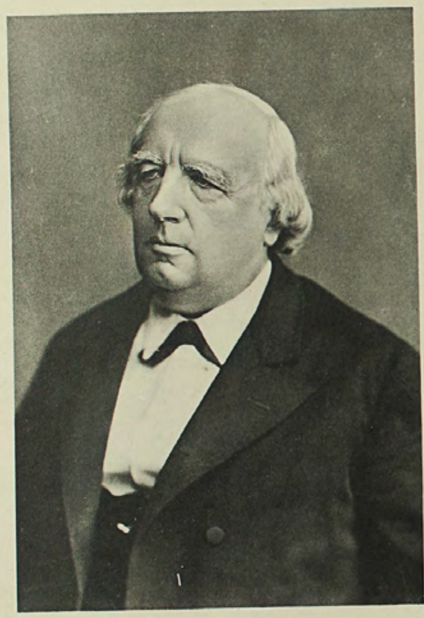

桑木文庫
洋書

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.



Weierstraß

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

DRITTER BAND.

ABHANDLUNGEN III.

MIT BILDNISS DES VERFASSERS.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1903.

VORWORT.

Der vorliegende Band enthält hauptsächlich den Rest der Abhandlungen, die von Weierstrass selbst für den Abdruck bestimmt worden sind oder sich in seinem Nachlass vorgefunden haben. Einige Abhandlungen sind nach Notizen oder mündlichen Mittheilungen für die Veröffentlichung ausgearbeitet worden, und zwar von den Herren E. Kötter (Nr. 9 des Inhalts-Verzeichnisses), R. Rothe (Nr. 12), F. Schottky (Nr. 20) und H. A. Schwarz (Nr. 9, 12, 14).

Der Band war bereits im Anfang des Jahres 1897 zur Hälfte im Druck vollendet. Sein Erscheinen hat sich bis jetzt verzögert, weil auf Weierstrass' Wunsch zuerst der vierte, die Vorlesungen über Abelsche Transcendenten enthaltende fertiggestellt worden ist.

Berlin, den 13. Februar 1903.

Johannes Knoblauch.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Anhang.

ÜBER DIE ANALYTISCHE DARSTELLBARKEIT SOGENANNTER WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN REELLER ARGUMENTE.

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 9. und 30. Juli 1885.)

1.

Das Hauptergebniss der nachstehenden Untersuchung lässt sich, wenn man sich zunächst auf Functionen einer Veränderlichen beschränkt, folgendermaassen aussprechen:

Es sei x eine reelle Veränderliche, welche jeden dem Intervall $(-\infty \cdots +\infty)$ angehörigen Werth annehmen kann, ferner bedeute $f(x)$ eine reelle und durchweg continuirliche Function von x, so lässt sich stets auf mannigfaltige Weise eine Reihe von ganzen Functionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ der Art bilden, dass für jeden der betrachteten Werthe von x

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

ist. Dabei ist die Reihe $f_1(x)+f_2(x)+\cdots$ in jedem endlichen Intervalle gleichmässig convergent.

Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze hat, so gilt bekanntlich die nachstehende Gleichung, in der u eine zweite reelle Veränderliche bedeutet und unter k eine von x und u unabhängige positive Grösse zu verstehen ist:

$$\lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x). \tag{1.}$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz lässt sich leicht verallgemeinern.

Es werde irgend eine Function $\psi(x)$ von derselben Beschaffenheit wie $f(x)$ angenommen, welche ihr Zeichen nicht ändert, der Gleichung $\psi(-x) = \psi(x)$ genügt und überdies der Bedingung entspricht, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\,dx$$

einen endlichen Werth haben muss, der mit ω bezeichnet werden möge. Setzt man dann

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du, \tag{2.}$$

so ist

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x,k) = f(x). \tag{3.}$$

In Betreff des Beweises der Gleichungen (1.) und (3.) möge Folgendes bemerkt werden. Es seien a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, so hat man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\int_{-b_1}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du - \frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \\
&\quad = \frac{1}{k}\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du + \frac{1}{k}\int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \\
&\quad = f(-b_1 \cdots - a_1) \int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \psi(u)\,du + f(a_2 \ldots b_2) \int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \psi(u)\,du.^{*)}
\end{aligned}$$

In Verbindung mit den in Betreff der Functionen $f(x)$, $\psi(x)$ gemachten Annahmen lehrt diese Gleichung, dass das Integral

$$\frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

wenn man den Grössen x, k bestimmte Werthe giebt und dann a_1, a_2 unabhängig von einander unendlich gross werden lässt, sich einer bestimmten

*) Ich bezeichne mit $f(x_1 \ldots x_2)$ einen Mittelwerth zwischen dem kleinsten und grössten derjenigen Werthe, welche $f(x)$ in dem Intervall von $x = x_1$ bis $x = x_2$ annimmt.

endlichen Grenze nähert, und somit das Integral

$$\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du$$

eine wohldefinirte Grösse ist.

Dies festgestellt, sei nun δ eine beliebig klein anzunehmende positive Grösse, so ist

$$\begin{aligned}
F(x,k) &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{x-\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x+\delta}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \\
&\quad + \frac{1}{2k\omega}\int_{x-\delta}^{x} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x}^{x+\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \\
&= \frac{1}{2\omega} f(-\infty \ldots x-\delta) \int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega} f(x+\delta \cdots +\infty) \int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2\omega}\int_0^{\frac{\delta}{k}} \big(f(x-ku) + f(x+ku)\big)\,\psi(u)\,du.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
F(x,k) - f(x) &= \frac{f(-\infty \cdots +\infty) - f(x)}{\omega} \int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2\omega}\int_0^{\frac{\delta}{k}} \big(f(x-ku) + f(x+ku) - 2f(x)\big)\,\psi(u)\,du \\
&= \frac{f(-\infty \cdots +\infty) - f(x)}{\omega} \int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2}\varepsilon_1 \big(f(x-\varepsilon\delta) + f(x+\varepsilon\delta) - 2f(x)\big),
\end{aligned}$$

wo ε, ε_1 positive, zwischen 0 und 1 enthaltene Grössen bedeuten.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte Werthe von x, G die obere Grenze für den absoluten Betrag von $f(x)$, und g_1, g_2 zwei positive Grössen, die beliebig klein angenommen werden können. Dann kann man zunächst der Grösse δ einen so kleinen Werth geben, dass der absolute Betrag von

$$\frac{1}{2}\big(f(x-u) + f(x+u) - 2f(x)\big)$$

stets kleiner als g_1 ist, wenn x in dem Intervall $(x_1 \dots x_2)$, und zugleich u in dem Intervall $(0 \dots \delta)$ angenommen wird. Hat man einen solchen Werth von δ fixirt, so kann man ferner eine positive Grösse k' so bestimmen, dass für jeden Werth von k, der $< k'$,

$$\frac{2G}{\omega} \int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\,du < g_2,$$

also vermöge der vorstehenden Gleichung die Differenz zwischen $F(x,k)$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als $g_1 + g_2$ ist, und zwar für jeden der betrachteten Werthe von x.

Hiermit ist also nicht nur bewiesen, dass $F(x,k)$ für jeden einzelnen Werth von x der Grenze $f(x)$ sich nähert, wenn k unendlich klein wird, sondern auch, dass die Annäherung für alle einem endlichen Intervalle angehörigen Werthe von x eine gleichmässige ist.

Aus der Gleichung (3.) ziehe ich nun eine bemerkenswerthe Folgerung.

Unter den Functionen $\psi(x)$, welche den oben angegebenen Bedingungen entsprechen, giebt es unzählige, welche transcendente ganze Functionen und zugleich so beschaffen sind, dass auch die zugehörigen Functionen $F(x,k)$ für jeden bestimmten Werth der Grösse k in beständig convergirende Potenzreihen von x entwickelt werden können. Nimmt man für $\psi(x)$ eine derartige Function, z. B. $\psi(x) = e^{-xx}$, so ergiebt sich der folgende Satz:

A. »Ist $f(x)$ eine nur für reelle Werthe der Veränderlichen x eindeutig definirte und durchweg stetige Function, so lässt sich auf mannigfaltige Weise eine transcendente g a n z e Function $F(x,k)$ herstellen, welche ausser x noch einen veränderlichen (positiven) Parameter k enthält und so beschaffen ist, dass für jeden reellen Werth von x die Gleichung

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x,k) = f(x)$$

besteht.«

Unter der Bedingung, dass die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt werde, kann man ferner, wie gezeigt worden ist, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g', dem Parameter k einen so kleinen Werth k' geben, dass für jeden Werth von x die Differenz zwischen

$F(x,k')$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g' ist. Stellt man sodann $F(x,k')$ in der Form einer Potenzreihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

dar und bezeichnet die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe mit $G(x)$, so kann man, nach Annahme einer anderen positiven Grösse g'', dem n einen so grossen Werth geben, dass für jeden dem angenommenen Intervall angehörigen Werth von x der absolute Betrag von $F(x,k') - G(x)$ kleiner als g'', mithin der absolute Betrag von $f(x) - G(x)$ kleiner als $g' + g''$ ist.

Damit ist bewiesen:

B. »Ist $f(x)$ eine Function von der angegebenen Beschaffenheit, und wird die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt, so lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine g a n z e r a t i o n a l e Function $G(x)$ bestimmen, welche in dem festgesetzten Intervalle sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass die Differenz $f(x) - G(x)$ ihrem absoluten Betrage nach beständig kleiner als g ist.«

Nun nehme man zwei unendliche Reihen positiver Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,$$
$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \dots$$

so an, dass $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} a_n = \infty$ ist und $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ einen endlichen Werth hat; dann kann man dem Vorstehenden gemäss eine Reihe von ganzen rationalen Functionen

$$G_1(x),\ G_2(x),\ G_3(x),\ \dots$$

so bestimmen, dass (für $\nu = 1, 2, \dots \infty$)

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g_\nu$$

ist, wenn x in dem Intervall $(-a_\nu \dots a_\nu)$ liegt. Setzt man sodann

$$f_0(x) = G_1(x),\quad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x),$$

so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) = G_{n+1}(x)$$

und für jeden bestimmten Werth von x

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_{n+1}(x) = f(x);$$

woraus sich

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

ergiebt.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte, endliche Werthe von x, so ergiebt sich aus den Ungleichheiten

$$\begin{aligned} |f(x) - G_\nu(x)| &< g_\nu, & (-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu) \\ |f(x) - G_{\nu+1}(x)| &< g_{\nu+1}, & (-a_{\nu+1} \leqq x \leqq a_{\nu+1}) \end{aligned}$$

dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werth von x

$$|f_\nu(x)| < g_\nu + g_{\nu+1}$$

ist, sobald ν grösser ist als eine bestimmte Zahl ν', die dadurch definirt wird, dass jedes Intervall $(-a_\nu \ldots a_\nu)$, für welches $\nu > \nu'$, die Werthe x_1, x_2 beide enthalten muss. Man hat also

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} |f_\nu(x)| < \sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} (g_\nu + g_{\nu+1}), \quad \text{wenn } x_1 \leqq x \leqq x_2;$$

und es convergirt demzufolge die Reihe

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} f_\nu(x)$$

und somit auch die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

unbedingt und gleichmässig für die dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werthe von x. Es ist aber die Wahl der Grössen x_1, x_2 keiner andern Beschränkung unterworfen, als dass sie endliche reelle Werthe haben müssen, und die Functionen $f_\nu(x)$ sind unabhängig von denselben; die vorstehende Reihe convergirt also unbedingt für jeden Werth von x und gleichmässig in jedem Intervall

$$x_1 \leqq x \leqq x_2,$$

dessen Grenzen endliche Werthe haben. Es gilt also das Theorem:

C. »Jede Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise darstellen in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind; diese Reihe convergirt unbedingt für jeden endlichen Werth von x, und gleichmässig in jedem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$, dessen Grenzen endliche Grössen sind.«

In Betreff des Satzes B. ist zu bemerken, dass man zur Begründung desselben nur anzunehmen braucht, es sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, welche für reelle Werthe von x die im Vorstehenden angegebenen Eigenschaften besitzt, nicht aber, dass auch $F(x, k)$ eine ganze Function von x sei, was keine nothwendige Folge der ersteren Annahme ist.

Setzt man nämlich, unter a, b zwei beliebig anzunehmende reelle Grössen verstehend,

$$F_1(x, k) = \frac{1}{2k\omega} \int_a^b f(u)\, \psi\!\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

so hat man für reelle Werthe von x

$$F(x, k) = F_1(x, k) + \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{x-a}{k}}^{+\infty} f(x - ku)\, \psi(u)\, du + \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{b-x}{k}}^{+\infty} f(x + ku)\, \psi(u)\, du$$

und kann also, wenn a, b, x_1, x_2 der Bedingung

$$a < x_1 < x_2 < b$$

gemäss angenommen werden, und eine beliebig kleine positive Grösse g_1 gegeben ist, den Werth von k so fixiren, dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werth von x der absolute Betrag der Differenz $f(x) - F_1(x, k)$ kleiner als g_1 ist. Dies vorausgesetzt, kann man ferner, da $F_1(x, k)$ unbedingt eine (transcendente) ganze Function von x ist, nach Annahme irgend einer zweiten positiven Grösse g_2, eine ganze rationale Function $G(x)$ so bestimmen, dass in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|G(x) - F_1(x, k)| < g_2,$$

also

$$|f(x) - G(x)| < g_1 + g_2$$

ist; was den Satz B. giebt.

Dieser Beweis des in Rede stehenden Satzes ist, wie ich glaube, vollkommen streng und reicht aus, wenn nur gezeigt werden soll, dass ganze rationale Functionen $G(x)$, welche sich einer gegebenen Function $f(x)$ in allen Punkten eines beliebig angenommenen Intervalls $(x_1 \ldots x_2)$ so genau anschliessen, wie man will, existiren und auch wirklich bestimmt werden können. Dagegen leidet die im Vorstehenden angegebene Bildungsweise solcher Functionen an einem wesentlichen Mangel. Setzt man

$$F_1(x,k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k)_\nu x^\nu,$$

wo $(k)_\nu$ eine Function von k ist, für die sich der Ausdruck

$$(k)_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2\omega k^\nu \nu!}\int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku)\frac{d^\nu \psi(u)}{du^\nu}\,du$$

ergiebt, und

$$G^{(n)}(x,k) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (k)_\nu x^\nu;$$

so existiren zwar, wenn irgend eine positive Grösse δ gegeben ist, Werthe von k und n, für welche in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|f(x) - G^{(n)}(x,k)| < \delta$$

ist; es wird aber, wenn δ unendlich klein wird, k ebenfalls unendlich klein, und es tritt der Übelstand ein, dass aus dem vorstehenden Ausdruck von $(k)_\nu$ nicht zu ersehen ist, ob derselbe, wenn k unendlich klein wird, einer endlichen Grenze sich nähere oder doch wenigstens endlich bleibe, was unbedingt erforderlich ist, wenn auf die in Rede stehende Weise für einen beliebig kleinen Werth δ ein brauchbarer Annäherungsausdruck der Function $f(x)$ sich soll herstellen lassen.

Diesem Übelstande lässt sich aber folgendermaassen abhelfen.

Es bedeute $f(x)$, wie im Vorhergehenden, eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze (G) hat. Dagegen sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, von der zunächst nur angenommen wird, dass sie reell sei für reelle Werthe von x, und der Bedingung $\psi(-x) = \psi(x)$ genüge. Ferner seien u, v reelle, von einander unabhängige Veränderliche, und es werde

$$\sqrt{\psi(u+vi)\psi(u-vi)} = \psi(u,v)$$

gesetzt, wo der Quadratwurzel ihr positiver Werth beizulegen ist. Dann ist

der absolute Betrag von $\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}$ gleich 1, und man hat daher, wenn a, b reelle Grössen sind,

$$(4.)\quad \int_a^b f(u)\psi(u+vi)\,du = \int_a^b f(u)\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}\cdot\psi(u,v)\,du = \varepsilon G\int_a^b \psi(u,v)\,du,$$

wo ε eine complexe Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bezeichnet. Angenommen nun, es sei $\psi(x)$ so beschaffen, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(u,v)\,du$$

für jeden Werth von v einen endlichen Werth hat, so erhalten, wenn a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen sind, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, die Integrale

$$\int_{a_2}^{b_2} \psi(u,v)\,du, \quad \int_{-b_1}^{-a_1} \psi(u,v)\,du,$$

von denen das zweite (weil $\psi(-u,v) = \psi(u,v)$) gleich

$$\int_{a_1}^{b_1} \psi(u,v)\,du$$

ist, beide unendlich kleine Werthe, wenn a_1, a_2 unendlich gross werden. Dasselbe gilt also, der vorstehenden Gleichung zufolge, für die Integrale

$$\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\psi(u+vi)\,du, \quad \int_{a_2}^{b_2} f(u)\psi(u+vi)\,du;$$

und es hat demnach das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi(u+vi)\,du$$

einen bestimmten endlichen Werth für jeden Werth von v.

Ich will ferner annehmen, es convergire das Integral

$$\int_{a_2}^{+\infty} \psi(u,v)\,du,$$

wenn a_2 unendlich gross wird, für alle Werthe von v, deren absoluter Betrag einen beliebig festgesetzten Grenzwerth nicht übersteigt, gleichmässig gegen die Grenze Null, so gilt der Gleichung (4.) zufolge dasselbe von dem Integral

$$\int_{a_2}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du,$$

und ebenso, wenn a_1 unendlich gross wird, von

$$\int_{-\infty}^{-a_1} f(u)\,\psi(u+vi)\,du.$$

Es lassen sich also, wenn V, g gegebene positive Grössen sind, von denen V beliebig gross und g beliebig klein sein kann, immer zwei positive Grössen a_1, a_2 so bestimmen, dass der absolute Betrag der Differenz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du - \int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi(u+vi)\,du$$

für jeden der Bedingung

$$-V \leqq v \leqq V$$

entsprechenden Werth von v kleiner als g ist.

Nun sei $x = \xi + \xi' i$ eine complexe Veränderliche und, wie im Vorangehenden, k eine positive Constante, $\omega = \int_0^{+\infty} \psi(u)\,du$. Dann ist also nach dem Vorstehenden das Integral

$$(5.)\qquad \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

eine für jeden endlichen Werth von x eindeutig definirte, endliche Grösse, die oben mit $F(x,k)$ bezeichnet worden ist.

Es muss nun nachgewiesen werden, dass $F(x,k)$ eine (transcendente) ganze Function von x ist.

Man setze für den absoluten Betrag von x eine obere Grenze r fest, so kann man, nach Annahme zweier beliebig kleinen positiven Grössen g', g'', zwei andere a_1, a_2 bestimmen, für welche der absolute Betrag der Summe

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-\frac{a_1+\xi}{k}} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{a_2-\xi}{k}}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du$$

für alle der Bedingung

$$\xi^2+\xi'^2 \leqq r^2$$

entsprechenden Werthe von ξ, ξ' kleiner als g' ist. Dann hat man

$$(6.)\qquad F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \varepsilon' g',$$

wo ε' eine Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bedeutet. Das Integral auf der Rechten dieser Gleichung lässt sich aber in eine beständig convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ entwickeln, und man kann, wenn die Summe der n ersten Glieder von $\frac{1}{2k\omega}\mathfrak{P}(x)$ mit $G^{(n)}(x)$ bezeichnet wird, n so gross annehmen, dass für jeden der Bedingung $|x| \leqq r$ entsprechenden Werth von x

$$|F(x,k) - G^{(n)}(x)| < g' + g''$$

ist.

Dies festgestellt, kann man ferner durch das zur Begründung des Satzes C. angewandte Verfahren zeigen, dass $F(x,k)$ sich darstellen lässt in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind, und dass diese Reihe für alle in irgend einem endlichen Bereiche enthaltenen Werthe von x gleichmässig convergirt. Man hat zu dem Ende zwei Reihen positiver Grössen

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,$$
$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots$$

so anzunehmen, dass $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} r_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ einen endlichen Werth hat, sodann eine Reihe von ganzen rationalen Functionen $G_1(x), G_2(x), G_3(x), \ldots$ so zu bestimmen, dass für jeden der Bedingung $|x| \leqq r_\nu$ entsprechenden Werth von x

$$(7.)\qquad |F(x,k) - G_\nu(x)| < g_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \infty)$$

ist, und

$$(8.)\qquad f_0(x) = G_1(x),\quad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x)$$

zu setzen; dann ist

$$(9.)\qquad F(x,k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x).$$

Nach einem Satze aber, den ich früher (Monatsberichte der Akademie aus dem Jahre 1880, S. 723*)) in elementarer Weise bewiesen habe, kann man die Reihe auf der Rechten dieser Gleichung, weil sie in jedem endlichen

*) [Vgl. Bd. II, S. 205 dieser Ausgabe.]

Bereiche gleichmässig convergirt, in eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ verwandeln.

Nimmt man

$$\psi(x) = e^{-x^2},$$

so ist

$$\psi(u, v) = e^{-u^2+v^2},$$

und diese Function $\psi(u, v)$ hat die im Vorstehenden angenommene Beschaffenheit. Dasselbe ist der Fall, wenn man

$$\psi(x) = e^{-(c_1 x^2 + c_2 x^4 + \cdots + c_\varrho x^{2\varrho})}$$

setzt und der Constante c_ϱ einen positiven Werth giebt, während $c_1, \ldots c_{\varrho-1}$ beliebige reelle Werthe haben können.

Es existiren also in der That, wie bei Begründung des Satzes A. angegeben worden ist, unzählige Functionen $\psi(x)$ von der Beschaffenheit, dass die zugehörigen Functionen $F(x, k)$ transcendente ganze Functionen sind.

Jetzt bedeute $F(x, k)$ irgend eine bestimmte von diesen Functionen, so lässt sich die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, durch welche dieselbe dargestellt werden kann, in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende, ebenfalls für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe verwandeln. Aus dem bekannten Satze des Herrn C. Neumann, betreffend die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen x nach den Kugelfunctionen erster Art, ergiebt sich nämlich unmittelbar, dass jede (transcendente oder rationale) ganze Function $G(x)$ dargestellt werden kann durch eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe von der Form

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \mathrm{P}^{(\nu)}(x). *)$$

*) Dies lässt sich übrigens auch folgendermaassen beweisen. Aus der Definition der Kugelfunctionen ergiebt sich:

$$|\mathrm{P}^{(n)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2-1}|^n,$$

wenn man $\sqrt{x^2-1}$ so bestimmt, dass $|x+\sqrt{x^2-1}| \geqq 1$ ist. Ferner ist

$$x^n = c_{n,0} \mathrm{P}^{(n)} x + c_{n,1} \mathrm{P}^{(n-2)}(x) + \cdots,$$

und somit, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

Die Coefficienten dieser Reihe sind so beschaffen, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |C_\nu| r^\nu$$

für jeden positiven Werth r einen endlichen Werth hat. Ferner ist die Reihe für alle einem endlichen Bereiche angehörigen Werthe von x gleichmässig convergent. (Vergl. die Abhandlung des Herrn Thomé: »Über die Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten«, Borchardt's Journal, Bd. 66, S. 337.) Auf der letzteren Eigenschaft der Reihe beruht es, dass man

$$\int_{-1}^{+1} G(x') \mathrm{P}^{(\mu)}(x')\, dx' = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \int_{-1}^{+1} \mathrm{P}^{(\mu)}(x') \mathrm{P}^{(\nu)}(x')\, dx'$$

hat, wo x' eine reelle Veränderliche bezeichnet; woraus sich

$$C_\mu = \frac{2\mu+1}{2} \int_{-1}^{+1} G(x') \mathrm{P}^{(\mu)}(x')\, dx' \qquad (\mu = 0, 1, \ldots \infty)$$

ergiebt.

Für die Function $F(x, k)$ hat man also

$$C_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \cdot \frac{1}{2k\omega} \int_{-1}^{+1} \mathrm{P}^{(\nu)}(x')\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du$$
$$= \frac{2\nu+1}{4\omega} \int_{-1}^{+1} \mathrm{P}^{(\nu)}(x')\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\, \psi(u)\, du;$$

eine beständig convergirende Potenzreihe von x ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_n \sum_\nu A_n c_{n,\nu} \mathrm{P}^{(n-2\nu)}(x).$$

Es sind aber die $c_{n,\nu}$ sämmtlich positive Grössen und $\sum_\nu c_{n,\nu} = 1$; also ist

$$\sum_\nu |c_{n,\nu} \mathrm{P}^{(n-2\nu)}(x)| \leqq |x+\sqrt{x^2-1}|^n.$$

Daraus folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_\nu |A_n c_{n,\nu} \mathrm{P}^{(n-2\nu)}(x)|$ eine endliche Grösse ist, und daher, wenn (für $\mu = 0, 1, 2, \ldots \infty$)

$$C_\mu = \sum_{\substack{n,\nu \\ (n-2\nu=\mu)}} c_{n,\nu} A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu+2\nu,\nu} A_{\mu+2\nu}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu \mathrm{P}^{(\mu)}(x)$$

besteht.

woraus man, wenn

$$\frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x'+u)\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x')\,dx' = f_\nu(u)$$

gesetzt wird,

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du$$

erhält.

Die Function $f_\nu(u)$ ist ebenso wie $f(u)$ eine durchweg stetige Function, deren absoluter Betrag höchstens gleich $(2\nu+1)G$ werden kann, da der absolute Betrag von $\mathrm{P}^{(\nu)}(x')$ für die dem Intervalle $(-1\cdots+1)$ angehörigen Werthe von x' nicht grösser als 1 wird. Es ist aber, wenn a eine beliebige positive Grösse ist,

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du$$

und

$$\left|\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\right| \leqq (2\nu+1)\,G\int_{a}^{+\infty} |\psi(u)|\,du,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\right| \leqq (2\nu+1)\,G\int_{-\infty}^{-a} |\psi(u)|\,du;$$

wenn man daher k unendlich klein werden lässt, so bekommt man

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} C_\nu = f_\nu(0)\cdot\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}\psi(u)\,du + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder auf der Rechten unendlich kleine Werthe erhalten, wenn a unendlich gross wird. Da man nun a beliebig gross annehmen darf, so ergiebt sich

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} C_\nu = f_\nu(0) = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x)\,dx.$$

Setzt man

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du = \varphi_\nu(k),$$

und versteht unter δ eine reelle Grösse, deren absoluter Betrag kleiner ist als k, so ist

$$\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du + \cdots,$$

wo wieder die fortgelassenen Glieder auf der Rechten beliebig kleine Werthe

erhalten, wenn a gross genug angenommen wird. Ist daher δ_1 eine gegebene, beliebig kleine positive Grösse, so kann man dem a einen bestimmten Werth beilegen, für welchen

$$\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k)-\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_1 ist, und zwar bei beliebigen Werthen von k und δ. Dann lässt sich ferner, wenn δ_2 eine zweite, beliebig anzunehmende positive Grösse ist, für den absoluten Betrag von δ eine obere Grenze δ' so festsetzen, dass

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_2, und somit

$$|\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k)| < \delta_1+\delta_2$$

ist, wenn $|\delta| < \delta'$. Es ist also $\varphi_\nu(k)$ eine stetige Function von k.

Hiermit ist also bewiesen:

»Ist $\psi(x)$ eine Function von der oben angegebenen Beschaffenheit, und

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

so hat man für jeden endlichen complexen Werth von x

$$F(x,k) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(k)\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x), \tag{10.}$$

wenn

$$\left\{\begin{aligned} f_\nu(u) &= \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x'+u)\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x')\,dx' \\ \varphi_\nu(k) &= \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

gesetzt wird; und es sind dann die $\varphi_\nu(k)$ stetige Functionen von k.«

Jetzt werde unter x wieder eine reelle Veränderliche verstanden, so dass

$$f(x) = \operatorname*{Lim}_{k=0} F(x,k)$$

ist. Wird dann x auf das Intervall

$$-a \leqq x \leqq a$$

beschränkt, wo a eine beliebige positive Grösse bedeutet, so kann man, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g', zunächst dem Parameter k einen bestimmten Werth k' beilegen, für welchen

$$|f(x)-F(x,k')|<g'$$

ist. Bezeichnet man ferner mit R den grössten Werth, den der absolute Betrag der Grösse

$$x+\sqrt{x^2-1}$$

für die jetzt betrachteten Werthe von x erhalten kann, so hat man

$$R=\begin{cases} 1, & \text{wenn } a\leqq 1, \\ a+\sqrt{a^2-1}, & \text{wenn } a>1, \end{cases}$$

und es folgt daher aus dem oben Bemerkten

$$|P^{(\nu)}(x)|\leqq R^\nu.$$

Da nun die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(k')|R^\nu$$

einen endlichen Werth hat, so ist es nach Annahme einer zweiten positiven Grösse g'' immer möglich, eine ganze positive Zahl n zu ermitteln, für welche der absolute Betrag von

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\varphi_\nu(k')\mathrm{P}^{(\nu)}(x)$$

kleiner als g'' ist. Setzt man also

$$G^{(n)}(x,k)=\sum_{\nu=0}^{n}\varphi_\nu(k)\mathrm{P}^{(\nu)}(x), \tag{12.}$$

so ist

$$|f(x)-G^{(n)}(x,k')|<g'+g''.$$

Hiernach lässt sich der obige Satz B. folgendermaassen aussprechen:

»Es seien a, g positive Grössen, von denen die erste beliebig gross und die andere beliebig klein angenommen werden kann, so ist es immer möglich, in dem durch die Gleichung (12.) definirten Ausdruck $G^{(n)}(x,k)$, der eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von x ist, dem Parameter k und der Zahl n solche Werthe zu geben, dass für die dem Intervall $(-a\ldots a)$

angehörigen Werthe von x die Differenz zwischen

$$f(x) \text{ und } G^{(n)}(x,k)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g ist.«

Der im Vorstehenden entwickelte Ausdruck der Function $F(x,k)$ hat vor der Darstellung derselben in Gestalt einer Potenzreihe den wesentlichen Vorzug, dass die Coefficienten des ersteren — die $\varphi_\nu(k)$ — in einer Form sich darstellen, welche erkennen lässt, dass dieselben stetige Functionen der Grösse k sind, und dass es für jeden einzelnen Coefficienten eine Grenze giebt, welche sein absoluter Betrag für keinen Werth von k überschreitet, während zugleich, für jeden bestimmten Werth von k, $\operatorname{Lim}_{\nu=\infty}\varphi_\nu(k)=0$ ist.

Damit ist der Übelstand beseitigt, welcher sich, wie vorhin hervorgehoben worden ist, herausstellt, wenn man die im Satze B. vorkommende Function $G(x)$ so definirt, wie es bei der Ableitung dieses Satzes zuerst geschehen ist.

Es ist bisher in Betreff der Function $f(x)$ angenommen worden, dass der absolute Betrag derselben eine endliche obere Grenze habe. Diese Annahme kann man fallen lassen, wenn es sich bloss darum handelt, eine ganze rationale Function $G(x)$ zu bestimmen, welche sich in einem gegebenen endlichen Intervall $(x_1\ldots x_2)$ der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der absolute Betrag der Differenz $f(x)-G(x)$ für jeden Werth von x unter einer beliebig festgesetzten Grenze g liegt.

In der That, definirt man eine Function $f_1(x)$, indem man festsetzt, es sei

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_1) \text{ für } x<x_1, \\ f_1(x) &= f(x) \text{ für } x_1\leqq x\leqq x_2, \\ f_1(x) &= f(x_2) \text{ für } x>x_2, \end{aligned}$$

so ist $f_1(x)$ so beschaffen, wie bisher von der Function $f(x)$ angenommen worden ist, und man kann demnach eine Function $G(x)$ so bestimmen, dass für jeden in dem Intervalle $(x_1\ldots x_2)$ enthaltenen Werth von x

$$|f_1(x)-G(x)|<g,$$

und somit auch

$$|f(x)-G(x)|<g$$

ist.

Nun ist bei dem Beweise des Satzes C. von der Function $f(x)$ nur vorausgesetzt worden, dass es nach beliebiger Annahme zweier positiven Grössen a_ν, g_ν möglich sei, eine ganze rationale Function $G_\nu(x)$ herzustellen, für welche

$$|f(x)-G_\nu(x)|<g_\nu \text{ ist, wenn } -a_\nu \leqq x \leqq a_\nu;$$

und es gilt also der in Rede stehende Satz in unveränderter Fassung, wenn von der Function $f(x)$ nur angenommen wird, dass sie für jeden endlichen reellen Werth von x einen bestimmten endlichen und mit x stetig sich ändernden Werth habe.

Es bliebe jetzt noch zu untersuchen, welche Modificationen die bisher entwickelten Sätze erleiden, wenn man auch die Annahme, dass $f(x)$ eine durchweg stetige Function sei, fallen lässt. Damit werde ich mich hier jedoch nicht beschäftigen.

Ich will jetzt annehmen, es sei $f(x)$ eine periodische Function, d. h. sie ändere ihren Werth nicht, wenn ihr Argument um eine bestimmte positive Grösse $2c$ vermehrt wird. Dann lässt sich die zugehörige Function $F(x,k)$ auch darstellen in der Form einer für jeden complexen Werth von x convergirenden Fourier'schen Reihe, deren Coefficienten stetige Functionen der Grösse k sind.

Aus der obigen Gleichung (5.) ergiebt sich

$$F(x+2c,k) = F(x,k);$$

setzt man also, unter z eine neue complexe Veränderliche verstehend,

$$\overline{F}(z) = F\left(\frac{c}{\pi i}\log z, k\right),$$

so ist $\overline{F}(z)$ eine eindeutige analytische Function von z, für welche im ganzen Gebiete dieser Grösse nur zwei singuläre Stellen, nämlich 0 und ∞ existiren, und die daher in eine beständig convergirende Reihe von der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu z^\nu$$

entwickelt werden kann. Setzt man $z=e^{\frac{\pi x}{c}i}$, so wird $\overline{F}(z)=F(x,k)$, und es ist demnach

$$F(x,k) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu e^{\frac{\nu\pi x}{c}i}$$

für jeden endlichen Werth von x.

Da diese Entwickelung von $F(x,k)$ in jedem endlichen Bereiche der Veränderlichen x gleichmässig convergirt, so ist, wenn man mit x' wieder eine reelle Veränderliche und mit n eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x',k)e^{-\frac{nx'\pi}{c}i}dx' = \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu \int_{-c}^{c} e^{\frac{(\nu-n)\pi x'}{c}i}dx' = C_n.$$

Man hat also

$$\begin{aligned} 2cC_n &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x'}{k}\right)du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\,\psi(u)\,du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\,e^{\frac{nku\pi}{c}i}du \int_{-c}^{c} f(x'+ku)\,e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku)i}dx'. \end{aligned}$$

Nun hat man aber, wenn man

$$f_1(x') = f(x')\,e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}$$

setzt und unter x_0 eine von x' unabhängige Grösse versteht,

$$\begin{aligned} \int_{-c}^{c} f_1(x')dx' &= \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x')dx' + \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')dx' = \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')dx' + \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x'+2c)dx' \\ &= \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')dx' + \int_{c}^{x_0+c} f_1(x')dx' = \int_{x_0-c}^{x_0+c} f_1(x')dx' = \int_{-c}^{c} f_1(x'+x_0)dx'; \end{aligned}$$

es ist also

$$\int_{-c}^{c} f(x'+ku)\,e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku)i}dx' = \int_{-c}^{c} f(x')\,e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}dx',$$

und somit, wenn man, unter v eine beliebige reelle Grösse verstehend,

$$(13.)\qquad \varphi(v) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\,e^{uvi}du = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\infty} \psi(u)\cos(vu)\,du$$

setzt,

$$C_n = \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\int_{-c}^{c}\frac{1}{2c}f(x')e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}dx'. \tag{14.}$$

Setzt man

$$A_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}f(x')\cos\left(\frac{n\pi}{c}x'\right)dx', \quad A'_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}f(x')\sin\left(\frac{n\pi}{c}x'\right)dx', \tag{15.}$$

so ist

$$C_n = (A_n - iA'_n)\,\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) \tag{16.}$$

und somit

$$F(x,k) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\cdot\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) + A'_n\sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right)\right). \tag{17.}$$

Nach der Formel (13.) ist $\varphi(v)$ eine stetige Function von v, die für $v = 0$ den Werth 1 annimmt.

Setzt man in dem Ausdrucke auf der Rechten der vorstehenden Gleichung $k = 0$, so reducirt er sich auf

$$A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) + A'_n\sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right)\right),$$

d. h. er geht in die Reihe über, in welche sich die Function $f(x)$ im Allgemeinen — d. h. wenn man von speciellen, bisher noch nicht hinreichend charakterisirten Functionen absieht — nach dem Fourier'schen Theorem entwickeln lässt. Da aber, wie zuerst Herr P. du Bois-Reymond an einem Beispiele nachgewiesen hat, in der That Functionen $f(x)$ existiren, welche für gewisse Werthe von x, die sogar in jedem noch so kleinen Intervall $(x_1 \dots x_2)$ in unendlicher Anzahl vorhanden sein können, durch die vorstehende Reihe nicht dargestellt werden, so ist damit dargethan, dass man, um die Grenze zu bestimmen, der sich die Reihe auf der Rechten der Gleichung (17.) nähert, wenn k unendlich klein wird, nicht unbedingt in jedem einzelnen Gliede der Reihe $k = 0$ setzen darf.

Die Reihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n z^n$ convergirt, wie gezeigt worden ist, für jeden Werth von z, mit Ausnahme der beiden Werthe $0, \infty$. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

convergirt also für jeden endlichen Werth von z.

Nimmt man nun z. B.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{2}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right),$$

so ist

$$A_n = \frac{1}{n^2}, \quad A'_n = 0$$

und daher

$$C_n = \frac{1}{n^2}\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right);$$

daraus folgt, dass auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)z^n$$

für jeden endlichen Werth von z convergirt.

Setzt man also

$$\chi(x;v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\varphi(nv)e^{nxi}, \tag{18.}$$

so ist $\chi(x;v)$ eine für jeden endlichen complexen Werth von x und für jeden von Null verschiedenen reellen Werth von v definirte eindeutige analytische Function, für welche sich auch, da $\varphi(-v) = \varphi(v)$ ist, der Ausdruck

$$\chi(x;v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\varphi(nv)\cos nx = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(nv)\cos nx \tag{19.}$$

ergiebt; und es lässt sich dann die Function $F(x,k)$ folgendermaassen ausdrücken:

$$F(x,k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi;\ \frac{k\pi}{c}\right)dx'. \tag{20.}$$

Jetzt seien wieder g', g'' gegebene positive Grössen von beliebiger Kleinheit, und k' ein bestimmter Werth von k, der so anzunehmen ist, dass

$$|f(x) - F(x,k')|$$

für jeden reellen Werth von x kleiner als g' ist. Bestimmt man dann eine ganze positive Zahl n so, dass der absolute Betrag von

$$2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\varphi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu\cos\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right) + A'_\nu\sin\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right)\right)$$

für jeden reellen Werth von x kleiner als g'' ist, und setzt

$$f(x) = A_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \varphi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right) + A'_\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right)\right) + R_n, \tag{21.}$$

so ist der absolute Betrag von R_n stets kleiner als $g'+g''$.

So ergiebt sich der Satz

D. »Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth von x eindeutig definirte, durchweg stetige und reell-periodische Function, so lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine endliche Fourier'sche Reihe herstellen, welche sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der Unterschied zwischen beiden Functionen für keinen Werth von x mehr als g beträgt.«

Aus diesem Satze lässt sich dann durch das beim Beweise des Satzes C. angewandte Verfahren, wenn man unter den dortigen Functionen $G_1(x)$, $G_2(x)$ $G_3(x), \ldots$ jetzt endliche Fourier'sche Reihen versteht, welche dieselbe primitive Periode wie $f(x)$ haben, der folgende ableiten:

E. »Jede Function $f(x)$ von der unter D. angegebenen Beschaffenheit lässt sich, wenn $2c$ die primitive Periode derselben ist, darstellen in der Form einer Summe, deren Glieder sämmtlich endliche Fourier'sche Reihen mit der Periode $2c$ sind. Diese Reihe convergirt unbedingt und gleichmässig für alle Werthe von x.«

Um das Vorstehende durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, nehme ich

$$\psi(x) = e^{-x^2}.$$

Dann ist $2\omega = \sqrt{\pi}$ und

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+uvi}\,du = \frac{e^{-\frac{v^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u-\frac{vi}{2}\right)^2} du = e^{-\frac{v^2}{4}}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\chi(x;v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x, \tag{22.}$$

also, wenn man

$$q = e^{-\frac{v^2}{4}} \tag{23.}$$

setzt,

$$\chi(x;v) = \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, q\right), \tag{24.}$$

wo $\vartheta_3(x,q)$ die Jacobi'sche Function

$$1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \cdots$$

ist.

Hiernach hat man für $q = e^{-\frac{k^2\pi^2}{4c^2}}$

$$F(x,k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\,\vartheta_3\left(\frac{x-x'}{2c}\pi, q\right) dx'. \tag{25.}$$

Die Formel auf der rechten Seite dieser Gleichung kommt schon bei Fourier vor (Théorie analytique de la chaleur, Chapitre X). Um den Temperaturzustand eines unendlich dünnen homogenen Ringes von der Länge $2c$, der keine Wärme ausstrahlt, für einen beliebigen Zeitpunkt anzugeben, wenn derselbe in irgend einem Momente bekannt ist, hat man eine Function φ von zwei reellen Veränderlichen x, t so zu bestimmen, dass dieselbe der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

genügt, wo μ eine positive Constante bedeutet, als Function von x betrachtet die Periode $2c$ besitzt und für $t = 0$ in dem Intervalle

$$-c \leqq x \leqq c$$

einer gegebenen willkürlichen Function $F(x)$ gleich ist, wobei nur angenommen wird, dass $F(x)$ stetig und $F(-c) = F(c)$ sei.

