine von ω verschiedene halbe Periode der $\wp$-Function, in dem Sinne, dass $\wp\omega$ und $\wp\omega'$ verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

gleich sind. Dann ist auch

$$(3.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2\frac{\sigma'}{\sigma}\omega'.$$

Ersetzt man in (2.) u durch $u + 2\omega$ und benutzt die Gleichung selbst, so bekommt man

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+4\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 4\frac{\sigma'}{\sigma}\omega,$$

und bei wiederholter Anwendung desselben Verfahrens

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+2m\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2m\frac{\sigma'}{\sigma}\omega. \tag{4.}$$

In gleicher Weise folgt aus (3.)

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+2n\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2n\frac{\sigma'}{\sigma}\omega' \tag{5.}$$

und durch Vereinigung beider Formeln

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+2m\omega+2n\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2m\frac{\sigma'}{\sigma}\omega + 2n\frac{\sigma'}{\sigma}\omega'. \tag{6.}$$

Versteht man unter $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar, sodass der Ausdruck $2m\omega+2n\omega'$ geeignet ist, alle Perioden darzustellen, so kennzeichnet die letzte Gleichung das Verhalten der Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ bei einer Änderung ihres Arguments um eine beliebige Periode der $\wp$-Function.

Werden die Bezeichnungen

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\omega = \eta, \quad \frac{\sigma'}{\sigma}\omega' = \eta' \tag{7.}$$

eingeführt, so heisst die Formel (6.):

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+2m\omega+2n\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2m\eta + 2n\eta'. \tag{8.}$$

Sie nimmt für

$$m\omega + n\omega' = \bar{\omega},$$
$$m\eta + n\eta' = \bar{\eta}$$

die Form an

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+2\bar{\omega}) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2\bar{\eta}. \tag{9.}$$

Bei einer Vermehrung ihres Arguments um eine Periode der $\wp$-Function ändert sich hiernach die Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ um eine additive Constante, die aus den beiden Grössen 2η und $2\eta'$ ebenso zusammengesetzt ist wie die Periode aus 2ω und $2\omega'$.

Ersetzt man u durch $u-\bar{\omega}$, so geht die Gleichung (9.) in

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+\bar{\omega}) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\bar{\omega}) + 2\bar{\eta} \tag{10.}$$

über.

Sind nun m und n nicht beide gerade, also $\bar{\omega}$ nicht selbst eine Periode und demnach $\sigma\bar{\omega}$ nicht Null, so kann man in dieser Formel $u=0$ setzen und erhält

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\bar{\omega} = \frac{\sigma'}{\sigma}(-\bar{\omega}) + 2\bar{\eta}$$

oder

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\bar{\omega} = \bar{\eta},$$

d. h.

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(m\omega+n\omega') = m\frac{\sigma'}{\sigma}\omega + n\frac{\sigma'}{\sigma}\omega'. \tag{11.}$$

Diese Relation ist für die Theorie der Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ wichtig, wenn man diese Function ausser von dem Argument u noch als abhängig von zwei anderen Grössen betrachtet, nämlich von ω und ω' oder, was auf dasselbe hinauskommt, von zweien der Grössen e_1, e_2, e_3 oder von den beiden Invarianten g_2 und g_3.

Durch Integration nach u folgt aus (10.) nun weiter:

$$\sigma(u+\bar{\omega}) = \quad Ce^{2\bar{\eta}u}\sigma(u-\bar{\omega})$$

oder

$$\sigma(\bar{\omega}+u) = -Ce^{2\bar{\eta}u}\sigma(\bar{\omega}-u).$$

Zur Bestimmung der Constanten C kann man, wenn $\sigma\bar{\omega}$ nicht Null ist, $u=0$ setzen und erhält

$$C = -1.$$

Dieses Verfahren ist nicht mehr anwendbar, wenn m und n beide gerade sind. Eine Reihenentwicklung liefert dann

$$u\sigma'\bar{\omega} + \cdots = -C(1+2\bar{\eta}u+\cdots)(-u\sigma'\bar{\omega}+\cdots),$$

und durch Vergleichung der Anfangsglieder findet sich, weil $\sigma'\bar{\omega}$ nicht verschwindet (S. 68),

$$C = 1.$$

Hiernach ist

$$\sigma(u+\bar{\omega}) = \pm e^{2\bar{\eta}u}\sigma(u-\bar{\omega}),$$

also

$$\sigma(u+2\bar{\omega}) = \pm e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega})}\sigma u,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem $\sigma\bar{\omega}$ verschwindet oder nicht, d. h. jenachdem m und n beide gerade sind oder nicht. Um das Vorzeichen durch eine Potenz $(-1)^k$ zu ersetzen, hat man nur zu beachten, dass das Product $(m+1)(n+1)$ stets gerade ist, ausser wenn m und n gleichzeitig gerade sind, dass also

$$k = (m+1)(n+1)-1$$

die gestellte Bedingung erfüllt. Die gefundene Formel lautet demnach, genauer geschrieben:

$$\sigma(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n}\, e^{2(m\eta+n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\,\sigma u. \tag{12.}$$

Bei Vermehrung ihres Argumentes um eine Periode der $\wp$-Function ändert sich die σ-Function um einen Exponentialfactor, in dem der Exponent eine lineare Function von u ist.

Im Besonderen wird

$$\begin{aligned} \sigma(u+2\omega) &= -e^{2\eta(u+\omega)}\,\sigma u, \\ \sigma(u+2\omega') &= -e^{2\eta'(u+\omega')}\,\sigma u. \end{aligned} \tag{13.}$$

Ersetzt man u in der ersten dieser Gleichungen durch $u+2\omega'$, in der zweiten durch $u+2\omega$, so erhält man zwei verschiedene Ausdrücke für $\sigma(u+2\omega+2\omega')$, die mit einander verglichen

$$e^{2\eta(u+2\omega'+\omega)+2\eta'(u+\omega')} = e^{2\eta'(u+2\omega+\omega')+2\eta(u+\omega)}$$

liefern. Die Differenz der Exponenten, aus der u von selbst wegfällt, kann nur gleich einem Vielfachen von $2\pi i$ sein, d. h. man hat

$$\eta\omega'-\omega\eta' = \frac{l\pi i}{2}.$$

In dieser wichtigen Relation muss die ganze Zahl l sich ermitteln lassen, weil die linke Seite nach Annahme von ω und ω' eindeutig definirt ist. Diese Bestimmung soll später ausgeführt, hier aber nur gezeigt werden, dass l eine ungerade Zahl ist.

Formt man nämlich den ersten Ausdruck für $\sigma(u+2\omega+2\omega')$, zu dem man durch das beschriebene Verfahren kommt, dadurch um, dass man einmal $2\eta\omega'$ durch den aus der Relation folgenden Werth $2\omega\eta'+l\pi i$ ersetzt,

so wird

$$\begin{aligned} \sigma(u+2\omega+2\omega') &= e^{2\eta(u+\omega+\omega')+2\eta'(u+\omega')+2\eta'\omega+l\pi i}\,\sigma u \\ &= (-1)^l e^{2(\eta+\eta')(u+\omega+\omega')}\,\sigma u. \end{aligned}$$

Für $m=n=1$ wird aber der Zahlenfactor in der Gleichung (12.) gleich -1, also muss l von der Form $2k+1$ und

$$\eta\omega'-\omega\eta' = \frac{(2k+1)\pi i}{2} \tag{14.}$$

sein.

Neuntes Kapitel.

Die Perioden der $\wp$-Function für reelle Invarianten.

Der in den Anwendungen der elliptischen Functionen am häufigsten vorkommende Fall ist der, dass die Invarianten g_2 und g_3 reell sind. Dabei hat man aber noch die beiden Möglichkeiten zu unterscheiden, dass die Grössen e_1, e_2, e_3 alle drei reell oder zwei von ihnen conjugirt complex sind. Bezeichnet man mit G die Discriminante der ganzen Function

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3),$$

setzt also

$$(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2 = G$$

oder

$$\frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = G, \tag{1.}$$

so werden diese beiden Annahmen durch das Vorzeichen von G gekennzeichnet.

Es sei nun erstens

$$g_2^3 - 27g_3^2 > 0,$$

und die drei alsdann reellen Grössen e_1, e_2, e_3 in absteigender Folge geordnet:

$$e_1 > e_2 > e_3. \tag{2.}$$

Wir betrachten die $\wp$-Function zunächst für kleine reelle positive Werthe des Argumentes. Für solche ist (S. 23)

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u),$$

wenn in der Bezeichnung kein Gewicht darauf gelegt wird, dass in der gewöhnlichen Potenzreihe $\mathfrak{P}$ nur gerade Potenzen vorkommen; daraus folgt

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + \mathfrak{P}'(u).$$

Zu $u = 0$ gehört $\wp u = \infty$. Wächst u, so nimmt $\wp u$ ab, wie der Ausdruck von $\wp' u$ lehrt, und dieses Abnehmen dauert sicher so lange, bis die stetige Function $\wp' u$ zum ersten Mal gleich Null geworden ist, was für $u = \omega$ eintreten möge. Wegen

$$(\wp' u)^2 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$$

und der zwischen e_1, e_2, e_3 festgesetzten Grössenordnung muss dann die $\wp$-Function den Werth e_1 annehmen, also die Gleichung

$$\wp \omega = e_1 \tag{3.}$$

gelten. Dem Intervall $0 \dots \omega$ des Arguments u ist das Intervall $+\infty \dots e_1$ der Function $\wp u$ eindeutig zugeordnet.

Jenseits des Argumentwerthes ω kann der Verlauf der $\wp$-Function mittels der Gleichung

$$\wp(u+\omega) = \wp(u-\omega)$$

oder

$$\wp(\omega+u) = \wp(\omega-u) \tag{4.}$$

verfolgt werden. Denkt man sich die Gleichung

$$s = \wp u$$

durch eine Curve veranschaulicht, die auf ein rechtwinkliges cartesisches Coordinatensystem (u, s) bezogen ist, so gehören zu den Argumentwerthen $\omega + u$ und $\omega - u$ zwei Punkte der u-Axe, die vom Punkte ω gleich weit entfernt sind. Nach der Gleichung (4.) kommen diesen Punkten gleiche Ordinaten der Curve zu, d. h. die Curve verläuft symmetrisch zu der der s-Axe im Abstande ω parallelen Geraden $u = \omega$. Die Geraden $u = 0$ und $u = 2\omega$ sind Asymptoten der Curve.

Der Periodicität wegen erstrecken sich die übrigen Zweige der Curve in gleicher Weise zwischen den Geraden $u = 2\omega$ und $u = 4\omega$, $u = 4\omega$ und $u = 6\omega$, u. s. f.; und entsprechend auf der negativen Seite der s-Axe.

Zu bemerken ist noch, dass das Minimum e_1 von s nothwendig positiv ist. Denn wegen

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

können nicht alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 negativ sein, und e_1 war die grösste von ihnen. Ein reelles Argument u, für welches $\wp u$ gleich e_2 oder e_3 würde, existirt daher nicht.

Es sei nun u_1 irgend ein reeller Werth von u, für den die $\wp$-Function unendlich gross wird. Man kann eine ganze Zahl m so bestimmen, dass wenn

$$u_1 = 2m\omega + u_0$$

gesetzt wird, u_0 zwischen 0 und 2ω liegt, 2ω selbst ausgeschlossen. Wegen

$$\wp u_1 = \wp u_0$$

ist dann auch u_0 eine Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function. In dem Intervall $0 \leqq u < 2\omega$ wird aber diese Function nur für $u = 0$ unendlich gross. Denn wäre 2ω nicht die kleinste positive Unendlichkeitsstelle, so würde auch ω nicht der kleinste positive Werth sein, für den $\wp u$ gleich einer der Grössen e_α, nämlich gleich e_1 wird. Aus $u_0 = 0$ folgt nun

$$u_1 = 2m\omega,$$

d. h. alle reellen Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function sind für ganzzahliges m in dieser Form enthalten.

Ausser diesen reellen Unendlichkeitsstellen giebt es unendlich viele rein imaginäre. Wird nämlich in der Formel S. 44 (12.) $m = i$ gesetzt und zugleich ui für u geschrieben, so folgt

$$\wp(ui; g_2, g_3) = -\wp(u; g_2, -g_3); \tag{5.}$$

hiernach entspricht jedem reellen Werthe, für den die $\wp$-Function mit den Invarianten $g_2, -g_3$ unendlich gross wird, eine rein imaginäre Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function mit den Invarianten g_2, g_3. Und zwar sind alle diese Werthe Vielfache des mit i multiplicirten kleinsten positiven Werthes $2\bar{\omega}$, für den die Function $\bar{s} = \wp(u; g_2, -g_3)$ unendlich wird. Dem oben Auseinandergesetzten zufolge ist dabei $\bar{\omega}$ der kleinste positive Werth, für den diese Function der grössten Wurzel der Gleichung

$$\bar{S} \equiv 4\bar{s}^3 - g_2\bar{s} + g_3 = 0$$

gleich wird. Weil sich diese Gleichung auch in der Form

$$4(-\bar{s})^3 - g_2(-\bar{s}) - g_3 = 0$$

schreiben lässt, so folgt, dass ihre Wurzeln $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, von der Reihenfolge

abgesehen, mit $-e_1, -e_2, -e_3$ übereinstimmen müssen. Da ferner

$$e_1 > e_2 > e_3, \quad \text{also} \quad -e_3 > -e_2 > -e_1$$

sein sollte, so muss, wenn auch hier

$$\bar{e}_1 > \bar{e}_2 > \bar{e}_3$$

gesetzt wird,

$$\bar{e}_1 = -e_3, \quad \bar{e}_2 = -e_2, \quad \bar{e}_3 = -e_1$$

sein. Bestimmt man demnach $\bar{\omega}$, wie angegeben, der Gleichung

$$\wp(\bar{\omega}; g_2, -g_3) = -e_3 \tag{6.}$$

gemäss und setzt

$$\bar{\omega} i = \omega', \tag{7.}$$

so ist ω' der dem absoluten Betrage nach kleinste rein imaginäre Werth, für den $\wp(u; g_2, g_3)$ unendlich gross wird, und alle Unendlichkeitsstellen derselben Art sind in der Form $2n\omega'$ enthalten. Die Gleichung (5.) liefert in Verbindung mit (6.) und (7.)

$$\wp\omega' = e_3. \tag{8.}$$

Man kann die vorher definirte Grösse ω durch ein bestimmtes Integral darstellen, indem man zunächst

$$\omega = \int_0^\omega du$$

setzt und dann die Transformation

$$du = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

anwendet, wo unter $\sqrt{S}$ für grosse positive Werthe von s der positive Werth zu verstehen ist. Durchläuft u das Intervall von 0 bis ω, so geht $s = \wp u$ von $+\infty$ bis e_1, also wird

$$\omega = \int_\infty^{e_1} \frac{-ds}{\sqrt{S}}.$$

Nun hat $\bar{\omega}$ für die Function $\bar{s} = \wp(u; g_2, -g_3)$ dieselbe Bedeutung wie ω für $\wp(u; g_2, g_3)$, und man kann daher setzen

$$\bar{\omega} = \int_\infty^{-e_3} \frac{-d\bar{s}}{\sqrt{\bar{S}}}.$$

Demnach wird schliesslich

$$
(9.)\qquad
\begin{aligned}
\omega &= \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2 s-g_3}},\\
\omega' &= i\int_{-e_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2 s+g_3}}.
\end{aligned}
$$

Da 2ω und $2\omega'$ Unendlichkeitsstellen und damit Perioden der $\wp$-Function sind, so müssen unendlich viele Perioden in der Form

$$2m\omega+2n\omega'$$

enthalten sein. Das Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ würde primitiv genannt werden dürfen, wenn alle Perioden sich durch diesen Ausdruck darstellen liessen.

Nach S. 63 ist dies sicher dann der Fall, wenn in der Ebene der complexen Grösse u innerhalb und auf dem Umfange des Dreiecks mit den Eckpunkten $0, 2\omega, 2\omega'$, das im Nullpunkt rechtwinklig ist, ausser den Eckpunkten selbst keine Unendlichkeitsstelle liegt. Nun sind zwar dem bereits Bewiesenen zufolge auf den Seiten $0, 2\omega$ und $0, 2\omega'$ keine weiteren Unendlichkeitspunkte gelegen; es ist aber noch nicht nachgewiesen, dass es keine complexen, zu Punkten innerhalb des Dreiecks oder auf dessen dritter Seite gehörenden Werthe giebt, für die $\wp u$ unendlich gross wird. Es sei u' ein solcher Werth, und es werde

$$u' = 2\mu\omega+2\nu\omega'$$

gesetzt, so sind μ und ν reelle, den Bedingungen

$$0<\mu<1,\quad 0<\nu<1,\quad \mu+\nu\leq 1$$

unterworfene Zahlen. Dass $\wp u'$ nicht unendlich gross sein kann, erkennt man am deutlichsten, wenn man mittels des Additionstheorems $\wp u'$ auf $\wp(2\mu\omega)$ und $\wp(2\nu\omega')$ zurückführt. Nach der Formel S. 25 (3.) ist

$$\wp u' = \frac{(\wp(2\mu\omega)+\wp(2\nu\omega'))(2\wp(2\mu\omega)\wp(2\nu\omega')-\frac{1}{2}g_2)-g_3-\wp'(2\mu\omega)\wp'(2\nu\omega')}{2(\wp(2\mu\omega)-\wp(2\nu\omega'))^2}.$$

In dem Quotienten kann der Zähler nicht unendlich gross werden. Dass nämlich innerhalb der Strecken $0, 2\omega$ und $0, 2\omega'$ keine Unendlichkeitsstellen liegen, findet seinen Ausdruck darin, dass $\wp(2\mu\omega)$ und $\wp(2\nu\omega')$ nicht unendlich werden, wenn μ und ν alle Werthe von 0 bis 1, die Grenzen ausgeschlossen, durchlaufen; und nach der Differentialgleichung der $\wp$-Function

sind $\wp'(2\mu\omega)$ und $\wp'(2\nu\omega')$ gleichzeitig mit $\wp(2\mu\omega)$ und $\wp(2\nu\omega')$ endlich. Sollte der Nenner des Quotienten verschwinden, so müsste $\wp(2\mu\omega)=\wp(2\nu\omega')$ sein. Diese Gleichung kann aber nicht stattfinden, denn $\wp(2\mu\omega)$ liegt zwischen $+\infty$ und e_1, und $\wp(2\nu\omega')$, wie die Beziehungen (5.) und (8.) lehren, in dem Intervall $-\infty\ldots e_3$, das sich mit dem ersten an keiner Stelle deckt.

Hiermit ist bewiesen, dass die durch die Formeln (9.) definirten Ausdrücke nach Multiplication mit 2 ein primitives Periodenpaar liefern.

Die beiden eben betrachteten Intervalle von Werthen der $\wp$-Function sind durch das Intervall $e_1\ldots e_3$ von einander getrennt. Man kann nach den Argumenten u fragen, die dieser Werthereihe zugehören. Zunächst ergiebt sich aus der Formel (1.) auf S. 65

$$\wp(u+\omega)-e_1 = \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp u-e_1}$$

für $u=\omega'$

$$\wp(\omega+\omega') = e_2.$$

Man setze ferner in der Formel (2.) auf S. 66 $\alpha=2$ und $-u$ für u, so wird

$$(10.)\qquad \wp(\omega+\omega'-u) = e_2+\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp u-e_2}.$$

Durchläuft jetzt u stetig das Intervall $0\ldots\omega$, der das Argument u darstellende Punkt also das Stück 0ω der Axe des Reellen, so läuft $\omega+\omega'-u$ stetig längs der durch die Punkte $\omega+\omega'$ und ω' gehenden Parallelen zu dieser Axe von dem ersten Punkte zum zweiten. Die Function $\wp(\omega+\omega'-u)$ nimmt dann alle Werthe zwischen e und e_3 an. Mit anderen Worten, $\wp u$ durchläuft das Intervall $e_2\ldots e_3$, wenn u auf directem Wege von $\omega+\omega'$ bis ω' geht. Genau ebenso folgt, dass wenn u die Strecke von $\omega+\omega'$ bis ω, der Axe des Imaginären parallel, durchläuft, die $\wp$-Function alle Werthe des Intervalles $e_2\ldots e_1$ annimmt.

Diese Ergebnisse mögen in einer Tabelle vereinigt werden, die zugleich das Vorzeichen von $\wp' u$ für die vier Theilintervalle erkennen lässt. Für kleine reelle positive Werthe des Argumentes war

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3}+\mathfrak{P}'(u).$$

Die erste Ableitung der $\wp$-Function ist also für solche Werthe negativ, und zwar gilt dies, nach der Definition von ω (S. 75), bis zu diesem Werthe hin.

Für kleine positiv imaginäre Argumentwerthe ist

$$\wp'(vi) = -\frac{2}{(vi)^3} + \mathfrak{P}'(vi) = -i\frac{2}{v^3} + \mathfrak{P}'(vi).$$

Man kann demnach sagen, dass $\wp'u$ für Werthe von u zwischen 0 und ω' negativ imaginär ist.

