(IV.) Auch wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots$$

complexe (imaginäre) Werthe haben und die Reihe unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder eine endliche Summe hat, nähert sich das Product

$$P_n = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n),$$

wenn n ohne Ende wächst, einer bestimmten Grenze, die von Null verschieden ist, wofern nicht eine der Grössen $u_0, u_1, \ldots$ gleich -1 ist.

Es werde $u_n = v_n + iw_n$ und

$$(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n) = p_n + iq_n,$$
$$\sqrt{p_n^2+q_n^2} = s_n$$

gesetzt, wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist. Dann hat man:

$$s_n = \sqrt{(1+v_0)^2+w_0^2}\,.\,\sqrt{(1+v_1)^2+w_1^2}\,\ldots\ldots\sqrt{(1+v_n)^2+w_n^2}.$$

Nimmt man nun m so gross an, dass für jeden Werth von n, welcher $\geqq m$ ist, die Summe der absoluten Beträge von v_n und w_n kleiner als 1 ist, so kann man

$$\sqrt{(1+v_n)^2+w_n^2} = 1+v_n+\varepsilon_n w_n$$

setzen, wo ε_n dasselbe Zeichen wie w_n hat, dem absoluten Betrage nach aber kleiner als 1 ist. Bezeichnet man darauf den absoluten Betrag von v_n durch v_n', so liegt $\frac{s_n}{s_m}$, wenn $n > m$ ist, zwischen den Grenzen

$$(1-v_{m+1}'-\varepsilon_{m+1}w_{m+1})(1-v_{m+2}'-\varepsilon_{m+2}w_{m+2})\ldots\ldots(1-v_n'-\varepsilon_n w_n)$$

und

$$(1+v_{m+1}'+\varepsilon_{m+1}w_{m+1})(1+v_{m+2}'+\varepsilon_{m+2}w_{m+2})\ldots\ldots(1+v_n'+\varepsilon_n w_n).$$

Beide Producte nähern sich aber, wenn n ohne Ende wächst, zufolge des Satzes (I.), bestimmten positiven Grenzen; also bleibt der Werth von $\frac{s_n}{s_m}$, und daher auch der Werth von s_n oder $\sqrt{p_n^2+q_n^2}$ stets zwischen zwei endlichen Grenzen, wie gross auch n werden mag. Mithin muss es auch für jede der Grössen p_n, q_n eine Grenze geben, welche der absolute Betrag der Grösse nicht übersteigen kann.

Nun ist aber

$$p_{n+1}+iq_{n+1} = (1+v_{n+1}+iw_{n+1})(p_n+iq_n)$$

und

$$p_{n+1}-p_n = v_{n+1}p_n - w_{n+1}q_n,$$
$$q_{n+1}-q_n = v_{n+1}q_n + w_{n+1}p_n;$$

woraus, wenn man statt n der Reihe nach $m, m+1, \ldots m+r-1$ setzt,

$$\begin{aligned} p_{m+r}-p_m &= +v_{m+1}p_m + v_{m+2}p_{m+1}+\cdots+v_{m+r}p_{m+r-1} \\ &\quad -w_{m+1}q_m - w_{m+2}q_{m+1}-\cdots-w_{m+r}q_{m+r-1} \\ q_{m+r}-q_m &= +v_{m+1}q_m + v_{m+2}q_{m+1}+\cdots+v_{m+r}q_{m+r-1} \\ &\quad +w_{m+1}p_m + w_{m+2}p_{m+1}+\cdots+w_{m+r}p_{m+r-1} \end{aligned}$$

folgt. Es hat aber jede der Reihen

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots$$
$$w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots$$

unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder eine endliche Summe; und da die absoluten Beträge von p_n, q_n, wie gross auch n werden mag, gewisse Grenzen nicht übersteigen, so müssen auch die Reihen

$$p_0v_1,\ p_1v_2,\ \ldots; \qquad p_0w_1,\ p_1w_2,\ \ldots$$
$$q_0v_1,\ q_1v_2,\ \ldots; \qquad q_0w_1,\ q_1w_2,\ \ldots$$

endliche Summen haben. Folglich kann man m so gross werden lassen, dass für jeden Werth von r die Ausdrücke auf der Rechten der vorstehenden Gleichungen, also auch $p_{m+r}-p_m$ und $q_{m+r}-q_m$, dem absoluten Betrage nach, kleiner als jede gegebene Grösse sind. Damit aber ist bewiesen, das p_n, q_n nicht blos endlich bleiben, wenn n ohne Ende wächst, sondern auch dass jede dieser beiden Grössen gegen eine bestimmte Grenze convergirt. Ferner ist klar, dass diese Grenzen nicht beide gleich Null sein können, weil sonst $s_n = \sqrt{p_n^2+q_n^2}$ für $n=\infty$ ebenfalls gleich Null sein würde; was, wie vorhin gezeigt, nicht der Fall ist,. wofern nicht eine der Grössen $u_0, u_1, \ldots$ gleich -1 ist. Dieser Fall aber kann ganz ausgeschlossen bleiben, weil dann P_n, für jeden Werth von n von einem bestimmten Werthe an, gleich Null sein würde.

(V.) Nicht selten trifft man eine unendliche Reihe an, deren Glieder

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n,\ \ldots$$

ein solches Gesetz befolgen, dass sich der Quotient $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ in eine (endliche oder unendliche) Reihe von der Form

$$1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\frac{a_3}{n^3}+\cdots$$

entwickeln lässt, wo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von n unabhängig sind, übrigens aber beliebige complexe Werthe haben können, auf die Weise, dass

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Lim} n\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1\right)=a_1\\ \operatorname{Lim} n^2\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1-\frac{a_1}{n}\right)=a_2\\ \operatorname{Lim} n^3\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1-\frac{a_1}{n}-\frac{a_2}{n^2}\right)=a_3\end{array}\right\}\text{ für } n=\infty$$

u. s. w. ist.

Wenn in diesem Falle a_μ die erste der Grössen $a_1, a_2, \ldots$ ist, welche nicht verschwindet, so dass

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} n^\mu\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1\right)=a_\mu$$

ist, und es ist erstens $\mu>1$, so wird u_n, wenn n ohne Ende zunimmt, gegen eine bestimmte, endliche und von Null verschiedene Grenze convergiren. Wird dieselbe durch u bezeichnet, so kann man ferner

$$u_n=u+\frac{v_n}{n^{\mu-1}}$$

setzen, wo v_n eine Grösse ist, die endlich bleibt, wie gross auch n werden mag.

Setzt man

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=1+\frac{k_n}{n^\mu},$$

so erhält man

$$u_n=u_0\left(1+\frac{k_1}{1^\mu}\right)\left(1+\frac{k_2}{2^\mu}\right)\cdots\left(1+\frac{k_n}{n^\mu}\right).$$

Nun ist aber $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} k_n=a_\mu$; es bleibt mithin k_n endlich, wie gross auch n werden mag. Daraus folgt, dass die Reihe

$$\frac{k_1}{1^\mu},\ \frac{k_2}{2^\mu},\ \cdots\ \frac{k_n}{n^\mu},\ \cdots$$

unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder eine endliche Summe hat, weil dies für die Reihe

$$1,\ \frac{1}{2^\mu},\ \frac{1}{3^\mu},\ \cdots\ \frac{1}{n^\mu},\ \cdots$$

gilt, was bereits für $\mu=2$ im Zusatze zu No. II gezeigt wurde, und daher auch feststeht, wenn $\mu>2$ ist. Damit ist aber nach No. IV erwiesen, dass u_n für $n=\infty$ einen bestimmten endlichen, von Null verschiedenen Werth annimmt.

Bei diesem Beweise ist allerdings vorausgesetzt worden, dass keine der Grössen $u_0, u_1, \ldots$ gleich Null sei; der Satz bleibt aber gültig, wenn diese Bedingung nur für alle Grössen der Reihe von einer bestimmten u_m an erfüllt ist. Setzt man nämlich $n=m+r$, so ist

$$\frac{u_{m+r}}{u_{m+r-1}}=1+\frac{a_\mu}{(r+m)^\mu}+\frac{a_{\mu+1}}{(r+m)^{\mu+1}}+\cdots,$$

woraus, sobald $r>m$ ist,

$$\frac{u_{m+r}}{u_{m+r-1}}=1+\frac{a_\mu}{r^\mu}+\frac{a'_{\mu+1}}{r^{\mu+1}}+\cdots$$

folgt, wo $a_\mu, a'_{\mu+1}, \ldots$ von r unabhängig sind. Mithin bekommt u_{m+r} für $r=\infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth.

Ist nun

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} u_n=u,$$

so setze man

$$u_n=v_n+iw_n,\qquad k_n=g_n+ih_n;$$

alsdann hat man:

$$u_n-u_{n-1}=\frac{g_n+ih_n}{n^\mu}(v_{n-1}+iw_{n-1}),$$

und daher, wenn man

$$g_nv_{n-1}-h_nw_{n-1}=p_n,\qquad g_nw_{n-1}+h_nv_{n-1}=q_n$$

setzt,

$$u_n-u_{n+1}=-\frac{p_{n+1}+iq_{n+1}}{(n+1)^\mu}.$$

Setzt man nun der Reihe nach $n+1, n+2, \ldots n+r-1$ statt n, wo r irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, und addirt die so entstehenden Gleichungen zu der vorstehenden, so ergiebt sich:

$$u_n - u_{n+r} = -\frac{p_{n+1} + iq_{n+1}}{(n+1)^\mu} - \cdots - \frac{p_{n+r} + iq_{n+r}}{(n+r)^\mu},$$

oder auch, wenn

$$\sigma_{n,r} = \frac{1}{(n+1)^\mu} + \cdots + \frac{1}{(n+r)^\mu}$$

ist, und $P_{n,r}$ einen Mittelwerth zwischen der grössten und der kleinsten der Grössen $p_{n+1}, \cdots p_{n+r}$, und ebenso $Q_{n,r}$ einen Mittelwerth zwischen der grössten und kleinsten der Grössen $q_{n+1}, \cdots q_{n+r}$ bezeichnet:

$$u_n - u_{n+r} = -(P_{n,r} + iQ_{n,r}) \,.\, \sigma_{n,r}\,.$$

Lässt man nun r ohne Ende wachsen, während n constant bleibt, so nähert sich u_{n+r} der Grenze u; ebenso nähert sich $\sigma_{n,r}$ einer Grenze, die durch σ_n bezeichnet werden möge, und deshalb müssen auch $P_{n,r}$, $Q_{n,r}$ gegen bestimmte Grenzen convergiren, welche P_n, Q_n sein mögen. Man erhält daher

$$u_n = u - \sigma_n(P_n + iQ_n),$$

und es ist klar, dass P_n, Q_n endlich bleiben, wie gross auch n werden mag, da dies für g_n, h_n, v_n, w_n, also auch für p_n, q_n der Fall ist, und daher Grenzen existiren müssen, die $P_{n,r}$ und $Q_{n,r}$ und mithin auch P_n, Q_n, dem absoluten Betrage nach, nicht übersteigen können. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{1}{(n+1)^\mu} + \frac{1}{(n+2)^\mu} + \frac{1}{(n+3)^\mu} + \cdots\cdots \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\mu-2}} + \frac{1}{(n+2)^2 (n+2)^{\mu-2}} + \cdots\cdots \\
&\leqq \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\cdots\right) \cdot \frac{1}{(n+1)^{\mu-2}} \\
&< \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots\right) \cdot \frac{1}{n^{\mu-2}},
\end{aligned}$$

also

$$\sigma_n < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots\right) \cdot \frac{1}{n^{\mu-2}},$$

d. h.

$$\sigma_n < \frac{1}{n^{\mu-1}}.$$

Man kann also $\sigma_n = \frac{\varepsilon_n}{n^{\mu-1}}$ setzen, wo ε_n ein echter Bruch ist, und wenn man $\varepsilon_n(P_n + iQ_n)$ durch $-v_n$ bezeichnet, so hat man:

$$u_n = u + \frac{v_n}{n^{\mu-1}},$$

und es bleibt v_n endlich, wie gross auch n werden mag.

(VI.) Wenn aber zweitens a_1 nicht Null ist, so sind drei Fälle zu unterscheiden.

(A.) Ist der reelle Theil von a_1 positiv, so wird u unendlich für $n = \infty$;

(B.) Ist der reelle Theil von a_1 Null, so bleibt zwar u_n endlich, wie gross auch n werden mag, nähert sich aber, wenn n beständig zunimmt, keiner bestimmten Grenze.

(C.) Ist der reelle Theil von a_1 negativ, so wird $u_n = 0$ für $n = \infty$.

Es sei $a_1 = g + hi$ und es werde

$$\begin{aligned}
p_n &= \left(1 + \frac{g}{m}\right)\left(1 + \frac{g}{m+1}\right) \cdots\cdots \left(1 + \frac{g}{m+n}\right), \\
q_n &= \left(1 + \frac{hi}{m}\right)\left(1 + \frac{hi}{m+1}\right) \cdots\cdots \left(1 + \frac{hi}{m+n}\right)
\end{aligned}$$

gesetzt, wo m eine ganze positive Zahl bedeuten soll, die grösser ist als der absolute Betrag sowohl von g als auch von h. Dann hat man:

$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{p_n q_n} : \frac{u_{n-1}}{p_{n-1} q_{n-1}} &= \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1} q_{n-1}}{p_n q_n} \\
&= \left(1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{g}{n+m}\right)^{-1}\left(1 + \frac{hi}{n+m}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{a_1}{n} + \cdots\right)\left(1 - \frac{g}{n} + \cdots\right)\left(1 - \frac{hi}{n} + \cdots\right) \\
&= 1 + \frac{a_2'}{n^2} + \cdots,
\end{aligned}$$

wo a_2' u. s. w. von n unabhängig ist. Mithin convergirt, nach dem vorhergehenden Satze, $\frac{u_n}{p_n q_n}$, wenn n beständig zunimmt, gegen eine bestimmte endliche und von Null verschiedene Grenze, und man kann

$$\frac{u_n}{p_n q_n} = v + \frac{v_n}{n},$$

also

$$u_n = p_n q_n \cdot \left(v + \frac{v_n}{n}\right)$$

setzen, wo v von n unabhängig ist, v_n aber stets endlich bleibt.

Setzt man $q_n = q'_n + iq''_n$, so hat man

$$q'_n q'_n + q''_n q''_n = \left(1 + \frac{h^2}{m^2}\right)\left(1 + \frac{h^2}{(m+1)^2}\right)\cdots\cdots\left(1 + \frac{h^2}{(m+n)^2}\right),$$

und es nähert sich diese Grösse nach No. I, wenn n ohne Ende wächst, einer bestimmten, von Null verschiedenen Grenze, weil die Reihe

$$\frac{h^2}{m^2},\ \frac{h^2}{(m+1)^2},\ \cdots$$

eine endliche Summe hat. Mithin bleiben auch q'_n und q''_n stets endlich.

Bezeichnet man $\frac{h}{m+n}$ durch t_n, so hat man

$$q'_n + iq''_n = (1 + it_n)(q'_{n-1} + iq''_{n-1}),$$

also

$$\begin{aligned} q'_n - q'_{n-1} &= -t_n q''_{n-1}, \\ q''_n - q''_{n-1} &= t_n q'_{n-1}. \end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen statt n der Reihe nach $n, n+1, \ldots n+r$ und addirt die so sich ergebenden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} q'_{n+r} - q'_{n-1} &= -(t_n + t_{n+1} + \cdots + t_{n+r})\, q''_{n,r} \\ q''_{n+r} - q''_{n-1} &= (t_n + t_{n+1} + \cdots + t_{n+r})\, q'_{n,r}, \end{aligned}$$

wo

$q'_{n,r}$ einen Mittelwerth der Grössen $q'_{n-1}, q'_n, \ldots q'_{n+r-1}$

und

$q''_{n,r}$ einen Mittelwerth der Grössen $q''_{n-1}, q''_n, \ldots q''_{n+r-1}$

bedeutet. Nun bleiben aber die Werthe der Grössen auf der Linken dieser Gleichungen stets endlich, während die Summe

$$t_n + t_{n+1} + \cdots + t_{n+r} = \frac{h}{m+n} + \frac{h}{m+n+1} + \cdots + \frac{h}{m+n+r},$$

wenn r wächst und n constant bleibt, über jede Grenze hinaus zunimmt. Daher müssen $q'_{n,r}, q''_{n,r}$ beide sich der Null nähern, wenn r ohne Ende zunimmt, n aber unverändert bleibt.

Es werde nun n so gross angenommen, dass die Differenz zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern der Reihe $q'_{n-1}, q'_n, q'_{n+1}, \cdots$ dem absoluten Betrage nach kleiner sei als eine beliebig angenommene, noch so kleine Zahl E; was möglich ist, weil

$$q'_{n+r} - q'_{n+r-1} = -t_{n+r} q''_{n+r-1},$$

und t_{n+r} beliebig klein werden kann, wenn nur n gross genug angenommen wird, während q''_{n+r-1} stets endlich bleibt. Ferner sei r so gross, dass auch der absolute Betrag von $q'_{n,r}$ kleiner als E ist. Haben dann in der Reihe $q'_{n-1}, q'_n, \cdots q'_{n+r-1}$ sämmtliche Glieder dasselbe Zeichen, so ist $q'_{n,r}$ dem absoluten Betrage nach grösser als das kleinste derselben; dieses muss daher von Null weniger verschieden sein als E. Im entgegengesetzten Fall aber muss es zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder von verschiedenen Zeichen geben, und da die Differenz derselben kleiner als E ist, so folgt, dass jedes von ihnen kleiner als E ist. Man sieht also, dass man, wenn man in der Reihe $q'_0, q'_1, \ldots$ von irgend einem Gliede aus weiter geht, stets auf eines kommen muss, das dem absoluten Betrage nach kleiner als jede gegebene Grösse ist. Dasselbe gilt für die Reihe $q''_0, q''_1, \ldots$

Nun nähert sich aber der Werth von $q'_n q'_n + q''_n q''_n$, wenn n beständig zunimmt, einer bestimmten Grenze G, und wenn daher wieder E eine beliebig kleine Grösse ist, so muss man, ausgehend von einem beliebigen Gliede der Reihe $q_0, q_1, \ldots$, unter den folgenden stets auf eines kommen, für welches die Bedingungen

$$\begin{gathered} G - E < q'_n q'_n + q''_n q''_n < G + E, \\ q''_n q''_n < E \end{gathered}$$

erfüllt werden. Dann hat man

$$G - 2E < q'_n q'_n < G + E;$$

d. h. es muss auf jedes Glied der Reihe $q'_0, q'_1, \ldots$, wie weit vom Anfange entfernt es auch sei, stets wieder ein solches Glied folgen, welches seinem absoluten Betrage nach der Grenze $\sqrt{G}$ beliebig nahe kommt. Dasselbe gilt von den Gliedern der Reihe $q''_0, q''_1, \ldots$; und somit ist erwiesen, dass sich q_n, wenn n beständig wächst, keiner bestimmten Grenze nähert, sondern sowohl der reelle, als auch der imaginäre Theil dieser Grösse zwischen zwei verschiedenen endlichen Grenzen schwankt.

Für das Product p_n folgt unmittelbar aus No. II, in Verbindung mit dem Umstande, dass die Reihe

$$\frac{g}{m},\ \frac{g}{m+1},\ \cdots\ \frac{g}{m+n},\ \cdots$$

keine endliche Summe hat:

$$\lim_{n=\infty} p_n = \infty, \text{ wenn } g \text{ positiv ist,}$$
$$\lim_{n=\infty} p_n = 0\ , \text{ wenn } g \text{ negativ ist.}$$

Aus der Formel

$$u_n = \left(v+\frac{v_n}{n}\right)p_n q_n$$

ergiebt sich jetzt ohne Weiteres Folgendes:

1. Wenn g positiv ist, so wird der absolute Betrag von u_n unendlich gross für $n=\infty$;
2. Wenn g negativ ist, so wird derselbe unendlich klein für $n=\infty$;
3. Wenn g gleich Null ist, so nähert sich derselbe, wenn n beständig zunimmt, zwar einer bestimmten Grenze, aber da dann

$$u_n = vq_n + \frac{v_n q_n}{n}$$

und

$$\lim_{n=\infty} \frac{v_n q_n}{n} = 0$$

ist, so convergirt u_n selbst gegen keinen bestimmten Werth, sondern schwankt.

Anmerkung. Setzt man, was hier absichtlich vermieden ist, die Theorie der Potenzen mit beliebigen Exponenten voraus, so lässt sich der vorstehende Satz viel kürzer begründen. Denn es ist

$$\frac{u_n}{n^{g+hi}} : \frac{u_{n-1}}{(n-1)^{g+hi}} = \frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{g+hi} = \left(1+\frac{g+hi}{n}+\cdots\right)\left(1-\frac{g+hi}{n}+\cdots\right)$$
$$= \left(1+\frac{a_2'}{n^2}+\cdots\right),$$

folglich nähert sich, wenn n ohne Ende zunimmt, $\frac{u_n}{n^{g+hi}}$ nach No. V einer

bestimmten, von Null verschiedenen Grenze; und wenn man dieselbe durch v bezeichnet, so kann man

$$\frac{u_n}{n^{g+hi}} = v + \frac{v_n}{n},$$

oder

$$u_n = n^g.\left(v+\frac{v_n}{n}\right)[\cos(h\log n) + i\sin(h\log n)]$$

setzen, wo v_n stets endlich bleibt. Aus dieser Formel folgt der zu beweisende Satz unmittelbar.

(VII.) Wenn wieder

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{g+hi}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots$$

ist, so weiss man, dass die Summe

$$\text{(A.)} \qquad u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n,$$

wenn n ohne Ende zunimmt, gegen eine bestimmte endliche Grenze convergirt, sobald der absolute Betrag von x kleiner als 1 ist; so wie auch, dass sie divergirt, wenn der genannte Betrag grösser als 1 ist. Beides gilt auch, wenn t_n den absoluten Betrag von u_n, ξ den von x bedeutet, für die Summe

$$\text{(B.)} \qquad t_0 + t_1\xi + t_2\xi^2 + \cdots + t_n\xi^n.$$

Ist aber der absolute Betrag von x gleich 1, so gelten folgende Sätze.

1) Die Summe (A.) convergirt, wofern nicht $x=1$ ist, sobald g negativ, die Summe (B.) aber nur, wenn $g<-1$ ist.

2) Wenn aber $x=1$ ist, so convergirt die Reihe (A.) — und dann gleichzeitig auch (B.) — nur in dem Falle, wo $g<-1$ ist; sie bleibt zwar endlich, wie gross auch n werden mag, nähert sich aber keiner bestimmten Grenze, wenn $g=-1$ und $h \lesseqgtr 0$ ist; und divergirt in jedem anderen Falle.

3) Beide Reihen divergiren, wenn $g \gtreqless 0$ ist, indem dann weder $u_n x^n$, noch $t_n\xi$, für $n=\infty$ unendlich klein werden.

Da der absolute Betrag von x der Einheit gleich sein soll, so ist die Summe (B.) gleich

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_n.$$

Ferner, wenn

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1+\frac{g+hi}{n}+\frac{g'+h'i}{n^2}+\cdots$$

ist, so hat man

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \sqrt{\left(1+\frac{g}{n}+\frac{g'}{n^2}+\cdots\right)^2+\left(\frac{h}{n}+\frac{h'}{n^2}+\cdots\right)^2}$$
$$= 1+\frac{g}{n}+\cdots.$$

Setzt man nun, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet, die grösser ist als der absolute Betrag von g, wieder

$$p_n = \left(1+\frac{g}{m}\right)\left(1+\frac{g}{m+1}\right)\cdots\left(1+\frac{g}{m+n}\right),$$

so kann man (nach No. VI), wenn man t_n an die Stelle der dort mit u_n bezeichneten Grösse treten lässt, wo dann $q_n = 1$ wird,

$$t_n = \left(t+\frac{t'_n}{n}\right)p_n$$

setzen, wo t von n unabhängig ist, t'_n aber stets endlich bleibt.

Nun ist

$$p_n-p_{n-1} = \frac{g}{m+n}\cdot p_{n-1},$$
$$(m+n).p_n-(m+n-1).p_{n-1} = (g+1).p_{n-1};$$

setzt man also in dieser Gleichung statt n der Reihe nach $1, 2, \ldots n$, so erhält man durch Zusammenziehung der so entstehenden Gleichungen:

$$(m+n)p_n-mp_0 = (g+1)(p_0+p_1+\cdots+p_{n-1}).$$

Aus dieser Gleichung aber ist zu ersehen, dass es, wofern nicht $g+1=0$ ist, zur Convergenz der Summe

$$p_0+p_1+\cdots+p_{n-1}$$

hinreichend und nothwendig ist, dass $(m+n)p_n$ einer bestimmten Grenze sich nähere, wenn n beständig zunimmt. Dies kann aber, da

$$\frac{(m+n)p_n}{(m+n-1)p_{n-1}} = \left(1+\frac{g}{m+n}\right)\left(1-\frac{1}{m+n}\right)^{-1}$$
$$= \left(1+\frac{g}{n}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{n}+\cdots\right)$$
$$= 1+\frac{g+1}{n}+\cdots$$

ist, nur dann geschehen, wenn $g+1$ negativ ist (indem der Fall $g+1=0$ ausgeschlossen ist), wo dann $(m+n)p_n$ für $n=\infty$ (gemäss No. VI) unendlich klein wird.

Ist $g+1=0$, so hat man

$$p_n = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{m+n}\right) = \frac{m-1}{m+n}$$

und

$$p_0+p_1+\cdots+p_n = (m-1)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right).$$

Diese Summe ist aber (No. II Zus.) divergent. Mithin ist es zur Convergenz der Summe

$$p_0+p_1+\cdots+p_n$$

nothwendig und hinreichend, dass $g<-1$ sei.

Nun ist aber

$$t_0+t_1+\cdots+t_n = t_0+t(p_1+\cdots+p_n)+(t'_1p_1)+\frac{1}{2}(t'_2p_2)+\cdots+\frac{1}{n}(t'_np_n).$$

Wenn daher $g<-1$ ist, so wird auch $t_0+t_1+\cdots+t_n$ convergiren, indem

$$(t'_1p_1)+\frac{1}{2}(t'_2p_2)+\cdots+\frac{1}{n}(t'_np_n)$$

gleichzeitig mit $p_1+p_2+\cdots+p_n$ convergirt.

Ist $g \geqq -1$, aber <0, so divergirt von diesen beiden letzten Summen die zweite, während die erste, da

$$\frac{p_n}{n}:\frac{p_{n-1}}{n-1} = \frac{p_n}{p_{n-1}}\cdot\frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{g}{n}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{g-1}{n}+\cdots$$

ist, noch convergirt; folglich divergirt auch $t_0+t_1+\cdots+t_n$. Dasselbe findet statt, wenn $g \geqq 0$ ist, weil dann t_n für $n=\infty$ nicht unendlich klein wird. Man sieht also, dass die Reihe (B.) convergirt oder divergirt, je nachdem $g<-1$ ist oder nicht.

Zur Convergenz der Summe (A.) ist zunächst erforderlich, dass $\lim\limits_{n=\infty} t_n = 0$ sei, weshalb $g<0$ sein muss. Dies vorausgesetzt, werde

$$\left(1+\frac{g+hi}{m}\right)\left(1+\frac{g+hi}{m+1}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{g+hi}{m+n}\right) = P_n$$

gesetzt, so hat man:

$$\frac{u_n}{P_n}:\frac{u_{n-1}}{P_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{P_{n-1}}{P_n} = \left(1+\frac{g+hi}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{g+hi}{m+n}\right)^{-1} = 1+\frac{a_2'}{n^2}+\cdots.$$

Mithin kann man (nach No. V)

$$u_n = P_n\left(v+\frac{w_n}{n}\right)$$

setzen, wo wieder v von n unabhängig ist, w_n aber stets endlich bleibt. Ferner sei

$$s_n = u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n$$
$$S_n = P_1 x + P_2 x^2 + \cdots + P_n x^n$$
$$S_n' = w_1 P_1 x + \frac{1}{2} w_2 P_2 x^2 + \cdots + \frac{1}{n} w_n P_n x^n;$$

dann hat man

$$s_n = vS_n + S_n'.$$

Nun ist

$$\frac{P_n}{n}:\frac{P_{n-1}}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{g+hi}{n}+\cdots\right) = 1+\frac{g-1+hi}{n}+\cdots,$$

und da $g-1<-1$ ist, so convergirt, wenn man durch Q_n den absoluten Betrag von P_n bezeichnet, nach dem vorher Bewiesenen die Summe

$$\frac{1}{1}Q_1+\frac{1}{2}Q_2+\cdots+\frac{1}{n}Q_n,$$

und daher auch, indem $x^n w_n$ stets endlich bleibt, S_n'. Daraus folgt, dass s_n gleichzeitig mit S_n convergirt, schwankt oder divergirt.

Es ist aber

$$(1-x)S_n = P_1 x + (P_2-P_1)x^2 + (P_3-P_2)x^3 + \cdots + (P_n-P_{n-1})x^n - P_n x^{n+1}$$
$$= P_1 x + (g+hi)\cdot\left\{\frac{P_1}{m+2}x+\frac{P_2}{m+3}x^2+\cdots+\frac{P_{n-1}}{m+n}x^{n-1}\right\}x - P_n x^{n+1}.$$

Die eingeklammerte Summe convergirt, was gerade so gezeigt wird, wie für S_n', und es ist $\lim\limits_{n=\infty} P_n = 0$, weil g negativ angenommen worden; folglich wird auch $(1-x)S_n$, und, wenn nicht $1-x=0$, auch S_n convergiren.

Die Summe (A.) convergirt also stets, wenn $g<0$, und nicht $x=1$ ist.

Wenn aber $x=1$, so hat man

$$S_n + P_0 = P_0 + P_1 + \cdots + P_n = \frac{(m+n+1)P_{n+1} - m.P_0}{g+hi+1};$$

wie sich unmittelbar aus der im Vorhergehenden gefundenen Formel für die Summe $p_0+p_1+\cdots+p_{n-1}$ ergiebt, wenn man in derselben $g+hi$ für g und $n+1$ statt n setzt. Es wird daher, wofern nicht etwa $g=-1$ und zugleich $h=0$ ist, S_n convergiren, wenn sich $(m+n+1)P_{n+1}$ bei beständig zunehmendem Werthe von n einer bestimmten Grenze nähert. Dies kann, da

$$\frac{(m+n+1)P_{n+1}}{(m+n)P_n} = \left(1+\frac{g+hi}{m+n+1}\right)\left(1+\frac{m+1}{n}\right)\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-1} = 1+\frac{g+1+hi}{n}+\cdots$$

ist, nur geschehen, wenn $g+1<0$ ist, indem der Fall $g+1=0$, $h=0$ ausgeschlossen ist.

Ist $g+1=0$ und $h=0$, so ist die Divergenz der Summe $P_0+P_1+\cdots+P_n$ bereits im Vorhergehenden bewiesen.

Folglich convergirt, wofern $x=1$ ist, die Summe (A.) nur, gleichzeitig mit der Summe (B.), wenn $g<-1$ ist.

Wenn $g=-1$ und $h \lesseqgtr 0$, so bleibt der Werth von $(m+n+1)P_{n+1}$ nach No. VI zwar stets endlich, nähert sich aber keiner bestimmten Grenze. Dasselbe gilt also auch von S_n und von der Summe (A.).

Wenn endlich $g>-1$, also $g+1>0$ ist, so wird der Werth von $(m+n+1)P_{n+1}$ unendlich gross für $n=\infty$. Mithin divergirt in diesem Falle S_n, und auch die Summe (A.).

Damit ist der aufgestellte Satz in allen seinen Theilen erwiesen.

Anm. 1. Setzt man statt u_n den in der Anm. zu No. VI gegebenen Ausdruck $u_n = vn^{g+hi}+v_n n^{g-1+hi}$, so ist leicht zu sehen, dass die Summe (A.) gleichzeitig mit der folgenden:

$$1+x+x^2 2^{g+hi}+x^3 3^{g+hi}+\cdots+x^n n^{g+hi}$$

convergirt, schwankt, oder divergirt.

Anm. 2. Die Sätze V bis VII stimmen, wenn man den in ihnen vorkommenden Grössen nur reelle Werthe beilegt, im Wesentlichen mit denen überein, welche Gauss in der Abhandlung »Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$ «

begründet hat. Mit der hier gegebenen Erweiterung dienen sie für eine grosse Menge von unendlichen Reihen, die in der Analysis vorkommen, zur Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz derselben. Aus diesem Grunde habe ich sie ausführlicher entwickelt, als gerade für den nächsten Zweck nöthig gewesen wäre. Übrigens würden sie sich ohne Mühe noch bedeutend verallgemeinern lassen.

6.

Jetzt zurückkehrend zu der Gleichung (43.) des § 4, gebe ich, da

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\frac{(u+nx)^y}{(nx)^y}\right\} = 1^y$$

und

$$\frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n} = \frac{u(u+x)(u+2x)\ldots\ldots(u+(n-1)x)}{(u+yx)(u+yx+x)\ldots\ldots(u+(y+n-1)x)}$$

$$= \frac{\frac{u}{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)\left(1+\frac{u}{2x}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{u}{(n-1)x}\right)}{\left(\frac{u+yx}{x}\right)\left(1+\frac{u+yx}{x}\right)\left(1+\frac{u+yx}{2x}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{u+yx}{(n-1)x}\right)}$$

ist, indem ich

$$n^{-u}u(1+u)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right) = F(u,n) \tag{44.}$$

setze, derselben die Form:

$$f(u) = x^y \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\frac{F\left(\frac{u}{x},n\right)}{F\left(\frac{u}{x}+y,n\right)}\right\}\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y}\right\}. \tag{45.}$$

Nun ist

$$\frac{F(u,n)}{F(u,n-1)} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-u}\left(1+\frac{u}{n-1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^u\left(1+\frac{u}{n-1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{u}{n}+\frac{u(u-1)}{2n^2}-\cdots\cdots\right)\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u}{n^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$= 1-\frac{u(u-1)}{2n^2}+\cdots\cdots,$$

also convergirt $F(u,n)$, wenn n ohne Ende zunimmt, gemäss No. V des § 5, gegen eine bestimmte endliche Grenze, welchen Werth auch u haben mag. Bezeichnet man diese Grenze, die eine Function von u ist, durch $Fc(u)$, so hat man:

$$Fc(u) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{n^{-u}u(1+u)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)\right\}, \tag{46.}$$

oder

$$Fc(u) = u\prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}. \tag{47.}$$

Es erhellt aus diesen Formeln zugleich, dass $Fc(u)$ nur verschwindet, wenn u der Null oder einer negativen ganzen Zahl gleich ist.

Hiernach ist

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{F\left(\frac{u}{x},n\right)}{F\left(\frac{u}{x}+y,n\right)} = \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)},$$

und es muss daher, der Gleichung (45.) gemäss, wenn es wirklich eine Function $f(u)$ giebt, die der Gleichung (41.) genügt, $\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y}$ einer bestimmten endlichen Grenze sich nähern, wenn n beständig zunimmt — wenigstens wofern nicht $Fc\left(\frac{u}{x}\right) = 0$ ist.

Bezeichnet man diese Grenze, als Function von u betrachtet, durch $\psi(u)$, so muss

$$\psi(u+x) = \psi(u) \tag{48.}$$

sein, da

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{f(u+x+nx)}{(u+x+nx)^y}$$

ist, und es ergiebt sich

$$f(u) = x^y\frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}\psi(u). \tag{49.}$$

Umgekehrt lässt sich nun erweisen, dass jede Function von u, welche durch diese Formel dargestellt wird, wenn nur $\psi(u)$ die in der Gleichung (48.)

ausgesprochene Eigenschaft hat, der Gleichung (41.) genügt.*) Denn es ist

$$uF(u+1,n) = n^{-u-1}\frac{u(u+1)(u+2)\ldots\ldots(u+n)}{1.2\ldots\ldots(n-1)} = \frac{u+n}{n}F(u,n),$$

woraus für $n=\infty$

$$(50.)\qquad Fc(u) = u\,Fc(u+1)$$

folgt. Mithin ist

$$f(u+x) = x^y\frac{Fc\left(\frac{u}{x}+1\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+1\right)}\psi(u+x) = \frac{u+yx}{u}f(u),$$

oder

$$\frac{f(u+x)-f(u)}{f(u)} = \frac{yx}{u},$$

welches die Gleichung (41.) ist.

Um nun die Function $\psi(u)$ zweckmässig zu bestimmen, kann man die Forderung stellen, es solle, sowie für die Function $(u,+x)^y$, falls y eine ganze positive Zahl ist, die Gleichung

$$\lim_{n=\infty}\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y} = 1^y$$

gilt, der Function $f(u)$ für jeden Werth von y die durch die Gleichung

$$\lim_{n=\infty}\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y} = 1^y$$

ausgesprochene Eigenschaft zukommen.

Dann muss nach dem Vorhergehenden $\psi(u) = 1^y$ sein und somit $f(u)$ durch die Formel

$$(51.)\qquad f(u) = x^y\frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}$$

definirt werden.

Nun ist (in § 2) mittels der beiden, aus (50.) und (47.) folgenden Gleichungen

$$(52.)\qquad Fc(u) = u(u+1)\ldots\ldots(u+n-1)\,Fc(u+n)$$

$$(53.)\qquad Fc(1) = 1$$

*) Es ist zu bemerken, dass bei der Herleitung der Formel (49.) die Grössen x, y als Constanten betrachtet worden sind und deshalb $\psi(u)$ anzusehen ist als eine von u und von x, y abhängende Grösse, die, als Function von u betrachtet, der Gleichung (48.) genügt.

gezeigt worden, dass

$$(54.)\qquad \lim_{n=\infty}\left\{\frac{n^{-u}Fc(n)}{Fc(u+n)}\right\} = 1$$

ist; wobei zu bemerken, dass hier, wie auch in (46.),

$$n^{-u} = e^{-u\log n} = 1-u\log n+\frac{u^2\log^2 n}{1.2}-\ldots\ldots$$

zu setzen ist, unter der Bedingung, dass von den verschiedenen Werthen von $\log n$ der reelle genommen werde, so dass also $Fc(u)$ eine eindeutige Function von u ist.

Hiernach ist, wenn man jetzt für die durch die Gleichung (51.) definirte Function $f(u)$ die Bezeichnung $(u,+x)^y$ einführt,

$$(u+nx,+x)^y = x^y\frac{Fc\left(\frac{u}{x}+n\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+n\right)},$$

$$\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y} = \frac{(nx)^y}{(u+nx)^y}\left\{\frac{n^{-\frac{u}{x}-y}Fc(n)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+n\right)}:\frac{n^{-\frac{u}{x}}Fc(n)}{Fc\left(\frac{u}{x}+n\right)}\right\};$$

mithin ist für jeden Werth von y in der That:

$$(55.)\qquad \lim_{n=\infty}\left\{\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y}\right\} = 1^y.$$

Hinsichtlich der Function $Fc(u)$ ist noch zu bemerken, dass sie durch die Gleichungen (50.), (53.), (54.) vollständig bestimmt wird. Denn aus (50.) und (53.) folgt

$$Fc(u) = \frac{u(u+1)\ldots\ldots(u+n-1)}{1.2\ldots\ldots(n-1)}\,\frac{Fc(n+u)}{Fc(n)};$$

woraus sich mittels (54.) die Formel (46.) ergiebt.

Durch das Vorstehende sind also jetzt folgende Resultate erlangt:

I. Es giebt eine, und zwar nur eine, für alle Werthe der unbeschränkt veränderlichen Grösse u definirte, eindeutige und für keinen endlichen Werth von u unendlich gross werdende Function

$Fc(u)$, welche die in den Gleichungen

$$(56.)\qquad \begin{cases} Fc(u) = u\,Fc(u+1), \\ Fc(1) = 1, \\ \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \dfrac{n^{-u}Fc(n)}{Fc(u+n)} = 1 \end{cases}$$

ausgesprochenen Eigenschaften hat und durch die Formel

$$Fc(u) = u \prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{u} \left(1+\frac{u}{\alpha}\right) \right\}$$

dargestellt wird.

II. Es giebt eine, und zwar nur eine, von drei unbeschränkt veränderlichen Argumenten, der Basis u, der Differenz x und dem Exponenten y, abhängige und durch $(u,+x)^y$ bezeichnete Function, welche der Gleichung

$$(57.)\qquad \frac{\Delta(u,+x)^y}{(u,+x)^y} = \frac{yx}{u},$$

in der sich das Zeichen Δ auf u bezieht und $\Delta u = x$ zu nehmen ist, genügt, und zugleich die in der Formel

$$(58.)\qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left\{ \frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y} \right\} = 1^y$$

ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$(59.)\qquad (u,+x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)},$$

oder

$$(60.)\qquad (u,+x)^y = x^y \frac{u}{u+yx} \prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^y \frac{u+\alpha x}{u+(y+\alpha)x} \right\}.$$

Aus der Formel (59.) ergeben sich dann, wie in § 1 gezeigt worden, für $(u,+x)^y$ die Grundgleichungen

$$(61.)\qquad (u,+x)^{y+k} = (u,+x)^y (u+yx,+x)^k,$$

$$(62.)\qquad (u,+x)^{y-k} = \frac{(u,+x)^y}{(u+(y-k)x,+x)^k},$$

$$(63.)\qquad (ku,+kx)^y = k^y(u,+x)^y,$$

$$(64.)\qquad (u,+x)^1 = u,$$

aus welchen sich nun eine Reihe anderer herleiten lässt, z. B.

$$(65.)\qquad (u,+x)^0 = 1,$$

$$(66.)\qquad (u,+x)^{-y} = \frac{1}{(u-yx,+x)^y},$$

und insbesondere, wenn y eine positive ganze Zahl ist,

$$(67.)\qquad (u,+x)^y = u(u+x)(u+2x)\ldots\ldots(u+(y-1)x),$$

$$(68.)\qquad (u,+x)^{-y} = \frac{1}{(u-x)(u-2x)\ldots\ldots(u-yx)}.$$

Ferner, wenn y, v, w beliebige Grössen bedeuten,

$$(69.)\qquad (u,+x)^y = \left(\frac{x}{w}\right)^y \frac{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}+y}}{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}}$$

u. s. w. (Vgl. Crelle's »Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques«.)

Ich bemerke noch, dass die Formel (43.), welche aus der Bestimmungsgleichung (57.) folgt, mittels der anderen (58.) unmittelbar zu dem Ausdrucke von $(u,+x)^y$ in der Form des unendlichen Products (60.) führt, dessen Convergenz nach dem Satze No. V. (§ 5) feststeht, sobald nicht $\frac{u}{x}+y$ Null oder eine negative ganze Zahl ist. Ist aber $\frac{u}{x}+y = -m$ (unter m eine ganze positive Zahl, Null eingeschlossen, verstanden), so folgt aus (69.), wenn man $v = 1$, $w = 1$ setzt:

$$(u,+x)^y = \frac{x^y(1,+1)^{-m-1}}{(1,+1)^{-y-m-1}};$$

da nun, nach (66.), $(1,+1)^{-m-1} = \infty$ ist, so sieht man, dass die Form $\frac{1}{0}$, welche in diesem Falle das Product (60.) annimmt, durch die Natur der Function $(u,+x)^y$ gefordert wird.

Nachdem auf die angegebene Weise eine Definition der Facultät $(u,+x)^y$ gefunden ist, die nicht mehr Bestimmungen enthält, als nöthig sind, und die alsbald zu einem allgemeinen Ausdrucke, sowie zu den wichtigsten Eigenschaften der Function führt, gelangt man auf einem ganz ähnlichen Wege zu der anderen Facultäten-Form $(u,-x)^y$; worunter, um wiederholt daran zu erinnern, nicht $(u,+(-x))^y$ verstanden werden soll.

Sie wird nämlich durch die beiden Gleichungen

$$(70.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta(u,-x)^y}{(u,-x)^y} = -\dfrac{yx}{u}, \\ \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\dfrac{(u+nx,-x)^y}{(u+nx)^y}\right\} = 1^y \end{cases}$$

definirt, wo aber jetzt $\Delta u = -x$ zu setzen ist.

Dann folgt aus der ersten dieser Gleichungen

$$\frac{(u-x,-x)^y-(u,-x)^y}{(u,-x)^y} = -\frac{yx}{u},$$

$$(u-x,-x)^y = \frac{u-yx}{u}(u,-x)^y,$$

und hieraus, wenn man $u+x$ statt u setzt:

$$(u,-x)^y = \frac{u+(1-y)x}{u+x}(u+x,-x)^y,$$

welche Gleichung zu der folgenden:

$$(u,-x)^y = \frac{u+(1-y)x}{u+x}\,\frac{u+(2-y)x}{u+2x}\cdots\cdots\frac{u+(n-y)x}{u+nx}(u+nx,-x)^y$$

$$= \frac{\left(\frac{u}{x}+1-y\right)\left(1+\dfrac{\frac{u}{x}+1-y}{1}\right)\left(1+\dfrac{\frac{u}{x}+1-y}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\dfrac{\frac{u}{x}+1-y}{n-1}\right)}{\left(\frac{u}{x}+1\right)\left(1+\dfrac{\frac{u}{x}+1}{1}\right)\left(1+\dfrac{\frac{u}{x}+1}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\dfrac{\frac{u}{x}+1}{n-1}\right)}(u+nx,-x)^y$$

führt. Setzt man statt $(u+nx,-x)^y$

$$x^y\frac{(u+nx,-x)^y}{(u+nx)^y}\,\frac{n^{-\frac{u}{x}+y-1}}{n^{-\frac{u}{x}-1}}\left(\frac{nx}{u+nx}\right)^{-y},$$

und dann $n=\infty$, so erhält man, gemäss (70.) und (46.):

$$(71.)\qquad (u,-x)^y = x^y\frac{Fc\left(\frac{u}{x}+1-y\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+1\right)},$$

oder auch

$$(72.)\qquad (u,-x)^y = x^y\frac{u+x-yx}{u+x}\prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty}\left\{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^y\frac{u+(\alpha+1-y)x}{u+(\alpha+1)x}\right\}.$$

Zugleich lässt sich aus der Formel (71.) mittels der Eigenschaften der Function $Fc(u)$ ohne Weiteres beweisen, dass die durch dieselbe ausgedrückte Function $(u,-x)^y$ wirklich die in den Gleichungen (70.) ausgesprochenen Eigenschaften hat.

Es ergeben sich dann aus (71.) für $(u,-x)^y$ die Grundgleichungen:

$$(73.)\qquad (u,-x)^{y+k} = (u,-x)^y(u-yx,-x)^k,$$

$$(74.)\qquad (u,-x)^{y-k} = \frac{(u,-x)^y}{(u-(y-k)x,-x)^k},$$

$$(75.)\qquad (ku,-kx)^y = k^y(u,-x)^y,$$

$$(76.)\qquad (u,-x)^1 = u;$$

aus denen wieder die folgenden:

$$(77.)\qquad (u,-x)^0 = 1,$$

$$(78.)\qquad (u,-x)^{-y} = \frac{1}{(u+yx,-x)^y},$$

und insbesondere, wenn y eine positive ganze Zahl ist,

$$(79.)\qquad (u,-x)^y = u(u-x)(u-2x)\cdots\cdots(u-(y-1)x),$$

$$(80.)\qquad (u,-x)^{-y} = \frac{1}{(u+x)(u+2x)\cdots\cdots(u+yx)},$$

sowie, wenn y, v, w beliebige Grössen bedeuten,

$$(u, -x)^y = \left(\frac{x}{w}\right)^y \frac{(v, -w)^{\frac{v}{w}-\frac{u}{x}+y}}{(v, -w)^{\frac{v}{w}-\frac{u}{x}}} \tag{81.}$$

u. s. w. hergeleitet werden.*) Ferner hat man:

$$\left\{ \begin{aligned} (u, -x)^y &= (u+x-yx, +x)^y = \frac{1}{(u+x, +x)^{-y}}, \\ (u, +x)^y &= (u-x+yx, -x)^y = \frac{1}{(u-x, -x)^{-y}}. \end{aligned} \right. \tag{82.}$$

Setzt man endlich in (59.) $u = x = 1$, und $u-1$ für y, so findet sich

$$Fc(u) = \frac{1}{(1, +1)^{u-1}}, \tag{83.}$$

und wenn man in (71.) $u = 0$, $x = 1$ und $-u+1$ statt y setzt:

$$Fc(u) = (0, -1)^{1-u}, \tag{84.}$$

so dass also die Factorielle $Fc(u)$ selbst eine Facultät ist.

7.

Es ist oben angegeben worden, dass sich die Function $Fc(u)$ nach ganzen positiven Potenzen von u in eine beständig, d. h. für alle reellen und imaginären Werthe von u convergirende Reihe entwickeln lasse; sowie, dass die Reihe, in welche man die Facultät $(u, +x)^y$ nach steigenden Potenzen der Differenz x entwickeln kann, niemals convergirt, wenn y keine ganze Zahl ist. Es erscheint mir nicht unangemessen, auf die Rechtfertigung beider Behauptungen näher einzugehen.

Zu dem Ende stelle ich noch einige Sätze über die Convergenz der unendlichen Reihen zusammen, welche hier, sowie auch im Folgenden, zur Anwendung kommen.

1) Hat man eine unendliche Reihe von der Form

$$\sum a_{\alpha,\beta,\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots,$$

wo $x, y, \ldots$ veränderliche Grössen sind und $\alpha, \beta, \ldots$ ganze Zahlen,

*) Es ist hierbei zu bemerken, dass, obwohl $(u, -x)^y$ nicht gleich $(u, +(-x))^y$ ist, gleichwohl alle Gleichungen, die ohne Zuziehung der zweiten Gleichung (70.) aus den Gleichungen (73.) bis (76.) folgen, aus den entsprechenden für $(u, +x)^y$ durch Verwandlung von x in $(-x)$ sich ergeben.

von denen jede, unabhängig von den andern, alle Werthe von 0 bis $+\infty$ durchläuft, und es bleiben die absoluten Beträge der Glieder der Reihe, wie gross auch $\alpha, \beta, \ldots$ werden mögen, sämmtlich kleiner als eine angebbare Grösse, wenn für $x, y, \ldots$ bestimmte Werthe $x_0, y_0, \ldots$ gesetzt werden; so convergirt die Reihe für alle Werthe von $x, y, \ldots$, die ihrem absoluten Betrage nach beziehlich kleiner als $x_0, y_0, \ldots$ sind, und zwar unbedingt.*)

Bezeichnet man nämlich die absoluten Beträge von

$$a_{\alpha,\beta,\ldots}, \quad x, y, \ldots, \quad x_0, y_0, \ldots,$$

durch

$$A_{\alpha,\beta,\ldots}, \quad \xi, \eta, \ldots, \quad \xi_0, \eta_0, \ldots,$$

so lässt sich, der Voraussetzung nach, eine (positive) Grösse G angeben, die grösser ist als

$$A_{\alpha,\beta,\ldots} \xi_0^\alpha \eta_0^\beta \ldots,$$

welche Werthe auch $\alpha, \beta, \ldots$ haben mögen. Alsdann ist der absolute Betrag von $a_{\alpha,\beta,\ldots}$ kleiner als $G\xi_0^{-\alpha}\eta_0^{-\beta}\ldots$, also der absolute Betrag von $a_{\alpha,\beta,\ldots}x^\alpha y^\beta \ldots$ kleiner als $G\xi_0^{-\alpha}\eta_0^{-\beta}\ldots\xi^\alpha\eta^\beta\ldots$, und daher die Summe von beliebig vielen Gliedern der betrachteten Reihe dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\sum G\xi_0^{-\alpha}\eta_0^{-\beta}\ldots\xi^\alpha\eta^\beta\ldots = \frac{G}{\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_0}\right)\ldots},$$

wofern $\xi < \xi_0$, $\eta < \eta_0$, ..., wodurch der aufgestellte Satz erwiesen ist.

2) Es seien die Glieder einer unendlichen Reihe

$$\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots\ldots$$

Functionen beliebig vieler Veränderlichen $x, y, \ldots$, die sich nach ganzen positiven Potenzen von $x, y, \ldots$ in Reihen entwickeln lassen. Ferner sollen $\psi, \psi', \psi'', \ldots\ldots$ diejenigen Reihen bezeichnen, in welche die Reihen-Ausdrücke von $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots\ldots$ dadurch übergehen, dass jeder Coefficient derselben durch seinen absoluten Betrag ersetzt wird.

*) Eine Reihe soll unbedingt convergent genannt werden, wenn sie bei jeder beliebigen Anordnung ihrer Glieder convergirt. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass die Reihe der absoluten Beträge ihrer Glieder eine endliche Summe habe.