Fourier findet für die so definirte Function φ den Ausdruck

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c} F(x') e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t} \cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right) dx' \\ &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x') \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t} \cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right) dx', \end{aligned}\right. \tag{26.}$$

also

$$\varphi = F(x,k), \tag{27.}$$

wenn man die Function $f(x)$ so bestimmt, dass sie in dem Intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$ mit $F(x)$ übereinstimmt, und

$$k = 2\sqrt{\mu t} \tag{28.}$$

nimmt. Fourier setzt, um zu beweisen, dass φ für $t = 0$ in dem Intervalle

$(-c \leqq x \leqq c)$ gleich $F(x)$ sei, in den einzelnen Gliedern seines Ausdrucks $t = 0$, wodurch derselbe in die Reihe

$$\frac{1}{2c} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{-c}^{c} F(x') \cos\left(\nu \frac{x-x'}{c} \pi\right) dx'$$

übergeht, von der er annahm, dass sie stets in dem angegebenen Intervall die Function $F(x)$ darstelle. Es verdient aber bemerkt zu werden, dass ungeachtet der Einwendungen, die gegen Fourier's Verfahren gemacht werden können, der aufgestellte Ausdruck der Function φ ausnahmslos richtig ist. Denn da derselbe, wie gezeigt worden ist, sich in $F(x, 2\sqrt{\mu t})$ umformen lässt, so ergiebt sich zunächst, ohne dass das Fourier'sche Theorem zu Hülfe genommen wird, dass

$$\operatorname*{Lim}_{t=0} \varphi = F(x)$$

ist. Ferner genügen die einzelnen Glieder der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

woraus folgt, dass auch φ selbst ihr genügt, da die in Rede stehende Reihe eine eindeutige analytische Function von x und t ist, wenn man die Grösse t der Bedingung unterwirft, dass ihr reeller Bestandtheil positiv sein soll, und weil überdies die Reihe in jedem endlichen Bereiche der Grössen x, t gleichmässig convergirt. Endlich ändert die Reihe ihren Werth nicht, wenn $x + 2c$ für x gesetzt wird; es entspricht also die durch sie ausgedrückte Function vollständig den gestellten Bedingungen.

Es ist äusserst merkwürdig, dass bei einem Problem der mathematischen Physik für eine gesuchte, von zwei veränderlichen Grössen, die nach ihrer physikalischen Bedeutung nur reelle Werthe haben können, abhängige Function, welche für einen bestimmten Werth eines ihrer Argumente einer gegebenen willkürlichen Function des anderen gleich sein soll, ein Ausdruck sich ergiebt, der eine analytische Function der Veränderlichen ist und somit auch für complexe Werthe der letzteren eine Bedeutung hat.

Es bedeute jetzt n eine ganze positive Zahl, und es werde gesetzt

$$\chi(x; v)_n = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x,$$

so ist nach Gleichung (22.)

$$\chi(x; v) = \chi(x; v)_n + 2 \sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x.$$

Für reelle Werthe von x ist aber der absolute Betrag des zweiten Gliedes auf der Rechten dieser Gleichung, der mit R_n bezeichnet werde, niemals grösser als

$$2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2+2n\nu+\nu^2}{4} v^2},$$

also

$$R_n < e^{-\frac{n^2+2n}{4} v^2} . 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}}.$$

Setzt man nun in der bekannten Gleichung

$$1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2 \tau \pi} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 \pi}{\tau}}\right),$$

wo unter τ eine positive Grösse zu verstehen ist, $\tau = \frac{v^2}{4\pi}$, so ergiebt sich, wenn v positiv ist,

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{v} - 1 + \frac{4\sqrt{\pi}}{v} \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2 \pi^2}{v^2}};$$

es ist also

$$R_n < \frac{2\sqrt{\pi}}{v} e^{-\frac{(n+1)^2}{4} v^2} \cdot \left\{1 - \frac{v}{2\sqrt{\pi}} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}}\right\} e^{\frac{v^2}{4}}.$$

Setzt man nun, unter m eine positive Grösse verstehend,

$$(29.) \qquad v = \frac{2\sqrt{m \log(n+1)}}{n+1},$$

so ist

$$R_n < \frac{\sqrt{\pi}\,(n+1)^{-m+1}}{\sqrt{m \log(n+1)}} \cdot (1 + [n]),$$

wo $[n]$ eine Grösse bedeutet, die für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird. Nimmt man also

$$m \geqq 1,$$

so wird

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} R_n = 0.$$

Es ist aber dann

$$e^{-\frac{v^2}{4}} = e^{-\frac{m\log(n+1)}{(n+1)^2}} = (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}},$$

also, wenn man

$$(30.)\qquad (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}} = \{n\}$$

und

$$(31.)\qquad \chi(x,n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \{n\}^{\nu\nu} \cos\nu x = 1+2\sum_{\nu=1}^{n} \{n\}^{\nu\nu}\cos\nu x$$

setzt,

$$\chi(x;v)_n = \chi(x,n).$$

Aus der Gleichung

$$F(x,k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi;\frac{k\pi}{c}\right)dx'$$

ergiebt sich dann

$$F\left(x,\frac{cv}{\pi}\right) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi;v\right)dx' = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi,n\right)dx' + R'_n,$$

wo auch R'_n eine Grösse bedeutet, die für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird. Da nun $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} v = 0$ und $\operatorname*{Lim}_{v=0} F\left(x,\frac{cv}{\pi}\right) = f(x)$ ist, so ergiebt sich

$$(32.)\qquad f(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi,n\right)dx'.$$

Das Fourier'sche Theorem, präcise ausgedrückt, besagt, dass

$$(33.)\qquad f(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(x')\bar{\chi}\left(\frac{x-x'}{c}\pi,n\right)dx'$$

sei, wenn

$$(34.)\qquad \bar{\chi}(x,n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n}\cos\nu x$$

gesetzt wird. An die Stelle dieser Gleichung, die nicht unter allen Umständen richtig ist, tritt also die vorhergehende, ausnahmslos geltende, in der die Function $\bar{\chi}(x,n)$ ersetzt ist durch eine andere, $\chi(x,n)$, welche gleich $\bar{\chi}(x,n)$ die Form

$$1+2(n,1)\cos x + 2(n,2)\cos 2x + \cdots + 2(n,n)\cos nx$$

hat, wo (n,ν) eine von n und ν abhängende positive Grösse bedeutet, die in

$\bar{\chi}(x)$ sich auf die Einheit reducirt. Für jede bestimmte Zahl ν ist

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}(n,\nu) = 1;$$

man kann also n so gross nehmen, dass die $(\nu+1)$ ersten Glieder von $\chi(x,n)$ mit den entsprechenden Gliedern von $\bar{\chi}(x,n)$ so nahe übereinstimmen, wie man will.

Functionen $\chi(x,n)$ von derselben Form und Beschaffenheit, wie die hier betrachtete, für welche die Gleichung (32.) ebenfalls unbedingte Gültigkeit hat, lassen sich auch aus der obigen Function $\chi(x;v)$, die aus einer beliebigen Function $\psi(u)$ entspringt, ableiten. Man kann immer eine von n abhängende positive Grösse v_n, welche bei unbegrenzt wachsendem n unendlich klein wird, so bestimmen, dass die Differenz

$$\chi(x;v_n) - \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n}\varphi(\nu v_n)\cos\nu x$$

gegen Null convergirt, wenn n ohne Ende wächst, und dann ist

$$(35.)\qquad \chi(x,n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n}\varphi(\nu v_n)\cos\nu x = 1+2\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(\nu v_n)\cos\nu x$$

eine Function von der angegebenen Beschaffenheit.

Selbstverständlich soll damit nicht gesagt sein, dass man auf diese Weise alle Functionen der in Rede stehenden Art erhalte.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass die Gleichung (32.) für die zwischen $-c$ und c liegenden Werthe von x, wie leicht zu beweisen ist, auch dann noch besteht, wenn unter $f(x)$ eine Function verstanden wird, welche in dem Intervalle von $x=-c$ bis $x=c$ eindeutig definirt und stetig ist, ohne dass $f(c)=f(-c)$ zu sein braucht. Für $x=\pm c$ ist dann auf der Linken der Gleichung

$$\frac{1}{2}(f(-c)+f(c))$$

statt $f(\pm c)$ zu setzen.

2.

Die vorstehenden Sätze lassen sich nun zum Theil auch auf Functionen von mehreren reellen Veränderlichen ausdehnen.

Im Gebiete von n unbeschränkt veränderlichen reellen Grössen $x_1, \dots x_n$ sei irgend ein n-fach ausgedehntes, unabgeschlossenes Continuum S gegeben.

Ferner sei $f(x_1, \dots x_n)$ eine beliebige, in dem Bereiche S überall eindeutig definirte, reelle und stetige Function, von der überdies angenommen wird, dass ihr absoluter Betrag eine endliche obere Grenze G habe. Endlich bedeute $\psi(x)$ eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und continuirliche Function, welche der Gleichung $\psi(-x) = \psi(x)$ genügt, für jeden von Null verschiedenen Werth von x positiv ist und ausserdem der Bedingung entspricht, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\, dx$$

einen endlichen Werth hat, der mit ω bezeichnet werde.

Setzt man dann, unter $(x'_1, \dots x'_n)$ eine unbestimmte, dem Bereiche S angehörige Stelle und unter k eine von $x_1, \dots x_n$ und $x'_1, \dots x'_n$ unabhängige positive Veränderliche verstehend,

$$(1.)\quad F(x_1, \dots x_n; k) = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S)} \cdots \int f(x'_1, \dots x'_n)\, \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n,$$

wo die Integration über den ganzen Bereich S zu erstrecken ist, so gelten die folgenden Sätze:

A. Für jedes dem Bereiche S angehörende Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$ ist

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = f(x_1, \dots x_n).$$

B. Dagegen ist

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = 0,$$

wenn die Stelle $(x_1, \dots x_n)$ weder dem Bereiche S noch dessen Begrenzung angehört.

Das Integral auf der Rechten der Gleichung (1.) hat unter den gemachten Voraussetzungen stets einen bestimmten endlichen Werth. Dies ist unmittelbar klar, wenn der Bereich S ganz im Endlichen liegt. Wenn das Letztere aber nicht der Fall ist, so sei S' irgend ein ganz im Endlichen liegender Theil von S; dann ist, da die Grössen

$$\psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right), \quad \dots \quad \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right)$$

ihr Zeichen nicht ändern, das Integral

$$F' = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S')} \cdots \int f(x'_1, \dots x'_n)\, \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n$$

seinem absoluten Betrage nach nicht grösser als das Product aus G und dem Integral

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S')} \cdots \int \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n;$$

dieses aber ist kleiner als

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n$$
$$= \frac{1}{2^n \omega^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u_1) \dots \psi(u_n)\, du_1 \dots du_n = 1.$$

Es ist also

$$|F'| < G,$$

wie man auch den Bereich S' annehmen möge. Dies genügt zu dem Beweise, dass auch in dem Falle, wo der Bereich S von unendlicher Ausdehnung ist, der Ausdruck $F(x_1, \dots x_n; k)$ für jedes System endlicher Werthe der Grössen $x_1, \dots x_n$ und jeden positiven Werth von k einen bestimmten endlichen Werth hat.

Man denke sich nun in S eine Stelle $(x_1, \dots x_n)$ fixirt und verstehe unter δ eine positive Grösse, die so klein anzunehmen ist, dass alle durch die folgenden Formeln:

$$x'_1 = x_1 + u_1\delta, \quad \dots \quad x'_n = x_n + u_n\delta \qquad (-1 \leqq u_1 \leqq 1, \dots -1 \leqq u_n < 1)$$

definirten Stellen $(x'_1, \dots x'_n)$ in S liegen. Die Gesammtheit dieser Stellen werde mit S_1 bezeichnet und die Gesammtheit aller übrigen Stellen von S mit S_2. Dann hat man, wenn

$$F_1 = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_1)} \cdots \int f(x'_1, \dots x'_n)\, \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n,$$

$$F_2 = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_2)} \cdots \int f(x'_1, \dots x'_n)\, \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n$$

gesetzt wird,

$$F(x_1, \ldots x_n; k) = F_1 + F_2.$$

Nun ist F_2 dem absoluten Betrage nach nicht grösser als das Product aus G und

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_2)} \cdots \int \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n',$$

also

$$F_2 = \frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_2)} \cdots \int \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n'$$

$$= \frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n' \right.$$

$$\left. - \int_{x_1 - \delta}^{x_1 + \delta} \cdots \int_{x_n - \delta}^{x_n + \delta} \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n' \right\}$$

$$= \varepsilon G \left\{ 1 - \frac{1}{2^n \omega^n} \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_1) du_1 \ldots \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_n) du_n \right\},$$

wo ε eine Grösse bedeutet, die dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist. Ferner hat man

$$F_1 = \frac{1}{2^n \omega^n} \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \cdots \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} f(x_1 + ku_1, \ldots x_n + ku_n) \psi(u_1) \ldots \psi(u_n) du_1 \ldots du_n$$

$$= \frac{1}{2^n \omega^n} f(x_1 + \varepsilon_1 \delta, \ldots x_n + \varepsilon_n \delta) \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_1) du_1 \ldots \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_n) du_n$$

$$= f(x_1 + \varepsilon_1 \delta, \ldots x_n + \varepsilon_n \delta) \cdot \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_1) du_1 \cdots \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_n) du_n,$$

wo $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ Grössen bedeuten, von denen jede zwischen -1 und $+1$ liegt.

Setzt man nun

$$\frac{1}{\omega} \int_u^{\pm\infty} \psi(u) du = \chi(u),$$

so hat man nach dem Vorstehenden

$$F_2 = \varepsilon G \left\{ 1 - \left(1 - \chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n \right\},$$

$$F_1 = f(x_1 + \varepsilon_1 \delta, \ldots x_n + \varepsilon_n \delta) . \left(1 - \chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n$$

$$= f(x_1, \ldots x_n) . \left(1 - \chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n + (f(x_1 + \varepsilon_1 \delta, \ldots x_n + \varepsilon_n \delta) - f(x_1, \ldots x_n)) \left(1 - \chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n$$

$$= f(x_1, \ldots x_n) + \left[\left(1 - \chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n - 1\right] f(x_1, \ldots x_n)$$

$$+ (f(x_1 + \varepsilon_1 \delta, \ldots x_n + \varepsilon_n \delta) - f(x_1, \ldots x_n)) . \left(1 - \chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n.$$

Jetzt nehme man für δ eine stetige Function von k an, die gleichzeitig mit k unendlich klein wird, jedoch so, dass dies auch noch für $\frac{k}{\delta}$ gilt, z. B. man setze $\delta = \sqrt{k}$, so ist

$$\lim_{k=0} F_2 = 0, \quad \lim_{k=0} F_1 = f(x_1, \ldots x_n).$$

Denn es ist $\frac{d\chi(u)}{du} = -\frac{1}{\omega} \psi(u)$, es nimmt also $\chi(u)$ beständig ab, wenn u zunimmt, und es ist

$$\lim_{u=+\infty} \chi(u) = 0.$$

Ferner wird

$$f(x_1 + \varepsilon_1 \delta, \ldots x_n + \varepsilon_n \delta) - f(x_1, \ldots x_n)$$

gleichzeitig mit δ unendlich klein. So ergiebt sich

$$\lim_{k=0} F(x_1, \ldots x_n; k) = f(x_1, \ldots x_n)$$

für jedes dem Bereiche S angehörende Werthsystem $(x_1, \ldots x_n)$.

Damit ist der oben ausgesprochene Satz A. erwiesen; und zwar ergiebt sich zugleich, dass die Function $F(x_1, \ldots x_n; k)$ sich für alle Werthsysteme $x_1, \ldots x_n$, welche einem ganz im Endlichen liegenden, abgeschlossenen Theile des Bereiches S angehören, gleichmässig der Function $f(x_1, \ldots x_n)$ nähert, wenn k gegen Null convergirt.

Um nun die Behauptung B. zu erhärten, nehme man die Stelle $(x_1, \ldots x_n)$ ausserhalb des Integrationsgebietes S an und wähle um $(x_1, \ldots x_n)$ einen Bereich S_1 der Art, dass die in ihm liegenden Stellen $(x_1', \ldots x_n')$ durch die Ungleichungen

$$x_\lambda - \delta \leqq x_\lambda' \leqq x_\lambda + \delta \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

definirt werden, und zwar so, dass alle diese Stellen noch ausserhalb des Gebietes S liegen, was sich durch passende Wahl von δ immer erreichen lässt.

Es ist

$$F(x_1, \dots x_n; k) = \frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S)} \cdots \int \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n'.$$

Bezeichnet nun S_2 den nach Ausschluss von S_1 von dem ganzen Gebiete Σ der Veränderlichen $(x_1', \dots x_n')$ übrig bleibenden Theil, so ist S ein Theil von S_2, also ist, wenn ε' eine Grösse bezeichnet, die absolut genommen kleiner ist als 1 und als ε,

$$F(x_1, \dots x_n; k) = \frac{\varepsilon' G}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_2)} \cdots \int \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n'$$

$$= \varepsilon' G \left\{ 1 - \left(1 - \chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n \right\}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man $\delta = \sqrt{k}$ nimmt,

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = 0,$$

wenn $(x_1, \dots x_n)$ ausserhalb des Gebietes S angenommen wird; zugleich erkennt man, dass die Annäherung an den Werth Null eine gleichmässige ist.

Für Punkte $(x_1, \dots x_n)$, welche auf der Grenze des Integrationsgebietes S liegen, lässt sich die Bestimmung des Grenzwerthes von $F(x_1, \dots x_n; k)$ für $k = 0$ nicht in voller Allgemeinheit durchführen.

Nimmt man nun innerhalb des Bereiches S, der sich auch in's Unendliche erstrecken kann, ein ganz im Endlichen liegendes, abgeschlossenes Continuum S' an, so lässt sich zeigen, dass es, wenn man $(x_1, \dots x_n)$ auf S' beschränkt, stets möglich ist, nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ eine ganze rationale Function $G(x_1, \dots x_n)$ herzustellen, welche innerhalb S' von der Function $f(x_1, \dots x_n)$ um weniger als δ abweicht, dass also

$$|f(x_1, \dots x_n) - G(x_1, \dots x_n)| < \delta$$

ist für alle in S' gelegenen Stellen $(x_1, \dots x_n)$.

Zunächst werde S in zwei Theile, S_1 und S_2, zerlegt, von denen der erstere die Gesammtheit aller Stellen $(x_1, \dots x_n)$ von S enthält, welche z. B. vom Coordinatenanfangspunkt (d. h. der Stelle $x_1 = 0, \dots x_n = 0$) um weniger als R entfernt sind, während S_2 den übrigen Theil von S enthalten möge. Offenbar

kann durch passende Wahl von R immer erreicht werden, dass S_1 den Bereich S' ganz in sich enthält. Dieser Theilung entsprechend zerlegt sich dann $F(k)$ in zwei Theile $F_1(k)$ und $F_2(k)$, von denen der letztere gleichmässig gegen Null convergirt, wenn k sich dieser Grenze nähert, weil alle Punkte von S_2 ausserhalb S' liegen. Dagegen convergirt für alle Punkte in S_1, also auch in S', $F_1(k)$ gleichmässig gegen $f(x_1, \dots x_n)$; d. h. nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ_1 ist es möglich, für k eine obere Grenze k' so festzustellen, dass für alle Werthe von k, welche kleiner als k' sind,

$$|F_1(k) - f(x_1, \dots x_n)| < \delta_1$$

ist, wenn $(x_1, \dots x_n)$ irgendwo in S' liegt.

Nimmt man nun an, dass $\psi(x)$ eine ganze transcendente Function ist, z. B. $\psi(x) = e^{-x^2}$, so können die Grössen $\psi\left(\frac{x_\lambda' - x_\lambda}{k}\right)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x_1, \dots x_n$ entwickelt werden, da die x_λ' sowohl als auch die x_λ auf einen endlichen Bereich beschränkt sind, nämlich die ersteren auf S_1, die letzteren auf S'. Das Product der n Functionen ψ ist also ebenfalls in eine Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ zu entwickeln, welche, da sie gleichmässig convergirt, gliedweise integrirt werden kann; es ergiebt sich also auch für $F_1(k)$ eine beständig convergente Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$. Man kann also nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ_2 eine ganze rationale Function $G(x_1, \dots x_n)$ derart von $F_1(k)$ abtrennen, dass

$$|F_1(k) - G(x_1, \dots x_n)| < \delta_2$$

ist. Combinirt man diese Ungleichung mit der vorhergehenden und wählt δ_1, δ_2 so, dass ihre Summe gleich der vorgeschriebenen Grösse δ ist, so erhält man

$$|f(x_1, \dots x_n) - G(x_1, \dots x_n)| < \delta,$$

wie verlangt wurde.

Es war bisher von der Function $f(x_1, \dots x_n)$ angenommen worden, dass ihr absoluter Betrag eine endliche obere Grenze besitze. Diese Annahme kann man aber fallen lassen, wenn es sich nur darum handelt, eine ganze rationale Function $G(x_1, \dots x_n)$ herzustellen, welche sich in einem gegebenen endlichen Bereiche S', der sammt seiner Begrenzung ganz im Innern von S enthalten ist, der Function $f(x_1, \dots x_n)$ so genau anschliesst, dass der absolute

Betrag der Differenz $f(x_1, \dots x_n) - G(x_1, \dots x_n)$ für jede dem Bereiche S' angehörende Stelle $(x_1, \dots x_n)$ unter einer beliebig festgesetzten Grenze δ liegt.

Man kann nämlich offenbar innerhalb S einen ganz im Endlichen gelegenen Bereich S_1 annehmen, für welchen die Bedingung, dass für alle Stellen desselben $|f(x_1, \dots x_n)|$ unterhalb einer bestimmten Grenze liegt, erfüllt ist, und man kann diesen Bereich S_1 so wählen, dass er den gegebenen Bereich S' ganz umschliesst. Zu dem Zwecke nehme man um jeden im Endlichen liegenden Punkt der Begrenzung von S eine Umgebung derartig an, dass kein Punkt irgend einer solchen Umgebung in S' liegt, und schliesse alle Punkte dieser Umgebungen aus sowie alle Punkte, welche z. B. vom Coordinatenanfangspunkte um weiter als R entfernt sind. Durch passende Wahl der Grösse R und der Radien der genannten Umgebungen kann man es dann stets erreichen, dass das entstehende Continuum S_1 allen angegebenen Bedingungen genügt. Ersetzt man dann S durch S_1, so findet man durch Anwendung des obigen Satzes die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung bestätigt.

Nach diesen Vorbereitungen ist man nunmehr im Stande, den Hauptsatz zu beweisen, dass nämlich die Function $f(x_1, \dots x_n)$ darstellbar ist in Form einer beständig convergenten Reihe, deren einzelne Glieder ganze rationale Functionen von $x_1, \dots x_n$ sind.

Zu dem Zwecke denke man sich um jeden im Endlichen liegenden Punkt der Grenze von S eine Kugel mit dem Radius ϱ_1 und ferner um den Nullpunkt eine Kugel mit dem Radius R_1 beschrieben. Schliesst man dann alle Punkte aus, welche innerhalb der ersten Kugeln und ausserhalb der letzten Kugel liegen, so bleibt bei geeigneter Wahl der Radien ϱ_1 und R_1 von S noch ein Continuum übrig, welches mit S_1 bezeichnet werde. Ferner seien $\varrho_2, \varrho_3, \dots$ und $R_2, R_3, \dots$ Grössen, welche die Bedingungen

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \cdots, \quad \operatorname*{Lim}_{m=\infty} \varrho_m = 0,$$
$$R_1 < R_2 < R_3 < \cdots, \quad \operatorname*{Lim}_{m=\infty} R_m = \infty$$

befriedigen, und $S_2, S_3, \dots$ diejenigen Bereiche, welche aus S genau so entstehen wie S_1, wenn man ϱ_1, R_1 durch ϱ_2, R_2; ϱ_3, R_3; … ersetzt. Wenn alsdann ein bestimmter Punkt $P = (x_1, \dots x_n)$ gegeben ist, so giebt es offenbar stets eine Zahl r von der Beschaffenheit, dass alle Bereiche $S_{r+1}, S_{r+2}, \dots$ den Punkt P enthalten.

Ferner nehme man eine unendliche Reihe beliebig kleiner positiver Grössen $\delta_1, \delta_2, \dots$ derart an, dass $\operatorname*{Lim}_{m=\infty} \delta_m = 0$ ist und ausserdem

$$\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m$$

einen endlichen bestimmten Werth hat.

Nun kann man den verschiedenen Bereichen S_ν entsprechend eine Reihe von ganzen rationalen Functionen

$$G_1(x_1, \dots x_n),\ G_2(x_1, \dots x_n),\ G_3(x_1, \dots x_n),\ \dots$$

derart herstellen, dass

$$|f(x_1, \dots x_n) - G_\nu(x_1, \dots x_n)| < \delta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots \infty)$$

ist, wenn die Stelle $(x_1, \dots x_n)$ dem Bereich S_ν angehört. Bildet man alsdann die Grössen

$$\begin{aligned} f_0(x_1, \dots x_n) &= G_1(x_1, \dots x_n) \\ f_1(x_1, \dots x_n) &= G_2(x_1, \dots x_n) - G_1(x_1, \dots x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, \dots x_n) &= G_{m+1}(x_1, \dots x_n) - G_m(x_1, \dots x_n) \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

so sind auch $f_0, f_1, \dots$ ganze rationale Functionen, und es ist

$$\sum_{\mu=0}^{m} f_\mu(x_1, \dots x_n) = G_{m+1}(x_1, \dots x_n).$$

Wählt man nun m hinreichend gross, so wird der Bereich S_m sowie alle folgenden Bereiche den Punkt $(x_1, \dots x_n)$ enthalten, und daher ist

$$|f(x_1, \dots x_n) - G_m(x_1, \dots x_n)| < \delta_m,$$
$$|f(x_1, \dots x_n) - G_{m+1}(x_1, \dots x_n)| < \delta_{m+1},$$

also

$$|G_{m+1}(x_1, \dots x_n) - G_m(x_1, \dots x_n)| < \delta_m + \delta_{m+1}$$

oder

$$|f_m(x_1, \dots x_n)| < \delta_m + \delta_{m+1},$$

sobald m grösser ist als eine bestimmte Zahl r. Daraus folgt also

$$\sum_{\mu=r+1}^{\infty} |f_\mu| < \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \delta_\mu + \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \delta_{\mu+1}.$$

Der Betrag der rechten Seite dieser Ungleichung hat nun aber wegen der Convergenz der Reihe $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\delta_m$ einen endlichen Werth; es ist also die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu(x_1, \dots x_n)$$

unbedingt convergent für jeden bestimmten Punkt $(x_1, \dots x_n)$.

Nunmehr kann auch der Werth dieser Reihe bestimmt werden; es ist

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu = \lim_{m=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} f_\mu = \lim_{m=\infty} G_{m+1} = f(x_1, \dots x_n),$$

da der Annahme gemäss $\lim\limits_{m=\infty} \delta_m = 0$ ist. Es ist also die Function $f(x_1, \dots x_n)$ als eine für jeden bestimmten Punkt $(x_1, \dots x_n)$ unbedingt convergente Reihe von ganzen rationalen Functionen $f_\mu(x_1, \dots x_n)$ dargestellt.

Ist nun ein ganz im Endlichen liegender Bereich S' gegeben, der sammt seiner Begrenzung ganz im Innern von S enthalten ist, so kann r so gewählt werden, dass alle Bereiche $S_{r+1}, S_{r+2}, \dots$ den Bereich S' ganz umschliessen; dann werden also die obigen Ungleichungen für alle dem Bereich S' angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ gelten, d. h. die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu(x_1, \dots x_n)$$

ist innerhalb des Bereiches S' auch gleichmässig convergent. Es gilt also das Theorem:

Jede Function $f(x_1, \dots x_n)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise in der Form einer unendlichen Reihe darstellen, deren Glieder ganze rationale Functionen von $x_1, \dots x_n$ sind; diese Reihe convergirt unbedingt für jedes endliche, in dem Bereiche S gelegene Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$ und gleichmässig für jeden ganz im Endlichen liegenden abgeschlossenen Theil von S.

Hieran knüpfe ich noch einige Bemerkungen, die den oben in Beziehung auf Functionen von einer Veränderlichen gemachten ganz analog sind.

Man kann es so einrichten, dass die Coefficienten der Functionen $f_\mu(x_1, \dots x_n)$ rationale Zahlen werden; ferner braucht man wegen der gleichmässigen Convergenz der Reihen jedes Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$, für das der zugehörige Functionswerth berechnet werden soll, nicht absolut genau, sondern

nur mit einer gewissen, in jedem besonderen Falle zu bestimmenden Sicherheit zu kennen, um den gesuchten Functionswerth mit einer vorgeschriebenen Genauigkeit zu berechnen, und zwar wird sich derselbe, da man zu dem Zwecke nur eine endliche Anzahl von Gliedern zu summiren hat, stets als eine rationale Zahl ergeben.

Doch ist dies theoretisch von geringerer Wichtigkeit; die Hauptsache liegt in der gewonnenen Erkenntniss, dass für jede Function von der angenommenen Beschaffenheit stets eine arithmetische Darstellung existirt, und zwar in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder sämmtlich ganze rationale Functionen der Argumente der Function sind, wenn auch durch das Bisherige freilich noch nicht festgestellt ist, wie man die Entwickelung der Function in eine solche unendliche Reihe wirklich herstellen könne.

Wird ferner angenommen, dass der Bereich S, innerhalb dessen die Function $f(x_1, \dots x_n)$ definirt ist, nur *eine* singuläre Stelle, die dann auch im Unendlichen liegen kann, enthalte, so kann man an die Stelle der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ n andere $x_1', \dots x_n'$ so einführen, dass die letzteren rationale Functionen der ursprünglichen, und umgekehrt diese rationale Functionen von $x_1, \dots x_n$ werden, und zugleich die Function, in welche $f(x_1, \dots x_n)$ durch diese Substitution übergeht, nur *eine* und zwar im Unendlichen liegende singuläre Stelle besitzt.

Nach dem vorhergehenden Satze kann demnach $f(x_1, \dots x_n)$ in eine Reihe, in welcher jedes einzelne Glied eine *ganze* rationale Function von $x_1', \dots x_n'$, also eine rationale Function von $x_1, \dots x_n$ ist, verwandelt werden.

Auf Grund dieses Satzes lassen sich nun leicht zusammengesetztere zur Darstellung von Functionen der betrachteten Art geeignete Reihen bilden; worauf ich jedoch hier nicht näher eingehe.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE FLÄCHEN, DEREN MITTLERE KRÜMMUNG ÜBERALL GLEICH NULL IST.

(Umarbeitung einer am 25. Juni 1866 in der Akademie der Wissenschaften gelesenen Abhandlung.)

. . . Ich habe mich mit der Theorie dieser Flächen, der sogenannten Minimalflächen, besonders aus dem Grunde eingehender beschäftigt, weil sie, wie ich zeigen werde, auf das Innigste mit der Theorie der analytischen Functionen eines complexen Arguments zusammenhängt, so dass jede solche Function eine Fläche der in Rede stehenden Art bestimmt, und umgekehrt.

Die hauptsächlichsten Resultate meiner Untersuchungen erlaube ich mir der Akademie mit dem Bemerken vorzulegen, dass ich einen Theil davon, namentlich die Schlussformeln des § 1 und den Inhalt des § 4 bereits im Jahre 1861 im mathematischen Seminar der Universität vorgetragen habe.

1.

Ich betrachte von einer solchen Fläche zunächst nur ein ganz im Endlichen liegendes, von einer geschlossenen Linie begrenztes und von singulären Stellen freies Stück (M).

Ist dann (E) irgend eine einfach begrenzte ebene Fläche, so lassen sich bekanntlich die Punkte von (M) und (E) so paaren, dass jedem unendlich kleinen Elemente der einen Fläche ein ihm ähnliches der anderen entspricht. Versteht man nun unter x, y, z die Coordinaten eines unbestimmten Punktes von (M) und unter p, q die des entsprechenden Punktes von (E) — wo dann die ersteren auf ein beliebiges orthogonales Axensystem im Raume, die anderen auf ein in der Ebene von (E) enthaltenes zu beziehen sind —, so werden

x, y, z stetige Functionen von p, q; ich nehme überdies an, dass dies auch von ihren Derivirten erster und zweiter Ordnung

$$\frac{\partial x}{\partial p},\ \frac{\partial x}{\partial q},\ \frac{\partial y}{\partial p},\ \frac{\partial y}{\partial q},\ \frac{\partial z}{\partial p},\ \frac{\partial z}{\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2},\ \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q},\ \frac{\partial^2 x}{\partial q^2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial p^2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q},\ \frac{\partial^2 y}{\partial q^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial p^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q},\ \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}$$

gelte.

Dann bestehen die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2, \tag{1.}$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}=0, \tag{2.}$$

und man hat, wenn

$$k=\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2 \tag{3.}$$

gesetzt und die mittlere Krümmung der Fläche in dem Punkte (x, y, z) mit K bezeichnet wird,

$$K=\frac{1}{k^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q}, & \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \\ \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} \\ \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \end{vmatrix}. \tag{4.}$$

Aus den Gleichungen (1.), (2.) erhält man aber unter Beachtung des Umstandes, dass bei der angenommenen Beschaffenheit von M die drei Determinanten

$$\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}-\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q},\quad \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q},\quad \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}$$

an keiner Stelle gleichzeitig verschwinden,

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\right):\left(\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}\right):\left(\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)\\ =&\left(\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}-\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}\right):\left(\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\right):\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}\right), \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

$$k^2=\left(\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}-\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2. \tag{6.}$$

Wenn daher die mittlere Krümmung des betrachteten Flächenstücks (M) überall gleich Null ist, so müssen in allen Punkten desselben die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}=0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=0 \tag{7.}$$

bestehen. Daraus ergeben sich, wenn man $p+qi=u$ setzt und den reellen Theil einer complexen Grösse durch den vorgesetzten Buchstaben $\Re$ bezeichnet, für x, y, z die Ausdrücke

$$x=\Re f(u),\quad y=\Re g(u),\quad z=\Re h(u), \tag{8.}$$

wo f, g, h Functionen von u sind, die im Bereiche (M) den Charakter ganzer rationaler Functionen besitzen und deren Ableitungen durch die Gleichung

$$(f'(u))^2+(g'(u))^2+(h'(u))^2=0 \tag{9.}$$

verbunden sind. Zugleich lässt sich zeigen, dass durch die Gleichungen (8.), wenn die in ihnen vorkommenden Functionen f, g, h die angegebene Beschaffenheit haben, stets eine Fläche der in Rede stehenden Art dargestellt wird.

Die Gleichung (9.) wird befriedigt, wenn man, unter G, H willkürliche Functionen von u verstehend,

$$f'(u)=G^2-H^2, \tag{10.}$$

$$g'(u)=i(G^2+H^2), \tag{11.}$$

$$h'(u)=2GH \tag{12.}$$

setzt. Zur Erfüllung aller Bedingungen, denen f, g, h genügen müssen, ist es aber nothwendig, *dass überall, wo die letzteren den Charakter ganzer rationaler Functionen besitzen, G, H dieselbe Beschaffenheit haben.* Aus der Gleichung

$$(\tfrac{1}{2}f'-\tfrac{1}{2}ig')(-\tfrac{1}{2}f'-\tfrac{1}{2}ig')=\tfrac{1}{4}h'^2 \tag{13.}$$

ist nämlich ersichtlich, dass an einer bestimmten Stelle (a), für welche die Functionen f, g, h den angegebenen Bedingungen genügen, von den beiden Factoren auf der linken Seite nur dann einer verschwindet, wenn dort h' gleich Null ist, und zwar nur dieser eine, weshalb seine Entwickelung nach Potenzen von $(u-a)$ mit einer graden Potenz dieser Grösse anfangen muss. Dies ist aber nur möglich, wenn G, H Functionen von dem angegebenen Charakter sind, welche an keiner Stelle gleichzeitig verschwinden.

Hiernach kann man, wenn man mit u^0 irgend einen bestimmten Werth von u, und mit x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des zugehörigen Punktes von (M) bezeichnet, die Gleichungen (8.) in folgender Gestalt darstellen:

$$(14.)\quad \begin{cases} x = x_0 + \Re \int_{u^0} (G^2(u) - H^2(u))\,du \\ y = y_0 + \Re \int_{u^0} i(G^2(u) + H^2(u))\,du \\ z = z_0 + \Re \int_{u^0} 2G(u)\,H(u)\,du, \end{cases}$$

oder auch, wenn unter u_1, u_1^0, G_1, H_1 die zu u, u^0, G, H conjugirten complexen Grössen verstanden werden,

$$(15.)\quad \begin{cases} x = x_0 + \frac{1}{2}\int_{u^0} (G^2 - H^2)\,du + \frac{1}{2}\int_{u_1^0} (G_1^2 - H_1^2)\,du_1 \\ y = y_0 + \frac{1}{2}\int_{u^0} i(G^2 + H^2)\,du - \frac{1}{2}\int_{u_1^0} i(G_1^2 + H_1^2)\,du_1 \\ z = z_0 + \int_{u^0} GH\,du + \int_{u_1^0} G_1 H_1\,du_1. \end{cases}$$

Wenn die willkürlich anzunehmende Figur (E) ein um den Nullpunkt der Coordinaten p, q mit dem Radius 1 beschriebener Kreis ist, so lassen sich die Functionen f, g, h, G, H durch convergente Reihen, die nur ganze positive Potenzen von u enthalten, darstellen. Man hat also den Satz:

»Es lassen sich die Coordinaten eines Punktes einer Fläche (M) auch mittels convergenter Reihen von der Form

$$(16.)\quad \begin{cases} x = \sum_\lambda \left\{ \frac{A_\lambda + iA'_\lambda}{2}(p+qi)^\lambda + \frac{A_\lambda - iA'_\lambda}{2}(p-qi)^\lambda \right\} \\ y = \sum_\lambda \left\{ \frac{B_\lambda + iB'_\lambda}{2}(p+qi)^\lambda + \frac{B_\lambda - iB'_\lambda}{2}(p-qi)^\lambda \right\} \\ z = \sum_\lambda \left\{ \frac{C_\lambda + iC'_\lambda}{2}(p+qi)^\lambda + \frac{C_\lambda - iC'_\lambda}{2}(p-qi)^\lambda \right\} \end{cases} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots \infty)$$

durch zwei reelle Veränderliche p, q ausdrücken, in der Art dass A_λ, B_λ, C_λ, A'_λ, B'_λ, C'_λ sämmtlich reelle Grössen sind, und man alle Punkte der Fläche erhält, wenn man für p, q die Coordinaten aller Punkte setzt, die im Innern des mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises liegen.«

An Stelle von u werde eine andere Veränderliche s mittels der Gleichung

$$(17.)\quad s = \frac{H(u)}{G(u)} = \frac{f' + ig'}{-h'}$$

eingeführt, wo dann in Folge der Gleichung (13.)

$$(18.)\quad \frac{1}{s} = \frac{f' - ig'}{h'}$$

wird. Nöthigenfalls werde der Bereich (E) so beschränkt, dass in seinem Innern nicht nur s eine eindeutige Function von u, sondern auch u eine eindeutige Function von s ist. Dann ist auch die Function

$$(19.)\quad G^2(u)\frac{du}{ds} = \frac{1}{2}(f' - ig')\frac{du}{ds} = \mathfrak{F}(s),$$

welche zur Abkürzung im Folgenden auch mit S bezeichnet werden soll, eine eindeutige Function ihres Argumentes. Aus den Gleichungen (8.) erhält man dann die folgenden:

$$(20.)\quad \begin{cases} dx = \Re\,(1-s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds = \frac{1-s^2}{2}S\,ds + \frac{1-s_1^2}{2}S_1\,ds_1 \\ dy = \Re\, i(1+s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds = i\frac{1+s^2}{2}S\,ds - i\frac{1+s_1^2}{2}S_1\,ds_1 \\ dz = \Re\, 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds \qquad = sS\,ds + s_1 S_1\,ds_1, \end{cases}$$

$$(21.)\quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1+ss_1)^2 SS_1\,ds\,ds_1,$$

wenn man die zu s, S conjugirten Grössen beziehlich durch s_1, S_1 bezeichnet.