In den beiden noch fehlenden Intervallen kann das Zeichen der $\wp'$-Function mittels der aus (10.) folgenden Gleichung

$$\wp'(\omega+\omega'-u) = \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{(\wp u-e_2)^2}\wp'u = -\frac{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}{(\wp u-e_2)^2}\wp'u$$

bestimmt werden. Der Factor von $\wp'u$ ist reell und negativ; hiernach hat $\wp'u$ zwischen $\omega+\omega'$ und ω' das entgegengesetzte Vorzeichen wie in dem Intervall $0 \ldots \omega$, und zwischen $\omega+\omega'$ und ω das entgegengesetzte Zeichen wie für die Werthe zwischen 0 und ω'. In der folgenden Tabelle enthält die zweite Spalte die zu dem nebenstehenden Intervall des Arguments u gehörigen Werthe der $\wp$-Function, die dritte die zugehörigen Werthe der Grösse $\wp'u : |\wp'u| = \varepsilon$.

u	$\wp u$	ε
$0 \ldots \omega$	$+\infty \ldots e_1$	-1
$\omega \ldots \omega+\omega'$	$e_1 \ldots e_2$	$+i$
$\omega+\omega' \ldots \omega'$	$e_2 \ldots e_3$	$+1$
$\omega' \ldots 0$	$e_3 \ldots -\infty$	$-i$

Diese Tabelle gestattet, für jeden reellen Werth der $\wp$-Function das Intervall eines zugehörigen Werthes von u anzugeben, vorausgesetzt, dass ε der in der dritten Spalte stehenden Grösse gleich ist. Ist gegebenen Falls das Vorzeichen von $\wp'u$ dem aus der Tabelle hervorgehenden entgegengesetzt, so hat man wegen

$$\wp(w-u) = \wp u,$$
$$\wp'(w-u) = -\wp'u$$

$w-u$ statt des aus der Tabelle zu entnehmenden Werthes von u zu setzen und das Intervall danach zu bestimmen.

Vermöge der Gleichung

$$\wp u = s$$

wird der Umfang des Rechtecks mit den Eckpunkten $0, \omega, \omega+\omega', \omega'$ in der Ebene der Grösse u auf die Axe des Reellen in der Ebene der Grösse s abgebildet. Durchläuft u den Umfang im positiven Sinne, nämlich so, dass die eingeschlossene Fläche zur Linken bleibt, so durchläuft s die Axe des Reellen im negativen Sinne.

Es sei jetzt zweitens (vgl. S. 74) die Discriminante G von S negativ, also

$$g_2^3 - 27g_3^2 < 0.$$

Von den Grössen e_α ist dann nur eine reell, es sei e_2; e_1 und e_3 sind conjugirt complex.

Wir beginnen wieder damit, dem Argument u reelle, wenig von Null verschiedene Werthe beizulegen. Für $u = 0$ ist die $\wp$-Function unendlich gross, für wachsende Argumente $\wp u$ und $\wp'u$ reell, $\wp'u$ ausserdem negativ, also

$$\wp'u = \frac{ds}{du} = -\sqrt{S},$$

wenn nach wie vor unter $\sqrt{S}$ der reelle positive Werth der Quadratwurzel verstanden wird. Der Werth von s, bis zu dem die Abnahme dieser Grösse sicher dauert, für den also $\wp'u$ zum ersten Mal verschwindet, ist hier

$$s = e_2,$$

wo e_2 positiv oder negativ sein kann. Und zwar ist dies unter der jetzigen Annahme der einzige reelle Werth, für den die Ableitung gleich Null wird. Ist ω_2 der kleinste positive Werth, der die Gleichung

$$\wp\omega_2 = e_2$$

befriedigt, so ist $2\omega_2$ die kleinste positive Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function, und ω_2 lässt sich, wie aus der auf S. 77 angestellten Überlegung durch Vertauschung der Bezeichnungen folgt, durch ein bestimmtes Integral darstellen:

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}. \tag{12.}$$

Ferner sind alle reellen Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function in der Form $2m\omega_2$ enthalten.

Um zu untersuchen, ob es rein imaginäre Unendlichkeitsstellen giebt, beziehen wir uns wieder auf die Gleichung (5.). Die Discriminante der ganzen Function $\bar{S}$ ist mit der von S identisch, und die Gleichung $\bar{S}=0$ hat nur eine reelle Wurzel, $-e_2$. Ist $\bar{\omega}_2$ der kleinste positive Werth, für den die Gleichung

$$\wp(\bar{\omega}_2;\, g_2, -g_3) = -e_2$$

stattfindet, und wird

$$\bar{\omega}_2 i = \omega_2'$$

gesetzt, so ist

$$\wp\omega_2' = e_2 \tag{13.}$$

und, der zweiten Formel (9.) entsprechend,

$$\omega_2' = i\int_{-e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s + g_3}}.$$

Geht u auf directem Wege von 0 nach ω_2', so nimmt $\wp u$ die Werthe von $-\infty$ bis e_2 an. Im Besonderen erhält die Function den Werth e_2 sowohl für das reelle Argument ω_2 wie für das rein imaginäre ω_2'. Der Tabelle auf S. 80 entspricht für $G<0$ einfach folgende:

u	$\wp u$	ε
$0 \ldots \omega_2$	$+\infty \ldots e_2$	-1
$\omega_2' \ldots 0$	$e_2 \ldots -\infty$	$-i$

Wie im Falle $G>0$, so bilden auch hier die Punkte 0, $2\omega_2$ und $2\omega_2'$ ein im Nullpunkt rechtwinkliges Dreieck. Unendlichviele Perioden der $\wp$-Function sind in der Form

$$2m\omega_2 + 2n\omega_2'$$

enthalten; ein wesentlicher Unterschied gegen die erste Annahme liegt jedoch darin, dass hier nicht alle Perioden durch einen solchen Ausdruck darstellbar sind, dass also $(2\omega_2, 2\omega_2')$ kein primitives Periodenpaar ist. Zwar findet man durch dieselben Schlüsse wie auf S. 78, dass wenn man

$$u' = 2\mu\omega_2 + 2\nu\omega_2'$$

setzt, der Zähler des Ausdruckes für $\wp u'$ nicht unendlich gross wird. Dagegen kann das Nichtverschwinden des Nenners hier nicht behauptet werden.

Denn die Intervalle $+\infty \ldots e_2$ und $-\infty \ldots e_2$, in denen für $0<\mu<1$ und $0<\nu<1$ die Grössen $\wp(2\mu\omega_2)$ und $\wp(2\nu\omega_2')$ liegen, hängen in e_2 zusammen, und der Nenner wird gleich Null, wenn gleichzeitig

$$\wp(2\mu\omega_2) = e_2 \quad \text{und} \quad \wp(2\nu\omega_2') = e_2$$

ist, was für $\mu=\nu=\frac{1}{2}$ eintritt. Es kann also $\wp u'$ für

$$u' = \omega_2 + \omega_2'$$

unendlich gross werden, und dass dies wirklich zutrifft, erkennt man, ohne genauere Untersuchung des Zählers von $\wp u'$, einfach mittels der Formel

$$\wp(u+\omega_2) = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp u - e_2}.$$

Denn für $u=\omega_2'$ verschwindet $\wp u - e_2$, während $(e_2-e_1)(e_2-e_3)$ nicht Null, sondern als Product zweier conjugirt complexen Grössen reell und positiv ist. Die Unendlichkeitsstelle $\omega_2+\omega_2'$ liegt auf der Hypotenuse des vorher erwähnten rechtwinkligen Dreiecks.

Da sich nun $\omega_2+\omega_2'$ nicht für ganzzahlige Werthe von m und n in der Form $2m\omega_2+2n\omega_2'$ darstellen lässt, so kann $(2\omega_2, 2\omega_2')$ nicht als primitives Periodenpaar bezeichnet werden. Man könnte aber weiter untersuchen, ob im Innern oder auf dem Umfange des durch die Punkte 0, $2\omega_2$, $\omega_2+\omega_2'$ gebildeten Dreiecks ausser diesen Eckpunkten selbst noch andere Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function liegen. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde man nach dem Früheren behaupten können, dass $(2\omega_2, \omega_2+\omega_2')$ ein primitives Periodenpaar ist.

Wir wollen für eine negative Discriminante sämmtliche Unendlichkeitsstellen aufsuchen. Die reellen und die rein imaginären sind bereits bekannt, $2m\omega_2$ und $2n\omega_2'$. Es sei jetzt $u=\alpha+\beta i$. Nach dem Additionstheorem ist

$$\wp(\alpha+\beta i) = \frac{(\wp(\alpha)+\wp(\beta i))(2\wp(\alpha)\wp(\beta i)-\frac{1}{2}g_2)-g_3-\wp'(\alpha)\wp'(\beta i)}{2(\wp(\alpha)-\wp(\beta i))^2}.$$

Die Annahme $\wp(\alpha)=\wp(\beta i)$, für die der Nenner verschwindet, werde zunächst ausgeschlossen. Nun ist auf S. 59 bewiesen worden, dass wenn $\wp u$ endlich ist, $\wp w$ aber unendlich gross, die Gleichung

$$\wp(u+w) = \wp u$$

gilt. Hierin sei u reell, gleich α, w eine der bereits gefundenen nicht reellen Unendlichkeitsstellen, also rein imaginär, von der Form $2n\omega_2'$, so ist

$$\wp(\alpha + 2n\omega_2') = \wp(\alpha),$$

also endlich, wenn α nicht selbst eine Unendlichkeitsstelle ist. Ebenso ist, wenn $\wp(\beta i)$ als endlich, $\alpha = 2m\omega_2$ vorausgesetzt wird,

$$\wp(\beta i + 2m\omega_2) = \wp(\beta i)$$

wieder eine endliche Grösse. Mit anderen Worten: Wenn man einen complexen Werth aufsuchen will, der möglicherweise Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function ist, und dessen reeller und imaginärer Bestandtheil, als Argumente von $\wp u$ gesetzt, verschiedene Functionswerthe ergeben, so muss man beide Bestandtheile als Unendlichkeitsstellen annehmen. Auf diese Weise kommt man zu den Werthen

$$2m\omega_2 + 2n\omega_2',$$

von denen man in der That bereits weiss, dass sie Unendlichkeitsstellen sind.

Ausserdem aber können solche Stellen auch aus dem Verschwinden des Nenners der Additionsformel entspringen. Wie aus der Tabelle auf S. 82 hervorgeht, wird nun $\wp(\alpha)$ nur dann gleich $\wp(\beta i)$, wenn der gemeinsame Werth gleich e_2 ist.

Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\wp(\alpha) = e_2$$

ist

$$\alpha = \pm\omega_2 + w.$$

Da aber α reell sein soll, so muss auch w reell, gleich $2m'\omega_2$ sein. Und weil das Vorzeichen ausser Betracht bleiben darf, so ist

$$\alpha = \omega_2 + 2m'\omega_2$$

zu setzen. Ebenso gilt die Gleichung

$$\wp(\beta i) = e_2$$

für

$$\beta i = \omega_2' + 2n'\omega_2'.$$

Demnach wird

$$\alpha + \beta i = \omega_2 + \omega_2' + 2m'\omega_2 + 2n'\omega_2'.$$

Dass die $\wp$-Function für $u = \omega_2 + \omega_2'$ wirklich unendlich gross wird, ist bereits gezeigt worden. Hiernach sind für $G < 0$ sämmtliche Unendlichkeitsstellen in einer der Formen

$$w = 2m\omega_2 + 2n\omega_2',$$
$$w = (2m'+1)\omega_2 + (2n'+1)\omega_2',$$

d. h. in dem Ausdruck

$$w = k\omega_2 + k'\omega_2'$$

enthalten, wo die ganzen Zahlen k und k' gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sind.

Schreibt man

$$w = \frac{k-k'}{2}\cdot 2\omega_2 + k'(\omega_2 + \omega_2'),$$

so lässt diese Darstellung das Periodenpaar $(2\omega_2, \omega_2 + \omega_2')$ als primitiv erkennen.

Da $\wp\omega_2 = \wp\omega_2' = e_2$ war, so muss $\wp\frac{\omega_2+\omega_2'}{2}$ gleich einer der beiden von e_2 verschiedenen Grössen e_α sein. Nun ist nach der Erklärung der Grössen ω_2 und ω_2' und nach der Tabelle auf S. 82 $\wp\frac{\omega_2}{2}$ reell und $\wp'\frac{\omega_2}{2}$ negativ, $\wp\frac{\omega_2'}{2}$ reell und $\wp'\frac{\omega_2'}{2}$ negativ imaginär. Wegen

$$\wp\left(\frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_2'}{2}\right) = \frac{\left(\wp\frac{\omega_2}{2} + \wp\frac{\omega_2'}{2}\right)\left(2\wp\frac{\omega_2}{2}\wp\frac{\omega_2'}{2} - \frac{1}{2}g_2\right) - g_3 - \wp'\frac{\omega_2}{2}\wp'\frac{\omega_2'}{2}}{2\left(\wp\frac{\omega_2}{2} - \wp\frac{\omega_2'}{2}\right)^2}$$

stimmt in Folge dessen das Vorzeichen des imaginären Theiles von $\wp\frac{\omega_2+\omega_2'}{2}$ mit dem von $-\wp'\frac{\omega_2}{2}\wp'\frac{\omega_2'}{2}$ überein und ist negativ. Welcher der beiden Grössen e_1, e_3 der Ausdruck $\wp\frac{\omega_2+\omega_2'}{2}$ gleich wird, richtet sich daher nach dem Vorzeichen ihrer imaginären Theile. Ist z. B. e_3 im imaginären Theile negativ, so ist

$$\wp\left(\frac{\omega_2 + \omega_2'}{2}\right) = e_3$$

und demnach

$$\wp\left(\frac{\omega_2 - \omega_2'}{2}\right) = e_1$$

zu setzen.

Zehntes Kapitel.

Die Functionen $\sigma_a u$ und die σ-Quotienten.

Eine Grundformel der Theorie der σ-Function, die die Änderung dieser Function bei einer Vermehrung ihres Argumentes um eine Periode der $\wp$-Function erkennen lässt, ist (S. 72 (12.))

$$(1.)\qquad \sigma(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n} e^{2(m\eta+n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\sigma u,$$

wobei $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar der $\wp$-Function bedeutet. Wird hierin

$$m\omega + n\omega' = \tilde{\omega},$$
$$m\eta + n\eta' = \tilde{\eta}$$

gesetzt, so erhält die Gleichung die Form

$$\sigma(u+2\tilde{\omega}) = (-1)^{mn+m+n} e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma u.$$

Im Folgenden werde angenommen, dass die ganzen Zahlen m und n nicht beide gerade, also $\tilde{\omega}$ nicht gleich einer ganzen Periode der $\wp$-Function sei, und $u-\tilde{\omega}$ an Stelle von u eingeführt, so heisst die Formel

$$\sigma(u+\tilde{\omega}) = -e^{2\tilde{\eta}u}\sigma(u-\tilde{\omega})$$

oder, weil σu eine ungerade Function ist (S. 33),

$$\sigma(u+\tilde{\omega}) = e^{2\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}-u),$$

oder auch

$$e^{-\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}+u) = e^{\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}-u).$$

Die Function auf der linken oder rechten Seite dieser Gleichung, durch ihren Werth für $u=0$ dividirt, soll, als von dem Zahlenpaar (m, n) abhängig,

mit $\sigma_{mn} u$ bezeichnet werden:

$$(2.)\qquad \frac{e^{-\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}+u)}{\sigma\tilde{\omega}} = \frac{e^{\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}-u)}{\sigma\tilde{\omega}} = \sigma_{mn} u.$$

Diese Bezeichnung soll aber keine bleibende sein, weil, wie leicht bewiesen werden kann, sich sämmtliche Functionen $\sigma_{mn} u$ auf nur drei wesentlich verschiedene zurückführen lassen.

Es sei

$$m_1\omega + n_1\omega' = \tilde{\omega}_1$$

eine von $\tilde{\omega}$ verschiedene halbe Periode, jedoch so beschaffen, dass m_1 und m, n_1 und n gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sind, dass also

$$m_1 - m = 2m',$$
$$n_1 - n = 2n'$$

gesetzt werden kann. Zu dem Zahlenpaar (m_1, n_1) gehört die Function

$$e^{-\tilde{\eta}_1 u}\frac{\sigma(\tilde{\omega}_1+u)}{\sigma\tilde{\omega}_1} = e^{\tilde{\eta}_1 u}\frac{\sigma(\tilde{\omega}_1-u)}{\sigma\tilde{\omega}_1} = \sigma_{m_1 n_1} u.$$

In dem ersten Ausdruck ersetze man $\tilde{\omega}_1$ durch seinen aus

$$\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega} = 2m'\omega + 2n'\omega'$$

folgenden Werth. Dann kann $\sigma(\tilde{\omega}_1+u)$ mittels der Ausgangsgleichung (1.) umgeformt werden, wenn darin m und n durch m' und n', u durch $\tilde{\omega}+u$ ersetzt wird. Es entsteht

$$\sigma(\tilde{\omega}_1+u) = \sigma(\tilde{\omega}+u+2m'\omega+2n'\omega') = \varepsilon' e^{2(m'\eta+n'\eta')(\tilde{\omega}+u+m'\omega+n'\omega')}\sigma(\tilde{\omega}+u).$$

Das Vorzeichen

$$\varepsilon' = (-1)^{m'n'+m'+n'}$$

wird nicht explicite gebraucht, weil der obige Ausdruck durch den aus ihm für $u=0$ folgenden, $\sigma\tilde{\omega}_1$, zu dividiren ist. Führt man die Division wirklich aus und multiplicirt mit $e^{-\tilde{\eta}_1 u}$, wo

$$\tilde{\eta}_1 = m_1\eta + n_1\eta' = \tilde{\eta} + 2(m'\eta + n'\eta')$$

ist, so erhält man

$$e^{-\tilde{\eta}_1 u}\frac{\sigma(\tilde{\omega}_1+u)}{\sigma\tilde{\omega}_1} = e^{-\tilde{\eta}u}\frac{\sigma(\tilde{\omega}+u)}{\sigma\tilde{\omega}},$$

d. h.

$$\sigma_{m_1 n_1} u = \sigma_{mn} u.$$

Hiernach kommt es bei der Bildung solcher Functionen nicht sowohl auf die Werthe der ganzen Zahlen m und n, als auf ihre kleinsten Reste nach dem Modul 2 an. Da nun der Grundannahme über m und n gemäss nicht beide Reste gleich Null sein können, so darf man sich auf die drei Fälle

$$m = 1,\ n = 0;\quad m = 1,\ n = 1;\quad m = 0,\ n = 1$$

beschränken. Die ihnen entsprechenden Functionen $\sigma_{10} u$, $\sigma_{11} u$, $\sigma_{01} u$ seien mit $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ bezeichnet; dann gelten die Definitionsgleichungen:

$$(3.)\quad \left\{ \begin{aligned} & e^{-\eta u} \frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega} = e^{\eta u} \frac{\sigma(\omega-u)}{\sigma\omega} = \sigma_1 u \\ & e^{-(\eta+\eta')u} \frac{\sigma(\omega+\omega'+u)}{\sigma(\omega+\omega')} = e^{(\eta+\eta')u} \frac{\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma(\omega+\omega')} = \sigma_2 u \\ & e^{-\eta' u} \frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'} = e^{\eta' u} \frac{\sigma(\omega'-u)}{\sigma\omega'} = \sigma_3 u. \end{aligned} \right.$$

Setzt man

$$\omega + \omega' = \omega'', \qquad \eta + \eta' = \eta'',$$

so kann die zweite von ihnen auch in der Form

$$e^{-\eta'' u} \frac{\sigma(\omega''+u)}{\sigma\omega''} = e^{\eta'' u} \frac{\sigma(\omega''-u)}{\sigma\omega''} = \sigma_2 u$$

geschrieben werden. Endlich kann man, unter Anwendung der Bezeichnungen auf S. 66 und der ihnen entsprechenden

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1, \\ \eta + \eta' &= \eta_2, \\ \eta' &= \eta_3, \end{aligned}$$

die drei Gleichungen in die eine

$$(4.)\qquad e^{-\eta_\alpha u} \frac{\sigma(\omega_\alpha+u)}{\sigma\omega_\alpha} = e^{\eta_\alpha u} \frac{\sigma(\omega_\alpha-u)}{\sigma\omega_\alpha} = \sigma_\alpha u \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

zusammenziehen.

Bei der Einführung von $-u$ statt u gehen die beiden Ausdrücke für $\sigma_\alpha u$ in einander über, d. h. es wird

$$(5.)\qquad \sigma_\alpha(-u) = \sigma_\alpha u;$$

$\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ sind gerade Functionen.

Dass sie wirklich alle drei von einander verschieden sind, ersieht man sehr einfach aus ihrer Beziehung zur $\wp$-Function. Setzt man in der Gleichung

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

(S. 37 (14.)) $v = \omega_\alpha$ und kehrt das Zeichen um, so folgt

$$\wp u - \wp\omega_\alpha = \frac{\sigma(\omega_\alpha+u)\,\sigma(\omega_\alpha-u)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \omega_\alpha} = e^{-\eta_\alpha u} \frac{\sigma(\omega_\alpha+u)}{\sigma u\, \sigma\omega_\alpha} \cdot e^{\eta_\alpha u} \frac{\sigma(\omega_\alpha-u)}{\sigma u\, \sigma\omega_\alpha},$$

d. h. wegen $\wp\omega_\alpha = e_\alpha$:

$$(6.)\qquad \wp u - e_\alpha = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2 \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Wären nun für zwei verschiedene Zahlen α und β aus der Reihe 1, 2, 3 die Functionen $\sigma_\alpha u$ und $\sigma_\beta u$ einander gleich, so müsste $e_\alpha = e_\beta$ sein, was ausgeschlossen war.