Wenn nun für bestimmte positive Werthe $\xi_0, \eta_0, \ldots$ von $x, y, \ldots$ jede einzelne der Reihen $\psi, \psi', \psi'', \ldots$ und ebenso ihre Summe

$$\psi + \psi' + \psi'' + \cdots\cdots$$

convergirt, so convergirt auch die Summe

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' + \cdots\cdots,$$

für alle Werthe von $x, y, \ldots$, die ihrem absoluten Betrage nach nicht grösser als beziehlich $\xi_0, \eta_0, \ldots$ sind. Bezeichnet man in den Reihen-Ausdrücken von $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots\ldots$ die Coefficienten von $x^\alpha y^\beta \ldots$ beziehlich durch $a_{\alpha,\beta,\ldots}, a'_{\alpha,\beta,\ldots}, a''_{\alpha,\beta,\ldots}, \ldots\ldots$ und setzt

$$a_{\alpha,\beta,\ldots} + a'_{\alpha,\beta,\ldots} + a''_{\alpha,\beta,\ldots} + \cdots = A_{\alpha,\beta,\ldots},$$

so hat jede der Grössen $A_{\alpha,\beta,\ldots}$ einen endlichen Werth, und es ist für die genannten Werthe von $x, y, \ldots$ die Reihe

$$\sum A_{\alpha,\beta,\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots$$

nicht nur convergent, sondern auch gleich der Summe

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' + \cdots\cdots$$

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus dem vorhergehenden und aus dem Begriffe einer unbedingt convergenten Reihe.

3) Wenn von den beiden Reihen

$$\varphi = \sum a_{\alpha,\beta,\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots$$
$$\varphi_1 = \sum b_{\alpha,\beta,\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots$$

jede für alle Werthe von $x, y, \ldots$, die dem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $\xi_0, \eta_0, \ldots$ sind, convergirt, so ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze, dass auch die Reihen

$$\sum (a_{\alpha,\beta,\ldots} \pm b_{\alpha,\beta,\ldots}) x^\alpha y^\beta \ldots$$
$$\sum (a_{\alpha',\beta',\ldots} b_{\alpha'',\beta'',\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots) \qquad (\alpha' + \alpha'' = \alpha,\ \beta' + \beta'' = \beta,\ \ldots)$$

für dieselben Werthe von $x, y, \ldots$ convergent sind, und beziehlich die Summe, die Differenz und das Product von φ und φ_1 darstellen.

Daraus ergiebt sich, als weitere Folgerung:

4) Wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ beliebig viele Functionen von $x, y, \ldots$ sind, die sich nach ganzen positiven Potenzen dieser Grössen in Reihen entwickeln lassen, und F ist eine ganze rationale Function von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$, so ist die Reihe, welche aus F durch Substitution jener Reihen für $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ und durch formelle Entwickelung nach Potenzen von $x, y, \ldots$ hervorgeht, stets unbedingt convergent und ihre Summe gleich F für alle diejenigen Werthe von $x, y, \ldots$, für welche die Entwickelungen von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ sämmtlich unbedingt convergiren.

5) Ist aber F eine Function von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$, die sich in eine unendliche Reihe

$$\sum C_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots\ldots} \varphi^\alpha \varphi_1^\beta \varphi_2^\gamma \ldots\ldots$$

entwickeln lässt, und man setzt statt $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ ihre Reihen-Ausdrücke, so gelten hinsichtlich der Convergenz der Reihe, die man aus der vorstehenden durch Entwickelung derselben nach Potenzen von $x, y, \ldots$ erhält, folgende Bestimmungen.

A) Es convergire die ursprüngliche Reihe für F, sobald $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als beziehlich $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots\ldots$, und es seien $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots\ldots$ die Reihen, in welche $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ übergehen, wenn man jeden Coefficienten der letzteren durch seinen absoluten Betrag ersetzt; ferner sei $f(x, y, \ldots)$ die Reihe, in welche F durch die angegebene Substitution übergeht, und $\xi, \eta, \ldots$ seien wieder die absoluten Beträge von $x, y, \ldots$; alsdann convergirt $f(x, y, \ldots)$ und es besteht die Gleichung

$$F(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots) = f(x, y, \ldots)$$

jedenfalls für alle Werthe von $x, y, \ldots$, die den Bedingungen

$$\psi(\xi, \eta, \ldots) < \rho, \quad \psi_1(\xi, \eta, \ldots) < \rho_1, \quad \psi_2(\xi, \eta, \ldots) < \rho_2, \quad \ldots\ldots$$

Genüge leisten. Wenn daher $\varphi(0, 0, \ldots), \varphi_1(0, 0, \ldots), \varphi_2(0, 0, \ldots), \ldots\ldots$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots\ldots$ sind, so wird die Reihe $f(x, y, \ldots)$ wenigstens für alle Werthe von $x, y, \ldots$, deren absolute Beträge gewisse Grenzen nicht überschreiten, convergiren.

B) Convergirt die Reihe, in welche F nach Potenzen von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ entwickelt werden kann, für alle Werthe dieser Grössen, so convergirt die Reihe $f(x, y, \ldots)$ und es besteht die Gleichung

$$f(x, y, \ldots) = F(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots)$$

für alle diejenigen Werthe von $x, y, \ldots$, für welche die Reihen-Entwickelungen von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ sämmtlich unbedingt convergiren.

Anm. Es ist wohl zu bemerken, dass die vorstehenden Sätze 2) bis 5) nicht unbedingt umgekehrt werden dürfen; man darf also z. B. nicht behaupten, in dem zuletzt betrachteten Falle convergire $f(x, y, \ldots)$ nur für solche Werthe von $x, y, \ldots$, für welche die Entwickelungen von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ sämmtlich convergiren. Die Sätze geben daher, obgleich sie sich bei vielen Untersuchungen nützlich erweisen, keineswegs die wahren Kriterien, nach welchen über die Convergenz von Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen einer oder mehrerer Veränderlichen fortschreiten, entschieden werden kann. Diese Kriterien müssen vielmehr aus einer andern Quelle abgeleitet werden; wie ich dies bei einer andern Gelegenheit zu zeigen gedenke.

Ich betrachte jetzt, um den ersten der oben angegebenen Sätze zu beweisen, die Function $Fc(u)$, und beschränke die Veränderlichkeit von u zunächst auf solche Werthe, deren absoluter Betrag kleiner als eine oberhalb 1 beliebig angenommene ganze positive Zahl m ist.

Man hat

$$Fc(u) = u \cdot \prod_{\alpha=1}^{\alpha=m-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha} \right) \right\} \prod_{\alpha=m}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha} \right) \right\}.$$

Setzt man nun

$$\prod_{\alpha=m}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha} \right) \right\} = \prod_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha+m}{\alpha+m+1} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha+m} \right) \right\} = \varphi(u, m),$$

so ist

$$\log \varphi(u, m) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \left\{ -u \log \left(1 + \frac{1}{\alpha+m} \right) + \log \left(1 + \frac{u}{\alpha+m} \right) \right\}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \left\{ \sum_{\mathfrak{a}=2}^{\mathfrak{a}=+\infty} \frac{(-1)^{\mathfrak{a}-1}(u^{\mathfrak{a}} - u)}{\mathfrak{a}(\alpha+m)^{\mathfrak{a}}} \right\}.$$

Es sei ferner

$$\sum_{\mathfrak{a}=2}^{\mathfrak{a}=+\infty} \frac{(-1)^{\mathfrak{a}-1}(u^{\mathfrak{a}} - u)}{\mathfrak{a}(m+\alpha)^{\mathfrak{a}}} = \varphi_\alpha(u)$$

und

$$\sum_{\mathfrak{a}=2}^{\mathfrak{a}=+\infty} \frac{(u^{\mathfrak{a}} + u)}{\mathfrak{a}(m+\alpha)^{\mathfrak{a}}} = \psi_\alpha(u),$$

so dass $\psi_\alpha(u)$ aus der Reihe $\varphi_\alpha(u)$ dadurch hervorgeht, dass man in dieser jeden Coefficienten durch seinen absoluten Betrag oder eine grössere positive Zahl ersetzt. Dann wird sich nach dem zweiten der vorstehenden Sätze

$$\log \varphi(u, m) = \varphi_0(u) + \varphi_1(u) + \cdots + \varphi_n(u) + \cdots$$

nach Potenzen von u in eine convergirende Reihe entwickeln lassen, wenn die Summe

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \psi_\alpha(u) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \sum_{\mathfrak{a}=2}^{\mathfrak{a}=+\infty} \frac{u^{\mathfrak{a}} + u}{\mathfrak{a}(m+\alpha)^{\mathfrak{a}}}$$

für jeden positiven Werth von u, der kleiner als m ist, einen endlichen Werth hat. Dies ist in der That der Fall.

Es ist nämlich

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^{\mathfrak{a}}} = \frac{1}{m^{\mathfrak{a}}} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^{\mathfrak{a}}},$$

und wenn man in der letzteren Summe das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied durch t_n bezeichnet:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{n-1}{m}\right)^{\mathfrak{a}}}{\left(1 + \frac{n}{m}\right)^{\mathfrak{a}}} = \frac{\left(1 + \frac{m-1}{n}\right)^{\mathfrak{a}}}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\mathfrak{a}}} = 1 - \frac{\mathfrak{a}}{n} + \cdots,$$

also wenn

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^{\mathfrak{a}}} = s_{\mathfrak{a}}$$

gesetzt wird, für $\mathfrak{a} > 1$ nach § 5 (VII, 2) $s_{\mathfrak{a}}$ eine endliche Grösse, die abnimmt, wenn $\mathfrak{a}$ wächst; woraus, da

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \psi_\alpha(u) = \sum_{\mathfrak{a}=2}^{\mathfrak{a}=+\infty} \frac{(u^{\mathfrak{a}} + u)\, s_{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}\, m^{\mathfrak{a}}}$$

ist, das Behauptete unmittelbar folgt.

Nach dem fünften der obigen Sätze (Art. B) lässt sich nun von den beiden Factoren, in die $Fc(u)$ zerlegt ist, der zweite, welcher gleich

$$e^{\log \varphi(u, m)}$$

ist, nach ganzen positiven Potenzen von u in eine Reihe entwickeln, die sicher für jeden der betrachteten Werthe von u convergirt; der erste Factor aber ist durch eine beständig convergirende Reihe von derselben Form darstellbar. Es ergiebt sich also, nach dem dritten der angeführten Sätze, für $Fc(u)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreitende Reihe, welche jedenfalls convergirt, wenn der absolute Betrag von u kleiner als m ist. Die Coefficienten dieser Reihe sind aber von m unabhängig; da man nun diese Zahl beliebig gross annehmen kann, so muss die in Rede stehende Reihe für jeden endlichen Werth von u convergiren; w. z. b. w.

Was den zweiten der obigen Sätze angeht, so bemerke ich zunächst Folgendes.

Wenn y eine positive ganze Zahl ist, so kann die Facultät $(u, +x)^y$ in eine endliche Reihe von der Form

$$u^y\left\{1+(y)_1\frac{x}{u}+(y)_2\frac{x^2}{u^2}+\cdots\right\}$$

entwickelt werden, wo sich die Coefficienten $(y)_1, (y)_2, \ldots$ als ganze Functionen von y darstellen lassen. Nimmt man für y eine beliebige Grösse an, so verwandelt sich die vorstehende Formel in eine unendliche Reihe. Ist y eine negative ganze Zahl, so lässt sich leicht zeigen, dass diese Reihe für alle Werthe von u, x, bei denen der absolute Betrag von $\frac{x}{u}$ unter einer bestimmten, von y abhängigen Grenze liegt, convergirt und ebenfalls gleich $(u, +x)^y$ ist. Man hat nun angenommen, dies müsse auch für nicht ganzzahlige Werthe von y der Fall sein, und es hat namentlich Öttinger in der oben (S. 157) angeführten Abhandlung bei seinen Deductionen die in Rede stehende Reihe vielfach benutzt. Aus den nachstehenden Betrachtungen erhellt indessen, dass die Reihe, wofern y keine ganze Zahl ist, niemals convergirt, welche Werthe man auch den Grössen u, x beilegen möge.

Wenn eine Reihe von der Form

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} a_\alpha x^\alpha,$$

wo α eine veränderliche ganze Zahl bedeutet, für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag zwischen zwei Grenzen a und b liegt, convergirt, so giebt es, wofern man x auf irgend einen, ganz innerhalb des Convergenzgebietes

der Reihe liegenden Bereich beschränkt, in demselben stets nur eine endliche Anzahl von Werthen, für welche die Reihe den Werth Null annimmt. Der strenge Beweis dieses Satzes, von dem man bei manchen Untersuchungen Gebrauch machen kann, lässt sich aus den oben aufgestellten Convergenz-Sätzen ableiten; was ich jedoch hier der Kürze wegen übergehe.

Dies vorausgesetzt, werde in der obigen Reihe (was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann) $x = 1$ gesetzt, für y irgend ein bestimmter Werth angenommen, und unter u zunächst eine positive reelle Grösse verstanden. Angenommen nun, die Reihe convergire für irgend einen bestimmten Werth u_0 von u, so wird dies auch für jeden grösseren Werth der Fall sein, und es ist unter der Bedingung, dass u zwischen den Grenzen u_0 und $+\infty$ angenommen und bei der Bestimmung der Potenz u^y dem Logarithmus von u sein reeller Werth beigelegt werde,

$$\varphi(u) = u^y\{1+(y)_1 u^{-1}+(y)_2 u^{-2}+\cdots\}$$

eine eindeutige und continuirliche Function der Grösse u.

Wenn y eine ganze positive Zahl ist, so hat man

$$\varphi(u+1) = \frac{u+y}{u}\varphi(u),$$

also

$$(u+y)\{u^y+(y)_1 u^{y-1}+(y)_2 u^{y-2}+\cdots\} = u\{(u+1)^y+(y)_1(u+1)^{y-1}+\cdots\}.$$

Entwickelt man, y als eine unbestimmte Grösse betrachtend, beide Seiten dieser Gleichung in Reihen, die nach fallenden Potenzen von u fortschreiten, so müssen die Coefficienten der einen Reihe den gleichstelligen der anderen Reihe für alle positiven ganzzahligen Werthe von y gleich sein; woraus folgt, dass sie identisch einander gleich sein werden, weil sie nämlich sämmtlich ganze rationale Functionen von y sind. (In der That gelangt man, wenn man die angedeutete Rechnung ausführt, zu den bekannten Ausdrücken von $(y)_1, (y)_2, \ldots$.) Mithin muss die in der vorstehenden Gleichung ausgesprochene Relation

$$\varphi(u+1) = \frac{u+y}{u}\varphi(u)$$

gelten, sobald nur die genannten Reihen beide convergiren; was bei den obigen Annahmen sicher der Fall ist, wenn u nicht nur $> u_0$, sondern auch > 1 ist.

Aus dieser Relation ergiebt sich, wenn n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\varphi(u) = \frac{u(u+1)\dots(u+n-1)}{(u+y)(u+y+1)\dots(u+y+n-1)}\varphi(u+n)$$

oder, wenn $F(u,n)$ dieselbe Bedeutung hat wie im Anfange des § 6,

$$\varphi(u) = \frac{F(u,n)}{F(u+y,n)}\,\frac{\varphi(u+n)}{n^y}.$$

Es ist aber

$$\lim_{n=\infty}\frac{\varphi(u+n)}{n^y} = 1,$$

und daher (§ 6, Gleichung 46)

$$\varphi(u) = \frac{Fc(u)}{Fc(u+y)},$$

wenigstens für jeden Werth von u, der $> u_0$ und zugleich > 1 ist.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man

$$\varphi_1(u) = 1+(y)_1 u^{-1}+(y)_2 u^{-2}+\cdots$$

setzt,

$$\frac{1}{Fc(u)}\,\frac{dFc(u)}{du}-\frac{1}{Fc(u+y)}\,\frac{dFc(u+y)}{du} = \frac{y}{u}+\frac{1}{\varphi_1(u)}\,\frac{d\varphi_1(u)}{du},$$

$$\varphi_1(u)\left(Fc(u+y)\frac{dFc(u)}{du}-Fc(u)\frac{dFc(u+y)}{du}\right)-Fc(u)\,Fc(u+y)\left(\frac{y}{u}\varphi_1(u)+\frac{d\varphi_1(u)}{du}\right) = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite der letzten Gleichung lässt sich nun in eine nach ganzen (positiven und negativen) Potenzen von u fortschreitende Reihe entwickeln, welche jedenfalls convergirt, wenn der absolute Betrag von u grösser als u_0 ist; die Coefficienten dieser Reihe müssen aber, da die Gleichung für jeden zwischen bestimmten Grenzen liegenden reellen Werth von u gilt, nach dem oben angeführten Hülfssatze sämmtlich gleich Null sein.

Daraus folgt, dass die vorstehende Gleichung für jeden (reellen oder complexen) Werth von u, dessen absoluter Betrag grösser als u_0 ist, besteht. Dies ist aber nur möglich, wenn y eine ganze Zahl ist. Nimmt man nämlich eine ganze positive Zahl n, die $> u_0$ ist, so an, dass $\varphi_1(-n)$ einen von Null verschiedenen Werth erhält, und setzt $u=-n$, so reducirt sich die linke Seite der Gleichung auf

$$\varphi_1(-n)\,Fc(-n+y)\left(\frac{dFc(u)}{du}\right)_{u=-n},$$

und dies Product hat stets einen von Null verschiedenen Werth, wenn y keine ganze Zahl ist.

Hiernach ist die Annahme, dass die Reihe

$$u^y\{1+(y)_1 u^{-1}+(y)_2 u^{-2}+\cdots\},$$

wenn der Grösse y ein nicht ganzzahliger Werth beigelegt wird, für irgend einen endlichen Werth von u convergire, unstatthaft.

Damit soll jedoch keineswegs behauptet werden, dass die Differenz zwischen $(u,+1)^y$ und der Summe mehrerer der ersten Glieder der vorstehenden Reihe, wenn u ohne Ende wächst, nicht kleiner werden könne, als jede gegebene Grösse. Indessen leuchtet ein, dass sich aus der in Rede stehenden Reihe hinsichtlich der Facultät $(u,+x)^y$, namentlich was das Verhalten derselben betrifft, wenn der Quotient $\frac{x}{u}$ unendlich klein wird, ohne Betrachtung des Ergänzungsgliedes, welches der Reihe hinzuzufügen ist, sobald man sie mit irgend einem Gliede abbricht, durchaus keine sicheren Schlüsse ziehen lassen. Ein brauchbarer Ausdruck für dieses Ergänzungsglied dürfte sich aber nur mit Schwierigkeit ermitteln lassen.

8.

Ich gehe jetzt zu den Entwickelungen von

$$(u+k,+x)^y \text{ und } (u+k,-x)^y,$$

sowie von

$$\log(u,+x)^y \text{ und } \log(u,-x)^y$$

über, welche in dem erwähnten Crelle'schen »Mémoire« aus der daselbst als allgemeine Taylor'sche Reihe aufgestellten Entwickelungsformel hergeleitet worden sind. In der Gestalt, wie diese Entwickelungen dort gegeben sind, ist ihre Richtigkeit ausser Frage, indem sie identische Umgestaltungen der darzustellenden Functionen sind, und dem allgemeinen n^{ten} Gliede jedesmal der ergänzende Rest beigefügt ist. Anwendbar sind sie jedoch nur, insofern sich dieses Ergänzungsglied der Grenze Null nähert, wenn n ohne Ende zunimmt. Ob dies der Fall sei, lässt sich in den meisten Fällen aus der Betrachtung des Ergänzungsgliedes selbst nur schwer erkennen (es dürfte vielleicht möglich sein, den in Rede stehenden Rest durch ein bestimmtes Integral auszudrücken, welches eine leichtere Beurtheilung seines Betrages zu-liesse), indem der am angeführten Orte zu diesem Zwecke aufgestellte Satz, wie es von dem Verfasser selbst in einer späteren Abhandlung über denselben Gegenstand bemerkt worden ist, nur dann gilt, wenn die Reihe mit irgend einem Gliede abbricht. Aus dem blossen Umstande aber, dass die Summe der n ersten Glieder, wenn n ohne Ende wächst, sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert, lässt sich bei einer Reihe von dieser Form nicht schliessen, dass sie der zu entwickelnden Grösse gleich sei. Denn gesetzt, es bestehe für eine bestimmte Function $F(x)$ und für alle einem gewissen continuirlichen Bereiche angehörigen Werthe von x und $x+k$ wirklich die Gleichung

$$F(x+k) = F(x)+\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{(k,-\alpha)^\nu}{(1,+1)^\nu}\,\frac{\Delta^\nu F(x)}{\alpha^\nu}\right\},$$

wo α eine Constante bedeutet und $\Delta x = \alpha$ zu nehmen ist; so sei $\psi(x)$ eine der Bedingung

$$\psi(x+\alpha) = \psi(x)$$

genügende Function und

$$F_1(x) = \psi(x)\,F(x).$$

Dann convergirt, indem

$$\Delta^\nu F_1(x) = \psi(x)\,\Delta^\nu F(x)$$

ist, für die genannten Werthe von x und $x+k$ auch die Reihe

$$F_1(x)+\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{(k,-\alpha)^\nu}{(1,+1)^\nu}\,\frac{\Delta^\nu F_1(x)}{\alpha^\nu}\right\};$$

dieselbe ist aber gleich $\psi(x)\,F(x+k)$, also nur dann gleich $F_1(x+k)$, wenn

$$\psi(x+k) = \psi(x)$$

ist, was bei einem bestimmten Werthe von x nicht für alle einem continuirlichen Bereiche angehörigen Werthe von k stattfinden kann.

Wenngleich hiernach die Benutzung der in Rede stehenden Entwickelungsformel in den meisten Fällen nicht ohne Schwierigkeit ist, so bleibt sie doch jedenfalls ein treffliches Mittel, um für manche Functionen auf einem natürlichen und directen Wege Reihen-Ausdrücke zu erlangen, von denen man, nachdem sie gefunden worden sind, in vielen Fällen ohne Schwierigkeit nachweisen kann, dass sie die zu entwickelnden Grössen wirklich darstellen.

Für die Function $(u,+x)^y$ hat man, wenn man das Zeichen Δ auf u bezieht und $\Delta u = x$ setzt:

$$\Delta(u,+x)^y = yx\frac{(u,+x)^y}{u}.$$

Aber es ist

$$(u+x,+x)^{y-1} = (u+x,+x)^{-1}(u,+x)^y = \frac{(u,+x)^y}{u},$$

also

$$(85.)\qquad \Delta(u,+x)^y = yx(u+x,+x)^{y-1}.$$

Durch mehrmalige Wiederholung derselben Operation folgt hieraus:

$$(86.)\qquad \Delta^n(u,+x)^y = x^n(y,-1)^n(u+nx,+x)^{y-n}.$$

Aber es ist

$$(u+nx,+x)^{y-n} = (u+nx,+x)^{-n}(u,+x)^y = \frac{(u,+x)^y}{(u,+x)^n},$$

also

$$(87.)\qquad \Delta^n(u,+x)^y = x^n(y,-1)^n\frac{(u,+x)^y}{(u,+x)^n}.$$

Für die Function $(u,-x)^y$ erhält man, wenn man in der ersten Formel (70.)

$$\frac{(u-x,-x)^y-(u,-x)^y}{(u,-x)^y} = -\frac{yx}{u}$$

$u+x$ statt u setzt und $\Delta u = x$ nimmt,

$$\Delta(u,-x)^y = \frac{yx}{u+x}(u+x,-x)^y = yx(u,-x)^{y-1},$$

woraus weiter

$$(88.)\qquad \Delta^n(u,-x)^y = x^n(y,-1)^n(u,-x)^{y-n} = x^n(y,-1)^n\frac{(u,-x)^y}{(u-yx+x,+x)^n}$$

folgt.

Die angeführte Entwickelungsformel giebt nun

$$(89.)\qquad (u+k,+x)^y = (u,+x)^y\left\{1+\frac{yk}{u}+\frac{y(y-1)}{1.2}\,\frac{k(k-x)}{u(u+x)}+\cdots+\frac{(y,-1)^n}{(1,+1)^n}\,\frac{(k,-x)^n}{(u,+x)^n}\right\}+R_n,$$

wo R_n das Ergänzungsglied bezeichnet, auf dessen Ausdruck es hier nicht weiter ankommt. Wenn y eine positive ganze Zahl ist, so bricht die Reihe mit dem $(y+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab und giebt den vollständigen Ausdruck für

$(u+k, +x)^y$. In jedem andern Falle aber ist die Zahl ihrer Glieder unendlich, und es ist zu untersuchen:

erstens, unter welchen Bedingungen die Reihe dann eine endliche Summe habe; und

zweitens, ob diese Summe wirklich gleich $(u+k, +x)^y$ sei.

Es werde (für $n = 0, 1, \cdots +\infty$)

$$\frac{(y, -1)^n}{(1, +1)^n} \frac{(k, -x)^n}{(u, +x)^n} = t_n$$

gesetzt; dann ist

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{y-n+1}{n} \frac{k-nx+x}{u+nx-x} = \left(1-\frac{y+1}{n}\right)\left(1-\frac{k+x}{nx}\right)\left(1+\frac{u-x}{nx}\right)^{-1}$$
$$= 1 - \frac{y+\frac{u+k}{x}+1}{n} + \cdots.$$

Die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=+\infty} t_\nu$ hat daher nach dem Satze (§ 5, VII, 2) eine endliche Summe, sobald der reelle Theil von

$$\frac{u+k}{x}+y$$

positiv ist.

Nun ist, wenn $x = 1$ gesetzt wird,

$$\frac{(u+k, +1)^y}{(u, +1)^y} = \frac{(u, +1)^{y+k}}{(u, +1)^y (u, +1)^k}.$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck durch $\varphi(u)$, so ergiebt sich nach Gleichung (57.)

$$\varphi(u+1) = \frac{(u+y+k)u}{(u+y)(u+k)} \varphi(u)$$

und nach Gleichung (58.)

$$\operatorname*{Lim}_{n=+\infty} \varphi(u+n) = 1.$$

Setzt man daher

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \left\{ \frac{(y, -1)^\nu (k, -1)^\nu}{(1, +1)^\nu (u, +1)^\nu} \right\} = \varphi_1(u),$$

so ist zu untersuchen, ob bei bestimmten Werthen von y, k für alle diejenigen Werthe von u, für welche die Reihe convergirt, ebenfalls die Re-

lation

$$\varphi_1(u+1) = \frac{(u+y+k)u}{(u+y)(u+k)} \varphi_1(u)$$

sich ergebe. Ist dies der Fall, so hat man

$$\frac{\varphi_1(u+1)}{\varphi(u+1)} = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)};$$

woraus weiter, für jeden ganzzahligen Werth von n,

$$\frac{\varphi_1(u+n)}{\varphi(u+n)} = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)}$$

folgt. Daraus folgt, da auch $\operatorname*{Lim}_{n=+\infty} \varphi_1(u+n) = 1$ ist,

$$\varphi_1(u) = \varphi(u),$$

d. h. es besteht die Gleichung

$$(90.)\quad \frac{(u, +1)^{y+k}}{(u, +1)^y (u, +1)^k} = 1 + \frac{yk}{u} + \frac{y(y-1)}{1.2} \frac{k(k-1)}{u(u+1)} + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3} \frac{k(k-1)(k-2)}{u(u+1)(u+2)} + \cdots$$

für alle diejenigen Werthe von u, y, k, bei denen $u+y+k$ eine positive, oder auch eine complexe Grösse mit positivem reellen Theile ist. Wird dann $\frac{u}{x}$ statt u und $\frac{k}{x}$ statt k gesetzt, so ergiebt sich die Richtigkeit der Gleichung

$$(91.)\quad (u+k, +x)^y = (u, +x)^y \left\{ 1 + \frac{yk}{u} + \frac{y(y-1)}{1.2} \frac{k(k-x)}{u(u+x)} + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3} \frac{k(k-x)(k-2x)}{u(u+x)(u+2x)} + \cdots \right\}$$

für die angegebenen Werthe von u, x, y, k, bei denen die Reihe convergirt.

Die fragliche Relation für $\varphi_1(u)$ lässt sich aber folgendermassen erweisen.

Es ist, wenn man in dem obigen Ausdrucke für t_n der Grösse x den Werth 1 beilegt,

$$\varphi_1(u) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} t_\nu,$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$\varphi_1(u+1) = u \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{t_\nu}{u+\nu},$$

indem sich t_ν in $\frac{u}{u+\nu} t_\nu$ verwandelt, wenn $u+1$ statt u gesetzt wird. Nun ist aber

$$t_{\nu+1} = \frac{(y-\nu)(k-\nu)}{(\nu+1)(u+\nu)}\, t_\nu,$$

$$\frac{t_\nu}{u+\nu} = \frac{\nu+1}{(y-\nu)(k-\nu)}\, t_{\nu+1},$$

also

$$\varphi_1(u+1) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(\nu+1)\, u\, t_{\nu+1}}{(y-\nu)(k-\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} \frac{\nu u t_\nu}{(y-\nu+1)(k-\nu+1)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{\nu u t_\nu}{(y-\nu+1)(k-\nu+1)},$$

indem in der letzten Reihe das Glied, in welchem $\nu = 0$ ist, sich auf Null reducirt. Es ist aber

$$\frac{\nu u}{(y-\nu+1)(k-\nu+1)} = \frac{u(y+1)}{(k-y)(y-\nu+1)} + \frac{u(k+1)}{(y-k)(k-\nu+1)},$$

und daher

$$\varphi_1(u+1) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{u(y+1)\, t_\nu}{(k-y)(y-\nu+1)} + \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{u(k+1)\, t_\nu}{(y-k)(k-\nu+1)}.$$

Ferner ist

$$(y-\nu)\, t_\nu = \frac{(\nu+1)(u+\nu)}{k-\nu}\, t_{\nu+1},$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} (y-\nu)\, t_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(\nu+1)(u+\nu)\, t_{\nu+1}}{k-\nu} = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{\nu(u+\nu-1)\, t_\nu}{k-\nu+1},$$

mithin

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \left(y-\nu-\frac{\nu(u+\nu-1)}{k-\nu+1}\right) t_\nu = 0.$$

Aber es ist

$$y-\nu-\frac{\nu(u+\nu-1)}{k-\nu+1} = (u+y+k) - \frac{(k+1)(u+k)}{k-\nu+1},$$

mithin

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} (u+y+k)\, t_\nu - \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(k+1)(u+k)}{k-\nu+1}\, t_\nu = 0,$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(k+1)\, t_\nu}{k-\nu+1} = \frac{u+y+k}{u+k}\, \varphi_1(u).$$

Vertauscht man in dieser Gleichung k und y mit einander, so erhält man weiter:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(y+1)\, t_\nu}{y-\nu+1} = \frac{u+y+k}{u+y}\, \varphi_1(u),$$

und durch Verbindung beider Gleichungen, indem

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(k+1)\, t_\nu}{k-\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(y+1)\, t_\nu}{y-\nu+1} = \frac{y-k}{u}\, \varphi_1(u+1)$$

ist, die zu beweisende Relation

$$\varphi_1(u+1) = \frac{u(u+y+k)}{(u+y)(u+k)}\, \varphi_1(u).$$

Die Formel (90.), eine der wichtigsten in der Facultäten-Lehre, findet sich in der oben (Seite 189) erwähnten Abhandlung von Gauss, wenn auch in etwas anderer Form; ich habe sie hier hergeleitet, ohne die allgemeinen Relationen, aus denen sie dort hervorgeht, vorauszusetzen.

Die Reihe für $(u+k, -x)^y$ lässt sich auf ganz ähnliche Weise finden, noch leichter aber aus der vorhergehenden herleiten, indem nach der ersten Formel (82.)

$$(u+k, -x)^y = (u+k-(y-1)x, +x)^y$$

ist, und daher in (91.) nur $(u, +x)^y$ in $(u-(y-1)x, +x)^y = (u, -x)^y$ zu verwandeln und in der eingeklammerten Reihe $u-(y-1)x$ statt u zu setzen ist. Da nun aber, nach (74.) und (82.),

$$\frac{(u, -x)^y}{(u-(y-1)x, +x)^n} = \frac{(u, -x)^y}{(u-yx+nx, -x)^n} = (u, -x)^{y-n}$$

ist, so ergiebt sich

$$(92.)\quad (u+k, -x)^y = (u, -x)^y + y(u, -x)^{y-1} k + \frac{y(y-1)}{1.2}(u, -x)^{y-2} k(k-x)$$
$$+ \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}(u, -x)^{y-3} k(k-x)(k-2x) + \cdots$$

Dem Obigen zufolge gilt diese Reihe für alle Werthe von u, x, y, k, bei denen der reelle Theil von $\frac{u-(y-1)x+k}{x} + y = \frac{u+k}{x} + 1$ positiv ist.

Dagegen ist die von Kramp u. A. aufgestellte Gleichung

$$(u+k, +1)^y = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \left\{ \frac{(y, -1)^\nu}{(1, +1)^\nu} (u, +1)^{y-\nu} (k, +1)^\nu \right\},$$

zu welcher man gelangt, wenn man $(u+k, +1)^y$ auf ähnliche Weise, wie im Vorhergehenden entwickelt, aber $\Delta u = -1$ setzt, im Allgemeinen unrichtig.

Weil nämlich

$$(u,+1)^{y-\nu}(k,+1)^{\nu} = \frac{(u,+1)^{y}(k,+1)^{\nu}}{(u+y-\nu,+1)^{\nu}}$$

$$= \frac{(u,+1)^{y}(k,+1)^{\nu}}{(u+y-1,-1)^{\nu}} = \frac{(u,+1)^{y}(-k,-1)^{\nu}}{(1-u-y,+1)^{\nu}}$$

ist, so hat in Folge der Gleichung (91.), wenn in dieser $1-u-y$ statt u, ferner $-k$ statt k und $x=1$ gesetzt wird, sobald der reelle Theil von $1-u-k$ positiv ist, die Reihe auf der Rechten der vorstehenden Gleichung den Werth

$$\frac{(u,+1)^{y}(1-u-y-k,+1)^{y}}{(1-u-y,+1)^{y}} = \frac{(u,+1)^{y}}{(-u,-1)^{y}}(-u-k,-1)^{y}.$$

Es ist aber*)

$$\frac{(u,+1)^{y}}{(-u,-1)^{y}} = \frac{Fc(u)\,Fc(1-u)}{Fc(u+y)\,Fc(1-u-y)} = \frac{\sin(u\pi)}{\sin(u+y)\pi},$$

und es ergiebt sich demnach an Stelle der obigen Gleichung die folgende:

$$(93.)\quad \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{(y,-1)^{\nu}}{(1,+1)^{\nu}}(u,+1)^{y-\nu}(k,+1)^{\nu}\right\} = \frac{\sin(u\pi)}{\sin(u+y)\pi}\,\frac{\sin(u+k+y)\pi}{\sin(u+k)\pi}(u+k,+1)^{y};$$

wie dies bereits Ohm**) bemerkt hat.

Man hat hier ein treffendes Beispiel zu dem oben Gesagten, dass man beim Gebrauch der Formel

$$F(u+k) = F(u)+\frac{\Delta F(u)}{\Delta u}k+\frac{\Delta^2 F(u)}{\Delta u^2}\,\frac{k(k-\Delta u)}{2}+\cdots+\frac{\Delta^n F(u)}{\Delta u^n}\,\frac{(k,-\Delta u)^n}{(1,+1)^n}+R_n$$

nicht schliessen dürfe, es sei $R_n=0$ für $n=\infty$, sobald die Summe der n ersten Glieder bei stets wachsendem Werthe von n sich einer bestimmten Grenze nähert.

Aus (91.) folgt

$$\frac{1}{k}\left(\frac{(u+k,+x)^{y}}{(u,+x)^{y}}-1\right) = \frac{y}{u}+\frac{y(y-1)}{1.2}\,\frac{k-x}{u(u+x)}+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\,\frac{(k-x)(k-2x)}{u(u+x)(u+2x)}+\cdots.$$

Nimmt man nun an, es sei der relle Theil $\frac{u}{x}+y$ positiv, und lässt k unend-

*) S. d. folg. §.

**) System der Mathematik, Thl. 2, S. 89.

lich klein werden, so ergiebt sich

$$(94.)\quad \frac{\partial\log(u,+x)^{y}}{\partial u} = \frac{y}{u}-\frac{y(y-1)}{1.2}\,\frac{x}{u(u+x)}+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\,\frac{2x^2}{u(u+x)(u+2x)}-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(y,-1)^{n}}{(1,+1)^{n}}\,\frac{(1,+1)^{n-1}}{(u,+x)^{n}}x^{n-1}+\cdots$$

$$= \frac{y}{u}-\frac{y(y-1)}{2}\,\frac{x}{u(u+x)}+\frac{y(y-1)(y-2)}{3}\,\frac{x^2}{u(u+x)(u+2x)}+\cdots.$$

Nun folgt aber aus der Formel (87.), wenn man in derselben $n-1$ statt n und $u+x$ statt u setzt:

$$(95.)\quad \Delta^{n-1}(u+x,+x)^{y} = (y,-1)^{n-1}\frac{(u+x,+x)^{y}x^{n-1}}{(u+x,+x)^{n-1}},\qquad \text{für } \Delta u = x,$$

und hieraus, wenn man $y=-1$ setzt:

$$(96.)\quad \Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) = (-1)^{n-1}\frac{(1,+1)^{n-1}x^{n-1}}{(u,+x)^{n}},\qquad \text{für } \Delta u = x;$$

folglich ist

$$(97.)\quad \frac{\partial\log(u,+x)^{y}}{\partial u} = \frac{y}{u}+\frac{y(y-1)}{1.2}\Delta\left(\frac{1}{u}\right)+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\Delta^2\left(\frac{1}{u}\right)+\cdots$$

$$+\frac{(y,-1)^{n}}{(1,+1)^{n}}\Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right)+\cdots.$$

Legt man nun, bei gegebenen Werthen von x, y, der Grösse u nur solche Werthe bei, für welche nicht nur der reelle Theil von $\frac{u}{x}+y$, sondern auch der reelle Theil von $\frac{u}{x}$ positiv ist, so sind die Ausdrücke auf beiden Seiten dieser Gleichung stetige Functionen von u, und man erhält durch Integration:

$$(98.)\quad \log(u,+x)^{y} = y\log u+\frac{y(y-1)}{1.2}\Delta\log u+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\Delta^2\log u+\cdots$$

$$+\frac{(y,-1)^{n}}{(1,+1)^{n}}\Delta^{n-1}\log u+\cdots,$$

in welcher Gleichung die Werthe der darin vorkommenden Logarithmen folgendermassen zu fixiren sind. Man bestimme den Werth von $\log x$ so, dass $e^{y\log x}$ gleich der in dem Ausdrucke (60.) von $(u,+x)^{y}$ vorkommenden Potenz x^{y} ist. Ferner setze man, wenn w eine Grösse ist, für welche der reelle Theil von $\frac{w}{x}$ einen positiven Werth hat,

$$\log w = \log x + \log\left(\frac{w}{x}\right)$$

und lege dem Logarithmus von $\frac{w}{x}$ dessen Hauptwerth*) bei. Dann wird einer der Werthe von $\log(u,+x)^y$ durch die Formel

$$y\log x + \log u - \log(u+xy) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty}\left\{\log(u+\alpha x) - \log(u+(y+\alpha)x) + y\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right\}$$

(wo dem Logarithmus von $1+\frac{1}{\alpha}$ sein reeller Werth beizulegen ist) dargestellt, und dieser wird durch die Gleichung (98.) gegeben, wenn man auch in dem Ausdrucke auf der Rechten die Werthe der Logarithmen

$$\log u,\ \log(u+x),\ \log(u+2x),\ \ldots,$$

aus denen die Glieder desselben zusammengesetzt sind, so, wie bestimmt worden ist, fixirt.

Auf diese Weise definirt, sind nämlich beide Seiten der genannten Gleichung stetige Functionen von u, welche der Gleichung (97.) zufolge nur um eine von u unabhängige Grösse von einander verschieden sein können.

Setzt man ferner, unter ν eine ganze positive Zahl verstehend, $u = \nu x$, so werden die Grössen

$$\log(u,+x)^y - y\log u,\quad \Delta\log u,\quad \Delta^2\log u,\quad \ldots$$

sämmtlich unendlich klein für einen unendlich grossen Werth von ν; es muss also die genannte Grösse gleich Null sein.

Da

$$(u,+x)^{y+\nu} = (u,+x)^y(u+yx,+x)^\nu = (u,+x)^\nu(u+\nu x,+x)^y,$$

also

$$(u,+x)^y = \frac{(u,+x)^\nu}{(u+yx,+x)^\nu}(u+\nu x,+x)^y$$

ist, und man die ganze positive Zahl ν so gross annehmen kann, dass die

*) Ist ξ eine positive und η eine beliebige reelle Grösse, so ist der Hauptwerth von $\log(\xi+\eta i)$ gleich $\frac{1}{2}\log(\xi^2+\eta^2)+i\,\mathrm{arc.tg}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$, wo dem Logarithmus von $(\xi^2+\eta^2)$ sein reeller Werth beizulegen und der Arcus zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ anzunehmen ist.

reellen Theile von

$$\frac{u}{x}+\nu \quad\text{und}\quad \frac{u}{x}+\nu+y$$

beide positiv sind, so folgt, dass die Formel (98.) in allen Fällen zur Berechnung von $(u,+x)^y$ ausreicht.

Aus der Gleichung $(u,-x)^y = \frac{1}{(u+x,+x)^{-y}}$ ergiebt sich ferner, wenn die reellen Theile von

$$\frac{u}{x}+1 \quad\text{und}\quad \frac{u}{x}+1-y$$

beide positiv sind:

$$(99).\quad \log(u,-x)^y = y\log(u+x) - \frac{y(y+1)}{1.2}\Delta\log(u+x) + \frac{y(y+1)(y+2)}{1.2.3}\Delta^2\log(u+x) - \cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{(y,+1)^n}{(1,+1)^n}\Delta^{n-1}\log(u+x)+\cdots,$$

wo wieder, wie in (96.), $\Delta u = x$ zu setzen ist.

Ferner hat man

$$(u,-x)^{y-\nu} = (u,-x)^y(u-yx,-x)^{-\nu} = \frac{(u,-x)^y}{(u-yx+x,+x)^\nu},$$
$$(u,-x)^{y-\nu} = (u,-x)^{-\nu}(u+\nu x,-x)^y = \frac{(u+\nu x,-x)^y}{(u+x,+x)^\nu},$$

also

$$(100.)\qquad (u,-x)^y = \frac{(u-yx+x,+x)^\nu}{(u+x,+x)^\nu}(u+\nu x,-x)^y,$$

und es lässt sich wieder in allen Fällen ν so gross annehmen, dass die Formel (99.) zur Berechnung von $(u,-x)^y$ benutzbar ist.

9.

Um eine Anwendung der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln zu geben, will ich daraus die Ausdrücke der trigonometrischen Functionen durch Facultäten herleiten.

Man hat, wenn $\sin u = z$ gesetzt wird,

$$u = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7} + \cdots,$$

für alle reellen Werthe von u zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, diese selbst nicht ausgeschlossen.

Substituirt man nun, unter m eine ganz beliebige (complexe) Grösse verstehend, den vorstehenden Ausdruck von u in die Reihe

$$1+(mi)u+(mi)^2\frac{u^2}{1.2}+(mi)^3\frac{u^3}{1.2.3}+\cdots = e^{mui},$$

und entwickelt dann die Formel nach Potenzen von z, so muss die daraus hervorgehende Reihe, die von der Form

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} a_\alpha \sin^\alpha u$$

ist, in Folge des Satzes 5, B) (§ 7) ebenfalls für alle jene Werthe von u convergiren, und die Gleichung

$$e^{mui} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} a_\alpha \sin^\alpha u$$

bestehen.

Nachdem auf diese Weise die Bedingung, unter welcher die vorstehende Gleichung gilt, festgestellt ist, kann man sich zur Bestimmung der Coefficienten a_α irgend einer passenden Methode bedienen. Man erhält z. B. durch zweimaliges Differentiiren der Gleichung nach u, indem

$$\begin{aligned}\frac{d\sin^\alpha u}{du} &= \alpha\sin^{\alpha-1}u\cos u,\\ \frac{d^2\sin^\alpha u}{du^2} &= \alpha(\alpha-1)\sin^{\alpha-2}u\cos^2 u-\alpha\sin^\alpha u,\\ &= \alpha(\alpha-1)\sin^{\alpha-2}u-\alpha^2\sin^\alpha u\end{aligned}$$

ist,

$$\begin{aligned}-m^2e^{mui} &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} a_\alpha(\alpha(\alpha-1)\sin^{\alpha-2}u-\alpha^2\sin^\alpha u)\\ &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}((\alpha+2)(\alpha+1)a_{\alpha+2}\sin^\alpha u)-\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}(\alpha^2 a_\alpha\sin^\alpha u),\end{aligned}$$

oder

$$e^{mui} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}\frac{1}{m^2}(\alpha^2a_\alpha-(\alpha+1)(\alpha+2)a_{\alpha+2})\sin^\alpha u;$$

es muss also

$$\frac{1}{m^2}(\alpha^2a_\alpha-(\alpha+1)(\alpha+2)a_{\alpha+2}) = a_\alpha, \qquad (\alpha=0,1,\cdots+\infty)$$

oder

$$a_{\alpha+2} = \frac{\alpha^2-m^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}a_\alpha$$

sein.

Hieraus ergiebt sich (für $\nu=0,1,\cdots+\infty$)

$$\begin{aligned}a_{2\nu} &= \frac{\left(\frac{1}{2}m,-1\right)^\nu\left(-\frac{1}{2}m,-1\right)^\nu}{(1,+1)^\nu\left(\frac{1}{2},+1\right)^\nu}\\ &= (-1)^\nu\frac{(m,-2)^\nu(m,+2)^\nu}{(2,+2)^\nu(1,+2)^\nu}\\ &= (-1)^\nu\frac{(m,-2)^\nu(m,+2)^\nu}{(1,+1)^{2\nu}},\\ a_{2\nu+1} &= \frac{mi\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},-1\right)^\nu\left(-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},-1\right)^\nu}{(1,+1)^\nu\left(\frac{3}{2},+1\right)^\nu}\\ &= (-1)^\nu\frac{mi(m-1,-2)^\nu(m+1,+2)^\nu}{(1,+1)^{2\nu+1}},\end{aligned}$$

indem dann wirklich

$$\begin{aligned}\frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu-2}} &= -\frac{(m-2(\nu-1))(m+2(\nu-1))}{(2\nu-1)2\nu} = \frac{(2\nu-2)^2-m^2}{(2\nu-1)2\nu}\\ \frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu-1}} &= -\frac{(m-1-2(\nu-1))(m+1+2(\nu-1))}{2\nu(2\nu+1)} = \frac{(2\nu-1)^2-m^2}{2\nu(2\nu+1)}\end{aligned}$$

ist, und durch Substitution der Reihe $u=\sin u+\cdots$ in die Reihe für e^{mui} sich $a_0=1$, $a_1=mi$ findet. Man hat daher

$$(101.)\qquad \begin{aligned}\cos(mu) &= \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}m,-1\right)^\nu\left(-\frac{1}{2}m,-1\right)^\nu}{(1,+1)^\nu\left(\frac{1}{2},+1\right)^\nu}\sin^{2\nu}u\right\}\\ &= \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{(-1)^\nu\frac{(m,-2)^\nu(m,+2)^\nu}{(1,+1)^{2\nu}}\sin^{2\nu}u\right\},\end{aligned}$$

$$(102.)\qquad \begin{aligned}\sin(mu) &= m\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},-1\right)^\nu\left(-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},-1\right)^\nu}{(1,+1)^\nu\left(\frac{3}{2},+1\right)^\nu}\sin^{2\nu+1}u\right\}\\ &= m\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{(-1)^\nu\frac{(m-1,-2)^\nu(m+1,+2)^\nu}{(1,+1)^{2\nu+1}}\sin^{2\nu+1}u\right\}\end{aligned}$$

für jeden Werth von m, und für alle diejenigen reellen Werthe von u, die nicht ausserhalb des Intervalls $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Setzt man nun $u=\frac{1}{2}\pi$, und $2m$ statt m, so erhält man durch Vergleichung der so sich ergebenden Ausdrücke von $\cos(m\pi)$, $\sin(m\pi)$ mit der Formel (90.), indem man in dieser $u=\frac{1}{2}$, $y=m$, $k=-m$, und auch $u=\frac{3}{2}$, $y=m-\frac{1}{2}$, $k=m-\frac{1}{2}$ setzt:

$$(103.)\quad \left\{\begin{aligned} \cos(m\pi) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2},+1\right)^{+m}\left(\frac{1}{2},+1\right)^{-m}},\\ \sin(m\pi) &= \frac{2m\left(\frac{3}{2},+1\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{2},+1\right)^{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2},+1\right)^{-m-\frac{1}{2}}},\end{aligned}\right.$$

oder, weil

$$\left(\frac{3}{2},+1\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{3}{2}-1}=2,$$

$$(1,+1)^{m}=(1,+1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2},+1\right)^{m-\frac{1}{2}},$$

$$(1,+1)^{-m}=(1,+1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2},+1\right)^{-m-\frac{1}{2}}$$

ist,

$$(104.)\quad \sin(m\pi)=\frac{4m(1,+1)^{\frac{1}{2}}(1,+1)^{\frac{1}{2}}}{(1,+1)^{+m}(1,+1)^{-m}}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch m und setzt darauf $m=0$, so ergiebt sich:

$$(105.)\quad \frac{1}{2}\sqrt{\pi}=(1,+1)^{\frac{1}{2}},$$

und daher

$$(106.)\quad \sin(m\pi)=\frac{m\pi}{(1,+1)^{-m}(1,+1)^{+m}}.$$

Da nach (83.)

$$(1,+1)^{m}=\frac{1}{Fc(1+m)}$$

ist, so erhält man aus den vorstehenden Formeln:

$$(107.)\quad \begin{aligned}\sin(m\pi) &= m\pi Fc(1+m)\,Fc(1-m)\\ &= \pi Fc(m)\,Fc(1-m),\end{aligned}$$

$$(108.)\quad \sqrt{\pi}=\frac{1}{Fc\left(\frac{1}{2}\right)},$$

und, da

$$\left(\frac{1}{2},+1\right)^{m}=\frac{Fc\left(\frac{1}{2}\right)}{Fc\left(m+\frac{1}{2}\right)}$$

ist:

$$(109.)\quad \cos(m\pi)=\pi Fc\left(\frac{1}{2}+m\right)Fc\left(\frac{1}{2}-m\right),$$

übereinstimmend mit (107.), wenn man dort $m+\frac{1}{2}$ statt m setzt.

Alle diese Formeln*) gelten, nach der hier gegebenen Ableitung, für jeden reellen und imaginären Werth von m.

---

*) Setzt man die Darstellungen von $\sin(u\pi)$, $\cos(u\pi)$ in der Form unendlicher Producte als bekannt voraus, so ergeben sich die Formeln (107.), (109.) unmittelbar aus dem Ausdrucke von $Fc(u)$.

AKADEMISCHE ANTRITTSREDE,

gehalten in der öffentlichen Sitzung der Berliner Akademie am 9. Juli 1857.

Unsere heutige öffentliche Sitzung ist die erste, in welcher ich mich freue, eine Pflicht erfüllen zu können, der ich schon längst gern nachgekommen wäre.

Indem die Akademie mich der Ehre würdig gehalten, als Mitglied in Sie aufgenommen zu werden, hat Sie meinen wissenschaftlichen Bestrebungen eine Anerkennung zu Theil werden lassen, für die ich mich gedrungen fühle, Ihr meinen aufrichtigsten und wärmsten Dank auszudrücken. Wohl wissend indess, wie weit meine unter Hemmungen mannigfaltiger Art entstandenen Arbeiten von dem einst in der Begeisterung der Jugend etwas weit gesteckten Ziele, zu dem ich sie hätte führen mögen, entfernt geblieben sind, täusche ich mich nicht darüber, dass nicht sowohl meine bisherigen Leistungen, sondern hauptsächlich nur die von wohlwollenden Beurtheilern daran geknüpften Erwartungen die Akademie bei Ihrer Wahl haben leiten können. Dem Vertrauen, welches Sie mir dadurch bewiesen, einigermassen zu entsprechen, wird für mich keine leichte Aufgabe sein; ich kann nur die Versicherung geben, dass ich an ihre Lösung meine ganze Kraft setzen werde.

Ich habe nun in wenigen Worten den Gang meiner bisherigen Studien anzudeuten, und die Richtung zu bezeichnen, in welcher ich auch fernerhin fortzuschreiten mich bemühen werde.

