Fragmente philosophischen Inhalts.

Die philosophischen Speculationen, deren Ergebnisse, so weit sie sich aus dem Nachlass zusammenstellen lassen, hier mitgetheilt sind, haben Riemann einen grossen Theil seines Lebens hindurch begleitet. Ueber die Zeit der Entstehung der einzelnen Bruchstücke lässt sich schwer etwas Sicheres feststellen. Die vorhandenen Entwürfe sind weit entfernt von einer zusammenhängenden, zur Publication bereiten Ausarbeitung, wenn auch manche Stellen darauf deuten, dass Riemann zu gewissen Zeiten eine solche beabsichtigt hat; sie genügen allenfalls, um den Standpunkt Riemann's zu den psychologischen und naturphilosophischen Fragen im Allgemeinen zu charakterisiren, und den Gang anzudeuten, den seine Untersuchungen genommen haben, leider aber fehlt fast jede Ausführung ins Einzelne. Welchen Werth Riemann selbst diesen Arbeiten beigelegt hat, ergiebt sich aus folgender Notiz:

„Die Arbeiten, welche mich jetzt vorzüglich beschäftigen, sind

1. In ähnlicher Weise wie dies bereits bei den algebraischen Functionen, den Exponential- oder Kreisfunctionen, den elliptischen und Abel'schen Functionen mit so grossem Erfolge geschehen ist, das Imaginäre in die Theorie anderer transcendenter Functionen einzuführen; ich habe dazu in meiner Inauguraldissertation die nothwendigsten allgemeinen Vorarbeiten geliefert. (Vgl. diese Dissertation Art. 20.)

2. In Verbindung damit stehen neue Methoden zur Integration partieller Differentialgleichungen, welche ich bereits auf mehrere physikalische Gegenstände mit Erfolg angewandt habe.

3. Meine Hauptarbeit betrifft eine neue Auffassung der bekannten Naturgesetze — Ausdruck derselben mittelst anderer Grundbegriffe — wodurch die Benutzung der experimentellen Data über die Wechselwirkung zwischen Wärme, Licht, Magnetismus und Electricität zur Erforschung ihres Zusammenhangs möglich wurde. Ich wurde dazu hauptsächlich durch das Studium der Werke Newton's, Euler's und — andererseits — Herbart's geführt. Was letzteren betrifft, so konnte ich mich den frühesten Untersuchungen Herbart's, deren Re-

sultate in seinen Promotions- und Habilitationsthesen (vom 22. u. 23. October 1802) ausgesprochen sind, fast völlig anschliessen, musste aber von dem späteren Gange seiner Speculation in einem wesentlichen Punkte abweichen, wodurch eine Verschiedenheit in Bezug auf seine Naturphilosophie und diejenigen Sätze der Psychologie, welche deren Verbindung mit der Naturphilosophie betreffen, bedingt ist."

Ferner an einer andern Stelle zu genauerer Bezeichnung des Standpunktes:

„Der Verfasser ist Herbartianer in Psychologie und Erkenntnisstheorie (Methodologie und Eidolologie), Herbart's Naturphilosophie und den darauf bezüglichen metaphysischen Disciplinen (Ontologie und Synechologie) kann er meistens nicht sich anschliessen."

Die drei unter dem gemeinsamen Titel „III. Naturphilosophie" vereinigten Fragmente haben in dieser zweiten Auflage eine Umstellung erfahren. Die Nummer 2 der ersten Auflage ist mit Nr. 3 vertauscht worden. Nach einer durch innere Gründe gut unterstützten Vermuthung des Herrn Dr. Isenkrahe in Bonn ist es nämlich der mit der Ueberschrift „Gravitation und Licht" bezeichnete Aufsatz, auf den sich die im Lebenslauf mitgetheilte Stelle eines Briefes von Riemann vom 28. Dec. 1853 bezieht, wonach Riemann eine Veröffentlichung dieser Untersuchungen im Auge hat. Der in ganz anderen Gedankenkreisen sich bewegende Aufsatz „Neue mathematische Principien der Naturphilosophie", mit der Bemerkung „gefunden am 1. März 1853" ist demnach früheren Ursprungs, und die darin ausgesprochene kühne Hypothe des Verschwindens der Materie später von Riemann nicht weiter verfolgt worden.

Nec mea dona tibi studio disperta fideli
Intellecta prius quam sint, contemta relinquas.
Lucretius.

I. Zur Psychologie und Metaphysik.

Mit jedem einfachen Denkact tritt etwas Bleibendes, Substantielles in unsere Seele ein. Dieses Substantielle erscheint uns zwar als eine Einheit, scheint aber (in sofern es der Ausdruck eines räumlich und zeitlich ausgedehnten ist) eine innere Mannigfaltigkeit zu enthalten; ich nenne es daher „Geistesmasse". — Alles Denken ist hiernach Bildung neuer Geistesmassen.

Die in die Seele eintretenden Geistesmassen erscheinen uns als Vorstellungen; ihr verschiedener innerer Zustand bedingt die verschiedene Qualität derselben.

Die sich bildenden Geistesmassen verschmelzen, verbinden oder compliciren sich in bestimmtem Grade, theils unter einander, theils mit älteren Geistesmassen. Die Art und Stärke dieser Verbindungen hängt von Bedingungen ab, die von Herbart nur zum Theil erkannt sind und die ich in der Folge ergänzen werde. Sie beruht hauptsächlich auf der inneren Verwandtschaft der Geistesmassen.

Die Seele ist eine compacte, aufs Engste und auf die mannigfaltigste Weise in sich verbundene Geistesmasse. Sie wächst beständig durch eintretende Geistesmassen, und hierauf beruht ihre Fortbildung.

Die einmal gebildeten Geistesmassen sind unvergänglich, ihre Verbindungen unauflöslich; nur die relative Stärke dieser Verbindungen ändert sich durch das Hinzukommen neuer Geistesmassen.

Die Geistesmassen bedürfen zum Fortbestehen keines materiellen Trägers und üben auf die Erscheinungswelt keine dauernde Wirkung aus. Sie stehen daher in keiner Beziehung zu irgend einem Theile der Materie und haben daher keinen Sitz im Raume.

Dagegen bedarf alles Eintreten, Entstehen, alle Bildung neuer Geistesmassen und alle Vereinigung derselben eines materiellen Trägers. Alles Denken geschieht daher an einem bestimmten Ort.

(Nicht das Behalten unserer Erfahrung, nur das Denken strengt an, und der Kraftaufwand ist, soweit wir dies schätzen können, der geistigen Thätigkeit proportional.)

Jede eintretende Geistesmasse regt alle mit ihr verwandten Geistesmassen an und zwar desto stärker, je geringer die Verschiedenheit ihres inneren Zustandes (Qualität) ist.

Diese Anregung beschränkt sich aber nicht blos auf die verwandten Geistesmassen, sondern erstreckt sich mittelbar auch auf die mit ihnen zusammenhängenden (d. h. in früheren Denkprocessen mit ihnen verbundenen). Wenn also unter den verwandten Geistesmassen ein Theil unter sich zusammenhängt, so werden diese nicht blos unmittelbar, sondern auch mittelbar angeregt und daher verhältnissmässig stärker als die übrigen.

Die Wechselwirkung zweier gleichzeitig sich bildenden Geistesmassen wird bedingt durch einen materiellen Vorgang zwischen den Orten, wo beide gebildet werden. Ebenso treten aus materiellen Ursachen alle sich bildenden Geistesmassen mit unmittelbar vorher gebildeten in unmittelbare Wechselwirkung; mittelbar aber werden alle mit diesen zusammenhängenden älteren Geistesmassen zur Wirksamkeit angeregt, und zwar desto schwächer, je entfernter sie mit ihnen und je weniger sie unter sich zusammenhängen.

Die allgemeinste und einfachste Aeusserung der Wirksamkeit älterer Geistesmassen ist die Reproduction, welche darin besteht, dass die wirkende Geistesmasse eine ihr ähnliche zu erzeugen strebt.

Die Bildung neuer Geistesmassen beruht auf der gemeinschaftlichen Wirkung theils älterer Geistesmassen, theils materieller Ursachen, und zwar hemmt oder begünstigt sich alles gemeinschaftlich Wirkende nach der inneren Ungleichartigkeit oder Gleichartigkeit der Geistesmassen, welche es zu erzeugen strebt.

Die Form der sich bildenden Geistesmasse (oder die Qualität der ihre Bildung begleitenden Vorstellung) hängt ab von der relativen Bewegungsform der Materie, in welcher sie gebildet wird, so dass gleiche Bewegungsform der Materie eine gleiche Form der in ihr gebildeten Geistesmasse bedingt, und umgekehrt gleiche Form der Geistesmasse eine gleiche Bewegungsform der Materie, in welcher sie gebildet ist, voraussetzt.

Sämmtliche gleichzeitig (in unserem Cerebrospinalsystem) sich bildenden Geistesmassen verbinden sich in Folge eines physischen (chemisch-electrischen) Processes zwischen den Orten, wo sie sich bilden.

Jede Geistesmasse strebt eine gleichgeformte Geistesmasse zu erzeugen. Sie strebt also diejenige Bewegungsform der Materie herzustellen, bei welcher sie gebildet ist.

Die Annahme einer Seele als eines einheitlichen Trägers des Bleibenden, welches in den einzelnen Acten des Seelenlebens erzeugt wird (der Vorstellungen), stützt sich

1. auf den engen Zusammenhang und die gegenseitige Durchdringung aller Vorstellungen. Um aber die Verbindung einer bestimmten neuen Vorstellung mit anderen zu erklären, ist die Annahme eines einheitlichen Trägers allein nicht ausreichend; vielmehr muss die Ursache, weshalb sie gerade diese bestimmten Verbindungen in dieser bestimmten Stärke eingeht, in den Vorstellungen, mit welchen sie sich verbindet, gesucht werden. Neben diesen Ursachen aber ist die Annahme eines einheitlichen Trägers aller Vorstellungen überflüssig . . . .

Wenden wir nun diese Gesetze geistiger Vorgänge, auf welche die Erklärung unserer eigenen inneren Wahrnehmung führt, zur Erklärung der auf der Erde wahrgenommenen Zweckmässigkeit, d. h. zur Erklärung des Daseins und der geschichtlichen Entwicklung an.

Zur Erklärung unseres Seelenlebens mussten wir annehmen, dass die in unseren Nervenprocessen erzeugten Geistesmassen als Theile unserer Seele fortdauern, dass ihr innerer Zusammenhang ungeändert fortbesteht, und sie nur in sofern einer Veränderung unterworfen sind, als sie mit anderen Geistesmassen in Verbindung treten.

Eine unmittelbare Consequenz dieser Erklärungsprincipien ist es dass die Seelen der organischen Wesen, d. h. die während ihres Lebens entstandenen compacten Geistesmassen, auch nach dem Tode fortbestehen. (Ihr isolirtes Fortbestehen genügt nicht.) Um aber die planmässige Entwicklung der organischen Natur, bei welcher offenbar die früher gesammelten Erfahrungen den späteren Schöpfungen zur Grundlage dienten, zu erklären, müssen wir annehmen, dass diese Geistesmassen in eine grössere compacte Geistesmasse, die Erdseele, eintreten und dort nach denselben Gesetzen einem höheren Seelenleben dienen, wie die in unseren Nervenprocessen erzeugten Geistesmassen unserem eigenen Seelenleben.

Wie also z. B. bei dem Sehen einer rothen Fläche die in einer Menge einzelner Primitivfasern erzeugten Geistesmassen zu einer einzigen compacten Geistesmasse sich verbinden, welche gleichzeitig in unserem Denken auftritt, so werden auch die in den verschiedenen Individuen eines Pflanzengeschlechts erzeugten Geistesmassen, welche aus einer klimatisch wenig verschiedenen Gegend der Erdoberfläche in die Erdseele eintreten, zu einem Gesammteindruck sich verbinden. Wie die verschiedenen Sinneswahrnehmungen von demselben Gegenstande sich in unserer Seele zu einem Bilde desselben vereinigen, so werden sämmtliche Pflanzen eines Theils der Erdoberfläche der Erdseele ein bis ins Feinste ausgearbeitetes Bild von dem klimatischen und chemischen Zustande desselben geben. Auf diese Weise erklärt sich, wie aus dem früheren Leben der Erde sich der Plan zu späteren Schöpfungen entwickelt.

Aber nach unseren Erklärungsprincipien bedarf zwar das Fortbestehen vorhandener Geistesmassen keines materiellen Trägers, aber alle Verbindung derselben, wenigstens alle Verbindung verschiedenartiger Geistesmassen kann nur mittelst neuer in einem gemeinschaftlichen Nervenprocesse erzeugter Geistesmassen geschehen.

Aus Gründen, die später entwickelt werden sollen, können wir das Substrat einer geistigen Thätigkeit nur in der ponderablen Materie suchen.

Nun ist es eine Thatsache, dass die starre Erdrinde und alles Ponderable über ihr nicht einem gemeinschaftlichen geistigen Processe dient, sondern die Bewegungen dieser ponderablen Massen aus andern Ursachen erklärt werden müssen.

Hiernach bleibt nur die Annahme übrig, dass die ponderablen Massen innerhalb der erstarrten Erdrinde Träger des Seelenlebens der Erde sind.

Sind diese dazu geeignet? Welches sind die äusseren Bedingungen für die Möglichkeit des Lebensprocesses? Die allgemeinen Erfahrungen über die unserer Beobachtung zugänglichen Lebensprocesse müssen dabei die Grundlage bilden; aber nur in soweit es uns gelingt, sie zu erklären, können wir daraus Schlüsse ziehen, welche auch auf andere Erscheinungskreise anwendbar sind.

Die allgemeinen Erfahrungen über die äusseren Bedingungen des Lebensprocesses in dem uns zugänglichen Erscheinungskreise sind:

1. Je höher und vollständiger entwickelt der Lebensprocess, desto mehr bedürfen die Träger desselben des Schutzes gegen äussere Bewegungsursachen, welche die relative Lage der Theile zu verändern streben.

2. Die uns bekannten physikalischen Processe (Stoffwechsel), welche dem Denkprocesse als Mittel dienen:

a) Absorption von elastischen durch liquide Flüssigkeiten.

b) Endosmose.

c) Bildung und Zersetzung von chemischen Verbindungen.

d) galvanische Ströme.

3. Die Stoffe in den Organismen haben keine erkennbare krystallinische Structur, sie sind theils fest (sehr wenig spröde), theils

gelatinös, theils liquide oder elastische Flüssigkeiten, immer aber porös, d. h. von elastischen Flüssigkeiten merklich durchdringbar.

4. Unter allen chemischen Elementen sind nur die vier sogenannten organischen allgemeine Träger des Lebensprocesses, und von diesen sind wieder ganz bestimmte Verbindungen, die sogenannten organisirenden, Bestandtheile der organischen Körper (Proteinstoffe, Cellulose etc.).

5. Die organischen Verbindungen bestehen nur bis zu einer bestimmten oberen Temperaturgrenze, und nur bis zu einer bestimmten unteren können sie Träger des Lebensprocesses sein.

ad. 1. Veränderungen in der relativen Lage der Theile werden in stufenweise geringerem Grade bewirkt durch mechanische Kräfte, durch Temperaturänderungen, durch Lichtstrahlen; hiernach können wir die Thatsachen, deren allgemeiner Ausdruck unser Satz ist, folgendermassen ordnen:

1. Die Fortpflanzbarkeit der niederen Organismen durch Theilung. Die bei den höheren Thierorganismen allmählich abnehmende Reproductionsfähigkeit.

2. Die Theile der Pflanze sind gegen Temperaturänderungen desto empfindlicher, je intensiver und je höher entwickelt der Lebensprocess in ihnen ist. In den höheren Thierorganismen herrscht, und zwar in den wichtigsten Theilen am vollkommensten, eine fast constante Wärme.

3. Die Theile des Nervensystems, welche selbständiger Denkthätigkeit dienen, sind gegen alle diese Einflüsse möglichst geschützt.

Die zuerst aufgeführte Thatsache hat ihren Grund offenbar darin, dass die relative Lage der Theile desto eher von Vorgängen im Innern der Materie bestimmt werden kann, je weniger sie von äusseren Bewegungsursachen bestimmt wird. Diese Unabhängigkeit von äusseren Bewegungsursachen findet aber innerhalb der Erdrinde in einem weit höheren Grade statt, als es sich durch organische Einrichtungen ausserhalb der Erdrinde irgend erreichen liess.

Unter den folgenden Thatsachen, welche wir im Zusammenhang betrachten, sind die unter 4. und 5. zusammengestellten anscheinend unserer Annahme entgegen; in der That würden sie es sein, wenn diesen von uns wahrgenommenen Bedingungen für die Möglichkeit eines Lebensprocesses eine absolute Gültigkeit beizulegen wäre und nicht bloss eine relative für unsern Erfahrungskreis. Gegen ersteres aber sprechen folgende Gründe:

1. Man müsste alsdann die ganze Natur, mit Ausnahme der Erdoberfläche für todt halten, denn auf allen andern Himmelskörpern

herrschen Wärme- und Druckverhältnisse, unter welchen die organischen Verbindungen nicht bestehen können.

2. Es ist ungereimt, anzunehmen, dass auf der erstarrten Erdrinde Organisches aus Unorganischem entstanden sei. Um das Entstehen der niedersten Organismen auf der Erdrinde zu erklären, muss man schon ein organisirendes Princip, also einen Denkprocess unter Bedingungen annehmen, unter welchen die organischen Verbindungen nicht bestehen konnten.

Wir müssen daher annehmen, dass diese Bedingungen nur für den Lebensprocess unter den jetzigen Verhältnissen auf der Oberfläche der Erde gültig sind, und nur in soweit es uns gelingt, sie zu erklären, können wir daraus die Möglichkeit des Lebensprocesses unter anderen Verhältnissen beurtheilen.

Weshalb also sind nur die vier organischen Elemente allgemeine Träger des Lebensprocesses? Der Grund kann nur in Eigenschaften gesucht werden, durch welche sich diese vier Elemente von allen übrigen unterscheiden.

1. Eine solche allgemeine Eigenschaft dieser vier Elemente findet sich nun darin, dass sie und ihre Verbindungen von allen Stoffen am schwersten und zum Theil bis jetzt gar nicht condensirt werden können.

2. Eine andere gemeinsame Eigenschaft derselben ist die grosse Mannigfaltigkeit ihrer Verbindungen und deren leichte Zersetzbarkeit. Diese Eigenschaft könnte aber ebenso wohl Folge, als Grund ihrer Verwendung zu Lebensprocessen sein.

Dass aber die erstere Eigenschaft, schwer condensirt werden zu können, diese vier Elemente vorzugsweise geeignet macht, Lebensprocessen zu dienen, wird einigermassen schon unmittelbar aus den unter 2. und 3. zusammengestellten thatsächlichen Bedingungen des Lebensprocesses erklärlich, noch mehr aber wenn man die Erscheinungen bei der Condensation der Gase zu liquiden Flüssigkeiten und festen Körpern auf Ursachen zurück zu führen sucht. . . .

Zend-Avesta in der That ein lebendig machendes Wort*), neues Leben schaffend unserem Geiste im Wissen wie im Glauben; denn wie mancher Gedanke, welcher, einst zwar im Entwicklungsgang der Menschheit mächtig wirkend, nur durch Ueberlieferung in uns fortdauerte, ersteht jetzt auf einmal aus seinem Scheintode in reinerer Form zu neuem Leben, neues Leben enthüllend in der Natur. Denn wie unermesslich erweitert sich vor unserm Blick das Leben der Natur,

*) Vgl. Fechner, Zend-Avesta, I, Vorrede S. V.

welches bisher nur auf der Oberfläche der Erde sich ihm kund that, wie unaussprechlich erhabener erscheint es als bisher. Was wir als den Sitz sinn- und bewusstlos wirkender Kräfte betrachteten, das erscheint jetzt als die Werkstatt der höchsten geistigen Thätigkeit. In wunderbarer Weise erfüllt sich, was unser grosser Dichter als das Ziel, welches dem Geist des Forschers vorschwebte, in vorschauender Begeisterung geschildert hat.

Wie Fechner in seiner Nanna die Beseeltheit der Pflanzen darzuthun sucht, so ist der Ausgangspunkt seiner Betrachtungen im Zend-Avesta die Lehre von der Beseeltheit der Gestirne. Die Methode, deren er sich bedient, ist nicht die Abstraction allgemeiner Gesetze durch die Induction und die Anwendung und Prüfung derselben in der Naturerklärung, sondern die Analogie. Er vergleicht die Erde mit unserem eigenen Organismus, von welchem wir wissen, dass er beseelt ist. Er sucht dabei nicht blos einseitig die Aehnlichkeiten auf, sondern lässt auch ebenso sehr den Unähnlichkeiten ihr Recht angedeihen, und kommt so zu dem Resultat, dass alle Aehnlichkeiten darauf hinweisen, dass die Erde ein beseeltes Wesen, alle Unähnlichkeiten aber darauf, dass sie ein weit höher stehendes beseeltes Wesen, als wir, sei. Die überzeugende Kraft dieser Darstellung liegt in ihrer allseitigen Durchführung im Einzelnen. Der Gesammteindruck des vor uns aufgerollten Bildes von dem Leben der Erde muss der Ansicht Evidenz geben und ersetzen, was den einzelnen Schlüssen an Strenge fehlt. Diese Evidenz beruht wesentlich auf der Anschaulichkeit des Bildes, auf seiner grösstmöglichen Ausführung ins Einzelne. Ich würde daher der Fechner'schen Ansicht zu schaden glauben, wenn ich hier den Gang, welchen er in seinem Werke nimmt, im Auszug darzulegen versuchte. Bei der folgenden Besprechung der Fechner-schen Ansichten werde ich also von der Form, in welcher sie vorgetragen sind, absehen und nur das Substantielle derselben ins Auge fassen, und mich dabei auf die erstere Methode, die Abstraction allgemeiner Gesetze durch Induction und ihre Bewährung in der Naturerklärung stützen.

Fragen wir zunächst: woraus schliessen wir die Beseeltheit eines Dinges (das Stattfinden eines fortdauernden einheitlichen Denkprocesses in ihm)? Unserer eigenen Beseeltheit sind wir unmittelbar gewiss, bei Anderen (Menschen und Thieren) schliessen wir sie aus individuellen zweckmässigen Bewegungen.

Ueberall, wo wir wohlgeordnete Zweckmässigkeit auf eine Ursache zurückführen, suchen wir diese Ursache in einem Denkprocesse; eine andere Erklärung haben wir nicht. Das Denken selbst aber kann ich wenigstens nur für einen Vorgang im Innern der ponderablen Materie halten. Die Unmöglichkeit, das Denken aus räumlichen Bewegungen der Materie zu erklären, wird bei einer unbefangenen Zergliederung der inneren Wahrnehmung wohl Jedermann einleuchten; doch mag die abstracte Möglichkeit einer solchen Erklärung hier zugegeben werden.

Dass auf der Erde Zweckmässigkeit wahrgenommen werde, wird Niemand läugnen. Es fragt sich also: wohin haben wir den Denkprocess, welcher die Ursache dieser Zweckmässigkeit ist, zu verlegen?

Es ist hier nur von bedingten (in begrenzten Zeiten und Räumen stattfindenden) Zwecken die Rede; unbedingte Zwecke finden ihre Erklärung in einem ewigen (nicht in einem Denkprocess erzeugten) Wollen. Die einzige Zweckmässigkeit, deren Ursache wir wahrnehmen, ist die Zweckmässigkeit unserer eigenen Handlungen. Sie entspringt aus dem Wollen der Zwecke und dem Nachdenken über die Mittel.

Finden wir nun einen aus ponderabler Materie bestehenden Körper, in welchem ein System von fortlaufenden Zweck- und Wirkungsbezügen vollkommen zum Abschluss kommt, so können wir zur Erklärung dieser Zweckmässigkeit einen fortwährenden einheitlichen Denkprocess in demselben annehmen; und diese Hypothese wird die wahrscheinlichste sein, wenn 1) die Zweckmässigkeiten nicht schon in Theilen des Körpers zum Abschluss kommen, und 2) kein Grund vorhanden ist, die Ursache derselben in einem grösseren Ganzen, welchem der Körper angehört, zu suchen.

Wenden wir dies auf die in Menschen, Thieren und Pflanzen wahrgenommene Zweckmässigkeit an, so ergiebt sich, dass ein Theil dieser Zweckmässigkeiten aus einem Denkprocess im Innern dieser Körper zu erklären ist, ein anderer Theil, die Zweckmässigkeit des Organismus, aber aus einem Denkprocess in einem grösseren Ganzen.

Die Gründe hierfür sind:

1. Die Zweckmässigkeit der organischen Einrichtungen findet nicht in den einzelnen Organismen ihren Abschluss. Die Gründe für die Einrichtung des menschlichen Organismus sind offenbar in der Beschaffenheit der ganzen Erdoberfläche, die organische Natur mit eingerechnet, zu suchen.

2. Die organischen Bewegungen wiederholen sich unzählbar, theils in verschiedenen Individuen neben einander, theils in dem Leben eines Individuums oder eines Geschlechts nach einander. Für die Zweckmässigkeit, welche in ihnen für sich schon liegt, ist also nicht in jedem Fall eine besondere, sondern eine gemeinsame Ursache anzunehmen.

3. Die organischen Einrichtungen erhalten theils (bei Menschen und Thieren) im Leben der einzelnen Individuen, theils (bei Pflanzen und Embryonen) im Leben der einzelnen Geschlechter keine Fortbildung. Die Ursache ihrer **Zweckmässigkeit** ist also nicht in einem gleichzeitig fortlaufenden Denkprocess zu suchen.

Nach Abzug dieser (organischen) Zweckmässigkeiten bleibt nun bei Menschen und Thieren anerkannter Maassen, bei Pflanzen nach Fechner's Ansicht, noch ein abgeschlossenes System in einander greifender veränderlicher Zweck- und Wirkungsbezüge übrig; und diese Zweckmässigkeit ist aus einem einheitlichen Denkprocesse in ihnen zu erklären.

Diese Folgerungen aus unseren Principien werden durch unsere innere Wahrnehmung bestätigt.

Nach denselben Principien aber müssen wir die Ursache der in den Organismen wahrgenommenen Zweckmässigkeiten in einem einheitlichen Denkprocesse in der Erde suchen aus folgenden Gründen:

a) Die Zweck- und Wirkungsbezüge in dem organischen Leben auf der Erde zerfallen nicht in einzelne Systeme, sondern es greift Alles in einander. Sie können daher nicht aus mehreren besonderen Denkprocessen in Theilen der Erde erklärt werden.

b) Es ist, so weit unsere Erfahrung reicht, kein Grund vorhanden, die Ursachen dieser Zweckmässigkeiten in einem grösseren Ganzen zu suchen. Alle Organismen sind nur zum Leben auf der Erde bestimmt. Der Zustand der Erdrinde enthält daher sämmtliche (äussere) Gründe ihrer Einrichtung.

c) Sie sind individuell. Nach Allem, was die Erfahrung darüber lehrt, müssen wir annehmen, dass sie sich auf andern Himmelskörpern nicht wiederholen.

d) Sie bleiben nicht während des Lebens der Erde. Es treten vielmehr im Lauf desselben immer neue, vollkommenere Organismen auf. Wir müssen also die Ursache in einem gleichzeitig zu höheren Stufen fortschreitenden Denkprocesse suchen.

Vom Standpunkt der exacten Naturwissenschaft, der Natur-Erklärung aus Ursachen ist also die Annahme einer Erdseele eine Hypothese zur Erklärung des Daseins und der geschichtlichen Entwicklung der organischen Welt.

„Wenn der Leib der niederen Seele stirbt", sagt Fechner, „nimmt die obere Seele sie aus ihrem Anschauungsleben in ihr Erinnerungsleben auf.“ Die Seelen der gestorbenen Geschöpfe sollen also die Elemente bilden für das Seelenleben der Erde.

Die verschiedenen Denkprocesse scheinen sich hauptsächlich zu unterscheiden durch ihren zeitlichen Rhythmus. Wenn die Pflanzen beseelt sind, so müssen Stunden und Tage für sie sein, was für uns Secunden sind; der entsprechende Zeitraum für die Erdseele, wenigstens für ihre Thätigkeit nach aussen, umfasst vielleicht viele Jahrtausende. Soweit die geschichtliche Erinnerung der Menschheit reicht, sind alle Bewegungen der unorganischen Erdrinde wohl noch aus mechanischen Gesetzen zu erklären.

Antinomien.

	Thesis.	Antithesis.
	Endliches, Vorstellbares.	Unendliches, Begriffssysteme, die an der Grenze des Vorstellbaren liegen.
I.	Endliche Zeit- und Raumelemente.	Stetiges.
II.	Freiheit, d. h. nicht das Vermögen, absolut anzufangen, sondern zwischen zwei oder mehreren gegebenen Möglichkeiten zu entscheiden.	Determinismus.
	Damit trotz völlig bestimmter Gesetze des Wirkens der Vorstellungen Entscheidung durch Willkür möglich sei, muss man annehmen, dass der psychische Mechanismus selbst die Eigenthümlichkeit hat oder wenigstens in seiner Entwicklung annimmt, die Nothwendigkeit derselben herbeizuführen.	Niemand kann beim Handeln die Ueberzeugung aufgeben, dass die Zukunft durch sein Handeln mitbestimmt wird.
III.	Ein zeitlich wirkender Gott (Weltregierung).	Ein zeitloser, persönlicher, allwissender, allmächtiger, allgütiger Gott (Vorsehung).
IV.	Unsterblichkeit.	Ein unserer zeitlichen Erscheinung zu Grunde liegendes Ding an sich mit transcendentaler Freiheit, radicalem Bösen, intelligiblem Charakter ausgestattet.
	Freiheit ist sehr wohl vereinbar mit strenger Gesetzmässigkeit des Naturlaufs. Aber der Begriff eines zeitlosen Gottes ist daneben nicht haltbar. Es muss vielmehr die Beschränkung, welche Allmacht und Allwissenheit durch die Freiheit der Geschöpfe in der oben festgestellten Bedeutung erleiden, aufgehoben werden durch die Annahme eines zeitlich wirkenden Gottes, eines Lenkers der Herzen und Geschicke der Menschen, der Begriff der Vorsehung muss ergänzt und zum Theil ersetzt werden durch den Begriff der Weltregierung.	

Allgemeines Verhältniss der Begriffssysteme der Thesis und Antithesis.

Die Methode, welche Newton zur Begründung der Infinitesimalrechnung anwandte, und welche seit Anfang dieses Jahrhunderts von den besten Mathematikern als die einzige anerkannt worden ist, welche sichere Resultate liefert, ist die Grenzmethode. Die Methode besteht darin, dass man statt eines stetigen Uebergangs von einem Werth einer Grösse zu einem andern, von einem Orte zu einem andern, oder überhaupt von einer Bestimmungsweise eines Begriffs zu einer andern zunächst einen Uebergang durch eine endliche Anzahl von Zwischenstufen betrachtet und dann die Anzahl dieser Zwischenstufen so wachsen lässt, dass die Abstände zweier aufeinanderfolgender Zwischenstufen sämmtlich ins Unendliche abnehmen.

Die Begriffssysteme der Antithesis sind zwar durch negative Prädicate fest bestimmte Begriffe, aber nicht positiv vorstellbar.

Eben deshalb, weil ein genaues und vollständiges Vorstellen dieser Begriffssysteme unmöglich ist, sind sie der directen Untersuchung und Bearbeitung durch unser Nachdenken unzugänglich. Sie können aber als an der Grenze des Vorstellbaren liegend betrachtet werden, d. h. man kann ein innerhalb des Vorstellbaren liegendes Begriffssystem bilden, welches durch blosse Aenderung der Grössenverhältnisse in das gegebene Begriffssystem übergeht. Von den Grössenverhältnissen abgesehen, bleibt das Begriffssystem bei dem Uebergang zur Grenze ungeändert. In dem Grenzfall selbst aber verlieren einige von den Correlativbegriffen des Systems ihre Vorstellbarkeit, und zwar solche, welche die Beziehung zwischen andern Begriffen vermitteln.

II. Erkenntnisstheoretisches.

Versuch einer Lehre von den Grundbegriffen der Mathematik und Physik als Grundlage für die Naturerklärung.

Naturwissenschaft ist der Versuch, die Natur durch genaue Begriffe aufzufassen.

Nach den Begriffen, durch welche wir die Natur auffassen, werden nicht bloss in jedem Augenblick die Wahrnehmungen ergänzt, sondern auch künftige Wahrnehmungen als nothwendig, oder, insofern das Begriffssystem dazu nicht vollständig genug ist, als wahrscheinlich vorher bestimmt; es bestimmt sich nach ihnen, was „möglich" ist (also auch was „nothwendig" oder wessen Gegentheil unmöglich ist) und es kann der Grad der Möglichkeit (der „Wahrscheinlichkeit") jedes einzelnen nach ihnen möglichen Ereignisses, wenn sie genau genug sind, mathematisch bestimmt werden.