Eliminirt man aus den drei, in (6.) enthaltenen Relationen die Function $\wp u$, so erhält man folgende drei Gleichungen, die zwei unabhängigen äquivalent sind:

$$(7.)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \sigma_2^2 u - \sigma_3^2 u + (e_2 - e_3)\,\sigma^2 u = 0 \\ & \sigma_3^2 u - \sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\,\sigma^2 u = 0 \\ & \sigma_1^2 u - \sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\,\sigma^2 u = 0. \end{aligned} \right.$$

Multiplicirt man der Reihe nach mit e_1, e_2, e_3 und addirt, so ergiebt sich weiter

$$(8.)\qquad (e_2 - e_3)\,\sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\,\sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\,\sigma_3^2 u = 0,$$

d. h. zwischen den Quadraten der drei neu eingeführten Functionen besteht eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten.

Kennt man die Stammfunction σu und eine der aus ihr abgeleiteten Functionen $\sigma_\alpha u$, so kann man mittels der Formeln (7.) die beiden anderen algebraisch bestimmen.

Eine Relation von anderer Form unter den vier Functionen σu und $\sigma_\alpha u$ erhält man aus (6.) in Verbindung mit der Differentialgleichung der $\wp$-Function

$$(\wp' u)^2 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3),$$

nämlich:

$$\wp' u = 2\varepsilon \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}.$$

Da $\wp' u$ und die drei Quotienten auf der rechten Seite eindeutig definirt sind, so muss das Vorzeichen ε sich bestimmen lassen. Die Entwickelung in der Nähe der Stelle $u = 0$ liefert als Anfangsglied links $\frac{-2}{u^3}$, rechts, weil die drei Functionen $\sigma_\alpha u$ für $u = 0$ den Werth 1 annehmen, $\frac{2\varepsilon}{u^3}$, also wird

$$\varepsilon = -1$$

und demnach

$$\wp' u = -2 \frac{\sigma_1 u \, \sigma_2 u \, \sigma_3 u}{\sigma^3 u}. \tag{9.}$$

Nun war (S. 34 (9.))

$$\wp' u = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u},$$

mithin folgt

$$\sigma(2u) = 2 \sigma u \, \sigma_1 u \, \sigma_2 u \, \sigma_3 u. \tag{10.}$$

Vermehrt man in der Gleichung (6.) das Argument um eine beliebige Periode $2\bar{\omega}$ der $\wp$-Function, so ergiebt sich

$$\left(\frac{\sigma_\alpha(u+2\bar{\omega})}{\sigma\,(u+2\bar{\omega})}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2.$$

Der Quotient $\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}$ selbst kann also bei einer solchen Vermehrung höchstens sein Vorzeichen ändern. Um dies genauer zu untersuchen, kann man sich einer Formel bedienen, die in der Theorie der Functionen $\sigma_\alpha u$ der Grundgleichung (1.) für die Stammfunction an die Seite zu stellen ist. Es werde nämlich

$$\sigma_\alpha(u+2\bar{\omega}) = e^{-\eta_\alpha(u+2\bar{\omega})} \frac{\sigma(\omega_\alpha + u + 2\bar{\omega})}{\sigma \omega_\alpha}$$

berechnet. Die Benutzung von (1.) liefert, für $\varepsilon = (-1)^{mn+m+n}$,

$$\sigma_\alpha(u+2\bar{\omega}) = \varepsilon e^{-\eta_\alpha(u+2\bar{\omega})} e^{2\bar{\eta}(\omega_\alpha + u + \bar{\omega})} \frac{\sigma(\omega_\alpha + u)}{\sigma \omega_\alpha}$$

oder

$$\sigma_\alpha(u+2\bar{\omega}) = \varepsilon e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega}) + 2(\bar{\eta}\omega_\alpha - \bar{\omega}\eta_\alpha)} \sigma_\alpha u. \tag{11.}$$

Bei einer Vermehrung des Arguments um eine Periode der $\wp$-Function wird also jede Function $\sigma_\alpha u$ mit einem Exponentialfactor derselben Art multiplicirt, wie er bei der Stammfunction σu aufgetreten war; der Exponent ist nämlich eine lineare Function von u. Die speciellen, in (11.) enthaltenen Formeln hängen ihrer Gestalt nach von der Form der Periode $2\bar{\omega}$ und von deren Beziehung zu der besonderen Periode ab, die wegen $\wp \omega_\alpha = e_\alpha$ zu dem Index α gehört.

Specialisirt man zunächst α, lässt aber die Periode $2\bar{\omega}$ beliebig, so kommt es auf den Ausdruck

$$\bar{\eta}\omega_\alpha - \bar{\omega}\eta_\alpha = (m\eta + n\eta')\omega_\alpha - (m\omega + n\omega')\eta_\alpha$$

an, der für

$$\alpha = 1, \quad \omega_\alpha = \omega, \quad \eta_\alpha = \eta$$

den Werth

$$n(\eta'\omega - \omega'\eta) = -n\frac{(2k+1)\pi i}{2}$$

(S. 73 (14.)), und für

$$\alpha = 3, \quad \omega_\alpha = \omega', \quad \eta_\alpha = \eta'$$

den Werth

$$m(\eta\omega' - \omega\eta') = m\frac{(2k+1)\pi i}{2}$$

annimmt, für

$$\alpha = 2, \quad \omega_\alpha = \omega + \omega', \quad \eta_\alpha = \eta + \eta'$$

aber der Summe dieser beiden Werthe gleich wird. Man erhält, wenn man die in den drei Fällen auftretenden Potenzen

$$(-1)^{-n}, (-1)^m, (-1)^{m-n}$$

mit ε zusammenzieht,

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_1(u+2\bar{\omega}) &= (-1)^{mn+m} e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega})} \sigma_1 u \\ \sigma_2(u+2\bar{\omega}) &= (-1)^{mn} e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega})} \sigma_2 u \\ \sigma_3(u+2\bar{\omega}) &= (-1)^{mn+n} e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega})} \sigma_3 u. \end{aligned}\right. \tag{12.}$$

Wir specialisiren diese Formeln nun weiter zuerst in der Weise, dass wir in jeder einzelnen $\bar{\omega}$ gleich einer zu dem auftretenden Index gehörenden halben Periode setzen, und zwar gleich ω in der ersten, gleich $\omega + \omega'$ in der zweiten und gleich ω' in der dritten. Die so entstehenden Gleichungen lassen sich, wie sofort ersichtlich, in die eine

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)} \sigma_\alpha u \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{13.}$$

zusammenziehen, die natürlich auch direct aus (11.) unter der Annahme $\bar{\omega} = \omega_\alpha$ hervorgeht. Es bleibt übrig, in jeder der Formeln (12.) $\bar{\omega}$ gleich den beiden nicht zu dem Index gehörigen halben Perioden aus der Reihe $\omega, \omega+\omega', \omega'$, d. h. in (11.) $\tilde{\omega} = \omega_\beta$ zu nehmen. Dann ergiebt sich

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\beta) = e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha u \qquad \begin{pmatrix}\alpha, \beta = 1, 2, 3\\ \beta \gtrless \alpha\end{pmatrix}. \tag{14.}$$

In Verbindung mit

$$\sigma(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u \tag{15.}$$

lassen diese Gleichungen das periodische Verhalten aller zwölf Quotienten erkennen, die man aus den vier Functionen $\sigma u, \sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$ bilden kann.

Für eine beliebige Periode $2\tilde{\omega}$ folgt aus (12.), wenn man jede der Formeln durch die für die Stammfunction dividirt, das Argument aber in jedem Quotienten nur einmal schreibt:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^n \frac{\sigma_1}{\sigma} u \\ \frac{\sigma_2}{\sigma}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^{m+n} \frac{\sigma_2}{\sigma} u \\ \frac{\sigma_3}{\sigma}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^m \frac{\sigma_3}{\sigma} u. \end{aligned}\right. \tag{16.}$$

Stellt man dagegen die Formeln (12.) nur unter einander durch Division zusammen, so liefern sie

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\sigma_2}{\sigma_3}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^n \frac{\sigma_2}{\sigma_3} u \\ \frac{\sigma_3}{\sigma_1}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^{m+n} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} u \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^m \frac{\sigma_1}{\sigma_2} u. \end{aligned}\right. \tag{17.}$$

Bei der Specialisirung der Periode benutzt man zweckmässiger die Gleichungen (13.), (14.), (15.), und erhält zunächst aus (13.) und (15.):

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u+2\omega_\alpha) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma} u; \tag{18.}$$

d. h. der Quotient $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma} u$ hat die Periode $2\omega_\alpha$. Ferner ergiebt sich aus (14.) und (15.), nachdem man diese Gleichung in der Form

$$\sigma(u+2\omega_\beta) = -e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma u$$

geschrieben hat,

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u+2\omega_\beta) = -\frac{\sigma_\alpha}{\sigma} u, \tag{19.}$$

und wenn man hierin u nochmals um $2\omega_\beta$ vermehrt und die Gleichung selbst wieder benutzt:

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u+4\omega_\beta) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma} u. \tag{20.}$$

Der betrachtete Quotient hat also auch die Periode $4\omega_\beta$.

Nimmt man zu der Function $\sigma_\alpha u$ noch eine andere, von ihr verschiedene $\sigma_\beta u$ hinzu, für die mithin nach (14.) die Gleichung

$$\sigma_\beta(u+2\omega_\alpha) = e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\beta u$$

gilt, so erhält man weiter durch Zusammenstellung mit (13.):

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(u+2\omega_\alpha) = -\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u, \qquad (\beta \gtrless \alpha) \tag{21.}$$

und wie eben:

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(u+4\omega_\alpha) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u \qquad (\beta \gtrless \alpha). \tag{22.}$$

Ist endlich γ die von α und β verschiedene Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, gelten also nach (14.) die Formeln

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\gamma) = e^{2\eta_\gamma(u+\omega_\gamma)}\sigma_\alpha u, \qquad (\alpha \gtrless \gamma)$$

$$\sigma_\beta(u+2\omega_\gamma) = e^{2\eta_\gamma(u+\omega_\gamma)}\sigma_\beta u, \qquad (\beta \gtrless \gamma)$$

so findet sich durch Division

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(u+2\omega_\gamma) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u \qquad (\alpha \gtrless \beta \gtrless \gamma). \tag{23.}$$

Hiernach sind die Quotienten $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma} u, \frac{\sigma}{\sigma_\alpha} u, \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u$ doppeltperiodische Functionen, und zwar hat $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma} u$ und sein reciproker Werth die Perioden $2\omega_\alpha$ und $4\omega_\beta$, $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u$ die Perioden $4\omega_\alpha$ (oder $4\omega_\beta$) und $2\omega_\gamma$. Man kann auch einfacher sagen: $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma} u$ und $\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\gamma} u$ haben die Perioden $2\omega_\alpha$ und $4\omega_\beta$ (oder $4\omega_\gamma$). Trennt man alle möglichen Fälle von einander, so sieht man, dass die σ-Quotienten, wie man diese Functionen kurz zu bezeichnen pflegt, in drei Gruppen von je vier Functionen zerfallen, die dasselbe periodische Verhalten zeigen, und zwar haben

$$\begin{array}{llll}
\frac{\sigma_1}{\sigma}u,\ \frac{\sigma}{\sigma_1}u,\ \frac{\sigma_2}{\sigma_3}u,\ \frac{\sigma_3}{\sigma_2}u & \text{die Perioden} & 2\omega, & 4\omega', \\
\frac{\sigma_2}{\sigma}u,\ \frac{\sigma}{\sigma_2}u,\ \frac{\sigma_3}{\sigma_1}u,\ \frac{\sigma_1}{\sigma_3}u & \text{„ \quad „} & 2(\omega+\omega'), & 4\omega', \\
\frac{\sigma_3}{\sigma}u,\ \frac{\sigma}{\sigma_3}u,\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2}u,\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}u & \text{„ \quad „} & 4\omega, & 2\omega'.
\end{array}$$

Es entsteht die Frage, ob diese Periodenpaare für die nebenstehenden Functionen primitiv sind, ob demnach z. B. sämmtliche Perioden der Function $\frac{\sigma_1}{\sigma}u$ in der Form $2m\omega+4n\omega'$ dargestellt werden können. Es sei $2\overline{\omega}$ irgend eine Periode eines σ-Quotienten, also von dieser Grösse nichts weiter bekannt, als dass z. B.

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u+2\overline{\omega}) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u$$

oder

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(u+2\overline{\omega}) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}u$$

ist, wo $2\overline{\omega}$ nicht in beiden Gleichungen denselben Werth zu haben braucht. Durch Quadriren der ersten Formel und unter Benutzung von (6.) ergiebt sich

$$\wp(u+2\overline{\omega}) = \wp u.$$

Und da sich aus der zweiten Formel in Verbindung mit

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}\right)^2 = \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - e_\beta}$$

dieselbe Folgerung ziehen lässt, so sind nothwendigerweise alle Perioden der σ-Quotienten auch Perioden der $\wp$-Function. Dass das Umgekehrte nicht gilt, lehren die Gleichungen (19.) und (21.). Vielmehr müssen in den Formeln (16.) und (17.), die für eine beliebige Periode der $\wp$-Function gelten, die Potenzen von -1 einzeln den Werth $+1$ haben, wenn $2\bar{\omega}$ eine Periode eines σ-Quotienten sein soll. Ist nun $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar der $\wp$-Function, und wird wieder

$$2\bar{\omega} = 2m\omega + 2n\omega'$$

gesetzt, so muss z. B. n eine gerade Zahl, $2n'$, sein, wenn $2\bar{\omega}$ eine Periode

von $\frac{\sigma_1}{\sigma}u$ und $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}u$ sein soll. Dies liefert die Darstellung

$$2\bar{\omega} = 2m\omega + 4n'\omega',$$

in der die ganzen Zahlen m und n' keiner weiteren Beschränkung unterworfen sind. Hiernach ist $(2\omega, 4\omega')$ für die betrachteten Functionen ein primitives Periodenpaar, und ebenso $(4\omega, 2\omega')$ für die Functionen der dritten Reihe. Für die der zweiten Gruppe muss

$$m \equiv n \mod 2,$$

d. h. in

$$2\bar{\omega} = m(2\omega+2\omega') + (n-m)2\omega'$$

$n-m$ eine gerade Zahl, oder $(2\omega+2\omega', 4\omega')$ ein primitives Periodenpaar sein. Es ist klar, dass hierin $4\omega'$ auch durch 4ω ersetzt werden kann.

Elftes Kapitel.

Die Differentialgleichungen der σ-Quotienten.

Aus der Gleichung (6.) des vorigen Kapitels (S. 89)

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 = \wp u - e_\alpha \tag{1.}$$

kann man durch Differentiation und Benutzung des Ausdruckes von $\wp' u$ (S. 90 (9.)) simultane Differentialgleichungen zwischen den σ-Quotienten herstellen und aus ihnen weiter mittels der Relation

$$\sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u + (e_\alpha - e_\beta)\sigma^2 u = 0 \tag{2.}$$

Differentialgleichungen für die einzelnen Quotienten ableiten.

So folgt unmittelbar aus (1.):

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u \frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u = -\frac{\sigma_1}{\sigma}u\frac{\sigma_2}{\sigma}u\frac{\sigma_3}{\sigma}u = -\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\frac{\sigma_\beta}{\sigma}u\frac{\sigma_\gamma}{\sigma}u,$$

wenn wieder α, β, γ die Zahlen 1, 2, 3, von der Reihenfolge abgesehen, bedeuten; d. h.

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u = -\frac{\sigma_\beta}{\sigma}u\frac{\sigma_\gamma}{\sigma}u. \tag{3.}$$

Nach (2.) ist dann

$$\left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma}u\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 + e_\alpha - e_\beta$$

und

$$\left(\frac{\sigma_\gamma}{\sigma}u\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 + e_\alpha - e_\gamma.$$

Die Elimination von $\frac{\sigma_\beta}{\sigma}u$ und $\frac{\sigma_\gamma}{\sigma}u$ liefert

$$\left(\frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 = \left(\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}\right)^2 + e_\alpha - e_\beta\right)\left(\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}\right)^2 + e_\alpha - e_\gamma\right). \tag{4.}$$

Der Quotient $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u$ genügt also der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (x^2 + e_\alpha - e_\beta)(x^2 + e_\alpha - e_\gamma), \tag{5.}$$

und zwar gehören in der Lösung

$$x = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u$$

die Werthe $u = 0$, $x = \infty$ zusammen.

Durch Einführung des reciproken Werthes von x könnte man aus (5.) unmittelbar eine Differentialgleichung für $\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u$ ablesen. Um jedoch zunächst wieder eine solche zwischen drei σ-Quotienten herzustellen, nehme man die Ausgangsgleichung (1.) in der Form

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\gamma}u\right)^2 = \frac{1}{\wp u - e_\gamma}$$

an und verfahre im Ubrigen wie vorher; dann ergiebt sich

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma}{\sigma_\gamma}u = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\gamma}u. \tag{6.}$$

Die aus (2.) folgenden Ausdrücke

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u\right)^2 = 1 - (e_\alpha - e_\gamma)\left(\frac{\sigma}{\sigma_\gamma}u\right)^2,$$

$$\left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\gamma}u\right)^2 = 1 - (e_\beta - e_\gamma)\left(\frac{\sigma}{\sigma_\gamma}u\right)^2$$

liefern in Verbindung mit der Formel (6.)

$$\left(\frac{d}{du}\frac{\sigma}{\sigma_\gamma}u\right)^2 = \left(1 - (e_\alpha - e_\gamma)\left(\frac{\sigma}{\sigma_\gamma}u\right)^2\right)\left(1 - (e_\beta - e_\gamma)\left(\frac{\sigma}{\sigma_\gamma}u\right)^2\right); \tag{7.}$$

d. h. es ist

$$\xi = \frac{\sigma}{\sigma_\gamma}u$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$(8.)\qquad \left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = (1-(e_\alpha-e_\gamma)\xi^2)(1-(e_\beta-e_\gamma)\xi^2),$$

und zwar unter der Bedingung, dass für $u = 0$

$$\xi = 0, \quad \frac{d\xi}{du} = 1$$

wird. Der Anfangswerth von $\frac{d\xi}{du}$ ergiebt sich aus der Gleichung (6.), da die drei Functionen $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$ für $u = 0$ den Werth 1 annehmen (S. 90).

Wendet man endlich dasselbe Verfahren auf die aus (1.) folgende Formel

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u\right)^2 = \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - e_\gamma}$$

an, so ergiebt sich, den Gleichungen (3.) und (6.) entsprechend,

$$(9.)\qquad \frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u = -(e_\alpha-e_\gamma)\frac{\sigma}{\sigma_\gamma}u\,\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\gamma}u,$$

und die Relation (2.) ist wieder zur Elimination der beiden σ-Quotienten auf der rechten Seite zu benutzen. Die entstehende Differentialgleichung heisst

$$(10.)\qquad \left(\frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u\right)^2 = \left(1-\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u\right)^2\right)\left(e_\alpha-e_\beta+(e_\beta-e_\gamma)\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u\right)^2\right).$$

Nebenbedingung für die Integration der Gleichung

$$(11.)\qquad \left(\frac{d\eta}{du}\right)^2 = (1-\eta^2)(e_\alpha-e_\beta+(e_\beta-e_\gamma)\eta^2)$$

durch die Lösung

$$\eta = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u$$

ist hier $\eta = 1$ für $u = 0$, während $\frac{d\eta}{du}$ für den Anfangswerth von u verschwindet.

Die Differentialgleichungen (4.), (7.) und (10.), von denen die beiden ersten je drei, die dritte sechs Formeln enthält, lassen erkennen, dass jeder der zwölf σ-Quotienten einer Differentialgleichung von der Form

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

genügt. Hierin bedeutet $R(x)$ eine ganze Function vierten Grades, die nur die geraden Potenzen enthält.

Es seien im Besonderen die drei Grössen e_1, e_2, e_3 reell und, wie früher, den Ungleichungen

$$e_1 > e_2 > e_3$$

gemäss geordnet. Setzt man in (8.)