Es ist nun zunächst die geometrische Bedeutung der Grössen s und s_1, S und S_1 festzustellen. Um den Nullpunkt der Coordinaten sei mit dem Radius 1 eine Kugel beschrieben, die von der positiven Richtung der z-Axe im Punkte Z geschnitten werden möge. Dann lässt sich der Ort eines beliebigen Punktes P der Kugelfläche, dessen Coordinaten in Bezug auf das gewählte Axensystem ξ, η, ζ sein mögen, durch eine complexe Grösse $p+qi$ (wobei jetzt p, q andere Grössen als oben bezeichnen) folgendermassen bestimmen. Man projicire den Punkt P von Z aus auf die (x, y)-Ebene; dann sind p, q, 0 die Coordinaten der Projection, und man hat für $s = p+qi$, $s_1 = p-qi$

$$(22.)\quad s = \frac{\xi + \eta i}{1-\zeta}, \quad s_1 = \frac{\xi - \eta i}{1-\zeta},$$

woraus sich mit Berücksichtigung der Gleichung $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$

$$\xi = \frac{s_1+s}{ss_1+1},\quad \eta = \frac{i(s_1-s)}{ss_1+1},\quad \zeta = \frac{ss_1-1}{ss_1+1} \tag{23.}$$

ergiebt. Hiernach entspricht, wenn s eine beliebige complexe Grösse bedeutet, jedem Werthe derselben ein bestimmter Punkt der Kugelfläche, sowie umgekehrt jedem Punkte der letzteren ein bestimmter Werth von s. Wird im Besonderen unter s die durch die Gleichung (17.) definirte Grösse verstanden, so sind das Flächenstück (M) und ein bestimmter Bereich der Kugelfläche durch parallele Normalen auf einander bezogen. Infolge der bezüglich des Bereiches (E) gemachten Annahme sind im Innern von (M) keine zwei Normalen einander gleichgerichtet.

Aus den Gleichungen (20.) und (23.) ergiebt sich die Formel

$$\xi d^2x+\eta d^2y+\zeta d^2z = -(Sds^2+S_1ds_1^2), \tag{24.}$$

aus welcher mittels der Gleichung (21.)

$$-\frac{\xi d^2x+\eta d^2y+\zeta d^2z}{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{Sds^2+S_1ds_1^2}{(1+ss_1)^2 SS_1 ds ds_1} = \varrho \tag{25.}$$

folgt. Die Formel auf der Linken dieser Gleichung ist bekanntlich der Ausdruck für die Krümmung ϱ, welche der durch die beiden einander unendlich nahen Punkte (x,y,z) und $(x+dx, y+dy, z+dz)$ gehende Normalschnitt der Fläche in dem ersteren Punkte besitzt.

Fixirt man nun den Werth von $\sqrt{S}$ und versteht unter $\sqrt{S_1}$ die zu demselben conjugirte Grösse, so kann man, unter σ eine unendlich kleine positive, unter τ aber eine beliebige reelle Grösse verstehend

$$\sqrt{S}ds = \sigma e^{\tau i},\quad \sqrt{S_1}ds_1 = \sigma e^{-\tau i} \tag{26.}$$

setzen und erhält so für die Krümmung den folgenden Ausdruck

$$\varrho = \frac{2\cos(2\tau)}{(1+ss_1)^2\sqrt{S}\sqrt{S_1}}, \tag{27.}$$

dessen Werth sich nicht ändert, wenn man $-\sqrt{S}$ statt $\sqrt{S}$ nimmt. Hiernach ist die Grösse ϱ beständig in dem Intervalle

$$\left(\frac{2}{(1+ss_1)^2\sqrt{S}\sqrt{S_1}} \cdots \frac{-2}{(1+ss_1)^2\sqrt{S}\sqrt{S_1}}\right)$$

enthalten und geht, wenn τ stetig wachsend die Strecke $\left(0\cdots\frac{\pi}{2}\right)$ durchläuft, beständig abnehmend von ihrer oberen Grenze zu der unteren über.

Betrachtet man nun die beiden durch den Punkt (x,y,z) gelegten Hauptnormalschnitte der Fläche, welche also dem grössten und kleinsten Werthe der Krümmung entsprechen, so lassen sich die Richtungscosinus der in diesen Hauptnormalschnitten gelegenen Tangenten der Fläche leicht angeben. Führt man nämlich die in (26.) definirten Grössen in die Gleichungen (20.) und (21.) ein, so nehmen dieselben folgende Gestalt an:

$$\left\{\begin{aligned} dx &= \frac{1-s^2}{2}\sqrt{S}.\sigma e^{\tau i}+\frac{1-s_1^2}{2}\sqrt{S_1}.\sigma e^{-\tau i}\\ dy &= i\frac{1+s^2}{2}\sqrt{S}.\sigma e^{\tau i}-i\frac{1+s_1^2}{2}\sqrt{S_1}.\sigma e^{-\tau i}\\ dz &= s\sqrt{S}.\sigma e^{\tau i}+s_1\sqrt{S_1}.\sigma e^{-\tau i}\\ dx^2+dy^2+dz^2 &= (1+ss_1)^2\sqrt{S}\sqrt{S_1}.\sigma^2. \end{aligned}\right. \tag{28.}$$

Das Maximum der Krümmung entspricht dem Werthe $\tau = 0$, das Minimum derselben dem Werthe $\tau = \frac{\pi}{2}$. Bezeichnet man die Richtungscosinus der zugehörigen Tangenten mit ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2, so ergeben sich für diese Grössen die Werthe:

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\frac{1-s^2}{2}\sqrt{S}+\frac{1-s_1^2}{2}\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}}, & \xi_2 &= i\frac{\frac{1-s^2}{2}\sqrt{S}-\frac{1-s_1^2}{2}\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}}\\ \eta_1 &= i\frac{\frac{1+s^2}{2}\sqrt{S}-\frac{1+s_1^2}{2}\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}}, & \eta_2 &= -\frac{\frac{1+s^2}{2}\sqrt{S}+\frac{1-s_1^2}{2}\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}}\\ \zeta_1 &= \frac{s\sqrt{S}+s_1\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}}, & \zeta_2 &= i\frac{s\sqrt{S}-s_1\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}}. \end{aligned}\right. \tag{29.}$$

Der gemeinsame Nenner dieser Ausdrücke hat eine einfache geometrische Bedeutung. Bezeichnet man nämlich den Krümmungsradius der Fläche in dem betrachteten Punkte mit r, setzt also

$$r = \frac{1}{\varrho} = \frac{(1+ss_1)^2\sqrt{S}\sqrt{S_1}}{2}, \tag{30.}$$

so wird

$$(31.)\qquad (1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1} = \sqrt{2r}.$$

Bildet man nun die Ausdrücke:

$$(32.)\qquad \begin{cases} \sqrt{2r}(\xi_1 - i\xi_2) = (1-s^2)\sqrt{S} \\ \sqrt{2r}(\eta_1 - i\eta_2) = i(1+s^2)\sqrt{S} \\ \sqrt{2r}(\zeta_1 - i\zeta_2) = 2s\sqrt{S}, \end{cases}$$

so ist ersichtlich, dass dieselben nur von s und $\sqrt{S}$ abhängen, also analytische Functionen von s sind.

Aus den vorstehenden Ergebnissen lässt sich nun eine wichtige Folgerung ziehen.

Es bedeute $F(s)$ eine Function von s, deren dritte Derivirte S ist; dann hat man

$$(33.)\qquad \begin{cases} (1-s^2)F(s)ds = \dfrac{d}{ds}\left\{(1-s^2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} + 2s\dfrac{dF(s)}{ds} - 2F(s)\right\} \\ (1+s^2)\dfrac{dF(s)}{ds} = \dfrac{d}{ds}\left\{(1+s^2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - 2s\dfrac{dF(s)}{ds} + 2F(s)\right\} \\ 2sF(s)ds = \dfrac{d}{ds}\left\{2s\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - 2\dfrac{dF(s)}{ds}\right\} \end{cases}$$

und somit, wenn man festsetzt, dass für $s=0$

$$(34.)\qquad \frac{d^2F(s)}{ds^2} = 0,\quad 2\frac{dF(s)}{ds} = -z_0,\quad 2s\frac{dF(s)}{ds} - 2F(s) = -(x_0 + y_0 i)$$

sein solle,

$$(35.)\qquad \begin{cases} x = \Re\left\{(1-s^2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} + 2s\dfrac{dF(s)}{ds} - 2F(s)\right\} \\ y = \Re\left\{i(1+s^2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - 2is\dfrac{dF(s)}{ds} + 2iF(s)\right\} \\ z = \Re\left\{2s\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - 2\dfrac{dF(s)}{ds}\right\}. \end{cases}$$

Die Function $F(s)$ ist zunächst nur für solche Werthe von s definirt, für welche $|s-s_0|$ unter einer gewissen Grenze liegt. Nach den Principien der Functionenlehre ist sie aber ein »Element« einer bestimmten monogenen analytischen Function von s, und es bleiben daher, wenn man fortan unter $F(s)$ diese Function versteht, für sie die im Vorstehenden erhaltenen Resultate

ohne Ausnahme gültig, so dass durch das System der Gleichungen (35.) stets eine Minimalfläche in ihrer ganzen Ausdehnung dargestellt wird.

Damit ist gerechtfertigt, was in der Einleitung gesagt wurde, nämlich dass zu jeder monogenen analytischen Function eine bestimmte Fläche, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist, gehöre, so wie auch umgekehrt.

2.

Wenn man Gewicht darauf legt, für alle drei in den Gleichungen (35.) vorkommenden Grössen x, y, z Ausdrücke von derselben äusseren Gestalt zu haben, so kann dies ohne Weiteres durch eine Coordinatentransformation erreicht werden.

Es seien (x_1, y_1, z_1) und (ξ_1, η_1, ζ_1) die Coordinaten der Punkte (x, y, z) und (ξ, η, ζ) in Beziehung auf ein zweites orthogonales Axensystem mit demselben Nullpunkt wie das ursprüngliche, so verstehe man jetzt unter s die Grösse

$$\frac{\xi_1 + \eta_1 i}{1-\zeta_1}$$

und drücke x_1, y_1, z_1 als Functionen derselben in der angegebenen Form aus. Mittelst der unter x, y, z und x_1, y_1, z_1 bestehenden Gleichungen

$$(36.)\qquad \begin{cases} x = \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1 \\ y = \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1 \\ z = \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1, \end{cases}$$

in denen sich die Constanten $\alpha, \alpha', \dots \gamma''$ auf die bekannte Weise durch drei von einander unabhängige Grössen rational ausdrücken lassen, erhält man dann die folgenden Formeln, in denen

$$(37.)\qquad \begin{cases} (s,1) = \alpha + \alpha' i + 2\alpha'' s - (\alpha - \alpha' i)s^2 \\ (s,2) = \beta + \beta' i + 2\beta'' s - (\beta - \beta' i)s^2 \\ (s,3) = \gamma + \gamma' i + 2\gamma'' s - (\gamma - \gamma' i)s^2 \end{cases}$$

gesetzt ist:

$$(38.)\qquad \begin{cases} x = \Re\left\{(s,1)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - \dfrac{d(s,1)}{ds}\dfrac{dF(s)}{ds} + \dfrac{d^2(s,1)}{ds^2}F(s)\right\} \\ y = \Re\left\{(s,2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - \dfrac{d(s,2)}{ds}\dfrac{dF(s)}{ds} + \dfrac{d^2(s,2)}{ds^2}F(s)\right\} \\ z = \Re\left\{(s,3)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - \dfrac{d(s,3)}{ds}\dfrac{dF(s)}{ds} + \dfrac{d^2(s,3)}{ds^2}F(s)\right\}. \end{cases}$$

3.

Die durch die Gleichungen (35.) oder (38.) dargestellte Fläche ist eine algebraische, wenn $F(s)$ eine algebraische Function von s ist. Dies gilt aber auch umgekehrt.

Zum Beweise schicke ich folgenden Hülfssatz voraus:

Es sei $p+qi$ eine complexe Grösse, deren geometrischer Ort, wie oben, eine einfach begrenzte ebene Figur E ist, $\Phi(p+qi)$ eine eindeutig definirte und continuirliche Function derselben, und $\Psi(p,q)$ der reelle Theil von $\Phi(p+qi)$. Wenn nun in einem bestimmten Falle zwischen $\Psi(p,q)$ und p, q eine algebraische Gleichung besteht, so muss auch $\Phi(p+qi)$ mit $p+qi$ durch eine solche verbunden sein.

Beschränkt man die Veränderlichkeit des Punktes $p+qi$ zunächst auf einen ganz im Innern von E gelegenen Kreis, dessen Mittelpunkt $p_0+q_0 i = u_0$ sein möge, und setzt

$$p-p_0 = \alpha, \quad q-q_0 = \beta, \tag{39.}$$

so lässt sich $\Phi(p+qi)$ durch eine Reihe

$$a_0+b_0 i+(a_1+b_1 i)(\alpha+\beta i)+(a_2+b_2 i)(\alpha+\beta i)^2+\cdots \tag{40.}$$

darstellen, in der $a_0, a_1, \dots b_0, b_1, \dots$ reelle Constanten sind; und es ist

$$\Psi(p,q) = a_0+\frac{1}{2}(a_1+b_1 i)(\alpha+\beta i)+\cdots+\frac{1}{2}(a_1-b_1 i)(\alpha-\beta i)+\cdots. \tag{41.}$$

Der Voraussetzung nach besteht nun eine Gleichung

$$G(\Psi,p,q) = 0, \tag{42.}$$

in welcher der Ausdruck auf der Linken eine ganze rationale Function von Ψ, p, q ist. Entwickelt man dieselbe nach Potenzen von α, β, so müssen die Coefficienten der einzelnen Glieder sämmtlich gleich Null werden; die Gleichung besteht also auch noch, wenn man an die Stelle von α, β beliebige complexe Grössen v, w treten lässt, vorausgesetzt, dass die Entwickelung von Ψ nach dieser Substitution convergent bleibe. Da das Letztere sicher der Fall ist, wenn die absoluten Beträge von v, w beide kleiner als der halbe Radius des angenommenen Kreises sind, so kann man, mit u einen beliebigen

Punkt im Innern dieses Kreises bezeichnend,

$$v = \frac{u-u_0}{2}, \quad w = \frac{u-u_0}{2i} \tag{43.}$$

nehmen, wodurch

$$\Psi = a_0+\frac{1}{2}\Phi(u)-\frac{1}{2}\Phi(u_0) \tag{44.}$$

wird und die Gleichung

$$G(\Psi, p_0+v, q_0+w) = 0$$

die Form

$$\mathfrak{G}(\Phi(u), u) = 0 \tag{45.}$$

erhält, wo $\mathfrak{G}$ eine ganze Function von $\Phi(u)$ und u ist. Die Gültigkeit dieser Gleichung für alle Punkte im Innern von E steht aber fest, sobald bewiesen ist, dass sie für alle Punkte innerhalb eines noch so kleinen Theiles dieser Figur gilt.

Dieses vorausgesetzt, nehme man an, dass die durch die Gleichungen (35.) dargestellte Fläche eine algebraische sei. Dann besteht, wenn man

$$\frac{\xi}{1-\zeta} = p, \quad \frac{\eta}{1-\zeta} = q \tag{46.}$$

setzt, zwischen diesen beiden Grössen und jeder der Coordinaten x, y, z eine algebraische Gleichung. Versteht man daher unter $F(s)$ zunächst die eindeutige Function von s, welche bei der obigen Herleitung der Gleichungen (35.) definirt worden ist, so entspricht von den Functionen

$$\left\{\begin{array}{l} (1-s^2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2}+2s\dfrac{dF(s)}{ds}-2F(s) \\ (1+s^2)i\dfrac{d^2F(s)}{ds^2}-2si\dfrac{dF(s)}{ds}+2iF(s) \\ 2s\dfrac{d^2F(s)}{ds^2}-2\dfrac{dF(s)}{ds} \end{array}\right. \tag{47.}$$

jede einzelne den Voraussetzungen des eben bewiesenen Satzes und ist demnach mit s durch eine algebraische Gleichung verbunden. Aus den vorstehenden Ausdrücken erhält man aber $F(s)$, wenn man sie der Reihe nach mit

$$\frac{1}{4}(s^2-1), \quad -\frac{1}{4}(s^2+1)i, \quad -\frac{1}{2}s$$

multiplicirt und dann addirt; es besteht daher auch zwischen s und dem betrachteten Zweige von $F(s)$ eine solche Gleichung. Dies reicht aber hin, um festzustellen, dass die Function $F(s)$ in ihrem ganzen Umfange eine algebraische ist. Dasselbe gilt natürlich auch von der in den Gleichungen (38.) vorkommenden Function.

Hiernach hat man den Satz:

»Alle algebraischen Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist, werden durch die Gleichungen (35.) oder (38.) dargestellt, wenn man unter $F(s)$ eine willkürliche algebraische Function von s versteht.«

4.

Man kann aus den Formeln (38.) noch leicht die Gleichung der Fläche in Ebenen-Coordinaten ableiten.

Es seien x', y', z' die Coordinaten eines Punktes der Ebene, welche die Fläche in dem Punkte (x, y, z) berührt, und

$$ux'+vy'+wz' = t \tag{48.}$$

die Gleichung dieser Ebene.*) Dann ist

$$\xi = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\quad \eta = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\quad \zeta = \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \tag{49.}$$

und

$$s = \frac{\xi_1+\eta_1 i}{1-\zeta_1} = \frac{U+Vi}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}-W}, \tag{50.}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} U &= \alpha\, u+\beta\, v+\gamma\, w\\ V &= \alpha' u+\beta' v+\gamma' w\\ W &= \alpha'' u+\beta'' v+\gamma'' w\\ u^2+v^2+w^2 &= U^2+V^2+W^2. \end{aligned}\right. \tag{51.}$$

Daraus folgt

$$s^2(U-Vi)-2Ws-U-Vi = 0, \tag{52.}$$

*) Es bedarf wohl keiner Erinnerung, dass u, v, w jetzt andere Grössen bedeuten als die vorhin so bezeichneten.

und hieraus

$$ds = \frac{(1-s^2)dU+i(1+s^2)dV+2s\,dW}{2\sqrt{U^2+V^2+W^2}} = \frac{(s,1)du+(s,2)dv+(s,3)dw}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}. \tag{53.}$$

Ferner ist

$$u\frac{\partial s}{\partial u}+v\frac{\partial s}{\partial v}+w\frac{\partial s}{\partial w} = 0, \tag{54.}$$

also

$$u(s,1)+v(s,2)+w(s,3) = 0. \tag{55.}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wenn man nach s differentiirt,

$$u\frac{d(s,1)}{ds}+v\frac{d(s,2)}{ds}+w\frac{d(s,3)}{ds} = -2\sqrt{u^2+v^2+w^2}, \tag{56.}$$

und aus den obigen Ausdrücken von $(s,1)$ u. s. w.

$$u\frac{d^2(s,1)}{ds^2}+v\frac{d^2(s,2)}{ds^2}+w\frac{d^2(s,3)}{ds^2} = -2(U-Vi). \tag{57.}$$

Da nun

$$t = ux+vy+wz \tag{58.}$$

ist, so geben die Gleichungen (38.):

$$t = \Re\left[2\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,\frac{dF(s)}{ds}-2(U-Vi)F(s)\right]. \tag{59.}$$

Es ist aber

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{dF}{ds}\,\frac{(s,1)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{dF}{ds}\,\frac{(s,2)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\\ \frac{\partial F}{\partial w} &= \frac{dF}{ds}\,\frac{(s,3)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \end{aligned}\right. \tag{60.}$$

$$(\alpha-\alpha' i)(s,1)+(\beta-\beta' i)(s,2)+(\gamma-\gamma' i)(s,3) = 2, \tag{61.}$$

und daher

$$\frac{dF(s)}{ds} = \left((\alpha-\alpha' i)\frac{\partial F(s)}{\partial u}+(\beta-\beta' i)\frac{\partial F(s)}{\partial v}+(\gamma-\gamma' i)\frac{\partial F(s)}{\partial w}\right)\sqrt{u^2+v^2+w^2}. \tag{62.}$$

Bringt man also

$$F\left(\frac{U+Vi}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}-W}\right)$$

auf die Form

$$F^{(1)}+F^{(2)}i$$

in der Art, dass $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ reelle Functionen von U, V, W sind, so erhält man

$$(63.)\qquad t = 2(U^2+V^2+W^2)\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial U}+\frac{\partial F^{(2)}}{\partial V}\right)-2UF^{(1)}-2VF^{(2)}$$

als die Gleichung der Fläche in Ebenen-Coordinaten.

Betrachtet man t als Function von u, v, w, so hat man für die Coordinaten des Punktes, in welchem eine dieser Gleichung genügende Ebene die Fläche berührt, die Ausdrücke

$$(64.)\qquad x = \frac{\partial t}{\partial u},\quad y = \frac{\partial t}{\partial v},\quad z = \frac{\partial t}{\partial w}.$$

Anmerkung. Versteht man unter s_1, $F_1(s_1)$ diejenigen beiden complexen Grössen, welche zu den im Vorhergehenden durch s, $F(s)$ bezeichneten conjugirt sind, so wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1-s^2}{2}\frac{d^2F(s)}{ds^2}+s\frac{dF(s)}{ds}-F(s)+\frac{1-s_1^2}{2}\frac{d^2F_1(s_1)}{ds_1^2}+s_1\frac{dF_1(s_1)}{ds_1}-F_1(s_1),\\
y &= i\frac{1+s^2}{2}\frac{d^2F(s)}{ds^2}-is\frac{dF(s)}{ds}+iF(s)-i\frac{1+s_1^2}{2}\frac{d^2F_1(s_1)}{ds_1^2}+is_1\frac{dF_1(s_1)}{ds_1}-iF_1(s_1),\\
z &= s\frac{d^2F(s)}{ds^2}-\frac{dF(s)}{ds}+s_1\frac{d^2F_1(s_1)}{ds_1^2}-\frac{dF_1(s_1)}{ds_1}
\end{aligned}$$

stets eine reelle Minimalfläche gegeben. Umgekehrt kann durch diese Formeln, wenn man die Grössen $s, s_1, F(s), F_1(s_1)$ den angegebenen Bedingungen entsprechend annimmt, jede reelle Minimalfläche dargestellt werden.

Dazu ist noch zu bemerken: Versteht man unter s, s_1 zwei von einander unabhängige Grössen, und unter $F(s)$, $F_1(s_1)$ beliebige analytische Functionen derselben, so wird durch die Gleichungen (35.) im Gebiete der Grössen x, y, z stets ein analytisches Gebilde definirt, das die partielle Differentialgleichung, durch welche sämmtliche Minimalflächen definirt werden können, befriedigt — ein Gebilde, das man aus diesem Grunde auch in dem Falle, wo die Punkte desselben alle oder zum Theil imaginär sind, im analytischen Sinne eine Minimalfläche zu nennen pflegt.

ALLGEMEINE UNTERSUCHUNGEN ÜBER $2n$-FACH PERIODISCHE FUNCTIONEN VON n VERÄNDERLICHEN.

Einleitung.

Eine analytische Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ von n unbeschränkt veränderlichen Argumenten kann die Eigenschaft besitzen, dass für bestimmte Systeme constanter Grössen $P_1, \dots P_n$ bei beliebigen Werthen von $u_1, \dots u_n$ die Gleichung

$$\varphi(u_1+P_1, \dots u_n+P_n) = \varphi(u_1, \dots u_n)$$

besteht. Die Function heisst alsdann periodisch, und jedes einzelne Grössen-System $(P_1, \dots P_n)$ ein Periodensystem derselben.

Aus dieser Definition ergiebt sich in bekannter Weise der Satz:

Sind $(P'_1, \dots P'_n)$, $(P''_1, \dots P''_n)$, … $(P^{(r)}_1, \dots P^{(r)}_n)$ irgend r Periodensysteme der Function, so lassen sich aus denselben unendlich viele andere $(P_1, \dots P_n)$ ableiten, indem man r ganze Zahlen $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_r$ willkürlich annimmt und

$$\begin{aligned}
P_1 &= \nu_1 P'_1+\nu_2 P''_1+\cdots+\nu_r P^{(r)}_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P_n &= \nu_1 P'_n+\nu_2 P''_n+\cdots+\nu_r P^{(r)}_n
\end{aligned}$$

setzt. — Die Function heisst r-fach periodisch, wenn sich alle ihre Periodensysteme auf diese Weise aus r von ihnen, aber nicht aus weniger als r zusammensetzen lassen.

Dieses gilt, wie die betrachtete Function im Übrigen auch beschaffen sein möge;*) im Folgenden ist jedoch, was hier ein für allemal bemerkt werden

*) Ist die Function mehrdeutig, so muss die Gleichung

$$\varphi(u_1+P_1, \dots u_n+P_n) = \varphi(u_1, \dots u_n)$$

in dem Sinne gelten, dass jedem Werthe von $\varphi(u_1, \dots u_n)$ ein ihm gleicher Werth von $\varphi(u_1+P_1, \dots u_n+P_n)$ entspricht, und umgekehrt.

möge, überall wo von einer periodischen Function die Rede ist, darunter eine solche zu verstehen, die nicht nur eindeutig ist, sondern auch bei endlichen Werthen ihrer Argumente den Charakter einer rationalen Function besitzt. Ferner wird angenommen, dass dieselbe nicht als Function von weniger als n Veränderlichen, die lineare Functionen der ursprünglichen sind, dargestellt werden könne, und auch nicht einen constanten Werth habe. Unter diesen Voraussetzungen gilt der Satz:

Eine Function von n Veränderlichen kann höchstens $2n$-fach periodisch sein.

Daraus folgt unter anderem als Corollar:

Ist eine Function r-fach periodisch, und sind

$$(P_1', \dots P_n'),\ (P_1'', \dots P_n''),\ \dots\ (P_1^{(r+1)}, \dots P_n^{(r+1)})$$

irgend $(r+1)$ Periodensysteme derselben, so bestehen unter den Grössen (P) n Gleichungen

$$\begin{array}{c} \nu_1 P_1' + \nu_2 P_1'' + \cdots + \nu_{r+1} P_1^{(r+1)} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nu_1 P_n' + \nu_2 P_n'' + \cdots + \nu_{r+1} P_n^{(r+1)} = 0, \end{array}$$

in denen $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_{r+1}$ ganze Zahlen sind.

Einfach periodische Functionen eines Arguments kennt man lange. Aber erst seit der Begründung der Theorie der elliptischen und Abelschen Transcendenten weiss man, dass doppelt periodische Functionen eines Arguments, vierfach periodische zweier Argumente u. s. w. existiren; und hat zugleich in der Θ-Function von n Argumenten die Quelle entdeckt, aus der unendlich viele $2n$-fach periodische Functionen von n Veränderlichen entspringen. Hierüber will ich zunächst das für die folgenden Untersuchungen Erforderliche beibringen.

Es sei

$$G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)$$

eine ganze homogene Function zweiten Grades der $2n$ Grössen $u_1, \dots u_n$; $\nu_1, \dots \nu_n$ mit gegebenen Coefficienten, welche keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass

1) bei reellen Werthen von $\nu_1, \dots \nu_n$, wofern dieselben nicht sämmtlich gleich Null sind, der reelle Theil von $G(0, \dots 0; \nu_1, \dots \nu_n)$ beständig negativ sein muss;

2) die Determinante der n linearen Functionen von $u_1, \dots u_n$

$$\frac{\partial G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)}{\partial \nu_1}, \quad \dots \quad \frac{\partial G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)}{\partial \nu_n}$$

nicht verschwinden darf.

Dann hat die Reihe der Grössen, die aus dem Ausdruck

$$e^{G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)}$$

dadurch hervorgehen, dass für $\nu_1, \dots \nu_n$ alle möglichen Verbindungen von n ganzen Zahlen gesetzt werden, stets eine endliche Summe, die Jacobische Function benannt und mit

$$\Theta(u_1, \dots u_n)$$

bezeichnet werden möge.*)

Die so definirte Function $\Theta(u_1, \dots u_n)$, welche bei endlichen Werthen der Veränderlichen $u_1, \dots u_n$ stets einen ebenfalls endlichen Werth hat und überhaupt wie eine ganze Function sich verhält, besitzt die charakteristische Eigenschaft, dass für bestimmte Systeme constanter Grössen $w_1, \dots w_n$ die Gleichung

$$\text{(A)} \qquad \Theta(u_1 + w_1, \dots u_n + w_n) = \Theta(u_1, \dots u_n) . e^{W_1 u_1 \cdots + W_n u_n + W_{n+1}}$$

besteht, wo $W_1, \dots W_{n+1}$ ebenfalls Constanten bezeichnen.

Bezeichnet man nämlich, unter α, wie überhaupt im Folgenden unter den ersten Buchstaben des griechischen Alphabets, eine Zahl aus der Reihe $1, \dots n$ verstehend,

$$\frac{\partial G}{\partial u_\alpha} \text{ mit } G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)_\alpha, \quad \frac{\partial G}{\partial \nu_\alpha} \text{ mit } G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)_{n+\alpha},$$

so hat man für beliebige Grössen $w_1, \dots w_n$; $\lambda_1, \dots \lambda_n$ die Gleichung

$$\begin{aligned} G(u_1 + w_1, \dots u_n + w_n; \nu_1, \dots \nu_n) = {} & G(u_1, \dots u_n; \nu_1 + \lambda_1, \dots \nu_n + \lambda_n) \\ & + \sum_\alpha \left(u_\alpha + \frac{1}{2} w_\alpha\right) G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \cdots -\lambda_n)_\alpha \\ & + \sum_\alpha \left(\nu_\alpha + \frac{1}{2} \lambda_\alpha\right) G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \cdots -\lambda_n)_{n+\alpha}. \end{aligned}$$

*) Die Bedingungen, unter denen die Θ-Reihe convergirt, finden sich in der folgenden Abhandlung erörtert.

Bestimmt man nun, unter $\varkappa_1, \dots \varkappa_n$ gleichfalls willkürlich anzunehmende Grössen verstehend, $w_1, \dots w_n$ mittels der Gleichungen

$$G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \dots -\lambda_n)_{n+\alpha} = 2\varkappa_\alpha \pi i, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

so erhält man

$$w_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \omega'_{\alpha\beta})$$

und

$$G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \dots -\lambda_n)_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \eta'_{\alpha\beta}),$$

wo die $\omega_{\alpha\beta}, \omega'_{\alpha\beta}, \eta_{\alpha\beta}, \eta'_{\alpha\beta}$ rational aus den Coefficienten von $G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)$ zusammengesetzte Grössen sind. Nimmt man nun

$$\varkappa_1, \dots \varkappa_n; \ \lambda_1, \dots \lambda_n \ \text{ ebenso wie } \ \nu_1, \dots \nu_n$$

sämmtlich als ganze Zahlen an, so ist

$$\sum_{(\nu_1, \dots \nu_n)} e^{G(u_1, \dots u_n; \nu_1 + \lambda_1, \dots \nu_n + \lambda_n) + \sum_\alpha 2\nu_\alpha \varkappa_\alpha \pi i} = \sum_{(\nu_1, \dots \nu_n)} e^{G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)};$$

und so ergiebt sich

$$\text{(B)} \qquad \Theta(u_1 + w_1, \dots u_n + w_n) = (-1)^{\sum_\alpha \varkappa_\alpha \lambda_\alpha} . \Theta(u_1, \dots u_n) e^{\sum_\alpha W_\alpha (u_\alpha + \frac{1}{2} w_\alpha)},$$

wo

$$\text{(B, a)} \qquad \begin{cases} w_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \omega'_{\alpha\beta}) \\ W_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \eta'_{\alpha\beta}). \end{cases}$$

In dieser Gleichung sind namentlich die folgenden $2n$ enthalten:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \Theta(u_1 + 2\omega_{1\beta}, \dots u_n + 2\omega_{n\beta}) = \Theta(u_1, \dots u_n) e^{\sum_\alpha 2\eta_{\alpha\beta}(u_\alpha + \omega_{\alpha\beta})} \\ \Theta(u_1 + 2\omega'_{1\beta}, \dots u_n + 2\omega'_{n\beta}) = \Theta(u_1, \dots u_n) e^{\sum_\alpha 2\eta'_{\alpha\beta}(u_\alpha + \omega'_{\alpha\beta})}. \end{cases} \qquad (\beta = 1, \dots n)$$

Da in dem Ausdrucke

$$G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)$$

$n(2n+1)$ Constanten vorkommen, so müssen unter den Grössen (ω, η) Relationen stattfinden, deren Anzahl $n(2n-1)$ ist.

Betrachtet man die in w_α, W_α vorkommenden Grössen $\varkappa, \lambda$ wieder als willkürlich anzunehmende, und setzt, unter $\varkappa'_1, \dots \varkappa'_n; \lambda'_1, \dots \lambda'_n$ ein zweites solches System verstehend,

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} w'_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa'_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2\lambda'_\beta \omega'_{\alpha\beta}) \\ W'_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa'_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2\lambda'_\beta \eta'_{\alpha\beta}), \end{cases}$$

so hat man

$$\sum_\alpha (w_\alpha G(w'_1, \dots w'_n; -\lambda'_1, \dots -\lambda'_n)_\alpha - \lambda_\alpha G(w'_1, \dots w'_n; -\lambda'_1, \dots -\lambda'_n)_{n+\alpha})$$
$$= \sum_\alpha (w'_\alpha G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \dots -\lambda_n)_\alpha - \lambda'_\alpha G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \dots -\lambda_n)_{n+\alpha}),$$

oder

$$\text{(E)} \qquad \sum_\alpha (W_\alpha w'_\alpha - w_\alpha W'_\alpha) = 2\pi i . \sum_\alpha (\varkappa_\alpha \lambda'_\alpha - \lambda_\alpha \varkappa'_\alpha).$$

In dieser Gleichung sind der Willkürlichkeit der Grössen $(\varkappa, \lambda, \varkappa', \lambda')$ halber die folgenden $n(2n-1)$ enthalten, aus denen sie dann wieder hervorgeht:

$$\text{(E, a)} \qquad \begin{cases} \sum_\alpha (\eta_{\alpha\beta} \omega_{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\gamma}) = 0 \\ \sum_\alpha (\eta'_{\alpha\beta} \omega'_{\alpha\gamma} - \omega'_{\alpha\beta} \eta'_{\alpha\gamma}) = 0 \\ \sum_\alpha (\eta_{\alpha\beta} \omega'_{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\beta} \eta'_{\alpha\gamma}) = \begin{cases} \frac{\pi i}{2}, & \text{wenn } \gamma = \beta, \\ 0, & \text{wenn } \gamma \gtrless \beta. \end{cases} \end{cases}$$

Setzt man in (E) $\lambda'_\beta = 1$, die übrigen Grössen $\varkappa', \lambda'$ aber sämmtlich gleich Null; und hierauf $\varkappa'_\beta = 1$, die übrigen $\varkappa', \lambda'$ gleich Null, so erhält man

$$\text{(F)} \qquad \begin{cases} 2\varkappa_\beta \pi i = \sum_\alpha (2\omega'_{\alpha\beta} W_\alpha - 2\eta'_{\alpha\beta} w_\alpha) \\ -2\lambda_\beta \pi i = \sum_\alpha (2\omega_{\alpha\beta} W_\alpha - 2\eta_{\alpha\beta} w_\alpha). \end{cases}$$

Aus den unter (E, a) aufgestellten Gleichungen ergiebt sich

$$\text{(G)} \qquad \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} = \begin{vmatrix} \omega'_{11}, \dots \omega'_{n1}, & -\eta'_{11}, \dots -\eta'_{n1} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \omega'_{1n}, \dots \omega'_{nn}, & -\eta'_{1n}, \dots -\eta'_{nn} \\ \omega_{11}, \dots \omega_{n1}, & -\eta_{11}, \dots -\eta_{n1} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \omega_{1n}, \dots \omega_{nn}, & -\eta_{1n}, \dots -\eta_{nn} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \eta_{11}, \dots \eta_{1n}, & \eta'_{11}, \dots \eta'_{1n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \eta_{n1}, \dots \eta_{nn}, & \eta'_{n1}, \dots \eta'_{nn} \\ \omega_{11}, \dots \omega_{1n}, & \omega'_{11}, \dots \omega'_{1n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \omega_{n1}, \dots \omega_{nn}, & \omega'_{n1}, \dots \omega'_{nn} \end{vmatrix}.$$

Es ist also die Determinante der als Functionen von $\varkappa_1, \dots \varkappa_n; \lambda_1, \dots \lambda_n$ betrachteten $W_1, \dots W_n; w_1, \dots w_n$ nicht gleich Null, so dass die letzteren Grössen für kein System von Werthen der ersteren, dessen Elemente nicht alle gleich Null sind, sämmtlich verschwinden können. Werden daher die Ausdrücke (F) der $\varkappa_\alpha, \lambda_\alpha$ in die Gleichungen (B, a) eingesetzt, so müssen in jeder der so entstehenden Gleichungen die Coefficienten der einzelnen W_α, w_α

sämmtlich gleich Null sein. So erhält man $n(2n-1)$ neue Relationen unter den ω, η:

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} \sum\limits_{\gamma}(\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}) = 0 \\ \sum\limits_{\gamma}(\eta_{\alpha\gamma}\eta'_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma}\eta'_{\alpha\gamma}) = 0 \\ \sum\limits_{\gamma}(\eta_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\eta'_{\alpha\gamma}) = \begin{cases} \frac{\pi i}{2}, & \text{wenn } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{wenn } \alpha \gtrless \beta. \end{cases} \end{cases}$$

Diese Relationen sind somit eine Folge der unter (E,a) aufgestellten, so wie auch, was in ganz ähnlicher Weise gezeigt werden kann, diese eine Folge jener.

In der Theorie der Abelschen Transcendenten wird ferner gezeigt, dass sich, wenn ein den Gleichungen (E,a) genügendes System von $4n^2$ Grössen ω, η gegeben ist, auch stets eine Function $G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)$, aus der es auf die angegebene Weise hervorgeht, bilden lässt, vorausgesetzt dass die Determinante

$$\omega = \begin{vmatrix} \omega_{11}, & \dots & \omega_{1n} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ \omega_{n1}, & \dots & \omega_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist.*)

Bezeichnet man mit $(\omega)_{\alpha\beta}$ den Werth, welchen ω annimmt, wenn man $\omega_{\alpha\beta} = 1$, die übrigen der α^{ten} Horizontal- und der β^{ten} Verticalreihe angehörigen Elemente aber gleich Null setzt, so ergeben sich aus den ersten der Relationen (E,a) und (H) noch die folgenden:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \sum\limits_{\gamma}(\omega)_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\gamma} = \sum\limits_{\gamma}(\omega)_{\beta\gamma}\eta_{\alpha\gamma} \\ \sum\limits_{\gamma}(\omega)_{\gamma\alpha}\omega'_{\gamma\beta} = \sum\limits_{\gamma}(\omega)_{\gamma\beta}\omega'_{\gamma\alpha}. \end{cases}$$

---

*) Setzt man in den Gleichungen

$$G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \dots -\lambda_n)_{n+\alpha} = 2\varkappa_\alpha \pi i \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

die λ sämmtlich gleich Null, so erhält man nach dem Obigen

$$w_\alpha = \sum_\beta 2\varkappa_\beta \omega_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

wenn, wie angenommen worden, die Determinante der Functionen $G(w_1, \dots w_n; 0 \dots 0)_{n+\alpha}$ in Beziehung auf $w_1, \dots w_n$ von Null verschieden ist. Daraus folgt, dass auch die Determinante ω nicht gleich Null sein darf, wenn es möglich sein soll, eine Function G so herzustellen, dass sie ein gegebenes Grössensystem (ω, η) liefert.

Mit Hülfe derselben wird dann gezeigt, dass, wenn man

$$\text{(K)} \quad \begin{cases} \eta(u_1, \dots u_n) = \frac{1}{2\omega}\sum\limits_{\alpha\beta\gamma}(\omega)_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\gamma}u_\alpha u_\beta \\ \bar\omega(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n) = \frac{\pi i}{\omega}\sum\limits_{\alpha}(\nu_1(\omega)_{\alpha 1} + \dots + \nu_n(\omega)_{\alpha n})(u_\alpha + \nu_1\omega'_{\alpha 1} + \dots + \nu_n\omega'_{\alpha n}) \\ G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n) = \eta(u_1, \dots u_n) + \bar\omega(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n) \end{cases}$$

setzt, diese Function G die verlangte Beschaffenheit hat.*)

Führt man statt $u_1, \dots u_n$ eben so viele lineare Functionen $v_1, \dots v_n$ dieser Veränderlichen ein mittels der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha &= \sum_\beta 2\omega_{\alpha\beta}v_\beta, \\ v_\alpha &= \frac{1}{2\omega}\sum_\beta(\omega)_{\beta\alpha}u_\beta, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

und setzt

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{\omega}\sum_\gamma(\omega)_{\gamma\alpha}\omega'_{\gamma\beta},$$

wo dann

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

ist; so wird

$$\text{(L)} \quad G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n) = 2\sum_{\alpha\beta\gamma}\eta_{\gamma\alpha}\omega_{\gamma\beta}v_\alpha v_\beta + \pi i\sum_\alpha \nu_\alpha(2v_\alpha + \nu_1\tau_{\alpha 1} + \dots + \nu_n\tau_{\alpha n}).$$

Werden ferner die Grössen $\omega_{\alpha\beta}, \omega'_{\alpha\beta}$ so gewählt, dass bei reellen Werthen von $\nu_1, \dots \nu_n$ der reelle Theil von

$$i\sum_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta\tau_{\alpha\beta}$$

beständig negativ ist; so existirt hiernach auch stets eine Function

$$\Theta(u_1, \dots u_n),$$

---

*) Dabei ist zu beachten, dass die Coefficienten der Function $\bar\omega$ bloss aus den Grössen $\omega_{\alpha\beta}, \omega'_{\alpha\beta}$ (ohne Hinzutreten der $\eta_{\alpha\beta}, \eta'_{\alpha\beta}$) zusammengesetzt werden. Es ist also stets möglich, die verlangte Function $G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)$ herzustellen, wenn die $\omega_{\alpha\beta}, \omega'_{\alpha\beta}$ so angenommen werden, dass die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Relationen

$$\sum_\gamma(\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}) = 0$$

bestehen, und die Determinante ω nicht gleich Null ist. Für $\eta(u_1, \dots u_n)$ kann dann eine beliebige homogene ganze Function zweiten Grades von $u_1, \dots u_n$ gewählt werden. Dieselbe kann auch Null sein.

für welche das oben definirte Grössensystem (ω, η) mit dem gegebenen übereinstimmt.