Ein verhältnissmässig noch junger Zweig der mathematischen Analysis, die Theorie der elliptischen Functionen, hatte von der Zeit an, wo ich unter der Leitung meines hochverehrten Lehrers Gudermann, dem ich stets eine dankbare Erinnerung bewahren werde, die erste Bekanntschaft mit derselben machte, eine mächtige Anziehungskraft auf mich geübt, die auf den ganzen Gang meiner mathematischen Ausbildung von bestimmendem Einflusse geblieben ist. Die von Euler begründete und von Legendre mit Eifer und Erfolg, aber in zu einseitiger Richtung weitergeförderte Disciplin hatte damals seit etwa einem Decennium eine gänzliche Umgestaltung erfahren durch die Einführung der von Abel und Jacobi entdeckten doppelt-periodischen Functionen, in denen die Analysis eine neue, durch höchst merkwürdige Eigenschaften ausgezeichnete Gattung von Grössen gewonnen, welche alsbald auch auf dem Gebiete der Geometrie und Mechanik die vielfältigsten Anwendungen fanden, und auch dadurch den Beweis lieferten, dass sie die gesunde Frucht einer naturgemässen Fortentwicklung der Wissenschaft seien. Nun hatte aber Abel, der gewohnt war, überall den höchsten Standpunkt zu nehmen, ein Theorem hingestellt, welches alle aus der Integration algebraischer Differentiale entspringenden Transcendenten umfassend, für diese dieselbe Bedeutung hatte wie das Euler'sche für die elliptischen. In der Blüthe seines Lebens dahingerafft, hatte er selbst seine grosse Entdeckung nicht verfolgen können; es war aber Jacobi gelungen, eine nicht minder wichtige daran zu knüpfen, indem er die Existenz periodischer Functionen mehrerer Argumente nachwies, deren Fundamental-Eigenschaften in dem Abel'schen Theorem begründet sind, wodurch zugleich der wahre Sinn und das eigentliche Wesen desselben aufgeschlossen wurden. Diese Grössen einer ganz neuen Art, für welche die Analysis noch kein Beispiel hatte, wirklich darzustellen und ihre Eigenschaften näher zu ergründen, ward von nun an eine der Hauptaufgaben der Mathematik, an der auch ich mich zu versuchen entschlossen war, sobald ich den Sinn und die Bedeutung derselben klar erkannt hatte. Freilich wäre es thöricht gewesen, wenn ich an die Lösung eines solchen Problems auch nur hätte denken wollen, ohne mich durch ein gründliches Studium der vorhandenen Hülfsmittel und durch Beschäftigung mit minder schweren Aufgaben dazu vorbereitet zu haben. So sind Jahre verflossen, ehe ich an die eigentliche Arbeit gehen konnte, die ich, gehemmt durch die Ungunst der Verhältnisse, auch seitdem nur langsam zu fördern vermocht habe. Wenn ich aber gleichwohl so glücklich war, zu einigen Resultaten zu gelangen,

welche die Akademie mit Ihrem Beifall geehrt hat, obgleich ich sie erst in unvollkommener Gestalt habe veröffentlichen können, so brauche ich wohl nicht ausdrücklich anzugeben, in welcher Richtung das Ziel liegt, wohin sich zunächst nun meine Bestrebungen werden richten müssen.

Glücklich aber würde ich mich schätzen, wenn ich späterhin aus meinen Studien auch für die Anwendungen der Mathematik, namentlich auf Physik, einigen Gewinn ziehen könnte. Ich habe schon angedeutet, dass es mir keineswegs gleichgültig ist, ob eine Theorie sich für solche Anwendungen eigne oder nicht. Dabei fürchte ich nicht, dass man mir vorwerfe, es werde die Bedeutung, welche die Mathematik als reine Wissenschaft mit vollstem Rechte beansprucht, herabgesetzt, wenn ich sie ganz besonders auch darum hochstelle, weil durch sie allein ein wahrhaft befriedigendes Verständniss der Naturerscheinungen vermittelt wird. Niemand zwar kann bereitwilliger als ich es anerkennen, dass man den Zweck einer Wissenschaft nicht ausserhalb derselben suchen darf, und dass es nicht nur ihre Würde beeinträchtigen, nein, dass es geradezu an ihr sich versündigen heisst, wenn man, statt sich ihr mit vollster Liebe und Hingebung zu widmen, nur Dienste von ihr verlangt, nur sie brauchen will für irgend eine andre Disciplin oder für die Bedürfnisse des Lebens, und darum wohl gar sich vermisst, der weiterschreitenden Forschung ihren Weg vorzeichnen zu wollen, und jede Richtung verwirft, die nicht sofort zu practisch verwerthbaren Resultaten zu führen scheint. Ich meine aber, es muss das Verhältniss zwischen Mathematik und Naturforschung etwas tiefer aufgefasst werden, als es geschehen würde, wenn etwa der Physiker in der Mathematik nur eine wenn auch unentbehrliche Hülfsdisciplin achten, oder der Mathematiker die Fragen, die jener ihm stellt, nur als eine reiche Beispiel-Sammlung für seine Methoden ansehen wollte. Ich darf jedoch heute diesen Gegenstand, der mir allerdings sehr am Herzen liegt, nicht weiter verfolgen. Auf die Frage aber, die ich schon vernommen, ob es denn wirklich möglich sei, aus den abstracten Theorien, welchen sich die heutige Mathematik mit Vorliebe zuzuwenden scheine, auch etwas unmittelbar Brauchbares zu gewinnen, möchte ich entgegnen, dass doch auch nur auf rein speculativem Wege griechische Mathematiker die Eigenschaften der Kegelschnitte ergründet hatten, lange bevor irgend wer ahnte, dass sie die Bahnen seien, in welchen die Planeten wandeln, und dass ich allerdings der Hoffnung lebe, es werde noch mehr Functionen geben mit Eigenschaften, wie sie Jacobi an seiner Θ-Function rühmt, die lehrt, in wie viel Quadrate sich jede Zahl zerlegen lässt, wie man den Bogen einer Ellipse rectificirt, und dennoch, setze ich hinzu, im Stande ist, und zwar sie allein, das wahre Gesetz darzustellen, nach welchem das Pendel schwingt.

ÜBER DIE INTEGRATION ALGEBRAISCHER DIFFERENTIALE VERMITTELST LOGARITHMEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 26. Februar 1857.)

Das erste diesjährige Heft des Liouville'schen Journals [2ᵉ Série, T. II, p. 1] enthält eine Abhandlung von Herrn Tschebyscheff, in der ein Verfahren entwickelt wird, um bei einem vorgelegten Differentiale von der Form

$$\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}},$$

wo R eine ganze Function 4^{ten} Grades von x, ρ aber eine beliebige rationale Function bedeuten soll, zu entscheiden, ob dasselbe sich durch Logarithmen integriren lasse oder nicht, und zugleich, wenn das Erstere der Fall ist, die Integration wirklich auszuführen. Der Verfasser setzt dabei die Resultate einer früheren Arbeit voraus, in welcher er dieselbe Frage für den Fall, dass der zu integrirende Ausdruck rational aus der unabhängigen Veränderlichen und irgend einer Wurzel einer ganzen Function derselben zusammengesetzt ist, behandelt, sich aber damit begnügt, zu zeigen, wie man den algebraischen Theil des gesuchten Integrals finden könne, und von den logarithmischen Gliedern die Form anzugeben, ohne auf die wirkliche Bestimmung derselben einzugehen. Das ganz allgemeine Problem aber, ein algebraisches Differential logarithmisch zu integriren, wofern dies überhaupt möglich ist, hatte sich schon Abel gestellt, und war, wie aus einem wenige

Monate vor seinem Tode geschriebenen Briefe an Legendre erhellt, zu bedeutenden Resultaten gelangt, wie es denn auch sehr wahrscheinlich ist, dass eben diese Untersuchungen ihn zu dem Theorem geführt haben, welches unter seinen grossen Entdeckungen vorzugsweise seinen Namen trägt. Allein es war ihm nicht vergönnt, seine Arbeiten abzuschliessen, oder auch nur die bereits gewonnenen Ergebnisse vollständig zu veröffentlichen, so dass sich in den von ihm selbst und nach seinem Tode herausgegebenen Abhandlungen nur einige besondere Fälle der in Rede stehenden Aufgabe behandelt finden. Die erste, welche hierher gehört, steht in den nachgelassenen Werken und beschäftigt sich mit der Reduction der elliptischen Integrale auf die kleinste Anzahl von Transcendenten. Sie ist offenbar eine seiner frühesten; die Darstellung ist noch wenig elegant, und die Lösung des gestellten Problems wird mehr auf dem Wege mechanischer, dem betrachteten Einzelfalle angepasster Rechnung, als aus allgemeinen Principien gewonnen. In einer anderen, im ersten Bande des Crelle'schen Journals veröffentlichten Arbeit wird die Frage beantwortet, unter welchen Bedingungen sich das Differential

$$\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$$

unter der Voraussetzung, dass R und ρ ganze Functionen von x seien, durch einen logarithmischen Ausdruck von der Form

$$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right),$$

in dem p, q ebenfalls ganze Functionen sein sollen, integriren lasse; wobei sich der merkwürdige Satz ergiebt, dass dieses nur angeht, wenn der Kettenbruch, in welchen sich die Wurzelgrösse entwickeln lässt, periodisch ist.

An dieses Resultat nun knüpft Herr Tschebyscheff an, und gelangt, indem er R auf den 4ten Grad beschränkt, an die Stelle von ρ aber eine beliebige rationale Function setzt, so dass es sich jetzt um das allgemeinste elliptische Integral handelt, durch eine Reihe algebraischer Umformungen dahin, für dieses das zu lösende Problem auf das von Abel behandelte zurückzuführen.

Hierbei muss ich jedoch bemerken, dass bei der angegebenen Beschränkung der Aufgabe dieselbe eigentlich schon vollständig erledigt ist durch die von Abel in seiner letzten leider unvollendet gebliebenen Arbeit in Betreff

der allgemeinsten unter elliptischen, logarithmischen und algebraischen Functionen möglichen Relationen entwickelten Principien, welche zugleich eine klarere und tiefere Einsicht in das Wesen der Sache gewähren, als man sie erhalten kann, wenn man ohne Rücksicht auf die Theorie der ganzen Gattung von Grössen, zu denen die betrachtete gehört, das gewünschte Resultat unmittelbar durch eine algebraische Rechnung, die nothwendig sehr complicirt wird, zu erreichen sich vorsetzt. Am einfachsten und übersichtlichsten gestaltet sich aber die ganze Untersuchung, wenn man, nachdem das vorgelegte Integral durch eine einfache Substitution auf die Form

$$\int \frac{F(x)\, dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

gebracht worden, wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeuten soll, $x = \sin^2 \mathrm{am}\, u$ setzt, und nun dasselbe als Function von u betrachtet. Dann kann man ihm, unter Beibehaltung der in Jacobi's Fundamenten gebrauchten Bezeichnungen, stets die Gestalt

$$V_0 + \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \cdots + \beta u + \gamma E(u)$$

geben, in welcher Formel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta, \gamma$ Constanten sind, V_0 eine rationale Function von $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ und $\frac{d \sin^2 \mathrm{am}\, u}{du}$ (oder x und $\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}$), die Grössen $W_1, W_2, \ldots$ aber Ausdrücke von der Form

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \Pi(u, a) + \mu_1 \Pi(u, b) + \nu_1 \Pi(u, c) + \cdots, \\ \lambda_2 \Pi(u, a) + \mu_2 \Pi(u, b) + \nu_2 \Pi(u, c) + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

in denen $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \ldots$ ganze Zahlen sind, bezeichnen. Dabei darf angenommen werden, dass unter den Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ keine Relation

$$m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \cdots = 0$$

unter der Bedingung, dass $m_1, m_2, \ldots$ rationale Zahlen seien, bestehe.

Wenn sich nun der vorstehende Ausdruck soll durch Logarithmen ausdrücken lassen, so ist leicht zu zeigen, dass

$$\begin{array}{l} W_1 = \frac{1}{2n_1} \log V_1 + \varepsilon_1 u, \\ W_2 = \frac{1}{2n_2} \log V_2 + \varepsilon_2 u, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

sein muss, wo $n_1, n_2, \ldots$ ganze positive Zahlen, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Constanten, und $V_1, V_2, \ldots$ rationale Functionen von $\sin^2 \operatorname{am} u$ und $\frac{d \sin^2 \operatorname{am} u}{du}$ bedeuten. Dann aber werden

$$e^{-2n_1\varepsilon_1 u + 2n_1 W_1} = V_1, \qquad e^{-2n_2\varepsilon_2 u + 2n_2 W_2} = V_2, \quad \ldots$$

eindeutige Functionen von u, welche die Perioden $2K$ und $2K'i$ haben. Daraus erhält man sofort die Bedingungsgleichungen, welche die Parameter $a, b, c, \ldots$ erfüllen müssen, nämlich

$$\begin{aligned} \lambda_1 a + \mu_1 b + \nu_1 c + \cdots &= \frac{\mathfrak{m}_1 K + \mathfrak{n}_1 K'i}{n_1}, \\ \lambda_2 a + \mu_2 b + \nu_2 c + \cdots &= \frac{\mathfrak{m}_2 K + \mathfrak{n}_2 K'i}{n_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

in denen unter $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2, \ldots$ ganze Zahlen zu verstehen sind. Und umgekehrt, wenn

$$\lambda_1 a + \mu_1 b + \nu_1 c + \cdots, \qquad \lambda_2 a + \mu_2 b + \nu_2 c + \cdots, \quad \cdots$$

sich auf diese Weise durch K und $K'i$ ausdrücken lassen, so kann man vermittelst der Formeln für die Addition und Subtraction der Parameter bei der dritten Gattung der elliptischen Integrale die Grössen $W_1, W_2, \ldots$ wirklich in der angegebenen Weise darstellen, wobei sich

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \lambda_1 E(a) + \mu_1 E(b) + \nu_1 E(c) + \cdots - \frac{\mathfrak{m}_1 E + \mathfrak{n}_1 (K' - E')i}{n_1}, \\ \varepsilon_2 &= \lambda_2 E(a) + \mu_2 E(b) + \nu_2 E(c) + \cdots - \frac{\mathfrak{m}_2 E + \mathfrak{n}_2 (K' - E')i}{n_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

als rationale Functionen von

$$\sin^2 \operatorname{am} a, \qquad \sin^2 \operatorname{am} b, \qquad \sin^2 \operatorname{am} c, \quad \ldots$$

und

$$\frac{d \sin^2 \operatorname{am} a}{da}, \qquad \frac{d \sin^2 \operatorname{am} b}{db}, \qquad \frac{d \sin^2 \operatorname{am} c}{dc}, \quad \ldots$$

ergeben. Substituirt man dann die vorstehenden Ausdrücke für $W_1, W_2, \ldots$ in die Formel

$$V_0 + \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \cdots + \beta u + \gamma E(u),$$

so müssen aus derselben sowohl u als $E(u)$ fortfallen, wodurch man die

weiteren Bedingungen

$$\gamma = 0, \qquad \beta = -(\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \cdots)$$

erhält.

Es bedarf keiner Erinnerung, dass diese Bedingungen sich nun auch algebraisch durch die Constanten, welche in dem vorgelegten Differentiale unmittelbar vorkommen, ausdrücken lassen. Die dazu nöthigen Algorithmen sind aber keine neuen, sondern solche, die den Elementen der Theorie der elliptischen Functionen angehören, wie überhaupt die im Vorhergehenden angedeutete Behandlungsweise des in Rede stehenden Problems den grossen Vortheil hat, dass sie nur die Fundamental-Sätze über die elliptischen Functionen voraussetzt, deren Kenntniss es möglich macht, das ausgesprochene Resultat fast ganz ohne eigentliche Rechnung abzuleiten. Was noch zu wünschen übrig bleibt, ist ein directes Verfahren, um das betrachtete Integral auf die hier vorausgesetzte Form zu bringen. Die Methoden, welche dafür gewöhnlich angegeben werden, sind wenig brauchbar; sie lassen sich aber durch eine andere ersetzen, welche auf dem Satze von der Vertauschung von Argument und Parameter bei der dritten Gattung der elliptischen Integrale beruht, und die ihren Zweck vollständig zu erfüllen scheint.

Die Leichtigkeit aber, mit der sich in der dargestellten Weise für die elliptischen Transcendenten die Bedingungen, unter denen sie auf Logarithmen reducirbar sind, aus den Fundamental-Sätzen der Theorie ableiten lassen, hat mich veranlasst, dieselbe Untersuchung für beliebige algebraische Differentiale in ihrer ganzen Allgemeinheit wieder aufzunehmen. Seit geraumer Zeit beschäftige ich mich mit der Theorie der Transcendenten, die aus der Integration solcher Differentiale entspringen, in der Hoffnung, dass es mir gelingen werde, auch für sie alle die Probleme zu lösen, welche ich für eine besondere Gattung derselben in meiner Theorie der Abel'schen Functionen behandle. Meine Bemühungen sind nicht ohne Erfolg geblieben; die wesentlichsten Schwierigkeiten, die zu überwinden waren, sind glücklich beseitigt, und ich habe nur noch verhältnissmässig wenige Fragen zu erledigen, um die Lösung der Hauptaufgaben, um die es sich handelt, und welche ein grosses Gebiet der Analysis umfassen, zu vollenden. Das Abel'sche Theorem, welches eine wesentliche Eigenschaft der Integrale algebraischer Differentiale ausspricht, und die Lehre von den Perioden derselben — die nach meiner Überzeugung das Fundament der ganzen Integral-Rechnung bildet, und aus der z. B., wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde, das Abel'sche Theorem selbst als ein einfaches Corollar sich ergiebt — sind die hauptsächlichsten dabei zur Anwendung kommenden Hülfsmittel, so dass meine Bemühungen vor allen Dingen auf deren weitere Ausbildung und Fruchtbarmachung gerichtet sein mussten. Ich habe mich nun überzeugt, dass sie auch vollständig ausreichen, um alle Fragen, auf welche man bei der erwähnten Untersuchung geführt wird, zu beantworten, und zwar dem Principe nach eben so einfach, wie es bei den elliptischen Integralen möglich ist — ein Resultat, welches, denke ich, wenigstens diejenigen Mathematiker interessiren wird, welchen es Befriedigung gewährt, wenn es gelingt, irgend ein Kapitel der Wissenschaft zu einem wirklichen Abschlusse zu bringen. Die Logarithmen sind die ersten und einfachsten transcendenten Grössen, zu welchen man in der Integral-Rechnung geführt wird; es ist daher die Frage, welche Integrationen mit ihrer Hülfe überhaupt können ausgeführt werden, eine unabweisliche, die freilich in den Lehrbüchern bis jetzt kaum berührt wird — auch nicht von den Autoren, die sich darin gefallen haben, einer mehr oder minder zweckmässigen Zusammenstellung der durch die Bemühungen Euler's, Legendre's u. A. gewonnenen Resultate den stolzen Namen eines Systems der Integral-Rechnung zu geben.

Für die Integrale von der Form

$$\int F(x, \sqrt[m]{R(x)})\,dx,$$

wo $R(x)$ eine ganze Function von x, F eine rationale Function von x und $\sqrt[m]{R(x)}$ bedeutet, habe ich die Untersuchung bereits vollständig durchgeführt, und werde mir die Freiheit nehmen, die Ergebnisse derselben in einer folgenden Mittheilung der Akademie vorzulegen.

ÜBER EIN DIE HOMOGENEN FUNCTIONEN ZWEITEN GRADES BETREFFENDES THEOREM, NEBST ANWENDUNG DESSELBEN AUF DIE THEORIE DER KLEINEN SCHWINGUNGEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 4. März 1858.)

Wenn zwei ganze und homogene Functionen zweiten Grades Φ, Ψ von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben sind, so ist es im Allgemeinen immer möglich, dieselben in der Form

$$\begin{aligned}\Phi &= \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n \\ \Psi &= s_1 \vartheta_1 + s_2 \vartheta_2 + \cdots + s_n \vartheta_n\end{aligned}$$

dergestalt darzustellen, dass $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ die Quadrate homogener linearer Ausdrücke von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und $s_1, s_2, \ldots s_n$ Constanten sind. Bezeichnet man, unter s eine willkürliche Grösse verstehend, die Determinante von

$$s\Phi - \Psi$$

mit $f(s)$, so sind bekanntlich $s_1, s_2, \ldots s_n$ diejenigen Werthe von s, welche

$$f(s) = 0$$

machen — wie sofort daraus erhellt, dass sich $s\Phi - \Psi$, wenn man s einen dieser Werthe beilegt, durch weniger als n lineare Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausdrücken lässt —, während die Coefficienten von $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ rational aus denen von Φ, Ψ und aus $s_1, s_2, \ldots s_n$ zusammengesetzt werden.

Diese Transformation von Φ, Ψ ist eine der interessantesten und wichtigsten algebraischen Aufgaben, welcher man bei den verschiedenartigsten Untersuchungen begegnet. Für den Fall, dass unter den Grössen $s_1, s_2, \ldots s_n$ keine zwei gleiche sich finden, ist sie von Cauchy, Jacobi u. A. so vollständig behandelt worden, dass wohl nichts zu wünschen übrig bleibt. Dagegen scheint es nicht, als ob den eigenthümlichen Umständen, die eintreten, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind, besondere Beachtung geschenkt, und die Schwierigkeiten, die sich alsdann darbieten, und auf die ich bei einer nachher näher zu besprechenden Frage aufmerksam geworden bin, schon gehörig aufgeklärt seien. Auch glaubte ich anfangs, es würde dies bei der grossen Zahl verschiedener Fälle, die vorkommen können, nicht ohne weitläufige Erörterungen möglich sein. Um so erwünschter war es mir, zu finden, dass sich die von den genannten Mathematikern gegebene Lösung der Aufgabe in einer Weise modificiren lässt, bei der es ganz gleichgültig ist, ob unter den Grössen $s_1, s_2, \dots s_n$ gleiche vorkommen oder nicht.

1.

Es mögen Φ, Ψ zunächst keiner andern Beschränkung unterworfen werden, als dass die Determinante von Φ nicht Null sein soll. Man setze, mit α, wie überhaupt im Folgenden mit den ersten griechischen Buchstaben α, β, γ, eine der Zahlen $1, 2, \dots n$ bezeichnend,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha} = \Phi_\alpha, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x_\alpha} = \Psi_\alpha,$$

und drücke $x_1, x_2, \dots x_n$ durch

$$s\Phi_1-\Psi_1,\ s\Phi_2-\Psi_2,\ \dots\ s\Phi_n-\Psi_n$$

aus. So erhält man

$$(1.)\qquad x_\alpha = \sum_\beta \left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}(s\Phi_\beta-\Psi_\beta)\right\},$$

wo $f(s)_{\alpha\beta}$ eine ganze Function von nicht höherem als dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, und das Zeichen $\sum\limits_\beta$ andeuten möge, dass die Summation in Beziehung auf β auszuführen, und dieser Zahl alle in der Reihe $1, 2, \dots n$ enthaltenen Werthe beizulegen seien. Dann ist

$$(2.)\qquad f(s)_{\alpha\beta} = f(s)_{\beta\alpha}.$$

In der Gleichung (1.) muss aber der Ausdruck auf der Rechten von s unabhängig sein. Entwickelt man ihn daher nach fallenden Potenzen von s, so

ist nur der Coefficient von s^0 nicht Null. In der Entwicklung von

$$\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$$

kommen ferner nur negative Potenzen von s vor; denn $f(s)$ ist eine ganze Function n^{ten} Grades von s, und der Coefficient von s^n in derselben, der nichts Anderes als die Determinante von Φ ist, nicht Null. Bestimmt man daher zunächst den Coefficienten von s^0 in der Entwicklung des genannten Ausdrucks, und bemerkt, dass

$$\left[\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^0} = \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}}$$

ist, so ergiebt sich

$$(3.)\qquad x_\alpha = \sum_\beta \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\beta,$$

und wenn man den Coefficienten von s^{-1} in derselben Entwicklung bestimmt,

$$(4.)\qquad \sum_\beta \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Psi_\beta = \sum_\beta \left[\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\beta.$$

Es ist aber

$$(5.)\qquad \begin{cases} \Phi = \sum\limits_\alpha \Phi_\alpha x_\alpha \\ \Psi = \sum\limits_\alpha \Psi_\alpha x_\alpha. \end{cases}$$

Daher

$$(6.)\qquad \Phi = \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\alpha \Phi_\beta,$$

$$(7.)\qquad \Psi = \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Psi_\alpha \Phi_\beta = \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\alpha \Psi_\beta$$

und in Folge von (4.)

$$(8.)\qquad \Psi = \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\alpha \Phi_\beta.$$

Nun seien $s_1, s_2, \dots s_m$ die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$. Dann hat man, wenn $F(s)$ eine beliebige ganze Function von s, und

$$\left\{\frac{F(s)}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}$$

den Coefficienten von $(s-s_\mu)^{-1}$ in der Entwicklung von $\frac{F(s)}{f(s)}$ nach steigenden Potenzen von $s-s_\mu$ bezeichnet,

$$\left[\frac{F(s)}{f(s)}\right]_{s^{-1}} = \sum_{\mu=1,\dots m} \left\{\frac{F(s)}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}. \tag{9.}$$

Wird daher für $\mu = 1, 2, \dots m$

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta} \left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}} \Phi_\alpha \Phi_\beta &= \vartheta_\mu \\ \sum_{\alpha\beta} \left\{\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}} \Phi_\alpha \Phi_\beta &= \Theta_\mu \end{aligned}\right. \tag{10.}$$

gesetzt, so hat man

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_m \\ \Psi &= \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_m. \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

Dies sind Transformationen von Φ und Ψ, aus denen die Lösung der gestellten Aufgabe in allen Fällen, wo sie möglich ist, abgeleitet werden kann.

2.

Nehmen wir zunächst an, es sei $m = n$, so dass unter den Grössen $s_1, s_2, \dots s_n$ keine zwei gleiche vorkommen. (Man beweist leicht, dass dies im Allgemeinen der Fall ist. Denn die Bedingungsgleichung, die erfüllt sein muss, wenn die Gleichung $f(s) = 0$ gleiche Wurzeln haben soll, kann nicht etwa für beliebige Werthe der Coefficienten von Φ, Ψ bestehen, indem z. B wenn man

$$\Phi = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$
$$\Psi = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_n x_n^2$$

hat,

$$f(s) = (s-A_1)(s-A_2)\dots(s-A_n)$$

ist.) Dann hat man, da

$$\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} = \frac{s_\mu f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} + \frac{(s-s_\mu)f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$$

und $\frac{s-s_\mu}{f(s)}$ nicht ∞ wird für $s = s_\mu$,

$$\left\{\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}} = s_\mu \left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}$$

und

$$\left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}} = \frac{f(s_\mu)_{\alpha\beta}}{f'(s_\mu)},$$

folglich

$$\vartheta_\mu = \sum_{\alpha\beta} \frac{f(s_\mu)_{\alpha\beta}}{f'(s_\mu)} \cdot \Phi_\alpha \Phi_\beta, \qquad \Theta_\mu = s_\mu \vartheta_\mu \tag{12.}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n \\ \Psi &= s_1\vartheta_1 + s_2\vartheta_2 + \cdots + s_n\vartheta_n. \end{aligned}\right. \tag{13.}$$

Nach einem bekannten Determinantensatze ist ferner

$$f(s)_{\alpha\beta} f(s)_{\alpha\gamma} - f(s)_{\alpha\alpha} f(s)_{\beta\gamma}$$

gleich dem Producte aus $f(s)$ und einer anderen ganzen Function von s, folglich für $s = s_\mu$

$$f(s_\mu)_{\alpha\beta} f(s_\mu)_{\alpha\gamma} = f(s_\mu)_{\alpha\alpha} f(s_\mu)_{\beta\gamma}. \tag{14.}$$

Aus den in dieser Gleichung zusammengefassten Relationen, in Verbindung mit der schon angeführten

$$f(s_\mu)_{\alpha\beta} = f(s_\mu)_{\beta\alpha} \tag{15.}$$

ergiebt sich aber, dass ϑ_μ das Quadrat einer linearen Function y_μ von Φ_1, $\Phi_2, \dots \Phi_n$ ist. Auch erhält man sofort zur Bestimmung derselben die eleganten zuerst von Jacobi aufgestellten Formeln, nach welchen, wenn

$$y_\gamma = \overset{\gamma}{a}_1 \Phi_1 + \overset{\gamma}{a}_2 \Phi_2 + \cdots + \overset{\gamma}{a}_n \Phi_n \tag{16.}$$

gesetzt wird,

$$\overset{\gamma}{a}_\alpha \overset{\gamma}{a}_\alpha = \frac{f(s_\gamma)_{\alpha\alpha}}{f'(s_\gamma)}, \qquad \overset{\gamma}{a}_\alpha \overset{\gamma}{a}_\beta = \frac{f(s_\gamma)_{\alpha\beta}}{f'(s_\gamma)} \tag{17.}$$

ist. Endlich folgt aus den entwickelten Formeln

$$x_\alpha = \sum_\gamma \overset{\gamma}{a}_\alpha y_\gamma. \tag{18.}$$

3.

Nehmen wir nun an, es seien die Coefficienten von Φ, Ψ sämmtlich reell. Wenn dann auch $s_1, s_2, \dots s_n$ alle reell sind, so ist dies auch mit den Quadraten von $y_1, y_2, \dots y_n$ der Fall, und man kann setzen

$$y_1^2 = \varepsilon_1 z_1^2, \quad y_2^2 = \varepsilon_2 z_2^2, \quad \dots \quad y_n^2 = \varepsilon_n z_n^2,$$

wo $z_1, z_2, \dots z_n$ lineare Functionen von $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$ oder $x_1, x_2, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten, jeder der Factoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ aber entweder $+1$ oder -1 sein soll, so dass

$$(19.)\qquad \begin{cases} \Phi = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + \cdots + \varepsilon_n z_n^2 \\ \Psi = \varepsilon_1 s_1 z_1^2 + \varepsilon_2 s_2 z_2^2 + \cdots + \varepsilon_n s_n z_n^2 \end{cases}$$

wird.

Kommen aber unter den Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ imaginäre vor, so seien diese die $2r$ ersten, und man setze

$$s_1 = p_1 + q_1 i, \quad s_2 = p_1 - q_1 i, \quad \dots \quad s_{2r-1} = p_r + q_r i, \quad s_{2r} = p_r - q_r i,$$

wo $p_1, q_1, \dots p_r, q_r$ reelle Grössen sein sollen. Dann lässt sich ϑ_1 in der Form

$$k_1 z_1^2$$

darstellen, wo z_1 eine lineare Function von $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$ ist, deren Coefficienten ebenso wie k_1 rational aus denen von Φ, Ψ und aus s_1 zusammengesetzt sind. Man hat also

$$\vartheta_1 = (g_1 + h_1 i)(u_1 + v_1 i)^2,$$

wo g_1, h reelle Constanten, und u_1, v_1 lineare Functionen von $x_1, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten sind. Dann ist aber

$$\vartheta_2 = (g_1 - h_1 i)(u_1 - v_1 i)^2,$$

und daher

$$\begin{aligned} \vartheta_1 + \vartheta_2 &= 2g_1(u_1^2 - v_1^2) - 4h_1 u_1 v_1 \\ s_1\vartheta_1 + s_2\vartheta_2 &= 2(g_1 p_1 - h_1 q_1)(u_1^2 - v_1^2) - 4(g_1 q_1 + h_1 p_1) u_1 v_1 \\ &= 2g_1'(u_1^2 - v_1^2) - 4h_1' u_1 v_1. \end{aligned}$$

Verfährt man ebenso, wenn $r > 2$, mit ϑ_3 und ϑ_4 u. s. w., so ergeben sich jetzt die Darstellungen

$$(20.)\begin{cases} \Phi = 2g_1(u_1^2 - v_1^2) - 4h_1 u_1 v_1 + \cdots + 2g_r(u_r^2 - v_r^2) - 4h_r u_r v_r + \varepsilon_{2r+1} z_{2r+1}^2 + \cdots + \varepsilon_n z_n^2 \\ \Psi = 2g_1'(u_1^2 - v_1^2) - 4h_1' u_1 v_1 + \cdots + 2g_r'(u_r^2 - v_r^2) - 4h_r' u_r v_r + \varepsilon_{2r+1} s_{2r+1} z_{2r+1}^2 + \cdots + \varepsilon_n s_n z_n^2, \end{cases}$$

in welchen Formeln jetzt alle vorkommenden Grössen reell sind.

Eine Function

$$g(u^2 - v^2) + huv,$$

wo g, h beliebige reelle Constanten bedeuten sollen, kann für reelle Werthe von u, v sowohl positive als negative Werthe annehmen. Da nun die Functionen

$$u_1, v_1, \dots u_r, v_r, z_{2r+1}, \dots z_n$$

nothwendig unabhängig von einander sind, und auch g_1, h_1 nicht beide Null sein können, weil sonst die Determinante von Φ Null sein müsste, so wird man reelle Werthe von $x_1, \dots x_n$ dergestalt bestimmen können, dass die vorstehenden Functionen alle Null werden, mit Ausnahme von u_1, v_1, diese aber beliebig festgesetzte Werthe erhalten. Folglich wird Φ bei reellen Werthen von $u_1, u_2, \dots u_n$ sowohl positiv als negativ werden können. Dasselbe lässt sich von Ψ sagen. Denn da s_1 imaginär, also nicht Null sein soll, so ist auch

$$g_1' + h_1' i = (p_1 + q_1 i)(g_1 + h_1 i)$$

nicht Null, also sicher auch nicht jede der Grössen g_1', h_1', was genügt, um für Ψ denselben Schluss zu machen wie für Φ.

Hieraus folgt nun unmittelbar der wichtige, für den Fall, wo

$$\Phi = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

ist, zuerst von Cauchy, und später in directerer Weise von den Herren Borchardt und Sylvester bewiesene Satz, dass die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$, vorausgesetzt zunächst, dass sich keine gleichen unter ihnen finden, nothwendig alle reell sind, sobald eine der Functionen Φ, Ψ bei reellen Werthen von $x_1, x_2, \dots x_n$ stets dasselbe Zeichen behält.

4.

Gehen wir jetzt zu dem Falle über, wo die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind. Die in den Formeln (10.), (11.) vorkommenden zusammengehörigen Functionen $\vartheta_\mu, \Theta_\mu$ haben alsdann nur die Eigenschaft, dass sie sich, wenn s_μ eine λfache Wurzel der genannten Gleichung ist, beide durch dieselben λ linearen Ausdrücke von $x_1, x_2, \dots x_n$ darstellen lassen. Aber es ist im Allgemeinen nicht möglich, dies so zu bewerkstelligen, dass in beiden nur die Quadrate der neuen Veränderlichen vorkommen. Hierzu ist nämlich erforderlich, dass $\Theta_\mu = s_\mu \vartheta_\mu$ sei; und dieses findet nur statt, wenn eine Anzahl von Bedingungsgleichungen unter den

Coefficienten von Φ, Ψ und s_μ erfüllt sind, welche keine algebraische Folge derer sind, die ausdrücken, dass s_μ eine mehrfache Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$ ist.

Hier tritt nun aber ein sehr bemerkenswerther Umstand ein. Wenn nämlich Φ, Ψ reelle Coefficienten haben, und überdies Φ für reelle Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$ stets dasselbe Zeichen behält, so folgt hieraus allein, dass s_μ stets eine $(\lambda-1)$fache Wurzel sämmtlicher Gleichungen

$$f(s)_{\alpha\beta} = 0$$

wird, sobald sie eine λfache der Gleichung $f(s) = 0$ ist. Dann aber hat man

$$\text{(21.)} \qquad \frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} = \frac{f_{\alpha\beta}^{(1)}}{s-s_1} + \frac{f_{\alpha\beta}^{(2)}}{s-s_2} + \cdots + \frac{f_{\alpha\beta}^{(m)}}{s-s_m},$$

wo $f_{\alpha\beta}^{(1)}$ u. s. w. von s unabhängige Grössen sind, und es ist

$$\text{(22.)} \qquad \left\{\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}} = s_\mu \left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}},$$

$$\text{(23.)} \qquad \Theta_\mu = s_\mu \vartheta_\mu.$$

Stellt man nun, was immer möglich ist, ϑ_μ als Summe von λ_μ Quadraten dar, so werden auch jetzt Φ, Ψ durch die Quadrate derselben n linearen Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ ausgedrückt.

Zum Beweise der angegebenen Eigenschaft der Functionen $f(s)_{\alpha\beta}$ dient die folgende Formel, welche man leicht aus der Regel ableitet, nach der eine Determinante, deren Elemente lineare Functionen einer Veränderlichen sind, in Beziehung auf diese differentiirt wird. Es sei

$$\Phi = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

wo

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha},$$

so hat man

$$\text{(24.)} \qquad f(s)_{\gamma\gamma} \frac{df(s)}{ds} - f(s) \frac{df(s)_{\gamma\gamma}}{ds} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} f(s)_{\alpha\gamma} f(s)_{\beta\gamma}.$$

Dann ist zu bemerken, dass auch in dem jetzt betrachteten Falle die Grössen $s_1, s_2, \dots s_m$ sämmtlich reell sind. Denn angenommen, eine von ihnen sei imaginär, so könnte man durch unendlich kleine Variationen der Coefficienten

von Ψ bewirken, dass die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ alle von einander verschieden würden, eine derselben aber imaginär bliebe, was nach dem vorhin Bewiesenen nicht sein kann. Dieses vorausgesetzt, denke man sich γ einen bestimmten Werth beigelegt, und dann die Functionen

$$\frac{f(s)_{1\gamma}}{f(s)}, \quad \frac{f(s)_{2\gamma}}{f(s)}, \quad \dots \quad \frac{f(s)_{n\gamma}}{f(s)}$$

nach steigenden Potenzen von $(s-s_\mu)$ entwickelt, und bezeichne mit l den Grad des niedrigsten Gliedes, das in diesen Reihen vorkommt; so kann man setzen

$$\frac{f(s)_{\alpha\gamma}}{f(s)} = h_{\alpha\gamma}(s-s_\mu)^l + \text{Glieder mit höheren Potenzen von } (s-s_\mu).$$

Die Coefficienten $h_{\alpha\gamma}$ sind dann reell, und nicht sämmtlich Null. Aus der Gleichung (24.) folgt nun

$$\frac{d\left(\frac{f(s)_{\gamma\gamma}}{f(s)}\right)}{ds} = -\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \frac{f(s)_{\alpha\gamma}}{f(s)} \frac{f(s)_{\beta\gamma}}{f(s)},$$

$$l h_{\gamma\gamma}(s-s_\mu)^{l-1} + \cdots = -\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} h_{\alpha\gamma} h_{\beta\gamma} \cdot (s-s_\mu)^{2l} + \cdots.$$

Nun kann Φ für reelle Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$ nicht verschwinden, ohne dass diese sämmtlich Null sind. Folglich ist der Coefficient von $(s-s_\mu)^{2l}$ auf der Rechten nicht Null; es muss also

$$2l \geqq l-1$$

oder

$$l \geqq -1$$

sein. Damit ist bewiesen, dass $f(s)_{\alpha\gamma}$ durch $(s-s_\mu)^{\lambda-1}$ theilbar sein muss, wenn $f(s)$ den Factor $(s-s_\mu)^\lambda$ hat; woraus die Richtigkeit der Formel (21.) unmittelbar folgt.

Nach bekannten Sätzen ist ferner, wenn auch $\alpha', \alpha'', \dots, \beta', \beta'', \dots$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots n$ bezeichnen, die Determinante

$$\begin{vmatrix} f(s)_{\alpha\beta} & f(s)_{\alpha\beta'} \\ f(s)_{\alpha'\beta} & f(s)_{\alpha'\beta'} \end{vmatrix} \text{ durch } f(s),$$

$$\begin{vmatrix} f(s)_{\alpha\beta} & f(s)_{\alpha\beta'} & f(s)_{\alpha\beta''} \\ f(s)_{\alpha'\beta} & f(s)_{\alpha'\beta'} & f(s)_{\alpha'\beta''} \\ f(s)_{\alpha''\beta} & f(s)_{\alpha''\beta'} & f(s)_{\alpha''\beta''} \end{vmatrix} \quad \text{durch } f^2(s)$$

theilbar, u. s. f. Hieraus lässt sich mit Hülfe des eben Bewiesenen leicht folgern, dass von den partiellen Determinanten des Systems

$$\begin{matrix} f_{11}^{(\mu)} & f_{12}^{(\mu)} & \dots & f_{1n}^{(\mu)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}^{(\mu)} & f_{n2}^{(\mu)} & \dots & f_{nn}^{(\mu)} \end{matrix}$$

alle verschwinden, deren Grad λ übertrifft. Dies bedeutet aber, da nach Formel (10.)

$$\vartheta_\mu = \sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}^{(\mu)} \Phi_\alpha \Phi_\beta \tag{25.}$$

ist, dass sich ϑ_μ durch λ lineare Functionen von $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$ oder $x_1, x_2, \dots x_n$ ausdrücken lässt. Man kann daher ϑ_μ namentlich auch in der Form

$$\vartheta_\mu = k_1 z_1^2 + \dots + k_\lambda z_\lambda^2$$

darstellen, wo $z_1, \dots z_\lambda$ lineare homogene Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ bedeuten, deren Coefficienten ebenso wie $k_1, \dots k_\lambda$ sämmtlich reell sind. Da ferner die Anzahl der Functionen z, die in allen ϑ vorkommen, n beträgt, so müssen dieselben unabhängig von einander sein; man kann sie also durch reelle Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$ sämmtlich zu Null machen, bis auf eine, und dieser einen beliebigen Werth geben; woraus folgt, dass die Coefficienten k sämmtlich positiv oder negativ sein werden, je nachdem Φ eine beständig positiv oder beständig negativ bleibende Function ist.

So ist nun das folgende Theorem begründet.

Es seien Φ, Ψ homogene ganze Functionen zweiten Grades von n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten, und die erstere überdies so beschaffen, dass sie für reelle Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$ stets dasselbe Zeichen behält und nur Null wird, wenn diese Grössen sämmtlich verschwinden. Die Determinante der Function

$$s\Phi - \Psi$$

ist dann eine ganze Function n^{ten} Grades der willkürlichen Grösse

s, welche nur für eine Anzahl reeller Werthe der letzteren Null wird. Sind diese $s_1, s_2, \dots s_m$, und daher die Determinante, abgesehen von einem s nicht enthaltenden Factor, gleich

$$(s-s_1)^{\lambda_1}(s-s_2)^{\lambda_2}\dots(s-s_m)^{\lambda_m},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summe n ist; so giebt es ebenso viele völlig bestimmte homogene Functionen zweiten Grades $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_m$ von $x_1, x_2, \dots x_n$, durch welche sich Φ, Ψ in der Form

$$\Phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_m$$
$$\Psi = s_1\vartheta_1 + s_2\vartheta_2 + \dots + s_m\vartheta_m$$

ausdrücken lassen, während ϑ_μ oder $-\vartheta_\mu$, je nachdem Φ stets positiv oder stets negativ bleibt, als Summe der Quadrate von λ_μ reellen linearen Functionen der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ dargestellt werden kann, und zwar, wenn $\lambda_\mu > 1$ ist, auf unendlich viele Arten.

5.

Die im Vorstehenden entwickelte Eigenschaft der Functionen $f(s)_{\alpha\beta}$, auf welcher bei der vorausgesetzten Beschaffenheit von Φ, Ψ die Darstellbarkeit der letzteren in der besprochenen Form beruht, benutze ich, um bei dieser Gelegenheit einen Irrtum zu berichtigen, der sich in der Lagrange'schen Theorie der kleinen Schwingungen (Mécanique analytique, II, sect. VI), sowie in allen spätern mir bekannten Darstellungen derselben, findet. Lagrange führt die Aufgabe, um die es sich handelt, auf ein System linearer Differentialgleichungen zurück, das mit dem folgenden übereinstimmt, in welchem Φ, Ψ, Φ_α, Ψ_α dieselbe Bedeutung haben wie in der vorhergehenden No., Φ eine stets positiv bleibende Function ist, die Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ aber als Functionen der Zeit t betrachtet werden:

$$\frac{d^2\Phi_1}{dt^2} = \Psi_1, \quad \frac{d^2\Phi_2}{dt^2} = \Psi_2, \quad \dots \quad \frac{d^2\Phi_n}{dt^2} = \Psi_n. \tag{1.}$$

Die Integration dieser Gleichungen hängt von den Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ ab. Nachdem Lagrange die Form der Integrale angegeben und gezeigt hat, wie die willkürlichen Constanten derselben durch die Anfangs-werthe von $x_1, \frac{dx_1}{dt}$, u. s. w. bestimmt werden, führt er unter den Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit $x_1, \frac{dx_1}{dt}$ u. s. w. stets unendlich klein bleiben, wenn sie es ursprünglich sind, auch die an, dass die genannte Gleichung keine gleiche Wurzeln haben dürfe, weil sonst in den Integralen Glieder vorkommen würden, die mit der Zeit beliebig gross werden könnten. Dieselbe Behauptung findet sich bei Laplace wiederholt, da wo er in der Mécanique céleste die Säcular-Störungen der Planeten behandelt, und ebenso, so viel mir bekannt ist, bei allen übrigen diesen Gegenstand behandelnden Autoren, wenn sie überhaupt den Fall der gleichen Wurzeln erwähnen, was z. B. bei Poisson nicht geschieht. Aber sie ist nicht begründet. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man sich nur an den Dirichlet'schen Beweis des Fundamentalsatzes dieser Theorie zu erinnern. (Über die Stabilität des Gleichgewichts, Crelle's Journal Bd. 32.) Hiernach genügt es, damit x_1, $x_2, \dots x_n$ so wie $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots \frac{dx_n}{dt}$ die angegebene Eigenschaft haben, vollständig, wenn nur die Function Ψ stets negativ bleibt, und ihre Determinante nicht Null ist, was stattfinden kann, ohne dass die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ alle von einander verschieden sind; wie man denn auch wirklich besondere Fälle der obigen Gleichungen, bei denen diese Bedingung nicht erfüllt ist, mehrfach behandelt und doch keine Glieder von der angegebenen Beschaffenheit gefunden hat.

Die irrige Ansicht Lagrange's rührt aber daher, dass er bei den mit (1.) bezeichneten Gleichungen nichts Anderes berücksichtigt, als dass sie lineare und mit constanten Coefficienten versehene Differentialgleichungen sind. In der That würden, wenn man den Coefficienten von Φ willkürliche Werthe beilegte, und die Gleichung $f(s) = 0$ hätte eine λfache Wurzel, die jetzt mit $(-r)$ bezeichnet werden möge, in den Ausdrücken von x_1, x_2 u. s. w. im allgemeinen Glieder vorkommen von der Form

$$F(t)\cos(\sqrt{r}.t) + F_1(t)\sin(\sqrt{r}.t),$$

wo $F(t)$, $F_1(t)$ ganze Functionen $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grades von t bedeuten sollen; und es ist nicht ohne Weiteres ersichtlich, auf welche Weise sich $F(t)$, $F_1(t)$ auf Constanten reduciren, wie es aus den angegebenen Gründen nothwendig geschieht, wenn Φ, Ψ die vorausgesetzte Beschaffenheit haben, ohne dass sonst unter ihren Coefficienten noch besondere Relationen bestehen.

Diese Schwierigkeit lässt sich nun aber auf folgende Weise beseitigen.

Wenn man alle Voraussetzungen und Bezeichnungen der vorigen No. beibehält, s aber durch ρ^2 und $s_1, s_2, \dots s_m$, die bei der angenommenen Beschaffenheit von Ψ alle negativ sind, durch $-\rho_1^2, -\rho_2^2, \dots -\rho_m^2$ ersetzt, mit $\chi(t)_{\alpha\beta}$ die Function

$$\left[\frac{f(\rho^2)_{\alpha\beta}}{f(\rho^2)} e^{\rho t}\right]_{\rho^{-1}},$$

und mit p_α, q_α die Werthe von Φ_α und $\frac{d\Phi_\alpha}{dt}$ zur Zeit t_0 bezeichnet; so ergiebt sich

$$(2.)\qquad x_\alpha = \sum_\beta \left(p_\beta \frac{d\chi(t-t_0)_{\alpha\beta}}{dt} + q_\beta \chi(t-t_0)_{\alpha\beta}\right).$$

Dieser Ausdruck für x_α stimmt mit dem überein, welchen Cauchy mittelst seines Calcul des résidus hergeleitet hat; seine Richtigkeit kann aber auch ohne Schwierigkeit unmittelbar bewiesen werden. Zerlegt man nun

$$\frac{f(\rho^2)_{\alpha\beta}}{f(\rho^2)}$$

in Partial-Brüche, so erhält man (Formel 21)

$$\frac{f(\rho^2)_{\alpha\beta}}{f(\rho^2)} = \frac{f_{\alpha\beta}^{(1)}}{\rho^2+\rho_1^2} + \frac{f_{\alpha\beta}^{(2)}}{\rho^2+\rho_2^2} + \dots + \frac{f_{\alpha\beta}^{(m)}}{\rho^2+\rho_m^2},$$

und hieraus

$$(3.)\qquad \begin{cases} \chi(t)_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}^{(1)} \frac{\sin\rho_1 t}{\rho_1} + f_{\alpha\beta}^{(2)} \frac{\sin\rho_2 t}{\rho_2} + \dots + f_{\alpha\beta}^{(m)} \frac{\sin\rho_m t}{\rho_m} \\ \frac{d\chi(t)_{\alpha\beta}}{dt} = f_{\alpha\beta}^{(1)} \cos\rho_1 t + f_{\alpha\beta}^{(2)} \cos\rho_2 t + \dots + f_{\alpha\beta}^{(m)} \cos\rho_m t. \end{cases}$$

Man sieht, in welch engem Zusammenhange die Integration der betrachteten Differentialgleichungen mit den Entwicklungen steht, die zu der behandelten Transformation der Functionen Φ, Ψ geführt haben.

Die vorstehenden Formeln gelten auch in dem Falle, wo bloss Φ eine beständig positiv bleibende Function ist, während die Coefficienten von Ψ beliebige (reelle) Werthe haben. Die Grössen $\rho_1, \rho_2, \dots$ können dann aber zum Theil oder alle imaginär werden, jedoch ohne reellen Theil, so dass $\frac{\sin\rho_1 t}{\rho_1}$, $\cos\rho_1 t$ u. s. w. stets reell sind.

Beiläufig will ich noch bemerken, dass man, wenn an die Stelle der obigen Differentialgleichungen die folgenden treten:

$$\frac{d^2\Phi_1}{dt^2} = \Psi_1 + F_1(t), \quad \frac{d^2\Phi_2}{dt^2} = \Psi_2 + F_2(t), \quad \ldots \quad \frac{d^2\Phi_n}{dt^2} = \Psi_n + F_n(t),$$

wo $F_1(t), F_2(t), \ldots F_n(t)$ Functionen von t sind, die $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht enthalten,

$$(4.)\quad \begin{cases} x_\alpha = \sum\limits_\beta \left(p_\beta \dfrac{d\chi(t-t_0)_{\alpha\beta}}{dt} + q_\beta \chi(t-t_0)_{\alpha\beta}\right) + \sum\limits_\beta \int_{t_0}^{t_1} \chi(t-\tau)_{\alpha\beta} F_\beta(\tau)\, d\tau \\ \dfrac{dx_\alpha}{dt} = \dfrac{d}{dt} \sum\limits_\beta \left(p_\beta \dfrac{d\chi(t-t_0)_{\alpha\beta}}{dt} + q_\beta \chi(t-t_0)_{\alpha\beta}\right) + \sum\limits_\beta \int_{t_0}^{t_1} \dfrac{d\chi(t-\tau)_{\alpha\beta}}{dt} F_\beta(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

erhält.

NEUER BEWEIS DES FUNDAMENTALSATZES DER ALGEBRA.

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 12. December 1859.)

1.

Man betrachte zuerst eine ganze Function $f(x)$ von der Form

$$x - a_0 - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \cdots - a_\varrho x^\varrho$$

und bilde,

$$a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_\varrho x^\varrho \text{ mit } \varphi(x)$$

bezeichnend, eine unbegrenzte Reihe von Ausdrücken $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mittelst der Formeln:

$$(1.)\quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \varphi(x_0) \\ x_2 = \varphi(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Ausdrücke werden dann sämmtlich ganze rationale Functionen der Grössen $a_0, a_2, a_3, \ldots$ mit ganzzahligen und positiven Coefficienten, und es lässt sich zeigen, dass unter bestimmten Bedingungen, wenn n ohne Ende wächst, x_n einer bestimmten Grenze sich nähert, welche für x gesetzt die Gleichung $f(x) = 0$ befriedigt.