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3,$$

so kann man auf Grund dieser Differentialgleichung und der Nebenbedingung schreiben:

$$u = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-(e_1-e_3)\xi^2)(1-(e_2-e_3)\xi^2)}},$$

eine Darstellung, die ohne genauere Festsetzungen über das Integral freilich nur für reelle Werthe der Variablen gilt. Die Function $\xi = \frac{\sigma}{\sigma_3}u$ erscheint dann als Umkehrung dieses Integrals im Sinne **Abels**. Durch die Transformation

$$\sqrt{e_1-e_3}\,\xi = \xi', \quad \sqrt{e_1-e_3}\,u = u'$$

erhält man

$$u' = \int_0^{\xi'} \frac{d\xi'}{\sqrt{(1-\xi'^2)(1-k^2\xi'^2)}},$$

wo die reelle, positive und unterhalb Eins gelegene Grösse k^2 durch die Gleichung

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = k^2$$

erklärt ist. Die Umkehrungsfunction dieses Integrals erster Gattung in der **Legendreschen** Normalform ist eine der drei elliptischen Functionen **Jacobis**,

$$\xi' = \sin\operatorname{am} u'.$$

Die Beziehung zwischen ihr und einem bestimmten σ-Quotienten wird durch die Gleichung

$$(12.)\qquad \frac{\sigma}{\sigma_3}u = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\sin\operatorname{am}\left(u\sqrt{e_1-e_3}\right)$$

wiedergegeben, durch die man die Jacobische Function auch für nicht reelle Grössen e_α und für beliebige complexe Argumente u definiren kann. Nun ist (S. 97)

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}u\right)^2 = 1-(e_1-e_3)\left(\frac{\sigma}{\sigma_3}u\right)^2 = 1-\sin^2 \operatorname{am} u',$$

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}u\right)^2 = 1-(e_2-e_3)\left(\frac{\sigma}{\sigma_3}u\right)^2 = 1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u',$$

d. h. die beiden anderen Jacobischen Functionen werden durch die Gleichungen

(13.) $$\frac{\sigma_1}{\sigma_3}u = \cos \operatorname{am}(u\sqrt{e_1-e_3}),$$

(14.) $$\frac{\sigma_2}{\sigma_3}u = \Delta \operatorname{am}(u\sqrt{e_1-e_3})$$

bestimmt. Aus der Formel

$$\wp u = e_3 + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma}u\right)^2$$

ergiebt sich noch

(15.) $$\wp u = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\sin^2 \operatorname{am}(u\sqrt{e_1-e_3})}.$$

Werden die Functionen Jacobis auf das Argument u bezogen, so nehmen die Gleichungen (12.), (13.), (14.) die Form an:

(16.) $$\sin \operatorname{am} u = \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma}{\sigma_3}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right),$$

(17.) $$\cos \operatorname{am} u = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right),$$

(18.) $$\Delta \operatorname{am} u = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right).$$

Wir wollen an dieser Stelle untersuchen, was aus den Functionen $\wp u$, σu und $\sigma_\alpha u$ wird, wenn der sonst immer ausgeschlossene Fall eintritt, dass zwei oder alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 einander gleich werden. Die Discriminante der Function S muss dann verschwinden:

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = 0.$$

Für $e_2 = e_3$ ist die Differentialgleichung der $\wp$-Function

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s-e_1)(s-e_2)^2,$$

und die des Quotienten $\frac{\sigma}{\sigma_3}u$

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = 1-(e_1-e_3)\xi^2.$$

Die Einführung von ξ' und u' liefert

$$\left(\frac{d\xi'}{du'}\right)^2 = 1-\xi'^2,$$

also, mit Rücksicht auf die Nebenbedingung,

$$\xi'^2 = \sin^2 u',$$

und es wird demnach

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\sin^2(u\sqrt{e_1-e_3})}.$$

Da $e_1+e_2+e_3 = 0$ ist, so müssen sich im vorliegenden Falle die drei Grössen e_α durch eine einzige, z. B. e_1, darstellen lassen:

$$e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}e_1.$$

Dann wird

(19.) $$\wp u = -\frac{e_1}{2} + \frac{\frac{3e_1}{2}}{\sin^2\left(u\sqrt{\frac{3e_1}{2}}\right)}.$$

Die zweimalige Integration dieser Gleichung und die Bestimmung der Constanten aus den Anfangsgliedern ergiebt

(20.) $$\sigma u = \frac{1}{\sqrt{\frac{3e_1}{2}}}\, e^{\frac{e_1 u^2}{4}} \sin\left(u\sqrt{\frac{3e_1}{2}}\right).$$

Die Functionen $\sigma_\alpha u$ werden bei passender Wahl des Quadratwurzelwerthes durch die Relationen

$$\sigma_\alpha u = \sigma u \sqrt{\wp u - e_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

gegeben, und zwar bestimmt sich das Vorzeichen daraus, dass alle drei Functionen für $u = 0$ den Werth 1 annehmen. So findet sich

(21.) $$\sigma_1 u = e^{\frac{e_1 u^2}{4}} \cos\left(u\sqrt{\frac{3e_1}{2}}\right),$$

(22.) $$\sigma_2 u = \sigma_3 u = e^{\frac{e_1 u^2}{4}}.$$

Alle bis jetzt eingeführten Functionen entarten also für $e_2 = e_3$ in Exponentialgrössen und trigonometrische Functionen.

Sind alle drei Grössen e_α einander gleich, so ist wegen

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

der gemeinsame Werth gleich Null; die Invarianten g_2 und g_3 verschwinden einzeln. Aus der Differentialgleichung der $\wp$-Function

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3$$

ergiebt sich

$$\wp u = \frac{1}{u^2},$$

und hieraus weiter, immer in Verbindung mit den bekannten Nebenbedingungen,

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{1}{u},$$

$$\sigma u = u,$$

$$\sigma_\alpha u = 1 \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Sämmtliche Functionen reduciren sich also auf ihre Anfangsglieder.

Zwölftes Kapitel.

Darstellung der σ-Function durch ein unendliches Product.

Die Eigenschaft der σ-Function, durch eine beständig convergente Potenzreihe darstellbar zu sein, hat es ermöglicht, sie für alle endlichen Werthe des Argumentes zu definiren (S. 35). Aber das Bildungsgesetz jener Potenzreihe (S. 32) lässt eine wichtige Eigenschaft der σ-Function nicht hervortreten, nämlich die, für eine bestimmte zweifache Mannigfaltigkeit von Stellen, die Perioden der $\wp$-Function, mit der Ordnungszahl Eins zu verschwinden (S. 68).

Wäre die Anzahl der Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$ endlich, gleich n, so würde man die Function gleich dem Ausdruck

$$C(u-a_1)\ldots(u-a_n)$$

setzen, in dem die Constante C als bekannt zu gelten hat, wenn der Werth der Function für einen von den Nullstellen verschiedenen Argumentwerth bekannt ist. Eine unmittelbare Verallgemeinerung dieses Ausdruckes für unendlich viele Nullstellen ist nicht statthaft, weil das dabei entstehende unendliche Product nicht convergiren würde. Aber man kann versuchen, unter Voraussetzung bestimmter Eigenschaften der Nullstellen das Product

$$C\left(1-\frac{u}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{a_n}\right)$$

zu verallgemeinern, wobei der Werth $u = 0$ unter den Nullstellen zunächst nicht enthalten sein soll.

Entsprechend der Identität

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right) = e^{\sum_{\nu=1}^{n}\log\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right)}$$

definiren wir, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \log\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right)$$

convergent ist, ein unendliches Product mit den Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$ durch die Gleichung

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \log\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right)}.$$

Jedoch untersuchen wir gleich die Convergenz einer allgemeineren Reihe als der im Exponenten auftretenden; sie soll aus dieser entstehen, wenn jedem Gliede $\log\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right)$ eine Anzahl von Anfangsgliedern seiner Entwickelung nach Potenzen von $\frac{u}{a_\nu}$ mit entgegengesetztem Vorzeichen hinzugefügt wird. An die Stelle des unendlichen Productes $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right)$ tritt dann ebenfalls ein allgemeinerer Ausdruck, dessen Bildungsgesetz im Laufe der Untersuchung selbst erörtert werden soll.

Mit $a_1, a_2, \ldots$ mögen jetzt die Nullstellen $2\bar{w}$ der σ-Function mit Ausnahme der Stelle $u = 0$, nach der Grösse ihrer absoluten Beträge in aufsteigender Folge geordnet, bezeichnet werden. Sie erscheinen bei der Darstellung in der Ebene der Grösse u als Eckpunkte von Perioden-Parallelogrammen. In jedem endlichen Bereiche liegt also nur eine endliche Anzahl dieser Stellen. Das heisst: Nach Annahme einer beliebig grossen positiven Zahl G lässt sich immer eine positive ganze Zahl q so bestimmen, dass für alle $n \geqq q$

$$|a_n| > G,$$

oder für $|a_n| = A_n$

$$\frac{1}{A_n} < \frac{1}{G}$$

ist. Diese Voraussetzung über die Vertheilung der Nullstellen soll für die folgende allgemeinere Untersuchung beibehalten, ausserdem aber angenommen werden, es existiere eine ganze positive Zahl r von der Beschaffenheit, dass

$$\sum_n \frac{1}{a_n^\lambda}$$

für $\lambda \geqq r$ absolut convergirt, dass mithin für solche Werthe von λ die Reihe

$$\sum_n \frac{1}{A_n^\lambda}$$

convergent ist. Da es bei der Beurtheilung der Convergenz einer Reihe auf eine endliche Zahl von Anfangsgliedern niemals ankommt, so reicht es aus, die Summation über n von $n = q$ an vorzunehmen.

Die für $|u| < |a_n|$ convergente Reihenentwickelung von $\log\left(1-\frac{u}{a_n}\right)$ lautet

$$\log\left(1-\frac{u}{a_n}\right) = -\frac{u}{a_n} - \frac{1}{2}\frac{u^2}{a_n^2} - \cdots - \frac{1}{\mu}\frac{u^\mu}{a_n^\mu} - \cdots.$$

Wie schon angedeutet, betrachten wir statt dessen den Ausdruck

$$\log\left(1-\frac{u}{a_n}\right) + \frac{u}{a_n} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a_n^2} + \cdots + \frac{1}{r-1}\frac{u^{r-1}}{a_n^{r-1}} = -\sum_{\lambda=r}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\frac{u^\lambda}{a_n^\lambda};$$

und zwar soll darin r die eben eingeführte Bedeutung haben. Wir untersuchen, ob unter den gemachten Voraussetzungen die Reihe convergirt, die man erhält, wenn man diese Ausdrücke für alle a_n summirt, deren absolute Beträge grösser als G sind; d. h., vom Vorzeichen abgesehen, die Reihe

$$\sum_{n=q}^{\infty}\sum_{\lambda=r}^{\infty}\frac{u^\lambda}{\lambda a_n^\lambda}.$$

Angenommen, es werde die absolute Convergenz, d. h. für

$$|u| = U$$

die Convergenz der Reihe

$$\sum_{n=q}^{\infty}\sum_{\lambda=r}^{\infty}\frac{U^\lambda}{\lambda A_n^\lambda}$$

gefordert, so kann die Folge der Glieder beliebig vertauscht, und insbesondere die Summe in der Form

$$\sum_{\lambda=r}^{\infty}\frac{U^\lambda}{\lambda}\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{A_n^\lambda}$$

angeordnet werden. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{A_n^\lambda} = B_\lambda,$$

wo B_λ der Annahme (S. 104) gemäss für $\lambda \geqq r$ endlich ist, so kommt Alles auf die Prüfung der Convergenz der Reihe

$$\sum_{\lambda=r}^{\infty}\frac{B_\lambda U^\lambda}{\lambda}$$

hinaus.

Für diesen Zweck kann der folgende Satz benutzt werden. Es sei

$$c_1 \frac{U}{G} + c_2 \frac{U^2}{G^2} + \cdots + c_\lambda \frac{U^\lambda}{G^\lambda} + \cdots$$

eine nach Potenzen von $\frac{U}{G}$ fortschreitende, mit nur positiven Coefficienten c_λ behaftete Reihe, deren Convergenz aus dem Grunde feststehen soll, weil von einem bestimmten Werthe r des Index λ an der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder

$$\frac{c_{\lambda+1}}{c_\lambda} \frac{U}{G}$$

kleiner als Eins bleibt. Oder es sei, nach Abtrennung einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern,

$$c_r \frac{U^r}{G^r} + c_{r+1} \frac{U^{r+1}}{G^{r+1}} + \cdots$$

eine Reihe, für die dieses Convergenz-Kriterium schon vom ersten Gliede an gilt. Dann ist, so wird behauptet, auch

$$c_r B_r U^r + c_{r+1} B_{r+1} U^{r+1} + \cdots$$

eine convergente Reihe.

Nun ist nach der Definition von B_λ

$$B_{\lambda+1} = \sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\lambda+1}},$$

und da für alle bei dieser Summation in Betracht kommenden Werthe die Ungleichung

$$A_n > G$$

besteht, so hat man

$$\frac{1}{A_n^{\lambda+1}} = \frac{1}{A_n} \cdot \frac{1}{A_n^\lambda} < \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{A_n^\lambda},$$

und nach Ausführung der Summation

$$B_{\lambda+1} < \frac{1}{G} B_\lambda.$$

Für den Quotienten zweier aufeinander folgenden Glieder der zweiten Reihe gilt also

$$\frac{c_{\lambda+1} B_{\lambda+1}}{c_\lambda B_\lambda} U < \frac{c_{\lambda+1}}{c_\lambda} \frac{U}{G},$$

wo die rechte Seite nach Voraussetzung kleiner als Eins ist. Die Convergenz der ersten Reihe zieht also in der That die der zweiten nach sich.

Auf die Reihe

$$\sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{B_\lambda U^\lambda}{\lambda}$$

ist dieses Ergebniss ohne Weiteres anwendbar, wenn

$$U < G$$

genommen wird; denn es ist

$$c_\lambda = \frac{1}{\lambda},$$

und der Quotient

$$\frac{c_{\lambda+1}}{c_\lambda} \frac{U}{G} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \frac{U}{G}$$

bleibt kleiner als Eins.

Auf Grund der vorher angestellten Erörterungen ergiebt sich demnach, dass die Reihe

$$\sum_{n=q}^{\infty} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{u^\lambda}{\lambda a_n^\lambda}$$

für $|u| < G$ absolut convergirt. Nun ist, wenn

$$(1.) \qquad \frac{u}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{a_n^2} + \cdots + \frac{1}{r-1} \frac{u^{r-1}}{a_n^{r-1}} = g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)$$

gesetzt wird,

$$\log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right) + g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right) = -\sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{u^\lambda}{\lambda a_n^\lambda}.$$

Man kann also behaupten: Die Reihe

$$\sum_{n=q}^{\infty} \left\{ \log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right) + g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right) \right\}$$

ist für $|u| < G$ absolut convergent und lässt sich, wenn

$$\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{a_n^\lambda} = -b_\lambda$$

gesetzt wird, auch in der Form

$$\sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda}$$

darstellen. Durch Übergang zu den Exponentialgrössen erhält man, bei Definition des unendlichen Productes nach S. 104,

$$(2.)\qquad \prod_{n=q}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{u}{a_n}\right)e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}\right\} = e^{\sum\limits_{\lambda=r}^{\infty}\frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda}}.$$

Da die rechts im Exponenten stehende Reihe absolut, mithin auch unbedingt convergent ist, so kann auch das unendliche Product auf der linken Seite als unbedingt convergent bezeichnet werden. Der Ausdruck rechter Hand, also auch das unendliche Product selbst, lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln, die sicher für alle Werthe $|u| < G$ convergirt. Fügt man beiderseits das Product der endlichen Anzahl von Factoren hinzu, die zu den Nullstellen $|a_n| \leqq G$ gehören, so erhält man

$$(3.)\qquad \prod_{(n)}\left\{\left(1-\frac{u}{a_n}\right)e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}\right\} = e^{\sum\limits_{\lambda=r}^{\infty}\frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda}}\cdot\prod_{n=1}^{q-1}\left\{\left(1-\frac{u}{a_n}\right)e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}\right\},$$

wo das unendliche Product links sich über alle Nullstellen a_n erstreckt. Die Entwickelbarkeit des Ausdrucks auf der rechten Seite in eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende, für $|u| < G$ convergirende Reihe bleibt bestehen. Da endlich G beliebig gross angenommen werden kann, so hat das Product

$$\prod_{(n)}\left\{\left(1-\frac{u}{a_n}\right)e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}\right\}$$

für alle endlichen Werthe von u den Charakter einer ganzen Function.

Der bis jetzt ausgeschlossen gewesene Fall, dass $u = 0$ zu den Nullstellen gehört, erledigt sich einfach dadurch, dass wenn $u = 0$ eine Nullstelle p^{ter} Ordnung ist, dem vorstehenden unendlichen Product noch u^p als Factor hinzuzufügen ist.

Wenn man hiernach unter einer bestimmten Annahme über die Stellen a_n eine Function bilden kann, die diese Stellen zu Nullstellen hat, so bleibt doch noch die Aufgabe zu lösen, eine Function, die diese Eigenschaft besitzt und ausserdem überall den Charakter einer ganzen Function hat, aber anderweitig bereits definirt ist, mittels eines unendlichen Productes darzustellen. Die gegebene Function sei mit $f(u)$, das vorher erklärte unendliche Product

mit $\varphi(u)$ bezeichnet. Wir betrachten den Quotienten

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \psi(u).$$

Da Zähler und Nenner im Endlichen nirgends unendlich gross werden, so kann $\psi(u)$ jedenfalls nur dann Null werden, wenn der Zähler verschwindet, und nur unendlich gross, wenn der Nenner Null wird. Ist nun a irgend eine Nullstelle von $f(u)$, l die zugehörige Ordnungszahl, gilt also in der Nähe von a für die Function die Entwickelung

$$f(u) = (u-a)^l(c_0+\cdots) = \left(1-\frac{u}{a}\right)^l(c_0'+\cdots),$$

wo c_0' von Null verschieden ist, so denke man sich a l-mal in die Reihe der Nullstellen aufgenommen, sodass auch $\varphi(u)$ den Factor $\left(1-\frac{u}{a}\right)$ l-mal enthält. Man kann sagen, dass sich auf diese Weise jede Nullstelle des Zählers gegen eine Nullstelle des Nenners hebt, und umgekehrt. Die Function $\psi(u)$ wird also für endliche Werthe ihres Arguments weder Null noch unendlich gross. Vermöge der letzteren Eigenschaft lässt sich $\psi(u)$ als beständig convergente Potenzreihe darstellen, während die erste Eigenschaft gestattet, diese Reihe noch in eine besondere Form zu setzen. Es wird nämlich $\frac{1}{\psi(u)}$ nicht unendlich gross, und dasselbe gilt für $\frac{\psi'(u)}{\psi(u)}$, sodass auch dieser Quotient als beständig convergirende Reihe, die mit $\frac{dg(u)}{du}$ bezeichnet werden möge, dargestellt werden kann. Aus

$$\frac{\psi'(u)}{\psi(u)} = \frac{dg(u)}{du}$$

folgt dann

$$\psi(u) = e^{g(u)}.$$

Eine multiplicative Constante braucht nicht hinzugefügt zu werden, weil $g(u)$ nur bis auf eine additive Constante bestimmt ist. Hiernach wird

$$f(u) = \varphi(u)\,e^{g(u)}.$$

Gehört auch der Werth $u = 0$ zu den Nullstellen von $f(u)$, und zwar mit der Ordnungszahl p, so hat man $\varphi(u)$ durch $u^p\varphi(u)$ zu ersetzen, und erhält dann

$$f(u) = u^p\varphi(u)\,e^{g(u)}.$$

Hiernach lässt sich schliesslich folgender Satz aussprechen: Es sei $f(u)$ eine Function, die im Endlichen überall den Character einer ganzen Function hat;

sie verschwinde für unendlich viele Stellen a_n, von denen aber in jedem endlichen Bereiche nur eine endliche Anzahl liegt und die ausserdem die Eigenschaft haben, dass bei passender Annahme einer positiven ganzen Zahl r die Reihe $\sum_{(n)} \frac{1}{a_n^\lambda}$ für $\lambda \geqq r$ absolut convergirt. Dann kann

$$(4.)\qquad f(u) = e^{g(u)} u^p \prod_{(n)} \left\{ \left(1 - \frac{u}{a_n}\right) e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)} \right\}$$

gesetzt werden.

Wir bezeichnen eine Function der Form

$$\left(1 - \frac{u}{a_n}\right) e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)},$$

die nur eine einzige Nullstelle a_n hat, als eine Primfunction. Die Gleichung (4.) liefert also die Darstellung von $f(u)$ als Product von Primfunctionen.

Wir brauchen für die folgenden Untersuchungen noch den Ausdruck für eine Ableitung beliebiger Ordnung des Logarithmus des unendlichen Productes $\varphi(u)$. Für die Annahme $|u| < G$, die zunächst festgehalten werden möge, war $\varphi(u)$ durch die Gleichung (3.)

$$\varphi(u) = e^{\sum\limits_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda}} \prod_{n=1}^{q-1} \left\{ \left(1 - \frac{u}{a_n}\right) e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)} \right\}$$

definirt. Aus ihr folgt

$$(5.)\qquad \frac{d^m \log \varphi(u)}{du^m} = \sum_{n=1}^{q-1} \left\{ \frac{d^m \log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right)}{du^m} + \frac{d^m g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}{du^m} \right\} + \frac{d^m}{du^m} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda}.$$

Die Differentiation der Potenzreihe darf gliedweise ausgeführt werden, d. h. man kann setzen

$$\frac{d^m}{du^m} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda} = \sum_{\lambda=r}^{\infty} (\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-m+1) b_\lambda u^{\lambda-m},$$

oder wenn für b_λ sein Werth (S. 107) eingeführt wird,

$$\frac{d^m}{du^m} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda} = -\sum_{\lambda=r}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} (\lambda-1)\dots(\lambda-m+1) \frac{u^{\lambda-m}}{a_n^\lambda}.$$

Die absoluten Beträge der Glieder der abgeleiteten Reihe bilden ebenfalls

eine convergente Reihe, denn diese würde aus

$$\sum_{\lambda=r}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} \frac{U^\lambda}{\lambda A_n^\lambda}$$

durch m-malige Differentiation hervorgehen. Die abgeleitete Reihe convergirt demnach auch unbedingt, und man kann im Besonderen

$$(6.)\qquad \frac{d^m}{du^m} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda} = -\sum_{n=q}^{\infty} \sum_{\lambda=r}^{\infty} (\lambda-1)\dots(\lambda-m+1) \frac{u^{\lambda-m}}{a_n^\lambda}$$

setzen.