Die für die Convergenz der Reihe, durch welche $\Theta(u_1, \dots u_n)$ definirt worden ist, nothwendige Bedingung, dass der reelle Theil von

$$i \sum_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \tau_{\alpha\beta}$$

bei reellen Werthen von $\nu_1, \dots \nu_n$ beständig negativ sein muss, lässt sich noch in einer anderen Form ausdrücken, deren Kenntniss für das Folgende von Wichtigkeit ist.

Man setze, unter $p_1, \dots p_n$ willkürlich anzunehmende Grössen verstehend,

$$\Omega_\alpha = \sum_\beta 2 p_\beta \omega_{\beta\alpha}, \quad \Omega_{n+\alpha} = \sum_\beta 2 p_\beta \omega'_{\beta\alpha},$$

und bezeichne die mit

$$p_\beta, \ \omega_{\beta\alpha}, \ \omega'_{\beta\alpha}, \ \Omega_\alpha, \ \Omega_{n+\alpha}, \ \tau_{\alpha\beta}$$

conjugirten complexen Grössen beziehlich durch

$$\bar{p}_\beta, \ \bar{\omega}_{\beta\alpha}, \ \bar{\omega}'_{\beta\alpha}, \ \bar{\Omega}_\alpha, \ \bar{\Omega}_{n+\alpha}, \ \bar{\tau}_{\alpha\beta}.$$

Dann ist

$$\sum_\alpha \Omega_\alpha \bar{\Omega}_{n+\alpha} = \sum_{\alpha\beta\gamma} 4 p_\beta \bar{p}_\gamma \omega_{\beta\alpha} \bar{\omega}'_{\gamma\alpha}.$$

Ferner ist

$$2 p_\beta = \sum_\delta \frac{(\omega)_{\beta\delta}}{\omega} \Omega_\delta,$$

$$\sum_\gamma 2 p_\gamma \omega'_{\gamma\alpha} = \sum_{\gamma\delta} \frac{(\omega)_{\gamma\delta} \omega'_{\gamma\alpha}}{\omega} \Omega_\delta = \sum_\delta \Omega_\delta \tau_{\alpha\delta} = \sum_\beta \Omega_\beta \tau_{\alpha\beta},$$

und somit

$$\sum_\gamma 2 \bar{p}_\gamma \bar{\omega}'_{\gamma\alpha} = \sum_\beta \bar{\Omega}_\beta \bar{\tau}_{\alpha\beta},$$

also

$$\sum_\alpha \Omega_\alpha \bar{\Omega}_{n+\alpha} = \sum_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \bar{\Omega}_\beta \bar{\tau}_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha \bar{\Omega}_\alpha \Omega_{n+\alpha} = \sum_{\alpha\beta} \bar{\Omega}_\alpha \Omega_\beta \tau_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \bar{\Omega}_\beta \tau_{\beta\alpha} = \sum_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \bar{\Omega}_\beta \tau_{\alpha\beta},$$

$$\text{(M)} \qquad i \sum_\alpha (\Omega_\alpha \bar{\Omega}_{n+\alpha} - \bar{\Omega}_\alpha \Omega_{n+\alpha}) = -i \sum_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \bar{\Omega}_\beta (\tau_{\alpha\beta} - \bar{\tau}_{\alpha\beta}).$$

Setzt man dann

$$\Omega_\alpha = \mu_\alpha + \nu_\alpha i, \quad \bar{\Omega}_\alpha = \mu_\alpha - \nu_\alpha i,$$

so sind μ_α, ν_α reelle Grössen, und man erhält mit Berücksichtigung der Relationen $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}, \ \bar{\tau}_{\alpha\beta} = \bar{\tau}_{\beta\alpha}$

$$-i \sum_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \bar{\Omega}_\beta (\tau_{\alpha\beta} - \bar{\tau}_{\alpha\beta}) = -i \sum_{\alpha\beta} (\tau_{\alpha\beta} - \bar{\tau}_{\alpha\beta})(\mu_\alpha \mu_\beta + \nu_\alpha \nu_\beta),$$

wo der Ausdruck auf der Rechten unter den für die Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ gemachten Annahmen stets positiv ist, wenn nicht die μ_α, ν_α sämmtlich verschwinden.

Es müssen also die Grössen $\omega_{\alpha\beta}, \omega'_{\alpha\beta}$, wenn sich eine zu ihnen gehörige Θ-Function soll herstellen lassen, so beschaffen sein, dass der Ausdruck

$$i \sum_\alpha (\Omega_\alpha \bar{\Omega}_{n+\alpha} - \bar{\Omega}_\alpha \Omega_{n+\alpha}),$$

in welchem

$$\Omega_\alpha = \sum_\beta 2 p_\beta \omega_{\beta\alpha}, \quad \Omega_{n+\alpha} = \sum_\beta 2 p_\beta \omega'_{\beta\alpha}$$

ist, und $\bar{\Omega}_\alpha, \bar{\Omega}_{n+\alpha}$ die mit $\Omega_\alpha, \Omega_{n+\alpha}$ conjugirten Grössen bedeuten, bei willkürlichen Werthen der $p_1, \dots p_n$, wenn diese nicht sämmtlich gleich Null sind, beständig positiv ist. Die hierzu erforderlichen Bedingungen werden später angegeben werden.

Nimmt man ferner die μ_α, ν_α willkürlich an, und setzt

$$\Omega_\alpha = \mu_\alpha + \nu_\alpha i, \quad 2 p_\beta = \sum_\delta \frac{(\omega)_{\beta\delta}}{\omega} \Omega_\delta,$$

so gilt die Gleichung (M). Daraus folgt, dass die Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ auch stets die erforderliche Beschaffenheit haben, wenn die $\omega_{\alpha\beta}, \omega'_{\alpha\beta}$ der vorstehenden Bedingung entsprechend angenommen werden.

Setzt man ferner

$$\vartheta(v_1, \dots v_n) = \sum_{(\nu)} \left\{ e^{\sum_\alpha \nu_\alpha (2 v_\alpha + \nu_1 \tau_{\alpha 1} + \cdots + \nu_n \tau_{\alpha n}) \pi i} \right\},$$

oder

$$\text{(N)} \qquad \vartheta(v_1, \dots v_n) = \sum_{(\nu)} \left\{ e^{\pi i \sum_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \tau_{\alpha\beta}} . \cos(2 \nu_1 v_1 + \cdots + 2 \nu_n v_n) \pi \right\},$$

so hat man

$$\text{(N, a)} \qquad \Theta(u_1, \dots u_n) = e^{\eta(u_1, \dots u_n)} \vartheta(v_1, \dots v_n),$$

wenn für $v_1, \dots v_n$ die angegebenen linearen Functionen von $u_1, \dots u_n$ gesetzt werden.

Betrachtet man $v_1, \dots v_n$ als unabhängige Veränderliche, so ist $\vartheta(v_1, \dots v_n)$ diejenige Θ-Function, bei der an die Stelle von G die Function

$$\sum_\alpha \nu_\alpha(2v_\alpha + \nu_1 \tau_{\alpha 1} + \dots + \nu_n \tau_{\alpha n})\pi i$$

tritt. Daraus ergiebt sich, dass für sie das System der Grössen ω, η das folgende ist:

$$(\mathrm{O}) \qquad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{llllll} \frac{1}{2}, & 0, & \dots 0, & \frac{1}{2}\tau_{11}, & \frac{1}{2}\tau_{12}, & \dots \frac{1}{2}\tau_{1n} \\ 0, & \frac{1}{2}, & \dots 0, & \frac{1}{2}\tau_{21}, & \frac{1}{2}\tau_{22}, & \dots \frac{1}{2}\tau_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \dots \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\tau_{n1}, & \frac{1}{2}\tau_{n2}, & \dots \frac{1}{2}\tau_{nn} \end{array}\right\} (\omega) \\ \left.\begin{array}{llllll} 0, & 0, & \dots 0, & \frac{\pi}{i}, & 0, & \dots 0 \\ 0, & 0, & \dots 0, & 0, & \frac{\pi}{i}, & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \dots 0, & 0, & 0, & \dots \frac{\pi}{i} \end{array}\right\} (\eta). \end{array}\right.$$

Die obige Gleichung (B) nimmt hierauf für $\vartheta(v_1, \dots v_n)$ die Gestalt an:

$$(\mathrm{P}) \qquad \vartheta(v_1 + w_1, \dots v_n + w_n) = \vartheta(v_1, \dots v_n) . e^{-\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha(2v_\alpha + \lambda_1\tau_{\alpha 1} + \dots + \lambda_n \tau_{\alpha n})\pi i}$$
$$(w_\alpha = \varkappa_\alpha + \sum_\beta \lambda_\beta \tau_{\alpha\beta}).$$

Dieses vorausgeschickt, bezeichne man nun, unter C eine willkürliche, und unter

$$a_1, \dots a_n;\ a'_1, \dots a'_n;\ \dots\dots\ a_1^{(m)}, \dots a_n^{(m)}$$
$$b_1, \dots b_n;\ b'_1, \dots b'_n;\ \dots\dots\ b_1^{(m)}, \dots b_n^{(m)}$$

solche Constanten verstehend, die den Bedingungsgleichungen

$$a_\alpha + a'_\alpha \dots + a_\alpha^{(m)} = b_\alpha + b'_\alpha \dots + b_\alpha^{(m)} \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

genügen, im Übrigen aber auch beliebige Werthe haben können, den Aus-

druck

$$(\mathrm{Q}) \quad C.\frac{\Theta(u_1 + a_1, \dots u_n + a_n)\,\Theta(u_1 + a'_1, \dots u_n + a'_n) \dots \Theta(u_1 + a_1^{(m)}, \dots u_n + a_n^{(m)})}{\Theta(u_1 + b_1, \dots u_n + b_n)\,\Theta(u_1 + b'_1, \dots u_n + b'_n) \dots \Theta(u_1 + b_1^{(m)}, \dots u_n + b_n^{(m)})} \text{ mit } \wp(u_1, \dots u_n),$$

so ergeben sich aus den Gleichungen (C) die folgenden:

$$\begin{aligned} \wp(u_1 + 2\omega_{1\beta}, \dots u_n + 2\omega_{n\beta}) &= \wp(u_1, \dots u_n), \\ \wp(u_1 + 2\omega'_{1\beta}, \dots u_n + 2\omega'_{n\beta}) &= \wp(u_1, \dots u_n). \end{aligned} \qquad (\beta = 1, \dots n)$$

Die so definirte Function $\wp(u_1, \dots u_n)$ besitzt also bei endlichen Werthen der Veränderlichen $u_1, \dots u_n$ den Charakter einer rationalen Function, und hat die $2n$ Periodensysteme

$$(2\omega_{11}, \dots 2\omega_{n1}), \dots (2\omega_{1n}, \dots 2\omega_{nn}),$$
$$(2\omega'_{11}, \dots 2\omega'_{n1}), \dots (2\omega'_{1n}, \dots 2\omega'_{nn}).$$

Dasselbe gilt von jeder Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$, welche sich rational durch $\wp(u_1, \dots u_n)$ oder auch durch mehrere Functionen dieser Art, die sämmtlich aus derselben Θ-Function entspringen, ausdrücken lässt.

Die Grössen $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$ sind ferner so beschaffen, dass die n Gleichungen

$$\sum_\beta (2\varkappa_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \omega'_{\alpha\beta}) = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

nicht durch ein System ganzzahliger Werthe von $\varkappa_1, \dots \varkappa_n; \lambda_1, \dots \lambda_n$, die nicht sämmtlich gleich Null sind, befriedigt werden können. Denn gäbe es ein solches, so müsste, wenn

$$W_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \eta'_{\alpha\beta})$$

gesetzt wird, der obigen Gleichung (B) zufolge

$$\Theta(u_1, \dots u_n) = (-1)^{\sum\limits_\alpha \varkappa_\alpha \lambda_\alpha}\, \Theta(u_1, \dots u_n)\, e^{\sum\limits_\alpha W_\alpha u_\alpha},$$

also

$$\sum_\beta (2\varkappa_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \eta'_{\alpha\beta}) = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

sein, was nicht möglich ist, da nach Gleichung (G) die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}, & \dots & \omega_{1n}, & \omega'_{11}, & \dots & \omega'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n1}, & \dots & \eta_{nn}, & \eta'_{n1}, & \dots & \eta'_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist.

Daraus folgt, dem oben Bemerkten gemäss,*) dass jede auf die angegebene Weise gebildete Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ eine $2n$-fach periodische ist, wenn auch möglicherweise die angegebenen $2n$ Periodensysteme keine primitiven sind, d. h. solche, aus denen alle übrigen auf die im Anfange beschriebene Weise abgeleitet werden können.

Hiermit ist also die Existenz unendlich vieler $2n$-fach periodischer Functionen von n Argumenten nachgewiesen. Diejenigen, zu welchen die Theorie der elliptischen und Abelschen Transcendenten geführt hat, gehören sämmtlich zu den hier beschriebenen; wobei jedoch zu bemerken ist, dass die im Vorstehenden definirte θ-Function, sobald $n > 3$, allgemeiner ist als die durch jene Theorie gelieferte, indem bei der letzteren unter den Grössen $\omega_{\alpha\beta}, \omega'_{\alpha\beta}$ noch andere Relationen als die unter (H) angegebenen bestehen.

Es hat aber die Theorie der doppelt periodischen Functionen eines Arguments einen höchst befriedigenden Abschluss in dem fundamentalen Satze gefunden, dass jede solche Function in der im Vorstehenden angegebenen Weise durch eine θ-Function ausgedrückt werden kann. Es drängt sich daher die Frage auf, ob für die $2n$-fach periodischen Functionen von n Argumenten, wenn $n > 1$, ein analoges Theorem gelte, oder ob es ausser den durch eine θ-Function von n Argumenten ausdrückbaren Functionen dieser Art noch andere gebe. Man begegnet aber, wenn man auf diese Frage näher eingeht, sofort einer sehr wesentlichen Schwierigkeit, welche es unmöglich macht, die Untersuchung auf dieselbe einfache Weise wie für die Functionen eines Arguments durchzuführen.

Es seien nämlich

$$(P_{1,1}, \dots P_{n,1}),\ (P_{1,2}, \dots P_{n,2}),\ \dots\ (P_{1,2n}, \dots P_{n,2n})$$

irgend $2n$ primitive Periodensysteme einer Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$, welche in der beschriebenen Weise aus einer bestimmten θ-Function entspringt. Dann hat man, die oben eingeführten Bezeichnungen beibehaltend,

$$2\omega_{\alpha\gamma} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{\gamma,\varkappa} P_{\alpha,\varkappa},$$

$$2\omega'_{\alpha\gamma} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{n+\gamma,\varkappa} P_{\alpha,\varkappa},$$

*) S. 54.

wo die m sämmtlich ganze Zahlen sind. Aus der Gleichung

$$\sum_\gamma (\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}) = 0$$

ergeben sich daher $\frac{1}{2}n(n-1)$ unter den Grössen $P_{\alpha,\varkappa}$ stattfindende Relationen von der Gestalt

$$\text{(R)} \qquad \sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} ((\varkappa, \lambda) P_{\alpha,\varkappa} P_{\beta,\lambda}) = 0, \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \dots n \\ \beta = 1, \dots n \end{pmatrix}$$

wo die von den Indices α, β unabhängigen Coefficienten $(\varkappa, \lambda)$ ganze Zahlen und so beschaffen sind, dass

$$(\varkappa, \lambda) = -(\lambda, \varkappa).$$

Setzt man ferner

$$P_\varkappa = \sum_\beta p_\beta P_{\beta,\varkappa},$$

so verwandeln sich die oben mit $\Omega_\alpha, \Omega'_\alpha$ bezeichneten Ausdrücke in

$$\sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{\alpha,\varkappa} P_\varkappa, \quad \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{n+\alpha,\varkappa} P_\varkappa,$$

und man erhält, wenn $\overline{P}_\varkappa$ die mit $P_\varkappa$ conjugirte Grösse bedeutet, für die $P_{\beta,\varkappa}$ die Bedingung, dass der Ausdruck

$$\text{(S)} \qquad i \sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa, \lambda) P_\varkappa \overline{P}_\lambda$$

stets einen positiven Werth haben muss, wenn die $p_1, \dots p_n$ nicht sämmtlich gleich Null sind.

Setzt man nun

$$P_{\alpha,\varkappa} = Q_{\alpha,\varkappa} + iR_{\alpha,\varkappa}, \quad p_\beta = \xi_\beta + i\eta_\beta$$

(wo die Q, R, ξ, η reelle Grössen bedeuten) und

$$(QQ)_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa, \lambda) Q_{\alpha,\varkappa} Q_{\beta,\lambda},$$

$$(QR)_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa, \lambda) Q_{\alpha,\varkappa} R_{\beta,\lambda},$$

$$(RR)_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa, \lambda) R_{\alpha,\varkappa} R_{\beta,\lambda},$$

so ist in Folge der Relation $(\varkappa, \lambda) = -(\lambda, \varkappa)$

$$\text{(T)} \qquad \begin{cases} (QQ)_{\alpha\beta} = -(QQ)_{\beta\alpha}, & (QQ)_{\alpha\alpha} = 0, \\ (RR)_{\alpha\beta} = -(RR)_{\beta\alpha}, & (RR)_{\alpha\alpha} = 0; \end{cases}$$

und die Gleichungen (R) besagen, dass

$$(QQ)_{\alpha\beta} = (RR)_{\alpha\beta}, \quad (QR)_{\alpha\beta} = (QR)_{\beta\alpha},$$

so dass also unter den $4n^2$ Grössen Q, R, sobald $n > 1$, $n(n-1)$ Relationen bestehen. Der Ausdruck (S) aber lässt sich mit Berücksichtigung dieser Relationen in

$$\text{(U)} \qquad 2\sum_{\alpha\beta}((QR)_{\alpha\beta} + i(QQ)_{\alpha\beta})(\xi_\alpha + \eta_\alpha i)(\xi_\beta - \eta_\beta i)$$

umgestalten; und dieser muss also bei reellen Werthen der Grössen ξ, η, wenn dieselben nicht sämmtlich gleich Null sind, beständig positiv sein. Dazu ist bekanntlich erforderlich, dass n bestimmte, aus den Grössen $(QR)_{\alpha\beta}$, $(QQ)_{\alpha\beta}$ zusammengesetzte Ausdrücke positive Werthe haben.

Hiernach müssen, wenn eine $2n$-fach periodische Function von n Argumenten in der angegebenen Weise mittels einer θ-Function darstellbar sein soll, die Elemente ihrer Periodensysteme — so mögen die Grössen $Q_{\alpha,\varkappa}$, $R_{\alpha,\varkappa}$ genannt werden — bestimmte, theils durch Gleichungen, theils durch Ungleichheiten ausgedrückte Bedingungen erfüllen. Wenn es sich also um die Aufstellung des allgemeinsten Ausdruckes einer Function der in Rede stehenden Art handelt, so ist zunächst zu untersuchen, ob für jede solche Function die Wahl der Elemente ihrer Periodensysteme Beschränkungen unterworfen ist, und ob, wenn sich dies so verhält, dieselben mit den im Vorstehenden ermittelten zusammenfallen oder nicht. Es ist mir aber erst nach manchen vergeblichen Bemühungen gelungen, zur Durchführung dieser Untersuchung einen geeigneten Weg aufzufinden.

In einer frühern Abhandlung (Monatsbericht der Berliner Akademie vom 2. Dec. 1869)*) habe ich auseinandergesetzt, wie jede $2n$-fach periodische Function von n Veränderlichen mit einem Systeme von n Abelschen Integralen erster Gattung in der Art im Zusammenhang steht, dass je n zusammengehörige Perioden dieser Integrale auch ein Periodensystem jener Function bilden. Hierauf gestützt habe ich dann bald darauf ermittelt (und der Akademie in der Klassensitzung vom 14. Febr. 1870 mitgetheilt), dass in der That, wenn eine Function von n Argumenten $2n$ vorgeschriebene primitive Periodensysteme

$$(Q_{1,\varkappa} + iR_{1,\varkappa}, \dots Q_{n,\varkappa} + iR_{n,\varkappa}) \qquad (\varkappa = 1, \dots 2n)$$

*) Bd. II. S. 45 dieser Ausgabe.

haben soll, die Grössen $Q_{\alpha,\varkappa}$, $R_{\alpha,\varkappa}$ den im Vorhergehenden entwickelten Bedingungen genügen müssen.

Nachdem dies festgestellt war, bot die weitere Untersuchung keine wesentliche Schwierigkeit mehr dar, und es ergab sich schliesslich der Satz:

»Jede eindeutige Function von n Argumenten, welche bei endlichen Werthen der letztern den Charakter einer rationalen Function besitzt und zugleich $2n$-fach periodisch ist, entspringt in der beschriebenen Weise aus einer θ-Function derselben Veränderlichen.«

Die Begründung dieses Theorems bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung, in der ausser einigen der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen angehörigen Sätzen die wesentlichsten Eigenschaften der Abelschen Integrale erster Gattung als bekannt vorausgesetzt werden.

§ 1.

Es bedeute jetzt $\varphi(u_1, \dots u_n)$ irgend eine bestimmte Function von der in dem aufgestellten Theorem vorausgesetzten Beschaffenheit. Dieselbe hat also folgende Eigenschaften:

1. Ist $(a_1, \dots a_n)$ ein beliebiges System endlicher Werthe der Veränderlichen $(u_1, \dots u_n)$, so besitzt die Function stets einen in der Form

$$\frac{G_1(u_1, \dots u_n \mid a_1, \dots a_n)}{G_2(u_1, \dots u_n \mid a_1, \dots a_n)}$$

darstellbaren Zweig. Dabei sind drei wesentlich von einander verschiedene Fälle zu betrachten.

Hat G_2 an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ einen von Null verschiedenen Werth, so lässt sich der vorstehende Bruch auf die Form $G(u_1, \dots u_n \mid a_1, \dots a_n)$ bringen, und es hat also in diesem Falle, welcher der reguläre ist, $\varphi(u_1, \dots u_n)$ an allen im Innern des Convergenzbezirkes von $G(u_1, \dots u_n \mid a_1, \dots a_n)$ liegenden Stellen den Charakter einer ganzen Function.

Wenn ferner G_2 an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ verschwindet, G_1 aber nicht, so hat man in einer bestimmten Umgebung dieser Stelle

$$\frac{1}{\varphi(u_1, \dots u_n)} = G(u_1, \dots u_n \mid a_1, \dots a_n);$$

es wird also, wenn die Differenzen $(u_1-a_1), \dots (u_n-a_n)$ sämmtlich unendlich klein werden, der Werth von $\varphi(u_1, \dots u_n)$ stets unendlich gross, und ist an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ selbst gleich ∞.

Wenn endlich G_1, G_2 beide an der betrachteten Stelle verschwinden, wobei angenommen werden darf, dass sie keinen an derselben Stelle verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler $G_3(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$ haben, so giebt es in jeder Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, für welche die Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ einen beliebig festgesetzten Werth erhält, so dass sie an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ selbst keinen bestimmten Werth hat.*)

Wir nennen — in Beziehung auf die betrachtete Function — in diesem Falle $(a_1, \dots a_n)$ eine Grenzstelle.

Die betrachteten drei Fälle unterscheiden sich ferner noch in folgender Weise von einander:

Hat $\varphi(u_1, \dots u_n)$ an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ einen bestimmten endlichen Werth, so gilt dasselbe auch für alle Stellen, die in einer bestimmten Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ — dem Innern des Convergenzbezirkes von

$$G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$$

— liegen.

---

*) Man kann nämlich in diesem Falle, indem man an Stelle der Veränderlichen $u_1, \dots u_n$ ganze und homogene lineare Functionen $t_1, \dots t_n$ von $(u_1-a_1), \dots (u_n-a_n)$ einführt, in mannigfaltiger Weise

$$\frac{G_1(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)}{G_2(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)} \text{ auf die Form}$$

$$\frac{t_1^\alpha + \mathfrak{G}_1(t_2, \dots t_n)\, t_1^{\alpha-1} \cdots + \mathfrak{G}_\alpha(t_2, \dots t_n)}{t_1^\beta + \mathfrak{G}_1'(t_2, \dots t_n)\, t_1^{\beta-1} \cdots + \mathfrak{G}_\beta'(t_2, \dots t_n)} \cdot G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n) = \frac{\mathfrak{G}(t_1, t_2, \dots t_n)}{\mathfrak{G}'(t_1, t_2, \dots t_n)} \cdot G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$$

in der Art bringen, dass $\mathfrak{G}_1(t_2, \dots t_n), \dots \mathfrak{G}_\alpha(t_2, \dots t_n), \mathfrak{G}_1'(t_2, \dots t_n), \dots \mathfrak{G}_\beta'(t_2, \dots t_n)$ Potenzreihen von $t_2, \dots t_n$ sind, welche sämmtlich gleich Null werden, wenn $t_2, \dots t_n$ alle verschwinden, $G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$ aber an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Zugleich kann diese Umformung so geschehen, dass unter den Grössen $t_2, \dots t_n$ eine bestimmte Gleichung $\mathfrak{G}''(t_2, \dots t_n) = 0$ bestehen muss, wenn $\mathfrak{G}(t_1, t_2, \dots t_n)$, $\mathfrak{G}'(t_1, t_2, \dots t_n)$ zugleich verschwinden sollen. Es giebt daher unendlich viele Systeme solcher Werthe von $t_1, t_2, \dots t_n$, für die $\mathfrak{G}(t_1, t_2, \dots t_n)$ verschwindet, $\mathfrak{G}'(t_1, t_2, \dots t_n)$ aber nicht, während zugleich jeder dieser Werthe seinem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig angenommene Grösse ist. Es giebt also auch in jeder Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, für die $\varphi(u_1, \dots u_n) = 0$ ist. Nun hat aber, wenn b ein beliebig angenommener Werth ist, $\varphi(u_1, \dots u_n) - b$ in der Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ dieselbe Form wie $\varphi(u_1, \dots u_n)$; es existiren also in jeder Umgebung dieser Stelle auch Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, für die $\varphi(u_1, \dots u_n) - b = 0$, $\varphi(u_1, \dots u_n) = b$ ist.

Ist $\varphi(u_1, \dots u_n) = \infty$ an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$, so giebt es in derjenigen Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$, innerhalb welcher $\frac{1}{\varphi(u_1, \dots u_n)}$ den Charakter einer ganzen Function hat, keine Grenzstellen, wohl aber, sobald $n > 1$, Stellen, an denen $\varphi(u_1, \dots u_n) = \infty$ ist; diese bilden eine $(2n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Wenn dagegen $(a_1, \dots a_n)$ eine Grenzstelle ist, so giebt es in jeder noch so engen Umgebung derselben nicht nur Stellen, in denen $\varphi(u_1, \dots u_n) = \infty$ ist, sondern auch, wofern $n > 2$, noch andere Grenzstellen; die ersteren bilden eine $(2n-2)$-fach ausgedehnte, die letzteren eine $(2n-4)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.*)

2. Es wird vorausgesetzt, dass sich $\varphi(u_1, \dots u_n)$ nicht als Function von weniger als n Argumenten, die lineare Functionen von $u_1, \dots u_n$ sind, darstellen lasse.

3. Die Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ ist $2n$-fach periodisch. Daraus ergiebt sich zunächst, dass man, um alle Werthe, die sie überhaupt annehmen kann, zu erhalten, nur diejenigen Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ zu betrachten hat, welche einem sofort näher zu beschreibenden, ganz im Endlichen liegenden Bereiche (U) angehören.

Es seien

$$(P_{1,1}, \dots P_{n,1}), \dots (P_{1,2n}, \dots P_{n,2n})$$

---

*) In derjenigen Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$, für welche die angegebene Umformung von

$$\frac{G_1(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)}{G_2(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)}$$

gültig ist, wird $\varphi(u_1, \dots u_n) = \infty$, wenn man $t_1, t_2, \dots t_n$ so wählt, dass $\mathfrak{G}'(t_1, t_2, \dots t_n)$ verschwindet, nicht aber zugleich $\mathfrak{G}''(t_2, \dots t_n)$ und $G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$. Giebt man dagegen den $t_2, \dots t_n$ solche Werthe $t_2', \dots t_n'$, dass $\mathfrak{G}''(t_2', \dots t_n') = 0$ ist, so kann man t_1' so bestimmen, dass $\mathfrak{G}(t_1', t_2', \dots t_n')$, $\mathfrak{G}'(t_1', t_2', \dots t_n')$ beide verschwinden, und dass zugleich, wenn $u_1', \dots u_n'$ die den $t_1', \dots t_n'$ entsprechenden Werthe von $u_1, \dots u_n$ sind, die Stelle $(u_1', \dots u_n')$ dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk von $G_1(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$, $G_2(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$ angehört. Dann kann man diese Ausdrücke in andere

$$\overline{G}_1(u_1, \dots u_n | u_1', \dots u_n'), \quad \overline{G}_2(u_1, \dots u_n | u_1', \dots u_n')$$

umformen, welche beide an der Stelle $(u_1', \dots u_n')$ verschwinden, ohne einen gemeinschaftlichen Theiler von derselben Form zu haben. Denn existirte ein solcher, so müsste derselbe, in eine Potenzreihe von $(t_1-t_1'), \dots (t_n-t_n')$ umgeformt, ein gemeinschaftlicher Theiler der ebenso umgeformten Functionen $\mathfrak{G}(t_1, t_2, \dots t_n)$, $\mathfrak{G}'(t_1, t_2, \dots t_n)$ sein, und die oben durch $\mathfrak{G}''(t_2, \dots t_n)$ bezeichnete Function für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(t_2', \dots t_n')$ angehörenden Werthsysteme $t_2, \dots t_n$ verschwinden, also identisch gleich Null sein — was wider die Annahme ist. Daraus folgt, dass jede auf die angegebene Weise bestimmte Stelle $(u_1', \dots u_n')$ eine Grenzstelle ist, sowie auch erhellt, dass es in einer bestimmten Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ keine andern derartigen Stellen giebt.

$2n$ primitive Perioden-Systeme von $\varphi(u_1, \dots u_n)$, und es werde wieder, wie oben,

$$P_{\alpha,\varkappa} = Q_{\alpha,\varkappa} + iR_{\alpha,\varkappa} \tag{1.}$$

gesetzt, wo $Q_{\alpha,\varkappa}$, $R_{\alpha,\varkappa}$ reelle Grössen bedeuten. Dann ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} Q_{1,1}, & \dots & Q_{1,2n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ Q_{n,1}, & \dots & Q_{n,2n} \\ R_{1,1}, & \dots & R_{1,2n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ R_{n,1}, & \dots & R_{n,2n} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null;*) und man kann daher zu jedem System endlicher Grössen $(u_1, \dots u_n)$ ein System von $2n$ ebenfalls endlichen und reellen Grössen $\xi_1, \dots \xi_{2n}$ so bestimmen, dass man

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sum\limits_{\varkappa=1}^{2n} \xi_\varkappa P_{1,\varkappa} \\ \dots\dots\dots \\ u_n = \sum\limits_{\varkappa=1}^{2n} \xi_\varkappa P_{n,\varkappa} \end{array} \right. \tag{2.}$$

hat. Nimmt man dann ein System bestimmter Werthe von $\xi_1, \dots \xi_{2n}$

$$(\xi_1^0, \dots \xi_{2n}^0)$$

beliebig an, bezeichnet mit $\nu_\varkappa$ die grösste in $(\xi_\varkappa - \xi_\varkappa^0)$ enthaltene ganze Zahl, und setzt

$$\xi_\varkappa = \xi'_\varkappa + \nu_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, \dots 2n) \tag{3.}$$

$$\bar{u}_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{2n} \xi'_\varkappa P_{\alpha,\varkappa}, \qquad (\alpha = 1, \dots n) \tag{4.}$$

so hat man

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \bar{u}_1 + P_1 \\ \dots\dots\dots \\ u_n = \bar{u}_n + P_n, \end{array} \right. \tag{5.}$$

wo $(P_1, \dots P_n)$ ein Periodensystem der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ ist, sodass

$$\varphi(u_1, \dots u_n) = \varphi(\bar{u}_1, \dots \bar{u}_n). \tag{6.}$$

Jede der Grössen $\xi'_\varkappa$ ist nun $\geqq \xi_\varkappa^0$, aber $< \xi_\varkappa^0 + 1$; die Gesammtheit der Werthsysteme $(\bar{u}_1, \dots \bar{u}_n)$ bildet also einen begrenzten, ganz im Endlichen

*) S. die Abhandlung: „Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen.“ [Bd. II. S. 55 dieser Ausgabe.]

liegenden Bereich, der mit $\overline{U}$ bezeichnet werden möge. Die vorstehende Gleichung besagt also, dass die Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ jeden Werth, den sie überhaupt annehmen kann, auch für ein dem Bereich $\overline{U}$ angehöriges Werthsystem der Argumente $u_1, \dots u_n$ erhält.

Hieraus ergiebt sich unter anderm, dass es nicht möglich ist, $\varphi(u_1, \dots u_n)$ in der Form einer beständig convergirenden Potenzreihe von $u_1, \dots u_n$ darzustellen. Denn dazu wäre erforderlich, dass jeder Werth, den $\varphi(u_1, \dots u_n)$ innerhalb des Bereichs $\overline{U}$ annehmen könnte, seinem absoluten Betrage nach unterhalb einer angebbaren Grenze läge; daraus aber würde folgen, dass $\varphi(u_1, \dots u_n)$ überhaupt nicht beliebig gross werden könnte, was doch eine nothwendige Eigenschaft jeder in der in Rede stehenden Form darstellbaren Function ist. Es giebt daher im Gebiete der Grössen $u_1, \dots u_n$ jedenfalls Stellen $(a_1, \dots a_n)$, für die von den drei unter 1. angeführten Fällen der zweite oder der dritte eintritt, sodass auch stets bestimmte Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ existiren, für welche $\varphi(u_1, \dots u_n) = \infty$ wird. Da nun, wenn b ein beliebiger Werth ist, $\frac{1}{\varphi(u_1, \dots u_n) - b}$ dieselben Perioden-Systeme wie $\varphi(u_1, \dots u_n)$ besitzt, so ergiebt sich weiter, dass auch diese Function unendlich gross werden, also $\varphi(u_1, \dots u_n)$ jeden beliebigen Werth erhalten kann, und zwar an Stellen, die nicht Grenzstellen sind.

Nachdem dies zur genauen Charakteristik der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ Erforderliche vorausgeschickt worden, gehe ich nunmehr zum Beweise des in der Einleitung angeführten Satzes über, dass mit jeder solchen Function ein System Abelscher Integrale erster Gattung dergestalt in Verbindung steht, dass je n zusammengehörige Perioden dieser Integrale auch ein Perioden-System der betrachteten Function bilden. Dieser Beweis, dessen Gang bereits in der S. 66 angegebenen Abhandlung angedeutet worden ist, soll hier in etwas veränderter Weise durchgeführt werden.

§ 2.

Aus der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ lassen sich auf mannigfaltige Weise n andere

$$\varphi_1(u_1, \dots u_n), \ \dots \ \varphi_n(u_1, \dots u_n),$$

von denen jede denselben analytischen Charakter und dieselben Periodensysteme wie jene besitzt, so ableiten, dass sie an der Stelle $(0, \dots 0)$ sämmtlich verschwinden, die Functional-Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

aber an derselben Stelle einen von Null verschiedenen Werth erhält.

Es kann dies z. B. folgendermassen geschehen.

Man nehme n Systeme von je n Constanten

$$(v_1', \dots v_n'), \dots (v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)})$$

so an, dass $\varphi(v_1', \dots v_n'), \dots \varphi(v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)})$ sämmtlich bestimmte endliche Werthe haben, und dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(u_1+v_1', \dots u_n+v_n')}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi(u_1+v_1', \dots u_n+v_n')}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi(u_1+v_1^{(n)}, \dots u_n+v_n^{(n)})}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi(u_1+v_1^{(n)}, \dots u_n+v_n^{(n)})}{\partial u_n} \end{vmatrix},$$

welche mit $D(u_1, \dots u_n)$ bezeichnet werde, nicht gleich Null wird, wenn $u_1, \dots u_n$ sämmtlich verschwinden.*) Setzt man dann

$$(1.) \quad \begin{cases} \varphi_1(u_1, \dots u_n) = \varphi(u_1+v_1', \dots u_n+v_n') - \varphi(v_1', \dots v_n') \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n(u_1, \dots u_n) = \varphi(u_1+v_1^{(n)}, \dots u_n+v_n^{(n)}) - \varphi(v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)}), \end{cases}$$

---

*) Dass das Letztere stets möglich ist, lässt sich so zeigen. Wäre $D(0, \dots 0) = 0$ bei beliebigen Werthen der Grössen $(v_1', \dots v_n'), \dots (v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)})$, so hätte man,

$$\frac{\partial \varphi(u_1, \dots u_n)}{\partial u_\alpha} \text{ mit } \overset{\alpha}{\varphi}(u_1, \dots u_n)$$

bezeichnend,

$$\begin{vmatrix} \overset{1}{\varphi}(v_1', \dots v_n'), & \dots \overset{n}{\varphi}(v_1', \dots v_n') \\ \cdot & \cdot \\ \overset{1}{\varphi}(v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)}), & \dots \overset{n}{\varphi}(v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)}) \end{vmatrix} = 0,$$

und es existirte also eine Gleichung von der Form

$$C_1 \overset{1}{\varphi}(v_1', \dots v_n') \dots + C_n \overset{n}{\varphi}(v_1', \dots v_n') = 0,$$

in der die $C_1, \dots C_n$ von den $v_1', \dots v_n'$ unabhängig, aber nicht sämmtlich gleich Null wären. Diese

so ist

$$\varphi_1(u_1, \dots u_n), \dots \varphi_n(u_1, \dots u_n)$$

ein Functionensystem von der angegebenen Beschaffenheit.

Sodann nehme man zwischen $u_1, \dots u_n$ und einer neuen Veränderlichen (x) die nachstehenden Gleichungen an, in denen $F_1(x), \dots F_n(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, welche sämmtlich für $x = 0$ verschwinden, im Übrigen aber — abgesehen von einer sogleich anzugebenden Beschränkung — beliebig gewählt werden können:

$$(2.) \quad \begin{cases} \varphi_1(u_1, \dots u_n) = F_1(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n(u_1, \dots u_n) = F_n(x). \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag unter einer bestimmten Grenze liegt, befriedigen, indem man

$$(3.) \quad \begin{cases} u_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{1,\nu} x^\nu = \psi_1(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{n,\nu} x^\nu = \psi_n(x) \end{cases}$$

setzt, wo die $k_{\alpha,\nu}$ Constanten bezeichnen, welche mittels der Gleichungen (2.) eindeutig bestimmt werden.

Unter den gemachten Voraussetzungen können nämlich

$$\varphi_1(u_1, \dots u_n), \dots \varphi_n(u_1, \dots u_n)$$

für alle Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, die einem bestimmten, die Stelle $(0, \dots 0)$ umgebenden Bereich angehören, als ganze Functionen $G_1(u_1, \dots u_n), \dots G_n(u_1, \dots u_n)$ dargestellt werden. Bezeichnet man mit $G_\alpha^{(1)}(u_1, \dots u_n)$ die Summe der Glieder erster Ordnung in $G_\alpha(u_1, \dots u_n)$, so ist die Determinante der Functionen

$$G_1^{(1)}(u_1, \dots u_n), \dots G_n^{(1)}(u_1, \dots u_n)$$

nicht gleich Null, und man hat daher

$$(4.) \quad \begin{cases} u_1 = \sum_{\beta=1}^{\infty} c_{1,\beta} G_\beta^{(1)}(u_1, \dots u_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n = \sum_{\beta=1}^{n} c_{n,\beta} G_\beta^{(1)}(u_1, \dots u_n), \end{cases}$$

wo die $c_{\alpha,\beta}$ Constanten bezeichnen.

Gleichung würde dann besagen, dass $\varphi(v_1', \dots v_n')$ als Function von weniger als n Argumenten, und zwar so, dass diese lineare Functionen von $v_1', \dots v_n'$ sein würden, ausgedrückt werden könnte — was gegen die Annahme ist.

Setzt man also

$$\text{(5.)}\qquad \begin{cases} \overline{G}_\alpha(u_1, \dots u_n) = \sum\limits_{\beta=1}^{n} c_{\alpha,\beta}(G_\alpha^{(1)}(u_1, \dots u_n) - G_\alpha(u_1, \dots u_n)) \\ \overline{F}_\alpha(x) = \sum\limits_{\beta=1}^{n} c_{\alpha,\beta} F_\beta(x), \end{cases}$$

so gestalten sich die Gleichungen (2.) für die jetzt betrachteten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ um in die folgenden:

$$\text{(6.)}\qquad \begin{cases} u_1 = \overline{F}_1(x) + \overline{G}_1(u_1, \dots u_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = \overline{F}_n(x) + \overline{G}_n(u_1, \dots u_n), \end{cases}$$

in denen die Ausdrücke $\overline{G}_1, \dots \overline{G}_n$ nur Glieder zweiter und höherer Ordnung enthalten.