Tritt dasjenige ein, was nach diesen Begriffen nothwendig oder wahrscheinlich ist, so werden sie dadurch bestätigt, und auf dieser Bestätigung durch die Erfahrung beruht das Zutrauen, welches wir ihnen schenken. Geschieht aber Etwas, was nach ihnen nicht erwartet wird, also nach ihnen unmöglich oder unwahrscheinlich ist, so entsteht die Aufgabe, sie so zu ergänzen oder, wenn nöthig, umzuarbeiten, dass nach dem vervollständigten oder verbesserten Begriffssystem das Wahrgenommene aufhört, unmöglich oder unwahrscheinlich zu sein. Die Ergänzung oder Verbesserung des Begriffssystems bildet die „Erklärung" der unerwarteten Wahrnehmung. Durch diesen Process wird unsere Auffassung der Natur allmählich immer vollständiger und richtiger, geht aber zugleich immer mehr hinter die Oberfläche der Erscheinungen zurück.

Die Geschichte der erklärenden Naturwissenschaften, soweit wir sie rückwärts verfolgen können, zeigt, dass dieses in der That der Weg ist, auf welchem unsere Naturerkenntniss fortschreitet. Die Begriffssysteme, welche ihnen jetzt zu Grunde liegen, sind durch allmähliche Umwandlung älterer Begriffssysteme entstanden, und die Gründe, welche zu neuen Erklärungsweisen trieben, lassen sich stets auf Widersprüche oder Unwahrscheinlichkeiten, die sich in den älteren Erklärungsweisen herausstellten, zurückführen.

Die Bildung neuer Begriffe, soweit sie der Beobachtung zugänglich ist, geschieht also durch jenen Process.

Es ist nun von Herbart der Nachweis geliefert worden, dass auch die zur Weltauffassung dienenden Begriffe, deren Entstehung wir weder in der Geschichte, noch in unserer eigenen Entwicklung verfolgen können, weil sie uns unvermerkt mit der Sprache überliefert werden, sämmtlich, in soweit sie mehr sind als blosse Formen der Verbindung der einfachen sinnlichen Vorstellungen, aus dieser Quelle abgeleitet werden können und daher nicht (wie nach Kant die Kategorien) aus einer besonderen aller Erfahrung voraufgehenden Beschaffenheit der menschlichen Seele hergeleitet zu werden brauchen.

Dieser Nachweis ihres Ursprungs in der Auffassung des durch die sinnliche Wahrnehmung Gegebenen ist für uns deshalb wichtig, weil nur dadurch ihre Bedeutung in einer für die Naturwissenschaft genügenden Weise festgestellt werden kann....

Nachdem der Begriff für sich bestehender Dinge gebildet worden ist, entsteht nun beim Nachdenken über die Veränderung, welche dem Begriffe des für sich Bestehens widerspricht, die Aufgabe, diesen schon bewährten Begriff so weit als möglich aufrecht zu erhalten. Hieraus entspringen gleichzeitig der Begriff der stetigen Veränderung, und der Begriff der Causalität.

Beobachtet wird nur ein Uebergang eines Dinges aus einem Zustand in einen anderen, oder, allgemeiner zu reden, aus einer Bestimmungsweise in eine andere, ohne dass dabei ein Sprung wahrgenommen wird. Bei der Ergänzung der Wahrnehmungen kann man nun entweder annehmen, dass der Uebergang durch eine sehr grosse aber endliche Anzahl für unsere Sinne unmerklicher Sprünge geschieht, oder dass das Ding durch alle Zwischenstufen aus dem einen Zustand in den andern übergeht. Der stärkste Grund für die letztere Auffassung liegt in der Forderung, den schon bewährten Begriff des für sich Bestehens der Dinge soweit als möglich aufrecht zu erhalten. Freilich ist es nicht möglich, sich einen Uebergang durch alle Zwischenstufen wirklich vorzustellen, was aber, wie bemerkt, genau genommen von allen Begriffen gilt.

Zugleich aber wird nach dem früher gebildeten und in der Erfahrung bewährten Begriffe des für sich Bestehens der Dinge geschlossen, das Ding würde bleiben, was es ist, wenn nichts Anderes hinzukäme. Hierin liegt der Antrieb, zu jeder Veränderung eine Ursache zu suchen.

I. Wann ist unsere Auffassung der Welt wahr?

„Wenn der Zusammenhang unserer Vorstellungen dem Zusammenhange der Dinge entspricht."

Die Elemente unseres Bildes von der Welt sind von den entsprechenden Elementen des abgebildeten Realen gänzlich verschieden. Sie sind etwas in uns; die Elemente des Realen etwas ausser uns. Aber die Verbindungen zwischen den Elementen im Bilde und im Abgebildeten müssen übereinstimmen, wenn das Bild wahr sein soll. Die Wahrheit des Bildes ist unabhängig von dem Grade der Feinheit des Bildes; sie hängt nicht davon ab, ob die Elemente des Bildes grössere oder kleinere Mengen des Realen repräsentiren. Aber die Verbindungen müssen einander entsprechen; es darf nicht im Bilde eine unmittelbare Wirkung zweier Elemente auf einander angenommen werden, wo in der Wirklichkeit nur eine mittelbare stattfindet. In diesem Falle würde das Bild falsch sein und der Berichtigung bedürfen; wird dagegen ein Element des Bildes durch eine Gruppe von feineren Elementen ersetzt, so dass seine Eigenschaften theils aus einfacheren Eigenschaften der feineren Elemente, theils aber aus ihrer Verbindung sich ergeben und also zum Theil begreiflich werden, so wächst dadurch zwar unsere Einsicht in den Zusammenhang der Dinge, aber ohne dass die frühere Auffassung für falsch erklärt werden müsste.

II. Woraus soll der Zusammenhang der Dinge gefunden werden?

„Aus dem Zusammenhange der Erscheinungen."

Die Vorstellung von Sinnendingen in bestimmten räumlichen und zeitlichen Verhältnissen ist dasjenige, was beim absichtlichen Nachdenken über die Natur vorgefunden wird oder für dasselbe gegeben ist. Es ist jedoch bekanntlich die Qualität der Merkmale der Sinnendinge, Farbe, Klang, Ton, Geruch, Geschmack, Wärme oder Kälte, etwas lediglich unserer Empfindung Entnommenes, ausser uns nicht Existirendes.

Dasjenige, woraus der Zusammenhang der Dinge erkannt werden muss, sind also quantitative Verhältnisse, die räumlichen und zeitlichen Verhältnisse der Sinnendinge und die Intensitätsverhältnisse der Merkmale und ihrer Qualitätsunterschiede.

Aus dem Nachdenken über den beobachteten Zusammenhang dieser Grössenverhältnisse muss sich die Erkenntniss des Zusammenhangs der Dinge ergeben.

Causalität.

I. Was ein Agens zu bewirken strebt, muss durch den Begriff des Agens bestimmt sein; seine Action kann von nichts Anderem als von seinem eigenen Wesen abhängen.

II. Dieser Forderung wird genügt, wenn das Agens sich selbst zu erhalten oder herzustellen strebt.

III. Eine solche Action ist aber nicht denkbar, wenn das Agens ein Ding, ein Seiendes ist, sondern nur, wenn es ein Zustand oder ein Verhältniss ist. Findet ein Streben, etwas zu erhalten oder herzustellen Statt, so müssen auch Abweichungen, und zwar in verschiedenen Graden, von diesem Etwas möglich sein; und es wird in der That, in sofern dieser Bestrebung andere Betrebungen widerstreiten, nur möglichst nahe erhalten oder hergestellt werden. Es giebt aber keine Grade des Seins, eine gradweise Verschiedenheit ist nur von Zuständen oder Verhältnissen denkbar. Wenn also ein Agens sich selbst zu erhalten oder herzustellen strebt, so muss es ein Zustand oder ein Verhältniss sein.

IV. Eine solche Action eines Zustandes kann selbstredend nur auf solche Dinge stattfinden, die eines gleichen Zustandes fähig sind. Auf welche von diesen Dingen sie aber stattfindet und ob sie überhaupt stattfindet, kann aus dem Begriff des Agens nicht geschlossen werden.*)

*) Diese Sätze gelten nur, wenn einem einfachen Realgrund das Wirken zugeschrieben werden soll.

Wenn zwei Dinge *a* und *b* durch einen äusseren Grund in Verbindung treten, so kann entweder an die Verbindung, das Verbundensein, selbst, oder auch an die Veränderung ihres Grades, eine Folge *c* geknüpft sein. Die einfachste Annahme ist, dass die Folge *c* an das Verbundensein geknüpft ist.

Es ist unnöthig, diese Betrachtungen weiter fortzuführen. Ihr Princip besteht darin, dass man den Satz festhält: „Was ein Agens zu bewirken strebt, muss durch den Begriff des Agens bestimmt sein", diesen Satz aber nicht, wie Leibnitz oder Spinoza auf Wesen mit einer Mannigfaltigkeit von Bestimmungen, sondern auf Realgründe von möglichst grösster Einfachheit anwendet.

Man pflegt im Deutschen sowohl actio als effectus durch Wirkung zu übersetzen. Da das Wort in der letzteren Bedeutung viel häufiger vorkommt, so entsteht leicht eine Undeutlichkeit, wenn man es für actio braucht, wie z. B. bei der gebräuchlichen Uebersetzung von „actio aequalis est reactioni", „principium actionis minimae". Kant sucht sich dadurch zu helfen, dass er neben Wirkung, Wechselwirkung, den lateinischen Ausdruck actio, actio mutua in Klammern hinzufügt. Man könnte vielleicht sagen: „die Kraft ist gleich der Gegenkraft", „Satz vom kleinsten Kraftaufwande". Da aber in der That uns ein einfacher Ausdruck für agere, ein auf etwas Anderes gerichtetes Streben, fehlt, so möge mir der Gebrauch des Fremdworts gestattet sein.

Sehr richtig bemerkt Kant, dass durch die Zergliederung des Begriffs von einem Dinge weder gefunden werden könne, dass es sei, noch dass es die Ursache von etwas Anderem sei, dass also die Begriffe des Seins und der Causalität nicht analytisch seien und nur aus der Erfahrung entnommen werden können. Wenn er aber später sich zu der Annahme genöthigt glaubt, dass der Causalbegriff aus einer aller Erfahrung vorausgehenden Beschaffenheit des erkennenden Subjects stamme, und ihn deshalb zu einer blossen Regel der Zeitfolge stempelt, durch welche in der Erfahrung mit jeder Wahrnehmung als Ursache jede beliebige andere als Wirkung verknüpft werden könnte, so heisst dies das Kind mit dem Bade ausschütten. (Freilich müssen wir die Causalitätsverhältnisse aus der Erfahrung entnehmen; aber wir dürfen nicht darauf verzichten, unsere Auffassung dieser Erfahrungsthatsachen durch Nachdenken zu berichtigen und zu ergänzen.)

Das Wort Hypothese hat jetzt eine etwas andere Bedeutung als bei Newton. Man pflegt jetzt unter Hypothese Alles zu den Erscheinungen Hinzugedachte zu verstehen.

Newton war weit entfernt von dem ungereimten Gedanken, als könne die Erklärung der Erscheinungen durch Abstraction gewonnen werden.

Newton: Et haec de deo; de quo utique ex phaenomenis disserere ad philosophiam experimentalem pertinet. Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex phaenomenis nondum potui deducere, et Hypotheses non fingo. Quicquid enim ex Phaenomenis non deducitur, Hypothesis vocanda est.

Arago, Oeuvres complètes T. 3. 505:

Une fois, une seule fois Laplace s'élança dans la region des conjectures. Sa conception ne fut alors rien moins qu'une cosmogonie.

Laplace auf Napoleon's Frage, weshalb in seiner Méc. cél. der Name Gottes nicht vorkomme: Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.

Die Unterscheidung, welche Newton zwischen Bewegungsgesetzen oder Axiomen und Hypothesen macht, scheint mir nicht haltbar. Das Trägheitsgesetz ist die Hypothese: Wenn ein materieller Punkt allein in der Welt vorhanden wäre und sich im Raum mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegte, so würde er diese Geschwindigkeit beständig behalten.

III. Naturphilosophie.

I. Molecularmechanik.

Die freie Bewegung eines Systems materieller Punkte m_1, $m_2 \ldots$ mit den rechtwinkligen Coordinaten $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots$, auf welche parallel den drei Axen die Kräfte $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \ldots$ wirken, geschieht den Gleichungen gemäss:

$$(1) \qquad m_\iota \frac{d^2 x_\iota}{dt^2} = X_\iota, \quad m_\iota \frac{d^2 y_\iota}{dt^2} = Y_\iota, \quad m_\iota \frac{d^2 z_\iota}{dt^2} = Z_\iota.$$

Dies Gesetz kann auch so ausgesprochen werden: die Beschleunigungen bestimmen sich so, dass

$$\sum m_\iota \left(\left(\frac{d^2 x_\iota}{dt^2} - \frac{X_\iota}{m_\iota} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y_\iota}{dt^2} - \frac{Y_\iota}{m_\iota} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z_\iota}{dt^2} - \frac{Z_\iota}{m_\iota} \right)^2 \right)$$

ein Minimum wird; denn diese Function der Beschleunigungen nimmt ihren kleinsten Werth 0 an, wenn die Beschleunigungen sämmtlich den Gleichungen (1) gemäss bestimmt werden, d. h. die Grössen $\frac{d^2 x_\iota}{dt^2} - \frac{X_\iota}{m_\iota} \cdots$ sämmtlich $= 0$ sind, und sie nimmt auch nur dann einen Minimumwerth an; denn wäre eine dieser Grössen, z. B. $\frac{d^2 x_\iota}{dt^2} - \frac{X_\iota}{m_\iota}$ nicht gleich Null, so könnte man $\frac{d^2 x_\iota}{dt^2}$ immer stetig so ändern, dass der absolute Werth dieser Grösse und folglich ihr Quadrat abnähme. Die Function würde also dann kleiner werden, wenn man zugleich alle übrigen Beschleunigungen ungeändert liesse.

Diese Function der Beschleunigungen unterscheidet sich von

$$\sum m_\iota \left(\left(\frac{d^2 x_\iota}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y_\iota}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z_\iota}{dt^2} \right) \right)$$
$$- 2 \sum \left(X_\iota \frac{d^2 x_\iota}{dt^2} + Y_\iota \frac{d^2 y_\iota}{dt^2} + Z_\iota \frac{d^2 z_\iota}{dt^2} \right)$$

nur um eine Constante, d. h. eine von den Beschleunigungen unabhängige Grösse.

Wenn die Kräfte nur von Anziehungen und Abstossungen zwischen den Punkten herrühren, welche Functionen der Entfernung sind, und der ιte Punkt und der ι'te Punkt sich in der Entfernung r mit der Kraft $f_{\iota,\iota'}(r)$ abstossen oder mit der Kraft $-f_{\iota,\iota'}(r)$ anziehen, lassen sich bekanntlich die Componenten der Kräfte ausdrücken durch die partiellen Derivirten einer Function von den Coordinaten sämmtlicher Punkte

$$P = \sum_{\iota,\iota'} F_{\iota,\iota'}(r_{\iota,\iota'}),$$

worin $F_{\iota,\iota'}(r)$ eine Function bedeutet, deren Derivirte $f_{\iota,\iota'}(r)$, und für ι und ι' je zwei verschiedene Indices zu setzen sind.

Substituirt man diese Werthe der Componenten

$$X_\iota = \frac{\partial P}{\partial x_\iota}, \qquad Y_\iota = \frac{\partial P}{\partial y_\iota}, \qquad Z_\iota = \frac{\partial P}{\partial z_\iota}$$

in obiger Function der Beschleunigungen und multiplicirt dieselbe mit $\frac{dt^2}{4}$, wodurch die Lage ihrer Maxima und Minima nicht geändert wird, so erhält man einen Ausdruck, der sich von

$$\tfrac{1}{4} \sum \left(\left(d \frac{dx_\iota}{dt} \right)^2 + \left(d \frac{dy_\iota}{dt} \right)^2 + \left(d \frac{dz_\iota}{dt} \right)^2 \right) - P_{(t+dt)}$$

nur um eine von den Beschleunigungen unabhängige Grösse unterscheidet. Wenn die Lage und die Geschwindigkeiten der Punkte zur Zeit t gegeben sind, so bestimmt sich diese Lage zur Zeit $t + dt$ so, dass diese Grösse möglichst klein wird. Es findet demnach ein Streben statt, diese Grösse möglichst klein zu machen.

Dieses Gesetz kann man nun aus Actionen erklären, welche die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks möglichst klein zu machen streben, wenn man annimmt, dass einander widerstreitende Bestrebungen sich so ausgleichen, dass die Summe der Grössen, welche die einzelnen Actionen möglichst klein zu erhalten streben, ein Minimum wird.

Nimmt man an, dass die Massen der Punkte $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sich verhalten wie die ganzen Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_n$, so dass $m_\iota = k_\iota \mu$, so besteht der Ausdruck, welcher möglichst klein wird, aus der Summe der Grössen

$$\frac{\mu}{4} \left(\left(d \frac{dx_\iota}{dt} \right)^2 + \left(d \frac{dy_\iota}{dt} \right)^2 + \left(d \frac{dz_\iota}{dt} \right)^2 \right)$$

für sämmtliche Massentheilchen μ und der Grösse $-P_{t+dt}$. Wenn man also mit Gauss die Grösse

$$\left(d \frac{dx_\iota}{dt} \right)^2 + \left(d \frac{dy_\iota}{dt} \right)^2 + \left(d \frac{dz_\iota}{dt} \right)^2$$

als Maass der Abweichung des Bewegungszustandes der Masse μ zur Zeit $t + dt$ von ihrem Bewegungszustand zur Zeit t betrachtet, so ergiebt die Zerlegung der Gesammtaction in Bezug auf jede Masse eine Action, welche die Abweichung ihres Bewegungszustandes zur Zeit $t + dt$ von ihrem Bewegungszustande zur Zeit t möglichst klein zu machen strebt, oder ein Streben ihres Bewegungszustandes, sich zu erhalten, und ausserdem eine Action, welche die Grösse $-P$ möglichst klein zu erhalten strebt.

Diese letztere Action lässt sich zerlegen in Bestrebungen, die einzelnen Glieder der Summe $\sum\limits_{\iota,\iota'} F_{\iota,\iota'}(r_{\iota,\iota'})$ möglichst klein zu erhalten, d. h. in Anziehungen und Abstossungen zwischen je zwei Punkten, und dies würde zu der gewöhnlichen Erklärung der Bewegungsgesetze aus dem Gesetz der Trägheit und Anziehungen und Abstossungen zurückführen; sie lässt sich aber bei allen uns bekannten Naturkräften auch auf Kräfte, welche zwischen benachbarten Raumelementen thätig sind, zurückführen, wie im folgenden Artikel an der Gravitation erläutert werden soll.

---

2. Neue mathematische Principien der Naturphilosophie.*)

Obgleich die Ueberschrift dieses Aufsatzes bei den meisten Lesern schwerlich ein günstiges Vorurtheil erwecken wird, so schien sie mir doch die Tendenz desselben am besten auszudrücken. Sein Zweck ist, jenseits der von Galiläi und Newton gelegten Grundlagen der Astronomie und Physik ins Innere der Natur zu dringen. Für die Astronomie kann diese Speculation freilich unmittelbar keinen praktischen Nutzen haben, aber ich hoffe, dass dieser Umstand auch in den Augen der Leser dieses Blattes dem Interesse keinen Eintrag thun wird.....

Der Grund der allgemeinen Bewegungsgesetze für Ponderabilien, welche sich im Eingange zu Newton's Principien zusammengestellt finden, liegt in dem inneren Zustande derselben. Versuchen wir aus unserer eigenen inneren Wahrnehmung nach der Analogie auf denselben zu schliessen. Es treten in uns fortwährend neue Vorstellungsmassen auf, welche sehr rasch aus unserm Bewusstsein wieder verschwinden. Wir beobachten eine stetige Thätigkeit unserer Seele. Jedem Act derselben liegt etwas Bleibendes zu Grunde, welches sich bei besonderen Anlässen (durch die Erinnerung) als solches kundgiebt, ohne einen dauernden Einfluss auf die Erscheinungen auszuüben. Es tritt also fortwährend (mit jedem Denkact) etwas Bleibendes in unsere Seele ein, welches aber auf die Erscheinungswelt keinen dauernden

*) Gefunden am 1. März 1853.

Einfluss ausübt. Jedem Act unserer Seele liegt also etwas Bleibendes zu Grunde, welches mit diesem Act in unsere Seele eintritt, aber in demselben Augenblick aus der Erscheinungswelt völlig verschwindet.

Von dieser Thatsache geleitet, mache ich die Hypothese, dass der Weltraum mit einem Stoff erfüllt ist, welcher fortwährend in die ponderablen Atome strömt und dort aus der Erscheinungswelt (Körperwelt) verschwindet.

Beide Hypothesen lassen sich durch die Eine ersetzen, dass in allen ponderablen Atomen beständig Stoff aus der Körperwelt in die Geisteswelt eintritt. Die Ursache, weshalb der Stoff dort verschwindet, ist zu suchen in der unmittelbar vorher dort gebildeten Geistessubstanz, und die ponderablen Körper sind hiernach der Ort, wo die Geisteswelt in die Körperwelt eingreift*).

Die Wirkung der allgemeinen Gravitation, welche nun zunächst aus dieser Hypothese erklärt werden soll, ist bekanntlich in jedem Theil des Raumes völlig bestimmt, wenn die Potentialfunction P sämmtlicher ponderablen Massen für diesen Theil des Raumes gegeben ist, oder was dasselbe ist, eine solche Function P des Ortes, dass die im Innern einer geschlossenen Fläche S enthaltenen ponderablen Massen $\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial P}{\partial p} dS$ sind.

Nimmt man nun an, dass der raumerfüllende Stoff eine incompressible homogene Flüssigkeit ohne Trägheit sei, und dass in jedes ponderable Atom in gleichen Zeiten stets gleiche, seiner Masse proportionale Mengen einströmen, so wird offenbar der Druck, den das ponderable Atom erfährt, (der Geschwindigkeit der Stoffbewegung an dem Orte des Atoms proportional sein(?))

Es kann also die Wirkung der allgemeinen Gravitation auf ein ponderables Atom durch den Druck des raumerfüllenden Stoffes in der unmittelbaren Umgebung desselben ausgedrückt und von demselben abhängig gedacht werden.

Aus unserer Hypothese folgt nothwendig, dass der raumerfüllende Stoff die Schwingungen fortpflanzen muss, welche wir als Licht und Wärme wahrnehmen.

Betrachten wir einen einfach polarisirten Strahl, bezeichnen durch x die Entfernung eines unbestimmten Punktes desselben von einem

*) In jedes ponderable Atom tritt in jedem Augenblick eine bestimmte, der Gravitationskraft proportionale Stoffmenge ein und verschwindet dort.

Es ist die Consequenz der auf Herbart'schem Boden stehenden Psychologie, dass nicht der Seele, sondern jeder einzelnen in uns gebildeten Vorstellung Substantialität zukomme.

festen Anfangspunkte, durch y dessen Elongation zur Zeit t, so muss, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen im von Ponderabilien freien Raum unter allen Umständen sehr nahe constant (gleich α) ist, die Gleichung:

$$y = f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t)$$

wenigstens sehr nahe erfüllt werden.

Wäre sie streng erfüllt, so müsste

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha\alpha \int^{t} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, d\tau$$

sein; offenbar kann aber unserer Erfahrung auch durch die Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha\alpha \int^{t} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, \varphi(t - \tau)\, d\tau$$

genügt werden, wenn auch $\varphi(t-\tau)$ nicht für alle positiven Werthe von $t - \tau$ gleich 1 ist (mit wachsendem $t - \tau$ ins Unendliche abnimmt), wofern es nur für einen hinreichend grossen Zeitraum sehr wenig von 1 verschieden bleibt.....

Man drücke die Lage der Stoffpunkte zu einer bestimmten Zeit t durch ein rechtwinkliges Coordinatensystem aus, und es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punktes O x, y, z. Aehnlicher Weise seien, ebenfalls in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, die Coordinaten des Punktes O' x', y', z'. Es sind dann x', y', z' Functionen von x, y, z und $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$ wird gleich einem homogenen Ausdruck zweiten Grades von dx, dy, dz. Nach einem bekannten Theorem lassen sich nun die linearen Ausdrücke von dx, dy, dz

$$\begin{aligned} \alpha_1\, dx + \beta_1\, dy + \gamma_1\, dz &= ds_1 \\ \alpha_2\, dx + \beta_2\, dy + \gamma_2\, dz &= ds_2 \\ \alpha_3\, dx + \beta_3\, dy + \gamma_3\, dz &= ds_3 \end{aligned}$$

stets und nur auf Eine Weise so bestimmen, dass

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = G_1^2\, ds_1^2 + G_2^2\, ds_2^2 + G_3^2\, ds_3^2$$

wird, während

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2.$$

Die Grössen $G_1 - 1$, $G_2 - 1$, $G_3 - 1$ heissen dann die Hauptdilatationen des Stofftheilchens in O beim Uebergange von der ersteren Form zur letzteren; ich bezeichne sie durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Ich nehme nun an, dass aus der Verschiedenheit der früheren Formen des Stofftheilchens von seiner Form zur Zeit t eine Kraft resultirt, welche diese zu verändern strebt, dass der Einfluss einer früheren Form (caeteris paribus) desto geringer wird, je länger vor t sie stattfand, und zwar so, dass von einer gewissen Grenze an alle früheren vernachlässigt werden können. Ich nehme ferner an, dass diejenigen Zustände, welche noch einen merklichen Einfluss äussern, so wenig von demjenigen zur Zeit t verschieden sind, dass die Dilatationen als unendlich klein betrachtet werden können. Die Kräfte, welche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zu verkleinern streben, können dann als lineare Functionen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ angesehen werden; und zwar erhält man wegen der Homogeneität des Aethers für das Gesammtmoment dieser Kräfte (die Kraft, welche λ_1 zu verkleinern strebt, muss eine Function von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sein, welche unverändert bleibt, wenn man λ_2 mit λ_3 vertauscht, und die übrigen Kräfte müssen aus ihr hervorgehen, wenn λ_2 mit λ_1, λ_3 mit λ_1 vertauscht wird) folgenden Ausdruck:

$$\delta\lambda_1 (a\lambda_1 + b\lambda_2 + b\lambda_3) + \delta\lambda_2 (b\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3) + \delta\lambda_3 (b\lambda_1 + b\lambda_2 + a\lambda_3)$$

oder mit etwas veränderter Bedeutung der Constanten

$$\begin{aligned} \delta\lambda_1 \big(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_1\big) &+ \delta\lambda_2 \big(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_2\big) \\ &+ \delta\lambda_3 \big(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_3\big) \\ = \tfrac{1}{2}\, \delta \big(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 &+ b(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\big). \end{aligned}$$

Man kann nun das Kraftmoment, welches die Form des unendlich kleinen Stofftheilchens in O zu verändern strebt, als resultirend betrachten aus Kräften, welche die Länge der in O endenden Linienelemente zu verändern streben. Man gelangt dann zu folgendem Wirkungsgesetz: Bezeichnet dV das Volumen eines unendlich kleinen Stofftheilchens in O zur Zeit t, dV' das Volumen desselben Stofftheilchens zur Zeit t', so wird die aus der Verschiedenheit beider Stoffzustände herrührende Kraft, welche ds zu verlängern strebt, durch

$$a\frac{dV - dV'}{dV} + b\frac{ds - ds'}{ds}$$

ausgedrückt.

Der erste Theil dieses Ausdrucks rührt von der Kraft her, mit welcher ein Stofftheilchen einer Volumänderung ohne Formänderung, der zweite von der Kraft, mit welcher ein physisches Linienelement einer Längenänderung widerstrebt.

Es ist nun kein Grund vorhanden, anzunehmen, dass die Wirkungen beider Ursachen nach demselben Gesetz mit der Zeit sich änderten; fassen wir also die Wirkungen sämmtlicher früheren Formen eines Stofftheilchens auf die Aenderung des Linienelements ds zur Zeit t zusammen, so wird der Werth von $\frac{\delta ds}{dt}$, welchen sie zu bewirken streben,

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{dV' - dV}{dV}\, \psi(t - t')\, \delta t' + \int_{-\infty}^{t} \frac{ds' - ds}{ds}\, \varphi(t - t')\, \delta t'.$$

Wie müssen nun die Functionen ψ und φ beschaffen sein, damit Gravitation, Licht und strahlende Wärme durch den Raumstoff vermittelt werde?

Die Wirkungen ponderabler Materie auf ponderable Materie sind:

1) Anziehungs- und Abstossungskräfte umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung.
2) Licht und strahlende Wärme.

Beide Classen von Erscheinungen lassen sich erklären, wenn man annimmt, dass den ganzen unendlichen Raum ein gleichartiger Stoff erfüllt, und jedes Stofftheilchen unmittelbar nur auf seine Umgebung einwirkt.

Das mathematische Gesetz, nach welchem dies geschieht, kann zerfällt gedacht werden

1) in den Widerstand, mit welchem ein Stofftheilchen einer Volumänderung, und
2) in den Widerstand, mit welchem ein physisches Linienelement einer Längenänderung widerstrebt.

Auf dem ersten Theil beruht die Gravitation und die electrostatische Anziehung und Abstossung, auf dem zweiten die Fortpflanzung des Lichts und der Wärme und die electrodynamische oder magnetische Anziehung und Abstossung.

---

3. Gravitation und Licht.

Die Newton'sche Erklärung der Fallbewegungen und der Bewegungen der Himmelskörper besteht in der Annahme folgender Ursachen:

1. Es existirt ein unendlicher Raum mit den Eigenschaften, welche die Geometrie ihm beilegt, und ponderable Körper, welche in ihm ihren Ort nur stetig verändern.

2. In jedem ponderablen Punkte existirt in jedem Augenblicke eine nach Grösse und Richtung bestimmte Ursache, vermöge der er eine bestimmte Bewegung hat (Materie in bestimmtem Bewegungszustande). Das Maass dieser Ursache ist die Geschwindigkeit*).

*) Jeder materielle Körper würde, wenn er sich im Raum allein befände, entweder seinen Ort in demselben nicht verändern oder mit unveränderlicher Geschwindigkeit in gerader Linie durch denselben sich bewegen.

Dieses Bewegungsgesetz kann nicht aus dem Princip des zureichenden Grundes erklärt werden. Dass der Körper seine Bewegung fortsetzt, muss eine Ursache haben, welche nur in dem inneren Zustand der Materie gesucht werden kann.

Die hier zu erklärenden Erscheinungen führen noch nicht auf die Annahme verschiedener Massen der ponderablen Körper.

3. In jedem Punkt des Raumes existirt in jedem Augenblicke eine nach Grösse und Richtung bestimmte Ursache (beschleunigende Kraft), welche jedem dort befindlichen ponderablen Punkte eine bestimmte, und zwar allen dieselbe Bewegung mittheilt, die sich mit der Bewegung, die er schon hat, geometrisch zusammensetzt.

4. In jedem ponderablen Punkt existirt eine der Grösse nach bestimmte Ursache (absolute Schwerkraft), vermöge welcher in jedem Punkte des Raumes eine dem Quadrat der Entfernung von diesem ponderablen Punkte umgekehrt und seiner Schwerkraft direct proportionale beschleunigende Kraft stattfindet, die sich mit allen andern dort stattfindenden beschleunigenden Kräften geometrisch zusammensetzt*).

Die nach Grösse und Richtung bestimmte Ursache (beschleunigende Schwerkraft), welche nach 3. in jedem Punkte des Raumes stattfindet, suche ich in der Bewegungsform eines durch den ganzen unendlichen Raum stetig verbreiteten Stoffes, und zwar nehme ich an, dass die Richtung der Bewegung der Richtung der aus ihr zu erklärenden Kraft gleich, und ihre Geschwindigkeit der Grösse der Kraft proportional sei. Dieser Stoff kann also vorgestellt werden als ein physischer Raum, dessen Punkte sich in dem geometrischen bewegen.

Nach dieser Annahme müssen alle von ponderablen Körpern durch den leeren Raum auf ponderable Körper ausgeübte Wirkungen durch diesen Stoff fortgepflanzt werden. Es müssen also auch die Bewegungsformen, in denen das Licht und die Wärme besteht, welche die Himmelskörper einander zusenden, Bewegungsformen dieses Stoffes sein. Diese beiden Erscheinungen, Gravitation und Lichtbewegung durch den leeren Raum, aber sind die einzigen, welche bloss aus Bewegungen dieses Stoffes erklärt werden müssten.

Ich nehme nun an, dass die wirkliche Bewegung des Stoffes im leeren Raum zusammengesetzt ist aus der Bewegung, welche zur Erklärung der Gravitation, und aus der, welche zur Erklärung des Lichtes angenommen werden muss.

Die weitere Entwicklung dieser Hypothese zerfällt in zwei Theile, insofern aufzusuchen sind

*) Derselbe ponderable Punkt würde an zwei verschiedenen Orten Bewegungsänderungen erleiden, deren Richtung mit der Richtung der Kräfte zusammenfällt, und deren Grössen sich verhalten wie die Kräfte.

Die Kraft, dividirt durch die Bewegungsänderung, giebt daher bei demselben ponderablen Punkt stets denselben Quotienten. Dieser Quotient ist bei verschiedenen ponderablen Punkten verschieden und heisst ihre Masse.