Nun war andererseits (S. 107)

$$(7.)\qquad \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda} = \sum_{n=q}^{\infty} \left\{ \log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right) + g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right) \right\},$$

mithin ist auch die m^{te} Ableitung der linken Seite gleich der m^{ten} Ableitung der rechten. Wir betrachten statt dieser das Ergebniss der gliedweisen Differentiation. Aus

$$\log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right) + g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right) = -\sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{u^\lambda}{a_n^\lambda}$$

folgt

$$\frac{d^m \log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right)}{du^m} + \frac{d^m g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}{du^m} = -\sum_{\lambda=r}^{\infty} (\lambda-1)\dots(\lambda-m+1) \frac{u^{\lambda-m}}{a_n^\lambda},$$

woraus sich durch Summation

$$\sum_{n=q}^{\infty} \left\{ \frac{d^m \log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right)}{du^m} + \frac{d^m g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}{du^m} \right\} = -\sum_{n=q}^{\infty} \sum_{\lambda=r}^{\infty} (\lambda-1)\dots(\lambda-m+1) \frac{u^{\lambda-m}}{a_n^\lambda}$$

ergiebt. Nach der Formel (6.) ist aber die rechte Seite gleich

$$\frac{d^m}{du^m} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda};$$

mit anderen Worten, die Differentiation der Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (7.) kann gliedweise ausgeführt werden. Setzt man das Resultat dieser Differentiation in (5.) ein, so erhält man

$$(8.)\qquad \frac{d^m \log \varphi(u)}{du^m} = \sum_{(n)} \left\{ \frac{d^m \log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right)}{du^m} + \frac{d^m g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}{du^m} \right\},$$

wo jetzt die Summation wieder über sämmtliche Nullstellen a_n zu erstrecken ist; d. h. unter den gemachten Voraussetzungen ist die Regel für die Differentiation des Logarithmus des unendlichen Productes dieselbe wie für ein endliches Product.

Man kann noch schreiben

$$\frac{d\log\left(1-\frac{u}{a_n}\right)}{du} = \frac{1}{u-a_n} = \frac{d\log(u-a_n)}{du},$$

also

$$(9.)\qquad \frac{d^m\log\varphi(u)}{du^m} = \sum_{(n)}\left\{\frac{d^m\log(u-a_n)}{du^m}+\frac{d^m g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}{du^m}\right\},$$

und wie vorher gilt diese zunächst nur für $|u|<G$ bewiesene Formel für alle endlichen Werthe des Argumentes.

Zur Erläuterung des Vorstehenden und weil das Resultat später gebraucht werden wird, möge die Sinusfunction durch ein unendliches Product dargestellt werden. Die Function

$$\sin u\pi$$

verschwindet, und zwar mit der Ordnungszahl 1, für alle positiven und negativen ganzzahligen Argumentwerthe $u=\nu$, die Null eingeschlossen. Nun convergirt die Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\nu^2}$$

unbedingt, während

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\nu}$$

noch nicht oder wenigstens nur bedingt convergent ist. Man kann demnach $r=2$ annehmen, wobei sich die ganze Function $g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)$ auf ihr Anfangsglied $\frac{u}{a_n}$ reducirt. Hiernach darf

$$\sin u\pi = e^{g(u)}\,u \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\left(1-\frac{u}{\nu}\right)e^{\frac{u}{\nu}}\right\}$$

gesetzt werden. Zur Bestimmung von $g(u)$ bilde man

$$\frac{d\log\sin u\pi}{du} \equiv \pi\operatorname{ctg} u\pi = g'(u)+\frac{1}{u}+\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{d\log(u-\nu)}{du}+\frac{1}{\nu}\right),$$

$$\frac{d^2\log\sin u\pi}{du^2} \equiv \frac{-\pi^2}{\sin^2 u\pi} = g''(u)-\frac{1}{u^2}-\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(u-\nu)^2},$$

also

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 u\pi} = -g''(u)+\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u-\nu)^2}.$$

Wird hierin $u+1$ für u gesetzt, so geht die Summe über in

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u-(\nu-1))^2} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u-\nu)^2},$$

da $\nu-1$ ebenso wie ν alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft; d. h. die Summe ist periodisch mit der Periode 1, und daher auch mit der Periode m, wenn dieses irgend eine ganze Zahl bedeutet. Da die linke Seite der abgeleiteten Gleichung dieselbe Periode hat, so muss auch

$$g''(u+m) = g''(u)$$

sein. Auf Grund dieser Eigenschaft kann man die weitere Untersuchung von $g''(u)$ auf solche Werthe des Arguments beschränken, deren reeller Theil zwischen 0 und 1 liegt.

In der aus

$$g''(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u-\nu)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2 u\pi}$$

folgenden Ungleichung

$$(10.)\qquad |g''(u)| < \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|u-\nu|^2}+\frac{\pi^2}{|\sin u\pi|^2}$$

werde

$$u = \alpha+\beta i,$$

und demnach

$$|u-\nu|^2 = (\alpha-\nu)^2+\beta^2$$

gesetzt. Die Summe wird dann

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|u-\nu|^2} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-\nu)^2+\beta^2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+\nu)^2+\beta^2}.$$

Wegen

$$0\leqq\alpha<1$$

ist für jeden Werth von ν

$$\nu-\alpha>\nu-1,\quad \nu+\alpha\geqq\nu,$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu-\alpha)^2+\beta^2} < \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu-1)^2+\beta^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+\beta^2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu+\alpha)^2+\beta^2} < \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+\beta^2},$$

und in Folge dessen

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|u-\nu|^2} < \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+\beta^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+\beta^2} < \frac{1}{\beta^2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+\beta^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+\beta^2},$$

mithin schliesslich

$$(11.) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|u-\nu|^2} < 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+\beta^2}.$$

Ferner ist

$$\sin u\pi = \sin(\alpha+\beta i)\pi = \frac{1}{2}\Big(\big(e^{\beta\pi}+e^{-\beta\pi}\big)\sin\alpha\pi + i\big(e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}\big)\cos\alpha\pi\Big),$$

$$\begin{aligned} 4|\sin u\pi|^2 &= \big(e^{\beta\pi}+e^{-\beta\pi}\big)^2\sin^2\alpha\pi + \big(e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}\big)^2\cos^2\alpha\pi \\ &= e^{2\beta\pi}+e^{-2\beta\pi}-2\cos 2\alpha\pi \\ &\geqq \big(e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}\big)^2, \end{aligned}$$

also

$$(12.) \qquad \frac{\pi^2}{|\sin u\pi|^2} \leqq \left(\frac{2\pi}{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}\right)^2.$$

Aus (11.) und (12.) folgt in Verbindung mit (10.)

$$(13.) \qquad |g''(u)| < 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+\beta^2} + \left(\frac{2\pi}{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}\right)^2,$$

d. h. der absolute Werth der beständig convergenten Potenzreihe bleibt für jedes Argument unterhalb einer angebbaren Grenze.

Nun gilt der Satz, dass eine beständig convergente Potenzreihe $f(u)$, deren Werth dem absoluten Betrage nach auch für beliebig wachsendes Argument eine endliche positive Grösse G nicht überschreitet, sich auf eine Constante reduciren muss. Es sei nämlich

$$f(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots,$$

so gilt die Ungleichung

$$|c_n| < Mr^{-n},$$

wo M die obere Grenze der absoluten Beträge aller Werthe bezeichnet, die die Function auf einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise vom Radius r in der Ebene der complexen Variablen u annehmen kann. Nach der Voraussetzung ist demnach

$$|c_n| < Gr^{-n}.$$

Lässt man nun r beliebig wachsen, so wird

$$c_n = 0$$

für jeden ganzzahligen Werth von n, Null ausgeschlossen, d. h. die Potenzreihe reducirt sich auf ihr Anfangsglied c_0.

Im vorliegenden Falle muss aber wegen der für $g''(u)$ oder c_0 geltenden Ungleichung (13.) auch c_0 verschwinden, wie man erkennt, wenn man β in's Unendliche wachsen lässt. Aus

$$g''(u) = 0$$

folgt dann

$$g'(u) = c',$$

mithin nach S. 112

$$\pi\,\mathrm{ctg}\,u\pi = c' + \frac{1}{u} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{u-\nu}+\frac{1}{\nu}\right) = c' + \frac{1}{u} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2u}{u^2-\nu^2}.$$

Die linke Seite und, abgesehen von c', die rechte sind ungerade Functionen, demnach muss

$$c' = 0,$$

und $g(u)$, also auch $e^{g(u)}$, eine Constante sein. Setzt man C für $e^{g(u)}$, so ergiebt sich

$$\sin u\pi = Cu \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\left(1-\frac{u}{\nu}\right)e^{\frac{u}{\nu}}\right\}.$$

Zur Bestimmung von C entwickele man links und rechts in Potenzreihen. Da die linke Seite mit $u\pi$, die rechte mit Cu anfängt, so wird

$$C = \pi,$$

$$(14.) \qquad \sin u\pi = u\pi \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\left(1-\frac{u}{\nu}\right)e^{\frac{u}{\nu}}\right\},$$

oder wenn in dem unendlichen Product je zwei Factoren, die zu entgegengesetzt gleichen Werthen von ν gehören, zusammengefasst werden:

$$(15.) \qquad \sin u\pi = u\pi \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1-\frac{u^2}{\nu^2}\right).$$

Um nun auch die σ-Function als unendliches Product darzustellen, hat man sich zu erinnern, dass die Nullstellen dieser Function mit den Unendlichkeitsstellen w der $\wp$-Function übereinstimmen, und dass $\sigma' w$ nicht gleichzeitig mit σw gleich Null wird, dass also die Ordnungszahl des Verschwindens für jede solche Stelle gleich Eins ist (S. 68). Man hat demnach

$$a_n = 2m'\omega + 2n'\omega'$$

zu setzen, d. h. jedem Zahlenpaar (m', n') eine Zahl n zuzuordnen, und das unendliche Product über alle Nullstellen a_n, jede einmal gesetzt, zu erstrecken. Dies kommt darauf hinaus, bei der Multiplication jede der beiden Zahlen m' und n' alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe, Null eingeschlossen, durchlaufen zu lassen. Für m' und n' möge jedoch, da die Bezeichnung a_n nicht mehr gebraucht wird, m und n geschrieben werden.

Es ist vor allem zu untersuchen, ob eine Zahl r der Art existirt, dass

$$\sum_w{}' \frac{1}{w^r} \qquad \left(\begin{matrix} w = 2m\omega + 2n\omega'; \\ m, n = -\infty, \cdots +\infty, \\ \text{ausgenommen } m = n = 0 \end{matrix}\right)$$

absolut convergirt. Setzt man

$$2\omega = a + bi, \qquad 2\omega' = a' + b'i$$

und

$$W = |w| = ((ma + na')^2 + (mb + nb')^2)^{\frac{1}{2}},$$

so lässt sich zeigen, dass

$$\sum_W{}' \frac{1}{W^3}$$

convergent ist. Man kann nämlich nach einem bekannten Satze über quadratische Formen auf unendlich viele Weisen zwei homogene lineare Functionen M und N von m und n so annehmen, dass

$$(ma + na')^2 + (mb + nb')^2 = gM^2 + hN^2$$

wird, wo g und h reelle positive Zahlen bezeichnen, und dann die Bestimmung von M und N, g und h durch Hinzunahme der Bedingung

$$m^2 + n^2 = M^2 + N^2$$

vervollständigen. Ist $g \leqq h$, so wird

$$W^2 \geqq g(M^2 + N^2)$$

und weiter in Folge der zweiten Bedingung

$$W^2 \geqq g(m^2 + n^2).$$

Die angegebene Reihe wird daher sicher dann convergent sein, wenn

$$\sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}$$

convergirt. Setzt man zuerst $n = 0$, dann $m = 0$ und bezeichnet mit μ und ν

positive ganze Zahlen, so sind die beiden convergenten Reihen

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^3} \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3},$$

und zwar jede mit dem Factor 2, Bestandtheile der letzteren Reihe. Zu ihnen tritt noch

$$\sum_{\mu,\nu} \frac{1}{(\mu^2 + \nu^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots \infty)$$

versehen mit dem Factor 4. Diese Reihe convergirt aber ebenfalls; denn da

$$\mu^2 + \nu^2 > \mu\nu,$$

so ist

$$\sum_{\mu,\nu} \frac{1}{(\mu^2 + \nu^2)^{\frac{3}{2}}} < \sum_{\mu,\nu} \frac{1}{(\mu\nu)^{\frac{3}{2}}} < \sum_{\mu} \frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum_{\nu} \frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}},$$

und eine Reihe der Form

$$\sum_{\mu} \frac{1}{\mu^{1+\varrho}}$$

ist für $\varrho > 0$ stets convergent. Man darf also, wie behauptet, $r = 3$ annehmen, während für $r = 2$ die Schlüsse nicht mehr gelten.

Der Formel (1.) entsprechend werde nun

$$g_{r-1}\left(\frac{u}{w}\right) = \frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2},$$

$$\sigma u = e^{g(u)} u \prod_w{}' \left\{\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\}$$

gesetzt, wo das unendliche Product über alle Nullstellen w bis auf $w = 0$, d. h. wegen

$$w = 2m\omega + 2n\omega'$$

über alle positiven und negativen ganzzahligen Werthepaare (m, n), ausgenommen $m = n = 0$, zu erstrecken ist (S. 116).

Zur Bestimmung von $g(u)$ möge die dritte Ableitung von $\log \sigma u$ gebildet werden, sodass $g_{r-1}\left(\frac{u}{w}\right)$ wegfällt. Es entsteht

$$(16.) \qquad \frac{d^3 \log \sigma u}{du^3} = g'''(u) + \frac{2}{u^3} + \sum_w{}' \frac{2}{(u - w)^3}$$

oder

$$(17.)\qquad -\wp' u = g'''(u) + \sum_w \frac{2}{(u-w)^3},$$

wo jetzt die Summation auf sämmtliche Stellen w (Null eingeschlossen) auszudehnen ist. Vermehrt man in dieser Gleichung u um 2ω, so geht die Grösse

$$u - w = u - (2m\omega + 2n\omega')$$

über in $u-(2(m-1)\omega+2n\omega')$. Da $m-1$ dieselben Werthe wie m durchläuft, so bleibt die Summe $\sum\limits_w \frac{1}{(u-w)^3}$ ungeändert. Dasselbe gilt für eine Vermehrung von u um $2\omega'$. Da ferner $\wp' u$ die Perioden 2ω und $2\omega'$ hat, so muss auch

$$g'''(u) = -\wp' u - \sum_w \frac{2}{(u-w)^3}$$

eine doppelt periodische Function oder aber eine Constante sein.

Der erste Fall kann nicht eintreten, weil, wie leicht zu sehen, eine beständig convergente Potenzreihe nicht doppelt periodisch sein kann. Es ist vorhin bewiesen worden, dass der Werth einer solchen Reihe $f(u)$, wenn sie sich nicht von vornherein auf ihr Anfangsglied reduciren soll, mit unbegrenzt wachsendem u selbst jede angebbare Grenze übersteigen muss. Ein Werth u, für den die Ungleichung

$$|f(u)| > G$$

gilt, werde auf die Form

$$u = 2a\omega + 2b\omega'$$

gebracht, von a und b die grössten darin enthaltenen ganzen Zahlen m und n abgesondert und die Reste mit μ und ν bezeichnet, also

$$u = 2m\omega + 2n\omega' + 2\mu\omega + 2\nu\omega'$$

gesetzt, so ist der Periodicität zufolge

$$f(u) = f(2\mu\omega + 2\nu\omega').$$

Lässt man μ und ν alle Werthe von Null bis Eins durchlaufen, so kann, weil die Reihe $f(u)$ für alle endlichen Argumente convergirt, eine Zahl g so angegeben werden, dass

$$|f(2\mu\omega + 2\nu\omega')| < g$$

ist. Wählt man nun $G > g$, bestimmt einen Werth u der ersten Ungleichung gemäss und denkt sich dann für diesen die beiden Zahlen μ und ν ermittelt, so widerspricht die zweite Ungleichung der ersten. Eine doppelt periodische Function ist also niemals durch eine beständig convergente Potenzreihe darstellbar.

Für den vorliegenden Fall muss demnach $g'''(u)$ eine Constante werden. Vertauscht man, um ihren Werth zu ermitteln, in (17.) u mit $-u$, so geht der Summenausdruck in

$$\sum_w \frac{1}{(-u-w)^3} = -\sum_w \frac{1}{(u+w)^3}$$

über, und wenn noch w durch $-w$ ersetzt wird, in

$$-\sum_w \frac{1}{(u-w)^3},$$

weil $-m$ und $-n$ dieselben Werthe durchlaufen wie m und n; d. h. die Summe ist eine ungerade Function von u. Da dasselbe für $\wp' u$ gilt, so muss

$$g'''(u) = 0$$

sein.

Bei der Differentiation des Logarithmus der σ-Function gehen der Gleichung (16.) die folgenden voran:

$$(18.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma} u = g'(u) + \frac{1}{u} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

$$(19.)\qquad \wp u = -g''(u) + \frac{1}{u^2} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right).$$

Die Constante, der $g''(u)$ nunmehr gleich sein muss, kann aus (19.) durch die Annahme $u = 0$ bestimmt werden. Denn hierfür verschwindet die Summe rechts, und ebenso die Grösse $\wp u - \frac{1}{u^2}$, weil die bei kleinen Werthen von u geltende Reihe für $\wp u$ mit $\frac{1}{u^2}$ anfängt und kein constantes Glied enthält. Es ist daher

$$g''(u) = 0,$$

$$(20.)\qquad \wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right).$$

Genau auf dieselbe Weise folgt aus Gleichung (18.), dass auch

$$g'(u) = 0,$$

also

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{1}{u} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right) \tag{21.}$$

sein muss.

Endlich ergiebt die Bestimmung der in

$$\sigma u = Cu \prod_w{}' \left\{\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\}$$

noch auftretenden Constanten den Werth

$$C = 1,$$

weil die Entwickelung des unendlichen Productes mit Eins anfängt und

$$\lim_{u=0} \frac{\sigma u}{u} = 1$$

ist.

Die gesuchte Darstellung der σ-Function wird also durch die Formel

$$\sigma u = u \prod_w{}' \left\{\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\} \tag{22.}$$

geliefert.

Setzt man für w seinen Werth ein und nimmt unter derselben Voraussetzung die Gleichungen (21.) und (20.) hinzu, so erhält man folgende, für alle endlichen Argumente gültigen Ausdrücke von σu, $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ und $\wp u$:

$$\sigma u = u \prod_{m,n}{}' \left\{\left(1 - \frac{u}{2m\omega + 2n\omega'}\right) e^{\frac{u}{2m\omega+2n\omega'} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2m\omega+2n\omega'}\right)^2}\right\}, \tag{23.}$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{1}{u} + \sum_{m,n}{}' \left\{\frac{1}{u - 2m\omega - 2n\omega'} + \frac{1}{2m\omega + 2n\omega'} + \frac{u}{(2m\omega + 2n\omega')^2}\right\}, \tag{24.}$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n}{}' \left\{\frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2}\right\}. \tag{25.}$$

Hierin bedeutet, wie immer, der Strich an dem Product- und dem Summenzeichen, dass das Werthepaar $m = n = 0$ ausgeschlossen werden soll, während im Übrigen m und n alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen.

In Verbindung mit der früher aufgestellten Reihenentwickelung für die Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ lassen sich aus der Gleichung (24.) Ausdrücke für die Invarianten g_2 und g_3 durch die Perioden 2ω und $2\omega'$ ableiten.

Wir behalten die Gleichung in der abgekürzten Form (21.) bei und entwickeln $\frac{1}{u-w}$ nach steigenden Potenzen von u, setzen also für $|u| < |w|$

$$\frac{1}{u-w} = -\frac{1}{w} - \frac{u}{w^2} - \frac{u^2}{w^3} - \cdots$$

oder

$$\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^{\nu+2}}{w^{\nu+3}}.$$

Bei der Summation über alle Werthe von

$$w = 2m\omega + 2n\omega'$$

fallen sämmtliche Ausdrücke der Form

$$\sum_w{}' \frac{1}{w^{2\lambda+1}} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

weg, weil entgegengesetzt gleichen Werthen des Zahlenpaares (m, n) entgegengesetzt gleiche Werthe von w, und damit von $w^{2\lambda+1}$ entsprechen. Die Entwickelung von $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ erhält daher die Form

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{1}{u} - c_2 u^3 - c_3 u^5 - \cdots,$$

und zwar ist im Besonderen

$$c_2 = \sum_w{}' \frac{1}{w^4}, \qquad c_3 = \sum_w{}' \frac{1}{w^6}.$$

Nun war (S. 33)

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60}u^3 - \frac{g_3}{140}u^5 + \cdots,$$

mithin ergeben sich für g_2 und g_3 die Formeln

$$g_2 = 60 \sum_w{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140 \sum_w{}' \frac{1}{w^6}. \tag{26.}$$

Dreizehntes Kapitel.