Man hat, wenn x' eine willkürliche Grösse bezeichnet,

$$(2.)\quad \begin{aligned} \varphi(x') - \varphi(x) &= (x'-x)\{a_2(x+x') + a_3(x^2+xx'+x'^2) + \cdots\} \\ &= (x'-x)\,\varphi(x, x'), \end{aligned}$$

so dass $\varphi(x, x')$ eine ganze Function von $x, x', a_2, a_3, \dots$ ist. Dann folgt aus (1.)

$$(3.)\qquad \begin{cases} x_1 = a_0 \\ x_2 - x_1 = x_1\varphi(0, x_1) \\ x_3 - x_2 = (x_2 - x_1)\varphi(x_1, x_2) \\ x_4 - x_3 = (x_3 - x_2)\varphi(x_2, x_3) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n - x_{n-1} = (x_{n-1} - x_{n-2})\varphi(x_{n-2}, x_{n-1}), \end{cases}$$

oder, wenn man

$$\varphi(0, x_1) = \psi_1,\quad \varphi(x_1, x_2) = \psi_2,\quad \dots\quad \varphi(x_{n-2}, x_{n-1}) = \psi_{n-1}$$

setzt,

$$(4.)\qquad \begin{cases} x_1 = a_0 \\ x_2 - x_1 = x_1\psi_1 = a_0\psi_1 \\ x_3 - x_2 = (x_2 - x_1)\psi_2 = a_0\psi_1\psi_2 \\ x_4 - x_3 = (x_3 - x_2)\psi_3 = a_0\psi_1\psi_2\psi_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n - x_{n-1} = (x_{n-1} - x_{n-2})\psi_{n-1} = a_0\psi_1\psi_2\dots\psi_{n-1}, \end{cases}$$

und hieraus

$$(5.)\qquad x_n = a_0\{1 + \psi_1 + \psi_1\psi_2 + \psi_1\psi_2\psi_3 + \dots + \psi_1\psi_2\dots\psi_{n-1}\},$$

sowie, wenn $m < n$,

$$(6.)\qquad x_n - x_m = a_0\{\psi_1\dots\psi_m + \psi_1\dots\psi_{m+1} + \dots + \psi_1\dots\psi_{n-1}\}.$$

Die Ausdrücke $\psi_1, \psi_2, \dots$ sind ebenfalls ganze Functionen von $a_0, a_2, a_3, \dots$ mit positiven Coefficienten. Es wird daher der absolute Betrag von ψ_μ jedenfalls nicht grösser sein als der des Ausdrucks, den man erhält, wenn man in ψ_μ an Stelle jeder der Grössen $a_0, a_2, \dots$ deren absoluten Betrag setzt. Es werde deswegen zunächst der Fall betrachtet, wo $a_0, a_2, a_3, \dots$ alle positiv sind. Bei dieser Annahme sind auch $x_1, x_2, \dots x_n, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ sämmtlich positiv, und man hat

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\mu-1}, x_\mu) &= a_2(x_\mu + x_{\mu-1}) + a_3(x_{\mu-1}^2 + x_{\mu-1}x_\mu + x_\mu^2) + \cdots \\ &< 2a_2x_\mu + 3a_3x_\mu^2 + \cdots, \end{aligned}$$

oder

$$\psi_\mu < \varphi'(x_\mu).$$

Legt man nun den $a_2, a_3, \dots$ bestimmte Werthe bei und nimmt eine beliebige

positive Grösse ξ, die > 1 ist, an, so wird für alle Werthe von a_0, die eine gewisse Grenze nicht übersteigen,

$$\varphi'(a_0\xi) = 2a_0a_2\xi + 3a_0^2a_3\xi^2 + \dots < 1,$$

und zugleich

$$\frac{1}{f'(a_0\xi)} = \frac{1}{1 - 2a_0a_2\xi - \cdots} < \xi$$

sein. Für jeden solchen Werth a_0 lässt sich dann zeigen, dass

$$x_1, x_2, x_3, \dots \text{ sämmtlich } < a_0\xi$$

und

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots \text{ sämmtlich } < 1 - f'(a_0\xi)$$

sind. Denn angenommen, es sei das Erstere bewiesen für $x_1, x_2, \dots x_m$ — wie es denn für x_1 unmittelbar klar ist — so gilt das zweite, da

$$\psi_\mu < \varphi'(x_\mu) \text{ und } \varphi'(x_{\mu-1}) < \varphi'(a_0\xi) = 1 - f'(a_0\xi)$$

ist, auch für $\psi_2, \dots \psi_m$. Dann ist aber

$$\begin{aligned} 1 + \psi_1 + \psi_1\psi_2 + \dots + \psi_1\psi_2\dots\psi_m &< 1 + \varphi'(a_0\xi) + \varphi'(a_0\xi)^2 + \dots + \varphi'(a_0\xi)^m \\ &< \frac{1}{1 - \varphi'(a_0\xi)} = \frac{1}{f'(a_0\xi)} < \xi, \end{aligned}$$

also

$$x_{m+1} < a_0\xi.$$

Hiermit ist die Richtigkeit der ersteren Behauptung für alle Grössen $x_1, x_2, \dots$ bewiesen, und somit auch die der zweiten für alle $\psi_1, \psi_2, \dots$.

Wenn man jetzt, $a_0, a_2, \dots$ wieder als beliebige Grössen annehmend, festsetzt, es sollen die absoluten Beträge derselben kleiner sein als bestimmte positive Grössen $\alpha_0, \alpha_2, \dots$, welche der Bedingung genügen, dass man für irgend einen positiven Werth von ξ, der > 1 ist,

$$2\alpha_2\alpha_0\xi + 3\alpha_3\alpha_0^2\xi^2 + \dots < 1$$

$$\frac{1}{1 - 2\alpha_2\alpha_0\xi - 3\alpha_3\alpha_0^2\xi^2 - \cdots} < \xi$$

hat — was sich bei beliebiger Annahme von $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ stets dadurch erreichen lässt, dass α_0 klein genug genommen wird — so werden nach dem vorher Bemerkten

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots,$$

wie weit man diese Reihe auch fortsetzen mag, ihren absoluten Beträgen nach sämmtlich um eine angebbare Grösse kleiner als 1 sein.

Angenommen nun, es haben $a_0, a_2, \ldots$ solche Werthe, und es sei der absolute Betrag von ψ_μ beständig kleiner als eine zwischen 0 und 1 liegende Grösse ε, sobald μ einen bestimmten Werth m überschreitet. Dann ist, wenn $\nu > \mu > m$,

$$x_\nu - x_\mu = a_0\{\psi_1 \ldots \psi_\mu + \psi_1 \ldots \psi_{\mu+1} + \cdots + \psi_1 \ldots \psi_\nu\},$$

und der absolute Betrag von $\frac{x_\nu - x_\mu}{a_0}$ kleiner als $\varepsilon^\mu + \varepsilon^{\mu+1} + \cdots + \varepsilon^\nu < \frac{\varepsilon^\mu}{1-\varepsilon}$. Folglich kann man μ so gross annehmen, dass

$$x_\nu - x_\mu$$

für jeden Werth von ν, der $> \mu$, kleiner ist als jede beliebig angenommene noch so kleine Grösse. Daraus folgt, dass sich x_μ, wenn μ ohne Ende wächst, einer bestimmten Grenze nähert. Diese werde mit $\bar{x}$ bezeichnet, dann wird die Differenz

$$f(\bar{x}) - f(x_\mu)$$

unendlich klein, wenn μ unendlich gross wird. Aber

$$f(x_\mu) = x_\mu - \varphi(x_\mu) = x_\mu - x_{\mu+1},$$

folglich muss, da $x_\mu - x_{\mu+1}$ der Grenze Null sich nähert, wenn μ ohne Ende wächst,

$$f(\bar{x}) = 0$$

sein.

Die Grösse $\bar{x}$ ist durch die Werthe, die man $a_0, a_2, \ldots$ beilegt, völlig bestimmt. Man hat daher den Satz:

Es ist möglich, die Grössen $a_0, a_2, a_3, \ldots$ durch Feststellung von Grenzen für ihre absoluten Beträge, ohne sie irgend einer andern Beschränkung zu unterwerfen, so zu limitiren, dass es eine völlig bestimmte eindeutige Function derselben

$$\bar{x} = a_0(1 + \psi_1 + \psi_1\psi_2 + \cdots + \psi_1\psi_2 \ldots \psi_n + \cdots)$$

giebt, welche für x gesetzt die Gleichung

$$x - a_0 - a_2x^2 - a_3x^3 - \cdots = 0$$

befriedigt. Dabei ist es gestattet, die Grenzen für die absoluten Beträge von $a_2, a_3, \ldots$ willkürlich anzunehmen; es ist dann die Grenze, unter welcher der absolute Betrag von a_0 bleiben muss, eine völlig bestimmte.

Da die Ausdrücke $\psi_1, \psi_2, \ldots$, wie bemerkt, sämmtlich ganze Functionen von $a_0, a_2, \ldots$ mit positiven Coefficienten sind, so ist es erlaubt, aus der Gesammheit der Ausdrücke, aus denen die vorstehende Reihe für $\bar{x}$ zusammengesetzt ist, alle diejenigen Glieder, welche dieselbe Potenz von a_0 enthalten, herauszuheben und durch Addition in ein einziges Glied zu vereinigen, wodurch man für $\bar{x}$ einen Ausdruck von der Form

$$\bar{x} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu a_0^\nu$$

erhält, wo $B_1 = 1$ und jede der übrigen Grössen B_ν eine ganze Function von $a_2, a_3, \ldots a_\varrho$ mit lauter positiven Coefficienten ist. (Dabei ist zu bemerken, dass jede der Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots$ durch a_0 theilbar ist, also eine bestimmte Potenz von a_0 nur in einer endlichen Anzahl von Gliedern der für $\bar{x}$ gefundenen Reihe vorkommen kann.)

2.

Angenommen nun, es seien $c_1, c_2, \ldots c_\varrho$ irgend ϱ bestimmte Grössen, deren Wahl keiner anderen Beschränkung unterworfen ist als dass unter ihnen keine zwei gleiche vorkommen dürfen, und es werde

$$f_0(x) = (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_\varrho)$$

gesetzt. Ferner seien $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ vorläufig unbestimmte veränderliche Grössen, und es werde gesetzt

$$f(x) = f_0(x) + u_1x^{\varrho-1} + u_2x^{\varrho-2} + \cdots + u_\varrho.$$

Dann lässt sich folgendes erweisen. Man kann für die absoluten Beträge von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ obere Grenzen so festsetzen, dass für jedes der alsdann möglichen Werthsysteme $(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)$ die Gleichung

$$f(x) = 0$$

ϱ Wurzeln besitzt, von denen jede einer der Grössen $c_1, c_2, \ldots c_\varrho$ so nahe kommt wie man will.

Zu dem Ende setze man in $f(x)$

$$x = c_\lambda + v_\lambda,$$

wo λ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots \rho$ bezeichnet, so wird

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f_0'(c_\lambda)v_\lambda + \tfrac{1}{2}f_0''(c_\lambda)v_\lambda^2 + \cdots + v_\lambda^\rho \\ & + U_{\lambda 0} + U_{\lambda 1}v_\lambda + U_{\lambda 2}v_\lambda^2 + \cdots + U_{\lambda,\rho-1}v_\lambda^{\rho-1}, \end{aligned}$$

wo $U_{\lambda 0}, U_{\lambda 1}, \dots U_{\lambda,\rho-1}$ ganze lineare Functionen von $u_1, u_2, \dots u_\rho$ sind, und bringe die Gleichung $f(x) = 0$ auf die Form

$$v_\lambda = w_{\lambda 0} + w_{\lambda 2}v_\lambda^2 + \cdots + w_{\lambda\rho}v_\lambda^\rho,$$

wo

$$w_{\lambda 0} = -\frac{U_{\lambda 0}}{U_{\lambda 1} + f_0'(c_\lambda)}, \quad w_{\lambda 2} = -\frac{U_{\lambda 2} + \frac{1}{2}f_0''(c_\lambda)}{U_{\lambda 1} + f_0'(c_\lambda)}, \quad \dots \quad w_{\lambda\rho} = -\frac{\frac{1}{\rho!}f_0^{(\rho)}(c_\lambda)}{U_{\lambda 1} + f_0'(c_\lambda)}, \\ = -\frac{1}{U_{\lambda 1} + f_0'(c_\lambda)}.$$

Man kann dann für die absoluten Beträge der Grössen $u_1, \dots u_\rho$ obere Grenzen so festsetzen, dass für die dann möglichen Werthsysteme $(u_1, u_2, \dots u_\rho)$ jede der Grössen $w_{\lambda 0}, w_{\lambda 2}, \dots w_{\lambda\rho}$ ihrem absoluten Betrage nach eine angebbare Grenze nicht übersteigt und zugleich die vorstehende Gleichung mittelst des im Vorhergehenden auseinandergesetzten Verfahrens durch einen Werth von v_λ befriedigt werden kann, der die Form

$$v_\lambda = w_{\lambda 0} + W_{\lambda 2}w_{\lambda 0}^2 + W_{\lambda 3}w_{\lambda 0}^3 \dots$$

hat, wo $W_{\lambda 2}, W_{\lambda 3}, \dots$ ganze rationale Functionen von $w_{\lambda 1}, w_{\lambda 2}, \dots w_{\lambda\rho}$ sind. So erhält man ρ Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche eindeutige Functionen der Variabelen $u_1, \dots u_\rho$ sind. Man sieht zugleich, dass keine zwei derselben einander gleich sind, wenn man die oberen Grenzen für die absoluten Beträge der Variablen $u_1, \dots u_\rho$ hinlänglich klein annimmt.

Man kann ferner die Grenzen für die absoluten Beträge der Grössen $u_1, \dots u_\rho$ so festsetzen, dass (für $\lambda = 1, 2, \dots \rho$)

$$|U_{\lambda 1}| < |f_0'(c_\lambda)|$$

ist. Dann lassen sich die Grössen $w_{\lambda 0}, w_{\lambda 2}, w_{\lambda 3}, \dots w_{\lambda\rho}$, und somit auch die Grösse v_λ in Potenzreihen von $u_1, u_2, \dots u_\rho$ entwickeln. Es ergiebt sich also das Resultat:

Wenn eine ganze Function

$$f_0(x) = x^\rho + C_1x^{\rho-1} + \cdots + C_\rho$$

für ρ von einander verschiedene Werthe $(c_1, c_2, \dots c_\rho)$ der Grösse x verschwindet, so hat auch die Gleichung

$$f(x) = x^\rho + (C_1 + u_1)x^{\rho-1} + \cdots + (C_\rho + u_\rho) = 0,$$

für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(u_1 = 0, u_2 = 0, \dots u_\rho = 0)$ angehörenden Werthsysteme $(u_1, u_2, \dots u_\rho)$ ρ ebenfalls von einander verschiedene Wurzeln. Diese lassen sich in der Form von Potenzreihen der Grössen $u_1, u_2, \dots u_\rho$ darstellen und gehen, wenn die letzteren sämmtlich verschwinden, in $c_1, c_2, \dots c_\rho$ über.

3.

Jetzt seien $A_1, \dots A_\rho$ irgend welche gegebene Grössen, die keiner andern Bedingung unterworfen sind, als dass die Function

$$f(x) = x^\rho + A_1x^{\rho-1} + \cdots + A_\rho$$

mit ihrer ersten Derivirten $f'(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben, also ihre Discriminante nicht gleich Null sein darf. Wenn man dann wieder, wie vorhin, ρ von einander verschiedene Grössen

$$c_1, c_2, \dots c_\rho$$

beliebig annimmt und

$$f_0(x) = (x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_\rho) = x^\rho + C_1x^{\rho-1} + \cdots + C_\rho$$

setzt, so lassen sich auf mannigfaltige Weise ρ rationale Functionen

$$g_1(t), g_2(t), \dots g_\rho(t)$$

einer Veränderlichen t, der im Folgenden ausschliesslich reelle, dem Intervalle $(0, \dots 1)$ angehörige Werthe beigelegt werden sollen, so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} g_1(0) &= C_1, \quad g_2(0) = C_2, \quad \dots \quad g_\rho(0) = C_\rho; \\ g_1(1) &= A_1, \quad g_2(1) = A_2, \quad \dots \quad g_\rho(1) = A_\rho \end{aligned}$$

wird und zugleich, wenn man

$$f(x, t) = x^\rho + g_1(t)x^{\rho-1} + \cdots + g_\rho(t)$$

setzt, $f(x,t)$ und $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$, als Functionen von x betrachtet, für keinen dem Intervalle $(0, \dots 1)$ angehörigen Werth von t einen gemeinsamen Theiler haben. Dies kann z. B. folgendermassen geschehen. Da die Discriminante der Function $f(x, 0)$ der Annahme nach einen von Null verschiedenen Werth hat, so ist, wenn man unter z eine von x unabhängige willkürliche Grösse versteht,

$$(1-z)f(x,0)+zf(x,1)$$

eine Function von x, deren Discriminante nicht identisch, sondern nur für eine endliche Anzahl von Werthen des Parameters z verschwindet. Setzt man also, unter k eine reelle Constante verstehend,

$$z = \frac{(1+ki)t}{1+kit},$$

so kann man k stets so annehmen, dass die genannte Discriminante für keinen dem Intervalle $(0, \dots 1)$ angehörigen Werth von t verschwindet. Nimmt man dann

$$g_\nu(t) = \frac{(1-t)C_\nu + (1+ki)tA_\nu}{1+kit}, \qquad (\nu = 1, 2, \dots \rho)$$

so hat die Function

$$f(x,t) = x^\rho + g_1(t)x^{\rho-1} + \dots + g_\rho(t)$$

die verlangte Beschaffenheit. Nach dem Vorhergehenden hat nun die Gleichung

$$f(x,t) = 0$$

ρ Wurzeln, wenn die Grösse t so klein angenommen wird, dass die absoluten Beträge der Differenzen

$$g_1(t)-C_1, \quad g_2(t)-C_2, \quad \dots \quad g_\rho(t)-C_\rho$$

unter einer gewissen Grenze liegen. Angenommen nun, es stehe fest, dass die Gleichung $f(x,t)=0$ ρ von einander verschiedene Wurzeln habe, für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag kleiner ist als ein bestimmter Werth t_0, so lässt sich zeigen, dass dieselbe Beschaffenheit der Gleichung auch noch zukommt für alle Werthe von t in einem Intervalle $(0, \dots t_1)$, dessen obere Grenze t_1 grösser als t_0 ist.

Es sei t' irgend ein bestimmter Werth von t, der kleiner als t_0 ist, und es habe die Gleichung $f(x,t')=0$ die Wurzeln $c'_1, \dots c'_\rho$. Setzt man dann,

unter τ eine positive reelle Grösse verstehend,

$$t = t'+\tau, \qquad x = c'_\lambda + v_\lambda,$$

so kann man die Gleichung $f(x, t'+\tau) = 0$ nach § 2, wenn man $f(x,t')$ an die Stelle der dort mit $f_0(x)$ bezeichneten Function treten lässt, auf die Form

$$v_\lambda = w_{\lambda 0} + w_{\lambda 2}v_\lambda^2 + \dots + w_{\lambda\rho}v_\lambda^\rho$$

bringen, wo

$$w_{\lambda 0} = -\frac{U_{\lambda 0}}{U_{\lambda 1}+f'(c'_\lambda, t')}, \quad w_{\lambda 2} = -\frac{U_{\lambda 2}+\frac{1}{2}f''(c'_\lambda, t')}{U_{\lambda 1}+f'(c'_\lambda, t')}, \quad \dots \quad w_{\lambda\rho} = -\frac{\frac{1}{\rho!}f^{(\rho)}(c'_\lambda, t')}{U_{\lambda 1}+f'(c'_\lambda, t')}$$

und $U_{\lambda 0}, U_{\lambda 1}, \dots U_{\lambda\rho}$ ganze rationale Functionen von τ sind, die für $\tau = 0$ sämmtlich verschwinden. Da nun keine der Grössen $f'(c'_\lambda, t')$ gleich Null ist, so erhält man durch das in § 1 auseinandergesetzte Verfahren für jeden unterhalb einer gewissen Grenze liegenden Werth von τ eine die vorstehende Gleichung befriedigende Grösse v_λ in der Form

$$v_\lambda = w_{\lambda 0} + W_{\lambda 2}w_{\lambda 0}^2 + W_{\lambda 3}w_{\lambda 0}^3 + \cdots,$$

wo $W_{\lambda 2}, W_{\lambda 3}, \dots$ ganze Functionen von $w_{\lambda 2}, w_{\lambda 3}, \dots$ sind.

Unter den in Betreff der Constante k und der Veränderlichen t' gemachten Voraussetzungen hat nun jede der Grössen

$$f'(c'_1, t'), f'(c'_2, t'), \dots f'(c'_\rho, t')$$

eine von Null verschiedene untere Grenze. Da ferner die Coefficienten von $U_{\lambda 0}, U_{\lambda 1}, \dots U_{\lambda\rho}$ continuirliche Functionen von t', τ sind, und $U_{\lambda 0}$ für $\tau = 0$ verschwindet, so lässt sich für den absoluten Betrag von τ eine Grenze $\bar{\tau}$ so bestimmen, dass für alle der Bedingung $\tau < \bar{\tau}$ genügenden Werthe von τ die Reihen, durch welche $v_1, v_2, \dots v_\rho$ ausgedrückt werden, sämmtlich convergiren, wozu nach § 1 nur erforderlich ist, dass die absoluten Beträge von $W_{\lambda 2}$, $W_{\lambda 3}, \dots W_{\lambda\rho}$ für jeden Werth von λ endliche Werthe haben und $|W_{\lambda 0}|$ hinlänglich klein angenommen wird. Nimmt man also t' so nahe bei t_0 an, dass $t_0 - t' < \bar{\tau}$ ist, so erhellt, dass die Gleichung $f(x,t) = 0$ auch dann noch ρ von einander verschiedene Wurzeln hat, wenn t in dem Intervall $(t_0, \dots t_0+\bar{\tau})$ angenommen wird. Daraus folgt sofort, dass der Gleichung diese Eigenschaft zukommt für jeden dem Intervall $(0, \dots 1)$ angehörenden Werth von t.

Da nun

$$f(x, 1) = f(x)$$

ist, so gilt also der Satz:

Jede Gleichung von der Form

$$x^{\varrho} + A_1 x^{\varrho-1} + \cdots + A_{\varrho} = 0,$$

in der $A_1, A_2, \ldots A_{\varrho}$ gegebene Grössen sind und deren Discriminante nicht gleich Null ist, hat ϱ von einander verschiedene Wurzeln.

Diesen Satz kann man auch so ausdrücken: Die Function $f(x)$ lässt sich darstellen in der Form eines Productes aus n Factoren, welche ganze lineare Functionen derselben Veränderlichen x sind.

In dieser Form ausgesprochen, gilt der Satz auch noch, wenn die Discriminante von $f(x)$ gleich Null ist, denn in diesem Falle kann man mittelst eines bekannten Verfahrens $f(x)$ stets als ein Product mehrerer ganzen Functionen von x so darstellen, dass jeder einzelne Factor eine von Null verschiedene Discriminante hat.

ÜBER DIE GEODÄTISCHEN LINIEN AUF DEM DREIAXIGEN ELLIPSOID.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 31. October 1861.)

Der russische General Schubert hat in einer vor zwei Jahren erschienenen Abhandlung*) die Resultate der verschiedenen zur Bestimmung der Gestalt der Erde ausgeführten Gradmessungen auf's Neue mit einander verglichen, und ist zu dem Schlusse gekommen, dass die Erde als ein Ellipsoid mit drei **ungleichen** Axen betrachtet werden müsse. Diese Hypothese ist allerdings auch schon früher ausgesprochen, aber so viel ich weiss noch nicht durch eine darauf gegründete Rechnung geprüft worden. Schubert nimmt, wie man es immer gethan, die Meridiane als Ellipsen an, für welche die Umdrehungsaxe der Erde ein gemeinschaftlicher Durchmesser ist, und berechnet für jede einzelne, von der man grössere Bogen gemessen hat, aus den gefundenen Längen derselben die beiden Hauptaxen. Dabei ergeben sich für die grosse Axe bei den verschiedenen Meridianen Werthe, welche merklich von einander abweichen — und zwar nach Schubert's Ansicht zu stark, als dass man die Differenzen den Fehlern der Messungen allein zuschreiben dürfte —, aber ganz wohl mit einander harmoniren, wenn man annimmt, dass auch der Äquator eine Ellipse sei. Die unter dieser Voraussetzung durchgeführte Rechnung ergiebt dann die folgenden geodätischen Elemente:

Grösseste Axe der Erde	3272671,5	Toisen
Mittlere » » »	3272303,2	»
Kleinste » » »	3261467,8	»
Länge des einen Endpunkts der grössesten Axe . . .	58° 44′	(von Ferro).

*) Essai d'une détermination de la véritable figure de la Terre. St. Pétersbourg, 1859.

Ich halte mich nicht für berechtigt, in Betreff der Zuverlässigkeit dieser Resultate von Schubert's Arbeit ein Urtheil abzugeben,*) sondern habe sie nur angeführt, weil ich durch sie veranlasst worden bin, die Theorie der geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid wieder aufzunehmen und so weit auszubilden, dass sich auch für praktische Rechnungen brauchbare Methoden daraus ableiten lassen. Hierzu habe ich mich um so mehr aufgefordert gefühlt, als die hauptsächlichsten noch zu erledigenden Aufgaben mit Hülfe der Theorie der Abel'schen Functionen vollständig und einfach gelöst werden können.

Jede kürzeste Linie einer Fläche kann bekanntlich betrachtet werden als der Weg, den ein materieller Punkt durchläuft, welcher gezwungen ist, auf der Fläche zu bleiben, aber von keiner beschleunigenden Kraft getrieben wird. Die Coordinaten desselben zur Zeit t seien x, y, z, so sind dieselben eindeutige Functionen von t, zu deren Bestimmung man, wenn

$$F(x, y, z) = 0$$

die allen Punkten der Fläche gemeinsame Gleichung ist, die Differential-Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{d^2y}{dt^2} : \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

hat. Für eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$$

ist, kann man also setzen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\varepsilon x}{\alpha}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\varepsilon y}{\beta}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\varepsilon z}{\gamma},$$

wo ε eine noch unbekannte Function von t ist. Zur Integration dieser Differential-Gleichungen, welche zuerst von Jacobi vermittelst der ihm eigenthümlichen Methoden der analytischen Mechanik ausgeführt worden ist, bediene ich mich eines Verfahrens, welches den Vortheil hat, dass dabei keine

*) Erst nachdem diese Notiz bereits in der Akademie gelesen war, bin ich durch Herrn Encke auf eine spätere, mir nicht zu Gesicht gekommene Abhandlung Schubert's (in den Astron. Nachrichten, No. 1303) aufmerksam gemacht worden, in welcher er die Differenzen der verschiedenen Gradmessungen durch eine andere Hypothese auszugleichen versucht hat.

Transformation der vorgelegten Gleichungen erforderlich ist, und welches auch in andern Fällen Anwendung finden kann.

Es sei λ eine willkürliche von t unabhängige Grösse, und

$$f(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma),$$

$$\frac{\varphi(\lambda)}{f(\lambda)} = 1 + \frac{x^2}{\lambda-\alpha} + \frac{y^2}{\lambda-\beta} + \frac{z^2}{\lambda-\gamma},$$

$$\frac{\varphi_1(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\lambda-\alpha} + \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\lambda-\beta} + \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{\lambda-\gamma},$$

so erhält man, wenn man in den Ausdrücken von

$$\frac{d^2\varphi(\lambda)}{dt^2}, \quad \frac{d\varphi_1(\lambda)}{dt}$$

$\frac{\varepsilon x}{\alpha}, \frac{\varepsilon y}{\beta}, \frac{\varepsilon z}{\gamma}$ für $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ substituirt und dann ε eliminirt,

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\frac{d^2\varphi(\lambda)}{dt^2} - \varphi(\lambda)\frac{d\varphi_1(\lambda)}{dt} - \varphi_1(\lambda)\frac{d\varphi(\lambda)}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, dass

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)^2 - \varphi(\lambda)\varphi_1(\lambda)$$

von t unabhängig ist. Es ist aber dieser Ausdruck in Bezug auf λ eine ganze Function 5^{ten} Grades, welche für $\lambda = 0, \alpha, \beta, \gamma$ verschwindet. Folglich muss sein

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)^2 - \varphi(\lambda)\varphi_1(\lambda) = -c(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)\lambda(\lambda-\delta),$$

wo c, δ zwei Constanten sind, und zwar die erstere eine nothwendig positive Grösse. Setzt man in dieser Gleichung für $\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}$ den Ausdruck

$$f(\lambda)\left\{\frac{x\frac{dx}{dt}}{\lambda-\alpha} + \frac{y\frac{dy}{dt}}{\lambda-\beta} + \frac{z\frac{dz}{dt}}{\lambda-\gamma}\right\}$$

ein, so darf man, da die beiden Seiten der Gleichung in den correspondirenden Coefficienten übereinstimmen müssen, der Grösse λ jetzt auch solche Werthe geben, die von t abhängig sind. Wählt man als solche diejenigen beiden

λ_1, λ_2, welche ausser Null die Gleichung

$$\varphi(\lambda) = 0$$

befriedigen, und setzt

$$R(\lambda) = -\lambda(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\delta-\lambda),$$

so erhält man, nachdem noch die Formeln

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)_{\lambda=\lambda_1} = -\tfrac{1}{2}\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)\frac{d\lambda_1}{dt},$$
$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)_{\lambda=\lambda_2} = -\tfrac{1}{2}\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)\frac{d\lambda_2}{dt}$$

abgeleitet worden,

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda_1}{\sqrt{c}}(\lambda_1-\lambda_2)\frac{d\lambda_1}{dt} = \sqrt{R(\lambda_1)}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\lambda_2}{\sqrt{c}}(\lambda_2-\lambda_1)\frac{d\lambda_2}{dt} = \sqrt{R(\lambda_2)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{c}.dt}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}},$$
$$\frac{\sqrt{c}.dt}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)} = \frac{d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}},$$

und somit

$$0 = \frac{\lambda_1 d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2 d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}},$$
$$\sqrt{c}.dt = \frac{\lambda_1^2 d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2^2 d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}}.$$

Dieses sind die von Jacobi gefundenen Gleichungen, genau in der Form, wie er sie in seinen Vorlesungen über Mechanik gegeben hat.

Die Grössen λ_1, λ_2 sind bekanntlich stets reell. Denn es ist

$$\varphi(\alpha) = \quad (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma).x^2,$$
$$\varphi(\beta) = -(\alpha-\beta)(\beta-\gamma).y^2,$$
$$\varphi(\gamma) = \quad (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma).z^2$$

und es hat daher die Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$, wenn man $\alpha > \beta > \gamma$ annimmt, eine reelle Wurzel zwischen α und β, so wie eine andere zwischen β und γ, woraus folgt, dass auch die dritte reell ist.

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)^2 - \varphi(\lambda)\varphi_1(\lambda) = cR(\lambda)$$

ergiebt sich ferner, wenn man auf beiden Seiten die Coefficienten von λ^5 und von λ bestimmt,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = c$$

und

$$\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{dx^2}{\alpha}+\frac{dy^2}{\beta}+\frac{dz^2}{\gamma}\right) = \frac{c\delta\, dt^2}{\alpha\beta\gamma},$$

oder, wenn man die Länge des von einem bestimmten Augenblicke t_0 bis zu dem betrachteten zurückgelegten Weges mit s bezeichnet,

$$ds = \sqrt{c}.dt, \qquad s = \sqrt{c}.(t-t_0)$$

und

$$\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{dx^2}{\alpha}+\frac{dy^2}{\beta}+\frac{dz^2}{\gamma}\right) = \frac{\delta ds^2}{\alpha\beta\gamma}.$$

Aus diesen Gleichungen, von denen die letzte Joachimsthal gefunden und geometrisch interpretirt hat,*) ersicht man, dass die Constanten c, δ bestimmt sind, sobald man für irgend einen Augenblick den Ort des sich bewegenden Punktes und die Grösse und Richtung seiner Geschwindigkeit kennt. Dabei kann c jeden beliebigen positiven Werth erhalten; für die Grösse δ aber giebt es bei jeder Fläche bestimmte Grenzen, innerhalb welcher sie liegen muss. Setzt man nämlich $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, so ist aus dem vorstehenden Ausdrucke von $R(\lambda)$ ersichtlich, dass

$$R(\lambda_1) = -\lambda_1(\alpha-\lambda_1)(\beta-\lambda_1)(\gamma-\lambda_1)(\delta-\lambda_1)$$

und

$$R(\lambda_2) = -\lambda_2(\alpha-\lambda_2)(\beta-\lambda_2)(\gamma-\lambda_2)(\delta-\lambda_2)$$

beide positiv sein müssen. Nun ist aber, wenn man

$$\lambda_1 > \lambda_2$$

annimmt,

I. beim Ellipsoide

$$\alpha > \lambda_1 > \beta > \lambda_2 > \gamma > 0,$$

---

*) Crelle's Journal, Bd. 26, S. 168.

und es haben daher $\delta-\lambda_1$, $\delta-\lambda_2$ entgegengesetzte Zeichen, so dass δ zwischen λ_1 und λ_2 und somit

$$\delta \text{ stets zwischen } \alpha \text{ und } \gamma \text{ liegt.}$$

II. Eben so findet sich, dass beim **zweischaligen Hyperboloide**, wo

$$\alpha > 0 > \beta > \lambda_1 > \gamma > \lambda_2$$

ist, δ zwischen λ_1 und λ_2 und daher

$$\delta \text{ stets zwischen } \beta \text{ und } -\infty \text{ liegt.}$$

III. Beim **einschaligen Hyperboloide** endlich hat man

$$\alpha > \lambda_1 > \beta > 0 > \gamma > \lambda_2,$$

und es ist daher auch hier δ zwischen λ_1 und λ_2 und somit

$$\delta \text{ zwischen } \alpha \text{ und } -\infty$$

enthalten.

Zugleich lässt sich für jede Fläche nachweisen, dass δ jeden innerhalb der angegebenen Grenzen liegenden Werth auch wirklich annehmen kann.

Führt man nun in die obigen Differential-Gleichungen an die Stelle von t die Grösse s ein, so hat man

$$0 = \frac{\lambda_1 d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2 d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}},$$

$$ds = \frac{\lambda_1^2 d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2^2 d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}}$$

und

$$\frac{ds}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}}, \qquad \frac{ds}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)} = -\frac{d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}} = -\frac{ds}{\lambda_1\lambda_2}$$

und daher, wenn man

$$u = -\int \frac{ds}{\lambda_1\lambda_2}$$

setzt, wo dann u eben so wie λ_1 und λ_2 eine völlig bestimmte eindeutige und continuirliche Function von s ist, wenn man dieser Grösse nur reelle Werthe

beilegt,

$$du = \frac{d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}},$$

$$0 = \frac{\lambda_1 d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2 d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}}.$$

Vermöge dieser Gleichungen kann man nun λ_1, λ_2 auch als Functionen von u betrachten, und die Theorie der Abel'schen Transcendenten lehrt, dass jeder aus λ_1, $\sqrt{R(\lambda_1)}$ und λ_2, $\sqrt{R(\lambda_2)}$ symmetrisch zusammengesetzte rationale Ausdruck für alle endlichen Werthe von u den Charakter einer rationalen Function dieser Grösse besitzt. Insbesondere aber sind

$$\lambda_1\lambda_2, \quad (\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2), \quad (\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_2), \quad (\gamma-\lambda_1)(\gamma-\lambda_2), \quad (\delta-\lambda_1)(\delta-\lambda_2)$$

die **Quadrate** solcher Functionen, und man kann daher, da man

$$x^2 = \frac{\alpha(\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \qquad y^2 = \frac{\beta(\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_2)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}, \qquad z^2 = \frac{\gamma(\gamma-\lambda_1)(\gamma-\lambda_2)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

hat, die Coordinaten x, y, z selbst in der Form

$$x = \frac{F_1(u)}{F(u)}, \qquad y = \frac{F_2(u)}{F(u)}, \qquad z = \frac{F_3(u)}{F(u)}$$

darstellen, wo $F(u)$, $F_1(u)$, $F_2(u)$, $F_3(u)$ Functionen von u sind, die den Charakter **ganzer** rationaler Functionen haben und in beständig convergirende Reihen entwickelt werden können. Ferner ergiebt sich

$$s = \frac{F_4(u)}{F(u)},$$

wo $F_4(u)$ ebenso beschaffen ist wie die übrigen Functionen F. Auf diese Weise können x, y, z, s als Functionen einer Hülfsgrösse ausgedrückt werden, in der Art, dass, wenn man dieselbe alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ in stetiger Aufeinanderfolge durchlaufen lässt, man alle Punkte der betrachteten kürzesten Linie und die zugehörigen Werthe von s erhält.

Beim Ellipsoid sind nach dem Vorhergehenden drei Fälle zu unterscheiden, indem

$$\delta < \beta, \quad \delta > \beta \text{ und auch } \delta = \beta$$

sein kann. Für den ersten mögen hier die vollständig entwickelten Formeln mitgetheilt werden.

Man hat in diesem Falle

$$\alpha > \beta > \delta > \gamma > 0$$

und es liegt λ_1 zwischen α und β, λ_2 zwischen δ und γ. Setzt man daher

$$u = \int_\beta^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}} + \int_\gamma^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

$$u' = \int_\beta^{\lambda_1} \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}} + \int_\gamma^{\lambda_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

so ist u' eine Constante, $\frac{du}{ds} = -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$, und beide Grössen sind reell. Ferner sei

$$A = \int_\gamma^\delta \frac{d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad A' = \int_\gamma^\delta \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

$$B = -\int_\beta^\alpha \frac{d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad B' = -\int_\beta^\alpha \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

$$C = \int_0^\gamma \frac{d\lambda}{2\sqrt{-R(\lambda)}}, \qquad C' = \int_0^\gamma \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{-R(\lambda)}},$$

$$D = -\int_\delta^\beta \frac{d\lambda}{2\sqrt{-R(\lambda)}} + C, \qquad D' = -\int_\delta^\beta \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{-R(\lambda)}} + C',$$

$$E = \int_\gamma^\delta \frac{\lambda^2\, d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad F = -\int_\beta^\alpha \frac{\lambda^2\, d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

wo bei der Ausführung der Integrationen allen Wurzelgrössen ihr positiver Werth beizulegen ist.

Sodann sei

$$\vartheta(v, v') = \sum_{\nu, \nu'} \left\{ e^{-(a\nu\nu + 2b\nu\nu' + c\nu'\nu')\pi} . \cos 2\pi(\nu v + \nu' v') \right\},$$

wo v, v' zwei unbeschränkt veränderliche Grössen bedeuten, a, b, c aber Constanten, welche der Bedingung unterworfen sind, dass

$$avv + 2bvv' + cv'v'$$

bei reellen Werthen von v, v' stets positiv bleiben muss, und ν, ν' ganze Zahlen, von denen jede, unabhängig von der andern, bei der Summation alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat. Ferner werde, wenn n, n'

zwei willkürliche von v, v' unabhängige Grössen bedeuten, die Function

$$e^{-[n(2v + nai + n'bi) + n'(2v' + nbi + n'ci)]\pi i} . \vartheta(v + nai + n'bi,\ v' + nbi + n'ci)$$

mit

$$\vartheta(v, v'; n, n')$$

bezeichnet.

Alsdann hat man, wenn

$$a = \frac{CB' - BC'}{AB' - BA'}, \quad b = \frac{DB' - BD'}{AB' - BA'} = \frac{AC' - CA'}{AB' - BA'}, \quad c = \frac{AD' - DA'}{AB' - BA'},$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{B'u - Bu'}{AB' - BA'}, \quad v' = \frac{1}{2} \frac{Au' - A'u}{AB' - BA'}$$

gesetzt wird,

$$\sqrt[4]{\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\alpha(\alpha-\delta)}} \cdot \frac{x}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\vartheta(v, v'; 0, \frac{1}{2})}{\vartheta(v, v')},$$

$$\sqrt[4]{\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta(\beta-\delta)}} \cdot \frac{y}{\sqrt{\beta}} = \frac{\vartheta(v, v' - \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2})}{\vartheta(v, v')},$$

$$\sqrt[4]{\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}} \cdot \frac{z}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\vartheta(v - \frac{1}{2}, v' - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, 0)}{\vartheta(v, v')}.$$

Ferner ergiebt sich bei passender Wahl des Punktes, in welchem s gleich Null ist,

$$s = 2Ev + 2Fv' + \frac{\partial \log \vartheta(v, v')}{\partial u'}.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass man die Entwicklung der Function

$$\vartheta(v, v'; n, n')$$

in dem Falle, dass $2n$, $2n'$ ganze Zahlen sind, wie in den vorstehenden Formeln, aus der für $\vartheta(v, v')$ gegebenen erhält, indem man $n + \nu, n' + \nu'$ für ν, ν' setzt.

Wenn die Grösse u stetig wachsend alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so erhält λ_1 jeden zwischen α und β liegenden Werth, und λ_2 jeden zwischen δ und γ liegenden unzähligemal. Jedesmal, wenn $\lambda_2 = \delta$ wird, berührt die betrachtete Curve eine der Krümmungslinien des Ellipsoides, nämlich diejenige, in welcher dasselbe von dem confocalen einschaligen Hyperboloid, dessen grösseste Axe $\sqrt{\alpha - \delta}$ ist, geschnitten wird.

Wenn δ zwischen β und α liegt, so erfahren die gegebenen Ausdrücke nur leichte Modificationen. In dem besondern Falle, dass $\delta = \beta$ ist — wo es sich um kürzeste Linien handelt, die durch einen Nabelpunkt der Fläche gehen — verwandeln sich die vierfach periodischen Functionen in dreifach periodische. Dasselbe geschieht, wenn $\alpha = \beta$ oder $\beta = \gamma$; in jedem dieser drei Fälle werden x, y, z, s durch ϑ-Functionen eines Arguments und durch Exponential-Grössen ausgedrückt, und zwar in der Form, die sich zuerst in einer von Herrn Luther herausgegebenen hinterlassenen Abhandlung Jacobi's findet.*)

Für die übrigen Flächen zweiter Ordnung behalten die Formeln ganz dieselbe Gestalt, es treten nur statt der hier vorkommenden ϑ-Functionen andere auf, und die Constanten u', A, B u. s. w. werden durch Integrationen zwischen anderen Grenzen bestimmt.

Wenn $\alpha - \gamma$ eine kleine Grösse ist, wie dies bei dem Erdellipsoid eintritt, so lassen sich die in den Ausdrücken von x, y, z, s vorkommenden Quotienten auch in rasch convergirende Reihen von der Form

$$\sum A_{\nu,\nu'} \cos \pi (\nu v + \nu' v'), \qquad \sum B_{\nu,\nu'} \sin \pi (\nu v + \nu' v')$$

verwandeln; und ebenso ist es möglich, x, y, z durch Reihen von derselben Form, in denen aber v, v' lineare Functionen von s sind, darzustellen. Auf die Entwicklung dieser Reihen, wodurch man Formeln erhält, die bei geodätischen Rechnungen, mag man nun die Erde als ein dreiaxiges oder, wie bisher, als ein Rotations-Ellipsoid betrachten, auch als praktisch brauchbar sich erweisen dürften, kann ich indessen hier nicht eingehen.

*) Astron. Nachrichten Bd. 41, S. 210 und Journal für Mathematik Bd. 53, S. 335.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE INTEGRATION DER HYPERELLIPTISCHEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 17. Februar 1862.)

Nach dem Abel'schen Theorem lässt sich der Differential-Ausdruck

$$\frac{x_0^\alpha\, dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} + \frac{x_1^\alpha\, dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \cdots + \frac{x_\varrho^\alpha\, dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},$$

in welchem $x_0, x_1, \ldots x_\varrho$ unbeschränkt veränderliche Grössen, $R(x_0)$ eine ganze Function $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ oder $(2\varrho+2)^{\text{ten}}$ Grades von x_0, $R(x_1)$ dieselbe Function von x_1 etc. bedeuten, für den Fall, dass α eine der Zahlen $0, 1, \ldots \varrho - 1$ ist, auf die Form

$$\frac{\xi_1^\alpha\, d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \cdots + \frac{\xi_\varrho^\alpha\, d\xi_\varrho}{\sqrt{R(\xi_\varrho)}}$$

bringen, wo $\xi_1, \ldots \xi_\varrho$ algebraische Functionen von $x_0, x_1, \ldots x_\varrho$ sind, und zwar für jeden Werth von α die Wurzeln ein und derselben Gleichung ϱ^{ten} Grades

$$\xi^\varrho + \varphi_1 . \xi^{\varrho-1} + \cdots + \varphi_\varrho = 0,$$

deren Coefficienten $\varphi_1, \ldots \varphi_\varrho$ rational aus

$$x_0, \sqrt{R(x_0)}, \quad x_1, \sqrt{R(x_1)}, \quad \ldots \quad x_\varrho, \sqrt{R(x_\varrho)}$$

(und den Coefficienten von R) zusammengesetzt werden. Wenn man daher, mit $C_1, \ldots C_\varrho$ willkürliche Constanten bezeichnend, unter den Grössen $x_0, \ldots x_\varrho$ die ϱ Gleichungen

$$\varphi_1 = C_1, \ldots \varphi_\varrho = C_\varrho$$

annimmt, und dadurch die $\xi_1, \ldots \xi_\varrho$ von den genannten Veränderlichen unabhängig macht; so hat man die vollständigen Integrale der folgenden ϱ Differential-Gleichungen:

$$\begin{gathered}
\frac{dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} + \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \cdots + \frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}} = 0, \\
\frac{x_0\,dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} + \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \cdots + \frac{x_\varrho\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{x_0^{\varrho-1}\,dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} + \frac{x_1^{\varrho-1}\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \cdots + \frac{x_\varrho^{\varrho-1}\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}} = 0.
\end{gathered}$$

Die Zusammensetzung der Ausdrücke $\varphi_1, \ldots \varphi_\varrho$ ist ferner von der Art, dass sie sich nicht ändern, wenn irgend zwei der Grössen $x_0, \ldots x_\varrho$ und zugleich die zugehörigen Radicale unter einander vertauscht werden. Daraus folgt, dass sich aus den Gleichungen

$$\varphi_1 = C_1, \ldots\ \varphi_\varrho = C_\varrho$$

durch Wegschaffung der Wurzelgrössen eine gleiche Anzahl anderer

$$F_1 = 0, \ldots\ F_\varrho = 0$$

muss ableiten lassen, in denen die Ausdrücke auf der linken Seite rationale und symmetrische Functionen von $x_0, \ldots x_\varrho$ sind, und daher, wenn man mit u_1 die Summe der x bezeichnet, mit u_2 die Summe der Producte je zweier, mit u_3 die Summe der Produkte je dreier etc., rational aus $u_1, u_2, \ldots u_{\varrho+1}$ zusammengesetzt werden können. In der That hatte für $\varrho = 1$ bereits Euler gefunden, dass die Differential-Gleichung

$$\frac{dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} + \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} = 0$$

durch eine Gleichung zweiten Grades zwischen $u_1 = x_0 + x_1$ und $u_2 = x_0 x_1$ integrirt werden könne; und Jacobi hat für jeden Werth von ϱ gezeigt,*) dass zwischen je zweien der Grössen u eine quadratische, und zwischen je dreien eine lineare Gleichung besteht. Zur Begründung dieses interessanten Resultats hat jedoch Jacobi die bis dahin bei der Integration der in Rede stehenden Differential-Gleichungen angewandten Methoden verlassen und durch

*) Crelle's Journal, Bd. 32.

eine neue ersetzen zu müssen geglaubt. Es dürfte indessen gut sein zu bemerken, dass das Abel'sche Theorem, so wie dasselbe auf die einfachste Weise zu den vorhin angegebenen Integralen der betrachteten Differential-Gleichungen führt, auch die rationalen Formen der ersten unmittelbar liefert.

Es sei $H(x,t)$ eine rationale Function von x, deren Coefficienten selbst beliebige Functionen einer andern, von x unabhängigen Veränderlichen t sind. Bezeichnet man dann mit $x_0, x_1, \ldots x_n$ die von t abhängigen Wurzeln der Gleichung

$$\sqrt{R(x)} = H(x,t),$$

so gelten, dem genannten Theorem gemäss, die ϱ Gleichungen, welche aus der folgenden

$$\sum_{(\nu=0,\ldots n)} \left\{ \frac{x_\nu^\alpha\,dx_\nu}{\sqrt{R(x_\nu)}} \right\} = 0$$

hervorgehen, wenn man $\alpha = 0, 1, \ldots \varrho - 1$ setzt, vorausgesetzt dass man der Wurzelgrösse $\sqrt{R(x_\nu)}$ von den beiden Werthen, die sie haben kann, den durch die Gleichung

$$\sqrt{R(x_\nu)} = H(x_\nu, t)$$

bestimmten beilegt. Giebt man insbesondere $H(x,t)$ die Form

$$M(x) + tN(x),$$

wo M, N ganze Functionen von x, deren Coefficienten von t unabhängig sind, bedeuten sollen, so kann man bewirken, dass die Gleichung

$$\sqrt{R(x)} = M(x) + tN(x)$$

genau $\varrho+1$ von t abhängige Wurzeln erhält, und dass dieselben für einen bestimmten Werth von t, z. B. für $t = 0$, vorgeschriebene Werthe $c_0, c_1, \ldots c_\varrho$ annehmen, während zugleich die Zeichen der zugehörigen Radicale $\sqrt{R(c_0)}$, $\sqrt{R(c_1)}, \ldots \sqrt{R(c_\varrho)}$ beliebig fixirt werden können. Zu dem Ende nehme man für $M(x)$ eine ganze Function ϱ^{ten} Grades von x, die für $x = c_0, c_1, \ldots c_\varrho$ die Werthe $\sqrt{R(c_0)}, \sqrt{R(c_1)}, \ldots \sqrt{R(c_\varrho)}$ erhält, so dass

$$R(x) - M^2(x)$$

durch das Product

$$(x-c_0)(x-c_1)\ldots(x-c_\varrho),$$

welches mit $L(x)$ bezeichnet werde, theilbar wird; und

$$N(x) = \frac{R(x)-M^2(x)}{L(x)},$$

wo dann $N(x)$ eine ganze Function ϱ^{ten} oder $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades ist, je nachdem $R(x)$ den Grad $2\varrho+1$ oder $2\varrho+2$ hat. Dann zerfällt die Gleichung

$$\sqrt{R(x)} = M(x)+tN(x),$$

welche rational gemacht die Form

$$R(x)-(M(x)+tN(x))^2 = 0$$

oder

$$(L(x)-2tM(x)-t^2N(x))N(x) = 0$$

annimmt, in die beiden

$$N(x) = 0,$$
$$L(x)-2tM(x)-t^2N(x) = 0,$$

und die letztere, welche vom $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grade ist, liefert die $\varrho+1$ von t abhängigen Grössen

$$x_0, x_1, \ldots x_\varrho,$$

welche den Differential-Gleichungen

$$\sum_\lambda \frac{dx_\lambda}{\sqrt{R(x_\lambda)}} = 0,$$
$$\sum_\lambda \frac{x_\lambda\, dx_\lambda}{\sqrt{R(x_\lambda)}} = 0, \qquad (\lambda = 0, \ldots \varrho)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_\lambda \frac{x_\lambda^{\varrho-1}\, dx_\lambda}{\sqrt{R(x_\lambda)}} = 0$$

genügen, wenn man die Zeichen der Radicale so bestimmt, wie es die Gleichungen

$$\sqrt{R(x_0)} = M(x_0)+tN(x_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sqrt{R(x_\varrho)} = M(x_\varrho)+tN(x_\varrho)$$

erfordern. Zugleich sieht man, dass für $t = 0$

$$x_0, x_1, \ldots x_\varrho, \sqrt{R(x_0)}, \sqrt{R(x_1)}, \ldots \sqrt{R(x_\varrho)}$$

die festgesetzten Werthe erhalten.

Hiernach ergeben sich die allgemeinen Integrale der vorstehenden Differential-Gleichungen in rationaler Form, wenn man aus den $\varrho+1$ Gleichungen

$$L(x_0)-2tM(x_0)-t^2N(x_0) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$L(x_\varrho)-2tM(x_\varrho)-t^2N(x_\varrho) = 0$$

ϱ andere durch Elimination von t ableitet. Dies kann auf mehrfache Weise ausgeführt werden.

Jacobi, der a. a. O. von der Gleichung

$$L(x)-2tM(x)-t^2N(x) = 0$$

ausgeht, in welcher er L, M, N als gegebene ganze Functionen $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades von x annimmt, und dann zeigt, dass die $\varrho+1$ Wurzeln der Gleichung, als Functionen der Veränderlichen t betrachtet, den in Rede stehenden Differential-Gleichungen genügen, wenn man

$$R(x) = L(x)N(x)+M^2(x)$$

setzt, verfährt dabei folgendermassen.

Es werde

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_\varrho) \text{ mit } F(x)$$

bezeichnet, so hat man, wenn N_0 der Coefficient von $x^{\varrho+1}$ in $N(x)$ ist, für jeden Werth von x

$$L(x)-2tM(x)-t^2N(x) = (1-N_0t^2)F(x).$$

Wird daher

$$F(x) = x^{\varrho+1}-u_1x^\varrho+u_2x^{\varrho-1}-\cdots\pm u_{\varrho-1}$$

gesetzt, so erhält man für jede der Grössen $u_1, u_2, \ldots u_{\varrho-1}$ einen Ausdruck von der Form

$$\frac{l-2mt-nt^2}{1-N_0t^2},$$

in welchem l, m, n von t unabhängig sind. Daraus ergiebt sich unmittelbar der schon angeführte Satz, dass zwischen je zwei der Grössen $u_1, u_2, \ldots u_{\varrho+1}$ eine quadratische, und zwischen je dreien eine lineare Gleichung besteht.