1. Die Gesetze der Stoffbewegungen, welche zur Erklärung der Erscheinungen angenommen werden müssen.

2. Die Ursachen, aus welchen diese Bewegungen erklärt werden können.

Das erste Geschäft ist ein mathematisches, das zweite ein metaphysisches. In Bezug auf letzteres bemerke ich im Voraus, dass als Ziel desselben nicht die Erklärung aus Ursachen, welche die Entfernung zweier Stoffpunkte zu verändern streben, zu betrachten sein wird. Diese Erklärungsmethode durch Anziehungs- und Abstossungskräfte verdankt ihre allgemeine Anwendung in der Physik nicht einer unmittelbaren Evidenz (besonderen Vernunftgemässheit), noch, von Electricität und Schwere abgesehen, ihrer besonderen Leichtigkeit, sondern vielmehr dem Umstande, dass das Newton'sche Anziehungsgesetz gegen die Meinung des Entdeckers so lange für ein nicht weiter zu erklärendes gegolten hat*).

I. Gesetze der Stoffbewegung, welche nach unserer Annahme die Gravitations- und Lichterscheinungen verursacht.

Indem ich die Lage eines Raumpunktes durch rechtwinklige Coordinaten x_1, x_2, x_3 ausdrücke, bezeichne ich die dort parallel denselben zur Zeit t stattfindenden Geschwindigkeitscomponenten der Bewegung, welche die Gravitationserscheinungen verursacht, durch u_1, u_2, u_3, der Bewegung, welche die Lichterscheinungen verursacht, durch w_1, w_2, w_3, der wirklichen Bewegung durch v_1, v_2, v_3, so dass $v = u + w$. Wie sich aus den Bewegungsgesetzen selbst ergeben wird, behält der Stoff, wenn er in Einem Zeitpunkte überall gleich dicht ist, stets allenthalben dieselbe Dichtigkeit, ich werde diese daher zur Zeit t überall $= 1$ annehmen.

a. Bewegung, welche nur Gravitationserscheinungen verursacht.

Die Schwerkraft ist in jedem Punkte durch die Potentialfunction V bestimmt, deren partielle Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}$ die Componenten der Schwerkraft sind, und dieses V ist wieder bestimmt durch folgende Bedingungen (abgesehen von einer hinzufügbaren Constanten):

*) Newton says: „That gravity should be innate, inherent, and essential to matter, so that one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of anything else, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity, that I believe no man who has in philosophical matters a competent faculty of thinking can ever fall into it.“ See the third letter to Bentley.

1. $dx_1\,dx_2\,dx_3\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)$ ist ausserhalb der anziehenden Körper $= 0$ und hat für jedes ponderable Körperelement einen unveränderlichen Werth. Dieser ist das Product aus -4π in die absolute Grösse der Anziehungskraft, welche nach der Attractionstheorie demselben beigelegt werden muss, und durch dm bezeichnet werden soll.

2. Wenn alle anziehenden Körper sich innerhalb eines endlichen Raumes befinden, sind in unendlicher Entfernung r von einem Punkt dieses Raumes $r\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $r\frac{\partial V}{\partial x_2}$, $r\frac{\partial V}{\partial x_3}$ unendlich klein.

Nach unserer Hypothese ist nun $\frac{\partial V}{\partial x} = u$ und folglich

$$dV = u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3.$$

Dieses schliesst die Bedingungen ein:

$$(1) \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3 = -4\pi dm,$$

$$(3) \qquad r u_1 = 0, \quad r u_2 = 0, \quad r u_3 = 0, \quad \text{für } r = \infty.$$

Umgekehrt sind auch die Grössen u, wenn sie diesen Bedingungen genügen, den Componenten der Schwerkraft gleich. Denn die Bedingungen (1) enthalten die Möglichkeit einer Function U, von welcher das Differential $dU = u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3$ und also die Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x} = u$, und die übrigen ergeben dann $U = V + \text{const.}$*).

*) Diese Function U ist also durch die Erfahrung (aus den relativen Bewegungen) mittelst der allgemeinen Bewegungsgesetze gegeben, aber nur abgesehen von einer linearen Function der Coordinaten, weil wir nur relative Bewegungen beobachten können.

Die Bestimmung dieser Function gründet sich auf folgenden mathematischen Satz: Eine Function V des Ortes ist innerhalb eines endlichen Raumes bestimmt (abgesehen von einer Constanten), wenn sie nicht längs einer Fläche unstetig sein soll und für alle Elemente desselben $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3$, an der Grenze entweder V oder deren Differentialquotient für eine Ortsänderung nach Innen senkrecht auf die Begrenzung gegeben ist. Wobei zu bemerken:

1. Wird dieser Differentalquotient im Begrenzungselement ds durch $\frac{\partial V}{\partial p}$ bezeichnet, so muss in letzterem Falle $\int \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$ durch den ganzen Raum $= -\int \frac{\partial V}{\partial p}\,ds$ durch dessen Begrenzung sein; übrigens aber können in beiden Fällen sämmtliche Bestimmungsstücke willkürlich angenommen werden und sind daher zur Bestimmung nothwendig.

b. Bewegung, welche nur Lichterscheinungen verursacht.

Die Bewegung, welche im leeren Raum zur Erklärung der Lichterscheinungen angenommen werden muss, kann betrachtet werden (zufolge eines Theorems) als zusammengesetzt aus ebenen Wellen, d. h. aus solchen Bewegungen, wo längs jeder Ebene einer Schaar paralleler Ebenen (Wellenebenen) die Bewegungsform constant ist. Jedes dieser Wellensysteme besteht dann (der Erfahrung nach) aus Bewegungen parallel der Wellenebene, die sich mit einer für alle Bewegungsformen (Arten des Lichts) gleichen constanten Geschwindigkeit c senkrecht zur Wellenebene fortpflanzen.

Sind für ein solches Wellensystem ξ_1, ξ_2, ξ_3 rechtwinklige Coordinaten eines Raumpunktes, die erste senkrecht, die andern parallel zur Wellenebene, ω_1, ω_2, ω_3 die ihnen parallelen Geschwindigkeitscomponenten in diesem Punkte zur Zeit t, so hat man:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi_3} = 0.$$

Der Erfahrung nach ist erstlich:

$$\omega_1 = 0,$$

zweitens ist die Bewegung zusammengesetzt aus einer nach der positiven und einer nach der negativen Seite der Wellenebene mit der Geschwindigkeit c fortschreitenden Bewegung. Sind ω' die Geschwindigkeitscomponenten der ersteren, ω'' die der letzteren, so bleiben die ω' ungeändert, wenn t um dt und ξ_1 um cdt wächst, die ω'', wenn t um dt und ξ_1 um $-cdt$ wächst, und man hat $\omega = \omega' + \omega''$. Hieraus folgt:

$$\left(\frac{\partial \omega'}{\partial t} + c\frac{\partial \omega'}{\partial \xi_1}\right) dt = 0, \quad \left(\frac{\partial \omega''}{\partial t} - c\frac{\partial \omega''}{\partial \xi_1}\right) dt = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega'}{\partial t^2} = -c\frac{\partial^2 \omega'}{\partial \xi_1 \partial t} = cc\frac{\partial^2 \omega'}{\partial \xi_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \omega''}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 \omega''}{\partial \xi_1 \partial t} = cc\frac{\partial^2 \omega''}{\partial \xi_1^2}$$

also

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = cc\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_1^2}.$$

---

2. Für ein Raumelement, wo $\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ unendlich gross wird, ist das Product beider durch $-\int \frac{\partial V}{\partial p} ds$ in Bezug auf die Begrenzung dieses Elements zu ersetzen.

3. Wenn nur innerhalb eines endlichen Raumes $\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ einen von 0 verschiedenen Werth hat, so kann die Grenzbedingung dadurch ersetzt werden, dass in unendlicher Entfernung R von einem Punkte dieses Raumes $R\frac{\partial V}{\partial x}$ unendlich klein sein soll.

Diese Gleichungen geben folgende symmetrische:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = cc\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_3^2}\right),$$

welche, ausgedrückt durch das ursprüngliche Coordinatensystem, in Gleichungen von derselben Form übergehen, d. h. in

$$(1) \qquad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = cc\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}\right).$$

Diese Gleichungen gelten für jede den Punkt (x_1, x_2, x_3) zur Zeit t durchschreitende ebene Welle und folglich auch für die aus allen zusammengesetzte Bewegung.

c. Bewegung, welche beiderlei Erscheinungen verursacht.

Aus den gefundenen Bedingungen für u und w fliessen folgende Bedingungen für v oder Gesetze der Stoffbewegung im leeren Raume:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{aligned} &\left(\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) = 0 \\ &\left(\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = 0 \\ &\left(\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = 0, \end{aligned}$$

wie sich leicht ergiebt, wenn man die Operationen ausführt.

Diese Gleichungen zeigen, dass die Bewegung eines Stoffpunktes nur abhängt von den Bewegungen in den angrenzenden Raum- und Zeittheilen, und ihre (vollständigen) Ursachen in den Einwirkungen der Umgebung gesucht werden können.

Die Gleichung (I) beweist unsere frühere Behauptung, dass bei der Stoffbewegung die Dichtigkeit ungeändert bleibe; denn

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt,$$

welches zufolge dieser Gleichung $= 0$ ist, drückt die in das Raumelement $dx_1 dx_2 dx_3$ im Zeitelement dt einströmende Stoffmenge aus, und die in ihm enthaltene Stoffmenge bleibt daher constant.

Die Bedingungen (II) sind identisch mit der Bedingung, dass

$$\left(\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)(v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3)$$

gleich einem vollständigen Differential dW sei. Nun ist:

$$\left(\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)(w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3) = 0$$

und folglich

$$dW = \left(\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right)(u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3)$$
$$= \left(\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\right) dV$$

oder, da $(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\,dV = 0$,

$$= d\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

. . . .

d. Gemeinschaftlicher Ausdruck für die Gesetze der Stoffbewegung und der Einwirkung der Schwerkraft auf die Bewegung der ponderablen Körper.

Die Gesetze dieser Erscheinungen lassen sich zusammenfassen in der Bedingung, dass die Variation des Integrals

$$\frac{1}{2}\int\left[\sum\left(\frac{\partial\eta_\iota}{\partial t}\right)^2 - cc\left[\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\eta_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\eta_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}\right)^2\right]dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt\right.$$
$$\left. + \int V\left(\sum\frac{\partial^2\eta_\iota}{\partial x_\iota\,\partial t}dx_1\,dx_2\,dx_3 + 4\pi dm\right)dt + 2\pi\int dm\sum\left(\frac{\partial x_\iota}{\partial t}\right)^2 dt\right.$$

unter geeigneten Grenzbedingungen 0 werde.

In diesem Ausdrucke sind die beiden ersten Integrale über den ganzen geometrischen Raum, die letzteren über alle ponderablen Körperelemente auszudehnen, die Coordinaten jedes ponderablen Körperelements aber als Functionen der Zeit, und η_1, η_2, η_3, V als Functionen von x_1, x_2, x_3 und t so zu bestimmen, dass eine den Grenzbedingungen genügende Variation derselben nur eine Variation zweiter Ordnung des Integrals hervorbringt.

Alsdann sind die Grössen $\frac{\partial\eta}{\partial t}(=v)$ gleich den Geschwindigkeitscomponenten der Stoffbewegung, und V gleich dem Potential zur Zeit t im Punkte (x_1, x_2, x_3).

Bernhard Riemann's Lebenslauf.

Die nachfolgende Darstellung von Riemann's Lebenslauf bezweckt keineswegs, die Bedeutung seiner wissenschaftlichen Leistungen und deren Verhältniss zu dem früheren und gegenwärtigen Zustande der Mathematik in's Licht zu stellen, sie ist vielmehr nur für solche Leser bestimmt, welche einige Nachrichten über den Bildungsgang, den Charakter und die äusserlichen Schicksale des grossen Mathematikers zu erhalten wünschen, dessen Werke jetzt zum ersten Male vollständig gesammelt erscheinen.

Georg Friedrich Bernhard Riemann ist am 17. September 1826 in Breselenz, einem Dorfe im Königreich Hannover bei Dannenberg nahe der Elbe, geboren. Sein Vater Friedrich Bernhard Riemann, geboren in Boitzenburg an der Elbe in Mecklenburg, der als Lieutenant unter Wallmoden an den Befreiungskriegen Theil genommen, war dort Prediger und mit Charlotte, der Tochter des Hofrath Ebell aus Hannover verheirathet; er siedelte später mit seiner Familie nach der etwa drei Stunden entfernten Pfarre Quickborn über. Bernhard war das zweite von sechs Kindern. Schon früh wurde seine Lernbegierde durch den Vater geweckt, der ihn bis zum Abgange auf das Gymnasium fast allein unterrichtete. Als Knabe von fünf Jahren interessirte er sich sehr für Geschichte, für Züge aus dem Alterthum, und ganz besonders für das unglückliche Schicksal Polens, welches sein Vater ihm immer von Neuem erzählen musste. Sehr bald aber trat dies in den Hintergrund, und sein entschiedenes Talent für das Rechnen brach sich Bahn; er kannte kein grösseres Vergnügen, als selbst schwierige Exempel zu erfinden und dann seinen Geschwistern aufgeben. Später, vom zehnten Jahre Bernhard's an, liess sich der Vater bei dem Unterrichte der Kinder von dem Lehrer Schulz unterstützen; dieser gab guten Unterricht im Rechnen und in der Geometrie, musste sich jedoch bald sehr anstrengen, seines Schülers rascher, oft besserer Lösung einer Aufgabe zu folgen.

Im Alter von dreizehn und einem halben Jahr wurde Bernhard von dem Vater confirmirt und verliess darauf das elterliche Haus, in welchem ein ernster, frommer Sinn und häuslich angeregtes Leben herrschte. Die Eltern sahen ihre Hauptaufgabe in der Erziehung ihrer Kinder; die innigste Liebe verband Riemann mit seiner Familie und hat sich durch sein ganzes ferneres Leben erhalten; sie spricht sich in seinen Briefen aus, die er an die entfernten Lieben richtet, wo er an Allem, was das Elternhaus betrifft, auch an den kleinsten Vorgängen das lebhafteste Interesse zeigt, und auch sie treulich alle seine Freuden und Leiden theilen lässt.

Zu Ostern 1840 kam Riemann nach Hannover, wo seine Grossmutter lebte, und wo er zwei Jahre — bis zum Tode derselben — die Tertia des Lyceums besuchte. Anfangs hatte er, wie es nach seiner bisherigen Erziehung zu erwarten war, mancherlei Schwierigkeiten zu überwinden, doch werden bald seine Fortschritte in den einzelnen Unterrichtsgegenständen gelobt, und immer ist er ein fleissiger und folgsamer Schüler. Namentlich aus dieser Zeit sind zahlreiche Briefe Riemann's an die geliebten Eltern und Geschwister erhalten, in welchen er, oft mit glücklichem Humor, von den Schulereignissen berichtet. Vorwiegend ist aber die Sehnsucht nach dem Elternhause; wenn die Ferien herannahen, so bittet er inständig um die Erlaubniss, dieselben in Quickborn zubringen zu dürfen, und lange vorher sinnt er auf Mittel, die Reise mit möglichst wenigen Kosten bewerkstelligen zu können; zu den Geburtstagen der Eltern und Geschwister macht er kleine Einkäufe und ist eifrig darauf bedacht, sie damit wirklich zu überraschen. Er lebt in Gedanken noch ganz in dem häuslichen Kreise. Bisweilen klingt aber auch eine wehmüthige Klage durch, wie schwer es ihm werde, mit fremden Menschen zu verkehren, und die Schüchternheit, welche, eine natürliche Folge seines früheren abgeschlossenen Lebens, ihn zu seinem Kummer auch den Lehrern bisweilen in falschem Lichte erscheinen lässt, hat ihn auch später nie gänzlich verlassen und oft angetrieben, sich der Einsamkeit und seiner Gedankenwelt zu überlassen, in welcher er die grösste Kühnheit und Vorurtheilslosigkeit entfaltet hat.

Nach dem Tode der Grossmutter wurde Riemann, wie es scheint auf seinen eignen Wunsch, Ostern 1842 von dem Vater auf das Johanneum zu Lüneburg gebracht, wo er zwei Jahre in Secunda und zwei Jahre in Prima bis zu seinem Abgange nach der Universität blieb. Gleich in die erste Zeit seines dortigen Aufenthaltes fiel der grosse Brand von Hamburg, der tiefen Eindruck auf ihn machte, und über den er ausführlich an seine Eltern berichtete. Die grössere Nähe bei seiner Heimath und die Möglichkeit, die Ferien in Quickborn in seiner Familie zu verleben, trug dazu bei, die fernere Schulzeit zu einer glücklichen für ihn zu machen. Freilich war die Hin- und Herreise, die zum grössten Theil zu Fuss gemacht wurde, mit Anstrengungen verbunden, denen sein Körper nicht immer gewachsen war; schon in dieser Zeit spricht sich in den schönen Briefen seiner Mutter, die er leider bald verlieren sollte, ängstliche Sorge um seine Gesundheit aus, und oft wiederholen sich ihre herzlichen Ermahnungen, zu grosse körperliche Anstrengungen zu vermeiden. Er wohnte später bei dem Gymnasiallehrer Seffer, der sich lebhaft für ihn interessirte, und an dem er, wie aus seinen Briefen hervorgeht, einen väterlichen Freund und Beschützer gefunden hat. Er bekam gute Zeugnisse auch in anderen Fächern, in Mathematik aber immer glänzende, beim Abgange die Eins. Seine grosse Begabung für diese Wissenschaft wurde von dem trefflichen Director Schmalfuss erkannt; dieser lieh ihm mathematische Werke zum Privatstudium und wurde oft überrascht und in Erstaunen gesetzt, wenn Riemann dieselben schon nach wenigen Tagen zurückbrachte und dann in der Unterhaltung zeigte, dass er sie durchgearbeitet und vollständig aufgefasst hatte. Diese neben seinen Schularbeiten betriebenen Studien müssen ihn weit über die Grenzen des Gymnasial-Unterrichtes hinaus in das Gebiet der höheren Mathematik geführt haben; die Bekanntschaft mit der höheren Analysis hat er, soviel bekannt ist, durch das Studium der Euler'schen Werke erworben; auch Legendre's Théorie des Nombres soll er in dieser Zeit gelesen haben.

Im Alter von neunzehn und einem halben Jahr bezog Riemann Ostern 1846 die Universität Göttingen. Der seinem geistlichen Berufe von Herzen ergebene Vater hegte den natürlichen Wunsch, er möge sich der Theologie widmen, und wirklich liess Riemann sich am 25. April als Studiosus der Philologie und Theologie immatriculiren; zu diesem mit seiner deutlich hervorgetretenen Neigung und Begabung für die Mathematik nicht im Einklange stehenden Entschlusse wird vor Allem die Rücksicht auf die Mittellosigkeit der kinderreichen Familie und die Hoffnung beigetragen haben, früher eine Anstellung zu finden und dadurch seinem Vater eine Erleichterung zu gewähren. Neben den philologischen und theologischen Vorlesungen hörte er aber auch mathematische, und zwar gleich im Sommersemester über die numerische Auflösung der Gleichungen bei Stern, und über Erdmagnetismus bei Goldschmidt, sodann im Wintersemester 1846—1847 über die Methode der kleinsten Quadrate bei Gauss, und über bestimmte Integrale bei Stern. Er sah bei dieser fortgesetzten Beschäftigung mit der Mathematik bald ein, dass die Neigung zu derselben zu mächtig in ihm war, und erwirkte von seinem Vater die Erlaubniss, sich ganz seinem Lieblingsstudium widmen zu dürfen.

Obgleich nun Gauss seit fast einem halben Jahrhundert unbestritten den Rang des grössten lebenden Mathematikers einnahm, so beschränkte sich seine zwar sehr anregende Lehrthätigkeit doch nur auf ein kleines Feld, welches mehr der angewandten Mathematik angehörte, und für Riemann war bei dem vorgeschrittenen Standpunkte seines Wissens eine wesentliche Bereicherung desselben und eine Befruchtung mit neuen Ideen damals in Göttingen nicht mehr zu erwarten. Er bezog daher Ostern 1847 die Universität Berlin, wo Jacobi, Lejeune Dirichlet und Steiner durch den Glanz ihrer Entdeckungen, welche sie zum Gegenstande ihrer Vorlesungen machten, zahlreiche Schüler um sich versammelten. Er blieb dort zwei Jahre, bis Ostern 1849, und hörte unter Anderem bei Dirichlet Zahlentheorie, Theorie der bestimmten Integrale und der partiellen Differentialgleichungen, bei Jacobi analytische Mechanik und höhere Algebra. Leider sind nur sehr wenige Briefe aus dieser Zeit erhalten; in einem derselben (vom 29. Nov. 1847) spricht er seine grosse Freude darüber aus, dass Jacobi sich gegen seine anfängliche Absicht noch entschlossen habe, Mechanik vorzutragen. In einen näheren Verkehr mit ihm trat Eisenstein, bei dem er in dem ersten Jahre Theorie der elliptischen Functionen hörte. Riemann hat später erzählt, dass sie auch über die Einführung der complexen Grössen in die Theorie der Functionen mit einander verhandelt haben, aber gänzlich verschiedener Meinung über die hierbei zu Grunde zu legenden Principien gewesen seien; Eisenstein sei bei der formellen Rechnung stehen geblieben, während er selbst in der partiellen Differentialgleichung die wesentliche Definition einer Function von einer complexen Veränderlichen erkannt habe. Wahrscheinlich sind diese, für seine ganze spätere Laufbahn maassgebenden Ideen zuerst in den Herbstferien 1847 gründlich von ihm verarbeitet.

Von dem übrigen Leben Riemann's während seines zweijährigen Aufenthaltes in Berlin ist nur wenig aus den Briefen zu ersehen. Die grossen politischen Ereignisse des Jahres 1848 ergriffen auch ihn mächtig; er war Augenzeuge der März-Revolution und hatte als Mitglied des von den Studenten gebildeten Corps die Wache im königlichen Schlosse vom 24. März Morgens 9 Uhr bis zum folgenden Tage Mittags 1 Uhr.

Ostern 1849 kehrte Riemann, nachdem er noch die Ankunft der Frankfurter Kaiser-Deputation in Berlin erlebt hatte, nach Göttingen zurück. Er besuchte in den drei folgenden Semestern noch einige naturwissenschaftliche und philosophische Vorlesungen, unter anderen mit grösstem Interesse die genialen Vorlesungen über Experimental-Physik von Wilhelm Weber, an welchen er sich später eng anschloss, und der ihm

bis zu seinem Tode ein treuer Freund und Rathgeber gewesen ist. In dieser Zeit müssen bei gleichzeitiger Beschäftigung mit philosophischen Studien, welche sich namentlich auf Herbart richteten, die ersten Keime seiner naturphilosophischen Ideen sich entwickelt haben; dies scheint wenigstens, soweit es sich nur um das Streben nach einer einheitlichen Naturauffassung handelt, aus einer Stelle eines Aufsatzes „Ueber Umfang, Anordnung und Methode des naturwissenschaftlichen Unterrichts auf Gymnasien“ hervorzugehen, den er im November 1850 als Mitglied des pädagogischen Seminars verfasste, und in welchem er sagt: „So z. B. lässt sich eine vollkommen in sich abgeschlossene mathematische Theorie zusammenstellen, welche von den für die einzelnen Punkte geltenden Elementargesetzen bis zu den Vorgängen in dem uns wirklich gegebenen continuirlich erfüllten Raume fortschreitet, ohne zu scheiden, ob es sich um die Schwerkraft, oder die Electricität, oder den Magnetismus, oder das Gleichgewicht der Wärme handelt.“ Im Herbst 1850 trat er auch in das kurz vorher gegründete mathematisch-physikalische Seminar ein, welches von den Professoren Weber, Ulrich, Stern und Listing geleitet wurde, und betheiligte sich namentlich an den physikalischen experimentellen Uebungen, obgleich er dadurch von seiner Hauptaufgabe, der Ausarbeitung der Doctordissertation, oft abgezogen wurde. Theils diesem Umstande, theils aber auch der fast ängstlichen Sorgfalt, welche Riemann auf die Ausarbeitung seiner für den Druck bestimmten Schriften verwendete, und die ihn auch später bei der Veröffentlichung seiner Arbeiten wesentlich gehemmt hat, wird es zuzuschreiben sein, dass er seine Abhandlung „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse“ erst im November des folgenden Jahres 1851 der philosophischen Facultät einreichen konnte. Dieselbe fand eine sehr anerkennende Beurtheilung von Gauss, welcher Riemann bei dessen Besuch mittheilte, dass er seit Jahren eine Schrift vorbereite, welche denselben Gegenstand behandele, sich aber freilich nicht darauf beschränke. Das Examen war am Mittwoch den 3. December, die öffentliche Disputation und Doctor-Promotion am Dienstag den 16. December. An seinen Vater schreibt er: „Durch meine jetzt vollendete Dissertation glaube ich meine Aussichten bedeutend verbessert zu haben; auch hoffe ich, dass ich mit der Zeit fliessender und rascher schreiben lerne, namentlich wenn ich mehr Umgang suche und auch erst Gelegenheit habe, Vorträge zu halten; ich habe daher jetzt guten Muth.“ Zugleich entschuldigt er sich in Rücksicht auf die Kosten, die er dem Vater verursacht, dass er sich nicht eifriger um die durch Goldschmidt's Tod erledigte Observatorstelle an der Sternwarte bemüht habe*), und theilt mit, dass seiner Habilitation als Privatdocent nichts im Wege stehe, sobald er die Habilitationsschrift fertig habe. Es scheint schon früh seine Absicht gewesen zu sein, zum Gegenstande derselben die Theorie der trigonometrischen Reihen zu wählen, allein es vergehen bis zu seiner Habilitation doch wieder zwei und ein halbes Jahr.

In den Herbstferien 1852 hielt sich Lejeune Dirichlet, dem er noch von Berlin her wohl bekannt war, eine Zeit lang in Göttingen auf, und Riemann, der eben von Quickborn dorthin zurückgekehrt war, hatte das Glück, ihn fast täglich zu sehen. Gleich bei seinem ersten Besuche in der Krone, wo Dirichlet wohnte, und am folgenden Tage in einer Mittagsgesellschaft bei Sartorius von Waltershausen, in welcher auch die Professoren Dove aus Berlin und Listing gegenwärtig waren, fragte er Dirichlet, den er nächst Gauss als den grössten damals lebenden Mathematiker anerkannte, um Rath wegen seiner Arbeit. „Am andern Morgen — schreibt Riemann an seinen Vater — war Dirichlet etwa zwei Stunden bei mir; er gab mir die Notizen, die ich zu meiner Habilitationschrift bedurfte, so vollständig, dass mir die Arbeit dadurch wesentlich erleichtert ist; ich hätte sonst auf der Bibliothek nach manchen Sachen lange suchen können. Auch meine Dissertation ging er mit mir durch und war überhaupt äusserst freundlich gegen mich, wie ich es bei dem grossen Abstande zwischen mir und ihm kaum erwarten durfte. Ich hoffe, er wird mich auch später nicht vergessen.“ Einige Tage darauf traf auch Wilhelm Weber von der Wiesbadener Naturforscher-Versammlung wieder in Göttingen ein; es wurde in grösserer Gesellschaft ein sehr lohnender Ausflug nach dem einige Stunden entfernten Hohen Hagen gemacht, und am folgenden Tage trafen Dirichlet und Riemann abermals im Weber'schen Hause zusammen. Solche persönliche Anregung war im höchsten Grade wohlthuend für Riemann, und er schreibt selbst hierüber an seinen Vater: „Du siehst, dass ich hier im Ganzen noch nicht sehr häuslich gelebt habe; aber ich bin dafür des Morgens desto fleissiger bei der Arbeit gewesen, und finde, dass ich so weiter gekommen bin, als wenn ich den ganzen Tag hinter meinen Büchern sitze.“

*) Einer Mittheilung von W. Weber zufolge wünschte Gauss selbst nicht, dass Riemann diese Stellung übernähme; er zweifelte zwar nicht an seiner theoretischen und praktischen Befähigung für dieselbe, aber er hatte schon damals eine so hohe Meinung von Riemann's wissenschaftlicher Bedeutung, dass er befürchtete, derselbe möchte durch die mit dieser Stellung verbundenen zeitraubenden und zum Theil untergeordneten Dienstgeschäfte von seinem eigentlichen Arbeitsfelde gar zu sehr abgelenkt werden.

In jenen Tagen schreibt er auch von seiner Habilitation und von dem Anfange seiner Vorlesungen, wie von unmittelbar bevorstehenden Dingen, und er würde gewiss auch viel rascher in seiner äusserlichen Laufbahn fortgeschritten sein, wenn ihm öfter eine solche treibende Anregung zu Theil geworden wäre. Offenbar fällt in den Anfang des Jahres 1853 eine fast ausschliessliche Beschäftigung mit Naturphilosophie; seine neuen Gedanken gewinnen eine feste Gestalt, auf die er nach allen Unterbrechungen stets wieder zurückgekommen ist. Endlich ist auch die Habilitationsschrift fertig, und er schreibt an seinen jüngeren Bruder Wilhelm am 28. December 1853: „Mit meinen Arbeiten steht es jetzt so ziemlich; ich habe Anfangs December meine Habilitationsschrift*) abgeliefert und musste dabei drei Themata zur Probevorlesung vorschlagen, von denen dann die Facultät eines wählt. Die beiden ersten hatte ich fertig und hoffte, dass man eins davon nehmen würde; Gauss aber hatte das dritte**) gewählt, und so bin ich nun wieder etwas in der Klemme, da ich dies noch ausarbeiten muss. Meine andere Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Electricität, Galvanismus, Licht und Schwere hatte ich gleich nach Beendigung meiner Habilitationsschrift wieder aufgenommen und bin mit ihr so weit gekommen, dass ich sie in dieser Form unbedenklich veröffentlichen kann. Es ist mir dabei aber zugleich immer gewisser geworden, dass Gauss seit mehreren Jahren auch daran arbeitet, und einigen Freunden, u. A. Weber, die Sache unter dem Siegel der Verschwiegenheit mitgetheilt hat, — Dir kann ich dies wohl schreiben, ohne dass es mir als Anmaassung ausgelegt wird — ich hoffe, dass es nun für mich noch nicht zu spät ist und es anerkannt werden wird, dass ich die Sachen vollkommen selbständig gefunden habe.“

Um diese Zeit wurde Riemann im mathematisch-physikalischen Seminar Assistent von W. Weber und hatte als solcher die Uebungen der Neueintretenden zu leiten, auch einige Vorträge zu halten. Ueber den weiteren Fortgang seiner Arbeiten schreibt er am 26. Juni 1854 aus Quickborn seinem Bruder: „Um Weihnachten habe ich Dir von Göttingen aus, wie ich glaube, geschrieben, dass ich meine Habilitationsschrift Anfang December vollendet und an den Decan abgegeben hätte, sowie auch, dass ich bald darauf mich wieder mit meiner Untersuchung über den Zusammenhang der physikalischen Grundgesetze beschäftigte und mich so darin vertiefte, dass ich, als mir das Thema zur Probevorlesung beim Colloquium gestellt war, nicht gleich wieder davon

*) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.
**) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

loskommen konnte. Ich ward nun bald darauf krank, theils wohl in Folge zu vielen Grübelns, theils in Folge des vielen Stubensitzens bei dem schlechten Wetter; es stellte sich mein altes Uebel wieder mit grosser Hartnäckigkeit ein und ich kam dabei mit meinen Arbeiten nicht vom Fleck. Erst nach mehreren Wochen, als das Wetter besser wurde und ich wieder mehr Umgang suchte, ging es mit meiner Gesundheit besser. Für den Sommer habe ich nun eine Gartenwohnung gemiethet und habe seitdem gottlob über meine Gesundheit nicht zu klagen gehabt. Nachdem ich etwa vierzehn Tage nach Ostern mit einer andern Arbeit, die ich nicht gut vermeiden konnte, fertig geworden war, ging ich nun eifrig an die Ausarbeitung meiner Probevorlesung und wurde um Pfingsten damit fertig. Ich erreichte es indess nur mit vieler Mühe, dass ich mein Colloquium gleich machen konnte und nicht noch wieder unverrichteter Sache nach Quickborn abreisen musste. Gauss's Gesundheitszustand ist nämlich in der letzten Zeit so schlimm geworden, dass man noch in diesem Jahre seinen Tod fürchtet und er sich zu schwach fühlte, mich zu examiniren. Er wünschte nun, dass ich, weil ich doch erst im nächsten Semester lesen könnte, wenigstens noch bis zum August auf seine Besserung warten möchte. Ich hatte mich schon in das Unvermeidliche gefügt. Da entschloss er sich plötzlich auf mein wiederholtes Bitten, „um die Sache vom Halse los zu werden", am Freitag nach Pfingsten Mittag das Colloquium auf den andern Tag um halb elf anzusetzen und so war ich am Sonnabend um eins glücklich damit fertig. — Lass Dir nun noch in aller Eile erzählen, was es mit der andern Arbeit, die mich um Ostern beschäftigte, für eine Bewandtniss hat. In den Osterferien war Kohlrausch — ein Sohn vom Oberschulrath und Vetter und Schwager von Schmalfuss — der jetzt Professor in Marburg ist, auf vierzehn Tage bei Weber zum Besuch, um mit ihm gemeinschaftlich eine experimentelle Untersuchung über Electricität zu machen, da Weber zu dem einen Theil dieser Untersuchung, Kohlrausch zu dem anderen Theil derselben die Vorarbeiten gemacht und die Apparate erdacht und construirt hatte. Ich nahm an ihren Experimenten Theil und lernte bei dieser Gelegenheit Kohlrausch kennen. Kohlrausch hatte nun einige Zeit vorher sehr genaue Messungen über eine bis dahin unerforschte Erscheinung (den electrischen Rückstand in der Leidener Flasche) gemacht und veröffentlicht und ich hatte durch meine allgemeinen Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen Electricität, Licht und Magnetismus die Erklärung davon gefunden. Ich sprach nun mit K. darüber und dies war die Veranlassung, dass ich die Theorie dieser Erscheinung für ihn ausarbeitete und ihm zuschickte. Kohlrausch hat

mir nun jetzt sehr freundlich geantwortet, mir angeboten, meine Arbeit an Poggendorff, den Herausgeber der Annalen der Physik und Chemie, in Berlin zum Druck zu schicken, und mich eingeladen, ihn in diesen Herbstferien zu besuchen, um die Sache weiter zu verfolgen. Mir ist diese Sache deshalb wichtig, weil es das erste Mal ist, wo ich meine Arbeiten auf eine vorher noch nicht bekannte Erscheinung anwenden konnte, und ich hoffe, dass die Veröffentlichung dieser Arbeit dazu beitragen wird, meiner grösseren Arbeit eine günstige Aufnahme zu verschaffen. Hier in Quickborn werde ich mich nun wohl theils mit dem Druck dieser Arbeit, da mir die Correcturbogen wahrscheinlich zugeschickt werden, theils mit der Ausarbeitung einer Vorlesung für nächstes Semester beschäftigen müssen."