Umwandlung des unendlichen Productes für die σ-Function.

Das unbedingt convergente unendliche Product auf S. 120, durch welches die σ-Function dargestellt wird, kann durch passende Anordnung der Factoren in ein solches von stärkerer Convergenz verwandelt werden.

Wir vereinigen zunächst alle Factoren, für die $n = 0$ ist, und ziehen zu ihnen auch den Factor u hinzu, so entsteht das Product

$$u \prod_m{}' \left\{\left(1-\frac{u}{2m\omega}\right) e^{\frac{u}{2m\omega}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{4m^2\omega^2}}\right\}.$$

Sein Werth darf sicher dann gleich

$$\prod_m{}' e^{\frac{1}{2}\frac{u^2}{4m^2\omega^2}} . u \prod_m{}' \left\{\left(1-\frac{u}{2m\omega}\right) e^{\frac{u}{2m\omega}}\right\}$$

gesetzt werden, wenn die beiden hierin mit einander multiplicirten unendlichen Producte einzeln convergent sind. Dies unterliegt aber keinem Zweifel, denn der erste Factor ist gleich

$$e^{\sum_m' \frac{1}{2}\frac{u^2}{4m^2\omega^2}} = e^{\frac{u^2}{4\omega^2}\cdot\frac{1}{2}\sum_m' \frac{1}{m^2}} = e^{\frac{u^2}{4\omega^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}},$$

wo $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$ eine endliche bestimmte Grösse ist, und der zweite lässt sich aus der Formel (14.) auf S. 115 dadurch herleiten, dass $\frac{u}{2\omega}$ an Stelle von u geschrieben wird, wobei sich

$$\sin\frac{u\pi}{2\omega} = \frac{u\pi}{2\omega}\prod_m{}' \left\{\left(1-\frac{u}{2m\omega}\right) e^{\frac{u}{2m\omega}}\right\} \tag{1.}$$

ergiebt.

Der Productausdruck für den Sinus kann auch dazu benutzt werden, den Werth von $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$ zu finden. Durch Differentiation von $\log\sin u\pi$ folgt nämlich

$$\pi \operatorname{ctg} u\pi = \frac{1}{u} + \sum_m{}' \left(\frac{1}{u-m}+\frac{1}{m}\right), \tag{2.}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 u\pi} = \frac{1}{u^2} + \sum_m{}' \frac{1}{(u-m)^2}. \tag{3.}$$

Entwickelt man nun den Sinus in eine Potenzreihe,

$$\sin u\pi = u\pi - \frac{u^3\pi^3}{6} + \cdots,$$

setzt also

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 u\pi} = \frac{1}{u^2 - \frac{u^4\pi^2}{3}+\cdots} = \frac{1}{u^2}\left(1+\frac{u^2\pi^2}{3}+\cdots\right) = \frac{1}{u^2}+\frac{\pi^2}{3}+\cdots,$$

führt diesen Ausdruck in die Gleichung (3.) ein und macht, nachdem man $\frac{1}{u^2}$ auf beiden Seiten gestrichen hat, $u = 0$, so erhält man

$$\sum_m{}' \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{3},$$

d. h.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demnach wird

$$u \prod_m{}' \left\{\left(1-\frac{u}{2m\omega}\right) e^{\frac{u}{2m\omega}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{4m^2\omega^2}}\right\} = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega}. \tag{4.}$$

Um auch die Factoren des σ-Productes, für die $n \gtrless 0$ ist, mittels der Sinusfunction darzustellen, setzen wir in der Formel (1.) $u-2n\omega'$ statt u und erhalten

$$\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{(u-2n\omega')\pi}{2\omega} = (u-2n\omega')\prod_m{}' \left\{\left(1-\frac{u-2n\omega'}{2m\omega}\right) e^{\frac{u-2n\omega'}{2m\omega}}\right\},$$

woraus für $u = 0$

$$-\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega} = -2n\omega'\prod_m{}' \left\{\left(1+\frac{2n\omega'}{2m\omega}\right) e^{-\frac{2n\omega'}{2m\omega}}\right\}$$

hervorgeht. Die Division des ersten Ausdruckes durch den zweiten liefert

$$(5.)\qquad \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = \left(1-\frac{u}{2n\omega'}\right)\prod_m{}'\left\{\left(1-\frac{u}{2m\omega+2n\omega'}\right)e^{\frac{u}{2m\omega}}\right\}.$$

Es erscheint also bei dieser Operation unter dem Productzeichen der Factor $\left(1-\frac{u}{w}\right)$, aber noch nicht mit demselben Exponentialfactor behaftet wie in dem Productausdruck für die σ-Function. Um nun $\frac{u}{w}$ statt $\frac{u}{2m\omega}$ in den Exponenten zu bringen, setze man in der durch Differentiation von $\log\sin\frac{u\pi}{2\omega}$ folgenden, der Gleichung (2.) entsprechenden Formel

$$(6.)\qquad \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{u\pi}{2\omega} = \frac{1}{u}+\sum_m{}'\left(\frac{1}{u-2m\omega}+\frac{1}{2m\omega}\right)$$

$u=-2n\omega'$, wodurch sich

$$\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega} = \frac{1}{2n\omega'}+\sum_m{}'\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{2m\omega}\right)$$

und weiter

$$e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = e^{\frac{u}{2n\omega'}}\prod_m{}' e^{\frac{u}{w}-\frac{u}{2m\omega}}$$

ergiebt. Vereinigt man dann diese Gleichung durch Multiplication mit (5.), so wird

$$(7.)\qquad \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = \left(1-\frac{u}{2n\omega'}\right)e^{\frac{u}{2n\omega'}}\prod_m{}'\left\{\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}}\right\}$$

$$= \prod_m\left\{\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}}\right\}.$$

Es fehlt im Exponenten noch $\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}$. Nun folgt durch Differentiation der Gleichung (6.)

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{u\pi}{2\omega}} = \frac{1}{u^2}+\sum_m{}'\frac{1}{(u-2m\omega)^2}.$$

Wird auch hierin $u=-2n\omega'$ gesetzt, so erhält man

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = \frac{1}{(2n\omega')^2}+\sum_m{}'\frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2} = \sum_m\frac{1}{w^2},$$

und hieraus in Verbindung mit (7.):

$$\prod_m\left\{\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\} = \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}+\frac{\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}{2\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck über alle von Null verschiedenen Werthe von n und vereinigt das Product mit dem vorher berechneten, das aus der Annahme $n=0$ entstanden war, so gewinnt man für die σ-Function folgende Darstellung:

$$(8.)\qquad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\sin\frac{u\pi}{2\omega}\prod_n{}'\left\{\frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u\pi}{2\omega}}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right)^2}\right\}.$$

Durch eine veränderte Anordnung der Operationen, die zu dieser Formel geführt haben, kann man sich davon überzeugen, dass alle Exponentialgrössen auf der rechten Seite, die u^2 enthalten, zusammengefasst werden dürfen. Man multiplicire beide Seiten der Gleichung (7.), die rechte, nachdem man sie in der Form

$$\prod_m\left\{\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\}\cdot\prod_m e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

geschrieben hat, über die von Null verschiedenen Werthe von n, so ergiebt sich unter Voraussetzung der Convergenz des unendlichen Productes

$$\prod_n{}'\prod_m e^{\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} = \prod_n{}' e^{\frac{1}{2}u^2\sum_m\frac{1}{w^2}} = \prod_n{}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u\pi}{2\omega}}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right)^2}$$

die Formel

$$\prod_n{}'\prod_m\left\{\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\} = \prod_n{}'\left\{\frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right\}\prod_n{}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u\pi}{2\omega}}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right)^2}$$

oder, nachdem wieder die zu $n = 0$ gehörenden Primfactoren und der Factor u hinzugezogen sind,

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_n' \frac{1}{\sin^2 \frac{n\omega'\pi}{\omega}}} \cdot \prod_n' \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} e^{\frac{u\pi}{2\omega} \operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \right\},$$

d. h., wenn

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \sum_n' \frac{1}{\sin^2 \frac{n\omega'\pi}{\omega}} = g \tag{9.}$$

gesetzt wird,

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_n' \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} e^{\frac{u\pi}{2\omega} \operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \right\}. \tag{10.}$$

Die Convergenz des Productes

$$\prod_n' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_n' \frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}}$$

wird nun allein durch die Existenz der Zahl g bedingt. Um sie zu prüfen, setze man

$$\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega} = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{n\omega'\pi i}{\omega}} - e^{-\frac{n\omega'\pi i}{\omega}}\right),$$

ferner bleibend

$$e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}} = h, \tag{11.}$$

also

$$\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega} = \frac{1}{2i}(h^n - h^{-n}),$$

$$\sum_n' \frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = -\sum_n' \frac{4}{(h^n - h^{-n})^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(h^n - h^{-n})^2}$$

oder

$$\sum_n' \frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = -8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(1-h^{2n})^2} = -8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{-2n}}{(1-h^{-2n})^2}.$$

Aus elementaren Convergenzsätzen folgt, je nachdem man die Reihe in der

ersten oder in der zweiten Form schreibt, dass für $|h| < 1$ und $|h| > 1$ Convergenz stattfindet. Gleich Eins aber kann der absolute Betrag von h nicht sein, weil das Verhältnis $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell ist. Die Grösse g hat also unter allen Umständen einen endlichen bestimmten Werth.

Übrigens darf man, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen,

$$|h| < 1$$

annehmen. Setzt man nämlich

$$\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + \beta i,$$

also

$$\beta = \Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right),$$

so erkennt man aus

$$h = e^{(\alpha+\beta i)\pi i} = e^{-\beta\pi}(\cos\alpha\pi + i\sin\alpha\pi),$$

d. h.

$$|h| = e^{-\beta\pi},$$

dass diese Bedingung dann erfüllt sein würde, wenn

$$\beta > 0$$

wäre. Dies kann aber nöthigenfalls durch Umkehrung des Vorzeichens von ω' erreicht werden, die für die Formeln ohne Bedeutung ist, weil in dem Ausdruck von w,

$$w = 2m\omega + 2n\omega',$$

n alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe zu durchlaufen hat.

Die Formel (10.) kann in mannigfacher Weise weiter umgestaltet werden. Trennt man das unendliche Product in zwei, die sich auf $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $n = -1, -2, -3, \ldots$ beziehen, und multiplicirt diese gliedweise, so erhält man

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega} + \frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \right\} \tag{12.}$$

oder auch, nach Anwendung einer elementaren Relation unter Sinusfunctionen,

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{u\pi}{2\omega}}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right). \tag{13.}$$

Andererseits kann man, indem man überall statt des Sinus die Exponentialfunction einführt, setzen:

$$\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\pi = \frac{1}{2i}\left(e^{\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\pi i} - e^{-\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\pi i}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(h^n e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} - h^{-n} e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}\right)$$

$$= -\frac{h^{-n} e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}}{2i}\left(1-h^{2n} e^{\frac{u\pi i}{\omega}}\right).$$

Wird hierin das Vorzeichen von u umgekehrt, ferner $u=0$ angenommen, und werden die entstehenden Ausdrücke in (12.) eingeführt, so folgt

$$\text{(14.)}\quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \frac{e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} - e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-h^{2n} e^{\frac{u\pi i}{\omega}}\right)\left(1-h^{2n} e^{-\frac{u\pi i}{\omega}}\right)}{(1-h^{2n})^2},$$

eine Formel, die auch in der Gestalt

$$\text{(15.)}\quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-2h^{2n}\cos\frac{u\pi}{\omega}+h^{4n}}{(1-h^{2n})^2}$$

geschrieben werden kann. Für

$$\text{(16.)}\quad e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} = z$$

heisst die Gleichung (14.):

$$\text{(17.)}\quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \frac{z-z^{-1}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-h^{2n}z^2)(1-h^{2n}z^{-2})}{(1-h^{2n})^2}.$$

Durch Differentiation des Logarithmus der veränderten Ausdrücke für die Function σu lassen sich auch für $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ und $\wp u$ neue Darstellungen finden. Wir benutzen für diesen Zweck die Formeln (12.) und (14.); denn Gleichung (13.) ist von (12.), und (15.) von (14.) nur unwesentlich verschieden. Aus (12.) folgt

$$\text{(18.)}\quad \frac{\sigma'}{\sigma}u = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\cdot 2gu + \frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{ctg}\frac{u\pi}{2\omega} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\pi - \operatorname{ctg}\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi\right)\right\},$$

und aus (14.)

$$\text{(19.)}\quad \frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{gu\pi^2}{2\omega^2} + \frac{\pi i}{2\omega}\frac{e^{\frac{u\pi i}{2\omega}}+e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}}{e^{\frac{u\pi i}{2\omega}}-e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}} - \frac{\pi i}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h^{2n}e^{\frac{u\pi i}{\omega}}}{1-h^{2n}e^{\frac{u\pi i}{\omega}}} - \frac{h^{2n}e^{-\frac{u\pi i}{\omega}}}{1-h^{2n}e^{-\frac{u\pi i}{\omega}}}\right).$$

Setzt man in der letzten Gleichung $u=\omega$, so verschwindet sowohl die Differenz unter dem Summenzeichen wie auch der der Summe vorangehende Quotient, und es entsteht ein einfacher Zusammenhang zwischen g und der schon früher (S. 70) eingeführten Grösse $\eta = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega$, nämlich

$$\eta = \frac{g\pi^2}{2\omega}$$

oder

$$\text{(20.)}\quad g = \frac{2\omega\eta}{\pi^2}.$$

In Verbindung mit der Definitionsgleichung (9.) für g liefert die Relation (20.) eine Darstellung von η durch die Perioden 2ω und $2\omega'$:

$$\text{(21.)}\quad \eta = \frac{\pi^2}{2\omega}\left(\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right),$$

oder, nach Einführung von h:

$$\text{(22.)}\quad \eta = \frac{\pi^2}{2\omega}\left(\frac{1}{6}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(h^n-h^{-n})^2}\right).$$

Für den, in den obigen Formeln für σu übereinstimmend auftretenden Exponentialfactor ergiebt sich die Gleichung

$$e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}.$$

Ein besonders wichtiges Resultat aber folgt aus der Gleichung (19.) durch die Annahme $u=\omega'$. Setzt man wie früher $\eta' = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega'$, so wird

$$\eta' = 2g\omega'\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 + \frac{\pi i}{2\omega}\frac{e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}+1}{e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}-1} - \frac{\pi i}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h^{2n}e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}}{1-h^{2n}e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}} - \frac{h^{2n}e^{-\frac{\omega'\pi i}{\omega}}}{1-h^{2n}e^{-\frac{\omega'\pi i}{\omega}}}\right),$$

und bei Einführung von $e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}} = h$ und Berücksichtigung der Beziehung zwischen g und η:

$$\eta' = \frac{\eta\omega'}{\omega} + \frac{\pi i}{2\omega}\,\frac{h+1}{h-1} - \frac{\pi i}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h^{2n+1}}{1-h^{2n+1}} - \frac{h^{2n-1}}{1-h^{2n-1}}\right).$$

Die Summe der n ersten Glieder der unendlichen Reihe, von dem Factor $-\frac{\pi i}{\omega}$ abgesehen, heisse S_n, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h^{2n+1}}{1-h^{2n+1}} - \frac{h^{2n-1}}{1-h^{2n-1}}\right) = \lim_{n=\infty} S_n$$

ist. Man hat

$$S_n = -\frac{h}{1-h} + \frac{h^{2n+1}}{1-h^{2n+1}}.$$

Ist nun $|h| < 1$, so nähert sich mit unbegrenzt wachsendem n der zweite Theil der Grenze Null, und es wird

$$\eta'\omega = \eta\omega' + \frac{\pi i}{2}\,\frac{h+1}{h-1} + \pi i\,\frac{h}{1-h}$$

oder

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2}.$$

Ist aber $|h| > 1$, so nähert sich der zweite Theil, nämlich

$$\frac{1}{h^{-(2n+1)}-1},$$

dem Werthe -1, und es wird

$$\eta\omega' - \omega\eta' = -\frac{\pi i}{2}.$$

Damit ist der Werth der auf S. 73 mit $2k+1$ bezeichneten ungeraden Zahl gleich ± 1 gefunden. Zusammenfassend kann man sagen, dass in der Relation

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \pm\frac{\pi i}{2} \tag{23.}$$

das obere oder das untere Zeichen entsprechend der Ungleichung

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) \gtrless 0$$

gilt.

Die Gleichung (23.), die ihrem Inhalt nach, aber nicht in dieser Form, von Legendre aufgestellt worden ist, wird als Legendresche Relation bezeichnet.

Differentiirt man die beiden Gleichungen (18.) und (19.), nachdem man für g seinen Werth aus (20.) eingeführt hat, so erhält man folgende Ausdrücke für die $\wp$-Function:

$$\wp u = -\frac{\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\frac{u\pi}{2\omega}} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\pi} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}\right\} \tag{24.}$$

und

$$\wp u = -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi^2}{\omega^2}\,\frac{1}{(z-z^{-1})^2} - \frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{h^{2n}z^2}{(1-h^{2n}z^2)^2} + \frac{h^{2n}z^{-2}}{(1-h^{2n}z^{-2})^2}\right\}. \tag{25.}$$

Vierzehntes Kapitel.

Darstellung elliptischer Functionen mittels der σ-Function.

Eine besonders hervorstechende Eigenschaft der $\wp$-Function und mehrerer anderer Ausdrücke, die im Verlaufe der Untersuchung aufgetreten sind, nämlich der σ-Quotienten, ist ihre doppelte Periodicität. Sie giebt Veranlassung, sich mit doppelt periodischen Functionen überhaupt zu beschäftigen und namentlich die Frage nach deren Darstellbarkeit durch bekannte Functionen aufzuwerfen. Für die $\wp$-Function waren die Perioden mit den Unendlichkeitsstellen identisch, und es ist ferner (S. 62) bewiesen worden, dass die Entwickelung von $\wp u$ in der Nähe einer solchen Stelle die Form

$$\wp u = \frac{1}{(u-w)^2} + \mathfrak{P}(u-w)$$

hat, also nur die eine negative Potenz $(u-w)^{-2}$ enthält. Wir sagen von einer Function, dass sie für eine bestimmte Stelle den Charakter einer rationalen Function habe, wenn sie sich in der Umgebung dieser Stelle in eine Potenzreihe entwickeln lässt, die nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen aufweist. Im Besonderen würde sie den Charakter einer ganzen Function haben, wenn negative Potenzen garnicht vorkämen. Dies vorausgeschickt, soll unter einer elliptischen Function eine solche verstanden werden, die doppelt periodisch ist und für alle endlichen Werthe des Arguments den Charakter einer rationalen Function hat. Dann sind $\wp u$ und die σ-Quotienten spezielle elliptische Functionen.

Die doppelte Periodicität einer Function $\varphi(u)$ bedingt die Existenz eines Paares constanter Grössen w, w' der Art, dass

$$\varphi(u+w) = \varphi(u),$$
$$\varphi(u+w') = \varphi(u)$$

ist und dass sich alle Grössen W, für die eine Gleichung

$$\varphi(u+W) = \varphi(u)$$

besteht, in der Form

$$W = mw + m'w'$$

darstellen lassen, wo m und m' positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. In der Theorie der $\wp$-Function ist bewiesen worden, dass das Verhältniss der beiden Bestandtheile w, w' eines primitiven Periodenpaares nicht reell ist; doch war der Beweis an die besonderen Eigenschaften der $\wp$-Function gebunden. Aber man kann allgemein für irgend eine doppelt periodische Function zeigen, dass das Periodenverhältniss $\frac{w'}{w}$ nicht reell sein kann. Es sei

$$\frac{w'}{w} = r$$

gesetzt, also (w, rw) als primitives Periodenpaar angenommen; durch passende Wahl der Bezeichnungen kann erreicht werden, dass die Grösse r, wenn reell, zugleich positiv und kleiner als Eins ist. Setzt man

$$1 = qr + r',$$

wo qr das grösste unterhalb Eins liegende Vielfache von r, und demnach

$$r' < r$$

ist, so muss auch

$$r'w = w - qw'$$

eine Periode der Function $\varphi(u)$ sein. Der Ansatz

$$r = q'r' + r'' \qquad (r'' < r')$$

führt in gleicher Weise auf die Periode $r''w$, und da die Reste $r', r'', \ldots$ beständig und unbegrenzt abnehmen, so müsste es eine unendlich kleine Periode geben, was mit dem Begriff der Periode, als einer Constanten, nicht vereinbar ist. Ein Widerspruch würde nur dann nicht vorliegen, wenn in der Reihe der Reste

$$r', r'', r''', \ldots$$

nach einer endlichen Anzahl von Gliedern der Werth Null vorkäme, d. h. wenn r rational wäre. Was lässt sich dann über die Perioden aussagen?