Aus diesen Gleichungen erhält man dann

$$\text{(7.)}\qquad k_{\alpha,1} = [\overline{F}_\alpha(x)]_x$$

und (für $\mu > 1$)

$$\text{(8.)}\qquad k_{\alpha,\mu} = [\overline{F}_\alpha(x)]_{x^\mu} + \left[\overline{G}_\alpha\left(\sum_{\nu=1}^{\mu-1} k_{1,\nu} x^\nu, \dots \sum_{\nu=1}^{\mu-1} k_{n,\nu} x^\nu\right)\right]_{x^\mu},$$

durch welche Formeln sämmtliche $k_{\alpha,\nu}$ gegeben werden. Hierbei ist noch Folgendes zu bemerken. Man hat (gemäss Gleichung (5.))

$$\text{(9.)}\qquad \begin{cases} F_1(x) = G_1^{(1)}(\overline{F}_1(x), \dots \overline{F}_n(x)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x) = G_n^{(1)}(\overline{F}_1(x), \dots \overline{F}_n(x)), \end{cases}$$

und kann daher statt $F_1(x), \dots F_n(x)$ auch die Functionen $\overline{F}_1(x), \dots \overline{F}_n(x)$ willkürlich — doch so, dass sie für $x = 0$ sämmtlich verschwinden — annehmen. Die Formeln (7.), (8.) lehren nun, dass es möglich ist, $\overline{F}_1(x), \dots \overline{F}_n(x)$ und somit auch $F_1(x), \dots F_n(x)$ als ganze Functionen n^{ten} Grades so zu bestimmen, dass jeder der Coefficienten

$$\begin{matrix} k_{1,1}, & \dots & k_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n,1}, & \dots & k_{n,n} \end{matrix}$$

einen vorgeschriebenen Werth erhält. Daraus folgt, dass unter den Coefficienten von $F_1(x), \dots F_n(x)$ eine bestimmte Relation bestehen muss, wenn die

Determinante

$$\begin{vmatrix} k_{1,1}, & \dots & k_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n,1}, & \dots & k_{n,n} \end{vmatrix}$$

gleich Null sein soll. Man darf daher im Folgenden voraussetzen, es seien $F_1(x), \dots F_n(x)$ ganze Functionen n^{ten} Grades, welche — ausserdem dass jede von ihnen für $x = 0$ verschwindet — so gewählt sind, dass erstens unter ihnen keine lineare Abhängigkeit besteht, und zweitens die vorstehende Determinante nicht gleich Null ist. Eine Folge der letzteren Bedingung ist dann, dass der Ausdruck

$$c_1 \psi_1(x) + \cdots + c_n \psi_n(x),$$

wenn $c_1, \dots c_n$ von x unabhängige Grössen und nicht sämmtlich gleich Null sind, niemals für jeden Werth von x verschwindet, d. h. dass auch unter den Functionen $\psi_1(x), \dots \psi_n(x)$ keine lineare Abhängigkeit besteht.

Aus diesen zunächst für einen beschränkten Bereich der Veränderlichen x definirten Functionen $\psi_1(x), \dots \psi_n(x)$ entspringt nun den Principien der Functionen-Theorie gemäss ein bestimmtes System analytischer Functionen, von dem sich zeigen lässt, dass es ein System Abelscher Integrale von der vorhin angegebenen Beschaffenheit ist.

§ 3.

Um dieses nachzuweisen, ersetze ich zunächst das System der Gleichungen (2.) des vorigen § durch ein anderes ihm äquivalentes. Man kann bei der vorausgesetzten Beschaffenheit der Functionen $F_1(x), \dots F_n(x)$ ein System von n^2 Constanten $h_{\alpha,\beta}$ so bestimmen, dass man

$$\text{(1.)}\qquad \begin{cases} x^n = \sum\limits_{\beta=1}^{n} h_{1,\beta} F_\beta(x) \\ x^{n-1} = \sum\limits_{\beta=1}^{n} h_{2,\beta} F_\beta(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x = \sum\limits_{\beta=1}^{n} h_{n,\beta} F_\beta(x) \end{cases}$$

hat. Setzt man dann

$$\text{(2.)}\qquad \mathfrak{F}_\alpha(u_1, \dots u_n) = \sum_{\beta=1}^{n} h_{\alpha,\beta} \varphi_\beta(u_1, \dots u_n), \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

so ergeben sich aus den genannten Gleichungen die folgenden:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_1(u_1, \dots u_n) - \mathfrak{F}_n^n(u_1, \dots u_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{F}_{n-1}(u_1, \dots u_n) - \mathfrak{F}_n^2(u_1, \dots u_n) = 0, \end{cases}$$

$$(4.)\qquad x = \mathfrak{F}_n(u_1, \dots u_n).$$

Umgekehrt erhält man aus diesen

$$\mathfrak{F}_\alpha(u_1, \dots u_n) = x^{n-\alpha+1} \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

und daher (gemäss (1.), (2.))

$$\sum_{\beta=1}^{n} h_{\alpha,\beta}(F_\beta(x) - \varphi_\beta(u_1, \dots u_n)) = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

und somit

$$F_\beta(x) - \varphi_\beta(u_1, \dots u_n) = 0, \qquad (\beta = 1, \dots n)$$

da

$$\begin{vmatrix} h_{1,1}, & \dots & h_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n,1}, & \dots & h_{n,n} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist. Das System der n Gleichungen (3.), (4.) ist also dem ursprünglichen ((2.), § 2) äquivalent.

Aus dem Grössengebiet $(u_1, \dots u_n)$ denke man sich nun zunächst alle diejenigen Stellen ausgeschieden, an welchen eine der Functionen

$$\varphi_1(u_1, \dots u_n), \; \dots \; \varphi_n(u_1, \dots u_n)$$

keinen bestimmten oder einen unendlich grossen Werth hat; aus den übrigen ferner die, an denen die oben mit $D(u_1, \dots u_n)$ bezeichnete Functional-Determinante verschwindet, und betrachte von den alsdann noch bleibenden alle diejenigen, welche die Gleichungen (3.) befriedigen. Die Gesammtheit dieser Stellen möge mit $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ bezeichnet werden. Ihr adjungire man von den ausgeschiedenen Stellen wieder diejenigen, denen Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ unendlich nahe liegen; das aus $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ und den hinzugefügten Stellen bestehende Gebilde möge dann das durch die Gleichungen (3.) definirte heissen und mit $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ bezeichnet werden.

In den Gleichungen (3.) des § 2 kann man die Veränderliche x durch Festsetzung einer oberen Grenze für ihren absoluten Betrag so beschränken, dass die durch diese Gleichungen definirten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ sämmt-

lich dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirke der dort mit

$$G_1(u_1, \dots u_n), \; \dots \; G_n(u_1, \dots u_n)$$

bezeichneten Entwickelungen von $\varphi_1(u_1, \dots u_n), \dots \varphi_n(u_1, \dots u_n)$ angehören, mithin für keins von ihnen eine dieser Functionen unendlich gross oder unbestimmt wird. Dann gehören diese Werthsysteme sämmtlich dem Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ an; denn sie befriedigen die Gleichungen (3.), und es kann $D(u_1, \dots u_n)$ nur für einzelne von ihnen verschwinden, denen dann aber andere, für welche dies nicht der Fall ist, unendlich nahe liegen. Dies genügt, um vorläufig zu zeigen, dass es im Gebiete der Grössen $(u_1, \dots u_n)$ ein Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$, wie es definirt worden, wirklich giebt.

Jetzt ist Folgendes zu beweisen.

Es sei $(a_1, \dots a_n)$ irgend eine bestimmte Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$, so lassen sich stets ganze Functionen (Potenzreihen) einer Veränderlichen t

$$\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t),$$

welche für $t = 0$ sämmtlich verschwinden, so bestimmen, dass die durch die Gleichungen

$$(5.)\qquad \begin{cases} u_1 = a_1 + \mathfrak{F}_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ u_n = a_n + \mathfrak{F}_n(t) \end{cases}$$

definirten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ sämmtlich ebenfalls zu dem in Rede stehenden Gebilde gehören; und zwar kann dies so geschehen, dass verschiedenen Werthen von t auch stets verschiedene Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ entsprechen. Wenn es sich ferner darum handelt, alle Stellen des Gebildes darzustellen, für welche die absoluten Beträge der Differenzen $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ sämmtlich unter einer vorgeschriebenen Grenze δ liegen, so reicht für diesen Zweck, wenn man nur δ hinlänglich klein annimmt, in jedem Falle eine beschränkte Anzahl solcher Gleichungssysteme aus, und insbesondere ein einziges, wenn $(a_1, \dots a_n)$ dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehört.

Es werde

$$\mathfrak{F}_\alpha(u_1, \dots u_n) - \mathfrak{F}_n^{n-\alpha+1}(u_1, \dots u_n) \;\text{ mit }\; F_\alpha(u_1, \dots u_n), \qquad (\alpha = 1, \dots n-1)$$
$$\mathfrak{F}_n(u_1, \dots u_n) \;\text{ mit }\; F_n(u_1, \dots u_n)$$

bezeichnet, so ist

$$\frac{\partial F_\alpha(u_1, \dots u_n)}{\partial u_\beta} = \frac{\partial \mathfrak{F}_\alpha}{\partial u_\beta} - (n-\alpha+1)\,\mathfrak{F}_n^{n-\alpha}\,\frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial u_\beta}, \qquad (\alpha = 1, \dots n-1)$$

und daher

$$(6.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = h.D(u_1, \dots u_n),$$

wo

$$h = \begin{vmatrix} h_{11}, & \dots & h_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n1}, & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wenn daher $(a_1, \dots a_n)$ dem Gebilde $\mathfrak{G}'$ angehört, welcher Fall zuerst betrachtet werde, so kann man n Constanten $c_1, \dots c_n$ so wählen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ nicht gleich Null ist, da sie der Gleichung (6.) zufolge nicht bei beliebigen Werthen von $c_1, \dots c_n$ verschwindet. Fügt man daher den Gleichungen

$$(7.)\qquad \begin{cases} F_1(u_1, \dots u_n) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_{n-1}(u_1, \dots u_n) = 0 \end{cases}$$

noch die folgende hinzu:

$$(8.)\qquad c_1(u_1 - a_1) + \dots + c_n(u_n - a_n) = t;$$

so kann man, da sich $F_1(u_1, \dots u_n), \dots F_{n-1}(u_1, \dots u_n)$ für hinlänglich kleine Werthe von $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ als ganze Functionen dieser Grössen darstellen lassen, nach einem bekannten Satze alle in einer bestimmten Umgebung (δ) der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ liegenden und die Gleichungen (3.) befriedigenden Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ in der unter (5.) angegebenen Form darstellen, und zugleich δ so klein annehmen, dass dieselben sämmtlich dem Gebilde $\mathfrak{G}'$ angehören.

Wenn ferner $(a_1, \dots a_n)$ eine der dem Gebilde $\mathfrak{G}'$ in der vorhin angegebenen Weise adjungirten Stellen ist, so lässt sich, wenn man

$$u_1 = a_1 + v_1, \quad \dots \quad u_n = a_n + v_n$$

setzt, jede der Functionen $F_\alpha(u_1, \dots u_n)$ auf die Form

$$\frac{G_\alpha(v_1, \dots v_n)}{\overline{G}_\alpha(v_1, \dots v_n)}$$

in der Art bringen, dass Zähler und Nenner dieses Bruches nicht einen an der Stelle $(v_1, \dots v_n) = (0, \dots 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler von derselben Form besitzen. Ist dann (bei einem bestimmten Werthe von α) $\overline{G}_\alpha(0, \dots 0)$ nicht gleich Null, so ist unmittelbar klar, dass an allen Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'$, welche in einer gewissen Umgebung (δ) von $(a_1, \dots a_n)$ liegen, $G_\alpha(v_1, \dots v_n) = 0$ sein muss. Da es nun in jeder Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ der Annahme nach solche Stellen giebt, so folgt, dass $G_\alpha(0, \dots 0) = 0$ ist. Ist aber $\overline{G}_\alpha(0, \dots 0) = 0$, so ergiebt sich aus dem in § 1 (Anmerkungen) Gesagten, dass bei hinlänglich kleinem Werthe von δ alle Stellen, an denen $\overline{G}_\alpha(v_1, \dots v_n)$ verschwindet, zu denjenigen singulären gehören, an welchen $F_\alpha(u_1, \dots u_n)$ unendlich gross oder unbestimmt ist. Diese sind vom Gebilde $\mathfrak{G}'$ ausgeschlossen; es muss also an den diesem Gebilde und der betrachteten Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ angehörenden Stellen $G_\alpha(v_1, \dots v_n)$ verschwinden; und da es solche Stellen unendlich nahe bei $(a_1, \dots a_n)$ wirklich giebt, so ist auch $G_\alpha(0, \dots 0) = 0$.

Man kann also δ so klein annehmen, dass an allen Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'$, welche in der Umgebung (δ) der betrachteten Stelle $(a_1, \dots a_n)$ liegen, die $(n-1)$ Gleichungen

$$(9.)\qquad G_1(v_1, \dots v_n) = 0, \quad \dots \quad G_{n-1}(v_1, \dots v_n) = 0$$

bestehen. Aber es lässt sich nicht umgekehrt behaupten, dass jede Stelle, für welche diese Gleichungen befriedigt werden, zu $\mathfrak{G}'$ gehöre. Nun kann aber, wie in den Elementen der Functionen-Theorie gezeigt wird, wenn irgend ein System von Gleichungen wie die vorstehenden, in denen

$$G_1(v_1, \dots v_n), \quad \dots \quad G_{n-1}(v_1, \dots v_n)$$

ganze, an der Stelle $(0, \dots 0)$ verschwindende Functionen von $v_1, \dots v_n$ sind, gegeben ist, dasselbe durch eine gewisse Anzahl anderer Systeme

$$(10.)\quad \begin{cases} G(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = w_{m+1}^{\mu} + G^{(1)}(w_1, \dots w_m)\, w_{m+1}^{\mu-1} + \cdots + G^{(\mu)}(w_1, \dots w_m) = 0 \\ G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) \,.\, w_{m+\nu} = \bar{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_m, w_{m+1}), \qquad (\nu = 2, \dots n-m) \end{cases}$$

wo $w_1, \dots w_n$ homogene und von einander unabhängige lineare Functionen der Grössen $v_1, \dots v_n$ bedeuten und

$$G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = \frac{\partial G(w_1, \dots w_m, w_{m+1})}{\partial w_{m+1}}$$

ist, in der Art ersetzt werden, dass nicht nur jedes den ursprünglichen Gleichungen genügende Werthsystem $(v_1, \dots v_n)$, in welchem jede der Grössen v ihrem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegt, auch *einem* der neuen Gleichungssysteme genügt, und zwar, *ohne dass in demselben* $G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = 0$ *ist*, sondern dies auch umgekehrt gilt. In Betreff der Anzahl der Gleichungssysteme, welche das ursprüngliche vertreten, so wie über die Grösse der Zahl m in jedem derselben lässt sich, so lange man von den Functionen $G_1(v_1, \dots v_n), \dots G_n(v_1, \dots v_n)$ nichts Weiteres weiss als dass sie die angegebene Form haben, durchaus nichts Näheres feststellen. Es unterscheiden sich aber diejenigen Werthsysteme $(v_1, \dots v_n)$, welche durch ein Gleichungssystem (10.), in dem $m > 1$ ist, geliefert werden, von den übrigen dadurch, dass für die erstern die Determinante

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial v_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

bei *willkürlichen* Werthen von $c_1, \dots c_n$ verschwindet. Es sei nämlich $(v_1', \dots v_n')$ irgend eins der in Rede stehenden Werthsysteme, so setze man in denjenigen Gleichungen von der Form (10.), durch welche dasselbe geliefert wird,

$$v_1' + k_1, \dots v_n' + k_n \quad \text{für} \quad v_1, \dots v_n,$$

so erhält man $(n-m)$ Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{G}_\beta(k_1, \dots k_n) = 0 \qquad (\beta = 1, \dots n-m).$$

Fügt man denselben noch die folgende hinzu:

$$c_1 k_1 + \cdots + c_n k_n = 0,$$

und bezeichnet mit $w_1', \dots w_n'$ die Werthe von $w_1, \dots w_n$ an der Stelle $(v_1', \dots v_n')$, mit $w_1' + h_1, \dots w_n' + h_n$ die Werthe derselben Grössen an der Stelle $(v_1' + k_1, \dots v_n' + k_n)$, so kann man, da $\mathfrak{G}_\beta(0, \dots 0) = 0$ ist, in jedem Falle, wo $m > 1$, Werthsysteme $(k_1, \dots k_n)$, in welchen die absoluten Beträge der einzelnen Grössen unter einer beliebig klein anzunehmenden Grenze liegen, ohne dass sie doch alle gleich Null sind, so bestimmen, dass die $(n-m+1)$ angegebenen Gleichungen befriedigt werden, aber $G'(w_1' + h_1, \dots w_n' + h_n)$ nicht gleich Null ist, da der Annahme nach $G'(w_1', \dots w_n')$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Dann werden auch die Gleichungen (9.) befriedigt, wenn man

$$v_1 = v_1' + k_1, \quad \dots \quad v_n = v_n' + k_n$$

setzt. Es lässt sich aber

$$G_\alpha(v_1' + k_1, \dots v_n' + k_n) \quad \text{auf die Form} \quad G_\alpha^{(1)} k_1 + \cdots + G_\alpha^{(n)} k_n$$

in der Art bringen, dass $G_\alpha^{(\beta)}$, wenn $k_1, \dots k_n$ sämmtlich gleich Null gesetzt werden, gleich dem Werthe von $\frac{\partial G_\alpha(v_1, \dots v_n)}{\partial v_\beta}$ an der Stelle $(v_1', \dots v_n')$ wird. Aus den Gleichungen

$$G_\alpha^{(1)} k_1 + \cdots + G_\alpha^{(n)} k_n = 0, \qquad (\alpha = 1, \dots n-1)$$
$$c_1 k_1 + \cdots + c_n k_n = 0$$

folgt dann, indem $k_1, \dots k_n$ nicht sämmtlich gleich Null sind,

$$\begin{vmatrix} G_1^{(1)}, & \dots & G_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{n-1}^{(1)}, & \dots & G_{n-1}^{(n)} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix} = 0.$$

Da es nun bei willkürlich angenommenen Werthen von $c_1, \dots c_n$ Werthsysteme $(k_1, \dots k_n)$ giebt, in denen jede einzelne Grösse beliebig klein ist, so folgt, dass auch

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial v_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix} = 0$$

sein muss an der Stelle $(v_1', \dots v_n')$; wie behauptet worden.

Für diejenigen Werthsysteme $(v_1, \dots v_n)$ aber, welche die obigen Gleichungen (9.) befriedigen und zugleich, wenn man

$$u_1 = a_1 + v_1, \quad \dots \quad u_n = a_n + v_n$$

setzt, Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ liefern, ist die vorstehende Determinante nicht gleich Null. Denn man hat

$$\frac{\partial F_\alpha(u_1, \dots u_n)}{\partial u_\beta} = \frac{1}{\overline{G}_\alpha} \frac{\partial G_\alpha}{\partial v_\beta} - \frac{G_\alpha}{\overline{G}_\alpha^2} \frac{\partial \overline{G}_\alpha}{\partial v_\beta},$$

also für die genannten Werthsysteme, für die $\overline{G}_\alpha$ nicht verschwindet,

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\beta} = \frac{1}{\overline{G}_\alpha} \frac{\partial G_\alpha}{\partial u_\beta},$$

so dass die fragliche Determinante gleich ist dem Producte aus $\overline{G}_1 \overline{G}_2 \dots \overline{G}_{n-1}$ und der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix},$$

von welcher gezeigt worden ist, dass sie an keiner Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}'$ bei beliebigen Werthen von $c_1, \dots c_n$ verschwindet.

Da nun in jeder Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ sich Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ finden, so ist aus dem Vorstehenden der Schluss zu ziehen, dass unter den Gleichungssystemen (10.), welche die Gleichungen (9.) ersetzen, eine gewisse Anzahl solcher, in denen $m = 1$ ist, und welche also die Form

$$(11.) \qquad \begin{cases} G(w_1, w_2) = w_2^\mu + G^{(1)}(w_1) w_2^{\mu-1} + \dots + G^{(\mu)}(w_1) = 0 \text{*)} \\ G'(w_1, w_2) w_{2+\nu} = \overline{G}(w_1, w_2) \qquad (\nu = 1, \dots n-2) \end{cases}$$

haben, bei hinlänglich klein angenommenem Werthe von δ sämmtliche Stellen $(u_1, \dots u_n)$, die dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehören und zugleich in der Umgebung (δ) der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ liegen, liefern.

*) Die Functionen $G^{(1)}(w_1), \dots G^{(\mu)}(w_1)$ verschwinden sämmtlich für $w_1 = 0$.

Nun lässt sich — für jede einzelne Gleichung $G(w_1, w_2) = 0$ — eine beschränkte Anzahl von Functionenpaaren

$$g_1(t) = k_1 t + k_2 t^2 + \cdots, \quad g_2(t) = l_1 t + l_2 t^2 + \cdots,$$

wo t eine neue Veränderliche bedeutet, so bestimmen, dass durch die Gleichungen

$$w_1 = g_1(t), \quad w_2 = g_2(t),$$

wenn man alle diese Functionenpaare anwendet, und der Grösse t jeden Werth beilegt, der dem absoluten Betrage nach eine bestimmte Grenze (τ) nicht überschreitet, *sämmtliche* der Gleichung $G(w_1, w_2) = 0$ genügenden Werthepaare (w_1, w_2) gegeben werden, unter der Bedingung, dass für den absoluten Betrag von w_1 sowohl als w_2 eine hinlänglich kleine obere Grenze (δ') festgesetzt werde. Zugleich kann man τ, δ' so klein wählen, dass man jedes einzelne Werthsystem (w_1, w_2) nur durch *ein* Functionenpaar $(g_1(t), g_2(t))$ und durch *einen* Werth von t erhält. Man erhält dann ferner für $w_3, \dots w_n$ durch die Gleichungen (11.) ähnliche Ausdrücke

$$w_3 = g_3(t), \quad \dots \quad w_n = g_n(t), \text{*)}$$

welche vollständig bestimmt sind, sobald man ein Functionenpaar $g_1(t), g_2(t)$, wenn überhaupt mehrere vorhanden sind, ausgewählt hat. Drückt man darauf $v_1, \dots v_n$ durch $w_1, \dots w_n$ aus, so ergiebt sich zur Darstellung sämmtlicher Werthsysteme $(v_1, \dots v_n)$, welche den Gleichungen

$$G_1(v_1, \dots v_n) = 0, \quad \dots \quad G_{n-1}(v_1, \dots v_n) = 0$$

unter der Bedingung genügen, dass für sie die Determinante Γ nicht stets verschwinde und für den absoluten Betrag einer jeden der Grössen v eine hinlänglich kleine Grenze (δ) festgesetzt werde, eine beschränkte Anzahl von Gleichungssystemen

$$(12.) \qquad v_1 = \mathfrak{F}_1(t), \quad \dots \quad v_n = \mathfrak{F}_n(t),$$

wo $\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t)$ dieselbe Gestalt wie $g_1(t)$ haben.

*) Es sind die Gleichungen (11.) so beschaffen, dass man aus ihnen für jede der Grössen $w_{2+\nu}$ eine Gleichung zwischen w_1 und $w_{2+\nu}$ von derselben Form, wie die für w_2 aufgestellte erhält. Mithin muss $w_{2+\nu}$ nothwendig gleichzeitig mit t verschwinden, und es kommen in $g_{2+\nu}(t)$ nur positive Potenzen von t vor.

Unter den so definirten Werthsystemen $(v_1, \dots v_n)$ müssen nun sämmtliche, denen Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ entsprechen, enthalten sein. Es giebt also mindestens ein Functionen-System

$$\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t)$$

von der Beschaffenheit, dass in keiner der Potenzreihen von t, in welche sich

$$\overline{G}_1(v_1, \dots v_n), \dots \overline{G}_{n-1}(v_1, \dots v_n)$$

durch die Substitution

$$v_1 = \mathfrak{F}_1(t), \quad \dots \quad v_n = \mathfrak{F}_n(t)$$

verwandeln, sämmtliche Coefficienten gleich Null werden. Denn träte dies für jedes System $(\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t))$ auch nur bei einer der Functionen $\overline{G}_\alpha$ ein, so würden von den jetzt betrachteten Werthsystemen $(u_1 = a_1 + v_1, \dots u_n = a_n + v_n)$ wenigstens alle diejenigen, bei denen der absolute Betrag von t eine gewisse Grenze nicht überschritte, nach dem bereits oben Bemerkten von dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ ausgeschlossen sein, so dass es in einer gewissen Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ gar keine diesem Gebilde angehörigen Stellen geben würde; was wider die Annahme ist. Für jedes Functionen-System $(\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t))$ von der angegebenen Beschaffenheit kann man nun durch Festsetzung einer oberen Grenze für den absoluten Betrag von t bewirken, dass jede der Functionen

$$\overline{G}_\alpha(\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t))$$

nur für $t = 0$ verschwindet. Folglich werden dann sämmtliche durch die Gleichungen

$$u_1 = a_1 + \mathfrak{F}_1(t), \quad \dots \quad u_n = a_n + \mathfrak{F}_n(t) \tag{13.}$$

definirten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ die obigen Gleichungen

$$F_1(u_1, \dots u_n) = 0, \quad \dots \quad F_{n-1}(u_1, \dots u_n) = 0$$

befriedigen.

Setzt man endlich die vorstehenden Ausdrücke von $(u_1, \dots u_n)$ in die Function $D(u_1, \dots u_n)$ ein, so lässt sich dieselbe in eine Potenzreihe von t verwandeln, deren Coefficienten wenigstens nicht für alle jetzt noch übrig gebliebenen Functionen-Systeme $(\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t))$ sämmtlich verschwinden

können; denn auch dies würde besagen, dass es in einer gewissen Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ keine dem Gebilde $\mathfrak{G}'$ angehörige Stelle $(u_1, \dots u_n)$ gäbe.

Für jedes System $(\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t))$, bei welchem die in Rede stehende Entwickelung von $D(u_1, \dots u_n)$ nicht identisch verschwindet, lässt sich nunmehr die Grenze für den absoluten Betrag von t so klein machen, dass

$$D(a_1 + \mathfrak{F}_1(t), \dots a_n + \mathfrak{F}_n(t))$$

nur für $t = 0$ verschwindet oder unendlich gross wird; und es geben dann bei jedem jetzt zulässigen Werth von t die Gleichungen (11.) wirklich ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges Werthsystem $(u_1, \dots u_n)$.

Hiermit ist also bewiesen:

A) Es giebt, wenn $(a_1, \dots a_n)$ eine beliebige bestimmte Stelle des durch die Gleichungen

$$F_1(u_1, \dots u_n) = 0, \quad \dots \quad F_{n-1}(u_1, \dots u_n) = 0$$

in der oben festgesetzten Weise definirten Gebildes $\mathfrak{G}(u_1, \dots u_n)$ ist, Systeme von je n ganzen Functionen einer Veränderlichen t

$$(\mathfrak{G}_1(t), \mathfrak{G}_2(t), \dots \mathfrak{G}_n(t)),$$

von denen jedes einzelne für jeden von Null verschiedenen Werth von t, dessen absoluter Betrag unterhalb einer bestimmten oberen Grenze (τ) liegt, ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges Werthsystem $(u_1, \dots u_n)$ darstellt, und für $t = 0$ das System $(a_1, \dots a_n)$ selbst. Dabei sind $\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t)$ so beschaffen, dass verschiedenen Werthen von t stets auch verschiedene Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ entsprechen, wenigstens, wenn die obere Grenze für den absoluten Betrag von t hinlänglich klein angenommen wird.

Ferner reicht man, um alle Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ zu erhalten, die in einer vorgeschriebenen Umgebung (δ) von $(a_1, \dots a_n)$ liegen, in jedem Falle mit einer beschränkten Anzahl solcher Functionen-Systeme $(\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t))$ aus, wofern nur δ klein genug angenommen wird, und namentlich mit einen einzigen, wenn $(a_1, \dots a_n)$ selbst dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehört.

Zusatz. Für die durch ein Functionen-System $(\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t))$ dargestellten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ lässt sich stets ein System von $(n-1)$

Gleichungen zwischen den Grössen

$$(u_1-a_1),\ \ldots\ (u_n-a_n)$$

aufstellen, welches *nur* durch sie befriedigt wird.

Es sei gt^ν das Anfangsglied in der Entwickelung von $\mathfrak{G}_1(t)-a_1$, so erhält man aus der Gleichung $u_1-a_1=\mathfrak{G}_1(t)-a_1$ die Grösse t als Potenzreihe von $\left(\frac{u_1-a_1}{g}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ ausgedrückt; es gehören also ν verschiedene Werthe von t zu demselben Werthe von u_1, also auch ν verschiedene Werthsysteme von $(u_2,\ldots u_n)$ zu demselben Werthe von u_1. Sind nun $c_2,\ldots c_n$ willkürliche Constanten, so lässt sich der Ausdruck

$$c_2(u_2-a_2)+\cdots+c_n(u_n-a_n),$$

der mit w bezeichnet werde, ebenfalls nach Potenzen von $\left(\frac{u_1-a_1}{g}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ entwickeln und zwar so, dass die Coefficienten dieser Entwickelung linear aus $c_2,\ldots c_n$ und rational aus den Coefficienten der Reihen

$$(\mathfrak{G}_1(t)-a_1),\ \ldots\ (\mathfrak{G}_n(t)-a_n)$$

zusammengesetzt werden. Man kann dann ferner die Grössen $c_2,\ldots c_n$ so wählen, dass unter den ν Werthen von w, die zu demselben Werthe von u_1 gehören, keine zwei gleiche sich finden.

Dieses vorausgesetzt, bezeichne man nun die ν Werthsysteme $(u_2,\ldots u_n)$, die zu einem und demselben (unbestimmten) Werthe von u_1 gehören, mit

$$\begin{matrix} u_2^{(1)},\ \ldots\ u_n^{(1)} \\ \cdots\cdots \\ u_2^{(\nu)},\ \ldots\ u_n^{(\nu)} \end{matrix}$$

und bilde, unter $s, s_2,\ldots s_n$ willkürliche, von u_1 unabhängige Grössen verstehend, das Product

$$\prod_{\lambda=1}^{\nu}\left(s-s_2(u_2^{(\lambda)}-a_2)-s_3(u_3^{(\lambda)}-a_3)\cdots-s_n(u_n^{(\lambda)}-a_n)\right).$$

Dasselbe ist eine homogene ganze Function von $s, s_2,\ldots s_n$, deren Coefficienten

Potenzreihen von (u_1-a_1) sind, und die mit $G(u_1-a_1, s, s_2,\ldots s_n)$ bezeichnet werden möge. Dann werden die ν Werthe von w durch die Gleichung

$$G(u_1-a_1, w, c_2,\ldots c_n) = 0$$

geliefert. Bezeichnet man ferner, unter der Voraussetzung dass $n>2$,

$$\frac{\partial G(u_1-a_1, s, s_2,\ldots s_n)}{\partial s} \quad \text{mit} \quad G'(u_1-a_1, s, s_2,\ldots s_n),$$

$$\frac{\partial G(u_1-a_1, s, s_2,\ldots s_n)}{\partial s_\mu} \quad \text{mit} \quad G^{(\mu)}(u_1-a_1, s, s_2,\ldots s_n), \qquad (\mu=2,\ldots n)$$

so ergiebt sich

$$G'(u_1-a_1, w, c_2,\ldots c_n).(u_\mu-a_\mu) = -G^{(\mu)}(u_1-a_1, w, c_2,\ldots c_n), \quad (\mu=2,\ldots n)$$

welche Gleichungen für jeden der ν Werthe von w das zugehörige Werthsystem $(u_2,\ldots u_n)$ liefern. Den Bruch

$$-\frac{G^{(\mu)}(u_1-a_1, w, c_2,\ldots c_n)}{G'(u_1-a_1, w, c_2,\ldots c_n)}$$

kann man mit Hülfe der Gleichung für w auf die Form

$$\frac{G_\mu(u_1-a_1, w)}{(u_1-a_1)^{m_\mu}}$$

bringen, wo G_μ eine ganze Function $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Grades von w, deren Coefficienten gewöhnliche Potenzreihen von u_1-a_1 sind, m_μ aber eine ganze Zahl bezeichnet.

Hiernach ergiebt sich also, wenn $n=2$ ist, *eine* Gleichung

$$G(u_1-a_1, u_2-a_2) = 0,$$

die in Beziehung auf u_2-a_2 vom ν^{ten} Grade ist, zwischen u_1, u_2 von der Beschaffenheit, dass dieselbe nicht nur befriedigt wird, wenn man

$$u_1=\mathfrak{G}_1(t),\quad u_2=\mathfrak{G}_2(t)$$

setzt — unter der Bedingung, dass der absolute Betrag von t unter einer gewissen Grenze bleibe —, sondern dass auch *alle* derselben genügenden Werthsysteme (u_1, u_2), bei denen die absoluten Beträge von u_1-a_1, u_2-a_2 unter einer gewissen Grenze δ liegen, durch das Functionen-Paar $(\mathfrak{G}_1(t), \mathfrak{G}_2(t))$ geliefert werden.

Ist $n > 2$, so nehme man ausser w noch $(n-2)$ andere homogene lineare Functionen $w', \dots w^{(n-2)}$ von $(u_2-a_2), \dots (u_n-a_n)$ so an, dass die letzteren Grössen durch $w, w', \dots w^{(n-2)}$ ausgedrückt werden können, so erhält man ein System von $(n-1)$ Gleichungen

$$\begin{gathered} w^{\nu}+G_1(u_1|a_1).w^{\nu-1}+\dots+G_{\nu}(u_1|a_1) = 0, \\ (u_1-a_1)^{m_1}w'-G_{1,1}(u_1|a_1).w^{\nu-1}-\dots-G_{1,\nu}(u_1|a_1) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (u_1-a_1)^{m_{n-2}}w^{(n-2)}-G_{n-2,1}(u_1|a_1).w^{\nu-1}-\dots-G_{n-2,\nu}(u_1|a_1) = 0, \end{gathered}$$

von der Beschaffenheit, dass das Functionen-System

$$\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t)$$

sämmtliche dieselben befriedigenden Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ liefert — unter der Voraussetzung, dass die absoluten Beträge von $(u_1-a_1), \dots (u_n-a_n)$ unter einer gewissen Grenze bleiben.

Aus dem Satz A) lässt sich noch eine wichtige Folgerung ziehen.

Angenommen nämlich, es seien für eine bestimmte Stelle $(a_1, \dots a_n)$ sämmtliche zur Darstellung der ihr benachbarten Stellen erforderlichen und hinreichenden Functionen-Systeme $(\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t))$ gegeben. Für jedes derselben hat der absolute Betrag von t eine obere Grenze τ; es sei τ_0 eine positive Grösse, die kleiner ist als die kleinste dieser Grössen τ, und es werde δ so klein gewählt, dass man alle in der Umgebung (δ) von $(a_1, \dots a_n)$ liegenden Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ erhält, wenn man t jeden Werth, dessen absoluter Betrag die Grenze τ_0 nicht überschreitet, giebt. Man nehme ferner in der genannten Umgebung eine bestimmte, von $(a_1, \dots a_n)$ verschiedene Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ willkürlich an, setze

$$t = p+qi,$$

unter p, q reelle, der Bedingung

$$p^2+q^2 \leqq \tau_0^2$$

genügende Grössen verstehend, und betrachte für jedes einzelne Functionen-

System die Summe aus den Quadraten der absoluten Beträge der Differenzen

$$(\mathfrak{G}_1(p+qi)-a'_1), \dots (\mathfrak{G}_n(p+qi)-a'_n).$$

Diese ist eine stetige Function von p, q, und hat also nicht nur eine untere Grenze (ε^2), die $\geqq 0$ ist, sondern es giebt auch unter den Grössenpaaren (p, q) mindestens eins (p_0, q_0), für welches diese Grenze wirklich erreicht wird. Ist dieselbe gleich Null, so sind auch

$$(\mathfrak{G}_1(p_0+q_0 i)-a'_1), \dots (\mathfrak{G}_n(p_0+q_0 i)-a'_n)$$

sämmtlich gleich Null; es gehört also $(a'_1, \dots a'_n)$ dem durch das betrachtete Functionen-System dargestellten Zweige des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ an. Ist aber ε von Null verschieden, so ist für jede Stelle dieses Zweiges wenigstens eine der Differenzen

$$u_1-a'_1, \dots u_n-a'_n$$

dem absoluten Betrage nach nicht kleiner als $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Man kann also eine Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ angeben, welche zugleich in der Umgebung (δ) von $(a_1, \dots a_n)$ liegt und keine dem genannten Zweige angehörige Stelle $(u_1, \dots u_n)$ enthält. Daraus folgt sofort, dass in dem Falle, wo $(a'_1, \dots a'_n)$ nicht zu dem in der Umgebung (δ) von $(a_1, \dots a_n)$ enthaltenen Theile des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ gehört, in einer gewissen Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ sich überhaupt keine Stelle von $\mathfrak{G}'$ findet, also auch $(a'_1, \dots a'_n)$ keine der diesem Gebilde adjungirten Stellen ist. Man hat also den Satz:

B) Ist $(a_1, \dots a_n)$ eine beliebige Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$, so finden sich in einer bestimmten Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ nur solche Stellen dieses Gebildes, die zu dem Gebilde $\mathfrak{G}'$ gehören.

C) Daraus folgt weiter, dass in einem ganz im Endlichen liegenden, im Übrigen beliebig weit ausgedehnten Theile des Grössengebiets $(u_1, \dots u_n)$ nur eine endliche Anzahl von Stellen, die dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ in der oben festgesetzten Weise adjungirt sind, und die fortan die singulären Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ genannt werden sollen, vorhanden sein können.

Denn gäbe es unendlich viele, so würde mindestens eine bestimmte Stelle $(a_1, \dots a_n)$ existiren, welche die Eigenthümlichkeit hätte, dass in jeder Umgebung derselben singuläre Stellen von $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$, und somit auch Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ vorhanden wären. Dann gehörte aber

$(a_1, \dots a_n)$ selbst dem ersteren Gebilde an, was nach dem vorhergehenden Satze mit jener Eigenthümlichkeit nicht verträglich ist.

Hieran knüpfen sich noch folgende Bemerkungen.

Es geht aus dem gegebenen Beweise des Satzes A) hervor, dass man von einem Functionen-System

$$(\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t))$$

nur zu wissen braucht, dass es in jeder Umgebung der Stelle $(t = 0)$ einen von Null verschiedenen Werth von t giebt, für den das System eine Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ darstellt, um sicher zu sein, dass es diese Eigenschaft für jeden von Null verschiedenen Werth von t, dessen absoluter Betrag unter einer bestimmten Grenze liegt, besitzt.*)

D) Daraus lässt sich weiter folgern, dass ein solches System für jeden Werth von t, der dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk (T) der Entwickelungen von $\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t)$ angehört, eine Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ giebt.

Denn es sei t_0 irgend einer dieser Werthe von t, ϱ eine reelle und positive

---

*) Setzt man nämlich

$$a_1 = \mathfrak{G}_1(0), \;\dots\; a_n = \mathfrak{G}_n(0),$$
$$v_1 = \mathfrak{G}_1(t) - \mathfrak{G}_1(0), \;\dots\; v_n = \mathfrak{G}_n(t) - \mathfrak{G}_n(0)$$

und bringt, wie oben, $F_\alpha(u_1, \dots u_n)$ auf die Form

$$\frac{G_\alpha(v_1, \dots v_n)}{\overline{G}_\alpha(v_1, \dots v_n)},$$

so können unter der gemachten Voraussetzung in der Entwickelung von $\overline{G}_\alpha(v_1, \dots v_n)$ nach Potenzen von t nicht alle Coefficienten gleich Null sein, dagegen müssen die Coefficienten der Entwickelung von $G_\alpha(v_1, \dots v_n)$ sämmtlich verschwinden. Man kann daher für den absoluten Betrag von t eine obere Grenze so feststellen, dass für jeden alsdann zulässigen von Null verschiedenen Werth von t jede der Functionen $G_\alpha(v_1, \dots v_n)$, von den $\overline{G}_\alpha(v_1, \dots v_n)$ aber keine verschwindet, so dass also die Gleichungen

$$F_2(u_1, \dots u_n) = 0, \;\dots\; F_n(u_1, \dots u_n) = 0$$

alle befriedigt werden, wenn man

$$u_1 = \mathfrak{G}_1(t), \;\dots\; u_n = \mathfrak{G}_n(t)$$

setzt. In der Entwickelung von $D(a_1 + v_1, \dots a_n + v_n)$ nach Potenzen von t ferner können nicht alle Coefficienten den Werth Null haben; man kann also die obere Grenze für den absoluten Betrag von t auch so festsetzen, dass $D(a_1 + v_1, \dots a_n + v_n)$ nur für $t = 0$ verschwindet. Alsdann liefern die vorstehenden Gleichungen für jeden von Null verschiedenen Werth, den die Veränderliche t jetzt annehmen kann, eine Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$.

