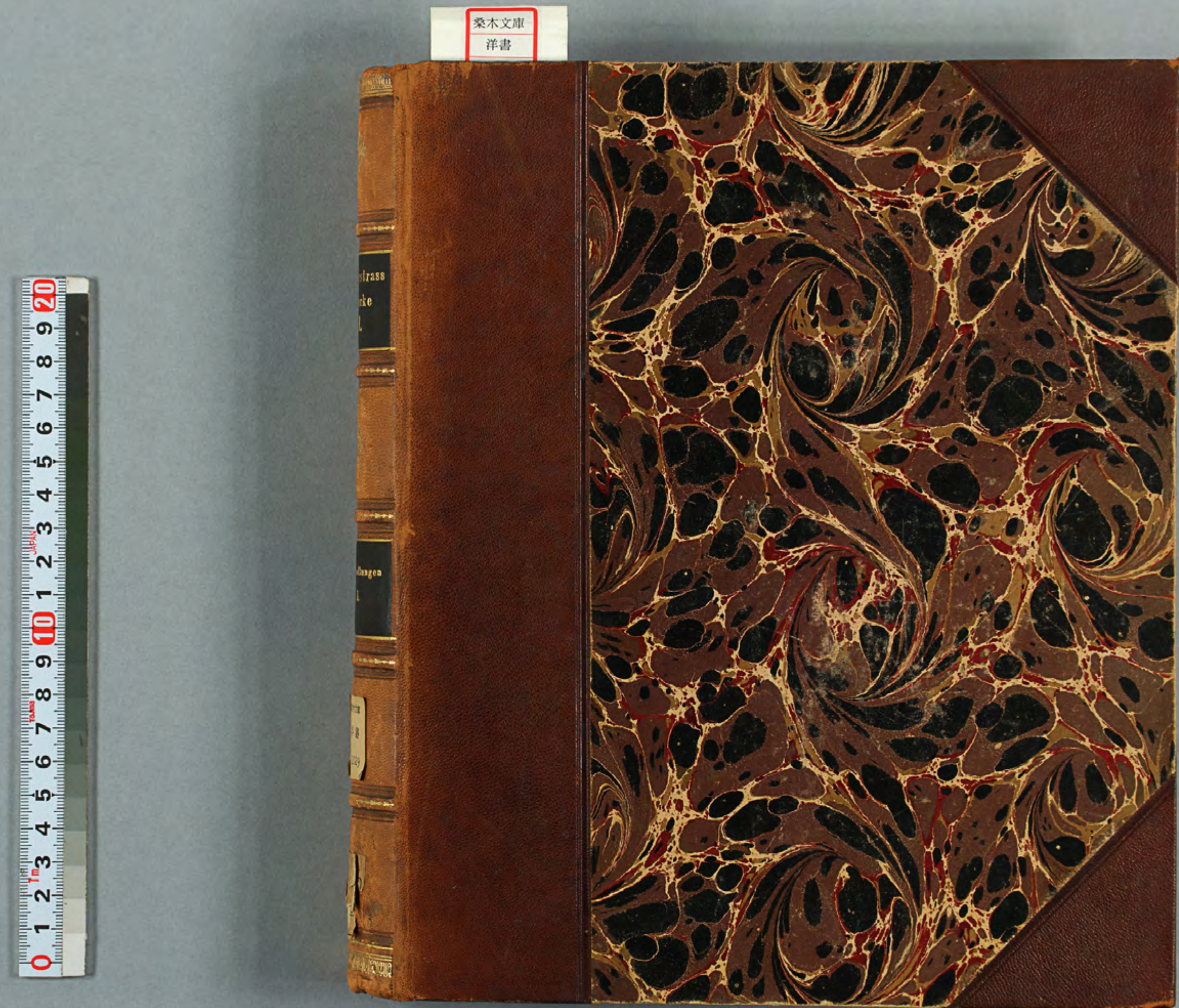
桑木文庫
洋書

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

ERSTER BAND.

ABHANDLUNGEN I.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1894.

VORWORT.

Bereits vor mehr als fünf Jahren hatte ich mich entschlossen, eine Gesammtausgabe meiner mathematischen Werke zu veranstalten. Aber ich hatte kaum mit den dazu erforderlichen Vorarbeiten begonnen, als mich ein hartnäckiges Leiden heimsuchte, das mich jahrelang vollständig arbeitsunfähig machte. Erst im vergangenen Sommer besserte sich der Zustand meiner Gesundheit soweit, dass ich hoffen durfte, es würde sich mein Vorhaben unter bestimmten Bedingungen doch noch durchführen lassen. Allerdings konnte ich bei meinem hohen Alter nicht mehr erwarten, dass es mir möglich sein werde, das geplante Werk in der ursprünglich beabsichtigten Weise zu Ende zu führen; ich musste daher dafür Sorge tragen, dass auch im Falle meines Todes oder einer längeren Erkrankung die Herausgabe keine Unterbrechung erfahren werde. Dazu hat sich nun durch das bereitwillige Entgegenkommen der hiesigen Akademie der Wissenschaften ein Weg finden lassen. Die Akademie hat aus ihrer Mitte eine Commission von vier Mitgliedern ernannt, welche die Herausgabe der in Rede stehenden Arbeiten überwachen und sich im Falle eines etwaigen Abgangs eines Mitgliedes durch freie Wahl ergänzen soll. Diese Commission, welche zur Zeit aus den Herren Auwers, Frobenius, Schwarz und mir besteht, hat mit der eigentlichen Herausgabe die Herren Hettner, Knoblauch, Fritz Kötter, Phragmén und Stickelberger betraut. Einige andere Herren, deren Namen am Schlusse der einzelnen Bände genannt werden sollen, sind an der Herausgabe durch die Revision und Correctur specieller Abhandlungen betheiligt. Alle diese Herren haben die ihnen zugedachten Arbeiten bereitwilligst übernommen, wofür ich ihnen an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche. Dieses gilt namentlich von Herrn Knoblauch, dessen thätigem und umsichtigem Vorgehen es hauptsächlich zu verdanken ist, dass der erste Band in verhältnissmässig kurzer Zeit hat fertig gestellt werden können.

Berlin, den 15. Mai 1894.

Karl Weierstrass.

INHALTS-VERZEICHNISS.

ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER MODULAR-FUNCTIONEN.

In der Einleitung zu dem »Précis d'une théorie des fonctions elliptiques« von Abel (Crelle's Journal, B. 4, S. 244; vgl. B. 6, S. 76) findet sich die Bemerkung, dass die Modular-Function $\mathrm{sn}\,u$ — von Abel a. a. O. durch $\lambda(u)$ bezeichnet — ausgedrückt werden könne als Quotient zweier nach ganzen Potenzen von u fortschreitenden und beständig convergirenden Reihen, deren Coefficienten ganze Functionen des Moduls sind. Der vorliegende Aufsatz enthält einen Versuch, die Entwicklung dieser Reihen, sowie ähnlicher für die übrigen Modular-Functionen, auszuführen und zugleich nachzuweisen, wie von ihnen auf eine einfache Weise zu den übrigen bekannten Darstellungen dieser Functionen übergegangen werden kann. Es erschien zweckmässig, bei der ganzen Entwicklung nur die Fundamental-Eigenschaften der Modular-Functionen vorauszusetzen, sowie auch besonders darauf gesehen worden ist, die Gültigkeit der Formeln auch für imaginäre Werthe des Arguments und des Moduls zu zeigen.

§ 1.

Aus den zur Definition der Modular-Functionen $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ mit dem gemeinschaftlichen Modul k dienenden Differential-Gleichungen

$$(1.)\quad \frac{\partial\,\mathrm{sn}\,u}{\partial u} = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \qquad \frac{\partial\,\mathrm{cn}\,u}{\partial u} = -\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \qquad \frac{\partial\,\mathrm{dn}\,u}{\partial u} = -k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u,$$

zu denen noch die nähere Bestimmung kommt, dass für $u = 0$ $\operatorname{sn} u = 0$, $\operatorname{cn} u = 1$, $\operatorname{dn} u = 1$ sein soll, lassen sich für diese Functionen zunächst unendliche Reihen von der Form

$$(2.)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn} u = u + a_1 u^3 + \cdots + a_r u^{2r+1} + \cdots \\ \operatorname{cn} u = 1 + b_1 u^2 + \cdots + b_r u^{2r} + \cdots \\ \operatorname{dn} u = 1 + c_1 u^2 + \cdots + c_r u^{2r} + \cdots \end{cases}$$

herleiten, in welchen die Coefficienten ganze Functionen von k^2 sind, deren nähere Kenntniss für den gegenwärtigen Zweck nicht erforderlich ist. Diese Reihen können nun zwar nicht immer convergent sein, wie man sich leicht überzeugt; man darf aber annehmen, dass sie es für jeden reellen und imaginären Werth von u sind, dessen absoluter Betrag eine bestimmte, von dem jedesmaligen Werthe des Moduls abhangende Grenze nicht überschreitet.[1]) Aus den Formeln, welche $\operatorname{sn}(u+v)$, $\operatorname{cn}(u+v)$, $\operatorname{dn}(u+v)$ durch $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ ausdrücken, ist ferner sofort ersichtlich, dass sich $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ rational durch $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{cn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{dn}\frac{u}{n}$ ausdrücken lassen, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, in der Art, dass man

$$(3.)\qquad \operatorname{sn} u = \frac{P}{S}, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{Q}{S}, \qquad \operatorname{dn} u = \frac{R}{S}$$

hat, wo P, Q, R, S ganze Functionen von $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{cn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{dn}\frac{u}{n}$ sind. Werden für $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{cn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{dn}\frac{u}{n}$ ihre Reihen-Entwicklungen substituirt, so gehen auch P, Q, R, S in unendliche, nach ganzen Potenzen von u fortschreitende Reihen über; und wenn angenommen wird, dass die Reihen (2.) convergiren, sobald der absolute Betrag von u kleiner als eine bestimmte Grösse a ist, so sind die Reihen für $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{cn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{dn}\frac{u}{n}$ und demnach auch die Reihen-Entwicklungen von P, Q, R, S convergent für jedes u, dessen absoluter Betrag kleiner als na ist. Da nun na mit n ohne Ende wächst, so steht zu erwarten, dass P, Q, R, S für $n = \infty$ in solche Reihen übergehen, die beständig convergiren, und man auf diesem Wege zu Entwicklungen der Modular-Functionen gelangen werde, die für jeden beliebigen Werth des Arguments gültig bleiben. Dies ist jetzt durch eine nähere Betrachtung der Ausdrücke P, Q, R, S zu bestätigen. Man hat

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log \operatorname{sn} u}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn} u^2 - \dfrac{1}{\operatorname{sn} u^2} \\ \dfrac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn} u^2 - \dfrac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2} \\ \dfrac{\partial^2 \log \operatorname{dn} u}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn} u^2 - \dfrac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}, \end{cases}$$

und daher

$$(5.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} + \dfrac{S^2}{P^2} = \dfrac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \dfrac{k^2 P^2}{S^2} \\ \dfrac{\partial^2 \log Q}{\partial u^2} + \dfrac{R^2}{Q^2} = \dfrac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \dfrac{k^2 P^2}{S^2} \\ \dfrac{\partial^2 \log R}{\partial u^2} + \dfrac{k^2 Q^2}{R^2} = \dfrac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \dfrac{k^2 P^2}{S^2}. \end{cases}$$

Durch die Entwicklung der logarithmischen Differentiale erhält z. B. die erste Gleichung die Gestalt

$$\frac{P\dfrac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \dfrac{\partial P}{\partial u}\dfrac{\partial P}{\partial u} + S^2}{P^2} = \frac{S\dfrac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \dfrac{\partial S}{\partial u}\dfrac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2}{S^2}.$$

Ohne die entwickelten Ausdrücke von P, S zu kennen, lässt sich doch aus der Art, wie sie aus den Grundformeln abgeleitet werden können, über ihre Form Folgendes angeben. (Vgl. Abel Précis § 4.) Es werde $\frac{u}{n} = v$ gesetzt, und es mögen die grossen deutschen Buchstaben überhaupt ganze Functionen von $\operatorname{sn} v$ bezeichnen, wo dann der Grad durch einen beigefügten Index angedeutet werden kann, so ist

I. wenn n ungrade,

$$P = \mathfrak{A}_{nn}, \qquad \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{1}{n}\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \frac{\partial \mathfrak{A}_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, \mathfrak{B}_{nn-1},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{1}{n^2}\operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v^2} + \frac{1}{n^2}\frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2}\frac{\partial \mathfrak{A}_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v} = \mathfrak{C}_{nn+2}, \qquad \frac{\partial P^2}{\partial u^2} = \mathfrak{D}_{2nn+2},$$

$$S = \mathfrak{A}'_{nn-1}, \qquad \frac{\partial S}{\partial u} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, \mathfrak{B}'_{nn-2},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = \frac{1}{n^2}\operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}'_{nn-1}}{\partial \operatorname{sn} v^2} + \frac{1}{n^2}\frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2}\frac{\partial \mathfrak{A}'_{nn-1}}{\partial \operatorname{sn} v} = \mathfrak{C}'_{nn+1}, \qquad \frac{\partial S^2}{\partial u^2} = \mathfrak{D}'_{2nn},$$

II. wenn n grade,

$$P = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, \mathfrak{A}_{nn-3}, \qquad \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{1}{n} \operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial \mathfrak{A}_{nn-3}}{\partial \operatorname{sn} v} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} \mathfrak{A}_{nn-3} = \mathfrak{B}_{nn},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathfrak{B}_{nn}}{\partial u} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, \mathfrak{C}_{nn-1}, \qquad P^2 = \mathfrak{D}_{2nn-2}, \qquad P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \mathfrak{E}_{2nn},$$

$$S = \mathfrak{A}'_{nn}, \qquad \frac{\partial S}{\partial u} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, \mathfrak{B}'_{nn-1},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = \frac{1}{n^2} \operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}'_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} \frac{\partial \mathfrak{A}'_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v} = \mathfrak{C}'_{nn+2}, \qquad \frac{\partial S^2}{\partial u^2} = \mathfrak{D}'_{2nn+2}.$$

Ferner sind

$$P^2, \quad P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u}, \quad S^2, \quad S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u}$$

grade Functionen von $\operatorname{sn} v$, und der Coefficient von $\operatorname{sn} v^2$ in S ist gleich 0. Hieraus erhellt, dass die Ausdrücke

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + S^2, \qquad S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2$$

ganze, und zwar grade Functionen von $\operatorname{sn} v$ sind, deren Grad um zwei Einheiten höher als resp. der Grad von P^2 und S^2 ist. Da ferner P^2, S^2 keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so muss vermöge der obigen Gleichung der erste Ausdruck durch P^2, der zweite durch S^2 theilbar, und der Quotient für beide derselbe sein. Man kann daher setzen

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + S^2 = (g + h \operatorname{sn} v^2) P^2, \qquad S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2 = (g + h \operatorname{sn} v^2) S^2,$$

wo g, h von u unabhängig sind. Wird $u = 0$ gesetzt, so ergiebt sich aus der zweiten Gleichung $g = 0$. Ferner, wenn l den Coefficienten der höchsten in P, S vorkommenden Potenz von $\operatorname{sn} v$ bezeichnet, so erhält man mit Rücksicht auf das über die Form von P, S etc. Bemerkte für den Fall, dass n ungrade ist, aus der ersten der vorstehenden Gleichungen

$$\frac{n^2(n^2-1)}{n^2} k^2 l^2 + \frac{2k^2 n^2}{n^2} l^2 - \frac{k^2 n^4}{n^2} l^2 = h l^2, \text{ d. h. } h = k^2;$$

und wenn n grade ist, so giebt die zweite Gleichung denselben Werth für h. Man hat daher

$$S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2 = k^2 \operatorname{sn} v^2 S^2,$$

oder

$$\frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + k^2 \frac{P^2}{S^2} = k^2 \left(\operatorname{sn} \frac{u}{n}\right)^2.$$

Hiernach erhält man aus (5.)

$$(6.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{sn} u^2} - k^2 \left(\operatorname{sn} \frac{u}{n}\right)^2 = 0 \\ &\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u^2} + \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2} - k^2 \left(\operatorname{sn} \frac{u}{n}\right)^2 = 0 \\ &\frac{\partial^2 \log R}{\partial u^2} + \frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2} - k^2 \left(\operatorname{sn} \frac{u}{n}\right)^2 = 0 \\ &\frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + k^2 \operatorname{sn} u^2 - k^2 \left(\operatorname{sn} \frac{u}{n}\right)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Nun können $\frac{1}{\operatorname{sn} u^2}$, $\frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2}$, $\frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}$, $k^2 \operatorname{sn} u^2$ in Reihen von der Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sn} u^2} &= \frac{1}{u^2} + 1 + \alpha_1 u^2 + \cdots + \alpha_r u^{2r} + \cdots \\ \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2} &= 1 + \beta_1 u^2 + \cdots + \beta_r u^{2r} + \cdots \\ \frac{k^2 \operatorname{sn} u^2}{\operatorname{dn} u^2} &= k^2 + \gamma_1 u^2 + \cdots + \gamma_r u^{2r} + \cdots \\ k^2 \operatorname{sn} u^2 &= k^2 u^2 + \delta_2 u^4 + \cdots + \delta_r u^{2r} + \cdots \end{aligned}$$

entwickelt werden. Setzt man dann

$$\begin{aligned} -\log u + \frac{u^2}{2} + \alpha_1 \frac{u^4}{3.4} + \cdots + \alpha_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \varphi(u) \\ \frac{u^2}{2} + \beta_1 \frac{u^4}{3.4} + \cdots + \beta_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \psi(u) \\ \frac{k^2 u^2}{2} + \gamma_1 \frac{u^4}{3.4} + \cdots + \gamma_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \chi(u) \\ \frac{k^2 u^4}{3.4} + \delta_2 \frac{u^6}{5.6} + \cdots + \delta_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \vartheta(u), \end{aligned}$$

so dass

$$\frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial u^2} = \frac{1}{\operatorname{sn} u^2}, \qquad \frac{\partial^2 \psi(u)}{\partial u^2} = \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2}, \qquad \frac{\partial^2 \chi(u)}{\partial u^2} = \frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}, \qquad \frac{\partial^2 \vartheta(u)}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn} u^2$$

ist, und

$$\operatorname{Al}(u)_1 = e^{-\varphi(u)}, \qquad \operatorname{Al}(u)_2 = e^{-\psi(u)}, \qquad \operatorname{Al}(u)_3 = e^{-\chi(u)}, \qquad \operatorname{Al}(u) = e^{-\vartheta(u)},$$

so können $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, $\mathrm{Al}(u)$ in Reihen von der Form

$$(7.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u)_1 = u + A_1 u^3 + \cdots + A_r u^{2r+1} + \cdots \\ \mathrm{Al}(u)_2 = 1 + B_1 u^2 + \cdots + B_r u^{2r} + \cdots \\ \mathrm{Al}(u)_3 = 1 + C_1 u^2 + \cdots + C_r u^{2r} + \cdots \\ \mathrm{Al}(u) \;\, = 1 + D_2 u^4 + \cdots + D_r u^{2r} + \cdots \end{cases}$$

entwickelt werden, und es ist

$$(8.)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u^2} + \frac{1}{\mathrm{sn}\, u^2} = 0, \qquad &&\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u^2} + \frac{\mathrm{dn}\, u^2}{\mathrm{cn}\, u^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u^2} + \frac{k^2 \mathrm{cn}\, u^2}{\mathrm{dn}\, u^2} = 0, \qquad &&\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2} + k^2 \mathrm{sn}\, u^2 = 0. \end{aligned}$$

Verbindet man diese Gleichungen mit (6.), so erhält man

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u^2} + n^2 \frac{\partial^2 \log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u^2} + n^2 \frac{\partial^2 \log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \log R}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u^2} + n^2 \frac{\partial^2 \log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2} + n^2 \frac{\partial^2 \log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} = 0,$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man zugleich beachtet, dass zufolge der angegebenen Form von P, Q, R, S die Reihen-Entwicklungen dieser Ausdrücke ganz dieselbe Form haben, wie die Reihen (7.),

$$(9.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u)_1 = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)\cdot P, \qquad \mathrm{Al}(u)_2 = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)\cdot Q, \\ \mathrm{Al}(u)_3 = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)\cdot R, \qquad \mathrm{Al}(u) \;\, = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)\cdot S \end{cases}$$

und

$$(10.)\quad \mathrm{sn}\, u = \frac{P}{S} = \frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)}, \qquad \mathrm{cn}\, u = \frac{Q}{S} = \frac{\mathrm{Al}(u)_2}{\mathrm{Al}(u)}, \qquad \mathrm{dn}\, u = \frac{R}{S} = \frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)}.$$

Nimmt man nun wie vorhin an, dass die Reihen (2.) bei einem bestimmten Werth von k convergiren für alle Werthe von u, deren absoluter Betrag kleiner als a ist, so sind auch — nach bekannten elementaren Sätzen — die

Reihen für $k^2 \mathrm{sn}\, u^2$, $\vartheta(u)$, und — weil die Exponential-Reihe beständig convergirt — auch die Reihe, worin $D(u) = e^{-\vartheta(u)}$ entwickelt ist, sicher für dieselben Werthe von u convergent. Die Reihe für $D\left(\frac{u}{n}\right)$, und mithin auch die für $D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)$ convergirt also, sobald der absolute Betrag von u kleiner als na ist; für einen solchen Werth sind aber, wie schon bemerkt, auch die Reihen-Entwicklungen von P, Q, R, S, und somit vermöge der Gleichungen (9.), auch die von $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, $\mathrm{Al}(u)$ convergent. Da aber diese letzteren von n unabhängig sind, na aber beliebig gross angenommen werden kann, so folgt, dass die Convergenz stattfinden muss für jeden noch so grossen, d. h. für jeden beliebigen Werth von u. Jede der Modular-Functionen $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$ lässt sich demnach als Quotient zweier nach ganzen Potenzen von u fortschreitenden und für jeden Werth von u, wie von k convergirenden Reihen darstellen. Die Coefficienten dieser Reihen sind, wie aus der vorstehenden Entwicklung ersichtlich ist, ganze Functionen von k^2.

Die Gleichungen (8.) lassen sich nun auch so schreiben

$$(11.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u)_1 \frac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u} \frac{\partial \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u} + \mathrm{Al}(u)^2 = 0 \\ \mathrm{Al}(u)_2 \frac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u} \frac{\partial \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u} + \mathrm{Al}(u)_3^2 = 0 \\ \mathrm{Al}(u)_3 \frac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u} \frac{\partial \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u} + k^2 \mathrm{Al}(u)_2^2 = 0 \\ \mathrm{Al}(u) \frac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathrm{Al}(u)}{\partial u} \frac{\partial \mathrm{Al}(u)}{\partial u} + k^2 \mathrm{Al}(u)_1^2 = 0, \end{cases}$$

und vermittelst dieser Gleichungen liessen sich die Coefficienten der Reihen (7.) vollständig bestimmen. Man kann aber, wenn man auch den Modul als veränderlich ansieht, partielle Differential-Gleichungen herleiten, welche für die Reihen-Entwicklungen bei weitem geeigneter sind.

§ 2.

Es werde

$$\mathrm{sn}\, u = x, \qquad \mathrm{cn}\, u = y, \qquad \mathrm{dn}\, u = z,$$
$$\mathrm{Al}(u)_1 = p, \qquad \mathrm{Al}(u)_2 = q, \qquad \mathrm{Al}(u)_3 = r, \qquad \mathrm{Al}(u) = s$$

gesetzt. Man hat

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1-(1+k^2)x^2+k^2x^4$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -(1+k^2)x+2k^2x^3.$$

Differentiirt[2]) man die erste Gleichung nach k, so ergiebt sich

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial k} = [-(1+k^2)x+2k^2x^3]\frac{\partial x}{\partial k}-kx^2(1-x^2),$$

oder, wegen der zweiten,

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial k}-\frac{\partial x}{\partial k}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2} = -\frac{kx^2}{1-k^2x^2} = -\frac{kx^2}{z^2} = -\frac{1}{k}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{k}.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial^2 \log z}{\partial u^2} = -z^2+\frac{k'^2}{z^2} = -1+k^2x^2+\frac{k'^2}{z^2},$$

oder weil (§ 1, 8.) $k^2x^2 = -\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}$ ist,

$$\frac{k'^2}{z^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial \log s}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial u}+u\right)}{\partial u} = \frac{\partial\left(\frac{\partial \log s}{\partial u}-\frac{k^2xy}{z}+u\right)}{\partial u}.$$

Multiplicirt man daher die vorangehende Gleichung mit $k(1-k^2)$, so kommt

$$k(1-k^2)\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial k}-\frac{\partial x}{\partial k}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2} = -\frac{\partial\left(\frac{\partial \log s}{\partial u}-\frac{k^2xy}{z}+u\right)}{\partial u}+1-k^2,$$

woraus, wenn man nach u integrirt,

$$k(1-k^2)\frac{\frac{\partial x}{\partial k}}{\frac{\partial x}{\partial u}} = -k^2u-\frac{\partial \log s}{\partial u}+\frac{k^2xy}{z},$$

oder

$$\text{(1.)}\qquad k(1-k^2)\frac{\partial x}{\partial k} = -\left(k^2u+\frac{\partial \log s}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+k^2x(1-x^2)$$

folgt. Differentiirt man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}+k^2x^2 = 0$$

nach u und k, so erhält man

$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3}+2k^2x\frac{\partial x}{\partial u} = 0$$
$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^2\,\partial k}+2k^2x\frac{\partial x}{\partial k}+2kx^2 = 0.$$

Vermittelst dieser beiden Gleichungen kann man $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial k}$ aus (1.) eliminiren, und erhält dann

$$k(1-k^2)\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^2\,\partial k}+k^2u\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3}+\frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3}+2k^2x^2-2k^4x^4 = 0.$$

Diese Gleichung werde in Beziehung auf u integrirt, so findet sich, wenn man bemerkt, dass

$$\int_0 u\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3}\partial u = u\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}-\frac{\partial \log s}{\partial u}$$
$$\int_0 \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3}\partial u = \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}-\int_0\left(\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}\right)^2\partial u$$
$$= \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}-k^4\int_0 x^4\,\partial u$$
$$\int_0 k^2x^2\,\partial u = -\frac{\partial \log s}{\partial u}$$

ist,

$$k(1-k^2)\frac{\partial^2 \log s}{\partial u\,\partial k}+k^2u\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}-k^2\frac{\partial \log s}{\partial u}-2\frac{\partial \log s}{\partial u}-\frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}-3k^4\int_0 x^4\,\partial u = 0.$$

Aus $\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}+k^2x^2 = 0$ folgt aber ferner

$$\frac{\partial^4 \log s}{\partial u^4}+2k^2\frac{\partial\left(x\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial^4 \log s}{\partial u^4}+2k^2x\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+2k^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 0,$$
$$\frac{\partial^4 \log s}{\partial u^4}+2k^2-4k^2(1+k^2)x^2+6k^4x^4 = 0,$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3}+2k^2u+4(1+k^2)\frac{\partial \log s}{\partial u}+6k^4\int_0 x^4\,\partial u = 0.$$

Wird diese Gleichung zu der vorhergehenden, die auch $\int_0 x^4\,\partial u$ enthält, addirt, nachdem die letztere mit 2 multiplicirt worden, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + 2k^2 u \frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + 2\frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + 2k^2 \frac{\partial \log s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial^2 \log s}{\partial u\, \partial k} + 2k^2 u = 0,$$

und hieraus durch Integration in Beziehung auf u

$$\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial \log s}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log s}{\partial u}\right)^2 + 2k(1-k^2)\frac{\partial \log s}{\partial k} + k^2 u^2 = 0.$$

Substituirt man nun hier

$$\frac{\partial \log s}{\partial u} = \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} = \frac{1}{s}\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} - \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2, \qquad \frac{\partial \log s}{\partial k} = \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial k},$$

und multiplicirt mit s, so kommt

$$(2.) \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k} + k^2 u^2 s = 0.$$

Setzt man in (1.) $x = \frac{p}{s}$, so ergiebt sich

$$k(1-k^2)\frac{s\frac{\partial p}{\partial k} - p\frac{\partial s}{\partial k}}{s^2} + \left(k^2 u + \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial u}\right)\frac{s\frac{\partial p}{\partial u} - p\frac{\partial s}{\partial u}}{s^2} - k^2\frac{p}{s} + k^2\frac{p^3}{s^3} = 0,$$

oder, wenn man mit $2ps^3$ multiplicirt,

$$ps^2\left(2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k}\right) - sp^2\left(2k^2 u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k}\right)$$
$$+ 2ps\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial u} - 2p^2\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 - k^2 p^2 s^2 + 2k^2 p^4 = 0.$$

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1-(1+k^2)x^2 + k^2 x^4$$

folgt aber

$$s^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 - 2ps\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial u} + p^2\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s^4 - (1+k^2)p^2 s^2 + k^2 p^4,$$

und wenn man vermittelst dieser Gleichung $2ps\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial u}$ aus der vorhergehenden eliminirt,

$$ps^2\left(2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2)p\right) + s^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 - s^4$$
$$= sp^2\left(2k^2 u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k}\right) + p^2\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 - k^2 p^4.$$

Weil aber (§ 1, (8.))

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + s^2, \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + k^2 p^2$$

ist, so verwandelt sich diese Gleichung, durch ps dividirt, in:

$$s\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2)p\right) = p\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k}\right),$$

woraus vermöge (2.)

$$(3.) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2+k^2u^2)p = 0$$

folgt. Aus der Gleichung $x^2+y^2=1$ ergiebt sich $s^2 = p^2+q^2$, und hieraus

$$s\frac{\partial s}{\partial u} = p\frac{\partial p}{\partial u} + q\frac{\partial q}{\partial u}, \quad s\frac{\partial s}{\partial k} = p\frac{\partial p}{\partial k} + q\frac{\partial q}{\partial k}, \quad s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2.$$

Setzt man in der dritten Gleichung

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + s^2, \qquad \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 = q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + r^2 = q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + s^2 - k^2 p^2, \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + k^2 p^2,$$

so findet sich

$$s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + (1-k^2)p^2 + q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + q^2,$$

und daher

$$s\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k} + k^2u^2 s\right) = p\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2+k^2u^2)p\right)$$
$$+ q\left(\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial q}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial q}{\partial k} + (1+k^2u^2)q\right),$$

oder wegen (2, 3)

$$(4.) \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial q}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial q}{\partial k} + (1+k^2u^2)q = 0.$$

Ferner hat man

$$s^2 = k^2p^2 + r^2, \qquad s\frac{\partial s}{\partial u} = k^2 p\frac{\partial p}{\partial u} + r\frac{\partial r}{\partial u}, \qquad s\frac{\partial s}{\partial k} = k^2 p\frac{\partial p}{\partial k} + r\frac{\partial r}{\partial k} + kp^2,$$
$$s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = k^2 p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + k^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + r\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2,$$

oder wegen

$$\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}+k^2p^2,\quad \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}+s^2,\quad \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 = r\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+k^2q^2 = r\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+k^2s^2-k^2p^2,$$

$$s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} = k^2p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}-k^2(1-k^2)p^2+r\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+k^2r^2,$$

und daher

$$s\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial s}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k}+k^2u^2s\right) = k^2p\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial p}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k}+(1-k^2+k^2u^2)p\right)$$
$$+r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial r}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial r}{\partial k}+(k^2+k^2u^2)r\right)$$

d. h.

$$(5.)\qquad \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial r}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial r}{\partial k}+(k^2+k^2u^2)r = 0.$$

Jede der Functionen

$$\mathrm{Al}(u)_1 = p,\qquad \mathrm{Al}(u)_2 = q,\qquad \mathrm{Al}(u)_3 = r,\qquad \mathrm{Al}(u) = s$$

genügt also einer linearen partiellen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung. Diese Gleichungen, welche zur Uebersicht hier zusammengestellt werden mögen,

$$(6.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial u^2}+2k^2u\dfrac{\partial p}{\partial u}+2k(1-k^2)\dfrac{\partial p}{\partial k}+(1-k^2+k^2u^2)p = 0 \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial u^2}+2k^2u\dfrac{\partial q}{\partial u}+2k(1-k^2)\dfrac{\partial q}{\partial k}+(1+k^2u^2)q = 0 \\ \dfrac{\partial^2 r}{\partial u^2}+2k^2u\dfrac{\partial r}{\partial u}+2k(1-k^2)\dfrac{\partial r}{\partial k}+(k^2+k^2u^2)r = 0 \\ \dfrac{\partial^2 s}{\partial u^2}+2k^2u\dfrac{\partial s}{\partial u}+2k(1-k^2)\dfrac{\partial s}{\partial k}+k^2u^2s = 0 \end{cases}$$

haben sämmtlich die Form

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial \chi}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial \chi}{\partial k}+(\tau+k^2u^2)\chi = 0,$$

unter τ eine nur von k abhangende oder constante Grösse verstanden. Setzt man $\chi = \varepsilon\varphi$, und denkt sich unter ε eine Function von k allein, so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial \varphi}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial \varphi}{\partial k}+k^2u^2\varphi+\left(\tau+2\,\frac{k(1-k^2)}{\varepsilon}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial k}\right) = 0.$$

Nimmt man nun hier

$$\begin{array}{lll} \text{wie in (3.)} & \tau = 1-k^2, & \text{und setzt } \varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{k}}, \\ \text{oder wie in (4.)} & \tau = 1, & \text{und setzt } \varepsilon = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}, \\ \text{oder wie in (5.)} & \tau = k^2, & \text{und setzt } \varepsilon = \sqrt{k'}, \end{array}$$

so wird in allen diesen Fällen

$$\tau+\frac{2k(1-k^2)}{\varepsilon}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial k} = 0,$$

und so erhellt, dass die vier Functionen

$$\sqrt{k}\cdot\mathrm{Al}(u)_1,\qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\mathrm{Al}(u)_2,\qquad \sqrt{\frac{1}{k'}}\cdot\mathrm{Al}(u)_3,\qquad \mathrm{Al}(u)$$

sämmtlich einer und derselben partiellen Differential-Gleichung

$$(7.)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial \varphi}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial \varphi}{\partial k}+k^2u^2\varphi = 0$$

Genüge leisten.

§ 3.

Vermittelst der im vorhergehenden § entwickelten Gleichungen gelangt man leicht zu den Reihen-Entwicklungen von $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$ u. s. w. Zuvor mögen aber folgende Relationen angemerkt werden. Aus den beiden Gleichungen

$$\mathrm{sn}\left(ku,\ \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{sn}\,u$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2}+k^2\,\mathrm{sn}\,u^2 = 0$$

ergiebt sich $\mathrm{Al}\left(ku,\ \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}(u)$, und hieraus in Verbindung mit den Formeln

$$\mathrm{sn}\left(ku,\ \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{sn}\,u,\qquad \mathrm{cn}\left(ku,\ \frac{1}{k}\right) = \mathrm{dn}\,u,\qquad \mathrm{dn}\left(ku,\ \frac{1}{k}\right) = \mathrm{cn}\,u$$

zusammengenommen

$$(1.)\qquad \begin{cases} \mathrm{Al}\left(ku,\ \frac{1}{k}\right)_1 = k\,\mathrm{Al}(u)_1, & \mathrm{Al}\left(ku,\ \frac{1}{k}\right)_2 = \mathrm{Al}(u)_3, \\ \mathrm{Al}\left(ku,\ \frac{1}{k}\right)_3 = \mathrm{Al}(u)_2, & \mathrm{Al}\left(ku,\ \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}(u). \end{cases}$$

Es werde nun

$$\mathrm{Al}(u)_1 = p = u - A_1 \frac{u^3}{3'} + A_2 \frac{u^5}{5'} - \cdots + (-1)^n A_n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)'} + \cdots$$

gesetzt,[3]) oder

$$p = \mathrm{S}(-1)^\gamma A_\gamma \frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'},$$

wo dann $A_0 = 1$ zu nehmen ist. Es möge hier zugleich bemerkt werden, dass überall, wo in diesem § griechische Buchstaben als Exponenten oder Indices vorkommen, dieselben durchaus ganze positive Zahlen, die Null mit eingeschlossen, bezeichnen sollen, und dass, wo in den folgenden Formeln ein Coefficient mit einem negativen Index erscheint, dieser gleich 0 zu setzen ist. Dann ist

$$u \frac{\partial p}{\partial u} = \mathrm{S}(-1)^\gamma A_\gamma \frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma)'} = \mathrm{S}(-1)^\gamma (2\gamma+1) A_\gamma \frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'},$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} = \mathrm{S}(-1)^\gamma A_\gamma \frac{u^{2\gamma-1}}{(2\gamma-1)'} = -\mathrm{S}(-1)^\gamma A_{\gamma+1} \frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'}, \qquad \frac{\partial p}{\partial k} = \mathrm{S}(-1)^\gamma \frac{\partial A_\gamma}{\partial k} \frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'},$$

$$u^2 p = \mathrm{S}(-1)^\gamma A_\gamma \frac{u^{2\gamma+3}}{(2\gamma+1)'} = -\mathrm{S}(-1)^\gamma 2\gamma(2\gamma+1) A_{\gamma-1} \frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'},$$

und aus (§ 2, (3.)) ergiebt sich die Recursions-Formel

$$A_{\gamma+1} = [1 + (4\gamma+1)k^2] A_\gamma + 2k(1-k^2) \frac{\partial A_\gamma}{\partial k} - 2\gamma(2\gamma+1) A_{\gamma-1}. \qquad \text{(A)}$$

A_γ ist eine ganze Function von k; weil $\mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_1 = k\mathrm{Al}(u)_1$ ist, so muss

$$k^{2\gamma+1} A_\gamma\left(\frac{1}{k}\right) = k A_\gamma, \qquad k^{2\gamma} A_\gamma\left(\frac{1}{k}\right) = A_\gamma$$

sein, und daraus folgt, dass A_γ vom $(2\gamma)^{\text{ten}}$ Grade ist. Da überdies nur grade Potenzen von k vorkommen dürfen, so kann man setzen

$$A_\gamma = A_{0,\gamma} + A_{1,\gamma-1} k^2 + \cdots + A_{\gamma,0} k^{2\gamma} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha}.$$

Dann ist

$$A_{\gamma+1} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma+1)}{\mathrm{S}} A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha}, \qquad A_\gamma = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma+1)}{\mathrm{S}} A_{\alpha,\beta-1} k^{2\alpha},$$

$$k^2 A_\gamma = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha+2} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma+1)}{\mathrm{S}} A_{\alpha-1,\beta} k^{2\alpha}, \qquad k \frac{\partial A_\gamma}{\partial k} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} 2\alpha A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma+1)}{\mathrm{S}} 2\alpha A_{\alpha,\beta-1} k^{2\alpha},$$

$$k^3 \frac{\partial A_\gamma}{\partial k} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} 2\alpha A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha+2} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma+1)}{\mathrm{S}} (2\alpha-2) A_{\alpha-1,\beta} k^{2\alpha},$$

$$k^2 A_{\gamma-1} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}} A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha+2} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma+1)}{\mathrm{S}} A_{\alpha-1,\beta-1} k^{2\alpha}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in (A), so erhält man die Relation

$$\text{(I.)} \quad A_{\alpha,\beta} = (4\alpha+1) A_{\alpha,\beta-1} + (4\beta+1) A_{\alpha-1,\beta} - (2\alpha+2\beta-2)(2\alpha+2\beta-1) A_{\alpha-1,\beta-1}, \quad (\alpha+\beta=\gamma+1)$$

vermittelst welcher, da $A_{0,0} = 1$ bekannt ist, sämmtliche Coefficienten $A_{\alpha,\beta}$ berechnet werden können. Uebrigens erhellt sofort, dass alle ganze Zahlen sind, und dass, wie auch schon die Gleichung $\mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_1 = k\mathrm{Al}(u)_1$ erfordert, allgemein $A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}$ ist. Man hat dann

$$\text{(2.)} \qquad \mathrm{Al}(u)_1 = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} \left\{(-1)^\gamma A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha} \frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'}\right\}.$$

$\mathrm{Al}(u)_2$ hat die Form

$$\mathrm{Al}(u)_2 = q = 1 - B_1 \frac{u^2}{2'} + B_2 \frac{u^4}{4'} - \cdots + (-1)^n B_n \frac{u^{2n}}{(2n)'} + \cdots,$$

oder

$$q = \mathrm{S}(-1)^\gamma B_\gamma \frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

wo $B_0 = 1$. Es ist dann

$$\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} = \mathrm{S}(-1)^\gamma B_\gamma \frac{u^{2\gamma-2}}{(2\gamma-2)'} = -\mathrm{S}(-1)^\gamma B_{\gamma+1} \frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

$$u \frac{\partial q}{\partial u} = \mathrm{S}(-1)^\gamma B_\gamma \frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma-1)'} = \mathrm{S}(-1)^\gamma 2\gamma B_\gamma \frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'}, \qquad \frac{\partial q}{\partial k} = \mathrm{S}(-1)^\gamma \frac{\partial B_\gamma}{\partial k} \frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

$$u^2 q = \mathrm{S}(-1)^\gamma B_\gamma \frac{u^{2\gamma+2}}{(2\gamma)'} = -\mathrm{S}(-1)^\gamma 2\gamma(2\gamma-1) B_{\gamma-1} \frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

und aus (§ 2, (4.)) folgt die Recursions-Formel

$$B_{\gamma+1} = (1 + 4\gamma k^2) B_\gamma + 2k(1-k^2) \frac{\partial B_\gamma}{\partial k} - (2\gamma-1) 2\gamma k^2 B_{\gamma-1}. \qquad \text{(B)}$$

Weil $\mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_2 = \mathrm{Al}(u)_3$ ist, so muss $\frac{(-1)^{\gamma+1}}{(2\gamma+2)'} k^{2\gamma+2} B_{\gamma+1}\left(\frac{1}{k}\right)$ der Coefficient von $u^{2\gamma+2}$ in der Entwicklung von $\mathrm{Al}(u)_3$ sein, und da dieser eine ganze Function von k^2 ist und überdies für $k = 0$ verschwinden muss, weil $\mathrm{dn}\, u = 1$ wird für $k = 0$, so folgt, dass $B_{\gamma+1}$ von nicht höherem als dem $(2\gamma)^{\text{ten}}$ Grade sein, und man daher setzen kann

$$B_{\gamma+1} = B_{0,\gamma} + B_{1,\gamma-1}k^2 + \cdots + B_{\gamma,0}k^{2\gamma} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha}.$$

Dann ist ferner, $\gamma > 1$ vorausgesetzt,

$$B_\gamma = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}} B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} B_{\alpha,\beta-1}k^{2\alpha}, \qquad k^2 B_\gamma = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}} B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} B_{\alpha-1,\beta}k^{2\alpha},$$

$$k\frac{\partial B_\gamma}{\partial k} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}} 2\alpha B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} 2\alpha B_{\alpha,\beta-1}k^{2\alpha}, \quad k^3\frac{\partial B_\gamma}{\partial k} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}} 2\alpha B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} (2\alpha-2)B_{\alpha-1,\beta}k^{2\alpha},$$

$$k^2 B_{\gamma-1} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-2)}{\mathrm{S}} B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}} B_{\alpha-1,\beta-1}k^{2\alpha}.$$

Daraus ergiebt sich die Relation

$$\text{(II.)} \quad B_{\alpha,\beta} = (4\alpha+1)B_{\alpha,\beta-1} + (4\beta+4)B_{\alpha-1,\beta} - (2\alpha+2\beta-1)(2\alpha+2\beta)B_{\alpha-1,\beta-1}.$$

Es darf hier $\alpha+\beta=\gamma$ nicht kleiner als 2 genommen werden; man erhält aber aus (B) $B_1 = 1$, $B_2 = 1+2k^2$, also $B_{0,0} = 1$, $B_{0,1} = 1$, $B_{1,0} = 2$, und somit können sämmtliche Coefficienten $B_{\alpha,\beta}$ berechnet werden, und man hat dann

$$\text{(3.)} \qquad \mathrm{Al}(u)_2 = 1 - \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}}\left\{(-1)^\gamma B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha}\frac{u^{2\gamma+2}}{(2\gamma+2)'}\right\}.$$

Hieraus folgt sofort, weil $\mathrm{Al}(u)_3 = \mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_2$ ist,

$$\text{(4.)} \qquad \mathrm{Al}(u)_3 = 1 - \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}}\left\{(-1)^\gamma B_{\alpha,\beta}k^{2\beta+2}\frac{u^{2\gamma+2}}{(2\gamma+2)'}\right\}.$$

Die Reihe für $\mathrm{Al}(u)$ endlich hat die Form

$$\mathrm{Al}(u) = s = 1 - C_2\frac{u^4}{4'} + C_3\frac{u^6}{6'} - \cdots + (-1)^{n-1}C_n\frac{u^{2n}}{(2n)'} + \cdots,$$

oder

$$s = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}C_\gamma\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

wo dann $C_0 = -1$, $C_1 = 0$ zu nehmen ist. Es ist

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}C_\gamma\frac{u^{2\gamma-2}}{(2\gamma-2)'} = -\mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}C_{\gamma+1}\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

$$u\frac{\partial s}{\partial u} = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}C_\gamma\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma-1)'} = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}2\gamma C_\gamma\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

$$\frac{\partial s}{\partial k} = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}\frac{\partial C_\gamma}{\partial k}\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'}, \quad u^2 s = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}C_\gamma\frac{u^{2\gamma+2}}{(2\gamma)'} = -\mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}(2\gamma-1)2\gamma C_{\gamma-1}\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

und daher (§ 2, (2.))

$$C_{\gamma+1} = 4\gamma k^2 C_\gamma + 2k(1-k^2)\frac{\partial C_\gamma}{\partial k} - (2\gamma-1)2\gamma k^2 C_{\gamma-1}. \qquad \text{(C)}$$

Weil $\mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}(u)$ ist, so muss $k^{2\gamma}C_\gamma\left(\frac{1}{k}\right) = C_\gamma$ sein, und da zugleich C_γ verschwinden muss für $k = 0$ (sobald $\gamma > 0$), so kann C_γ von nicht höherem als dem $(2\gamma-2)^{\text{ten}}$ Grade sein, und man kann daher

$$C_{\gamma+1} = C_{0,\gamma-1}k^2 + C_{1,\gamma-2}k^4 + \cdots + C_{\gamma-1,0}k^{2\gamma} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}} C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2}$$

setzen, welche Form auch für $\gamma = 0$ noch gilt, weil $C_{0,-1} = 0$ zu setzen ist, und man dann, wie erforderlich, $C_1 = 0$ erhält. Dann ist, $\gamma > 1$ vorausgesetzt,

$$k^2 C_\gamma = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-2)}{\mathrm{S}} C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+4} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}} C_{\alpha-1,\beta}k^{2\alpha+2},$$

$$k\frac{\partial C_\gamma}{\partial k} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-2)}{\mathrm{S}} (2\alpha+2)C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}} (2\alpha+2)C_{\alpha,\beta-1}k^{2\alpha+2},$$

$$k^3\frac{\partial C_\gamma}{\partial k} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-2)}{\mathrm{S}} (2\alpha+2)C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+4} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}} 2\alpha C_{\alpha-1,\beta}k^{2\alpha+2},$$

$$k^2 C_{\gamma-1} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-3)}{\mathrm{S}} C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+4} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}} C_{\alpha-1,\beta-1}k^{2\alpha+2}.$$

Diese Ausdrücke sind in (C) zu substituiren, und so findet sich

$$\text{(III.)} \quad C_{\alpha,\beta} = (4\alpha+4)C_{\alpha,\beta-1} + (4\beta+4)C_{\alpha-1,\beta} - (2\alpha+2\beta+1)(2\alpha+2\beta+2)C_{\alpha-1,\beta-1}.$$

In gegenwärtigem Falle muss $\alpha+\beta = \gamma-1 > 0$ sein; man erhält aber aus (C) $C_2 = 2k^2$, also $C_{0,0} = 2$, und so können vermittelst (III.) sämmtliche Coefficienten gefunden werden, wo sich dann wieder $C_{\alpha,\beta} = C_{\beta,\alpha}$ ergiebt; es ist dann

$$\text{(5.)} \qquad \mathrm{Al}(u) = 1 - \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}}\left\{(-1)^\gamma C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2}\frac{u^{2\gamma+4}}{(2\gamma+4)'}\right\}.$$

Mittelst der Formeln (I, II, III) sind die nachstehenden Ausdrücke der 10 ersten Coefficienten in den Reihen für $\mathrm{Al}(u)_1$ u. s. w. berechnet.

$$\mathrm{Al}(u)_1 = u - A_1\frac{u^3}{3!} + A_2\frac{u^5}{5!} - \cdots + (-1)^n A_n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$A_1 = 1+k^2$

$A_2 = 1+k^4+4k^2$

$A_3 = 1+k^6+9(k^2+k^4)$

$A_4 = 1+k^8+16(k^2+k^6)-6k^4$

$A_5 = 1+k^{10}+25(k^2+k^8)-494(k^4+k^6)$

$A_6 = 1+k^{12}+36(k^2+k^{10})-5781(k^4+k^8)-12184k^6$

$A_7 = 1+k^{14}+49(k^2+k^{12})-55173(k^4+k^{10})-179605(k^6+k^8)$

$A_8 = 1+k^{16}+64(k^2+k^{14})-502892(k^4+k^{12})-2279488(k^6+k^{10})-3547930k^8$

$A_9 = 1+k^{18}+81(k^2+k^{16})-4537500(k^4+k^{14})-27198588(k^6+k^{12})-59331498(k^8+k^{10})$

$A_{10} = 1+k^{20}+100(k^2+k^{18})-40856715(k^4+k^{16})-313180080(k^6+k^{14})-909015270(k^8+k^{12})$
$\qquad -1278530856k^{10}$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(u)_2 = 1 - B_1\frac{u^2}{2!} + B_2\frac{u^4}{4!} - \cdots + (-1)^n B_n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$B_1 = 1$

$B_2 = 1+2k^2$

$B_3 = 1+6k^2+8k^4$

$B_4 = 1+12k^2+60k^4+32k^6$

$B_5 = 1+20k^2+348k^4+448k^6+128k^8$

$B_6 = 1+30k^2+2372k^4+4600k^6+2880k^8+512k^{10}$

$B_7 = 1+42k^2+19308k^4+51816k^6+45024k^8+16896k^{10}+2048k^{12}$

$B_8 = 1+56k^2+169320k^4+628064k^6+757264k^8+370944k^{10}+93184k^{12}+8192k^{14}$

$B_9 = 1+72k^2+1515368k^4+7594592k^6+12998928k^8+9100288k^{10}+2725888k^{12}$
$\qquad +491520k^{14}+32768k^{16}$

$B_{10} = 1+90k^2+13623480k^4+89348080k^6+211064400k^8+219361824k^{10}+100242944k^{12}$
$\qquad +18450432k^{14}+2506752k^{16}+131072k^{18}$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(u)_3 = 1 - B_1'\frac{u^2}{2!} + B_2'\frac{u^4}{4!} - \cdots + (-1)^n B_n' \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$B_1' = k^2$

$B_2' = 2k^2+k^4$

$B_3' = 8k^2+6k^4+k^6$

$B_4' = 32k^2+60k^4+12k^6+k^8$

$B_5' = 128k^2+448k^4+348k^6+20k^8+k^{10}$

$B_6' = 512k^2+2880k^4+4600k^6+2372k^8+30k^{10}+k^{12}$

$B_7' = 2048k^2+16896k^4+45024k^6+51816k^8+19308k^{10}+42k^{12}+k^{14}$

$B_8' = 8192k^2+93184k^4+370944k^6+757264k^8+628064k^{10}+169320k^{12}+56k^{14}+k^{16}$

$B_9' = 32768k^2+491520k^4+2725888k^6+9100288k^8+12998928k^{10}+7594592k^{12}$
$\qquad +1515368k^{14}+72k^{16}+k^{18}$

$B_{10}' = 131072k^2+2506752k^4+18450432k^6+100242944k^8+219361824k^{10}+211064400k^{12}$
$\qquad +89348080k^{14}+13623480k^{16}+90k^{18}+k^{20}$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(u) = 1 - C_2\frac{u^4}{4!} + C_3\frac{u^6}{6!} - \cdots + (-1)^{n-1} C_n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$C_2 = 2k^2$

$C_3 = 8(k^2+k^4)$

$C_4 = 32(k^2+k^6)+68k^4$

$C_5 = 128(k^2+k^8)+480(k^4+k^6)$

$C_6 = 512(k^2+k^{10})+3008(k^4+k^8)+5400k^6$

$C_7 = 2048(k^2+k^{12})+17408(k^4+k^{10})+49568(k^6+k^8)$

$C_8 = 8192(k^2+k^{14})+95232(k^4+k^{12})+395520(k^6+k^{10})+603376k^8$

$C_9 = 32768(k^2+k^{16})+499712(k^4+k^{14})+2853888(k^6+k^{12})+5668096(k^8+k^{10})$

$C_{10} = 131072(k^2+k^{18})+2539520(k^4+k^{16})+19097600(k^6+k^{14})+38153728(k^8+k^{12})$
$\qquad +42090784k^{10}.$

u. s. w.