Setzt man
$$r'w = w'',$$
so kann man wegen
$$w = qw' + w''$$
jede Periode W, die ursprünglich als homogene lineare ganzzahlige Function von w und w' angenommen war, als ebensolche Function von w' und w'' darstellen; bei Fortsetzung der Operationen wird das primitive Periodenpaar (w', w'') weiter durch (w'', w''') ersetzt, wo
$$w''' = r''w$$
ist, u. s. f. Ist nun
$$r^{(n-2)} = q^{(n-1)} r^{(n-1)} + r^{(n)},$$
und wäre
$$r^{(n)} = 0,$$
also
$$w^{(n-1)} = q^{(n-1)} w^{(n)},$$
so würden sich alle Perioden W, weil homogene lineare Functionen von $w^{(n-1)}$ und $w^{(n)}$ mit ganzzahligen Coefficienten, als Vielfache von $w^{(n)}$ allein darstellen lassen. D. h. die Function $\varphi(u)$ wäre, der Voraussetzung entgegen, nur einfach periodisch.

Hiernach muss für doppelt periodische Functionen das Verhältniss $\frac{w'}{w}$ als nicht relle Zahl vorausgesetzt werden.

Auf die Existenz unendlich kleiner Perioden würde man, wie Jacobi gezeigt hat, auch durch die Annahme geführt werden, dass eine Function einer Variablen mehr als zwei Perioden habe. Der Widerspruch tritt hier nicht ein, wenn, beispielsweise für drei primitive Perioden w, w', w'', diese Grössen durch eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten
$$mw + m'w' + m''w'' = 0$$
verbunden wären. Dann würde man aber, ähnlich wie bei der eben durchgeführten Untersuchung, durch Einführung neuer primitiver Periodensysteme, unter Verkleinerung der Zahlcoefficienten m, m', m'', zu dem Ergebniss kommen, dass eine Periode durch zwei andere in der oben genannten Weise darstellbar, die Function also nur doppelt periodisch wäre.

Die Beschränkung auf doppelt periodische Functionen einer Variablen ist hiernach gerechtfertigt.

Um nun einen Weg zu ermitteln, auf dem man zu Ausdrücken elliptischer Functionen von gegebenen speciellen Eigenschaften gelangen könnte, gehen wir von der Formel (S. 37)
$$\wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$
aus. Durch sie wird eine besondere elliptische Function, die für $u = \pm v$ verschwindet und für $u = 0$ von der zweiten Ordnung unendlich gross wird, als Quotient von Producten von σ-Functionen dargestellt. Die σ-Functionen im Zähler haben die Nullstellen, die im Nenner die Unendlichkeitsstellen der elliptischen Function zu Nullstellen; ausserdem erscheint der Quotient mit der Constanten $-\frac{1}{\sigma^2 v}$ multiplicirt. Behufs Verallgemeinerung eines solchen Ausdruckes bilde man
$$C\,\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\ldots\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\ldots\sigma(u-v_s)} = \varphi(u)$$
und untersuche, ob $\varphi(u)$ doppelt periodisch sein kann. Aus den Gleichungen (S. 72 (13.))
$$\sigma(u+2\omega-u_1) = -e^{2\eta(u-u_1+\omega)}\,\sigma(u-u_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma(u+2\omega-v_s) = -e^{2\eta(u-v_s+\omega)}\,\sigma(u-v_s)$$
folgt für
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_r = u',$$
$$v_1 + v_2 + \cdots + v_s = v':$$
$$\varphi(u+2\omega) = (-1)^{r-s} e^{2\eta[(r-s)(u+\omega)-u'+v']}\,\varphi(u),$$
und entsprechend
$$\varphi(u+2\omega') = (-1)^{r-s} e^{2\eta'[(r-s)(u+\omega')-u'+v']}\,\varphi(u).$$
Für die Periodicität von $\varphi(u)$ mit den Perioden 2ω und $2\omega'$ ist vor allem nöthig, dass u aus den Exponentialfactoren wegfällt. Dazu muss
$$\eta(r-s) = 0$$
und
$$\eta'(r-s) = 0$$
sein; und da wegen der Legendreschen Relation (S. 130)
$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\varepsilon\pi i}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

nicht beide Grössen η und η' Null sein können, so muss

$$r - s = 0$$

gesetzt, d. h. die Anzahl der Nullstellen der Function $\varphi(u)$ gleich der Anzahl der Unendlichkeitsstellen angenommen werden. Was von den Exponentialfactoren übrig bleibt, wird sicher dann gleich Eins, wenn

$$u' - v' = 0$$

gemacht wird. Da nun ferner $\varphi(u)$ offenbar für alle endlichen Werthe des Arguments den Charakter einer rationalen Function hat, so ergiebt sich: Der Ausdruck

$$C \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{\sigma(u-u_\varrho)}{\sigma(u-v_\varrho)} = \varphi(u)$$

stellt unter der Bedingung

$$\sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{r} v_\varrho$$

eine elliptische Function dar.

Besteht diese Bedingung nicht, so kann man versuchen, $\varphi(u)$ durch Multiplication mit einer Exponentialgrösse, deren Argument eine lineare Function von u ist, in eine doppelt periodische Function überzuführen. Wegen des Auftretens der willkürlichen Constanten C genügt es dabei, den Exponentialfactor gleich $e^{\alpha u}$ statt gleich $e^{\alpha u+\beta}$ anzunehmen. Wird nun

$$e^{\alpha u} \varphi(u) = \psi(u)$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \psi(u+2\omega) &= e^{2\alpha\omega}(-1)^{r-s} e^{2\eta[(r-s)(u+\omega)-u'+v']} \psi(u), \\ \psi(u+2\omega') &= e^{2\alpha\omega'}(-1)^{r-s} e^{2\eta'[(r-s)(u+\omega')-u'+v']} \psi(u), \end{aligned}$$

und somit wie vorher $r = s$. Für das vollständige Wegfallen der Exponentialfactoren sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha\omega + \eta(v'-u') &= k\pi i, \\ \alpha\omega' + \eta'(v'-u') &= k'\pi i, \end{aligned}$$

in denen k und k' ganze Zahlen sind, nothwendig und hinreichend. Mit Hilfe der Legendreschen Relation erhält man aus ihnen für $\varepsilon = +1$

$$\begin{aligned} v' - u' &= -2k'\omega + 2k\omega', \\ \alpha &= 2k'\eta - 2k\eta'. \end{aligned}$$

Sind demnach $u_1, \dots u_r$, $v_1, \dots v_r$ zwei Reihen von je r Argumenten, so gewählt, dass

$$\sum_{\varrho=1}^{r} v_\varrho - \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho = 2\tilde{\omega}$$

ist, so setze man

$$2\tilde{\omega} = -2k'\omega + 2k\omega';$$

dann wird

$$C e^{(2k'\eta - 2k\eta')u} \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{\sigma(u-u_\varrho)}{\sigma(u-v_\varrho)} = \psi(u)$$

eine elliptische Function.

Dieser Satz gestattet, mittels der einen Function σu beliebig viele elliptische Functionen zu bilden. Besonders wichtig aber ist die Thatsache, dass sich jede elliptische Function in der Form $\psi(u)$ darstellen lässt.

Um dies zu beweisen, ist es nöthig, den Begriff einer Unendlichkeits- oder Nullstelle einer elliptischen Function genauer zu definiren. Vor allem ist zu bemerken, dass die Eigenschaft einer elliptischen Function $f(u)$, im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function zu haben, es mit sich bringt, dass in jedem endlichen Bereiche nur eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen liegen kann. Und da $\frac{1}{f(u)}$ eine Function von denselben wesentlichen Eigenschaften ist wie $f(u)$, ihre Unendlichkeitsstellen aber mit den Nullstellen von $f(u)$ zusammenfallen, so gilt dasselbe auch für die Nullstellen. Es sei nun u_0 eine beliebige Nullstelle von $f(u)$. Da das Verhältniss $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell ist, so kann man u_0 als homogene lineare Function von 2ω und $2\omega'$ darstellen und im Besonderen

$$u_0 = 2(m+\mu)\omega + 2(n+\nu)\omega'$$

setzen, wo m, n ganze Zahlen und

$$0 \leqq \mu < 1, \quad 0 \leqq \nu < 1$$

sein soll; d. h. man kann der Stelle u_0 eine andere

$$u_0 - (2m\omega + 2n\omega') = u_0'$$

in dem Periodenparallelogramm mit den Ecken 0, 2ω, $2\omega + 2\omega'$, $2\omega'$ eindeutig zuordnen, in welchem übrigens die Punkte auf den in der Ecke $2\omega + 2\omega'$ zusammenstossenden Seiten nicht mitgezählt, sondern zu angrenzenden Periodenparallelogrammen gerechnet werden. Alle von u_0' um eine beliebige Periode verschiedenen Nullstellen führen hierbei auf u'_ϱ zurück. Es seien r Stellen dieser Art im Periodenparallelogramm gelegen, wobei jede einzelne Stelle in die Reihe

$$u_1, u_2, \dots u_r$$

so oft aufgenommen werden soll wie die Ordnungszahl des Verschwindens angiebt. Entsprechendes gilt für die im Periodenparallelogramm liegenden Unendlichkeitsstellen

$$v_1, v_2, \dots v_s.$$

Versteht man nun unter $\varphi(u)$ denselben Ausdruck wie auf S. 135, so verschwinden $f(u)$ und $\varphi(u)$ an den Stellen u_ϱ $(\varrho = 1, \dots r)$ und den ihnen congruenten, d. h. von ihnen um eine beliebige Periode verschiedenen Stellen; und unendlich gross werden beide Functionen für die Argumentwerthe v_σ $(\sigma = 1, \dots s)$ und die ihnen congruenten. Der Quotient $\frac{f(u)}{\varphi(u)}$ wird hiernach für keinen endlichen Werth von u Null oder unendlich gross, lässt sich also in der Form $e^{g(u)}$ darstellen (S. 109). Vermehrt man nun u um 2ω, dann um $2\omega'$ und setzt wegen der Periodicität von $f(u)$ die auftretenden Exponentialfactoren gleich Eins, so erhält man als Bedingungen:

$$g(u+2\omega) - g(u) + (r-s)\pi i + 2\eta\,(r-s)(u+\omega) + 2\eta\,(v'-u') = 2k\pi i,$$
$$g(u+2\omega') - g(u) + (r-s)\pi i + 2\eta'(r-s)(u+\omega') + 2\eta'(v'-u') = 2k'\pi i.$$

Um die lineare Function von u zum Wegfall zu bringen, differentiire man zweimal hinter einander nach u, so wird

$$g''(u+2\omega) - g''(u) = 0,$$
$$g''(u+2\omega') - g''(u) = 0.$$

Die beständig convergente Potenzreihe $g''(u)$ muss sich aber, wenn sie doppelt periodisch sein soll, auf eine Constante reduciren (S. 118). Setzt man dementsprechend

$$g(u) = au^2 + \alpha u + \beta,$$

wo e^β wieder zu der multiplicativen Constanten C hinzugezogen werden kann, so ergiebt sich

$$g(u+2\omega) - g(u) = 4a\omega u + 4a\omega^2 + 2\alpha\omega,$$

und die Bedingung für das Wegfallen von u aus dem ersten Exponential-

factor liefert nun

$$4a\omega + 2\eta\,(r-s) = 0.$$

In gleicher Weise folgt

$$4a\omega' + 2\eta'(r-s) = 0.$$

Die Determinante dieser beiden in a und $r-s$ homogenen linearen Gleichungen ist nach der Legendreschen Relation von Null verschieden; mithin müssen die beiden Gleichungen

$$a = 0, \quad r-s = 0$$

bestehen. Nachdem nun $e^{g(u)} = e^{\alpha u}$ und $\varphi(u)$ gleich der auf S. 136 so bezeichneten Function geworden ist, gelten für α und $v'-u'$ dieselben Gleichungen wie dort mit denselben Folgerungen, d. h. es ergiebt sich für die elliptische Function $f(u)$, wie behauptet, die Darstellung

$$(1.) \qquad f(u) = C\,\frac{\sigma(u-u_1)\dots\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\dots\sigma(u-v_r)}\,e^{(2k'\eta - 2k\eta')u}.$$

Verzichtet man darauf, dass die Null- und Unendlichkeitsstellen, die in dieser Formel vorkommen, sämmtlich im Periodenparallelogramm liegen sollen, so kann man den Exponentialfactor weglassen. Dies wird z. B. dadurch erreicht, dass v_r durch

$$v_r - 2k'\omega + 2k\omega' = v'_r$$

ersetzt wird. Man kann dann entweder, weil

$$v_1 + \dots + v_{r-1} + v'_r = u_1 + \dots + u_r$$

wird, die Schlüsse von S. 135 anwenden oder auch

$$\sigma(u-v_r) = \sigma(u - v'_r + 2k'\omega - 2k\omega')$$

mittels der Formel S. 72 (12.) auf $\sigma(u-v')$ zurückführen.

Der constante Factor C in der Darstellung (1.) bestimmt sich in jedem Falle durch Angabe eines Werthes von $f(u)$, den diese Function für ein von den Null- und Unendlichkeitsstellen verschiedenes Argument annimmt.

Die Anzahl der Unendlichkeitsstellen einer elliptischen Function im Periodenparallelogramm, jede mit der zugehörigen Ordnungszahl gerechnet, bezeichnen wir als **Grad** der elliptischen Function. Er kann auch als Anzahl der Nullstellen der Function im Periodenparallelogramm erklärt werden, wenn man jede von ihnen so oft zählt wie die Ordnungszahl der Stelle angiebt. Denn die Gleichung

$$r - s = 0$$

besagt, dass eine elliptische Function innerhalb dieses Gebietes ebenso oft Null wie unendlich gross wird.

Dieser Satz lässt sich dahin verallgemeinern, dass eine elliptische Function im Periodenparallelogramm jeden beliebigen Werth A gleich oft annimmt. Die Function $f(u) - A$ nämlich wird an denselben r Stellen unendlich gross wie $f(u)$ selbst. Sie muss also auch an r Stellen Null werden, d. h. die Gleichung

$$f(u) = A$$

wird durch r Werthe des Arguments befriedigt.

Nach dem oben bei der Bestimmung von $g''(u)$ wieder benutzten Satze giebt es keine elliptische Function vom Grade Null. Denn da eine solche im Endlichen nirgends unendlich gross wird, so müsste sie sich als beständig convergente Potenzreihe darstellen lassen.

Aber auch elliptische Functionen ersten Grades können nicht existiren. Denn die Gleichung

$$\sum_{\varrho=1}^{r} v_\varrho - \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho = 2\bar{\omega}$$

würde für eine solche in

$$v_1 - u_1 = 2\bar{\omega}$$

übergehen, die, weil u_1 und v_1 im Periodenparallelogramm liegen, nur für $2\bar{\omega} = 0$ bestehen könnte. Dann würde der Exponentialfactor und, wegen $v_1 = u_1$, auch der Quotient von σ-Functionen gleich Eins werden, die Function $f(u)$ sich also auf eine Constante reduciren.

Dagegen giebt es elliptische Functionen zweiten Grades. Die $\wp$-Function ist eine solche, und zwar zeichnet sie sich durch die Eigenschaft aus, dass ihre beiden Unendlichkeitsstellen in eine, $u = 0$, zusammenfallen.

Fünfzehntes Kapitel.

Darstellung elliptischer Functionen durch die $\wp$-Function.

Die im vorigen Kapitel besprochene Darstellung einer elliptischen Function durch einen Quotienten von σ-Producten entspricht dem Ausdruck einer rationalen Function durch einen Quotienten zweier ganzen Functionen. Es giebt für die rationalen Functionen eine andere wichtige Darstellung, die ebenfalls in der Theorie der elliptischen Functionen ihr Analogon hat, nämlich als Aggregat von Partialbrüchen, d. h. von rationalen Functionen, die nur an je einer Stelle unendlich gross werden. Dabei können noch solche Partialbrüche, für welche die Ordnung des Unendlichwerdens grösser als Eins ist, als Ableitungen anderer betrachtet werden, die nur Unendlichkeitsstellen erster Ordnung haben.

Es sei

$$v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_m$$

ein System incongruenter Unendlichkeitsstellen der elliptischen Function $f(u)$; diese Stellen mögen sämmtlich im Periodenparallelogramm liegen und, im Gegensatz zu der Voraussetzung auf S. 138, alle unter einander verschieden sein. Die zugehörigen Ordnungszahlen seien

$$l_1,\ l_2,\ \ldots\ l_m.$$

Wird eine beliebige Stelle der Reihe vorläufig mit v, ihre Ordnungszahl mit l bezeichnet, so gilt für die Function $f(u)$ in der Nähe des Argumentwerthes v die Entwickelung

$$f(u) = c(u-v)^{-1} + c'(u-v)^{-2} + \cdots + c^{(l-1)}(u-v)^{-l} + \mathfrak{P}(u-v),$$

d. h., wenn für c auch $c^{(0)}$ geschrieben wird,

$$f(u) = \sum_{\nu=0}^{l-1} c^{(\nu)}(u-v)^{-\nu-1} + \mathfrak{P}(u-v).$$

Anstatt der negativen Potenzen von $(u-v)^{-2}$ an kann man elliptische Functionen einführen, die nur je eine negative Potenz aufweisen; denn es ist

$$\begin{aligned} \wp(u-v) &= \quad (u-v)^{-2} + \mathfrak{P}_0(u-v), \\ \wp'(u-v) &= -2(u-v)^{-3} + \mathfrak{P}_0'(u-v), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Aber das Anfangsglied $c(u-v)^{-1}$ kann auf diese Art nicht zum Wegfall gebracht werden. Dem wird abgeholfen, wenn man an Stelle der Function $f(u)$ zunächst ihre erste Ableitung betrachtet, denn deren Entwickelung in der Nähe der Stelle v liefert

$$f'(u) = -\sum_{\nu=0}^{l-1} (\nu+1)\, c^{(\nu)}(u-v)^{-\nu-2} + \mathfrak{P}'(u-v).$$

Da nun allgemein

$$\wp^{(\nu)}(u-v) = (-1)^{\nu}(\nu+1)!\,(u-v)^{-\nu-2} + \mathfrak{P}_0^{(\nu)}(u-v)$$

ist, so definiren wir eine Function $\varphi'(u)$ durch die Formel

$$\varphi'(u) = -\sum_{\nu=0}^{l-1} (\nu+1)\, c^{(\nu)} \frac{(-1)^{\nu}}{(\nu+1)!}\, \wp^{(\nu)}(u-v)$$

und betrachten die Differenz

$$f'(u) - \varphi'(u);$$

sie wird für $u = v$ nicht mehr unendlich gross.

Erklärt man jetzt m Functionen

$$\varphi_1'(u), \ldots \varphi_m'(u)$$

für die Stellen

$$v_1, \ldots v_m$$

der Function $\varphi'(u)$ entsprechend, d. h. setzt man, wenn in der Nähe der Stelle v_μ die Entwickelung

$$f(u) = \sum_{\nu=0}^{l_\mu-1} c_\mu^{(\nu)}(u-v_\mu)^{-\nu-1} + \mathfrak{P}_\mu(u-v_\mu)$$

gilt,

$$\varphi_\mu'(u) = \sum_{\nu=0}^{l_\mu-1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\, c_\mu^{(\nu)}\, \wp^{(\nu)}(u-v_\mu)$$

und subtrahirt die Summe

$$\varphi_1'(u) + \cdots + \varphi_m'(u) = \psi'(u)$$

von $f'(u)$, so wird die Differenz

$$f'(u) - \psi'(u)$$

an keiner im Periodenparallelogramm gelegenen Stelle, und demnach überhaupt für keinen endlichen Werth, unendlich gross. Da nun, wie sich von selbst versteht, die in $\varphi_1'(u), \ldots \varphi_m'(u)$ enthaltenen $\wp$-Functionen so gewählt sind, dass sie dasselbe Periodenpaar haben wie die elliptische Function $f(u)$, so ist $f'(u) - \psi'(u)$ eine elliptische Function. Nach dem im Vorhergehenden wiederholt herangezogenen Satze (S. 118) kann eine solche nicht, wie es doch nach dem eben Bewiesenen sein müsste, als beständig convergente Potenzreihe darstellbar sein, ausser wenn sich diese auf ihr Anfangsglied reducirt. D. h. es muss

$$\begin{aligned} f'(u) - \psi'(u) &= C', \\ f(u) &= \psi(u) + C'u + C'' \end{aligned}$$

sein. Wegen

$$\wp(u-v) = -\frac{d}{du}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)$$

gilt für $\psi(u)$ die Formel

$$\psi(u) = \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu) + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{l_\mu-1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\, c_\mu^{(\nu)}\, \wp^{(\nu-1)}(u-v_\mu).$$

In ihr sind sämmtliche Glieder periodisch bis auf die Summe an erster Stelle, die sich bei einer Vermehrung des Argumentes um die Periode 2ω der Function $f(u)$ um die Constante

$$2\eta \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu$$

ändert. Die in dem Ausdruck von $f(u)$ enthaltene lineare Function $C'u + C''$ ändert sich dabei um $2C'\omega$; es muss also

$$C'\omega + \eta \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu = 0$$

werden. Ebenso erhält man bei Vermehrung von u um eine von 2ω unabhängige Periode $2\omega'$ von $f(u)$

$$C'\omega' + \eta' \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu = 0.$$

Wird noch angenommen, das Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ sei für die $\wp$-Function primitiv, so ist die Determinante dieser beiden in C' und $\sum c_\mu$ homogenen linearen Gleichungen nach der Legendreschen Relation von Null verschieden, mithin

$$C' = 0, \quad \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu = 0.$$

Die zweite dieser beiden Relationen, die mit Rücksicht auf die Bedeutung von c_μ die Form

$$\text{(1.)} \qquad \sum_{\mu=1}^{m} [f(u)]_{(u-v_\mu)^{-1}} = 0$$

annimmt, enthält einen wichtigen allgemeinen Satz der Theorie der elliptischen Functionen. Entwickelt man nämlich eine beliebige elliptische Function in der Nähe aller Unendlichkeitsstellen eines incongruenten Systems, so ist die Summe der Coefficienten der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenzen, bezogen auf alle diese Stellen, gleich Null.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man der Darstellung einer elliptischen Function, die wegen $C' = 0$ zunächst die Gestalt

$$f(u) = \psi(u) + C'',$$

d. h.

$$\text{(2.)} \quad f(u) = C'' + \sum_{\mu=1}^{m} \Big\{ c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u - v_\mu) + c'_\mu \wp(u - v_\mu) - \frac{1}{2} c''_\mu \wp'(u - v_\mu) + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^{l_\mu}}{(l_\mu - 1)!} c_\mu^{(l_\mu - 1)} \wp^{(l_\mu - 2)}(u - v_\mu) \Big\}$$

annimmt, noch eine veränderte Form geben. Ersetzt man nämlich in der Gleichung S. 37 (15.) v durch $-v_\mu$, multiplicirt mit c_μ und summirt über μ, so ergiebt sich

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u - v_\mu) = \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma} u - \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma} v_\mu + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\wp' u + \wp' v_\mu}{\wp u - \wp v_\mu}.$$

Des in Rede stehenden Satzes wegen fällt rechts die erste Summe, aus der $\frac{\sigma'}{\sigma} u$ herausgezogen werden kann, weg, die zweite kann beim Einsetzen in (2.) mit der Constanten C'' zu einer neuen Constanten C vereinigt werden, und man erhält, wenn noch

$$\text{(3.)} \qquad \frac{1}{2} \frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v} = \wp(u, v)$$

gesetzt wird,

$$\text{(4.)} \qquad f(u) = C + \sum_{\mu=1}^{m} \Big\{ c_\mu \wp(u, v_\mu) + \sum_{\nu=1}^{l_\mu - 1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} c_\mu^{(\nu)} \wp^{(\nu-1)}(u - v_\mu) \Big\}.$$

Diese Darstellung entspricht, soweit es der Natur der Sache nach möglich ist, der einer rationalen Function durch eine Summe von Partialbrüchen. Der nächstliegende Gedanke würde allerdings der gewesen sein, elliptische Functionen mit nur einer Unendlichkeitsstelle für die Darstellung zu verwenden. Aber nach dem auf S. 140 bewiesenen Satze können solche Functionen nicht existiren.