Veränderliche, so ist

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho t_0), \dots \mathfrak{G}_n(\varrho t_0))$$

stets ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges Werthsystem, wenn ϱ kleiner als eine bestimmte Grösse ϱ_0 angenommen wird. Für den Fall, dass $\varrho_0 < 1$, setze man

$$\varrho = \varrho_0 + \sigma,$$

so kann man $\mathfrak{G}_\alpha(\varrho_0 t_0 + \sigma t_0)$ als ganze Function von σ darstellen, die mit $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha(\sigma)$ bezeichnet werden möge. Dann ist

$$(\overline{\mathfrak{G}}_1(\sigma), \dots \overline{\mathfrak{G}}_n(\sigma))$$

für jeden, seinem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegenden negativen Werth von σ ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges Werthsystem, und somit auch für jeden positiven Werth von σ bis zu einer bestimmten Grenze hin. Es ist also

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho t_0), \dots \mathfrak{G}_n(\varrho t_0))$$

auch für jeden Werth von ϱ, der grösser als ϱ_0 und kleiner als eine bestimmte Grösse ϱ_1 ist, ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges und

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho_0 t_0), \dots \mathfrak{G}_n(\varrho_0 t_0))$$

ein demselben adjungirtes Werthsystem. Wenn nun auch $\varrho_1 < 1$, so lässt sich auf dieselbe Weise zeigen, dass

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho t_0), \dots \mathfrak{G}_n(\varrho t_0))$$

auch für jeden Werth von ϱ, der grösser als ϱ_1 und kleiner als eine bestimmte Grösse ϱ_2 ist, ein zu $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ gehöriges, und für $\varrho = \varrho_1$ ein demselben adjungirtes Werthsystem ist. So fortfahrend, wenn auch ϱ_2 noch < 1, zeigt man, dass es eine Reihe bestimmter positiver Werthe $(\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots)$ der Veränderlichen ϱ giebt, die so liegen, dass

$$\varrho_0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \dots,$$

und dass für jeden innerhalb eines der Intervalle

$$0 \dots \varrho_0, \;\; \varrho_0 \dots \varrho_1, \;\; \varrho_1 \dots \varrho_2, \;\; \dots$$

enthaltenen Werth von ϱ

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho t_0), \dots \mathfrak{G}_n(\varrho t_0))$$

ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges, für $\varrho = \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots$ aber ein demselben adjungirtes Werthsystem ist. Da aber t_0 innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirkes der Functionen $\mathfrak{G}_\alpha(t)$ angenommen ist, so sind alle Werthsysteme

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho t_0), \dots \mathfrak{G}_n(\varrho t_0)),$$

wenn ϱ zwischen 0 und 1 angenommen wird, in einem ganz im Endlichen liegenden Theile des Grössengebiets $(u_1, \dots u_n)$ enthalten, und es giebt unter ihnen also nur eine endliche Anzahl solcher, die dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ adjungirt sind. Daher muss sich in der Reihe der Grössen $0, \varrho_0, \varrho_1, \dots$ nothwendig eine finden, die $\geqq 1$, während die vorhergehende < 1 ist; und dann ist

$$(\mathfrak{G}_1(t_0), \dots \mathfrak{G}_n(t_0))$$

in jedem Falle ein dem Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ angehöriges Werthsystem; womit der aufgestellte Satz bewiesen ist.

E) Aus jedem Functionen-System

$$(\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t))$$

von der im Satze A) angegebenen Beschaffenheit, von dem also jetzt feststeht, dass es für jeden Werth von t innerhalb T eins der durch die Gleichungen

$$F_1(u_1, \dots u_n) = 0, \quad \dots \quad F_{n-1}(u_1, \dots u_n) = 0$$

definirten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ liefert, lassen sich ferner unendlich viele, welche dieselbe Eigenschaft besitzen, in folgender Weise ableiten.

Man nehme in T einen bestimmten Werth (t_0) von t willkürlich an, setze $t = t_0 + t'$, und verwandle jede Function $\mathfrak{G}_\alpha(t_0 + t')$ in eine nach Potenzen von t' entwickelte $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha(t')$. Dann ist auch

$$(\overline{\mathfrak{G}}_1(t'), \dots \overline{\mathfrak{G}}_n(t'))$$

ein Functionen-System, welches nach dem vorhergehenden Satze für jeden Werth von t' innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Functionen $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha(t')$ eine Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ darstellt, indem für alle die-

jenigen Werthe von t', für welche $t_0 + t'$ in T liegt,

$$\overline{\mathfrak{G}}_1(t') = \mathfrak{G}_1(t_0 + t'), \quad \dots \quad \overline{\mathfrak{G}}_n(t') = \mathfrak{G}_n(t_0 + t')$$

ist. Substituirt man sodann für t' eine beliebige ganze Function einer neuen Veränderlichen t_1, mit der Bedingung, dass für $t_1 = 0$ diese Function verschwinde, ihre erste Ableitung aber nicht, und verwandelt $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha(t')$ in eine nach ganzen Potenzen von t_1 entwickelte Function $\overset{1}{\mathfrak{G}}_\alpha(t_1)$, so hat auch das Functionen-System

$$(\overset{1}{\mathfrak{G}}_1(t_1), \dots \overset{1}{\mathfrak{G}}_n(t_1))$$

die Eigenschaft, dass es in derselben Weise wie das ursprüngliche einen Zweig (ein Element) des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ darstellt.

Aus dem so erhaltenen Functionen-System kann man dann in gleicher Weise ein neues

$$\overset{2}{\mathfrak{G}}_1(t_2), \dots \overset{2}{\mathfrak{G}}_n(t_2)$$

von derselben Beschaffenheit ableiten, u. s. f.

Alle so sich ergebenden Functionen-Systeme stehen nun in einem solchen Zusammenhange, dass man aus jedem einzelnen, wenn man in der beschriebenen Weise verfährt, jedes andere erhalten kann; sie bilden deshalb ein in sich abgeschlossenes Ganzes, und die Gesammtheit der durch sie gelieferten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ ist — nach dem von mir in den Vorlesungen gebrauchten Ausdrucke — ein monogenes Gebilde erster Stufe in dem Grössengebiet $[u_1, \dots u_n]$.

Übrigens kann, so lange man von den Functionen $F_1(u_1, \dots u_n), \dots F_{n-1}(u_1, \dots u_n)$ nichts anderes in Betracht zieht als dass sie den in § 1 unter (1.) angegebenen analytischen Charakter haben, nicht behauptet werden, dass das ganze durch die Gleichungen

$$F_1(u_1, \dots u_n) = 0, \quad \dots \quad F_{n-1}(u_1, \dots u_n) = 0$$

definirte Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ ein monogenes Gebilde sei; es kann vielmehr dasselbe aus mehreren monogenen Gebilden, vielleicht aus unendlich vielen*) bestehen.

*) Für die hier betrachteten $2n$-fach periodischen Functionen $F_1, \dots F_{n-1}$ kann gezeigt werden, dass $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ aus einer beschränkten Anzahl monogener Gebilde zusammengesetzt ist.

Die unter A) bis E) aufgestellten Sätze behalten nämlich ihre volle Gültigkeit, wenn man unter

$$F_1(u_1, \dots u_n), \quad \dots \quad F_{n-1}(u_1, \dots u_n)$$

ein System von $(n-1)$ eindeutigen Functionen von dem in Rede stehenden analytischen Charakter versteht, und von denselben nur weiss, dass sie an irgend einer bestimmten Stelle sämmtlich verschwinden, während die Determinante

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

an derselben Stelle nicht bei beliebigen Werthen von $c_1, \dots c_n$ gleich Null ist. Man hat dann das Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ in ganz ähnlicher Weise wie oben dadurch zu definiren, dass man aus der Gesammtheit der Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ zunächst diejenigen ausscheidet, welche für eine oder mehrere der Functionen F die Grenzstellen bilden — deren Gesammtheit man als die Grenzstellen des Functionen-Systems $F_1(u_1, \dots u_n), \dots F_{n-1}(u_1, \dots u_n)$ bezeichnen kann —, und dann von den übrigen nur diejenigen beibehält, für welche $F_1, \dots F_{n-1}$ sämmtlich den Werth Null haben, ohne dass zugleich die Determinante Γ bei beliebigen Werthen von $c_1, \dots c_n$ verschwindet. Das so definirte Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ ist dann ganz so wie oben zum Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ zu ergänzen. Das Letztere ist nur vollständig charakterisirt, wenn man sagt, dass es aus einem oder mehreren monogenen Gebilden erster Stufe bestehe. Es können aber leicht Beispiele dafür angegeben werden, dass die Anzahl dieser monogenen Gebilde auch unendlich gross sein kann.*)

Anmerkung. Die im Vorstehenden enthaltene ausführliche Erörterung, durch welche dargelegt wird, unter welchen Bedingungen und in welcher

*) Nimmt man z. B. $n = 3$, $F_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$, $F_2 = \sin(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)\pi$, wo die a, b Constanten bedeuten, so besteht $\mathfrak{G}[u_1, u_2, u_3]$ aus den unendlich vielen monogenen Gebilden, welche durch die Gleichungen

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0, \quad b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 = m,$$

in denen m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, definirt werden.

Weise durch $(n-1)$ Gleichungen der betrachteten Art zwischen n Veränderlichen, von denen jede einzelne, für sich betrachtet, jeden beliebigen (complexen) Werth annehmen kann, ein analytisches Gebilde erster Stufe definirt wird, durfte hier nicht fehlen, weil die Resultate derselben für das Folgende erforderlich, bis jetzt aber meines Wissens noch nicht genügend und vollständig festgestellt worden sind. Die Existenz der Grenzstellen für Functionen mehrerer Veränderlichen, sowie der Umstand, dass durch $(n-1)$ Gleichungen der in Rede stehenden Art neben einem Gebilde erster Stufe auch noch Gebilde einer höhern Stufe definirt werden können, sobald die Anzahl der Veränderlichen grösser als 2 ist, machten es nothwendig, zunächst das im Vorhergehenden mit $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ bezeichnete Gebilde bestimmt zu definiren, und dann zu zeigen, wie dasselbe durch Adjungirung singulärer Stellen, die in jedem Bereiche von endlicher Ausdehnung nur in beschränkter Anzahl vorhanden sind, zu einem vollständigen analytischen Gebilde ergänzt werden kann. Das Erstere ist so geschehen, dass, wenn $(a_1, \dots a_n)$ irgend eine bestimmte Stelle in $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ ist, alle übrigen, für welche die absoluten Beträge von $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ eine vorgeschriebene Grenze nicht erreichen sollen, wofern diese hinlänglich klein angenommen wird, durch ein reguläres*) System von $(n-1)$ Gleichungen zwischen den Differenzen $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ gegeben werden.

Die dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ zu adjungirenden singulären Stellen sind ferner als solche definirt, denen Stellen dieses Gebildes unendlich nahe liegen.

*) Sind $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_m(x_1, \dots x_n)$ ganze Functionen von $x_1, \dots x_n$, welche an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ sämmtlich verschwinden, und bezeichnet man mit $g_\alpha(x_1, \dots x_n)$ die Summe aller Glieder erster Ordnung in $G_\alpha(x_1, \dots x_n)$, so ist, $m < n$ vorausgesetzt, das Gleichungs-System

$$G_1(x_1, \dots x_n) = 0, \quad \dots \quad G_m(x_1, \dots x_n) = 0$$

ein reguläres, wenn sich $(n-m)$ lineare Functionen $g_{m+1}(x_1, \dots x_n), \dots g_n(x_1, \dots x_n)$ so bestimmen lassen, dass die Determinante von $g_1(x_1, \dots x_n), \dots g_n(x_1, \dots x_n)$ nicht gleich Null ist. Setzt man dann

$$g_{m+1}(x_1, \dots x_n) = t_1, \quad \dots \quad g_n(x_1, \dots x_n) = t_{n-m},$$

so giebt es n völlig bestimmte Functionen

$$\mathfrak{G}_1(t_1, \dots t_{n-m}), \dots \mathfrak{G}_n(t_1, \dots t_{n-m}),$$

durch welche, wenn man für $(t_1, \dots t_{n-m})$ alle dem Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks von $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_n$ angehörigen Werthsysteme, und $x_1 = \mathfrak{G}_1(t_1, \dots t_{n-m}), \dots x_n = \mathfrak{G}_n(t_1, \dots t_{n-m})$ setzt, sämmtliche den gegebenen Gleichungen genügende Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$, in denen der absolute Betrag jeder einzelnen Grösse unter einer gewissen Grenze liegt, geliefert werden.

Dies war hier zulässig, weil sich aus der angenommenen Beschaffenheit der Functionen F sofort ergiebt, dass sämmtliche Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'$, welche in einer gewissen Umgebung einer in der angegebenen Weise definirten singulären Stelle $(a_1, \dots a_n)$ liegen, einem Systeme von $(n-1)$ von einander unabhängigen Gleichungen*)

$$G_1(v_1, \dots v_n) = 0, \quad \dots \quad G_{n-1}(v_1, \dots v_n) = 0,$$

in denen $v_1, \dots v_n$ die Differenzen $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ bezeichnen, genügen müssen. Die Existenz dieser Gleichungen ist das Wesentliche, während es im Allgemeinen unstatthaft sein würde, einem monogenen Gebilde irgend einer Stufe in dem Grössengebiet, dem es angehört, jede Stelle zu adjungiren, von der sich zeigen lässt, dass ihr Stellen jenes Gebildes unendlich nahe liegen. In der That giebt es schon im Gebiete zweier Veränderlichen u_1, u_2 monogene Gebilde (erster Stufe), welche die Eigenthümlichkeit besitzen, dass in jeder Umgebung einer ganz beliebig angenommenen Stelle (a_1, a_2) sich

*) Solche $(n-1)$ Gleichungen heissen unabhängig von einander, wenn es in jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ Werthsysteme $(v_1, \dots v_n)$ giebt, die sämmtliche Gleichungen befriedigen, ohne dass gleichzeitig die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial v_n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

bei beliebigen Werthen von $c_1, \dots c_n$ verschwindet. Setzt man, wenn $(v_1', \dots v_n')$ irgend ein derartiges Werthsystem ist,

$$v_1 = v_1' + w_1, \quad \dots \quad v_n = v_n' + w_n,$$

und verwandelt $G_\alpha(v_1, \dots v_n)$ in eine ganze Function $\overline{G}_\alpha(w_1, \dots w_n)$, so ist

$$\overline{G}_1(w_1, \dots w_n) = 0, \quad \dots \quad \overline{G}_{n-1}(w_1, \dots w_n) = 0$$

ein reguläres Gleichungssystem, das ich ein aus dem gegebenen abgeleitetes nenne.

Ebenso heissen $(n-r)$ Gleichungen

$$G_1(v_1, \dots v_n) = 0, \quad \dots \quad G_{n-r}(v_1, \dots v_n) = 0$$

unabhängig von einander, wenn es in jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ Werthsysteme $(v_1', \dots v_n')$ giebt, die sämmtliche Gleichungen befriedigen und zugleich, wenn man

$$v_\alpha = v_\alpha' + w_\alpha, \quad G_\alpha(v_1' + w_1, \dots v_n' + w_n) = \overline{G}_\alpha(w_1, \dots w_n)$$

setzt, zu einem regulären Gleichungssystem

$$\overline{G}_1(w_1, \dots w_n) = 0, \quad \dots \quad \overline{G}_{n-r}(w_1, \dots w_n) = 0$$

führen.

Stellen des Gebildes finden. Diesem aber jede beliebige Stelle zu adjungiren würde keinen Sinn haben.

Um ein monogenes Gebilde erster, zweiter u. s. w. bis $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe in einem Gebiete von n unbeschränkt veränderlichen Grössen $(u_1, \dots u_n)$ auf die allgemeinste Weise vollständig zu definiren, hat man Folgendes zu beachten:

Wenn irgend ein System von r Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad G_1(v_1, \dots v_n) = 0, \quad \dots \quad G_r(v_1, \dots v_n) = 0$$

gegeben ist (wo die Ausdrücke auf der Linken wieder ganze Functionen, die an der Stelle $(v_1 = 0, \dots v_n = 0)$ sämmtlich verschwinden, bedeuten), so kann dasselbe, wofern es in jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ andere Stellen $(v_1, \dots v_n)$ giebt, für die sämmtliche Gleichungen befriedigt werden (wie dies immer der Fall ist, sobald $r < n$), ganz in derselben Weise, wie das im Vorstehenden (Gleichungen (9.)) betrachtete, durch eine gewisse Anzahl anderer Systeme:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} G(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = w_{m+1}^\mu + G^{(1)}(w_1, \dots w_m) . w_{m+1}^{\mu-1} + \dots + G^{(\mu)}(w_1, \dots w_m) = 0 \\ G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) . w_{m+\nu} = \overline{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) \qquad (\nu = 2, \dots n-m) \end{cases}$$

(wo $w_1, \dots w_n$ wieder homogene und von einander unabhängige lineare Functionen der Grössen $v_1, \dots v_n$ bedeuten) in der Art ersetzt werden, dass nicht nur jedes die ursprünglichen Gleichungen befriedigende Werthsystem $(v_1, \dots v_n)$, in welchem jede der Grössen v ihrem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze (δ) liegt, auch einem der Gleichungssysteme (B) genügt, und zwar, ohne dass in demselben $G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1})$ gleich Null ist; sondern dass dies auch umgekehrt gilt. Dabei darf angenommen werden, dass die Function $G(w_1, \dots w_m, w_{m+1})$ unzerlegbar, d. h. nicht als Product zweier Factoren von derselben Gestalt darstellbar sei, so dass jedes der Gleichungssysteme (B.) ein irreductibeles ist. Ferner sind in jedem dieser Systeme die Functionen $\overline{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_{m+1})$ so beschaffen, dass der Quotient

$$\frac{\overline{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_m, w_{m+1})}{G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1})},$$

wenn $w_1, \dots w_m, w_{m+1}$ der Gleichung $G(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = 0$ genügen, stets einen endlichen Werth hat, der unendlich klein wird, wenn $w_1, \dots w_m$ alle unendlich klein werden. Eine Folge hiervon ist, dass zwischen $w_1, \dots w_m$ und jeder der Grössen $w_{m+\nu}$ eine Gleichung von derselben Form wie zwischen $w_1, \dots w_m$ und w_{m+1} besteht.

Bezeichnet man ferner mit

$$\begin{gathered}(w'_{m+1}, \dots w'_n)\\(w''_{m+1}, \dots w''_n)\\ \dots\dots\dots \\(w^{(\mu)}_{m+1}, \dots w^{(\mu)}_n)\end{gathered}$$

die verschiedenen Werthsysteme der Grössen $w_{m+1}, \dots w_n$, welche zu demselben Werthsystem $(w_1, \dots w_m)$ gehören, und setzt, unter $(s, s_1, \dots s_{n-m})$ unbestimmte Grössen verstehend,

$$\prod_{\lambda=1}^{\mu}(s + w^{(\lambda)}_{m+1}s_1 \dots + w^{(\lambda)}_n s_{n-m}) = R(s, s_1, \dots s_{n-m}; w_1, \dots w_m),$$

so ist R eine ganze homogene Function μ^{ten} Grades von $s, s_1, \dots s_{n-m}$, deren Coefficienten ganze Functionen von $w_1, \dots w_m$ sind und an der Stelle $(w_1 = 0, \dots w_m = 0)$ sämmtlich verschwinden. Dieser Ausdruck R, als Function von $s, s_1, \dots s_{n-m}$ betrachtet, behält nun die Eigenschaft, als Product von μ linearen Functionen dieser Grössen darstellbar zu sein, auch dann noch, wenn den $w_1, \dots w_m$ solche Werthe gegeben werden, für welche die Discriminante der Gleichung

$$G(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = 0$$

verschwindet; es finden sich alsdann aber unter jenen Factoren gleiche. Dies vorausgesetzt, sei $(\overline{w}_1, \dots \overline{w}_m)$ eines der Werthsysteme $(w_1, \dots w_m)$, für welche die genannte Discriminante verschwindet, und

$$s + \overline{w}_{m+1}s_1 \dots + \overline{w}_n s_{n-m}$$

einer der Factoren von $R(s, s_1, \dots s_{n-m}; \overline{w}_1, \dots \overline{w}_m)$, und zwar ein $\mu_1$mal vorkommender; so giebt es, wenn man unendlich nahe der Stelle $(\overline{w}_1, \dots \overline{w}_m)$ eine andere $(w_1, \dots w_m)$ annimmt, an der jene Discriminante von Null verschieden ist, unter den zugehörigen, durch die Gleichungen

$$\text{(C)} \qquad G(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = 0, \quad w_{m+\nu} = \frac{\overline{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_m, w_{m+1})}{G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1})} \quad (\nu = 2, \dots n-m)$$

gelieferten Werthsystemen $(w_{m+1}, \dots w_n)$ genau μ_1 solche, für welche die

Differenzen

$$(w_{m+1} - \overline{w}_{m+1}), \dots (w_n - \overline{w}_n)$$

sämmtlich unendlich klein sind. Aus diesem Grunde sind alle Werthsysteme $(\overline{w}_1, \dots \overline{w}_n)$ den durch die vorstehenden Gleichungen unmittelbar gegebenen, in denen die $w_{m+\nu}$ nicht unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, zu adjungiren,*) und bilden im Verein mit diesen die Gesammtheit der durch das Gleichungssystem (C) definirten Werthsysteme $(w_1, \dots w_n)$, in denen jetzt die $w_1, \dots w_m$ keiner anderen Beschränkung unterworfen sind als dass sie dem Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Ausdrücke $G(w_1, \dots w_{m+1})$, $\overline{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_{m+1})$ angehören müssen.

Da nun das Gleichungssystem (A), so lange es sich nur darum handelt, alle demselben genügenden Werthsysteme $(v_1, \dots v_n)$, in denen der absolute Betrag jeder einzelnen Grösse unter einer beliebig klein anzunehmenden Grenze liegt, zu erhalten, durch eine gewisse Anzahl von Gleichungssystemen von der Form (C) vertreten werden kann; so genügt es nicht nur, ausschliesslich die letzteren zu betrachten, sondern dies ist ebenso nothwendig, wie man z. B. bei der Untersuchung einer algebraischen Gleichung zwischen mehreren veränderlichen Grössen, wenn dieselbe reductibel ist, sie durch mehrere irreductibele ersetzen muss.

Demgemäss gebe ich nun folgende Definitionen. Es werde zunächst zwischen $(m+1)$ Grössen, die jetzt mit $t_1, \dots t_{m+1}$ bezeichnet werden mögen, eine Gleichung von der Form

$$(\alpha) \qquad G(t_1, \dots t_m, t_{m+1}) = t^{\mu}_{m+1} + G^{(1)}(t_1, \dots t_m) . t^{\mu-1}_{m+1} + \dots + G^{(\mu)}(t_1, \dots t_m) = 0,$$

in der die $G^{(\nu)}(t_1, \dots t_m)$ ganze, an der Stelle $(t_1 = 0, \dots t_m = 0)$ verschwindende Functionen sind, willkürlich angenommen, mit der einzigen Beschränkung, dass sie irreductibel sei, d. h. dass sich $G(t_1, \dots t_m, t_{m+1})$ nicht als Product zweier anderen Functionen von derselben Gestalt darstellen lasse. Dann kann man unendlich viele Functionen rationalen Charakters von $t_1, \dots t_{m+1}$ so bestimmen, dass sie, wenn $t_1, \dots t_{m+1}$ die Gleichung (α) befriedigen, stets end-

*) Dabei ist jedoch zu bemerken, dass diese Werthsysteme $(\overline{w}_1, \dots \overline{w}_m)$ sich auch durch Gleichungssysteme von derselben Form wie das vorstehende, in denen aber an die Stelle von m eine kleinere Zahl tritt, bestimmen lassen, und dass diese in der Gesammtheit derer, durch welche die ursprünglichen Gleichungen unter den Grössen v ersetzt werden können, mit enthalten sind.

liche Werthe haben und gleichzeitig mit $t_1, \dots t_m$ unendlich klein werden. Jede solche Function hat aber die Gestalt

$$\frac{\overline{G}(t_1, \dots t_m, t_{m+1})}{G'(t_1, \dots t_m, t_{m+1})},$$

wo der Nenner die Ableitung von $G(t_1, \dots t_m, t_{m+1})$ nach t_{m+1} ist und man annehmen kann, dass im Zähler t_{m+1} in keiner höhern als der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Potenz vorkomme. Setzt man dann, $(n-m-1)$ solche Functionen $\overline{G}$ beliebig auswählend,

$$(\beta) \qquad t_{m+\nu} = \frac{\overline{G}^{(\nu)}(t_1, \dots t_m, t_{m+1})}{G'(t_1, \dots t_m, t_{m+1})} \qquad (\nu = 2, \dots n-m),$$

und, unter $a_1, \dots a_n$ willkürlich anzunehmende Constanten verstehend,

$$(\gamma) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 - a_1 = c_{11} t_1 + \cdots + c_{1n} t_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n - a_n = c_{n1} t_1 + \cdots + c_{nn} t_n, \end{array} \right.$$

wo auch die $c_{11}, \dots c_{nn}$ Constanten bedeuten, die so gewählt werden müssen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}, & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist: so nenne ich die Gesammtheit der Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, die den durch das System der Gleichungen (α), (β) in der vorhin angegebenen Weise definirten Werthsystemen $(t_1, \dots t_n)$ entsprechen, ein »Element« eines Gebildes m^{ter} Stufe im Gebiete der Grössen $(u_1, \dots u_n)$, und bezeichne ein solches Element durch

$$\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n \,|\, a_1, \dots a_n]_m.$$

Dabei ist zu bemerken, dass von den Grössen $a_1, \dots a_n$ beliebig viele auch den Werth ∞ haben können, wenn man nur im Falle, dass $a_\alpha = \infty$, unter dem Zeichen $(u_\alpha - a_\alpha)$ die für $u_\alpha = \infty$ verschwindende Function $\frac{1}{u_\alpha}$ versteht.

Wenn $\mu = 1$, so werden alle Grössen $u_1, \dots u_n$ ganze Functionen von $t_1, \dots t_m$; ferner fällt, wenn $m = n-1$, das System der Gleichungen (β) fort.

Sind nun zwei solche Elemente gegeben:

$$\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n \,|\, a_1, \dots a_n]_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}^{(1)}[u_1, \dots u_n \,|\, b_1, \dots b_n]_m,$$

und sind dieselben so beschaffen, dass in einer gewissen Umgebung einer Stelle $(c_1, \dots c_n)$ jede Stelle des einen Gebildes auch dem andern angehört, so sage ich, die beiden Elemente coincidiren in der Umgebung von $(c_1, \dots c_n)$, und nenne dann jedes Element eine Fortsetzung des andern, insofern es Stellen enthält, die diesem nicht angehören.

Sind ferner beliebig viele Elemente

$$\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n \,|\, a_1, \dots a_n]_m, \quad \mathfrak{G}^{(1)}[u_1, \dots u_n \,|\, a'_1, \dots a'_n]_m, \quad \dots \quad \mathfrak{G}^{(\varrho)}[u_1, \dots u_n \,|\, a_1^{(\varrho)}, \dots a_n^{(\varrho)}]_m$$

gegeben, von denen je zwei unmittelbar aufeinander folgende in der Umgebung einer bestimmten Stelle coincidiren, so nenne ich auch das letzte Element eine Fortsetzung des ersten, woraus folgt, dass jedes Element eine Fortsetzung jedes andern ist. Zugleich lässt sich zeigen, dass aus den Gleichungen, durch welche eins dieser Elemente definirt wird, das Gleichungssystem für jedes andere durch eine Reihe analytischer Transformationen abgeleitet werden kann.

Demgemäss nenne ich die Gesammtheit der Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, welche dem ursprünglichen Elemente $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n \,|\, a_1, \dots a_n]_m$ oder irgend einer Fortsetzung desselben angehören, das durch die Gleichungen $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ definirte Gebilde m^{ter} Stufe im Gebiete der Grössen $(u_1, \dots u_n)$; und bezeichne dasselbe als ein monogenes, weil es in seinem ganzen Umfange durch irgend eins seiner Elemente vollständig bestimmt ist.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken.

1. Wenn in den Gleichungen (α), (β), (γ), durch welche ein bestimmtes Element $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n \,|\, a_1, \dots a_n]_m$ eines monogenen Gebildes definirt wird, $\mu = 1$ ist, so werden $t_{m+1}, \dots t_n$ ganze Functionen von $t_1, \dots t_m$, und es ergiebt sich ein reguläres Gleichungssystem zwischen den Grössen $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$. Umgekehrt kann man, wenn ein reguläres System von $(n-m)$ Gleichungen zwischen $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ gegeben ist, alle Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, welche demselben genügen und in einer gewissen Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ liegen, durch Gleichungen von der Form

$$u_1 - a_1 = G(t_1, \dots t_m)_1, \quad \dots \quad u_n - a_n = G(t_1, \dots t_m)_n$$

in der Art darstellen, dass sich aus ihnen $t_1, \dots t_m$ als homogene lineare Functionen von $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ ergeben.

Von einem Elemente $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m$, welches die angegebene Beschaffenheit hat, sage ich, es sei in der Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ regulär gestaltet.

Wenn in den Gleichungen (α), (β) $\mu > 1$ ist, so bilden diejenigen Werthsysteme $(t_1, \dots t_n)$, welche dieselben befriedigen, ohne dass gleichzeitig

$$G'(t_1, \dots t_m, t_{m+1}) = 0$$

ist, eine $2m$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die übrigen nur eine $(2m-2)$-fach ausgedehnte. Setzt man, wenn $(t'_1, \dots t'_n)$ irgend ein Werthsystem der ersten Art ist, und u'_α der zugehörige Werth von u_α,

$$t_1 = t'_1 + \tau_1, \quad \dots \quad t_n = t'_n + \tau_n,$$

so lassen sich $\tau_{m+1}, \dots \tau_n$, und somit auch $(u_1 - u'_1), \dots (u_n - u'_n)$ als ganze Functionen von $\tau_1, \dots \tau_m$ ausdrücken, und man erhält so ein Element

$$\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | u'_1, \dots u'_n]_m,$$

das in der Umgebung der Stelle $(u'_1, \dots u'_n)$ mit $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m$ coincidirt und regulär gestaltet ist. Daraus ergiebt sich, dass überhaupt in einem monogenen Gebilde m^{ter} Stufe die Gesammtheit der Stellen, in deren Umgebung ein nicht regulär gestaltetes Element des Gebildes existirt, nur eine Mannigfaltigkeit von $(2m-2)$ Dimensionen bildet, also namentlich in dem Falle, wo $m = 1$, aus vereinzelten Stellen besteht. Ferner zeigt sich, dass der Übergang von einem beliebigen Elemente zu irgend einem andern stets vermittelt werden kann durch eine Reihe regulär gestalteter Elemente.

2. Die innerhalb eines bestimmten Bereichs unbeschränkt veränderlichen Grössen $t_1, \dots t_m$, sowie die von ihnen abhängigen $t_{m+1}, \dots t_n$, welche zur Darstellung eines Elements $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m$ dienen, sind so gewählt worden, dass sie selbst lineare Functionen von $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ sind. Damit ist auf die einfachste Weise erreicht worden, dass zu zwei verschiedenen Werthsystemen $(t_1, \dots t_m, t_{m+1})$ auch stets verschiedene Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ gehören. Indessen ist es weder nothwendig noch auch immer das Angemessenste, dass $t_1, \dots t_{m+1}$ gerade in dieser Art mit $u_1, \dots u_n$ zusammenhängen.

Nimmt man nämlich die Gleichung (α) den angegebenen Bedingungen

gemäss, im Übrigen willkürlich an, und setzt

$$(\delta) \qquad u_1 - a_1 = \frac{G(t_1, \dots t_m, t_{m+1})_1}{G'(t_1, \dots t_m, t_{m+1})}, \quad \dots \quad u_n - a_n = \frac{G(t_1, \dots t_m, t_{m+1})_n}{G'(t_1, \dots t_m, t_{m+1})},$$

so wird durch diese Gleichungen, wenn die Zähler der Brüche so gewählt werden, dass für alle in Betracht kommenden Werthsysteme $(t_1, \dots t_{m+1})$, welche die Gleichung

$$G(t_1, \dots t_m, t_{m+1}) = 0$$

befriedigen, $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ endliche Werthe haben, und dass zu verschiedenen Werthsystemen $(t_1, \dots t_m, t_{m+1})$, wenigstens wenn der absolute Betrag jeder dieser Grössen unter einer gewissen Grenze liegt, auch verschiedene Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ gehören, stets ein monogenes Gebilde m^{ter} Stufe zum Theil oder auch vollständig dargestellt. Man kann daher bei der Definition eines solchen Gebildes statt Gleichungen von der Form (γ) solche von der Form (δ) zu Grunde legen; wobei es sich dann empfiehlt, die Gesammtheit der durch die Gleichungen (α), (δ) dargestellten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ einen Zweig eines Gebildes m^{ter} Stufe zu nennen, die Bedeutung eines Elementes aber so festzuhalten wie sie vorher gegeben ist.

Der Begriff der Coïncidenz zweier Zweige in der Umgebung einer bestimmten Stelle wird dann in derselben Weise festgestellt wie für zwei Elemente, ebenso die Bedeutung der Fortsetzung eines Zweiges.

3. Wenn $m = 1$, so kann man alle der Gleichung $G(t_1, t_2) = 0$ genügenden Werthepaare, wie schon vorhin bemerkt worden, durch ein Functionenpaar $g_1(\tau), g_2(\tau)$, wo τ eine neue Veränderliche bedeutet, darstellen, vorausgesetzt, dass es sich nur um solche handelt, bei denen die absoluten Beträge von t_1, t_2 eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Es kann daher jedes Element $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_1$ durch n Gleichungen

$$u_1 - a_1 = G(\tau)_1, \quad \dots \quad u_n - a_n = G(\tau)_n$$

dargestellt werden, aus denen dann die entsprechenden Gleichungen für jedes andere Element auf die oben angegebene Weise abzuleiten sind. Man kann daher bei der Definition eines Gebildes erster Stufe auch von solchen Gleichungen ausgehen, und mit denselben, um das ganze Gebilde zu bestimmen, so verfahren wie oben (unter E) beschrieben worden.

In analoger Weise ist es stets möglich, ein Gebilde m^{ter} Stufe im Gebiete von n Veränderlichen, wenn $m > 1$, in der Art in Elemente zu zerlegen, dass jedes einzelne durch Gleichungen von der Form

$$u_1 - a_1 = G_1(\tau_1, \dots \tau_m), \quad \dots \quad u_n - a_n = G_n(\tau_1, \dots \tau_m)$$

dargestellt wird, in denen $G_1, \dots G_n$ ganze Functionen von m innerhalb eines bestimmten Bereichs unbeschränkt veränderlichen Grössen $\tau_1, \dots \tau_m$ sind und an der Stelle $(\tau_1 = 0, \dots \tau_m = 0)$ verschwinden.

§ 4.

Die Anwendung der vorstehenden, dem Gebiete der allgemeinen Functionenlehre angehörigen Erörterungen, auf die ich aus dem schon oben angegebenen Grunde eingehen zu müssen glaubte, auf das durch die obigen Gleichungen

$$(1.) \qquad \begin{cases} F_1(u_1, \dots u_n) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_{n-1}(u_1, \dots u_n) = 0 \\ F_n(u_1, \dots u_n) = x \end{cases}$$

im Gebiete der $n+1$ Grössen $u_1, \dots u_n, x$ definirte Gebilde in Verbindung mit den in meiner Abhandlung »Untersuchungen über die $2r$-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen«*) enthaltenen Andeutungen führt schliesslich zu folgendem Satze:

»Aus jeder $2n$-fach periodischen Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich stets, auf mannigfaltige Weise, ein System von n Functionen

$$\psi_1(x), \ \dots \ \psi_n(x)$$

Einer Veränderlichen erhalten, welche zusammengehörige Abelsche Integrale erster Art und so beschaffen sind, dass jedes Periodensystem derselben auch ein Periodensystem der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ bildet.

Die Ableitungen sämmtlicher Functionen $\psi_1(x), \dots \psi_n(x)$ können rational durch x und eine algebraische Function $\varphi(x)$ dieser Grösse ausgedrückt werden.«

Nun kann man aber, wie aus der Theorie der Abelschen Transcendenten bekannt ist, alle Abelschen Integrale erster Art, deren Ableitungen rationale

*) Crelle's Journal, Bd. 89 [Bd. II, S. 125 dieser Ausgabe].

Functionen von x und einer und derselben algebraischen Function $\varphi(x)$ sind, durch eine bestimmte Anzahl von ihnen, $\Psi_1, \dots \Psi_\varrho$, in der Form

$$c_0 + c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \cdots + c_\varrho\Psi_\varrho,$$

wo die c willkürliche Constanten bedeuten, darstellen und zugleich die $\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_\varrho$ so wählen, dass alle Periodensysteme derselben sich zusammensetzen lassen aus den folgenden ϱ bestimmten

$$\begin{array}{c} 1,\ 0,\ \dots\ 0 \\ 0,\ 1,\ \dots\ 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0,\ 0,\ \dots\ 1 \end{array}$$

und aus ϱ anderen

$$\begin{array}{c} \pi_{1,1},\ \pi_{2,1},\ \dots\ \pi_{\varrho,1} \\ \pi_{1,2},\ \pi_{2,2},\ \dots\ \pi_{\varrho,2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \pi_{1,\varrho},\ \pi_{2,\varrho},\ \dots\ \pi_{\varrho,\varrho} \end{array}$$

von der Beschaffenheit, dass

$$\pi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \pi_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$$

ist. Dabei ist zu bemerken, dass im Allgemeinen ϱ grösser, niemals aber kleiner als n ist.

Setzt man nun (für $\alpha = 1, 2, \dots n$)

$$\psi_\alpha = c_{\alpha,0} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} c_{\alpha,\mathfrak{a}}\Psi_{\mathfrak{a}}$$

und bezeichnet mit

$$\Omega_{1,\mathfrak{n}}, \ \dots \ \Omega_{n,\mathfrak{n}}$$

dasjenige Periodensystem von $\psi_1, \dots \psi_n$, welches dem $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ der vorstehenden entspricht, so führt die angegebene Relation unter den Grössen π zu der folgenden:

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} (\Omega_{\alpha,\mathfrak{a}}\Omega_{\beta,\varrho+\mathfrak{a}} - \Omega_{\beta,\mathfrak{a}}\Omega_{\alpha,\varrho+\mathfrak{a}}) = 0,$$

welche für je zwei Zahlen α, β aus der Reihe $1, 2, \dots n$ besteht.

Jetzt seien

$$\begin{array}{c} \tilde{\omega}_{1,1},\ \tilde{\omega}_{2,1},\ \dots\ \tilde{\omega}_{n,1} \\ \tilde{\omega}_{1,2},\ \tilde{\omega}_{2,2},\ \dots\ \tilde{\omega}_{n,2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \tilde{\omega}_{1,2n},\ \tilde{\omega}_{2,2n},\ \dots\ \tilde{\omega}_{n,2n} \end{array}$$

irgend $2n$ primitive Periodensysteme der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$, d. h. solche, aus denen sich alle übrigen zusammensetzen lassen, so ist nach dem angeführten Satze

$$\Omega_{\alpha,\mathfrak{n}} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{\mathfrak{n},\varkappa}\, \tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa},$$

wo die $m_{\mathfrak{n},\varkappa}$ ganze Zahlen sind, und es entspringen also aus den $\frac{1}{2}n(n-1)$ in der vorstehenden Gleichung zusammengefassten Relationen unter den Grössen Ω ebenso viele unter den $\tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa}$. Man erhält so den Satz:

A. Unter den $2n.n$ Grössen $\tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa}$ bestehen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen von der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa, \lambda)\, \tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa}\, \tilde{\omega}_{\beta,\lambda} = 0,$$

in denen die von den Indices α, β unabhängigen Coefficienten $(\varkappa, \lambda)$ ganze Zahlen und so beschaffen sind, dass

$$(\varkappa, \lambda) = -(\lambda, \varkappa).$$

Die Grössen $\pi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ haben ferner die Eigenschaft, dass die quadratische Form

$$i \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} (\pi'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - \pi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})\, \sigma_{\mathfrak{a}} \sigma_{\mathfrak{b}},$$

wo $\pi'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ die mit $\pi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ conjugirte Grösse bedeutet, bei reellen Werthen von $\sigma_1, \dots \sigma_\varrho$, wenn dieselben nicht sämmtlich gleich Null sind, stets einen positiven Werth hat.

Hieraus ergiebt sich zunächst für die Grössen $\Omega_{\alpha,\mathfrak{n}}$ und dann für die $\tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa}$ eine entsprechende Eigenschaft, die sich folgendermassen ausdrücken lässt:

B. Die bilineare Form

$$i \sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa, \lambda)\, X_\varkappa X'_\lambda$$

erhält stets einen positiven Werth, wenn man

$$X_\varkappa = \sum_{\alpha=1}^{n} t_\alpha\, \tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa},$$

$$X'_\varkappa = \sum_{\alpha=1}^{n} t'_\alpha\, \tilde{\omega}'_{\alpha,\varkappa}$$

setzt, den Grössen $t_1, \dots t_n$ beliebige Werthe, die nicht sämmtlich gleich Null sind, beilegt, und unter $t'_\alpha, \tilde{\omega}'_{\alpha,\varkappa}$ die mit $t_\alpha, \tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa}$ conjugirten Grössen versteht.