Zu dem ersten Theile des Briefes ist noch zu bemerken, dass Riemann die Ausarbeitung seiner Probevorlesung über die Hypothesen der Geometrie sich durch sein Streben, allen, auch den nicht mathematisch gebildeten Mitgliedern der Facultät möglichst verständlich zu bleiben, wesentlich erschwert hat; die Abhandlung ist aber hierdurch in der That zu einem bewunderungswürdigen Meisterstück auch in der Darstellung geworden, indem sie ohne Mittheilung der analytischen Untersuchung den Gang derselben so genau angiebt, dass sie nach diesen Vorschriften vollständig hergestellt werden kann. Gauss hatte gegen das übliche Herkommen von den drei vorgeschlagenen Thematen nicht das erste, sondern das dritte gewählt, weil er begierig war zu hören, wie ein so schwieriger Gegenstand von einem so jungen Manne behandelt werden würde; nun setzte ihn die Vorlesung, welche alle seine Erwartungen übertraf, in das grösste Erstaunen, und auf dem Rückwege aus der Facultäts-Sitzung sprach er sich gegen Wilhelm Weber mit höchster Anerkennung und mit einer bei ihm seltenen Erregung über die Tiefe der von Riemann vorgetragenen Gedanken aus.

Nach einem längeren Aufenthalte in Quickborn kehrte Riemann im September nach Göttingen zurück, um an der Naturforscher-Versammlung Theil zu nehmen; auf Weber's und Stern's Aufforderung entschloss er sich, in der mathematisch-physikalisch-astronomischen Section einen Vortrag über die Verbreitung der Electricität in Nichtleitern zu halten. Er schreibt darüber an seinen Vater: „Mein Vortrag kam am Donnerstag an die Reihe, und da für diese Sitzung unserer Section kein anderer angekündigt war, so arbeitete ich die Sache noch den Abend vorher etwas weiter aus, um die gewöhnliche Zeit der Sitzungen einigermaassen auszufüllen. Ich hatte anfangs nur das Gesetz, welches ich mittheilen wollte, kurz angeben wollen, wandte es aber nun noch auf mehrere Erscheinungen an und zeigte die Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Mein Vortrag war nun freilich in diesem letzten Theile weniger fliessend, aber ich glaube doch, dass der Eindruck des Ganzen durch Hinzufügung desselben gewonnen hat; ich sprach ungefähr $^3/_4$ Stunden. — Dass ich bei der Versammlung einmal öffentlich gesprochen habe, hat mir wieder etwas mehr Muth zu meiner Vorlesung gemacht; doch habe ich zugleich gesehen, wie gross der Unterschied ist, ob man schon längere Zeit vorher mit seinen Gedanken ins Reine gekommen ist, oder noch unmittelbar vorher daran gearbeitet hat. Ich hoffe in einem halben Jahre schon mit mehr Ruhe an meine Vorlesungen zu denken, und mir nicht wieder meinen Aufenthalt in Quickborn und mein Zusammensein mit Euch so dadurch verleiden zu lassen, wie das letzte Mal.“ Auch mit Kohlrausch war er in Göttingen wieder zusammengetroffen; nach einem weiteren Briefwechsel entschloss sich aber Riemann, auf die Veröffentlichung seines Aufsatzes über den Rückstand in der Leidener Flasche zu verzichten, vermuthlich weil er nicht gern auf eine ihm angerathene Abänderung desselben eingehen wollte. Statt dessen erschien in Poggendorff's Annalen der Aufsatz über die Theorie der Nobili'schen Farbenringe, über welchen er an seine ältere Schwester Ida schreibt: „Es ist dieser Gegenstand deshalb wichtig, weil sich hiernach sehr genaue Messungen anstellen und die Gesetze, nach denen die Electricität sich bewegt, sehr genau daran prüfen lassen.“

In demselben Briefe vom 9. October 1854 schreibt er mit grosser Freude von dem Zustandekommen seiner ersten Vorlesung, zu welcher über sein Erwarten viele Zuhörer, etwa acht, sich gemeldet hatten. Der Gegenstand derselben war die Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit Anwendung auf physikalische Probleme; als Vorbild dienten ihm der Hauptsache nach die Vorlesungen, welche Dirichlet unter gleichem Titel in Berlin gehalten hatte. Ueber seinen Vortrag schreibt er am 18. November 1854 seinem Vater: „Mein Leben hat hier jetzt nach und nach eine ziemlich regelmässige und einförmige Gestalt angenommen. Meine Collegia habe ich bis jetzt regelmässig halten können, meine anfängliche Befangenheit hat sich schon ziemlich gelegt und ich gewöhne mich daran, mehr an die Zuhörer, als an mich dabei zu denken, und in ihren Mienen zu lesen, ob ich vorwärts gehen oder die Sache noch weiter auseinander setzen muss.“ Es ist indessen keinem Zweifel unterworfen, dass der mündliche Vortrag ihm in den ersten Jahren seiner akademischen Lehrthätigkeit grosse Schwierigkeiten verursachte. Seine glänzende Denkkraft und vorahnende Phantasie liess ihn meist, was besonders bei zufälligen mündlichen Unterhaltungen über wissenschaftliche Gegenstände zum

Vorschein kam, sehr grosse Schritte nehmen, denen man nicht so leicht folgen konnte, und wenn man ihn zu einer näheren Erörterung einiger Zwischenglieder seiner Schlüsse aufforderte, so konnte er stutzig werden und es verursachte ihm einige Mühe, sich in den langsameren Gedankengang des Anderen zu fügen und dessen Zweifel rasch zu beseitigen. So hat ihn auch bei seinen Vorlesungen die Beobachtung der Mienen seiner Zuhörer, von der er oben schreibt, oft empfindlich gestört, wenn er, bisweilen ganz gegen sein Erwarten, sich genöthigt glaubte, einen für ihn fast selbstverständlichen Punkt noch besonders zu beweisen. Dies hat sich aber nach längerer Uebung verloren, und die verhältnissmässig grosse Zahl seiner Schüler ist nicht blos der Anziehungskraft seines durch die tiefsinnigsten Werke berühmt gewordenen Namens, sondern auch seinem Vortrage zuzuschreiben, auf den er sich stets sehr sorgfältig vorbereitete, und durch welchen es ihm gelang, seine Zuhörer über die grossen Schwierigkeiten hinwegzuführen, die sich dem Eindringen in die von ihm geschaffenen neuen Principien entgegenstellen.

Am 23. Februar 1855 starb Gauss, und bald darauf wurde Lejeune Dirichlet von Berlin nach Göttingen berufen. Bei dieser Gelegenheit wurde von mehreren Seiten, aber vergeblich dahin gewirkt, dass Riemann zum ausserordentlichen Professor ernannt werden möchte; erreicht wurde nur, dass ihm eine Remuneration von jährlich 200 Thaler von der Regierung ausgesetzt wurde; so gering diese Summe war, eine so wichtige Erleichterung gewährte sie Riemann, der in dieser und der nächsten Zeit wohl oft mit düsterem Blick in die Zukunft schaute. Es begann eine Reihe von traurigen Jahren, in denen ihn ein schmerzlicher Schlag nach dem anderen traf. Noch im Jahre 1855 verlor er seinen Vater und eine Schwester, Clara; die alte, so innig geliebte Heimath in Quickborn wurde verlassen, seine drei Schwestern zogen zu dem Bruder Wilhelm nach Bremen, der dort Postsecretair war und von jetzt an die Sorge für die Erhaltung der Familie übernahm.

Riemann wandte sich jetzt mit erneutem Eifer wieder seinen schon in den Jahren 1851 und 1852 begonnenen Untersuchungen über die Theorie der Abel'schen Functionen zu und machte dieselbe zum ersten Male von Michaelis 1855 bis Michaelis 1856 zum Gegenstande seiner Vorlesungen, an denen drei Zuhörer, Schering, Bjerknes und sein College Dedekind Theil nahmen. Im Sommer 1856 wurde er zum Assessor der mathematischen Classe der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften ernannt; als solcher überreichte er am 2. November seine Abhandlung über die Gauss'sche Reihe und schrieb an demselben

Tage seinem Bruder: „Auch hoffe ich, dass meine Arbeiten mir Früchte tragen sollen. Meine Abhandlung ist, wie ich Dir schon schrieb, jetzt zum Druck fertig, und vielleicht wird sie die Societät in ihren Schriften drucken lassen, allerdings eine grosse Ehre, da diese in den letzten 50 Jahren nur mathematische Abhandlungen von Gauss enthalten haben. Die mathematische Section der Societät, bestehend aus Weber, Ulrich und Dirichlet wird wenigstens nach Weber's Aeusserungen wohl auf den Druck meiner Abhandlung antragen. — Mit meinen Vorlesungen, d. h. mit dem Besuch derselben, bin ich ziemlich zufrieden, besonders bei der geringen Zahl der neu angekommenen Studenten. Es sind gar keine Mathematiker unter diesen und das ist auch wohl der Grund, dass Dedekind und Westphal ihre Privatvorlesungen nicht zu Stande bekommen haben. Die Anzahl meiner Zuhörer betrug nun an den vier Tagen, an denen ich gelesen habe, erst drei, dann vier und die letzten beiden Male fünf; doch war hierunter wohl ein Hospitant. Sehr lieb ist es mir, dass ich diesmal auch einige Zuhörer aus den ersten Semestern habe, nicht wie sonst bloss aus dem sechsten und späteren Semestern, weil ich dies als ein Zeichen betrachte, dass meine Vorlesungen leichter verständlich werden. Bei alledem kann ich noch nicht behaupten, dass meine Vorlesungen zu Stande gekommen sind; denn es hat sich noch Niemand bei mir gemeldet und ist also immer noch möglich, dass meine Herren Zuhörer mich im Stiche lassen. — Meine freie Zeit werde ich von jetzt an ganz auf die Arbeit über die Abel'schen Functionen, von der ich Dir erzählt habe, verwenden. Kurz vor meiner Wiederankunft hier in Göttingen ist auch der Hauptredacteur des mathematischen Journals, der Dr. Borchardt aus Berlin, hier gewesen und hat mir durch Dirichlet und Dedekind die Aufforderung zugehen lassen, ihm doch so bald wie möglich eine Darstellung meiner Untersuchungen über die Abel'schen Functionen, sie sei so roh wie sie wolle, zu schicken. Weierstrass ist jetzt stark im Publiciren, doch enthält das jetzt veröffentlichte Heft, von dem Scherk mir erzählte, nur die ersten Vorbereitungen zu seiner Theorie."

In der That widmete er sich nun mit allen Kräften der Ausarbeitung dieses Werkes, so dass er die ersten drei kleineren Abhandlungen am 18. Mai, die vierte grössere am 2. Juli 1857 im Manuscript nach Berlin abschicken konnte; allein durch die übermässige Anstrengung hatte seine Gesundheit sehr gelitten, und er befand sich am Ende des Sommersemesters in einem Zustande geistiger Abspannung, der seine Stimmung im höchsten Grade verdüsterte. Zur Erfrischung und Stärkung seiner Gesundheit nahm er für einige Wochen seinen Aufenthalt in Harzburg, wohin ihn sein Freund Ritter (damals Lehrer

an dem Polytechnicum zu Hannover, jetzt Professor in Aachen) auf einige Tage begleitete, und wohin ihm später sein College Dedekind folgte, mit dem er viele Spaziergänge und auch grössere Ausflüge in den Harz machte. Auf solchen Spaziergängen erheiterte sich seine Stimmung, sein Zutrauen zu Anderen und zu sich selbst wuchs; sein harmloser Scherz und seine rückhaltlose Unterhaltung über wissenschaftliche Gegenstände machten ihn zu dem liebenswürdigsten und anregendsten Gesellschafter. In dieser Zeit wandten sich seine Gedanken wieder der Naturphilosophie zu, und eines Abends nach der Rückkehr von einer anstrengenden Wanderung griff er zu Brewster's Life of Newton, und sprach lange mit Bewunderung über den Brief an Bentley, in welchem Newton selbst die Unmöglichkeit unmittelbarer Fernwirkung behauptet.

Bald nach seiner Rückkehr nach Göttingen wurde er am 9. November 1857 zum ausserordentlichen Professor in der philosophischen Facultät ernannt, und seine Remuneration von 200 Thaler auf 300 Thaler erhöht. Aber fast gleichzeitig erschütterte ihn auf das Tiefste der Tod seines innig geliebten Bruders Wilhelm; er übernimmt nun ganz die Sorge für seine drei noch lebenden Schwestern und dringt inständig darauf, dass sie noch im Laufe des Winters zu ihm nach Göttingen übersiedeln; dies geschah auch im Anfang März 1858, aber erst nachdem ihnen die jüngste Schwester, Marie, noch durch den Tod entrissen war. Nach so vielen Schicksalsschlägen trug das Zusammenleben mit den Schwestern wesentlich zur Besserung seiner tief niedergedrückten Gemüthsstimmung bei, und die Anerkennung, welche von nun an, wenn auch langsam, seinen Werken auch in weiteren Kreisen zu Theil wurde, hob allmählich sein gesunkenes Selbstvertrauen und liess ihn frischen Muth zu neuen Arbeiten finden. Schon vorher hatte er den später viel besprochenen Aufsatz „Ein Beitrag zur Electrodynamik" verfasst, über welchen er seiner Schwester Ida schreibt: „Meine Entdeckung über den Zusammenhang zwischen Electricität und Licht habe ich hier der Königl. Societät übergeben. Nach manchen Aeusserungen, die ich darüber vernommen, muss ich schliessen, dass Gauss eine andere von der meinigen verschiedene Theorie dieses Zusammenhangs aufgestellt und seinen nächsten Bekannten mitgetheilt hat. Ich bin aber völlig überzeugt, dass die meinige die richtige ist und in ein paar Jahren allgemein als solche anerkannt werden wird." Er hat bekanntlich diese Arbeit bald wieder zurückgezogen und auch später nicht veröffentlicht, wahrscheinlich weil er selbst mit der in ihr enthaltenen Ableitung nicht mehr zufrieden war.

In den Herbstferien 1858 machte er die Bekanntschaft der italienischen Mathematiker Brioschi, Betti und Casorati, welche damals eine Reise durch Deutschland machten und auch einige Tage in Göttingen verweilten; diese Verbindung sollte später in Italien wieder angeknüpft werden.

In diese Zeit fiel die Erkrankung Dirichlet's, welcher seinen langen Leiden am 5. Mai 1859 erlag. Er hatte von Anfang an das lebhafteste persönliche Interesse für Riemann empfunden und bei allen Gelegenheiten bethätigt, wo er auf eine Verbesserung der äusserlichen Verhältnisse Riemann's hinwirken konnte. Inzwischen war des Letzteren wissenschaftliche Bedeutung so allgemein anerkannt, dass die Regierung nach Dirichlet's Tode von der Berufung eines auswärtigen Mathematikers absah; Ostern 1859 wurde für Riemann eine Wohnung in der Sternwarte eingeräumt, am 30. Juli wurde er zum ordentlichen Professor ernannt und im December einstimmig zum ordentlichen Mitgliede der Gesellschaft der Wissenschaften erwählt. Schon vorher, am 11. August, hatte die Berliner Akademie der Wissenschaften ihn zum correspondirenden Mitgliede in der physikalisch-mathematischen Classe ernannt, und dies veranlasste ihn, im September in Dedekind's Gesellschaft nach Berlin zu reisen, wo er von den dortigen Gelehrten, Kummer, Borchardt, Kronecker, Weierstrass mit Auszeichnung und grosser Herzlichkeit aufgenommen wurde. Eine Folge seiner Ernennung, welcher später, im März 1866, die Wahl zum auswärtigen Mitgliede gefolgt ist,*) und dieses Besuchs war es, dass er im October seine Abhandlung über die Häufigkeit der Primzahlen der Berliner Akademie einreichte und einen, nach seinem Tode veröffentlichten Brief über die vielfach periodischen Functionen an Weierstrass richtete.

Einen Monat später übergab er der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften seine Abhandlung über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

In den Osterferien 1860 machte er eine Reise nach Paris, wo er sich vom 26. März ab einen Monat aufhielt; leider war das Wetter sehr rauh und unfreundlich, noch in der letzten Woche gab es mehrere Tage hinter einander Schnee und Hagel, so dass die Besichtigung von Merkwürdigkeiten oft geradezu unmöglich war. Dagegen war er sehr

*) Bezüglich der äusserlichen Auszeichnungen, deren Riemann theilhaftig geworden ist, mag hier noch bemerkt werden, dass die Bayerische Akademie der Wissenschaften ihn am 28. November 1859 zum correspondirenden, am 28. November 1863 zum ordentlichen Mitgliede, ferner dass die Pariser Akademie ihn am 19. März 1866 zu ihrem correspondirenden Mitgliede ernannte; ebenso wurde er am 14. Juni 1866, kurz vor seinem Tode, von der Londoner Royal Society zu deren auswärtigem Mitgliede erwählt.

zufrieden mit der freundlichen Aufnahme von Seiten der Pariser Gelehrten Serret, Bertrand, Hermite, Puiseux und Briot, bei welchem er einen Tag auf dem Lande in Chatenay mit Bouquet sehr angenehm verlebte.

In demselben Jahre vollendete er seine Abhandlung über die Bewegung eines flüssigen Ellipsoides und wendete sich der Bearbeitung der von der Pariser Akademie gestellten Preisaufgabe über die Theorie der Wärmeleitung zu, für welche er durch seine Untersuchungen über die Hypothesen der Geometrie schon früher die Grundlagen gewonnen hatte. Im Juni 1861 sandte er seine in lateinischer Sprache abgefasste Lösung unter dem Motto „Et his principiis via sternitur ad majora" ein; dieselbe errang indessen den Preis nicht, weil es ihm an Zeit gefehlt hatte, die zur Durchführung nöthige Rechnung vollständig mitzutheilen.

Das in den letzten Jahren ungetrübte, glückliche Leben, dessen Riemann sich erfreuen durfte, erreichte seinen Höhepunkt, als er sich am 3. Juni 1862 mit Fräulein Elise Koch aus Körchow in Mecklenburg-Schwerin, einer Freundin seiner Schwestern verheirathete; es war ihr beschieden, die bevorstehenden Jahre des Leidens mit ihm zu theilen und durch unermüdliche Liebe zu verschönern. Schon im Juli desselben Jahres befiel ihn eine Brustfellentzündung, von welcher er scheinbar zwar sich rasch erholte, welche aber doch den Keim zu einer Lungenkrankheit zurückliess, die sein frühes Ende herbeiführen sollte. Als ihm von den Aerzten ein längerer Aufenthalt im Süden zur Heilung angerathen war, gelang es der dringenden Verwendung von Wilhelm Weber und Sartorius von Waltershausen, von der Regierung nicht nur den erforderlichen Urlaub, sondern auch eine ausreichende Unterstützung zu einer Reise nach Italien für ihn auszuwirken, welche er im November 1862 antrat. Durch Sartorius von Waltershausen auf das Wärmste empfohlen, fand er das freundlichste Entgegenkommen in der Familie des Consuls Jäger in Messina, auf deren Villa in der Vorstadt Gazzi er den Winter verlebte. Sein Befinden besserte sich rasch, und er konnte Ausflüge nach Taormina, Catania und Syracus unternehmen. Auf der Rückreise, welche er am 19. März 1863 antrat, besuchte er Palermo, Neapel, Rom, Livorno, Pisa, Florenz, Bologna, Mailand; bei längerem Aufenthalte in diesen Städten, deren Kunstschätze und Alterthümer sein grösstes Interesse erweckten, machte er zugleich Bekanntschaft mit den bedeutendsten Gelehrten Italiens, und namentlich schloss er sich mit inniger Freundschaft an Professor Enrico Betti in Pisa an, den er schon im Jahre 1858 in Göttingen kennen gelernt hatte. Ueberhaupt bildet der mehrjährige Aufenthalt Riemann's in Italien, so traurig die nächste Veranlassung desselben auch war, einen wahren Lichtpunkt in seinem Leben; nicht allein, dass ihn das Schauen aller Herrlichkeit dieses entzückenden Landes, von Natur und Kunst, unendlich beglückte, er fühlte sich dort auch als freier Mensch dem Menschen gegenüber, ohne alle die hemmenden Rücksichten, die er in Göttingen auf Schritt und Tritt nehmen zu müssen meinte; dies Alles und der wohlthätige Einfluss des herrlichen Klimas auf seine Gesundheit stimmte ihn oft recht froh und heiter und liess ihn dort viele glückliche Tage verleben.

Mit den besten Hoffnungen verliess er das ihm so lieb gewordene Italien, allein er zog sich auf dem Uebergange über den Splügen, wo er unvorsichtiger Weise eine Strecke lang zu Fuss durch den Schnee ging, eine heftige Erkältung zu, und nach der Ankunft in Göttingen, welche am 17. Juni erfolgte, war sein Befinden fortwährend so schlecht, dass er sich sehr bald zu einer zweiten Reise nach Italien entschliessen musste, welche er am 21. August 1863 antrat. Er wandte sich zunächst nach Meran, Venedig, Florenz, dann nach Pisa, wo ihm am 22. December 1863 eine Tochter geboren wurde, welche nach seiner älteren Schwester den Namen Ida erhielt. Unglücklicher Weise war der Winter so kalt, dass der Arno zufror. Im Mai 1864 bezog er eine Villa vor Pisa; hier verlor er Ende August seine jüngere Schwester, Helene; er selbst wurde von der Gelbsucht befallen, welche auch eine Verschlimmerung seines Brustleidens zur Folge hatte. Eine Berufung nach Pisa an Stelle von Professor Mosotti, welche schon im Jahre 1863 durch Vermittlung von Betti an ihn ergangen war, hatte er theils auf den Rath seiner Göttinger Freunde, hauptsächlich aber wohl aus dem Grunde abgelehnt, weil er die mit der ihm angetragenen Stellung verbundenen Pflichten bei seinem angegriffenen Gesundheitszustande nicht vollständig erfüllen zu können befürchtete und deshalb sich ausser Stande fühlte, die Annahme des Rufes vor sich zu verantworten. Dasselbe Pflichtgefühl erweckte den dringenden Wunsch in ihm, nach Göttingen zurückzukehren und sich wieder seinem Lehramte zu widmen, und nur auf die ernsten Vorstellungen der Aerzte und seiner Freunde entschloss er sich dazu, auch den folgenden Winter in Italien zuzubringen, welchen er zu Pisa in angenehmem geselligen und wissenschaftlichen Verkehr mit den dortigen Gelehrten Betti, Felici, Novi, Villari, Tassinari, Beltrami verlebte; in jener Zeit arbeitete er auch an seiner Abhandlung über das Verschwinden der Theta-Functionen. Den Mai und Juni 1865 brachte er bei schlechtem Befinden in Livorno, den Juli und August am Lago Maggiore, den September in Pegli bei Genua zu, wo durch ein gastrisches Fieber eine bedeutende Verschlimmerung seines Zustandes eintrat.

Unter diesen Umständen konnte Riemann seinem immer lebhafteren Wunsche, nach Göttingen zurückzukehren, nicht länger widerstehen; er langte am 3. October an und verlebte daselbst den Winter bei erträglich gutem Befinden, welches ihm meistens gestattete, einige Stunden täglich zu arbeiten. Er vollendete die Abhandlung über das Verschwinden der Theta-Functionen und übertrug seinem früheren Schüler Hattendorff die Ausarbeitung der Abhandlung über die Minimalflächen; er sprach auch öfter den Wunsch aus, vor seinem Ende noch über einige seiner unvollendeten Arbeiten mit Dedekind zu sprechen, fühlte sich aber stets zu schwach und angegriffen, um denselben zu einem Besuche in Göttingen zu veranlassen. In den letzten Monaten beschäftigte er sich mit der Ausarbeitung einer Abhandlung über die Mechanik des Ohres, welche leider nicht vollendet und nur als Fragment nach seinem Tode von Henle und Schering herausgegeben ist.

Die Vollendung dieser Abhandlung sowie einiger anderen Arbeiten lag ihm sehr am Herzen, und er hoffte durch einen Aufenthalt von einigen Monaten am Lago Maggiore, wohin ihn ausserdem grosse Sehnsucht nach dem ihm so lieb gewordenen Lande trieb, die dazu erforderlichen Kräfte noch sammeln zu können. So entschloss er sich am 15. Juni 1866, in den ersten Kriegstagen, zu seiner dritten Reise nach Italien; dieselbe wurde schon in Cassel unterbrochen, weil die Eisenbahn zerstört war, doch gelangte er mit Fuhrwerk glücklich bis Giessen, von wo die Weiterreise keine ferneren Hindernisse fand. Am 28. Juni traf er am Lago Maggiore ein, wo er in der Villa Pisoni in Selasca bei Intra wohnte. Rasch nahmen seine Kräfte ab, und er selbst fühlte mit voller Klarheit sein Ende herannahen; aber noch am Tage vor seinem Tode arbeitete er, unter einem Feigenbaum ruhend und von grosser Freude über den Anblick der herrlichen Landschaft erfüllt, an seinem letzten, leider unvollendet gebliebenen Werke. Sein Ende war ein sehr sanftes, ohne Kampf und Todesschauer; es schien, als ob er mit Interesse dem Scheiden der Seele vom Körper folgte; seine Gattin musste ihm Brod und Wein reichen, er trug ihr Grüsse an die Lieben daheim auf und sagte ihr: küsse unser Kind. Sie betete das Vater Unser mit ihm, er konnte nicht mehr sprechen; bei den Worten „Vergieb uns unsere Schuld" richtete er gläubig das Auge nach oben; sie fühlte seine Hand in der ihrigen kälter werden, und nach einigen Athemzügen hatte sein reines, edeles Herz zu schlagen aufgehört. Der fromme Sinn, der im Vaterhaus gepflanzt war, blieb ihm durch das ganze Leben, und er diente, wenn auch nicht in derselben Form, treu seinem Gott; mit der grössten Pietät vermied er, Andere in ihrem Glauben zu stören; die tägliche Selbstprüfung vor dem Angesichte Gottes war, nach seinem eigenen Ausspruche, für ihn eine Hauptsache in der Religion.

Er ruht auf dem Kirchhofe zu Biganzolo, wohin Selasca eingepfarrt ist. Sein Grabstein trägt die Inschrift:

Hier ruhet in Gott
GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN, Prof. zu Göttingen,
geb. in Breselenz 17. Sept. 1826, gest. in Selasca 20. Juli 1866.
Denen die Gott lieben müssen alle Dinge zum Besten dienen. *)

*) Der Grabstein, der ihm von italienischen Freunden und Fachgenossen gewidmet war, ist bei einer Verlegung des Friedhofes beseitigt worden.

BERNHARD RIEMANN'S

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE WERKE.

NACHTRÄGE

HERAUSGEGEBEN VON

M. NOETHER UND W. WIRTINGER.

MIT 9 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Vorrede.

In den seit dem Erscheinen der zweiten Auflage von Riemanns Werken nunmehr verflossenen zehn Jahren ist für die Hauptgebiete seiner Tätigkeit, die Theorien der Abelschen Funktionen und der linearen Differentialgleichungen, neues Material, und zwar vorwiegend in der Form von Nachschriften seiner *Vorlesungen*, zum Vorschein gekommen*), welches zeigt oder bestätigt, daß Riemann in seinen Vorlesungen erheblich weiter gegangen ist als in seinen Veröffentlichungen. Dieses Material allgemein zugänglich zu machen, ist der Zweck unserer Publikation der „Nachträge zu Riemanns Ges. Math. Werken".

Für die *Abelschen Funktionen* ist hierbei zunächst an die Wintervorlesung von 1861/62 gedacht. Diese war als Fortsetzung der Sommervorlesung „Über die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere elliptische und Abelsche" **) angekündigt und sollte dreistündig insbesondere***) „die allgemeine Theorie der Integrale algebraischer Differentialien" entwickeln. Auf sie führen eine ganze Reihe neuer und wichtiger Begriffe und Betrachtungsweisen in der Theorie der Theta- und der algebraischen Funktionen zurück, und sind als solche zerstreut in Abhandlungen, besonders von Roch und Prym, eingeführt und seitdem viel benutzt worden, ohne in den Werken Riemanns selbst bisher eine Stelle gefunden zu haben. Nur die Untersuchung über die Konvergenz der Thetareihe ist aus einem Rochschen Hefte in die Werke (XXX der 2., XXIX der 1. Aufl.) aufgenommen; und ebenso die Ausführungen, welche Riemann über die Funktionen im Fall $p = 3$ im Februar 1862 vorgetragen hat (XXXI, bezw. XXX),

*) Vgl. für einen Teil desselben: F. Klein, in den Göttinger Nachrichten, math.-phys. Klasse, 1897, Heft 2 und Geschäftl. Mitt. 1898, Heft 1.

**) Aus dieser Vorlesung ist der Teil über elliptische Funktionen von Herrn H. Stahl, Teubner 1899, herausgegeben (irrtümlich dabei dem W.-S. 1861/62 zugeschrieben). Das in Göttingen liegende Hattendorffsche Heft bezieht sich wesentlich auf diese Sommervorlesung 1861.

***) Nach dem in Akt 19_5 der Göttinger Riemann-Manuskripte im Entwurf enthaltenen Vorlesungsanschlag.

nach demselben Heft, das aber für diesen Teil eine Bearbeitung einer anderen Nachschrift, wohl eines Stückes der Prymschen, darstellt. Der letzte Teil der Vorlesung hat sich hauptsächlich auf die algebraische Darstellung von Thetaquotienten für $p = 3$ und für den allgemeinen hyperelliptischen Fall bezogen und wurde, täglich gehalten und in die Zeit vom 3. bis 11. März zusammengedrängt, zuletzt nur noch in großen Zügen und ohne Ausführung der Rechnungen vorgetragen.

Eine Herausgabe auch dieses interessanten Schlußteils wird durch die Nachschrift des Herrn F. Prym, die bis zum 8. März reicht, und durch ein auch die beiden letzten Tage umfassendes Heft von B. Minnigerode ermöglicht. Letzteres Heft ist eine mit Bleistift ausgeführte, fast wörtliche Nachschrift der Vorlesung, die sogar das Datum jedes Vortrags enthält*); es konnte noch genügend entziffert werden und bildet die Grundlage der Herausgabe, während das Prymsche zur Kontrolle verglichen wurde. Diese Märzvorträge**) werden hier (unter I) möglichst im Wortlaut veröffentlicht; zur Vollständigkeit wird zugleich eine Übersicht über die Wintervorlesung überhaupt, sowie eine authentische Darstellung der bisher nur zitatweise bekannten originalen Kapitel gegeben, endlich sind auch einige kurze Zusätze zu dem von Weber veröffentlichten Teil aufgenommen.

Die Anmerkungen zu dieser Bearbeitung, zu welchen auch die Göttinger Manuskripte herangezogen worden sind, haben besonders den Zweck, auf den Zusammenhang der Vorlesung mit der späteren Litteratur, sei es daß diese an die Vorlesung anschließt, sei es daß sie einzelne Resultate selbständig wiederfindet, hinzuweisen.

Daß Herr Prof. Prym und Frau Professor Minnigerode, letztere durch gütige Vermittlung der Herren Prym und Stahl, bereitwilligst die Freundlichkeit hatten, die Hefte dem Herausgeber zur Veröffentlichung zu überlassen, verpflichtet denselben zum wärmsten Danke.