§ 4.

Es mögen jetzt zunächst einige Formeln hergeleitet werden, welche für die weiteren Entwicklungen nöthig sind.

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2} = -k^2 \operatorname{sn} u^2 = \operatorname{dn} u^2 - 1$$

folgt

$$\text{(1.)} \qquad \mathrm{el}(u) = \int_0 \operatorname{dn} u^2 \cdot \partial u = u + \frac{1}{\mathrm{Al}(u)}\frac{\partial \mathrm{Al}(u)}{\partial u},$$

und hieraus

$$\text{(2.)} \qquad \mathrm{lm}(u) = \int_0 \mathrm{el}(u) \cdot \partial u = \tfrac{1}{2}u^2 + \log \mathrm{Al}(u).$$

Die Formel

$$\mathrm{lm}(u+v) + \mathrm{lm}(u-v) = 2\,\mathrm{lm}(u) + 2\,\mathrm{lm}(v) + \log(1 - k^2 \operatorname{sn} u^2 \operatorname{sn} v^2)$$

giebt dann

$$\log \mathrm{Al}(u+v) + \log \mathrm{Al}(u-v) = \log[\mathrm{Al}(u)^2 \mathrm{Al}(v)^2 - k^2 \mathrm{Al}(u)_1^2 \mathrm{Al}(v)_1^2],$$

oder

$$\text{(3.)} \qquad \mathrm{Al}(u+v)\,\mathrm{Al}(u-v) = \mathrm{Al}(u)^2 \mathrm{Al}(v)^2 - k^2 \mathrm{Al}(u)_1^2 \mathrm{Al}(v)_1^2.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den Formeln, welche Relationen zwischen den Modular-Functionen von $u+v$, $u-v$, u, v ausdrückten, so lassen sich eine Menge Relationen zwischen den Functionen $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, $\mathrm{Al}(u)$ herleiten, die ich aber übergehe, weil sie in keiner Beziehung zu dem Folgenden stehen. Es ist ferner

$$\mathrm{lm}(ui) = \mathrm{lm}'(u) - \tfrac{1}{2}u^2 + \log \mathrm{cn}'u,$$

oder

$$\log \mathrm{Al}(ui) - \tfrac{1}{2}u^2 = \log \mathrm{Al}'(u) + \log \mathrm{Al}'(u)_2 - \log \mathrm{Al}'(u)$$

$$\mathrm{Al}(ui) = e^{\frac{1}{2}uu}\,\mathrm{Al}'(u)_2,$$

wenn man auch hier durch den beigefügten Accent andeutet, dass der Modul k mit dem conjugirten k' zu vertauschen ist. In Verbindung mit den Formeln

$$\mathrm{sn}(ui) = i\frac{\mathrm{sn}'u}{\mathrm{cn}'u}, \qquad \mathrm{cn}(ui) = \frac{1}{\mathrm{cn}'u}, \qquad \mathrm{dn}(ui) = \frac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'u}$$

giebt diese Gleichung zusammengenommen

$$(4.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(ui)_1 = i e^{\frac{1}{2}uu}\,\mathrm{Al}'(u)_1, & \mathrm{Al}(ui)_2 = e^{\frac{1}{2}uu}\,\mathrm{Al}'(u), \\ \mathrm{Al}(ui)_3 = e^{\frac{1}{2}uu}\,\mathrm{Al}'(u)_3, & \mathrm{Al}(ui) = e^{\frac{1}{2}uu}\,\mathrm{Al}'(u)_2. \end{cases}$$

Weiter hat man

$$\mathrm{lm}(u+K) = \mathrm{lm}(u) + \tfrac{1}{2}EK + Eu + \log \mathrm{dn}\,u - \log\sqrt{k'},$$

$$\mathrm{lm}(u+K) - \tfrac{1}{2}(u+K)^2 = \mathrm{lm}(u) - \tfrac{1}{2}u^2 + \log \mathrm{dn}\,u - (K-E)u - \tfrac{1}{2}K(K-E) - \log\sqrt{k'},$$

$$\log \mathrm{Al}(u+K) = \log \mathrm{Al}(u)_3 - (K-E)(u+\tfrac{1}{2}K) + \log\frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Setzt man

$$\tau = 1 - \frac{E}{K},$$

so ist

$$-(K-E)(u+\tfrac{1}{2}K) = -\tfrac{1}{2}\tau(u+K)^2 + \tfrac{1}{2}\tau u^2,$$

und man erhält aus der vorstehenden Gleichung

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+K)^2}\,\mathrm{Al}(u+K) = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_3.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den folgenden

$$\mathrm{sn}(u+K) = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \qquad \mathrm{cn}(u+K) = -k'\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \qquad \mathrm{dn}(u+K) = \frac{k'}{\mathrm{dn}\,u},$$

so findet sich

$$(5.)\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau(u+K)^2}\mathrm{Al}(u+K)_1 = \frac{1}{\sqrt{k'}}e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_2, & e^{\frac{1}{2}\tau(u+K)^2}\mathrm{Al}(u+K)_2 = -\sqrt{k'}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_1, \\ e^{\frac{1}{2}\tau(u+K)^2}\mathrm{Al}(u+K)_3 = \sqrt{k'}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u), & e^{\frac{1}{2}\tau(u+K)^2}\mathrm{Al}(u+K) = \frac{1}{\sqrt{k'}}e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3. \end{cases}$$

Vertauscht man in der obigen Gleichung

$$\log \mathrm{Al}(u+K) = \log \mathrm{Al}(u)_3 - (K-E)(u+\tfrac{1}{2}K) + \log\frac{1}{\sqrt{k'}}$$

k mit k', so ergiebt sich

$$\log \mathrm{Al}'(u+K') = \log \mathrm{Al}'(u)_3 - (K'-E')(u+\tfrac{1}{2}K') + \log\frac{1}{\sqrt{k}},$$

oder vermöge (4.)

$$\log \mathrm{Al}(ui+K'i)_2 - \tfrac{1}{2}(u+K')^2 = \log \mathrm{Al}(ui)_3 - \tfrac{1}{2}u^2 - (K'-E')(u+\tfrac{1}{2}K') + \log\frac{1}{\sqrt{k}},$$

oder, wenn $\frac{u}{i}$ für u gesetzt wird,

$$\log \mathrm{Al}(u+K'i)_2 = \log \mathrm{Al}(u)_3 - E'i(u+\tfrac{1}{2}K'i) + \log\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Wird nun

$$\tau' = \frac{E'}{K'}$$

gesetzt, so folgt hieraus

$$e^{\frac{1}{2}\tau'(u+K'i)^2}\,\mathrm{Al}(u+K'i)_2 = \frac{1}{\sqrt{k}}\,e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\,\mathrm{Al}(u)_3,$$

und mit Rücksicht auf die Formeln

$$\mathrm{sn}(u+K'i) = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}, \qquad \mathrm{cn}(u+K'i) = \frac{1}{ki}\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}, \qquad \mathrm{dn}(u+K'i) = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

zusammengenommen

$$(6.)\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau'(u+K'i)^2}\mathrm{Al}(u+K'i)_1 = \frac{i}{\sqrt{k}}e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u), & e^{\frac{1}{2}\tau'(u+K'i)^2}\mathrm{Al}(u+K'i) = i\sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u)_1, \\ e^{\frac{1}{2}\tau'(u+K'i)^2}\mathrm{Al}(u+K'i)_2 = \frac{1}{\sqrt{k}}e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u)_3, & e^{\frac{1}{2}\tau'(u+K'i)^2}\mathrm{Al}(u+K'i)_3 = \sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u)_2. \end{cases}$$

Aus (5, 6) folgt sofort weiter

$$(7.)\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K)^2}\mathrm{Al}(u+2K)_1 = -e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_1, & e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K)^2}\mathrm{Al}(u+2K)_2 = -e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_2, \\ e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K)^2}\mathrm{Al}(u+2K)_3 = e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3, & e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K)^2}\mathrm{Al}(u+2K) = e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u). \end{cases}$$

$$(8.)\begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2K'i)_1 = -e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u)_1, & e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2K'i)_2 = e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u)_2, \\ e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2K'i)_3 = e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u)_3, & e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2K'i) = -e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u). \end{cases}$$

Es werde jetzt

$$\omega_0 = 2\alpha K + 2\beta K'i, \qquad \rho_0 = 2\alpha(K-E) + 2\beta E'i, \qquad \tau_0 = \frac{\rho_0}{\omega_0}$$

gesetzt, unter α, β beliebige ganze (positive oder negative) Zahlen verstanden. Aus (7, 8) leitet man her

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+2\alpha K)^2}\mathrm{Al}(u+2\alpha K) = e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u),$$
$$e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2\beta K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2\beta K'i) = (-1)^{\beta} e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u).$$

Setzt man in der ersten Gleichung $u+2\beta K'i$ für u und benutzt dann die zweite, so erhält man

$$e^{\delta}\mathrm{Al}(u+\omega_0) = (-1)^{\beta}\mathrm{Al}(u),$$

wo

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau(u+2\alpha K+2\beta K'i)^2 - \tfrac{1}{2}\tau(u+2\beta K'i)^2 + \tfrac{1}{2}\tau'(u+2\beta K'i)^2 - \tfrac{1}{2}\tau' u^2$$

ist. Zu einer Reduction dieses Ausdrucks gelangt man auf folgende Weise. Es sei

$$A = aK+bK'i, \qquad B = a(K-E)+bE'i, \qquad C = \frac{B}{A}$$
$$A' = a'K+b'K'i, \qquad B' = a'(K-E)+b'E'i, \qquad C' = \frac{B'}{A'}$$
$$A'' = A+A', \qquad B'' = B+B', \qquad C'' = C+C',$$

wo a, b, a', b' willkürliche Grössen bedeuten, so hat man

$$(9.) \qquad AB'-BA' = (ab'-ba')i(KE'+EK'-KK') = (ab'-ba')\frac{\pi}{2}i.$$

Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}C(u+A)^2 - \tfrac{1}{2}Cu^2 = B(u+\tfrac{1}{2}A),$$

und daher

$$C(u+A+A')^2 - \tfrac{1}{2}C(u+A')^2 + \tfrac{1}{2}C'(u+A')^2 - \tfrac{1}{2}C'u^2 = B(u+A'+\tfrac{1}{2}A) + B'(u+\tfrac{1}{2}A')$$
$$= (B+B')u + BA' + \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}A'B'.$$

Aber es ist — nach (9.) —

$$BA' + \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}A'B' = \tfrac{1}{2}BA' + \tfrac{1}{2}AB' + \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}A'B' - (ab'-ba')\frac{\pi}{4}i$$
$$= \tfrac{1}{2}(B+B')(A+A') - (ab'-ba')\frac{\pi}{4}i.$$

Daher

$$(10.) \quad \tfrac{1}{2}C(u+A+A')^2 - \tfrac{1}{2}C(u+A')^2 + \tfrac{1}{2}C'(u+A')^2 - \tfrac{1}{2}C'u^2$$
$$= (B+B')(u+\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}A') - (ab'-ba')\frac{\pi}{4}i = \tfrac{1}{2}C''(u+A'')^2 - \tfrac{1}{2}C''u^2 - (ab'-ba')\frac{\pi}{4}i.$$

Nimmt man nun hier $a = 2\alpha$, $b = 0$, $a' = 0$, $b' = 2\beta$, so giebt diese Gleichung

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2 - \tfrac{1}{2}\tau_0 u^2 - \alpha\beta\pi i,$$

und daher ist

$$e^{\frac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_0) = (-1)^{(\alpha-1)\beta} e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u),$$

und hieraus ergiebt sich mittelst der Formeln

$$\mathrm{sn}(u+\omega_0) = (-1)^{\alpha}\mathrm{sn}\,u, \qquad \mathrm{cn}(u+\omega_0) = (-1)^{\alpha+\beta}\mathrm{cn}\,u, \qquad \mathrm{dn}(u+\omega_0) = (-1)^{\beta}\mathrm{dn}\,u$$

$$(11.)\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_0)_1 = (-1)^{\alpha\beta+\alpha+\beta} e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_1, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_0)_2 = (-1)^{\alpha(\beta+1)} e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_2, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_0)_3 = (-1)^{\alpha\beta} e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_3, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_0) = (-1)^{(\alpha+1)\beta} e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u). \end{cases}$$

Ferner werde

$$\omega_1 = (2\alpha+1)K + 2\beta K'i, \qquad \rho_1 = (2\alpha+1)(K-E) + 2\beta E'i, \qquad \tau_1 = \frac{\rho_1}{\omega_1}$$

gesetzt. Aus (5.) in Verbindung mit (7.) folgt

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+(2\alpha+1)K)^2}\mathrm{Al}(u+(2\alpha+1)K) = \frac{1}{\sqrt{k'}} e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3,$$

und aus (8.)

$$e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2\beta K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2\beta K'i)_3 = e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u)_3.$$

Setzt man in der ersten Gleichung $u+2\beta K'i$ für u und reducirt mittelst der zweiten, so findet sich

$$e^{\delta}\mathrm{Al}(u+\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{k'}}\mathrm{Al}(u)_3,$$

wo

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau(u+(2\alpha+1)K+2\beta K'i)^2 - \tfrac{1}{2}\tau(u+2\beta K'i)^2 + \tfrac{1}{2}\tau'(u+2\beta K'i)^2 - \tfrac{1}{2}\tau' u^2$$

ist, oder — nach (10.), wenn man $a = 2\alpha+1$, $b = 0$, $a' = 0$, $b' = 2\beta$ nimmt —

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2 - \tfrac{1}{2}\tau_1 u^2 - \beta(2\alpha+1)\frac{\pi}{2}i,$$

und daher

$$e^{\frac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_1) = (-1)^{\alpha\beta}\frac{i^\beta}{\sqrt{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\,\mathrm{Al}(u)_3.$$

Diese Gleichung führt in Verbindung mit den Formeln

$$\mathrm{sn}(u+\omega_1) = (-1)^\alpha\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{cn}(u+\omega_1) = (-1)^{\alpha+\beta+1}\frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{dn}(u+\omega_1) = (-1)^\beta\frac{k'}{\mathrm{dn}\,u}$$

zu den folgenden

$$(12.)\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_1)_1 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{(-1)^\alpha i^\beta}{\sqrt{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\,\mathrm{Al}(u)_2, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_1)_2 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{-\sqrt{k'}}{(-1)^\alpha i^\beta}\,e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\,\mathrm{Al}(u)_1, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_1)_3 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{\sqrt{k'}}{i^\beta}\,e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\,\mathrm{Al}(u), \\ e^{\frac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_1) = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{i^\beta}{\sqrt{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\,\mathrm{Al}(u)_3. \end{cases}$$

Weiter sei

$$\omega_2 = 2\alpha K+(2\beta+1)K'i,\qquad \rho_2 = 2\alpha(K-E)+(2\beta+1)E'i,\qquad \tau_2 = \frac{\rho_2}{\omega_2}.$$

In der Gleichung

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+2\alpha K)^2}\,\mathrm{Al}(u+2\alpha K) = e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)$$

werde $u+(2\beta+1)K'i$ für u gesetzt, und dann die aus (6.) und (8.) sich ergebende

$$e^{\frac{1}{2}\tau'(u+(2\beta+1)K'i)^2}\,\mathrm{Al}(u+(2\beta+1)K'i) = (-1)^\beta i\sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\,\mathrm{Al}(u)$$

angewandt, so erhält man

$$e^\delta\,\mathrm{Al}(u+\omega_2) = (-1)^\beta i\sqrt{k}\,\mathrm{Al}(u)_1,$$

wo

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau(u+2\alpha K+(2\beta+1)K'i)^2-\tfrac{1}{2}\tau(u+(2\beta+1)K'i)^2+\tfrac{1}{2}\tau'(u+(2\beta+1)K'i)-\tfrac{1}{2}\tau' uu,$$

oder — nach (10.), wenn $a = 2\alpha$, $b = 0$, $a' = 0$, $b' = 2\beta+1$ gesetzt wird —

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2-\tfrac{1}{2}\tau_2 u^2-\alpha(2\beta+1)\frac{\pi}{2}i$$

ist. Mithin

$$e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_2) = (-1)^{(\alpha+1)\beta}\frac{i}{i^\alpha\sqrt{k}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\,\mathrm{Al}(u)_1.$$

Mit Hülfe der Formeln

$$\mathrm{sn}(u+\omega_2) = (-1)^\alpha\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u},\quad \mathrm{cn}(u+\omega_2) = \frac{(-1)^{\alpha+\beta}}{i}\frac{\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u},\quad \mathrm{dn}(u+\omega_2) = \frac{(-1)^\beta}{i}\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

folgert man hieraus

$$(13.)\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_2)_1 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{(-1)^\beta i}{i^\alpha\sqrt{k}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\,\mathrm{Al}(u), \\ e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_2) = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{i^{\alpha+1}\sqrt{k}}{(-1)^\beta}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\,\mathrm{Al}(u)_1, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_2)_3 = (-1)^{\alpha\beta}\,i^\alpha\sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\,\mathrm{Al}(u)_2, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_2)_2 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{1}{i^\alpha\sqrt{k}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\,\mathrm{Al}(u)_3. \end{cases}$$

Endlich sei

$$\omega_3 = (2\alpha+1)K+(2\beta+1)K'i,\qquad \rho_3 = (2\alpha+1)(K-E)+(2\beta+1)E'i,\qquad \tau_3 = \frac{\rho_3}{\omega_3}.$$

In der Gleichung

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+(2\alpha+1)K)^2}\,\mathrm{Al}(u+(2\alpha+1)K) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_3$$

werde $u+(2\beta+1)K'i$ für u gesetzt, so erhält man vermittelst der aus (6.) und (8.) folgenden

$$e^{\frac{1}{2}\tau'(u+(2\beta+1)K'i)^2}\,\mathrm{Al}(u+(2\beta+1)K'i)_3 = \sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\,\mathrm{Al}(u)_2$$

$$e^\delta\,\mathrm{Al}(u+\omega_3) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{Al}(u)_2,$$

wo

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau(u+(2\alpha+1)K+(2\beta+1)K'i)^2-\tfrac{1}{2}\tau(u+(2\beta+1)K'i)^2+\tfrac{1}{2}\tau'(u+(2\beta+1)K'i)^2-\tfrac{1}{2}\tau' u^2,$$

oder — nach (10.), wenn $a = 2\alpha+1$, $a' = 0$, $b' = 2\beta+1$ genommen wird —

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2-\tfrac{1}{2}\tau_3 u^2-\tfrac{1}{4}(2\alpha+1)(2\beta+1)\pi i = \tfrac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2-\tfrac{1}{2}\tau_3 u^2-\alpha\beta\pi i+(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi}{4}i$$

ist. Also, da $e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{i}$,

$$e^{\frac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2}\,\mathrm{Al}(u+\omega_3) = (-1)^{\alpha\beta}\,i^{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{ki}{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_3 uu}\,\mathrm{Al}(u)_2.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den folgenden

$$\operatorname{sn}(u+\omega_3) = (-1)^{\alpha}\frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{cn}(u+\omega_3) = (-1)^{\alpha+\beta}\frac{k'}{ki}\frac{1}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{dn}(u+\omega_3) = (-1)^{\beta} k'i\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},$$

so erhält man

$$(14.)\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_3)_1 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{i^{\beta-\alpha}\sqrt{\frac{ki}{k'}}}{k}\, e^{\frac{1}{2}\tau_3 uu}\mathrm{Al}(u)_3, \\[2ex] e^{\frac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_3)_3 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{-k}{i^{\beta-\alpha}\sqrt{\frac{ki}{k'}}}\, e^{\frac{1}{2}\tau_3 uu}\mathrm{Al}(u)_1, \\[2ex] e^{\frac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_3)_2 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{k}{i^{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{ki}{k'}}}\, e^{\frac{1}{2}\tau_3 uu}\mathrm{Al}(u), \\[2ex] e^{\frac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_3) \;= (-1)^{\alpha\beta}\, i^{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{ki}{k'}}\, e^{\frac{1}{2}\tau_3 uu}\mathrm{Al}(u)_2. \end{cases}$$

§ 5.

Nach den Formeln (11.) des vorigen § bleiben die Functionen $e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_1$, $e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_2$ u. s. w. ungeändert, oder ändern nur ihr Zeichen, wenn $u+\omega_0$ für u gesetzt wird. Diese Eigenschaft hat zur Folge, dass sie in Reihen entwickelt werden können, die nach den trigonometrischen Functionen der Vielfachen von $\frac{\pi}{\omega_0}u$ fortschreiten, und die gleichfalls für jeden reellen und imaginären Werth von u und k convergiren. Diese Reihen lassen sich einfach mit Hülfe der im vorhergehenden § entwickelten Relationen herleiten, jedoch vollkommen strenge nur unter der Bedingung, dass ihre Convergenz für jeden Werth von u und k zuvor nachgewiesen sei.

Wenn $F(x)$ eine Function ist, die für jeden Werth von x zwischen den reellen Grenzen a, b endlich und continuirlich bleibt, so giebt bekanntlich die unendliche Reihe

$$\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos gx + A_2\cos 2gx + \cdots + A_r\cos rgx + \cdots$$
$$+ B_1\sin gx + B_2\sin 2gx + \cdots + B_r\sin rgx + \cdots,$$

wo $g = \frac{2\pi}{b-a}$, und allgemein

$$A_r = \frac{g}{\pi}\int_a^b F(x)\cos rgx.\partial x, \qquad B_r = \frac{g}{\pi}\int_a^b F(x)\sin rgx.\partial x$$

ist, den Werth von $F(x)$ für jeden zwischen a, b enthaltenen Werth von x. Für $x = a$, und $x = b$ ist die Summe der Reihe $= \frac{1}{2}[F(a)+F(b)]$. Da ferner die Reihe ungeändert bleibt, wenn $x+b-a$ für x gesetzt wird, so folgt, dass $F(x)$, wofern diese Function von $x = -\infty$ bis $x = \infty$ continuirlich bleibt und ihren Werth nicht ändert, wenn x in $x+b-a$ übergeht, für jeden reellen Werth von x durch dieselbe dargestellt ist. Es fragt sich nun, wenn eine Function so definirt ist, dass ihr auch für imaginäre Werthe des Arguments bestimmte Werthe zukommen, ob sie auch für diese durch eine convergente Reihe von der angegebenen Form dargestellt werden könne. Für Functionen von der Beschaffenheit wie die hier betrachteten $e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_1$ u. s. w. ist die Beantwortung dieser Frage in folgendem Satze enthalten.

Wenn $F(x)$ eine Function ist, die nach ganzen Potenzen von x in eine beständig convergirende Reihe (mit reellen oder imaginären Coefficienten) entwickelt werden kann, und ungeändert bleibt, wenn x in $x+a$ übergeht, wo a reell oder imaginär sein kann, so ist die Reihe

$$\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{2\pi}{a}x + A_2\cos\frac{4\pi}{a}x + \cdots + A_r\cos\frac{2r\pi}{a}x + \cdots$$
$$+ B_1\sin\frac{2\pi}{a}x + B_2\sin\frac{4\pi}{a}x + \cdots + B_r\sin\frac{2r\pi}{a}x + \cdots,$$

worin allgemein

$$A_r = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{2r\pi}{a}x.\partial x, \qquad B_r = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{2r\pi}{a}x.\partial x,$$

für jeden reellen oder imaginären Werth von x convergent, und ihre Summe gleich $F(x)$. Ist aber

$$F(x+a) = -F(x),$$

so erhält man $F(x)$ durch eine convergente Reihe von der Form

$$A_0\cos\frac{\pi}{a}x + A_1\cos\frac{3\pi}{a}x + \cdots + A_r\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x + \cdots$$
$$+ B_0\sin\frac{\pi}{a}x + B_1\sin\frac{3\pi}{a}x + \cdots + B_r\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x + \cdots$$

dargestellt, wo

$$A_r = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x.\partial x, \qquad B_r = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x.\partial x$$

ist.

Es werde zuerst angenommen, dass alle Coefficienten der Reihe, worin $F(x)$ entwickelt werden kann, reell seien, und man

$$F(x) = F(x+2\pi)$$

habe. Setzt man $x = u+vi$, unter u, v reelle Veränderliche verstanden, so geht $F(x)$ in eine Function von u und v über, und man hat

$$F(x) = F(u+vi) = \varphi + i\psi,$$

wo φ, ψ reelle und, so wie ihre Differentialquotienten aller Ordnungen, beständig endliche und continuirliche Functionen von u, v sind. Wird $u+2\pi$ für u gesetzt, so ist

$$\varphi(u+2\pi, v) + i\psi(u+2\pi, v) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v),$$

d. h.

$$\varphi(u+2\pi, v) = \varphi(u, v), \qquad \psi(u+2\pi, v) = \psi(u, v).$$

Vermöge dieser Eigenschaften von φ, ψ erhält man nach dem vorhin angeführten Satze, wenn man sie blos als Functionen von u betrachtet, und

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi . \cos ru . \partial u, \qquad a'_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi . \sin ru . \partial u,$$
$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi . \cos ru . \partial u, \qquad b'_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi . \sin ru . \partial u$$

setzt,

$$\begin{aligned}\varphi &= \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos u + \cdots + a_r \cos ru + \cdots \\ &\quad + a'_1 \sin u + \cdots + a'_r \sin ru + \cdots, \\ \psi &= \tfrac{1}{2}b_0 + b_1 \cos u + \cdots + b_r \cos ru + \cdots \\ &\quad + b'_1 \sin u + \cdots + b'_r \sin ru + \cdots\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}F(u+vi) &= \tfrac{1}{2}(a_0+b_0 i) + (a_1+b_1 i)\cos u + \cdots + (a_r+b_r i)\cos ru + \cdots \\ &\quad + (a'_1+b'_1 i)\sin u + \cdots + (a'_r+b'_r i)\sin ru + \cdots\end{aligned}$$

Hier sind nun die Coefficienten a_r, b_r, a'_r, b'_r Functionen von v; soll aber der zu beweisende Satz richtig sein, so muss sich die vorstehende Reihe auf die Form

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos(u+vi) + \cdots + A_r \cos r(u+vi) + \cdots \\ &\quad + B_1 \sin(u+vi) + \cdots + B_r \sin r(u+vi) + \cdots\end{aligned}$$

bringen lassen, in der Art, dass A_r, B_r von u und v unabhängig sind. Die Vergleichung beider Formen giebt

$$\begin{aligned}a_r + b_r i &= A_r \mathfrak{Cos}\, rv + iB_r \mathfrak{Sin}\, rv \\ a'_r + b'_r i &= B_r \mathfrak{Cos}\, rv - iA_r \mathfrak{Sin}\, rv,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}A_r &= (a_r+b_r i)\mathfrak{Cos}\, rv - i(a'_r+b'_r i)\mathfrak{Sin}\, rv \\ B_r &= (a'_r+b'_r i)\mathfrak{Cos}\, rv + i(a_r+b_r i)\mathfrak{Sin}\, rv,\end{aligned}$$

oder, wenn man für a_r, a'_r, b_r, b'_r ihre Werthe setzt,

$$A_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi+\psi i)\cos r(u+vi) . \partial u = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(u+vi)\cos r(u+vi) . \partial u,$$
$$B_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi+\psi i)\sin r(u+vi) . \partial u = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(u+vi)\sin r(u+vi) . \partial u.$$

Es haben aber die Functionen $F(x)\cos rx$, $F(x)\sin rx$ ganz dieselbe Beschaffenheit wie $F(x)$, so dass auch, wenn man

$$\begin{aligned}F(x)\cos rx &= F(u+vi)\cos r(u+vi) = P + Qi, \\ F(x)\sin rx &= F(u+vi)\sin r(u+vi) = P' + Q'i\end{aligned}$$

setzt, P, Q, P', Q' reelle Functionen von derselben Beschaffenheit wie φ, ψ sind und namentlich

$$\begin{aligned}P(u+2\pi, v) &= P(u, v), \qquad Q(u+2\pi, v) = Q(u, v), \\ P'(u+2\pi, v) &= P'(u, v), \qquad Q'(u+2\pi, v) = Q'(u, v)\end{aligned}$$

ist. Differentiirt man die beiden vorhergehenden Gleichungen nach u und v, so erhält man

$$\frac{\partial P}{\partial u} = -\frac{\partial Q}{\partial v}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial v}, \qquad \frac{\partial P'}{\partial u} = -\frac{\partial Q'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial Q'}{\partial u} = \frac{\partial P'}{\partial v},$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} P\,\partial u = \int_0^{2\pi}\frac{\partial P}{\partial v}\partial u = \int_0^{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial u}\partial u = Q(2\pi, v) - Q(0, v),$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} Q\,\partial u = \int_0^{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial v}\partial u = -\int_0^{2\pi}\frac{\partial P}{\partial u}\partial u = P(0, v) - P(2\pi, v),$$

und ebenso

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} P'\partial u = Q'(2\pi, v) - Q'(0, v), \qquad \frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} Q'\partial u = P'(0, v) - P'(2\pi, v).$$

Aber nach den oben angegebenen Gleichungen ist

$$P(2\pi, v) = P(0, v), \qquad Q(2\pi, v) = Q(0, v), \qquad P'(2\pi, v) = P'(0, v), \qquad Q'(2\pi, v) = Q'(0, v),$$

also

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} P\,\partial u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} Q\,\partial u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} P'\partial u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} Q'\partial u = 0.$$

Es sind also in der That

$$A_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(P+Qi)\,\partial u, \quad B_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(P'+Q'i)\,\partial u$$

von v unabhängig, und man kann daher bei Bestimmung dieser Grössen $v = 0$ setzen, wo man dann

$$A_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(u)\cos ru.\partial u, \quad B_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(u)\sin ru.\partial u$$

erhält. Die Reihe

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + \cdots + A_r\cos rx + \cdots\\ &\quad + B_1\sin x + \cdots + B_r\sin rx + \cdots,\end{aligned}$$

deren Coefficienten so bestimmt sind, dass für alle reellen Werthe von x ihre Summe gleich $F(x)$ ist, geht also, wenn $x = u+vi$ gesetzt wird, in die oben für $F(u+vi)$ gefundene und für alle reellen Werthe von u und v convergirende über, und sie giebt daher den Werth von $F(x)$ für jedes beliebige x.

Der allgemeinere Fall, wo $F(x) = F(x+a)$ ist, und a einen beliebigen reellen oder imaginären Werth hat, auch die Coefficienten der Reihe für $F(x)$ beliebige Werthe haben können, wird leicht auf den hier betrachteten zurückgeführt. Setzt man nämlich $x = \frac{a}{2\pi}y$, so geht $F(x)$ in eine Function von y über, und man kann $F(x) = \varphi(y) + i\psi(y)$ setzen, in der Art, dass die Reihen-Entwicklungen von φ, ψ nach Potenzen von y nur reelle Coefficienten haben. Setzt man $x+a$ für x, so geht y in $y+2\pi$ über, und man hat

$$\varphi(y+2\pi)+i\psi(y+2\pi) = \varphi(y)+i\psi(y), \quad \text{d. h.} \quad \varphi(y+2\pi) = \varphi(y), \quad \psi(y+2\pi) = \psi(y),$$

also nach dem eben Bewiesenen für jeden Werth von y

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos y + \cdots + a_r\cos ry + \cdots\\ &\quad + a_1'\sin y + \cdots + a_r'\sin ry + \cdots,\\ \psi(y) &= \tfrac{1}{2}b_0 + b_1\cos y + \cdots + b_r\cos ry + \cdots\\ &\quad + b_1'\sin y + \cdots + b_r'\sin ry + \cdots,\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}a_r &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(y)\cos ry.\partial y, & a_r' &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(y)\sin ry.\partial y,\\ b_r &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(y)\cos ry.\partial y, & b_r' &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(y)\sin ry.\partial y\end{aligned}$$

ist. Dann ist aber

$$\begin{aligned}a_r + b_r i &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F\Big(\frac{a}{2\pi}y\Big)\cos ry.\partial y = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{2r\pi}{a}x.\partial x,\\ a_r' + b_r' i &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F\Big(\frac{a}{2\pi}y\Big)\sin ry.\partial y = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{2r\pi}{a}x.\partial x.\end{aligned}$$

Mithin hat man

$$\begin{aligned}F(x) &= \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{2\pi}{a}x + \cdots + A_r\cos\frac{2r\pi}{a}x + \cdots\\ &\quad + B_1\sin\frac{2\pi}{a}x + \cdots + B_r\sin\frac{2r\pi}{a}x + \cdots\end{aligned}$$

für jeden reellen und imaginären Werth von x, wenn

$$A_r = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{2r\pi}{a}x.\partial x, \quad B_r = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{2ra}{a}x.\partial x$$

gesetzt wird. Wenn man aber zweitens

$$F(x) = -F(x+a)$$

hat, so ist $F(x+2a) = F(x)$, und es kann daher $F(x)$ in eine Reihe entwickelt werden, deren Glieder die Form

$$A\cos\frac{2r\pi}{2a}x, \quad B\sin\frac{2r\pi}{2a}x$$

haben. Wegen der Gleichung $F(x+a) = -F(x)$ muss aber jedes Glied sein Zeichen ändern, wenn $x+a$ für x gesetzt wird, und es können daher nur ungrade Werthe von r vorkommen. Somit hat man in diesem Falle

$$\begin{aligned}F(x) = {} & A_0\cos\frac{\pi}{a}x + A_1\cos\frac{3\pi}{a}x + \cdots + A_r\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x + \cdots\\ & + B_0\sin\frac{\pi}{a}x + B_1\sin\frac{3\pi}{a}x + \cdots + B_r\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x + \cdots,\end{aligned}$$

$$A_r = \frac{1}{a}\int_0^{2a} F(x)\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x.\partial x$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^{a} F(x)\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x.\partial x + \frac{1}{a}\int_0^{a} F(x+a)\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}(x+a).\partial x$$
$$= \frac{2}{a}\int_0^{a} F(x)\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x.\partial x$$
$$B_r = \frac{1}{a}\int_0^{2a} F(x)\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x.\partial x = \frac{2}{a}\int_0^{a} F(x)\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x.\partial x.$$

Uebrigens lässt sich auf die bekannte Weise zeigen, dass $F(x)$ nur auf eine einzige Art in eine Reihe von der angegebenen Form entwickelt werden kann.

Es ist angenommen worden, dass sich $F(x)$ nach ganzen Potenzen von x in eine beständig convergirende Reihe entwickeln lasse. Diese Bedingung ist nothwendig, indem sich leicht zeigen lässt, dass eine nach den sinus und cosinus der Vielfachen von $\frac{2\pi}{a}x$ fortschreitende Reihe, wenn sie für jeden Werth von x convergirt, immer in eine Reihe der angegebenen Art umgeformt werden kann, worauf ich jedoch hier nicht näher eingehe. Ich bemerke nur noch, dass auch die Reihe, welche man erhält, wenn man jedes einzelne Glied der Reihe

$$\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{2\pi}{a}x + \cdots + A_r\cos\frac{2r\pi}{a}x + \cdots$$
$$+ B_1\sin\frac{2\pi}{a}x + \cdots + B_r\sin\frac{2r\pi}{a}x + \cdots$$

$n$mal differentiirt, convergent und ihre Summe gleich $\frac{\partial^n F(x)}{\partial x^n}$ ist, was im Allgemeinen bei Reihen dieser Art nicht der Fall ist. Setzt man $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = F'(x)$, so folgt aus $F(x+a) = F(x)$

$$F'(x+a) = F'(x).$$

Es ist also $F'(x)$ eine Function ganz von derselben Beschaffenheit wie $F(x)$, und man hat daher

$$F'(x) = \tfrac{1}{2}A'_0 + A'_1\cos\frac{2\pi}{a}x + \cdots + A'_r\cos\frac{2r\pi}{a}x + \cdots$$
$$+ B'_1\sin\frac{2\pi}{a}x + \cdots + B'_r\sin\frac{2r\pi}{a}x + \cdots,$$

wo

$$A'_r = \frac{2}{a}\int_0^a F'(x)\cos\frac{2r\pi}{a}x.\partial x, \qquad B'_r = \frac{2}{a}\int_0^a F'(x)\sin\frac{2r\pi}{a}x.\partial x$$

ist. Hier hat man nun zunächst

$$A'_0 = \frac{2}{a}\int_0^a F'(x).\partial x = \frac{2}{a}[F(a)-F(0)] = 0;$$

ferner

$$A'_r = \frac{2}{a}[F(a)-F(0)] + \frac{2r\pi}{a}\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{2r\pi}{a}x.\partial x = \frac{2r\pi}{a}B_r,$$
$$B'_r = -\frac{2r\pi}{a}\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{2r\pi}{a}x.\partial x = -\frac{2r\pi}{a}A_r;$$

also

$$F'(x) = -\frac{2\pi}{a}A_1\sin\frac{2\pi}{a}x - \cdots - \frac{2r\pi}{a}A_r\sin\frac{2r\pi}{a}x - \cdots$$
$$+ \frac{2\pi}{a}B_1\cos\frac{2\pi}{a}x + \cdots + \frac{2r\pi}{a}B_r\cos\frac{2r\pi}{a}x + \cdots,$$

genau dieselbe Reihe, welche man erhält, wenn man die Reihe für $F(x)$ differentiirt; aber man sieht zugleich, dass dies nur darum zutrifft, weil $F(a) = F(0)$ ist. Hieraus lässt sich nun sofort weiter schliessen, dass man allgemein $\frac{\partial^n F(x)}{\partial x^n}$ in einer convergirenden Reihe erhält, wenn man von jedem einzelnen Gliede der Reihe für $F(x)$ die n^{te} Ableitung nimmt. — Ein Gleiches gilt für den Fall, wo man $F(x+a) = -F(x)$ hat.

§ 6.

Nach dem so eben bewiesenen Satze können also die Functionen

$$e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_1, \quad e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_2, \quad e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_3, \quad e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)$$

durch convergirende Reihen, deren einzelne Glieder die Form

$$A\cos r\frac{\pi}{\omega_0}u, \qquad B\sin r\frac{\pi}{\omega_0}u$$

haben, dargestellt werden, und man kann auf diese Weise unendlich viele Entwicklungen der Hülfs-Functionen erhalten. Es mögen jedoch hier nur zwei davon ausführlicher behandelt werden, diejenigen nämlich, welche sich ergeben, wenn $\omega_0 = 2K$, und wenn $\omega_0 = 2K'i$ genommen wird, welche, wenn k reell und kleiner als 1 ist, allein in reeller Form erscheinen. Zur Ausführung derselben bieten sich nun zwei Wege dar. Da nach dem vorigen § die Form der Reihen bekannt ist und auch ihre Convergenz für jeden reellen und imaginären Werth von u und k feststeht, so kann man ein ganz ähnliches Verfahren befolgen, wie Herr Jacobi in den »Fundamentis« bei den Reihen-Entwicklungen der Functionen $\mathrm{H}(u)$, $\Theta(u)$ aus den unendlichen Producten, wodurch sie ursprünglich dargestellt sind, und man reicht dann mit den in § 4 entwickelten Formeln aus. Man kann aber auch von einer Transformation der in § 2 entwickelten partiellen Differential-Gleichungen ausgehen, und so auf einem ganz verschiedenen Wege zu denselben Resultaten gelangen. Man hat (§ 4, (7.))

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K)^2}\mathrm{Al}(u+2K) = e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u),$$

und man kann daher $e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)$, wenn man zugleich berücksichtigt, dass diese Function grade ist, in eine beständig convergirende Reihe von der Form

$$A_0 + 2A_1\cos 2\eta u + 2A_2\cos 4\eta u + \cdots + 2A_r\cos 2r\eta u + \cdots,$$

oder wenn man

$$z = e^{\eta ui}$$

setzt,

$$A_0 + A_1(z^2+z^{-2}) + A_2(z^4+z^{-4}) + \cdots + A_r(z^{2r}+z^{-2r}) + \cdots$$

entwickeln, wo $\eta = \frac{\pi}{2K}$ ist. Diese Reihe möge durch $\mathrm{F}(z)$ bezeichnet werden, so dass man

$$e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u) = \mathrm{F}(z) \tag{1.}$$

hat.

Man bezeichne ferner $\frac{K'}{K}\pi$ durch ϑ und $e^{-\vartheta}$ durch h.

Setzt man nun in (1.) $u+2K'i$ für u, so geht ηui in $\eta ui-\vartheta$, also z in hz über, und es ist

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2K'i) = \mathrm{F}(hz).$$

Aber — nach § 4, (8.) —

$$\mathrm{Al}(u+2K'i) = -e^{-2E'(u+K'i)i}\mathrm{Al}(u),$$

und daher, wenn man bemerkt, dass

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tau(u+2K'i)^2 - 2E'(u+K'i)i &= \tfrac{1}{2}\tau u^2 + 2\frac{(K-E)K'-KE'}{K}ui - 2\frac{(K-E)K'-KE'}{K}K \\ &= \tfrac{1}{2}\tau u^2 - \frac{2\pi}{2K}ui + \frac{K'}{K}\pi = \tfrac{1}{2}\tau u^2 - 2\eta ui + \vartheta\end{aligned}$$

ist,

$$e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u) = -hz^2\mathrm{F}(hz),$$

d. h.

$$\mathrm{F}(z) = -hz^2\mathrm{F}(hz). \tag{2.}$$

Setzt man $u+K'i$ für u in (1.), so geht ηui in $\eta ui - \frac{1}{2}\vartheta$, z in $h^{\frac{1}{2}}z$ über, und man hat

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+K'i)^2}\mathrm{Al}(u+K'i) = \mathrm{F}(h^{\frac{1}{2}}z).$$

Es ist aber (§ 4, (6.))

$$\mathrm{Al}(u+K'i) = i\sqrt{k}\,e^{-E'(u+\frac{1}{2}K'i)i}\mathrm{Al}(u)_1,$$

und daher, weil jetzt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tau(u+K'i)^2 - E'(u+\tfrac{1}{2}K'i)i &= \tfrac{1}{2}\tau u^2 + \frac{(K-E)K'-KE'}{K}ui - \tfrac{1}{2}\frac{(K-E)K'-KE'}{K}K' \\ &= \tfrac{1}{2}\tau u^2 - \eta ui + \tfrac{1}{4}\vartheta\end{aligned}$$

ist,

$$\sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_1 = \frac{1}{i}h^{\frac{1}{4}}z\mathrm{F}(h^{\frac{1}{2}}z). \tag{3.}$$

Setzt man in dieser Gleichung $u+K$ für u, so geht ηui in $\eta ui + \frac{\pi}{2}i$, z in zi über, und nach § 4, (5.) erhält man

$$\sqrt{\frac{k}{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_2 = h^{\frac{1}{4}}z\mathrm{F}(h^{\frac{1}{2}}zi). \tag{4.}$$

Setzt man endlich auch in (2.) $u+K$ für u, zi für z, so erhält man (nach § 4, (5.))

$$\frac{1}{\sqrt{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3 = \mathrm{F}(zi). \tag{5.}$$

Setzen wir nun

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{S}A_\alpha z^{2\alpha},$$

wo dem Index α alle ganzzahligen, positiven und negativen Werthe zu geben sind, so ist

$$hz^2\mathrm{F}(hz) = \mathrm{S}A_\alpha h^{2\alpha+1}z^{2\alpha+2} = \mathrm{S}A_{\alpha-1}h^{2\alpha-1}z^{2\alpha}.$$

Aber nach (2.) ist $\mathrm{F}(z) = -hz^2\mathrm{F}(hz)$; mithin muss

$$A_\alpha = -h^{2\alpha-1}A_{\alpha-1}$$

sein, woraus sich

$$A_\alpha = (-1)^\alpha h^{\alpha\alpha}A_0$$

ergiebt, so dass man

$$F(z) = A_0(1-h(z^2+z^{-2})+h^4(z^4+z^{-4})-\cdots+(-1)^r h^{rr}(z^{2r}+z^{-2r})+\cdots)$$

erhält. Für $u=0$ wird aber $e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)=1$ und auch $z=1$, wonach sich

$$\frac{1}{A_0} = 1-2h+2h^4-\cdots+(-1)^r 2h^{rr}+\cdots$$

ergiebt, welcher Werth durch g bezeichnet werden soll. Man hat dann

$$g\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u) = 1-h(z^2+z^{-2})+h^4(z^4+z^{-4})-\cdots+(-1)^r h^{rr}(z^{2r}+z^{-2r})+\cdots$$

Ferner ist nun

$$\frac{1}{i}h^{\frac{1}{4}}z\,F(h^{\frac{1}{2}}z) = \frac{1}{i}\frac{1}{g}h^{\frac{1}{4}}z\,S(-1)^\alpha h^{\alpha\alpha}h^\alpha z^{2\alpha} = \frac{1}{gi}S(-1)^\alpha h^{\frac{(2\alpha+1)^2}{4}}z^{2\alpha+1},$$

$$h^{\frac{1}{4}}z\,F(h^{\frac{1}{2}}zi) = \frac{1}{g}S h^{\frac{(2\alpha+1)^2}{4}}z^{2\alpha+1},$$

und

$$F(zi) = \frac{1}{g}S h^{\alpha\alpha}z^{2\alpha}.$$

Hiernach erhält man, vermöge der Gleichungen (3, 4, 5), wenn zugleich für z wieder $e^{\eta ui} = \cos\eta u + i\sin\eta u$ gesetzt wird,

$$(6.)\begin{cases} g\sqrt{k}\;e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_1 = 2h^{\frac{1}{4}}\sin\eta u - 2h^{\frac{9}{4}}\sin 3\eta u + 2h^{\frac{25}{4}}\sin 5\eta u - \cdots + (-1)^r 2h^{\frac{(2r+1)^2}{4}}\sin(2r+1)\eta u + \cdots \\ g\sqrt{\frac{k}{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_2 = 2h^{\frac{1}{4}}\cos\eta u + 2h^{\frac{9}{4}}\cos 3\eta u + 2h^{\frac{25}{4}}\cos 5\eta u + \cdots + 2h^{\frac{(2r+1)^2}{4}}\cos(2r+1)\eta u + \cdots \\ g\sqrt{\frac{1}{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3 = 1 + 2h\cos 2\eta u + 2h^4\cos 4\eta u + 2h^9\cos 6\eta u + \cdots + 2h^{rr}\cos 2r\eta u + \cdots \\ g\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u) = 1 - 2h\cos 2\eta u + 2h^4\cos 4\eta u - 2h^9\cos 6\eta u + \cdots + 2(-1)^r h^{rr}\cos 2r\eta u + \cdots, \end{cases}$$

und hieraus

$$(7.)\begin{cases} \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,u = \dfrac{2h^{\frac{1}{4}}\sin\eta u - 2h^{\frac{9}{4}}\sin 3\eta u + 2h^{\frac{25}{4}}\sin 5\eta u - \cdots}{1-2h\cos 2\eta u + 2h^4\cos 4\eta u - 2h^9\cos 6\eta u + \cdots} \\ \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{cn}\,u = \dfrac{2h^{\frac{1}{4}}\cos\eta u + 2h^{\frac{9}{4}}\cos 3\eta u + 2h^{\frac{25}{4}}\cos 5\eta u + \cdots}{1-2h\cos 2\eta u + 2h^4\cos 4\eta u - 2h^9\cos 6\eta u + \cdots} \\ \sqrt{\frac{1}{k'}}\,\mathrm{dn}\,u = \dfrac{1+2h\cos 2\eta u + 2h^4\cos 4\eta u + 2h^9\cos 6\eta u + \cdots}{1-2h\cos 2\eta u + 2h^4\cos 4\eta u - 2h^9\cos 6\eta u + \cdots} \end{cases}$$

Dieses sind die zuerst von Herrn Jacobi gegebenen und aus den Trans-

formations-Formeln hergeleiteten Entwicklungen der Modular-Functionen. Hier beruht ihre Herleitung auf den in § 4 entwickelten Eigenschaften der Hülfs-Functionen, und man erhält zugleich die Ueberzeugung, dass sie für beliebige (reelle oder imaginäre) Werthe des Arguments wie des Moduls gelten; aber man sieht, dass die Herleitung auf dem hier eingeschlagenen Wege durchaus nicht strenge sein würde, wenn nicht vorher bewiesen wäre, dass die Reihen auch für imaginäre Werthe von u convergiren; denn die Bestimmung der Coefficienten wurde nur dadurch gewonnen, dass $u+2K'i$ für u gesetzt ward.

Setzt man in (6.) k' für k und ui für u, so erhält man vermittelst der Gleichungen (4.) des § 4 sofort, wenn man

$$\eta' = \frac{2\pi}{K'}, \qquad h' = e^{-\frac{K}{K'}\pi}, \qquad g' = 1-2h'+2h'^4-2h'^9+\cdots$$

setzt,

$$(8.)\begin{cases} g'\sqrt{k'}\;e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_1 = 2h'^{\frac{1}{4}}\mathfrak{Sin}\,\eta' u - 2h'^{\frac{9}{4}}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \cdots + 2(-1)^r h'^{\frac{(2r+1)^2}{4}}\mathfrak{Sin}\,(2r+1)\eta' u + \cdots \\ g'\,e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_3 = 1 - 2h'\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + 2h'^4\mathfrak{Cos}\,4\eta' u - \cdots + 2(-1)^r h'^{rr}\mathfrak{Cos}\,2r\eta' u + \cdots \\ g'\sqrt{\frac{1}{k}}\;e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_2 = 1 + 2h'\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + 2h'^4\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + \cdots + 2h'^{rr}\mathfrak{Cos}\,2r\eta' u + \cdots \\ g'\sqrt{\frac{k'}{k}}\,e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u) = 2h'^{\frac{1}{4}}\mathfrak{Cos}\,\eta' u + 2h'^{\frac{9}{4}}\mathfrak{Cos}\,3\eta' u + \cdots + 2h'^{\frac{(2r+1)^2}{4}}\mathfrak{Cos}\,(2r+1)\eta' u + \cdots \end{cases}$$

Dies ist die erwähnte zweite Art von Reihen für die Hülfs-Functionen, welche man auch auf eine ganz ähnliche Weise wie die unter (6.) aufgestellten hätte herleiten können.

Es soll jetzt noch gezeigt werden, wie man zu denselben Resultaten durch Transformation der in § 2 entwickelten Differential-Gleichungen gelangen kann.

§ 7.

Die Functionen

$$\sqrt{k}\,\mathrm{Al}(u)_1, \qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{Al}(u)_2, \qquad \sqrt{\frac{1}{k'}}\,\mathrm{Al}(u)_3, \qquad \mathrm{Al}(u)$$

genügen nach § 2 sämmtlich der partiellen Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial\varphi}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi}{\partial k} + k^2u^2\varphi = 0. \qquad \text{(a)}$$

Setzen wir $\varphi = w\varphi_1$, wo dann

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = w\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \varphi_1\frac{\partial w}{\partial u}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial k} = w\frac{\partial\varphi_1}{\partial k} + \varphi_1\frac{\partial w}{\partial k}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = w\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2} + 2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2},$$

so geht die vorstehende Gleichung über in

$$w\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2} + 2\left(k^2u + \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\right] + S\varphi_1 = 0,$$

wo

$$S = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial w}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial w}{\partial k} + k^2u^2w$$

ist. Für $w = e^{-\frac{1}{2}\tau uu}$, unter τ hier eine bloss von k abhängige Grösse verstanden, hat man

$$\frac{\partial w}{\partial u} = -\tau u w, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \tau^2u^2w - \tau w, \quad \frac{\partial w}{\partial k} = -\tfrac{1}{2}u^2\frac{\partial\tau}{\partial k}w,$$

also

$$S = w\left[-\tau + \left(\tau^2 - 2k^2\tau + k^2 - k(1-k^2)\frac{\partial\tau}{\partial k}\right)u^2\right].$$

Setzt man nun, unter a, b beliebige Constanten verstanden,

$$\omega = aK + bK'i, \quad \rho = a(K-E) + bE'i,$$

so erhält man durch Verbindung der Gleichungen

$$k(1-k^2)\frac{\partial K}{\partial k} = E - (1-k^2)K, \quad k(1-k^2)\frac{\partial K'}{\partial k} = k^2K' - E',$$
$$k\frac{\partial E}{\partial k} = E - K, \quad k(1-k^2)\frac{\partial E'}{\partial k} = k^2(K' - E')$$

die folgenden:

$$k(1-k^2)\frac{\partial\omega}{\partial k} = k^2\omega - \rho, \quad k(1-k^2)\frac{\partial\rho}{\partial k} = k^2(\omega - \rho), \tag{b}$$

und hieraus, wenn man

$$\tau = \frac{\rho}{\omega}$$

nimmt,

$$k(1-k^2)\frac{\partial\tau}{\partial k} = k^2(1-2\tau) + \tau^2. \tag{c}$$

Es ist daher $S = -\tau w$ und demnach

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2} + 2(k^2-\tau)u\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial k} - \tau\varphi_1 = 0.$$

Setzt man nun

$$\eta = \frac{\pi}{2\omega}, \quad \eta u = t$$

und bezeichnet φ_1 als Function von t und k betrachtet durch φ_2, so ist

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} = \eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2} = \eta^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial k} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial k} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial k} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial k} + u\frac{\partial\eta}{\partial k}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t},$$

und daher

$$\eta^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + 2\left((k^2-\tau)\eta + k(1-k^2)\frac{\partial\eta}{\partial k}\right)u\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial k} - \tau\varphi_2 = 0.$$

Aber es ist

$$\frac{\partial\eta}{\partial k} = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial\omega}{\partial k},$$

oder — nach (b) —

$$k(1-k^2)\frac{\partial\eta}{\partial k} + \frac{\pi}{2}\frac{k^2\omega-\rho}{\omega^2} = 0,$$

d. h.

$$k(1-k^2)\frac{\partial\eta}{\partial k} + (k^2-\tau)\eta = 0. \tag{d}$$

Mithin

$$\eta^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial k} - \tau\varphi_2 = 0.$$

Wird nun $\varphi_2 = A\psi$ gesetzt, unter A eine Function von k allein verstanden, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$A\left(\eta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial k^2} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\psi}{\partial k}\right) + \left(2k(1-k^2)\frac{\partial A}{\partial k} - \tau A\right)\psi = 0,$$

und es kann nun A so bestimmt werden, dass

$$2k(1-k^2)\frac{\partial A}{\partial k} - \tau A = 0$$

wird.