Man kann aber auch zu vollständig entwickelten einfachen Formeln in folgender Weise gelangen.

Es sei zunächst $R(x)$ vom $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grade. Dann ist $N_0 = 0$, und man hat

$$N(x)F(x) = R(x)-(M(x)+tN(x))^2.$$

Daraus folgt, wenn man diejenigen Werthe von x, für welche $R(x)=0$ wird, mit $a_1, a_2, \dots a_{2\varrho+1}$ bezeichnet,

$$N(a_\alpha)F(a_\alpha) = -(M(a_\alpha)+tN(a_\alpha))^2$$

für $\alpha = 1, \dots 2\varrho+1$. Aber

$$N(a_\alpha)L(a_\alpha) = -M^2(a_\alpha)$$

und daher

$$\frac{F(a_\alpha)}{L(a_\alpha)} = \left(1-t\frac{M(a_\alpha)}{L(a_\alpha)}\right)^2.$$

Bezeichnet man also die von $x_0, \dots x_\varrho$ unabhängige Grösse

$$\frac{M(a_\alpha)}{L(a_\alpha)} \text{ mit } h_\alpha$$

und setzt

$$p_\alpha = \frac{F(a_\alpha)}{L(a_\alpha)} = \frac{(a_\alpha-x_0)(a_\alpha-x_1)\dots(a_\alpha-x_\varrho)}{(a_\alpha-c_0)(a_\alpha-c_1)\dots(a_\alpha-c_\varrho)},$$

so hat man, unter α, β, γ irgend drei der Zahlen $1, 2, \dots 2\varrho+1$ verstehend,

$$p_\alpha = (1-h_\alpha t)^2, \qquad p_\beta = (1-h_\beta t)^2, \qquad p_\gamma = (1-h_\gamma t)^2,$$

aus welchen Gleichungen sich durch Elimination von t die beiden folgenden ergeben:

$$(h_\beta^2(p_\alpha-1)-h_\alpha^2(p_\beta-1))^2-4h_\alpha h_\beta(h_\alpha-h_\beta)(h_\beta(p_\alpha-1)-h_\alpha(p_\beta-1)) = 0,$$
$$h_\beta h_\gamma(h_\beta-h_\gamma)(p_\alpha-1)+h_\gamma h_\alpha(h_\gamma-h_\alpha)(p_\beta-1)+h_\alpha h_\beta(h_\alpha-h_\beta)(p_\gamma-1) = 0.$$

Es besteht also auch zwischen je zweien der Grössen $p_1, \dots p_{2\varrho+1}$ eine quadratische, und zwischen je dreien eine lineare Gleichung. Wenn aber $R(x)$ vom $(2\varrho+2)^{\text{ten}}$ Grade ist, so hat man

$$(1-N_0t^2)N(x)F(x) = R(x)-(M(x)+tN(x))^2,$$

und daher, wenn man jetzt die Wurzeln der Gleichung $R(x)=0$ mit $a_0, a_1, \dots a_{2\varrho+1}$ bezeichnet,

$$(1-N_0t^2)\frac{F(a_\alpha)}{L(a_\alpha)} = \left(1-\frac{M(a_\alpha)}{L(a_\alpha)}t\right)^2 \qquad \text{für } \alpha = 0, \dots 2\varrho+1.$$

Nun setze man, unter α, β, γ wieder irgend drei der Zahlen $1, 2, \dots 2\varrho+1$ verstehend,

$$p_\alpha = \frac{F(a_\alpha)}{L(a_\alpha)} : \frac{F(a_0)}{L(a_0)} = \frac{a_\alpha-x_0}{a_\alpha-c_0}\cdots\frac{a_\alpha-x_\varrho}{a_\alpha-c_\varrho}\cdot\frac{a_0-c_0}{a_0-x_0}\cdots\frac{a_0-c_\varrho}{a_0-x_\varrho},$$

so wird

$$p_\alpha = \left(\frac{1-h_\alpha t}{1-h_0 t}\right)^2$$

oder, wenn man

$$t' = \frac{t}{1-h_0 t}$$

setzt,

$$p_\alpha = (1-(h_\alpha-h_0)t')^2.$$

Daraus folgt, dass die vorstehenden Gleichungen zwischen $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ auch in dem jetzt betrachteten Falle gültig bleiben, wenn man nur $h_\alpha-h_0$, $h_\beta-h_0$, $h_\gamma-h_0$ für $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ setzt.

Es ist aber

$$\frac{M(x)}{L(x)} = \sum_{(\lambda=0,\dots\varrho)} \frac{\sqrt{R(c_\lambda)}}{(x-c_\lambda)L'(c_\lambda)},$$

wo $L'(x) = \frac{\partial L(x)}{\partial x}$, und daher

$$h_\alpha = \sum_\lambda \frac{\sqrt{R(c_\lambda)}}{(a_\alpha-c_\lambda)L'(c_\lambda)},$$
$$h_\alpha-h_0 = (a_0-a_\alpha)\sum_\lambda \frac{\sqrt{R(c_\lambda)}}{(a_\alpha-c_\lambda)(a_0-c_\lambda)L'(c_\lambda)}.$$

ZUR INTEGRATION DER LINEAREN PARTIELLEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN MIT CONSTANTEN COEFFICIENTEN.

(Von Frau v. Kovalevsky 1884 veröffentlicht: Acta mathematica Bd. 6.)

Es seien u, v, w reelle, veränderliche Grössen, die wir als die Coordinaten eines Punktes im Raume in Beziehung auf drei in einem Punkte O unter rechten Winkeln sich schneidende Axen betrachten. Ferner sei σ irgend eine geschlossene Fläche von der Beschaffenheit, dass in jeder von O ausgehenden Richtung nur ein Punkt derselben liegt. Dann gehört zu jedem Punkte P des Raumes ein bestimmter Punkt P_1 der Fläche, nämlich derjenige, in welchem dieselbe von der Strecke OP oder deren Verlängerung über P hinaus geschnitten wird; und wenn man das Verhältniss OP zu OP_1 mit t bezeichnet, so ist t eine beständig positiv bleibende continuirliche Function der Coordinaten u, v, w von P, welche die Eigenschaft hat, dass sie in kt übergeht, wenn man u, v, w alle drei mit derselben positiven Zahl k multiplicirt. Der Ort aller Punkte ferner, für welche t denselben Werth hat, ist eine Fläche σ_t, welche σ ähnlich ist und von dieser ganz umschlossen wird, wofern $t < 1$ ist, während das Umgekehrte stattfindet, wenn $t > 1$. Setzt man nun

$$u' = \frac{\partial t}{\partial u}, \quad v' = \frac{\partial t}{\partial v}, \quad w' = \frac{\partial t}{\partial w},$$

so sind u', v', w' solche Functionen von u, v, w, die sich nicht ändern, wenn man diese Grössen alle drei mit k multiplicirt, und welche folgende geometrische Bedeutung haben. Man denke sich in dem Punkte u, v, w an die durch denselben gehende Fläche σ_t die Tangentialebene gelegt, so ist deren Gleichung, wenn man mit U, V, W die Coordinaten irgend eines ihrer

Punkte bezeichnet:

$$u'U + v'V + w'W = t.$$

Fällt man ferner von O aus auf diese Ebene ein Loth, so ist die Länge desselben

$$\frac{t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}},$$

und die Coordinaten seines Fusspunktes sind

$$\frac{u't}{u'u' + v'v' + w'w'}, \quad \frac{v't}{u'u' + v'v' + w'w'}, \quad \frac{w't}{u'u' + v'v' + w'w'}.$$

Dieses vorausgesetzt, sei $F(u, v, w)$ eine Function von u, v, w, die sich überall stetig ändert, mit Ausnahme etwa in der Nähe des Punktes O, und es werde der Werth, den das Integral

$$\int\int\int F(u, v, w)\, du\, dv\, dw$$

erhält, wenn die Integration über alle diejenigen Punkte des Raumes ausgedehnt wird, die zwischen zweien Flächen σ_t und σ_{t_0} liegen, — wo wir jetzt t als eine unbeschränkt veränderliche positive Grösse und t_0 als einen besonderen (festen) Werth derselben betrachten — mit

$$\pm \int\limits_{(t_0 \dots t)} F(u, v, w)\, d\omega$$

bezeichnet, in welcher Formel $d\omega$ das Raumelement $du\, dv\, dw$ bedeutet und das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem

$$t > t_0 \quad \text{oder} \quad t < t_0.$$

Dann erhält man durch eine einfache geometrische Betrachtung die folgenden beiden Gleichungen, in denen $d\sigma_t$ ein Element der Fläche σ_t bedeutet.

$$\text{(A)} \qquad D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} F(u, v, w)\, d\omega = \int \frac{F(u, v, w)\, d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}},$$

$$\text{(B)} \qquad D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} D_u F(u, v, w)\, d\omega = D_t \int \frac{u'F(u, v, w)\, d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}. \text{*)}$$

*) Die Gleichung (A) ergiebt sich folgendermassen:

Der Zuwachs von $\int\limits_{(t_0 \dots t)} F(u, v, w)\, d\omega$, wenn t sich um dt ändert, ist gleich

$$\int\limits_{(t, \dots, t+dt)} F(u, v, w)\, d\omega.$$

Daraus folgt, wenn man in der ersten Formel $u'F$ für F setzt,

$$\text{(C)} \qquad D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} D_u F(u, v, w)\, d\omega = D_t^2 \int\limits_{(t_0 \dots t)} u'F(u, v, w)\, d\omega.$$

Nun sei $\varphi(u, v, w)$ eine Function, welche dieselbe Beschaffenheit hat, wie sie für F angenommen ist, $f(u, v, w)$ eine andere Function, die sich überall stetig ändert (auch in der Nähe des Punktes O) und

$$F(x, y, z, t) = D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} \varphi(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega,$$

wo x, y, z die Coordinaten eines unbestimmten Punktes bedeuten. Dann hat man:

$$\begin{aligned} D_x F &= D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} \varphi D_x f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ &= D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} \varphi D_u f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ &= D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} D_u[\varphi . f(x+u, y+v, z+w)]\, d\omega - D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega. \end{aligned}$$

Mithin, nach (C):

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} D_x F = {} & D_t^2 \int\limits_{(t_0 \dots t)} u'\varphi f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ & - D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega. \end{aligned}$$

Da der Abstand der Tangentialebenen in entsprechenden Punkten der beiden Flächen σ_t und σ_{t+dt} nach dem Obigen gleich $\frac{dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$ ist, so kann das Raumelement auch die Form

$$\frac{d\sigma_t\, dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

erhalten. Mithin ist

$$\int\limits_{(t, \dots, t+dt)} F(u, v, w)\, d\omega = \int \frac{F(u, v, w)\, d\sigma_t\, dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}},$$

oder wenn man durch dt dividirt:

$$D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} F(u, v, w)\, d\omega = \int \frac{F(u, v, w)\, d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}.$$

Die Gleichung (B) ergiebt sich durch die bekannte Verwandlung eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral; vgl. z. B. Riemann, Schwere, Electricität und Magnetismus, § 19.

Ebenso findet man:

$$\begin{aligned} D_y F &= D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} v'\varphi f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ &\quad - D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega, \\ D_z F &= D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} w'\varphi f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ &\quad - D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega. \end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich weiter:

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{ \begin{aligned} D_x^2 F &= D_t^3 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} u'u'\varphi . f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ &\quad - D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \left(\frac{\partial u'}{\partial u} \varphi + 2u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) f(x+u, \ldots)\, d\omega + D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ D_y^2 F &= D_t^3 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} v'v'\varphi . f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ &\quad - D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \left(\frac{\partial v'}{\partial v} \varphi + 2v' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) f(x+u, \ldots)\, d\omega + D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ D_z^2 F &= D_t^3 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} w'w'\varphi . f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ &\quad - D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \left(\frac{\partial w'}{\partial w} \varphi + 2w' \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) f(x+u, \ldots)\, d\omega + D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ D_{yz}^2 F &= D_t^3 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} v'w'\varphi . f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ &\quad - D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \left(\varphi \frac{\partial v'}{\partial w} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial w} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) f(x+u, \ldots)\, d\omega + D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\, \partial w} f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ D_{zx}^2 F &= D_t^3 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} w'u'\varphi . f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ &\quad - D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \left(\varphi \frac{\partial w'}{\partial u} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + u' \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) f(x+u, \ldots)\, d\omega + D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w\, \partial u} f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ D_{xy}^2 F &= D_t^3 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} u'v'\varphi . f(x+u, \ldots)\, d\omega \\ &\quad - D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \left(\varphi \frac{\partial u'}{\partial v} + u' \frac{\partial \varphi}{\partial v} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) f(x+u, \ldots)\, d\omega + D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} f(x+u, \ldots)\, d\omega. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet man die Function von u, v, w, welche den zum unbestimmten Punkte (u, v, w) gehörigen Werth von t giebt, mit $\vartheta(u, v, w)$, so ist

$$u' = \frac{\partial \vartheta}{\partial u}, \quad v' = \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \quad w' = \frac{\partial \vartheta}{\partial w},$$

also:

$$\frac{\partial v'}{\partial w} = \frac{\partial w'}{\partial v} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v\, \partial w}, \quad \frac{\partial w'}{\partial u} = \frac{\partial u'}{\partial w} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial w}, \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = \frac{\partial v'}{\partial u} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v}.$$

Aus den Formeln (E), die beliebig fortgesetzt werden können, folgt nun, wenn $A, B, C, \ldots$ Constanten bedeuten,

$$\begin{aligned} & A \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2A' \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z} + 2B' \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial x} + 2C' \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} \\ &= D_t^3 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} P f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega - D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} Q f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ &\quad + D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} R f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega. \end{aligned}$$

Bei der Entwickelung dieser Formeln ist, ausser der in Betreff der Functionen f, φ gemachten Annahme, vorausgesetzt worden, dass die Functionen u', v', w' und deren Ableitungen, so weit dieselben in den Formeln vorkommen, in der Fläche σ sich stetig ändern. Die Formeln lassen sich jedoch auch in manchen Fällen anwenden, wo die hinsichtlich der Functionen φ, u', v', w' gemachten Annahmen in einzelnen Punkten nicht zutreffen.

Bildet man nämlich für verschiedene Functionen φ, die mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ bezeichnet werden mögen, aber für eine und dieselbe Function f die Ausdrücke

$$\begin{aligned} F_1 &= D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \varphi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ F_2 &= D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \varphi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und ist T irgend ein aus partiellen Ableitungen von F_1, F_2 u. s. w. nach x, y, z linear und mit constanten Coefficienten zusammengesetzter Ausdruck, so lässt sich derselbe mittelst der aufgestellten Formeln in der Gestalt

$$\begin{aligned} T &= D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \Phi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ &\quad + D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \Phi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

darstellen, wo $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ Ausdrücke sind, welche aus den Functionen u', v', w', $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ und deren Ableitungen so zusammengesetzt werden, dass auch in dem Falle, wo die letzteren an einzelnen Stellen sich nicht stetig ändern, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ Functionen von u, v, w sein können, welche der im Vorstehenden hinsichtlich der Function φ gemachten Annahme entsprechen. Trifft dieses zu, so ist die angegebene Darstellung von T zulässig.*)

Diese Formeln sollen jetzt angewendet werden auf die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2A'\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z} + 2B'\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial x} + 2C'\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}$$

für den Fall, dass die reellen Coefficienten $A, B, \ldots$ solche Werthe haben, dass die Function

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy$$

bei reellen Werthen von x, y, z stets positiv bleibt und nur dann Null wird, wenn diese Grössen sämmtlich verschwinden.

Das Resultat, in Doppelintegrale verwandelt, stimmt überein mit dem von Cauchy (Journal de l'École Polytechnique, Cah. 20, p. 297—309) und in dem besonderen Falle, wo

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi,$$

mit dem von Poisson in einer Abhandlung in den Mémoires de l'Académie des Sciences gegebenen.

Es sei in diesem Falle die Fläche σ ein Ellipsoid, und die Gleichung desselben

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = 1.$$

Dann ist

$$\vartheta^2 = au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv,$$

*) Ich muss bei dieser Gelegenheit auch bemerken, dass ich in diesem Sommer, nachdem meine Arbeit schon fertig war, durch eine freundliche persönliche Mittheilung von Prof. Kronecker erfahren habe, dass er ähnliche Transformationsformeln für dreifache Integrale, welche auf der Differentiation nach einem Parameter beruhen, von welchem die Begrenzung des Integrales abhängt, bei seinen Untersuchungen über das Potential gebraucht hat. [Anmerkung der Frau v. Kovalevsky.]

und daher

$$\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial u} = au + c'v + b'w, \qquad \vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial v} = c'u + bv + a'w, \qquad \vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial w} = b'u + a'v + cw,$$

welche drei lineare Functionen mit U, V, W bezeichnet werden mögen, und

$$u\frac{\partial\vartheta}{\partial u} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial v} + w\frac{\partial\vartheta}{\partial w} = \vartheta.$$

Daraus folgt, da

$$P = \left[(AU + C'V + B'W)\frac{\partial\vartheta}{\partial u} + (C'U + BV + A'W)\frac{\partial\vartheta}{\partial v} + (B'U + A'V + CW)\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right]\frac{\varphi}{\vartheta}$$

ist, dass man $P = \varphi$ erhält, wenn man a, b, etc. so wählt, dass die Gleichungen

$$AU + C'V + B'W = u, \qquad C'U + BV + A'W = v, \qquad B'U + A'V + CW = w$$

erfüllt werden. Aus denselben folgt aber, wenn man

$$G = ABC - AA'A' - BB'B' - CC'C' + 2A'B'C'$$

setzt:

$$a = \frac{BC - A'A'}{G}, \qquad b = \frac{CA - B'B'}{G}, \qquad c = \frac{AB - C'C'}{G},$$
$$a' = \frac{B'C' - AA'}{G}, \qquad b' = \frac{C'A' - BB'}{G}, \qquad c' = \frac{A'B' - CC'}{G}.$$

Nimmt man nun ferner

$$\varphi = \frac{1}{\vartheta},$$

so hat man

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial u} = -\vartheta^{-3}U,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial v} = -\vartheta^{-3}V,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial w} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial w} = -\vartheta^{-3}W,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = -a\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w} = -a'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial w},$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = -b\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial w\,\partial u} = -b'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial u},$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2} = -c\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = -c'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}.$$

Daraus folgt, mit Berücksichtigung der Gleichung $P = \varphi = \vartheta^{-1}$,

$$R = -(Aa + Bb + Cc + 2A'a' + 2B'b' + 2C'c')\,\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}.$$

Aber es ist

$$\begin{aligned} Aa + C'c' + B'b' &= 1, \\ C'c' + Bb + A'a' &= 1, \\ B'b' + A'a' + Cc &= 1, \end{aligned}$$

und somit

$$R = 0,$$

woraus weiter auch $Q = 0$ folgt.

Wir haben also folgendes Resultat:

Setzt man

$$\begin{aligned} \vartheta^2(u,v,w) = {} & \frac{BC - A'A'}{G}u^2 + \frac{CA - B'B'}{G}v^2 + \frac{AB - C'C'}{G}w^2 \\ & + 2\frac{B'C' - AA'}{G}vw + 2\frac{C'A' - BB'}{G}wu + 2\frac{A'B' - CC'}{G}uv \end{aligned}$$

und

$$F = D_t \iiint\limits_{[\vartheta^2(u,v,w) < t^2]} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw,$$

wo die Integration über alle Punkte des Raumes auszudehnen ist, für welche $\vartheta^2(u,v,w) < t^2$ ist (t_0 ist gleich Null angenommen, was erlaubt ist, da F nicht davon abhängt und das dreifache Integral einen Sinn behält, trotzdem dass für den Punkt O $\vartheta = 0$ ist), so wird der betrachteten partiellen Differentialgleichung genügt, wenn $\psi = F$ genommen wird.

Nach der Gleichung (A) ist

$$D_t \iiint\limits_{[\vartheta^2(u,v,w) < t^2]} \frac{f(x+u,\ldots)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw = \int \frac{f(x+u,\ldots)}{\vartheta\sqrt{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)^2}}\,d\sigma_t = \int \frac{f(x+u,\ldots)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma_t,$$

wo $d\sigma_t$ ein Element der durch die Gleichung

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = t^2$$

dargestellten Fläche bedeutet. Daraus folgt weiter

$$F = \int \frac{tf(x+tu, y+tv, z+tw)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma,$$

wenn man unter $d\sigma$ ein Element der Fläche

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = 1$$

versteht, unter u, v, w die Coordinaten eines zugehörigen Punktes, und die Integration über die ganze Fläche ausdehnt.

Das Vorstehende gilt zunächst unter der Voraussetzung, dass t positiv ist. Es ist aber für einen positiven Werth von t

$$\iiint\limits_{[\vartheta^2(u,v,w) < t^2]} \frac{f(x+u,\ldots)\,du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} = \int_0^t \left(\int \frac{f(x+\tau u, y+\tau v, z+\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma\right)\tau\,d\tau.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hat nun auch eine Bedeutung für negative Werthe von t, bleibt jedoch, wenn $-t$ für t gesetzt wird, unverändert, denn

$$\begin{aligned} & \int_0^{-t} \left(\int \frac{f(x+\tau u, y+\tau v, z+\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma\right)\tau\,d\tau \\ = & \int_0^t \left(\int \frac{f(x-\tau u, y-\tau v, z-\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma\right)\tau\,d\tau. \end{aligned}$$

Für jede Fläche σ aber, welche die Beschaffenheit hat, dass sie von einer durch O gehenden Geraden in zweien, gleichweit von O abliegenden Punkten geschnitten wird, ist bei einer beliebigen Function $f(u,v,w)$

$$\int f(u,v,w)\,d\sigma = \int f(-u,-v,-w)\,d\sigma.$$

Es ist also das dreifache Integral, von dem F die Ableitung nach t ist, eine grade Function von t, F selbst also eine ungrade. Wenn aber die gegebene Differentialgleichung, unter der Voraussetzung dass ψ eine ungrade oder grade Function von t ist, für alle positiven Werthe dieser Grösse besteht, so ist sie auch für alle negativen gültig.

Für $t = 0$ wird $F = 0$, und

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(x,y,z) \int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}.$$

Es ist aber

$$\iiint\limits_{(\vartheta^2 < 1)} \frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} = \int_0^1 \left(\int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\right)\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}.$$

Mithin, wenn man

$$\iiint\limits_{(\vartheta^2<1)} \frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} = \varpi$$

setzt, und

$$\psi = \frac{1}{2\varpi} D_t \iiint\limits_{(\vartheta^2<t^2)} \frac{f(x+u,y+v,z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw,$$

so ist ψ eine Function, die der vorgelegten Differentialgleichung genügt und zu gleicher Zeit für $t=0$ die Bedingungen erfüllt:

$$\psi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(x,y,z).$$

Daraus folgt sofort, dass man die allgemeine Lösung erhält, wenn man eine zweite willkürliche Function $F(x,y,z)$ annimmt, und

$$\psi = \frac{1}{2\varpi} D_t^2 \iiint\limits_{(\vartheta^2<t^2)} \frac{F(x+u,y+v,z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw$$
$$+\frac{1}{2\varpi} D_t \iiint\limits_{(\vartheta^2<t^2)} \frac{f(x+u,y+v,z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw$$

setzt. Denn dann wird für $t=0$

$$\psi = F(x,y,z), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(x,y,z).$$

Führt man an Stelle von u, v, w drei andere Veränderliche p, q, r ein:

$$\begin{aligned} p &= \alpha u + \beta v + \gamma w, \\ q &= \alpha' u + \beta' v + \gamma' w, \\ r &= \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w, \end{aligned}$$

so können die Constanten α, β, etc. so bestimmt werden, dass

$$u^2+v^2+w^2 \quad \text{in} \quad p^2+q^2+r^2$$

und

$$au^2+bv^2+cw^2+2a'vw+2b'wu+2c'uv \quad \text{in} \quad gp^2+hq^2+kr^2$$

übergeht, wo g, h, k positive Constanten sind. Dann hat man

$$\text{für } \frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} \text{ zu setzen } \frac{dp\,dq\,dr}{\sqrt{gp^2+hq^2+kr^2}},$$

und die Integration erstreckt sich über alle Werthe von p, q, r, für welche

$$gp^2+hq^2+kr^2 < t^2$$

ist. Diese erhält man, wenn man

$$p = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\tau\cos\lambda, \qquad q = \frac{1}{\sqrt{h}}\cdot\tau\sin\lambda\cos\mu, \qquad r = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\tau\sin\lambda\sin\mu$$

setzt, und

τ alle Werthe von 0 bis t,
λ alle Werthe von 0 bis π,
μ alle Werthe von 0 bis 2π

beilegt. Dann muss

$$\frac{dp\,dq\,dr}{\sqrt{gp^2+hq^2+kr^2}} \text{ ersetzt werden durch } \frac{\tau\sin\lambda\,d\tau\,d\lambda\,d\mu}{\sqrt{ghk}},$$

wobei zu bemerken, dass $ghk = \frac{1}{G}$ ist. Danach hat man, wenn $\mathbf{X}(u,v,w)$ eine beliebige Function von u, v, w ist,

$$\iiint\limits_{(\vartheta^2<t^2)} \frac{\mathbf{X}(u,v,w)\,du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} = \int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sqrt{G}\,.\,\mathbf{X}(\tau u_1, \tau v_1, \tau w_1)\,\tau\sin\lambda\,d\mu\,d\lambda\,d\tau,$$

wo

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha\frac{\cos\lambda}{\sqrt{g}} + \alpha'\frac{\sin\lambda\cos\mu}{\sqrt{h}} + \alpha''\frac{\sin\lambda\sin\mu}{\sqrt{k}}, \\ v_1 &= \beta\frac{\cos\lambda}{\sqrt{g}} + \beta'\frac{\sin\lambda\cos\mu}{\sqrt{h}} + \beta''\frac{\sin\lambda\sin\mu}{\sqrt{k}}, \\ w_1 &= \gamma\frac{\cos\lambda}{\sqrt{g}} + \gamma'\frac{\sin\lambda\cos\mu}{\sqrt{h}} + \gamma''\frac{\sin\lambda\sin\mu}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Setzt man $\mathbf{X}(u,v,w) = 1$ und $t = 1$, so kommt

$$\varpi = \sqrt{G}\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\tau\sin\lambda\,d\tau\,d\lambda\,d\mu = 2\pi\sqrt{G}.$$

Wir haben also das Resultat:

Es seien $F(x,y,z)$, $f(x,y,z)$ zwei willkürlich angenommene Functionen von x, y, z,

$$G = ABC - AA'A' - BB'B' - CC'C' + 2A'B'C',$$

$$\vartheta^2(u,v,w) = \frac{BC-A'A'}{G}u^2 + \frac{CA-B'B'}{G}v^2 + \frac{AB-C'C'}{G}w^2$$
$$+ 2\frac{B'C'-AA'}{G}vw + 2\frac{C'A'-BB'}{G}wu + 2\frac{A'B'-CC'}{G}uv,$$

$$F(x,y,z,t) = \underset{[\vartheta^2(u,v,w)<t^2]}{\iiint} \frac{F(x+u,y+v,z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw,$$

$$f(x,y,z,t) = \underset{[\vartheta^2(u,v,w)<t^2]}{\iiint} \frac{f(x+u,y+v,z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw.$$

Dann ist

$$\psi = \frac{1}{4\pi\sqrt{G}}\left(\frac{\partial^2 F(x,y,z,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t}\right)$$

eine Function von x, y, z, t, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2A'\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z} + 2B'\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial x} + 2C'\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}$$

genügt und zugleich so beschaffen ist, dass für $t = 0$

$$\psi = F(x,y,z), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(x,y,z)$$

wird.

Dabei müssen aber

$$A,\ AB-C'C',\ G$$

alle drei positiv sein.

Hat man namentlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right),$$

so ist $\sqrt{G} = a^3$,

$$\vartheta(u,v,w) = \frac{1}{a}\sqrt{u^2+v^2+w^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}F(x,y,z,t) = \underset{(u^2+v^2+w^2<a^2t^2)}{\iiint} \frac{F(x+u,y+v,z+w)}{a^2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,du\,dv\,dw,$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}f(x,y,z,t) = \underset{(u^2+v^2+w^2<a^2t^2)}{\iiint} \frac{f(x+u,y+v,z+w)}{a^2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,du\,dv\,dw.$$

Hat die Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

so ist $\sqrt{G} = abc$,

$$\vartheta^2 = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2},$$

also

$$4abc\pi\psi = \frac{\partial^2 F(x,y,z,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t},$$

$$F(x,y,z,t) = \iiint \frac{F(x+u,y+v,z+w)}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}}}\,du\,dv\,dw,$$

$$f(x,y,z,t) = \underset{\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}<t^2\right)}{\iiint} \frac{f(x+u,y+v,z+w)}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}}}\,du\,dv\,dw.$$

Die Integration des folgenden Systems partieller Differentialgleichungen (in denen a, b positive Constanten, t, x, y, z unbeschränkt veränderliche reelle Grössen und ξ, η, ζ zu bestimmende Functionen derselben bedeuten):

$$(\mathrm{F})\quad \left\{\begin{aligned} &[D_t^2 - a^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\xi - (b^2-a^2)\,D_x(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \\ &[D_t^2 - a^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\eta - (b^2-a^2)\,D_y(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \\ &[D_t^2 - a^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\zeta - (b^2-a^2)\,D_z(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \end{aligned}\right.$$

lässt sich zurückführen auf die Integration der Differentialgleichung

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2)f = 0.$$

Zunächst ergiebt sich aus den Regeln, nach denen man die Integration eines solchen Systems partieller Differentialgleichungen auf die einer einzigen mit einer unbekannten Function reducirt, dass man setzen kann:

$$(\mathrm{G})\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= [D_t^2 - b^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\varphi_1 + (b^2-a^2)\,D_x(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3) \\ \eta &= [D_t^2 - b^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\varphi_2 + (b^2-a^2)\,D_y(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3) \\ \zeta &= [D_t^2 - b^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\varphi_3 + (b^2-a^2)\,D_z(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3), \end{aligned}\right.$$

wobei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei Functionen von t, x, y, z bedeuten, von denen jede die folgende Differentialgleichung befriedigt, in der zur Abkürzung

$$\Delta = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

gesetzt ist:

$$\text{(H)} \qquad (D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0.$$

Nun bedeute $f(t, x, y, z)$ oder kürzer $f(t)$ eine Function von t, x, y, z, welche der Gleichung

$$\text{(I)} \qquad (D_t^2 - \Delta) f(t) = 0$$

genügt, und in Beziehung auf t ungrade ist. Ferner sei $\psi(t, x, y, z)$ oder $\psi(t)$ eine in Beziehung auf t ebenfalls ungrade Function, welche die Gleichung

$$D_t^2 \psi(t) = f(t)$$

befriedigt.

Dann hat man

$$(D_t^2 - \Delta) D_t^2 \psi(t) = 0$$

oder

$$D_t^2[(D_t^2 - \Delta)\psi(t)] = 0,$$

woraus, mit Berücksichtigung des Umstandes, dass $(D_t^2 - \Delta)\psi(t)$ eine ungrade Function von t ist,

$$(D_t^2 - \Delta)\psi(t) = \psi_0 . t$$

folgt, wo ψ_0 bloss von x, y, z abhängt.

Setzt man in dieser Gleichung at für t, so ergiebt sich

$$\frac{1}{a^2} D_t^2 \psi(at) - \Delta\psi(at) = \psi_0 . at$$

oder

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\psi(at) = a^3 t . \psi_0,$$

und ebenso

$$(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(bt) = b^3 t . \psi_0.$$

Daher

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(at) = -a^3 b^2 t . \Delta\psi_0,$$

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(bt) = -a^2 b^3 t . \Delta\psi_0,$$

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\left(\frac{1}{a}\psi(at) - \frac{1}{b}\psi(bt)\right) = 0.$$

Setzt man daher

$$\varphi = \frac{\frac{1}{a}\psi(at) - \frac{1}{b}\psi(bt)}{a^2 - b^2},$$

so ergiebt sich

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0,$$

und zugleich hat man für $t = 0$

$$\varphi = 0, \quad D_t\varphi = 0, \quad D_t^2\varphi = 0, \quad D_t^3\varphi = \left(\frac{a^2\psi'''(at) - b^2\psi'''(bt)}{a^2 - b^2}\right)_{t=0} = \psi'''(0) = f'(0),$$

so dass, wenn man $f(t, x, y, z)$ so bestimmt, dass für $t = 0$

$$D_t f(t, x, y, z) = F(x, y, z)$$

wird, φ dasjenige Integral der Gleichung (H) ist, welches für $t = 0$ den Bedingungen genügt

$$\varphi = 0, \qquad D_t\varphi = 0, \qquad D_t^2\varphi = 0, \qquad D_t^3\varphi = F(x, y, z).$$

Dabei ist φ eine ungrade Function von t.

Bestimmt man nun drei solche Functionen $f_1(t, x, y, z)$, $f_2(t, x, y, z)$, $f_3(t, x, y, z)$, welche für f gesetzt der Gleichung (I) genügen und bezeichnet mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Functionen, welche aus diesen so abgeleitet sind, wie hier φ aus f, und substituirt diese in die Gleichungen (G), so erhält man für ξ, η, ζ Ausdrücke, welche den Gleichungen (F) genügen, und zwar so, dass für $t = 0$

$$\begin{aligned} \xi &= 0, & D_t\xi &= f_1'(0, x, y, z), \\ \eta &= 0, & D_t\eta &= f_2'(0, x, y, z), \\ \zeta &= 0, & D_t\zeta &= f_3'(0, x, y, z). \end{aligned}$$

Dabei ist zu bemerken, dass weil

$$\Delta\psi(at) = \frac{1}{a^2} D_t^2\psi(at) - a\psi_0 . t = f(at) - a\psi_0 . t$$

ist, man

$$b^2\Delta\psi(at) = b^2 f(at) - ab^2\psi_0 . t,$$

$$(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(at) = ab^2\psi_0 . t + (a^2 - b^2) f(at)$$

hat, und daher

$$(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = (D_t^2 - b^2\Delta)\frac{\frac{1}{a}\psi(at) - \frac{1}{b}\psi(bt)}{a^2 - b^2} = \frac{(a^2 - b^2)\frac{f(at)}{a} + b^2\psi_0 . t - b^2\psi_0 . t}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a} f(at).$$

Mithin kann man die Gleichungen (G) auch schreiben

$$\xi = \frac{1}{a} f_1(at) - D_x \Big\{ D_x \Big[\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt)\Big] + D_y\Big[\frac{1}{a}\psi_2(at) - \frac{1}{b}\psi_2(bt)\Big]$$
$$+ D_z\Big[\frac{1}{a}\psi_3(at) - \frac{1}{b}\psi_3(bt)\Big]\Big\},$$

$$\eta = \frac{1}{a} f_2(at) - D_y \Big\{ D_x \Big[\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt)\Big] + D_y\Big[\frac{1}{a}\psi_2(at) - \frac{1}{b}\psi_2(bt)\Big]$$
$$+ D_z\Big[\frac{1}{a}\psi_3(at) - \frac{1}{b}\psi_3(bt)\Big]\Big\},$$

$$\zeta = \frac{1}{a} f_3(at) - D_z \Big\{ D_x \Big[\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt)\Big] + D_y\Big[\frac{1}{a}\psi_2(at) - \frac{1}{b}\psi_2(bt)\Big]$$
$$+ D_z\Big[\frac{1}{a}\psi_3(at) - \frac{1}{b}\psi_3(bt)\Big]\Big\}.$$

Es ist ferner

$$\psi_1(t) = \int_0^t (t-\tau) f_1(\tau)\, d\tau + \psi_0^{(1)}.t,$$

$$\psi_2(t) = \int_0^t (t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau + \psi_0^{(2)}.t,$$

$$\psi_3(t) = \int_0^t (t-\tau) f_3(\tau)\, d\tau + \psi_0^{(3)}.t,$$

und daher

$$\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt) = \int_0^{at}\Big(t - \frac{\tau}{a}\Big) f_1(\tau)\, d\tau - \int_0^{bt}\Big(t - \frac{\tau}{b}\Big) f_1(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_0^t (t-\tau)[af_1(at) - bf_1(bt)]\, d\tau$$

etc.

Zur Integration der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0$$

kann man auch folgendermassen gelangen.

Es sei

$$\varphi(t, a)$$

eine Function von t, welche der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\varphi(t, a) = 0$$

genügt, und den Bedingungen, dass für $t = 0$

$$\varphi(t, a) = 0, \qquad D_t\varphi(t, a) = G(x, y, z),$$

wo G eine willkürliche Function von x, y, z ist.

Ebenso sei $\varphi(t, b)$ definirt durch die Gleichung

$$(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi(t, b) = 0$$

und die Bedingung, dass für $t = 0$

$$\varphi(t, b) = 0, \qquad D_t\varphi(t, b) = G(x, y, z).$$

Dann sind $\varphi(t, a)$, $\varphi(t, b)$ beide ungrade Functionen von t. Wenn wir

$$\varphi(t) = \varphi(t, b) - \varphi(t, a)$$

setzen, so genügt $\varphi(t)$ der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0,$$

und man hat für $t = 0$

$$\varphi(t) = 0, \qquad D_t\varphi(t) = 0, \qquad D_t^2\varphi(t) = 0, \qquad D_t^3\varphi(t) = D_t^3\varphi(t, a) - D_t^3\varphi(t, b).$$

Aber

$$D_t^3\varphi(t, a) = a^2\Delta D_t\varphi(t, a)$$

und daher

$$[D_t^3\varphi(t, a)]_{t=0} = a^2\Delta G$$

und ebenso

$$[D_t^3\varphi(t, b)]_{t=0} = b^2\Delta G,$$

also

$$[D_t^3\varphi(t)]_{t=0} = (b^2 - a^2)\Delta G.$$

Bestimmt man daher G so, dass

$$(b^2 - a^2)\Delta G = f(x, y, z),$$

so ist $\varphi(t)$ diejenige der betrachteten Gleichung genügende Function, welche die Bedingungen, dass für $t = 0$

$$\varphi(t) = 0, \qquad D_{\cdot}\varphi(t) = 0, \qquad D_t^2\varphi(t) = 0, \qquad D_t^3\varphi(t) = f$$

sein soll, erfüllt.

Nun aber hat man, wenn

$$D_t^2\varphi(t, a) = \varphi''(t, a), \qquad D_t^2\varphi(t, b) = \varphi''(t, b)$$

gesetzt wird, auch

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\varphi''(t, a) = 0, \qquad (D_t^2 - b^2\Delta)\varphi''(t, b) = 0,$$

und für $t = 0$

$$\varphi''(t, a) = 0, \qquad D_t\varphi''(t, a) = a^2\Delta G = \frac{a^2}{b^2 - a^2} f,$$

$$\varphi''(t, b) = 0, \qquad D_t\varphi''(t, b) = b^2\Delta G = \frac{b^2}{b^2 - a^2} f.$$

Es ist also

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2}\varphi''(t, a)$$

diejenige der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta) F = 0$$

genügende Function, welche die Bedingungen erfüllt, dass für $t = 0$

$$F = 0, \qquad D_t F = f$$

sei. Also

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2}\varphi''(t, a) = \frac{1}{a} f(at)$$

und ebenso

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2}\varphi''(t, b) = \frac{1}{b} f(bt).$$

Daraus folgt

$$\varphi(t, a) = \frac{a}{b^2 - a^2}\int_0\int_0 f(at)\,dt\,dt + tG,$$

$$\varphi(t, b) = \frac{b}{b^2 - a^2}\int_0\int_0 f(bt)\,dt\,dt + tG.$$

Ist nun $\psi(t)$ eine Function von t, deren zweite Ableitung $f(t)$ ist und die für $t = 0$ verschwindet, so hat man

$$D_t^2\psi(at) = a^2 f(at),$$

$$a\int_0\int_0 f(at)\,dt\,dt = \frac{1}{a}\psi(at) - t\psi'(0),$$

wo

$$\psi'(0) = [D_t\psi(t)]_{t=0}.$$

Also

$$\varphi(t, a) = \frac{1}{a(b^2 - a^2)}\psi(at) + t\left[G - \frac{1}{b^2 - a^2}\psi'(0)\right]$$

und

$$\varphi(t) = \frac{1}{b^2 - a^2}\left[\frac{1}{b}\psi(bt) - \frac{1}{a}\psi(at)\right].$$

Die vorstehenden Formeln geben die allgemeinen Integrale der Gleichungen (F) für den Fall, dass ξ, η, ζ für $t = 0$ verschwinden, also jedenfalls auch, wenn ξ, η, ζ ungrade Functionen von t sein sollen. Nimmt man nun drei Ausdrücke von derselben Form, in denen aber f_1, f_2, f_3 durch drei andere Functionen vertreten sind, bildet von diesen die Ableitungen nach t und fügt diese bezüglich zu ξ, η, ζ hinzu, so hat man die allgemeinen Ausdrücke dieser Grössen.

Es ergiebt sich also folgendes Resultat: Man bestimme sechs Functionen

$$f_1(t, x, y, z), \quad f_2(t, x, y, z), \quad f_3(t, x, y, z),$$
$$F_1(t, x, y, z), \quad F_2(t, x, y, z), \quad F_3(t, x, y, z),$$

welche für f gesetzt, der Gleichung

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2) f = 0$$

genügen, und überdies alle für $t = 0$ verschwinden, ferner seien

$$\psi_1(t, x, y, z), \quad \psi_2(t, x, y, z), \quad \psi_3(t, x, y, z),$$
$$\Psi_1(t, x, y, z), \quad \Psi_2(t, x, y, z), \quad \Psi_3(t, x, y, z)$$

diejenigen sechs Functionen, deren zweite Ableitungen nach t beziehlich

$$f_1, \ f_2, \ f_3,$$
$$F_1, \ F_2, \ F_3$$

sind, und welche ebenfalls für $t = 0$ sämmtlich verschwinden. Setzt man dann

$$\psi(t, x, y, z) = D_x\psi_1(t, x, y, z) + D_y\psi_2(t, x, y, z) + D_z\psi_3(t, x, y, z),$$
$$\Psi(t, x, y, z) = D_x\Psi_1(t, x, y, z) + D_y\Psi_2(t, x, y, z) + D_z\Psi_3(t, x, y, z),$$

so sind

$$\left.\begin{matrix}\xi \\ \\ \eta \\ \\ \zeta\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\frac{1}{a} f_1(at) + \frac{1}{a} D_t F_1(at) + D_x \\ \frac{1}{a} f_2(at) + \frac{1}{a} D_t F_2(at) + D_y \\ \frac{1}{a} f_3(at) + \frac{1}{a} D_t F_3(at) + D_z\end{matrix}\right\}\left(\frac{1}{b}\psi(bt) - \frac{1}{a}\psi(at) + \frac{1}{b} D_t\Psi(bt) - \frac{1}{a} D_t\Psi(at)\right)$$

die allgemeinen Integrale der Gleichungen (F).

Hieraus erhält man ferner mit einiger Änderung der Bezeichungen die Integrale der folgenden Differentialgleichungen, in denen

$$\vartheta = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta$$

und P, Q, R gegebene Functionen von t, x, y, z bedeuten:

$$\begin{aligned}(D_t^2 - a^2\Delta)\xi - (b^2-a^2)D_x\vartheta &= P(t,x,y,z),\\ (D_t^2 - a^2\Delta)\eta - (b^2-a^2)D_y\vartheta &= Q(t,x,y,z),\\ (D_t^2 - a^2\Delta)\zeta - (b^2-a^2)D_z\vartheta &= R(t,x,y,z).\end{aligned}$$

Man bestimme sechs Functionen

$$\begin{matrix} F_1(t), & F_2(t), & F_3(t),\\ F_1'(t), & F_2'(t), & F_3'(t)\end{matrix}$$

von t und x, y, z, welche für f gesetzt der Gleichung

$$(D_t^2 - \Delta)F = 0$$

genügen und überdies für $t=0$ sämmtlich verschwinden.

Ferner seien

$$\begin{matrix} \varphi_1(t), & \varphi_2(t), & \varphi_3(t),\\ \varphi_1'(t), & \varphi_2'(t), & \varphi_3'(t)\end{matrix}$$

Functionen, deren zweite Ableitungen nach t den obigen sechs Functionen respective gleich sind und die ebenfalls für $t=0$ alle Null werden. Endlich seien

$$F_1''(t,\tau), \quad F_2''(t,\tau), \quad F_3''(t,\tau)$$

— wo τ eine unbestimmte Grösse bedeutet — drei Functionen, welche ebenfalls der Gleichung

$$(D_t^2 - \Delta)F = 0$$

genügen und überdies so bestimmt sind, dass für $t=0$

$$\begin{matrix} F_1'' = 0, & F_2'' = 0, & F_3'' = 0,\\ D_tF_1'' = P(\tau,x,y,z), & D_tF_2'' = Q(\tau,x,y,z), & D_tF_3'' = R(\tau,x,y,z).\end{matrix}$$

Bezeichnet man dann mit

$$\varphi_1''(t,\tau), \quad \varphi_2''(t,\tau), \quad \varphi_3''(t,\tau)$$

Functionen, deren zweite Ableitungen nach t

$$F_1'', \quad F_2'', \quad F_3''$$

sind, und welche für $t=0$ ebenfalls verschwinden, und setzt:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= D_x\varphi_1(t) + D_y\varphi_2(t) + D_z\varphi_3(t),\\ \varphi'(t) &= D_x\varphi_1'(t) + D_y\varphi_2'(t) + D_z\varphi_3'(t),\\ \varphi''(t,\tau) &= D_x\varphi_1''(t,\tau) + D_y\varphi_2''(t,\tau) + D_z\varphi_3''(t,\tau),\end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}\xi = {} & D_t\left\{\frac{1}{a}F_1(at) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \frac{1}{a}F_1'(at) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right)\\ & + \int_0^t\left\{\frac{1}{a}F_1''(at-a\tau,\tau) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt-b\tau,\tau) - \frac{1}{a}\varphi''(at-a\tau,\tau)\right)\right\}d\tau,\\ \eta = {} & D_t\left\{\frac{1}{a}F_2(at) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \frac{1}{a}F_2'(at) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right)\\ & + \int_0^t\left\{\frac{1}{a}F_2''(at-a\tau,\tau) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt-b\tau,\tau) - \frac{1}{a}\varphi''(at-a\tau,\tau)\right)\right\}d\tau,\\ \zeta = {} & D_t\left\{\frac{1}{a}F_3(at) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \frac{1}{a}F_3'(at) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right)\\ & + \int_0^t\left\{\frac{1}{a}F_3''(at-a\tau,\tau) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt-b\tau,\tau) - \frac{1}{a}\varphi''(at-a\tau,\tau)\right)\right\}d\tau.\end{aligned}$$

Bezeichnet man daher die Functionen, in welche

$$D_tF_1(t), \quad D_tF_2(t), \quad D_tF_3(t); \quad D_tF_1'(t), \quad D_tF_2'(t), \quad D_tF_3'(t)$$

für $t=0$ übergehen, mit

$$f_1(x,y,z), \quad f_2(x,y,z), \quad f_3(x,y,z); \quad f_1'(x,y,z), \quad f_2'(x,y,z), \quad f_3'(x,y,z),$$

so hat man für $t=0$

$$\begin{matrix} \xi = f_1(x,y,z), & \eta = f_2(x,y,z), & \zeta = f_3(x,y,z),\\ D_t\xi = f_1'(x,y,z), & D_t\eta = f_2'(x,y,z), & D_t\zeta = f_3'(x,y,z).\end{matrix}$$

Dabei können bei der Bestimmung der F die f willkürlich angenommen werden.

ANMERKUNG.

Diese im Jahre 1861 verfasste und 1863 der Akademie der Wissenschaften vorgelegte Abhandlung (Monatsberichte S. 86) ist mit Erlaubniss des Verfassers von Frau v. Kovalevsky bei Gelegenheit ihrer Untersuchung „Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln" veröffentlicht worden.

THEORIE DER ABEL'SCHEN FUNCTIONEN.

(Aus der im 52. Bande des Crelle'schen Journals unter gleichem Titel erschienenen Abhandlung.)

Einleitung.

Das Abel'sche Theorem über die hyperelliptischen Integrale bildet die Grundlage für die Theorie einer neuen Gattung analytischer Functionen, die deswegen passend Abel'sche Functionen genannt, und folgendermassen definirt werden können.

Es bedeute

$$R(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2\varrho+1})$$

eine ganze Function $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades von x, wobei angenommen werde, dass unter den Grössen

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_{2\varrho+1}$$

keine zwei gleiche sich finden, während sie im Übrigen beliebige (reelle und imaginäre) Werthe haben können. Ferner seien $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ ϱ unbeschränkt veränderliche Grössen, und zwischen diesen und eben so vielen von ihnen abhängigen $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ die nachstehenden Differential-Gleichungen, in denen

$$P(x) \text{ das Product } (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho)$$

bedeutet, gegeben:

$$\begin{aligned}
du_1 &= \frac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_1}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_1}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_1}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},\\
du_2 &= \frac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_2}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_2}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_2}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
du_\varrho &= \frac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_\varrho}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_\varrho}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_\varrho}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}};
\end{aligned}$$

mit der Bestimmung, dass $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ die Werthe $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ annehmen sollen, wenn $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden.

Alsdann sind $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ als die Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$x^\varrho + P_1 x^{\varrho-1} + P_2 x^{\varrho-2} + \cdots + P_\varrho = 0$$

zu betrachten, wo $P_1, P_2, \dots P_\varrho$ eindeutige analytische Functionen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ bedeuten; während eine zweite ganze Function von x des $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$Q_1 x^{\varrho-1} + Q_2 x^{\varrho-2} + \cdots + Q_\varrho,$$

deren Coefficienten eben solche Functionen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sind, wenn man $x = x_1, x_2, \dots x_\varrho$ setzt, die zugehörigen Werthe von

$$\sqrt{R(x_1)}, \quad \sqrt{R(x_2)}, \quad \dots \quad \sqrt{R(x_\varrho)}$$

giebt.*)

Hiernach ist jeder rational und symmetrisch aus

$$x_1, x_2, \dots x_\varrho \quad \text{und} \quad \sqrt{R(x_1)}, \quad \sqrt{R(x_2)}, \quad \dots \quad \sqrt{R(x_\varrho)}$$

zusammengesetzte Ausdruck als eine eindeutige Function von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ anzusehen. Insbesondere aber zeigt es sich, dass das Product

$$(a_\mathfrak{r} - x_1)(a_\mathfrak{r} - x_2) \dots (a_\mathfrak{r} - x_\varrho),$$

wo $\mathfrak{r}$ eine der Zahlen $1, 2, \dots 2\varrho+1$ bedeutet, das Quadrat einer solchen ist. Betrachtet man demgemäss, indem man

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\varrho)$$

setzt, und unter $h_1, h_2, \dots h_{2\varrho+1}$ Constanten versteht, die Grössen

$$\sqrt{h_1 \varphi(a_1)}, \quad \sqrt{h_2 \varphi(a_2)}, \quad \dots \quad \sqrt{h_{2\varrho+1} \varphi(a_{2\varrho+1})}$$

als Functionen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, so kann man nicht nur aus denselben die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ sind, leicht zusammensetzen, sondern sie zeichnen sich auch gleich den elliptischen $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$, auf welche sie sich für $\varrho = 1$ reduciren, und denen sie überhaupt vollkommen analog sind, durch eine solche Menge merkwürdiger

*) Den ersten Theil dieses Satzes hat bereits Jacobi ausgesprochen, und dadurch den wahren analytischen Charakter der Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ klar gemacht.

und fruchtbarer Eigenschaften aus, dass man ihnen und einer Reihe anderer, im Zusammenhange mit denselben stehenden, vorzugsweise den Namen »Abel'sche Functionen« zu geben berechtigt ist, und sie zum Hauptgegenstande der Betrachtung zu machen aufgefordert wird.