---

*) Durch die mitangegebenen Wochentage konnten die meist irrig bezeichneten Datumszahlen richtig gestellt werden. Hiermit, und nach einer gef. Angabe von Herrn Prym, ist auch die Festlegung der ganzen Vorlesung auf W.-S. 1861/62 gesichert. Die Verlegung dieser Vorträge auf Sommer 1862 — Prym im Vorwort zu seinen „Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristiken-Theorie" (Teubner 1882); Stahl im Vorwort zu seinem oben zitierten Buche, und bei anderen — beruht auf einem Verwechseln der Zeit der Ausarbeitung einiger Bogen des Prymschen Heftes mit der der Nachschrift. Das Minnigerodesche Heft ist nun bei den Göttinger Papieren deponiert worden.

**) Auf einige der in denselben gemachten Fortschritte Riemanns hat schon Herr H. Stahl im Vorwort zu seiner „Theorie der Abelschen Funktionen" (Teubner 1896) hingewiesen, sowie der Bearbeiter dieser Herausgabe in Bd. 8, Heft 1 des Jahresber. der Deutschen Math.-Vereinigung.

Die *Theorie der linearen Differentialgleichungen und der hypergeometrischen Reihe* hat Riemann in zwei Vorlesungen, beide unter dem Titel: „Die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere hypergeometrische Reihen und verwandte Transcendenten", behandelt, das erstemal dreistündig im Wintersemester 1856/57, das zweitemal vierstündig im Wintersemester 1858/59.

Von der Vorlesung von 1856/57 liegt eine etwa bis zu den Entwicklungen des Fragmentes XXIII der Gesammelten Werke reichende Nachschrift von E. Schering vor, aus welcher jedoch nur ein kurzer Abschnitt, der sich in der späteren Vorlesung nicht findet, aufgenommen wurde. Diese Nachschrift befindet sich als Akt Nr. 37 der Riemann-Papiere — zusammen mit derjenigen der Vorlesung über Abelsche Funktionen 1855/56 — auf der Göttinger Universitätsbibliothek.

Von der zweiten im Wintersemester 1858/59 gehaltenen Vorlesung existiert eine von Herrn Professor W. v. Bezold angefertigte, unmittelbare stenographische Nachschrift, welche als Akt Nr. 29 der Riemann-Papiere ebendort liegt. Das Heft trägt die spätere Aufschrift: „B. Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe, S.-S. 1859", wobei aber die Datierung wohl irrtümlich ist*).

Dieses Heft läßt zwar überall die Gedanken Riemanns und mit Ausnahme einiger Stellen auch den Gang der Rechnung unzweideutig erkennen, bedurfte aber für den Druck natürlich einer redaktionellen Überarbeitung. Die Herausgabe beschränkte sich auf zwei Teile der Vorlesung, in welchen die neuen Gedanken Riemanns besonders hervortreten, zumal da der übrige Inhalt, soweit er Riemann eigentümlich ist, von ihm selbst oder aus seinem Nachlaß bereits publiziert ist.

Der erste der hier mitgeteilten Abschnitte handelt von der Herleitung der Eigenschaften der P-Funktion aus ihrem Ausdruck durch ein bestimmtes Integral, sowie von ihrem Verhalten im Falle des Auftretens einer ganzzahligen Exponentendifferenz und bildet so eine Ergänzung zu Abhandlung IV der Ges. Werke.

Der zweite Teil jedoch hat durchaus selbständige Bedeutung und behandelt die Transcendenten, welche aus der Umkehrung des Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, insbesondere derjenigen der hypergeometrischen Reihe entstehen. Er bringt ferner allgemeine Bemerkungen zur Integration nicht homogener Gleichungen und der dabei auftretenden Transcendenten, endlich die Durchführung dieser Gedanken an dem elliptischen Integral erster Gattung und seinen Perioden.

---

*) Vgl. das Vorlesungsverzeichnis am Schlusse dieser „Nachträge".

Bei der erneuten Durchsicht der auf diese beiden Gebiete sich beziehenden Papiere Riemanns haben wir noch Einiges von allgemeinem Interesse vorgefunden, das wir in mehreren Zusätzen ebenfalls hier mitteilen. Als Schluß geben wir einen kurzen Bericht über die von uns benutzten Göttinger Manuskripte und eine Übersicht über die von Riemann angekündigten Vorlesungen.

Es ist selbstverständlich, daß durch die Feststellung einer Reihe von Gedanken, welche Riemann für sich oder vor einem kleinen Kreis von Zuhörern entwickelte, die Verdienste derjenigen nicht beeinträchtigt werden, ja eher in höherem Lichte erscheinen, welche später dieselben Probleme unabhängig erfaßt und ihnen durch eingehende Bearbeitung die gebührende Stellung in der heutigen Mathematik verschafft haben. Aber die Tatsache, daß diese Fragestellungen und Methoden dem ursprünglichen Riemannschen Gedankenkreis angehören, beansprucht ein ähnliches historisches Interesse, wie die andere, daß Gauß lange vor Abel und Jacobi im Besitz wesentlicher Teile der Theorie der elliptischen Funktionen war. Riemann selbst hatte — nach dem Entwurf*) eines Begleitbriefes von November 1865 zur Sendung seiner Abhandlung „Über das Verschwinden der Thetafunktionen" (Werke XI) — den Plan gefaßt, während seines Aufenthaltes in Italien seine Untersuchungen über Abelsche Funktionen als Fortsetzung der ersten Abhandlung (Werke VI) im Zusammenhang auszuarbeiten, denselben aber aufgeben müssen: meist zu schwach zum Arbeiten, sei es ihm nur bei größter Hitze im Juli 1864 zu Pisa gelungen, jene Abhandlung niederzuschreiben. Unsere jetzige Veröffentlichung kann wohl, soweit sie die Abelschen Funktionen berührt, die Absichten Riemanns aufklären.

Die Anregung zur Herausgabe dieser „Nachträge" ging von Noether aus, der auch die Stücke I, IV A—D bearbeitete und mit N. zeichnet. Die Stücke II, III, IV E, F sind von Wirtinger bearbeitet, der mit W. zeichnet. Das von den Bearbeitern im Text Hinzugefügte ist, von Unwesentlichem abgesehen, durch eckige Klammern und kleineren Druck kenntlich gemacht. Vor dem Druck ist das Manuskript durch die Hände der Herren Weber und Prym gegangen.

Der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und dem Kuratorium des Riemannschen Nachlasses, Herrn Direktor Schilling in Bremen und Herrn Professor Weber in Straßburg, haben wir unseren besten Dank auszusprechen für ihr Interesse an der Herausgabe und für die Bereitwilligkeit, mit der sie unseren Zweck förderten.

Erlangen und Innsbruck, im Mai 1902.

M. Noether. W. Wirtinger.

*) Akt „Varia 25" der Göttinger Papiere.

Inhalt.

I.

Vorlesungen über die allgemeine Theorie der Integrale algebraischer Differentialien.

(Wintersemester 1861/62.)

Übersicht über die Vorlesungen vom 28. Oktober bis 6. November 1861.

28. Okt., 30. Okt., 1. Nov., 4. Nov. 1861: Konvergenz der p-fach unendlichen Thetareihe [s. Nr. XXX, S. 483—486 der zweiten (Nr. XXIX der ersten) Auflage von Riemann's Ges. Math. Werken]. (1)

6. Nov: Bestimmung der Funktion ϑ durch Periodizitätseigenschaften (nach Art. 17 der Th. A. F.*)).

Prinzip der Zerlegung einer periodischen Funktion. (2)

(8., 11. Nov.):

Aus den Gleichungen (2) und (3) von Art. 17 der Th. A. F. folgt, daß für die $2p$ linear unabhängigen Systeme zusammengehöriger Periodizitätsmoduln der p unabhängigen Größen $v_1, v_2, \cdots, v_p$ sich

$$\log\vartheta(v_1, v_2, \cdots, v_p) + \log\vartheta(v_1+b_1, v_2+b_2, \cdots, v_p+b_p),$$

von ganzen Vielfachen von $2\pi i$ abgesehen, bezw. um

$$0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ -4v_1-2b_1-2a_{11},\ \cdots,\ -4v_p-2b_p-2a_{pp}$$

ändert; also wie eine Funktion

$$\log\vartheta(2v_1+b_1, \cdots, 2v_p+b_p),$$

aber gebildet mit den Doppelten der ursprünglichen Periodizitätsmoduln πi und $a_{\mu,\nu}$.

Setzt man nun

$$\vartheta(v_1, v_2, \cdots, v_p)\cdot\vartheta(v_1+b_1, v_2+b_2, \cdots, v_p+b_p) = f(2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_p),$$

so läßt sich diese Funktion nach folgendem Prinzip zerlegen:

Ist $f(u+2\pi i) = f(u)$, so spaltet sich die Funktion $f(u)$ durch die Formeln

*) Die Abhandlung „Theorie der Abelschen Funktionen“, Nr. VI der Werke, wird im Folgenden mit „Th. A. F.“ zitiert.

$$f(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u),$$
$$\varphi_1(u) = \tfrac{1}{2}\{f(u) + f(u+\pi i)\}, \quad \varphi_2(u) = \tfrac{1}{2}\{f(u) - f(u+\pi i)\}$$

in zwei Teile, von denen bei Änderung von u um πi der eine den Faktor $+1$, der andere den Faktor -1 erlangt.

Wendet man diese Zerlegung auf das Produkt

$$f(2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_p),$$

betrachtet als Funktion von $u = 2v_1$, an, so zerfällt dasselbe in zwei Teile φ_1 und φ_2; jede dieser Funktionen zerlegt sich dann, als Funktion von $2v_2$ betrachtet, wieder in zwei Teile; etc. Im ganzen zerlegt sich also das Produkt $f(2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_p)$ in eine Summe von 2^p Funktionen φ, welche alle bei Änderung der $2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_p$ um πi nur Faktoren ± 1 annehmen. Es möge für irgend eine dieser Funktionen sein:

$$\varphi(2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_\nu + \pi i, \cdots, 2v_p) = e^{\varepsilon_\nu i\pi} \cdot \varphi(2v, \cdots, 2v_\nu, \cdots, 2v_p),$$

wo die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ die Werte $\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1}$ vorstellen. Dann hat die Funktion

$$e^{-2\sum\limits_{\nu=1}^{p}\varepsilon_\nu v_\nu} \cdot \varphi(2v_1, \cdots, 2v_p) = \psi(2v_1, \cdots, 2v_p)$$

die Eigenschaft, sich bei Änderung irgend eines der $2v_1, \cdots, 2v_p$ um πi nicht zu ändern, bei gleichzeitiger Änderung der $2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_p$ bezüglich um

$$2a_{1,\mu},\ 2a_{2,\mu},\ \cdots,\ 2a_{p,\mu}$$

aber den Faktor

$$e^{-4v_\mu - 2b_\mu - 2\sum\limits_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,\mu} - 2a_{\mu,\mu}}$$

anzunehmen. D. h. die Funktion $\psi(2v_1, \cdots, 2v_p)$ ist bis auf einen konstanten Faktor definiert als eine Funktion ϑ, gebildet mit den Argumenten:

$$2v_1 + b_1 + \sum_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,1},\quad 2v_2 + b_2 + \sum_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,2},\quad \cdots,\quad 2v_p + b_p + \sum_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,p},$$

und mit den Periodizitätsmoduln

$$2a_{1,\mu},\ 2a_{2,\mu},\ \cdots,\ 2a_{p,\mu} \qquad {\scriptstyle (\mu = 1, 2, \cdots, p)}.$$

Der konstante Faktor kann von den b abhängen. Man erhält also durch das Prinzip das Produkt

$$\vartheta(v_1, v_2, \cdots, v_p) \cdot \vartheta(v_1 + b_1, v_2 + b_2, \cdots, v_p + b_p)$$

als Summe von 2^p ϑ-Funktionen, je multipliziert mit Faktoren der Form $e^{2\sum\limits_\nu \varepsilon_\nu v_\nu}$, und mit noch zu bestimmenden konstanten Koeffizienten.

Das Zerlegungsprinzip läßt sich auf das Produkt von n Faktoren:

$$\prod_{m=1}^{m=n} \vartheta(v_1 + b_1^{(m)},\ v_2 + b_2^{(m)},\ \cdots,\ v_p + b_p^{(m)}) = f(nv_1, nv_2, \cdots, nv_p)$$

ausdehnen. Das Produkt ändert sich nicht, wenn v_ν um πi, nv_ν also um $n\pi i$ zunimmt, und nimmt für die zusammengehörigen Änderungen

$$a_{1,\mu},\ a_{2,\mu},\ \cdots,\ a_{p,\mu}$$

der $v_1, v_2, \cdots, v_p$ den Faktor

$$e^{-2nv_\mu - 2\sum\limits_m b_\mu^{(m)} - na_{\mu,\mu}}$$

an; es verhält sich wie eine Funktion

$$\vartheta\Big(\cdots, nv_\mu + \sum_m b_\mu^{(m)}, \cdots\Big),$$

gebildet mit den n-fachen der ursprünglichen Periodizitätsmoduln πi und $a_{\mu,\nu}$.

Hat man nun eine Funktion $f(u)$ von der Eigenschaft, daß

$$f(u + n\pi i) = f(u)$$

ist, so läßt sich dieselbe in eine Summe von n Funktionen $\varphi_m(u)$ zerlegen, von denen jede bei Änderung von u um πi nur einen konstanten Faktor annimmt, der eine n^{te} Wurzel der Einheit wird.

Denn sei

$$\varphi(u + \pi i) = \alpha\varphi(u), \quad \varphi(u + n\pi i) = \varphi(u),$$

so wird zunächst

$$\alpha^n = 1;$$

sei dann α eine primitive n^{te} Wurzel von 1, und

$$\varphi_m(u + \pi i) = \alpha^{m-1}\varphi_m(u),$$

so setze man:

$$f(u) = \sum_{m=1}^{m=n} \varphi_m(u).$$

Hieraus wird

$$f(u + \varkappa\pi i) = \sum_m \alpha^{\varkappa(m-1)}\varphi_m(u) \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 0, 1, \cdots, n-1)}$$

und diese n Gleichungen ergeben die n Funktionen $\varphi_m(u)$ in der Form:

$$\varphi_m(u) = \frac{1}{n}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \alpha^{-\varkappa(m-1)} f(u + \varkappa\pi i) \qquad {\scriptstyle (m = 1, 2, \cdots, n)}.$$

Indem man diese Zerlegung auf das Produkt

$$f(nv_1, nv_2, \cdots, nv_p)$$

1*

successiv als Funktion von $u = nv_1, nv_2, \cdots, nv_p$ betrachtet, anwendet, zerlegt sich dasselbe in eine Summe von n^p Funktionen φ, welche alle bei Änderung irgend einer der Größen nv_ν um πi nur Faktoren annehmen, die n^{te} Wurzeln der Einheit sind. Sei für eine dieser Funktionen:

$$\varphi(nv_1, nv_2, \cdots, nv_\nu + \pi i, \cdots, nv_p) = e^{\frac{2\varepsilon_\nu i\pi}{n}} \varphi(nv_1, \cdots, nv_\nu, \cdots, nv_p),$$

wo die ε_ν die Werte $0, 1, \cdots, n-1$ vorstellen; und sei

$$\varphi(nv_1, \cdots, nv_p) = e^{2\sum\limits_{\nu=1}^{p} \varepsilon_\nu v_\nu} \psi(nv_1, \cdots, nv_p),$$

so ändert sich $\psi(nv_1, \cdots, nv_p)$ bei Änderung irgend eines der nv_ν um πi nicht mehr, nimmt aber bei gleichzeitiger Änderung der $nv_1, nv_2, \cdots, nv_p$ bezüglich um

$$na_{1,\mu}, \; na_{2,\mu}, \; \cdots, \; na_{p,\mu},$$

da die φ sich hierbei wie das Produkt f selbst verhalten, den Faktor

$$e^{-2nv_\mu - 2\sum\limits_m b_\mu^{(m)} - 2\sum\limits_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,\mu} - na_{\mu,\mu}}$$

an. D. h. die Funktion $\psi(nv_1, nv_2, \cdots, nv_p)$ ist bis auf einen konstanten Faktor definiert als eine Funktion ϑ, gebildet mit den Argumenten

$$nv_1 + \sum_m b_1^{(m)} + \sum_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,1}, \quad \cdots, \quad nv_p + \sum_m b_p^{(m)} + \sum_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,p},$$

mit den Perioden πi, und mit den Periodizitätsmoduln

$$na_{1,\mu}, \; na_{2,\mu}, \; \cdots, \; na_{p,\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, p).$$

Die konstanten, noch zu bestimmenden Koeffizienten in dem Summenausdruck des Produkts durch die n^p ϑ-Funktionen werden von den $b^{(m)}$ abhängen.

Auf diesem Wege ergibt sich eine Menge von Relationen zwischen Thetareihen. Mit ihrer Hilfe beweist man für $p = 1$, daß der Quotient zweier Thetareihen eine elliptische Funktion ist, d. h. der betreffenden Differentialgleichung genügt, und so hat Jacobi die Theorie der elliptischen Funktionen behandelt. Einen analogen Weg ging Göpel für $p = 2$; außerdem gab er noch eine Tafel aller möglichen Thetarelationen bis zu einem gewissen Umfang hin. Für $p = 3$ würde das Verfahren ohne Hinzunahme algebraischer Prinzipien nicht zum Ziele führen.

Übersicht über die Vorlesungen vom 13. November 1861 bis 24. Januar 1862.

13.—27. Nov. 1861 (³): Wiederholung aus dem Kolleg des Sommersemesters 1861 über Abelsche Funktionen (aus allgemeiner Funktionentheorie).

2.—11. Dez.: Algebraisches (Art. 6—12 der Th. A. F.).

13.—20. Dez.: Über die Thetafunktion (Art. 17—22 der Th. A. F.).

6. Jan. 1862: Die ersten beiden Absätze von Art. 15 der Th. A. F., mit Anwendung auf die Argumente der Thetafunktion; Bestimmung der immer endlich bleibenden Normalintegrale, und deren Einführung in die Thetafunktion.

8.—13. Jan.: Art. 23 der Th. A. F. (mit Art. 16 und 5).

15.—17. Jan.: Art. 24 der Th. A. F. Zum Beweis des Satzes: „daß ein beliebig gegebenes Größensystem $(e_1, \cdots, e_p)$ nur Einem Größensystem von der Form $\left(\sum\limits_1^p \alpha_1^{(\nu)}, \cdots, \sum\limits_1^p \alpha_p^{(\nu)}\right)$ kongruent gesetzt werden kann, oder aber unendlich vielen", wird hier zuerst gezeigt, daß, wenn noch ein zweites kongruentes Größensystem $\left(\sum\limits_1^p \beta_1^{(\nu)}, \cdots, \sum\limits_1^p \beta_p^{(\nu)}\right)$ vorhanden ist, eine rationale Funktion ξ von (s, z) existiert, welche in den p zu den Integralen $\alpha^{(\nu)}$ gehörigen Punkten unendlich groß von der ersten Ordnung, in den p zu den $\beta^{(\nu)}$ gehörigen Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Dies geschieht durch Darstellung von $\log \xi$ als Summe von Integralen dritter und erster Gattung. Hieraus wird dann der Satz über das identische Verschwinden von $\vartheta(u_1 - e_1, \cdots)$ geschlossen.

Statt Art. 25 der Th. A. F. wird nur die Bemerkung gegeben:

„Die nicht immer endlich bleibenden Integrale algebraischer Funktionen lassen sich durch Thetafunktionen ausdrücken, und hieraus lassen sich Relationen zwischen den Integralen herleiten, die sonst schwierig zu finden sind. Hierin besteht der Nutzen dieser Ausdrücke."

17.—22. Jan.: Ausdrücke algebraischer Funktionen von z durch Quotienten zweier Produkte von gleichvielen Funktionen $\vartheta(u_1 - e_1, \cdots)$, multipliziert mit Potenzen der Größen e^u (Art. 26 der Th. A. F.). (⁴)

24. Jan.: Quotient zweier Thetafunktionen (der Quotient in Art. 27 der Th. A. F., soweit er als Funktion von (s, z) betrachtet ist).

Die 2^{2p} Thetareihen. (⁵)

(24., 27. Jan. 1862:)

Das im Zähler des Ausdrucks (Art. 27 der Th. A. F.)

$$\frac{\vartheta\left(v_1 - g_1\pi i - \sum\limits_\nu h_\nu a_{1,\nu}, \cdots\right)}{\vartheta(v_1, \cdots, v_p)} e^{-2\sum\limits_\nu h_\nu v_\nu}$$

vorkommende Produkt kann, wenn die h gebrochene Zahlen vorstellen, als allgemeine ϑ-Reihe dargestellt werden, in der die Summationsindices nicht ganze, sondern gebrochene Zahlen durchlaufen.

Der Exponent des allgemeinen Gliedes des Zählers

$$\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum_1^p \left(v_\mu - g_\mu \pi i - \sum_1^p h_\nu a_{\nu,\mu}\right) m_\mu - 2\sum_1^p h_\nu v_\nu$$

geht nämlich durch Zufügung der Konstanten

$$\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} h_\mu h_{\mu'} + 2\sum_1^p g_\mu h_\mu \pi i$$

über in

$$\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} (m_\mu - h_\mu)(m_{\mu'} - h_{\mu'}) + 2\sum_1^p (m_\mu - h_\mu)(v_\mu - g_\mu \pi i);$$

daher

$$e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} h_\mu h_{\mu'} + 2\sum_1^p g_\mu h_\mu \pi i - 2\sum_1^p h_\nu v_\nu} \cdot \vartheta\left(v_1 - g_1 \pi i - \sum_\nu h_\nu a_{1,\nu}, \cdots\right) =$$

$$= \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p_{m_1, m_2, \cdots, m_p} e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}(m_\mu - h_\mu)(m_{\mu'} - h_{\mu'}) + 2\sum_1^p (m_\mu - h_\mu)(v_\mu - g_\mu \pi i)}.$$

Diese Reihe bleibt ungeändert, wenn die h um ganze Zahlen geändert werden, und nimmt, von dem konstanten Faktor $e^{2\sum g_\mu h_\mu \pi i}$ herrührend, den Faktor $e^{2 h_\mu g'_\mu \pi i}$ an, wenn g_μ um die ganze Zahl g'_μ geändert wird.

Wir betrachten diese Reihen im einfachsten Fall, wo die g, h Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind, Reihen, welche bei der Darstellung von Quadratwurzeln aus rationalen Funktionen von (s, z) gebraucht werden. Eine solche Reihe bleibt bis aufs Vorzeichen ungeändert, wenn auch die g_μ um ganze Zahlen geändert werden. Setzt man daher [6]

$$h_\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{2}, \quad g_\mu = \frac{\varepsilon'_\mu}{2},$$

so erhält man eine Reihe, welche, bis aufs Vorzeichen, dadurch charakterisiert ist, daß man für die ε_μ, ε'_μ nur die Zahlen 0 und 1 einsetzt, welchen sie mod. 2 kongruent sind.

Die Reihe selbst entsteht aus der ursprünglichen Thetareihe:

$$\vartheta(u_1, \cdots, u_p) = \left(\sum\right)^p_{n_1, \cdots, n_p} e^{\left(\sum\right)^2 a_{\mu,\mu'} n_\mu n_{\mu'} + 2\sum n_\mu u_\mu},$$

indem man

$$n_\mu = m_\mu - \frac{\varepsilon_\mu}{2}, \quad u_\mu = v_\mu - \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i$$

substituiert, also den Index n_μ alle ganzen Zahlen oder halben ungeraden Zahlen durchlaufen läßt, je nachdem $\varepsilon_\mu = 0$ oder 1 ist. Wir bezeichnen sie durch

$$\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(v) = \vartheta\binom{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p}{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_p}(v_1, v_2, \cdots, v_p)$$

$$= \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p_{m_1, \cdots, m_p} e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}\left(m_\mu - \frac{\varepsilon_\mu}{1}\right)\left(m_{\mu'} - \frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right) + 2\sum_1^p\left(m_\mu - \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(v_\mu - \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

nämlich als *Thetareihe mit der Charakteristik* $\binom{\varepsilon}{\varepsilon'} = \binom{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p}{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_p}$.

Die ursprüngliche Reihe hat also die Charakteristik $\binom{0, 0, \cdots, 0}{0, 0, \cdots, 0}$.

Die Anzahl aller dieser Thetareihen beträgt 2^{2p}, da jedes der $2p$ Elemente der Charakteristik die Werte 0 und 1 annehmen kann. Die ursprüngliche Thetareihe ist eine gerade Funktion. Um zu sehen, welche der übrigen gerade oder ungerade Funktionen sind, verwandle man zunächst in der obigen Reihe die $m_\mu - \frac{\varepsilon_\mu}{2}$ bezw. in $-m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}$, wodurch der Wert der Reihe ungeändert bleibt; ersetzt man dann die v_μ durch die $-v_\mu$, so erhält man nach Multiplikation mit $e^{\sum \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu \pi i}$ wieder die ursprüngliche Reihe; also

$$(-1)^{\sum_1^p \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu} \vartheta\binom{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p}{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_p}(-v_1, -v_2, \cdots, -v_p)$$

$$= \vartheta\binom{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p}{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_p}(v_1, v_2, \cdots, v_p),$$

d. h.: die Thetareihe ist eine gerade oder ungerade Funktion ihrer Argumente, je nachdem ihre Charakteristik $\binom{\varepsilon}{\varepsilon'} = \binom{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p}{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_p}$ „gerade“ oder „ungerade“, nämlich je nachdem

$$\sum_\mu \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu \equiv 0, \quad \text{oder} \quad \equiv 1 \pmod{2}.$$

In letzterem Fall geht die Entwicklung nur nach ungeraden Potenzen der v, in ersterem nur nach geraden Potenzen der v. Die ungeraden Funktionen verschwinden für die Nullwerte der Argumente, die geraden im allgemeinen nicht, sondern nur bei speziellen Werten der $a_{\mu,\mu'}$.

Um die Anzahl α_p der geraden, und β_p der ungeraden Charakteristiken zu bestimmen, beachte man, daß man jene Charakteristiken aus den α_{p-1} geraden und β_{p-1} ungeraden Charakteristiken, welche aus $p-1$ Gliedern $\frac{\varepsilon_\mu}{\varepsilon'_\mu}$ bestehen, durch Vorsetzen eines Gliedes einer der vier Arten

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0, & 1, & 0, & 1 \end{matrix}$$

hervorgehen lassen kann, wobei nur die letztere Zufügung den Charakter des Geraden oder Ungeraden ändert. So erhält man

$$\alpha_p = 3\alpha_{p-1} + \beta_{p-1},$$
$$\beta_p = 3\beta_{p-1} + \alpha_{p-1};$$

hieraus, da $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 1$:

$$\alpha_p + \beta_p = 4\,(\alpha_{p-1} + \beta_{p-1}) = 2^{2p},$$
$$\alpha_p - \beta_p = 2\,(\alpha_{p-1} + \beta_{p-1}) = 2^p,$$

und somit

$$\alpha_p = 2^{p-1}(2^p + 1), \qquad \beta_p = 2^{p-1}(2^p - 1).$$

Die Abelschen Funktionen.(7)

(27., 29., 31. Januar, 3. Februar:)

Da

$$\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(v) = \vartheta\binom{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p}{\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'}(v_1, \cdots, v_p)$$
$$= e^{\frac{1}{4}(\sum)^2 a_{\mu,\mu'}\varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu'} + \frac{1}{2}\sum \varepsilon_\mu \varepsilon_\mu' \pi i - \sum \varepsilon_\nu v_\nu} \cdot \vartheta\left(v_1 - \frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i - \sum \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{\nu,1}, \cdots\right)$$

ist, so wird, sobald $\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(0, 0, \cdots, 0) = 0$, auch

$$\vartheta\left(-\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i - \sum \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{\nu,1}, \cdots\right) = 0. \tag{1}$$

Dies tritt für ungerade Charakteristiken $\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}$ immer, und im allgemeinen nur für ungerade Charakteristiken, ein. Sind nun u_μ und u_μ' die Werte, welche das Integral erster Gattung u_μ für zwei unbestimmte Wertsysteme (s, z) und (s_1, z_1) annimmt, $\alpha_\mu^{(\nu)}$ der Wert von u_μ für $(s, z) = (\sigma_\nu, \zeta_\nu)$, $a_{\mu,\mu'}$ der Periodizitätsmodul der Funktion u_μ an dem Schnitt $b_{\mu'}$, so lassen sich, sobald die Gleichung (1) erfüllt ist, nach Art. 23 der Th. A. F. die $p-1$ Punkte (σ_ν, ζ_ν) so bestimmen, daß die Kongruenzen

$$\left(\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i + \sum \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{\nu,1}, \cdots, \frac{\varepsilon_p'}{2}\pi i + \sum \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{\nu,p}\right) \equiv \left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \cdots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \tag{2}$$

nach den $2p$ Modulsystemen der Funktionen u bestehen; daher verschwindet die Funktion

$$\vartheta\binom{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p}{\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'}(u_1 - u_1', \cdots, u_p - u_p'),$$

als Funktion von (s, z) betrachtet, wenn sie als solche nicht identisch verschwindet, für $(s, z) = (s_1, z_1)$ und für die $p-1$ Punkte (σ_ν, ζ_ν).

Aus den Gleichungen (2) folgt

$$\left(2\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \cdots, 2\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv (0, \cdots, 0). \tag{3}$$

Die $p-1$ Größenpaare (σ_ν, ζ_ν), jedes doppelt genommen, bilden also (Art. 23 der Th. A. F.) $2p-2$ durch eine Gleichung

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_p\varphi_p = 0$$

verknüpfte Wertepaare; d. h. man kann die $p-1$ Konstanten $c_1 : c_2 : \cdots : c_p$ so bestimmen, daß die $2p-2$ Nullpunkte des Ausdrucks $c_1\varphi_1 + \cdots + c_p\varphi_p$ paarweise zusammenfallen, bez. in die (σ_ν, ζ_ν), die Funktion φ also für die $p-1$ Wertsysteme (σ_ν, ζ_ν) unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Während die Anzahl der willkürlichen Konstanten in φ nur die Möglichkeit der algebraischen Aufgabe, die $2p-2$ Nullpunkte einer Funktion φ paarweise zusammenfallen zu lassen, aufzeigt, können wir nun schließen, daß die Aufgabe im allgemeinen, den ungeraden Charakteristiken entsprechend, $2^{p-1}(2^p - 1)$ Lösungen zuläßt. Denn diese Aufgabe führt auch umgekehrt auf (3), also auf (2), und von da auf (1). Die Ausnahmefälle, in welchen mehr Lösungen existieren, schließen wir vorläufig aus.

Man bilde nun, unter Einführung einer zweiten ungeraden Charakteristik

$$\binom{\eta}{\eta'} = \binom{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p}{\eta_1', \eta_2', \cdots, \eta_p'},$$

den Quotienten

$$r = \frac{\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(u_1 - u_1', \cdots, u_p - u_p')}{\vartheta\binom{\eta}{\eta'}(u_1 - u_1', \cdots, u_p - u_p')}, \tag{4}$$

so wird derselbe, als Funktion von (s, z), da er an den Querschnitten nur die Faktoren ± 1 annimmt, nämlich an a_ν den Faktor $e^{-(\varepsilon_\nu - \eta_\nu)\pi i}$, an b_ν den Faktor $e^{(\varepsilon_\nu' - \eta_\nu')\pi i}$, nach Art. 27 der Th. A. F. die Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion von s und z. r wird ferner unendlich klein von der ersten Ordnung in den $p-1$ Punkten (σ_ν, ζ_ν), in welchen der Zähler, als Funktion von (s, z), außer in (s_1, z_1), verschwindet, und in welchen eine Funktion φ je von der zweiten Ordnung unendlich klein wird; und r wird unendlich groß von der ersten Ordnung in den $p-1$ Punkten $(\sigma_\nu', \zeta_\nu')$, in welchen der Nenner, als Funktion von (s, z), außer in (s_1, z_1), verschwindet, und in welchen ebenfalls eine Funktion φ je von der zweiten Ordnung unendlich klein wird. Bezeichnet man diese beiden Funktionen mit $\varphi(s, z)$ und mit $\psi(s, z)$, so wird also:

$$r = B \cdot \sqrt{\frac{\varphi(s, z)}{\psi(s, z)}},$$

wo B eine von (s_1, z_1) abhängige Konstante ist.

Um diese Konstante weiter zu bestimmen, beachte man, daß durch Vertauschen von (s, z) mit (s_1, z_1) die beiden ϑ-Funktionen nur ihr Vorzeichen, der Quotient r sich also gar nicht ändert. Daher wird

$$r = A \cdot \sqrt{\frac{\varphi(s, z)}{\psi(s, z)}} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(s_1, z_1)}{\psi(s_1, z_1)}}, \tag{4'}$$

wo A von (s, z) und (s_1, z_1) unabhängig ist.

Der Quotient $\sqrt{\frac{\varphi(s, z)}{\psi(s, z)}}$ ist, nach seinem Ausdrucke (4), eindeutig in T' und wird in je $p-1$ Punkten von T unendlich klein, bezw. unendlich groß von der ersten Ordnung; bei Überschreiten der Querschnitte nimmt er die Faktoren ± 1 an. Die Funktionen

$$\sqrt{\varphi(s, z)},$$

welchen die ungeraden ϑ-Funktionen proportional sind, nennen wir *Abelsche Funktionen* *).