Substituirt man hier für τ den Werth, der sich aus (d) ergiebt, so findet sich

$$2\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial k} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial k} + \frac{k}{1-k^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial k} - \frac{1}{k'}\frac{\partial k'}{\partial k},$$

und dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn

$$2\log A = \log\eta - \log k', \qquad A = \sqrt{\frac{\eta}{k'}}$$

genommen wird, und es ist alsdann

$$\eta^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\psi}{\partial k} = 0.$$

Setzt man nun ferner

$$\omega' i = a'K + b'K'i, \qquad \rho' i = a'(K-E) + b'E'i,$$

unter a', b' ebenfalls willkürliche Constanten verstanden, so erhält man

$$\omega\rho' i - \rho\omega' i = (ab'-ba')(E'K + K'E - KK')i = (ab'-ba')\frac{\pi}{2}i,$$

und daher, wenn man sich a', b' so bestimmt denkt, dass $ab'-ba' = 1$ ist,

$$\omega\rho' - \rho\omega' = \frac{\pi}{2}. \tag{e}$$

Führt man nun auch statt k eine andere Veränderliche vermittelst der Gleichung

$$\vartheta = \frac{\omega'}{\omega}\pi$$

ein, so hat man

$$k(1-k^2)\frac{\partial\vartheta}{\partial k} = k(1-k^2)\frac{\omega\frac{\partial\omega'}{\partial k} - \omega'\frac{\partial\omega}{\partial k}}{\omega^2}\pi = \frac{\omega(k^2\omega'-\rho') - \omega'(k^2\omega-\rho)}{\omega^2}\pi$$
$$= -\frac{\omega\rho'-\rho\omega'}{\omega^2}\pi = -\tfrac{1}{2}\frac{\pi^2}{\omega^2},$$

oder

$$k(1-k^2)\frac{\partial\vartheta}{\partial k} + 2\eta^2 = 0, \tag{f}$$

wonach sich dann die Gleichung für ψ in

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 4\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}$$

verwandelt. Also:

Setzt man

$$\omega = aK + bK'i, \qquad \omega' i = a'K + b'K'i, \qquad ab'-ba' = 1,$$
$$\tau = \frac{a(K-E) + bE'i}{aK + bK'i}, \qquad \eta = \frac{\pi}{2\omega}, \qquad \eta u = t, \qquad \frac{\omega'}{\omega}\pi = \vartheta,$$

$$\sqrt{\frac{k'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu}\varphi = \psi,$$

und betrachtet dann ψ als Function von t und ϑ, so transformirt sich die Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial\varphi}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi}{\partial k} + k^2u^2\varphi = 0$$

in

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 4\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}. \tag{g}$$

Nimmt man $a = 1$, $b = 0$, $a' = 0$, $b' = 1$, so geschieht der Bedingung $ab'-ba' = 1$ Genüge; man hat dann, wie im vorigen §,

$$\tau = 1-\frac{E}{K}, \qquad \eta = \frac{\pi}{2K}, \qquad \vartheta = \frac{K'}{K}\pi,$$

und die Functionen

$$\sqrt{\frac{kk'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_1, \quad \sqrt{\frac{k}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_2, \quad \sqrt{\frac{1}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3, \quad \sqrt{\frac{k'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)$$

genügen, als Functionen von ϑ und $t = \eta u$ betrachtet, sämmtlich der Gleichung (g). Bezeichnet man sie der Reihe nach durch $\overline{\mathrm{Al}}(t)_1$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)_2$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)_3$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)$, so hat man nach § 4, (7.), weil t in $t+\pi$ übergeht, wenn $u+2K$ für u gesetzt wird,

$$(1.)\qquad \begin{cases} \overline{\mathrm{Al}}(t+\pi)_1 = -\overline{\mathrm{Al}}(t)_1, & \overline{\mathrm{Al}}(t+\pi)_2 = -\overline{\mathrm{Al}}(t)_2, \\ \overline{\mathrm{Al}}(t+\pi)_3 = \overline{\mathrm{Al}}(t)_3, & \overline{\mathrm{Al}}(t+\pi) = \overline{\mathrm{Al}}(t), \end{cases}$$

und dem § 5 gemäss kann man also setzen

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Al}}(t)_1 &= \alpha_0\sin t + \alpha_1\sin 3t + \cdots + \alpha_r\sin(2r+1)t + \cdots \\
\overline{\mathrm{Al}}(t)_2 &= \beta_0\cos t + \beta_1\cos 3t + \cdots + \beta_r\cos(2r+1)t + \cdots \\
\overline{\mathrm{Al}}(t)_3 &= \tfrac{1}{2}\gamma_0 + \gamma_1\cos 2t + \gamma_2\cos 4t + \cdots + \gamma_r\cos 2rt + \cdots \\
\overline{\mathrm{Al}}(t) &= \tfrac{1}{2}\delta_0 + \delta_1\cos 2t + \delta_2\cos 4t + \cdots + \delta_r\cos 2rt + \cdots,
\end{aligned}$$

wo dann die Coefficienten Functionen von ϑ sind. Substituirt man diese Reihen in (g), so erhält man

$$4\frac{\partial\alpha_r}{\partial\vartheta} + (2r+1)^2\alpha_r = 0, \qquad 4\frac{\partial\beta_r}{\partial\vartheta} + (2r+1)^2\beta_r = 0,$$
$$\frac{\partial\gamma_r}{\partial\vartheta} + r^2\gamma_r = 0, \qquad \frac{\partial\delta_r}{\partial\vartheta} + r^2\delta_r = 0,$$

oder

$$\alpha_r = a_r e^{-\frac{(2r+1)^2}{4}\vartheta} = a_r h^{\frac{(2r+1)^2}{4}}, \qquad \beta_r = b_r e^{-\frac{(2r+1)^2}{4}\vartheta} = b_r h^{\frac{(2r+1)^2}{4}}$$

$$\gamma_r = c_r e^{-rr\vartheta} = c_r h^{rr}, \qquad \delta_r = d_r e^{-rr\vartheta} = d_r h^{rr},$$

wo a_r, b_r, c_r, d_r Constanten sind.

Setzt man $u = 2K'i$, so wird $\mathrm{Al}(u)_1 = 0$; es geht aber dann t in ϑi über, und es wird

$$\alpha_r \sin(2r+1)t = \frac{i}{2} a_r h^{\frac{(2r+1)^2}{4}} \left(e^{+(2r+1)\vartheta} - e^{-(2r+1)\vartheta}\right) = \frac{i}{2} a_r h^{\frac{(2r+1)^2}{4}} (h^{-(2r+1)} - h^{2r+1})$$

$$= \frac{i}{2} a_r h^{\frac{2r+1}{2}\frac{2r-3}{2}} - \frac{i}{2} a_r h^{\frac{2r+1}{2}\frac{2r+5}{2}},$$

und es muss also für jeden Werth von k

$$0 = \mathrm{S} a_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha-3}{2}} - \mathrm{S} a_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha+5}{2}},$$

oder

$$0 = a_0 h^{-\frac{3}{4}} + a_1 h^{-\frac{3}{4}} + \mathrm{S} a_{\alpha+2} h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha+5}{2}} - \mathrm{S} a_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha+5}{2}}$$

sein, wonach man $a_1 = -a_0$, $a_{\alpha+2} = a_\alpha$, und somit allgemein

$$a_\alpha = (-1)^\alpha a_0$$

erhält. Ferner, wenn man $u = K + 2K'i$ nimmt, so wird $\mathrm{Al}(u)_2 = 0$; aus t wird dann $\frac{\pi}{2} + \vartheta i$, und aus $\beta_r \cos(2r+1)t$

$$-(-1)^r b_r h^{\frac{(2r+1)^2}{4}} \sin(2r+1)\vartheta i = (-1)^r \frac{i}{2} b_r \left(h^{\frac{2r+1}{2}\frac{2r+5}{2}} - h^{\frac{2r+1}{2}\frac{2r-3}{2}}\right),$$

und es muss daher

$$0 = \mathrm{S}(-1)^\alpha b_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha+5}{2}} - \mathrm{S}(-1)^\alpha b_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha-3}{2}},$$

oder

$$0 = -b_0 h^{-\frac{3}{4}} + b_1 h^{-\frac{3}{4}} + \mathrm{S}(-1)^\alpha b_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha+5}{2}} - \mathrm{S}(-1)^\alpha b_{\alpha+2} h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha-3}{2}}$$

sein, woraus

$$b_1 = b_0, \qquad b_{\alpha+2} = b_\alpha,$$

d. h. allgemein

$$b_\alpha = b_0$$

folgt.

$\mathrm{Al}(u)_3$ wird gleich Null, wenn $u = K + K'i$, und $\mathrm{Al}(u)$, wenn $u = K'i$ gesetzt wird; für den ersten Werth wird $t = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\vartheta i$,

$$\gamma_r \cos 2rt = \tfrac{1}{2}(-1)^r c_r h^{rr} (e^{r\vartheta} + e^{-r\vartheta}) = \tfrac{1}{2}(-1)^r c_r (h^{r(r-1)} + h^{r(r+1)});$$

für den zweiten wird

$$t = \tfrac{1}{2}\vartheta i, \qquad \delta_r \cos 2rt = \tfrac{1}{2} d_r h^{rr} (e^{r\vartheta} + e^{-r\vartheta}) = \tfrac{1}{2} d_r (h^{r(r-1)} + h^{r(r+1)}),$$

und man erhält somit

$$0 = \mathrm{S}(-1)^\alpha c_\alpha h^{\alpha(\alpha-1)} + \mathrm{S}(-1)^\alpha c_\alpha h^{\alpha(\alpha+1)} = -\mathrm{S}(-1)^\alpha c_{\alpha+1} h^{\alpha(\alpha+1)} + \mathrm{S}(-1)^\alpha c_\alpha h^{\alpha(\alpha+1)},$$

$$0 = \mathrm{S} d_\alpha h^{\alpha(\alpha-1)} + \mathrm{S} d_\alpha h^{\alpha(\alpha+1)} = \mathrm{S} d_{\alpha+1} h^{\alpha(\alpha+1)} + \mathrm{S} d_\alpha h^{\alpha(\alpha+1)},$$

woraus

$$c_{\alpha+1} = c_\alpha, \qquad d_{\alpha+1} = -d_\alpha,$$

d. h.

$$c_\alpha = c_0, \qquad d_\alpha = (-1)^\alpha d_0$$

folgt. Demnach ergiebt sich

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned} \sqrt{\frac{kk'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu} \mathrm{Al}(u)_1 &= a_0 \{h^{\frac{1}{4}} \sin t - h^{\frac{9}{4}} \sin 3t + h^{\frac{25}{4}} \sin 5t - \cdots\} \\ \sqrt{\frac{k}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu} \mathrm{Al}(u)_2 &= b_0 \{h^{\frac{1}{4}} \cos t + h^{\frac{9}{4}} \cos 3t + h^{\frac{25}{4}} \cos 5t + \cdots\} \\ \sqrt{\frac{1}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu} \mathrm{Al}(u)_3 &= c_0 \{\tfrac{1}{2} + h \cos 2t + h\ \cos 4t + h^9 \cos 6t + \cdots\} \\ \sqrt{\frac{k'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu} \mathrm{Al}(u) &= d_0 \{\tfrac{1}{2} - h \cos 2t + h^4 \cos 4t - h^9 \cos 6t + \cdots\}, \end{aligned}\right.$$

wo a_0, b_0, c_0, d_0 Constanten sind. Für $k = 0$ wird $h = 0$, und $\mathrm{Al}(u)_3$, sowie auch $\mathrm{Al}(u)$ gleich 1, und deshalb muss $c_0 = d_0 = 2$ sein. Dividirt man nun die dritte Gleichung in die zweite und setzt $u = 0$, $t = 0$, so findet sich

$$\sqrt{k} = b_0 \frac{h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + h^{\frac{25}{4}} + \cdots}{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots},$$

und wenn man die vierte in die erste dividirt und dann $u = K$, $t = \frac{\pi}{2}$ nimmt,

$$\sqrt{k} = a_0 \frac{h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + h^{\frac{25}{4}} + \cdots}{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots},$$

und daher $a_0 = b_0$. Wird aber h nach Potenzen von k entwickelt, so ist das erste Glied gleich $16k^2$, und daher muss $a_0 = b_0 = 2$ sein.

Somit erhält man, wenn man wieder ηu für t setzt,

$$(3.)\left\{\begin{aligned}
\sqrt{\frac{kk'}{\eta}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_1 &= 2h^{\frac{1}{4}}\sin\eta u - 2h^{\frac{9}{4}}\sin 3\eta u + 2h^{\frac{25}{4}}\sin 5\eta u - \cdots\\
\sqrt{\frac{k}{\eta}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_2 &= 2h^{\frac{1}{4}}\cos\eta u + 2h^{\frac{9}{4}}\cos 3\eta u + 2h^{\frac{25}{4}}\cos 5\eta u + \cdots\\
\sqrt{\frac{1}{\eta}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_3 &= 1 + 2h\cos 2\eta u + 2h^4\cos 4\eta u + 2h^9\cos 6\eta u + \cdots\\
\sqrt{\frac{k'}{\eta}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u) &= 1 - 2h\cos 2\eta u + 2h^4\cos 4\eta u - 2h^9\cos 6\eta u + \cdots,
\end{aligned}\right.$$

ganz wie im vorigen §, nur dass hier zugleich für den durch die unendliche Reihe

$$1-2h+2h^4-2h^9+\cdots$$

gegebenen Ausdruck g der Werth $\sqrt{\frac{k'}{\eta}}$ gefunden ist.

Anmerkung. Es seien $2m+1$, $2n$ zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor, und $2m'$, $2n'+1$ zwei andere, welche der Gleichung

$$(2m+1)(2n'+1)-2n.2m' = 1$$

genügen,

$$\omega = (2m+1)K+2nK'i,\quad \omega'i = 2m'K+(2n'+1)K'i,\quad \tau = \frac{(2m+1)(K-E)+2nE'i}{(2m+1)K+2nK'i},$$

$$\eta = \frac{\pi}{2\omega},\quad \vartheta = \frac{\omega'}{\omega}\pi,\quad h = e^{-\vartheta},\quad t = \eta u,$$

$$\sqrt{\frac{kk'}{\eta}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_1 = \overline{\mathrm{Al}}(t)_1,\qquad \sqrt{\frac{k}{\eta}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_2 = \overline{\mathrm{Al}}(t)_2$$

$$\sqrt{\frac{1}{\eta}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_3 = \overline{\mathrm{Al}}(t)_3,\qquad \sqrt{\frac{k'}{\eta}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u) = \overline{\mathrm{Al}}(t),$$

so bestehen — nach § 4, (12.) — auch für diese Functionen die Gleichungen (1.); und auch sie können daher dem § 5 gemäss in convergirende Reihen von der Form (2.) entwickelt werden. Da sie ferner, wie oben bewiesen worden, sämmtlich der Differentialgleichung (g) genügen, und auch $\overline{\mathrm{Al}}(t)_1$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)_2$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)_3$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)$ verschwinden, wenn man für u resp. die Werthe $2\omega'i$, $\omega+2\omega'i$, $\omega+\omega'i$, $\omega'i$ setzt, sowie die vorher betrachteten Functionen Null wurden für $2K'i$, $K+2K'i$, $K+K'i$, $K'i$, so erhellt, dass man auch hier ganz unverändert die Gleichungen (2.) erhalten muss. Die Constanten a_0, b_0, c_0, d_0 können freilich nicht auf dieselbe Weise bestimmt werden; man findet aber vermittelst der Formeln (12.) bis (14.) des § 4, dass jede dieser Grössen einen von den vier Werthen $+2$, -2, $+2i$, $-2i$ hat, dessen nähere Bestimmung von den angenommenen Werthen von m, n abhängt. Die Gleichungen (3.) bestehen also auch noch, wenn man unter h, η, τ die hier angegebenen Ausdrücke versteht, und nur für $\sqrt{\frac{kk'}{\eta}}$, $\sqrt{\frac{k}{\eta}}$, $\sqrt{\frac{1}{\eta}}$, $\sqrt{\frac{k'}{\eta}}$ resp. $\varepsilon_1\sqrt{\frac{kk'}{\eta}}$, $\varepsilon_2\sqrt{\frac{k}{\eta}}$, $\varepsilon_3\sqrt{\frac{1}{\eta}}$, $\varepsilon_4\sqrt{\frac{k'}{\eta}}$ setzt, wo jeder der Multiplicatoren ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 einen von den Werthen $+1$, -1, $+i$, $-i$ haben muss.

Auf diese Weise gelangt man zu unzählig vielen verschiedenen Entwicklungen der Hülfs-Functionen; verbindet man noch diejenigen hiermit, welche man erhält, wenn man in den Gleichungen (3.) ui für u, k' für k, sowie auch ku für u und $\frac{1}{k}$ für k setzt, und dann wieder zu den Functionen des Moduls k übergeht, so bekommt man alle möglichen Entwicklungen von dieser Art. Man kann übrigens alle diese mit Benutzung der Formeln (11.) bis (14.) des § 4 durch ein dem im vorigen § angewandten ganz analoges Verfahren herleiten.

§ 8.

Es ist nun noch übrig, die Hülfs-Functionen in der Form von unendlichen Producten darzustellen.

Es wird $\mathrm{Al}(u) = 0$ für alle Werthe von u, für welche $\mathrm{sn}\,u$ die Form $\frac{1}{0}$ erhält, und nur für diese, welche sämmtlich von der Form $2\alpha K+(2\beta+1)K'i$ sind, wo für α, β alle möglichen ganzen Zahlen zu setzen. Für diese wird aber (wenn die Bezeichnung des § 6 beibehalten wird)

$$2\eta ui = 2\alpha\pi i-(2\beta+1)\vartheta i,\qquad z^2 = e^{2\alpha\pi i-(2\beta+1)\vartheta i} = h^{2\beta+1}.$$

Bildet man daher das unendliche Product

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{(1-hz^2)(1-h^3z^2)\cdots(1-h^{2r+1}z^2)\cdots}{(1-h)(1-h^3)\cdots(1-h^{2r+1})\cdots}\cdot\frac{(1-hz^{-2})(1-h^3z^{-2})\cdots(1-h^{2r+1}z^{-2})\cdots}{(1-h)(1-h^3)\cdots(1-h^{2r+1})\cdots},$$

so ist klar, dass auch dieses gleich Null wird, sobald $z = h^{2\beta+1}$ gesetzt wird, und es ist daher zu erwarten, dass es in einer einfachen Beziehung zu $\mathrm{Al}(u)$ stehe.

Setzt man hz für z, so ergiebt sich

$$\mathfrak{F}(z) = -hz^2\mathfrak{F}(hz),$$

und für $z=1$ wird $\mathfrak{F}(z) = 1$. Nun kann offenbar $\mathfrak{F}(z)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0+A_1(z^2+z^{-2})+\cdots+A_r(z^{2r}+z^{-2r})+\cdots$$

entwickelt werden; berücksichtigt man aber, dass in § 6 die Entwicklung von $\mathrm{F}(z)$ in eine Reihe von derselben Form einzig vermittelst der durch die Gleichungen

$$\mathrm{F}(z) = -hz^2\mathrm{F}(hz), \qquad \mathrm{F}(1) = 1$$

ausgedrückten Eigenschaften dieser Function bewerkstelligt wurde, so erhellt sofort, dass

$$\mathfrak{F}(z) = \mathrm{F}(z)$$

sein muss, sobald nur bewiesen ist, dass das in Rede stehende unendliche Product convergent ist.

Man setze

$$\varphi(z) = 1 + A_1 z^2 + A_2 z^4 + \cdots + A_r z^{2r} + \cdots$$

und bestimme die Coefficienten dieser Reihe so, dass

$$\varphi(z) = (1-hz^2)\,\varphi(hz)$$

ist. Diese Eigenschaft führt zu der Recursions-Formel

$$A_r = -\frac{h^{2r-1}}{1-h^{2r}}A_{r-1},$$

woraus

$$A_r = (-1)^r \frac{h^{rr}}{1-h^2 . 1-h^4 \ldots 1-h^{2r}}$$

folgt, so dass man

$$\varphi(z) = 1 - \frac{h}{1-h^2}z^2 + \frac{h^4}{1-h^2 . 1-h^4}z^4 - \cdots$$

erhält. Weil die Reihen (6.) des § 6 beständig convergiren, so muss der absolute Betrag von h kleiner als 1 sein, welches auch der Werth von k sei (mit der einzigen Einschränkung, dass k nicht gleich 1 sein darf, weil in diesem Falle $\eta = 0$ wird und daher jene Reihen nicht verwendbar sind); deshalb wird $\frac{A_r}{A_{r-1}} = 0$ für $r = \infty$, und daraus folgt, dass die für $\varphi(z)$ erhaltene Reihe für jeden Werth von z convergirt. Durch wiederholte Anwendung der Gleichung

$$\varphi(z) = (1-hz^2)\,\varphi(hz)$$

findet sich aber

$$\varphi(z) = (1-hz^2)(1-h^3z^2)\cdots(1-h^{2r+1}z^2)\,\varphi(h^{2r+1}z),$$

und daher, weil für $r = \infty$

$$h^{2r+1}z = 0, \qquad \varphi(h^{2r+1}z) = 1$$

wird,

$$\varphi(z) = \text{dem unendlichen Producte } (1-hz^2)(1-h^3z^2)\cdots(1-h^{2r+1}z^2)\cdots$$
$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \;\;„\qquad„\qquad„\;\; (1-hz^{-2})(1-h^3z^{-2})\cdots(1-h^{2r+1}z^{-2})\cdots,$$

und

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{\varphi(z)\,\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi(1)\,\varphi(1)}.$$

Es hat also $\mathfrak{F}(z)$ für jeden Werth von z einen bestimmten, endlichen Werth; und weil $\varphi(z)$ durch eine beständig convergirende Reihe dargestellt ist, so kann, wenn man $z = e^{\eta u i}$, und $\frac{1}{z} = e^{-\eta u i}$ setzt, $\varphi(z)$, $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ und somit auch $\mathfrak{F}(z)$ nach ganzen Potenzen von u in eine beständig convergirende Reihe entwickelt werden, woraus dann, in Verbindung mit dem Umstande, dass $\mathfrak{F}(z)$ ungeändert bleibt, wenn $u+2K$ für u gesetzt wird, unmittelbar folgt, dass $\mathfrak{F}(z)$ durch eine convergirende Reihe von der Form

$$A_0 + 2A_1\cos 2\eta u + 2A_2\cos 4\eta u + \cdots,$$

oder

$$A_0 + A_1(z^2+z^{-2}) + A_2(z^4+z^{-4}) + \cdots$$

darstellbar ist. Nach dem oben Gesagten kann man also in der That schliessen, dass

$$\mathfrak{F}(z) = \mathrm{F}(z)$$

ist.

Vermöge der Gleichungen (1, 3, 4, 5) des § 6 ergiebt sich nun

$$(1.)\quad \begin{cases} \sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_1 = Gh^{\frac{1}{4}}\left(\frac{z-z^{-1}}{i}\right)(1-h^2z^2)(1-h^4z^2)\cdots(1-h^{2r}z^2)\cdots\times(1-h^2z^{-2})(1-h^4z^{-2})\cdots(1-h^{2r}z^{-2})\cdots \\ \sqrt{\frac{k}{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_2 = Gh^{\frac{1}{4}}\,(z+z^{-1})(1+h^2z^2)(1+h^4z^2)\cdots(1+h^{2r}z^2)\cdots\times(1+h^2z^{-2})(1+h^4z^{-2})\cdots(1+h^{2r}z^{-2})\cdots \\ \sqrt{\frac{1}{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_3 = G(1+hz^2)(1+h^3z^2)\cdots(1+h^{2r+1}z^2)\cdots\times(1+hz^{-2})(1+h^3z^{-2})\cdots(1+h^{2r+1}z^{-2})\cdots \\ e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u) = G(1-hz^2)(1-h^3z^2)\cdots(1-h^{2r+1}z^2)\cdots\times(1-hz^{-2})(1-h^3z^{-2})\cdots(1-h^{2r+1}z^{-2})\cdots, \end{cases}$$

wo

$$\frac{1}{G} = (1-h)^2(1-h^3)^2\cdots(1-h^{2r+1})^2\cdots$$

ist.

Man hat

$$(1-h^r z^2)(1-h^r z^{-2}) = 1-2h^r \cos 2\eta_1 u + h^{2r} = (1-h^r)^2 + 4h^r \sin \eta_1 u^2$$

$$(1+h^r z^2)(1+h^r z^{-2}) = 1+2h^r \cos 2\eta_1 u + h^{2r} = (1+h^r)^2 - 4h^r \sin \eta_1 u^2$$

$$1-h^r = h^{\frac{r}{2}}(h^{-\frac{r}{2}} - h^{\frac{r}{2}}) = -2h^{\frac{r}{2}} \mathfrak{Sin}\frac{r}{2}\vartheta = -2h^{\frac{r}{2}} \mathfrak{Sin}\, r\eta_1 K'$$

$$1+h^r = h^{\frac{r}{2}}(h^{-\frac{r}{2}} + h^{\frac{r}{2}}) = 2h^{\frac{r}{2}} \mathfrak{Cos}\frac{r}{2}\vartheta = 2h^{\frac{r}{2}} \mathfrak{Cos}\, r\eta_1 K',$$

also

$$(1-h^r z^2)(1-h^r z^{-2}) = (1-h^r)^2\left(1+\frac{\sin \eta_1 u^2}{\mathfrak{Sin}\, r\eta_1 K'^2}\right)$$

$$(1+h^r z^2)(1-h^r z^{-2}) = (1+h^r)^2\left(1-\frac{\sin \eta_1 u^2}{\mathfrak{Cos}\, r\eta_1 K'^2}\right).$$

Hiernach lassen sich die Gleichungen (1.), wenn man zugleich berücksichtigt, dass für $u = 0$ $\frac{\mathrm{Al}(u)_1}{u} = 1$, $\mathrm{Al}(u)_2 = 1$, $\mathrm{Al}(u)_3 = 1$, $\mathrm{Al}(u) = 1$ ist, und daher

$$\sqrt{k} = 2G\eta_1 h^{\frac{1}{4}}(1-h^2)^2(1-h^4)^2\cdots(1-h^{2r})^2\cdots$$

$$\sqrt{\frac{k}{k'}} = Gh^{\frac{1}{4}}(1+h^2)^2(1+h^4)^2\cdots(1+h^{2r})^2\cdots$$

$$\sqrt{\frac{1}{k'}} = G(1+h)^2(1+h^3)^2\cdots(1+h^{2r+1})^2\cdots$$

sein muss, also darstellen:

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned}
e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_1 &= \frac{1}{\eta_1}\sin \eta_1 u\,.\,\mathrm{P}\left\{1+\frac{\sin \eta_1 u^2}{\mathfrak{Sin}\,(2\alpha+2)\eta_1 K'^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_2 &= \cos \eta_1 u\,.\,\mathrm{P}\left\{1-\frac{\sin \eta_1 u^2}{\mathfrak{Cos}\,(2\alpha+2)\eta_1 K'^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3 &= \mathrm{P}\left\{1-\frac{\sin \eta_1 u^2}{\mathfrak{Cos}\,(2\alpha+1)\eta_1 K'^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u) &= \mathrm{P}\left\{1+\frac{\sin \eta_1 u^2}{\mathfrak{Sin}\,(2\alpha+1)\eta_1 K'^2}\right\}.
\end{aligned}\right.\qquad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots +\infty)$$

Setzt man ui für u, k' für k, so erhält man vermittelst der Formeln (4.) des § 4:

$$(3.)\quad \left\{\begin{aligned}
e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_1 &= \frac{1}{\eta'}\mathfrak{Sin}\,\eta' u\,.\,\mathrm{P}\left\{1-\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u^2}{\mathfrak{Sin}\,(2\alpha+2)\eta' K^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_2 &= \mathrm{P}\left\{1-\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u^2}{\mathfrak{Sin}\,(2\alpha+1)\eta' K^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_3 &= \mathrm{P}\left\{1+\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u^2}{\mathfrak{Cos}\,(2\alpha+1)\eta' K^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u) &= \mathfrak{Cos}\,\eta' u\,.\,\mathrm{P}\left\{1+\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u^2}{\mathfrak{Cos}\,(2\alpha+2)\eta' K^2}\right\}.
\end{aligned}\right.\qquad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots +\infty)$$

Anmerkung. Es behalten die Gleichungen (2.) ihre Gültigkeit, wenn man für η, τ die in der Anmerkung zum vorhergehenden § angegebenen Werthe, sowie ω' für K' setzt. Ebenso verhält es sich mit den Gleichungen (3.), wenn für K, η', τ' resp.

$$\omega,\quad \frac{\pi}{2\omega},\quad \frac{2m'(K-E)+(2n'+1)E'i}{2m'K+(2n'+1)K'i}$$

genommen wird.

Westernkotten in Westfalen, Sommer 1840.

ANMERKUNGEN.

Die vorstehende, im Sommer 1840 verfasste Abhandlung[1] ist von mir im Herbst desselben Jahres der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu Münster Behufs Erlangung der Facultas docendi vorgelegt worden. Von meinem verehrten Lehrer Gudermann, der mich im Winter vorher in die Theorie der elliptischen Functionen („Modular-Functionen", wie er sie nannte) eingeführt hatte, sehr günstig beurtheilt, sollte sie gedruckt werden. Dies ist jedoch aus Gründen, auf die ich hier nicht näher eingehen mag, unterblieben. Einen Theil ihres Inhalts habe ich aber später im 52sten Bande des Crelle'schen Journals (S. 346—379) mitgetheilt und bin seitdem mehrfach aufgefordert worden, die ganze Arbeit zu veröffentlichen, was „namentlich den für die Geschichte der elliptischen Transcendenten sich interessirenden Mathematikern erwünscht sein werde". Dies hat mich bestimmt, die Gesammtausgabe meiner mathematischen Abhandlungen mit der in Rede stehenden zu beginnen. Ich habe nichts an ihr geändert — auch nicht die Gudermann'schen Benennungen und Bezeichnungen — mit der einzigen Ausnahme, dass an Stelle der in meinem Manuscript gebrauchten Functionszeichen

$$\mathrm{A}(u),\qquad \mathrm{B}(u),\qquad \mathrm{C}(u),\qquad \mathrm{D}(u)$$

bei der Drucklegung die später von mir und anderen Mathematikern angewandten:

$$\mathrm{Al}(u)_1,\qquad \mathrm{Al}(u)_2,\qquad \mathrm{Al}(u)_3,\qquad \mathrm{Al}(u)$$

getreten sind.

---

1) Vgl. die nachfolgende Abhandlung: Definition analytischer Functionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen.

2) Hier hätte bemerkt werden müssen, dass

$$\mathrm{sn}\,u,\quad \mathrm{cn}\,u,\quad \mathrm{dn}\,u,\quad \mathrm{Al}(u),\quad \mathrm{Al}(u)_1,\quad \mathrm{Al}(u)_2,\quad \mathrm{Al}(u)_3$$

eindeutige analytische Functionen der beiden Grössen u, k sind und deshalb alle für das Differentiiren solcher Functionen geltenden Regeln auf sie angewandt werden können. Dies wird in der im Vorstehenden angegebenen Abhandlung nachgewiesen.

3) Die Bezeichnungen 1', 2', 3', ... sind gleichbedeutend mit den jetzt gebräuchlich gewordenen

$$1!,\ 2!,\ 3!,\ \ldots$$

DARSTELLUNG EINER ANALYTISCHEN FUNCTION EINER COMPLEXEN VERÄNDERLICHEN, DEREN ABSOLUTER BETRAG ZWISCHEN ZWEI GEGEBENEN GRENZEN LIEGT.

§ 1.

Es sei x eine Veränderliche, welche jeden (reellen oder complexen) Werth erhalten kann, dessen absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen A, B liegt, und $F(x)$ sei eine Function derselben, über deren Charakter wir folgende Annahmen machen:

1) sie habe für jeden Werth von x, der innerhalb der bezeichneten Grenzen enthalten ist, einen bestimmten endlichen Werth;

2) sie sei in der Nähe eines jeden solchen Werthes von x continuirlich;

3) es sei für jeden unendlich kleinen Werth von k der Unterschied der Quotienten:

$$\frac{F(x+hk)-F(x)}{hk},\qquad \frac{F(x+k)-F(x)}{k}$$

ebenfalls unendlich klein für jeden Werth von x innerhalb der bezeichneten Grenzen und für jeden Werth von h, dessen absoluter Betrag eine bestimmte Grenze nicht überschreitet.

Es soll nun bewiesen werden, dass sich unter diesen Voraussetzungen $F(x)$ durch eine für alle Werthe von x innerhalb jener Grenzen absolut convergente Reihe

$$\begin{aligned}(1.)\qquad & A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_\nu x^\nu + \cdots \\ & + A_{-1} x^{-1} + A_{-2} x^{-2} + \cdots + A_{-\nu} x^{-\nu} + \cdots = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu\end{aligned}$$

darstellen lasse, wo die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots$ von x unabhängig sind.

§ 2.

Zu dem Ende bestimmen wir zunächst den Werth des Integrals

$$J = \int x^n dx,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet und die Integration im positiven Sinne über alle diejenigen Werthe von x, die einen und denselben absoluten Betrag haben, sich erstrecken soll. Eine complexe Grösse $a+bi$, deren absoluter Betrag r ist, lässt sich darstellen in der Form

$$a+bi = r\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i},$$

wo λ jeden reellen Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ haben kann. Setzt man daher

$$w = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}, \qquad \frac{dw}{d\lambda} = \frac{2i}{(1-\lambda i)^2}$$

mit der Bestimmung, dass λ eine reelle Veränderliche zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ bedeuten soll, so hat man

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} (rw)^n . r\frac{dw}{d\lambda}d\lambda = r^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} w^n \frac{dw}{d\lambda}d\lambda.$$

Es ist aber

$$w^n\frac{dw}{d\lambda} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{d}{d\lambda}(w^{n+1}),$$

also

$$\int_{-\mu}^{+\mu} w^n \frac{dw}{d\lambda}d\lambda = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1+\mu i}{1-\mu i}\right)^{n+1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{1-\mu i}{1+\mu i}\right)^{n+1}.$$

Wächst nun μ ohne Ende, so nähert sich sowohl $\frac{1+\mu i}{1-\mu i}$ als $\frac{1-\mu i}{1+\mu i}$ der Grenze -1, also ist

$$J = 0.$$

Diese Bestimmung hat nur eine Ausnahme, wenn $n = -1$ ist. Alsdann ist

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dw}{w} = 2i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = 4i\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Das Integral $\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$ ist bekanntlich gleich $\frac{\pi}{2}$; es reicht aber aus, zu wissen, dass es einen endlichen Werth hat, was so gezeigt werden kann. Es ist

$$\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = \int_0^1\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} + \int_1^{\infty}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2};$$

setzt man aber in dem zweiten Integral

$$\lambda = \frac{1}{\lambda'}, \qquad d\lambda = -\frac{d\lambda'}{\lambda'^2},$$

so ist

$$\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = -\frac{d\lambda'}{1+\lambda'^2},$$

$$\int_1^{\infty}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = -\int_1^0\frac{d\lambda'}{1+\lambda'^2} = \int_0^1\frac{d\lambda'}{1+\lambda'^2} = \int_0^1\frac{d\lambda}{1+\lambda^2},$$

mithin

$$\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = 2\int_0^1\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Bezeichnen wir nun das bestimmte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = 4\int_0^1\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$$

durch π, so ist der Werth von

$$\int x^n dx$$

in dem oben erklärten Sinne gleich $2\pi i$ für $n = -1$ und gleich Null für jeden anderen ganzzahligen Werth von n.

Betrachten wir jetzt das Integral

$$K = \int F(x)\frac{dx}{x},$$

wo wir uns ebenfalls die Integration über alle diejenigen Werthe von x ausgedehnt denken, welche denselben absoluten Betrag r haben, unter der Voraussetzung, dass r zwischen den Grenzen A, B liege, so ist zunächst:

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(rw)}{w}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda.$$

Ist nun x_0 irgend ein bestimmter Werth von x, dessen absoluter Betrag gleich r ist, so können wir setzen

$$x_0 = r\frac{1+\mu i}{1-\mu i}, \qquad rw = x_0 \frac{1-\mu i}{1+\mu i}\cdot\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i} = x_0 \frac{1+\dfrac{\lambda-\mu}{1+\mu\lambda}i}{1-\dfrac{\lambda-\mu}{1+\mu\lambda}i},$$

und es verwandelt sich, wenn $\lambda' = \frac{\lambda-\mu}{1+\mu\lambda}$, $w' = \frac{1+\lambda' i}{1-\lambda' i}$ gesetzt wird, der Ausdruck für K in

$$K = \int \frac{F(x_0 w')}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda',$$

wo wir noch die Grenzen, innerhalb welcher die Integration auszuführen ist, zu bestimmen haben. Wenn zunächst μ positiv ist, so liegt,

wenn λ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $-\frac{1}{\mu}$ enthalten ist, λ' zwischen $\frac{1}{\mu}$ und $+\infty$,

„ λ „ „ „ $-\frac{1}{\mu}$ und $+\mu$ „ „ , λ' „ $-\infty$ und 0 ,

„ λ „ „ „ $+\mu$ und $+\infty$ „ „ , λ' „ 0 und $+\frac{1}{\mu}$.

Wenn aber μ negativ ist, so liegt,

wenn λ zwischen den Grenzen $-\infty$ und μ enthalten ist, λ' zwischen $\frac{1}{\mu}$ und 0 ,

„ λ „ „ „ μ und $-\frac{1}{\mu}$ „ „ , λ' „ 0 und $+\infty$,

„ λ „ „ „ $-\frac{1}{\mu}$ und $+\infty$ „ „ , λ' „ $-\infty$ und $\frac{1}{\mu}$.

Hieraus folgt, dass sich die Integration in Beziehung auf λ' ebenfalls von $\lambda' = -\infty$ bis $\lambda' = +\infty$ zu erstrecken hat; man hat also

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w')}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda',$$

oder, wenn man λ für λ', w für w' schreibt,

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda.$$

Sind daher x_0 und x_1 irgend zwei Werthe, deren absolute Beträge zwischen A und B liegen, so ist

$$(2.) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_1 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda.$$

Es ist übrigens

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{0} \frac{F(x_0 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda + \int_{0}^{\infty} \frac{F(x_0 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda.$$

Setzt man in dem ersten Integral $-\lambda$ für λ, so verwandelt sich w in $\frac{1}{w}$, $\frac{dw}{w}$ in $-\frac{dw}{w}$, und man erhält daher

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{F(x_0 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = -\int_{+\infty}^{0} \frac{F\left(\frac{x_0}{w}\right)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = \int_{0}^{\infty} \frac{F\left(\frac{x_0}{w}\right)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda,$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = \int_{0}^{\infty} \frac{F(x_0 w) + F\left(\frac{x_0}{w}\right)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{F(x_0 w) + F\left(\frac{x_0}{w}\right)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda + \int_{1}^{\infty} \frac{F(x_0 w) + F\left(\frac{x_0}{w}\right)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda.$$

Setzt man in dem zweiten Integral $\frac{1}{\lambda}$ für λ, so verwandelt sich w in $-\frac{1}{w}$, $\frac{dw}{w}$ in $-\frac{dw}{w}$, und man erhält

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = \int_{0}^{1} \frac{F(x_0 w) + F(-x_0 w) + F\left(\frac{x_0}{w}\right) + F\left(-\frac{x_0}{w}\right)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda,$$

woraus deutlich hervorgeht, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda$$

einen bestimmten endlichen Werth hat. Nach dem soeben Bewiesenen kann derselbe nur von dem absoluten Betrage r von x_0 abhängen; wir wollen daher

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda$$

mit $\varphi(r)$ bezeichnen.

Setzen wir nun, unter ε eine reelle positive Zahl verstehend,

$$x_1 = x_0 \frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i},$$

so hat x_1 denselben absoluten Betrag wie x_0, und man hat daher nach (2.), wenn man

$$\frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i} = 1 + h\varepsilon; \qquad h = \frac{2i}{1-\varepsilon i} = \frac{-2\varepsilon+2i}{1+\varepsilon^2}$$

setzt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w + x_0 h\varepsilon w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda$$

oder

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w + x_0 h\varepsilon w) - F(x_0 w)}{x_0 h\varepsilon w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = 0.$$

Sind nun a, b irgend zwei positive zwischen den Grenzen A, B gelegene Werthe, und E irgend eine gegebene Grösse, die so klein angenommen werden kann, als man nur will, so lässt sich vermöge der in § 1 hinsichtlich der Function $F(x)$ gemachten Voraussetzung 3), wenn man

$$\frac{F(x+k)-F(x)}{k} = \frac{F(x+hk)-F(x)}{hk} + R$$

setzt, unter der Bedingung, dass h eine bestimmte Grösse nicht überschreite, wie das in unserem Falle wirklich stattfindet, wo der absolute Betrag von h gleich $\frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ ist, für k eine Grenze ρ dergestalt bestimmen, dass für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag nicht ausserhalb der Grenzen a, b liegt, und für jeden Werth von k, dessen absoluter Betrag die Grenze ρ nicht übersteigt, der absolute Betrag von R kleiner als E ist. Setzt man daher

$$x = x_0 w, \qquad k = x_0 \varepsilon w$$

und

$$\frac{F(x_0 w + x_0 \varepsilon w) - F(x_0 w)}{x_0 \varepsilon w} = \frac{F(x_0 w + x_0 h\varepsilon w) - F(x_0 w)}{x_0 h\varepsilon w} + R,$$

so wird R kleiner als E sein, wenn r nicht ausserhalb der Grenzen a, b liegt und ε kleiner als ρ ist. Nach dem eben Bewiesenen erhält man aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w + x_0 \varepsilon w) - F(x_0 w)}{x_0 \varepsilon w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} R \frac{dw}{d\lambda} d\lambda$$

oder

$$\frac{\varphi(r+x_0\varepsilon)-\varphi(r)}{x_0\varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} R \frac{dw}{d\lambda} d\lambda.$$

Es ist aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} 2iwR \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Da nun $\frac{1}{1+\lambda^2}$ innerhalb der Grenzen der Integration positiv ist, so ist der absolute Betrag von $\int_{-\infty}^{+\infty} 2iwR \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$ kleiner als der grösste absolute Werth, den $2iwR$ innerhalb der Grenzen der Integration erhalten kann, multiplicirt mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$, also kleiner als $2\pi E$.

Setzen wir nun

$$x_0\varepsilon = \frac{b-a}{n},$$

wobei wir unter n eine positive ganze Zahl verstehen, so ist

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\varphi(a+\nu x_0\varepsilon+x_0\varepsilon)-\varphi(a+\nu x_0\varepsilon)}{n x_0\varepsilon};$$

und nimmt man n so gross an, dass $\frac{b-a}{n}$ kleiner als ρ wird, so ist für jeden Werth von ν der absolute Betrag von

$$\frac{\varphi(a+\nu x_0\varepsilon+x_0\varepsilon)-\varphi(a+\nu x_0\varepsilon)}{n x_0\varepsilon}$$

kleiner als $\frac{2\pi}{n} E$, woraus folgt, dass der absolute Betrag von

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$$

kleiner als $2\pi E$ ist. Die Grösse E kann aber so klein angenommen werden, als man nur immer will; mithin kann $\varphi(b)$ nicht von $\varphi(a)$ verschieden sein, d. h. der Werth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda$$

ist für alle Werthe von x_0, deren absoluter Betrag zwischen den Grenzen A, B enthalten ist, derselbe.

Nehmen wir statt $F(x)$ die Function $x^n . F(x)$, wo n irgend eine ganze Zahl bedeute, so lässt sich leicht zeigen, dass für dieselbe ebenfalls die in

§ 1 hinsichtlich $F(x)$ gemachten Annahmen gleichzeitig gelten. Dies ist unmittelbar klar hinsichtlich der beiden ersten; was die dritte betrifft, so hat man

$$\frac{(x+hk)^n.F(x+hk)-x^n.F(x)}{hk}-\frac{(x+k)^n.F(x+k)-x^n.F(x)}{k}$$
$$=\frac{(x+hk)^n-x^n}{hk}\cdot F(x+hk)+x^n\cdot\frac{F(x+hk)-F(x)}{hk}$$
$$-\frac{(x+k)^n-x^n}{k}\cdot F(x+k)-x^n\cdot\frac{F(x+k)-F(x)}{k}$$
$$=\left\{\frac{(x+hk)^n-x^n}{hk}-\frac{(x+k)^n-x^n}{k}\right\}F(x+hk)+\frac{(x+k)^n-x^n}{k}\{F(x+hk)-F(x)\}$$
$$+x^n\left\{\frac{F(x+hk)-F(x)}{hk}-\frac{F(x+k)-F(x)}{k}\right\}.$$

Jedes Glied dieser Summe wird aber, da $\frac{(x+k)^n-x^n}{k}$, wenn k unendlich klein wird, der Grenze nx^{n-1} sich nähert, unter der Bedingung, dass h eine bestimmte Grenze nicht überschreitet, für alle Werthe von x innerhalb der festgelegten Grenzen mit k zugleich unendlich klein. Die Function $x^n.F(x)$ hat also ganz denselben Charakter wie $F(x)$, woraus sich denn sofort ergiebt, dass auch der Werth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x_0w)^n\frac{F(x_0w)}{w}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda$$

derselbe bleibt für alle Werthe von x_0 innerhalb der bezeichneten Grenzen.

§ 3.

Nehmen wir nun an, dass sich $F(x)$ in der That in eine Reihe von der in § 1 angegebenen Form entwickeln lasse, also für jeden Werth von x innerhalb der bezeichneten Grenzen

$$F(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}A_\nu x^\nu \tag{3.}$$

sei, so lassen sich unter dieser Voraussetzung die Coefficienten der Reihe leicht bestimmen. Denn aus (3.) folgt

$$F(x).x^{-n}=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}A_\nu x^{\nu-n}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(x_0w)}{w}(x_0w)^{-n}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}A_\nu.\int_{-\infty}^{+\infty}(x_0w)^{\nu-n}\frac{1}{w}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda.$$

Aber, wie oben bewiesen, ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x_0w)^{\nu-n}\frac{1}{w}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda=0$$

für alle Werthe von ν mit Ausnahme von $\nu=n$, wo dasselbe gleich $2\pi i$ ist. Somit erhält man

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(x_0w)}{w}(x_0w)^{-n}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda. \tag{4.}$$

Hieraus folgt zunächst, dass, wenn $F(x)$ durch eine Reihe von der in Rede stehenden Form dargestellt werden kann, dies nur auf eine einzige Weise möglich ist. Es ist daher zu beweisen: 1), dass die Reihe

$$\sum A_\nu x^\nu,$$

wenn in ihr die Coefficienten A_ν nach (4.) bestimmt werden, für alle Werthe von x innerhalb der bezeichneten Grenzen unbedingt convergirt, und 2), dass ihre Summe wirklich gleich $F(x)$ ist.

Sind a, b irgend zwei Werthe zwischen A und B, von denen a kleiner und b grösser als der absolute Betrag von x ist, so kann man setzen

$$A_\nu=\frac{b^{-\nu}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}w^{-\nu}\frac{F(bw)}{w}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda=\frac{b^{-\nu}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}w^{-\nu}F(bw)\frac{2d\lambda}{1+\lambda^2},$$
$$A_{-\nu}=\frac{a^\nu}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}w^\nu\frac{F(aw)}{w}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda=\frac{a^\nu}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}w^\nu F(aw)\frac{2d\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Nun existirt, wenn man der Grösse λ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt, für den absoluten Betrag von $F(aw)$ und ebenso für den von $F(bw)$ eine obere Grenze; bezeichnet man erstere mit M und letztere mit N, so ist unter der Voraussetzung, dass ν eine positive Zahl bedeute, der absolute Betrag von A_ν kleiner als $Nb^{-\nu}$ und der von $A_{-\nu}$ kleiner als Ma^ν. Mithin ist, wenn r den absoluten Werth von x bezeichnet, der absolute Betrag von $A_\nu x^\nu$ kleiner als $N\left(\frac{r}{b}\right)^\nu$ und der von $A_{-\nu}x^{-\nu}$ kleiner als $M\left(\frac{a}{r}\right)^\nu$. Da nun $\frac{r}{b}$, $\frac{a}{r}$ beide kleiner als 1 sind, so ergiebt sich hieraus sofort, dass jede der Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}A_\nu x^\nu \quad\text{und}\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}A_{-\nu}x^{-\nu}$$

und somit auch die Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$$

unbedingt convergirt.

Um nun den Werth von $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$ zu bestimmen, verfahren wir so. Es sei ε eine positive Veränderliche, welche kleiner als 1 ist, so ist, weil $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$ convergirt,

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu = \lim_{\varepsilon=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_\nu \varepsilon^\nu x^\nu$$

und ebenso:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_{-\nu} x^{-\nu} = \lim_{\varepsilon=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_{-\nu} \varepsilon^\nu x^{-\nu}$$

(Conf.: Abel, Oeuvres complètes pag. 69. Theorem IV).