Die in der Gleichung (4.) vorkommenden $\wp$-Functionen und ihre Ableitungen beziehen sich auf die zusammengesetzten Argumente $u - v_1, \ldots u - v_m$. Nun ist nach dem Additionstheorem

$$\wp(u - v) = R(\wp u, \wp' u, \wp v, \wp' v),$$

wo R eine rationale Function der vier Argumente $\wp u, \ldots \wp' v$ bezeichnet. Differentiirt man den Ausdruck nach u und lässt dieses Argument weg, so erhält man

$$\wp'(u - v) = \frac{\partial R}{\partial \wp} \wp' + \frac{\partial R}{\partial \wp'} \wp''.$$

Wird jetzt

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2} g_2$$

eingesetzt, so erscheint $\wp'(u - v)$ wieder als rationale Function der ursprünglichen vier Argumente:

$$\wp'(u - v) = R_1(\wp u, \wp' u, \wp v, \wp' v).$$

So weiter schliessend gewinnt man den Ausdruck

$$\wp^{(\nu)}(u - v) = R_\nu(\wp u, \wp' u, \wp v, \wp' v),$$

der nur dann seine Bedeutung verliert, wenn unter den Unendlichkeitsstellen von $f(u)$ die Stelle $v = 0$ enthalten ist. Denn für diese werden $\wp v$ und $\wp' v$ unendlich gross. Aber für eine solche Annahme kommt in dem auf $v = 0$ bezüglichen Theile der Darstellung (4.) gar kein zusammengesetztes Argument vor, und man braucht nur $\wp'' u, \wp''' u, \ldots$ durch $\wp u$ und $\wp' u$ auszudrücken, um diesen Theil als rationale, und zwar als ganze rationale Function von $\wp u$ und der ersten Ableitung dieser Function zu erhalten.

Setzt man die Ausdrücke aller vorkommenden Ableitungen in (4.) ein und nimmt das Aggregat $\sum c_\mu \wp(u, v_\mu)$ hinzu, das bereits in $\wp u$ und $\wp' u$ rational ist, so wird schliesslich

$$f(u) = R(\wp u, \wp' u). \tag{5.}$$

Ist also $f(u)$ eine elliptische Function mit den beiden Perioden 2ω und $2\omega'$, deren Verhältniss nicht reell ist, und denkt man sich, etwa nach der Formel S. 120 (25.), eine $\wp$-Function gebildet, für die das Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives ist, so lässt sich $f(u)$ rational durch diese specielle elliptische Function und ihre erste Ableitung darstellen.

Für die wirkliche Herleitung eines solchen Ausdruckes hat man, wie wir sehen, die Unendlichkeitsstellen der elliptischen Function und die Coefficienten der negativen Potenzen, die bei der Entwickelung in der Nähe dieser Stellen auftreten, als bekannt anzunehmen. Ausserdem muss man, um die in (4.) vorkommende Constante C zu bestimmen, den Werth von $f(u)$ für einen von den Unendlichkeitsstellen verschiedenen Werth des Argumentes kennen.

Da $\wp' u$ mit $\wp u$ durch eine in $\wp' u$ quadratische Gleichung zusammenhängt, so ist die rationale Function $R(\wp u, \wp' u)$ als lineare Function von $\wp' u$ darstellbar. Der Ausdruck der elliptischen Function,

$$f(u) = R_1(\wp u) + \wp'(u)\, R_2(\wp u), \tag{6.}$$

vereinfacht sich noch weiter, wenn $f(u)$ gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle wird

$$f(u) = f(-u) = R_1(\wp u) - \wp' u . R_2(\wp u),$$

im zweiten

$$f(u) = -f(-u) = -R_1(\wp u) + \wp' u . R_2(\wp u).$$

Diese beiden Gleichungen können mit (6.) zusammen nur dann bestehen, wenn für die erste Annahme $R_2(\wp u)$, für die zweite $R_1(\wp u)$ verschwindet. Das heisst: *Eine gerade elliptische Function lässt sich als rationale Function von $\wp u$ allein, eine ungerade als Product einer solchen Function mit $\wp' u$ darstellen.*

Hat eine elliptische Function nur eine einzige Unendlichkeitsstelle v, so heisst die Gleichung (2.):

$$f(u) = C'' + c\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) + c'\wp(u-v) - \frac{1}{2}c''\wp'(u-v) + \cdots + \frac{(-1)^l}{(l-1)!}c^{(l-1)}\wp^{(l-2)}(u-v),$$

und die Relation

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu = 0$$

liefert nichts weiter als

$$c = 0.$$

Eine elliptische Function mit nur einer Unendlichkeitsstelle muss daher nicht blos von höherer als der ersten Ordnung unendlich gross werden, sondern sie enthält überhaupt kein Glied mit der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenz von $u-v$.

Ist im Besonderen

$$v = 0,$$

so wird

$$f(u) = C'' + c'\wp u - \frac{1}{2}c''\wp' u + \cdots + \frac{(-1)^l}{(l-1)!}c^{(l-1)}\wp^{(l-2)}(u).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \wp'' u &= \ 6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2, \\ \wp''' u &= 12\wp u\, \wp' u, \\ \wp^{\mathrm{IV}} u &= 12\wp u\, \wp'' u + 12(\wp' u)^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d. h. sämmtliche Ableitungen sind ganze rationale Functionen von $\wp u$ und $\wp' u$ (S. 145). Demnach ist jede elliptische Function, die nur die eine Unendlichkeitsstelle Null hat, durch die Stammfunction $\wp u$ und ihre erste Ableitung als ganze Function darstellbar.

Nimmt man diese wieder als linear in $\wp' u$ an,

$$f(u) = G_1(\wp u) + \wp' u\, G_2(\wp u), \tag{7.}$$

so schliesst man wie oben, dass eine gerade elliptische Function mit der einzigen Unendlichkeitsstelle Null als ganze Function von $\wp u$, eine ungerade als Product einer solchen mit $\wp' u$ darstellbar sein muss.

Man kann den Ausdruck (4.) von $f(u)$ noch etwas übersichtlicher gestalten, indem man alle seine Bestandtheile, nicht blos den ersten, mit der durch die Gleichung (3.) definirten Function $\wp(u, v)$ in Zusammenhang bringt. Betrachtet man u als einen Parameter, v als das Argument dieser Function, so sieht man, dass $\wp(u, v)$ als elliptische Function von v mit den Unendlichkeitsstellen $v = u$ und $v = 0$ aufgefasst werden kann. Wir bestimmen die Coefficienten der auftretenden negativen Potenzen, indem wir zuerst $v = u + h$, dann $v = h$ setzen. Nun ist

$$\wp(u, v) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}v,$$

also

$$\wp(u,\, u+h) = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(-h) - \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}u + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u+h).$$

Eine negative Potenz der unendlich kleinen Grösse h kommt nur aus dem ersten Gliede, und zwar wird

$$\wp(u,\, u+h) = -h^{-1} + \mathfrak{P}(h). \tag{8.}$$

Ferner ist

$$\wp(u, h) = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u-h) - \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}u + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}h,$$

und eine negative Potenz von h, nämlich h^{-1}, erscheint hier nur in der Entwickelung des dritten Gliedes, sodass

$$\wp(u, h) = h^{-1} + \mathfrak{P}(h) \tag{9.}$$

wird. Die betrachtete Function ist also eine elliptische Function zweiten Grades von v, und die gesuchten Entwickelungscoefficienten haben die Werthe

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 1.$$

Unter Benutzung der Eigenschaften der Function $\wp(u, v)$ schreibe man in dem Satze (1.) $\varphi(v)$ statt $f(u)$ und setze dann

$$\varphi(v) = f(v)\,\wp(u, v),$$

so lautet, für $v'_1, \dots v'_r$ als Unendlichkeitsstellen von $\varphi(v)$, die Gleichung (1.):

$$\sum_{\varrho=1}^{r} [f(v)\,\wp(u, v)]_{(v-v'_\varrho)^{-1}} = 0. \tag{10.}$$

Die Stellen v'_ϱ setzen sich aus den Unendlichkeitsstellen des ersten und denen des zweiten Factors von $\varphi(v)$ zusammen, sind also, wenn die Null unter den ersten nicht enthalten ist,

$$v_1, \dots v_m,\; u,\; 0.$$

Demnach ist $r = m+2$, und für $v = v'_\varrho + h$ wird

$$[f(u+h)\,\wp(u,\, u+h)]_{h^{-1}} + [f(h)\,\wp(u, h)]_{h^{-1}} + \sum_{\mu=1}^{m} [f(v_\mu+h)\,\wp(u,\, v_\mu+h)]_{h^{-1}} = 0.$$

Der erste Coefficient ist unmittelbar zu bestimmen. Für jeden Argumentwerth, der von den Unendlichkeitsstellen der Function f verschieden ist, hat

man nämlich

$$f(u+h) = f(u) + hf'(u) + \cdots,$$

und die Zusammenstellung dieser Gleichung mit (8.) liefert

$$[f(u+h)\,\wp(u,\, u+h)]_{h^{-1}} = -f(u),$$

mithin

$$f(u) = \sum_{\mu=1}^{m} [f(v_\mu+h)\,\wp(u,\, v_\mu+h)]_{h^{-1}} + [f(h)\,\wp(u, h)]_{h^{-1}}. \tag{11.}$$

Der gesuchte Ausdruck von $f(u)$ erscheint also zunächst durch eine Summe von Entwickelungscoefficienten dargestellt. Nun ist (S. 142)

$$f(v_\mu+h) = c_\mu h^{-1} + c'_\mu h^{-2} + \cdots + c_\mu^{(l_\mu-1)} h^{-l_\mu} + \mathfrak{P}_\mu(h).$$

Es wird noch

$$\wp(u,\, v_\mu+h) = \wp(u, v_\mu) + h\,\frac{\partial\wp(u, v_\mu)}{\partial v_\mu} + \cdots$$

gebraucht, eine Entwickelung, in der

$$\frac{1}{\nu!}\,\frac{\partial^\nu \wp(u, v)}{\partial v^\nu} = \wp(u, v)_\nu \tag{12.}$$

gesetzt werden möge, sodass sie die Form

$$\wp(u,\, v_\mu+h) = \wp(u, v_\mu) + h\wp(u, v_\mu)_1 + h^2\wp(u, v_\mu)_2 + \cdots$$

annimmt. Dann erhält man

$$[f(v_\mu+h)\,\wp(u,\, v_\mu+h)]_{h^{-1}} = c_\mu\wp(u, v_\mu) + c'_\mu\wp(u, v_\mu)_1 + c''_\mu\wp(u, v_\mu)_2 + \cdots$$

oder, wenn

$$c_\mu = c_\mu^{(0)}, \quad \wp(u, v) = \wp(u, v)_0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{l_\mu-1} c_\mu^{(\nu)}\,\wp(u, v_\mu)_\nu = f(u, v_\mu) \tag{13.}$$

gesetzt wird,

$$[f(v_\mu+h)\,\wp(u,\, v_\mu+h)]_{h^{-1}} = f(u, v_\mu). \tag{14.}$$

Die Gleichung (11.) geht daher über in

$$f(u) = \sum_{\mu=1}^{m} f(u, v_\mu) + [f(h)\,\wp(u, h)]_{h^{-1}}. \tag{15.}$$

Da nun die Stelle $u = 0$ unter den Unendlichkeitsstellen von $f(u)$ nicht vorkommt, so kann man behufs Umwandlung des letzten Entwickelungscoefficienten setzen:

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \cdots,$$

d. h. nach Hinzuziehung von (9.):

$$[f(h)\wp(u,h)]_{h^{-1}} = f(0),$$

$$f(u) = f(0) + \sum_{\mu=1}^{m} f(u, v_\mu). \tag{16.}$$

Wird $f(v)$ selbst, ebenso wie $\wp(u,v)$, für $v = 0$ unendlich gross, so nehme man $v_m = 0$, sodass

$$v_1, \ldots v_{m-1}, u, 0$$

die Unendlichkeitsstellen von $\varphi(v)$ sind. An die Stelle von (15.) tritt dann

$$f(u) = \sum_{\mu=1}^{m-1} f(u, v_\mu) + [f(h)\wp(u,h)]_{h^{-1}}. \tag{17.}$$

Die Ordnungszahl des Unendlichwerdens von $f(v)$ für $v = 0$ heisse l, dann hat $f(h)$ die Form

$$f(h) = c_0 h^{-1} + c_0' h^{-2} + \cdots + c_0^{(l-1)} h^{-l} + f_0 + h\mathfrak{P}_0(h),$$

wo f_0 die Constante bezeichnet, mit der die in $f(h)$ enthaltene gewöhnliche Potenzreihe anfängt. Ferner ist

$$\begin{aligned}\wp(u,h) &= \frac{\sigma'}{\sigma}(u-h) - \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}h \\ &= -h\frac{d}{du}\frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{h^2}{2}\frac{d^2}{du^2}\frac{\sigma'}{\sigma}u - \cdots + \frac{1}{h} - \frac{g_2}{60}h^3 - \frac{g_3}{140}h^5 + \cdots \\ &= h\wp u - \frac{h^2}{2}\wp' u + \cdots + h^{-1} - \cdots.\end{aligned}$$

Setzt man

$$\left[\frac{\sigma'}{\sigma}h\right]_{h^\nu} = l_\nu, \tag{18.}$$

sodass l_ν für gerade Werthe von ν und für $\nu = 1$ gleich Null, für alle anderen positiven Werthe gleich einer bestimmten Function von g_2 uud g_3 ist, und ferner

$$\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\wp^{(\nu-1)}(u) + l_\nu = \wp(u,0)_\nu, \tag{19.}$$

so kann man schreiben:

$$\wp(u,h) = h^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \wp(u,0)_\nu h^\nu.$$

Durch Zusammenstellung mit dem Ausdruck von $f(h)$ ergiebt sich mithin

$$[f(h)\wp(u,h)]_{h^{-1}} = f_0 + c_0'\wp(u,0)_1 + c_0''\wp(u,0)_2 + \cdots + c_0^{(l-1)}\wp(u,0)_{l-1} = f_0 + f(u,0),$$

wenn

$$\sum_{\lambda=1}^{l-1} c_0^{(\lambda)}\wp(u,0)_\lambda = f(u,0) \tag{20.}$$

gesetzt wird. Diese Definition entspricht der Formel (13.), und man darf auch hier von $\lambda = 0$ an summiren, wenn man

$$\wp(u,0)_0 = 0$$

hinzunimmt. Endlich kann man noch, wegen $0 = v_m$,

$$f(u,0) = f(u, v_m)$$

setzen und dies Glied in die Summe auf der rechten Seite von (17.) aufnehmen. Das Resultat heisst dann, der Darstellung (16.) entsprechend,

$$f(u) = f_0 + \sum_{\mu=1}^{m} f(u, v_\mu). \tag{21.}$$

Dies ist der allgemeinste Ausdruck der elliptischen Function $f(u)$. Nach seiner Herleitung bedeutet f_0 das constante Glied in der Entwickelung von $f(h)$ nach Potenzen von h, die Grössen $f(u, v_\mu)$ sind durch die Formeln (13.) und (20.) erklärt, die in ihnen vorkommenden $\wp(u,v)_\nu$ durch (12.) und (19). Kommt $v = 0$ nicht unter den Unendlichkeitsstellen der Function vor, so ist von den Gleichungen (19.) und (20.) abzusehen und

$$f_0 = f(0)$$

zu setzen.

Der Vorzug der Darstellung (21.) vor der zuerst abgeleiteten (4.) besteht darin, dass in (21.) nur die $\wp$-Function des Argumentes u nebst ihren Ableitungen auftritt, während vorher die zusammengesetzten Argumente $u - v_\mu$ vorkamen. Das Additionstheorem braucht also hier nicht angewendet zu werden.

Aus der Darstellung (5.) der elliptischen Function $f(u)$ durch eine rationale Function von $\wp u$ und $\wp' u$ lassen sich wichtige Folgerungen ableiten.

Differentiirt man nach u, so wird

$$f'(u) = \frac{\partial R}{\partial \wp}\wp' u + \frac{\partial R}{\partial \wp'}\wp'' u,$$

d. h. nach Einführung von

$$\wp''u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2:$$

$$f'(u) = \bar{R}(\wp u, \wp' u).$$

Eliminirt man $\wp u$ und $\wp' u$ aus dieser Gleichung in Verbindung mit (5.) und

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

so ergiebt sich zwischen $f(u)$ und $f'(u)$ eine algebraische Gleichung. Jede elliptische Function genügt also einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung.

Es sei ferner $f_1(u)$ eine zweite elliptische Function mit denselben Perioden wie $f(u)$, sodass man

$$f_1(u) = R_1(\wp u, \wp' u)$$

setzen kann. Dieselbe Elimination wie eben liefert den Satz, dass zwei elliptische Functionen mit übereinstimmenden Perioden durch eine algebraische Gleichung verbunden sind.

Setzt man drittens die Gleichung (5.) auch für die Argumente v und $u+v$ an,

$$f(v) = R(\wp v, \wp' v),$$
$$f(u+v) = R(\wp(u+v), \wp'(u+v)),$$

drückt $\wp(u+v)$ und $\wp'(u+v)$ nach dem Additionstheorem durch $\wp u, \wp v, \wp' u, \wp' v$ aus und eliminirt diese vier Grössen aus den Formeln für $f(u), f(v), f(u+v)$, $(\wp' u)^2$ und $(\wp' v)^2$, so erhält man eine algebraische Gleichung zwischen $f(u)$, $f(v)$ und $f(u+v)$. Das heisst: Jede elliptische Function hat ein algebraisches Additionstheorem.

Sechzehntes Kapitel.

Darstellung der Functionen $\sigma_\alpha u$ durch unendliche Producte.

Im dreizehnten Kapitel sind für die σ-Function mehrere Darstellungen durch einfach unendliche Producte gegeben worden. Die Formeln (12.), (14.) und (15.) (S. 127—128) werden, wenn für den Exponentialfactor der auf S. 129 angegebene Werth eingeführt wird,

$$\text{(1.)} \quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega} + \frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \right\},$$

$$\text{(2.)} \quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} - e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - h^{2n} e^{\frac{u\pi i}{\omega}}\right)\left(1 - h^{2n} e^{-\frac{u\pi i}{\omega}}\right)}{(1-h^{2n})^2},$$

$$\text{(3.)} \quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2h^{2n}\cos\frac{u\pi}{\omega} + h^{4n}}{(1-h^{2n})^2}.$$

Hierin war (S. 126 (11.))

$$\text{(4.)} \quad e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}} = h;$$

wird noch

$$\text{(5.)} \quad e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} = z$$

gesetzt (S. 128 (16.)), so geht die Darstellung (2.) in

$$\text{(6.)} \quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-h^{2n}z^2)(1-h^{2n}z^{-2})}{(1-h^{2n})^2}$$

über.