Die Abelschen Funktionen sind durch (4), (4') den ungeraden ϑ-Funktionen in T' [aber in einer mit der Fläche T' sich ändernden Weise] einzeln eindeutig zugeordnet; und zwar auf doppelte Weise:

einmal [direkt], indem eine Abelsche Funktion $\sqrt{\varphi(s, z)}$ existiert, die in denselben $p-1$ Punkten verschwindet, in denen auch

$$\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(u_1 - u_1', \cdots, u_p - u_p')$$

als Funktion von (s, z), außer in (s_1, z_1), verschwindet — eine Eigenschaft, die mit dem Bestehen der Kongruenzen (2) gleichbedeutend ist. Dieser Abelschen Funktion $\sqrt{\varphi(s, z)}$ schreiben wir daher ebenfalls die Charakteristik

$$(\sqrt{\varphi}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p' \end{pmatrix}$$

zu;

sodann [indirekt], indem der Quotient *zweier* Abelschen Funktionen $\sqrt{\frac{\varphi(s, z)}{\psi(s, z)}}$, welche zu den Charakteristiken $\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}$ und $\binom{\eta}{\eta'}$ gehören, am Querschnitte a_ν den Faktor $(-1)^{\varepsilon_\nu - \eta_\nu}$, an b_ν den Faktor $(-1)^{\varepsilon_\nu' - \eta_\nu'}$ annimmt, wie der Quotient (4) aus den beiden entsprechenden ϑ-Funktionen, und sich im übrigen in T' stetig ändert. Diese Eigenschaft

*) Führt man an Stelle von s und z andere Variable rational ein, so erhält eine Abelsche Funktion einen Faktor, der eine rationale Funktion von s und z ist; das Verhältnis zweier solcher Funktionen bleibt ungeändert.

kann man auch, unter Einführung einzelner Buchstaben für die Charakteristiken, so ausdrücken, daß man, wenn

$$(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p' \end{pmatrix} = (\sqrt{\varphi})$$

$$(b) = \begin{pmatrix} \eta_1, \cdots, \eta_p \\ \eta_1', \cdots, \eta_p' \end{pmatrix} = (\sqrt{\psi}).$$

die Charakteristiken sind, zu denen nach der ersten Zuordnung bezw. $\sqrt{\varphi}$ und $\sqrt{\psi}$ gehören,

$$(a+b) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \eta_1, \cdots, \varepsilon_p + \eta_p \\ \varepsilon_1' + \eta_1', \cdots, \varepsilon_p' + \eta_p' \end{pmatrix} \equiv (a-b) \pmod{2}$$

setzt, also

$$(2a) \equiv \begin{pmatrix} 0, \cdots, 0 \\ 0, \cdots, 0 \end{pmatrix}, \qquad (2b) \equiv \begin{pmatrix} 0, \cdots, 0 \\ 0, \cdots, 0 \end{pmatrix},$$

und die Charakteristik $(a+b)$ der Funktion $\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}$ zuschreibt, deren Faktorensystem an den Querschnitten a_ν und b_ν sich bestimmt durch

$$(-1)^{\varepsilon_\nu + \eta_\nu}, \quad \text{bezw.} \quad (-1)^{\varepsilon_\nu' + \eta_\nu'}.$$

Dieselbe Charakteristik hat dann auch $\sqrt{\varphi \cdot \psi} = \psi \sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}$, da ψ an den Querschnitten nur die Faktoren $+1$ erhält. Bei *einer* Abelschen Funktion kann man noch nicht von bestimmten Faktoren reden, die sie an den Querschnitten annimmt, da sie auch im Unendlichen verzweigt ist, jene Faktoren also vom Wege abhängen.

Aufstellung der Ausdrücke der Abelschen Funktionen für die einfachsten Fälle.

1. Hyperelliptische Funktion.[8]

(3. Februar:)

Es ist zweckmäßig, die Gleichung zwischen s und z, $F(s, z) = 0$, durch Einführung rationaler Funktionen σ, ζ von (s, z) zuerst in eine einfache Form $F_1(\sigma, \zeta) = 0$ zu transformieren.

Was zunächst die Wahl von ζ betrifft, so führen wir, wenn eine Funktion ζ existiert, die nur für zwei Punkte vor T unendlich von der ersten Ordnung wird, d. h. im Falle der *hyperelliptischen Funktion*, diese ein.

Sei dann σ irgend eine andere rationale Funktion von (s, z), welche nur nicht für solche zwei Punkte, in denen ζ denselben Wert annimmt, ebenfalls denselben Wert erhält, also keine rationale Funktion von ζ allein sei. Wenn σ in m Punkten von T unendlich von der ersten Ordnung wird, so wird die transformierte Gleichung von der Form

$$F_1(\overset{2}{\sigma}, \overset{m}{\zeta}) = 0,$$

die φ werden dann in σ vom 0^{ten}, in ζ vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grad, also ganze Funktionen von ζ allein, vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade: $\overset{m-2}{\varphi(\zeta)}$.

Da jede Funktion, die für p oder weniger Werte unendlich wird, gleich dem Quotienten zweier Funktionen φ wird, hier also rational in ζ, so wird man für σ niedrigstens eine Funktion wählen, die für $p+1$ Werte unendlich von der ersten Ordnung wird, wobei die $p+1$ Punkte beliebig gewählt werden können [nur nicht so, daß in p der $p+1$ Punkte eine Funktion φ verschwindet]. Die Gleichung zwischen σ und ζ wird dann von der Form $F_1(\overset{2}{\sigma}, \overset{p+1}{\zeta}) = 0$, und die φ werden Funktionen $\overset{p-1}{\varphi(\zeta)}$.

Sei

$$F_1(\sigma, \zeta) = a_0\sigma^2 + 2a_1\sigma + a_2 = 0,$$

wo die a ganze Funktionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades von ζ sind. Dann wird

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial \sigma} = a_0\sigma + a_1 = \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2},$$

und irgend ein endlich bleibendes Integral wird die Form haben:

$$\int \frac{\overset{p-1}{\varphi(\zeta)}\, d\zeta}{2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}},$$

wo $\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}$ die Quadratwurzel aus einem Ausdruck $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grades in ζ wird: ein „hyperelliptisches Integral". Als Verzweigungspunkte der über der ζ-Ebene ausgebreiteten Fläche T hat man, wenn $a_1^2 - a_0 a_2 = 0$ nur einfache Wurzeln hat, die $w = 2p+2$ Nullpunkte von $a_1^2 - a_0 a_2 = 0$; entsprechend der Formel $w = 2n + 2(p-1)$ für $n = 2$. Zugleich sieht man, daß, wegen $w = 2m(n-1) - 2r$, $n = 2$, $m = p+1$, auch $r = 0$ sein muß, wenn die endlichen Integrale wirklich zu einer $\overline{2p+1}$-fach zusammenhängenden Fläche gehören sollen. Andernfalls würde, wenn zwei Verzweigungspunkte sich aufhebend zusammenfielen, ein rationaler linearer Faktor aus der Quadratwurzel heraustreten, $\overset{p-1}{\varphi(\zeta)}$ müßte denselben enthalten, und das p würde um eine Einheit erniedrigt.

Bei der Transformation auf die einfachste Form werden im hyperelliptischen Fall die Beziehungen zwischen den Abelschen Funktionen zwar einfach, aber die Symmetrie geht verloren; es soll daher zweckmäßigerweise dieser Fall erst später weiter behandelt werden. Wenn $p = 1$, so wählt man für ζ und σ zwei beliebige verschiedene Funktionen, die in je zwei Punkten unendlich von der ersten Ordnung werden; wenn $p = 2$, für ζ den Quotienten aus den beiden allein existierenden Funktionen φ, der in zwei Punkten ∞^1 wird, für σ eine weitere Funktion, die in drei Punkten ∞^1 wird. Wir wenden uns dem einfachsten Falle zu, in dem keine Funktion existiert, die in nur zwei Punkten unendlich wird, zu dem *allgemeinen* Fall $p = 3$.

2. Allgemeiner Fall $p = 3$.

5. Februar 1862: Aufstellung der homogenen Gleichung $F(\overset{2p-2}{x, y, z}) = 0$ für den nicht-hyperelliptischen Fall $p \geqq 3$ (s. Werke, „Zur Theorie der Abelschen Funktionen für den Fall $p = 3$", XXXI, S. 489—490; 1. Aufl. XXX, S. 458—459).

7.—26. Febr.: Der allgemeine Fall $p = 3$. Von der homogenen Relation vierten Grades zwischen den Quadraten dreier Abelschen Funktionen $\sqrt{\varphi}$ ausgehend, werden die 28 Abelschen Funktionen und eine Zuordnung derselben zu den 28 ungeraden Theta-Charakteristiken aufgestellt (s. Werke XXXI, S. 491—504; 1. Aufl. XXX, S. 459—472).

Hierbei sind nur folgende zwei Zusätze nachzutragen: (9)

Zusatz zu Werke XXXI, S. 496, Formeln (16), (17) (1. Aufl. XXX, S. 464—465). *(17. Febr.:)*

Wir wollen den umgekehrten Satz beweisen, daß, wenn zwischen den sechs Quadraten von Abelschen Funktionen eine Gleichung (16) existiert, dann $\sqrt{pq}$, wo p, q auf S. 496 (1. Aufl. S. 464) je in doppelter Weise angeschrieben sind, ein zur Gruppe $\sqrt{x\eta}$ gehöriges Produkt Abelscher Funktionen ist.

Indem man zuerst $ax, by, cz, \frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}, \frac{\zeta}{c}$ bezw. durch $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ ersetzt, ändert sich die Relation

$$\sqrt{x\xi} + \sqrt{y\eta} + \sqrt{z\zeta} = 0 \tag{10}$$

nicht. Wir nehmen daher zu (10) statt (16) die Relation

$$x + y + z + \xi + \eta + \zeta = 0.$$

Indem man den hieraus gewonnenen Wert von ζ in (10), oder

$$z\zeta = x\xi + y\eta + 2\sqrt{x\xi y\eta},$$

substituiert, erhält man

$$(z + x + y)\,(z + \xi + \eta) = x\eta + y\xi - 2\sqrt{x\xi y\eta}$$

d. h.

$$\pm\sqrt{(z + x + y)\,(z + \xi + \eta)} - \sqrt{x\eta} + \sqrt{y\xi} = 0,$$

was die Umkehrung aussagt. Diese einfache algebraische Bemerkung reicht zur Aufstellung aller Relationen zwischen den Abelschen Funktionen für $p = 3$ hin.

Bemerkung ([10]) zu Werke XXXI, S. 503, Z. 7 v. o. (1. Aufl. XXX, S. 471, Z. 16 v. o.).

(24. Febr.:)

Ebenso hat man für die Gruppe $(\sqrt{x\xi}) = (p+q+r)$ formal noch die drei Zerlegungen:

$$(n+e+f+p+q+r),\ (n+e+f);$$
$$(n+e+g+p+q+r),\ (n+e+g);$$
$$(n+f+g+p+q+r),\ (n+f+g),$$

welche aber, da es nur 6 Zerlegungen der Gruppe gibt, mit drei der früheren übereinstimmen müssen. Daraus folgt, daß zwischen den eingeführten 7 Charakteristiken d, e, f, g, p, q, r eine lineare Relation bestehen muß; nämlich die Gruppe

$$(d+e+f+g+p+q+r)$$

ist die ausgeschlossene Gruppe

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Setzt man

$$n+d',\ n+e',\ n+f',\ n+g'$$

für d, e, f, g, wobei also d', e', f', g' Gruppencharakteristiken werden, so enthalten die Ausdrücke für die in (21) vorkommenden 22 Charakteristiken, sowie die der 6 Charakteristiken $(k_1), (k_2), \cdots, (k_2'')$, alle die Charakteristik (n) *explicite*; daher fällt aus den Ausdrücken der durch Summierung *irgend* zweier von ihnen gebildeten Gruppencharakteristiken dann das (n) ganz heraus. Man kann sonach alle existierenden $2^6 - 1 = 63$ Gruppencharakteristiken linear zusammensetzen aus den 6 Gruppencharakteristiken

$$d', e', f', p, q, r$$

in der Form

$$\alpha_1 d' + \alpha_2 e' + \alpha_3 f' + \alpha_4 p + \alpha_5 q + \alpha_6 r,$$

wo die α_i die Werte 0 oder 1 haben, ohne alle zu gleicher Zeit 0 zu sein; und da solcher Kombinationen überhaupt nur 63 existieren, so sind die erhaltenen Kombinationen alle von einander verschieden. Solche 6 Gruppencharakteristiken d', e', f', p, q, r sind daher linearunabhängig.

Hieraus ergibt sich weiter, daß man alle 2^6 Charakteristiken von Thetafunktionen erhält, wenn man (n) selbst nimmt, und außerdem alle, welche aus den ebengenannten $2^6 - 1$ Kombinationen von Gruppencharakteristiken durch Addition von (n) entstehen.

Hat man so (n) mit α der Gruppencharakteristiken d', e', f', p, q, r verbunden, so ist, nach den in (21) und für die (k) gegebenen Ausdrücken, eine solche Kombination eine *ungerade* Charakteristik, wenn $\alpha = 1$ oder 2 ist, oder auch $= 5$ oder 6, welch letzteres aus dem ersteren auch daraus folgt, daß die Kombinationen zu 6 oder 5 vermöge der identischen Relation zwischen d', e', f', g', p, q, r bezw. in solche zu 1 oder 2 zwischen 6 anderen dieser Größen übergehen. Dies gibt die 28 ungeraden Charakteristiken. Für $\alpha = 0, 3, 4$ erhält man also die 36 *geraden* Charakteristiken.

Dieser Satz ist sehr wichtig, um die Abelschen Funktionen in Gruppen anzuordnen; und sein Analogon gilt für beliebiges p.

Die quadratischen Relationen zwischen den p Funktionen φ, insbesondere für $p = 4$. ([11])

(28. Febr.):

Zuerst der in der zweiten Auflage zugesetzte Abschnitt XXXI, S. 490—491: über Funktionen, die für endliche Werte von ξ, η [ξ und η sind solche Quotienten von Funktionen φ, die in denselben $2p-2$ Punkten je ∞^1 werden] endlich bleiben und für unendliche ξ, η unendlich in der zweiten Ordnung werden; für die Gleichung $\overset{2p-2}{F}(\xi, \eta) = 0$.

Dann folgende Fortsetzung:

Diese Untersuchung läßt sich verallgemeinern. Eine Funktion, die für endliche Werte von ξ, η endlich bleibt und für unendliche ξ, η unendlich von der m^{ten} Ordnung wird, wird für $2m(p-1)$ Wertepaare von ξ, η unendlich klein von der ersten Ordnung, und enthält daher (Th. A. F. Art. 5) für $m > 1$

$$(2m-1)\ (p-1)$$

Konstanten ...

[Dies ist so zu ergänzen:
Sie ist daher in der Form

$$\frac{f(\xi, \eta)}{\psi}$$

darstellbar, wo $f(\xi, \eta)$ eine ganze Funktion von der $(2p+m-6)^{\text{ten}}$ Dimension in ξ, η ist, die für die $r = 2(p-1)(p-3)$ Wertepaare (γ, δ), in denen allein die Funktion $(2p-6)^{\text{ter}}$ Dimension, ψ verschwindet, ebenfalls verschwindet. Denn jene Funktion muß, nachdem man (Th. A. F. Art. 8)

$$\overset{2p+m-6}{f}(\xi, \eta) + \overset{m-4}{\varrho}(\xi, \eta) \cdot \overset{2p-2}{F}(\xi, \eta)$$

für $f(\xi, \eta)$ gesetzt und die $\frac{1}{2}(m-3)(m-2)$ Koeffizienten von ϱ willkürlich angenommen hat, noch

$$\tfrac{1}{2}(2p+m-5)(2p+m-4) - \tfrac{1}{2}(m-3)(m-2) - r = (2m-1)(p-1)$$

willkürliche Konstanten enthalten.

Zu diesen Funktionen gehört jede ganze Funktion m^{ten} Grades von den $p-1$ Variablen $\frac{\varphi}{\psi}$; eine solche enthält $\frac{p(p+1)\cdots(p+m-1)}{1 \cdot 2 \cdots m}$ Konstanten.

Da aber $\frac{f}{\psi}$ nur $(2m-1)(p-1)$ Konstanten enthält, so müssen zwischen den p Funktionen φ [wenigstens]

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}-(2m-1)(p-1)$$

homogene Relationen m^{ten} Grades bestehen.] (12)

Für $p=2$ und 3 existieren keine Gleichungen zweiten Grades zwischen den φ.

[Abgesehen von dem hyperelliptischen Fall bei $p=3$. (13)]

Für $p=4$ findet im allgemeinen *eine* homogene Gleichung zweiten Grades zwischen den vier Funktionen φ statt. Eine homogene Funktion zweiten Grades von 4 Größen läßt sich aber immer als Summe von höchstens 4 Quadraten linearer Kombinationen dieser Größen darstellen. Sei also

$$\text{(A)}\qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=0$$

die eine existierende Gleichung zweiten Grades, wobei die y_i lineare Ausdrücke in den φ sind. Wir nehmen je zwei Quadrate zusammen:

$$y_1+y_2 i=z_1,\quad y_3+y_4 i=z_2,\quad y_1-y_2 i=z_3,\quad -y_3+y_4 i=z_4,$$

und haben

$$z_1 z_3=z_2 z_4,$$

wo auch die z_i lineare Ausdrücke in den den φ sind.

Hieraus würde nur folgen, daß, wenn $z_2=0$ ist, auch z_1, oder z_3, gleich 0 sein muß; und man kann nun, da die z_i je für $2p-2=6$ Werte zu Null werden, verschiedene Annahmen machen.

a) Die allgemeine Verteilung der 6 Nullwerte von z_2 ist die, daß für drei der Werte z_1, für die drei übrigen z_3 verschwindet. Dann werden

z_1 und z_2 für drei Werte gleichzeitig zu 0,
z_3 „ z_2 „ „ „ „ „ „,
z_1 „ z_4 „ „ „ „ „ „,
z_3 „ z_4 „ „ „ „ „ „.

Die beiden Funktionen

$$s=\frac{z_2}{z_3}=\frac{z_1}{z_4},\qquad z=\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_3}{z_4}$$

werden also nur für je drei Werte unendlich von der ersten Ordnung, und die Gleichung zwischen s, z wird zu

$$F(\overset{3}{s},\overset{3}{z})=0,$$

als einfachste Form der Gleichung unter den gegebenen Annahmen.

Die zugehörigen Funktionen φ werden zu

$$c_0 sz+c_1 s+c_2 z+c_3.$$

[Vermöge einer Transformation

$$sz:s:z:1=z_2:z_1:z_3:z_4$$

geht $F(s,z)=0$ in eine homogene Relation dritter Dimension zwischen z_1, z_2, z_3, z_4 über, welche, nach Zufügung eines Ausdrucks der Form

$$(a_1 z_1+a_2 z_2+a_3 z_3+a_4 z_4)(z_1 z_3-z_2 z_4)$$

die allgemeinste ihrer Art ist. Die 9 Moduln ergeben sich, wenn man s durch eine lineare Funktion von s, und z durch eine solche von z, mit willkürlichen Konstanten, ersetzt.]

b) Es mögen von den sechs Nullwerten von z_2 vier solche von z_1 sein. Dann würden:

z_1 und z_2 für 4 Werte gleichzeitig zu 0,
z_3 „ z_2 „ 2 „ „ „ 0,
z_1 „ z_4 „ 2 „ „ „ 0,
z_3 „ z_4 „ 4 „ „ „ 0.

Die beiden obigen Funktionen s und z würden bezw. 4-mal, 2-mal unendlich von der ersten Ordnung, und die einfachste Gleichung würde

$$F(\overset{2}{s},\overset{4}{z})=0.$$

[Diese Gleichung ist nun entweder:

α) irreduktibel; dann gehört sie nicht mehr zu $p=4$, sondern zum hyperelliptischen Falle von $p=3$, wobei sich auch $sz:s:z:1$ nicht mehr wie φ-Funktionen verhalten. Die Annahme (A), b) ist dann also unstatthaft. Oder:

β) reduktibel; $F(\overset{2}{s},\overset{4}{z})$ wird ein vollständiges Quadrat einer Funktion $\Phi(\overset{1}{s},\overset{2}{z})$. Alsdann definieren die beiden Gleichungen

$$z_1 z_3-z_2 z_4=0,\qquad \Phi=0$$

nicht mehr die algebraische Klasse; und letztere Gleichung läßt sich mittels ersterer unter Wegschaffen eines linearen Faktors z_4 auf die Form

$$z_3(a_1 z_1+a_2 z_2+a_3 z_3+a_4 z_4)+z_4(a_5 z_1+a_6 z_4)=0$$

bringen, sodaß noch eine zweite quadratische Relation, und damit auch eine dritte, zwischen den vier Funktionen φ besteht: man hat den hyperelliptischen Fall $p=4$.]

c) Wenn von sechs Nullwerten von z_2 fünf solche von z_1 wären, so würde für den sechsten z_3 zu Null, und die Gleichung würde

$$F(\overset{1}{s},\overset{5}{z})=0$$

[eine zu $p=0$ gehörige Gleichung, so daß auch diese Annahme (A), c) unstatthaft ist].

Man hat nun weiter den Fall zu untersuchen, daß die homogene Funktion zweiten Grades der vier Größen φ sich auf nur drei Quadrate reduziert:

$$\text{(B)}\qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2=0,$$

[oder für

$$y_1 + y_2 i = z_1, \quad y_1 - y_2 i = z_3, \quad y_3 i = z_2$$

die Relation

$$z_1 z_3 = z_2^2.$$

In diesem Falle gibt die Substition

$$s = \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_2}, \quad z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2}$$

schon eine Relation $sz - 1 = 0$ zwischen s und z; die algebraische Klasse kann aber nicht durch diese Relation zwischen s und z definiert werden, sondern man wird für die in der quadratischen Relation nicht vorkommende vierte der Funktionen φ eine neue Variable einführen, etwa mittels

$$\sigma = \frac{z_4}{z_2}.$$

Nach der Gleichung $z_1 z_3 - z_2^2 = 0$ kann man nun zweierlei Annahmen machen:

a) In dreien der 6 Nullpunkte von z_2 verschwindet z_1 je in zweiter Ordnung. Dann verschwindet in den drei übrigen Nullpunkten von z_2 die Funktion z_3 je in zweiter Ordnung. In drei Punkten, für welche $z = \frac{z_3}{z_2}$ einen gegebenen Wert (s also den reziproken Wert) annimmt, hat σ drei verschiedene Werte; für gegebenes $\sigma + \alpha z$, bei beliebigem Wert von α, nimmt z sechs Werte an. Daher wird die Gleichung zwischen σ und z von der Form

$$F(\overset{3}{\sigma}, \overset{6}{z}) = 0,$$

worin aber auch die Gesamtdimension in σ, z nur bis auf den Grad 6 ansteigen darf. Da ferner für die Verhältnisse der vier Funktionen φ wird:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = s : 1 : z : \sigma = 1 : z : z^2 : \sigma z,$$

σ also in der Gleichung $F(\overset{3}{\sigma}, \overset{6}{z}) = 0$ nur in der Verbindung σz vorkommt, so ergibt sich für diese Gleichung die Form:

$$F(\sigma, z) \equiv \sigma^3 z^3 + \sigma^2 z^2 f(\overset{2}{z}) + \sigma z f(\overset{4}{z}) + f(\overset{6}{z}) = 0.$$

Unter Einführung der Größen z_i liefert diese Gleichung eine zu $z_1 z_3 - z_2^2 = 0$ hinzutretende homogene Relation dritter Dimension zwischen z_1, z_2, z_3, z_4.

Dabei kann auch die Gleichung $F(\overset{3}{\sigma}, \overset{6}{z}) = 0$ nicht reduktibel sein, weil F andernfalls die dritte Potenz eines Ausdrucks $\sigma z + \frac{1}{3} f(\overset{2}{z})$ werden müßte, eine Relation $\sigma z + \frac{1}{3} f(\overset{2}{z}) = 0$, d. h. eine lineare Relation zwischen den φ-Funktionen z_i aber nicht existiert.

Die acht Moduln dieser algebraischen Klasse ergeben sich aus den 15 Konstanten von $F = 0$, indem man zunächst σz durch $(a\sigma + bz + c)(z + d)$, mit beliebigen Konstanten a, b, c, d ersetzt, dann auch z selbst durch eine beliebige gebrochene lineare Funktion von z.

b) Von den sechs Nullpunkten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ von z_2 wird in zweien, α_1, α_2, auch z_1 zu 0^2, in zwei weiteren, β_1, β_2, auch z_3 zu 0^2, in den beiden letzten, γ_1, γ_2, sowohl z_1 als z_3 zu 0^1.

Die Funktion $s = \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_2}$ nimmt dann irgend einen gegebenen Wert nur an zwei Stellen an. Man hat also wieder einen hyperelliptischen Fall. Hat nun $\sigma = \frac{z_4}{z_2}$ an solchen zwei Stellen verschiedene Werte, ist also die Gleichung

$$F(\overset{2}{\sigma}, \overset{6}{s}) = 0$$

irreduktibel, so könnte σ nicht der Quotient zweier zugehöriger Funktionen φ sein, entgegen der Voraussetzung. $F(\sigma, s)$ muß daher ein vollständiges Quadrat sein; und σ nimmt für die zwei Punkte, in denen s einen gegebenen Wert annimmt, auch nur einen Wert an. Indem man z_4 durch $z_4 + \lambda z_3$ ersetzt, kann man dann bewirken, daß σ in den beiden Punkten α_1, α_2 verschwindet. Dann nimmt für gegebenes $\sigma + \alpha s$, bei beliebigem α, s nur noch zwei verschiedene Werte an, und es wird F das Quadrat einer Funktion $\Phi(\overset{1}{\sigma}, \overset{2}{s})$, wo

$$\Phi(\overset{1}{\sigma}, \overset{2}{s}) \equiv \sigma \Phi(\overset{1}{s}) + \Phi(\overset{2}{s}) = 0.$$

Dies gibt, in den z_i geschrieben, eine zweite homogene quadratische Relation:

$$z_4 \Phi(\overset{1}{z_1}, z_2) + \Phi(\overset{2}{z_1}, z_2) = 0,$$

welche, mit $z_1 z_3 - z_2^2 = 0$ zusammengenommen, noch eine dritte solche bestimmt. Die drei Relationen bestimmen die algebraische Klasse nicht, stellen vielmehr im z_i-Raum nur eine, doppelt zu nehmende, Raumkurve dritter Ordnung dar. Man kommt so wieder auf den Fall (A), b), β.(14)]

Auf diese Weise läßt sich die Gleichung für $p = 4$ in allen Fällen auf die einfachste Form reduzieren. Das Verfahren ist auch auf $p > 4$ leicht ausdehnbar. Es läßt sich nämlich zeigen, daß sich aus

$$\tfrac{1}{2}(p-2)(p-3)$$

homogenen Funktionen zweiten Grades zwischen p Veränderlichen immer, und für $p > 4$ auf verschiedene Weisen, ein Aggregat kombinieren lasse, das gleich einer Summe von höchstens vier Quadraten linearer Ausdrücke der Veränderlichen ist. Man kann so z. B. die Kriterien erhalten, daß algebraische Funktionen auf hyperelliptische Integrale führen.

Die linearen Relationen zwischen je p, zur selben Gruppe gehörigen Produkten zweier Abelschen Funktionen.

(28. Febr., 3., 4. März:)

Wir gebrauchen für beliebiges p nun die Bezeichnung

$$x_1 = \frac{\varphi_1}{\psi}, \; x_2 = \frac{\varphi_2}{\psi}, \; \cdots, \; x_p = \frac{\varphi_p}{\psi},$$

wo x_1, x_2 die Stelle der ξ, η von S. 15 vertreten, also eine Gleichung der Form $F(\overset{2p-2}{x_1, x_2}) = 0$ existiert, und wo ψ, in x_1, x_2 ausgedrückt, die dortige φ-Funktion ψ von der $(2p-6)^{\text{ten}}$ Ordnung in Bezug auf die Variablen x_1, x_2 vorstellt.

Wir betrachten ein Produkt aus zwei Abelschen Funktionen

$$\sigma = \sqrt{\xi\eta},$$

wo also ξ und η solche ganze lineare homogene Funktionen von $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sind, welche für je $p-1$ Stellen von $F=0$ unendlich klein von der zweiten Ordnung werden.

Verwandelt man die ursprüngliche Fläche T durch Querschnitte in die einfach zusammenhängende Fläche T', so wird die Funktion $\sigma = \sqrt{\xi\eta}$, stetig durch T' fortgesetzt, allenthalben nur einen bestimmten Wert annehmen, nachdem das Vorzeichen von σ in *einem* Punkte willkürlich festgesetzt ist. Denn σ wird, wo es unendlich klein oder unendlich groß wird, dies überall nur von der ersten Ordnung, ohne Verzweigung; man kann auch sagen: über jeden innerhalb T' verlaufenden geschlossenen Weg ausgedehnt, gibt das Integral $\int d \log \sigma$ einen Wert $2\pi i \cdot k$, wo k eine ganze Zahl ist. Diese Unendlichkeitsstellen von σ sind die $2p-2$ festen Stellen, in welchen $x_1, \cdots, x_p$ zu gleicher Zeit je ∞^1 werden.

In der Fläche T ist σ ebenfalls unverzweigt, aber zweiwertig. Beim Überschreiten eines Querschnittes von T' kann σ nur denselben oder den entgegengesetzten Wert annehmen; sodaß σ an dem Querschnittsystem von T' ein bestimmtes Faktorensystem ± 1 besitzt. Dasselbe ist, wenn die Charakteristiken der beiden Abelschen Funktionen $(a) = (\sqrt{\xi})$, $(b) = (\sqrt{\eta})$ einzeln gegeben sind, nach Seite 11 aus der Gruppencharakteristik $(a+b)$ bestimmt. Wir nennen nun zwei Produkte $\sigma = \sqrt{\xi\eta}$, $\sigma' = \sqrt{\xi'\eta'}$ von je zwei Abelschen Funktionen *zur selben Gruppe gehörig*, wenn sie an dem Querschnittsystem *dasselbe* Faktorensystem annehmen. Unser Ziel ist zu beweisen:

(A) *daß zwischen je p solchen Produkten von je zwei Abelschen Funktionen, die zu derselben Gruppe gehören, eine lineare homogene Relation stattfindet.*

Erster Beweis. Da die Anzahl aller Abelschen Funktionen $\sqrt{\xi}$ im allgemeinen gleich $2^{p-1}(2^p-1)$ ist, so ist die Anzahl aller Produkte zu zwei, von einander verschiedenen:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2^{p-1}(2^p-1) \cdot [2^{p-1}(2^p-1) - 1] = 2^{p-2}(2^{p-1}-1)(2^{2p}-1).$$

Überhaupt gibt es $2^{2p}-1$ Faktorensysteme ± 1 oder Gruppencharakteristiken; nimmt man nun an, daß zu jeder Gruppe gleichviel Produkte gehören — eine Annahme, deren Richtigkeit wir später erkennen werden (15) —, so folgt für die Anzahl der Produkte einer Gruppe:

$$2^{p-2}(2^{p-1}-1).$$

Ein solches Produkt sei $\sqrt{\xi\eta}$. Wir wollen nun den allgemeinen Ausdruck einer Funktion σ' bilden, welche mit $\sqrt{\xi\eta}$ zu derselben Gruppe gehört, also dasselbe Faktorensystem besitzt und zugleich in denselben $2p-2$ Punkten zu ∞^1 wird, wie $\sqrt{\xi\eta}$.

Die Funktion $\sigma' \cdot \sqrt{\xi\eta}$ wird dann an allen Querschnitten die Faktoren $+1$ annehmen, also rational in den Variablen x_1, x_2 sein. Da sie ferner nur für unendliche x_1, x_2 unendlich, und zwar von der zweiten Ordnung, wird, so wird nach dem früheren (S. 15):

$$\sigma' \cdot \sqrt{\xi\eta} = \frac{\overset{2p-4}{f(x_1, x_2)}}{\underset{}{\overset{2p-6}{\psi(x_1, x_2)}}},$$

wo $f(x_1, x_2)$ noch $3(p-1)$ willkürliche Konstanten linear und homogen enthält. Damit σ' endlich bleibt für $\xi = 0$ und $\eta = 0$, muß $f(x_1, x_2)$ für die je $p-1$ Nullpunkte von $\sqrt{\xi}$ und $\sqrt{\eta}$ verschwinden, was $2(p-1)$ lineare Bedingungsgleichungen für die Konstanten von $f(x_1, x_2)$ gibt. Es bleiben dann in $f(x_1, x_2)$ noch $p-1$ Konstanten willkürlich. σ' enthält somit $p-1$ willkürliche Konstanten in linearer homogener Weise.

Daher läßt sich auch jedes zur Gruppe $\sqrt{\xi\eta}$ gehörige Produkt zweier Abelscher Funktionen, als Funktion σ', durch $p-1$ spezielle dieser Funktionen σ' linear und homogen ausdrücken; d. h. zwischen je p solcher zu einer Gruppe gehörigen Produkte existiert eine lineare homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten, von der Form:

$$\sqrt{\xi_1\eta_1} + \sqrt{\xi_2\eta_2} + \cdots + \sqrt{\xi_p\eta_p} = 0,$$

q. e. d.