Wir können aber setzen

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(xw)}{w}(xw)^{-\nu}\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda,$$

$$A_{-\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(xw)}{w}(xw)^{\nu}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda,$$

und daher ist

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_\nu \varepsilon^\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(xw)}{w}\left(\frac{\varepsilon}{w}\right)^\nu \frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(xw)}{w}\cdot\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{w}}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda;$$

ferner

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_{-\nu} x^{-\nu}\varepsilon^\nu = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(xw)\frac{\varepsilon^\nu w^\nu}{w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} F(xw)\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda,$$

und daher

$$(5.)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon=1}\int_{-\infty}^{+\infty} F(xw)\left\{\frac{1}{w-\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w}\right\}\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda.$$

Setzt man nun

$$\frac{w-\varepsilon}{1-\varepsilon w} = w', \qquad w = \frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'},$$

so hat man

$$\frac{dw'}{w'} = \frac{dw}{w-\varepsilon} + \frac{\varepsilon\,dw}{1-\varepsilon w}.$$

Es ist aber

$$w-\varepsilon = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i} - \varepsilon = \frac{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)\lambda i}{1-\lambda i}, \qquad 1-\varepsilon w = \frac{1-\varepsilon-(1+\varepsilon)\lambda i}{1-\lambda i}$$

und, wenn man

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\lambda = \lambda'$$

nimmt,

$$w' = \frac{1+\lambda' i}{1-\lambda' i}.$$

Bemerkt man nun, dass $\lambda' = -\infty$ für $\lambda = -\infty$ und $\lambda' = +\infty$ für $\lambda = +\infty$ ist, so ergiebt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(xw)\left\{\frac{1}{w-\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w}\right\}\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{w'}\,F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'.$$

Setzt man in dem letzten Integral $\varepsilon = 1$, so wird $\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'} = 1$, woraus man schliesst:

$$\lim_{\varepsilon=1}\int_{-\infty}^{+\infty} F(xw)\left\{\frac{1}{w-\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w}\right\}\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = F(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda' = 2\pi i\,F(x).$$

Gegen die Richtigkeit dieses Schlusses liesse sich das Bedenken erheben, dass für $w' = -1$ oder für $\lambda' = \pm\infty$ der Ausdruck $\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}$ nicht gleich 1 wird, wenn ε sich der Grenze 1 nähert, indem dann dieser Quotient für jeden Werth von ε vielmehr gleich -1 ist. Um dieses Bedenken zu beseitigen, drücke man das in Rede stehende Integral als Summe der drei nachstehenden aus:

$$\int_{-\infty}^{-\lambda_0} F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'; \quad \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'; \quad \int_{+\lambda_0}^{+\infty} F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'.$$

Das erste derselben lässt sich, indem man $-\lambda'$ für λ' setzt, transformiren in:

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} F\left(x\frac{1+\varepsilon w'}{\varepsilon+w'}\right)\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'.$$

Die Summe des ersten und dritten Integrals giebt daher

$$\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{1}{w'}\left\{F\left(x\frac{1+\varepsilon w'}{w'+\varepsilon}\right)+F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\right\}\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'.$$

Da $\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'} = \frac{2i}{1+\lambda'^2}$ innerhalb der Grenzen der Integration das Zeichen nicht ändert, so kann man diesen Ausdruck auf die Form

$$R.\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'$$

bringen, wo der absolute Betrag von R kleiner ist als der grösste absolute Betrag, den

$$F\left(x\,\frac{1+\varepsilon w'}{w'+\varepsilon}\right)+F\left(x\,\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)$$

für die verschiedenen Werthe von λ', oder

$$F(xw)+F\left(\frac{x}{w}\right)$$

für die verschiedenen Werthe von λ erhält. Es ist aber

$$\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda' = \int_0^{\infty}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'-\int_0^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda' = \pi i-\int_0^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda',$$

mithin ist das fragliche Integral gleich

$$\int_{-\lambda_0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\,F\left(x\,\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'+R\left\{\pi i-\int_0^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'\right\}.$$

Die Grenze dieses Ausdrucks für den Grenzwerth $\varepsilon = 1$ ist nun

$$F(x)\int_{-\lambda_0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'+R_1\left\{\pi i-\int_0^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'\right\}$$

oder

$$2\pi i\,F(x)-F(x)\left\{2\pi i-\int_{-\lambda_0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'\right\}+R_1\left\{\pi i-\int_0^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\,\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'\right\}.$$

Da λ_0 ganz willkürlich ist, so kann man den Werth dieser Zahl so gross annehmen, dass die beiden eingeklammerten Differenzen kleiner als jede gegebene Grösse werden, woraus erhellt, dass die gesuchte Grenze wirklich $2\pi i\,F(x)$ ist.

Man hat daher

$$(6.)\qquad \lim_{\varepsilon=1}\int_{-\infty}^{+\infty}F(xw)\left\{\frac{1}{w-\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w}\right\}\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = 2\pi i\,F(x),$$

und vermöge (5.)

$$(7.)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}A_\nu x^\nu = F(x)$$

für jeden Werth von x innerhalb der bezeichneten Grenzen.

Uebrigens lässt sich leicht nachweisen, dass, wenn eine Function durch eine Reihe von der Form (7.), die für alle, ihrem absoluten Betrage nach zwischen zwei Grenzen A, B liegenden Werthe von x unbedingt convergirt, dargestellt werden kann, sie die in § 1 angegebenen Bedingungen erfüllt, so dass diese nicht allein hinreichend, sondern auch nothwendig sind.

§ 4.

Wenn die Veränderliche x alle Werthe haben kann, deren absoluter Betrag eine bestimmte Grenze nicht überschreitet, und wenn $F(x)$ für keinen Werth von x in der Nähe von 0 unendlich gross wird, so kann man aus dem in § 3 bewiesenen Umstande, dass der absolute Betrag von $A_{-\nu}$ kleiner als Ma^ν ist, wenn M den grössten absoluten Werth bezeichnet, den $F(aw)$ für die verschiedenen Werthe von w erhält, folgern, dass

$$A_\nu = 0$$

ist für jeden negativen Werth von ν. Denn man kann unter den gemachten Voraussetzungen a beliebig klein annehmen, während M eine bestimmte Grösse nicht überschreitet. In diesem Falle lässt sich daher $F(x)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_\nu x^\nu+\cdots,$$

die nur ganze positive Potenzen enthält, entwickeln.

Wenn dagegen die Veränderliche x alle Werthe erhalten kann, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze übersteigt, und wenn $F(x)$ überdies für keinen unendlich grossen Werth von x unendlich gross wird, so kann man aus dem Umstande, dass A_ν kleiner als $Nb^{-\nu}$ ist, wenn N den grössten absoluten Werth bezeichnet, den $F(bw)$ für die verschiedenen Werthe von w erhält, folgern, dass $A_\nu = 0$ ist für jeden positiven Werth von ν. Denn man kann b so gross annehmen, dass $b^{-\nu}$ kleiner wird als jede gegebene Grösse, während N eine bestimmte Grenze nicht überschreitet. Man kann daher in diesem Falle $F(x)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{-\nu} x^{-\nu}$$

entwickeln, die für alle Werthe von x innerhalb der bezeichneten Grenzen absolut convergirt.

§ 5.

Setzen wir $F(x+k)$ für $F(x)$ und betrachten jetzt k als Veränderliche, so hat die Function $F(x+k)$, wenn wir die absoluten Beträge von x und k durch r und ρ bezeichnen, für alle Werthe von k, welche so beschaffen sind, dass $r+\rho$ innerhalb der Grenzen liegt, zwischen denen der absolute Betrag von x sich bewegt, diejenigen Eigenschaften, die erforderlich sind, damit sie nach Potenzen von k entwickelt werden kann. Da ferner $F(x+k)$ für keinen Werth von k in der Nähe von $k=0$ unendlich gross wird, so kann man nach § 4 setzen

$$F(x+k) = F_0 + F_1 k + F_2 k^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F_\nu k^\nu,$$

und es ist, wenn k_0 irgend einen bestimmten Werth bezeichnet, den k erhalten kann, zufolge (4.)

$$F_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x+k_0 w)}{k_0^n w^n} \frac{1}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda. \tag{8.}$$

Man hat aber, wenn man in (7.) $x+k_0 w$ für x setzt,

$$F(x+k_0 w) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu (x+kw)^\nu,$$

mithin

$$F_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+k_0 w)^\nu}{k_0^n w^n} \frac{1}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda.$$

Nimmt man, was erlaubt ist, den absoluten Betrag von k_0 kleiner als den von x, so kann man $(x+k_0 w)^\nu$ in eine convergirende Reihe

$$x^\nu + \nu_1 x^{\nu-1} k_0 w + \cdots + \nu_n x^{\nu-n} k_0^n w^n + \cdots$$

entwickeln, wo $\nu_1, \nu_2, \ldots$ die Binominalcoefficienten für den Exponenten ν bezeichnen. Multiplicirt man diese Reihe mit $\frac{1}{k_0^n w^n} \frac{1}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda$ und integrirt zwischen den Grenzen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = +\infty$, so erhält man vermöge des in

§ 3 Erwiesenen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+k_0 w)^\nu}{k_0^n w^n} \frac{1}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = 2\pi i \nu_n x^{\nu-n},$$

und daher

$$F_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \nu_n A_\nu x^{\nu-n}. \tag{9.}$$

Bezeichnet man nun durch $F^{(1)}(x)$ die Abgeleitete der Function $F(x)$, d. h. den Coefficienten von k in der Entwicklung von $F(x+k)$ nach ganzen Potenzen von k, so ist

$$F^{(1)}(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \nu A_\nu x^{\nu-1}. \tag{10.}$$

Diese Reihe ist, wie aus ihrer Herleitung unmittelbar folgt, convergent für alle diejenigen Werthe von x, für welche $\sum A_\nu x^\nu$ convergirt, und daher ist $F^{(1)}(x)$ eine Function, welche für alle Werthe von x ganz denselben Charakter hat wie $F(x)$. Bezeichnet man nun durch $F^{(2)}(x)$ die Abgeleitete von $F^{(1)}(x)$, durch $F^{(3)}(x)$ die von $F^{(2)}(x)$ u. s. w., so folgt sofort, dass sämmtliche Functionen

$$F(x),\quad F^{(1)}(x),\quad F^{(2)}(x),\quad F^{(3)}(x),\quad \ldots$$

den in § 1 angegebenen Charakter haben. Nun hat man

$$\left\{\begin{aligned} F^{(1)}(x) &= \sum \nu A_\nu x^{\nu-1} \\ F^{(2)}(x) &= \sum \nu(\nu-1) A_\nu x^{\nu-2} \\ F^{(3)}(x) &= \sum \nu(\nu-1)(\nu-2) A_\nu x^{\nu-3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{(n)}(x) &= \sum \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-n+1) A_\nu x^{\nu-n} = n! \sum \nu_n A_\nu x^{\nu-n}. \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

Hieraus ergiebt sich vermöge (9.)

$$F_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(x). \tag{12.}$$

Also hat man, da $F_0 = F(x)$ ist,

$$\begin{aligned} F(x+k) &= F(x) + F^{(1)}(x) \cdot \frac{k}{1!} + F^{(2)}(x) \cdot \frac{k^2}{2!} + F^{(3)}(x) \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F^{(\nu)}(x) \cdot \frac{k^\nu}{\nu!}, \end{aligned} \tag{13.}$$

wo $F^{(0)}(x) = F(x)$ ist, für alle diejenigen Werthe von x und k, die so beschaffen sind, dass die Summe ihrer absoluten Beträge zwischen den Grenzen enthalten ist, innerhalb welcher der absolute Betrag von x liegen muss. Ferner ergiebt sich noch aus (8.)

$$(14.)\qquad \frac{F^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(x+k_0 w)}{k_0^n w^n}\,\frac{1}{wi}\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda,$$

wo k_0 so klein angenommen werden muss, dass $x+k_0 w$ für alle Werthe von w von $\lambda=-\infty$ bis $\lambda=+\infty$ innerhalb der für x bezeichneten Grenzen liegt, mit dieser Einschränkung aber willkürlich gewählt werden kann.

Münster, 1841.

ZUR THEORIE DER POTENZREIHEN.

A. Es sei

$$F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$$

eine Potenzreihe der complexen Veränderlichen x mit gegebenen Coefficienten. Ist dann r irgend eine bestimmte, innerhalb des Convergenzbezirks der Reihe liegende positive Grösse, so hat der absolute Betrag von $F(x)$, wenn man der Veränderlichen x alle diejenigen Werthe beilegt, für welche $|x|=r$ ist, eine obere Grenze, die mit g bezeichnet werde; und es gilt der Satz:

$$|A_\mu| \leq g r^{-\mu}$$

für jeden ganzzahligen Werth von μ.

Da die betrachtete Potenzreihe für alle, der Bedingung $|x|=r$ entsprechenden Werthe von x gleichmässig convergirt, so lassen sich nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse δ zwei positive ganze Zahlen n, n' so bestimmen, dass

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=-n'+1} A_\nu x^\nu,\qquad \sum_{\nu=n+1}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als δ, wenn $|x|=r$ ist. Dies vorausgesetzt, nehme man eine complexe Grösse ξ vom absoluten Betrage 1 so an, dass keine der Potenzen $\xi^{-1}, \dots \xi^{-n'}, \xi, \dots \xi^n$ den Werth 1 erhält, so hat man

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} F(r\xi^\lambda) = (l+1)A_0 + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=l}\sum_{\nu=1}^{\nu=n'} A_{-\nu} r^{-\nu}\xi^{-\lambda\nu} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=l}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_\nu r^\nu \xi^{\lambda\nu} + \sum_\lambda(\delta_\lambda+\delta'_\lambda),$$

wo die Grössen δ_λ, δ'_λ dem absoluten Betrage nach $<\delta$ sind, oder

$$\frac{1}{l+1}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} F(r\xi^\lambda) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=n'} A_{-\nu} r^{-\nu}\cdot\frac{1-\xi^{-(l+1)\nu}}{(l+1)(1-\xi^{-\nu})} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_\nu r^\nu\cdot\frac{1-\xi^{(l+1)\nu}}{(l+1)(1-\xi^\nu)} + \varepsilon,$$

wo $\varepsilon \leqq 2\delta$ ist. Lässt man sodann die Zahl l ohne Ende wachsen, so nähern sich die Ausdrücke unter den Summenzeichen auf der rechten Seite der Gleichung der Grenze Null, während die Summe auf der linken Seite niemals $> g$ wird. Setzt man also

$$|A_0| = g + \varepsilon',$$

so ist $\varepsilon' < \varepsilon$, und es kann also A_0 dadurch, dass man den Zahlen n', n hinreichend grosse Werthe giebt, der Grösse g so nahe gebracht werden als man will, woraus sich, da der Werth von A_0 von den Zahlen n, n' unabhängig ist, unmittelbar ergiebt, dass $|A_0|$ niemals $> g$ ist.

Wendet man nun, unter μ eine beliebige ganze Zahl verstehend, diesen Satz auf die Function $F(x).x^{-\mu}$ an, so unterscheidet sich letztere von der ersteren nur dadurch, dass $gr^{-\mu}$ an die Stelle von g und A_μ an die Stelle von A_0 tritt, und es ergiebt sich also

$$|A_\mu| \leqq g r^{-\mu}.$$

B. Es sei

$$F(x_1, x_2, \dots x_\varrho) = \sum_{(\nu)} A_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho}, \qquad (\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho = -\infty \cdots +\infty)$$

wo $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ complexe Veränderliche bedeuten, während die Coefficienten A gegebene Constanten bezeichnen und so beschaffen sein sollen, dass die Reihe auch für Werthsysteme $(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$, in denen jede einzelne Grösse von Null verschieden ist, convergirt. Wird dann irgend ein System positiver Grössen $r_1, r_2, \dots r_\varrho$ so angenommen, dass die Stelle $(x_1 = r_1, x_2 = r_2, \dots x_\varrho = r_\varrho)$ dem Innern des Convergenzbezirkes der Reihe angehört, so hat der absolute Betrag von $F(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ für diejenigen Werthsysteme $(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$, in denen $|x_1| = r_1$, $|x_2| = r_2, \dots |x_\varrho| = r_\varrho$ ist, eine obere Grenze, die mit g bezeichnet werde; und es gilt der Satz

$$|A_{\mu_1, \mu_2, \dots \mu_\varrho}| \leqq g r_1^{-\mu_1} r_2^{-\mu_2} \dots r_\varrho^{-\mu_\varrho}$$

für jedes System ganzzahliger Werthe von $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_\varrho$.

Da die betrachtete Potenzreihe für die der Bedingung

$$|x_1| = r_1, \quad |x_2| = r_2, \ \dots |x_\varrho| = r_\varrho$$

entsprechenden Werthsysteme $(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ gleichmässig convergirt, so lässt sich aus ihr nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse δ eine endliche

Anzahl von Gliedern so herausheben, dass die Summe aller übrigen Glieder für jedes der angegebenen Werthsysteme $(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ ihrem absoluten Betrage nach $< \delta$ ist. Bezeichnet man dann die Summe der herausgehobenen Glieder mit

$$A_{0,0,\dots 0} + \overline{F}(x_1, x_2, \dots x_\varrho) = \sum_{(\nu')} A_{\nu'_1, \nu'_2, \dots \nu'_\varrho} . x_1^{\nu'_1} x_2^{\nu'_2} \dots x_\varrho^{\nu'_\varrho},$$

so ist

$$|F(x_1, x_2, \dots x_\varrho)| + \delta > |A_{0,0,\dots 0}| + |\overline{F}(x_1, x_2, \dots x_\varrho)|,$$

und somit

$$g + \delta > |A_{0,0,\dots 0}| + |\overline{F}(x_1, x_2, \dots x_\varrho)|.$$

Nunmehr seien $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\varrho$ Grössen vom absoluten Betrage 1, deren Wahl keiner andern Beschränkung unterworfen ist, als dass in jedem Gliede von $\overline{F}(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ wenigstens eine der Grössen

$$\xi_1^{\nu'_1}, \ \xi_2^{\nu'_2}, \ \dots \xi_\varrho^{\nu'_\varrho}$$

von 1 verschieden sein muss.

Setzt man dann

$$r_1 \xi_1^{\lambda_1}, \quad r_2 \xi_2^{\lambda_2}, \ \dots r_\varrho \xi_\varrho^{\lambda_\varrho} \quad \text{für} \quad x_1, x_2, \dots x_\varrho,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\varrho$ ganze Zahlen bedeuten, von denen jede unabhängig von den übrigen die Werthe $0, 1, \dots l$ durchlaufen soll, so hat man der Definition der Grössen g, δ gemäss für jedes System $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\varrho)$

$$|g + \delta| > |A_{0,0,\dots 0}| + |\overline{F}(r_1 \xi_1^{\lambda_1}, r_2 \xi_2^{\lambda_2}, \dots r_\varrho \xi_\varrho^{\lambda_\varrho})|,$$

also

$$|g + \delta| > |A_{0,0,\dots 0}| + \Big|\sum_{(\lambda)} \frac{1}{(l+1)^\varrho} F(r_1 \xi_1^{\lambda_1}, r_2 \xi_2^{\lambda_2}, \dots r_\varrho \xi_\varrho^{\lambda_\varrho})\Big|.$$

Es lässt sich aber zeigen, dass der Ausdruck

$$\sum_{(\lambda)} \frac{1}{(l+1)^\varrho} F(r_1 \xi_1^{\lambda_1}, r_2 \xi_2^{\lambda_2}, \dots r_\varrho \xi_\varrho^{\lambda_\varrho})$$

sich der Grenze Null nähert, wenn man l ohne Ende wachsen lässt.

Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn man den vorstehenden Ausdruck in der Form

$$\sum_{(\nu')} A_{\nu'_1, \nu'_2, \dots \nu'_\varrho} r_1^{\nu'_1} r_2^{\nu'_2} \dots r_\varrho^{\nu'_\varrho} \left\{ \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=l} \frac{1}{l+1} (\xi_1^{\nu'_1})^{\lambda_1} \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_2=l} \frac{1}{l+1} (\xi_2^{\nu'_2})^{\lambda_2} \dots \sum_{\lambda_\varrho=0}^{\lambda_\varrho=l} \frac{1}{l+1} (\xi_\varrho^{\nu'_\varrho})^{\lambda_\varrho} \right\}$$

schreibt und bemerkt, dass für jede complexe Grösse ξ vom absoluten Betrage 1

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} \frac{1}{l+1} (\xi^{\nu'})^{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{1-\xi^{(l+1)\nu'}}{(l+1)(1-\xi^{\nu'})}, & \text{wenn } \xi^{\nu'} \text{ von 1 verschieden,} \\ 1 \qquad\qquad , & \text{wenn } \xi^{\nu'} = 1, \end{cases}$$

und dass der Annahme nach in jedem Gliede von $\overline{F}(r_1 \xi_1^{\lambda_1}, r_2 \xi_2^{\lambda_2}, \ldots r_\varrho \xi_\varrho^{\lambda_\varrho})$ wenigstens eine der Grössen

$$\xi_1^{\nu_1'}, \; \xi_2^{\nu_2'}, \; \ldots \; \xi_\varrho^{\nu_\varrho'}$$

nicht gleich 1 ist. Man kann daher schliessen:

$$|A_{0,0,\ldots 0}| < |g+\delta| - \delta',$$

wo δ' eine beliebig klein anzunehmende Grösse bedeutet. Es kann aber die Function $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ so angenommen werden, dass auch δ beliebig klein wird; es muss also

$$|A_{0,0,\ldots 0}| \leqq g$$

sein.

Lässt man sodann

$$x_1^{-\mu_1} x_2^{-\mu_2} \ldots x_\varrho^{-\mu_\varrho} . F(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$$

an die Stelle von $F(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ treten, so hat man $g r_1^{-\mu_1} r_2^{-\mu_2} \ldots r_\varrho^{-\mu_\varrho}$ statt g zu nehmen, und es ergiebt sich

$$|A_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\varrho}| \leqq g r_1^{-\mu_1} r_2^{-\mu_2} \ldots r_\varrho^{-\mu_\varrho}.$$

Aus den vorstehenden Sätzen A), B) lässt sich nun ein anderer von besonderer Wichtigkeit ableiten.

C. Es seien unendlich viele gewöhnliche Potenzreihen[1]) in bestimmter Aufeinanderfolge gegeben:

$$F_0(x_1, x_2, \ldots x_\varrho), \qquad F_1(x_1, x_2, \ldots x_\varrho), \qquad F_2(x_1, x_2, \ldots x_\varrho), \; \ldots \; ,$$

und es werde angenommen, dass in einer bestimmten Umgebung G der Stelle $(0, 0, \ldots 0)$[2]) nicht nur jede einzelne dieser Reihen, sondern auch deren Summe unbedingt und gleichmässig convergire.

1) d. h. Reihen von der Form $\sum A_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho}$, in denen jeder der Exponenten eine ganze positive Zahl oder Null ist.

2) Unter Umgebung einer bestimmten Stelle $(a_1, a_2, \ldots a_\varrho)$ im Gebiete von ϱ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ ist ein Bereich von folgender Beschaffenheit zu verstehen: Wenn $(x_1', x_2', \ldots x_\varrho')$ irgend eine Stelle des Bereiches ist, so gilt dasselbe von jeder Stelle $(x_1'', x_2'', \ldots x_\varrho'')$, die den Bedingungen $|x_1''-a_1| \leqq |x_1'-a_1|$, $|x_2''-a_2| \leqq |x_2'-a_2|$, $\ldots$ $|x_\varrho''-a_\varrho| \leqq |x_\varrho'-a_\varrho|$ entspricht. Ein solcher Bereich ist z. B. der Convergenzbezirk jeder gewöhnlichen Potenzreihe von $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$.

Bezeichnet man dann den Coefficienten von $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho}$ in $F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ mit $A^{(\mu)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho}$ und setzt

$$\sum_{(\mu)} A^{(\mu)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho} = A_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho},$$

so lässt sich zeigen, dass $A_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho}$ einen endlichen Werth hat und für jedes der genannten Umgebung angehörige Werthsystem die Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho) = \sum_{(\nu)} A_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho}$$

besteht.

Um diesen Satz zu beweisen, nehme man ϱ positive Grössen $r_1, r_2, \ldots r_\varrho$ so an, dass die Stelle $(x_1 = r_1, x_2 = r_2, \ldots x_\varrho = r_\varrho)$ im Innern des Bereiches G liegt.

Ist dann k irgend eine bestimmte positive Grösse, so kann eine ganze positive Zahl m so gewählt werden, dass für jedes, den Bedingungen

$$|x_1| \leqq r_1, \; |x_2| \leqq r_2, \; \ldots \; |x_\varrho| \leqq r_\varrho$$

entsprechende Werthsystem $(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ und für jede ganze Zahl n, die $\geqq m$, der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho) < \tfrac{1}{2} k,$$

und deshalb für jede Zahl n', die $\geqq n$,

$$\left| \sum_{\mu=n}^{\mu=n'} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho) \right| < k$$

ist. Man hat aber

$$\sum_{\mu=n}^{\mu=n'} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho) = \sum_{(\nu)} \sum_{\mu=n}^{\mu=n'} A^{(\mu)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho},$$

und somit nach dem vorhergehenden Satze für jedes Werthsystem $(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho)$

$$\sum_{\mu=n}^{\mu=n'} A^{(\mu)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho} < k r_1^{-\nu_1} r_2^{-\nu_2} \ldots r_\varrho^{-\nu_\varrho}.$$

Demgemäss hat die Summe

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A^{(\mu)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho}$$

einen bestimmten endlichen Werth, der mit $A_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho}$ bezeichnet werde.

Hiernach hat man, wenn man

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} A^{(\mu)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} = A'_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho}, \qquad \sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} A^{(\mu)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} = A''_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho}$$

setzt und den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ nur solche Werthe beilegt, deren absolute Beträge $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\varrho < r_1, r_2, \ldots r_\varrho$ sind,

$$\sum_{(\nu)} \left| A''_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho} \right| < \sum_{(\nu)} k \left(\frac{\xi_1}{r_1}\right)^{\nu_1} \left(\frac{\xi_2}{r_2}\right)^{\nu_2} \cdots \left(\frac{\xi_\varrho}{r_\varrho}\right)^{\nu_\varrho},$$

und somit

$$\sum_{(\nu)} \left| A''_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho} \right| < k \frac{r_1}{r_1-\xi_1} \cdot \frac{r_2}{r_2-\xi_2} \cdots \frac{r_\varrho}{r_\varrho-\xi_\varrho}.$$

Die Reihe

$$\sum_{(\nu)} \left| A''_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho} \right|$$

ist also für die jetzt betrachteten Werthsysteme $(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ unbedingt convergent, und dies gilt nun, da

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho) = \sum_{(\nu)} A'_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho},$$

auch von der Reihe

$$\sum_{(\nu)} A_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho}.$$

Man hat ferner

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho) - \sum_{(\nu)} A_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho} \\ = &\sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho) - \sum_{(\nu)} A''_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho}, \end{aligned}$$

und somit

$$\left| \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho) - \sum_{(\nu)} A_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho} \right| \leqq k \frac{r_1}{r_1-\xi_1} \cdot \frac{r_2}{r_2-\xi_2} \cdots \frac{r_\varrho}{r_\varrho-\xi_\varrho} + \tfrac{1}{2} k.$$

Da man nun für jedes bestimmte, dem Bereiche G angehörige Werthsystem $(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ zunächst $r_1, r_2, \ldots r_\varrho$ der angegebenen Bedingung gemäss und dann k so annehmen kann, dass

$$k \frac{r_1}{r_1-\xi_1} \cdot \frac{r_2}{r_2-\xi_2} \cdots \frac{r_\varrho}{r_\varrho-\xi_\varrho} + \tfrac{1}{2} k$$

kleiner ist als eine beliebige gegebene Grösse, der Ausdruck auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung aber von k unabhängig ist, so folgt, dass

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho) = \sum_{(\nu)} A_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho}$$

sein muss.

Jetzt mögen

$$F_0(x_1, x_2, \ldots x_\varrho), \qquad F_1(x_1, x_2, \ldots x_\varrho), \qquad F_2(x_1, x_2, \ldots x_\varrho), \qquad \ldots.$$

irgend welche eindeutigen Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ bedeuten, welche die Bedingung erfüllen, dass für alle einem zusammenhängenden Bereiche G angehörigen Werthsysteme $(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$$

unbedingt und gleichförmig convergirt.

Nimmt man dann in G eine bestimmte Stelle $(a_1, a_2, \ldots a_\varrho)$ beliebig an und setzt

$$x_1 = a_1+\xi_1, \quad x_2 = a_2+\xi_2, \quad \ldots \quad x_\varrho = a_\varrho+\xi_\varrho,$$

so lässt sich jede Function $F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ in eine gewöhnliche Potenzreihe von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\varrho$ entwickeln und im Gebiete der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\varrho$ eine Umgebung der Stelle $(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \ldots \xi_\varrho = 0)$ angeben, innerhalb welcher die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(a_1+\xi_1, a_2+\xi_2, \ldots a_\varrho+\xi_\varrho)$$

unbedingt und gleichförmig convergirt, und somit nach dem vorstehenden Satze in eine Potenzreihe von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\varrho$ verwandelt werden kann. Damit ist erwiesen, dass innerhalb des Bereiches G die Summe

$$\sum_{\mu} F_\mu(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$$

eine eindeutige analytische Function von $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ ist. Ferner ergiebt sich, dass diese Function Derivirte jeder Ordnung besitzt und dass (für $\lambda = 1, 2, \dots \rho$)

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho),$$

und allgemein

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\varrho}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_\varrho^{\alpha_\varrho}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\varrho}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_\varrho^{\alpha_\varrho}} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$$

ist.

Münster, im Herbst 1841.

DEFINITION ANALYTISCHER FUNCTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN VERMITTELST ALGEBRAISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

(Auszug aus einer im Jahre 1842 verfassten, bisher nicht veröffentlichten Abhandlung.)

1.

Es sei vorgelegt das folgende System von n Differentialgleichungen, in denen $x_1, \dots x_n$ zu bestimmende Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t und

$$G_1(x_1, \dots x_n), \; \dots \; G_n(x_1, \dots x_n)$$

gegebene ganze rationale Functionen von $x_1, \dots x_n$ bedeuten sollen:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} - G_1(x_1, \dots x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} - G_n(x_1, \dots x_n) = 0. \end{cases}$$

Dann lassen sich zunächst n in einer gewissen Umgebung der Stelle $(t = 0)$ convergirende (gewöhnliche) Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$$

herstellen, welche für $x_1, \dots x_n$ gesetzt den vorstehenden Differentialgleichungen genügen und zugleich für $t = 0$ beliebig vorgeschriebene Werthe

$$a_1, \dots a_n$$

annehmen.

Sind nämlich $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ irgend n Potenzreihen, welche unter der Bedingung, dass der absolute Betrag von t unter einer gewissen Grenze (r) liege, sämmtlich convergiren, und setzt man

$$x_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t), \qquad (\lambda = 1, \dots n) \tag{2.}$$

so lassen sich die Ausdrücke

$$\frac{dx_\lambda}{dt} - G_\lambda(x_1, \dots x_n) \qquad (\lambda = 1, \dots n) \tag{3.}$$

nach Potenzen von t in Reihen entwickeln, die ebenfalls convergiren, wenn

$$|t| < r$$

ist. Bezeichnet man den Coefficienten von t^μ in $\mathfrak{P}_\lambda(t)$ mit $a_{\lambda,\mu}$ $(\mu = 0, 1, \dots +\infty)$, so hat der Coefficient von t^μ in der Entwicklung von

$$\frac{dx_\lambda}{dt} - G_\lambda(x_1, \dots x_n)$$

die Form

$$(\mu+1)\, a_{\lambda,\mu+1} - \overline{G}_{\lambda,\mu}\left\{\begin{matrix} a_{1,0}, \dots a_{n,0} \\ a_{1,1}, \dots a_{n,1} \\ \dots\dots \\ a_{1,\mu}, \dots a_{n,\mu} \end{matrix}\right\}, \tag{4.}$$

wo $\overline{G}_{\lambda,\mu}$ eine ganze rationale Function der Grössen

$$\begin{matrix} a_{1,0}, \dots a_{n,0} \\ a_{1,1}, \dots a_{n,1} \\ \dots\dots \\ a_{1,\mu}, \dots a_{n,\mu} \end{matrix}$$

bezeichnet. Nimmt man nun

$$a_{1,0} = a_1, \quad \dots \quad a_{n,0} = a_n \tag{5.}$$

und bestimmt darauf die übrigen Coefficienten $a_{\lambda,\mu}$ nach einander mittelst der Formeln

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1} = \overline{G}_{1,0}, \quad \dots \quad a_{n,1} = \overline{G}_{n,0} \\ a_{1,2} = \frac{1}{2}\overline{G}_{1,1}, \quad \dots \quad a_{n,2} = \frac{1}{2}\overline{G}_{n,1} \\ a_{1,3} = \frac{1}{3}\overline{G}_{1,2}, \quad \dots \quad a_{n,3} = \frac{1}{3}\overline{G}_{n,2} \\ \text{u. s. w.,} \end{array}\right. \tag{6.}$$

so werden, wenn man

$$x_1 = \mathfrak{P}_1(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{1,\mu} t^\mu, \quad \dots \quad x_n = \mathfrak{P}_n(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n,\mu} t^\mu \tag{7.}$$

setzt, die Gleichungen (1.) für jeden dem gemeinsamen Convergenzbezirk dieser

Reihen angehörigen Werth von t befriedigt, und es erhalten zugleich $x_1, x_2, \dots x_n$ für $t = 0$ die vorgeschriebenen Werthe $a_1, a_2, \dots a_n$.

Es bleibt daher, um den im Vorstehenden ausgesprochenen Satz zu begründen, nur noch zu beweisen, dass die auf die angegebene Weise bestimmten Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ stets einen gemeinsamen Convergenzbezirk, dessen Radius nicht gleich Null ist, besitzen. Zunächst möge aber noch eine zweite Bestimmungsweise der Grössen $a_{\lambda,\mu}$ angegeben werden.

Man setze, unter ν irgend eine bestimmte positive ganze Zahl verstehend,

$$\bar{x}_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\lambda,\mu} t^\mu, \tag{8.}$$

$$x_\lambda = \bar{x}_\lambda + \xi_\lambda, \qquad (\lambda = 1, \dots n) \tag{9.}$$

so bezeichnet ξ_λ eine Potenzreihe von t, in der das Anfangsglied vom Grade $\nu+1$ ist. Man hat also

$$G_\lambda(x_1, \dots x_n) = G_\lambda(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) + t^{\nu+1}\mathfrak{P}'_\lambda(t),$$

$$\frac{dx_\lambda}{dt} = \frac{d\bar{x}_\lambda}{dt} + t^\nu \mathfrak{P}''_\lambda(t),$$

$$\frac{d\bar{x}_\lambda}{dt} - G_\lambda(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) = t^\nu \overline{\mathfrak{P}}_\lambda(t). \tag{10.}$$

Hieraus lässt sich nun folgern: Man setze (für $\lambda = 1, \dots n$, $\mathfrak{n} = 1, \dots \nu$)

$$\left\{\begin{array}{l} G_\lambda^{(0)}(x_1, \dots x_n) = G_\lambda(x_1, \dots x_n), \\ G_\lambda^{(1)}(x_1, \dots x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} G_\lambda^{(0)}(x_1, \dots x_n)\, G_k(x_1, \dots x_n), \\ G_\lambda^{(2)}(x_1, \dots x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} G_\lambda^{(1)}(x_1, \dots x_n)\, G_k(x_1, \dots x_n), \\ G_\lambda^{(3)}(x_1, \dots x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} G_\lambda^{(2)}(x_1, \dots x_n)\, G_k(x_1, \dots x_n), \\ \text{u. s. w.,} \end{array}\right. \tag{11.}$$

so hat man

$$\frac{d^{\mathfrak{n}}\bar{x}_\lambda}{dt^{\mathfrak{n}}} - G_\lambda^{(\mathfrak{n}-1)}(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) = t^{\nu-\mathfrak{n}+1}\mathfrak{P}_{\lambda,\mathfrak{n}}(t) \qquad \binom{\lambda = 1, \dots n}{\mathfrak{n} = 1, \dots \nu}. \tag{12.}$$

Angenommen nämlich, es sei die Richtigkeit dieser Gleichung für $\lambda = 1, \dots n$ und einen bestimmten Werth von $\mathfrak{n}$, der $< \nu$, erwiesen, wie dies nach dem Obigen für $\mathfrak{n} = 1$ der Fall ist, so folgt aus ihr

$$\frac{d^{\mathfrak{n}+1}\bar{x}_\lambda}{dt^{\mathfrak{n}+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} G_\lambda^{(\mathfrak{n}-1)}(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) \frac{d\bar{x}_k}{dt} = t^{\nu-\mathfrak{n}} \overline{\mathfrak{P}}_{\lambda,\mathfrak{n}}(t), \qquad (\lambda = 1, \dots n)$$

und hieraus, da — nach (10.) —

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} = G_k(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) + t^\nu \overline{\mathfrak{P}}_k(t)$$

ist,

$$\frac{d^{\mathfrak{n}+1}\bar{x}_\lambda}{dt^{\mathfrak{n}+1}} - G_\lambda^{(\mathfrak{n})}(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) = t^{\nu-\mathfrak{n}} \mathfrak{P}_{\lambda,\nu}(t),$$

woraus sich das Behauptete unmittelbar ergiebt.

Setzt man nun in (12.) $\mathfrak{n} = \nu$ und dann $t = 0$, so kommt:

$$(13.) \qquad \nu!\, a_{\lambda,\nu} = G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \dots n \\ \nu = 1, 2, \dots \infty \end{pmatrix}.$$

Aus den Formeln (11.) geht nun hervor, dass jeder der Ausdrücke $G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n)$ eine ganze Function nicht nur der Grössen $a_1, \dots a_n$, sondern auch der Coefficienten von $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_n(x_1, \dots x_n)$ ist, und dass in denselben jedes Glied eine positive Vorzahl hat. Es lässt sich deshalb für den absoluten Betrag von $G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n)$ eine Grenze, die er nicht überschreiten kann, folgendermassen bestimmen.

Man nehme an Stelle der ganzen Functionen $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_n(x_1, \dots x_n)$ n andere

$$\mathfrak{G}_1(x_1, \dots x_n), \dots \mathfrak{G}_n(x_1, \dots x_n)$$

so an, dass (für $\lambda = 1, \dots n$) jeder Coefficient von $\mathfrak{G}_\lambda(x_1, \dots x_n)$ positiv und nicht kleiner als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten von $G_\lambda(x_1, \dots x_n)$ ist. Ferner seien $\alpha_1, \dots \alpha_n$ positive Grössen, welche der Bedingung

$$\alpha_1 \geqq |a_1|, \dots \alpha_n \geqq |a_n|$$

entsprechend gewählt werden müssen. Wenn man dann unter

$$\mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(x_1, \dots x_n)$$

den Ausdruck versteht, der aus den Functionen $\mathfrak{G}_1(x_1, \dots x_n), \dots \mathfrak{G}_n(x_1, \dots x_n)$ ebenso abgeleitet ist wie $G_\lambda^{(\nu-1)}(x_1, \dots x_n)$ nach Vorschrift der Formeln (11.) aus den Functionen $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_n(x_1, \dots x_n)$, so hat man

$$(14.) \qquad |G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n)| \leqq \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(\alpha_1, \dots \alpha_n) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \dots n \\ \nu = 1, 2, \dots \infty \end{pmatrix}.$$

Wenn also die Reihe

$$\alpha_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(\alpha_1, \dots \alpha_n)\, \tau^\nu$$

für einen bestimmten positiven Werth von τ convergirt, so ist dies sicher auch der Fall mit der Reihe

$$a_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n)\, t^\nu$$

für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag nicht grösser als τ ist.

Ein Functionensystem $\mathfrak{G}_1(x_1, \dots x_n), \dots \mathfrak{G}_n(x_1, \dots x_n)$ von der verlangten Beschaffenheit findet man z. B. folgendermassen. Man bestimme eine positive Constante g und eine ganze positive Zahl m so, dass in der nach Potenzen von $x_1, \dots x_n$ ausgeführten Entwicklung des Ausdrucks

$$\mathfrak{G}(x_1, \dots x_n) = g(1 + x_1 + \dots + x_n)^m$$

der Coefficient jedes Gliedes nicht kleiner ist als der grösste Werth, den in den entsprechenden Gliedern der Functionen $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_n(x_1, \dots x_n)$ die absoluten Beträge der Coefficienten erreichen, und setze fest, dass für jeden Werth von λ

$$\mathfrak{G}_\lambda(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{G}(x_1, \dots x_n)$$

sein solle. Mittelst der Formeln (11.) ergiebt sich dann, wenn man

$$x = x_1 + \dots + x_n$$

setzt,

$$(15.) \qquad \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(x_1, \dots x_n) = n^{\nu-1} g^\nu (1, + (m-1))^\nu (1+x)^{\nu(m-1)+1} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \dots n \\ \nu = 1, 2, \dots \infty \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung gilt zunächst für $\nu = 1$. Angenommen, sie sei für irgend einen bestimmten Werth von ν bewiesen, so ergiebt sich aus (11.)

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu)}(x_1, \dots x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(x_1, \dots x_n)}{\partial x_k} \mathfrak{G}_k(x_1, \dots x_n) \\ &= n\, n^{\nu-1} g^\nu \frac{d}{dx}\left\{(1, + (m-1))^\nu (1+x)^{\nu(m-1)+1}\right\} \cdot g(1+x)^m \\ &= n^\nu g^{\nu+1} (1, + (m-1))^\nu (1 + \nu(m-1))(1+x)^{(\nu+1)(m-1)+1} \\ &= n^\nu g^{\nu+1} (1, + (m-1))^{\nu+1} (1+x)^{(\nu+1)(m-1)+1}. \end{aligned}$$

Es besteht also die Gleichung (15.) auch noch, wenn man die Zahl ν um eine Einheit vermehrt; sie ist demnach allgemein gültig.

Dies festgestellt, nehme man nun n positive Grössen $\alpha_1, \dots \alpha_n$ so an, wie im Vorstehenden angegeben worden, und setze

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$
$$c_\nu = \frac{n^{\nu-1} g^\nu}{\nu!} (1, + (m-1))^\nu (1+\alpha)^{\nu(m-1)+1},$$

so hat man

$$\alpha_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(\alpha_1, \dots \alpha_n) \frac{\tau^\nu}{\nu!} = \alpha_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \tau^\nu.$$

Es ist aber

$$\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = \frac{ng}{\nu+1} (1 + \nu(m-1)) (1+\alpha)^{m-1},$$

und somit

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = ng(m-1)(1+\alpha)^{m-1}.$$

Setzt man also

$$\bar{\tau} = \frac{(1+\alpha)^{-m+1}}{ng(m-1)},$$

so convergirt die Reihe

$$\alpha_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(\alpha_1, \dots \alpha_n) \frac{\tau^\nu}{\nu!},$$

wenn $\tau < \bar{\tau}$, und somit die Reihe

$$\mathfrak{P}_\lambda(t) = a_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n) t^\nu$$

sicher für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag kleiner als $\bar{\tau}$ ist.

Hiermit ist bewiesen, dass die Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ stets einen gemeinsamen Convergenzbezirk, dessen Radius nicht gleich Null ist, besitzen und somit, wenn die Veränderliche t auf diesen Bezirk beschränkt wird, eindeutige und continuirliche Functionen von t darstellen, welche für $x_1, \dots x_n$ gesetzt den vorgelegten Differentialgleichungen genügen und für $t = 0$ die vorgeschriebenen Werthe $a_1, \dots a_n$ annehmen.

Es erhellt ferner aus der im Vorstehenden angegebenen Bestimmungsweise der Coefficienten von $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$, dass es nur ein System so beschaffener Potenzreihen giebt.

2.

Aus dem vorstehenden Beweise für die Convergenz der Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ lässt sich ein wichtiger Satz herleiten.

Es mögen jetzt die Coefficienten der in den Differentialgleichungen (1.) vorkommenden Functionen $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_n(x_1, \dots x_n)$, und ebenso die mit $a_1, \dots a_n$ bezeichneten Anfangswerthe der zu bestimmenden Grössen $x_1, \dots x_n$ eindeutige analytische Functionen beliebig vieler, einem zusammenhängenden Bereiche angehörigen unabhängigen Veränderlichen $u_1, u_2, \dots$ sein, und es werde angenommen, dass innerhalb dieses Bereiches die absoluten Beträge der genannten Coefficienten, sowie auch der Grössen $a_1, \dots a_n$, sämmtlich unter einer endlichen Grenze liegen.

Nach dem Vorhergehenden lässt sich nun eine positive Grösse r so annehmen, dass jede der Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ für jedes der betrachteten Werthsysteme $u_1, u_2, \dots$ unbedingt convergirt, wenn festgesetzt wird, dass der absolute Betrag von t kleiner als r sein solle. Versteht man dann unter r_1 irgend eine zweite positive Grösse, die kleiner als r ist, und bestimmt, dass der Veränderlichen t nur solche Werthe beigelegt werden sollen, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner oder eben so gross als r_1 sind, so giebt es für die absoluten Beträge der Werthe, welche alsdann die Functionen $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ annehmen können, eine obere Grenze, die mit R bezeichnet werden möge. Nach einem bekannten Satze ist dann, wenn der Coefficient von t^ν in $\mathfrak{P}_\lambda(t)$ mit

$$\varphi_{\lambda,\nu}(u_1, u_2, \dots)$$

bezeichnet wird,

$$|\varphi_{\lambda,\nu}(u_1, u_2, \dots) t^\nu| \leqq R \cdot \left|\frac{t}{r}\right|^\nu.$$

Hebt man also aus der Reihe $\mathfrak{P}_\lambda(t)$ die m ersten Glieder heraus, so ist die Summe der übrig bleibenden ihrem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} R \cdot \left|\frac{t}{r}\right|^\nu = \frac{R \cdot \left|\frac{t}{r}\right|^m}{1 - \left|\frac{t}{r}\right|},$$

kann also durch Vergrösserung von m so klein gemacht werden, wie man will. Die Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ convergiren somit für die den angegebenen Bedingungen entsprechenden Werthsysteme der Veränderlichen $t, u_1, u_2, \dots$ nicht nur unbedingt, sondern auch gleichförmig, und bilden also ein System eindeutiger analytischer Functionen dieser Veränderlichen. (Vgl. die Abhandlung »Zur Theorie der Potenzreihen«.)

3.

Man setze, unter t_0 eine von t unabhängige Grösse verstehend,

$$(1.)\qquad \mathfrak{P}_\lambda(t-t_0, a_1, \dots a_n) = a_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n) \cdot \frac{(t-t_0)^\nu}{\nu!}, \qquad (\lambda = 1, \dots n)$$

wo $G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n)$ dieselbe Bedeutung haben soll, wie in § 1.

Dann wird, wenn man die Grössen $t_0, a_1, \dots a_n$ fixirt, durch die Gleichungen

$$(2.)\qquad x_1 = \mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \dots a_n), \quad \dots \quad x_n = \mathfrak{P}_n(t-t_0, a_1, \dots a_n)$$

ein bestimmter Complex regulärer Functionen von t definirt, welche den vorgelegten Differentialgleichungen genügen und für $t = t_0$ die Werthe $a_1, \dots a_n$ annehmen. Zugleich ergiebt sich aus dem am Schlusse des § 1 Bemerkten, dass es nur einen Complex so beschaffener und in der angegebenen Form darstellbarer Functionen giebt. Selbstverständlich wird hierbei vorausgesetzt, dass die Veränderliche t auf den gemeinsamen Convergenzbezirk der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(t-t_0, a_1, \dots a_n)$ beschränkt werde.

Innerhalb dieses Bereichs, der mit T_0 bezeichnet werden möge, nehme man nun einen zweiten bestimmten Werth (t_1) von t beliebig an, so hat man unter der Bedingung, dass die Veränderliche t auf eine ganz in T_0 enthaltene Umgebung der Stelle t_1 beschränkt werde,

$$(3.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \dots a_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{1,\nu}(t-t_1)^\nu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{P}_n(t-t_0, a_1, \dots a_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{n,\nu}(t-t_1)^\nu, \end{cases}$$

wo

$$P_{\lambda,\nu} = \left[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\mathfrak{P}_\lambda(t-t_0, a_1, \dots a_n)\right]_{t=t_1} \qquad (\lambda = 1, \dots n).$$

Die Potenzreihen auf der Rechten dieser Gleichungen genügen den gegebenen Differentialgleichungen, müssen also nach dem Vorstehenden, wenn man die Werthe, die sie für $t = t_1$ annehmen, mit $a_1', \dots a_n'$ bezeichnet, identisch sein mit den Reihen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_1, a_1', \dots a_n'), \quad \dots \quad \mathfrak{P}_n(t-t_1, a_1', \dots a_n').$$

So ergeben sich die Gleichungen

$$(4.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \dots a_n) = \mathfrak{P}_1(t-t_1, a_1', \dots a_n'), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{P}_n(t-t_0, a_1, \dots a_n) = \mathfrak{P}_n(t-t_1, a_1', \dots a_n'), \end{cases}$$

in denen

$$(5.)\qquad a_1' = \mathfrak{P}_1(t_1-t_0, a_1, \dots a_n), \quad \dots \quad a_n' = \mathfrak{P}_n(t_1-t_0, a_1, \dots a_n).$$

Möglicherweise erstreckt sich aber der gemeinsame Convergenzbezirk der Reihen auf der Rechten der Gleichungen (3.), der mit T_1 bezeichnet werde, über die im Vorstehenden bezeichnete Umgebung der Stelle t_1 hinaus, und es gelten dann, da die gemeinsamen Stellen der Bereiche T_0, T_1 ein Continuum bilden, die Gleichungen (4.) für jeden diesem Continuum angehörigen Werth von t.

Nun können drei Fälle eintreten.

Der Bereich T_0 kann unbegrenzt sein. Dann gilt dasselbe auch von dem Bereiche T_1, wie man auch die Stelle t_1 annehmen möge, und es bestehen die Gleichungen (4.) für jeden Werth von t, so dass es also nur einen Complex analytischer Functionen $x_1, \dots x_n$ giebt, welche den vorgelegten Differentialgleichungen genügen und für $t = t_0$ die Werthe $a_1, \dots a_n$ haben.

Ist aber der Bereich T_0 ein beschränkter, also geometrisch darstellbar durch das Innere eines um den Punkt t_0 beschriebenen Kreises, dessen Radius mit ρ_0 bezeichnet werde, so ist auch der Bereich T_1 ein beschränkter und wird repräsentirt durch das Innere eines um t_1 beschriebenen Kreises, dessen Radius (ρ_1), wenn man $|t_1 - t_0| = \delta$ setzt, in dem Intervall

$$\rho_0 - \delta \dots \rho_0 + \delta$$

liegt, woraus folgt, dass die Grösse ρ_1 sich stetig ändert, wenn der Punkt t_1 innerhalb T_0 seine Lage stetig ändert, niemals aber den Werth Null erreichen kann. Wohl aber giebt es stets in der Begrenzung von T_0 mindestens eine Stelle, welcher der Punkt t_1 nicht unendlich nahe kommen kann, ohne dass ρ_1 unendlich klein wird. Im Allgemeinen giebt es aber in der genannten Begrenzung Strecken, welche keine solche singuläre Stelle enthalten, und dann kann man t_1 so annehmen, dass $\rho_1 > \rho_0 - \delta$ wird. In diesem Falle zerfällt der Bereich T_1 dergestalt in zwei zusammenhängende Theile, dass in dem einen, der ganz in T_0 liegt, das Functionensystem

$$\mathfrak{P}_1(t-t_1, a'_1, \ldots a'_n), \quad \ldots \quad \mathfrak{P}_n(t-t_1, a'_1, \ldots a'_n)$$

identisch ist mit dem ursprünglichen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \ldots a_n), \quad \ldots \quad \mathfrak{P}_n(t-t_0, a_1, \ldots a_n),$$

während es für die dem anderen, ausserhalb T_0 liegenden, Theile angehörigen Werthe von t eine Fortsetzung des letztgenannten bildet.

Es kann endlich vorkommen, dass die Grösse ρ_1 für jeden der Begrenzung von T_0 unendlich nahe kommenden Punkt t_1 einen unendlich kleinen Werth erhält. Dann liegt, wie man auch den Punkt t_1 annehmen möge, niemals ein Theil des Bereiches T_1 ausserhalb T_0, und es sind die Functionen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \ldots a_n), \quad \ldots \quad \mathfrak{P}_n(t-t_0, a_1, \ldots a_n)$$

wenigstens nicht alle einer Fortsetzung über T_0 hinaus fähig.

Dies festgestellt, kann man nun auf mannigfaltige Weise eine Reihe von beliebig vielen Complexen

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \ldots a_n), & \ldots & \mathfrak{P}_n(t-t_1, a_1, \ldots a_n) \\
\mathfrak{P}_1(t-t_1, a'_1, \ldots a'_n), & \ldots & \mathfrak{P}_n(t-t_1, a'_1, \ldots a'_n) \\
\mathfrak{P}_1(t-t_2, a''_1, \ldots a''_n), & \ldots & \mathfrak{P}_n(t-t_2, a''_1, \ldots a''_n)
\end{array}$$

u. s. w.

in der Art herstellen, dass jeder derselben, von dem zweiten an, aus dem unmittelbar vorhergehenden eben so entsteht, wie nach dem obigen der zweite aus dem ersten. Durch die Gesammtheit dieser Complexe wird dann ein (eindeutiges oder mehrdeutiges) System analytischer Functionen der Veränderlichen t definirt.

Münster, im Frühjahr 1842.

ANMERKUNG.

Zur Zeit, als ich die vorstehende Abhandlung schrieb, war der in § 1 begründete Satz bereits von Cauchy gefunden und veröffentlicht worden, wovon ich indess keine Kenntniss hatte. Bei der gegenwärtigen Herausgabe meiner Abhandlung, deren Inhalt ich bisher nur bei meinen functionentheoretischen Vorlesungen benutzt habe, konnte ich mich jedoch, was den genannten Paragraphen angeht, nicht an Cauchy's Darstellung anschliessen, weil ich dann § 2 und § 3, welche wichtige, bei Cauchy nicht vorkommende Sätze enthalten, hätte vollständig umarbeiten müssen, und überdies mein Beweis des in § 1 enthaltenen Haupttheorems von dem Cauchy'schen abweicht.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE ANALYTISCHEN FACULTÄTEN.

(Beilage zum Jahresbericht über das Progymnasium zu Dt. Crone
für das Schuljahr 1842—1843.)

---

§ 1.