Die nächste Aufgabe, welche sich nun darbietet, betrifft die wirkliche Darstellung der im Vorstehenden definirten Grössen, sowie die Entwicklung ihrer hauptsächlichsten Eigenschaften. Sodann ist es auch erforderlich, das Integral

$$\int \left\{ \frac{F(x_1)\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{F(x_2)\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \cdots + \frac{F(x_\varrho)\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}} \right\},$$

wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeutet, als Function von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ auszudrücken. Beide Probleme finden in der gegenwärtigen Schrift, deren Resultate ich zum Theil schon früher in zwei kleinern Abhandlungen*) bekannt gemacht habe, ihre vollständige Erledigung, und zwar auf einem Wege, welcher von dem für die Abel'schen Functionen zweier Argumente von Göpel und Rosenhain betretenen gänzlich verschieden ist. Die genannten Mathematiker gehen nämlich von unendlichen Reihen aus, die sie aus denen, durch welche Jacobi die elliptischen Functionen auszudrücken gelehrt hat, durch eine von tiefer analytischer Einsicht zeugende Verallgemeinerung erhalten, und zeigen dann, wie sich aus denselben, die zwei veränderliche Grössen u_1, u_2 enthalten, die Coefficienten einer quadratischen Gleichung so zusammensetzen lassen, dass zwischen deren Wurzeln und u_1, u_2 zwei Differential-Gleichungen von der oben aufgestellten Form bestehen. Dagegen war mein Bestreben von Anfang an auf die Auffindung einer Methode gerichtet, die geeignet sei, unmittelbar von den genannten Differential-Gleichungen aus für jeden Werth von ϱ auf einem einfachen, alle Willkürlichkeit ausschliessenden Wege zur Darstellung der Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ als Functionen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ in einer für alle Werthe der letztern gültig bleibenden Form zu führen. Durch weitere Ausbildung eines Verfahrens, dessen ich mich bereits früher zur directen Entwicklung der elliptischen Functionen, ohne Voraussetzung der Multiplications- und Transformations-Formeln, mit gutem Erfolge bedient hatte, gelang es mir, das Ziel, welches

*) S. Programm des Braunsberger Gymnasiums v. J. 1849 und Crelle's Journal Bd. 47 [S. 111 u. S. 113 dieses Bandes].

ich mir gesteckt, vollständig zu erreichen; wo sich denn als schliessliches Resultat meiner Untersuchungen ergab, dass sich sämmtliche Abel'sche Functionen einer bestimmten Ordnung auf eine einzige, in einfacher Form darstellbare Transcendente zurückführen lassen. Damit ist aber für sie dasselbe erreicht, was für die elliptischen Functionen Jacobi gethan hat, und was Lejeune Dirichlet in seiner Gedächtnissrede auf den grossen Mathematiker mit Recht als eine der bedeutendsten Leistungen desselben bezeichnet.

Die vorliegende Arbeit ist unter mancherlei äussern Hemmungen entstanden, die mir nur von Zeit zu Zeit, und oftmals nach langer Unterbrechung, mit derselben mich zu beschäftigen gestatteten. Ohne Zweifel wird man Spuren davon an nicht wenigen Stellen entdecken. Gleichwohl hoffe ich, dass ihr die Sachkundigen auch in der Gestalt, wie ich sie jetzt ihrer Beurtheilung vorlege, nicht ganz ihren Beifall versagen, und wenigstens ein Ergebniss derselben mit Befriedigung aufnehmen werden, die Thatsache nämlich, dass sich die elliptischen und die Abel'schen Functionen nach einer für alle Ordnungen gleich bleibenden und zugleich directen Methode behandeln lassen; und ich trage kein Bedenken, zu gestehen, dass ich auf dieses Resultat meiner Arbeit einigen Werth lege, und es als ein für die Wissenschaft nicht unbedeutendes betrachte.

Erstes Kapitel.

Erklärung der Abel'schen Functionen; Bestimmung der analytischen Form derselben.

§ 1.

Ich beginne mit der Ermittelung der Form, unter welcher der Zusammenhang zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ und $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ dargestellt werden kann. Zuvörderst aber möge, zur Vermeidung von Wiederholungen, hier ein für allemal in Betreff einiger Bezeichnungen, die ich im Verlaufe der ganzen Abhandlung unverändert beibehalten werde, Folgendes festgestellt werden.

Die ersten Buchstaben des deutschen Alphabets, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ sollen, sobald nicht ausdrücklich etwas Anderes bestimmt wird, ausschliesslich Zahlen aus der Reihe

$$1, 2, \ldots \varrho$$

bedeuten, in der Art, dass jeder derselben, wo er in einer Formel vorkommt, unabhängig von den übrigen etwa in ihr sich findenden, sämmtliche dieser Reihe angehörigen Werthe durchlaufen kann. Ein Ausdruck, der einen oder mehrere dieser Buchstaben enthält, repräsentirt demnach, je nachdem die Zahl derselben 1, oder 2, oder 3 u. s. w ist, ϱ, oder ϱ^2, oder ϱ^3 u. s. w. Werthe. Die Summe aller dieser Werthe soll dann ferner durch ein dem Ausdrucke vorgesetztes $\sum$ bezeichnet werden, und zwar in der Regel ohne besondere Andeutung der Buchstaben, auf welche es sich bezieht, was nur in dem Falle nicht unterbleiben darf, wenn ausser denselben noch andere deutsche Buchstaben vorkommen. Hiernach ist z. B.

$$\sum F(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} F(\mathfrak{a})$$

$$\sum F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Dagegen soll

$$\sum_{\mathfrak{a}} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$$

sein; u. s. w.

Kommt es in einem besondern Falle vor, dass bei einer solchen Summation ein Buchstabe von den festgesetzten Werthen irgend einen bestimmten nicht annehmen darf, so soll darauf durch ein dem $\sum$ oben beigefügtes (′) aufmerksam gemacht, und zugleich der auszuschliessende Werth neben der Summenformel angegeben werden; wonach z. B. die Bedeutung der Formel

$$\sum_{\mathfrak{a}}{}' \left(\frac{1}{a_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b}} \right), \quad (\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b})$$

klar ist.

Endlich bemerke ich noch, dass eine Gleichung, die einen, oder zwei u. s. w. der in Rede stehenden deutschen Buchstaben enthält, ein System von ϱ, oder ϱ^2 u. s. w. Gleichungen darstellt; so dass z. B. die in der Einleitung aufgestellten Differential-Gleichungen sämmtlich in der folgenden

$$(1.) \qquad du_\mathfrak{b} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{2} \frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b}} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}$$

enthalten sind.

Dies vorausgeschickt soll nun zunächst gezeigt werden, dass sich $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ bei hinlänglich kleinen Werthen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ nach ganzen positiven Potenzen dieser Grössen in convergirende Reihen entwickeln lassen.

Wenn die Differenz $x-a_\mathfrak{r}$, wo $\mathfrak{r}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots 2\varrho+1$ bezeichnen soll, dem absoluten Betrage*) nach kleiner ist als die Differenz zwischen $a_\mathfrak{r}$ und jeder andern der Grössen $a_1, a_2, \dots a_{2\varrho+1}$ (was durch den Ausdruck »es befinde sich x in der Nähe von $a_\mathfrak{r}$« bezeichnet werden möge), so lässt sich

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}} \text{ durch eine convergirende Reihe von der Form}$$

$$\frac{1}{\sqrt{R'(a_\mathfrak{r})(x-a_\mathfrak{r})}} \cdot \left\{1+(\mathfrak{r})_1(x-a_\mathfrak{r})+(\mathfrak{r})_2(x-a_\mathfrak{r})^2+\cdots\right\}$$

darstellen, wo $R'(x) = \frac{\partial R(x)}{\partial x}$, und $(\mathfrak{r})_1, (\mathfrak{r})_2$, u. s. w. rational aus $a_\mathfrak{r}$ und den Coefficienten von $R(x)$ zusammengesetzte Ausdrücke sind.

Wird daher angenommen, es befinde sich x_1 in der Nähe von a_1, x_2 in der Nähe von a_2 u. s. w., und setzt man,

$$\frac{R(x)}{P(x)} = A_0(x-a_{\varrho+1})\dots(x-a_{2\varrho+1}) \text{ mit } Q(x), \qquad \frac{\partial P(x)}{\partial x} \text{ mit } P'(x)$$

bezeichnend,

$$\text{(2.)} \qquad \sqrt{\frac{P'(a_\mathfrak{a})}{Q(a_\mathfrak{a})}(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{a})} = s_\mathfrak{a},$$

so hat man

$$\frac{1}{2}\,\frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} = ((\mathfrak{a},\mathfrak{b})_0+(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_1 s_\mathfrak{a}^2+(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_2 s_\mathfrak{a}^4+\cdots)\,ds_\mathfrak{a},$$

wo $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_0$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_1$ u. s. w. rationale, aus $a_\mathfrak{a}$, $a_\mathfrak{b}$ und den Coefficienten von $P(x)$, $Q(x)$ zusammengesetzte Ausdrücke bedeuten, und insbesondere

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{a})_0 = 1, \qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{b})_0 = 0, \text{ wenn } \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b},$$

*) Unter dem absoluten Betrage oder Werthe einer complexen (imaginären) Grösse verstehe ich hier den analytischen Modul derselben, wie er sonst genannt wird. Der Umstand, dass das Wort Modul in so verschiedenem Sinne gebraucht wird, und namentlich in der Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen bereits eine feststehende Bedeutung hat, möge die Einführung der vorgeschlagenen Benennung entschuldigen.

ist. Hiernach geben die Gleichungen (1.) durch Integration

$$\text{(3.)} \qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= s_1+\mathrm{S}\left\{\sum_{\mathfrak{n}=1,\dots\infty}\frac{(\mathfrak{a},1)_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1}s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\},\\ u_2 &= s_2+\mathrm{S}\left\{\sum_{\mathfrak{n}=1,\dots\infty}\frac{(\mathfrak{a},2)_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1}s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ u_\varrho &= s_\varrho+\mathrm{S}\left\{\sum_{\mathfrak{n}=1,\dots\infty}\frac{(\mathfrak{a},\varrho)_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1}s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Reihen erhält man dann ferner durch Umkehrung die folgenden, in denen $(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\mathfrak{n}$ eine ganze homogene Function $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Grades von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ bezeichnen soll:

$$\text{(4.)} \qquad \left\{\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\frac{P'(a_1)}{Q(a_1)}(x_1-a_1)} = u_1+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_5+\cdots,\\ s_2 &= \sqrt{\frac{P'(a_2)}{Q(a_2)}(x_2-a_2)} = u_2+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_5+\cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ s_\varrho &= \sqrt{\frac{P'(a_\varrho)}{Q(a_\varrho)}(x_\varrho-a_\varrho)} = u_\varrho+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_5+\cdots.\end{aligned}\right.$$

Ferner, da sich

$$\frac{P(x_\mathfrak{a})}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} \text{ in eine Reihe von der Form}$$

$$s_\mathfrak{a}+(\mathfrak{a})_1 s_\mathfrak{a}^3+(\mathfrak{a})_2 s_\mathfrak{a}^5+\cdots$$

entwickeln lässt,

$$\text{(5.)} \qquad \frac{P(x_\mathfrak{a})}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} = \frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{Q(x_\mathfrak{a})} = u_\mathfrak{a}+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_5+\cdots. \quad (\mathfrak{a}=1,2,\dots\varrho)$$

Die vorstehenden Reihen können nicht für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ convergiren, sondern nur für solche, die gewisse Bedingungen erfüllen. Es ist aber für den gegenwärtigen Zweck nicht erforderlich, diese aufzusuchen; es genügt vielmehr anzunehmen, dass die Reihen (3.) bis (5.) für irgend welche Werthe von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, deren absolute Beträge durch $U_1, U_2, \dots U_\varrho$ bezeichnet werden mögen, sämmtlich convergent seien — wozu man nach einem allgemeinen Satze über die Reihenentwicklungen von Functionen, die algebraischen Differential-Gleichungen genügen, berechtigt ist.*) Dann sind sie es auch unbedingt, sobald man für $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ nur solche Werthe zulässt, die dem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $U_1, U_2, \dots U_\varrho$ sind, und geben unter dieser Voraussetzung

$$x_1,\ x_2,\ \dots\ x_\varrho,\quad \sqrt{R(x_1)},\quad \sqrt{R(x_2)},\quad \dots\quad \sqrt{R(x_\varrho)}$$

als völlig bestimmte, eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$. Wenn man aber die vorstehenden Grössen für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ innerhalb der bezeichneten Grenzen berechnen kann, so ist durch das Abel'sche Theorem die Möglichkeit gegeben, dieses auch für beliebig grosse Werthe der genannten Veränderlichen auszuführen.

§ 2.

Um dieses nachzuweisen, nehme man statt $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ (2μ) Reihen von je ϱ solchen veränderlichen Grössen

$$(1.)\qquad \left\{\begin{array}{llll} u_1', & u_2', & \dots & u_\varrho', \\ u_1'', & u_2'', & \dots & u_\varrho'', \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(2\mu)}, & u_2^{(2\mu)}, & \dots & u_\varrho^{(2\mu)} \end{array}\right.$$

an, die keiner andern Beschränkung unterworfen sein sollen, als dass

$$u_\mathfrak{a}',\quad u_\mathfrak{a}'',\quad \dots\quad u_\mathfrak{a}^{(2\mu)}$$

sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als $U_\mathfrak{a}$ vorausgesetzt werden. Ferner bezeichne man, wenn $\mathfrak{m}$ eine der Zahlen $1, 2, \dots 2\mu$ bedeutet, mit

$$\begin{array}{llll} s_1^{(\mathfrak{m})}, & s_2^{(\mathfrak{m})}, & \dots & s_\varrho^{(\mathfrak{m})}, \\ x_1^{(\mathfrak{m})}, & x_2^{(\mathfrak{m})}, & \dots & x_\varrho^{(\mathfrak{m})}, \\ \sqrt{R(x_1^{(\mathfrak{m})})}, & \sqrt{R(x_2^{(\mathfrak{m})})}, & \dots & \sqrt{R(x_\varrho^{(\mathfrak{m})})} \end{array}$$

die Grössen, welche man für

$$\begin{array}{llll} s_1, & s_2, & \dots & s_\varrho, \\ x_1, & x_2, & \dots & x_\varrho, \\ \sqrt{R(x_1)}, & \sqrt{R(x_2)}, & \dots & \sqrt{R(x_\varrho)} \end{array}$$

*) Vergl. die Abhandlung über die analytischen Facultäten in Crelle's Journal Bd. 51 [S. 75 dieses Bandes].

vermittelst der Reihen (4, 5) des vorhergehenden § erhält, wenn man dort $u_1^{(\mathfrak{m})}, u_2^{(\mathfrak{m})}, \dots u_\varrho^{(\mathfrak{m})}$ an die Stelle von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ setzt. Sodann hat man zwei ganze Functionen $M(x)$, $N(x)$ von der Form

$$(2.)\qquad \left\{\begin{array}{l} M(x) = x^{\mu\varrho} + M_1 x^{\mu\varrho-1} + \cdots + M_{\mu\varrho}, \\ N(x) = \qquad\quad N_1 x^{\mu\varrho-1} + \cdots + N_{\mu\varrho} \end{array}\right.$$

vermittelst der folgenden $(2\mu\varrho)$ Gleichungen

$$(3.)\qquad \left\{\begin{array}{l} M(x_\mathfrak{a}')\,\dfrac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a}')}}{Q(x_\mathfrak{a}')} + N(x_\mathfrak{a}') = 0, \\ M(x_\mathfrak{a}'')\,\dfrac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a}'')}}{Q(x_\mathfrak{a}'')} + N(x_\mathfrak{a}'') = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M(x_\mathfrak{a}^{(2\mu)})\,\dfrac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a}^{(2\mu)})}}{Q(x_\mathfrak{a}^{(2\mu)})} + N(x_\mathfrak{a}^{(2\mu)}) = 0 \end{array}\right. \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \varrho)$$

zu bestimmen, worauf die ganze Function $(2\mu\varrho+\varrho)^{\text{ten}}$ Grades

$$P(x)\,M^2(x) - Q(x)\,N^2(x)$$

für $x = x_1', \dots x_\varrho', x_1'', \dots x_\varrho'', \dots x_1^{(2\mu)}, \dots x_\varrho^{(2\mu)}$ Null wird, und daher durch das Product

$$(x-x_1')\dots(x-x_\varrho')(x-x_1'')\dots(x-x_\varrho'')\dots(x-x_1^{(2\mu)})\dots(x-x_\varrho^{(2\mu)}),$$

welches durch $\Pi(x)$ bezeichnet werden möge, theilbar ist, so dass man

$$(4.)\qquad P(x)\,M^2(x) - Q(x)\,N^2(x) = \Pi(x)\,\varphi(x)$$

setzen kann, wo $\varphi(x)$ eine ganze Function von der Form

$$x^\varrho + P_1 x^{\varrho-1} + P_2 x^{\varrho-2} + \cdots + P_\varrho$$

bedeutet, in der $P_1, P_2, \dots P_\varrho$ rational aus

$$(5.)\qquad \left\{\begin{array}{llll} x_1', & x_2', & \dots & x_\varrho', \\ x_1'', & x_2'', & \dots & x_\varrho'', \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(2\mu)}, & x_2^{(2\mu)}, & \dots & x_\varrho^{(2\mu)}, \end{array}\right. \text{ und } \begin{array}{llll} \sqrt{R(x_1')}, & \sqrt{R(x_2')}, & \dots & \sqrt{R(x_\varrho')}, \\ \sqrt{R(x_1'')}, & \sqrt{R(x_2'')}, & \dots & \sqrt{R(x_\varrho'')}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sqrt{R(x_1^{(2\mu)})}, & \sqrt{R(x_2^{(2\mu)})}, & \dots & \sqrt{R(x_\varrho^{(2\mu)})} \end{array}$$

zusammengesetzt, und daher auch als eindeutige Functionen der Grössen (1.) zu betrachten sind. Bezeichnet man jetzt mit $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ die ϱ Wurzeln der

Gleichung

$$\varphi(x) = 0,$$

so gelten nach dem Abel'schen Theorem die ϱ Gleichungen, die sich aus der nachstehenden

$$(6.)\quad \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{2}\left\{\frac{P(x'_{\mathfrak{a}})}{x'_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}}}\cdot\frac{dx'_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x'_{\mathfrak{a}})}}+\frac{P(x''_{\mathfrak{a}})}{x''_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}}}\cdot\frac{dx''_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x''_{\mathfrak{a}})}}+\cdots\right\} = \sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{2}\,\frac{P(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}}}\cdot\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}$$

ergeben, indem man $\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots \varrho$ setzt, unter der Bedingung, dass man der Wurzelgrösse $\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}$ den durch die Gleichung

$$(7.)\quad \sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})} = \frac{P(x_{\mathfrak{a}})\,M(x_{\mathfrak{a}})}{N(x_{\mathfrak{a}})} = \frac{Q(x_{\mathfrak{a}})\,N(x_{\mathfrak{a}})}{M(x_{\mathfrak{a}})}$$

bestimmten Werth beilege.*) Nun ist aber

$$\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{2}\,\frac{P(x'_{\mathfrak{a}})}{x'_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}}}\cdot\frac{dx'_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x'_{\mathfrak{a}})}} = du'_{\mathfrak{b}},\qquad \sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{2}\,\frac{P(x''_{\mathfrak{a}})}{x''_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}}}\cdot\frac{dx''_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x''_{\mathfrak{a}})}} = du''_{\mathfrak{b}},\quad \text{u. s. w.}$$

Daher

$$(8.)\quad du'_{\mathfrak{b}}+du''_{\mathfrak{b}}+\cdots+du^{(2\mu)}_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{2}\,\frac{P(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}}}\cdot\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}.$$
$$(\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots \varrho)$$

Bevor aber aus diesen Gleichungen weitere Folgerungen gezogen werden, ist es nothwendig, die Zusammensetzungsweise der Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$, $\varphi(x)$ aus den Grössen (5.) oder (1.) einer nähern Betrachtung zu unterwerfen.

§ 3.

Es lässt sich, wenn x in der Nähe von $a_{\mathfrak{a}}$ angenommen und

$$(1.)\quad \sqrt{\frac{P'(a_{\mathfrak{a}})}{Q(a_{\mathfrak{a}})}(x-a_{\mathfrak{a}})} = s,\qquad x = a_{\mathfrak{a}}+\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}s^2$$

gesetzt wird,

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{Q(x)}\quad\text{oder}\quad\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}$$

in eine convergirende Reihe

$$(2.)\quad s+(\mathfrak{a})_1 s^3+(\mathfrak{a})_2 s^5+\cdots$$

*) In Betreff des Beweises dieses Satzes verweise ich auf Abel's Abhandlung: Remarques sur quelques propriétés etc. in Crelle's Journal, Bd. 3, S. 313 und Œuvres complètes, tome I, 288. Einen auf ganz andern Principien beruhenden Beweis des Satzes werde ich später geben.

entwickeln, welche mit $R_{\mathfrak{a}}(s)$ bezeichnet werden möge, so wie auch die Functionen von s, in welche $M(x)$, $N(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ durch die Substitution

$$x = a_{\mathfrak{a}}+\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}s^2$$

übergehen, durch $M_{\mathfrak{a}}(s)$, $N_{\mathfrak{a}}(s)$, $P_{\mathfrak{a}}(s)$, $Q_{\mathfrak{a}}(s)$ angedeutet werden sollen. Ferner setze man

$$(3.)\quad \begin{cases} (s-s'_{\mathfrak{a}})(s-s''_{\mathfrak{a}})\ldots(s-s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}) = \pi_{\mathfrak{a}}(s), \\ M_{\mathfrak{a}}(s)\,R_{\mathfrak{a}}(s)+N_{\mathfrak{a}}(s) = f_{\mathfrak{a}}(s), \end{cases}$$

so kann auch $f_{\mathfrak{a}}(s)$ für jeden Werth von s, der so beschaffen ist, dass der zugehörige Werth von x in der Nähe von $a_{\mathfrak{a}}$ liegt, in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Es ist klar, dass $s'_{\mathfrak{a}}$, $s''_{\mathfrak{a}}$, u. s. w. in Folge der oben in Betreff der Grössen (1, § 2) gemachten Annahme sämmtlich zu diesen Werthen von s gehören.

Angenommen nun, es sei überhaupt $f(s)$ eine Function von s, die sich für alle Werthe dieser Veränderlichen, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ein bestimmter Grenzwerth S sind, durch eine convergirende Reihe von der Form

$$A_0+A_1 s+A_2 s^2+\cdots$$

darstellen lasse, und $\pi(s)$ bedeute eine ganze Function n^{ten} Grades, wobei zugleich angenommen werde, dass die Wurzeln der Gleichung $\pi(s) = 0$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als S seien. Alsdann lässt sich für jeden Werth von s, der seinem absoluten Betrage nach grösser als jede dieser Wurzeln ist,

$$\frac{1}{\pi(s)} = C_0 s^{-n}+C_1 s^{-n-1}+C_2 s^{-n-2}+\cdots = \underset{\mathfrak{m}=0,\ldots\infty}{\mathrm{S}}\left\{C_{\mathfrak{m}} s^{-n-\mathfrak{m}}\right\}$$

setzen (wo $\mathfrak{m}$, so wie überhaupt im Folgenden die Buchstaben $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$, eine ganze Zahl, die alle Werthe zwischen den Grenzen 0 und ∞ annehmen kann, bezeichnet), und man erhält daher, indem man diese Reihe mit der für $f(s)$ multiplicirt, wenn der absolute Werth von s zugleich kleiner als S ist,

$$\frac{f(s)}{\pi(s)} = D_0+D_1 s+D_2 s^2+\cdots$$
$$+E_0 s^{-1}+E_1 s^{-2}+\cdots,$$

welche Reihen-Entwicklung von $\frac{f(s)}{\pi(s)}$ durch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]$$

angedeutet werden möge, so wie durch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{\pm\mathfrak{m}}}$$

der Coefficient von $s^{\pm\mathfrak{m}}$ in derselben. Ist nun

$$\pi(s) = B_0 + B_1 s + \cdots + B_n s^n,$$

so müssen, wenn man die Reihe $\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]$ mit $\pi(s)$ multiplicirt, aus dem Producte alle Glieder mit negativen Potenzen von s fortfallen, und daher

$$B_0 E_{\mathfrak{m}} + B_1 E_{\mathfrak{m}+1} + \cdots + B_n E_{\mathfrak{m}+n} = 0$$

sein, indem der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung der Coefficient von $s^{-\mathfrak{m}-1}$ in dem gedachten Producte ist. Diese Relation lehrt aber, dass die Coefficienten E_0, E_1, u. s. w. sämmtlich gleich Null sind, sobald dies mit den n ersten der Fall ist. Denn da B_n nicht Null ist, so erhellt unmittelbar, dass $E_{\mathfrak{m}+n} = 0$ sein muss, wofern $E_{\mathfrak{m}}$, $E_{\mathfrak{m}+1}$, ... $E_{\mathfrak{m}+n-1}$ sämmtlich verschwinden; woraus, indem man der Reihe nach $\mathfrak{m} = 0, 1, 2,$ u. s. w. setzt, das Behauptete sofort sich ergiebt. Dann hat man

$$\frac{f(s)}{\pi(s)} = D_0 + D_1 s + D_2 s^2 + \cdots,$$

oder

$$f(s) = (B_0 + B_1 s + \cdots)(D_0 + D_1 s + \cdots)$$

für alle Werthe von s innerhalb der bezeichneten Grenzen. Die letztere Gleichung kann aber nicht anders bestehen, als wenn in der Reihe, die aus der Entwicklung des Products auf der rechten Seite hervorgeht, die Coefficienten mit den gleichstelligen von $f(s)$ übereinstimmen. Dann aber gilt sie, und mit ihr auch die vorhergehende, überhaupt für alle Werthe von s, bei denen die Reihen

$$A_0 + A_1 s + \cdots, \qquad D_0 + D_1 s + \cdots$$

beide convergiren. Für die letztere steht dies aber, ihrer Herleitung nach,

fest, wenn der absolute Betrag von s zwischen zwei Grenzen, von denen die obere S ist, enthalten ist; es muss daher für alle Werthe von s, die dem absoluten Betrage nach unter S liegen, der Fall sein. Hiermit ist folgender Hülfssatz bewiesen, der bei mancherlei Untersuchungen mit Nutzen angewandt werden kann:

Wenn die oben näher charakterisirten Functionen $f(s)$, $\pi(s)$ so beschaffen sind, dass man

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-2}} = 0, \quad \ldots \quad \left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-n}} = 0,$$

oder auch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{sf(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \ldots \quad \left[\frac{s^{n-1}f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0$$

hat, so lässt sich der Quotient

$$\frac{f(s)}{\pi(s)}$$

für alle Werthe von s, bei denen die Reihe für $f(s)$ convergirt, ebenfalls durch eine nur ganze positive Potenzen von s enthaltende convergirende Reihe darstellen. Umgekehrt ist dies nicht der Fall, sobald die vorstehenden Bedingungsgleichungen nicht sämmtlich befriedigt werden.

Für die durch die Formeln (3.) definirten Functionen $f_{\mathfrak{a}}(s)$, $\pi_{\mathfrak{a}}(s)$ ist nun, nach dem oben Bemerkten, die Bedingung erfüllt, dass die Wurzeln der Gleichung $\pi_{\mathfrak{a}}(s) = 0$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner sind als der Grenzwerth, unter dem s bleiben muss, damit die Reihe für $f_{\mathfrak{a}}(s)$ unbedingt convergire. Wenn daher die Coefficienten von $M(x)$ und $N(x)$ so bestimmt werden können, dass die folgenden $(2\mu\varrho)$ Gleichungen

$$(4.) \qquad \left[\frac{f_{\mathfrak{a}}(s)}{\pi_{\mathfrak{a}}(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{sf_{\mathfrak{a}}(s)}{\pi_{\mathfrak{a}}(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \ldots \quad \left[\frac{s^{2\mu-1}f_{\mathfrak{a}}(s)}{\pi_{\mathfrak{a}}(s)}\right]_{s^{-1}} = 0,$$
$$(\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots \varrho)$$

befriedigt werden; so hat man für alle Werthe von s, bei denen die Reihe für $f_{\mathfrak{a}}(s)$ convergirt,

$$f_{\mathfrak{a}}(s) = \pi_{\mathfrak{a}}(s)\bar{f}_{\mathfrak{a}}(s),$$

wo $\bar{f}_\mathfrak{a}(s)$ eine als unendliche Reihe von derselben Form wie die für $f_\mathfrak{a}(s)$ darstellbare Function bedeutet. Nun darf man aber in dieser Gleichung $(-s)$ für s setzen, und erhält

$$f_\mathfrak{a}(s) f_\mathfrak{a}(-s) = \pi_\mathfrak{a}(s)\pi_\mathfrak{a}(-s)\bar{f}_\mathfrak{a}(s)\bar{f}_\mathfrak{a}(-s),$$

oder da

$$M_\mathfrak{a}(-s) = M_\mathfrak{a}(s), \qquad N_\mathfrak{a}(-s) = N_\mathfrak{a}(s), \qquad R_\mathfrak{a}(-s) = -R_\mathfrak{a}(s)$$

ist,

$$N_\mathfrak{a}^2(s) - M_\mathfrak{a}^2(s) R_\mathfrak{a}^2(s) = \pi_\mathfrak{a}(s)\pi_\mathfrak{a}(-s)\bar{f}_\mathfrak{a}(s)\bar{f}_\mathfrak{a}(-s),$$

oder auch, indem

$$R_\mathfrak{a}^2(s) = \frac{P_\mathfrak{a}(s)}{Q_\mathfrak{a}(s)}$$

ist, durch Multiplication dieser Gleichung mit $-Q_\mathfrak{a}(s)$,

$$(5.) \qquad P_\mathfrak{a}(s) M_\mathfrak{a}^2(s) - Q_\mathfrak{a}(s) N_\mathfrak{a}^2(s) = \pi_\mathfrak{a}(s)\pi_\mathfrak{a}(-s)\chi_\mathfrak{a}(s),$$

wo

$$\chi_\mathfrak{a}(s) = -Q_\mathfrak{a}(s)\bar{f}_\mathfrak{a}(s)\bar{f}_\mathfrak{a}(-s)$$

gesetzt ist. Nun gehört jeder Werth von s, der $\pi_\mathfrak{a}(s) = 0$ oder $\pi_\mathfrak{a}(-s) = 0$ macht, zu denen, für welche die Reihen-Entwicklungen von $f_\mathfrak{a}(s)$, $f_\mathfrak{a}(-s)$ und somit auch die von $\bar{f}_\mathfrak{a}(s)$, $\bar{f}_\mathfrak{a}(-s)$, $\chi_\mathfrak{a}(s)$ convergiren; es behält daher der Quotient

$$\frac{P_\mathfrak{a}(s) M_\mathfrak{a}^2(s) - Q_\mathfrak{a}(s) N_\mathfrak{a}^2(s)}{\pi_\mathfrak{a}(s)\pi_\mathfrak{a}(-s)}$$

auch dann noch einen endlichen Werth, wenn der Divisor verschwindet; und da Dividendus und Divisor desselben beide ganze Functionen von s^2 sind, so muss der erstere durch den letzteren theilbar, und somit $\chi_\mathfrak{a}(s)$ ebenfalls eine ganze Function von s^2 sein. Daraus folgt denn, dass die Gleichung (5.) für jeden Werth von s besteht. Setzt man nun in derselben

$$\frac{P'(a_\mathfrak{a})}{Q(a_\mathfrak{a})}(x - a_\mathfrak{a}) \text{ für } s^2,$$

so geht der Ausdruck auf der linken Seite in

$$P(x) M^2(x) - Q(x) N^2(x),$$

und

$$\pi_\mathfrak{a}(s)\pi_\mathfrak{a}(-s) = (s^2 - s_\mathfrak{a}'^2)(s^2 - s_\mathfrak{a}''^2)\ldots,$$

abgesehen von einem constanten Factor, in

$$(x - x_\mathfrak{a}')(x - x_\mathfrak{a}'')\ldots(x - x_\mathfrak{a}^{(2\mu)})$$

über, während sich $\chi_\mathfrak{a}(s)$ ebenfalls in eine ganze Function von x verwandelt. Demnach wird, wenn die Gleichungen (4.) sämmtlich bestehen, der Ausdruck

$$P(x) M^2(x) - Q(x) N^2(x) \text{ durch } \Pi(x)$$

theilbar, und es gilt die Gleichung (4.) des § 2. Die Anzahl dieser Gleichungen ist aber $(2\mu\varrho)$, d. h. gleich der Anzahl der Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$, und sie werden daher zur Bestimmung der letzteren hinreichen.

Nun hat die Reihe

$$\left[\frac{1}{\pi_\mathfrak{a}(s)}\right] \text{ die Form}$$

$$(6.) \qquad s^{-2\mu}(1 + \sigma_{\mathfrak{a},1}s^{-1} + \sigma_{\mathfrak{a},2}s^{-2} + \cdots) = \underset{\mathfrak{n}=0,\ldots\infty}{\mathrm{S}}\{\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}s^{-2\mu-\mathfrak{n}}\},$$

wo $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}$ eine ganze homogene und symmetrische Function $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Grades von

$$s_\mathfrak{a}', \quad s_\mathfrak{a}'', \quad \ldots \quad s_\mathfrak{a}^{(2\mu)}$$

bedeutet. Setzt man daher

$$(7.) \qquad f_\mathfrak{a}(s) = F_{\mathfrak{a},0} + F_{\mathfrak{a},1}s + F_{\mathfrak{a},2}s^2 + \cdots = \underset{\mathfrak{m}=0,\ldots\infty}{\mathrm{S}} F_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}}s^\mathfrak{m},$$

wo die Ausdrücke $F_{\mathfrak{a},0}$, $F_{\mathfrak{a},1}$ u. s. w. lineare Functionen von

$$\begin{matrix} M_1, & M_2, & \ldots & M_{\mu\varrho}, \\ N_1, & N_2, & \ldots & N_{\mu\varrho} \end{matrix}$$

sind, mit Coefficienten, die rational aus $a_\mathfrak{a}$ und den Coefficienten von $P(x)$ und $R(x)$ zusammengesetzt werden, so wird

$$(8.) \qquad \left[\frac{s^{2\mu-\mathfrak{p}-1}f_\mathfrak{a}(s)}{\pi_\mathfrak{a}(s)}\right] = \underset{\mathfrak{m}=0,\ldots\infty,\ \mathfrak{n}=0,\ldots\infty}{\mathrm{S}}\{\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}F_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}}s^{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}-\mathfrak{p}-1}\},$$

$$(9.) \qquad \left[\frac{s^{2\mu-\mathfrak{p}-1}f_\mathfrak{a}(s)}{\pi_\mathfrak{a}(s)}\right]_{s^{-1}} = \underset{\mathfrak{n}=0,\ldots\infty}{\mathrm{S}}\{\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}F_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}+\mathfrak{n}}\},$$

und man erhält demnach, indem man $\mathfrak{p} = 0, 1, \ldots 2\mu - 1$ setzt, zur Bestimmung der Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$ die $(2\mu\varrho)$ Gleichungen, welche durch die folgende

$$F_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} + \underset{\mathfrak{n}=1,\ldots\infty}{\mathrm{S}}\{\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}} F_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}+\mathfrak{n}}\} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots \varrho \\ \mathfrak{p} = 0, 1, \ldots 2\mu-1 \end{pmatrix} \tag{10.}$$

repräsentirt werden. Diese kann man durch Zusammenziehung der Glieder, welche dieselbe Unbekannte enthalten, auf die Form

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0 + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1 M_1 + \cdots + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho} M_{\mu\varrho} \\ + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho+1} N_1 + \cdots + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{2\mu\varrho} N_{\mu\varrho} = 0 \end{aligned} \tag{11.}$$

bringen, wo die Ausdrücke $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1$ u. s. w. sämmtlich Reihen von der Form

$$g_0 + g_1 \sigma_{\mathfrak{a},1} + g_2 \sigma_{\mathfrak{a},2} + \cdots$$

sind. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}}$ die Determinante des Systems, welches aus dem folgenden

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\scriptstyle (0)} & {\scriptstyle (1)} & \cdots & {\scriptstyle (2\mu\varrho)} \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{cccc} (1,0)_0 & (1,0)_1 & \cdots & (1,0)_{2\mu\varrho} \\ (1,1)_0 & (1,1)_1 & \cdots & (1,1)_{2\mu\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1,2\mu-1)_0 & (1,2\mu-1)_1 & \cdots & (1,2\mu-1)_{2\mu\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varrho,0)_0 & (\varrho,0)_1 & \cdots & (\varrho,0)_{2\mu\varrho} \\ (\varrho,1)_0 & (\varrho,1)_1 & \cdots & (\varrho,1)_{2\mu\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varrho,2\mu-1)_0 & (\varrho,2\mu-1)_1 & \cdots & (\varrho,2\mu-1)_{2\mu\varrho} \end{array} \right\} \end{array} \tag{12.}$$

dadurch sich ergiebt, dass man die mit $(\mathfrak{m})$ bezeichnete Vertikal-Reihe fortlässt, und zugleich die darauf folgenden, ohne ihre Aufeinanderfolge zu ändern, vor die mit (0) überschriebenen setzt; so erhält man

$$\left\{ \begin{array}{llll} M_1 = \dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_0}, & M_2 = \dfrac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_0}, & \ldots & M_{\mu\varrho} = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho}}{\mathfrak{M}_0}, \\ N_1 = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho+1}}{\mathfrak{M}_0}, & N_2 = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho+2}}{\mathfrak{M}_0}, & \ldots & N_{\mu\varrho} = \dfrac{\mathfrak{M}_{2\mu\varrho}}{\mathfrak{M}_0}, \end{array} \right. \tag{13.}$$

wo $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, u. s. w. als rationale und ganze aus $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1$ u. s. w. gebildete Ausdrücke gleich den letztern nach ganzen positiven Potenzen der

Grössen

$$\left\{ \begin{array}{llll} s'_1, & s'_2, & \ldots & s'_\varrho \\ s''_1, & s''_2, & \ldots & s''_\varrho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^{(2\mu)}_1, & s^{(2\mu)}_2, & \ldots & s^{(2\mu)}_\varrho \end{array} \right. \tag{14.}$$

in convergirende Reihen entwickelt werden können.*) Hier ist es nun von besonderer Wichtigkeit, die Anfangsglieder dieser Reihen, d. h. die Werthe, welche sie annehmen, wenn die Grössen (14.) sämmtlich verschwinden, zu ermitteln. Offenbar erhält man dieselben, die mit

$$\mathring{\mathfrak{M}}_0, \ \mathring{\mathfrak{M}}_1, \ \ldots \ \mathring{\mathfrak{M}}_{2\mu\varrho}$$

bezeichnet werden mögen, wenn man bei der Bildung von $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ u. s. w. die Reihen für $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1$ u. s. w. auf ihre Anfangsglieder reducirt, oder, was dasselbe ist, wenn man die Gleichungen (11.), die mit den unter (10.) aufgestellten identisch sind, durch die folgenden ersetzt:

$$F_{\mathfrak{a},0} = 0, \ F_{\mathfrak{a},1} = 0, \ \ldots \ F_{\mathfrak{a},2\mu-1} = 0, \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{15.}$$

und dann aus den Coefficienten derselben $\mathring{\mathfrak{M}}_0$, $\mathring{\mathfrak{M}}_1$ u. s. w. so zusammensetzt, wie $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ u. s. w. aus den Coefficienten der Gleichungen (11.).

Nun sind aber $F_{\mathfrak{a},0}$, $F_{\mathfrak{a},1}$ u. s. w. die Coefficienten der Reihen-Entwicklung von

$$f_{\mathfrak{a}}(s) = M_{\mathfrak{a}}(s)\, R_{\mathfrak{a}}(s) + N_{\mathfrak{a}}(s),$$

und die Gleichungen (15.) drücken also aus, dass die (2μ) ersten Glieder derselben verschwinden sollen. Dies kann, da $N_{\mathfrak{a}}(s)$ und $M_{\mathfrak{a}}(s)$ gerade Functionen von s sind, $R_{\mathfrak{a}}(s)$ aber eine ungerade, in deren Entwicklung der Coefficient von s^1 nicht Null ist, nur unter der Bedingung geschehen, dass in den Entwicklungen von $M_{\mathfrak{a}}(s)$ und $N_{\mathfrak{a}}(s)$ nach Potenzen von s alle Glieder von einer niedrigern als der $(2\mu)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden. Da aber $M_{\mathfrak{a}}(s)$ und $N_{\mathfrak{a}}(s)$ aus $M(x)$ und $N(x)$ durch die Substitution

$$x = a_{\mathfrak{a}} + \frac{P'(a_{\mathfrak{a}})}{Q(a_{\mathfrak{a}})} s^2$$

*) Vergl. den Satz (5, B, § 7) in der angeführten Abhandlung über die Facultäten.

hervorgehn, so muss man, damit die genannten Glieder Null werden,

$$M(a_{\mathfrak{a}}) = 0,\quad M'(a_{\mathfrak{a}}) = 0,\quad \dots\quad M^{(\mu-1)}(a_{\mathfrak{a}}) = 0,$$
$$N(a_{\mathfrak{a}}) = 0,\quad N'(a_{\mathfrak{a}}) = 0,\quad \dots\quad N^{(\mu-1)}(a_{\mathfrak{a}}) = 0$$

haben, d. h. es müssen $M(x)$, $N(x)$ beide durch $(x-a_{\mathfrak{a}})^{\mu}$ theilbar sein. Hiernach sagen die Gleichungen (15.) aus, es sollen die Coefficienten von $M(x)$ und $N(x)$ so bestimmt werden, dass beide durch

$$(x-a_1)^{\mu}(x-a_2)^{\mu}\dots(x-a_{\varrho})^{\mu} = P^{\mu}(x)$$

theilbar werden. Dies kann aber, da $M(x)$ vom $(\mu\varrho)^{\text{ten}}$, $N(x)$ vom $(\mu\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade, und der Coefficient von $x^{\mu\varrho}$ in $M(x)$ der Einheit gleich sein soll, nicht anders geschehen, als wenn man

$$N_1 = 0,\quad N_2 = 0,\quad \dots\quad N_{\mu\varrho} = 0,$$

und

$$M(x) = P^{\mu}(x)$$

annimmt. Hiernach liefern die Gleichungen (15.) für M_1, N_1, M_2, N_2 u. s. w. völlig bestimmte endliche Werthe. Daraus folgt zunächst, dass $\mathring{\mathfrak{M}}_0$ oder das Anfangsglied von $\mathfrak{M}_0$ nicht Null sein kann, indem, wenn dieses der Fall wäre, die Gleichungen (15.) entweder gar nicht, oder auf mehr als eine Weise befriedigt werden könnten; und daher ergiebt sich

$$\text{(16.)}\qquad \begin{cases} \mathring{\mathfrak{M}}_0 x^{\mu\varrho}+\mathring{\mathfrak{M}}_1 x^{\mu\varrho-1}+\dots+\mathring{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho} = \mathring{\mathfrak{M}}_0 P^{\mu}(x), \\ \mathring{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho+1} = \mathring{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho+2} = \dots = \mathring{\mathfrak{M}}_{2\mu\varrho} = 0. \end{cases}$$

Mithin kann man, wenn man

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{\mathring{\mathfrak{M}}_0} = M_0$$

setzt, $M(x)$ und $N(x)$ auf die Form

$$\text{(17.)}\qquad \begin{cases} M(x) = P^{\mu}(x)+\dfrac{\mathfrak{M}(x)}{M_0}, \\ N(x) = \dfrac{\mathfrak{N}(x)}{M_0} \end{cases}$$

bringen, wo jetzt $\mathfrak{M}(x)$, $\mathfrak{N}(x)$ ganze Functionen des $(\mu\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades von x bedeuten, deren Coefficienten sich gleichwie M_0 nach ganzen positiven Po-

tenzen der Grössen (14.) in convergirende Reihen entwickeln lassen. Dabei reducirt sich M_0 auf die Einheit, wenn diese Grössen sämmtlich den Werth Null annehmen, während die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$ und $\mathfrak{N}(x)$ dann ebenfalls sämmtlich verschwinden.

Hierzu bemerke ich noch Folgendes. Die Formel (7.) lehrt, indem

$$f_{\mathfrak{a}}(s) = M_{\mathfrak{a}}(s)\,R_{\mathfrak{a}}(s)+N_{\mathfrak{a}}(s),$$

und $N_{\mathfrak{a}}(s)$ eine gerade, $M_{\mathfrak{a}}(s)\,R_{\mathfrak{a}}(s)$ eine ungerade Function von s ist, dass für einen geraden Werth von $\mathfrak{m}$

$$F_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}} \text{ die Form } f_1 N_1+f_2 N_2+\dots+f_{\mu\varrho}N_{\mu\varrho},$$

und für einen ungeraden

$$F_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}} \text{ die Form } f_0+f_1 M_1+f_2 M_2+\dots+f_{\mu\varrho}M_{\mu\varrho}$$

hat. Ferner ist $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}$ eine gerade oder ungerade Function von $s'_{\mathfrak{a}}, s''_{\mathfrak{a}}, \dots s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}$ jenachdem $\mathfrak{n}$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Aus der Gleichung (10.) folgt daher, dass

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0,\quad (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1,\quad \dots\ (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho}\quad \text{gerade},$$

und

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho+1},\quad (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho+2},\quad \dots\ (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{2\mu\varrho}\quad \text{ungerade}$$

Functionen der eben genannten Grössen sind, wenn $\mathfrak{p}$ eine ungerade Zahl ist; dass sich dies aber umgekehrt verhält, sobald $\mathfrak{p}$ gerade ist. Es ändert sich also jeder Coefficient der Gleichungen (11.) gar nicht, oder wechselt nur sein Zeichen, wenn man $s'_{\mathfrak{a}}, s''_{\mathfrak{a}}, \dots s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}$ in

$$-s'_{\mathfrak{a}},\quad -s''_{\mathfrak{a}},\quad \dots\quad -s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}$$

verwandelt; und zwar geht dadurch, wenn man mit

$$\bar{\mathfrak{m}} \text{ die Zahl } 0 \text{ oder } 1$$

bezeichnet, je nachdem $\mathfrak{m} \leqq \mu\varrho$ oder $\mathfrak{m} > \mu\varrho$ ist,

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}} \text{ in } (-1)^{\mathfrak{p}-1+\bar{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}}$$

über. Der Ausdruck $\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}}$ ist nun ein Aggregat von Gliedern, deren jedes die Form

$$\pm(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{m}_1}(\mathfrak{a}_2,\mathfrak{p}_2)_{\mathfrak{m}_2}\cdots(\mathfrak{a}_{\lambda},\mathfrak{p}_{\lambda})_{\mathfrak{m}_{\lambda}}$$

hat, wo $\lambda = 2\mu\varrho$ ist und die Reihe der Indices $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots \mathfrak{m}_\lambda$ sämmtliche Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots 2\mu\varrho$ enthält, mit Ausnahme von $\mathfrak{m}$, während für

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{p}_1 \quad \mathfrak{a}_2, \mathfrak{p}_2 \quad \ldots \quad \mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{p}_\lambda$$

die in der folgenden Zusammenstellung enthaltenen Verbindungen zu setzen sind:

$$\begin{array}{cccc} 1,0 & 1,1 & \ldots & 1, 2\mu-1, \\ 2,0 & 2,1 & \ldots & 2, 2\mu-1, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho, 0 & \varrho, 1 & \ldots & \varrho, 2\mu-1. \end{array}$$

Giebt man daher jeder der unter (14.) zusammengestellten Grössen den entgegengesetzten Werth, so erfährt das vorstehende Product dadurch dieselbe Veränderung als wenn es mit

$$(-1)^{\mathfrak{p}_1-1+\mathfrak{p}_2-1+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda-1+\overline{\mathfrak{m}}_1+\overline{\mathfrak{m}}_2+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda}$$

multiplicirt wird. Aber

$$\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda = \varrho(0+1+2+\cdots+(2\mu-1)) = \mu\varrho(2\mu-1),$$
$$\overline{\mathfrak{m}}_1+\overline{\mathfrak{m}}_2+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda = \overline{0}+\overline{1}+\cdots+\overline{(2\mu\varrho)}-\overline{\mathfrak{m}} = \mu\varrho-\overline{\mathfrak{m}},$$

und daher

$$(-1)^{\mathfrak{p}_1-1+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda-1+\overline{\mathfrak{m}}_1+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda} = (-1)^{2\mu\varrho(\mu-1)-\overline{\mathfrak{m}}} = (-1)^{\overline{\mathfrak{m}}}.$$

Man sieht also, dass die Glieder von $\mathfrak{M}_\mathfrak{m}$ nach der Zeichenänderung der Grössen (14.) sämmtlich unverändert bleiben, wenn $\mathfrak{m} \overline{\gtrless} \mu\varrho$, und nur ihr Zeichen wechseln, wenn $\mathfrak{m} > \mu\varrho$; d. h. mit andern Worten, dass

$$\mathfrak{M}_0, \quad \mathfrak{M}_1, \quad \ldots \quad \mathfrak{M}_{\mu\varrho}$$

und somit auch M_0 und die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$ gerade, dagegen die Coefficienten von $\mathfrak{N}(x)$ ungerade Functionen der genannten Grössen sind.

Hierdurch ist nun die Zusammensetzungsweise der Functionen $M(x)$, $N(x)$ für den vorliegenden Zweck hinlänglich festgestellt. Aus denselben kann man ferner die Function $\varphi(x)$ leicht erhalten.

Da der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (4, § 2) durch $\Pi(x)$ theilbar ist, $\Pi(x)$ aber die Form

$$x^{2\mu\varrho}+\mathfrak{P}_1 x^{2\mu\varrho-1}+\cdots+\mathfrak{P}_{2\mu\varrho}$$

hat, wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ u. s. w. ganze Functionen von x_1', x_1'' u. s. w. und somit auch der Quadrate von s_1', s_2'' u. s. w. sind, von denen, nachdem man den gedachten Ausdruck durch $\Pi(x)$ dividirt, in dem Quotienten nur ganze positive Potenzen vorkommen; so sieht man, dass man

$$\varphi(x) = x^\varrho + \frac{P^{(1)}}{M_0^2} x^{\varrho-1} + \frac{P^{(2)}}{M_0^2} x^{\varrho-2} + \cdots + \frac{P^{(\varrho)}}{M_0^2} \tag{18.}$$

erhalten muss, wo $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(\varrho)}$ ganz dieselbe Gestalt haben wie die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$.

Man kann aber dieser Function noch eine andere, sehr bemerkenswerthe Form geben. Setzt man nämlich in der Gleichung (4, § 2)

$$x = a_\mathfrak{a}, \quad a_{\varrho+\mathfrak{a}}, \quad a_{2\varrho+1},$$

so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})} &= \frac{N^2(a_\mathfrak{a})}{\Pi(a_\mathfrak{a})} = \frac{\mathfrak{N}^2(a_\mathfrak{a})}{M_0^2\,\Pi(a_\mathfrak{a})}, \\ \frac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} &= \frac{M^2(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{\Pi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} = \frac{(M_0 P^{\mu}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})+\mathfrak{M}(a_{\varrho+\mathfrak{a}}))^2}{M_0^2\,\Pi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}, \\ \frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})} &= \frac{M^2(a_{2\varrho+1})}{\Pi(a_{2\varrho+1})} = \frac{(M_0 P^{\mu}(a_{2\varrho+1})+\mathfrak{M}(a_{2\varrho+1}))^2}{M_0^2\,\Pi(a_{2\varrho+1})}. \end{aligned}\right. \tag{19.}$$

Nun ist

$$\frac{1}{(a_\mathfrak{a}-x_\mathfrak{a}')(a_\mathfrak{a}-x_\mathfrak{a}'')\ldots(a_\mathfrak{a}-x_\mathfrak{a}^{(2\mu)})} = \left\{\left(\frac{P'(a_\mathfrak{a})}{Q(a_\mathfrak{a})}\right)^{\mu} \cdot \frac{1}{s_\mathfrak{a}' s_\mathfrak{a}'' \ldots s_\mathfrak{a}^{(2\mu)}}\right\}^2,$$

und, wenn $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ verschieden,

$$\frac{1}{(a_\mathfrak{a}-x_\mathfrak{b}')(a_\mathfrak{a}-x_\mathfrak{b}'')\ldots(a_\mathfrak{a}-x_\mathfrak{b}^{(2\mu)})} = \left\{\left(\frac{1}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\right)^{\mu}\left(1-\frac{x_\mathfrak{b}'-a_\mathfrak{b}}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}}\ldots\left(1-\frac{x_\mathfrak{b}^{(2\mu)}-a_\mathfrak{b}}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^2.$$

Aber

$$\left(1-\frac{x_\mathfrak{b}'-a_\mathfrak{b}}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \left(1-\frac{x_\mathfrak{b}''-a_\mathfrak{b}}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ u. s. w.}$$

sind, weil $x_\mathfrak{b}', x_\mathfrak{b}''$ u. s. w. sämmtlich in der Nähe von $a_\mathfrak{b}$ sich befinden, nach ganzen positiven Potenzen von $(x_\mathfrak{b}'-a_\mathfrak{b})$, $(x_\mathfrak{b}''-a_\mathfrak{b})$ u. s. w., und somit auch von $s_\mathfrak{b}'^2, s_\mathfrak{b}''^2$ u. s. w. in convergirende Reihen entwickelbar. Folglich kann man

$$\frac{1}{\Pi(a_\mathfrak{a})} = \frac{1}{Q^{2\mu}(a_\mathfrak{a})}\left(\frac{S_\mathfrak{a}}{s_\mathfrak{a}' s_\mathfrak{a}'' \ldots s_\mathfrak{a}^{(2\mu)}}\right)^2$$

setzen, wo $S_{\mathfrak{a}}$ eine convergirende, nur ganze positive und gerade Potenzen der Grössen (14.) enthaltende Reihe bedeutet. In ähnlicher Weise findet man

$$\frac{1}{\Pi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} = \frac{S^2_{\varrho+\mathfrak{a}}}{P^{2\mu}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}, \qquad \frac{1}{\Pi(a_{2\varrho+1})} = \frac{S^2_{2\varrho+1}}{P^{2\mu}(a_{2\varrho+1})},$$

wo $S_{\varrho+\mathfrak{a}}$, $S_{2\varrho+1}$ Reihen von ähnlicher Gestalt wie $S_{\mathfrak{a}}$ bedeuten.