Dieser Beweis kann aber insofern nicht als streng und allgemein angesehen werden, als er nur auf Konstantenzählung beruht, ohne daß die $2(p-1)$ Bedingungsgleichungen, die zwischen den Koeffizienten bestehen, untersucht worden sind. (16)

Zweiter Beweis. Der strenge Beweis des analogen Satzes:

(B) *daß zwischen je $p+1$ Quadraten von Abelschen Funktionen eine lineare homogene Relation stattfindet,*

beruht auf der Eigenschaft der Abelschen Funktionen, daß ihre Quadrate Funktionen φ sind, von denen Th. A. F. Art. 4 mittels des Dirichletschen Prinzips allgemein bewiesen war, daß es nur p linear unabhängige gibt. Einen analogen, auf den Periodizitätseigenschaften der Integrale über Abelsche Funktionen beruhenden Beweis des Satzes (A) wollen wir hier andeuten.

Seien $\varphi_\mu(s, z)$, $\varphi_\nu(s, z)$ zwei solche Funktionen φ, die für je $p-1$ Wertsysteme (s, z) von $F(s, z) = 0$ unendlich klein von der zweiten Ordnung werden, so betrachten wir das Integral

$$v=\int\frac{\sqrt{\varphi_\mu(s,z)\,\varphi_\nu(s,z)}\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}.$$

Dieser Ausdruck ist ein immer endlich bleibendes Integral, ist in der Fläche T' eindeutig und stetig, und zu beiden Seiten der Querschnitte ist [von der Gruppe, zu der $\sqrt{\varphi_\mu\varphi_\nu}$ gehört, abhängig]

für einige Querschnitte $\alpha)$ $v^+ = v^- + \text{const.}$

für die übrigen ($\geqq 1$) Querschnitte $\beta)$ $v^+ = -v^- + \text{const.}$

So wie es für die endlichen Integrale w, für welche an allen Querschnitten die Beziehung $\alpha)$ gilt, geschehen, läßt sich nun ableiten, daß alle Funktionen v', welche in T' eindeutig und stetig sind und an den Querschnitten genau dieselben Beziehungen $\alpha)$, $\beta)$ haben, wie v, von $p-1$ willkürlichen Konstanten linear abhängen. Man braucht nur zu zeigen, daß der reelle Teil von v' durch die vorgeschriebenen Unstetigkeiten $\alpha)$, $\beta)$ hier völlig bestimmt ([17]) ist, und dann, daß jedes v' durch $p-1$ unter ihnen linear ausdrückbar ist. Daraus folgt dann der Satz (A). ([18])

Die in eine Relation

$$\text{a)}\qquad \sqrt{\xi_1\eta_1}+\sqrt{\xi_2\eta_2}+\cdots+\sqrt{\xi_p\eta_p}=0$$

eingehenden Ausdrücke ξ_i, η_i sind lineare Funktionen von $x_1, x_2, \cdots, x_p$. Man nehme nun $p-2$ von einander unabhängige Relationen der Art a), so stellt dies zwischen den p Größen $x_1, x_2, \cdots, x_p$ $p-2$ unabhängige Gleichungen vor. Eliminiert man also aus denselben die $p-3$ Größen $x_4, \cdots, x_p$, so bleibt nur *eine* homogene Gleichung zwischen den drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 übrig, welche mit der ursprünglichen Gleichung $\overset{2p-2}{F}(x_1, x_2, x_3) = 0$ übereinstimmen muß. Die Gleichung $F(x_1, x_2, x_3)$ ist also ersetzbar durch $p-2$ Gleichungen der Form a); daher muß auch jede algebraische Gleichung $F(s, z) = 0$ für eine $\overline{2p+1}$-fach zusammenhängende algebraische Funktion s von z ersetzbar sein durch ein System von $p-2$ Gleichungen zwischen p Veränderlichen. Da aus diesen auch alle algebraischen Relationen zwischen den Abelschen Funktionen folgen müssen, so muß aus jenen $p-2$ Gleichungen auch algebraisch herzuleiten sein, daß zwischen je p zu einer Gruppe gehörigen Produkten eine Relation der Art a) besteht.

Somit sind die Konstanten in den $p-2$ Relationen nicht unabhängig; sie müssen vielmehr eben derart bestimmt werden, daß aus den $p-2$ Gleichungen der Form a) alle übrigen von derselben Form folgen. Man wird sich dabei der *beiden* Sätze (A) und (B) bedienen;

und diese beiden Sätze müßten auch ausreichen, um alle Relationen zwischen Abelschen Funktionen zu finden, wenn man noch deren Beziehungen zu den Thetacharakteristiken und die Sätze über den Zusammenhang der Charakteristiken benutzte, um zu untersuchen, welche Produkte zu derselben Gruppe gehören.

Die Konstanten in den $p-2$ Gleichungen müssen sich dabei so einrichten lassen, daß die Koeffizienten sämtlicher Quadrate von Abelschen Funktionen sich rational in $3p-3$ Größen ausdrücken, den $3p-3$ Moduln der Klasse; wie wir es für $p=3$ durch die sechs Größen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ getan haben.

So hat man für $p=4$ zwei Gleichungen zwischen je vier Produkten; und man wird diese so wählen, daß in den beiden Gleichungen dieselben acht Abelschen Funktionen vorkommen. ([19])

Algebraische Ausdrücke von einfachen Thetaquotienten. ([20])

(4. März:)

Um das Ziel: *die Konstanten in den Ausdrücken aller Abelschen Funktionen durch die Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente zu bestimmen*, zu erreichen, ist es zweckmäßig, mehr zu benutzen, als bloß die Beziehung der Abelschen Funktionen zu den Thetaquotienten (S. 10), also bloß die Charakteristikentheorie; wir wollen vielmehr die Quotienten von Thetafunktionen, deren Argumente nicht, wie bei jenen Funktionen, nur von zwei Punkten von T' abhängen, sondern beliebige Werte haben, algebraisch ausdrücken. Wir geben die Rechnung allgemein für beliebiges p, wenn sie sich auch nur für den Fall zu Ende führen läßt, daß man die *Fundamentalgleichungen* zwischen den Abelschen Funktionen schon kennt, wie bei $p=3$.

Zum Ausdruck des Quotienten zweier einfacher Thetafunktionen soll (Th. A. F. Art. 27) eine algebraische Funktion σ gebildet werden, welche an den Querschnitten von T' dieselben Faktoren annimmt, wie $\sqrt{\xi\eta}$, wo $\sqrt{\xi}$ und $\sqrt{\eta}$ zwei Abelsche Funktionen sind, und welche für p Punkte von T' unendlich von der ersten Ordnung wird.

Unter den Bezeichnungen des vorigen Abschnittes bilde man zwei verschiedene Funktionen

$$\frac{\overset{2p-4}{f}(x_1,x_2)}{\overset{2p-6}{\psi}(x_1,x_2)},\qquad \frac{\overset{2p-4}{f_1}(x_1,x_2)}{\overset{2p-6}{\psi}(x_1,x_2)},$$

die beide je $3(p-1)$ willkürliche Konstanten enthalten und für je $2(2p-2)$ Punkte unendlich klein von der ersten Ordnung werden. Je $p-1$ dieser Konstanten sollen so bestimmt werden, daß $f(x_1, x_2)$ für die $p-1$ Nullwerte von $\sqrt{\xi}$, $f_1(x_1, x_2)$ für die $p-1$ Nullwerte von $\sqrt{\eta}$ verschwindet, wonach f und f_1 die Form erhalten:

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x_1, x_2) = c_1 \Pi_1 + c_2 \Pi_2 + \cdots + c_{2p-2} \Pi_{2p-2}, \\ f_1(x_1, x_2) = c_1' X_1 + c_2' X_2 + \cdots + c_{2p-2}' X_{2p-2}, \end{cases}$$

wo die c und c' willkürliche Konstanten sind und die Π, bezw. X, voneinander unabhängige Funktionen vorstellen, die für die Nullwerte von $\sqrt{\xi}$, bezw. $\sqrt{\eta}$, verschwinden.

Die in T' eindeutige Funktion

$$(2)\qquad \sigma = \frac{\sqrt{\eta} \cdot f(x_1, x_2)}{\sqrt{\xi} \cdot f_1(x_1, x_2)}$$

wird dann noch für $3(p-1)$ Punkte zu 0^1, für $3(p-1)$ Punkte zu ∞^1, und verhält sich an den Querschnitten wie $\sqrt{\xi\eta}$.

In σ bestimme man nun weiter die noch willkürlichen $2(p-1)$ Konstanten von f_1 so, daß f_1 für p willkürlich gegebene Punkte β zu Null wird; f_1 verschwindet dann in noch $2p-3$ weiteren Punkten α, von denen noch $p-3$ willkürlich sind. Die $2(p-1)$ noch willkürlichen Konstanten von f bestimme man alsdann so, daß f für die $2p-3$ Punkte α ebenfalls verschwindet, wodurch die p letzten Nullpunkte γ von f mitbestimmt sind.

Alsdann läßt sich σ als Quotient zweier Thetafunktionen darstellen. Seien die Werte des Integrals u_μ für die p Punkte β_ν mit $\beta_\mu^{(\nu)}$, für die p Punkte γ_ν mit $\gamma_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet. Wir betrachten den Quotienten

$$(3)\qquad r = \frac{\vartheta\left(u_1 - \sum_1^p \gamma_1^{(\nu)}, \cdots\right)}{\vartheta\left(u_1 - \sum_1^p \beta_1^{(\nu)}, \cdots\right)}$$

und führen in die in den Argumenten vorkommenden Summen die Werte der Integrale u_μ in den übrigen Punkten, in denen f und f_1 verschwinden, ein. Seien die Werte von u_μ in den $2p-3$ Punkten $\alpha_\varkappa$, in welchen $f(x_1, x_2)$ und $f_1(x_1, x_2)$ gleichzeitig verschwinden, mit

$$u_\mu^{(\varkappa)}, \qquad {\scriptstyle (\varkappa=1,2,\cdots,2p-3)}$$

bezeichnet; in den $p-1$ Nullwerten von $f(x_1, x_2)$ und $\sqrt{\xi}$ mit

$$\xi_\mu^{(\lambda)}, \qquad {\scriptstyle (\lambda=1,2,\cdots,p-1)}$$

in den $p-1$ Nullwerten von $f_1(x_1, x_2)$ und $\sqrt{\eta}$ mit

$$\eta_\mu^{(\lambda)}. \qquad {\scriptstyle (\lambda=1,2,\cdots,p-1)}$$

Wenn dann $\sqrt{\xi}$ und $\sqrt{\eta}$ bezüglich zu den Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p \\ \xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_p' \end{pmatrix} = (a), \qquad \begin{pmatrix} \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p \\ \eta_1', \eta_2', \cdots, \eta_p' \end{pmatrix} = (b)$$

gehören, so kann man setzen ((2), S. 8):

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{p-1} \xi_1^{(\lambda)}, \cdots\right) \equiv \left(\frac{\xi_1'}{2}\pi i + \sum_1^p \frac{\xi_\nu}{2} a_{\nu,1}, \cdots\right) \equiv ((a)_1, \cdots),$$

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{p-1} \eta_1^{(\lambda)}, \cdots\right) \equiv \left(\frac{\eta_1'}{2}\pi i + \sum_1^p \frac{\eta_\nu}{2} a_{\nu,1}, \cdots\right) \equiv ((b)_1, \cdots),$$

und hat also, nach dem Abelschen Theorem:

$$\sum_{\nu=1}^{p} \gamma_\mu^{(\nu)} + \sum_{\varkappa=1}^{2p-3} u_\mu^{(\varkappa)} + (a)_\mu \equiv 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{p} \beta_\mu^{(\nu)} + \sum_{\varkappa=1}^{2p-3} u_\mu^{(\varkappa)} + (b)_\mu \equiv 0;$$

denn der erstere Ausdruck, der sich auf die $4(p-1)$ Punkte bezieht, in denen $\frac{f(x_1, x_2)}{\psi(x_1, x_2)}$ zu Null wird, ist kongruent der Summe, ausgedehnt über die $2(p-1)$ je doppelt zu rechnenden Wertesysteme, in denen x_1 und x_2 zugleich zu ∞^1 werden und die durch eine Funktion φ verknüpft sind (Th. A. F. Art. 23); während sich der zweite Ausdruck ebenso auf die $4(p-1)$ Nullpunkte von $\frac{f_1}{\psi}$ bezieht.

Hiernach wird

$$(4)\qquad r = \frac{\vartheta\left(u_1 + \sum_1^{2p-3} u_1^{(\varkappa)} + (a)_1, \cdots\right)}{\vartheta\left(u_1 + \sum_1^{2p-3} u_1^{(\varkappa)} + (b)_1, \cdots\right)}.$$

Um den algebraischen Ausdruck für σ zu bilden, setze man auch in (1) die Koordinaten der $2p-3$ gleichzeitigen Nullpunkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2p-3}$ von $f(x_1, x_2)$ und $f_1(x_1, x_2)$ ein und bestimme hieraus die Verhältnisse der c und der c'. Seien die Werte bez. von Π_i und X_i in $\alpha_\varkappa$ bezeichnet mit

$$\Pi_i^{(\varkappa)}, \quad X_i^{(\varkappa)},$$

so wird, bis auf einen konstanten Faktor,

$$f = \sum \pm \Pi_1 \Pi_2^{(1)} \cdots \Pi_{2p-2}^{(2p-3)}, \quad f_1 = \sum \pm X_1 X_2^{(1)} \cdots X_{2p-2}^{(2p-3)},$$

und somit (nach Th. A. F. Art. 27):

$$B \cdot \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \cdot \frac{\sum \pm \Pi_1 \Pi_2^{(1)} \cdots \Pi_{2p-2}^{(2p-3)}}{\sum \pm X_1 X_2^{(2)} \cdots X_{2p-2}^{(2p-3)}}$$

$$= \frac{\vartheta\left(u_1 + \sum_1^{2p-3} u_1^{(x)} + (a)_1, \cdots\right)}{\vartheta\left(u_1 + \sum_1^{2p-3} u_1^{(x)} + (b)_1, \cdots\right)} e^{\sum_1^{p} (\xi_\mu - \eta_\mu)\left(u_\mu + \sum_1^{2p-3} u_\mu^{(x)}\right)}$$

$$= C \cdot \frac{\vartheta(a)\left(u_1 + \sum_1^{2p-3} u_1^{(x)}, \cdots\right)}{\vartheta(b)\left(u_1 + \sum_1^{2p-3} u_1^{(x)}, \cdots\right)}.$$

Die hier eintretenden Konstanten B, C sind von dem Wertsystem (x_1, x_2), das in Π_1 und X_1 und in den Grenzen der $u_1, u_2, \cdots, u_p$ vorkommt, unabhängig. Zugleich ist der Determinantenquotient der linken und der Thetaquotient der rechten Seite symmetrisch in den Wertsystemen, die sich auf die $2p-2$ Punkte (x_1, x_2), $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2p-3}$ beziehen. Ersetzt man daher den Punkt (x_1, x_2) durch den beliebigen Punkt α_0, das zugehörige Integral u_μ durch $u_\mu^{(0)}$, so kann man schreiben:

$$(5)\quad \frac{\vartheta(a)\left(\sum_{i=0}^{2p-3} u_1^{(i)}, \cdots\right)}{\vartheta(b)\left(\sum_{i=0}^{2p-3} u_1^{(i)}, \cdots\right)} = A \cdot \sqrt{\frac{\eta^{(0)}\eta^{(1)} \cdots \eta^{(2p-3)}}{\xi^{(0)}\xi^{(1)} \cdots \xi^{(2p-3)}}} \cdot \frac{\sum \pm \Pi_1^{(0)} \Pi_2^{(1)} \cdots \Pi_{2p-2}^{(2p-3)}}{\sum \pm X_1^{(0)} X_2^{(1)} \cdots X_{2p-2}^{(2p-3)}},$$

wo $\sqrt{\xi^{(i)}}$, $\sqrt{\eta^{(i)}}$ die Werte bezüglich von $\sqrt{\xi}$, $\sqrt{\eta}$ im Punkte α_i sind, und wo nun der Faktor A unabhängig wird von sämtlichen $2p-2$ Punkten α_i, für deren Wertsysteme die in den Argumenten der Thetafunktionen vorkommenden Integralsummen gebildet sind.

Um die Konstante A zu bestimmen, beachte man, daß Argumente von Thetafunktionen, welche aus Summen über $2p-2$ Integrale mit beliebigen Grenzen bestehen, ganz allgemeine sind. Spezialisiert man diese Argumente, indem man $p-1$ der Grenzen, $\alpha_{p-1}, \cdots, \alpha_{2p-3}$, in die Nullpunkte einer Abelschen Funktion von der Charakteristik (c) legt, so kommt in der Formel (5) links ein Ausdruck der Form

$$(6)\quad \frac{\vartheta(a+c)\left(\sum_{\nu=0}^{p-2} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)}{\vartheta(b+c)\left(\sum_{\nu=0}^{p-2} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)}$$

zu stehen, wo nun die von nur $p-1$ Punkten abhängenden Argumente nicht mehr willkürliche Werte haben. Man sieht überhaupt, daß solche

Quotienten nur dann einen einfachen algebraischen Ausdruck erhalten können, wenn die Anzahl der Integrale in den Integralsummen der Argumente ein Vielfaches von $p-1$ ist; denn nach der Art, wie die unteren Grenzen in Art. 22, 23 der Th. A. F. bestimmt waren, wird die Summe der Integrale, ausgedehnt über $2(p-1)$ durch eine φ verknüpfte Punkte, kongruent Null.

Die Bestimmung der Konstanten A läßt sich nun weiter ähnlich vereinfachen, wie es von Jacobi in den Fundamenta (Art. 36) für die elliptischen Funktionen geschehen ist. Bei geeigneter Wahl von (c) ist es möglich, in (5) eine zweite Substitution zu machen, derart daß der *inverse* Ausdruck des obigen (6) resultiert. Das Produkt der beiden Ausdrücke liefert dann A^2, ausgedrückt durch die Klassenmoduln.([21])

[Sei nämlich die Charakteristik (c) in der Gruppe $(a+b)$ enthalten, d. h. $(a+b+c)$, wie (c), eine ungerade Charakteristik; so setze man auch für die $p-1$ Punkte $\alpha_{p-1}, \cdots, \alpha_{2p-3}$ die $p-1$ Nullpunkte der zur Charakteristik $(a+b+c)$ gehörigen Abelschen Funktion. Die linke Seite der ursprünglichen Formel nimmt dann die verlangte Form an:

$$(7)\quad \frac{\vartheta(b+c)\left(\sum_{\nu=0}^{p-2} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)}{\vartheta(a+c)\left(\sum_{\nu=0}^{p-2} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)}.$$

Man findet hieraus, außer A^2, auch die Quotienten der geraden Thetafunktionen, für die Nullwerte der Argumente, ausgedrückt durch die Klassenmoduln, indem man in (6) für die Punkte $\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-2}$ die $p-1$ Nullpunkte einer Abelschen Funktion von solcher Charakteristik (d) setzt, daß die beiden Charakteristiken $(a+c+d)$, $(b+c+d)$ gerade werden.]

Geht man insbesondere für $p=3$ von der früheren Gleichungsform (Werke, XXXI, S. 492; 1. Aufl. XXX, S. 460)

$$(8)\quad F \equiv \Phi^2 - xyzt = 0$$

aus, wo Φ eine beliebige homogene Funktion zweiten Grades von x, y, z ist, und nimmt $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$, mit den Charakteristiken (a), (b), für die beiden in der Formel (5) vorkommenden Abelschen Funktionen $\sqrt{\xi}$ und $\sqrt{\eta}$, so soll für das in (2) vorkommende $f(x_1, x_2)$ ein homogener Ausdruck zweiten Grades in x, y, z gesetzt werden, der für $x=0$, $\Phi(x, y, z) = 0$ verschwindet, also

$$f \equiv c_1 \Phi + c_2 x^2 + c_3 xy + c_4 xz,$$

und analog

$$f_1 \equiv c_1' \Phi + c_2' y^2 + c_3' yx + c_4' yz;$$

wonach, wenn die Werte von $\Phi(x, y, z)$, x, y, z in den vier beliebigen Punkten α_i bezw. mit $\Phi^{(i)}$, x_i, y_i, z_i bezeichnet werden:

$$(9)\qquad \frac{\vartheta(a)\left(\sum\limits_{i=0}^{3} u_1^{(i)}, \cdots\right)}{\vartheta(b)\left(\sum\limits_{i=0}^{3} u_1^{(i)}, \cdots\right)} = A\sqrt{\frac{y_0\,y_1\,y_2\,y_3}{x_0\,x_1\,x_2\,x_3}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \Phi^{(0)} & x_0^{\,2} & x_0\,y_0 & x_0\,z_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi^{(3)} & x_3^{\,2} & x_3\,y_3 & x_3\,z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi^{(0)} & y_0^{\,2} & y_0\,x_0 & y_0\,z_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi^{(3)} & y_3^{\,2} & y_3\,x_3 & y_3\,z_3 \end{vmatrix}}.$$

Hier kann man nun für $(c) = \binom{\varepsilon^{(c)}}{\varepsilon'^{(c)}}$ einmal die Charakteristik von $\sqrt{z}$ wählen, α_2, α_3 als die Verschwindungspunkte von $\sqrt{z}$; dann wird

$$\Phi^{(2)} = 0, \quad \Phi^{(3)} = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0;$$

der Zähler des Determinantenquotienten zu

$$x_2 x_3 (x_2 y_3 - x_3 y_2)\ (\Phi^{(0)} \cdot x_1 z_1 - \Phi^{(1)} \cdot x_0 z_0),$$

der Nenner zu

$$- y_2 y_3 (x_2 y_3 - x_3 y_2)\ (\Phi^{(0)} \cdot y_1 z_1 - \Phi^{(1)} \cdot y_0 z_0).$$

Daher:

$$(10)\quad \frac{\vartheta(a)(u_1^{(0)} + u_1^{(1)} - (c)_1, \cdots)}{\vartheta(b)(u_1^{(0)} + u_1^{(1)} - (c)_1, \cdots)} = -A\sqrt{\frac{y_0\,y_1}{x_0\,x_1}} \cdot \sqrt{\frac{x_2\,x_3}{y_2\,y_3}} \cdot \frac{\Phi^{(0)} \cdot x_1\,z_1 - \Phi^{(1)} \cdot x_0\,z_0}{\Phi^{(0)} \cdot y_1\,z_1 - \Phi^{(1)} \cdot y_0\,z_0}.$$

[Da

$$\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(v_1 - (c)_1, \cdots)$$

$$= e^{-\frac{1}{4}\left(\sum\right)^2 a_{\mu,\mu'} - \frac{1}{2}\sum \varepsilon_\mu^{(c)}\left(\varepsilon'_\mu + \varepsilon_\mu'^{(c)}\right)\pi i + \sum \varepsilon_\nu^{(c)} v_\nu} \cdot \vartheta\binom{\varepsilon + \varepsilon^{(c)}}{\varepsilon' + \varepsilon'^{(c)}}(v_1, \cdots),$$

so wird die linke Seite zu

$$(10')\qquad e^{-\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(c)} \varepsilon_\mu'^{(a-b)}} \cdot \frac{\vartheta(a+c)\,(u_1^{(0)} + u_1^{(1)}, \cdots)}{\vartheta(b+c)\,(u_1^{(0)} + u_1^{(1)}, \cdots)}.$$

Man wird zweitens, wenn (c) zu $\sqrt{z}$ gehörte, in (9) für α_2, α_3 die Nullpunkte $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ von $\sqrt{t}$, mit der Charakteristik

$$(a + b + c) = \binom{\varepsilon^{(a+b+c)}}{\varepsilon'^{(a+b+c)}}$$

wählen, und hat dann, wenn

$$t = lx + my + nz,$$

wo l, m, n von den Klassenmoduln abhängen:

$$\Phi^{(2)} = 0, \quad \Phi^{(3)} = 0, \quad t_2 = lx^{(2)} + my^{(2)} + nz^{(2)} = 0,$$
$$t_3 = lx^{(3)} + my^{(3)} + nz^{(3)} = 0.$$

Somit wird der Zähler des Determinantenquotienten von (9) zu

$$\frac{1}{n}\, x^{(2)} x^{(3)} (x^{(2)} y^{(3)} - x^{(3)} y^{(2)})\ (\Phi^{(0)} \cdot x_1 t_1 - \Phi^{(1)} \cdot x_0 t_0),$$

der Nenner zu

$$-\frac{1}{n}\, y^{(2)} y^{(3)} (x^{(2)} y^{(3)} - x^{(3)} y^{(2)})\ (\Phi^{(0)} \cdot y_1 t_1 - \Phi^{(1)} \cdot y_0 t_0);$$

daher

$$(11)\quad \begin{aligned} &\frac{\vartheta(a)(u_1^{(0)} + u_1^{(1)} - (a+b+c)_1, \cdots)}{\vartheta(b)(u_1^{(0)} + u_1^{(1)} - (a+b+c)_1, \cdots)} \\ &\qquad = -A\sqrt{\frac{y_0\,y_1}{x_0\,x_1}}\sqrt{\frac{x^{(2)} x^{(3)}}{y^{(2)} y^{(3)}}} \cdot \frac{\Phi^{(0)} \cdot x_1\,t_1 - \Phi^{(1)} \cdot x_0\,t_0}{\Phi^{(0)} \cdot y_1\,t_1 - \Phi^{(1)} \cdot y_0\,t_0}. \end{aligned}$$

Da

$$\vartheta(2a + b)\,(v) = e^{\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(b)} \varepsilon_\mu'^{(a)}} \cdot \vartheta(b)\,(v),$$

so wird die linke Seite zu

$$(11')\qquad e^{\frac{1}{2}\pi i \sum\left(\varepsilon_\mu^{(b+c-a)} \varepsilon_\mu'^{(a)} - \varepsilon_\mu^{(a+c-b)} \varepsilon_\mu'^{(b)}\right)} \cdot \frac{\vartheta(b+c)\,(u_1^{(0)} + u_1^{(1)}, \cdots)}{\vartheta(a+c)\,(u_1^{(0)} + u_1^{(1)}, \cdots)}.$$

Multipliziert man die beiden Formeln (10′), (11′) miteinander und beachtet, daß

$$\frac{\Phi}{xz} = \frac{yt}{\Phi}, \quad \frac{\Phi}{yz} = \frac{xt}{\Phi},$$

so ergibt sich

$$(12)\qquad A^2 = e^{-\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(a-b)} \varepsilon_\mu'^{(a+b)}} \cdot \sqrt{\frac{y_2\,y_3\,y^{(2)} y^{(3)}}{x_2\,x_3\,x^{(2)} x^{(3)}}}.$$

Benutzt man noch die Gleichungen:

$$h_1\sqrt{xy} + h_2\sqrt{zt} + h_3\sqrt{pq} = 0,$$
$$\Phi = \frac{h_3^{\,2} pq - h_1^{\,2} xy - h_2^{\,2} zt}{2 h_1 h_2},$$

$$p = l_1 x + m_1 y + n_1 z, \quad q = l_2 x + m_2 y + n_2 z,$$

so wird für $z = 0$, $\Phi = 0$:

$$h_3^{\,2} p_2 q_2 - h_1^{\,2} x_2 y_2 = 0, \ \ h_3^{\,2} p_3 q_3 - h_1^{\,2} x_3 y_3 = 0, \ \ x_3 y_3 p_2 q_2 - x_2 y_2 p_3 q_3 = 0,$$
$$p_2 = l_1 x_2 + m_1 y_2, \ q_2 = l_2 x_2 + m_2 y_2, \ \ p_3 = l_1 x_3 + m_1 y_3, \ q_3 = l_2 x_3 + m_2 y_3,$$

woraus

$$\frac{y_2}{x_2} \cdot \frac{y_3}{x_3} = \frac{l_1}{m_1} \cdot \frac{l_2}{m_2};$$

und ebenso für $t = 0$, $\Phi = 0$:

$$\frac{y^{(2)} y^{(3)}}{x^{(2)} x^{(3)}} = \frac{(l_1 n - l n_1)(l_2 n - l n_2)}{(m_1 n - m n_1)(m_2 n - m n_2)}.$$

Daher, in Funktion der Klassenmoduln:

$$(12') \quad A^2 = e^{-\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(a-b)} \cdot \varepsilon_\mu'^{(a+b)}} \cdot \sqrt{\frac{l_1 l_2}{m_1 m_2} \cdot \frac{(l_1 n - l n_1)(l_2 n - l n_2)}{(m_1 n - m n_1)(m_2 n - m n_2)}}.$$

Man ersetze weiter in der Formel (10), (10′) die Punkte α_0, α_1 durch die beiden Nullpunkte der Abelschen Funktion $\sqrt{p}$, mit Charakteristik (d), wobei, nach der Relation

$$h_1\sqrt{xy} + h_2\sqrt{zt} + h_3\sqrt{pq} = 0,$$

die Charakteristiken $(a+c+d)$, $(b+c+d)$ gerade sind (Werke, XXXI, S. 500; 1. Aufl. XXX, S. 468–469). In dem algebraischen Ausdruck der Formel (10) hat man dann aus $p = 0$:

$$h_1^2 xy - h_2^2 zt = 0, \quad \Phi = -\frac{h_1}{h_2} xy,$$

somit mittels $p = 0$:

$$\frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{y_1}{x_1} = \frac{l_1}{m_1} \cdot \frac{l n_1 - l_1 n}{m n_1 - m_1 n}, \quad \frac{y_0 z_1 - y_1 z_0}{x_0 z_1 - x_1 z_0} = -\frac{l_1}{m_1},$$

und, wie oben:

$$\frac{y_2 y_3}{x_2 x_3} = \frac{l_1 l_2}{m_1 m_2}.$$

Daher:

$$(13) \quad e^{-\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(c+d)} \varepsilon_\mu'^{(a-b)}} \cdot \frac{\vartheta(a+c+d)(0,0,0)}{\vartheta(b+c+d)(0,0,0)} = A\sqrt{\frac{m_2}{l_2} \cdot \frac{m n_1 - m_1 n}{l n_1 - l_1 n}},$$

oder:

$$(14) \quad e^{-\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(c+d)} \varepsilon_\mu'^{(a-b)} + \frac{1}{4}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(a-b)} \varepsilon_\mu'^{(a+b)}} \cdot \frac{\vartheta(a+c+d)(0,0,0)}{\vartheta(b+c+d)(0,0,0)}$$
$$= \sqrt[4]{\frac{l_1 m_2}{l_2 m_1} \cdot \frac{(m n_1 - m_1 n)(l n_2 - l_2 n)}{(l n_1 - l_1 n)(m n_2 - m_2 n)}};$$

so daß diese vierte Wurzel durch die Thetamoduln eindeutig bestimmt ist.] ([22])

Ausdrücke der Klassenmoduln bei $p = 3$ durch Thetaquotienten für die Nullwerte der Argumente.

(5., 6. März:)

Zunächst beweisen wir einen allgemeinen *Satz* (s. „Werke“, XXXI, S. 487; 1. Aufl. XXX, S. 456):

Man hat [mit den Bezeichnungen der eben angeführten Arbeit, (1), (2)]:

$$\frac{\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)\,\vartheta(u_1 - u_1' + e_1, \cdots)}{\vartheta(u_1 - u_1' - f_1, \cdots)\,\vartheta(u_1 - u_1' + f_1, \cdots)} = \frac{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s,z)\; \sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)}{\sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s,z)\; \sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)},$$

wo

$$\vartheta(e_1, \cdots) = 0, \quad \vartheta(f_1, \cdots) = 0,$$
$$(e_1, \cdots) \equiv \left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \cdots\right) \equiv \left(-\sum_p^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \cdots\right),$$

die Summen ausgedehnt über die $2p-2$ Punkte $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{2p-2}$, welche durch die Gleichung

$$\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z) = 0$$

verknüpft sind. In $\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$ verschwindet, außer in (s_1, z_1), die Funktion $\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)$, als Funktion von s, z betrachtet. Analog für den Nenner.