Die analytischen Facultäten sind, nach Vandermonde und Kramp, in neuerer Zeit vorzüglich von Crelle*) nach eigenthümlicher Methode bearbeitet worden. Crelle definirt die analytische Facultät als eine von drei Argumenten, der Basis u, der Differenz x und dem Exponenten y abhängige und durch $(u, +x)^y$ bezeichnete Function, deren Grundeigenschaften in den Gleichungen

$$(u, +x)^{y+k} = (u, +x)^y (u+yx, +x)^k \tag{1.}$$

$$(ku, +kx)^y = k^y (u, +x)^y \tag{2.}$$

$$(u, +x)^1 = u \tag{3.}$$

ausgesprochen werden. Aus diesen Gleichungen werden alle übrigen Eigenschaften der Facultät, so wie auch Formeln zur Berechnung ihrer Werthe für beliebige Werthe von u, x, y auf einfache Weise abgeleitet.

Diese Behandlungsart der Facultäten hat vielfach Beifall gefunden, wie denn namentlich Grunert in dem Artikel »Facultät« der Supplemente zu dem Klügel'schen Wörterbuche ihr ganz folgt. Gegen sie aber finden sich in den Schriften Ohm's einige gelegentliche Aeusserungen, welche ich, obwohl sie grösstentheils aus Missverständnissen hervorgegangen zu sein scheinen, hier

---

*) Theorie der analytischen Facultäten, 1824.

Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques, 1831. (Ursprünglich im 7ten Bande des Journals für Mathematik erschienen.) Diese Abhandlung wird im Folgenden durch Th. d. f. bezeichnet.

anzuführen nicht umhin kann, weil sie mir Veranlassung zu einer genaueren Untersuchung der bisherigen Facultäten-Theorien gegeben haben, als deren Ergebniss ich allerdings die Ueberzeugung aussprechen muss, dass sich auch in der Crelle'schen Darstellung, wenn auch nicht in dem Sinne Ohm's, noch einige Schwierigkeiten finden, die aufgehellt und beseitigt werden müssen.

Ohm stellt (System der Mathematik, Thl. 2, § 340) für Facultäten, deren Exponenten ganze Zahlen sind, fünf Gleichungen auf, von denen die erste mit Anwendung der Crelle'schen Bezeichnungsweise

$$(4.)\qquad (u, +x)^y = (u+yx-x, -x)^y$$

heisst, die zweite und die fünfte mit den obigen Gleichungen (1.), (2.) übereinkommen, die dritte und die vierte aber aus der zweiten folgen, und fügt dann folgende Note hinzu:

»Es ist nicht möglich, einen Begriff der gebrochenen Factorielle (Facultät) hinzustellen, wofür alle fünf Nummern des § 340 noch geltend bleiben. Und namentlich ist der Begriff der gebrochenen Factoriellen, wie solche in den Anwendungen von Vandermonde und Kramp gebraucht werden, von der Art, dass für diese gebrochenen Factoriellen nur die Formeln Nr. 1 u. 2 [d. h. der hiesigen (1), (4)], also natürlich auch die mit Nr. 2 [hier (1)] zugleich gegebenen Nr. 3 und 4 des § 340 noch stattfinden, nicht aber die Formel Nr. 5 [hier (2)]. Wenn daher zuerst von Kramp stillschweigend, dann von Crelle ausdrücklich die allgemeine Factorielle als ein Ding bezeichnet wird, welches die in den Nrn. 1, 2, 5 des § 340 [in den Gleichungen (1), (2), (4)] ausgesprochenen Eigenschaften hat, so rächt sich dies unlogische Verfahren sogleich dadurch, dass bei Kramp (Réfractions astronomiques et terrestres, 1799) sehr bedeutende, von ihm selbst zugestandene und ihm unbegreifliche Widersprüche hervorgehen, während bei Crelle (»Theorie der analytischen Facultäten, 1824«) die wenigsten Formeln wahr sind, ohne dass solches von dem Verfasser bemerkt wird, weil sich derselbe nicht, wie Kramp gethan, auf specielle Untersuchungen einlässt, sondern nur allgemeine Formeln auf allgemeine Formeln gehäuft hat, welche daher als solche grösstentheils für todtgeborene gehalten werden müssen u. s. w.«

In ähnlichem Sinne spricht sich Ohm noch an anderen Stellen aus, namentlich in seiner analytischen Geometrie in einer Anmerkung, in der es

heisst, dass die Definition der Facultät, wie sie Crelle gegeben, ihm selbst unbewusst einen Widerspruch aufgenommen habe.

Diese Einwendungen Ohm's, so weit sie die Crelle'sche Theorie betreffen, lassen sich jedoch leicht beseitigen. Denn die obige Gleichung (4.), welche für gebrochene Werthe von y mit den übrigen (1.), (2.), (3.) allerdings nicht vereinbar ist, wird von Crelle keineswegs, wie Ohm es aussagt, zur Definition der Facultät mit benutzt. Dass es aber eine Function giebt, welche den Gleichungen (1.), (2.), (3.) genügt, ist nicht schwer nachzuweisen.

Denn setzt man mit Gauss*)

$$(5.)\qquad \Pi(u) = \frac{1}{u+1}\cdot\frac{2^u}{1^u}\,\frac{2}{u+2}\cdot\frac{3^u}{2^u}\,\frac{3}{u+3}\cdots\cdots\frac{n^u}{(n-1)^u}\,\frac{n}{u+n}\cdots,$$

so ist

$$(6.)\qquad (u, +x)^y = x^y\,\frac{\Pi\left(\frac{u}{x}-1+y\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}$$

eine Function, welche die in den genannten Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften hat. (S. den folgenden §.)

Grösseres Gewicht aber hat eine andere Angabe Ohm's. Nachdem er (Syst. d. Mathem., Thl. 2, S. 89) den sogenannten binomischen Lehrsatz für ganze Facultäten, nämlich die Formel

$$(7.)\qquad (u+k, +x)^y = (u, +x)^y + y_1(u, +x)^{y-1}(k, +x)^1 + y_2(u, +x)^{y-2}(k, +x)^2 + \cdots\cdots$$

bewiesen hat, fügt er hinzu, man würde sich sehr irren, wenn man mit Kramp, Crelle und so vielen Anderen annehmen wollte, dass dieser binomische Lehrsatz für Facultäten auch dann noch gelten müsse, wenn y eine gebrochene Zahl, oder gar, wenn y allgemein sei. Im Gegentheil finde man, dass, wenn y eine ganze oder gebrochene Zahl sei, und wenn im letzteren Falle die Reihe convergire, dann

$$(8.)\qquad (u,+1)^y + y_1(u,+1)^{y-1}(k,+1)^1 + y_2(u,+1)^{y-2}(k,+1)^2 + \cdots = \frac{\sin u\pi.\sin(u+k+y)\pi}{\sin(u+y)\pi.\sin(k+y)\pi}\cdot(u+k,+1)^y$$

sein müsse.

*) Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots\cdots$ Comment. recent. Soc. Gotting., Vol. II.

Dieses Resultat fand ich bei näherer Prüfung vollkommen bestätigt, aber, was nach den angeführten Äusserungen Ohm's, wonach derselbe unter einer Facultät etwas ganz anderes zu verstehen scheint als Crelle, auffallen musste, grade unter der Voraussetzung, dass man für den Ausdruck der Facultät $(u,+1)^y$ die Formel $1^y \cdot \frac{\Pi(u+y-1)}{\Pi(u-1)}$ nehme, welche der Crelle'schen Definition entspricht.

Somit erschien mir die Facultäten-Theorie Crelle's gegen die Behauptung Ohm's, dass schon in den Grundgleichungen derselben ein Widerspruch liege, völlig gerechtfertigt, und nur insofern einer Berichtigung bedürftig, als an die Stelle der Formel (7.) die Gleichung (8.) treten musste. Aber bei weiterer Untersuchung überzeugte ich mich gleichwohl, dass sie, auch nach der neuen Bearbeitung, die sie in dem angeführten Mémoire erfahren, noch an verschiedenen anderen, wie es mir scheint, nicht unwesentlichen Mängeln leide. Von dem hochverehrten Verfasser der eben genannten Schrift, dem ich mündlich meine Bemerkungen mittheilte, zur Veröffentlichung derselben aufgefordert, glaube ich die gegenwärtige Gelegenheit dazu benutzen zu dürfen.

§ 2.

Die Definition der Facultät durch die drei Gleichungen (1.), (2.), (3.) ist nach dem Vorhergehenden in so weit zulässig, als sie mit einander nicht im Widerspruche stehen. Aber es lässt sich zeigen, dass sie allein zur Bestimmung der Facultät gar nicht hinreichen, sondern dass es vielmehr unendlich viele, ganz von einander verschiedene Functionen giebt, welche die in ihnen ausgesprochenen Eigenschaften besitzen. Aus den Gleichungen (1.), (2.) ergiebt sich nämlich (Th. d. f., 55.)

$$(9.)\qquad (u,+x)^y = x^y \frac{(1,+1)^{\frac{u}{x}+y-1}}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}},$$

oder wenn man $(1,+1)^y$ durch $\mathrm{F}(y)$ bezeichnet,

$$(10.)\qquad (u,+x)^y = x^y \frac{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}-1\right)}.$$

Aber in dieser Formel kann, wenn $(u,+x)^y$ zunächst nur in so weit bestimmt

werden soll, dass den Gleichungen (1.), (2.) genügt werde, die Function F ganz willkürlich angenommen werden. Denn welche Form man ihr auch geben mag, man hat

$$(11.)\quad (u,+x)^{y+k} = x^{y+k}\frac{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}+y+k-1\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}-1\right)} = x^y \frac{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}-1\right)} \cdot x^k \frac{\mathrm{F}\left(\frac{u+yx}{x}+k-1\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{u+yx}{x}-1\right)} = (u,+x)^y (u+yx,+x),$$

und

$$(12.)\quad (ku,+kx)^y = (kx)^y \frac{\mathrm{F}\left(\frac{ku}{kx}+y-1\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{ku}{kx}-1\right)} = k^y x^y \frac{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}+y+1\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}-1\right)} = k^y (u,+x)^y.$$

Damit nun ferner auch der Bedingung (3.) Genüge geschehe, hat man in (10.) $y=1$ zu setzen, wodurch man findet, dass

$$(13.)\qquad u = x \frac{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}-1\right)},$$

oder wenn man y für $\frac{u}{x}$ schreibt,

$$(14.)\qquad \mathrm{F}(y) = y\mathrm{F}(y-1)$$

sein muss. **Eine** Function, welche diese Eigenschaft besitzt, ist $\Pi(y)$. Wird nun, um die allgemeinste Form von F zu bestimmen,

$$(15.)\qquad \mathrm{F}(y) = \psi(y)\Pi(y)$$

gesetzt, so findet sich

$$(16.)\qquad \psi(y)\Pi(y) = \psi(y-1).y\Pi(y-1),$$

woraus, weil

$$(17.)\qquad \Pi(y) = y\Pi(y-1),$$

$$(18.)\qquad \psi(y) = \psi(y-1)$$

folgt, d. h. die Function $\psi(y)$ oder $\frac{\mathrm{F}(y)}{\Pi(y)}$ muss für jede zwei Werthe ihres Arguments, deren Differenz gleich 1 ist, denselben Werth haben. Dies findet z. B. statt, wenn $\psi(y)$ eine willkürliche eindeutige Function von $\cos 2y\pi$ und $\sin 2y\pi$ ist.

Das Resultat, welches sich aus dem Vorstehenden ergiebt, lässt sich nun so aussprechen. Wird durch $\psi(y)$ irgend eine Function bezeichnet, welche der Bedingung (18.) genügt, und wird

$$(19.)\qquad (u,+x)^y = x^y \frac{\psi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{\psi\left(\frac{u}{x}-1\right)} \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}$$

gesetzt, so besitzt diese Function die durch die Gleichungen (1.), (2.), (3.) ausgedrückten Eigenschaften. Es kann daher $(u,+x)^y$, ohne aufzuhören, den genannten Gleichungen zu genügen, gleich wie $\psi(y)$ unendlich viele verschiedene Formen annehmen. Zugleich ist aber auch durch die Formel (19.) die allgemeinste Bestimmung von $(u,+x)^y$ gegeben.

Hierdurch ist nicht nur die ausgesprochene Behauptung, es seien die Gleichungen (1.), (2.), (3.) nicht hinreichend, um $(u,+x)^y$ vollständig zu bestimmen, gerechtfertigt, und die Nothwendigkeit nachgewiesen, in die Definition der Facultät noch eine, in jenen Gleichungen nicht enthaltene Bestimmung aufzunehmen; sondern es ergiebt sich auch daraus, dass die Schlüsse, durch die man aus den Gleichungen (1.), (2.), (3.) völlig bestimmte Darstellungen von $(u,+x)^y$ hergeleitet hat, nicht fehlerfrei sein können und daher einer Revision bedürfen.

§ 3.

Ehe ich aber die verschiedenen von Crelle u. a. entwickelten Formeln in dieser Rücksicht durchgehe, will ich auf einen bisher, wie es scheint, ganz übersehenen Umstand aufmerksam machen, aus dessen Nichtbeachtung grosse Irrthümer hervorgehen können und wirklich hervorgegangen sind. Ich bemerke zuvor, dass ich mich bei allen folgenden Entwickelungen auf reelle Werthe der Basis, der Differenz und des Exponenten beschränke. Denn wenn es auch nicht schwer ist, auch imaginäre Werthe dieser Veränderlichen mit in Betracht zu ziehen, so würde das doch einige vorläufige Erörterungen nöthig machen, die hier der Raum nicht gestattet.

Setzt man in den Gleichungen (1, 3) $x=0$, so erhält man

$$(20.)\qquad (u,+0)^{y+k} = (u,+0)^y (u,+0)^k$$

$$(21.)\qquad (u,+0)^1 = u.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$(22.)\qquad (u,+0)^y = u^y$$

sein muss. Aber man darf daraus nicht schliessen, dass $(u,+x)^y$, wenn der

numerische Werth von x unendlich klein wird, nothwendig der Potenz u^y unendlich nahe komme. Vielmehr lässt sich zeigen, dass jede Function, welche den Gleichungen (1.), (2.), (3.) genügt, in der Nähe von $x=0$ sich nicht stetig ändert. Setzt man nämlich $x=\frac{1}{p}$, unter p eine **positive** Veränderliche verstanden, so erhält man nach (19.)

$$(23.)\qquad \left(1,+\frac{1}{p}\right)^y = \frac{\psi(p+y-1)}{\psi(p-1)}.p^{-y}\frac{\Pi(p+y-1)}{\Pi(p-1)}$$

oder wegen (17, 18)

$$(24.)\qquad \left(1,+\frac{1}{p}\right)^y = \frac{\psi(p+y)}{\psi(p)}\,\frac{\Pi(p+y-1)}{p^{y-1}\Pi(p)}$$

Nun ist bekanntlich (s. die angeführte Abhandlung von Gauss) für einen unendlich grossen **positiven** Werth von p

$$(25.)\qquad \frac{\Pi(p+y)}{p^y\Pi(p)} = 1,$$

oder richtiger wegen der Vieldeutigkeit von p^y

$$(26.)\qquad \frac{\Pi(p+y)}{p^y\Pi(p)} = 1^y.$$

Der Factor $\frac{\psi(p+y)}{\psi(p)}$ ist aber der Formel (18.) gemäss eine **periodische** Function von p, und nähert sich deshalb, wenn p unendlich gross wird, keiner bestimmten Grenze, wofern nicht etwa die Function ψ eine blosse Constante ist. Daher nähert sich auch $\left(1,+\frac{1}{p}\right)^y$ nur in diesem Falle einer bestimmten Grenze.

Setzt man ferner in der Formel (19.) $-x$ für x, so erhält man

$$(27.)\qquad (u,-x)^y = (-1)^y \frac{\psi\left(-\frac{u}{x}+y-1\right)}{\psi\left(-\frac{u}{x}-1\right)}\, x^y \frac{\Pi\left(-\frac{u}{x}+y-1\right)}{\Pi\left(-\frac{u}{x}-1\right)}.$$

Es ist aber, wie bekannt,

$$(28.)\qquad \Pi(-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi\,.\,\Pi(x-1)},$$

daher, wenn $\frac{(-1)^{\frac{u}{x}}}{(-1)^{\frac{u}{x}-y}}$ für $(-1)^y$ gesetzt wird,

$$(29.)\qquad (u,-x)^y = \frac{(-1)^{\frac{u}{x}}\sin\frac{u}{x}\pi\,.\,\psi\left(-\frac{u}{x}+y-1\right)}{(-1)^{\frac{u}{x}-y}\sin\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi\,.\,\psi\left(-\frac{u}{x}-1\right)}\cdot x^y\frac{\Pi\left(\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)},$$

oder wenn man

$$\frac{\psi(-y-1)}{(-1)^y \sin y\pi} = \frac{\psi(-y)}{(-1)^y \sin y\pi} = \varphi(y) \tag{30.}$$

setzt, wo dann φ gleich wie ψ der Bedingung

$$\varphi(y) = \varphi(y-1) \tag{31.}$$

genügt,

$$(u, -x)^y = \frac{\varphi\left(\frac{u}{x}-y\right)}{\varphi\left(\frac{u}{x}\right)} \cdot x^y \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)}. \tag{32.}$$

Mithin

$$\left(1, -\frac{1}{p}\right)^y = \frac{\varphi(p-y)}{\varphi(p)} \cdot \frac{p^{-y}\Pi(p)}{\Pi(p-y)}. \tag{33.}$$

Hieraus ergiebt sich ebenso wie vorhin, dass $\left(1, -\frac{1}{p}\right)^y$, wenn p unendlich gross wird, nur dann einer bestimmten Grenze sich nähert, wenn die Function φ sich auf eine Constante reducirt.

Da nun φ und ψ nicht zugleich constant sein können, so folgt, dass der Werth von $(1, +x)^y$, und daher auch der von $(u, +x)^y = u^y\left(1, +\frac{x}{u}\right)^y$ jedenfalls entweder für einen positiven, oder für einen negativen unendlich kleinen Werth von x unbestimmt bleibt. Die Function $(u, +x)^y$ ändert sich also in der Nähe von $x = 0$ nicht stetig.*)

Zu bemerken ist jedoch hierbei, dass dies nur gilt, wenn y keine ganze Zahl ist. Denn in diesem Falle ergiebt sich aus (18.) und (31.)

$$\psi(u \pm y) = \psi(u), \qquad \varphi(u \pm y) = \varphi(u), \tag{34.}$$

und die Functionen ψ, φ fallen aus den Ausdrücken für $(u, +x)^y$ und $(u, -x)^y$ fort.

§ 4.

Nach dem im § 2 Gesagten ist es zur vollständigen Definition der Facultät noch nöthig, hinsichtlich der Function ψ eine Bestimmung zu treffen. Eine solche ist, wie so eben nachgewiesen, enthalten in der Annahme, dass

*) Die hierdurch als unzulässig sich herausstellende Voraussetzung, es sei $(u, +x)^y$ sowohl für einen positiven als negativen unendlich kleinen Werth von x unendlich wenig von u^y verschieden, hat zum Theil Schuld an den Widersprüchen und paradoxen Resultaten, auf die man in der Theorie der Facultäten gerathen ist. — Auch ergiebt sich aus dem Gesagten die Unmöglichkeit, $(u, +x)^y$ nach ganzen Potenzen von x in eine convergirende Reihe zu entwickeln.

$(1, +x)^y$ entweder für einen positiven oder negativen Werth von x, wenn dieser ohne Ende abnimmt, der Grenze 1^y sich nähere, indem im ersten Falle ψ, im zweiten die Function φ sich auf eine Constante reduciren muss. Eine dieser Annahmen ist, wie sich ergeben wird, nothwendig, wenn die Analogie der Facultäten und der Potenzen durchgehends behauptet werden soll. Ohne für jetzt näher zu untersuchen, welche von diesen beiden Annahmen zweckmässiger sei, obwohl mir die letztere aus mehreren Rücksichten den Vorzug zu verdienen scheint, will ich beide Arten von Facultäten, die sich aus ihnen ergeben, in Betracht ziehen. Die erste Art, für welche allein fortan die Bezeichnung $(u, +x)^y$ bestimmt bleiben soll, hat die in den obigen Gleichungen (1.), (2.), (3.) ausgedrückten Grundeigenschaften, und ist ferner dadurch charakterisirt, dass $(1, +x)^y$ für einen unendlich kleinen **positiven** Werth von x der Potenz 1^y unendlich nahe kommt. Man hat für sie den Ausdruck (gemäss (19.))

$$(u, +x)^y = x^y \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}. \tag{35.}$$

Für die andere Art soll, mit Aenderung des Zeichens von x, die Bezeichnung $[u, -x]^y$ gebraucht werden. Sie wird demnach definirt durch die Grundgleichungen

$$[u, -x]^{y+k} = [u, -x]^y [u-yx, -x]^k, \tag{36.}$$

$$[ku, -kx]^y = k^y [u, -x]^y, \tag{37.}$$

$$[u, -x]^1 = u, \tag{38.}$$

und die Bestimmung, dass, ebenfalls für einen unendlich kleinen **positiven** Werth von x, $[1, -x]^y$ von der Potenz 1^y unendlich wenig verschieden sei. Ihr Ausdruck ist (nach (32.))

$$[u, -x]^y = x^y \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)}. \tag{39.}$$

§ 5.

Ich gehe jetzt zunächst über zu den Entwickelungen von $(u+k, +x)^y$ und $[u+k, -x]^y$. Crelle entwickelt in dem erwähnten Mémoire (§ 41, Nr. 373) die Formel

$$(40.)\quad (u+k,+x)^y = (u,+x)^y \left\{1+y_1\frac{k}{u}+y_2\frac{k(k-x)}{u(u+x)}+\cdots+y_n\frac{(k,-x)^n}{(u,+x)^n}\right\}+R_n,$$

wo durch y_1, y_2 u. s. w. die Binomial-Coefficienten bezeichnet sind. Der nach dem $n$ten Gliede hinzugefügte Rest R_n ist ein Ausdruck, welcher entwickelt die vorstehende Gleichung zu einer identischen macht. In so fern ist sie, die einzig aus den Gleichungen (1.), (2.), (3.) hergeleitet worden, für alle möglichen Arten von Facultäten, welche diesen Gleichungen entsprechen, gültig. In wie fern sie aber grade für die besondere Art, die hier betrachtet wird, eine convergirende Entwickelung gebe, bedarf noch einer nähern Untersuchung. Diese kann aber nicht nach den von Crelle (Th. d. f., § 23) gegebenen Bestimmungen durchgeführt werden. Nach derselben würde die von ihm mit dem Namen der allgemeinen Taylor'schen Reihe bezeichnete Formel

$$(41.)\quad F(x+k) = F(x)+\frac{k}{\alpha}\Delta F(x)+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2 F(x)+\cdots+\frac{(k,-\alpha)^n}{(1,+1)^n\alpha^n}\Delta^n F(x)+R_n,$$

wo $\Delta x=\alpha$ gesetzt ist, immer dann eine convergirende Entwickelung von $F(x+k)$ geben, sobald der grösseste und der kleinste Werth des $(n+1)$ten Gliedes dieser Reihe für die verschiedenen Werthe des Arguments der Function F von x bis $x+k$ beide für $n=\infty$ auf Null sich reducirten. Dieser Satz ist aber hergeleitet aus einer Bestimmung der Grenzen von R_n, welche, wie Crelle selbst in einer späteren Abhandlung über diesen Gegenstand bemerkt hat, nur dann gültig ist, wenn $\frac{k}{\alpha}$ eine ganze positive Zahl ist. Seine Anwendbarkeit ist daher zweifelhaft, wie sich auch leicht auf folgende Weise nachweisen lässt. Denn gesetzt, die Reihe (41.) sei, nachdem für α ein bestimmter Werth gewählt worden, für eine gewisse Form der Function F wirklich convergent, und es sei $\psi(x)$ eine Function, die für keinen Werth von x unendlich gross wird, und der Bedingung

$$(42.)\quad \psi(x+\alpha) = \psi(x)$$

genügt, z. B. eine ganze Function von $\cos\frac{2x}{\alpha}\pi$ und $\sin\frac{2x}{\alpha}\pi$; so würde die Reihe für $\psi(x+k)F(x+k)$, da man alsdann

$$(43.)\quad \Delta^n.\psi(x)F(x) = \psi(x)\Delta^n F(x)$$

hat, zugleich mit der für $F(x+k)$ convergiren, wenn der in Rede stehende

Satz allgemein richtig wäre. Man würde daher erhalten

$$(44.)\quad \psi(x+k)F(x+k) = \psi(x)\left\{F(x)+\frac{k}{\alpha}\Delta F(x)+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2 F(x)+\cdots\right\}.$$

Aus (41, 44) würde sich dann für jeden Werth von k, für den die Reihe (41.) convergirt, ergeben

$$(45.)\quad \psi(x+k) = \psi(x),$$

ein offenbar falsches Resultat.

Die Frage nach der Convergenz der Reihe wird indess leicht auf einem anderen Wege entschieden.

Setzt man mit Gauss in der angeführten Abhandlung

$$(46.)\quad F(\alpha,\beta,\gamma)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots.n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}+\cdots,$$

welche Reihe eine endliche Summe hat, wenn $\alpha+\beta-\gamma$ negativ ist, so hat man, wie Gauss a. a. O. bewiesen,

$$(47.)\quad F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

Setzt man in dieser Formel $\gamma=\frac{u}{x}$, $\alpha=-y$, $\beta=-\frac{k}{x}$, so erhält man

$$(48.)\quad F\left(-y,-\frac{k}{x},\frac{u}{x}\right) = \frac{\Pi\left(\frac{u+k}{x}+y-1\right)\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)\Pi\left(\frac{u+k}{x}-1\right)}.$$

Mithin ist gemäss (35.)

$$\frac{(u+k,+x)^y}{(u,+x)^y} = F\left(-x,-\frac{k}{x},\frac{u}{x}\right),$$

oder

$$(49.)\quad \frac{(u+k,+x)^y}{(u,+x)^y} = 1+y_1\frac{k}{u}+y_2\frac{k(k-x)}{u(u+x)}+\cdots+y_n\frac{(k,-x)^n}{(u,+x)^n}+\cdots,$$

welche Reihe, da $\gamma-\alpha-\beta=\frac{u+k}{x}+y$ ist, convergirt, sobald $\frac{u+k}{x}+y$ positiv ist.

Die Reihe (40.) giebt demnach in allen Fällen, wo sie eine endliche Summe hat, den richtigen Werth von $(u+k,+x)^y$. Anders verhält es sich aber mit der anderen, von Crelle im § 40 entwickelten Reihe.

Setzt man nämlich $\gamma = -\frac{u}{x}-y+1$, $\alpha = -y$, $\beta = \frac{k}{x}$, so ist

$$(50.)\qquad F\left(-y,\frac{k}{x},-\frac{u}{x}-y+1\right) = \frac{\Pi\left(-\frac{u+k}{x}\right)\Pi\left(-\frac{u}{x}-y\right)}{\Pi\left(-\frac{u}{x}\right)\Pi\left(-\frac{u+k}{x}-y\right)},$$

woraus nach (28.)

$$(51.)\quad F\left(-y,\frac{k}{x},-\frac{u}{x}-y+1\right) = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x}+y\right)\pi.\sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\frac{u+k}{x}\pi.\sin\left(\frac{u}{x}+y\right)\pi}\cdot\frac{\Pi\left(\frac{u+k}{x}+y-1\right)\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}{\Pi\left(\frac{u+k}{x}-1\right)\Pi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}$$

folgt. Daher (35.)

$$(52.)\quad \frac{(u+k,+x)^y}{(u,+x)^y} = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x}\right)\pi.\sin\left(\frac{u}{x}+y\right)\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x}+y\right)\pi.\sin\frac{u}{x}\pi}\cdot F\left(-y,\frac{k}{x},-\frac{u}{x}-y+1\right)$$

oder

$$(53.)\quad \frac{(u+k,+x)^y}{(u,+x)^y} = \frac{\sin\frac{u+k}{x}\pi.\sin\left(\frac{u}{x}+y\right)\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x}+y\right)\pi.\sin\frac{u}{x}\pi}\left\{1+y_1\frac{k}{u+xy-x}+y_2\frac{k(k+x)}{(u+xy-x)(u+xy-2x)}+\cdots\right\}$$

oder

$$(54.)\ (u+k,+x)^y = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x}+y\right)\pi.\sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\frac{u+k}{x}\pi.\sin\left(\frac{u}{x}+y\right)\pi}\left\{(u,+x)^y+y_1(u,+x)^{y-1}(k,+x)^1+y_2(u,+x)^{y-2}(k,+x)^2+\cdots\right\}.$$

Diese Reihe convergirt, wenn $\gamma-\alpha-\beta = 1-\frac{u+k}{x}$ positiv ist.

Wenn y eine ganze Zahl ist, so erhält man hieraus die bereits von Kramp aufgestellte Binomial-Formel, welche demnach, wie oben (§ 1) bemerkt worden, für gebrochene Werthe von y ihre Gültigkeit nicht behält.

§ 6.

Zum Behufe der Entwickelung von $[u+k,-x]^y$ mögen zuvörderst folgende, aus den Gleichungen (36, 37, 38) sich ergebende Formeln hier ihren Platz finden.

$$(55.)\qquad [u,-x]^{y-k} = \frac{[u,-x]^y}{[u-yx+kx,-x]^k}$$

$$(56.)\qquad [u,-x]^y = u(u-x)(u-2x)\ldots.(u-yx+x),$$

und

$$(57.)\qquad [u,-x]^{-y} = \frac{1}{(u+x)(u+2x)\ldots..(u+yx)},$$

wenn y eine ganze positive Zahl ist.

Setzt man nun in der Formel (47.)

$$\alpha = -y,\quad \beta = -\frac{k}{x},\quad \gamma = \frac{u}{x}-y+1,$$

so erhält man

$$(58.)\qquad F\left(-y,-\frac{k}{x},\frac{u}{x}-y+1\right) = \frac{\Pi\left(\frac{u+k}{x}\right)\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)}{\Pi\left(\frac{u+k}{x}-y\right)\Pi\left(\frac{u}{x}\right)},$$

oder vermöge (39.)

$$(59.)\qquad F\left(-y,-\frac{k}{x},\frac{u}{x}-y+1\right) = \frac{[u+k,-x]^y}{[u,-x]^y},$$

oder

$$(60.)\quad \frac{[u+k,-x]^y}{[u,-x]^y} = 1+y_1\frac{k}{u-yx+x}+y_2\frac{k(k-x)}{(u-yx+x)(u-yx+2x)}+\cdots+y_n\frac{[k,-x]^n}{[u-yx+nx,-x]^n}+\cdots,$$

woraus endlich (nach 55, 56)

$$(61.)\quad [u+k,-x]^y = [u,-x]^y+y_1[u,-x]^{y-1}[k,-x]^1+\cdots+y_n[u,-x]^{y-n}[k,-x]^n+\cdots.$$

Diese Reihen (60, 61) convergiren, wenn $\gamma-\alpha-\beta = \frac{u+k}{x}+1$ positiv ist. Die Formel (61.) hat die grösseste Aehnlichkeit mit der Binomial-Formel

$$(62.)\qquad (u+k)^y = u^y+y_1u^{y-1}k+\cdots+y_nu^{y-n}k^n+\cdots,$$

welche aus ihr hervorgeht, wenn man $x=0$ setzt. Ebenso stellt sich die Aehnlichkeit der Formel (40.) mit derselben heraus, wenn man der letzteren die Form

$$(63.)\qquad (u+k)^y = u^y\left\{1+y_1\frac{k}{u}+y_2\frac{k^2}{u^2}+\cdots+y_n\frac{k^n}{u^n}+\cdots\right\}$$

giebt. Diese Analogie der Facultäten und der Potenzen würde aber, wie aus der vorhergehenden Darstellung erhellt, verloren gehen, wenn man hinsichtlich der Functionen ψ, φ eine andere Bestimmung träfe. Die Reihe (40.) für $(u+k,+x)^y$ würde alsdann noch mit dem Factor

$$\frac{\psi\left(\frac{u+k}{x}+y\right)\psi\left(\frac{u}{x}\right)}{\psi\left(\frac{u+k}{x}\right)\psi\left(\frac{u+k}{x}+y\right)},$$

und die Reihe (61.) für $[u+k,-x]^y$ noch mit dem Factor

$$\frac{\varphi\left(\frac{u+k}{x}\right)\varphi\left(\frac{u}{x}-y\right)}{\varphi\left(\frac{u+k}{x}-y\right)\varphi\left(\frac{u}{x}\right)}$$

zu multipliciren sein.

§ 7.

Crelle entwickelt ferner im § 43 seiner Schrift eine bemerkenswerthe Reihe für log $(u,+x)^y$. Dabei fällt es jedoch sogleich auf, dass dieselbe einzig aus den Gleichungen (1.), (2.), (3.) hergeleitet wird, während doch bewiesen ist, dass diese allein zur Bestimmung von $(u,+x)^y$ oder $\log(u,+x)^y$ nicht hinreichend sind. Dieser scheinbare Widerspruch findet aber darin seine Erklärung, dass die Convergenz der Reihe auf die im § 5 als unzuverlässig nachgewiesene Weise bestimmt wird. Die Formel selbst ist jedoch richtig, und kann auf folgende Art hergeleitet werden.

Setzt man in der Formel (40.) $x = 1$, und nimmt an, dass $u+y$ positiv sei, so kann man den Werth von k so klein nehmen, dass die Reihe (40.) convergirt und nach ganzen Potenzen von k entwickelt werden kann. Bestimmt man in dieser Entwickelung den Coefficienten von k, so findet sich

$$(64.)\quad \frac{d(u,+1)^y}{du} = (u,+1)^y\left\{y_1\frac{1}{u} - y_2\frac{1}{u(u+1)} + \cdots + (-1)^{n-1}y_n\frac{1.2\ldots(n-1)}{u(u+1)\ldots(u+n-1)} + \cdots\right\}.$$

Es ist aber, wie bekannt,

$$(65.)\quad \frac{(-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-1)}{u(u+1)\ldots(u+n-1)} = \Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) \text{ für } \Delta u = 1,$$

daher

$$(66.)\quad \frac{d(u,+1)^y}{du} = (u,+1)^y\left\{y_1\frac{1}{u} + y_2\Delta\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots + y_n\Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots\right\},$$

oder

$$(67.)\quad \frac{d\log(u,+1)^y}{du} = y_1\frac{1}{u} + y_2\Delta\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots + y_{n+1}\Delta^n\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots.$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn man auch u als positiv annimmt, und bemerkt, dass

$$(68.)\quad \Delta^n\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u+n} - \frac{n_1}{u+n-1} + \frac{n_2}{u+n-2} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{u}$$
$$= \frac{d}{du}\{\log(u+n) - n_1\log(u+n-1) + n_2\log(u+n-2) - \cdots + (-1)^n\log u\} = \frac{d.\Delta^n\log u}{du}$$

ist,

$$(69.)\quad \log(u,+1)^y = C + y_1\log u + y_2\Delta\log u + \cdots + y_{n+1}\Delta^n\log u + \cdots,$$

wo C eine noch zu bestimmende Constante bedeutet.

Es ist

$$\log(u,+1)^y = \log.u^y\left(1,+\frac{1}{u}\right)^y = y\log u + \log\left(1,+\frac{1}{u}\right)^y,$$

daher

$$(70.)\quad \log\left(1,+\frac{1}{u}\right)^y = C + y_2\log u + \cdots + y_{n+1}\Delta^n\log u + \cdots.$$

Nun ist aber $\Delta^n\log u = 0$ für $n = \infty$, also

$$(71.)\quad \Delta^n\log u = \int_\infty^u \Delta^n\left(\frac{1}{u}\right).du,$$

und daher auch

$$(72.)\quad y_2\Delta\log u + \cdots + y_{n+1}\Delta^n\log\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots = \int_\infty^u\left\{y_2\Delta\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots + y_{n+1}\Delta^n\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots\right\}du.$$

Die Summe der Reihe $y_2\Delta\log u +$ u. s. w. verschwindet also für $u = \infty$, und da $\left(1,+\frac{1}{u}\right)^y = 1$ wird für $u = \infty$, so verschwindet auch $\log\left(1,+\frac{1}{u}\right)^y$ für $u = \infty$; es muss daher $C = 0$ sein. Man hat demnach

$$(73.)\quad \log(u,+1)^y = y_1\log u + y_2\Delta\log u + \cdots + y_{n+1}\Delta^n\log u + \cdots.$$

Aus dieser Formel ergiebt sich sofort unter der Bedingung, dass $\frac{u}{x}$ und $\frac{u}{x}+y$ beide positiv sind,

$$(74.)\quad \log(u,+x)^y = y_1\log u + y_2\Delta\log u + \cdots + y_{n+1}\Delta^n\log u + \cdots,$$

wo $\Delta u = x$ zu nehmen ist. Diese Formel stimmt überein mit der von Crelle a. a. O. unter Nr. 399 aufgestellten.

Bemerkt man, dass

$$(75.)\quad (u,+x)^y = (u,+x)^{n+y-n} = (u,+x)^n(u+nx,+x)^{y-n}$$

ist, so sieht man, wie man aus der Formel (74.) immer eine andere herleiten kann, welche zur Berechnung von $\log(u,+x)^y$ dient, sobald nur $\frac{u}{x}+y$ positiv ist. Zu dem Ende braucht man nur für n eine so grosse positive ganze Zahl zu setzen, dass auch $\frac{u+nx}{x} = \frac{u}{x}+n$ positiv wird.

Setzt man in der Formel (35.) $-u$ für u und $-y$ für y, so erhält man

$$(76.)\quad (-u,+x)^{-y}(u+x,+x)^y = \frac{\Pi\left(-\frac{u}{x}-y-1\right)\Pi\left(\frac{u}{x}+y\right)}{\Pi\left(-\frac{u}{x}-1\right)\Pi\left(\frac{u}{x}\right)},$$

oder vermöge (28.)

$$(77.)\qquad (-u,+x)^{-y}(u+x,+x)^{y} = \frac{\sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\left(\frac{u}{x}+y\right)\pi}.$$

Aus dieser Formel sieht man, dass die Facultät $(u,+x)^y$ für den Fall, dass $\frac{u}{x}+y$ negativ ist, auf eine andere, für die $\frac{u}{x}+y$ positiv ist, zurückgeführt werden kann. Die Reihe (74.) reicht also für alle Fälle zur Berechnung von $(u,+x)^y$ aus.

§ 8.

Aus der Formel (60.) erhält man, nachdem $x=1$ gesetzt worden, unter der Voraussetzung, dass $u+1$ positiv sei,

$$(78.)\qquad \frac{d\log[u,-1]^y}{du} = y_1\frac{1}{u-y+1} - y_2\frac{1}{(u-y+1)(u-y+2)} + \cdots + y_n\frac{(-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-1)}{(u-y+1)(u-y+2)\ldots(u-y+n)} + \cdots.$$

Setzt man hier $u-y$ für u, und $-y$ für y, so findet sich, wenn $u-y+1$ positiv ist,

$$(79.)\qquad \frac{d\log[u-y,-1]^{-y}}{du}$$
$$= -y\frac{1}{u+1} + \frac{y(y+1)}{1.2}\frac{1}{(u+1)(u+2)} - \cdots\cdots - \frac{(-1)^{n-1}y(y+1)\ldots(y+n-1)}{1.2\ldots n}\frac{1.2\ldots(n-1)}{(u+1)(u+2)\ldots(u+n)} + \cdots.$$

Aber es ist

$$(80.)\qquad [u-y,-1]^{-y} = \frac{1}{[u,-1]^y},$$

$$(81.)\qquad \log[u-y,-1]^{-y} = -\log[u,-1]^y.$$

Hiernach ergiebt sich aus (79.) durch Integration auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden §, wenn auch $u+1$ als positiv angenommen wird,

$$(82.)\qquad \log[u,-1]^y = y\log(u+1) + \frac{y(y+1)}{1.2}\Delta\log(u+1) + \cdots + \frac{y(y+1)\ldots(y+n-1)}{1.2\ldots n}\Delta^{n-1}\log(u+1) + \cdots$$

und hieraus, unter der Bedingung, dass $\frac{u}{x}+1$ und $\frac{u}{x}-y+1$ beide positiv sind,

$$(83.)\qquad \log[u,-x]^y = y\log(u+x) + \frac{y(y+1)}{1.2}\Delta\log(u+x) + \cdots + \frac{y(y+1)\ldots(y+n-1)}{1.2\ldots n}\Delta^{n-1}\log(u+x) + \cdots,$$

wo $\Delta u = x$ zu setzen ist.

Da man

$$(84.)\qquad [u,-x]^y = [u,-x]^{-n}[u+nx,-x]^{y+n}$$

hat, so lässt sich, indem man für n eine ganze Zahl so wählt, dass $\frac{u}{x}+n$ positiv wird, aus (83.) immer eine Reihe zur Berechnung von $[u,-x]^y$ herleiten, sobald $\frac{u}{x}-y+1$ positiv ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so kann man die Formel

$$(85.)\qquad [u,-x]^y[-u-x,-x]^{-y} = \frac{\sin\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi}{\sin\frac{u}{x}\pi},$$

die sich aus (28, 39) ergiebt, anwenden, um die Facultät $[u,-x]^y$ auf eine andere zurückzuführen, die sich mit Hülfe der Reihe (83.) berechnen lässt.

In dem Vorstehenden glaube ich nun meine im Anfange ausgesprochene Ansicht über die bisherige Theorie der Facultäten gehörig begründet, und die wichtigsten Formeln für beide in Betracht gezogene Arten dieser Functionen strenge bewiesen zu haben. Es ist jedoch, da es mir zunächst nur darauf ankam, sichere Resultate festzustellen, und diese so viel als möglich aus bekannten Sätzen herzuleiten, der Gang der Entwickelung nicht immer derjenige, welcher bei einer systematischen Darstellung des Gegenstandes zu befolgen sein würde. Ich gedenke, da die Grenzen dieses Aufsatzes keine grössere Ausführlichkeit gestatten, bei einer andern Gelegenheit auf die analytischen Facultäten zurückzukommen.

Dt. Crone, im August 1843.

REDUCTION EINES BESTIMMTEN DREIFACHEN INTEGRALS.

Es seien x, y, z drei reelle veränderliche Grössen, die man sich als die (rechtwinkligen) Coordinaten eines Punktes vorstellen kann; ferner sei

$$r = \sqrt{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy},$$

wo die Coefficienten A, B u. s. w. reell und so beschaffen sein mögen, dass die Grösse unter dem Wurzelzeichen stets positiv ist, wenn x, y, z nicht sämmtlich den Werth Null haben, und wo von den beiden Werthen der Wurzel immer der positive genommen werden soll. Ferner sei $u = fx + gy + hz$ eine homogene lineare Function von x, y, z und $\mathfrak{f}(r, u)$ eine Function von r und u. Endlich sei

$$S = \iiint \mathfrak{f}(r, u)\, dx\, dy\, dz$$

ein dreifaches Integral, welches sich über alle diejenigen Werthe von x, y, z erstrecken soll, für welche der Werth von r zwischen zwei gegebenen Grenzen a, b enthalten ist, wobei zugleich angenommen wird, dass $\mathfrak{f}(r, u)$ für alle diese Werthe endlich bleibe. Der Ausdruck

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$$

kann, wenn f, g, h reell sind, wie zunächst angenommen werden soll, in einen anderen

$$\lambda (u^2 + v^2 + w^2)$$

umgeformt werden, wo λ eine positive Constante und v, w reelle lineare Functionen von x, y, z bedeuten, welche die Form

$$v = f'x + g'y + h'z, \qquad w = f''x + g''y + h''z$$

haben. Führt man nun bei der Integration u, v, w statt x, y, z als veränderliche Grössen ein, so muss man, da

$$A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2 + 2D\,dy\,dz + 2E\,dz\,dx + 2F\,dx\,dy = \lambda(du^2 + dv^2 + dw^2)$$

ist, nach den Regeln für die Transformation vielfacher Integrale

$$dx\,dy\,dz \quad \text{durch} \quad \sqrt{\frac{\lambda^3}{G}} \cdot du\,dv\,dw$$

ersetzen, wo G die Determinante

$$ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF$$

der quadratischen Form r^2 bedeutet. Demnach wird

$$S = \int\int\int\sqrt{\frac{\lambda^3}{G}}\,\mathfrak{f}(r, u)\,du\,dv\,dw,$$

wo sich jetzt die Integration über alle diejenigen Werthe von u, v, w erstrecken muss, für welche

$$\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad \begin{matrix} > a \\ < b \end{matrix}$$

ist. Alle diese Werthe erhält man aber, wenn man

$$u = \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi, \qquad v = \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\sin\varphi\cos\psi, \qquad w = \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\sin\varphi\sin\psi, \qquad r = s$$

setzt und φ alle Werthe zwischen 0 und π, ψ alle Werthe zwischen 0 und 2π, s alle Werthe zwischen a und b durchlaufen lässt. Führt man nun s, φ, ψ statt u, v, w ein, so ist

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = \frac{1}{\lambda}(ds^2 + s^2\,d\varphi^2 + s^2\sin\varphi^2\,d\psi^2),$$

und es muss $du\,dv\,dw$ durch $\frac{s^2}{\sqrt{\lambda^3}}\sin\varphi\,ds\,d\varphi\,d\psi$ ersetzt werden, wodurch man

$$S = \int_a^b\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{s^2}{\sqrt{G}}\,\mathfrak{f}\left(s, \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi\right)\sin\varphi\,ds\,d\varphi\,d\psi$$

erhält, oder

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{G}}\int_a^b\int_0^\pi s^2\,\mathfrak{f}\left(s, \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi\right)\sin\varphi\,ds\,d\varphi.$$

Nun ist aber

$$\int_0^\varphi \mathfrak{f}\left(s, \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{\sqrt{\lambda}}{s}\int_{\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}^{\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi}\mathfrak{f}(s, u)\,du,$$

also

$$\int_0^\pi \mathfrak{f}\left(s, \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{\lambda}}{s}\int_{-\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}^{\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}\mathfrak{f}(s, u)\,du,$$

und somit

$$S = \frac{2\pi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{G}}\int_a^b s\,ds\int_{-\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}^{\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}\mathfrak{f}(s, u)\,du.$$

Durch diese Formel ist die Bestimmung des vorgelegten dreifachen Integrals zurückgeführt auf zwei nach einander auszuführende Integrationen zwischen bestimmten Grenzen. Es handelt sich nur noch um Ermittelung von λ. Zu dem Ende differentiire man die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = \lambda u^2 + \lambda v^2 + \lambda w^2$$

auf beiden Seiten der Reihe nach in Bezug auf x, y, z, indem man sich x, y, z, wie oben angegeben, ausgedrückt denkt. Dieses giebt

$$\begin{aligned} Ax + Fy + Ez &= \lambda(fu + f'v + f''w) \\ Fx + By + Dz &= \lambda(gu + g'v + g''w) \\ Ex + Dy + Cz &= \lambda(hu + h'v + h''w). \end{aligned}$$

Vermittelst dieser Gleichungen kann man x, y, z durch u, v, w ausdrücken und erhält, indem man

$$\frac{BC - D^2}{G} = A', \qquad \frac{CA - E^2}{G} = B', \qquad \frac{AB - F^2}{G} = C',$$
$$\frac{EF - AD}{G} = D', \qquad \frac{FD - BE}{G} = E', \qquad \frac{DE - CF}{G} = F'$$

setzt,

$$\begin{aligned} x &= A'\lambda(fu + f'v + f''w) + F'\lambda(gu + g'v + g''w) + E'\lambda(hu + h'v + h''w) \\ y &= F'\lambda(fu + f'v + f''w) + B'\lambda(gu + g'v + g''w) + D'\lambda(hu + h'v + h''w) \\ z &= E'\lambda(fu + f'v + f''w) + D'\lambda(gu + g'v + g''w) + C'\lambda(hu + h'v + h''w). \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun diese Ausdrücke für x, y, z der Reihe nach mit f, g, h, so muss die Summe dieser Producte $fx + gy + hz$ identisch gleich u werden, woraus folgt, dass

$$1 = \lambda(A'f^2 + B'g^2 + C'h^2 + 2D'gh + 2E'hf + 2F'fg)$$

sein muss. Setzt man daher $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \varepsilon$, so ist

$$\varepsilon = \sqrt{A'f^2 + B'g^2 + C'h^2 + 2D'gh + 2E'hf + 2F'fg},$$

wo der positive Werth der Wurzel zu nehmen ist, und

$$S = \frac{2\pi}{\varepsilon\sqrt{G}} \int_a^b s\,ds \int_{-\varepsilon s}^{+\varepsilon s} \mathrm{f}(s, u)\,du,$$

oder auch, wenn man $u = st$ setzt,

$$S = \frac{2\pi}{\varepsilon\sqrt{G}} \int_a^b s^2 ds \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \mathrm{f}(s, st)\,dt.$$

Nimmt man

$$\mathrm{f}(r, u) = \varphi(r) . u^m,$$

wo m eine ganze positive Zahl bedeuten soll, so ist

$$S = \frac{2\pi}{(m+1)\sqrt{G}} (\varepsilon^m - (-1)^{m+1}\varepsilon^m) \int_a^b s^{m+2} \varphi(s)\,ds,$$

oder

$$S = 0, \text{ wenn } m \text{ ungerade,}$$

$$S = \frac{4\pi\varepsilon^m}{(m+1)\sqrt{G}} \int_a^b s^{m+2} \varphi(s)\,ds, \text{ wenn } m \text{ gerade.}$$

Bezeichnet man

$$\frac{4\pi}{m+1} \int_a^b s^{m+2} \varphi(s)\,ds \quad \text{durch } \vartheta_m,$$

so hat man demnach

$$\iiint (fu + gv + hw)^{2m+1} \varphi(r)\,du\,dv\,dw = 0,$$

$$\iiint (fu + gv + hw)^{2m} \varphi(r)\,du\,dv\,dw = \frac{\vartheta_{2m}}{\sqrt{G}} (A'f^2 + B'g^2 + C'h^2 + 2D'gh + 2E'hf + 2F'fg)^m.$$

Beide Seiten dieser Gleichungen sind ganze rationale Functionen von f, g, h, und da sie für alle reellen Werthe von f, g, h gelten, so müssen sie auch dann noch bestehen, wenn man diesen Grössen beliebige complexe Werthe beilegt. Daraus folgt weiter, dass auch der obige allgemeine Ausdruck für S seine Gültigkeit behält, wenn f, g, h beliebige complexe Werthe haben,

sobald sich $\mathrm{f}(r, u)$ für alle Werthe von r, u, die innerhalb der Grenzen der Integration liegen, in eine nach positiven ganzen Potenzen von u fortschreitende, convergirende Reihe entwickeln lässt.

Wenn insbesondere

$$r = \sqrt{Ax^2 + By^2 + Cz^2}$$

ist, so wird

$$G = ABC$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C}}.$$

Wenn

$$\mathrm{f}(r, u) = \varphi(r) . e^{k(fx + gy + hz)}$$

ist, so erhält man

$$\iiint \varphi(r)\, e^{k(fx + gy + hz)}\,dx\,dy\,dz = \frac{2\pi}{k\varepsilon\sqrt{G}} \int_a^b s\varphi(s) (e^{k\varepsilon s} - e^{-k\varepsilon s})\,ds.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält nur gerade Potenzen von k. Setzt man kv für k, so folgt aus derselben

$$\iiint \varphi(r) \cos k(fx + gy + hz)\,dx\,dy\,dz = \frac{4\pi}{k\varepsilon\sqrt{G}} \int_a^b s\varphi(s) \sin k\varepsilon s\,ds,$$

$$\iiint \varphi(r) \sin k(fx + gy + hz)\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Deutsch-Crone, 1844.

BEITRAG ZUR THEORIE DER ABEL'SCHEN INTEGRALE.

(Beilage zum Jahresbericht über das Gymnasium zu Braunsberg in dem Schuljahre 1848—1849.)

Unter den sogenannten vollständigen elliptischen Integralen der ersten und zweiten Art (den Modular- und elliptischen Quadranten nach Gudermann's Benennung), welche zu zwei conjugirten Moduln gehören, findet bekanntlich ein einfacher, zuerst von Legendre aufgefundener Zusammenhang statt, welcher in den jetzt gebräuchlichen Zeichen durch die Gleichung

$$KE' + EK' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

dargestellt wird. In der vorliegenden Abhandlung beabsichtige ich, für die Abel'schen Integrale aller Ordnungen eine Reihe analoger Relationen zu entwickeln, welche, wie ich glaube, nicht bekannt sind. Es findet sich zwar (Crelle's Journal, Bd. 19, S. 312) eine gelegentliche Bemerkung von Jacobi, eine von ihm aufgefundene Verallgemeinerung des Legendre'schen Satzes betreffend; allein nach den Andeutungen, die derselbe a. a. O. giebt, glaube ich annehmen zu dürfen, dass die Relation, welche er im Sinne hat, mit derjenigen übereinstimme, die später Hädenkamp (Crelle's Journal, Bd. 22, S. 184) auf dem von Jacobi angegebenen Wege hergeleitet hat. Die Resultate indess, zu welchen ich gelangt bin, sind nicht nur von dem Hädenkamp'schen verschieden, sondern auch weit einfacher und mit der Legendre'schen Formel übereinstimmender.