Aus (19.) ergiebt sich nun

$$\frac{\varphi(a_{\mathfrak{a}})}{-Q(a_{\mathfrak{a}})} = \left(\frac{\mathfrak{N}(a_{\mathfrak{a}})\,S_{\mathfrak{a}}}{Q^{\mu}(a_{\mathfrak{a}})\,s'_{\mathfrak{a}}\dots s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}\,M_0}\right)^2,$$

und aus (18.)

$$\frac{\varphi(a_{\mathfrak{a}})}{-Q(a_{\mathfrak{a}})} = \frac{\varphi^{(\mathfrak{a})}}{M_0^2},$$

wo $\varphi^{(\mathfrak{a})}$ eine nur ganze positive Potenzen von s'_1, s''_1, u. s. w. enthaltende Reihe bezeichnet. Mithin muss

$$\varphi^{(\mathfrak{a})} = \left(\frac{\mathfrak{N}(a_{\mathfrak{a}})\,S_{\mathfrak{a}}}{Q^{\mu}(a_{\mathfrak{a}})\,s'_{\mathfrak{a}}\dots s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}}\right)^2,$$

und daher $\mathfrak{N}(a_{\mathfrak{a}})S_{\mathfrak{a}}$ durch $s'_{\mathfrak{a}}\dots s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}$ theilbar sein. Bemerkt man nun, dass $\mathfrak{N}(a_{\mathfrak{a}})$ eine ungerade, $S_{\mathfrak{a}}$, $(s'_{\mathfrak{a}}\dots s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}})$, M_0, $\mathfrak{M}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})$, $\mathfrak{M}(a_{2\varrho+1})$ aber gerade Functionen der Grössen (14.) sind, so erkennt man, dass man

$$(20.)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\varphi(a_{\mathfrak{a}})}{-Q(a_{\mathfrak{a}})} &= \left\{\frac{S^{(\mathfrak{a})}_1 + S^{(\mathfrak{a})}_3 + \cdots + S^{(\mathfrak{a})}_{2\mathfrak{m}-1} + \cdots}{1 + S^{(0)}_2 + \cdots + S^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}\right\}^2 = \varphi^2_{\mathfrak{a}},\\
\frac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} &= \left\{\frac{S^{(\varrho+\mathfrak{a})}_0 + S^{(\varrho+\mathfrak{a})}_2 + \cdots + S^{(\varrho+\mathfrak{a})}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}{1 + S^{(0)}_2 + \cdots + S^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}\right\}^2 = \varphi^2_{\varrho+\mathfrak{a}},\\
\frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})} &= \left\{\frac{S^{(2\varrho+1)}_0 + S^{(2\varrho+1)}_2 + \cdots + S^{(2\varrho+1)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}{1 + S^{(0)}_2 + \cdots + S^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}\right\}^2 = \varphi^2_{2\varrho+1}
\end{aligned}\right.$$

hat, wo $S^{(x)}_{\mathfrak{m}}$ eine ganze homogene Function $\mathfrak{m}^{\text{ten}}$ Grades der Grössen

$$(21.)\quad \left\{\begin{matrix}
s'_1, & s''_1, & \dots & s^{(2\mu)}_1\\
s'_2, & s''_2, & \dots & s^{(2\mu)}_2\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
s'_{\varrho}, & s''_{\varrho}, & \dots & s^{(2\mu)}_{\varrho}
\end{matrix}\right.$$

bezeichnen soll. Es ist aber

$$(22.)\quad \frac{\varphi(x)}{P(x)} = 1 + \Sigma\,\frac{\varphi(a_{\mathfrak{a}})}{(x-a_{\mathfrak{a}})\,P'(a_{\mathfrak{a}})};$$

und so erhält man

$$(23.)\quad \varphi(x) = P(x) - \Sigma\left\{\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\cdot\frac{P(x)}{x-a_{\mathfrak{a}}}\,\varphi^2_{\mathfrak{a}}\right\}.$$

Drückt man nun die Grössen (21.) durch die folgenden

$$(24.)\quad \left\{\begin{matrix}
u'_1, & u''_1, & \dots & u^{(2\mu)}_1\\
u'_2, & u''_2, & \dots & u^{(2\mu)}_2\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
u'_{\varrho}, & u''_{\varrho}, & \dots & u^{(2\mu)}_{\varrho}
\end{matrix}\right.$$

aus (vermittelst der Formeln (4.) des § 1), so erhält man

$$(25.)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi_{\mathfrak{a}} &= \sqrt{\frac{\varphi(a_{\mathfrak{a}})}{-Q(a_{\mathfrak{a}})}} = \frac{U^{(\mathfrak{a})}_1 + U^{(\mathfrak{a})}_3 + \cdots + U^{(\mathfrak{a})}_{2\mathfrak{m}-1} + \cdots}{1 + U^{(0)}_2 + \cdots + U^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots},\\
\varphi_{\varrho+\mathfrak{a}} &= \sqrt{\frac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}} = \frac{U^{(\varrho+\mathfrak{a})}_0 + U^{(\varrho+\mathfrak{a})}_2 + \cdots + U^{(\varrho+\mathfrak{a})}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}{1 + U^{(0)}_2 + \cdots + U^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots},\\
\varphi_{2\varrho+1} &= \sqrt{\frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}} = \frac{U^{(2\varrho+1)}_0 + U^{(2\varrho+1)}_2 + \cdots + U^{(2\varrho+1)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}{1 + U^{(0)}_2 + \cdots + U^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots},
\end{aligned}\right.$$

$$(26.)\quad \left\{\begin{aligned}
M(x) &= P^{\mu}(x) + \frac{U_2(x) + \cdots + U_{2\mathfrak{m}}(x) + \cdots}{1 + U^{(0)}_2 + \cdots + U^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots},\\
N(x) &= \frac{U_1(x) + \cdots + U_{2\mathfrak{m}+1}(x) + \cdots}{1 + U^{(0)}_2 + \cdots + U^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots},
\end{aligned}\right.$$

wo jetzt $U^{(x)}_{\mathfrak{m}}$, $U_{\mathfrak{m}}(x)$ ganze homogene Functionen $\mathfrak{m}^{\text{ten}}$ Grades der Grössen (24.) sind, die zweite aber zugleich auch eine ganze Function ($(\mu\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades) von x ist, und sämmtliche in diesen Ausdrücken vorkommenden unendlichen Reihen unbedingt convergiren, sobald die absoluten Werthe der genannten Veränderlichen unterhalb der oben für sie festgesetzten Grenzen liegen.*)

---

*) Wenn $F(s_1, s_2, \dots)$ eine Function mehrerer veränderlichen Grössen $s_1, s_2, \dots$ ist, die für alle Werthe derselben, die ihrem absoluten Betrage nach unter gewissen Grenzwerthen $S_1, S_2, \dots$ liegen, durch eine convergirende Reihe von der Form

$$\underset{\mathfrak{n}_1 = 0,\dots\infty,\ \mathfrak{n}_2 = 0,\dots\infty,\ \dots}{S}\left\{A(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \dots)\,s_1^{\mathfrak{n}_1} s_2^{\mathfrak{n}_2}\dots\right\}$$

dargestellt werden kann; und man substituirt für $s_1, s_2, \dots$ ebenso gebildete Potenz-Reihen beliebig vieler anderer Veränderlichen $u_1, u_2, \dots$, und ordnet nach Potenzen dieser letztern; so convergirt die so sich ergebende Reihe, sobald man für die absoluten Werthe von $u_1, u_2, \dots$ solche Grenzen festsetzt, dass nicht nur die Reihen für $s_1, s_2, \dots$ sämmtlich convergent sind, sondern ihre Summen auch zu denjenigen Werthen von $s_1, s_2, \dots$ gehören, für welche die angegebene Darstellung von $F(s_1, s_2, \dots)$ gültig ist.

Dabei kann man bemerken, dass die Coefficienten von $U_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{x})}$ und $U_{\mathfrak{m}}(x)$ aus $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ und den Coefficienten von $Q(x)$ rational zusammengesetzt sind, wie man leicht sieht, wenn man die vorhergehenden Entwicklungen in dieser Beziehung überblickt.

§ 4.

Nachdem nun ermittelt worden, welche Gestalt die Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$, $\varphi(x)$, als Functionen von u_1', u_1'' u. s. w. betrachtet, haben,*) kehre ich zu den Gleichungen (8.) des § 2 zurück.

Wenn die Grössen (1.) des § 2 sämmtlich verschwinden, so reduciren sich, nach den Formeln (25, § 3), $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ ebenfalls sämmtlich auf Null, und daher (nach (23.) desselben §) $\varphi(x)$ auf $P(x)$, sodass alsdann $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ die Werthe $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ erhalten. Man kann daher $x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}$, $\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}$ — die letztere Grösse mit Hülfe der Formel (7, § 2) — bei hinlänglich kleinen Werthen der genannten Veränderlichen nach ganzen positiven Potenzen derselben in Reihen entwickeln, die gleichzeitig mit ihnen verschwinden, und $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ als in der Nähe beziehlich von $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ liegend betrachten. Dann aber führen die Gleichungen (8, § 2), indem man ganz denselben Weg verfolgt wie bei den Entwicklungen des § 1, und wieder

$$\sqrt{\frac{P'(a_\mathfrak{a})}{Q(a_\mathfrak{a})}(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a})} = s_\mathfrak{a}$$

setzt, zu den folgenden:

$$u_\mathfrak{b}' + u_\mathfrak{b}'' + \dots + u_\mathfrak{b}^{(2\mu)} = s_\mathfrak{b} + \mathrm{S}\left\{\sum_\mathfrak{a} \frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1} s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\}_{\mathfrak{n} = 1, \dots \infty} \qquad (\mathfrak{b} = 1, \dots \varrho),$$

$$\frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{Q(x_\mathfrak{a})} = s_\mathfrak{a} + (\mathfrak{a})_2 s_\mathfrak{a}^2 + \cdots,$$

*) Wenn man die in Rede stehenden Grössen direct durch Auflösung der Gleichungen (3, § 2) bestimmen, und in den so sich ergebenden Formeln $x_1', x_1'', \dots, \sqrt{R(x_1')}, \sqrt{R(x_1'')}, \dots$ durch $u_1', u_1'', \dots$ ausdrücken wollte, so würden sie die Gestalt von Brüchen erhalten, bei denen Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden, sobald man in zweien oder mehreren der unter (1, § 2) aufgestellten Reihen die gleichstelligen Glieder einander gleich setzte. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, der sich schon bei Anwendung des Abel'schen Theorems zur Herleitung der sog. Additions-Formeln für die elliptischen Functionen zeigt, ist das im vorhergehenden § auseinandergesetzte, allerdings etwas umständliche Verfahren gewählt worden. Übrigens lassen sich die Gleichungen (3, § 2), auch ohne $\sqrt{R(x_1')}, \sqrt{R(x_1'')}, \dots$ in unendliche Reihen aufzulösen, so umformen, dass derselbe Zweck erreicht wird, was namentlich in dem besonders wichtigen Falle, wo $\mu = 1$ ist, keine Schwierigkeit macht.

und man sieht daher, dass man, unter der Voraussetzung, es seien nicht nur $u_\mathfrak{a}', u_\mathfrak{a}'', \dots u_\mathfrak{a}^{(2\mu)}$, sondern auch $u_\mathfrak{a}' + u_\mathfrak{a}'' + \dots + u_\mathfrak{a}^{(2\mu)}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $U_\mathfrak{a}$, durch Auflösung der Gleichung $\varphi(x) = 0$ und Anwendung der Formel (7, § 2) zu denselben Werthen von $x_1, x_2, \dots x_\varrho$, $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \dots \sqrt{R(x_\varrho)}$ gelangen muss, die man für diese Grössen vermittelst der Formeln (4, 5, § 1) erhält, wenn man in diesen

$$\begin{array}{llll}
u_1' + u_1'' + \dots + u_1^{(2\mu)} & \text{an die Stelle von} & u_1, \\
u_2' + u_2'' + \dots + u_2^{(2\mu)} & \text{- - - -} & u_2, \\
\dots & \dots & \dots \\
u_\varrho' + u_\varrho'' + \dots + u_\varrho^{(2\mu)} & \text{- - - -} & u_\varrho
\end{array}$$

setzt. Aus den soeben angeführten Formeln erhält man ferner

$$(1.)\quad \begin{cases}
\sqrt{\dfrac{(a_\mathfrak{a} - x_1)(a_\mathfrak{a} - x_2)\dots(a_\mathfrak{a} - x_\varrho)}{-Q(a_\mathfrak{a})}} \\
\quad = u_\mathfrak{a} + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3^{(\mathfrak{a})} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}-1}^{(\mathfrak{a})} + \cdots, \\
\sqrt{\dfrac{(a_{\varrho+\mathfrak{a}} - x_1)(a_{\varrho+\mathfrak{a}} - x_2)\dots(a_{\varrho+\mathfrak{a}} - x_\varrho)}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}} \\
\quad = 1 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \cdots, \\
\sqrt{\dfrac{(a_{2\varrho+1} - x_1)(a_{2\varrho+1} - x_2)\dots(a_{2\varrho+1} - x_\varrho)}{P(a_{2\varrho+1})}} \\
\quad = 1 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(2\varrho+1)} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(2\varrho+1)} + \cdots,
\end{cases}$$

wo wieder $(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{x})}$ eine homogene ganze Function $\mathfrak{m}^{\text{ten}}$ Grades von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ bedeutet, deren Coefficienten aus denen von $Q(x)$ und aus $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ rational zusammengesetzt sind. Macht man nun in diesen Ausdrücken die angegebene Substitution, so ersieht man aus der Vergleichung der so hervorgehenden Formeln mit den unter (25.) des vorhergehenden § aufgestellten, wenn man die letztern nach Potenzen von u_1', u_1'', u. s. w. sich entwickelt denkt, dass

$$U_1^{(\mathfrak{a})} = \pm(u_\mathfrak{a}' + u_\mathfrak{a}'' + \dots + u_\mathfrak{a}^{(2\mu)}), \qquad U_0^{(\varrho+\mathfrak{a})} = \pm 1, \qquad U_0^{(2\varrho+1)} = \pm 1$$

sein muss. Setzt man nun fest, es solle jeder der Wurzelgrössen

$$\sqrt{\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})}}, \quad \sqrt{\frac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}}, \quad \sqrt{\frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}}$$

von den beiden Werthen, die sie haben kann, derjenige beigelegt werden, bei dem in den vorstehenden Formeln die obern Zeichen gelten, so sind dieselben jetzt als völlig bestimmte eindeutige Functionen von u_1', u_1'' u. s. w. zu betrachten, welche bei hinlänglich kleinen Werthen dieser Veränderlichen mit den unter (1.) aufgestellten übereinstimmen, wofern man in den letztern

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1' + u_1'' + \cdots + u_1^{(2\mu)}, \\ u_2 &= u_2' + u_2'' + \cdots + u_2^{(2\mu)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_\varrho &= u_\varrho' + u_\varrho'' + \cdots + u_\varrho^{(2\mu)} \end{aligned}$$

setzt.

Angenommen nun, man habe für die absoluten Werthe der veränderlichen Grössen $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ irgend welche Grenzen $T_1, T_2, \dots T_\varrho$, die sie nicht überschreiten sollen, festgestellt, so kann man die Zahl μ so gross annehmen, dass

$$T_1 < 2\mu U_1, \quad T_2 < 2\mu U_2, \quad \dots \quad T_\varrho < 2\mu U_\varrho.$$

Dann darf man

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1'' = \cdots = u_1^{(2\mu)} = \frac{u_1}{2\mu}, \\ u_2' &= u_2'' = \cdots = u_2^{(2\mu)} = \frac{u_2}{2\mu}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\varrho' &= u_\varrho'' = \cdots = u_\varrho^{(2\mu)} = \frac{u_\varrho}{2\mu} \end{aligned}$$

setzen, und es werden, wenn man die Functionen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, in welche dadurch die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (25.) des vorhergehenden § sich verwandeln, mit

$$\varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_1, \quad \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2, \quad \dots \quad \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\varrho+1},$$

oder auch kürzer mit

$$\varphi(u_1, \dots)_1, \quad \varphi(u_1, \dots)_2, \quad \dots \quad \varphi(u_1, \dots)_{2\varrho+1}$$

bezeichnet, dieselben die Gestalt

$$(2.)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\mathfrak{a} &= \frac{u_\mathfrak{a} + \mathfrak{U}_3^{(\mathfrak{a})} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m-1}^{(\mathfrak{a})} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(0)} + \cdots}, \\ \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{\varrho+\mathfrak{a}} &= \frac{1 + \mathfrak{U}_2^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(0)} + \cdots}, \\ \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\varrho+1} &= \frac{1 + \mathfrak{U}_2^{(2\varrho+1)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(2\varrho+1)} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(0)} + \cdots} \end{aligned} \right.$$

haben, in welchen Formeln $\mathfrak{U}_m^{(r)}$ eine ganze homogene Function m[ten] Grades von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ bedeutet, und die unendlichen Reihen, welche den Nenner und die Zähler bilden, für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, die ihrem absoluten Betrage nach die Grenzen $T_1, T_2, \dots T_\varrho$ nicht überschreiten, unbedingt convergent sind. Für hinlänglich kleine Werthe der genannten Veränderlichen lassen sich $\varphi(u_1, \dots)_1, \varphi(u_1, \dots)_2$, u. s. w. nach ganzen positiven Potenzen derselben in convergirende Reihen entwickeln, welche mit den entsprechenden unter (1.) aufgestellten übereinstimmen.

Durch Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x) = 0,$$

wo

$$(3.)\qquad \varphi(x) = P(x) - \Sigma \left\{ \frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{P(x)}{x - a_\mathfrak{a}} \varphi^2(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\mathfrak{a} \right\}$$

ist, und man

$$(4.)\qquad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})}} &= \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\mathfrak{a}, \\ \sqrt{\frac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}} &= \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{\varrho+\mathfrak{a}}, \\ \sqrt{\frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}} &= \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\varrho+1} \end{aligned} \right.$$

hat, ergeben sich sodann ϱ Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$, welche den Differential-Gleichungen

$$(5.)\qquad \left\{ \begin{aligned} du_1 &= \Sigma \frac{1}{2} \frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_1} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}, \\ du_2 &= \Sigma \frac{1}{2} \frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_2} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ du_\varrho &= \Sigma \frac{1}{2} \frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_\varrho} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} \end{aligned} \right.$$

genügen, und zugleich die Werthe $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ annehmen, wenn $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden. Die Werthe, welche die Wurzelgrössen in diesen Gleichungen haben müssen, erhält man ohne Zweideutigkeit, indem man mit

$$M(x, u_1, u_2, \dots u_\varrho), \qquad N(x, u_1, u_2, \dots u_\varrho)$$

die Functionen bezeichnet, in welche die Ausdrücke (26, § 3) durch die angegebene Substitution übergehen, durch die Formel

$$(6.)\qquad \frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{Q(x_\mathfrak{a})} = \frac{N(x_\mathfrak{a}, u_1, u_2, \dots u_\varrho)}{M(x_\mathfrak{a}, u_1, u_2, \dots u_\varrho)} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \varrho).$$

Hierzu ist jetzt noch eine wesentliche Bemerkung zu machen. Der Nenner und die Zähler in den Ausdrücken von

$$\varphi(u_1, \dots)_1, \quad \varphi(u_1, \dots)_2 \quad \text{u. s. w.}$$

hängen, ausser von $u_1, u_2, \dots$, noch von der Zahl μ ab. Gleichwohl lässt sich nachweisen, dass die Werthe dieser Functionen selbst stets dieselben bleiben, welchen Werth man auch dieser Zahl geben möge, wenn derselbe nur gross genug genommen wird, um die in den in Rede stehenden Ausdrücken vorkommenden Reihen convergent zu machen.

Wenn nämlich $F(u_1, u_2, \dots)$, $G(u_1, u_2, \dots)$, $F'(u_1, u_2, \dots)$, $G'(u_1, u_2, \dots)$ eindeutige Functionen mehrerer Veränderlichen $u_1, u_2, \dots$ sind, die sich nach ganzen positiven Potenzen derselben in Reihen entwickeln lassen, und es gilt die Gleichung

$$\frac{F(u_1, u_2, \dots)}{G(u_1, u_2, \dots)} = \frac{F'(u_1, u_2, \dots)}{G'(u_1, u_2, \dots)}$$

für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots$, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als gewisse Grössen sind; so muss sie überhaupt für alle Werthe der genannten Veränderlichen bestehen, bei denen die Reihen für F, G, F', G' sämmtlich convergiren. Denn es folgt aus ihr

$$FG' = GF',$$

und wenn diese Gleichung für beliebige unendlich kleine Werthe von $u_1, u_2, \dots$ richtig sein soll, so müssen die Reihen, in welche FG' und GF' nach ganzen positiven Potenzen dieser Grössen entwickelbar sind, in den gleichstelligen Coefficienten übereinstimmen, woraus denn folgt, dass sie, und mit ihr auch die ursprüngliche

$$\frac{F}{G} = \frac{F'}{G'}$$

gilt, sobald nur $u_1, u_2, \dots$ solche Werthe haben, dass die Entwicklungen von F, G, F', G' sämmtlich convergent sind.

Bezeichnet man nun die Reihen, welche in dem Ausdrucke irgend einer der Functionen $\varphi(u_1, \dots)_1$, $\varphi(u_1, \dots)_2$ u. s. w., bei einem bestimmten Werthe von μ, den Zähler und den Nenner bilden, mit F, G, sowie mit F', G' dieselben Reihen für irgend einen andern Werth von μ, so stimmen, nach dem oben Bemerkten, die Reihen, in welche die Brüche

$$\frac{F}{G}, \quad \frac{F'}{G'}$$

bei hinlänglich kleinen Werthen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ entwickelt werden können, vollständig überein, und es besteht daher die Gleichung

$$\frac{F}{G} = \frac{F'}{G'}$$

jedenfalls für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, deren absolute Beträge kleiner als gewisse Grössen sind, und somit, nach dem soeben Bewiesenen, überhaupt für diejenigen Werthe dieser Veränderlichen, bei denen die Reihen F, G, F', G' alle vier convergiren — wodurch die Richtigkeit des Behaupteten dargethan ist.

In ähnlicher Weise lässt sich ferner zeigen, dass man nach Bestimmung von $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ auch für die Wurzelgrössen $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \dots \sqrt{R(x_\varrho)}$ vermittelst der Formel (6.) stets dieselben Werthe erhalte, welche Zahl μ man auch bei Bildung der Functionen M, N anwenden möge. Es ist aber bemerkenswerth, dass man aus der Function $\varphi(x)$ eine andere vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade und mit Coefficienten von demselben analytischen Charakter wie die von $\varphi(x)$ selbst ableiten kann, welche jene Wurzelgrössen liefert, wenn man $x = x_1, x_2, \dots x_\varrho$ setzt.

Es werde $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \varphi'(x)$ gesetzt, und nachdem man die Gleichung

$$du_\mathfrak{b} = \sum_\mathfrak{c} \frac{1}{2} \frac{P(x_\mathfrak{c})}{x_\mathfrak{c} - a_\mathfrak{b}} \cdot \frac{dx_\mathfrak{c}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{c})}}$$

mit

$$\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b}) P'(a_\mathfrak{b})}$$

multiplicirt, auf beiden Seiten in Beziehung auf $\mathfrak{b}$ summirt. Dies giebt

$$\sum_\mathfrak{b} \frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{du_\mathfrak{b}}{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \frac{1}{2} \frac{\varphi(a_\mathfrak{b}) P(x_\mathfrak{c})}{(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b})(x_\mathfrak{c} - a_\mathfrak{b}) P'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{dx_\mathfrak{c}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{c})}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\varphi(x)}{(x_{\mathfrak{a}}-x)\,P(x)} = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})(x-a_{\mathfrak{b}})\,P'(a_{\mathfrak{b}})},$$

und daher, wenn man $x = x_{\mathfrak{c}}$ setzt,

$$\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{c}}-a_{\mathfrak{b}})(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\,P'(a_{\mathfrak{b}})} = 0, \quad \text{wofern } \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{a},$$

$$\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\,P'(a_{\mathfrak{b}})} = -\frac{\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}{P(x_{\mathfrak{a}})}.$$

Hiernach reducirt sich die rechte Seite der vorhergehenden Differential-Gleichung auf

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}},$$

und man erhält

$$\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}} = -2\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\,P'(a_{\mathfrak{b}})}\,du_{\mathfrak{b}}.$$

Hieraus folgt

$$\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\frac{2\varphi(a_{\mathfrak{b}})\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\,P'(a_{\mathfrak{a}})},$$

$$-\sum_{\mathfrak{b}}\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = 2\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}\cdot\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\,P'(a_{\mathfrak{b}})}.$$

Aber

$$\frac{\varphi(x)}{P(x)} = 1+\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x-a_{\mathfrak{b}})\,P'(a_{\mathfrak{b}})},$$

und daher für $x = x_{\mathfrak{a}}$

$$\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\,P'(a_{\mathfrak{b}})} = -1.$$

Folglich

$$\sum_{\mathfrak{b}}\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = 2\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}.$$

Nun ist, nach dem Vorhergehenden, $\varphi(x)$ eine eindeutige Function von x und $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, und man hat, weil $\varphi(x_{\mathfrak{a}}) = 0$ ist,

$$\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}\right)_{x=x_{\mathfrak{a}}}.$$

Somit giebt die vorhergehende Gleichung, wenn man

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_1}+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_\varrho}\right) = \psi(x) \tag{7.}$$

setzt, wo dann $\psi(x)$ eine ganze Function $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist, deren Coefficienten gleich denen von $\varphi(x)$ eindeutige Functionen der Grössen $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sind,

$$\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})} = -\psi(x_{\mathfrak{a}}) \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \varrho). \tag{8.}$$

Da nun die Werthe der Coefficienten von $\varphi(x)$, die aus den Functionen $\varphi(u_1, \dots)_1, \dots \varphi(u_1, \dots)_\varrho$ zusammengesetzt werden, von μ unabhängig sind, so gilt dasselbe auch hinsichtlich der Coefficienten von $\psi(x)$. Und so ist erwiesen, dass die Werthe der Grössen

$$x_1, \; x_2, \; \dots \; x_\varrho, \quad \sqrt{R(x_1)}, \; \sqrt{R(x_2)}, \; \dots \; \sqrt{R(x_\varrho)},$$

wenn man dieselben vermittelst der im Vorhergehenden entwickelten Formeln berechnet, nur von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, in keinerlei Weise aber von der dabei gebrauchten Zahl μ abhängen.

Die Functionen $\varphi(u_1, \dots)_1, \varphi(u_1, \dots)_2$, u. s. w., auf welche, der vorstehenden Darstellung nach, das Abel'sche Theorem fast mit Nothwendigkeit führt, können durch die Formeln (2.) für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ als vollständig definirt betrachtet werden, indem man, wie auch die letztern angenommen werden mögen, stets μ so gross wählen kann, dass die in den Ausdrücken jener Functionen vorkommenden unendlichen Reihen convergiren. Für $\varrho = 1$ gehen sie, wenn

$$\sqrt{(a_2-a_1)A_0}\,.\,u_1 = u$$

gesetzt wird, in die elliptischen

$$\sin\operatorname{am} u, \qquad \cos\operatorname{am} u, \qquad \Delta\operatorname{am} u$$

über. Aus diesem Grunde mögen sie vorzugsweise »hyperelliptische oder Abel'sche Functionen der Argumente $u_1, u_2, \dots u_\varrho$« genannt werden. Ferner sollen, der letztern Benennung entsprechend, für dieselben von nun an die Bezeichnungen

$$\operatorname{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_1, \quad \operatorname{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2, \quad \dots \quad \operatorname{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\varrho+1},$$

oder auch kürzer

$$\operatorname{al}(u_1, \dots)_1, \quad \operatorname{al}(u_1, \dots)_2, \quad \dots \quad \operatorname{al}(u_1, \dots)_{2\varrho+1}$$

gebraucht werden.*)

*) Die Form, welche ich in der vorliegenden Abhandlung den Abel'schen Functionen gegeben habe, stimmt nicht ganz mit derjenigen überein, in welcher sie in der frühern, im 47sten Bande des Crelle'schen

Durch die bisherigen Entwicklungen ist jetzt das in der Einleitung ausgesprochene, die Form des Abhängigkeitsverhältnisses, welches zwischen den Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ und $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ durch die daselbst aufgestellten Differential-Gleichungen begründet ist, betreffende Theorem strenge erwiesen. Dasselbe möge, in noch bestimmterer Weise gefasst, hier wiederholt und mit einer übersichtlichen Zusammenstellung der wichtigsten Formeln verbunden werden.

Es sei

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} R(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2\varrho+1}), \\ P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho), \qquad \dfrac{\partial P(x)}{\partial x} = P'(x), \\ Q(x) = A_0(x-a_{\varrho+1})(x-a_{\varrho+2})\dots(x-a_{2\varrho+1}), \end{cases}$$

so lassen sich die Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$, welche die Differential-Gleichungen

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} du_1 = \sum \dfrac{1}{2}\, \dfrac{P(x_a)}{x_a - a_1} \cdot \dfrac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}, \\ du_2 = \sum \dfrac{1}{2}\, \dfrac{P(x_a)}{x_a - a_2} \cdot \dfrac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ du_\varrho = \sum \dfrac{1}{2}\, \dfrac{P(x_a)}{x_a - a_\varrho} \cdot \dfrac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \end{cases}$$

befriedigen, und zugleich die Werthe $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ annehmen, wenn $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden, als die Wurzeln einer Gleichung ϱ^{ten} Grades betrachten, welcher man die Form

$$\text{(III.)}\qquad \sum \left\{ \frac{Q(a_a)}{P'(a_a)} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_a}{x - a_a} \right\} = 1$$

geben kann. In dieser bedeuten

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_1, \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2, \quad \dots \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\varrho$$

Journals [S. 133 dieses Bandes] abgedruckten, aufgestellt sind. Die letztere dürfte, an sich betrachtet, einige Vorzüge haben; ich habe sie aber geändert, um den nicht unwesentlichen Vortheil zu erreichen, dass jede Abel'sche Function für $\varrho = 1$ geradezu in eine der elliptischen von der gebräuchlichen Form übergehe — was bei den dortigen $\mathrm{al}(u_1, \dots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \dots)_1$, u. s. w. nicht der Fall ist, indem diese vielmehr für $\varrho = 1$ mit den von Abel in dessen erster Abhandlung über die elliptischen Transcendenten gebrauchten Formen überein kommen — und auf diese Weise die Vergleichung jedes gefundenen Resultats mit einem aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten erleichtert werde.

eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, welche für alle innerhalb irgend eines endlichen Bereichs liegenden Werthe dieser Grössen in der Form

$$\text{(IV.)}\quad \begin{cases} \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_1 = \dfrac{u_1 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3^{(1)} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2m-1}^{(1)} + \dots}{1 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(0)} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2m}^{(0)} + \dots}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\varrho = \dfrac{u_\varrho + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3^{(\varrho)} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2m-1}^{(\varrho)} + \dots}{1 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(0)} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2m}^{(0)} + \dots}, \end{cases}$$

wo durch $(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_m^{(\nu)}$ eine homogene ganze Function m^{ten} Grades bezeichnet wird, dargestellt werden können.

Setzt man ferner

$$\text{(V.)}\qquad (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_\varrho) = \varphi(x),$$

wo denn

$$\text{(VI.)}\qquad \varphi(x) = P(x) - \sum \left\{ \frac{Q(a_a)}{P'(a_a)} \cdot \frac{P(x)}{x - a_a}\, \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_a \right\}$$

und

$$\text{(VII.)}\qquad \sqrt{\frac{\varphi(a_a)}{-Q(a_a)}} = \sqrt{\frac{(a_a - x_1)(a_a - x_2)\dots(a_a - x_\varrho)}{-A_0(a_a - a_{\varrho+1})\dots(a_a - a_{2\varrho+1})}} = \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_a$$

ist, und

$$\text{(VIII.)}\qquad \sum \frac{1}{2}\, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_a} = \psi(x),$$

oder, indem man

$$\text{(IX.)}\qquad \frac{\partial\, \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_a}{\partial u_1} + \dots + \frac{\partial\, \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_a}{\partial u_\varrho} \quad \text{mit} \quad \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_a$$

bezeichnet,

$$\text{(X.)}\qquad \psi(x) = \sum \left\{ \frac{-Q(a_a)}{P'(a_a)} \cdot \frac{P(x)}{x - a_a}\, \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_a\, \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_a \right\},$$

so giebt die Formel

$$\text{(XI.)}\qquad \sqrt{R(x_a)} = -\psi(x_a)$$

nach Bestimmung von $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ diejenigen Werthe der Wurzelgrössen $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \dots \sqrt{R(x_\varrho)}$, welche diesen in den obigen Differential-Gleichungen (II.) beigelegt werden müssen. Weiter hat man

$$
\text{(XII.)}\quad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}} &= \sqrt{\frac{(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_1)(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_2)\dots(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_\varrho)}{(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-a_1)(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-a_2)\dots(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-a_\varrho)}} \\
&= \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{\varrho+\mathfrak{a}}, \\
\sqrt{\frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}} &= \sqrt{\frac{(a_{2\varrho+1}-x_1)(a_{2\varrho+1}-x_2)\dots(a_{2\varrho+1}-x_\varrho)}{(a_{2\varrho+1}-a_1)(a_{2\varrho+1}-a_2)\dots(a_{2\varrho+1}-a_\varrho)}} \\
&= \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\varrho+1},
\end{aligned}\right.
$$

wo $\mathrm{al}(u_1, \dots)_{\varrho+1}, \dots \mathrm{al}(u_1, \dots)_{2\varrho+1}$ Functionen derselben Art wie $\mathrm{al}(u_1, \dots)_1$ u. s. w. sind, die sich in der Form

$$
\text{(XIII.)}\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{\varrho+1} &= \frac{1+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(\varrho+1)}+\dots+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(\varrho+1)}+\dots}{1+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(0)}+\dots+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)}+\dots}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\varrho+1} &= \frac{1+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(2\varrho+1)}+\dots+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(2\varrho+1)}+\dots}{1+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(0)}+\dots+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)}+\dots}
\end{aligned}\right.
$$

darstellen lassen, wo der Nenner derselbe ist wie in den Ausdrücken (IV.).

Diesen Formeln füge ich noch die folgenden hinzu.

Bezeichnet man mit α irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots 2\varrho-1$, und setzt

$$
\text{(XIV.)}\qquad -Q(a_\mathfrak{a}) = l_\mathfrak{a}, \qquad P(a_{\varrho+\mathfrak{a}}) = l_{\varrho+\mathfrak{a}}, \qquad P(a_{2\varrho+1}) = l_{2\varrho+1},
$$

$$
\text{(XV.)}\quad \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha}{\partial u_1}+\dots+\frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha}{\partial u_\varrho} = \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha,
$$

so ist

$$
\text{(XVI.)}\qquad \left\{\begin{aligned}
\varphi(a_\alpha) &= l_\alpha \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha, \\
\psi(a_\alpha) &= l_\alpha \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha,
\end{aligned}\right.
$$

so dass man auch, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho$ ϱ verschiedene Werthe von α sind, und

$$
\text{(XVII.)}\qquad (x-a_{\alpha_1})\dots(x-a_{\alpha_\varrho}) = R_1(x)
$$

gesetzt wird,

$$
\text{(XVIII.)}\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(x) &= R_1(x)+\sum_{\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho}\left\{\frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)}\cdot\frac{R_1(x)}{x-a_\alpha}\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha\right\}, \\
\psi(x) &= \sum_{\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho}\left\{\frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)}\cdot\frac{R_1(x)}{x-a_\alpha}\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha\right\}
\end{aligned}\right.
$$

hat.

Ferner ist, indem

$$
\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \Sigma\frac{\psi(x_\mathfrak{a})}{(x-x_\mathfrak{a})\varphi'(x_\mathfrak{a})}, \quad \text{wo } \varphi'(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x},
$$

in Folge von (X.), (XVI.)

$$
\text{(XIX.)}\qquad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \Sigma\frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a}-x)\varphi'(x_\mathfrak{a})},
$$

$$
\text{(XX.)}\qquad \frac{\overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha}{\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha} = \Sigma\frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a}-a_\alpha)\varphi'(x_\mathfrak{a})}.
$$

Nun ist oben bei Herleitung der Gleichung (8.) gefunden worden

$$
\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_\mathfrak{b}}\right)_{x=x_\mathfrak{a}} = -\varphi'(x_\mathfrak{a})\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial u_\mathfrak{b}} = \frac{2\varphi(a_\mathfrak{b})\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})} = -\frac{2\varphi(a_\mathfrak{b})\psi(x_\mathfrak{a})}{(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})},
$$

woraus man schliesst, dass für jeden Werth von x

$$
\text{(XXI.)}\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_\mathfrak{b}} = \frac{\psi(a_\mathfrak{b})\varphi(x)-\varphi(a_\mathfrak{b})\psi(x)}{(x-a_\mathfrak{b})P'(a_\mathfrak{b})}
$$

ist, indem die beiden einander gleichgesetzten Ausdrücke ganze Functionen $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades von x sind, welche für ϱ Werthe dieser Grösse, $x_1, x_2, \dots x_\varrho$, der vorstehenden Formel gemäss übereinstimmen, also identisch sein müssen. Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die durch (XIX.) gegebenen Ausdrücke von $\psi(a_\mathfrak{b})$ und $\psi(x)$ substituirt,

$$
\text{(XXII.)}\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_\mathfrak{b}} = -\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})\varphi(x)}{P'(a_\mathfrak{b})}\sum_\mathfrak{a}\left\{\frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a}-x)(x_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b})\varphi'(x_\mathfrak{a})}\right\}.
$$

Ferner, wenn man $x = a_\alpha$ setzt,

$$
\text{(XXIII.)}\quad \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha}{\mathrm{al}(u_1, \dots)_\mathfrak{b}\,\partial u_\mathfrak{b}} = \frac{-Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\cdot\frac{\mathrm{al}(u_1, \dots)_\alpha\overline{\mathrm{al}}(u_1, \dots)_\mathfrak{b}-\mathrm{al}(u_1, \dots)_\mathfrak{b}\overline{\mathrm{al}}(u_1, \dots)_\alpha}{a_\alpha-a_\mathfrak{b}},
$$

vorausgesetzt, dass α von $\mathfrak{b}$ verschieden sei; oder wenn man, unter der Annahme, dass $\beta \lesseqgtr \alpha$,

$$
\text{(XXIV.)}\quad \frac{\mathrm{al}(u_1, \dots)_\alpha\overline{\mathrm{al}}(u_1, \dots)_\beta-\mathrm{al}(u_1, \dots)_\beta\overline{\mathrm{al}}(u_1, \dots)_\alpha}{a_\alpha-a_\beta} \text{ durch } \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{\alpha\beta}
$$

bezeichnet, wo denn zufolge (XX.)

$$
\text{(XXV.)}\quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{\alpha\beta} = -\Sigma\left\{\frac{\mathrm{al}(u_1, \dots)_\alpha\,\mathrm{al}(u_1, \dots)_\beta\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a}-a_\alpha)(x_\mathfrak{a}-a_\beta)\varphi'(x_\mathfrak{a})}\right\}
$$

ist, und man

$$\text{(XXVI.)}\qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{\alpha\beta} = \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{\beta\alpha}$$

hat:

$$\text{(XXVII.)}\qquad \frac{\partial\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha}{\partial u_\mathfrak{b}} = -\frac{Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\mathfrak{b}\, \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha\beta}, \qquad (\mathfrak{b} \lesseqgtr \alpha)$$

aus welcher Gleichung, wenn man $\alpha = \mathfrak{a}$ setzt und auf beiden Seiten mit $\frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})}\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\mathfrak{a}$ multiplicirt, noch

$$\text{(XXVIII.)}\qquad \frac{\partial\left(\frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})}\, \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_\mathfrak{a}\right)}{\partial u_\mathfrak{b}} = \frac{\partial\left(\frac{Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\, \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_\mathfrak{b}\right)}{\partial u_\mathfrak{a}}$$

folgt.

Die in dem Vorstehenden eingeführten Functionen

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha, \quad \overline{\mathrm{al}}(u_1, \ldots)_\alpha, \quad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha\beta}$$

können (nach den Formeln (XVI.), (XX.), (XXIV.)) sämmtlich algebraisch durch $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ ausgedrückt werden; es müssen daher unter ihnen so viele algebraische Relationen bestehen, als Functionen vorhanden sind, weniger ϱ. Diese sollen in dem folgenden § entwickelt und zusammengestellt werden.

§ 5.

Algebraische Relationen unter den Abel'schen Functionen und deren ersten Differential-Coefficienten.

Es werde der Kürze wegen

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = p_\alpha, \quad \overline{\mathrm{al}}(u_1, \ldots)_\alpha = \bar{p}_\alpha, \quad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}$$

gesetzt; dann gelten folgende Sätze.

I. Durch je ϱ von den Quadraten der Grössen p_α können die übrigen linear ausgedrückt werden.

Aus der Formel (XVIII.) des vorhergehenden § folgt nämlich, wenn man $x = a_\beta$ setzt, und β nicht unter den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho$ begriffen ist, mit Berücksichtigung von (XVI.):

$$\frac{l_\beta}{R_1(a_\beta)} \cdot p_\beta^2 = 1 - \sum_{\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho} \left\{ \frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} \cdot \frac{p_\alpha^2}{a_\alpha - a_\beta} \right\}.$$

II. Ebenso können durch je ϱ von den Grössen

$$p_\gamma^2, \quad p_{1\gamma}^2, \quad p_{2\gamma}^2, \quad \ldots \quad p_{(2\varrho+1)\gamma}^2$$

(wo $p_{\gamma\gamma}$ fortzulassen ist) die übrigen linear ausgedrückt werden, vermittelst der Formeln

$$\begin{aligned} A_0 p_\gamma^2 &= \frac{R'(a_\gamma)}{l_\gamma R_1(a_\gamma)} - \sum_\alpha \left\{ \frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}^2 \right\}, \\ \frac{(a_\gamma - a_\beta)\, l_\beta}{R_1(a_\beta)} p_{\beta\gamma}^2 &= A_0 p_\gamma^2 + \sum_\alpha \left\{ \frac{a_\gamma - a_\alpha}{a_\beta - a_\alpha} \cdot \frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}^2 \right\} \\ &= \frac{R'(a_\gamma)}{l_\gamma R_1(a_\gamma)} + \sum_\alpha \left\{ \frac{a_\gamma - a_\beta}{a_\beta - a_\alpha} \cdot \frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}^2 \right\}, \end{aligned}$$

in denen sich das Summenzeichen auf dieselben Werthe von α bezieht wie in (I.), und γ sowohl als β nicht unter diesen begriffen sein darf.

In Folge der Gleichung

$$\psi(x_\mathfrak{a}) = -\sqrt{R(x_\mathfrak{a})} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots \varrho)$$

wird die Function $R(x) - \psi^2(x)$ für $x = x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ gleich Null, und ist daher durch $\varphi(x)$ theilbar. Setzt man nun

$$\psi_\gamma(x) = \frac{\bar{p}_\gamma \varphi(x) - p_\gamma \psi(x)}{x - a_\gamma},$$

so wird der Zähler dieses Ausdruckes für $x = a_\gamma$ (zufolge der Formel (XVI.) des vorhergehenden §) gleich Null, und es ist somit $\psi_\gamma(x)$ eine ganze Function $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades. Dann hat man

$$p_\gamma^2 R(x) - (x - a_\gamma)^2 \psi_\gamma^2(x) = p_\gamma^2 (R(x) - \psi^2(x)) + \bar{p}_\gamma \varphi(x) (2 p_\gamma \psi(x) - \bar{p}_\gamma \varphi(x)),$$

und es ist also der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ebenfalls durch $\varphi(x)$ theilbar, wie auch durch $x - a_\gamma$, so dass man setzen kann

$$p_\gamma^2 \frac{R(x)}{x - a_\gamma} - (x - a_\gamma) \psi_\gamma^2(x) = \varphi(x) \varphi_\gamma(x),$$

und dann $\varphi_\gamma(x)$ eine ganze Function ϱ^{ten} Grades bedeutet. Nimmt man nun $x = a_\alpha$, $\alpha \gtrless \gamma$ vorausgesetzt, so ergiebt sich (zufolge Formel (XVI.) d. v. §)

$$\varphi_\gamma(a_\alpha) = (a_\gamma - a_\alpha)\, l_\alpha p_{\alpha\gamma}^2,$$

indem

$$\psi_\gamma(a_\alpha) = l_\alpha p_\alpha p_{\alpha\gamma}$$

ist. Ferner erhält man für $x = a_\gamma$

$$\varphi_\gamma(a_\gamma) = \frac{R'(a_\gamma)}{l_\gamma}.$$

Bemerkt man nun noch, dass der Coefficient des höchsten Gliedes von $\varphi_\gamma(x)$ gleich $A_0 p_\gamma^2$ ist, und man daher

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_\gamma(x)}{R_1(x)} &= A_0 p_\gamma^2 + \sum_\alpha \frac{\varphi_\gamma(a_\alpha)}{(x-a_\alpha)\,R_1'(a_\alpha)} \\ &= A_0 p_\gamma^2 + \sum_\alpha \frac{a_\gamma - a_\alpha}{x-a_\alpha}\cdot\frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)}\, p_{\alpha\gamma}^2\end{aligned}$$

hat, so ergeben sich die zu beweisenden Relationen, indem man $x = a_\gamma$ und $x = a_\beta$ setzt.

III. Ähnliche Relationen finden statt unter den in der Reihe

$$p_1 p_{1\gamma},\quad p_2 p_{2\gamma},\quad \ldots\quad p_{2\varrho+1} p_{(2\varrho+1)\gamma}$$

enthaltenen Producten.

Setzt man nämlich in der Gleichung

$$\frac{\psi_\gamma(x)}{R_1(x)} = \sum_\alpha \frac{\psi_\gamma(a_\alpha)}{(x-a_\alpha)\,R_1'(a_\alpha)} = \sum_\alpha \frac{l_\alpha p_\alpha p_{\alpha\gamma}}{(x-a_\alpha)\,R_1'(a_\alpha)}$$

$x = a_\beta$, so ergiebt sich

$$\frac{l_\beta}{R_1(a_\beta)}\, p_\beta p_{\beta\gamma} = \sum_\alpha \frac{l_\alpha p_\alpha p_{\alpha\gamma}}{(a_\beta - a_\alpha)\,R_1'(a_\alpha)},$$

wo hinsichtlich der Zahlen α, β, γ dasselbe gilt wie bei der vorhergehenden Nr.

IV. Unter je sechs Functionen $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, p_{\beta\gamma}, p_{\gamma\alpha}, p_{\alpha\beta}$, wo α, β, γ verschiedene Werthe haben müssen, findet die Relation

$$(a_\beta - a_\gamma)\,p_\alpha p_{\beta\gamma} + (a_\gamma - a_\alpha)\,p_\beta p_{\gamma\alpha} + (a_\alpha - a_\beta)\,p_\gamma p_{\alpha\beta} = 0$$

oder

$$p_{\alpha\beta} = \frac{(a_\gamma - a_\beta)\,p_\alpha p_{\beta\gamma} - (a_\gamma - a_\alpha)\,p_\beta p_{\alpha\gamma}}{(a_\alpha - a_\beta)\,p_\gamma}$$

statt.

Denn es ist (vermöge Formel (XXIV.) des v. §)

$$\begin{aligned}\frac{(a_\alpha - a_\beta)\,p_{\alpha\beta}}{p_\alpha p_\beta} &= \frac{\bar p_\beta}{p_\beta} - \frac{\bar p_\alpha}{p_\alpha}, \\ \frac{(a_\beta - a_\gamma)\,p_{\beta\gamma}}{p_\beta p_\gamma} &= \frac{\bar p_\gamma}{p_\gamma} - \frac{\bar p_\beta}{p_\beta}, \\ \frac{(a_\gamma - a_\alpha)\,p_{\gamma\alpha}}{p_\gamma p_\alpha} &= \frac{\bar p_\alpha}{p_\alpha} - \frac{\bar p_\gamma}{p_\gamma},\end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen, wenn man sie durch Addition verbindet, die aufgestellte Relation sofort folgt.

V. Endlich ergeben sich noch folgende Gleichungen, in denen $\mathfrak{a}'$ irgend eine der Zahlen $\varrho+1, \varrho+2, \ldots 2\varrho+1$ bedeuten soll:

$$\bar p_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial p_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = (a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{a}})\,p_{\mathfrak{a}'} p_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} + \sum_{\mathfrak{b}}{}' \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})} \cdot \frac{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}}{a_{\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{a}'}}\, p_{\mathfrak{b}} p_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \right\},$$
$$(\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a})$$

$$\frac{\partial p_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} = (a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{a}})\,p_{\mathfrak{a}'} p_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} + \sum_{\mathfrak{b}}{}' \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})} \cdot \frac{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{a}'}}\, p_{\mathfrak{b}} p_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \right\},$$
$$(\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a})$$

$$\bar p_{\mathfrak{a}'} = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial p_{\mathfrak{a}'}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ \frac{-Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\, p_{\mathfrak{b}} p_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}} \right\}.$$

Man hat nämlich (Formel (XXVII.) d. v. §)

$$\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\, p_{\mathfrak{b}} p_{\alpha\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{b} \gtrless \alpha).$$

Hieraus folgt, wenn man $\alpha = \mathfrak{a}'$ setzt, sofort die dritte der vorstehenden Gleichungen. Aus (VI.) aber folgt, wenn man $x = a_{\mathfrak{a}'}$ nimmt und $\mathfrak{b}$ statt $\mathfrak{a}$ schreibt,

$$p_{\mathfrak{a}'}^2 = 1 - \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})} \cdot \frac{p_{\mathfrak{b}}^2}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{b}}} \right\},$$

und hieraus, wenn man nach $u_{\mathfrak{a}}$ differentiirt,

$$p_{\mathfrak{a}'} p_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} = \frac{\dfrac{\partial p_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{a}}} - \sum_{\mathfrak{b}}{}' \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})} \cdot \frac{p_{\mathfrak{b}} p_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{b}}} \right\}, \qquad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a})$$

woraus sich die zweite Gleichung ergiebt, aus der dann weiter die erste folgt.

VI. Von den vorstehenden Relationen mögen nun die folgenden besonders hervorgehoben werden, in denen der Kürze wegen

$$2\varrho+1 \text{ durch } \mathfrak{a}_0, \qquad \varrho+\mathfrak{a} \text{ durch } \mathfrak{a}', \qquad \varrho+\mathfrak{b} \text{ durch } \mathfrak{b}'$$

bezeichnet ist.

$$(1.)\qquad \mathrm{al}^2(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0} = 1-\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}}}\right\},$$

$$(2.)\qquad \mathrm{al}^2(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}'} = 1-\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{a}}}\right\},$$

$$(3.)\qquad A_0\,\mathrm{al}^2(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0} = \frac{Q'(a_{\mathfrak{a}_0})}{P(a_{\mathfrak{a}_0})}+\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\,\mathrm{al}^2(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}\right\},$$

$$(4.)\qquad (a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}'})\,\mathrm{al}^2(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'} = A_0\,\mathrm{al}^2(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}-\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{a}}}\cdot\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\,\mathrm{al}^2(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}\right\}$$
$$= \frac{Q'(a_{\mathfrak{a}_0})}{P(a_{\mathfrak{a}_0})}-\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{a}}}\cdot\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\,\mathrm{al}^2(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}\right\},$$

$$(5.)\qquad \mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}'}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'} = \sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\cdot\frac{\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{a}'}}\right\},$$

$$(6.)\qquad \mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$$
$$= \frac{(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{b}})\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}}-(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}})\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}}},$$

$$(7.)\qquad \mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}}$$
$$= \frac{(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{b}})\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}'}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}}-(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}'})\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{b}}},$$

$$(8.)\qquad \mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}$$
$$= \frac{(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{b}'})\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}'}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}'}-(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}'})\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{b}'}},$$

$$(9.)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} &= -\frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}, \qquad (\mathfrak{b}\gtrless\mathfrak{a})\\
\frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} &= -\frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}},\\
\frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}'}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} &= -\frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}},\\
\frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} &= (a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}})\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}\\
&\quad -\sum_{\mathfrak{b}}{}'\left\{\frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\cdot\frac{a_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{a}_0}}{a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{b}}}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right\}.\\
&\qquad (\mathfrak{b}\gtrless\mathfrak{a})
\end{aligned}\right.$$

Von diesen Gleichungen gehen Nr. (1.), (2.), (3.), (4.), (5.) aus (I.), (II.), (III.) hervor, wenn man in diesen $R_1(x) = P(x)$ setzt; Nr. (6.), (7.), (8.) sind die Relationen (IV.), wenn man $\gamma = \mathfrak{a}_0$ nimmt, und die unter Nr. (9.) finden sich unter (XXVII.) des v. § und (V.). Sie stellen, wie man sofort übersieht, so viel Relationen unter den Functionen $\mathrm{al}(u_1,\dots)_\alpha$, $\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\alpha\beta}$ und den ersten Differential-Coefficienten von $\mathrm{al}(u_1,\dots)_\alpha$ dar, als nöthig sind, um alle diese Grössen algebraisch durch

$$\mathrm{al}(u_1,\dots)_1,\quad \mathrm{al}(u_1,\dots)_2,\quad \dots\quad \mathrm{al}(u_1,\dots)_\varrho$$

(an deren Stelle je ϱ andere der Functionen $\mathrm{al}(u_1,\dots)_\alpha$ treten könnten) auszudrücken, ohne dass in den betreffenden Formeln die Argumente $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ selbst vorkommen; woraus unmittelbar weiter folgt, dass auch die höheren Differential-Coefficienten der Abel'schen Functionen algebraisch durch je ϱ der letztern ausdrückbar sein werden.