Es ist nämlich (für $\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \varrho$)

$$\Omega_{\alpha,\mathfrak{a}} = c_{\alpha,\mathfrak{a}},$$

$$\Omega_{\alpha,\varrho+\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} c_{\alpha,\mathfrak{b}}\, \pi_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}},$$

und daher, wenn man

$$U_{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha=1}^{n} t_\alpha\, \Omega_{\alpha,\mathfrak{n}}, \qquad (\text{für } \mathfrak{n} = 1, 2, \dots 2\varrho)$$

$$S_{\mathfrak{a}} = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha,\mathfrak{a}}\, t_\alpha \qquad (\text{für } \mathfrak{a} = 1, 2, \dots \varrho)$$

setzt und unter $U'_{\mathfrak{n}}, S'_{\mathfrak{a}}$ die mit $U_{\mathfrak{n}}, S_{\mathfrak{a}}$ conjugirten Grössen versteht,

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} U_{\mathfrak{a}} U'_{\varrho+\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} S_{\mathfrak{a}} S'_{\mathfrak{b}}\, \pi'_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}},$$

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} U_{\varrho+\mathfrak{a}} U'_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} S'_{\mathfrak{a}} S_{\mathfrak{b}}\, \pi_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}.$$

In der zweiten Doppelsumme vertausche man die Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ mit einander und setze in der ersten $\pi'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ für $\pi'_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$, so ergiebt sich

$$i \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} (U_{\mathfrak{a}} U'_{\varrho+\mathfrak{a}} - U_{\varrho+\mathfrak{a}} U'_{\mathfrak{a}}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} S_{\mathfrak{a}} S'_{\mathfrak{b}} (\pi'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - \pi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})\, i,$$

oder wenn

$$t_\alpha = \xi_\alpha + \eta_\alpha i, \quad t'_\alpha = \xi_\alpha - \eta_\alpha i,$$

$$S_\alpha = \sigma_\alpha + \tau_\alpha i, \quad S'_\alpha = \sigma_\alpha - \tau_\alpha i$$

gesetzt wird,

$$i \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} (U_{\mathfrak{a}} U'_{\varrho+\mathfrak{a}} - U_{\varrho+\mathfrak{a}} U'_{\mathfrak{a}}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} (\sigma_{\mathfrak{a}} \sigma_{\mathfrak{b}} + \tau_{\mathfrak{a}} \tau_{\mathfrak{b}}) (\pi'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - \pi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})\, i.$$

Der Ausdruck auf der Rechten dieser Gleichung ist stets positiv, wenn die Grössen σ, τ nicht sämmtlich gleich Null sind, was nur der Fall ist, wenn $t_1, \dots t_n$ sämmtlich verschwinden. (Denn man hat

$$\sum_{\alpha=1}^{n} t_\alpha \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha,0} t_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} c_{\alpha,\mathfrak{a}} t_\alpha \Psi_{\mathfrak{a}} = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha,0} t_\alpha + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} S_{\mathfrak{a}} \Psi_{\mathfrak{a}},$$

und es können daher, da unter den Functionen $\psi_1, \dots \psi_n$ keine lineare Relation besteht, die Grössen $S_{\mathfrak{a}}$ nur in dem angegebenen Falle sämmtlich gleich Null sein.) Es ist aber

$$U_{\mathfrak{n}} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{\mathfrak{n},\varkappa} X_\varkappa \qquad (\mathfrak{n} = 1, 2, \dots 2\varrho)$$

und daher

$$i\sum_{a=1}^{\varrho}(U_a U'_{\varrho+a}-U_{\varrho+a}U'_a) = i\sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)\,X_\varkappa X'_\lambda,$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

Man setze

$$\omega_{\alpha,\varkappa} = P_{\alpha,\varkappa}+iQ_{\alpha,\varkappa}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1,2,\ldots n\\ \varkappa = 1,2,\ldots 2n\end{pmatrix}$$

wo die P und Q reelle Grössen bezeichnen sollen, und

$$(PP)_{\alpha,\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)\,P_{\alpha,\varkappa}P_{\beta,\lambda},$$

$$(PQ)_{\alpha,\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)\,P_{\alpha,\varkappa}Q_{\beta,\lambda},$$

$$(QQ)_{\alpha,\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)\,Q_{\alpha,\varkappa}Q_{\beta,\lambda}.$$

Dann ist, in Folge der Relation

$$(\varkappa,\lambda) = -(\lambda,\varkappa),$$

$$(PP)_{\alpha,\beta} = -(PP)_{\beta,\alpha},$$

$$(QQ)_{\alpha,\beta} = -(QQ)_{\beta,\alpha};$$

der Satz A. aber besagt, dass

$$(PP)_{\alpha,\beta} = (QQ)_{\alpha,\beta},$$

$$(PQ)_{\alpha,\beta} = (PQ)_{\beta,\alpha}.$$

Der Satz B. lässt sich dann, mit Berücksichtigung dieser Relationen, folgendermassen ausdrücken:

Die bilineare Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}((PQ)_{\alpha,\beta}+i(PP)_{\alpha,\beta})t_\alpha t'_\beta$$

erhält stets einen positiven Werth, wenn man

$$t_\alpha = \xi_\alpha+\eta_\alpha i,\quad t'_\alpha = \xi_\alpha-\eta_\alpha i$$

setzt und den Grössen ξ, η beliebige reelle Werthe, die nicht sämmtlich gleich Null sind, beilegt.

Dies kommt bekanntlich darauf hinaus, dass n bestimmte, aus den Grössen

$$(PQ)_{\alpha,\beta} \quad \text{und} \quad (PP)_{\alpha,\beta}$$

zusammengesetzte Ausdrücke positive Werthe haben müssen.

Unter Anderem folgt hieraus, dass die Determinanten

$$\begin{vmatrix} P_{1,1}, & \ldots & P_{1,2n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ P_{n,1}, & \ldots & P_{n,2n} \\ Q_{1,1}, & \ldots & Q_{1,2n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ Q_{n,1}, & \ldots & Q_{n,2n} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} (1,1), & \ldots & (1,2n) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ (2n,1), & \ldots & (2n,2n) \end{vmatrix}$$

beide von Null verschieden sind. Denn es ist, wenn man

$$\bar{\xi}_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\alpha=1}^{n}(\varkappa,\lambda)(\eta_\alpha P_{\alpha,\varkappa}+\xi_\alpha Q_{\alpha,\varkappa}),$$

$$\bar{\eta}_\lambda = \sum_{\alpha=1}^{n}(\xi_\alpha P_{\alpha,\lambda}-\eta_\alpha Q_{\alpha,\lambda})$$

setzt,

$$i\sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)\,X_\varkappa X'_\lambda = -2\sum_{\lambda=1}^{2n}\bar{\xi}_\lambda\bar{\eta}_\lambda,$$

und es darf daher, wenn dieser Ausdruck die angegebene Beschaffenheit haben soll, die Determinante der — als Functionen von $\eta_1, \ldots \eta_n$, $\xi_1, \ldots \xi_n$ aufgefassten — $\bar{\xi}_1, \ldots \bar{\xi}_{2n}$ nicht gleich Null sein. Diese Determinante ist aber das Product der beiden in Rede stehenden.

Ferner ist noch zu bemerken, dass die beiden Sätze A., B. auch noch gelten, wenn die betrachteten Periodensysteme keine primitiven, sondern nur von einander unabhängige sind, d. h. solche, aus denen sich keines zusammensetzen lässt, in welchem sämmtliche Perioden gleich Null sind. Denn sind

$$\begin{matrix} \omega_{1,1}, & \ldots & \omega_{n,1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \omega_{1,2n}, & \ldots & \omega_{n,2n} \end{matrix}$$

$2n$ solche Systeme, so hat man

$$m\,.\,\tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa} = \sum_{\mu=1}^{2n} a_{\varkappa,\mu}\,\omega_{\alpha,\mu},$$

wo m und sämmtliche $a_{\varkappa,\mu}$ ganze Zahlen bedeuten, und es ergiebt sich die Richtigkeit des Behaupteten sofort daraus, dass die Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa,\lambda)\,X_\varkappa Y_\lambda$$

sich durch die Substitutionen

$$X_\varkappa = \frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{2n} a_{\varkappa,\mu} U_\mu, \quad Y_\lambda = \frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{2n} a_{\lambda,\nu} V_\nu$$

in eine andere

$$\frac{1}{m^2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n} [\mu,\nu]\,U_\mu V_\nu$$

verwandelt, in der die Coefficienten $[\mu,\nu]$ ganze Zahlen sind, unter denen die Relation

$$[\mu,\nu] = -[\nu,\mu]$$

besteht.

Die Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa,\lambda)\,X_\varkappa Y_\lambda$$

lässt sich stets durch Substitutionen von der Gestalt

$$X_\varkappa = \sum_{\mu=1}^{2n} h_{\varkappa,\mu} U_\mu,$$

$$Y_\lambda = \sum_{\nu=1}^{2n} h_{\lambda,\nu} V_\lambda$$

in die einfachere

$$\sum_{\gamma=1}^{n} (U_\gamma V_{n+\gamma} - U_{n+\gamma} V_\gamma)$$

verwandeln — wobei der Umstand, dass die Determinante $|(\varkappa,\lambda)|$ nicht den Werth Null hat, von wesentlicher Bedeutung ist —, und zwar in der Art, dass in den Ausdrücken der neuen Veränderlichen (U, V) durch die ursprünglichen (X, Y) die Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen werden.

Daraus ergiebt sich der Satz:

C. Es ist stets möglich — und zwar auf unendlich viele Arten —, aus beliebigen $2n$ primitiven Periodensystemen einer

Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ ebenso viele andere, wenn auch im Allgemeinen keine primitiven Periodensysteme

$$\begin{array}{c} \omega_{1,1}, \;\dots\; \omega_{n,1} \\ \dots\dots\dots \\ \omega_{1,2n}, \;\dots\; \omega_{n,2n} \end{array}$$

so zusammenzusetzen, dass für je zwei derselben die Gleichung

$$\sum_{\gamma=1}^{n} (\omega_{\alpha,\gamma}\,\omega_{\beta,n+\gamma} - \omega_{\beta,\gamma}\,\omega_{\alpha,n+\gamma}) = 0$$

gilt.

Erhält man nämlich durch Ausführung der angegebenen Transformation

$$M U_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{\nu,\varkappa} X_\varkappa \qquad (\text{für } \nu = 1, 2, \dots 2n)$$

und somit auch

$$M V_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{\nu,\varkappa} Y_\varkappa,$$

wo M und sämmtliche $m_{\nu,\varkappa}$ ganze Zahlen bedeuten, so setze man

$$\omega_{\alpha,\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{\nu,\varkappa}\,\tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa};$$

und es wird dann die vorstehende Gleichung bis auf den Factor M^2 identisch mit der unter A. aufgestellten.

Ganz ebenso ergiebt sich für die jetzt betrachteten Periodensysteme der Satz:

D. Die Function von $\xi_1, \dots \xi_n$, $\eta_1, \dots \eta_n$, in welche

$$i\sum_{\gamma=1}^{n} (U_\gamma V_{n+\gamma} - U_{n+\gamma} V_\gamma)$$

übergeht, wenn man

$$U_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha + \eta_\alpha i)\,\omega_{\alpha,\nu},$$

$$V_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha - \eta_\alpha i)\,\omega'_{\alpha,\nu}$$

setzt, wo wieder $\omega'_{\alpha,\nu}$ die mit $\omega_{\alpha,\nu}$ conjugirte Grösse bedeutet, hat für reelle Werthe der Veränderlichen ξ, η, wenn diese nicht sämmtlich gleich Null sind, stets einen *positiven* Werth.

Sind irgend $2n$ derartige Periodensysteme

$$\begin{array}{c} \omega_{1,1}, \ \dots \ \omega_{n,1} \\ \dots\dots\dots \\ \omega_{1,2n}, \ \dots \ \omega_{n,2n} \end{array}$$

gefunden, so erhält man aus ihnen alle übrigen durch das von Kronecker in der Abhandlung »Über bilineare Formen«*) angegebene Verfahren.

Namentlich darf man, wenn γ eine der Zahlen $1, \dots n$ ist, die beiden Systeme

$$\omega_{1,\gamma}, \ \dots \ \omega_{n,\gamma}$$

und

$$\omega_{1,n+\gamma}, \ \dots \ \omega_{n,n+\gamma}$$

mit einander vertauschen, wenn man zugleich

$$-\omega_{\alpha,\gamma} \ \text{für} \ \omega_{\alpha,\gamma} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

setzt. Ebenso ist es gestattet, je zwei Systeme der ersten Hälfte und gleichzeitig die entsprechenden der anderen mit einander zu vertauschen.

Auf diese Weise kann man die gegebenen Periodensysteme so umändern, dass die n ersten durch je n aus allen $2n$ beliebig ausgewählte ersetzt werden. Dabei ist zu bemerken, dass die Grössen $\omega_{\alpha,\beta}$ gleich den ursprünglichen $\bar{\omega}_{\alpha,\beta}$ die Eigenschaft haben, dass die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \omega_{1,\varkappa}, & \omega_{1,\lambda}, & \dots & \omega_{1,\nu} \\ \omega_{2,\varkappa}, & \omega_{2,\lambda}, & \dots & \omega_{2,\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{n,\varkappa}, & \omega_{n,\lambda}, & \dots & \omega_{n,\nu} \end{vmatrix},$$

wo $\varkappa, \lambda, \dots \nu$ irgend n von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots 2n$ bezeichnen, nicht sämmtlich gleich Null sind.

§ 5.

Nach dem Vorstehenden ist es, wenn irgend eine $2n$-fach periodische Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ von dem angegebenen analytischen Charakter gegeben

*) Monatsberichte der Berliner Akademie 1866, p. 609.

ist, immer möglich, $2n$ Periodensysteme

$$\begin{array}{c} \omega_{1,1}, \ \dots \ \omega_{n,1} \\ \dots\dots \\ \omega_{1,n}, \ \dots \ \omega_{n,n} \\ \omega'_{1,1}, \ \dots \ \omega'_{n,1} \\ \dots\dots \\ \omega'_{1,n}, \ \dots \ \omega'_{n,n} \end{array}$$

derselben zu finden, welche genau die in der Einleitung (S. 59) angegebenen Bedingungen erfüllen, so dass es möglich ist, eine Function $G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)$ und eine zugehörige Function $\Theta(u_1, \dots u_n)$ zu bilden, für welche die früher (S. 56) erklärten Grössen $\omega_{\alpha,\beta}$ und $\omega'_{\alpha,\beta}$ mit den gegebenen übereinstimmen. Aus dieser Function $\Theta(u_1, \dots u_n)$ kann man sodann auf die in der Einleitung angegebene Weise n von einander unabhängige Functionen

$$\wp_1(u_1, \dots u_n), \ \dots \ \wp_n(u_1, \dots u_n)$$

ableiten, von denen jede die Periodensysteme der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ ebenfalls als Periodensysteme besitzt. Ist nun $\wp_{n+1}(u_1, \dots u_n)$ irgend eine andere Function der gleichen Art, wie $\wp_1, \dots \wp_n$, so ist $\wp_{n+1}$ eine algebraische Function der Grössen $\wp_1, \dots \wp_n$.

Aus den Eigenschaften der Abelschen Integrale erster Art ergiebt sich nämlich, dass der Ausdruck $\wp_{n+1}(u_1, \dots u_n)$, als Function von $\wp_1, \dots \wp_n$ betrachtet, im Gebiete dieser Grössen überall definirt ist, und zwar so, dass er in der Umgebung jeder bestimmten Stelle des Gebietes $(\wp_1, \dots \wp_n)$ wie eine algebraische Function sich verhält, was nach einem bekannten Satze*) ausreicht, um das Behauptete festzustellen.

Durch geeignete Wahl der Function $\wp_{n+1}$ kann man erreichen, dass sich jede Function, welche den gleichen analytischen Charakter und die gleichen

*) Dieser Satz lautet: Lässt sich für eine ein- oder mehrdeutige Function von beliebig vielen Veränderlichen $(x_1, x_2, \dots x_n)$ beweisen, dass sie in der Umgebung jeder bestimmten Stelle $(x_1, \dots x_n)$ wie eine algebraische Function sich verhält, so ist damit festgestellt, dass sie wirklich eine algebraische Function ist. Für eindeutige Functionen habe ich diesen Satz zuerst in einem an C. W. Borchardt gerichteten, im 89. Bande des Crelleschen Journals abgedruckten Briefe ausgesprochen. Einen Beweis desselben hat dann Herr Hurwitz gegeben (Crelles Journal Bd. 95, S. 201). Derselbe lässt sich aber ohne Schwierigkeit auf mehrdeutige Functionen von beliebig vielen Veränderlichen ausdehnen.

Periodensysteme wie die Function $\varphi(u_1, \ldots u_n)$ besitzt, also insbesondere diese letztere selbst, rational durch die $(n+1)$ Functionen $\wp_1, \wp_2, \ldots \wp_{n+1}$ ausdrücken lässt.

Damit ist der Beweis des am Schlusse der Einleitung (S. 67) ausgesprochenen Satzes erbracht.

ÜBER DIE CONVERGENZ DER Θ-REIHEN BELIEBIG VIELER ARGUMENTE.

Setzt man in der durch die unendliche Reihe

$$1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots = \sum_{\mathfrak{n}=-\infty}^{\mathfrak{n}=+\infty} q^{\mathfrak{n}\mathfrak{n}} e^{2\mathfrak{n}xi}$$

definirten Jacobi'schen Function $\vartheta_3(x, q)$

$$q = e^a, \quad xi = bu+b',$$

multiplicirt sie darauf mit

$$e^{a'u^2+2b''u+a''}$$

und bezeichnet das Product, als Function von u betrachtet, mit $\Theta(u)$, so hat man

$$\Theta(u) = \sum_{\mathfrak{n}=-\infty}^{\mathfrak{n}=+\infty} e^{G(u;\mathfrak{n})},$$

wo

$$G(u;\mathfrak{n}) = a\mathfrak{n}^2+a'u^2+a''+2b\mathfrak{n}u+2b'\mathfrak{n}+2b''u$$

eine ganze Function von u und $\mathfrak{n}$ ist, deren Coefficienten keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass jeder von ihnen einen endlichen Werth hat und der reelle Bestandtheil von a negativ sein muss.

Die so definirte Function $\Theta(u)$, in welcher die speciellen, von Jacobi in die Theorie der elliptischen Transcendenten eingeführten Θ-Functionen sämmtlich enthalten sind, nenne ich die allgemeine Jacobi'sche oder Θ-Function des Argumentes u.

In ähnlicher Weise definire ich die allgemeinste Θ-Function von n Argumenten $(u_1, \dots u_n)$.

Es sei

$$G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)$$

eine ganze Function zweiten Grades der $2n$ Grössen

$$u_1, \dots u_n; \quad v_1, \dots v_n;$$

so stellt die unendliche Reihe

$$\sum_{(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)} e^{G(u_1, \dots u_n; \mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)},$$

wenn für $\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n$ alle Systeme ganzer Zahlen gesetzt werden und die Coefficienten von G so beschaffen sind, dass die Reihe für jedes System endlicher Werthe der Veränderlichen $u_1, \dots u_n$ convergirt, eine (transcendente) ganze Function dieser Grössen dar, die ich mit

$$\Theta(u_1, \dots u_n)$$

bezeichne.

Zur Vervollständigung dieser Definition ist aber eine genaue Untersuchung der Bedingungen, unter denen die aufgestellte Reihe convergirt, erforderlich.

Setzt man

$$\chi(v_1, \dots v_n) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 G}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} v_\alpha v_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots n)$$

so lässt sich

$$G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n) \text{ auf die Form } \chi(v_1, \dots v_n) + 2 \sum_\alpha v_\alpha U_\alpha + U$$

bringen, wo U eine ganze Function zweiten Grades von $u_1, \dots u_n$ ist und $U_1, \dots U_n$ lineare Functionen derselben Grössen bezeichnen. Ist dann

$$\chi(v_1, \dots v_n) = \chi_1(v_1, \dots v_n) + i \chi_2(v_1, \dots v_n),$$

wo unter χ_1, χ_2 quadratische Formen von $v_1, \dots v_n$ mit reellen Coefficienten zu verstehen sind, und bezeichnet man, für ein beliebig angenommenes System endlicher Werthe von $u_1, \dots u_n$, die reellen Bestandtheile von $U, U_1, \dots U_n$ mit $U', U'_1, \dots U'_n$, so ist der absolute Betrag von $e^{G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)}$ gleich

$$e^{\chi_1(v_1, \dots v_n) + 2 \sum_\alpha v_\alpha U'_\alpha + U'};$$

es muss also, damit die in Rede stehende Reihe für das betrachtete Werthsystem $(v'_1, \dots u_n)$ convergire, die Grösse

$$e^{\chi_1(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n) + 2 \sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha U'_\alpha}$$

unendlich klein werden, wenn auch nur eine der ganzen Zahlen $\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n$ unendlich gross wird. Dasselbe gilt für die Grösse

$$e^{\chi_1(-\mathfrak{n}_1, \dots -\mathfrak{n}_n) - 2 \sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha U'_\alpha},$$

und somit auch für das Product

$$e^{\chi_1(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n) + 2 \sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha U'_\alpha} . e^{\chi_1(-\mathfrak{n}_1, \dots -\mathfrak{n}_n) - 2 \sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha U'_\alpha} = e^{2 \chi_1(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)}.$$

Daraus ergiebt sich zunächst, dass die Function $\chi_1(v_1, \dots v_n)$ bei reellen Werthen von $v_1, \dots v_n$ stets negativ oder gleich Null sein muss. Denn wäre sie für irgend ein System reeller Werthe von $v_1, \dots v_n$ positiv, so liesse sich auch ein System rationaler Zahlen $v'_1, \dots v'_n$ finden, für das $\chi_1(v'_1, \dots v'_n)$ einen positiven Werth hätte, und man könnte eine ganze Zahl k so annehmen, dass $kv'_1, \dots kv'_n$ sämmtlich ganze Zahlen wären und zugleich der Werth von

$$e^{\chi_1(kv'_1, \dots kv'_n)} = e^{k^2 \chi_1(v'_1, \dots v'_n)}$$

beliebig gross würde.

Angenommen nun, es erfülle $\chi_1(v_1, \dots v_n)$ die angegebene Bedingung, so lassen sich bekanntlich n homogene lineare Functionen $N_1, \dots N_n$ von $v_1, \dots v_n$ mit reellen Coefficienten so bestimmen, dass

$$\chi_1(v_1, \dots v_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha N_\alpha^2$$

und zugleich

$$\sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} N_\alpha^2$$

wird, wo $c_1, \dots c_n$ reelle Constanten bedeuten, von denen jede, die nicht gleich Null ist, einen negativen Werth hat.

Um zunächst den Fall zu erledigen, wo eine dieser Grössen c_α gleich Null ist, schicke ich folgenden Hülfssatz voraus:

»Es seien

$$N_1(v_1, \dots v_n), \quad \dots \quad N_{n-1}(v_1, \dots v_n)$$

irgend $n-1$ homogene lineare Functionen der n Veränderlichen $\nu_1, \dots \nu_n$ mit reellen Coefficienten, so ist es stets möglich, unendlich viele Systeme ganzzahliger Werthe von $\nu_1, \dots \nu_n$ anzugeben, für welche die absoluten Beträge der entsprechenden Werthe von $N_1, \dots N_{n-1}$ sämmtlich kleiner sind als eine gegebene Grösse.«

Beweis. Es sei h eine positive Grösse, unterhalb welcher der absolute Betrag jeder der Functionen $N_1, \dots N_{n-1}$ beständig bleibt, wenn den Veränderlichen $\nu_1, \dots \nu_n$ nur solche Werthe beigelegt werden, die $\geqq 0$ und < 1 sind. Bestimmt man dann irgend ein System reeller Grössen $\bar{\nu}_1, \dots \bar{\nu}_n$ so, dass die Gleichungen

$$N_1(\bar{\nu}_1, \dots \bar{\nu}_n) = 0, \quad \dots \quad N_{n-1}(\bar{\nu}_1, \dots \bar{\nu}_n) = 0$$

bestehen und bezeichnet, für eine beliebig anzunehmende ganze Zahl m, mit $\nu_\alpha^{(m)}$ die grösste in $m\bar{\nu}_\alpha$ enthaltene ganze Zahl, so hat man

$$|N_1(m\bar{\nu}_1 - \nu_1^{(m)}, \dots m\bar{\nu}_n - \nu_n^{(m)})| < h, \quad \dots \quad |N_{n-1}(m\bar{\nu}_1 - \nu_1^{(m)}, \dots m\bar{\nu}_n - \nu_n^{(m)})| < h,$$

woraus

$$|N_1(\nu_1^{(m)}, \dots \nu_n^{(m)})| < h, \quad \dots \quad |N_{n-1}(\nu_1^{(m)}, \dots \nu_n^{(m)})| < h$$

folgt.

Nun sei g eine beliebig angenommene positive Grösse, und es werde mit $k_\beta^{(m)}$ die grösste in

$$\frac{1}{g} N_\beta(\nu_1^{(m)}, \dots \nu_n^{(m)}) \qquad (\beta = 1, \dots n-1)$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, so ist, wenn man

$$N_\beta(\nu_1^{(m)}, \dots \nu_n^{(m)}) = k_\beta^{(m)} g + g_\beta^{(m)}$$

setzt,

$$0 \leqq g_\beta^{(m)} < g,$$

und jede der Zahlen $k_\beta^{(m)}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{h}{g} + 1.$$

Für jeden bestimmten Werth von g giebt es also unter den Zahlsystemen

$$k_1^{(m)}, \dots k_n^{(m)}$$

nur eine endliche Anzahl (r) von einander verschiedener; unter diesen müssen

sich daher, wenn man der Zahl m irgend $r+1$ verschiedene Werthe giebt, mindestens zwei (m', m'') finden, für welche

$$k_\beta^{(m')} = k_\beta^{(m'')} \qquad (\beta = 1, \dots n-1)$$

wird. Setzt man dann

$$\nu_\alpha = \nu_\alpha^{(m')} - \nu_\alpha^{(m'')}, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

so ist

$$N_\beta(\nu_1, \dots \nu_n) = g_\beta^{(m')} - g_\beta^{(m'')},$$

und es sind also die absoluten Beträge von

$$N_1(\nu_1, \dots \nu_n), \quad \dots \quad N_{n-1}(\nu_1, \dots \nu_n)$$

sämmtlich kleiner als g.

Nun kann aber mindestens eine der Grössen $\bar{\nu}_1, \dots \bar{\nu}_n$ beliebig angenommen werden; giebt man ihr einen ganzzahligen von Null verschiedenen Werth, so lassen sich demgemäss unendlich viele Systeme ganzzahliger Werthe von $\nu_1, \dots \nu_n$ so bestimmen, dass die entsprechenden Werthe von $N_1, \dots N_{n-1}$ ihrem absoluten Betrage nach sämmtlich kleiner als die willkürlich anzunehmende Grösse g werden.

Nach diesem Satze giebt es also, wenn eine der obigen Grössen c_α gleich Null ist, und diejenige von ihnen, die den grössten absoluten Betrag hat, mit c' bezeichnet wird, unendlich viele Systeme von n ganzen Zahlen $\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n$, für welche

$$|\chi_1(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)| = |\sum_\alpha c_\alpha N_\alpha^2| < (n-1)|c'|g^2$$

ist, also $e^{\chi_1(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)}$ der Einheit so nahe kommt, dass die Differenz kleiner ist als eine beliebig angenommene Grösse. Die Reihe

$$\sum_{(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)} e^{G(u_1, \dots u_n; \mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)}$$

ist also nach dem vorhin Bemerkten in diesem Falle stets divergent.

Wenn dagegen die Grössen c_α sämmtlich negativ sind und diejenige von ihnen, die den kleinsten absoluten Betrag hat, mit c bezeichnet wird, so hat man

$$\chi(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n) \leqq c \sum_\alpha N_\alpha^2,$$

also auch

$$\chi(\mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_n) \leqq c \sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha^2,$$

und somit

$$\left| e^{G(u_1, \ldots u_n;\, \mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_n)} \right| \leqq e^{U'} . e^{\sum\limits_\alpha (c\mathfrak{n}_\alpha^2 + 2\mathfrak{n}_\alpha U'_\alpha)}.$$

Da nun die Reihe

$$\sum_{(\mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_n)} \left\{ e^{\sum\limits_\alpha (c\mathfrak{n}_\alpha^2 + 2\mathfrak{n}_\alpha U'_\alpha)} \right\} = \prod_{\alpha=1}^{n} \sum_{\mathfrak{n}=-\infty}^{\mathfrak{n}=+\infty} e^{c\mathfrak{n}^2 + 2\mathfrak{n} U'_\alpha}$$

eine endliche Summe hat, so folgt, dass in dem jetzt betrachteten Falle die Reihe

$$\sum_{(\mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_n)} e^{G(u_1, \ldots u_n;\, \mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_n)}$$

für jedes System endlicher Werthe der Grössen $u_1, \ldots u_n$ unbedingt convergirt.

Wenn man ferner die Veränderlichen $u_1, \ldots u_n$ auf irgend einen ganz im Endlichen liegenden Bereich beschränkt, so wird dadurch für die absoluten Beträge der Grössen $U'_1, \ldots U'_n$, sowie auch für den absoluten Betrag von U' eine obere Grenze bestimmt. Bezeichnet man die erstere mit u_0, die letztere mit U_0, so ist

$$\left| e^{G(u_1, \ldots u_n;\, \mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_n)} \right| \leqq e^{\sum\limits_\alpha (c|\mathfrak{n}_\alpha|^2 + 2|\mathfrak{n}_\alpha| u_0) + U_0},$$

die Summe von beliebig vielen Gliedern der betrachteten Reihe ihrem absoluten Betrage nach also kleiner als die Summe der entsprechenden Glieder der Reihe

$$\sum_{(\mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_n)} \left\{ e^{\sum\limits_\alpha (c|\mathfrak{n}_\alpha|^2 + 2|\mathfrak{n}_\alpha| u_0) + U_0} \right\}.$$

Da die letztere, nur positive Glieder enthaltende Reihe convergirt, indem ihre Summe kleiner als

$$2^n e^{U_0} \left(\sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} e^{c\mathfrak{n}^2 + 2\mathfrak{n} u_0} \right)^n$$

ist, so folgt, dass die Reihe

$$\sum_{(\mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_n)} e^{G(u_1, \ldots u_n;\, \mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_n)}$$

für die dem angenommenen Bereiche angehörigen Werthe von $u_1, \ldots u_n$ gleichmässig convergirt, und deshalb die durch sie dargestellte Function

dieser Grössen bei endlichen Werthen derselben den Charakter einer ganzen rationalen Function besitzt.

Hiernach lassen sich die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit die betrachtete unendliche Reihe convergire und, wie oben angegeben worden, eine (transcendente) ganze Function der Veränderlichen $u_1, \ldots u_n$ darstelle, folgendermassen aussprechen:

Die im Vorstehenden mit $\chi_1(v_1, \ldots v_n)$ bezeichnete quadratische Form

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \Re\left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} \right) v_\alpha v_\beta \text{*)} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots n)$$

muss so beschaffen sein, dass sie bei reellen Werthen der Grössen $v_1, \ldots v_n$, wenn diese nicht sämmtlich gleich Null sind, stets einen negativen Werth hat. Im Übrigen können den Coefficienten der Function $G(u_1, \ldots u_n; v_1, \ldots v_n)$ beliebige endliche Werthe gegeben werden.

Bei den folgenden Untersuchungen wird demgemäss von jeder, zur Bildung einer Θ-Function verwandten Function $G(u_1, \ldots u_n; v_1, \ldots v_n)$ vorausgesetzt, dass ihre Coefficienten den angegebenen Bedingungen entsprechen. Ausserdem aber werde ich noch annehmen, dass die Determinante der im Vorstehenden mit $U_1, \ldots U_n$ bezeichneten linearen Functionen von $u_1, \ldots u_n$ einen von Null verschiedenen Werth habe,**) und der Function $G(u_1, \ldots u_n; v_1, \ldots v_n)$, indem ich die Summe ihrer Glieder zweiten Grades mit

$$g(u_1, \ldots u_n; v_1, \ldots v_n)$$

bezeichne, fortan die Gestalt

$$G(u_1, \ldots u_n; v_1, \ldots v_n) = g(u_1, \ldots u_n; v_1 + v'_1, \ldots v_n + v'_n) + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (v_\alpha + v'_\alpha) + g_0$$

geben, wo $g_0, m_1, \ldots m_n, v'_1, \ldots v'_n$ willkürlich anzunehmende Constanten, d. h. von $u_1, \ldots u_n; v_1, \ldots v_n$ unabhängige Grössen bedeuten. (Auf diese Form kann man $G(u_1, \ldots u_n; v_1, \ldots v_n)$ stets bringen. Man drücke zu dem Ende die

*) Ist a eine Grösse, die einen complexen Werth hat oder haben kann, so wird durch $\Re(a)$ ihr reeller Bestandtheil bezeichnet.

**) Wäre dies nicht der Fall, so liesse sich $\Theta(u_1, \ldots u_n)$ durch Multiplication mit dem Factor e^{-U} in eine Function von weniger als n Argumenten verwandeln.

Summe der Glieder ersten Grades von U als Function von $U_1, \dots U_n$ aus und nehme ν'_α gleich der Hälfte des Coefficienten von U_α, so ist die Differenz

$$G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n) - g(u_1, \dots u_n; \nu_1 + \nu'_1, \dots \nu_n + \nu'_n)$$

von $u_1, \dots u_n$ unabhängig und eine lineare Function von $\nu_1, \dots \nu_n$, der man die Gestalt

$$2\pi i \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha(\nu_\alpha + \nu'_\alpha) + g_0$$

geben kann.) Dann wird

$$\Theta(u_1, \dots u_n) = C \sum_{(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)} e^{g(u_1, \dots u_n;\, \mathfrak{n}_1 + \nu'_1, \dots \mathfrak{n}_n + \nu'_n) + 2\pi i \sum\limits_{\alpha=1}^{n} m_\alpha(\mathfrak{n}_\alpha + \nu'_\alpha)},$$

wo $C = e^{g_0}$ eine von Null verschiedene Constante ist, der im Folgenden der Werth 1 gegeben wird.

VERALLGEMEINERUNG EINER JACOBI'SCHEN THETAFORMEL.

Für die Θ-Functionen erster Ordnung hat Jacobi das nachstehende Theorem begründet:

Man nehme zwischen acht Veränderlichen

$$t,\ t',\ t'',\ t''',\quad u,\ u',\ u'',\ u'''$$

die folgenden Gleichungen an:

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}(t + t' + t'' + t''') \\ u' &= \tfrac{1}{2}(t + t' - t'' - t''') \\ u'' &= \tfrac{1}{2}(t - t' + t'' - t''') \\ u''' &= \tfrac{1}{2}(t - t' - t'' + t'''); \end{aligned}$$

so gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} &\Theta(t;\, 0, 0)\, \Theta(t';\, 0, 0)\, \Theta(t'';\, 0, 0)\, \Theta(t''';\, 0, 0) + \Theta(t;\, 0, \tfrac{1}{2})\, \Theta(t';\, 0, \tfrac{1}{2})\, \Theta(t'';\, 0, \tfrac{1}{2})\, \Theta(t''';\, 0, \tfrac{1}{2}) \\ = {} &\Theta(u;\, 0, 0)\, \Theta(u';\, 0, 0)\, \Theta(u'';\, 0, 0)\, \Theta(u''';\, 0, 0) + \Theta(u;\, 0, \tfrac{1}{2})\, \Theta(u';\, 0, \tfrac{1}{2})\, \Theta(u'';\, 0, \tfrac{1}{2})\, \Theta(u''';\, 0, \tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Der von Jacobi gegebene Beweis dieses Satzes, aus dem er in mehreren Vorlesungen die ganze Theorie der elliptischen Functionen abgeleitet hat, ist sehr einfach. Es werden in den in der vorstehenden Gleichung vorkommenden vier Producten die Reihen, durch welche ihre Factoren definirt sind, eingesetzt, und durch Ausführung der Multiplicationen beide Seiten der Gleichung in unendliche Reihen verwandelt, von denen dann mit Hülfe der Identität

$$tt + t't' + t''t'' + t'''t''' = uu + u'u' + u''u'' + u'''u'''$$

nachgewiesen wird, dass sie Glied für Glied mit einander übereinstimmen.

Ich will nun zeigen, wie sich in ähnlicher Weise eine sehr allgemeine Relation unter Θ-Functionen einer beliebigen Ordnung herleiten lässt.

Es seien $2r+2$ Veränderliche

$$t,\ t',\ \dots\ t^{(r)},\quad u,\ u',\ \dots\ u^{(r)}$$

durch $r+1$ homogene lineare Gleichungen, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, dergestalt mit einander verbunden, dass unter ihnen auch eine Gleichung

$$(1.)\qquad a_0tt+a_1t't'+\cdots+a_rt^{(r)}t^{(r)} = b_0uu+b_1u'u'+\cdots+b_ru^{(r)}u^{(r)}$$

besteht, in der $a_0, a_1, \dots a_r, b_0, b_1, \dots b_r$ rationale und positive Zahlen sind. Dabei wird angenommen, dass sich jene linearen Gleichungen sowohl nach $t, t', \dots t^{(r)}$, als auch nach $u, u', \dots u^{(r)}$ auflösen lassen, so dass man, unter p, q Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots r$ verstehend, setzen kann

$$(2.)\qquad u^{(p)} = \sum_q c_{pq}t^{(q)} = f_p(t, t', \dots t^{(r)}),$$

wo die c_{pq} Constanten bedeuten und $u^{(0)} = u$, $t^{(0)} = t$ zu nehmen ist.

Versteht man unter

$$t_1,\ t'_1,\ \dots\ t_1^{(r)},\quad u_1,\ u'_1,\ \dots\ u_1^{(r)}$$

Grössen, welche durch dieselben Gleichungen, wie die Grössen

$$t,\ t',\ \dots\ t^{(r)},\quad u,\ u',\ \dots\ u^{(r)}$$

mit einander verbunden sind, so dass also

$$(3.)\qquad u_1^{(p)} = f_p(t_1, t'_1, \dots t_1^{(r)})$$

ist, so hat man

$$\begin{aligned}
\sum_p a_pt^{(p)}t^{(p)} &= \sum_p b_pu^{(p)}u^{(p)},\\
\sum_p a_pt_1^{(p)}t_1^{(p)} &= \sum_p b_pu_1^{(p)}u_1^{(p)},\\
\sum_p a_p(t^{(p)}+t_1^{(p)})^2 &= \sum_p b_p(u^{(p)}+u_1^{(p)})^2,
\end{aligned}$$

und daher auch

$$(4.)\qquad \sum_p a_pt^{(p)}t_1^{(p)} = \sum_p b_pu^{(p)}u_1^{(p)}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich sofort der folgende Satz:

Es sei

$$\varphi(t_1, t_2, \dots t_s)$$

eine ganze und homogene Function zweiten Grades der s Grössen $t_1, t_2, \dots t_s$, so besteht die Gleichung

$$(5.)\qquad \sum_p a_p\varphi(t_1^{(p)}, t_2^{(p)}, \dots t_s^{(p)}) = \sum_p b_p\varphi(u_1^{(p)}, u_2^{(p)}, \dots u_s^{(p)}),$$

wenn unter den $2s(r+1)$ Grössen (t, u) die $s(r+1)$ Gleichungen

$$(6.)\qquad \left\{\begin{array}{l}
u_1 = f_0(t_1, t'_1, \dots t_1^{(r)}),\ \dots\ u_1^{(r)} = f_r(t_1, t'_1, \dots t_1^{(r)})\\
u_2 = f_0(t_2, t'_2, \dots t_2^{(r)}),\ \dots\ u_2^{(r)} = f_r(t_2, t'_2, \dots t_2^{(r)})\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
u_s = f_0(t_s, t'_s, \dots t_s^{(r)}),\ \dots\ u_s^{(r)} = f_r(t_s, t'_s, \dots t_s^{(r)})
\end{array}\right.$$

angenommen werden.

Aus der Gleichung (4.) ergiebt sich

$$\sum_q a_qt^{(q)}t_1^{(q)} = \sum_{p,q} b_pu^{(p)}c_{pq}t_1^{(q)},$$

woraus, wenn man

$$(7.)\qquad f'_q(u, u', \dots u^{(r)}) = \sum_p c_{pq}u^{(p)}$$

setzt,

$$(8.)\qquad t^{(q)} = \frac{1}{a_q}f'_q(b_0u, b_1u', \dots b_ru^{(r)})$$

folgt.