Die von mir entwickelten Relationen sind für die Theorie der Abel'schen Transcendenten von besonderer Bedeutung. Ich beschäftige mich seit längerer

Zeit mit dieser Theorie und namentlich mit der Hauptaufgabe, die von Jacobi eingeführten umgekehrten Functionen der Abel'schen Integrale erster Art wirklich darzustellen. Es ist mir gelungen, diese Aufgabe vollständig zu lösen, auf einem Wege, welcher von dem bisher von Göpel u. A. betretenen gänzlich verschieden ist. Ich gehe nämlich unmittelbar von den Integral-Gleichungen aus, durch welche jene Functionen definirt werden, und zeige zunächst, mit Hülfe des Abel'schen Theorems, dass sie sämmtlich Wurzeln einer und derselben algebraischen Gleichung sind, deren Coefficienten ich sodann durch eine Anzahl von Hülfsfunctionen ausdrücke, welche den sogenannten Θ-Functionen, auf welche Jacobi die elliptischen Functionen zurückgeführt hat, vollkommen analog sind, und gleich diesen durch unendliche, nach einem einfachen Gesetze gebildete und beständig convergirende Reihen dargestellt werden können. Diese Reihen-Entwickelungen gewinne ich, indem ich für die genannten Hülfsfunctionen mehrere charakteristische Eigenschaften nachweise, durch welche sie vollständig bestimmt werden. Dazu aber ist die Kenntniss der Relationen, welche der Gegenstand des gegenwärtigen Aufsatzes sind, ein wesentliches Erforderniss. Nun hat zwar der Weg, den ich bei Behandlung der Abel'schen Transcendenten eingeschlagen, das Eigenthümliche, dass man auf ihm selbst in ungesuchter Weise zu jenen Relationen geführt wird, wie ich sie denn in der That auch so zuerst gefunden habe. Es ist aber diese Art der Herleitung einigermassen umständlich, indem namentlich die Bestimmung einiger Constanten Weitläufigkeiten macht. Um so erwünschter war es mir, in einem von Abel in der Abhandlung: Sur une propriété remarquable d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes (Œuvres complètes, Tome II, pag. 54) begründeten Theoreme, durch welches die bekannten Sätze über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Art der elliptischen Integrale eine sehr bemerkenswerthe Verallgemeinerung erhalten, die eigentliche Quelle zu entdecken, aus der die in Rede stehenden Relationen, so wie noch andere weit allgemeinere, auf eben so einfachem als directem Wege abgeleitet werden können.

§ 1.

Es sei $R(x)$ eine ganze Function von x; a, b seien irgend zwei Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, und es werde

$$\frac{1}{2}\frac{R(x)-R(y)}{(x-y)^2} - \frac{1}{4}\frac{R'(x)+R'(y)}{x-y} = F(x, y) \tag{1.}$$

gesetzt, wo $R'(x)$, $R'(y)$ die ersten Differential-Coefficienten von $R(x)$, $R(y)$ bedeuten, so dass, wie man sich leicht überzeugt, $F(x, y)$ eine ganze Function von x, y ist. Alsdann gilt als ein besonderer Fall des angeführten Abel'schen Theorems die folgende Gleichung, in welcher α, β irgend zwei bestimmte Werthe der Veränderlichen x, y bezeichnen:

$$\sqrt{R(\alpha)}\int_b^\beta \frac{dy}{(y-\alpha)\sqrt{R(y)}} - \sqrt{R(\beta)}\int_a^\alpha \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{R(x)}} = 2\int_a^\alpha\int_b^\beta \frac{F(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}. \tag{2.}$$

Als nothwendige Bedingung des Bestehens dieser Gleichung ist noch hinzuzufügen, dass innerhalb der Grenzen der Integration $x-y$ nicht gleich Null werden darf.

Es ist nämlich

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{R(x)}}{y-x} = \left(\frac{1}{2}\frac{R'(x)}{y-x} + \frac{R(x)}{(y-x)^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{R(x)}},$$

$$\frac{d}{dy}\frac{\sqrt{R(y)}}{x-y} = \left(\frac{1}{2}\frac{R'(y)}{x-y} + \frac{R(y)}{(x-y)^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{R(y)}},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} - \frac{d}{dy}\frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}} = \frac{2F(x, y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}},$$

also

$$\int_a^\alpha\int_b^\beta \frac{2F(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = \int_b^\beta dy\int_a^\alpha \frac{d}{dx}\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}}\,dx - \int_a^\alpha dx\int_b^\beta \frac{d}{dy}\frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}}\,dy$$

$$= \sqrt{R(\alpha)}\int_b^\beta \frac{dy}{(y-\alpha)\sqrt{R(y)}} - \sqrt{R(\beta)}\int_a^\alpha \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{R(x)}}.$$

Es sei nun

$$R(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2n+1})$$

und es werde zunächst angenommen, dass die Grössen $a_1, a_2, \dots$ sämmtlich reell und so geordnet seien, dass

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n+1}.$$

Alsdann hat $R(x)$, wenn x zwischen den Grenzen $a_\mu, a_{\mu+1}$ enthalten ist, wo μ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots 2n$ bedeutet, dasselbe Zeichen wie $(-1)^{\mu-1}$, so dass man setzen kann

$$\sqrt{R(x)} = \pm i^{\mu-1}\sqrt{(-1)^{\mu-1}R(x)},$$

wo $\sqrt{(-1)^{\mu-1}R(x)}$ den positiven Werth der Quadratwurzel aus der positiven Grösse $(-1)^{\mu-1}R(x)$ bezeichnen soll. Liegt x zwischen $-\infty$ und a_1, so hat man

$$\sqrt{R(x)} = \pm i\sqrt{-R(x)},$$

und wenn x zwischen a_{2n+1} und $+\infty$ enthalten ist,

$$\sqrt{R(x)} = \pm\sqrt{+R(x)}.$$

Um nun einem Integral wie $\int\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ eine ganz bestimmte Bedeutung zu geben, werde für das Folgende festgesetzt, dass bei der Integration von den beiden Werthen, welche $\sqrt{R(x)}$ hat, immer derjenige in Anwendung kommen soll, den man erhält, wenn man in den vorstehenden Formeln das obere Zeichen nimmt.

Dies festgestellt, setze man in der Gleichung (2.) $a = a_\mu$, $b = a_\nu$ und nehme zunächst an, dass $\nu > \mu+1$, aber $< 2n+1$ sei, so darf man $\alpha = a_{\mu+1}$, $\beta = a_{\nu+1}$ nehmen, weil in diesem Fall die Differenz $x-y$ innerhalb der Grenzen der Integration nicht gleich Null wird. Die linke Seite wird alsdann gleich Null, und man erhält demnach

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}}\frac{F(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = 0. \tag{3.}$$

Wenn aber $\nu = \mu+1$, so kann man den Werth des Doppel-Integrals

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}\int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}}\frac{F(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}},$$

welches durch S bezeichnet werden möge, mit Hülfe der Gleichung (2.) nicht direct auf dieselbe Weise ermitteln; man gelangt jedoch dazu auf folgendem Wege.

Es werde a_μ durch a, $a_{\mu+1}$ durch c, $a_{\mu+2}$ durch b bezeichnet, so ist

$$S = -\int_a^c\int_b^c\frac{F(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}.$$

Sodann seien s, t zwei positive Grössen, so gewählt, dass $c-s > a$ und $c+t < b$ bleibt, so ist S die Grenze, welcher sich das Doppel-Integral

$$-\int_a^{c-s}\int_b^{c+t}\frac{F(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = S'$$

nähert, wenn s, t unendlich klein werden. Für dieses letztere Integral aber darf man vermöge der Gleichung (2.) setzen

$$\frac{1}{2}\int_a^{c-s}\frac{\sqrt{R(c+t)}\,dx}{(x-c-t)\sqrt{R(x)}} - \frac{1}{2}\int_b^{c+t}\frac{\sqrt{R(c-s)}\,dy}{(y-c+s)\sqrt{R(y)}}.$$

Dieser Ausdruck wandelt sich, wenn $x = c-u$, $y = c+v$ gesetzt wird, in den folgenden um:

$$S' = \frac{1}{2}\int_{c-a}^{s}\frac{\sqrt{R(c+t)}}{(u+t)\sqrt{R(c-u)}}\,du - \frac{1}{2}\int_{b-c}^{t}\frac{\sqrt{R(c-s)}}{(v+s)\sqrt{R(c+v)}}\,dv.$$

Es mögen jetzt σ, τ zwei bestimmte Werthe von s und t bezeichnen, die nur so klein anzunehmen sind, dass sich $\sqrt{R(c-s)}$, $\sqrt{R(c+t)}$ für alle Werthe von s, t, welche nicht grösser als σ, τ sind, durch convergirende Reihen, die nach aufsteigenden Potenzen dieser Veränderlichen fortschreiten, darstellen lassen. Alsdann hat man

$$\begin{aligned}2S' = \sqrt{R(c+t)}\int_{c-a}^{\sigma}\frac{du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}} - \sqrt{R(c-s)}\int_{b-c}^{\tau}\frac{dv}{(s+v)\sqrt{R(c+v)}}\\ +\int_\sigma^s\frac{\sqrt{R(c+t)}\,du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}} - \int_\tau^t\frac{\sqrt{R(c-s)}\,dv}{(s+v)\sqrt{R(c+v)}}.\end{aligned}$$

Die Integrale

$$\int_{c-a}^{\sigma}\frac{du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}}, \qquad \int_{b-c}^{\tau}\frac{dv}{(s+c)\sqrt{R(c+v)}}$$

bleiben für alle Werthe von t, s innerhalb der für diese Veränderlichen bezeichneten Grenzen endlich; $\sqrt{R(c+t)}$, $\sqrt{R(c-s)}$ nähern sich aber, wenn t, s unendlich klein werden, der Grenze $\sqrt{R(c)} = 0$. Daraus folgt, dass die Grenze von S' für $t = 0$, $s = 0$ dieselbe ist wie die, welcher sich die Formel

$$\frac{1}{2}\int_\sigma^s\frac{\sqrt{R(c+t)}\,du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}} - \frac{1}{2}\int_\tau^t\frac{\sqrt{R(c-s)}\,dv}{(s+v)\sqrt{R(c+v)}}$$

nähert, wenn s, t unendlich klein werden.

Nach den oben für $\sqrt{R(x)}$ getroffenen Bestimmungen kann man nun, da $c-u$ zwischen a_μ und $a_{\mu+1}$, $c+v$ zwischen $a_{\mu+1}$ und $a_{\mu+2}$ liegt, setzen

$$\sqrt{R(c+v)} = i^\mu \sqrt{(-1)^\mu R'(c)}.\sqrt{v.(1+F(v))},$$
$$\sqrt{R(c-u)} = i^{\mu-1} \sqrt{(-1)^\mu R'(c)}.\sqrt{u.(1+F(-u))},$$

wo $F(v)$ in eine convergirende Reihe entwickelt werden kann, die nur ganze, positive Potenzen von v enthält, und $F(-u)$ aus $F(v)$ hervorgeht, wenn man $-u$ für v setzt. $\sqrt{u}$ und $\sqrt{v}$ sind positiv zu nehmen. Alsdann ist

$$\int_\sigma^s \frac{\sqrt{R(c+t)}\,du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}} = \int_\sigma^s \frac{i\sqrt{t.(1+F(t))}\,du}{(t+u)\sqrt{u.(1+F(-u))}}$$
$$= i\int_\sigma^s \frac{\sqrt{t}\,du}{(t+u)\sqrt{u}} + i\sqrt{t}\int_\sigma^s \frac{F(t)-F(-u)}{t+u}\cdot\frac{du}{\sqrt{u.(1+F(-u))}}.$$

Der zweite Theil auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich, weil $F(t)-F(-u)$ durch $t+u$ dividirbar ist, in eine Reihe von Gliedern entwickeln, welche nur positive Potenzen von s, σ, t enthalten und für $t=0$ verschwinden. Ebenso findet man

$$\int_\tau^t \frac{\sqrt{R(c-s)}\,dv}{(s+v)\sqrt{R(c+v)}} = -i\int_\tau^t \frac{\sqrt{s}\,dv}{(s+v)\sqrt{v}} + \text{ Glieder, die für } s=0 \text{ verschwinden.}$$

Daraus ergiebt sich, dass der Werth von S die Grenze ist, welcher sich die Formel

$$\frac{i}{2}\int_\sigma^s \frac{\sqrt{t}\,du}{(t+u)\sqrt{u}} + \frac{i}{2}\int_\tau^t \frac{\sqrt{s}\,dv}{(s+v)\sqrt{v}}$$

nähert, wenn t, s unendlich klein werden. Diese Formel lässt sich aber, wenn man bei dem ersten Integrale die Substitution $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = w$, bei dem anderen die Substitution $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{v}} = w$ anwendet, und $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\tau}} = p$, $\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{t}} = q$ setzt, umwandeln in

$$\frac{1}{i}\int_p^q \frac{dw}{1+w^2},$$

welcher Ausdruck für $s=0$, $t=0$ übergeht in

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{dw}{1+w^2} = \frac{\pi}{2i}.$$

Es ist demnach

$$S = \frac{\pi}{2i},$$

oder

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}\int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = \frac{\pi}{2i}. \tag{4.}$$

§ 2.

Die Doppel-Integrale auf der linken Seite der Gleichungen (3, 4) des vorhergehenden § können, weil $F(x,y)$ in Beziehung auf x sowohl als y eine ganze Function vom $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, dargestellt werden als ein Aggregat von Gliedern, von denen jedes ein Product zweier Abel'schen Integrale der ersten und zweiten Art ist; die Gleichungen (3, 4) geben also eine Reihe von Relationen unter solchen Integralen, die man in Erweiterung der Legendre'schen Benennung vollständige Abel'sche Integrale nennen kann.

Wenn $R(x)$ vom dritten Grade ist, so ist $F(x,y) = \frac{1}{4}(y-x)$, und es reduciren sich die Gleichungen auf die einzige

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_2}^{a_3} \frac{(y-x)\,dx\,dy}{4\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = \frac{\pi}{2i}, \tag{1.}$$

oder

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_2}^{a_3} \frac{(y-x)\,dx\,dy}{4\sqrt{R(x)}\sqrt{-R(y)}} = \frac{\pi}{2}. \tag{2.}$$

Setzt man

$$\sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-a_1}} = t, \quad \sqrt{\frac{y-a_1}{a_2-a_1}} = s, \quad \sqrt{\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}} = k,$$

so ist

$$\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{a_3-a_1}}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$
$$\frac{dy}{2\sqrt{-R(y)}} = \frac{1}{\sqrt{a_3-a_1}}\,\frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2s^2)}},$$

und die Gleichung (2.) geht, wenn man

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = K_1,$$
$$\int_0^1 \frac{k^2s^2\,ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = J, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2s^2\,ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2s^2)}} = J_1$$

setzt, über in die folgende:

$$(3.)\qquad KJ_1 - JK_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der oben angeführten Legendre'schen. Denn es ist

$$J = K - E,$$

und wenn man

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \qquad t = \frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2 w^2}$$

setzt, so erhält man

$$K_1 = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k'^2 w^2)}} = K',$$

und durch dieselbe Substitution

$$J_1 = E',$$

mithin

$$KE' - (K-E)K' = \frac{\pi}{2},$$

oder

$$(4.)\qquad KE' + EK' - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Ich werde jetzt zeigen, dass man den Gleichungen (3, 4) des § 1 eine ganz ähnliche Gestalt geben kann, wie der Gleichung (3.) dieses §. Zu dem Ende wird es aber nöthig sein, einige Bemerkungen über die Form, unter welcher nach meiner Ansicht die Abel'schen Transcendenten zu behandeln sind, voraus zu schicken.

§ 3.

Dem System der Integral-Gleichungen, von welchem man nach Jacobi in der Theorie der Abel'schen Transcendenten ausgehen muss, kann man immer folgende Form geben, welche mir die angemessenste zu sein scheint, wenn man die Analogie dieser Functionen mit den elliptischen so viel als möglich will hervortreten lassen.

Es werde die Function $R(x)$ in zwei Factoren $P(x)$, $Q(x)$ zerfällt, und zwar sei

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2n-1})(x-a_{2n+1}),$$
$$Q(x) = (x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_{2n}).$$

Ferner werde

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{(a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1})P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}} = g_{\mathfrak{a}}, \qquad \frac{g_{\mathfrak{a}}P(x)}{x-a_{2\mathfrak{a}-1}} = F_{\mathfrak{a}}(x)$$

gesetzt, wo $\mathfrak{a}$, wie überhaupt jeder im Folgenden als Index vorkommende

deutsche Buchstabe, eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots n$ bedeutet, und es seien $x_1, x_2, \dots x_n$ n Veränderliche, welche als Functionen eben so vieler veränderlichen Argumente $u_1, u_2, \dots u_n$ durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \Sigma\int_{a_{2\mathfrak{a}-1}}^{x_{\mathfrak{a}}} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ u_2 &= \Sigma\int_{a_{2\mathfrak{a}-1}}^{x_{\mathfrak{a}}} \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u_n &= \Sigma\int_{a_{2\mathfrak{a}-1}}^{x_{\mathfrak{a}}} \frac{F_n(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \end{aligned}\right.$$

definirt werden, in denen sich das Summenzeichen auf den Index $\mathfrak{a}$ bezieht. Es handelt sich darum, die Functionen $x_1, x_2, \dots x_n$ durch ihre Argumente in einer für alle Werthe der letzteren gültig bleibenden Form wirklich auszudrücken.

Zunächst erhält man für dieselben unendliche Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von $u_1, u_2, \dots u_n$ fortschreiten, und zwar ist, wenn man durch $(u_1, u_2, \dots u_n)_\alpha$ eine homogene Function des α^{ten} Grades von $u_1, u_2, \dots$ bezeichnet,

$$(2.)\qquad \sqrt{\frac{x_{\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}} = u_{\mathfrak{a}} + (u_1, u_2, \dots u_n)_3 + (u_1, u_2, \dots u_n)_5 + \cdots$$

Diese Reihen convergiren zwar nicht beständig, aber doch für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots$, die ihrem absoluten Betrage nach bestimmte Grenzen nicht überschreiten. Sodann kann man mit Hülfe des Abel'schen Theorems nachweisen, dass $x_1, x_2, \dots x_n$ Wurzeln einer und derselben Gleichung n^{ten} Grades sind, der man die Form

$$(3.)\qquad \frac{a_2-a_1}{x-a_1}p_1^2 + \frac{a_4-a_3}{x-a_3}p_2^2 + \cdots + \frac{a_{2n}-a_{2n-1}}{x-a_{2n-1}}p_n^2 = 1$$

geben kann, wo $p_1, p_2, \dots p_n$ eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \dots u_n$ sind, die ganz den Charakter rationaler Functionen besitzen. In Reihen nach Potenzen von $u_1, u_2, \dots$ entwickelt haben sie genau dieselbe Gestalt wie die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (2.), woraus erhellt, dass $p_{\mathfrak{a}}$ eine ungrade Function von $u_1, u_2, \dots$ ist. Ferner hat man

$$(4.)\qquad p_{\mathfrak{a}} = \sqrt{\frac{(a_{2\mathfrak{a}-1}-x_1)(a_{2\mathfrak{a}-1}-x_2)\dots(a_{2\mathfrak{a}-1}-x_n)}{(a_{2\mathfrak{a}-1}-a_{2\mathfrak{a}})P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}}.$$

Für $n = 1$ ergiebt sich, wenn man x, u, p für x_1, u_1, p_1 schreibt,

$$u = \int_{a_1}^{x} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a_3-a_1}\,.dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}},$$

$$p = \sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-a_1}},$$

woraus

$$u = \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)(1-k^2p^2)}}, \qquad k^2 = \frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}$$

folgt, so dass $p = \sin\operatorname{am} u$, oder nach Gudermann's kürzerer Bezeichnung (Theorie der Modular-Functionen) $p = \operatorname{sn} u$ ist. In Erweiterung dieser letzteren Bezeichnung setze ich

$$p_{\mathfrak{a}} = \operatorname{sn}(u_1, u_2, \ldots u_n)_{\mathfrak{a}},$$

sowie ferner

$$(5.)\qquad \sqrt{\frac{(a_{2\mathfrak{a}}-x_1)(a_{2\mathfrak{a}}-x_2)\ldots(a_{2\mathfrak{a}}-x_n)}{P(a_{2\mathfrak{a}})}} = \operatorname{cn}(u_1, u_2, \ldots u_n)_{\mathfrak{a}}$$

$$(6.)\qquad \sqrt{\frac{(a_{2n+1}-x_1)(a_{2n+1}-x_2)\ldots(a_{2n+1}-x_n)}{P(a_{2n+1})}} = \operatorname{dn}(u_1, u_2, \ldots u_n).$$

Auf diese Weise sind in die Theorie der Abel'schen Transcendenten $(2n+1)$ Functionen eingeführt, welche mit den drei elliptischen Functionen

$$\sin\operatorname{am} u = \operatorname{sn} u, \qquad \cos\operatorname{am} u = \operatorname{cn} u, \qquad \Delta\operatorname{am} u = \operatorname{dn} u,$$

in welche sie für $n = 1$ übergehen, eine grosse Aehnlichkeit haben. So z. B. lässt sich $\operatorname{sn}(u+v)$ rational durch $\operatorname{sn} u$, $\frac{d\operatorname{sn} u}{du}$, $\operatorname{sn} v$, $\frac{d\operatorname{sn} v}{dv}$ ausdrücken vermittelst der Formel

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u^2 - \operatorname{sn} v^2}{\operatorname{sn} u \frac{d\operatorname{sn} v}{dv} - \operatorname{sn} v \frac{d\operatorname{sn} u}{du}} = \frac{\operatorname{sn} u^2 - \operatorname{sn} v^2}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u},$$

und ähnliche Formeln gelten für $\operatorname{cn}(u+v)$ und $\operatorname{dn}(u+v)$. Für die angegebenen Functionen mehrerer Veränderlichen aber findet man,

$$\frac{a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}{2g_{\mathfrak{a}}} = e_{\mathfrak{a}}$$

setzend:

$$(7.)\quad \sum_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}}\left(\operatorname{sn}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}} \frac{d\operatorname{sn}(v_1, v_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{dv_{\mathfrak{b}}} - \operatorname{sn}(v_1, v_2, \ldots)_{\mathfrak{a}} \frac{d\operatorname{sn}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{du_{\mathfrak{b}}}\right) . \operatorname{sn}(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}$$
$$= e_{\mathfrak{b}} . (\operatorname{sn}^2(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{b}} - \operatorname{sn}^2(v_1, v_2, \ldots)_{\mathfrak{b}}).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\mathfrak{b}$ der Reihe nach gleich $1, 2, \ldots n$, so erhält

man n Gleichungen, vermittelst welcher die n Functionen $\operatorname{sn}(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}$ rational durch $\operatorname{sn}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}$, $\operatorname{sn}(v_1, v_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}$ und deren partielle Differential-Coefficienten, welche letztere algebraische Functionen jener sind, ausgedrückt werden können. Ähnliches gilt für die durch cn, dn bezeichneten Functionen. Bezeichnet man ferner

$$(8.)\qquad \int_{a_{2\mathfrak{b}-1}}^{a_{2\mathfrak{b}}} \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

$$(9.)\qquad \int_{a_{2\mathfrak{b}}}^{a_{2\mathfrak{b}+1}} \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad \frac{\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{i}$$

und setzt

$$(10.)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}=n} \overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}+1} + \cdots + \overline{K}_{\mathfrak{a},n} = K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

so haben diese $2.n^2$ bestimmten Integrale $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ für die Theorie der Abel-schen Transcendenten eine ganz ähnliche Bedeutung wie die Grössen K, K' für die elliptischen Functionen. So z. B. findet man, wenn man

$$(11.)\quad \omega_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}_1 K_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{m}_2 K_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{m}_n K_{\mathfrak{a},n} + (\mathfrak{n}_1 K'_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2 K'_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{n}_n K'_{\mathfrak{a},n})\,i$$

setzt, wo $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2, \ldots$ ganze (positive oder negative) Zahlen bedeuten, für die Functionen sn, cn, dn die charakteristischen Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u_1+2\omega_1, u_2+2\omega_2, \ldots u_n+2\omega_n)_{\mathfrak{a}} = (-1)^{\mathfrak{m}_{\mathfrak{a}}+\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2+\cdots+\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}-1}} \operatorname{sn}(u_1, u_2, \ldots u_n)_{\mathfrak{a}} \\ \operatorname{cn}(u_1+2\omega_1, u_2+2\omega_2, \ldots u_n+2\omega_n)_{\mathfrak{a}} = (-1)^{\mathfrak{m}_{\mathfrak{a}}+\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2+\cdots+\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}}} \operatorname{cn}(u_1, u_2, \ldots u_n)_{\mathfrak{a}} \\ \operatorname{dn}(u_1+2\omega_1, u_2+2\omega_2, \ldots u_n+2\omega_n) = (-1)^{\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2+\cdots+\mathfrak{n}_n} \operatorname{dn}(u_1, u_2, \ldots u_n), \end{cases}$$

in welchen Formeln, wenn $\mathfrak{a} = 1$ ist, $\mathfrak{n}_0 = 0$ zu setzen ist.

Die Functionen sn, cn, dn stehen übrigens in einem einfachen algebraischen Zusammenhange, vermöge dessen je $(n+1)$ derselben durch die übrigen ausgedrückt werden können.

Was nun ferner die Abel'schen Integrale der zweiten Art anlangt, so lassen sich dieselben durch n neue Functionen der Argumente $u_1, u_2, \ldots$ ausdrücken, von denen ich die $\mathfrak{a}^{\text{te}}$ durch $J(u_1, u_2, \ldots u_n)_{\mathfrak{a}}$ bezeichne und auf folgende Weise definire. Man denke sich $x_1, x_2, \ldots$ vermittelst der Gleichung (3.) durch $u_1, u_2, \ldots$ ausgedrückt und setze

$$J(u_1, u_2, \dots u_n)_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}} \int_{a_{2\mathfrak{b}-1}}^{x_{\mathfrak{b}}} \frac{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \cdot \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{13.}$$

mit der Bestimmung, dass x und $\sqrt{R(x)}$ bei jeder einzelnen Integration dieselben Werthe durchlaufen wie in den Gleichungen (1.).*) Auf diese Weise erklärt ist $J(u_1, u_2, \dots)_{\mathfrak{a}}$ eine für alle Werthe der Argumente $u_1, u_2, \dots$ völlig bestimmte, eindeutige Function. Drückt man $dx_1, dx_2, \dots$ durch $du_1, du_2, \dots$ aus, so ergiebt sich für $J(u_1, u_2, \dots u_n)_{\mathfrak{a}}$ der Ausdruck

$$\int \left(\frac{du_{\mathfrak{a}}}{\mathrm{sn}^2(u_1, u_2, \dots)_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\mathrm{sn}^2(u_1, u_2, \dots)_{\mathfrak{b}}}{\mathrm{sn}^2(u_1, u_2, \dots)_{\mathfrak{a}}} \, \frac{e_{\mathfrak{b}}(a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1})\,du_{\mathfrak{b}} - e_{\mathfrak{a}}(a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{b}-1})\,du_{\mathfrak{a}}}{e_{\mathfrak{a}}(a_{2\mathfrak{a}-1} - a_{2\mathfrak{b}-1})} \right), \tag{14.}$$

wo für $\mathfrak{b}$ der Werth $\mathfrak{a}$ auszuschliessen ist. Durch diese Gleichung ist $J(u_1, u_2, \dots)_{\mathfrak{a}}$ vollständig bestimmt, wenn noch hinzugefügt wird, dass in der Entwickelung dieser Function nach fallenden Potenzen von $u_{\mathfrak{a}}$ kein von

---

*) In der Formel (13.) und in einigen folgenden habe ich mir erlaubt, die allgemein eingeführte Bezeichnung für ein bestimmtes Integral in einem Sinne zu gebrauchen, in welchem sie auch dann noch anwendbar bleibt, wenn die Function unter dem Integral-Zeichen an einer der Grenzen der Integration oder an beiden unendlich wird. Es sei nämlich $F(x)$ eine Function von x, die für alle Werthe dieser Veränderlichen innerhalb eines gegebenen Intervalls, dessen Grenzen a, b sind, endlich bleibt, und es lasse sich dieselbe für alle Werthe von x in der Nähe von a durch eine Reihe von der Form

$$\mathrm{S} A (x-a)^m,$$

so wie für die Werthe von x in der Nähe von b durch eine Reihe

$$\mathrm{S} B (x-b)^n$$

darstellen. Sind nun α, β zwei bestimmte Werthe von x innerhalb des gegebenen Intervalls, der erste in der Nähe von a, der andere in der Nähe von b angenommen, so kann man, wenn unter den Exponenten m, n keiner gleich -1 ist (auf welchen Fall ich mich hier beschränke), setzen

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = C + \mathrm{S}\frac{1}{n+1} B(\beta-b)^{n+1} - \mathrm{S}\frac{1}{m+1} A(\alpha-a)^{m+1},$$

wo C einen von α, β unabhängigen Werth hat. Wenn die Exponenten $m+1, n+1$ sämmtlich positiv sind, so ist

$$C = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Weil aber C auch dann noch einen bestimmten endlichen Werth hat, wenn einige der Exponenten $m+1$, $n+1$ negativ sind, so scheint es mir gestattet und angemessen zu sein, die Formel $\int_a^b F(x)\,dx$ allgemein als das constante Glied in der Entwickelung von $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx$ nach Potenzen von $(\alpha - a)$ und $(\beta - b)$ zu definiren. In diesem Sinne ist im Verlauf der Abhandlung die Bezeichnung $\int_a^b$ überall aufzufassen.

$u_1, u_2, \dots u_n$ unabhängiges Glied vorkommen darf. Für den Fall der elliptischen Functionen hat man

$$J(u) = \int \frac{du}{\mathrm{sn}^2 u},$$

während man gewöhnlich die elliptischen Integrale zweiter Art auf die Function $\int_0 \mathrm{dn}^2 u\,.\,du$ zurückführt, was keinen wesentlichen Unterschied macht. Für die Abel'schen Integrale zweiter Art haben aber die hier gewählten Formen den Vorzug, dass sich viele Formeln einfacher gestalten, als es der Fall sein würde, wenn man, was ohne Schwierigkeit angeht, Functionen von $u_1, u_2, \dots$ einführte, welche dem angeführten elliptischen Integral conform sind.

Man bezeichne nun

$$\begin{aligned} &\int_{a_{2\mathfrak{b}-1}}^{a_{2\mathfrak{b}}} \frac{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \\ &\int_{a_{2\mathfrak{b}}}^{a_{2\mathfrak{b}+1}} \frac{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad \frac{\bar{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{i} \end{aligned} \tag{15.}$$

und

$$\sum_{\mathfrak{c}=\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}=n} \bar{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \bar{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \bar{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}+1} + \cdots + \bar{J}_{\mathfrak{a},n} \quad \text{durch} \quad J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \tag{16.}$$

so erhält man $2 \,.\, n^2$ bestimmte Integrale $J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, welche man in Erweiterung der Legendre'schen Benennung vollständige Abel'sche Integrale zweiter Art nennen kann, und die in der Theorie der Abel'schen Transcendenten dieselbe Bedeutung haben wie die Grössen

$$K - E,\ E',$$

auf welche sie sich für $n = 1$ reduciren, für die elliptischen Functionen. Während z. B.

$$J(u) = \int_0 \frac{du}{\mathrm{sn}^2 u} = \int_0 k^2 \,\mathrm{sn}^2 u\,.\,du - \frac{\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{\mathrm{sn}\, u} = u - \int_0 \mathrm{dn}^2 u\,.\,du - \frac{\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{\mathrm{sn}\, u},$$

und daher, wenn $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ganze Zahlen sind,

$$J(u + 2\mathfrak{m}K + 2\mathfrak{n}K'i) = J(u) + 2\mathfrak{m}(K - E) + 2\mathfrak{n}E'i$$

ist, so erhält man, wenn man setzt

$$
(17.)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_{\mathfrak{a}} &= \sum_{\mathfrak{b}} (\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}} K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \mathfrak{n}_{\mathfrak{b}} K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} i) \\ \varepsilon_{\mathfrak{a}} &= \sum_{\mathfrak{b}} (\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \mathfrak{n}_{\mathfrak{b}} J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} i): \end{aligned}\right.
$$

$$
(18.)\qquad J(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \ldots u_n + 2\omega_n)_{\mathfrak{a}} = J(u_1, u_2, \ldots u_n)_{\mathfrak{a}} + 2\varepsilon_{\mathfrak{a}}.
$$

Nach diesen vorläufigen Auseinandersetzungen, deren nähere Begründung einer ausführlichen Bearbeitung der Abel'schen Transcendenten vorbehalten bleiben muss, werde ich nun nachweisen, dass die Gleichungen (3, 4) des § 1 eine Reihe einfacher Relationen unter den $4 . n^2$ Grössen $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ enthalten.

§ 4.

Es seien a, b, c, d irgend vier Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, und es werde

$$
\sum_{\mathfrak{a}} \left(\frac{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}{y - a_{2\mathfrak{a}-1}} - \frac{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \right) \frac{F_{\mathfrak{a}}(x) F_{\mathfrak{a}}(y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} \text{ durch } U,
$$

$$
\int_a^b \int_c^d U\, dx\, dy \text{ durch } T
$$

bezeichnet. Substituirt man für $F_{\mathfrak{a}}(x)$, $F_{\mathfrak{a}}(y)$ die in § 3 gegebenen Ausdrücke, so erhält man zunächst

$$
U = \frac{1}{4} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})} \left(\frac{1}{(a_{2\mathfrak{a}-1} - x)^2 (a_{2\mathfrak{a}-1} - y)} - \frac{1}{(a_{2\mathfrak{a}-1} - y)^2 (a_{2\mathfrak{a}-1} - x)} \right) \frac{P(x) P(y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}
$$

und daraus, indem man

$$
\sum_{\mathfrak{a}} \frac{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{(a_{2\mathfrak{a}-1} - x)(a_{2\mathfrak{a}-1} - y) P'(a_{2\mathfrak{a}-1})} \text{ durch } V
$$

bezeichnet,

$$
U = \frac{1}{4} \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dV}{dy} \right) \frac{P(x) P(y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}.
$$

Es ist aber, nach bekannten Sätzen über die Zerlegung der Brüche,

$$
\frac{Q(t)}{(t-x)(t-y) P(t)}
$$

$$
= \frac{Q(x)}{(x-y) P(x)} \cdot \frac{1}{t-x} - \frac{Q(x)}{(x-y) P(y)} \cdot \frac{1}{t-y} + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{(a_{2\mathfrak{a}-1} - x)(a_{2\mathfrak{a}-1} - y) P'(a_{2\mathfrak{a}-1})} \cdot \frac{1}{t - a_{2\mathfrak{a}-1}}.
$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von

t und setzt die beiden Coefficienten von t^{-1} einander gleich, so ergiebt sich

$$
V = 1 - \frac{Q(x)}{(y-x) P(x)} + \frac{Q(y)}{(x-y) P(y)}.
$$

Setzt man daher $\frac{Q(x)}{P(x)} = N(x)$, wo dann $R(x) = P^2(x) . N(x)$ wird, so ist

$$
V = 1 - \frac{N(x) - N(y)}{x - y},
$$

und daher

$$
U = \left(\frac{1}{2} \frac{N(x) - N(y)}{(x-y)^2} - \frac{1}{4} \frac{N'(x) + N'(y)}{x - y} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{N(x)}\sqrt{N(y)}}.
$$

Dieser Ausdruck für U lässt sich (s. § 1 im Anfange) umgestalten in den folgenden:

$$
2U = \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{N(x)}}{(y-x)\sqrt{N(y)}} - \frac{d}{dy} \frac{\sqrt{N(y)}}{(x-y)\sqrt{N(x)}}.
$$

Es ist aber

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{N(x)}}{(y-x)\sqrt{N(y)}} &= \frac{P(y)}{P(x)} \frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} \\
&= \frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} + \frac{P(y) - P(x)}{y - x} \frac{\sqrt{R(x)}}{P(x)\sqrt{R(y)}}, \\
\frac{\sqrt{N(y)}}{(x-y)\sqrt{N(x)}} &= \frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}} + \frac{P(x) - P(y)}{x - y} \frac{\sqrt{R(y)}}{P(y)\sqrt{R(x)}},
\end{aligned}
$$

und daher, wenn man

$$
\frac{P(x) - P(y)}{x - y} = G(x, y)
$$

setzt,

$$
\begin{aligned}
2U = {} & \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} - \frac{d}{dy} \frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}} \\
& + \frac{d}{dx} \frac{G(x,y)\sqrt{R(x)}}{P(x)\sqrt{R(y)}} - \frac{d}{dy} \frac{G(x,y)\sqrt{R(y)}}{P(y)\sqrt{R(x)}}.
\end{aligned}
$$

Bezeichnen nun α, β zwei bestimmte Werthe von x in dem Intervall (a, b), und zwar der erste in der Nähe von a, der andere in der Nähe von b gelegen, und ebenso γ, δ zwei Werthe von y in dem Intervall (c, d), der erste in der Nähe von c, der andere in der Nähe von d gelegen, so ergiebt sich aus der vorstehenden Formel mit Beachtung der im § 1 bewiesenen Gleichung

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}}-\frac{d}{dy}\,\frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}}=\frac{2F(x,y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}};$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta U\,dx\,dy &= \int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}\\ &+\frac{1}{2}\int_\gamma^\delta\left(\frac{G(\beta,y)\sqrt{R(\beta)}}{P(\beta)\sqrt{R(y)}}-\frac{G(\alpha,y)\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)\sqrt{R(y)}}\right)dy\\ &-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left(\frac{G(x,\delta)\sqrt{R(\delta)}}{P(\delta)\sqrt{R(x)}}-\frac{G(x,\gamma)\sqrt{R(\gamma)}}{P(\gamma)\sqrt{R(x)}}\right)dx.\end{aligned}$$

Denkt man sich jetzt beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von $\alpha-a$, $\beta-b$, $\gamma-c$, $\delta-d$ entwickelt, so ist das constante Glied auf der linken Seite die oben durch T bezeichnete Grösse; auf der rechten Seite aber findet sich als constantes Glied das Doppel-Integral

$$\int_a^b\int_c^d\frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}.$$

Mithin

$$(1.)\qquad \int_a^b\int_c^d\frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}=\int_a^b\int_c^d U\,dx\,dy=$$

$$\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\int_a^b\frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\int_c^d\frac{a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}{y-a_{2\mathfrak{a}-1}}\,\frac{F_{\mathfrak{a}}(y)\,dy}{\sqrt{R(y)}}-\int_c^d\frac{F_{\mathfrak{a}}(y)\,dy}{\sqrt{R(y)}}\int_a^b\frac{a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}{x-a_{2\mathfrak{a}-1}}\,\frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\right\}.$$

Nimmt man nun

$$a=a_{2\mathfrak{b}-1},\quad b=a_{2\mathfrak{b}},\quad c=a_{2\mathfrak{c}-1},\quad d=a_{2\mathfrak{c}},$$

so erhält man aus der vorstehenden Gleichung (nach § 1, Gl. 3)

$$(2.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}})=0.\text{*)}$$

Nimmt man

$$a=a_{2\mathfrak{b}},\quad b=a_{2\mathfrak{b}+1},\quad c=a_{2\mathfrak{c}},\quad d=a_{2\mathfrak{c}+1},$$

*) Wenn in einer Formel, wie hier, mehrere deutsche Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots$ vorkommen, welche, wie schon oben bemerkt worden ist, hier ausschliesslich ganze Zahlen, aus der Reihe $1, 2, 3, \dots n$ genommen, bezeichnen sollen, so bezieht sich das Summenzeichen auf denjenigen von ihnen, der unter dem Σ ausdrücklich angezeigt ist, und der dann sämmtliche in der angegebenen Reihe enthaltenen Werthe durchlaufen muss, während jeder andere einen stehenden Werth hat. Sind unter dem Summenzeichen mehrere Buchstaben bezeichnet, so muss jeder derselben, unabhängig von den übrigen, dieselben Werthe durchlaufen.

so ergiebt sich

$$(3.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}(\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}})=0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ für $\mathfrak{c}$ und summirt von $\mathfrak{m}=\mathfrak{b}$ bis $\mathfrak{m}=n$, und von $\mathfrak{n}=\mathfrak{c}$ bis $\mathfrak{n}=n$, so findet man

$$(4.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}(K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}})=0.$$

Nimmt man ferner

$$a=a_{2\mathfrak{b}-1},\quad b=a_{2\mathfrak{b}},\quad c=a_{2\mathfrak{b}},\quad d=a_{2\mathfrak{b}+1},$$

so findet sich (nach § 1, Gl. 4)

$$(5.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})=\frac{\pi}{2},$$

und für

$$a=a_{2\mathfrak{b}-2},\quad b=a_{2\mathfrak{b}-1},\quad c=a_{2\mathfrak{b}-1},\quad d=a_{2\mathfrak{b}}:$$

$$(6.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}(\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1}J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}-\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1}K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})=\frac{\pi}{2}$$

oder

$$(7.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1})=-\frac{\pi}{2}.$$

Nimmt man endlich

$$a=a_{2\mathfrak{b}-1},\quad b=a_{2\mathfrak{a}},\quad c=a_{2\mathfrak{c}},\quad d=a_{2\mathfrak{c}+1},$$

und es ist entweder $\mathfrak{c}>\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{c}<\mathfrak{b}-1$, so giebt die Gleichung (3.) des § 1

$$(8.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}})=0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{c}$ und summirt von $\mathfrak{m}=\mathfrak{c}$ bis $\mathfrak{m}=n$, so erhält man, wenn $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{b}$ verschieden ist,

$$(9.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}})=0.$$

Denn wenn $\mathfrak{b}>\mathfrak{a}$ ist, so ist jedes Glied, das bei der Summation in Betracht kommt, nach (9.) gleich Null; wenn aber $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ ist, so sind nur diejenigen Glieder nicht gleich Null, welche man für $\mathfrak{m}=\mathfrak{b}-1$ und $\mathfrak{m}=\mathfrak{b}$ erhält; deren Summe aber ist in Folge der Gleichungen (5, 6, 7) ebenfalls gleich Null.

Setzt man in der Gleichung (9.) $\mathfrak{c}=\mathfrak{b}+1$ und addirt alsdann zu ihr die Gleichung (5.), und bemerkt, dass $K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}=\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}+K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}+1}$, $J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}=\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}+J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}+1}$ ist, so erhält man

$$(10.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})=\frac{\pi}{2}.$$

§ 5.

Die Gleichungen (2, 4, 9, 10) des vorhergehenden §, welche hier noch einmal zusammengestellt werden mögen:

$$(1.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}} (K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} - J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}) = 0,$$

$$(2.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}} (K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} - J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}) = 0,$$

$$(3.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}} (K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} - J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}) = 0, \text{ wenn } \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{b},$$

$$(4.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}} (K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) = \frac{\pi}{2},$$

enthalten eine Reihe von $(2n^2-n)$ Relationen unter den $4n^2$ Grössen $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$. Die erste Gleichung nämlich, deren linke Seite identisch gleich Null wird, wenn man $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$ nimmt, und nur ihr Zeichen wechselt, wenn diese beiden Indices unter einander vertauscht werden, giebt $\frac{n(n-1)}{2}$ Relationen; eben so viele die zweite; die dritte aber giebt deren $n(n-1)$, und die vierte n, alle zusammen also enthalten $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) + n = 2n^2 - n$ Relationen.

Ich werde jetzt aus diesen Relationen noch einige andere herleiten, welche bei den in der Einleitung angedeuteten Reihen-Entwickelungen der Abel'schen Transcendenten gebraucht werden.

Es bezeichne G die Determinante des Systems

$$\begin{array}{cccc} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n}, \end{array}$$

und $\overline{G}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ den Coefficienten von $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ in dem Ausdrucke von G, so ist, wenn

$$(5.)\qquad G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \frac{\overline{G}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{G}$$

gesetzt wird,

$$(6.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{b}, \\ 1, & \text{wenn } \mathfrak{c} = \mathfrak{b}, \end{cases}$$

$$(7.)\qquad \sum_{\mathfrak{c}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} K_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a}, \\ 1, & \text{wenn } \mathfrak{b} = \mathfrak{a}. \end{cases}$$

Nun hat man (Gl. 1.)

$$\sum_{\mathfrak{c}} K_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}} J_{\mathfrak{c},\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{c}} K_{\mathfrak{c},\mathfrak{n}} J_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}},$$

also

$$\sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{c},\mathfrak{n}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}} G_{\mathfrak{b},\mathfrak{n}} K_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}} J_{\mathfrak{c},\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{n},\mathfrak{c},\mathfrak{m}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}} G_{\mathfrak{b},\mathfrak{n}} K_{\mathfrak{c},\mathfrak{n}} J_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}}.$$

Summirt man auf beiden Seiten in Bezug auf die einzelnen Indices in der Ordnung, in welcher sie unter dem Summenzeichen geschrieben stehen, so erhält man mit Hülfe der Gleichung (7.)

$$(8.)\qquad \sum_{\mathfrak{n}} G_{\mathfrak{b},\mathfrak{n}} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{m}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}} J_{\mathfrak{b},\mathfrak{m}}.$$

Setzt man daher

$$(9.)\qquad \sum_{\mathfrak{c}} G_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

so ist

$$(10.)\qquad F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}.$$

Multiplicirt man die Formel $G_{\mathfrak{c},\mathfrak{n}} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}$ mit $K_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}$ und summirt dann in Bezug auf $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{n}$, so findet man mit Hülfe der Gleichungen (9, 6)

$$(11.)\qquad J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}} F_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} K_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}.$$

Ferner ist (Gl. 3, 4)

$$\sum_{\mathfrak{m}} (K_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} J'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} - J_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{b}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \mathfrak{c} = \mathfrak{b}, \end{cases}$$

daher

$$\sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} (K_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} J'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} - J_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}}) = \frac{\pi}{2} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Aber

$$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} K_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} J'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} = J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

$$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} J_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{m}} F_{\mathfrak{m},\mathfrak{a}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}} F_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}},$$

also

$$(12.)\qquad J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \frac{\pi}{2} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{\mathfrak{c}} F_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}.$$

Endlich ist (Gl. 2.)

$$\sum_{\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} J'_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} J'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}},$$

und daher, wenn man $J'_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}}$ und $J'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}$ vermittelst der Formel (12.) ausdrückt, indem man das eine Mal $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und das andere Mal $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ schreibt, und bemerkt, dass

$$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}} F_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}} F_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}}$$

ist, weil man auf der rechten Seite dieser Gleichung $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{c}$ mit einander vertauschen und dann wieder $F_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}}$ für $F_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}}$ setzen darf,

$$\sum_{\mathfrak{c}} G_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}} G_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}}. \tag{13.}$$

Diese Gleichung ist besonders bemerkenswerth, weil in ihr nur Abel'sche Integrale der ersten Gattung vorkommen.

Bezeichnet man den Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung durch $H_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, wo dann

$$H_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = H_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \tag{14.}$$

ist, so erhält man noch

$$K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}} H_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} K_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}. \tag{15.}$$

Durch die hier entwickelten Formeln wird übrigens auch der Beweis geliefert, dass die $(2n^2-n)$ Gleichungen (1, 2, 3, 4) unabhängig von einander sind, d. h. dass keine von ihnen eine Folge der übrigen ist. Dies wird der Fall sein, wenn sich sämmtliche in denselben vorkommende $4n^2$ Grössen durch $(2n^2+n)$ andere, willkürlich angenommene, ausdrücken lassen.

Nimmt man nun aber die n^2 Grössen $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ willkürlich, die durch $F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $H_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ bezeichneten aber so an, dass den Bedingungs-Gleichungen (10, 14) Genüge geschieht, und drückt dann durch diese Grössen, deren Anzahl $(2n^2+n)$ ist, vermittelst der Formeln (11, 12, 15) $J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ aus, und substituirt die so erhaltenen Ausdrücke derselben in die Gleichungen (1, 2, 3, 4), so überzeugt man sich mit Hülfe der Relationen (6, 7) leicht, dass in jeder dieser Gleichungen die linke Seite identisch gleich Null wird.

Es ist bei den vorstehenden Entwickelungen ausdrücklich angenommen worden, dass $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$, die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, sämmtlich reell und ihrer Grösse nach geordnet seien. Gleichwohl behalten die gewonnenen Resultate unverändert und ohne Ausnahme ihre Gültigkeit, wenn auch diese Bedingungen nicht erfüllt sind; es bedarf alsdann nur einer geeigneten Modification der in § 1 getroffenen Bestimmungen hinsichtlich der Aufeinanderfolge der genannten Wurzeln und der Festsetzung desjenigen Werthes von $\sqrt{R(x)}$, der bei jeder einzelnen Integration genommen werden muss. Ich kann jedoch, des beschränkten Raumes wegen, in nähere Erörterungen über diesen Gegenstand nicht eingehen. Ebenso muss ich es mir versagen, über den in der Einleitung erwähnten Gebrauch der entwickelten Relationen auch nur andeutungsweise etwas Näheres anzugeben. Ich begnüge mich schliesslich — besonders um darauf hinzuweisen, dass auch die zuletzt gegebenen Entwicklungen nicht ohne Bedeutung sind — den allgemeinen Ausdruck der Hülfsfunctionen hinzustellen, auf welche die Abel'schen Transcendenten zurückgeführt werden können.

Es seien $t_1, t_2, \ldots t_n$ unbeschränkt veränderliche Grössen; $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ ganze Zahlen, von denen jede entweder gleich 0, oder gleich 1 zu nehmen ist, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ veränderliche ganze Zahlen, deren jede unabhängig von den übrigen jeden zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ enthaltenen Werth annehmen kann; man bezeichne ferner $\pi H_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ durch $\vartheta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $\frac{\pi}{2} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ durch $\eta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, und bilde die unendliche Reihe

$$\mathrm{S}\, e^{\sum(-\vartheta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\alpha_{\mathfrak{a}}-\frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{a}})(\alpha_{\mathfrak{b}}-\frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{b}}) + (\alpha_{\mathfrak{a}}-\frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{a}})(t_{\mathfrak{a}}+\mu_{\mathfrak{a}}\pi)i)},$$

wo sich das Summenzeichen $\sum$ auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, S aber auf $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ bezieht. Bezeichnet man die durch diese Reihe dargestellte Function von $t_1, t_2, \ldots$ durch $\mathrm{Hl}(t_1, t_2, \ldots t_n)$, so hat dieselbe je nach den verschiedenen Werthen, die man den Zahlen $\mu_{\mathfrak{a}}, \nu_{\mathfrak{a}}$ geben kann, 4^n verschiedene Formen, welche den Jacobischen Θ-Functionen, in welche sie für $n = 1$ übergehen, durchaus analog sind. Führt man nun statt $t_1, t_2, \ldots$ die Argumente $u_1, u_2, \ldots$ ein, indem man

$$t_{\mathfrak{a}} = \eta_{1,\mathfrak{a}} u_1 + \eta_{2,\mathfrak{a}} u_2 + \cdots + \eta_{n,\mathfrak{a}} u_n$$

setzt, so erhält man die erwähnten Hülfsfunctionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$, durch welche die von mir eingeführten Functionen $\mathrm{sn}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}$, $\mathrm{cn}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}$, $\mathrm{dn}(u_1, u_2, \ldots)$, und noch mehrere andere, mit diesen im Zusammenhange stehende, ausgedrückt werden können und zwar eine jede als ein Quotient zweier derselben. Das Nähere hierüber gedenke ich in der erforderlichen Ausführlichkeit in einem grössern Werke zu geben, welches ausser allgemeinen Untersuchungen über die Integrale algebraischer Functionen insbesondere die Grundzüge einer umfassenden Theorie der Abel'schen Transcendenten enthalten soll.

Braunsberg, 17. Juli 1849.

ZUR THEORIE DER ABEL'SCHEN FUNCTIONEN.

(Aus dem Crelle'schen Journal, Bd. 47.)

Seit mehreren Jahren mit der Theorie der Abel'schen Transcendenten mich beschäftigend, bin ich zu Ergebnissen gelangt, welche der Beachtung der Mathematiker nicht unwerth zu sein scheinen, und die ich in einer Reihe von Abhandlungen ausführlich zu entwickeln beabsichtige. Die erste dieser Abhandlungen, welche bereits vollständig ausgearbeitet ist, soll hauptsächlich die Aufgabe behandeln, die periodischen Functionen mehrerer Argumente, deren Grund-Eigenschaften, wie es zuerst Jacobi nachgewiesen hat, in dem Abel'schen Theorem über die hyper-elliptischen Integrale ausgesprochen sind, wirklich darzustellen; was dasselbe Problem ist, welches für die Functionen zweier Argumente bereits von Göpel und Rosenhain mit glänzendem Erfolge gelöset ist, hier aber ganz allgemein erledigt wird; auf einem Wege, der nicht nur gänzlich verschieden ist von dem, welchen die genannten Mathematiker eingeschlagen haben, sondern auch, wie ich schon jetzt behaupten darf, die Aussicht giebt, dass er für noch höhere Transcendenten zu ähnlichen Resultaten führen werde. Das Folgende ist eine kurze Uebersicht meiner Arbeit.