§ 6.

Die Abel'schen Integral-Functionen.

Das Integral

$$\int\left\{\frac{F(x_1)\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{F(x_2)\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}+\dots+\frac{F(x_\varrho)\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}}\right\},$$

wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeuten soll, geht, wenn man $x_1, x_2, \dots x_\varrho$, $\sqrt{R(x_1)}$, $\sqrt{R(x_2)}$, $\dots$ $\sqrt{R(x_\varrho)}$ vermittelst der Formeln des § 4 durch $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ ausdrückt, in eine Function dieser Argumente über, welche man eine »Abel'sche Integral-Function« derselben nennen kann, und deren analytischer Charakter jetzt näher untersucht werden soll.

Man kann, wie weiter unten wird nachgewiesen werden, jede in der vorstehenden Formel enthaltene Function auf eine einzige zurückführen, die mit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) \text{ oder kürzer } \mathfrak{A}\mathfrak{l}(u_1,\dots)$$

bezeichnet werden soll, und durch die folgende Gleichung

$$(1.)\qquad d\,\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = \sum \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}}-a}\cdot\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}$$

definirt wird, mit der näheren Bestimmung, dass $\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u_1,\dots)$ den Werth Null erhalte, wenn $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden. Die Constante a kann jeden beliebigen Werth haben, mit Ausnahme von $a_1, a_2, \dots a_{2\varrho+1}$, und auch das Zeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{R(a)}$ willkürlich bestimmt werden. Ist es nöthig, a in die Bezeichnung der erklärten Function mit aufzunehmen, so soll dieselbe $\mathfrak{Al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho; a)$ geschrieben werden.

Nimmt man zunächst die Grössen $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ so klein an, dass nicht nur $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ in der Nähe von $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ sich befinden, und dieselben daher, so wie $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \dots \sqrt{R(x_\varrho)}$, durch die unendlichen Reihen (4.), (5.) des § 1 ausgedrückt werden können, sondern auch die Differenzen $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2, \dots x_\varrho - a_\varrho$ dem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $a - a_1$, $a - a_2, \dots a - a_\varrho$ sind; so erhält man, indem

$$\frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a} = \frac{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}{x_\mathfrak{a} - a} \cdot \frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}{x_\mathfrak{a} - a} &= \frac{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}{a_\mathfrak{a} - a} \left\{ 1 + \left(\frac{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}{a - a_\mathfrak{a}} \right) + \left(\frac{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}{a - a_\mathfrak{a}} \right)^2 + \cdots \right\} \\ &= \frac{Q(a_\mathfrak{a}) \, . \, s_\mathfrak{a}^2}{(a_\mathfrak{a} - a) P'(a_\mathfrak{a})} \left\{ 1 + \mathrm{S} \left(\frac{Q(a_\mathfrak{a})}{(a - a_\mathfrak{a}) P'(a_\mathfrak{a})} \right)^\mathfrak{m} \cdot s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{m}} \right\}, \\ &\qquad \mathfrak{m} = 1, \dots \infty \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} = (1 + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a})_1 s_\mathfrak{a}^2 + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a})_2 s_\mathfrak{a}^4 + \cdots) \, ds_\mathfrak{a}$$

(§ 1.) ist:

$$\begin{aligned} (2.) \qquad \mathfrak{Al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) &= \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \{ \mathfrak{S}_3 + \mathfrak{S}_5 + \cdots + \mathfrak{S}_{2\mathfrak{m}+1} + \cdots \} \\ &= \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \{ \mathfrak{U}_3 + \mathfrak{U}_5 + \cdots + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1} + \cdots \}, \end{aligned}$$

wo durch $\mathfrak{S}_{2\mathfrak{m}+1}$ eine homogene ganze Function $(2\mathfrak{m}+1)^{\text{ten}}$ Grades von s_1, $s_2, \dots s_\varrho$ und durch $\mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1}$ eine eben solche von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ bezeichnet wird. Die Coefficienten von $\mathfrak{S}_{2\mathfrak{m}+1}$, $\mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1}$ werden rational aus $a, a_1, a_2, \dots a_\varrho$ und den Coefficienten von $Q(x)$ zusammengesetzt; nach fallenden Potenzen von a entwickelt, fangen $\mathfrak{S}_{2\mathfrak{m}+1}$, $\mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1}$ mit Gliedern an, die mit $a^{-\mathfrak{m}}$ multiplicirt sind.

Nun aber findet, wenn man jetzt wieder unter

$$\begin{matrix} u'_\mathfrak{a}, & u''_\mathfrak{a}, & \dots & u_\mathfrak{a}^{(2\mu)} \\ x'_\mathfrak{a}, & x''_\mathfrak{a}, & \dots & x_\mathfrak{a}^{(2\mu)} \\ \sqrt{R(x'_\mathfrak{a})}, & \sqrt{R(x''_\mathfrak{a})}, & \dots & \sqrt{R(x_\mathfrak{a}^{(2\mu)})} \\ M(x), & N(x), & \varphi(x) & \\ x_\mathfrak{a}, & \sqrt{R(x_\mathfrak{a})} & & \end{matrix}$$

dieselben Grössen versteht wie in § 2, nach dem Abel'schen Theoreme nicht bloss die dort unter (6.) aufgestellte Gleichung statt, sondern auch die folgende

$$\begin{aligned} (3.) \qquad & \sum_\mathfrak{a} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x'_\mathfrak{a})}{x'_\mathfrak{a} - a} \cdot \frac{dx'_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x'_\mathfrak{a})}} + \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x''_\mathfrak{a})}{x''_\mathfrak{a} - a} \cdot \frac{dx''_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x''_\mathfrak{a})}} + \cdots \right\} \\ &= \sum_\mathfrak{a} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} \right\} + \frac{1}{2} d \log \left(\frac{M(a) P(a) + N(a) \sqrt{R(a)}}{M(a) P(a) - N(a) \sqrt{R(a)}} \right). \end{aligned}$$

Werden daher

$$u_1^{(\mathfrak{p})}, \quad u_2^{(\mathfrak{p})}, \quad \dots \quad u_\varrho^{(\mathfrak{p})},$$

wo $\mathfrak{p}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots 2\mu$ bezeichnet, so klein angenommen, dass die Reihen auf der rechten Seite der Gleichung (2.), wenn man darin diese Grössen an die Stelle von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ setzt, convergiren, so hat man

$$\begin{aligned} (4.) \qquad & \sum \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} \right\} \\ &= d\mathfrak{Al}(u'_1, \dots) + d\mathfrak{Al}(u''_1, \dots) + \cdots + \frac{1}{2} d \log \left(\frac{M(a) P(a) - N(a) \sqrt{R(a)}}{M(a) P(a) + N(a) \sqrt{R(a)}} \right). \end{aligned}$$

Jetzt setze man, wie in § 4,

$$u'_\mathfrak{a} = u''_\mathfrak{a} = \cdots = u_\mathfrak{a}^{(2\mu)} = \frac{u_\mathfrak{a}}{2\mu},$$

und nehme μ so gross an, dass nicht nur die unendlichen Reihen, welche in den dortigen Ausdrücken von $\mathrm{al}(u_1, \dots)_1$, $\mathrm{al}(u_1, \dots)_2$ u. s. w. und von $M(x, u_1, \dots)$, $N(x, u_1, \dots)$ vorkommen, convergent werden, sondern auch die für $\mathfrak{Al}\left(\frac{u_1}{2\mu}, \cdots\right)$; so verwandeln sich die Grössen

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_\varrho, \quad \sqrt{R(x_1)}, \quad \sqrt{R(x_2)}, \quad \dots \quad \sqrt{R(x_\varrho)}$$

der Gleichung (4.) in die durch die Gleichungen (III.), (XI.) des genannten §

bestimmten; und es ergiebt sich durch Integration

$$(5.)\quad \mathfrak{Al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = 2\mu\,\mathfrak{Al}\left(\frac{u_1}{2\mu}, \frac{u_2}{2\mu}, \cdots \frac{u_\varrho}{2\mu}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{M(a, u_1, u_2, \dots u_\varrho)\,P(a) - N(a, u_1, u_2, \dots u_\varrho)\sqrt{R(a)}}{M(a, u_1, u_2, \dots u_\varrho)\,P(a) + N(a, u_1, u_2, \dots u_\varrho)\sqrt{R(a)}}\right).$$

Eine Constante ist nach der Integration nicht hinzuzufügen, indem die Function, deren Logarithmus in dieser Gleichung vorkommt, sich auf die Einheit reducirt, wenn $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden, wie aus den unter (26, § 2.) gegebenen Ausdrücken von $M(x)$, $N(x)$ zu ersehen ist.

Setzt man

$$(6.)\quad \frac{M(a, u_1, \dots)\,P(a) - N(a, u_1, \dots)\sqrt{R(a)}}{M(a, u_1, \dots)\,P(a) + N(a, u_1, \dots)\sqrt{R(a)}} \cdot e^{4\mu\,\mathfrak{Al}\left(\frac{u_1}{2\mu}, \cdots\right)} = \overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho),$$

so ist

$$(7.)\quad \mathfrak{Al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = \tfrac{1}{2}\log \overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho),$$

und es bezeichnet alsdann $\overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ eine eindeutige Function von u_1, $u_2, \dots u_\varrho$, welche, wenn für die absoluten Werthe dieser Veränderlichen irgend welche Grenzen festgesetzt werden, die sie nicht übersteigen sollen, in der Form eines Bruches ausdrückbar ist, dessen Zähler und Nenner nach ganzen positiven Potenzen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ in convergirende Reihen sich entwickeln lassen. Für hinlänglich kleine Werthe der Argumente hat man

$$(8.)\quad \mathfrak{Al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = e^{2(\mathfrak{U}_3 + \mathfrak{U}_5 + \cdots + \mathfrak{U}_{2m+1} + \cdots)\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}},$$

woraus sich leicht erweisen lässt, ganz in derselben Weise, wie dies in § 4 für die Functionen $\varphi(u_1, \dots)_a$ geschehen ist, dass der Werth von $\overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$, obwohl in dem Ausdrucke dieser Function, wie er durch die Formel (6.) gegeben ist, die Zahl μ vorkommt, dennoch von derselben ganz unabhängig ist. Man hat daher folgenden Satz:

Es giebt eine eindeutige Function $\overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ der unbeschränkt veränderlichen Grössen $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, welche der Differential-Gleichung

$$\frac{1}{2}\,d\log \overline{\mathfrak{Al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = \sum\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x_a)}{x_a - a} \cdot \frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}\right\},$$

in der $x_1, x_2, \dots x_\varrho$, $\sqrt{R(x_1)}$, $\sqrt{R(x_2)}$, … $\sqrt{R(x_\varrho)}$ die durch die Gleichungen (III.), (XI.) des § 4 bestimmten Functionen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sind, genügt und, wenn diese Veränderlichen sämmtlich verschwinden, den Werth 1 annimmt.

Wenn nun $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x ist, so kann man dieselbe stets als ein Aggregat von Gliedern von der Form

$$\frac{A}{(x-a)^m} \text{ und } Bx^{m-1}$$

darstellen, wo m eine ganze positive Zahl, und A, B, a Constanten bedeuten. Mit Unterscheidung derjenigen Werthe von a, welche $R(a) = 0$ machen, von denen, bei welchen dies nicht der Fall ist, kann man daher als den allgemeinsten Ausdruck von $F(x)$ den folgenden annehmen

$$(9.)\quad \begin{aligned} F(x) = {} & \sum_{\mathfrak{m}=1,\dots m_1}\left\{\frac{\overset{1}{A}_{\mathfrak{m}}}{(x-\overset{1}{a})^{\mathfrak{m}}}\right\} + \sum_{\mathfrak{m}=1,\dots m_2}\left\{\frac{\overset{2}{A}_{\mathfrak{m}}}{(x-\overset{2}{a})^{\mathfrak{m}}}\right\} + \cdots \\ & + \sum_{\mathfrak{m}=1,\dots n_1}\left\{\frac{\overset{1}{B}_{\mathfrak{m}}}{(x-a_1)^{\mathfrak{m}}}\right\} + \sum_{\mathfrak{m}=1,\dots n_2}\left\{\frac{\overset{2}{B}_{\mathfrak{m}}}{(x-a_2)^{\mathfrak{m}}}\right\} + \cdots \\ & + \sum_{\mathfrak{m}=1,\dots n}\left\{C_{\mathfrak{m}}\,x^{\mathfrak{m}-1}\right\}, \end{aligned}$$

wo $m_1, m_2, \dots, n, n_1, n_2, \dots$ ganze positive Zahlen (Null ausgeschlossen) und $\overset{1}{A}_{\mathfrak{m}}, \overset{2}{A}_{\mathfrak{m}}, \dots, \overset{1}{B}_{\mathfrak{m}}, \overset{2}{B}_{\mathfrak{m}}, \dots, C_{\mathfrak{m}}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \dots$ Constanten bedeuten, und angenommen wird, dass $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \dots$ nicht zu den Grössen $a_1, a_2, \dots a_{2\varrho+1}$, den Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, gehören.

Nun ist

$$(10.)\quad \begin{aligned} d\,\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{\mathfrak{m}}} &= \left(\frac{1}{2}\,\frac{R'(x)}{(x-a)^{\mathfrak{m}}} - \mathfrak{m}\,\frac{R(x)}{(x-a)^{\mathfrak{m}+1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \\ &= \sum_{\mathfrak{r}=0,\dots 2\varrho+1}\left\{\left(\frac{\mathfrak{r}}{2} - \mathfrak{m}\right)R^{(\mathfrak{r})}(a)\,(x-a)^{-\mathfrak{m}+\mathfrak{r}-1}\right\}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \end{aligned}$$

wenn man

$$R(x) = \sum_{\mathfrak{r}=0,\dots 2\varrho+1} R^{(\mathfrak{r})}(a)\,(x-a)^{\mathfrak{r}}$$

setzt. Da nun $R^{(0)}(a) = R(a)$ ist, so übersieht man aus dieser Formel sofort, dass sich, wenn $R(a)$ nicht Null ist, indem man $\mathfrak{m} = 1, 2, \dots m-1$ setzt,

$$(11.)\quad \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R(x)}} \text{ auf die Form } \left(\frac{G_0}{x-a}+G_1(x)\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+d\,\frac{G_2(x)\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{m-1}}$$

wird bringen lassen, wo G_0 eine Constante, $G_1(x)$ und $G_2(x)$ aber ganze Functionen von x bedeuten, die erste vom $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ und die zweite vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade, wobei man für $m=1$ $G_0 = 1$, $G_1(x) = 0$, $G_2(x) = 0$ hat.

Setzt man aber $a = a_\alpha$, so ist $R(a) = 0$, nicht aber $(\frac{1}{2}-\mathfrak{m})R^{(1)}(a)$, und es erhellt aus der Formel (10.), wenn man jetzt $\mathfrak{m} = 1, 2, \dots m$ nimmt, dass man

$$(12.)\quad \frac{dx}{(x-a_\alpha)^m\sqrt{R(x)}} = \frac{G_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+d\,\frac{G_2(x)\sqrt{R(x)}}{(x-a_\alpha)^m}$$

erhalten muss, wo $G_1(x)$, $G_2(x)$ wieder ganze Functionen sind, die erste vom $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ und die andere vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade. Namentlich hat man

$$(13.)\quad \frac{1}{2}\,\frac{R'(a_\alpha)\,dx}{(x-a_\alpha)\sqrt{R(x)}} = \left(\frac{1}{2}\,\frac{R'(x)}{x-a_\alpha}+\frac{1}{2}\,\frac{R'(a_\alpha)}{x-a_\alpha}-\frac{R(x)}{(x-a_\alpha)^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}-d\,\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_\alpha}.$$

Ferner ist

$$d(x^{\mathfrak{m}-1}\sqrt{R(x)}) = \frac{(\mathfrak{m}-1)x^{\mathfrak{m}-2}R(x)+\frac{1}{2}x^{\mathfrak{m}-1}R'(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

oder, wenn man

$$R(x) = \sum_{\mathfrak{r}=0,\dots 2\varrho+1} A_{\mathfrak{r}}\,x^{2\varrho+1-\mathfrak{r}}$$

setzt,

$$(14.)\quad d(x^{\mathfrak{m}-1}\sqrt{R(x)}) = \sum_{\mathfrak{r}=0,\dots 2\varrho+1}\left[\left(\varrho+\mathfrak{m}-\frac{\mathfrak{r}+1}{2}\right)A_{\mathfrak{r}}\,x^{2\varrho+\mathfrak{m}-\mathfrak{r}-1}\right]\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

und man hat daher

$$(15.)\quad \frac{x^{2\varrho-1+\mathfrak{m}}\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{G_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+d(G_2(x)\sqrt{R(x)}),$$

wo gleichfalls $G_1(x)$, $G_2(x)$ ganze Functionen sind, die erste vom $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ und die andere vom $(\mathfrak{m}-1)^{\text{ten}}$ Grade.

Aus den Formeln (11.), (12.), (15.) folgt nun sofort, dass sich

$$(16.)\quad \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ auf die Form}$$

$$\left(\frac{\overset{1}{G}_0}{x-\overset{1}{a}}+\frac{\overset{2}{G}_0}{x-\overset{2}{a}}+\cdots\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+\frac{\overset{2\varrho-1}{G}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+d\left[\left(G_0(x)+\frac{G(x)}{R_0(x)\,H(x)}\right)\sqrt{R(x)}\right]$$

bringen lässt, wo $\overset{1}{G}_0$, $\overset{2}{G}_0$, … Constanten,

$$H(x) = (x-\overset{1}{a})^{m_1-1}(x-\overset{2}{a})^{m_2-1}\dots,$$
$$R_0(x) = (x-a_1)^{n_1}\ \ (x-a_2)^{n_2}\ \ \dots,$$

und $\overset{2\varrho-1}{G}(x)$, $G(x)$, $G_0(x)$ ganze Functionen sind, von denen die erste von nicht höherem als dem $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade, die zweite von einem niedrigern als $R_0(x)\,H(x)$ ist, und die dritte sich auf Null reducirt, wenn $n \leq 2\varrho$, während sie vom $(n-2\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, sobald $n > 2\varrho$.

Da man ferner

$$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}} = \frac{P(x)}{P(a)}\cdot\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}-\frac{P(x)-P(a)}{(x-a)\,P(a)}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

hat, wo $\frac{P(x)-P(a)}{x-a}$ eine ganze Function $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, und man, wenn $f(x)$ eine Function $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet,

$$f(x) = f_1(x)\,P(x)+f_2(x)$$

setzen kann, wo $f_1(x), f_2(x)$ beide vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade sind, und

$$f_2(x) = \sum\frac{f_2(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\cdot\frac{P(x)}{x-a_{\mathfrak{b}}}$$

ist; so erhellt, dass man dem Differential $\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ auch die Form

$$(17.)\quad \frac{F(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = F_1\frac{\sqrt{R(\overset{1}{a})}}{2P(\overset{1}{a})}\cdot\frac{P(x)}{x-\overset{1}{a}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+F_2\frac{\sqrt{R(\overset{2}{a})}}{2P(\overset{2}{a})}\cdot\frac{P(x)}{x-\overset{2}{a}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+\cdots$$
$$+\sum_{\mathfrak{b}=1,\dots\varrho}\left(\frac{1}{2}\,G_{\mathfrak{b}}\,\frac{x^{\mathfrak{b}-1}P(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\right)+\sum_{\mathfrak{b}=1,\dots\varrho}\left(\frac{1}{2}\,H_{\mathfrak{b}}\,\frac{P(x)}{x-a_{\mathfrak{b}}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\right)$$
$$+d\left\{\left(G_0(x)+\frac{G(x)}{R_0(x)\,H(x)}\right)\sqrt{R(x)}\right\}$$

geben kann, wo F_1, F_2, …, $G_{\mathfrak{b}}$, $H_{\mathfrak{b}}$ Constanten bedeuten.

Nun folgt aus der Gleichung (1.)

$$\text{(18.)}\qquad \sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{x_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}-1}P(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}\right\} = d\left[\frac{-P(a)}{\sqrt{R(a)}}\,\mathfrak{Al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)\right]_{a^{-\mathfrak{b}}},$$

wo $\left[\frac{-P(a)}{\sqrt{R(a)}}\mathfrak{Al}(u_1, \dots)\right]_{a^{-\mathfrak{b}}}$ den Coefficienten von $a^{-\mathfrak{b}}$ in derjenigen Entwicklung der eingeklammerten Grösse, welche für sehr grosse Werthe von a gilt, bezeichnet. Aus den Formeln (2.), (6.) ersieht man, dass dieser Coefficient [indem

$$\frac{N(a, u_1, \dots)}{M(a, u_1, \dots)}\cdot\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} = 0$$

wird für $a = \infty$, und man daher für alle Werthe von a, die ihrem absoluten Betrage nach eine gewisse Grenze übersteigen,

$$\frac{P(a)}{2\sqrt{R(a)}}\log\left(\frac{M(a, u_1, \dots)\,P(a) - N(a, u_1, \dots)\sqrt{R(a)}}{M(a, u_1, \dots)\,P(a) + N(a, u_1, \dots)\sqrt{R(a)}}\right)$$
$$= -\underset{\mathfrak{m}=0,\dots\infty}{\mathrm{S}}\left\{\frac{1}{2\mathfrak{m}+1}\left(\frac{N(a, u_1, \dots)}{M(a, u_1, \dots)}\right)^{2\mathfrak{m}+1}\left(\frac{Q(a)}{P(a)}\right)^{\mathfrak{m}}\right\}$$

hat, so wie auch (nach (2.))

$$\frac{2\mu P(a)}{\sqrt{R(a)}}\,\mathfrak{Al}\left(\frac{u_1}{2\mu}, \cdots\right) = 2\mu\,\underset{\mathfrak{m}=0,\dots\infty}{\mathrm{S}}\left[\mathfrak{U}\left(a, \frac{u_1}{2\mu}, \cdots\right)_{2\mathfrak{m}+2}\right],$$

und die in Beziehung auf a rationalen Functionen

$$\left(\frac{N(a, u_1, \dots)}{M(a, u_1, \dots)}\right)^{2\mathfrak{m}+1}\left(\frac{Q(a)}{P(a)}\right)^{\mathfrak{m}},\qquad \mathfrak{U}\left(a, \frac{u_1}{2\mu}, \cdots\right)_{2\mathfrak{m}+3},$$

wenn man sie nach fallenden Potenzen von a entwickelt, beide mit einem Gliede anfangen, welches mit $a^{-\mathfrak{m}-1}$ multiplicirt ist] *eine eindeutige ungerade Function von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ ist, welche für alle Werthe dieser Grössen, die ihrem absoluten Betrage nach beliebig festgesetzte Grenzen nicht überschreiten, als Quotient zweier, nach ganzen positiven Potenzen derselben entwickelbarer Reihen dargestellt werden kann.*

Berücksichtigt man ferner, dass

$$\sum\left(f(x_{\mathfrak{a}})\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}\right) = -\sum f(x_{\mathfrak{a}})\,\psi(x_{\mathfrak{a}}),$$

wenn $f(x)$ eine beliebige rationale Function von x ist, rational durch die Coefficienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ dargestellt werden kann; so ergiebt sich, wenn man

$$\text{(19.)}\qquad \left[\frac{-P(a)}{\sqrt{R(a)}}\,\mathfrak{Al}(u_1, \dots)\right]_{a^{-\mathfrak{b}}} = \mathfrak{Al}^{(\mathfrak{b})}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$$

setzt, aus (17.)

$$\text{(20.)}\quad \int\sum\frac{F(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}} = F_1\,\mathfrak{Al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho;\, \overset{1}{a}) + F_2\,\mathfrak{Al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho;\, \overset{2}{a}) + \cdots$$
$$+ \sum\left(G_{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{Al}^{(\mathfrak{b})}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) + H_{\mathfrak{b}}\,u_{\mathfrak{b}}\right)$$
$$+ \mathfrak{F}\left(\mathrm{al}(u_1, \dots)_{\mathfrak{a}},\, \overline{\mathrm{al}}(u_1, \dots)_{\mathfrak{a}}\right),$$

wo $\mathfrak{F}$ eine rationale Function von $\mathrm{al}(u_1, \dots)_1$, $\overline{\mathrm{al}}(u_1, \dots)_1$ u. s. w. bedeutet. Man sieht also, dass in der That, wie oben bemerkt worden, *eine jede Abel'sche Integral-Function auf die mit $\mathfrak{Al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ bezeichnete zurückgeführt werden kann.*

Es ist in § 4 bei Herleitung der dortigen Gleichung (8.) die Formel

$$\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}} = -2\sum_{\mathfrak{b}}\frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\,P'(a_{\mathfrak{b}})}\,du_{\mathfrak{b}},$$

oder

$$\frac{1}{2}\,\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}} = -\sum_{\mathfrak{b}}\frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\cdot\frac{du_{\mathfrak{b}}}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\,\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}$$

gefunden worden. Diese Gleichung werde mit $\frac{P(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a}$ auf beiden Seiten multiplicirt, so findet sich, wenn man dann in Beziehung auf $\mathfrak{a}$ summirt,

$$\sum\frac{1}{2}\,\frac{P(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a}\cdot\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}} = -\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\cdot\frac{P(x_{\mathfrak{a}})\,du_{\mathfrak{b}}}{(x_{\mathfrak{a}} - a)(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\,\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}.$$

Nun ist aber

$$\frac{P(x)}{(x-a)\,\varphi(x)} = \frac{P(a)}{(x-a)\,\varphi(a)} + \sum\frac{P(x_{\mathfrak{a}})}{(x_{\mathfrak{a}} - a)(x - x_{\mathfrak{a}})\,\varphi'(x_{\mathfrak{a}})},$$

und daher für $x = a_{\mathfrak{b}}$

$$\sum_{\mathfrak{a}}\frac{P(x_{\mathfrak{a}})}{(x_{\mathfrak{a}} - a)(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\,\varphi'(x_{\mathfrak{a}})} = -\frac{P(a)}{(a - a_{\mathfrak{b}})\,\varphi(a)}.$$

Mithin

$$\sum\frac{1}{2}\,\frac{P(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a}\cdot\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}} = \sum\frac{P(a)}{\varphi(a)}\cdot\frac{\varphi(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\cdot\frac{du_{\mathfrak{b}}}{a - a_{\mathfrak{b}}},$$

oder auch, wenn man jetzt auf der rechten Seite $\mathfrak{a}$ statt $\mathfrak{b}$ schreibt,

$$(21.)\qquad \Sigma \frac{1}{2}\frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a}-a}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} = \Sigma \frac{P(a)}{\varphi(a)}\cdot\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})}\cdot\frac{du_\mathfrak{a}}{a-a_\mathfrak{a}} = \frac{\Sigma\left\{-\frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_\mathfrak{a}\,du_\mathfrak{a}}{a-a_\mathfrak{a}}\right\}}{1-\Sigma\left\{\frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_\mathfrak{a}}{a-a_\mathfrak{a}}\right\}}.$$

Hieraus folgt

$$(22.)\qquad \frac{\partial\,\mathfrak{Al}(u_1,u_2,\ldots u_\varrho)}{\partial u_\mathfrak{b}} = \frac{\sqrt{R(a)}}{(a-a_\mathfrak{b})\,P(a)}\cdot\frac{\frac{-Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\,\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_\mathfrak{b}}{1-\Sigma\left\{\frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_\mathfrak{a}}{a-a_\mathfrak{a}}\right\}}.$$

Ferner ersieht man aus der Gleichung (21.), dass die partiellen Differential-Coefficienten von $\mathfrak{Al}^{(1)}(u_1,\ldots)$, $\mathfrak{Al}^{(2)}(u_1,\ldots)$ u. s. w. rationale und ganze Functionen von $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_1$, $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_2$, $\ldots\ \mathrm{al}(u_1,\ldots)_\varrho$ sind. Namentlich hat man

$$(23.)\qquad \frac{\partial\,\mathfrak{Al}^{(1)}(u_1,u_2,\ldots u_\varrho)}{\partial u_\mathfrak{a}} = \frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})}\,\mathrm{al}^2(u_1,u_2,\ldots u_\varrho)_\mathfrak{a},$$

so dass man die Gleichung (III.) des § 4, deren Wurzeln die Grössen x_1, $x_2, \ldots x_\varrho$ sind, auch folgendermassen

$$(24.)\qquad \Sigma\left\{\frac{\partial\,\mathfrak{Al}^{(1)}(u_1,u_2,\ldots u_\varrho)}{(x-a_\mathfrak{a})\,\partial u_\mathfrak{a}}\right\} = 1$$

ausdrücken kann.

Zweites Kapitel.

Einige allgemeine Betrachtungen über die Darstellung eindeutiger analytischer Functionen durch Reihen.

§ 7.

Die im vorhergehenden Kapitel durchgeführten Untersuchungen haben hauptsächlich den Zweck, für die Functionen

$$\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha,\quad \mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha\beta},\quad \mathfrak{Al}(u_1,\ldots;a),\quad \mathfrak{Al}^{(\mathfrak{a})}(u_1,\ldots),$$

durch welche sich, wie gezeigt worden ist, alle Abel'schen Transcendenten

ausdrücken lassen, zu einer völlig bestimmten, auf beliebige Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ anwendbaren Erklärung zu führen, und die analytische Form derselben in so weit festzustellen, als hierfür und zum Behufe der weitern Entwicklungen erforderlich ist. Die in § 4 und § 6 gegebenen Formeln genügen für diesen Zweck zwar vollständig, nicht aber, wenn verlangt wird, die genannten Grössen in einer ihrem wahren analytischen Charakter entsprechenden, für alle Werthe der Argumente $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ unverändert dieselbe bleibenden Form darzustellen. Diese bleibt vielmehr noch zu ermitteln.

Der Umstand, dass die unendlichen Reihen, welche in den Formeln ((IV.), (XIII.), § 4) und (6, § 6) vorkommen, für um so grössere Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ convergent bleiben, je grösser man die Zahl μ annimmt, begründet die Vermuthung, es werde sich jede derselben, wenn $\mu = \infty$ gesetzt wird, in eine für alle Werthe der genannten Veränderlichen convergirende Reihe verwandeln, und sich auf diese Weise eine Darstellung der in Rede stehenden Functionen in der gesuchten Form ergeben. Es dürfte vielleicht möglich sein, durch eine genauere Untersuchung jener Reihen die Richtigkeit dieser Vermuthung strenge zu erweisen; ich gehe jedoch hierauf nicht ein, weil man, wenn es auch gelänge, dadurch noch nicht dahin kommen würde, für jede einzelne der beiden Functionen, als deren Quotient alsdann irgend eine Abel'sche Function sich darstellen liesse, eine analytische Definition zu gewinnen. Es tritt uns hier vielmehr eine Aufgabe entgegen, welche, so viel ich weiss, noch nicht allgemein behandelt worden, und doch für die Theorie der Functionen von besonderer Wichtigkeit ist.

Die einfachsten transcendenten Functionen sind solche, welche sich nach ganzen positiven Potenzen ihrer Argumente in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen und somit im Wesentlichen den Charakter der ganzen rationalen Functionen besitzen. Nach ihnen kommen diejenigen, welche aus mehreren dieser Art in rationaler Weise zusammengesetzt und daher als Quotienten aus zweien dargestellt werden können. Man kann sie als transcendente Grössen vom Charakter der gebrochenen rationalen Functionen bezeichnen.

Oftmals aber ist eine Function in der Art definirt — und so verhält es sich, der vorhergehenden Darstellung nach, mit den Abel'schen —, dass zwar die Möglichkeit gegeben ist, sobald jedes ihrer Argumente auf einen endlichen, übrigens beliebig gross anzunehmenden Bereich beschränkt wird, dieselbe in der Gestalt eines Bruches, dessen Zähler und Nenner nach ganzen positiven Potenzen der Argumente entwickelte Reihen sind, auszudrücken, während eine stets gültig bleibende Darstellungsform noch unbekannt ist. Angenommen nun, es sei eine derartige Function durch eine (algebraische) Differential-Gleichung definirt (oder auch im Vereine mit andern durch mehrere solche), so kann man untersuchen, ob sie vielleicht zu den gebrochenen rationalen, in dem eben erklärten Sinne, gehöre. Hierfür aber reichen die gewöhnlichen Entwicklungs-Methoden nicht aus. Es handelt sich dann darum, zu entscheiden, ob man, nachdem in die gegebene Differential-Gleichung statt der gesuchten Function ein Bruch, dessen Zähler und Nenner noch zu bestimmende Grössen sind, eingeführt worden, dieselbe in zwei andere, aus denen sie wieder folgt, so zerfällt werden könne, dass die genannten Grössen beide den Charakter einer ganzen Function erhalten. Dazu kann man in vielen Fällen mit Hülfe eines allgemeinen Satzes gelangen, der verdient, bei dieser Gelegenheit entwickelt zu werden.

Wenn $f(u)$ eine Function von u ist, welche durch eine nur ganze positive Potenzen dieser Veränderlichen enthaltende und beständig convergirende Reihe dargestellt werden kann, so wird der Differential-Quotient

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda},$$

wo λ eine ganze positive Zahl bezeichnet, nur für solche Werthe von u unendlich gross, bei denen $f(u)$ verschwindet. Es sei a einer dieser Werthe, so kann man setzen

$$f(a+k) = gk^m + g_1 k^{m+1} + \cdots,$$

wo m eine ganze positive Zahl bedeutet und g nicht Null ist, und hat also

$$\log f(a+k) = m \log k + \log g + \frac{g_1}{g} k + \cdots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder nur positive ganze Potenzen von k enthalten; woraus folgt

$$\left(\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda}\right)_{u=a+k} = m \frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit nur positiven ganzen Potenzen von } k\},$$

welche Reihe convergirt, sobald der absolute Betrag von k kleiner ist als eine gewisse Grösse, auf deren nähere Bestimmung es nicht ankommt. Dieselbe Darstellung gilt aber auch für jeden andern Werth von a; nur ist dann $m = 0$.

Dieser Satz lässt sich nun in folgender Weise umkehren.

Theorem.

Wenn eine eindeutige Function $F(u)$ der unbeschränkt veränderlichen Grösse u die Eigenschaft besitzt, dass

$$F(a+k),$$

wo a irgend einen besondern Werth von u, k aber eine Veränderliche bezeichnet, für hinlänglich kleine Werthe der letztern in eine convergirende Reihe von der Form

$$m \frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \underset{\mathfrak{m}=0,\ldots\infty}{\mathrm{S}} h_{\mathfrak{m}} k^{\mathfrak{m}},$$

wo m entweder Null oder eine ganze positive Zahl bedeuten soll, entwickelbar ist; so lässt sich eine beständig convergirende Reihe

$$f_0 u^\mu + f_1 u^{\mu+1} + \cdots + f_{\mathfrak{m}} u^{\mu+\mathfrak{m}} + \cdots = f(u),$$

in der μ den zu $a = 0$ gehörigen Werth von m bezeichnet, dergestalt bestimmen, dass

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda} = F(u)$$

ist. Und zwar erhält man den allgemeinsten Ausdruck von $f(u)$, indem man, unter der Voraussetzung, dass für hinlänglich kleine Werthe von u

$$F(u) = \mu \frac{\partial^\lambda \log u}{\partial u^\lambda} + \underset{\mathfrak{m}=0,\ldots\infty}{\mathrm{S}} F_{\mathfrak{m}} u^{\mathfrak{m}}$$

gefunden sei, die Formel

$$u^\mu e^{\mathrm{S}\left\{\frac{F_{\mathfrak{m}} u^{\lambda+\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}+1)\ldots(\mathfrak{m}+\lambda)}\right\} + C_0 + C_1 u + \cdots + C_{\lambda-1} u^{\lambda-1}},$$

in der $C_0, C_1, \ldots C_{\lambda-1}$ willkürliche Constanten bezeichnen, nach

Potenzen von u entwickelt, wenn auch die dabei gebrauchte Reihe

$$\mathrm{S}\left\{\frac{F_{\mathfrak{m}}u^{\lambda+\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}+1)\dots(\mathfrak{m}+\lambda)}\right\}$$

nicht für alle Werthe von u convergirt.

Beweis. Es seien $a_1, a_2, \dots a_\sigma$ unter den Werthen von u, für welche $F(u)$ unendlich gross wird, diejenigen, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig angenommene Grösse U sind, den Werth Null, wenn er auch zu denselben gehört, ausgeschlossen. Es ist leicht zu erweisen, dass es nur eine endliche Anzahl solcher Werthe geben kann. Denn sonst müsste sich in dem angegebenen Bereiche von u wenigstens ein Werth a finden, in dessen Nähe eine unbegrenzte Menge derselben vorhanden wäre. Dann aber liesse sich $F(a+k)$, wie klein auch k angenommen werde, nicht nach ganzen Potenzen dieser Grösse in eine convergirende Reihe entwickeln, die, wie doch vorausgesetzt wird, nur eine endliche Zahl Glieder mit negativen Potenzen von k enthält. Bezeichnet man nun mit $m_1, m_2, \dots m_\sigma$ die zu $a_1, a_2, \dots a_\sigma$ gehörigen Werthe der Zahl m in den Entwicklungen von

$$F(a_1+k),\quad F(a_2+k),\quad \dots\quad F(a_\sigma+k),$$

und setzt

$$u^\mu\left(1-\frac{u}{a_1}\right)^{m_1}\left(1-\frac{u}{a_2}\right)^{m_2}\cdots\left(1-\frac{u}{a_\sigma}\right)^{m_\sigma} = \pi(u),$$

so hat man nach dem oben Bemerkten

$$\left(\frac{\partial^\lambda \log \pi(u)}{\partial u^\lambda}\right)_{u=a+k} = m\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit ganzen positiven Potenzen von } k\},$$

wo $m = \mu, m_1, m_2, \dots m_\sigma$ ist für $a = 0, a_1, a_2, \dots a_\sigma$, und Null für jeden andern Werth von a. Setzt man daher

$$F(u) - \frac{\partial^\lambda \log \pi(u)}{\partial u^\lambda} = F_1(u),$$

so ist $F_1(a+k)$ bei jedem Werthe von a, dessen absoluter Betrag kleiner als U ist, in eine nur ganze positive Potenzen von k enthaltende Reihe entwickelbar. Daraus folgt, dass $F_1(u)$, so lange der absolute Betrag von u unterhalb der genannten Grenze bleibt, stets einen endlichen Werth hat und

sich continuirlich mit u ändert. Dasselbe gilt von $\frac{\partial F_1(u)}{\partial u}$ (so wie von den höhern Differential-Coefficienten dieser Function). Nach einem Cauchy'schen Satze lässt sich daher $F_1(u)$ für alle jene Werthe von u durch eine convergirende Reihe

$$\underset{\mathfrak{m}=1,\dots\infty}{\mathrm{S}} G_{\mathfrak{m}} u^{\mathfrak{m}}$$

darstellen. Wird daher

$$f_1(u) = \pi(u)\, e^{\mathrm{S}\left\{\frac{G_{\mathfrak{m}}u^{\lambda+\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}+1)\dots(\mathfrak{m}+\lambda)}\right\}}$$

gesetzt, so ist $f_1(u)$ in eine, jedenfalls für dieselben Werthe von u convergirende Reihe von der Form

$$f_1(u) = u^\mu + \underset{\mathfrak{m}=0,\dots\infty}{\mathrm{S}} \overset{1}{f}_{\mathfrak{m}} u^{\lambda+\mathfrak{m}}$$

entwickelbar,*) und man hat

$$\frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial^\lambda \log \pi(u)}{\partial u^\lambda} + F_1(u) = F(u).$$

Nun kann man aber, wenn u dem absoluten Betrage nach kleiner als jede der Grössen $a_1, a_2, \dots a_\sigma$ ist, $F(u)$ durch eine convergirende Reihe

$$\mu\frac{\partial^\lambda \log u}{\partial u^\lambda} + \mathrm{S}F_{\mathfrak{m}}u^{\mathfrak{m}}$$

ausdrücken, wo μ Null oder eine ganze positive Zahl ist. Nimmt man daher für $f(u)$ die aus der Entwicklung des Ausdrucks

$$u^\mu e^{\mathrm{S}\left\{\frac{F_{\mathfrak{m}}u^{\lambda+\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}+1)\dots(\mathfrak{m}+\lambda)}\right\} + C_0 + C_1 u + \dots + C_{\lambda-1}u^{\lambda-1}}$$

hervorgehende Reihe, so convergirt dieselbe sicher bei den eben genannten Werthen von u, und man hat für dieselben

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda} = F(u),$$

und mithin auch

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda},$$

*) S. die Sätze des § 7 der Abhandlung über die Facultäten.

woraus durch Integration

$$\log f(u) = \log f_1(u) + C'_0 + C'_1 u + \cdots + C'_{\lambda-1} u^{\lambda-1},$$
$$f(u) = f_1(u) . e^{C'_0 + C'_1 u + \cdots + C'_{\lambda-1} u^{\lambda-1}}$$

folgt, wo $C'_0, C'_1, \ldots C'_{\lambda-1}$ gleich $C_0, C_1, \ldots C_{\lambda-1}$ Constanten sind, und aus den für $f(u)$ und $f_1(u)$ aufgestellten Ausdrücken sofort erhellt, dass man, wenn

$$\log\left(\frac{\pi(u)}{u^\mu}\right) = c_1 u + c_2 u^2 + \cdots$$

ist,

$$C'_0 + C'_1 u + \cdots + C'_{\lambda-1} u^{\lambda-1} = C_0 + C_1 u + \cdots + C_{\lambda-1} u^{\lambda-1} - c_1 u - \cdots - c_{\lambda-1} u^{\lambda-1}$$

hat. Der Exponential-Factor in dem vorstehenden Ausdrucke von $f(u)$ lässt sich aber nach Potenzen von u in eine beständig convergirende Reihe entwickeln; folglich muss auch das Product aus derselben und der Reihe für $f_1(u)$, das heisst die mit $f(u)$ bezeichnete Reihe convergiren, sobald der absolute Werth von u kleiner als U ist. Aber U kann beliebig gross angenommen werden, während die Coefficienten von $f(u)$ stets dieselben bleiben, welchen Werth auch U haben möge. Mithin muss die Reihe für $f(u)$ eine beständig convergirende sein, wenn auch die bei der Bildung ihrer Coefficienten gebrauchte

$$\mathrm{S}\left\{\frac{F_m u^{\lambda+m}}{(m+1)\ldots(m+\lambda)}\right\}$$

es nicht ist.

Zugleich sieht man aus der vorhergehenden Darstellung, dass die aufgestellte Formel den allgemeinsten Ausdruck der Function $f(u)$ liefert. Denn gesetzt, es sei $f_0(u)$ irgend eine andere, welche auch der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^\lambda \log f_0(u)}{\partial u^\lambda} = F(u)$$

genügt, so muss, wie gezeigt,

$$f_0(u) = f(u)\, e^{\chi(u)}$$

sein, wo $\chi(u)$ eine ganze Function $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, wonach $f_0(u)$ in dem für $f(u)$ gegebenen Ausdrucke mit einbegriffen ist.

Anmerkung. Hätte die Function $F(u)$ nicht für alle Werthe von u, sondern nur für alle dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gewissen

Grenze liegenden, die angegebenen Eigenschaften; so folgt aus dem vorstehenden Beweise, dass die auf die angezeigte Weise gebildete Reihe $f(u)$ jedenfalls für die bezeichneten Werthe von u convergent sein und der Differential-Gleichung $\frac{\partial^\lambda f(u)}{\partial u^\lambda} = F(u)$ genügen würde.

Der bewiesene Satz kann nun, wenn zwischen zwei veränderlichen Grössen x und u eine algebraische Differential-Gleichung besteht, dazu gebraucht werden, um zu entscheiden, ob sich wirklich x als eine Function von u, die den Charakter einer ganzen oder gebrochenen rationalen hat, betrachten lasse, und um, wenn das Letztere der Fall ist, zur Bestimmung des Zählers und des Nenners zwei Differential-Gleichungen zu ermitteln. Denn immer wird sich aus der gegebenen Differential-Gleichung für irgend einen λ^{ten} Differential-Coefficienten von $\log x$ ein Ausdruck von der Form

$$\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial u^\lambda} = F\left(u, x, \frac{\partial x}{\partial u}, \cdots \frac{\partial^{\lambda-1} x}{\partial u^{\lambda-1}}\right)$$

herleiten lassen, wo F eine rationale Function von $x, \frac{\partial x}{\partial u}$ u. s. w. bezeichnen soll, deren Coefficienten Constanten oder eindeutige analytische Functionen von u sind. Wenn nun x in der Gestalt

$$\frac{f_1(u)}{f_2(u)},$$

wo unter $f_1(u), f_2(u)$ zwei nach ganzen positiven Potenzen von u in beständig convergirende Reihen entwickelbare Functionen zu verstehen sind, darstellbar sein soll, so muss, indem dann

$$\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial^\lambda \log f_2(u)}{\partial u^\lambda}$$

ist, F sich auf die Form $F_1 - F_2$ in der Art bringen lassen, dass F_1, F_2 Functionen von der in dem aufgestellten Satze beschriebenen Art sind. Gelingt es nun, F in dieser Weise umzuformen, wo denn im Allgemeinen F_1, F_2 Functionen von $u, x, \frac{\partial x}{\partial u}, \cdots \frac{\partial^{\lambda-1} x}{\partial u^{\lambda-1}}$ sein werden, und der Nachweis, dass sie die in Rede stehende Beschaffenheit haben, mit Hülfe dessen, was hinsichtlich des zwischen x und u bestehenden Abhängigkeits-Verhältnisses aus der gegebenen Differential-Gleichung folgt, oder sonst bekannt ist, geliefert werden muss; so kann man

$$\frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} = F_1, \qquad \frac{\partial^\lambda \log f_2(u)}{\partial u^\lambda} = F_2$$

setzen, und dann, indem man für x diejenige Entwicklung nach Potenzen von u sucht, welche für hinlänglich kleine Werthe von u gilt, und hierauf die entsprechenden Entwicklungen von F_1, F_2 ausführt, die Reihen für $f_1(u)$, $f_2(u)$ in der beschriebenen Weise bilden — oder man kann auch, in F_1, F_2 $\frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ statt x einführend, aus den so sich ergebenden Gleichungen die Coefficienten der gesuchten Reihen, deren Form und beständige Convergenz ja bereits vor ihrer Entwicklung feststeht, nach irgend einer passenden Methode ableiten; worauf man bei gehöriger Constanten-Bestimmung $x = \frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ haben wird.

Wenn man im Stande ist, von der Grösse x vor ihrer Entwicklung nachzuweisen, dass sie eine eindeutige Function von u ist, welche sich für alle in der Nähe eines beliebigen besondern Werthes a liegenden Werthe dieses Arguments durch eine convergirende Reihe von der Form

$$A_0(u-a)^\mu + A_1(u-a)^{\mu+1} + A_2(u-a)^{\mu+2} + \cdots,$$

wo μ eine ganze (positive oder negative) Zahl bedeutet, ausdrücken lässt; so genügt es, F als die Differenz zweier andern ähnlich gebildeten Ausdrücke F_1, F_2 darzustellen, von denen sich zeigen lässt, dass der erste nur für solche Werthe von x unendlich gross werde, bei denen $x = 0$, der andere nur für diejenigen, bei denen $x = \infty$ wird — und man kann überzeugt sein, dass die aus den Gleichungen

$$\frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} = F_1, \qquad \frac{\partial^\lambda \log f_2(u)}{\partial u^\lambda} = F_2$$

auf die beschriebene Weise für $f_1(u)$, $f_2(u)$ sich ergebenden Reihen beständig convergent sein werden.

Denn bei der angenommenen Beschaffenheit von x hat man für jeden Werth von a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial u^\lambda}\right)_{u=a+k} &= \pm m \frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit nur ganzen positiven Potenzen von } k\} \\ &= F_1(a+k) - F_2(a+k),\end{aligned}$$

wo m eine ganze positive Zahl ist, wenn für $u = a$ $x = 0$ oder $= \infty$ wird,

und das obere Zeichen im ersten, das untere im andern Falle gilt, während man $m = 0$ für jeden andern Werth von a hat. Ferner geben F_1, F_2, wenn man in denselben $u = a + k$ setzt und nach Potenzen von k entwickelt, Reihen mit nur ganzen Potenzen von k, wobei jedoch, da F_1 und F_2 für keinen Werth von u beide unendlich gross werden, niemals in beiden zugleich negative Potenzen von k vorkommen können. Daher folgt aus der vorstehenden Gleichung, wenn $F_1(a) = \infty$ ist (indem man mit (k) eine Reihe von der Form $h_0 + h_1 k + h_2 k^2 + \cdots$ andeutet),

$$F_1(a+k) = m \frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + (k), \qquad F_2(a+k) = (k);$$

und wenn $F_2(a) = \infty$,

$$F_2(a+k) = m \frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + (k), \qquad F_1(k) = (k),$$

während man für jeden andern Werth von a

$$F_1(a+k) = (k), \qquad F_2(a+k) = (k)$$

hat. Es besitzen also $F_1(u)$, $F_2(u)$ die bei dem entwickelten Satze für die Function $F(u)$ vorausgesetzte Beschaffenheit.

Wenn sich nur nachweisen liesse, dass man x für alle Werthe von u, die dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gewissen Grenze liegen, als eine Function dieser Veränderlichen von der angegebenen Beschaffenheit anzusehen habe; so würde man, in der beschriebenen Weise verfahrend, zu einer jedenfalls für alle jene Werthe von u geltenden Darstellung von x gelangen.

Sind für mehrere Functionen $x_1, x_2, \ldots$ von u eben so viele algebraische Differential-Gleichungen gegeben, so kann man bei deren Entwicklung in ganz ähnlicher Weise verfahren. Auch ist es möglich, in dem Falle, wo es sich um Functionen von mehr als einem Argumente handelt, die Untersuchung auf den hier betrachteten zurückzuführen.

ANMERKUNG.

Im Vorstehenden ist nur ein Theil der im Crelle'schen Journal Bd. 52 unter dem Titel »Theorie der Abel'schen Functionen« veröffentlichten Abhandlung abgedruckt worden, weil die Theorie der hyperelliptischen Functionen in einem folgenden Bande dieser Werke in neuer Bearbeitung erscheinen soll, die Digression über die elliptischen Transcendenten aber ihrem wesentlichen Inhalt nach mit der ersten Abhandlung dieses Bandes übereinstimmt.

Die Mehrzahl der in diesem Bande enthaltenen Abhandlungen ist vor dem Abdruck einer Revision unterworfen worden, und zwar durch die Herren G. Hettner (Nr. 11), H. Kortum (Nr. 16), H. v. Mangoldt (Nr. 9), R. Rothe (Nr. 2, 3, 12, 15), Ludwig Schlesinger (Nr. 5, 7, 8, 17), H. A. Schwarz (Nr. 14), E. Wendt (Nr. 13). Auch hat jeder dieser Herren mindestens eine Correctur des von ihm durchgesehenen Textes gelesen. Die Correctur der übrigen Abhandlungen ist durch Herrn R. Rothe besorgt worden. Hinsichtlich des Typographischen hat Herr C. Barich, Factor der G. Reimer'schen Buchdruckerei, sämmtliche Bogen dieses Bandes revidirt.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).