Setzt man ferner in (2.)

$$a_pt^{(p)} = v^{(p)},\quad b_pu^{(p)} = w^{(p)},$$

so sind die Grössen $v, v', \dots v^{(r)}, w, w', \dots w^{(r)}$ durch die Gleichungen

$$(9.)\qquad w^{(p)} = b_pf_p\left(\frac{v}{a_0}, \frac{v'}{a_1}, \cdots \frac{v^{(r)}}{a_r}\right),$$

sowie auch durch die aus (8.) sich ergebenden

$$(10.)\qquad v^{(q)} = f'_q(w, w', \dots, w^{(r)})$$

mit einander verbunden, und man erhält unter den $4(r+1)$ Grössen (t, u, v, w) aus (4.) die Gleichung

$$\sum_p t^{(p)} v^{(p)} = \sum_p u^{(p)} w^{(p)}. \tag{11.}$$

Jetzt nehme man zwischen $3\varrho(r+1)$ Grössen

$$\begin{array}{lll} t_1, \ldots t_\varrho, & l_1, \ldots l_\varrho, & k_1, \ldots k_\varrho, \\ t'_1, \ldots t'_\varrho, & l'_1, \ldots l'_\varrho, & k'_1, \ldots k'_\varrho, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_1^{(r)}, \ldots t_\varrho^{(r)}, & l_1^{(r)}, \ldots l_\varrho^{(r)}, & k_1^{(r)}, \ldots k_\varrho^{(r)} \end{array}$$

und ebenso vielen anderen

$$\begin{array}{lll} u_1, \ldots u_\varrho, & n_1, \ldots n_\varrho, & m_1, \ldots m_\varrho, \\ u'_1, \ldots u'_\varrho, & n'_1, \ldots n'_\varrho, & m'_1, \ldots m'_\varrho, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1^{(r)}, \ldots u_\varrho^{(r)}, & n_1^{(r)}, \ldots n_\varrho^{(r)}, & m_1^{(r)}, \ldots m_\varrho^{(r)} \end{array}$$

die nachstehenden Gleichungen an:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{(a)} & u_\alpha^{(p)} = f_p(t_\alpha, t'_\alpha, \ldots t_\alpha^{(r)}) & = \sum_q c_{pq} t_\alpha^{(q)} \\ \text{(b)} & n_\alpha^{(p)} = f_p(l_\alpha, l'_\alpha, \ldots l_\alpha^{(r)}) & = \sum_q c_{pq} l_\alpha^{(q)} \\ \text{(c)} & m_\alpha^{(p)} = b_p f_p\left(\frac{k_\alpha}{a_0}, \frac{k'_\alpha}{a_1}, \ldots \frac{k_\alpha^{(r)}}{a_r}\right) & = b_p \sum_q \frac{c_{pq}}{a_q} k_\alpha^{(q)}; \end{array}\right. \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots \varrho \\ p, q = 1, \ldots r \end{pmatrix} \tag{12.}$$

so hat man auch

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{(a)} & t_\alpha^{(q)} = \frac{1}{a_q} f'_q(b_0 u_\alpha, b_1 u'_\alpha, \ldots b_r u_\alpha^{(r)}) & = \frac{1}{a_q} \sum_p b_p c_{pq} u_\alpha^{(p)} \\ \text{(b)} & l_\alpha^{(q)} = \frac{1}{a_q} f'_q(b_0 n_\alpha, b_1 n'_\alpha, \ldots b_r n_\alpha^{(r)}) & = \frac{1}{a_q} \sum_p b_p c_{pq} n_\alpha^{(p)} \\ \text{(c)} & k_\alpha^{(q)} = f'_q(m_\alpha, m'_\alpha, \ldots m_\alpha^{(r)}) & = \sum_p c_{pq} m_\alpha^{(p)}, \end{array}\right. \tag{13.}$$

und man erhält aus (5.) und (11.), wenn $G(u_1, \ldots u_\varrho, n_1, \ldots n_\varrho)$ irgend eine ganze und homogene Function zweiten Grades der Grössen $u_1, \ldots u_\varrho, n_1, \ldots n$ ist, die beiden folgenden Gleichungen:

$$\sum_p a_p G(t_1^{(p)}, \ldots t_\varrho^{(p)}, l_1^{(p)}, \ldots l_\varrho^{(p)}) = \sum_p b_p G(u_1^{(p)}, \ldots u_\varrho^{(p)}, n_1^{(p)}, \ldots n_\varrho^{(p)}), \tag{14.}$$

$$\sum_p k_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)} = \sum_p m_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}. \tag{15.}$$

Setzt man also

$$g(u_1, \ldots u_\varrho, m_1, \ldots m_\varrho, n_1, \ldots n_\varrho) = G(u_1, \ldots u_\varrho, n_1, \ldots n_\varrho) + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{\varrho} m_\alpha n_\alpha, \tag{16.}$$

so besteht die Gleichung

$$\begin{aligned} & \sum_p a_p\, g\left(t_1^{(p)}, \ldots t_\varrho^{(p)}, \frac{k_1^{(p)}}{a_p}, \ldots \frac{k_\varrho^{(p)}}{a_p}, l_1^{(p)}, \ldots l_\varrho^{(p)}\right) \\ = & \sum_p b_p\, g\left(u_1^{(p)}, \ldots u_\varrho^{(p)}, \frac{m_1^{(p)}}{b_p}, \ldots \frac{m_\varrho^{(p)}}{b_p}, n_1^{(p)}, \ldots n_\varrho^{(p)}\right). \end{aligned} \tag{17.}$$

Man bestimme nunmehr, unter c die kleinste positive ganze Zahl verstehend, mit welcher multiplicirt die Coefficienten c_{pq} der Functionen

$$f_p(t, t', \ldots t^{(r)})$$

sämmtlich ganze Zahlen werden, für jedes System von $r+1$ ganzen der Reihe $0, 1, \ldots (c-1)$ entnommenen Zahlen $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}', \ldots \mathfrak{t}^{(r)}$ die Reste, welche bleiben, wenn man von jeder der Grössen

$$f_0(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}', \ldots \mathfrak{t}^{(r)}),\ f_1(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}', \ldots \mathfrak{t}^{(r)}),\ \ldots\ f_r(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}', \ldots \mathfrak{t}^{(r)})$$

die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl subtrahirt. Die verschiedenen auf diese Weise sich ergebenden Restsysteme, deren Complex mit N bezeichnet werde, seien

$$(\overset{1}{\nu}, \overset{1}{\nu}{}', \ldots \overset{1}{\nu}{}^{(r)}),\ (\overset{2}{\nu}, \overset{2}{\nu}{}', \ldots \overset{2}{\nu}{}^{(r)}),\ \text{u. s. w.}$$

Ist d die Anzahl derjenigen Systeme, welche das Restsystem $(0, 0, \ldots 0)$ liefern, so ist die Anzahl der verschiedenen in N enthaltenen Restsysteme gleich $\frac{c^{r+1}}{d}$.

Ebenso bestimme man, unter c' die kleinste positive ganze Zahl verstehend, mit der multiplicirt die Coefficienten $\frac{c_{pq} b_p}{a_q}$ der Functionen

$$\frac{1}{a_q} f'_q(b_0 u, b_1 u', \ldots b_r u^{(r)})$$

sämmtlich ganze Zahlen werden, für jedes System von $r+1$ ganzen der Reihe $0, 1, \ldots (c'-1)$ entnommenen Zahlen $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \ldots \mathfrak{n}^{(r)}$ die Reste, welche bleiben, wenn man von jeder der Grössen

$$\frac{1}{a_0} f'_0(b_0 \mathfrak{n}, b_1 \mathfrak{n}', \ldots b_r \mathfrak{n}^{(r)}),\ \frac{1}{a_1} f'_1(b_0 \mathfrak{n}, b_1 \mathfrak{n}', \ldots b_r \mathfrak{n}^{(r)}),\ \cdots\ \frac{1}{a_r} f'_r(b_0 \mathfrak{n}, b_1 \mathfrak{n}', \ldots b_r \mathfrak{n}^{(r)})$$

die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl subtrahirt. Die verschiedenen, so sich ergebenden Restsysteme, deren Complex mit L bezeichnet werde, seien

$$(\overset{1}{\lambda}, \overset{1}{\lambda}', \dots \overset{1}{\lambda}^{(r)}),\ (\overset{2}{\lambda}, \overset{2}{\lambda}', \dots \overset{2}{\lambda}^{(r)}),\ \text{u. s. w.}$$

Ihre Anzahl ist $\frac{c^{r+1}}{d^r}$.

Nun sei $\lambda, \lambda', \dots \lambda^{(r)}$ ein beliebiges Restsystem aus dem Complexe L und $\bar{\mathfrak{l}}, \bar{\mathfrak{l}}', \dots \bar{\mathfrak{l}}^{(r)}$ irgend ein System von $r+1$ ganzen Zahlen. Dann kann man die Zahlen $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \dots \mathfrak{n}^{(r)}$ so annehmen, dass, wenn

$$\frac{1}{a_q} f'_q(b_0\mathfrak{n}, b_1\mathfrak{n}', \dots b_r\mathfrak{n}^{(r)}) = \mathfrak{L}^{(q)} \qquad (q = 0, 1, \dots r)$$

wird, die Differenzen $\mathfrak{L}^{(q)} - \lambda^{(q)}$ ganze Zahlen sind, und erhält aus diesen Gleichungen

$$\mathfrak{n}^{(p)} = f_p(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}', \dots \mathfrak{L}^{(r)}) \qquad (p = 0, 1, \dots r).$$

Setzt man nun

$$\bar{\mathfrak{l}}^{(p)} - \mathfrak{L}^{(p)} + \lambda^{(p)} = \mathfrak{l}^{(p)}$$

und versteht unter $(\nu, \nu', \dots \nu^{(r)})$ das dem Zahlensystem $(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \dots \mathfrak{l}^{(r)})$ entsprechende Restsystem des Complexes N, so ist

$$f_p(\bar{\mathfrak{l}} - \mathfrak{L} + \lambda, \bar{\mathfrak{l}}' - \mathfrak{L}' + \lambda', \dots \bar{\mathfrak{l}}^{(r)} - \mathfrak{L}^{(r)} + \lambda^{(r)}) = \nu^{(p)} + \text{ einer ganzen Zahl,}$$

und somit

$$f_p(\bar{\mathfrak{l}} + \lambda, \bar{\mathfrak{l}}' + \lambda', \dots \bar{\mathfrak{l}}^{(r)} + \lambda^{(r)}) = \nu^{(p)} + \bar{\mathfrak{n}}^{(p)}, \qquad (p = 0, 1, \dots r)$$

wo die $\bar{\mathfrak{n}}^{(p)}$ ganze Zahlen sind. Es lässt sich also jedem Werthsystem

$$(\bar{\mathfrak{l}}, \bar{\mathfrak{l}}', \dots \bar{\mathfrak{l}}^{(r)},\ \lambda, \lambda', \dots \lambda^{(r)}),$$

in welchem $\bar{\mathfrak{l}}, \bar{\mathfrak{l}}', \dots \bar{\mathfrak{l}}^{(r)}$ ganze Zahlen sind, ein Werthsystem

$$(\bar{\mathfrak{n}}, \bar{\mathfrak{n}}', \dots \bar{\mathfrak{n}}^{(r)},\ \nu, \nu', \dots \nu^{(r)}),$$

in welchem $\bar{\mathfrak{n}}, \bar{\mathfrak{n}}', \dots \bar{\mathfrak{n}}^{(r)}$ ebenfalls ganze Zahlen sind, so zuordnen, dass die $r+1$ Gleichungen

$$f_p(\lambda + \bar{\mathfrak{l}}, \lambda' + \bar{\mathfrak{l}}', \dots \lambda^{(r)} + \bar{\mathfrak{l}}^{(r)}) = \nu^{(p)} + \bar{\mathfrak{n}}^{(p)}$$

bestehen.

Ebenso lässt sich zeigen, dass jedem Werthsystem

$$(\bar{\mathfrak{n}}, \bar{\mathfrak{n}}', \dots \bar{\mathfrak{n}}^{(r)},\ \nu, \nu', \dots \nu^{(r)}),$$

wo $(\nu, \nu', \dots \nu^{(r)})$ ein Restsystem des Complexes N ist, und $\bar{\mathfrak{n}}, \bar{\mathfrak{n}}', \dots \bar{\mathfrak{n}}^{(r)}$ ganze Zahlen sind, ein Werthsystem

$$(\bar{\mathfrak{l}}, \bar{\mathfrak{l}}', \dots \bar{\mathfrak{l}}^{(r)},\ \lambda, \lambda', \dots \lambda^{(r)})$$

entspricht, in welchem $\bar{\mathfrak{l}}, \bar{\mathfrak{l}}', \dots \bar{\mathfrak{l}}^{(r)}$ ganze Zahlen sind, während $\lambda, \lambda', \dots \lambda^{(r)}$ ein Restsystem des Complexes L bilden.

Nunmehr seien

$$(\lambda_1, \lambda'_1, \dots \lambda_1^{(r)}),\ (\lambda_2, \lambda'_2, \dots \lambda_2^{(r)}),\ \dots\ (\lambda_\varrho, \lambda'_\varrho, \dots \lambda_\varrho^{(r)})$$

irgend ϱ Restsysteme des Complexes L, unter denen sich auch gleiche finden dürfen, und

$$(\bar{\mathfrak{l}}_1, \bar{\mathfrak{l}}'_1, \dots \bar{\mathfrak{l}}_1^{(r)}),\ (\bar{\mathfrak{l}}_2, \bar{\mathfrak{l}}'_2, \dots \bar{\mathfrak{l}}_2^{(r)}),\ \dots\ (\bar{\mathfrak{l}}_\varrho, \bar{\mathfrak{l}}'_\varrho, \dots \bar{\mathfrak{l}}_\varrho^{(r)})$$

ϱ Systeme ganzer Zahlen. Dann setze man in dem Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (17.) für $l_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)}$

$$l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)} + \bar{\mathfrak{l}}_1^{(p)},\ \dots\ l_\varrho^{(p)} + \lambda_\varrho^{(p)} + \bar{\mathfrak{l}}_\varrho^{(p)}$$

und bezeichne mit $\overline{\mathfrak{N}}_1^{(p)}, \dots \overline{\mathfrak{N}}_\varrho^{(p)}$ die dadurch hervorgebrachten Änderungen von $n_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)}$, setze also

$$\overline{\mathfrak{N}}_\alpha^{(p)} = f_p(\lambda_\alpha + \bar{\mathfrak{l}}_\alpha, \lambda'_\alpha + \bar{\mathfrak{l}}'_\alpha, \dots \lambda_\alpha^{(r)} + \bar{\mathfrak{l}}_\alpha^{(r)}) \qquad \binom{\alpha = 1, \dots \varrho}{p = 0, \dots r}.$$

Dann kann man für jeden Werth von α ein dem Complex N angehöriges Restsystem $(\nu_\alpha, \nu'_\alpha, \dots \nu_\alpha^{(r)})$ und $r+1$ ganze Zahlen $\bar{\mathfrak{n}}_\alpha, \bar{\mathfrak{n}}'_\alpha, \dots \bar{\mathfrak{n}}_\alpha^{(r)}$ so bestimmen, dass

$$\overline{\mathfrak{N}}_\alpha^{(p)} = \nu_\alpha^{(p)} + \bar{\mathfrak{n}}_\alpha^{(p)}$$

wird. Folglich ist

$$\text{(18.)} \quad \begin{aligned} &\sum_p a_p\, g\Big(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)},\ \frac{k_1^{(p)}}{a_1}, \dots \frac{k_\varrho^{(p)}}{a_\varrho},\ l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)} + \bar{\mathfrak{l}}_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)} + \lambda_\varrho^{(p)} + \bar{\mathfrak{l}}_\varrho^{(p)}\Big) \\ = &\sum_p b_p\, g\Big(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)},\ \frac{m_1^{(p)}}{b_1}, \dots \frac{m_\varrho^{(p)}}{b_\varrho},\ n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)} + \bar{\mathfrak{n}}_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)} + \nu_\varrho^{(p)} + \bar{\mathfrak{n}}_\varrho^{(p)}\Big). \end{aligned}$$

In dieser Gleichung lege man den Grössen $t_\alpha^{(p)}, k_\alpha^{(p)}, l_\alpha^{(p)}$ irgend welche bestimmte Werthe und den Grössen $u_\alpha^{(p)}, m_\alpha^{(p)}, n_\alpha^{(p)}$ die ihnen nach (12.) entsprechenden

Werthe bei. Nach den obigen Auseinandersetzungen ist dann die Gesammtheit der Werthe, welche der Ausdruck auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung unter der Bedingung annehmen kann, dass

$$(\bar{\mathfrak{l}}_1, \bar{\mathfrak{l}}'_1, \dots \bar{\mathfrak{l}}^{(r)}_1), \dots (\bar{\mathfrak{l}}_\varrho, \bar{\mathfrak{l}}'_\varrho, \dots \bar{\mathfrak{l}}^{(r)}_\varrho)$$

ganze Zahlen und jedes der ϱ Systeme

$$(\lambda_1, \lambda'_1, \dots \lambda^{(r)}_1), \dots (\lambda_\varrho, \lambda'_\varrho, \dots \lambda^{(r)}_\varrho)$$

ein Restsystem des Complexes L sein soll, identisch mit der Gesammtheit der Werthe, welche der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung unter der Bedingung annehmen kann, dass auch

$$(\bar{\mathfrak{n}}_1, \bar{\mathfrak{n}}'_1, \dots \bar{\mathfrak{n}}^{(r)}_1), \dots (\bar{\mathfrak{n}}_\varrho, \bar{\mathfrak{n}}'_\varrho, \dots \bar{\mathfrak{n}}^{(r)}_\varrho)$$

ganze Zahlen, und jedes der ϱ Systeme

$$(\nu_1, \nu'_1, \dots \nu^{(r)}_1), \dots (\nu_\varrho, \nu'_\varrho, \dots \nu^{(r)}_\varrho)$$

ein Restsystem des Complexes N sein soll.

Nun setze man

$$\Theta(u_1, \dots u_\varrho; m_1, \dots m_\varrho; n_1, \dots n_\varrho) = \sum_{(\bar{\mathfrak{n}})} e^{g(u_1, \dots u_\varrho; m_1, \dots m_\varrho; n_1+\bar{\mathfrak{n}}_1, \dots n_\varrho+\bar{\mathfrak{n}}_\varrho)}$$

und, falls a eine rationale und positive Zahl ist,

$$\overset{(a)}{\Theta}(u_1, \dots u_\varrho; m_1, \dots m_\varrho; n_1, \dots n_\varrho) = \sum_{(\bar{\mathfrak{n}})} e^{ag\left(u_1, \dots u_\varrho; \frac{m_1}{a}, \dots \frac{m_\varrho}{a}; n_1+\bar{\mathfrak{n}}_1, \dots n_\varrho+\bar{\mathfrak{n}}_\varrho\right)}.$$

Dann folgt aus den obigen Erörterungen die Gleichung

$$\text{(I.)}\quad \begin{aligned} &\sum_{(\lambda)} \left\{ \prod_{p=0}^{p=r} \overset{(a_p)}{\Theta}(t^{(p)}_1, \dots t^{(p)}_\varrho; k^{(p)}_1, \dots k^{(p)}_\varrho; l^{(p)}_1+\lambda^{(p)}_1, \dots l^{(p)}_\varrho+\lambda^{(p)}_\varrho) \right\} \\ = &\sum_{(\nu)} \left\{ \prod_{p=0}^{p=r} \overset{(b_p)}{\Theta}(u^{(p)}_1, \dots u^{(p)}_\varrho; m^{(p)}_1, \dots m^{(p)}_\varrho; n^{(p)}_1+\nu^{(p)}_1, \dots n^{(p)}_\varrho+\nu^{(p)}_\varrho) \right\}. \end{aligned}$$

Das Summenzeichen $\sum\limits_{(\lambda)}$ hat hier folgende Bedeutung: Es sind für

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\varrho, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_\varrho, \dots \lambda^{(r)}_1, \lambda^{(r)}_2, \dots \lambda^{(r)}_\varrho$$

alle Systeme von $\varrho(r+1)$ rationalen Zahlen zu setzen, welche der Bedingung

genügen, dass für jeden Index α

$$(\lambda_\alpha, \lambda'_\alpha, \dots \lambda^{(r)}_\alpha)$$

ein Restsystem des Complexes L sein muss. Das Zeichen $\sum\limits_{(\nu)}$ hat dieselbe Bedeutung in Beziehung auf die Restsysteme des Complexes N.

Aus der vorstehenden Gleichung (I.), welche der angeführten Jacobi'schen ganz analog ist, lassen sich nun noch eine Reihe von anderen Gleichungen ableiten.

2.

Man setze, unter

$$\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}'_1, \dots \mathfrak{t}^{(r)}_1, \dots \mathfrak{t}_\varrho, \mathfrak{t}'_\varrho, \dots \mathfrak{t}^{(r)}_\varrho$$

ganze Zahlen verstehend, in dem Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (I.)

$$k^{(p)}_1+\mathfrak{t}^{(p)}_1, \dots k^{(p)}_\varrho+\mathfrak{t}^{(p)}_\varrho \text{ für } k^{(p)}_1, \dots k^{(p)}_\varrho.$$

Auf der rechten Seite hat man dann

$$m^{(p)}_1+\mathfrak{M}^{(p)}_1, \dots m^{(p)}_\varrho+\mathfrak{M}^{(p)}_\varrho \text{ für } m^{(p)}_1, \dots m^{(p)}_\varrho$$

zu substituiren, wenn zur Abkürzung

$$\text{(19.)}\qquad \mathfrak{M}^{(p)}_\alpha = b_p f_p\left(\frac{\mathfrak{t}_\alpha}{a_0}, \frac{\mathfrak{t}'_\alpha}{a_1}, \dots \frac{\mathfrak{t}^{(r)}_\alpha}{a_r}\right) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \dots \varrho \\ p = 0, 1, \dots r \end{pmatrix}$$

gesetzt wird. Mit Berücksichtigung der Gleichung

$$\overset{(a_p)}{\Theta}(t^{(p)}_1, \dots t^{(p)}_\varrho; k^{(p)}_1+\mathfrak{t}^{(p)}_1, \dots; l^{(p)}_1+\lambda^{(p)}_1, \dots) = \overset{(a_p)}{\Theta}(t^{(p)}_1, \dots t^{(p)}_\varrho; k^{(p)}_1, \dots; l^{(p)}_1+\lambda^{(p)}_1, \dots) e^{2\pi i \sum\limits_\alpha \mathfrak{t}^{(p)}_\alpha (l^{(p)}_\alpha+\lambda^{(p)}_\alpha)}$$

erhält man also aus (I.)

$$\begin{aligned} &\sum_{(\lambda)} \left\{ \prod_p \overset{(a_p)}{\Theta}(t^{(p)}_1, \dots t^{(p)}_\varrho; k^{(p)}_1, \dots; l^{(p)}_1+\lambda^{(p)}_1, \dots) e^{2\pi i \sum\limits_\alpha \mathfrak{t}^{(p)}_\alpha \lambda^{(p)}_\alpha} \right\} \\ = &\sum_{(\nu)} \left\{ \prod_p \overset{(b_p)}{\Theta}(u^{(p)}_1, \dots u^{(p)}_\varrho; m^{(p)}_1+\mathfrak{M}^{(p)}_1, \dots; n^{(p)}_1+\nu^{(p)}_1, \dots) e^{-2\pi i \sum\limits_\alpha \mathfrak{t}^{(p)}_\alpha l^{(p)}_\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (9.), (10.), (11.) aber ergiebt sich, wenn man in denselben

$$l_\alpha, l'_\alpha, \dots l^{(r)}_\alpha \text{ für } t, t', \dots t^{(r)}$$

und

$$\mathfrak{t}_\alpha, \mathfrak{t}'_\alpha, \dots \mathfrak{t}^{(r)}_\alpha \text{ für } v, v', \dots v^{(r)}$$

setzt, wodurch $u^{(p)}$ in $n_\alpha^{(p)}$ und $w^{(p)}$ in $\mathfrak{M}_\alpha^{(p)}$ übergeht,

$$\sum_p \mathfrak{t}_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)} = \sum_p \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}, \tag{20.}$$

woraus

$$\prod_p e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{t}_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)}} = \prod_p e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}}$$

folgt. Es ist also

$$\sum_{(\lambda)} \left\{ \prod \overset{(a_p)}{\Theta} (t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots; l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots) e^{2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{t}_\alpha^{(p)} \lambda_\alpha^{(p)}} \right\}$$
$$= \sum_{(\nu)} \left\{ \prod_p \overset{(b_p)}{\Theta} (u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mathfrak{M}_1^{(p)}, \dots; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots) e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}} \right\}.$$

Aus dieser Gleichung gehen, wenn man für das mit ($\mathfrak{t}$) zu bezeichnende System von Zahlen

$$\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_1', \dots \mathfrak{t}_1^{(r)}, \dots \mathfrak{t}_\varrho, \mathfrak{t}_\varrho', \dots \mathfrak{t}_\varrho^{(r)}$$

alle Verbindungen von $\varrho(r+1)$ Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots c'-1$ setzt, $c'^{\varrho(r+1)}$ Gleichungen hervor, die durch Addition vereinigt werden mögen. So ergiebt sich

$$\sum_{(\lambda)} \left\{ \prod_p \overset{(a_p)}{\Theta} (t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots; l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots) \sum_{\mathfrak{t}} \left(\prod_p e^{2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{t}_\alpha^{(p)} \lambda_\alpha^{(p)}} \right) \right\}$$
$$= \sum_{(\nu)} \sum_{(\mathfrak{t})} \left\{ \prod_p \overset{(b_p)}{\Theta} (u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mathfrak{M}_1^{(p)}, \dots; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots) e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}} \right\}. \tag{21.}$$

Nun ist

$$\sum_{(\mathfrak{t})} \left(\prod_p e^{2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{t}_\alpha^{(p)} \lambda_\alpha^{(p)}} \right) = \sum_{\mathfrak{t}} \prod_{p,\alpha} e^{2\pi i \mathfrak{t}_\alpha^{(p)} \lambda_\alpha^{(p)}} = \prod_{(p,\alpha)} \left(\sum_{\mathfrak{t}=0}^{c'-1} e^{2\pi i \mathfrak{t} \lambda_\alpha^{(p)}} \right).$$

Nach der Definition der Grössen $\lambda_\alpha^{(p)}$ aber ist $0 \leq \lambda_\alpha^{(p)} < 1$ und zugleich $c'\lambda_\alpha^{(p)}$ eine ganze Zahl, also

$$\sum_{\mathfrak{t}=0}^{c'-1} e^{2\pi i \mathfrak{t} \lambda_\alpha^{(p)}} = \begin{cases} c', \text{ wenn } \lambda_\alpha^{(p)} = 0 \\ 0 \text{ in jedem anderen Falle.} \end{cases}$$

Folglich hat

$$\prod_{(p,\alpha)} \sum_{\mathfrak{t}=0}^{c'-1} e^{2\pi i \mathfrak{t} \lambda_\alpha^{(p)}}$$

nur, wenn die Grössen

$$\lambda_1, \lambda_1', \dots \lambda_1^{(r)}, \dots \lambda_\varrho, \lambda_\varrho', \dots \lambda_\varrho^{(r)}$$

sämmtlich gleich Null sind, einen von Null verschiedenen Werth, der dann gleich $c'^{\varrho(r+1)}$ ist.

Hiernach ergiebt sich aus (21.)

$$c'^{\varrho(r+1)} \prod_p \overset{(a_p)}{\Theta} (t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots k_\varrho^{(p)}; l_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)})$$
$$= \sum_{(\nu)} \sum_{(\mathfrak{t})} \left\{ \prod_p \overset{(b_p)}{\Theta} (u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mathfrak{M}_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)} + \mathfrak{M}_\varrho^{(p)}; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)} + \nu_\varrho^{(p)}) e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}} \right\}. \tag{II.}$$

Die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich in manchen Fällen in eine andere, die eine geringere Anzahl von Gliedern hat, verwandeln. Es sei $\mu_\alpha^{(p)}$ der Rest, welcher bleibt, wenn man von der Grösse $\mathfrak{M}_\alpha^{(p)}$ die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl abzieht, und

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(p)} = \mu_\alpha^{(p)} + \overline{\mathfrak{m}}_\alpha^{(p)}.$$

Dann kann man die vorstehende Gleichung so schreiben:

$$c'^{\varrho(r+1)} \prod_p \overset{(a_p)}{\Theta} (t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots; l_1^{(p)}, \dots)$$
$$= \sum_{(\nu)} \sum_{(\mathfrak{t})} \left\{ \prod_p \overset{(b_p)}{\Theta} (u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mu_1^{(p)}, \dots; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots) e^{-2\pi i \sum_\alpha (\mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)} - \overline{\mathfrak{m}}_\alpha^{(p)} (n_\alpha^{(p)} + \nu_\alpha^{(p)}))} \right\}. \tag{22.}$$

Man kann nun für jedes Restsystem $(\nu_\alpha, \nu_\alpha', \dots \nu_\alpha^{(r)})$ ein System ganzer Zahlen

$$(\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{l}_\alpha', \dots \mathfrak{l}_\alpha^{(r)})$$

so bestimmen, dass die $r+1$ Gleichungen

$$\mathfrak{N}_\alpha^{(p)} = f_p(\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{l}_\alpha', \dots \mathfrak{l}_\alpha^{(r)}) \qquad (p = 0, 1, \dots r) \tag{23.}$$

bestehen, und dass die Differenzen $\mathfrak{N}_\alpha^{(p)} - \nu_\alpha^{(p)}$ ganze Zahlen werden. Dann ist nach (11.)

$$\sum_p \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} \mathfrak{N}_\alpha^{(p)} = \sum_p \mathfrak{t}_\alpha^{(p)} \mathfrak{l}_\alpha^{(p)} \tag{24.}$$

und somit

$$e^{2\pi i \sum\limits_{p,\alpha} (\mathfrak{m}_\alpha^{(p)} \pm \mu_\alpha^{(p)}) \mathfrak{N}_\alpha^{(p)}} = 1,$$

$$e^{2\pi i \sum\limits_{p,\alpha} \mathfrak{m}_\alpha^{(p)} \nu_\alpha^{(p)}} = e^{2\pi i \sum\limits_{p,\alpha} \mathfrak{m}_\alpha^{(p)} \mathfrak{N}_\alpha^{(p)}} = e^{-2\pi i \sum\limits_{p,\alpha} \mu_\alpha^{(p)} \mathfrak{N}_\alpha^{(p)}},$$

$$e^{-2\pi i \sum\limits_{p,\alpha} (\mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)} - \mathfrak{m}_\alpha^{(p)}(n_\alpha^{(p)} + \nu_\alpha^{(p)}))} = e^{-2\pi i \sum\limits_{p,\alpha} \mu_\alpha^{(p)}(n_\alpha^{(p)} + \mathfrak{N}_\alpha^{(p)})}.$$

Die Coefficienten $\frac{c_{pq} b_p}{a_q}$ der $r+1$ Functionen $b_p f_p\left(\frac{v}{a_0}, \frac{v'}{a_1}, \dots \frac{v^{(r)}}{a_r}\right)$ verwandeln sich in ganze Zahlen, wenn sie mit c' multiplicirt werden. Man bestimme daher für jedes System von $r+1$ ganzen, der Reihe $0, 1, \dots c'-1$ entnommenen Zahlen $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}', \dots \mathfrak{k}^{(r)}$ die Reste, welche bleiben, wenn man von jeder der Grössen

$$b_0 f_0\left(\frac{\mathfrak{k}}{a_0}, \frac{\mathfrak{k}'}{a_1}, \dots \frac{\mathfrak{k}^{(r)}}{a_r}\right), \quad b_1 f_1\left(\frac{\mathfrak{k}}{a_0}, \frac{\mathfrak{k}'}{a_1}, \dots \frac{\mathfrak{k}^{(r)}}{a_r}\right), \quad \dots \quad b_r f_r\left(\frac{\mathfrak{k}}{a_0}, \frac{\mathfrak{k}'}{a_1}, \dots \frac{\mathfrak{k}^{(r)}}{a_r}\right)$$

die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl subtrahirt. Die verschiedenen auf diese Weise sich ergebenden Restsysteme, deren Complex mit M bezeichnet werde, seien

$$(\overset{1}{\mu}, \overset{1}{\mu'}, \dots \overset{1}{\mu^{(r)}}),\ (\overset{2}{\mu}, \overset{2}{\mu'}, \dots \overset{2}{\mu^{(r)}}),\ \dots.$$

Ist d'' die Anzahl derjenigen Systeme, welche das Restsystem $(0, 0, \dots 0)$ liefern, so ist die Anzahl der verschiedenen in M enthaltenen Restsysteme $g = \frac{c'^{r+1}}{d''}$. Dann kommt auch jedes andere System d'' mal vor. In der Gleichung (22.) sind daher in der $\sum\limits_{(\mathfrak{k})}$ je d''^{ϱ} Glieder einander gleich, und folglich ist

$$\text{(IIa.)} \quad \begin{aligned} & g^\varrho \prod_p \overset{(a_p)}{\Theta}(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots k_\varrho^{(p)}; l_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)}) \\ &= \sum_{(\nu)} \sum_{(\mu)} \left\{ \prod_p \overset{(b_p)}{\Theta}(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mu_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)} + \mu_\varrho^{(p)}; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)} + \nu_\varrho^{(p)}) e^{-2\pi i \sum\limits_\alpha \mu_\alpha^{(p)}(n_\alpha^{(p)} + \mathfrak{N}_\alpha^{(p)})} \right\}. \end{aligned}$$

Genau in derselben Weise gelangt man, indem man in der obigen Deduction die beiden Seiten der Gleichung (I.) vertauscht, zu einer dritten Relation. Es sei $(\mathfrak{m})$ das System der Zahlen

$$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1', \dots \mathfrak{m}_1^{(r)}, \dots \mathfrak{m}_\varrho, \mathfrak{m}_\varrho', \dots \mathfrak{m}_\varrho^{(r)}.$$

Für jede dieser $\varrho(r+1)$ Zahlen sind die Werthe $0, 1, \dots c-1$ zu setzen, so

dass $(\mathfrak{m})$ im ganzen $c^{\varrho(r+1)}$ Systeme von Zahlen durchläuft. Es sei ferner

$$\text{(25.)} \qquad \mathfrak{K}_\alpha^{(p)} = f_p'(\mathfrak{m}_\alpha, \mathfrak{m}_\alpha', \dots \mathfrak{m}_\alpha^{(r)}).$$

Dann ist

$$\text{(III.)} \quad \begin{aligned} & c^{\varrho(r+1)} \prod_p \overset{(b_p)}{\Theta}(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)}; n_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)}) \\ &= \sum_{(\lambda)} \sum_{(\mathfrak{m})} \left\{ \prod_p \overset{(a_p)}{\Theta}(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)} + \mathfrak{K}_1^{(p)}, \dots k_\varrho^{(p)} + \mathfrak{K}_\varrho^{(p)}; l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)} + \lambda_\varrho^{(p)}) e^{-2\pi i \sum\limits_\alpha \mathfrak{K}_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)}} \right\}. \end{aligned}$$

Man bestimme nun für jedes System von $r+1$ ganzen der Reihe $0, 1, \dots c-1$ entnommenen Zahlen $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \dots \mathfrak{m}^{(r)}$ die Reste, welche bleiben, wenn man von jeder der Grössen

$$f_0'(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \dots \mathfrak{m}^{(r)}),\ f_1'(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \dots \mathfrak{m}^{(r)}),\ \dots\ f_r'(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \dots \mathfrak{m}^{(r)})$$

die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl subtrahirt. Die verschiedenen auf diese Weise sich ergebenden Restsysteme, deren Complex mit K bezeichnet werde, seien

$$(\overset{1}{\varkappa}, \overset{1}{\varkappa'}, \dots \overset{1}{\varkappa^{(r)}}),\ (\overset{2}{\varkappa}, \overset{2}{\varkappa'}, \dots \overset{2}{\varkappa^{(r)}}),\ \dots.$$

Ist d''' die Anzahl derjenigen Systeme, welche das Restsystem $(0, 0, \dots 0)$ liefern, so kommt auch jedes andere Restsystem d''' mal vor, und die Anzahl der verschiedenen in K enthaltenen Restsysteme ist $h = \frac{c^{r+1}}{d'''}$. Dann ist

$$\text{(IIIa.)} \quad \begin{aligned} & h^\varrho \prod_p \overset{(b_p)}{\Theta}(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)}; n_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)}) \\ &= \sum_{(\lambda)} \sum_{(\varkappa)} \left\{ \prod_p \overset{(a_p)}{\Theta}(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)} + \varkappa_1^{(p)}, \dots k_\varrho^{(p)} + \varkappa_\varrho^{(p)}; l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)} + \lambda_\varrho^{(p)}) e^{-2\pi i \sum\limits_\alpha \varkappa_\alpha^{(p)}(l_\alpha^{(p)} + \mathfrak{L}_\alpha^{(p)})} \right\}. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Grössen $\mathfrak{L}_\alpha^{(p)}$ sind so zu wählen, dass die Differenzen $\mathfrak{L}_\alpha^{(p)} - \lambda_\alpha^{(p)}$ ganze Zahlen werden, und dass

$$\text{(26.)} \qquad \mathfrak{L}_\alpha^{(p)} = \frac{1}{a_p} f_p'(b_0 \mathfrak{n}, b_1 \mathfrak{n}', \dots b_r \mathfrak{n}^{(r)})$$

wird, wo $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \dots \mathfrak{n}^{(r)}$ ganze Zahlen sind. Daraus folgt, dass

$$\sum_p \mathfrak{K}_\alpha^{(p)} \mathfrak{L}_\alpha^{(p)} = \sum_p \mathfrak{m}_\alpha^{(p)} \mathfrak{n}_\alpha^{(p)}$$

eine ganze Zahl ist.

Nun lässt sich aber auch dieselbe Betrachtung, durch welche eben die Gleichungen (III.) und (IIIa.) aus (I.) abgeleitet wurden, auf die Gleichung (II.) anwenden und führt dann zu der Relation

$$\text{(IV.)}\quad \begin{aligned} & c'^{\varrho(r+1)}\sum_{(\mathfrak{m})}\Big\{\prod_p \overset{(a_p)}{\Theta}(t_1^{(p)},\dots t_\varrho^{(p)};\ k_1^{(p)}+\mathfrak{K}_1^{(p)},\dots k_\varrho^{(p)}+\mathfrak{K}_\varrho^{(p)};\ l_1^{(p)},\dots l_\varrho^{(p)})\,e^{-2\pi i\sum_\alpha \mathfrak{K}_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)}}\Big\} \\ = {} & c^{\varrho(r+1)}\sum_{(\mathfrak{t})}\Big\{\prod_p \overset{(b_p)}{\Theta}(u_1^{(p)},\dots u_\varrho^{(p)};\ m_1^{(p)}+\mathfrak{M}_1^{(p)},\dots m_\varrho^{(p)}+\mathfrak{M}_\varrho^{(p)};\ n_1^{(p)},\dots n_\varrho^{(p)})\,e^{-2\pi i\sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}}\Big\}, \end{aligned}$$

und da hier jedes Glied auf der rechten Seite $d^{n\varrho}$ mal, auf der linken $d^{m\varrho}$ mal vorkommt,

$$\text{(IVa.)}\quad \begin{aligned} & g^{\varrho}\sum_{(\varkappa)}\Big\{\prod_p \overset{(a_p)}{\Theta}(t_1^{(p)},\dots t_\varrho^{(p)};\ k_1^{(p)}+\varkappa_1^{(p)},\dots k_\varrho^{(p)}+\varkappa_\varrho^{(p)};\ l_1^{(p)},\dots l_\varrho^{(p)})\,e^{-2\pi i\sum_\alpha \varkappa_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)}}\Big\} \\ = {} & h^{\varrho}\sum_{(\mu)}\Big\{\prod_p \overset{(b_p)}{\Theta}(u_1^{(p)},\dots u_\varrho^{(p)};\ m_1^{(p)}+\mu_1^{(p)},\dots m_\varrho^{(p)}+\mu_\varrho^{(p)};\ n_1^{(p)},\dots n_\varrho^{(p)})\,e^{-2\pi i\sum_\alpha \mu_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}}\Big\}. \end{aligned}$$

Bei der Herleitung ist die der Gleichung (20.) analoge Gleichung

$$\text{(27.)}\qquad \sum_p \mathfrak{m}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)} = \sum_p \mathfrak{K}_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)}$$

zu benutzen. Zur besseren Übersicht der angewandten Bezeichnungen füge ich noch folgende Bemerkung hinzu: Jedes der vier Systeme von Grössen

$$t_\alpha^{(p)},\quad l_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{l}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{L}_\alpha^{(p)}$$

hängt mit dem entsprechenden der vier Systeme

$$u_\alpha^{(p)},\quad n_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{N}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{n}_\alpha^{(p)}$$

durch die nämlichen linearen Gleichungen zusammen; ebenso jedes der vier Systeme

$$v_\alpha^{(p)},\quad k_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{k}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{K}_\alpha^{(p)}$$

mit dem entsprechenden der vier Systeme

$$w_\alpha^{(p)},\quad m_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{M}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{m}_\alpha^{(p)}.$$

Diese linearen Gleichungen sind so beschaffen, dass aus ihnen die Gleichung (11.) folgt, also auch die Gleichungen (15.), (20.), (24.) und (27.). Jede der

ganzen Zahlen

$$\begin{aligned} &\mathfrak{l}_\alpha^{(p)},\ \mathfrak{m}_\alpha^{(p)} \text{ bewegt sich von } 0 \text{ bis } c-1 \\ &\mathfrak{k}_\alpha^{(p)},\ \mathfrak{n}_\alpha^{(p)} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 0 \text{ bis } c'-1. \end{aligned}$$

Für einen bestimmten Werth von α nehmen die von ihnen linear abhängenden Systeme rationaler Zahlen

$$\mathfrak{K}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{L}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{M}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{N}_\alpha^{(p)} \qquad\qquad (p=0,1,\dots r)$$

die beiden mittleren c^{r+1}, die beiden äusseren c'^{r+1} Systeme von Werthen an. Zieht man von jeder derselben die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl ab, so erhält man die positiven echten Brüche

$$\varkappa_\alpha^{(p)},\quad \lambda_\alpha^{(p)},\quad \mu_\alpha^{(p)},\quad \nu_\alpha^{(p)}$$

und zwar jedes System dieser Brüche

$$d''',\quad d',\quad d'',\quad d$$

mal.