1.

Dem Systeme der Integralgleichungen, von welchem man, nach Jacobi, bei der Theorie der Abel'schen Transcendenten ausgehen muss, gebe ich folgende Form, welche ich als die einfachste und für die Behandlung geeignetste erkannt habe. Es sei

$$R(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2n})$$

eine ganze Function $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grades; wobei ich zunächst annehme, es seien die Grössen $a_0, a_1, \dots a_{2n}$ sämmtlich reell und so geordnet, dass

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_{2n}$$

ist.

Ich zerlege nun $R(x)$ in die zwei Factoren

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2n-1}) \quad \text{und} \quad Q(x) = (x-a_0)(x-a_2)\dots(x-a_{2n}),$$

und stelle, indem ich $u_1, u_2, \dots u_n$ als unbeschränkt veränderliche Grössen, $x_1, x_2, \dots x_n$ aber als Functionen derselben betrachte, den Zusammenhang zwischen diesen $2n$ Veränderlichen durch nachstehende n Gleichungen dar:

$$(1.)\left\{\begin{aligned}
u_1 &= \int_{a_1}^{x_1}\frac{P(x)}{x-a_1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\int_{a_3}^{x_2}\frac{P(x)}{x-a_1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\dots+\int_{a_{2n-1}}^{x_n}\frac{P(x)}{x-a_1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},\\
u_2 &= \int_{a_1}^{x_1}\frac{P(x)}{x-a_3}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\int_{a_3}^{x_2}\frac{P(x)}{x-a_3}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\dots+\int_{a_{2n-1}}^{x_n}\frac{P(x)}{x-a_3}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n &= \int_{a_1}^{x_1}\frac{P(x)}{x-a_{2n-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\int_{a_3}^{x_2}\frac{P(x)}{x-a_{2n-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\dots+\int_{a_{2n-1}}^{x_n}\frac{P(x)}{x-a_{2n-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.
\end{aligned}\right.$$

Nun begründe ich, mit Hülfe des Abel'schen Theorems, ausführlich den der Hauptsache nach bereits von Jacobi ausgesprochenen Satz, welchen ich als Fundament der ganzen Theorie betrachte; nämlich, dass zwar für gegebene Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$ die Grössen $u_1, u_2, \dots u_n$ unendlich viele verschiedene Werthe haben, umgekehrt aber, wenn $u_1, u_2, \dots u_n$ gegeben sind, die Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$, so wie auch die zugehörigen Werthe von $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \dots \sqrt{R(x_n)}$, völlig bestimmt sind. Und zwar sind $x_1, x_2, \dots x_n$ die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten völlig bestimmte eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen Grössen $u_1, u_2, \dots u_n$ sind, während eine zweite ganze Function von x, deren Coefficienten eben solche Functionen von $u_1, u_2, \dots u_n$ sind, für $x = x_1, x_2, \dots x_n$ die zugehörigen Werthe von $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \dots \sqrt{R(x_n)}$ giebt.

Hiernach kann jeder symmetrische rationale Ausdruck von $x_1, x_2, \dots x_n$ als eine eindeutige Function von $u_1, u_2, \dots u_n$ betrachtet werden. Namentlich

aber zeigt es sich, dass

$$(a_\alpha - x_1)(a_\alpha - x_2)\dots(a_\alpha - x_n),$$

(wo α eine der Zahlen $0, 1, \dots 2n$ bedeutet) das Quadrat einer solchen Function ist. Ich bezeichne demgemäss, indem ich die grösseste in $\frac{1}{2}\alpha$ enthaltene Zahl durch $\bar{\alpha}$ ausdrücke und

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = L(x)$$

setze,

$$(2.)\qquad \frac{\sqrt{(-1)^{\bar{\alpha}} L(a_\alpha)}}{\sqrt[4]{(-1)^\alpha R'(a_\alpha)}} \quad \text{durch} \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_n)_\alpha$$

und nenne diese so definirten $(2n+1)$ Grössen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_1$ u. s. w. Abel'sche Functionen, indem sie es sind, die den elliptischen Functionen $\sin\mathrm{am}\, u$, $\Delta\mathrm{am}\, u$ vollkommen entsprechen. In Reihen nach Potenzen von $u_1, u_2, \dots u_n$ entwickelt, haben sie folgende Gestalt:

$$(3.)\qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_{2\mathfrak{a}-1} = \sqrt[4]{\frac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}}\cdot\{u_{\mathfrak{a}} + (u_1, u_2, \dots)_3 + (u_1, u_2, \dots)_5 + \cdots\},$$

$$(4.)\qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_{2\mathfrak{b}} = \sqrt[4]{\frac{P(a_{2\mathfrak{b}})}{Q'(a_{2\mathfrak{b}})}}\cdot\{1 + (u_1, u_2, \dots)_2 + (u_1, u_2, \dots)_4 + \cdots\}.$$

In diesen Formeln bedeutet $\mathfrak{a}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots n$; $\mathfrak{b}$ irgend eine der Zahlen $0, 1, \dots n$; und durch $(u_1, u_2, \dots)_\alpha$ wird eine ganze homogene Function α^{ten} Grades von $(u_1, u_2, \dots u_n)$ bezeichnet. Ich bemerke überhaupt, dass im Folgenden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, so wie auch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$ eine der Zahlen $1, 2, \dots n$; $\mathfrak{b}$ dagegen eine der Zahlen $0, 1, \dots n$ bedeuten soll. Ferner ist zu bemerken, dass überall, wo, hier und im Folgenden, die Wurzel (2^{ten} oder 4^{ten} Grades) eines positiven, aus den Differenzen $a_0 - a_1$, $a_0 - a_2$, $\dots$ $a_1 - a_2$, $a_1 - a_3$ u. s. w. durch Multiplication und Division gebildeten Ausdrucks vorkommt, stets deren positiver Werth genommen werden soll.

Die vorstehenden Reihen können nicht für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots$ convergent sein. Gleichwohl gehe ich von ihnen aus, indem ich die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_\alpha$ zunächst nur für solche Werthe von $u_1, u_2, \dots$ definire, für welche die aufgestellten Reihen sämmtlich convergiren. Darauf entwickle ich die Haupt-Eigenschaft der so erklärten Functionen: nämlich, dass sich die Werthe derselben, wenn an die Stelle von $u_1, u_2, \dots$ zweitheilige Grössen $u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots$ treten, rational durch $\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_1, \dots$

$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2n}$; $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_1$, $\ldots$ $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_{2n}$ und durch deren partielle Differential-Coefficienten erster Ordnung ausdrücken lassen; worauf ich dann mit Hülfe der so gefundenen Formeln zeige, dass es eindeutige, für alle Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ existirende Functionen von $u_1, u_2, \ldots$ giebt, die mit den durch die obigen Reihen dargestellten Functionen für solche Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ übereinstimmen, für welche dieselben convergiren, und die ich dann fortan unter $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1$, $\ldots$ verstehe. Dies vorausgesetzt, sind die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche für beliebige Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_n$ die Gleichungen (1.) befriedigen, die n Wurzeln der folgenden Gleichung:

$$(5.)\qquad \frac{e_1^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_1}{a_1 - x} + \frac{e_3^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_3}{a_3 - x} + \cdots + \frac{e_{2n-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2n-1}}{a_{2n-1} - x} = 1,$$

in welcher

$$\sqrt{\frac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}} = e_{2\mathfrak{a}-1}$$

gesetzt ist. Ferner hat man:

$$(6.)\qquad \sqrt{R(x_\mathfrak{a})} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \left\{ \frac{e_{2\mathfrak{b}-1}^2\, P(x_\mathfrak{a})\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}-1}}{a_{2\mathfrak{b}-1} - x_\mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}-1}}{\partial u_\mathfrak{c}} \right\}. \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots n$$

Uebrigens lassen sich statt der Formeln (5, 6) andere von ganz ähnlicher Gestalt aufstellen, in welchen n beliebige von den Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1$, $\ldots$ vorkommen. Indem man ferner die Differentiale dieser Functionen durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausdrückt, findet man Veranlassung, noch eine Reihe anderer Functionen einzuführen; nämlich die durch die Formel

$$(7.)\qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta} = \sqrt{\pm(a_\alpha - a_\beta)}\,.\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\beta \cdot \sum_\mathfrak{a} \left\{ \frac{\sqrt{R(a_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a} - a_\alpha)(x_\mathfrak{a} - a_\beta)\,L'(x_\mathfrak{a})} \right\}$$

dargestellten, wo das obere oder das untere Zeichen von $(a_\alpha - a_\beta)$ gilt, jenachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist. (α, β bedeuten je zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots 2n$.) Man hat alsdann

$$(8.)\qquad \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\partial u_\mathfrak{a}} = -\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2}{\sqrt{\pm(a_\alpha - a_{2\mathfrak{a}-1})}} \cdot \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha, 2\mathfrak{a}-1},$$

vorausgesetzt, dass $\alpha \gtrless 2\mathfrak{a} - 1$ ist. Aus dieser Gleichung ergiebt sich die bemerkenswerthe Relation

$$(9.)\qquad e_{2\mathfrak{a}-1}^2 \frac{\partial\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{\partial u_\mathfrak{c}} = e_{2\mathfrak{c}-1}^2 \frac{\partial\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{c}-1}}{\partial u_\mathfrak{a}}.$$

Zwischen den Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$ finden übrigens zahlreiche Relationen Statt. Insbesondere sind folgende zu bemerken:

$$(10.)\qquad \frac{\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}}}{e_{2\mathfrak{b}}^2} = 1 - \sum \left\{ \frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{a}-1}} \right\}, \quad \mathfrak{a} = 1, \ldots n$$

$$(11.)\qquad \pm\frac{\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}, 2\mathfrak{c}-1}}{e_{2\mathfrak{b}-1}^2} = \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{c}-1} + \frac{e_{2\mathfrak{c}-1}^2}{a_{2\mathfrak{b}} + a_{2\mathfrak{c}-1}}$$
$$+ \sum_{\mathfrak{a} = 1, \ldots \mathfrak{c}-1} \left\{ \frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1, 2\mathfrak{c}-1}}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{a}-1}} \right\} - \sum_{\mathfrak{a} = \mathfrak{c}+1, \ldots n} \left\{ \frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1, 2\mathfrak{c}-1}}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{a}-1}} \right\}.$$

In der letzteren Gleichung gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem $2\mathfrak{c} - 1$ kleiner oder grösser als $2\mathfrak{b}$ ist. Mittels der Gleichungen (8.) bis (11.) lässt sich auch eine algebraische Gleichung zwischen jedem der $(2n+1)n$ Differential-Coefficienten erster Ordnung der Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_1, \ldots)_\alpha$ und je n der letztern ableiten.

2.

Nunmehr führe ich diejenigen Grössen ein, welche den sogenannten vollständigen elliptischen Integralen erster Art analog sind. Wenn x reell ist und zwischen den Grenzen $a_{\alpha-1}$ und a_α liegt, so ist

$$R(x) = (-1)^\alpha (a_0 - x) \ldots (a_{\alpha-1} - x)(x - a_\alpha) \ldots (x - a_{2n}),$$

und man kann daher

$$\sqrt{R(x)} = \pm i^\alpha \sqrt{a_0 - x} \ldots \sqrt{a_{\alpha-1} - x}\,.\,\sqrt{x - a_\alpha} \ldots \sqrt{x - a_{2n}}$$

setzen, wo die Wurzeln rechts sämmtlich positiv zu nehmen sind.

Ferner ist, wenn x zwischen $+\infty$ und a_0 liegt:

$$\sqrt{R(x)} = \pm \sqrt{x - a_0} \ldots \sqrt{x - a_{2n}},$$

und wenn x zwischen a_{2n} und $-\infty$ enthalten ist:

$$\sqrt{R(x)} = \pm i^{2n+1} \sqrt{a_0 - x} \ldots \sqrt{a_{2n} - x}.$$

Wenn nun a und b zwei reelle Grössen sind, so bezeichne ich durch

$$\overline{\int_a^b} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

wo $F(x)$ eine rationale Function von x bedeuten soll, denjenigen besonderen Werth der Formel $\int_a^b \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$, welchen sie dadurch erhält, dass bei der Integration $\sqrt{R(x)}$ stets mittels der obigen Formeln unter Anwendung des obern Zeichens bestimmt wird. Dies vorausgesetzt, werde

$$\overline{\int_{a_\alpha}^{\infty}} \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad \overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}}$$

bezeichnet. Dann gilt die Relation:

$$(12.) \qquad \overset{0}{K}_{\mathfrak{a}} - \overset{1}{K}_{\mathfrak{a}} + \overset{2}{K}_{\mathfrak{a}} - \cdots + \overset{2n}{K}_{\mathfrak{a}} = 0, \quad \text{für } \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n.$$

Ferner sei

$$(13.) \quad K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \overset{2\mathfrak{c}-1}{K}_{\mathfrak{a}} - \overset{2\mathfrak{c}}{K}_{\mathfrak{a}} = \overline{\int_{a_{2\mathfrak{c}-1}}^{a_{2\mathfrak{c}}}} \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{R(x)}} = -\int_{a_{2\mathfrak{c}-1}}^{a_{2\mathfrak{c}}} \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}} \cdot \frac{dx}{2(a_{2\mathfrak{a}-1}-x)}$$

$$i\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \overset{2\mathfrak{c}-2}{K}_{\mathfrak{a}} - \overset{2\mathfrak{c}-1}{K}_{\mathfrak{a}} = \overline{\int_{a_{2\mathfrak{c}-2}}^{a_{2\mathfrak{c}-1}}} \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{R(x)}},$$

also

$$(14.) \qquad \overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = -\int_{a_{2\mathfrak{c}-2}}^{a_{2\mathfrak{c}-1}} \sqrt{\frac{-P(x)}{Q(x)}} \frac{dx}{2(x-a_{2\mathfrak{a}-1})},$$

wo bei der ersten Integration $\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$, und bei der andern $\sqrt{\frac{-P(x)}{Q(x)}}$ positiv zu nehmen ist. Dann findet sich

$$(15.) \qquad \begin{cases} \overset{0}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},1} + K_{\mathfrak{a},2} + \cdots + K_{\mathfrak{a},n} \\ K_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},1} + K_{\mathfrak{a},2} + \cdots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} \\ \overset{2}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},2} + K_{\mathfrak{a},3} + \cdots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} \\ \overset{3}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},2} + K_{\mathfrak{a},3} + \cdots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},2} \\ \overset{4}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},3} + K_{\mathfrak{a},4} + \cdots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{2n}{K}_{\mathfrak{a}} = -i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},2} - \cdots - i\overline{K}_{\mathfrak{a},n}. \end{cases}$$

Ein besonderer Fall des Abel'schen Theorems führt sodann zu den folgenden Relationen, in welchen α, β, γ Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots 2n$ bedeuten, und mit dem Symbol $\alpha|\beta$ die Zahl Null bezeichnet wird, wenn $\alpha < \beta$, hingegen die Zahl 1, wenn $\alpha > \beta$ ist:

$$(16.) \quad \mathrm{al}(u_1 + \overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\alpha-2\bar{\alpha}}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha}, \qquad \mathrm{al}(u_1 - \overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\alpha-2\bar{\alpha}}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha},$$

$$(17.) \quad \mathrm{al}(u_1 + \overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\beta|\alpha}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\beta}, \qquad \mathrm{al}(u_1 - \overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{-i^{\beta|\alpha}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\beta}.$$

Hieraus lässt sich

$$(18.) \qquad \begin{cases} \mathrm{al}(u_1 + 2\overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = +\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha \\ \mathrm{al}(u_1 + 2\overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = -\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha, \quad \text{wenn } \beta \gtrless \alpha, \end{cases}$$

und wenn man

$$K_{\mathfrak{a}} = \mu_0 \overset{0}{K}_{\mathfrak{a}} + \mu_1 \overset{1}{K}_{\mathfrak{a}} + \cdots + \mu_{2n} \overset{2n}{K}_{\mathfrak{a}},$$
$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{2n}$$

setzt, wo unter μ_0, μ_1 u. s. w. beliebige ganze Zahlen zu verstehen sind,

$$(19.) \qquad \mathrm{al}(u_1 + 2K_1, \ldots)_\alpha = (-1)^{\mu-\mu_\alpha}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$$

folgern.

Es werde jetzt

$$(20.) \qquad K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \overline{K}_{\mathfrak{a},1} + \overline{K}_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$$

und

$$(21.) \qquad \begin{cases} \omega_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}_1 K_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{m}_2 K_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{m}_n K_{\mathfrak{a},n}, \\ \omega'_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{n}_1 K'_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2 K'_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{n}_n K'_{\mathfrak{a},n}, \end{cases}$$

gesetzt (unter $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ ebenfalls beliebige ganze Zahlen verstanden), so erhält man die Formeln

$$(22.) \qquad \mathrm{al}(u_1 + 2\omega_1, \ldots)_\alpha = (-1)^{\mathfrak{m}_\alpha - \bar{\alpha}}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha,$$

wo, wenn $\alpha = 0$ ist, $\mathfrak{m}_0 = 0$ genommen werden muss; und

$$(23.) \qquad \mathrm{al}(u_1 + 2\omega'_1 i, \ldots)_\alpha = (-1)^{\mathfrak{n}_n + \mathfrak{n}_{n-1} + \cdots + \mathfrak{n}_{\bar{\alpha}+1}}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha,$$

in welcher Formel für $\alpha = 2n$ der Factor von $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{2n}$ gleich 1 zu setzen ist. Ähnliche Relationen erhält man mit Hülfe der Formel (17.) für die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$.

3.

Die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ haben die Eigenthümlichkeit, dass sie sämmtlich für dieselben Beträge von $u_1, u_2, \ldots$ unendlich werden. Überdies kann jede derselben, wie es bei dem Beweise des in No. 1 angegebenen Hauptsatzes gezeigt wird, (wenn man für die absoluten Beträge von $u_1, u_2, \ldots$ bestimmte, übrigens beliebig weite Grenzen festsetzt, die sie nicht überschreiten sollen), als der Quotient zweier, nach ganzen positiven Potenzen von $u_1, u_2, \ldots$ fortschreitenden Reihen dargestellt werden, welche für alle Werthe dieser Veränderlichen innerhalb der bezeichneten Grenzen convergiren. Dies führt zu der Vermuthung, dass sich $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$, u. s. w. als Brüche mit gemeinschaftlichem Nenner darstellen lassen dürften, bei welchen dieser Nenner sowohl als die Zähler solche Functionen von $u_1, u_2, \ldots$ sind, die nie unendlich werden und sich nach ganzen positiven Potenzen ihrer Argumente in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen. Wenn sich wirklich $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = \frac{p_\alpha}{p}$ setzen lässt (unter p, p_α Functionen von der eben beschriebenen Art verstanden), so muss $d \log \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ aus zwei Theilen bestehen, deren einer für alle die Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ unendlich wird, für welche $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = 0$ ist, der andere hingegen für alle diejenigen, welche $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ unendlich machen. Dasselbe ist der Fall für die höheren logarithmischen Differentiale von $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$. Angenommen nun, es ergebe sich

$$d^\mu \log \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = P_\alpha - P,$$

wo $P_\alpha = \infty$ wird, wenn $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = 0$, und $P = \infty$, wenn $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = \infty$, so kann man $d^\mu \log p_\alpha = P_\alpha$, $d^\mu \log p = P$ setzen; und da sich P_α, P durch $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$ u. s. w. ausdrücken lassen, also auch durch $p_0, p_1, \ldots p_{2n}, p$, so muss man auf diese Weise zu $2n+2$ Differential-Gleichungen für die genannten $2n+2$ Grössen gelangen.*)

Für die elliptischen Functionen ist die anzustellende Rechnung sehr leicht. Man hat nämlich, wenn $x = \sin \mathrm{am}\, u$ ist:

$$\frac{d^2 \log x}{du^2} = k^2 x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Setzt man nun $x = \frac{p_1}{p}$, so ergiebt sich

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} - \frac{d_2^2 \log p}{du^2} = k^2 \cdot \frac{p_1^2}{p^2} - \frac{p^2}{p_1^2}.$$

Diese Gleichung zerfälle man in zwei, indem man

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} = -\frac{p^2}{p_1^2}, \qquad \frac{d^2 \log p}{du^2} = -\frac{k^2 p_1^2}{p^2}$$

setzt. Nachdem nun vorher gezeigt worden, dass sich $\sin \mathrm{am}\, u$, wenn der absolute Betrag von u eine beliebig angenommene Grenze nicht übersteigt, als Quotient zweier, nach ganzen Potenzen von u fortschreitenden und für alle unterhalb jener Grenze liegenden Werthe dieser Veränderlichen convergenten Reihen darstellen lässt, kann strenge bewiesen werden, dass sich die durch die beiden vorstehenden Differential-Gleichungen definirten Functionen p, p_1 nach ganzen positiven Potenzen von u in beständig (d. h. für alle reellen und imaginären Werthe von u) convergirende Reihen entwickeln lassen. Und wenn man die vier willkürlichen Constanten, die sie enthalten, so bestimmt, dass für $u = 0$

$$p = 1, \quad \frac{dp}{du} = 0, \quad p_1 = 0, \quad \frac{dp_1}{du} = 1$$

ist, so findet sich in der That $\sin \mathrm{am}\, u = \frac{p_1}{p}$. Ähnliche Entwicklungen giebt es für $\cos \mathrm{am}\, u$, $\Delta \mathrm{am}\, u$, und man gelangt auf diese Weise zu denjenigen Darstellungen der elliptischen Functionen, deren Abel in einem Briefe an Legendre (S. Crelle's Journal, B. 4, S. 244; vgl. B. 6, S. 76) erwähnt, ohne jedoch irgendwo die Ausführung, oder eine Andeutung seines Verfahrens gegeben zu haben. Von den Functionen p, p_1 aus gelangt man ferner leicht zu den Jacobi'schen Functionen $\Theta(u)$, $\mathrm{H}(u)$, und kann so die Entwicklung der elliptischen Functionen in allen Formen ausführen, ohne dieselbe auf die Transformations- oder Multiplications-Formeln zu gründen. Überhaupt lassen sich die obigen Differential-Gleichungen für p, p_1 zur Basis einer vollständigen Theorie der elliptischen Transcendenten machen; wie ich dies in einer bereits im Jahre 1840 von mir verfassten und damals der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu Münster übergebenen Abhandlung auch wirklich durchgeführt habe.

Für die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ habe ich nun eine ähnliche Rechnung versucht. Mit Hülfe der in Nr. 1 erwähnten Formeln, mittels welcher man $\mathrm{al}(u_1 + v_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1 + v_1, \ldots)_1$ u. s. w. durch die Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ und $v_1, v_2, \ldots v_n$ ausdrücken kann, lassen sich die zweiten Differentiale der Abel'schen Functionen ermitteln, und man erhält $d^2 \log \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ durch

$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$ u. s. w. und deren erste Differentiale ausgedrückt. Mit Benutzung der unter (8.) bis (11.) aufgestellten Relationen lassen sich dann diese Ausdrücke auf die vorhin angegebene Form bringen, und indem man

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_a = \frac{p_a}{p}, \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{a,\beta} = \frac{p_{a,\beta}}{p}$$

setzt, für die Grössen $p, p_a, p_{a,\beta}$ eine hinreichende Anzahl Differential-Gleichungen zweiter Ordnung finden; so wie es sich auch nachweisen lässt, dass die so definirten Functionen sich nach ganzen Potenzen von $u_1, u_2, \ldots$ in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen. Auf diese Weise begründete ich (gegen Ende 1847) den Satz, welchen ich als den wichtigsten zur Erreichung meines Zieles, eine für alle Werthe der Argumente $u_1, u_2, \ldots$ geltende Darstellung der Abel'schen Functionen aufzufinden, betrachten durfte: dass nämlich die Functionen $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_a$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{a,\beta}$ in der Form von Brüchen mit gemeinschaftlichem Nenner sich darstellen lassen, in welchen die Zähler und der Nenner wesentlich den Character ganzer Functionen haben, indem sie für alle (reellen und imaginären) Werthe der Argumente $u_1, u_2, \ldots$ existiren und sich nach ganzen positiven Potenzen derselben in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen. Indem ich nun ferner auf die so gewonnenen Hülfsfunctionen genau dasselbe Verfahren anwandte, welches mich von den oben erwähnten Functionen, durch welche ich die elliptischen Functionen ausgedrückt hatte, zu den sogenannten Θ-Functionen geführt, gelangte ich auf einem, alle Willkürlichkeit ausschliessenden Wege, zu den ebenso einfachen als durch ihre Form ausgezeichneten Reihen, auf welche, für $n = 2$, schon vor mir Göpel und Rosenhain die Abel'schen Functionen zweier Argumente zurückgeführt hatten.

Die zur Erlangung der angegebenen Resultate erforderlichen Rechnungen sind indess nicht ohne Weitläufigkeit. Ich versuchte daher, denselben Grundgedanken verfolgend, auf einem einfacheren Wege den Zweck zu erreichen. Es gelang mir dies, indem ich gleich von Anfang an auch die Abel'schen Integrale zweiter und dritter Art mit in Betracht zog und dieselben durch $u_1, u_2, \ldots u_n$ ausdrückte; in ähnlicher Weise, wie es bei den entsprechenden elliptischen Integralen geschieht.

Göpel's Abhandlung erschien zu der Zeit, als ich mit diesen Untersuchungen beschäftigt war. Seine Resultate sowohl, als sein Verfahren, sind

nicht so einfach, als sie, auch bei dem von ihm gewählten Wege, sein konnten. Von Rosenhain's Arbeit, die erst nach Vollendung der meinigen veröffentlicht worden, kenne ich bis jetzt nur die in diesem Journal aus Briefen an Jacobi mitgetheilten Notizen. So viel daraus zu entnehmen, stimmen für den von ihm behandelten Fall ($n = 2$) seine Resultate mit den meinigen, auf durchaus verschiedenem Wege ermittelten, vollkommen überein. Ich glaube aber nicht, dass sich nach den Methoden beider Mathematiker die Abel'schen Functionen von höherer als der ersten Ordnung werden behandeln lassen. Jacobi hat bereits bemerkt, dass schon für $n = 3$ die verallgemeinerten Θ-Functionen mehr wesentliche Constanten enthalten, als die Abel'schen Functionen dreier Argumente. Es müssen daher unter diesen Constanten bestimmte Bedingungsgleichungen stattfinden, wenn die betreffenden Reihen zu Abel'schen Functionen führen sollen. Ich habe nun zwar diese Relationen für jeden Werth von n gefunden, zweifle aber, ob dies, wenn man von den genannten Reihen ausgeht, a priori möglich sei, ohne dass die Theorie der Abel'schen Functionen, nach einer andern Methode entwickelt, vorausgesetzt wird.

4.

Es werde, während a eine willkürliche Grösse bedeutet,

$$(24.)\qquad \sum_{a} \int_{a_{2a-1}}^{x_a} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \frac{P(x)}{x-a} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$$

gesetzt, indem man sich $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $u_1, u_2, \ldots u_n$ ausgedrückt vorstellt, und festsetzt, dass bei jeder einzelnen Integration x genau dieselben Werthe durchlaufen soll, wie bei den Integrationen in den Gleichungen (1.). So definirt, lässt sich $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ als eine logarithmische Function von $u_1, u_2, \ldots$ betrachten; d. h. als eine solche, welche die Form

$$A \log \varphi(u_1, u_2, \ldots) + \varphi_1(u_1, u_2, \ldots)$$

hat, wo φ, φ_1 eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \ldots$ sind. Von den vielen Formeln, die sich auf diese Function beziehen, führe ich nur die folgende an:

$$(25.)\quad \frac{\partial \mathrm{Sl}(u_1, \ldots)}{\partial u_c} = \tfrac{1}{2} e_{2c-1} \mathrm{al}(\overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1} \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1} [\mathrm{al}(u_1 + \overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1} + \mathrm{al}(u_1 - \overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1}]$$
$$= \frac{e_{2c-1}^2 \sqrt{R(a)}}{(a - a_{2c-1}) P(a)} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}}{1 - \sum_{a} \left\{ \frac{e_{2a-1}^2 \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2a-1}}{a_{2a-1} - a} \right\}},$$

wo

$$(26.)\qquad \overset{\mathfrak{c}}{w}_{\mathfrak{a}} = \int_{a_{2\mathfrak{c}-1}}^{a} \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{R(x)}}$$

ist.

Das dem $\sum$ untergesetzte $\mathfrak{a}$ bedeutet, dass in einer Formel wie $\sum\limits_{\mathfrak{a}} A_{\mathfrak{a}}$ die Summation auf die veränderliche ganze Zahl $\mathfrak{a}$ sich beziehe, welche dann alle Werthe von 1 bis n durchlaufen muss.

Setzt man nun

$$(27.)\qquad \frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}} = b,$$

so lässt sich jedesmal, wenn a in der Nähe eines der Werthe $a_1, a_3, \ldots a_{2n-1}$ liegt, $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ nach Potenzen von b entwickeln.

Den Coefficienten von b in dieser Entwicklung, für den Fall, wo a wenig von $a_{2\mathfrak{a}-1}$ verschieden ist, bezeichne ich durch

$$\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}},$$

wo man dann

$$(28.)\qquad d\,\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{c}} = \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{1}{2}\, \frac{Q(a_{2\mathfrak{c}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{c}-1})}\, \frac{P(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{c}-1})^2\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}} \right\},$$

oder auch

$$(29.)\qquad d\,\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{c}} = \frac{e_{2\mathfrak{c}-1}^2\,du_{\mathfrak{c}}}{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2\mathfrak{c}-1}} + \sum_{\mathfrak{a}}{}' \left\{ \frac{e_{2\mathfrak{c}-1}^2\, e_{2\mathfrak{a}-1}^2\, \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}\,(du_{\mathfrak{c}} - du_{\mathfrak{a}})}{(a_{2\mathfrak{c}-1} - a_{2\mathfrak{a}-1})\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{c}-1}} \right\}$$

findet, in welcher letztern Formel für $\mathfrak{a}$ der Werth $\mathfrak{c}$ auszuschliessen ist.

Diese n neuen Grössen $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}$ sind eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \ldots$, von derselben Art wie $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$ u. s. w. Es lassen sich auf dieselben alle Abel'schen Integrale zweiter Art zurückführen; so wie auf $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ die der dritten.

Ich bezeichne jetzt das bestimmte Integral

$$(30.)\qquad \overline{\int_{a_\alpha}^{\infty}} \frac{1}{2}\, \frac{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\, \frac{P(x)}{(x-a_{2\mathfrak{a}-1})^2}\, \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch } \overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}},$$

und setze (ähnlich wie oben, wo von den Grössen $\overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}}$ die Rede ist)

$$(31.)\qquad \left\{ \begin{aligned} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} &= \overset{2\mathfrak{c}-1}{J}_{\mathfrak{a}} - \overset{2\mathfrak{c}}{J}_{\mathfrak{a}}, \qquad i\bar{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \overset{2\mathfrak{c}-2}{J}_{\mathfrak{a}} - \overset{2\mathfrak{c}-1}{J}_{\mathfrak{a}}, \\ J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} &= \bar{J}_{\mathfrak{a},1} + \bar{J}_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \bar{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}. \end{aligned} \right.$$

Dann lässt sich

$$\frac{\partial \log \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\partial u_{\mathfrak{a}}}$$

durch die Functionen $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}$ in folgender Weise ausdrücken:

$$(32.)\qquad \frac{\partial \log \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\partial u_{\mathfrak{a}}} = \overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}} - \mathrm{Sl}(u_1 + \overset{\alpha}{K}_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{K}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}} + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{K}_1, \ldots).$$

Nun lässt sich mit Hülfe der Formel (29.) leicht beweisen, dass

$$(33.)\qquad \frac{\partial\,\mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{K}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{c}}} = \frac{\partial\,\mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{c}-1}{K}_1, \ldots)_{\mathfrak{c}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}}$$

ist, woraus folgt, dass der Ausdruck

$$\sum_{\mathfrak{a}} \left\{ -\overset{2\mathfrak{a}-1}{J}_{\mathfrak{a}} - \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{K}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}} \right\} du_{\mathfrak{a}}$$

ein vollständiges Differential ist.

Es lässt sich daher eine Function $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)$ dergestalt bestimmen, dass

$$(34.)\qquad d\log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = -\sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \overset{2\mathfrak{a}-1}{J}_{\mathfrak{a}} + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{K}_1, \ldots) \right\} du_{\mathfrak{a}}$$

ist, und wenn man dann

$$(34\text{ a.})\qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = \frac{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)}$$

setzt, so erhält man

$$(35.)\qquad d\log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = -\sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \overset{2\mathfrak{a}-1}{J}_{\mathfrak{a}} - \overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}} + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{J}_{\mathfrak{a}} + \overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}}, \ldots)_{\mathfrak{a}} \right\} du_{\mathfrak{a}}.$$

Fügt man diesen Gleichungen die Bestimmung hinzu, dass für $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$ $\mathrm{Al}(u_1, \ldots) = 1$ werde, so sind die sämmtlichen durch sie definirten Hülfsfunctionen völlig bestimmt. Entwickelt man sie in Reihen nach Potenzen von $u_1, u_2, \ldots$, so erhält man

$$(36.)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) &= 1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \cdots \\ \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1} &= \sqrt[4]{\frac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}} \left\{ u_{\mathfrak{a}} + (u_1, u_2, \ldots)_3 + (u_1, u_2, \ldots)_5 + \cdots \right\} \\ \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}} &= \sqrt[4]{\frac{P(a_{2\mathfrak{b}})}{Q'(a_{2\mathfrak{b}})}} \left\{ 1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \cdots \right\}, \end{aligned} \right.$$

und es lässt sich erweisen, dass diese Reihen für alle Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ convergent sind.

Auf die Function $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)$ lassen sich jetzt auch $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)$ und $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}$ zurückführen. Setzt man nämlich

$$w_{\mathfrak{a}} = \int_{a}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{P(x)\,dx}{(x-a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{R(x)}} \tag{37.}$$

und

$$\frac{\partial \log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)}{\partial u_{\mathfrak{a}}} = \overset{\mathfrak{a}}{\mathrm{Al}}(u_1, u_2, \ldots), \tag{38.}$$

so hat man

$$\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots) = -\sum_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{a}} \overset{\mathfrak{a}}{\mathrm{Al}}(w_1, \ldots) + \frac{1}{2} \log \frac{\mathrm{Al}(u_1+w_1, \ldots)}{\mathrm{Al}(u_1-w_1, \ldots)}. \tag{39.}$$

Hieraus lässt sich noch eine Formel herleiten, die für $n=1$ in der Theorie der elliptischen Functionen (namentlich bei Anwendungen derselben) von grossem Nutzen ist, nämlich:

$$e^{\sum_{\mathfrak{a}} \int_{a_{2\mathfrak{a}-1}}^{x_{\mathfrak{a}}} \frac{1}{2}\left(1+\frac{P(x)}{P(a)}\frac{\sqrt{R(a)}}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-a}} = e^{-\sum_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{a}} \overset{\mathfrak{a}}{\mathrm{Al}}(w_1, \ldots)} \cdot \frac{\mathrm{Al}(u_1+w_1, \ldots)}{\mathrm{Al}(w_1, \ldots)\,\mathrm{Al}(u_1, \ldots)}. \tag{40.}$$

Für $n=1$ dient z. B. dieser Ausdruck dazu, um leicht zu den Formeln zu gelangen, durch welche Jacobi die Rotationsbewegung eines festen Körpers darzustellen gelehrt hat.

5.

Zur wirklichen Darstellung der Functionen $\mathrm{Al}(u_1, \ldots)$, $\mathrm{Al}(u_1, \ldots)_{\alpha}$ gelange ich nunmehr auf folgende Weise.

Zunächst entwickle ich die Relation

$$\mathrm{Al}(u_1 + 2\overset{\alpha}{K}_1, \ldots) = (-1)^{\alpha} e^{-2\sum_{\mathfrak{a}} \overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}}(u_{\mathfrak{a}} + \overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}})} . \mathrm{Al}(u_1, \ldots). \tag{41.}$$

In dieser Gleichung setze ich sodann $u_1 + 2\overset{\beta}{K}_1$ statt u_1 u. s. w. Dies giebt

$$\mathrm{Al}(u_1 + 2\overset{\alpha}{K}_1 + 2\overset{\beta}{K}_1, \ldots) = (-1)^{\alpha+\beta} e^{-2\sum_{\mathfrak{a}}[(\overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}}+\overset{\beta}{J}_{\mathfrak{a}})(u_{\mathfrak{a}}+\overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}}+\overset{\beta}{K}_{\mathfrak{a}})+\overset{\beta}{K}_{\mathfrak{a}}\overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}}-\overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}}\overset{\beta}{J}_{\mathfrak{a}}]} . \mathrm{Al}(u_1, \ldots).$$

Vertauscht man jetzt α und β mit einander, so zeigt sich, dass

$$e^{2\sum_{\mathfrak{a}}(\overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}}\overset{\beta}{J}_{\mathfrak{a}}-\overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}}\overset{\beta}{K}_{\mathfrak{a}})} = e^{-2\sum_{\mathfrak{a}}(\overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}}\overset{\beta}{J}_{\mathfrak{a}}-\overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}}\overset{\beta}{K}_{\mathfrak{a}})}$$

sein muss. Hieraus folgt, dass

$$\sum_{\mathfrak{a}}(\overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}}\overset{\beta}{J}_{\mathfrak{a}}-\overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}}\overset{\beta}{K}_{\mathfrak{a}}) = \mu \cdot \tfrac{1}{2}\pi i$$

ist, wo μ eine ganze Zahl bedeutet. In der That finde ich durch eine directe Untersuchung der bestimmten Integrale, durch welche $\overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}}$, $\overset{\beta}{K}_{\mathfrak{a}}$, $\overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}}$, $\overset{\beta}{J}_{\mathfrak{a}}$ ausgedrückt werden:

$$\sum_{\mathfrak{a}}(\overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}}\overset{\beta}{J}_{\mathfrak{a}}-\overset{\alpha}{J}_{\mathfrak{a}}\overset{\beta}{K}_{\mathfrak{a}}) = \begin{cases} +\frac{1}{2}\pi i, & \text{wenn } \alpha > \beta, \\ -\frac{1}{2}\pi i, & \text{wenn } \alpha < \beta. \end{cases} \tag{42.}$$

Aus dieser Relation leite ich dann die folgenden ab:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'}) = 0, \\ &\sum_{\mathfrak{a}}(K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'}-J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'}) = 0, \\ &\sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'}) = 0, \quad \text{wenn } \mathfrak{c}' \gtrless \mathfrak{c}, \\ &\sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}) = \tfrac{1}{2}\pi. \end{aligned}\right. \tag{43.}$$

Diese Relationen, deren Anzahl gleich $(2n-1)n$ ist, entsprechen der bekannten Legendre'schen Gleichung zwischen den ganzen elliptischen Integralen erster und zweiter Art. Ich habe den Beweis derselben in einer Programm-Abhandlung (Braunsberg 1849) veröffentlicht, in welcher ich zugleich über die Resultate, zu welchen ich in der Theorie der Abel'schen Functionen gekommen bin, einige vorläufige Notizen gab, mit der Anzeige, dass ich diese Resultate in einer ausführlichen Schrift darzustellen gedenke; ein Vorhaben, dessen Verwirklichung durch eine Krankheit, die mehrere Jahre lang mich der Arbeit völlig entzog, bisher vereitelt wurde.

Mit Hülfe der aufgestellten Relationen kann man nun aus der Gleichung (41.) folgende zwei allgemeinere Gleichungen herleiten.

Es sei wieder

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_{\mathfrak{a}} &= \mathfrak{m}_1 K_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{m}_2 K_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{m}_n K_{\mathfrak{a},n} \\ \mathfrak{w}'_{\mathfrak{a}} &= \mathfrak{n}_1 K'_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2 K'_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{n}_n K'_{\mathfrak{a},n} \end{aligned}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{e}_{\mathfrak{a}} &= \mathfrak{m}_1 J_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{m}_2 J_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{m}_n J_{\mathfrak{a},n} \\ \mathfrak{e}'_{\mathfrak{a}} &= \mathfrak{n}_1 J'_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2 J'_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{n}_n J'_{\mathfrak{a},n} \end{aligned}\right. \tag{44.}$$

(unter $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ beliebige ganze Zahlen verstanden). Dann hat man

$$(45.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u_1+2\omega_1, \ldots) = e^{-2\sum\limits_{\mathfrak{a}} \varepsilon_{\mathfrak{a}}(u_{\mathfrak{a}}+\omega_{\mathfrak{a}})} . \mathrm{Al}(u_1, \ldots) \\ \mathrm{Al}(u_1+2\omega_1' i, \ldots) = e^{-2\sum\limits_{\mathfrak{a}} \varepsilon_{\mathfrak{a}}'(u_{\mathfrak{a}}+\omega_{\mathfrak{a}}' i) i} . \mathrm{Al}(u_1, \ldots), \end{cases}$$

und erhält mittels (17.) ähnliche Formeln auch für $\mathrm{Al}(u_1, \ldots)_\alpha$.

Ich führe jetzt statt $u_1, u_2, \ldots u_n$ n andere Veränderliche $v_1, v_2, \ldots v_n$ ein, mittels der Gleichungen

$$(46.)\quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\pi}(K_{1,1} v_1 + K_{1,2} v_2 + \cdots + K_{1,n} v_n) \\ u_2 = \frac{1}{\pi}(K_{2,1} v_1 + K_{2,2} v_2 + \cdots + K_{2,n} v_n) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ u_n = \frac{1}{\pi}(K_{n,1} v_1 + K_{n,2} v_2 + \cdots + K_{n,n} v_n). \end{cases}$$

Aus denselben mögen sich

$$(47.)\quad \begin{cases} v_1 = (G_{1,1} u_1 + G_{2,1} u_2 + \cdots + G_{n,1} u_n)\pi \\ v_2 = (G_{1,2} u_1 + G_{2,2} u_2 + \cdots + G_{n,2} u_n)\pi \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ v_n = (G_{1,n} u_1 + G_{2,n} u_2 + \cdots + G_{n,n} u_n)\pi \end{cases}$$

ergeben. Sodann leite ich aus den Gleichungen (43.) die folgenden ab:

$$(48.)\quad \sum_{\mathfrak{c}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} J_{\mathfrak{a}',\mathfrak{c}} = \sum_{\mathfrak{c}} G_{\mathfrak{a}',\mathfrak{c}} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}},$$

$$(49.)\quad \sum_{\mathfrak{a}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'} = \sum_{\mathfrak{a}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'} K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}.$$

Setzt man daher

$$(50.)\quad \begin{cases} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \sum\limits_{\mathfrak{c}'} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'} J_{\mathfrak{c},\mathfrak{c}'}, \\ \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \sum\limits_{\mathfrak{c}'} G_{\mathfrak{c}',\mathfrak{a}} K'_{\mathfrak{c}',\mathfrak{c}} . \pi, \\ \sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} . \pi, \end{cases}$$

so hat man

$$(51.)\quad \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \varepsilon_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}}, \qquad \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \delta_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}},$$

und die obigen Relationen geben

$$(52.)\quad \begin{cases} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \sum\limits_{\mathfrak{c}'} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'} K_{\mathfrak{c}',\mathfrak{c}}, \\ J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \frac{1}{2}\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} + \sum\limits_{\mathfrak{c}'} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'} K'_{\mathfrak{c}',\mathfrak{c}}, \\ K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \frac{1}{\pi} \sum\limits_{\mathfrak{c}'} \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}'} K_{\mathfrak{c}',\mathfrak{c}}. \end{cases}$$

Bildet man nun ferner die homogene Function zweiten Grades von $u_1, u_2, \ldots$:

$$E(u_1, u_2, \ldots) = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{c}},$$

so lässt sich mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen zeigen, dass

$$(53.)\quad E(u_1+2\omega_1, \ldots) = E(u_1, \ldots) + 2\sum_{\mathfrak{a}} \varepsilon_{\mathfrak{a}}(u_{\mathfrak{a}}+\omega_{\mathfrak{a}})$$

ist. Hieraus folgt vermöge der ersten Gleichung (45.), wenn man

$$(54.)\quad g . e^{E(u_1, u_2, \ldots)} \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots)$$

setzt, wo g eine Constante bedeutet:

$$(55.)\quad \mathrm{Jc}(v_1+2\mathfrak{m}_1\pi, v_2+2\mathfrak{m}_2\pi, \ldots) = \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots).$$

Ich nenne diese Function von $v_1, v_2, \ldots$ die Jacobi'sche, weil sie für $n=1$ von Jacobi in die Analysis eingeführt ist. Diesem Namen entsprechend ist das Zeichen Jc angenommen.

Die zweite der angeführten Gleichungen giebt aber, wenn

$$\delta_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{n}_1 \delta_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2 \delta_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{n}_n \delta_{\mathfrak{a},n}$$

gesetzt wird:

$$(56.)\quad \mathrm{Jc}(v_1+2\delta_1 i, v_2+2\delta_2 i, \ldots) = e^{-2\sum\limits_{\mathfrak{a}} \mathfrak{n}_{\mathfrak{a}}(v_{\mathfrak{a}}+\delta_{\mathfrak{a}} i) i} \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots).$$

Nun lässt sich beweisen, dass jede Function, welche die in (55.) ausgesprochene Eigenschaft und überdies, gleichwie $\mathrm{Jc}(v_1, \ldots)$, den Charakter einer ganzen Function hat, wie ich denselben oben erklärte, durch eine unendliche, nicht nur für reelle, sondern auch für alle imaginären Werthe von $v_1, v_2, \ldots$ convergirende Reihe von der Form

$$\mathrm{S}\left\{A_{\mathfrak{n}_1,\mathfrak{n}_2,\ldots\mathfrak{n}_n} e^{(\mathfrak{n}_1 v_1 + \mathfrak{n}_2 v_2 + \cdots + \mathfrak{n}_n v_n) i}\right\}$$

sich darstellen lässt, in welcher Formel $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots \mathfrak{n}_n$ veränderliche ganze Zahlen bedeuten, deren jede, unabhängig von den übrigen, alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat. Für die Function Jc giebt die Gleichung (56.) die Bestimmung der Coefficienten, und man erhält

$$(57.)\quad \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots) = \mathrm{S}\left\{e^{[\mathfrak{n}_1(v_1+\delta_1 i)+\mathfrak{n}_2(v_2+\delta_2 i)+\cdots+\mathfrak{n}_n(v_n+\delta_n i)] i}\right\},$$

oder auch

$$(58.)\qquad \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots) = \mathrm{S}\left\{e^{-\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}\mathfrak{n}_\mathfrak{a}\mathfrak{n}_\mathfrak{c}\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}}\cos(\mathfrak{n}_1 v_1+\mathfrak{n}_2 v_2+\cdots+\mathfrak{n}_n v_n)\right\}.$$

Eigentlich wäre der Ausdruck rechts noch mit einer willkürlichen Constante zu multipliciren; was aber wegen der willkürlichen Grösse g unterbleiben kann. Der Coefficient g in (54.) wird dadurch bestimmt, dass für $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$ $\mathrm{Al}(u_1, \ldots) = 1$ wird. Hiernach findet sich:

$$(59.)\qquad \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = e^{-E(u_1, u_2, \ldots)}.\frac{\mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots)}{\mathrm{Jc}(0, 0, \ldots)}$$
$$(v_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{c}\sigma_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}}u_\mathfrak{c}).$$

Für die Functionen $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ erhält man ferner, mit Hülfe der Gleichungen (35.), folgende Ausdrücke. Es sei

$$\begin{aligned}\overset{\alpha}{K}_\mathfrak{a} &= \mu_1 K_{\mathfrak{a},1}+\mu_2 K_{\mathfrak{a},2}+\cdots+\mu_n K_{\mathfrak{a},n}\\ &\quad -(\nu_1 K'_{\mathfrak{a},1}+\nu_2 K'_{\mathfrak{a},2}+\cdots+\nu_n K'_{\mathfrak{a},n})i,\end{aligned}$$

wo jede der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots$ entweder gleich 1 oder gleich 0 ist und mittels der Formeln (15.) gefunden wird. Ferner sei

$$\delta_\mathfrak{a} = \nu_1\delta_{\mathfrak{a},1}+\nu_2\delta_{\mathfrak{a},2}+\cdots+\nu_n\delta_{\mathfrak{a},n},$$

so ist

$$(60.)\quad e^{E(u_1, u_2, \ldots)}\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = e^{\frac{1}{2}\sum\limits_\mathfrak{a}\nu_\mathfrak{a}(v_\mathfrak{a}-\mu_\mathfrak{a}\pi+\frac{1}{2}\delta_\mathfrak{a} i)i}\,\frac{\mathrm{Jc}(v_1-\mu_1\pi+\delta_1 i, \ldots)}{\mathrm{Jc}(0, 0, \ldots)}.$$

Es ist aber, wenn $\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\cdots+\mu_n\nu_n = \lambda$ gesetzt wird und

I. λ ungerade ist:

$$\begin{aligned}(61.)\qquad &(-1)^{\frac{1}{2}(1-\lambda)}e^{\frac{1}{2}\sum\nu_\mathfrak{a}(v_\mathfrak{a}-\mu_\mathfrak{a}\pi+\frac{1}{2}\delta_\mathfrak{a} i)i}\,\mathrm{Jc}(v_1-\mu_1\pi+\delta_1 i, \ldots)\\ &= \mathrm{S}\left\{(-1)^{\mu_1\mathfrak{n}_1+\cdots+\mu_n\mathfrak{n}_n}e^{-\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(\mathfrak{n}_\mathfrak{a}+\frac{1}{2}\nu_\mathfrak{a})(\mathfrak{n}_\mathfrak{c}+\frac{1}{2}\nu_\mathfrak{c})\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}}.\sin[(\mathfrak{n}_1+\tfrac{1}{2}\nu_1)v_1+\cdots]\right\}.\end{aligned}$$

II. Wenn λ gerade ist:

$$\begin{aligned}(62.)\qquad &(-1)^{\frac{1}{2}\lambda}e^{\frac{1}{2}\sum\nu_\mathfrak{a}(v_\mathfrak{a}-\mu_\mathfrak{a}\pi+\frac{1}{2}\delta_\mathfrak{a} i)i}\,\mathrm{Jc}(v_1-\mu_1\pi+\delta_1 i, \ldots)\\ &= \mathrm{S}\left\{(-1)^{\mu_1\mathfrak{n}_1+\cdots+\mu_n\mathfrak{n}_n}e^{-\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(\mathfrak{n}_\mathfrak{a}+\frac{1}{2}\nu_\mathfrak{a})(\mathfrak{n}_\mathfrak{c}+\frac{1}{2}\nu_\mathfrak{c})\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}}.\cos[(\mathfrak{n}_1+\tfrac{1}{2}\nu_1)v_1+\cdots]\right\}.\end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta} = \frac{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)},$$

so giebt der Ausdruck rechts in der Gleichung (60.) den Werth von

$$e^{E(u_1, \ldots)}\mathrm{Al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta},$$

wenn man für jede der Zahlen $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$ u. s. w. die Summe derjenigen beiden Werthe setzt, die ihr für α und für β zukommen.

Führt man statt $v_1, v_2, \ldots$ wieder $u_1, u_2, \ldots$ ein, so erhält man noch folgende bemerkenswerthe Ausdrücke.

Es sei

$$\overset{\alpha}{K}_\mathfrak{a} = \overset{\alpha}{\omega}_\mathfrak{a} - i\overset{\alpha}{\omega}{}'_\mathfrak{a},$$

wo dann

$$\begin{aligned}&\overset{0}{\omega}_\mathfrak{a} = \overset{1}{\omega}_\mathfrak{a},\quad \overset{2}{\omega}_\mathfrak{a} = \overset{3}{\omega}_\mathfrak{a},\quad \ldots,\quad \overset{2n-2}{\omega}_\mathfrak{a} = \overset{2n-1}{\omega}_\mathfrak{a},\quad \overset{2n}{\omega}_\mathfrak{a} = 0,\\ &\overset{0}{\omega}{}'_\mathfrak{a} = 0,\quad \overset{1}{\omega}{}'_\mathfrak{a} = \overset{2}{\omega}{}'_\mathfrak{a},\quad \overset{3}{\omega}{}'_\mathfrak{a} = \overset{4}{\omega}{}'_\mathfrak{a},\quad \ldots,\quad \overset{2n-1}{\omega}{}'_\mathfrak{a} = \overset{2n}{\omega}{}'_\mathfrak{a},\\ &\overset{2\mathfrak{c}-1}{\omega}_\mathfrak{a} = K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}+K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}+1}+\cdots+K_{\mathfrak{a},n}\\ &\overset{2\mathfrak{c}}{\omega}{}'_\mathfrak{a} = K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}\end{aligned}$$

ist. Ferner sei

$$\begin{aligned}\sigma_\mathfrak{a} &= \mathfrak{n}_1\sigma_{\mathfrak{a},1}+\mathfrak{n}_2\sigma_{\mathfrak{a},2}+\cdots+\mathfrak{n}_n\sigma_{\mathfrak{a},n},\\ \omega'_\mathfrak{a} &= \mathfrak{n}_1 K'_{\mathfrak{a},1}+\mathfrak{n}_2 K'_{\mathfrak{a},2}+\cdots+\mathfrak{n}_n K'_{\mathfrak{a},n},\end{aligned}$$

so ist

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = \frac{\mathrm{S}\left\{e^{-\sum\limits_\mathfrak{a}(\sigma_\mathfrak{a}+\frac{1}{2}\overset{\alpha}{\sigma}_\mathfrak{a})(\omega'_\mathfrak{a}+\frac{1}{2}\overset{\alpha}{\omega}{}'_\mathfrak{a})}.\cos[\Sigma(\sigma_\mathfrak{a}+\frac{1}{2}\overset{\alpha}{\sigma}_\mathfrak{a})(u_\mathfrak{a}-\overset{\alpha}{\omega}_\mathfrak{a})]\right\}}{\mathrm{S}\left\{e^{-\sum\limits_\mathfrak{a}\sigma_\mathfrak{a}\omega'_\mathfrak{a}}.\cos\Sigma\sigma_\mathfrak{a}u_\mathfrak{a}\right\}}.$$

Das Zeichen S bezieht sich wieder auf die in den Ausdrücken $\sigma_\mathfrak{a}$, $\omega'_\mathfrak{a}$ enthaltenen Zahlen $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$; $\overset{\alpha}{\sigma}_\mathfrak{a}$ aber bedeutet denjenigen Werth von $\sigma_\mathfrak{a}$, den man erhält, wenn man für $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ die Werthe nimmt, welche $\omega'_\mathfrak{a}$ gleich $\overset{\alpha}{\omega}{}'_\mathfrak{a}$ machen. Und wenn man in dem vorstehenden Ausdrucke an die Stelle von $\overset{\alpha}{\sigma}_\mathfrak{a}, \overset{\alpha}{\omega}_\mathfrak{a}, \overset{\alpha}{\omega}{}'_\mathfrak{a}$ die Summen

$$\overset{\alpha}{\sigma}_\mathfrak{a}+\overset{\beta}{\sigma}_\mathfrak{a},\quad \overset{\alpha}{\omega}_\mathfrak{a}+\overset{\beta}{\omega}_\mathfrak{a},\quad \overset{\alpha}{\omega}{}'_\mathfrak{a}+\overset{\beta}{\omega}{}'_\mathfrak{a}$$

setzt, so stellt er die Function $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$ dar.

Aehnliche Darstellungen der Abel'schen Functionen, wie die hier angegebenen, existiren noch unzählig viele. Namentlich giebt es, wie bei den elliptischen Functionen, noch eine Darstellungs-Art, bei welcher an die Stelle der cyklischen Functionen sin, cos die entsprechenden hyperbolischen treten. Sodann habe ich in meiner Abhandlung auch ausgeführt, wie sich jeder aus Abel'schen Functionen auf rationale Weise gebildete Ausdruck als Quotient zweier Reihen von ganz ähnlicher Form darstellen lässt; und dadurch zugleich die Transformation der Abelschen Functionen vorbereitet.

Saline Westernkotten in Westfalen, 11. September 1853.

Anmerkung des Herausgebers des Journals für reine und angewandte Mathematik: Die schliesslichen Resultate des Obigen finden sich auch schon in einer Gelegenheitsschrift des Verfassers, datirt vom 17. Juli 1849.

ANMERKUNG.

*) Diese Stelle (vom Anfang des § 3 an) hätte einer präciseren Fassung bedurft. Vgl. die (für einen folgenden Band bestimmte) Abhandlung „Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze", wo in § 5 ein allgemeiner Satz begründet wird, aus dem die Richtigkeit des hier Behaupteten sich ergiebt.

ÜBER DIE THEORIE DER ANALYTISCHEN FACULTÄTEN.

(Aus Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 51.)

Einleitung.

Bezeichnet man, unter u und x unbeschränkt veränderliche Grössen, unter y aber zunächst eine positive ganze Zahl verstehend, die durch das Product

$$\prod_{\nu=0}^{y-1}(u+\nu x)$$

dargestellte Function von u, x, y durch $f(u, x, y)$, so gelten die nachstehenden, zum Theil schon von Vandermonde*) und vollständig zuerst von Kramp**) aufgestellten Gleichungen, in denen y' auch eine positive ganze Zahl, k hingegen eine willkürlich anzunehmende Grösse bedeutet:

$$\text{(a)} \qquad f(u, x, y+y') = f(u, x, y)\, f(u+yx, x, y'),$$
$$\text{(b)} \qquad f(u, x, 1) = u,$$
$$\text{(c)} \qquad f(ku, kx, y) = k^y f(u, x, y),$$
$$\text{(d)} \qquad f(u, x, y) = f(u+yx-x, -x, y),$$
$$\text{(e)} \qquad f(u, 0, y) = u^y.$$

Die in den drei ersten dieser Gleichungen ausgesprochenen Eigenschaften der betrachteten Function sind den durch die Gleichungen

$$u^{y+y'} = u^y u^{y'},$$
$$u^1 = u,$$
$$(ku)^y = k^y u^y$$

*) Siehe die Abhandlung: Mémoire sur des irrationelles de diff. ordres. (Mém. Par. 1772.) Vandermonde betrachtet nur die Function $f(u, -1, y)$ — von ihm durch $[u]^y$ bezeichnet — auf die er $f(u, x, y)$ reducirt; es finden sich daher bei ihm die Gleichungen (c), (d) nicht ausdrücklich angegeben.

**) In einem Abschnitt der Schrift: Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, 1798.

ausgedrückten Eigenschaften der Potenz u^y, in welche $f(u,x,y)$ für $x=0$ übergeht, so analog, dass die genannten Mathematiker sich berechtigt hielten, die Existenz einer analytischen Function $f(u,x,y)$ anzunehmen, welche für jeden positiven ganzzahligen Werth von y durch das obige Product dargestellt werde, aber ebenso wie die Function u^y für beliebige Werthe von y eine Bedeutung habe und den Gleichungen (a) bis (e) genüge. Für diese hypothetische Function schlug Kramp die Benennung »Facultät« und die Bezeichnung

$$u^{y|x}$$

vor; u nannte er die Basis, x die Differenz und y den Exponenten der Facultät. Der von ihm unternommene Versuch jedoch, eine Theorie dieser Function aus den vorausgesetzten Eigenschaften derselben abzuleiten, ist längst als ein gänzlich verfehlter erkannt. Eine Function, wie sie sich Kramp unter $u^{y|x}$ vorstellte, giebt es gar nicht; denn die Gleichungen (a) bis (e) sind nicht mit einander vereinbar, wenn y keine ganze Zahl ist. Ausserdem hat Kramp bei seinen Deductionen den Fehler begangen, dass er aus der Gleichung (e) schloss, es sei

$$\operatorname*{Lim}_{x=0} u^{y|x} = u^y,$$

in welcher Weise auch x sich der Grenze Null nähern möge — eine Annahme, die sich als unzulässig herausstellt, wie ich im Folgenden (§ 2) zeigen werde.

Ungeachtet der Unhaltbarkeit der Kramp'schen Facultäten-Theorie wurde indessen der Grundgedanke derselben, angemessen modificirt, von anderen Mathematikern als Ausgangspunkt für neue Untersuchungen aufgenommen.

Bessel*) suchte die Widersprüche, in welche Kramp sich verwickelt hatte, dadurch zu vermeiden, dass er zur Definition der Facultät $u^{y|x}$ von den obigen Gleichungen (a) bis (e) nur die erste, zweite und vierte benutzte:

$$\text{(f)} \quad \left\{ \begin{aligned} u^{y+y'|x} &= u^{y|x}(u+yx)^{y'|x}, \\ u^{1|x} &= u, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(g)} \quad u^{y|x} = (u+yx-x)^{y|-x},$$

ausserdem aber, seine Untersuchung auf reelle Werthe der Veränderlichen

*) Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik, Jahrg. 1812, St. 3.

u, x, y beschränkend, festsetzte, es solle

$$\text{(h)} \quad \operatorname*{Lim}_{u=+\infty} \frac{u^{y|x}}{u^y} = 1$$

sein, mit der auch im Folgenden festzuhaltenden Bedingung, dass der Potenz u^y, wenn u positiv ist, ihr reeller Werth beigelegt werde.

Diesen Bestimmungen gemäss ergab sich ihm:

$$\text{(k)} \quad u^{y|x} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left\{ (nx)^y \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{u+\nu x}{u+yx+\nu x} \right) \right\}, \text{ wenn } x \text{ positiv,}$$

$$\text{(l)} \quad u^{y|x} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left\{ (-nx)^y \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{u+yx-\nu x}{u-\nu x} \right) \right\}, \text{ wenn } x \text{ negativ ist.}$$

Durch diese Formeln wird nun in der That für alle reellen Werthsysteme der Grössen u, x, y (mit Ausnahme derer, in welchen $x=0$ ist) eine Function $u^{y|x}$ definirt, welche die in den Gleichungen (f), (g) ausgesprochenen Eigenschaften besitzt und zugleich, worauf Bessel Gewicht legte, stets einen reellen Werth hat.

Gegen diese Bessel'sche Definition der Facultät ist aber Folgendes einzuwenden. Die Ausdrücke auf der Rechten der Gleichungen (k), (l) sind beide — unter der Bedingung, dass vom Gebiete der Veränderlichen x der Werth $x=0$ ausgeschlossen werde — analytische, für beliebige (complexe sowohl als reelle) Werthe der Veränderlichen u, x, y definirte Functionen. In der Bestimmung, dass $u^{y|x}$ für positive Werthe von x durch den ersten Ausdruck — zu welchem man mit Nothwendigkeit gelangt, wenn man von den Gleichungen (f), (h) ausgeht —, für negative Werthe von x aber durch den zweiten Ausdruck, der eine ganz andere Function ist als jener, dargestellt werden solle, liegt also eine Willkürlichkeit, die ebenso wenig zu rechtfertigen ist, wie wenn man z. B. $\log x$ für positive Werthe von x auf die gewöhnliche Weise definiren, für negative aber $\log x = \log(-x)$ annehmen wollte.*) Auch wüsste ich nicht, nach welchem Princip man verfahren sollte, um die Bessel'sche Definition von $u^{y|x}$ auf complexe Werthe von x auszu-

*) Mit Anwendung der in der Abhandlung „Zur Functionenlehre" eingeführten Terminologie würde ich mich jetzt so ausdrücken: Die von Bessel definirte Facultät $u^{y|x}$ ist keine monogene Function ihrer Argumente; die beiden Ausdrücke, von denen der eine sie für positive, der andere für negative Werthe von x darstellen soll, sind Zweige zweier verschiedenen analytischen Functionen. (Anmerkung vom Jahre 1886.)

dehnen. Ein Uebelstand ist es ferner, dass die obige Gleichung (c) für Bessel's Facultät nur gilt, wenn k eine positive Grösse ist, während doch die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung auch für negative Werthe von k bestimmte Werthe haben.

Abweichend von Bessel hat Crelle*) von den obigen Gleichungen (a) bis (e) die drei ersten als die Grundgleichungen hingestellt, aus denen sich die ganze Theorie der analytischen Facultäten ableiten lasse. Dies ist aber keineswegs der Fall; denn die genannten Gleichungen sind zwar, wie im Folgenden (§ 1) nachgewiesen wird, mit einander vereinbar, **reichen aber zur Bestimmung der Function $f(u, x, y)$ gar nicht aus.**

Es sei nämlich $f_1(u, x, y)$ irgend eine bestimmte, den in Rede stehenden Gleichungen genügende Function, so werden die Gleichungen (a), (c) auch befriedigt, wenn man, unter $\varphi(u)$ eine willkürlich anzunehmende Function von u verstehend,

$$f(u, x, y) = \frac{\varphi\left(\frac{u}{x}+y\right)}{\varphi\left(\frac{u}{x}\right)} f_1(u, x, y)$$

setzt. Damit nun $f(u, x, y)$ auch der Gleichung (b) genüge, braucht die Function $\varphi(u)$ nur so angenommen zu werden, dass

$$\varphi\left(\frac{u}{x}+1\right) = \varphi\left(\frac{u}{x}\right)$$

oder für jeden Werth von u

$$\varphi(u+1) = \varphi(u)$$

ist; man kann also z. B. für $\varphi(u)$ eine willkürliche Function von $\cos(2u\pi)$ und $\sin(2u\pi)$ nehmen.

Es giebt hiernach unendlich viele Functionen $f(u, x, y)$, welche den Gleichungen (a), (b), (c) genügen.

Wenn also Crelle aus diesen Gleichungen allein völlig bestimmte Darstellungen einer denselben genügenden Function $f(u, x, y)$ abgeleitet hat, so

*) Theorie der analytischen Facultäten, 1824.
Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques, 1831. (Ursprünglich im 7. Bande des Crelle'schen Journals erschienen.)

sind dabei nothwendig Fehler von ihm begangen worden, die er nicht wahrgenommen hat. Die Quelle dieser Fehler findet sich in § 8 der Abhandlung angegeben.

Von den späteren Bearbeitungen der Facultätenlehre führe ich noch die von Ohm*) und Öttinger**) herrührenden an.

Ohm definirt die Facultät $u^{y|x}$, auf reelle Werthe der Grössen u, x, y sich beschränkend, zunächst für (positive und negative) ganzzahlige Werthe von y, und gelangt dann zu dem Ausdrucke

$$u^{y|x} = \mathrm{Lim}\left\{(nx)^y \frac{u^{n|x}}{(u+yx)^{n|x}}\right\} \text{ für } \begin{cases} n = +\infty, \text{ wenn } x \text{ positiv,} \\ n = -\infty, \text{ wenn } x \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

Diese Definition von $u^{y|x}$ stimmt vollkommen mit der Bessel'schen überein, so dass etwas Weiteres darüber zu bemerken unnöthig ist.

Öttinger's Begründung der Facultäten-Theorie muss als eine ebenso verfehlte wie die Kramp'sche bezeichnet werden. Auch Öttinger hat es für überflüssig gehalten, genau zu definiren, was unter einer Facultät mit einem nicht ganzzahligen Exponenten zu verstehen sei, und kein Bedenken getragen, derselben alle diejenigen Eigenschaften beizulegen, die ihr zukommen, wenn der Exponent eine unbestimmte positive ganze Zahl ist. Das Auffallendste aber ist Folgendes. Es lässt sich eine Reihe von der Form

$$u^y\left(1+(y)_1\frac{x}{u}+(y)_2\frac{x^2}{u^2}+(y)_3\frac{x^3}{u^3}+\cdots\right),$$

wo $(y)_1, (y)_2, (y)_3, \ldots$ ganze rationale Functionen von y sein sollen, wie schon Kramp ausgeführt hat, so bestimmen, dass dieselbe für jeden positiven ganzzahligen Werth von y gleich

$$\prod_{\nu=0}^{y-1}(u+\nu x)$$

ist. Öttinger hat nun diese Reihe für beliebige Werthe von y als Ausdruck der Facultät $u^{y|x}$ betrachtet und häufig Anwendung davon gemacht, ohne zu ahnen, dass diese Reihe, wenn y keine positive ganze Zahl ist, **niemals** convergirt (§ 7 der Abhandlung), also jedes mit ihrer Hülfe erhaltene Ergebniss nothwendig, wenn nicht unrichtig, doch jedenfalls unsicher ist.

*) Crelle's Journal, B. 39.
**) Ebend. B. 33, 35, 38, 44.

Aus den vorstehenden Bemerkungen erhellt zur Genüge, dass die Theorie der analytischen Facultäten, so vielfach dieselbe auch schon behandelt worden ist, noch immer an wesentlichen Mängeln leidet. Diese darzulegen und zu beseitigen, ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes.*)

1.

Ich beginne mit der allgemeinsten Bestimmung derjenigen von drei Veränderlichen u, x, y abhängigen Function $f(u, x, y)$, welche den von Crelle aufgestellten Gleichungen

$$f(u,x,y+k) = f(u,x,y)\,f(u+yx,x,k) \tag{1.}$$

$$f(ku,kx,y) = k^y f(u,x,y) \tag{2.}$$

$$f(u,x,1) = u \tag{3.}$$

Genüge leistet.

Vertauscht man in der ersten Gleichung y und k mit einander, so erhält man

$$f(u,x,y+k) = f(u,x,k)\,f(u+kx,x,y),$$

und wenn man hierin $u-kx$ für u setzt,

$$f(u,x,y) = \frac{f(u-kx,x,y+k)}{f(u-kx,x,k)};$$

woraus ferner, indem man $u-kx = wx$, also $k = \frac{u}{x}-w$ setzt,

$$f(u,x,y) = \frac{f\left(wx,x,\frac{u}{x}+y-w\right)}{f\left(wx,x,\frac{u}{x}-w\right)},$$

*) Der Leser wolle bemerken, dass die vorliegende Abhandlung bereits im Jahre 1854, und zwar auf den ausdrücklichen Wunsch Crelle's, dem ich meine Bedenken gegen seine Theorie der Facultäten mitgetheilt hatte, geschrieben ist, nachdem ich einen Theil ihres Inhalts schon im Jahre 1843 (als Beilage zum Jahresbericht des Progymnasiums zu Deutsch-Crone) veröffentlicht hatte. Obwohl die Theorie der analytischen Facultäten in meinen Augen durchaus nicht die Wichtigkeit hat, die ihr in früherer Zeit viele Mathematiker beimassen, so habe ich doch die Abhandlung jetzt wieder abdrucken lassen, weil sie manches enthält, das auch gegenwärtig noch, wie ich glaube, angehenden Mathematikern von Nutzen sein kann. Wesentliche Veränderungen habe ich nicht vorgenommen; nur die Einleitung ist neu bearbeitet worden, weil es mir zweckmässig erschien, auf den Inhalt der kritisirten, heutzutage nicht Jedermann mehr zugänglichen Schriften etwas ausführlicher als ich es früher für nöthig gehalten, einzugehen. (Anmerkung vom Jahre 1886.)

und sodann, mit Anwendung der zweiten Gleichung,

$$f(u,x,y) = x^y \cdot \frac{f\left(w,1,\frac{u}{x}+y-w\right)}{f\left(w,1,\frac{u}{x}-w\right)} \tag{4.}$$

folgt.

Legt man jetzt der willkürlichen Grösse w irgend einen bestimmten Werth bei, und setzt

$$f(w,1,u-w) = F(u), \tag{5.}$$

so erhält man:

$$f(u,x,y) = x^y \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}+y\right)}{F\left(\frac{u}{x}\right)}. \tag{6.}$$

Umgekehrt erhellt, dass jede Function $f(u, x, y)$, die, bei ganz willkürlicher Annahme von $F(u)$, durch diese Formel bestimmt wird, den beiden ersten der obigen Gleichungen Genüge thut. Denn es ergiebt sich aus (6.):

$$f(u,x,y+k) = x^{y+k} \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}+y+k\right)}{F\left(\frac{u}{x}\right)} = x^y \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}+y\right)}{F\left(\frac{u}{x}\right)} \cdot x^k \cdot \frac{F\left(\frac{u+yx}{x}+k\right)}{F\left(\frac{u+yx}{x}\right)}$$
$$= f(u,x,y)\,f(u+yx,x,k),$$

sowie ferner

$$f(ku,kx,y) = (kx)^y \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}+y\right)}{F\left(\frac{u}{x}\right)} = k^y f(u,x,y).$$

Damit nun auch die dritte Gleichung befriedigt werde, ist nöthig, dass

$$f(u,x,1) = x \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}+1\right)}{F\left(\frac{u}{x}\right)} = u$$

oder

$$F\left(\frac{u}{x}+1\right) = \frac{u}{x} \cdot F\left(\frac{u}{x}\right)$$

sei; woraus, wenn man ux statt u setzt, die Relation

$$F(u+1) = uF(u) \tag{7.}$$

folgt. Man sieht sofort, dass eine Function, welche dieser Gleichung genügt, die Legendre'sche $\Gamma(u)$ ist,*) und dass man, um den allgemeinsten Ausdruck von $F(u)$ zu haben,

$$F(u) = \varphi(u)\,\Gamma(u)$$

setzen muss; wo unter $\varphi(u)$ eine periodische Function zu verstehen ist, welche unverändert bleibt, wenn u in $u+1$ übergeht. Ohne aber hinsichtlich der Theorie der Γ-Function irgend etwas vorauszusetzen, kann man folgendermassen fortfahren.

Aus (7.) folgt, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$F(u+n) = u(u+1)(u+2)\ldots(u+n-1)\,F(u),$$

und hieraus, wenn $n-1$ statt n, und 1 statt u gesetzt wird:

$$F(n) = 1.2\ldots(n-1)\,F(1),$$

also

$$\frac{F(1)}{F(u)} = u\left(1+\frac{u}{1}\right)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)\cdot\frac{F(n)}{F(u+n)}.$$

Nun ergiebt sich aber aus den Sätzen über die Convergenz der unendlichen Producte, die ich im Folgenden zusammenstellen werde, dass sich eine Function $\psi(n)$ der positiven veränderlichen Zahl n, falls n ohne Ende wächst, einer bestimmten endlichen Grenze nähert, wenn der Werth von

$$n^2\left(\frac{\psi(n)}{\psi(n-1)}-1\right)$$

für $n=\infty$ nicht unendlich gross wird. Setzt man nun

$$u\left(1+\frac{u}{1}\right)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right) = \psi(n),$$

so ist

$$\frac{\psi(n)}{\psi(n-1)} = 1+\frac{u}{n-1},$$

und man sieht, dass zwar nicht $\psi(n)$, wohl aber $n^{-u}\psi(n)$ für $n=\infty$ einen bestimmten endlichen Werth annimmt, weil für hinlänglich grosse Werthe

*) $\Gamma(u)$ ist gleichbedeutend mit der Gaussischen Function $\Pi(u-1)$.

von n

$$\frac{n^{-u}\psi(n)}{(n-1)^{-u}\psi(n-1)} = \left(1+\frac{u}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^u = \left(1+\frac{u}{n}+\frac{u}{n^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{u}{n}+\frac{u(u-1)}{1.2.n^2}-\cdots\right)$$
$$= 1-\frac{u(u-1)}{1.2.n^2}+\cdots$$

ist, für $n=\infty$ also

$$n^2\left(\frac{n^{-u}\psi(n)}{(n-1)^{-u}\psi(n-1)}-1\right) = -\frac{1}{2}u(u-1).$$

Da nun ferner

$$n^{-u} = \left(\frac{1}{2}\right)^u\left(\frac{2}{3}\right)^u\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right)^u$$

ist, so hat man:

$$n^{-u}\psi(n) = u.\left(\frac{1}{2}\right)^u\left(1+\frac{u}{1}\right).\left(\frac{2}{3}\right)^u\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right)^u\left(1+\frac{u}{n-1}\right),$$

und es hat das unendliche Product

$$u.\prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}$$

einen endlichen, bestimmten Werth, welchen (reellen oder imaginären) Werth auch u haben möge. Ich möchte für dasselbe die Benennung »Factorielle von u« und die Bezeichnung $Fc(u)$ vorschlagen, indem die Anwendung dieser Function in der Theorie der Facultäten dem Gebrauch der Γ-Function deshalb vorzuziehen sein dürfte, weil sie für keinen Werth von u eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und überhaupt, gleich den einfachsten transcendenten Functionen e^u, $\sin u$, $\cos u$ u. s. w. im Wesentlichen den Charakter einer rationalen ganzen Function besitzt, so dass sie z. B. auch nach ganzen positiven Potenzen von u in eine beständig convergirende Reihe entwickelt werden kann.

Nun ist

$$\frac{n^{-(u+1)}(u+1)\left(1+\frac{u+1}{1}\right)\left(1+\frac{u+1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u+1}{n-1}\right)}{n^{-u}u\left(1+\frac{u}{1}\right)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)} = \frac{1}{u}\cdot\frac{u+n}{n},$$

mithin, wenn man $n=+\infty$ setzt:

$$\frac{Fc(u+1)}{Fc(u)} = \frac{1}{u},$$

oder

$$(8.)\qquad Fc(u) = u.Fc(u+1).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der obigen (7.), so erhält man

$$Fc(u).F(u) = Fc(u+1).F(u+1);$$

d. h. es ist $Fc(u).F(u)$ eine Function von u, die sich nicht ändert, wenn $u+1$ statt u gesetzt wird. Bezeichnet man daher eine solche Function durch $\varphi(u)$, so ergiebt sich

$$F(u) = \frac{\varphi(u)}{Fc(u)},$$

und es wird daher der allgemeinste Ausdruck einer Function $f(u,x,y)$, welche die Gleichungen (1.), (2.), (3.) befriedigen soll, durch die Formel

$$(9.)\qquad f(u,x,y) = x^y.\frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}.\frac{\varphi\left(\frac{u}{x}+y\right)}{\varphi\left(\frac{u}{x}\right)}$$

gegeben, wo

$$(10.)\qquad Fc(u) = u.\prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}$$

ist, und $\varphi(u)$ eine beliebige Function von u bedeutet, für welche die Relation

$$(11.)\qquad \varphi(u+1) = \varphi(u)$$

gilt. Wenn y eine ganze Zahl ist, so fällt φ aus dem Ausdrucke von $f(u,x,y)$ weg.

2.

Nach dem Vorstehenden ist es zur vollständigen Definition von $f(u,x,y)$ nothwendig, den obigen drei Grundgleichungen noch eine neue Bedingung hinzuzufügen, durch welche die Function $\varphi(u)$ bestimmt wird. Ehe ich aber dieselbe aufsuche, muss ich auf eine, allen Functionen, welche den Gleichungen (1.), (2.), (3.) genügen, gemeinsame Eigenthümlichkeit aufmerksam machen, aus deren Nichtbeachtung in mehreren der bisherigen Darstellungen der Facultätenlehre erhebliche Irrthümer hervorgegangen sind.

Man hat zur Bestimmung von $f(u,x,y)$ unter anderen folgenden Weg eingeschlagen. Es ist (gemäss (1.), (3.))

$$f(u,x,y+1) = f(u,x,y)\,f(u+yx,x,1) = (u+yx).f(u,x,y),$$
$$f(u,x,y+1) = f(u,x,1)\,f(u+x,x,y) \;=\; u.f(u+x,x,y)$$

und daher

$$(12.)\qquad f(u,x,y) = \frac{u}{u+yx}.f(u+x,x,y);$$

woraus man, indem man $u+x$, $u+2x$, $u+3x$, u. s. w. statt u setzt, weiter

$$(13.)\qquad f(u,x,y) = \frac{u(u+x)(u+2x)\dots(u+(n-1)x)}{(u+yx)(u+yx+x)\dots(u+yx+(n-1)x)}.f(u+nx,x,y)$$

folgert, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Setzt man ferner in dieser Formel $u-nx$ statt u, so erhält man

$$(14.)\qquad f(u,x,y) = \frac{(u+yx-x)(u+yx-2x)\dots(u+yx-nx)}{(u-x)(u-2x)\dots(u-nx)}.f(u-nx,x,y).$$

Nun ist aber

$$(15.)\qquad Fc(u) = \lim_{n=\infty}\left\{n^{-u}.\frac{u(u+1)(u+2)\dots(u+n-1)}{1.2\dots(n-1)}\right\},$$

also, wenn unter w eine beliebig anzunehmende Grösse verstanden wird,

$$(16.)\qquad \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{w}{x}\right)} = \lim_{n=\infty}\left\{n^{-\frac{u}{x}+\frac{w}{x}}.\frac{u(u+x)(u+2x)\dots(u+(n-1)x)}{w(w+x)(w+2x)\dots(w+(n-1)x)}\right\},$$

woraus, wenn man $w-x$ statt u, $u-x$ statt w, $-x$ statt x setzt,

$$(17.)\qquad \frac{Fc\left(1-\frac{w}{x}\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)} = \lim_{n=\infty}\left\{n^{\frac{w}{x}-\frac{u}{x}}.\frac{(w-x)(w-2x)\dots(w-nx)}{(u-x)(u-2x)\dots(u-nx)}\right\}$$

folgt. Hiernach geben die Gleichungen (13.), (16.), wenn man $w = u+yx$ setzt,

$$(18.)\qquad f(u,x,y) = \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}.\lim_{n=\infty}\{n^{-y}.f(u+nx,x,y)\}$$

und die Gleichungen (14.), (17.):

$$(19.)\qquad f(u,x,y) = \frac{Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)}\cdot\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\{n^{-y}.f(u-nx,x,y)\}.$$

Bis hierher sind nur die Gleichungen (1.), (3.) angewandt. Mit Hülfe der zweiten ergiebt sich ferner, da

$$f(u+nx,x,y) = (u+nx)^y.f\left(1,\frac{x}{u+nx},y\right),$$

$$f(u-nx,x,y) = (u-nx)^y.f\left(1,\frac{x}{u-nx},y\right),$$

und

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\{n^{-y}(u+nx)^y\} = x^y.\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left(1+\frac{u}{nx}\right)^y = x^y,$$

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\{n^{-y}(u-nx)^y\} = (-x)^y.\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left(1-\frac{u}{nx}\right)^y = (-x)^y$$

ist:

$$(20.)\qquad f(u,x,y) = x^y\cdot\frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}\cdot\operatorname*{Lim}_{n=\infty}f\left(1,\frac{x}{u+nx},y\right),$$

und

$$(21.)\qquad f(u,x,y) = (-x)^y\cdot\frac{Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)}\cdot\operatorname*{Lim}_{n=\infty}f\left(1,\frac{x}{u-nx},y\right).$$

Setzt man $x = 0$, so können die Gleichungen (1.), (2.), (3.), die dann in

$$f(u,0,y+k) = f(u,0,y)\,f(u,0,k),$$

$$f(ku,0,y) = k^y.f(u,0,y),$$

$$f(u,0,1) = u$$

übergehen, nicht anders befriedigt werden, als wenn man

$$f(u,0,y) = u^y$$

annimmt. Könnte man hieraus folgern, dass $f(u,x,y)$, wenn x seinem numerischen Werthe nach beständig abnimmt, sich unbedingt der Grenze u^y nähern

müsse, so würde die Gleichung (20.)

$$(22.)\qquad f(u,x,y) = x^y\cdot\frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}$$

geben; was mit dem vorhin Bewiesenen, dass $f(u,x,y)$ durch die Gleichungen (1.), (2.), (3.) allein nicht bestimmt sei, im Widerspruch steht. Aber noch mehr. Die Gleichung (21.) würde, unter derselben Voraussetzung,

$$(23.)\qquad f(u,x,y) = (-x)^y\cdot\frac{Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)}$$

geben, und es müsste

$$(-x)^y\cdot\frac{Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)} = x^y\cdot\frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)},$$

$$\frac{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right).Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right).Fc\left(\frac{u}{x}\right)} = (-1)^y$$

sein; was ein offenbar falsches Resultat ist, wie schon daraus erhellt, dass für $u = x$ der Ausdruck links die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, sobald y keine ganze Zahl ist.

Da die Gleichungen (20.), (21.) strenge Folgerungen aus den Gleichungen (1.), (2.), (3.) sind, und dieselben wirklich befriedigt werden, wenn man für $f(u,x,y)$ irgend eine der durch die Formel (9.) gegebenen Functionen annimmt: so kann der hervorgetretene Widerspruch nur in der Voraussetzung seinen Grund haben, dass sich $f(1,x,y)$, wenn der numerische Werth von x unendlich klein wird, unbedingt der Grenze 1 nähere. Diese Annahme ist also unstatthaft.

Dies lässt sich aber auch direct folgendermassen nachweisen.

Setzt man, unter w eine positive reelle Grösse verstehend, in der Formel (9.) wx statt u, und wendet die Relation (2.) an, so erhält man:

$$(24.)\qquad f\left(1,\frac{1}{w},y\right) = 1^y\cdot\frac{Fc(w)}{w^y.Fc(w+y)}\cdot\frac{\varphi(w+y)}{\varphi(w)}.$$

Setzt man aber $-x$ statt x und darauf wx statt u, so ergiebt sich:

$$f\left(1,-\frac{1}{w},y\right)=(-1)^y\cdot\frac{Fc(-w)}{w^y.Fc(-w+y)}\cdot\frac{\varphi(-w+y)}{\varphi(-w)}.$$

In Folge der Formel (10.) ist aber

$$Fc(u).Fc(-u)=-u.u\prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty}\left(1-\frac{u^2}{\alpha^2}\right)=-u\frac{\sin(u\pi)}{\pi},$$

oder, weil $Fc(u)=u.Fc(u+1)$ ist:

$$(25.)\qquad Fc(-u)=-\frac{\sin(u\pi)}{\pi Fc(1+u)};$$

daher ist

$$(26.)\quad f\left(1,-\frac{1}{w},y\right)=(-1)^y\cdot\frac{Fc(1+w-y)}{w^yFc(1+w)}\cdot\frac{\sin(w\pi)}{\sin(w-y)\pi}\cdot\frac{\varphi(-w+y)}{\varphi(-w)},$$

oder, wenn man

$$(-1)^u\frac{\sin(u\pi)}{\varphi(-u)}=\psi(u)$$

setzt, wo dann $\psi(u)$, eben wie $\varphi(u)$, die Eigenschaft hat, dass

$$\psi(u+1)=\psi(u)$$

ist:

$$(27.)\qquad f\left(1,-\frac{1}{w},y\right)=1^y\cdot\frac{Fc(1+w-y)}{w^yFc(1+w)}\cdot\frac{\psi(w)}{\psi(w-y)}.$$

Nun hat man ferner:

$$(28.)\qquad \begin{aligned}Fc(u)&=u(u+1)(u+2)\dots(n+n-1).Fc(u+n),\\ Fc(1)&=1.2.3\dots(n-1).Fc(n),\end{aligned}$$

wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet. Nach (10.) ist $Fc(1)=1$, also

$$\frac{Fc(n)}{Fc(u+n)}\cdot Fc(u)=\frac{u(u+1)\dots(u+n-1)}{1.2\dots(n-1)};$$

woraus, mit Berücksichtigung von (15.),

$$(29.)\qquad \lim_{n=\infty}\left\{\frac{Fc(n)}{n^uFc(n+u)}\right\}=1$$

folgt.

Es sei nun n die grösste in w enthaltene ganze Zahl, und $w=n+w'$, so hat man:

$$\frac{Fc(w)}{w^uFc(w+u)}=\left(\frac{Fc(n)}{n^{u+w'}Fc(n+w'+u)}:\frac{Fc(n)}{n^{w'}Fc(w'+n)}\right)\cdot\left(\frac{w'+n}{n}\right)^{-u},$$

mithin nach (29.)

$$(30.)\qquad \lim_{w=+\infty}\left\{\frac{Fc(w)}{w^uFc(w+u)}\right\}=1.$$

Ebenso ist, weil

$$\frac{Fc(1+w-u)}{w^uFc(1+w)}=\left(1:\frac{Fc(1+w)}{(1+w)^{-u}.Fc(1+w-u)}\right)\cdot\left(\frac{1+w}{w}\right)^u$$

ist,

$$(31.)\qquad \lim_{w=+\infty}\left\{\frac{Fc(1+w-u)}{w^uFc(1+w)}\right\}=1,$$

folglich, gemäss (24.), (30.) und (27.), (31.):

$$(32.)\qquad \begin{cases}\lim\limits_{w=+\infty}f\left(1,\frac{1}{w},y\right)=1^y\lim\limits_{w=+\infty}\left\{\frac{\varphi(w+y)}{\varphi(w)}\right\},\\ \lim\limits_{w=+\infty}f\left(1,-\frac{1}{w},y\right)=1^y\lim\limits_{w=+\infty}\left\{\frac{\psi(w)}{\psi(w-y)}\right\}.\end{cases}$$

Es sind aber $\frac{\varphi(w+y)}{\varphi(w)}$ und $\frac{\psi(w)}{\psi(w-y)}$ beides periodische Functionen von w, und können als solche, wenn w ohne Ende zunimmt, keiner bestimmten Grenze sich nähern, wenn sie sich nicht etwa auf Constanten reduciren. Soll dies für jeden Werth von y geschehen, so müssen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ selber von u unabhängig sein. Das ist aber, weil

$$\psi(u)=(-1)^u\frac{\sin(u\pi)}{\varphi(-u)}$$

ist, für beide gleichzeitig nicht möglich. Mithin können sich die Functionen

$$f(1,x,y)\text{ und }f(1,-x,y),$$

wenn x unendlich klein wird, in keinem Falle beide einer bestimmten Grenze nähern.

3.

Aus dem Vorhergehenden ist zugleich zu ersehen, dass man eine Bestimmung der Function $\varphi(u)$, wie sie zur vollständigen Definition von $f(u,x,y)$ noch nöthig ist, erhält, wenn man festsetzt, es solle sich $f(1,x,y)$ entweder für einen positiven, oder für einen negativen Werth von x, wenn derselbe ohne Ende abnimmt, der Grenze 1^y nähern. Eine dieser Annahmen ist nothwendig, wenn die Analogie der Facultäten mit den Potenzen so viel als möglich behauptet werden soll.

Bei der ersten Annahme muss sich $\varphi(u)$ auf eine Constante reduciren; und wenn man die Function, in welche alsdann $f(u, x, y)$ übergeht, mit Crelle durch $(u, +x)^y$ bezeichnet, so hat man:

$$(u, +x)^y = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}. \tag{33.}$$

Hiernach bedeutet $(u, +x)^y$ eine Function von u, x, y, welche den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} (u, +x)^{y+k} &= (u, +x)^y (u+yx, +x)^k \\ (ku, +kx)^y &= k^y (u, +x)^y \\ (u, +x)^1 &= u \end{aligned}\right. \tag{34.}$$

genügt, und zugleich die Eigenschaft hat, dass sich $(1, +x)^y$ der Grenze 1^y nähert, wenn x, stets positiv bleibend, ohne Ende abnimmt.

Bei der zweiten Annahme muss $\psi(u) = (-1)^u \frac{\sin(u\pi)}{\varphi(-u)}$ eine Constante sein. Dann hat man:

$$f(u, -x, y) = (-x)^y \cdot \frac{Fc\left(-\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(-\frac{u}{x}+y\right)} \cdot \frac{\varphi\left(-\frac{u}{x}+y\right)}{\varphi\left(-\frac{u}{x}\right)} = x^y \cdot \frac{Fc\left(1+\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1+\frac{u}{x}\right)}.$$

Diesen besonderen Ausdruck für $f(u, -x, y)$ will ich durch

$$(u, -x)^y$$

bezeichnen; wobei wohl zu beachten ist, dass man in den Ausdrücken $(u, +x)^y$, $(u, -x)^y$ die Zeichen $(+)$ und $(-)$ vor x nicht als zu x gehörige Vorzeichen betrachten darf, so dass also $(u, -x)^y$ keineswegs die Function bedeutet, in welche $(u, +x)^y$ übergeht, wenn x in $-x$ verwandelt wird, welche vielmehr durch

$$(u, +(-x))^y$$

zu bezeichnen wäre. Es soll vielmehr, ganz in dem Sinne des Urhebers dieser Bezeichnungsweise, durch das $(+)$ oder das $(-)$ vor dem x nur angedeutet werden, dass x mit u in eine gewisse Verbindung trete, die in dem einfachsten Falle, wo y eine ganze positive Zahl,

$$(u, +x)^y = u(u+x)(u+2x)\dots(u+(y-1)x)$$

und

$$(u, -x)^y = u(u-x)(u-2x)\dots(u-(y-1)x)$$

ist, in der That bei dem ersten Ausdrucke durch Addition, so wie bei dem andern durch Subtraction vermittelt wird.

Es ist also

$$(u, -x)^y = x^y \cdot \frac{Fc\left(1+\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1+\frac{u}{x}\right)}, \tag{35.}$$

und es gelten für $(u, -x)^y$ die Grundgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} (u, -x)^{y+k} &= (u, -x)^y (u-yx, -x)^k, \\ (ku, -kx)^y &= k^y (u, -x)^y, \\ (u, -x)^1 &= u, \end{aligned}\right. \tag{36.}$$

zu denen noch die Bestimmung tritt, dass sich $(1, -x)^y$ der Grenze 1^y nähert, wenn x, stets positiv bleibend, ohne Ende abnimmt.

Hierdurch sind nun zwei Arten von Facultäten auf völlig bestimmte Weise definirt, indem für beide analytische Ausdrücke gefunden sind, die für alle Werthe von u, x, y ihre Gültigkeit behalten. Es scheint zweckmässig, beide Formen

$$(u, +x)^y \text{ und } (u, -x)^y$$

beizubehalten, indem man, wenn die Differenz x positiv ist, vorzugsweise die erstere, im entgegengesetzten Falle aber lieber die andere anwendet. Sie hängen übrigens, wie aus (33.), (35.) ersichtlich, sehr einfach zusammen, indem

$$(u, -x)^y = (u-(y-1)x, +x)^y \tag{37.}$$

und

$$(u, +x)^y = (u+(y-1)x, -x)^y \tag{38.}$$

ist. Man hat ferner

$$(u, +(-x))^y = (-x)^y \cdot \frac{Fc\left(-\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(-\frac{u}{x}+y\right)} = (-x)^y \cdot \frac{Fc\left(1+\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1+\frac{u}{x}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{u}{x}\right)\pi}{\sin\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi},$$

also

$$(39.)\qquad (u, +(-x))^y = (-1)^y \cdot \frac{\sin\left(\frac{u}{x}\right)\pi}{\sin\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi} \cdot (u, -x)^y;$$

woraus man sieht, dass $(u, +(-x))^y$ nur dann mit $(u, -x)^y$ gleichbedeutend ist, wenn y eine ganze Zahl ist.

Anm. Wenn man die in der Einleitung angegebene, von Bessel und Ohm aufgestellte Formel für die von ihnen durch $u^{y|x}$ bezeichnete Function entwickelt, so erhält man

$$u^{y|x} = (u, +x)^y,$$
$$u^{y|-x} = (u, -x)^y,$$

wenn in beiden Fällen x positiv ist. Hiernach kann, wie schon bemerkt, $u^{y|x}$ nicht für alle Werthe von x durch einen einzigen analytischen Ausdruck dargestellt werden — abgesehen davon, dass die Definition von $u^{y|x}$ nur für reelle Werthe von x gegeben ist. Ferner ist es zwar dadurch, dass für positive und negative Werthe von x verschiedene Definitionen gegeben werden, erreicht, dass für positive Werthe von u allerdings die Gleichung

$$\operatorname{Lim}_{x=0} u^{y|x} = u^y$$

besteht, sowohl wenn x positiv, als wenn x negativ ist; es gilt aber diese Gleichung nicht mehr für negative Werthe von u, also auch nicht allgemein.

4.

Die bisherigen Erörterungen haben nun zwar zu einer unzweideutigen Definition von

$$(u, +x)^y \text{ und } (u, -x)^y$$

geführt; es sind dazu aber vier Bestimmungen für jede dieser Functionen nöthig gewesen. Dies ist, wie schon aus den im Vorhergehenden ausgeführten Entwicklungen ohne Mühe nachgewiesen werden könnte, mehr, als nöthig.

Ich werde daher jetzt zeigen, wie man, ausgehend von einer ganz allgemeinen Definition von

$$(u, +x)^y \text{ und } (u, -x)^y,$$

die für jede dieser Functionen nur zwei Bestimmungen giebt, auf völlig systematischem Wege zu den Darstellungen derselben durch die Formeln (33.), (35.) gelangt; wodurch zugleich die Grundgleichungen (34.), (36.) gegeben werden.

So wie sich aus dem Begriffe eines Products von gleichen Factoren der allgemeine Begriff der Potenz entwickelt hat, so bildet für die Facultätenlehre die Betrachtung eines Products äquidifferenter Factoren den Ausgangspunkt. Nachdem nun, wenn y eine ganze positive Zahl bedeutet, das Product

$$u(u+x)(u+2x)\dots(u+(y-1)x)$$

durch $(u, +x)^y$ bezeichnet worden ist, findet man, auch ohne dass die Eigenschaften eines solchen Products weiter untersucht werden, indem

$$(u+x, +x)^y = \frac{u+yx}{u} \cdot (u, +x)^y$$

ist, die Differenzen-Gleichung

$$(40.)\qquad \frac{\Delta(u, +x)^y}{(u, +x)^y} = \frac{y\Delta u}{u},$$

wenn sich das Zeichen Δ auf u bezieht, und $\Delta u = x$ angenommmen wird. Gleich wie nun die Betrachtung der Differential-Gleichung

$$\frac{df(u)}{f(u)} = \frac{y\,du}{u}$$

zu der Potenz u^y mit willkürlichem Exponenten führt, so kann man sich die Bestimmung einer Function von u zur Aufgabe stellen, welche der Differenzen-Gleichung

$$(41.)\qquad \frac{\Delta f(u)}{f(u)} = \frac{y\Delta u}{u}$$

bei einem beliebigen Werthe von y genügen soll.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt, wenn $\Delta u = x$ gesetzt wird:

$$f(u+x) - f(u) = \frac{yx}{u} f(u),$$
$$f(u+x) = \frac{u+yx}{u} f(u),$$
$$f(u) = \frac{u}{u+yx} f(u+x);$$

22*

woraus, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, weiter

$$f(u) = \frac{u(u+x)(u+2x)\dots(u+(n-1)x)}{(u+yx)(u+yx+x)\dots(u+(y+n-1)x)}\cdot f(u+nx),$$

oder

$$f(u) = \frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n}\cdot f(u+nx) \tag{42.}$$

folgt. Wenn y eine ganze positive Zahl ist, so kann man, wie gezeigt, $f(u) = (u,+x)^y$ setzen. Dann hat man:

$$(u+nx,+x)^y = (u+nx)^y\cdot\left(1+\frac{x}{u+nx}\right)\left(1+\frac{2x}{u+nx}\right)\dots\left(1+\frac{(y-1)x}{u+nx}\right),$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y} = 1.$$

Dieser Umstand führt darauf, in der Gleichung (42.) $n=\infty$ zu setzen und sie so zu schreiben:

$$f(u) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{(u+nx)^y\cdot\frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n}\right\}\cdot\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y}. \tag{43.}$$

Es ist daher vor allen Dingen nöthig, genauer zu untersuchen, was aus dem Ausdrucke

$$(u+nx)^y\cdot\frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n}$$

wird, wenn die positive ganze Zahl n ohne Ende wächst.

Zu dem Ende schalte ich hier zunächst einige allgemeine Sätze über die Convergenz der unendlichen Producte ein. Dieselben sind zwar, so wie die damit verbundenen Sätze über die Convergenz einer bestimmten Gattung von unendlichen Reihen, zum grossen Theile bekannt. Ich glaube aber, wenn ich gleichwohl ausführlicher darauf eingehe, nicht nur wegen der ganz elementaren Herleitung derselben, die einiges Eigenthümliche haben dürfte, sondern vorzüglich deswegen auf Entschuldigung rechnen zu dürfen, weil ich überall bei den vorkommenden Grössen die Untersuchung nicht auf reelle Werthe derselben einschränken, sondern auch auf complexe (imaginäre) Werthe ausdehnen werde.

5.

Einige Sätze über die Convergenz und Divergenz unendlicher Producte.

(I.) Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \dots$$

sämmtlich reell, positiv und kleiner als Eins sind, und zugleich diese Reihe eine endliche Summe hat, so convergiren die Producte

$$P_n = (1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)\dots(1-u_n)$$
$$Q_n = (1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n),$$

wenn n ohne Ende wächst, beide gegen eine bestimmte, positive Grenze; und zwar das erste beständig abnehmend, das andere beständig zunehmend.

Es ist klar, dass P_n, Q_n beständig positiv sind, und dass die erste Grösse beständig abnimmt, die andere aber zunimmt, wenn n beständig wächst. Es ist daher zum Beweise des aufgestellten Satzes nur nöthig, zu zeigen, dass P_n stets grösser, und Q_n stets kleiner bleibt, als eine gewisse positive Grösse.

Es ist, wenn $a, b, c, d, \dots$ reelle und positive Grössen sind,

$$(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab > 1+a+b$$
$$(1+a)(1+b)(1+c) > (1+a+b)(1+c) > 1+a+b+c$$
$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) > (1+a+b+c)(1+d) > 1+a+b+c+d$$

u. s. w. Dieselben Ungleichheiten bestehen auch, wenn $a, b, c, d, \dots$ sämmtlich negative Grössen, ihrem absoluten Betrage nach aber kleiner als 1 sind.

Ferner kann man, wenn E irgend einen echten positiven Bruch bedeutet, m so gross annehmen, dass die Summe

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\dots+u_{m+r}$$

für jeden Werth von r kleiner als E ist. Dies vorausgesetzt, werde $n=m+r$ gesetzt, wo auch m, r ganze positive Zahlen bedeuten sollen; so ist

$$\frac{P_{m+r}}{P_m} = (1-u_{m+1})(1-u_{m+2})\dots(1-u_{m+r}) > 1-u_{m+1}-u_{m+2}-\dots-u_{m+r} > 1-E,$$

also

$$P_n > P_m(1-E), \quad \text{wenn } n > m;$$

was gezeigt werden sollte.

Ferner ist

$$\frac{1}{Q_n} = \left(1-\frac{u_0}{1+u_0}\right)\left(1-\frac{u_1}{1+u_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u_n}{1+u_n}\right),$$

und da nun, wenn $n > m$, E auch grösser als

$$\frac{u_{m+1}}{1+u_{m+1}}+\cdots+\frac{u_n}{1+u_n}$$

ist, so hat man:

$$\frac{1}{Q_n} > \left(1-\frac{u_0}{1+u_0}\right)\cdots\left(1-\frac{u_m}{1+u_m}\right)(1-E)$$

$$\frac{1}{Q_n} > \frac{1}{Q_m}(1-E),$$

$$Q_n < \frac{Q_m}{1-E}, \quad \text{wenn } n > m.$$

(II.) Wenn dagegen die Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots$$

keine endliche Summe hat, so wird, wenn n ohne Ende zunimmt, P_n, beständig positiv bleibend und abnehmend, sich der Grenze Null nähern, während Q_n über jede Grenze hinaus wächst.

Es ist nämlich

$$Q_n > 1+u_0+u_1+\cdots+u_n,$$

und die Summe $u_0+u_1+\cdots+u_n$ wächst mit n über jede Grenze hinaus. Ferner ist

$$\frac{1}{P_n} = \left(1+\frac{u_0}{1-u_0}\right)\left(1+\frac{u_1}{1-u_1}\right)\cdots\left(1+\frac{u_n}{1-u_n}\right),$$

und die Reihe $\frac{u_0}{1-u_0}, \frac{u_1}{1-u_1}, \ldots$ hat ebenfalls keine endliche Summe. Es nimmt mithin $\frac{1}{P_n}$ gleichzeitig mit n ohne Ende zu, und zwar über jede Grenze hinaus; woraus folgt, dass P_n, beständig abnehmend, sich der Grenze Null nähern muss.

Zusatz. Setzt man

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

so ist

$$P_n = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2.3\ldots n} = \frac{1}{n},$$

also $P_n = 0$ für $n = \infty$. Daraus geht hervor, dass die unendliche Reihe

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

keine endliche Summe haben kann. Wird dagegen

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

gesetzt, so ist

$$P_n = \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2.3\ldots n}\cdot\frac{3.4\ldots(n+1)}{2.3\ldots n} = \frac{n+1}{2n},$$

also $P_n = \frac{1}{2}$ für $n = \infty$. Mithin wird die unendliche Reihe

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \cdots\ \frac{1}{n^2},\ \cdots$$

eine endliche Summe haben.

(III.) Wenn die Glieder der Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots$$

sämmtlich reell sind, und von einem bestimmten Gliede an beständig dasselbe Zeichen behalten und absolut kleiner als 1 bleiben, so wird das Product

$$P_n = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n),$$

wenn n ohne Ende wächst, gegen eine bestimmte endliche Grenze (die, sobald keine der Grössen $u_0, u_1, \ldots$ gleich -1 ist, nicht Null ist) convergiren, wofern die Reihe $u_0, u_1, \ldots$ eine endliche Summe hat.

Wenn aber das Letztere nicht der Fall ist, so wird

$$P_n = \infty \quad \text{oder} \quad P_n = 0 \text{ für } n = \infty$$

sein, je nachdem die Grössen $u_0, u_1, \ldots$ von einer bestimmten an stets positiv oder stets negativ sind.

Alles dies folgt unmittelbar aus den beiden vorhergehenden Sätzen.