Unter $\varphi_1(s, z), \cdots, \varphi_p(s, z)$ sollen nun diejenigen Funktionen $\varphi(s, z)$ verstanden werden, welche in den Normalintegralen

$$u_\nu = \int \frac{\varphi_\nu(s, z)\, dz}{F'(s)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, p)$$

selbst vorkommen, wodurch die $\varphi_\nu(s, z)$ völlig bestimmt sind. Um alsdann die Verhältnisse der Konstanten c, b, welche von den (s, z) und (s_1, z_1) unabhängig sind, zu bestimmen, nehme man $(s, z) = (s_1, z_1)$, wonach die beiden Faktoren der linken Seite zunächst unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Durch Differentiation von Zähler und Nenner der beiden Faktoren nach z ergibt sich aber, wenn man setzt

$$\frac{\partial \vartheta(v_1, \cdots)}{\partial v_\nu} = \vartheta_\nu'(v_1, \cdots)$$

und beachtet, daß $\vartheta(v_1, \cdots)$ eine gerade, $\vartheta_\nu'(v_1, \cdots)$ eine ungerade Funktion ist:

$$\frac{\left[\sum_1^p \vartheta_\nu'(e_1, \cdots)\, \varphi_\nu(s_1, z_1)\right]^2}{\left[\sum_1^p \vartheta_\nu'(f_1, \cdots)\, \varphi_\nu(s_1, z_1)\right]^2} = \frac{\left[\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)\right]^2}{\left[\sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)\right]^2};$$

und da es auf einen allen c und b gemeinsamen Faktor nicht ankommt, kann man also setzen:

$$c_\nu = \vartheta_\nu'(e_1, \cdots),$$
$$b_\nu = \vartheta_\nu'(f_1, \cdots). \; ([23])$$

Zur Anwendung des Satzes auf die Abelschen Funktionen setzen wir:

$$(e_1, \cdots) \equiv \left(-\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i - \sum \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{\nu 1}, \cdots\right),$$
$$(f_1, \cdots) \equiv \left(-\frac{\eta_1'}{2}\pi i - \sum \frac{\eta_\nu}{2} a_{\nu 1}, \cdots\right),$$

und nehmen

$$(a)=\begin{pmatrix}\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p\\ \varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_p'\end{pmatrix},\quad (b)=\begin{pmatrix}\eta_1,\cdots,\eta_p\\ \eta_1',\cdots,\eta_p'\end{pmatrix}$$

als ungerade Charakteristiken, so wird

$$\vartheta(e_1,\cdots)=0,\quad \vartheta(f_1,\cdots)=0,$$
$$(e_1,\cdots)\equiv(-e_1,\cdots),\quad (f_1,\cdots)\equiv(-f_1,\cdots),$$

und es folgt wieder die Formel (4), (4′), S. 9, 10, nur mit Konstantenbestimmung in den φ. Es wird:

$$\frac{\vartheta(a)(u_1-u_1',\cdots)}{\vartheta(b)(u_1-u_1',\cdots)}=\sqrt{\frac{\varphi_a(s,z)}{\varphi_b(s,z)}\cdot\frac{\varphi_a(s_1,z_1)}{\varphi_b(s_1,z_1)}},$$

wo

$$\sqrt{\varphi_a(s,z)}=\sqrt{\sum_1^p\vartheta_\nu'(a)(0,\cdots)\,\varphi_\nu(s,z)}$$

$$\sqrt{\varphi_b(s,z)}=\sqrt{\sum_1^p\vartheta_\nu'(b)(0,\cdots)\,\varphi_\nu(s,z)}$$

die Abelschen Funktionen von den Charakteristiken (a), (b) sind. Die in diese Ausdrücke eingehenden Konstanten werden, nach S. 7:

$$\vartheta_\nu'(a)(0,\cdots)$$
$$=\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p_{m_1,\cdots,m_p} 2\left(m_\nu-\frac{\varepsilon_\nu}{2}\right)(-1)^{\sum\limits_1^p\left(m_\mu-\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\varepsilon_\mu'}\cdot e^{\left(\sum\limits_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}\left(m_\mu-\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(m_{\mu'}-\frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right)}.$$

Es sollen nun für $p=3$, nach dem am Anfang des vorigen Abschnittes angegebenen Ziele, umgekehrt wie dort, die algebraischen Moduln α, β, γ, α', β', γ' durch die Thetamoduln bestimmt, also jene sechs Größen durch Thetaquotienten für die Nullwerte der Argumente, mit gegebenen Thetamoduln, ausgedrückt werden.

Wir gehen hier von den früher gegebenen Entwicklungen und Bezeichnungen aus (Werke XXXI, S. 495—504; 1. Aufl. XXX, S. 463—472), insbesondere von der dortigen Formel (10):

$$\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta}=0.$$

Von den 28 Abelschen Funktionen stehen 22 in (21), l. c.; die sechs letzten sind die S. 503—4 (1. Aufl. S. 470—1) mit (k_1), (k_2); (k_1'), (k_2'); (k_1''), (k_2'') bezeichneten. Die Moduln α, β, γ, α', β', γ' sind die in den Formeln (17) vorkommenden Größen. Um sie zu bestimmen, drücken wir erst die Quadrate

$$\varphi_{n+p},\ \varphi_{n+q},\ \varphi_{n+r},\ \varphi_{n+q+r},\ \cdots$$

der Abelschen Funktionen, die bezw. zu den Charakteristiken

$$(n+p),\ (n+q),\ (n+r),\ (n+q+r),\cdots$$

gehören, durch diejenigen φ aus, welche in den Normalintegralen u_1, u_2, u_3 vorkommen. Seien diese letzteren φ bezw. mit x', y', z' bezeichnet, so wird, wenn man zur Abkürzung

$$\vartheta_\nu'(a)(0,\cdots)=\vartheta_\nu'(a)$$

schreibt:

$$\varphi_{n+p}=\vartheta_1'(n+p)\cdot x'+\vartheta_2'(n+p)\cdot y'+\vartheta_3'(n+p)\cdot z'$$
$$\varphi_{n+q}=\vartheta_1'(n+q)\cdot x'+\vartheta_2'(n+q)\cdot y'+\vartheta_3'(n+q)\cdot z'$$
$$\varphi_{n+r}=\vartheta_1'(n+r)\cdot x'+\vartheta_2'(n+r)\cdot y'+\vartheta_3'(n+r)\cdot z'$$

und

$$\varphi_{n+q+r}=\vartheta_1'(n+q+r)\cdot x'+\vartheta_2'(n+q+r)\cdot y'+\vartheta_3'(n+q+r)\cdot z'$$
$$\varphi_{n+r+p}=\vartheta_1'(n+r+p)\cdot x'+\vartheta_2'(n+r+p)\cdot y'+\vartheta_3'(n+r+p)\cdot z'$$
$$\varphi_{n+p+q}=\vartheta_1'(n+p+q)\cdot x'+\vartheta_2'(n+p+q)\cdot y'+\vartheta_3'(n+p+q)\cdot z'.$$

Aus diesen beiden Systemen berechnen wir φ_d, von der Charakteristik (d), doppelt, indem wir vermöge

$$\varphi_d=\vartheta_1'(d)\cdot x'+\vartheta_2'(d)\cdot y'+\vartheta_3'(d)\cdot z'$$

jeweils x', y', z' eliminieren. Wir führen zu dem Zwecke allgemein die Bezeichnung ein:

$$\begin{vmatrix}\vartheta_1'(a) & \vartheta_2'(a) & \vartheta_3'(a)\\ \vartheta_1'(b) & \vartheta_2'(b) & \vartheta_3'(b)\\ \vartheta_1'(c) & \vartheta_2'(c) & \vartheta_3'(c)\end{vmatrix}=(a,\,b,\,c),$$

wo a, b, c irgend drei ungerade Charakteristiken vorstellen, und erhalten:

$$\begin{aligned}\varphi_d&=\frac{1}{(n+p,\,n+q,\,n+r)}\Big\{(d,\,n+q,\,n+r)\,\varphi_{n+p}+(n+p,\,d,\,n+r)\,\varphi_{n+q}\\&\qquad+(n+p,\,n+q,\,d)\,\varphi_{n+r}\Big\}\\&=\frac{1}{(n+q+r,\,n+r+p,\,n+p+q)}\Big\{(d,\,n+r+p,\,n+p+q)\,\varphi_{n+q+r}\\&\qquad+(n+q+r,\,d,\,n+p+q)\,\varphi_{n+r+p}\\&\qquad+(n+q+r,\,n+r+p,\,d)\,\varphi_{n+p+q}\Big\}.\end{aligned}$$

Will man, daß die zu

$$(n+p),\ (n+q),\ (n+r),\ (n+q+r),\ (n+r+p),\ (n+p+q),\ (d)$$

gehörigen Abelschen Funktionen von der in (21), l. c. angegebenen Form

$$\sqrt{x},\ \sqrt{y},\ \sqrt{z},\ \sqrt{\xi},\ \sqrt{\eta},\ \sqrt{\zeta},\ \sqrt{x+y+z}=\sqrt{-\xi-\eta-\zeta}$$

werden, so setze man

$$x = \frac{(d, n+q, n+r)}{(n+p, n+q, n+r)}\, \varphi_{n+p}, \quad y = \frac{(n+p, d, n+r)}{(n+p, n+q, n+r)}\, \varphi_{n+q},$$

$$z = \frac{(n+p, n+q, d)}{(n+p, n+q, n+r)}\, \varphi_{n+r},$$

$$-\xi = \frac{(d, n+r+p, n+p+q)}{(n+q+r, n+r+p, n+p+q)}\, \varphi_{n+q+r},$$

$$-\eta = \frac{(n+q+r, d, n+p+q)}{(n+q+r, n+r+p, n+p+q)}\, \varphi_{n+r+p},$$

$$-\zeta = \frac{(n+q+r, n+r+p, d)}{(n+q+r, n+r+p, n+p+q)}\, \varphi_{n+p+q}.$$

Vertauscht man hier überall (d) mit (e), so gehen

$$x, y, z, \quad \xi, \eta, \zeta$$

bezw. über in

$$\varkappa\alpha x, \varkappa\beta y, \varkappa\gamma z, \quad \frac{\varkappa\xi}{\alpha}, \frac{\varkappa\eta}{\beta}, \frac{\varkappa\zeta}{\gamma},$$

wonach durch Division $\varkappa\alpha$ und $\frac{\varkappa}{\alpha}$ folgen, und hieraus:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(e, n+q, n+r)(d, n+r+p, n+p+q)}{(d, n+q, n+r)(e, n+r+p, n+p+q)}};$$

und analog β und γ, indem man p mit q, bezw. r vertauscht. Vertauscht man ferner e mit f, bezw. g, so ergeben sich auch

$$\varkappa', \alpha', \beta', \gamma', \quad \text{bezw.} \quad \varkappa'', \alpha'', \beta'', \gamma''.$$

Die Determinanten, die in diesen Ausdrücken vorkommen, haben alle die Eigenschaft, daß die Summe der in jede derselben eingehenden ungeraden Charakteristiken eine gerade Charakteristik ist, ([24]) da diese Summen die Formen

$$n, \; n+p+q+r, \; q+r+d = n+q+r+d' = n+p+e'+f'+g'$$

haben, also n mit 0, 3, oder 4 der Charakteristiken

$$p, q, r, \; d', e', f', g'$$

verbunden ist (s. S. 15).

Die noch ziemlich kompliziert gebauten Ausdrücke für α etc. kann man vereinfachen, wenn man bemerkt, daß jede Determinante (a, b, c), für welche die Summe der drei ungeraden Charakteristiken (a), (b), (c) eine gerade Charakteristik ist, sich als Produkt von 5 geraden Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente darstellen läßt, wie wir später durch Entwicklung nach Potenzen der $e^{a_{\mu,\mu'}}$ nachweisen werden ([25]) — Formeln, aus denen sich überhaupt alle Relationen zwischen den geraden ϑ und den Differentialquotienten der ungeraden ϑ, für die Nullwerthe der Argumente, ergeben. So folgt

$$\alpha = j \cdot \frac{\vartheta(n+p+d+f)\cdot\vartheta(n+p+d+g)}{\vartheta(n+p+e+f)\cdot\vartheta(n+p+e+g)},$$

[wo j eine numerische Konstante ist];
und entsprechend $\beta, \gamma, \alpha', \cdots$

Hyperelliptischer Fall.

1. Die Abelschen Funktionen und ihre Charakteristiken.

(6., 7. März:)

Die dem hyperelliptischen Fall $[p > 1]$ zu Grunde zu legende Gleichung nehmen wir (s. S. 12) in der Normalform an:

$$F(\overset{2}{s}, \overset{p+1}{z}) \equiv a_0 s^2 + 2a_1 s + a_2 = 0,$$

wo a_0, a_1, a_2 ganze Funktionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades sind.

Die Integrale erster Gattung werden, wenn s $\overline{2p+1}$-fach zusammenhängend sein soll:

$$w = \int \frac{\overset{p-1}{\varphi(z)}\, dz}{\sqrt{\Pi \overset{2p+2}{(z-a)}}},$$

wo

$$\prod \overset{2p+2}{(z-a)} = 4(a_1^2 - a_0 a_2)$$

ein Produkt von $2(p+1)$ verschiedenen Faktoren der Art $z-a$ ist.

Die Abelschen Funktionen, welche in je $p-1$ Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung werden, sind hier leicht zu bestimmen. Zunächst werden sie, wenn mit $c_1, c_2, \cdots, c_{p-1}$ die 0^1 Punkte einer Abelschen Funktion $\sqrt{\varphi_c}$ bezeichnet werden, von der Form

$$\sqrt{\varphi_c} = \sqrt{\prod \overset{p-1}{(z-c)}};$$

und hierbei müssen — da φ_c nur für $c_1, \cdots, c_{p-1}$, und zwar je in zweiter Ordnung, verschwindet, $z-c$ aber in c in erster oder zweiter Ordnung, je nachdem c von einem der Verzweigungspunkte a verschieden ist, oder mit einem solchen zusammenfällt — diejenigen Faktoren $z-c$, für welche c mit keinem der Punkte a zusammenfällt, zweimal vorkommen. Es wird daher

$$(1) \qquad \sqrt{\varphi_c} = \sqrt{\prod \overset{p-1-2m}{(z-a)}} \cdot f(\overset{m}{z}). \qquad (m=0,1,\cdots)$$

Um die Charakteristiken dieser Funktionen zu bestimmen, haben wir zunächst, wenn $\sqrt{\varphi_c}$ zur Charakteristik

$$(c) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^c, \cdots, \varepsilon_p^c \\ \varepsilon_1'^c, \cdots, \varepsilon_p'^c \end{pmatrix}$$

gehört, sei es im allgemeinen für ungerade (c), sei es im speziellen Falle für gerade (c):

$$\left(\sum_{1}^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \cdots\right) \equiv \left(-\frac{\varepsilon_1'^c}{2}\pi i - \sum_{1}^{p} \frac{\varepsilon_\nu^c}{2} a_{\nu,1}, \cdots\right), \tag{2}$$

die Summen links ausgedehnt über die $p-1$ Nullpunkte von $\sqrt{\varphi_c}$; und da dann

$$\vartheta(c)(0, \cdots) = 0$$

wird, so verschwindet die Funktion

$$\vartheta(c)(u_1 - u_1', \cdots), \tag{3}$$

als Funktion von (s, z), wenn sie nicht identisch verschwindet, für (s_1, z_1) und für jene $p-1$ Nullpunkte.

Denn wir haben bewiesen (Th. A. F. Art. 4 und 15), daß, wenn $e_1, \cdots, e_p$ beliebig gegebene Größen sind, man $2p$ reelle Größen g_ν, h_ν so bestimmen kann, daß

$$e_\nu = g_\nu \pi i + \sum_{\mu=1}^{p} h_\mu a_{\nu,\mu}. \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\cdots,p)}$$

In der That, wenn $a_{\mu,\mu'} = p_{\mu,\mu'} + i q_{\mu,\mu'}$, so verlangt dies, daß die Determinante der $p_{\mu,\mu'}$ von Null verschieden ist, was der Fall ist, weil $\sum p_{\mu,\mu'} x_\mu x_{\mu'}$ eine wesentlich negative quadratische Form sein soll (Th. A. F. Art. 18). Wenden wir dies auf obige Summen

$$e_\nu = 2\sum_{1}^{p-1} \alpha^{(\nu)}$$

an, so müssen die g_ν, h_ν ganze Zahlen werden, woraus wieder, aber nun für alle, auch die speziellsten Fälle, die Relation (2) resultiert. Sie liefert die zur Funktion $\sqrt{\varphi_c}$ gehörige Charakteristik $\begin{pmatrix} \varepsilon_1^c, \cdots, \varepsilon_p^c \\ \varepsilon_1'^c, \cdots, \varepsilon_p'^c \end{pmatrix}$, in der die $\varepsilon, \varepsilon'$ etwa mod. 2 auf 0, 1 reduziert genommen werden können.

Wir haben ferner die S. 10 gegebene Definition der dem *Quotienten* zweier Abelschen Funktionen zuzuschreibenden Gruppencharakteristik auch auf unsere speziellen Fälle auszudehnen.

Nach Th. A. F. Art. 26 läßt sich eine beliebige algebraische Funktion von s, z, die in T', stetig fortgesetzt, allenthalben eindeutig ist und bei Überschreiten der Querschnitte nur Faktoren vom Modul 1 erlangt, als Quotient von Thetaprodukten ausdrücken. Hat man eine solche Funktion, die in m Punkten (s_ν, z_ν) zu 0^1, in m Punkten (σ_ν, ζ_ν) zu ∞^1 wird, und bezeichnet man die Integrale u_μ über die ersteren

Punkte mit $\gamma_\mu^{(\nu)}$, über die letzteren mit $\beta_\mu^{(\nu)}$, so wird

$$\sum_\nu \gamma_\mu^{(\nu)} - \sum_\nu \beta_\mu^{(\nu)} \equiv g_\mu \pi i + \sum_{\nu=1}^{p} a_{\nu,\mu} h_\nu,$$

wo g_μ, h_ν rationale Zahlen sind.

Wenn insbesondere diese Zahlen g_μ, h_ν nur ganze Zahlen werden, also wenn die Kongruenzen

$$\sum_{\nu=1}^{m} u_\mu^{(\nu)} \equiv \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\mu^{(\nu)}$$

sich durch Werte $(s_\nu z_\nu)$ erfüllen lassen, die von den Grenzen (σ_ν, ζ_ν) der $\beta_\mu^{(\nu)}$ verschieden sind, so muß die Funktion, welche in den ersteren m Punkten zu 0^1, in den letzteren m Punkten zu ∞^1 wird, eine rationale Funktion von s, z sein. Ist sie der Quotient zweier Abelschen Funktionen (1), so wird ihre Gruppencharakteristik zu $\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ (s. S. 10). Ändert man daher in (1) nur die Koeffizienten von $\overset{m}{f}(z)$, unter Beibehaltung des Faktors $\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a)}$, so kommt man zu zwei Funktionen $\sqrt{\varphi_c}$, $\sqrt{\varphi_c'}$ von derselben Charakteristik (c). Und die einer bestimmten Charakteristik (c) entsprechenden Abelschen Funktionen werden so viele willkürliche Konstanten enthalten, als in $\overset{m}{f}(z)$ vorkommen, nämlich $m+1$.

Ist die Funktion überhaupt der Quotient zweier Abelschen Funktionen

$$\sqrt{\frac{\varphi_c}{\varphi_d}},$$

so wird

$$g_\mu = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_\mu'^c + \varepsilon_\mu'^d\right), \quad h_\mu = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_\mu^c + \varepsilon_\mu^d\right).$$

Die Faktoren, welche $\sqrt{\frac{\varphi_c}{\varphi_d}}$ an den Querschnitten a_μ, bezw. b_μ erlangt, werden $(-1)^{\varepsilon_\mu^c + \varepsilon_\mu^d}$, bezw. $(-1)^{\varepsilon_\mu'^c + \varepsilon_\mu'^d}$; und die Gruppencharakteristik des Quotienten wird $\begin{pmatrix} \varepsilon_1^c + \varepsilon_1^d, \cdots, \varepsilon_p^c + \varepsilon_p^d \\ \varepsilon_1'^c + \varepsilon_1'^d, \cdots, \varepsilon_p'^c + \varepsilon_p'^d \end{pmatrix}$.

Man erhält daher so viele wesentlich verschiedene Abelsche Funktionen, mit verschiedenen Charakteristiken, als Ausdrücke $\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a)}$ $(m = 0, 1, \cdots)$ existieren. Denn bei gleichen Charakteristiken müßte der Quotient rational sein, während niemals der Quotient von irgend

$p-1$ oder weniger Faktoren der Art $\sqrt{z-a}$ rational ist, sondern erst das Produkt der $2p+2$ verschiedenen Faktoren $\sqrt{\prod^{2p+2}(z-a)}$.

Obwohl wir bei diesen Zuordnungen der Abelschen Funktionen zu den Charakteristiken eine bestimmte Zerlegung der Fläche T zu Grunde legen mußten, braucht doch diese Zerlegung nicht ausgeführt zu werden, insofern die Resultate unabhängig von ihr sind.

Fortsetzung: 2. Anzahl der Abelschen Funktionen.

(7., 8. März:)

Zählen wir die den verschiedenen Fällen $m = 0, 1, 2, \cdots, \frac{p-2}{2}$, bez. $\frac{p-1}{2}$ entsprechenden Abelschen Funktionen im hyperelliptischen Fall an

$$\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a)}$$

((1), S. 35) ab.

1) $m = 2n,\ p-1-4n \geqq 0$.

Man hat

$$\frac{(2p+2)!}{(p-1-4n)!\,(p+3+4n)!}$$

Anordnungen, durch Zerlegung von $2p+2$ Faktoren in je $p-1-4n$ und $p+3+4n$; und ebenso viele Abelsche Funktionen, von verschiedenen Charakteristiken, je mit der Konstantenzahl $2n+1$.

Zur Summation Z dieser Charakteristiken für $n = 0, 1, 2, \cdots$, $n \leqq \frac{p-1}{4}$ bildet man aus dem binomischen Satze:

$$x^{-(p-1)}(1+x)^{2p+2} = \sum_{\nu=0}^{2p+2} x^{p+3-\nu} \cdot \frac{(2p+2)!}{\nu!\,(2p+2-\nu)!}$$

und summiert beide Seiten über $x = +1, -1, +i, -i$. Dabei heben sich rechts alle Glieder gegenseitig weg, in welchen der Exponent von x nicht durch 4 teilbar ist, und die rechte Seite wird für $\nu = p-1-4n$ zu:

$$4\sum_{\nu} \frac{(2p+2)!}{\nu!\,(2p+2-\nu)!} = 8\sum_{n=0}^{n \leqq \frac{p-1}{4}} \frac{(2p+2)!}{(p-1-4n)!\,(p+3+4n)!},$$

die linke Seite zu

$$\sum_{\substack{x=1,-1\\ i,-i}} x^{-(p-1)}(1+x)^{2p+2} = 2^{p+2}(2^p-1).$$

Daher wird

$$Z = \sum_{n=0}^{n \leqq \frac{p-1}{4}} \frac{(2p+2)!}{(p-1-4n)!\,(p+3+4n)!} = 2^{p-1}(2^p-1),$$

also gleich der Anzahl β_p aller ungeraden Charakteristiken.

Sobald also noch ungerade m zulässig sind, was für $p \geqq 3$ der Fall ist, muß es noch ebensoviele Abelsche Funktionen mit *geraden* Charakteristiken — entsprechend geraden Thetafunktionen, die für die Nullwerte der Argumente verschwinden — geben, als Zerlegungen Z' von $2p+2$ Faktoren in je $p-3-4n$ und $p+5+4n$, für $n = 0, 1, \cdots, \leqq \frac{p-3}{4}$.

2) $m = 2n+1,\ p-3-4n \geqq 0,\ n = 0, 1, \cdots, \leqq \frac{p-3}{4}$.

[Man erhält im ganzen, durch analoge Rechnung, wie in 1):

$$Z' = \sum_{n=0}^{n \leqq \frac{p-3}{4}} \frac{(2p+2)!}{(p-3-4n)!\,(p+5+4n)!} = 2^{p-1}(2^p+1) - \frac{1}{2}\frac{(2p+2)!}{(p+1)!\,(p+1)!}$$

verschiedene Charakteristiken, je zu Abelschen Funktionen mit der Konstantenzahl $2n+2$ gehörig.]

Es ist $Z' = 1$ für $p = 3$; $Z' = 10$ für $p = 4$; $Z' = 66$ für $p = 5$. Ebensoviele gerade Thetafunktionen verschwinden für die Nullwerte der Argumente. Für $p = 3$ stellt dies eine, für $p = 4$ aber, da die hyperelliptische Funktion $p = 4$ noch 7 algebraische Moduln enthält, nicht 10, sondern nur 3 Relationen zwischen den Moduln der Thetafunktion vor.

Aus dem Umstande, daß es ebensoviel $[\beta_p]$ Abelsche Funktionen mit ungerader Charakteristik gibt, als Kombinationen Z von Produkten $\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a)}$ mit geradem m, und ebensoviele $[\alpha_p - \frac{1}{2}(2p+2)_{p+1}]$ Abelsche Funktionen mit gerader Charakteristik, als Kombinationen Z' von Produkten $\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a)}$ mit ungeradem m, läßt sich vermuten, *daß den*

geraden, bezw. ungeraden m

die Abelschen Funktionen mit

ungerader, bezw. gerader Charakteristik

entsprechen mögen. Wir setzen diesen Satz, den wir später (s. Fortsetzung 7) vollständig beweisen werden, zunächst voraus.

Fortsetzung: 3. Relationen zwischen den Charakteristiken der Abelschen Funktionen.

(8. März:)

Die $2p+2$ Verzweigungspunkte a seien bezeichnet mit

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2p+1}.$$

Die Charakteristik der Abelschen Funktion

$$\sqrt{(z-a_0)^{p-1}}$$

sei

$$(n) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^n, \cdots, \varepsilon_p^n \\ \varepsilon_1'^n, \cdots, \varepsilon_p'^n \end{pmatrix},$$

wobei

$$\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1'^n \pi i + \frac{1}{2}\sum_\mu \varepsilon_\mu^n a_{\mu,1}, \cdots\right) \equiv \left((p-1)\, u_1(a_0), \cdots\right),$$

wenn $u_\mu(a)$ der Wert von u_μ im Punkte a ist.

Wir schreiben dann der Funktion

$$\sqrt{\frac{z-a_\nu}{z-a_0}}$$

die Gruppencharakteristik (a_ν) zu, indem entweder ihr Faktorensystem an den Querschnitten bestimmt wird, oder

$$\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1'^{a_\nu} + \frac{1}{2}\sum \varepsilon_\mu^{a_\nu} a_{\mu,1}, \cdots\right) \equiv \left(u_1(a_\nu) - u_1(a_0), \cdots\right)$$

sei; beidemal ist die Zuordnung für eine bestimmte Zerschneidung von T gefunden.

Da das Produkt von $2p+1$ verschiedenen Faktoren

$$\sqrt{\frac{\overset{2p+1}{\Pi}(z-a_\nu)}{(z-a_0)^{2p+1}}} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, 2p+1)$$

eine rationale Funktion von s, z wird, und da die Charakteristik desselben die Summe der Charakteristiken der einzelnen Faktoren ist, so hat man zwischen den Charakteristiken $(a_1), \cdots, (a_{2p+1})$ die identische Relation:

$$(a_1) + (a_2) + \cdots + (a_{2p+1}) \equiv (0),$$

d. h. (a_{2p+1}) ist durch die $2p$ ersteren Charakteristiken bestimmt. Dagegen findet zwischen diesen selbst keine lineare Identität statt, da keines der Produkte, aus irgend $\varkappa$ verschiedenen der $2p$ ersten Faktoren zusammengesetzt, eine rationale Funktion sein kann.

Aus der linearen Unabhängigkeit der Charakteristiken

$$(a_1), (a_2), \cdots, (a_{2p})$$

folgt, daß irgend zwei Charakteristiken, welche sich aus ihnen durch

Addition zusammensetzen, nur dann einander gleich sind, wenn sie in den $(a_1), \cdots, (a_{2p})$ denselben Ausdruck erhalten. Bildet man aus denselben alle Kombinationen

$$\alpha_1 \cdot (a_1) + \alpha_2 \cdot (a_2) + \cdots + \alpha_{2p} \cdot (a_{2p}),$$

wo die α nur die Werte 0 und 1 erhalten, so erhält man 2^{2p} von einander verschiedene Ausdrücke, und also auch 2^{2p} verschiedene Charakteristiken, wenn man (0) einschließt. Und da es nur ebensoviele Charakteristiken gibt, so lassen sich alle Gruppencharakteristiken aus $(a_1), (a_2), \cdots, (a_{2p})$ zusammensetzen; auch (0) eingeschlossen, wenn man $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2p} = 0$ setzt.

Addiert man weiter die Charakteristik (n) zu allen diesen Gruppencharakteristiken, (0) eingeschlossen, so erhält man wieder alle 2^{2p} Charakteristiken, da aus $(na) = (nb)$ auch $(a) = (b)$ folgt. Wir drücken daher alle Charakteristiken in der Form aus

$$(n) + \sum (a_\nu),$$

unter Σ irgend welche Summen der (a_ν) $(\nu = 1, 2, \cdots, 2p)$ verstanden.

Wenn man nun beachtet, daß der Quotient

$$\frac{\overset{m}{f(z)}\sqrt{\overset{p-1-2m}{\Pi}(z-a_\nu)}}{\sqrt{(z-a_0)^{p-1}}} = \frac{\overset{m}{f(z)}}{(z-a_0)^m}\sqrt{\frac{\overset{p-1-2m}{\Pi}(z-a_\nu)}{(z-a_0)^{p-1-2m}}}$$

die Gruppencharakteristik

$$\sum^{p-1-2m}(a_\nu), \quad \text{bezw.} \quad \sum^{p-2-2m}(a_\nu)$$

hat, je nachdem a_0 unter den a_ν des Zählers nicht vorkommt, oder ja, so folgt:

die Charakteristik von

$$\overset{m}{f(z)}\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a_\nu)}$$

ist

$$(n) + \sum^{p-1-2m}(a_\nu), \quad \text{bezw.} \quad (n) + \sum^{p-2-2m}(a_\nu),$$

je nachdem a_0 unter den a_ν nicht oder ja vorkommt.

Setzt man nun den am Schluß des vorigen Abschnittes (S. 39) vermuteten Satz als richtig voraus, so folgt weiter:

Die *ungeraden* Charakteristiken werden von den Formen

$$(n) + \sum^{p-1-4m}(a_\nu), \quad (n) + \sum^{p-2-4m}(a_\nu),$$

wobei sich ν auf die Zahlen $1, 2, \cdots, 2p$ bezieht.

Da dasselbe auch bei Hinzunahme von a_{2p+1} gelten muß, so erhält man weiter, indem man (a_{2p+1}) durch $(a_1) + (a_2) + \cdots + (a_{2p})$ ersetzt:

Auch die Charakteristiken von den Formen

$$(n) + \sum^{p+2\pm 4m} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p+3\pm 4m} (a_\nu),$$

wobei sich ν ebenfalls auf die Zahlen $1, 2, \cdots, 2p$ bezieht, sind *ungerade*;

d. h. *alle aus (n) und den $(a_1), \cdots, (a_{2p})$ zusammengesetzten Charakteristiken sind ungerade, sobald die Anzahl dieser $(a_\nu) \equiv p - 1$ oder $p - 2$ (mod. 4) ist.*

Die übrigen Kombinationen müssen dann die *geraden* Charakteristiken liefern; diese werden also von den Formen

$$(n) + \sum^{p\pm 4m} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p+1\pm 4m} (a_\nu);$$

d. h. *alle aus (n) und den $(a_1), \cdots, (a_{2p})$ zusammengesetzten Charakteristiken sind gerade, sobald die Anzahl dieser $(a_\nu) \equiv p$ oder $p + 1$ (mod. 4) ist.*

In unserem hyperelliptischen Falle existiert auch unter den letzteren Formen von geraden Charakteristiken eine Reihe von Abelschen Funktionen, nämlich diejenigen, für welche die Summen die Formen annehmen:

$$(n) + \sum^{p-3-4m} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p-4-4m} (a_\nu),$$
$$(n) + \sum^{p+4+4m} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p+5+4m} (a_\nu),$$
$$\text{für } m \geq 0.$$

Es bleiben daher noch die Formen, welche auch in unserem Falle keinen Abelschen Funktionen entsprechen:

$$(n) + \sum^{p} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p+1} (a_\nu);$$

und dieses sind daher, unabhängig von dem oben vorausgesetzten Satze, jedenfalls gerade Charakteristiken. In unserm Falle können denselben keine Thetafunktionen entsprechen, welche für die Nullwerte der Argumente verschwinden; und umgekehrt entsprechen hier solchen Funktionen nur Charakteristiken der letzten beiden Formen.

Fortsetzung: 4. Ausdrücke von Quotienten Abelscher Funktionen durch Thetaquotienten.

(8. März:)

Betrachten wir die Thetafunktionen zunächst im Falle der Abelschen Funktionen, in dem $m > 0$ ist (s. (1) S. 35). Die Charakteristik einer solchen Thetafunktion sei (q).

Für $m > 0$ muß $\vartheta(q)(u_1 - u_1', \cdots)$ identisch verschwinden für jedes (s, z).

Denn sei

$$\vartheta(q)(u_1 - u_1', \cdots) = c\,\vartheta(u_1 - u_1' - \sum_\nu u_1^{(\nu)}, \cdots) \cdot e^{-\sum_\mu \varepsilon_\mu^q (u_\mu - u'_\mu)},$$

wo

$$\sum_\nu u_\mu^{(\nu)} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_\mu'^q \pi i + \frac{1}{2} \sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'}^q a_{\mu, \mu'} \equiv e_\mu, \qquad (\mu = 1, \cdots, p)$$

und $\sum\limits_\nu$ ausgedehnt wird über die $p - 1$ Punkte, für welche die (q) zugeordnete Abelsche Funktion verschwindet. Da für $m > 0$ *verschiedene* Systeme von Summen von $p - 1$ Integralen existieren, denen die e_μ kongruent gesetzt werden können, so muß $\vartheta(q)(u_1 - u_1', \cdots)$ nach der ersten Formel identisch verschwinden für jedes (s, z).

Für $m > 0$ verschwinden ferner auch die p Funktionen $\vartheta'_\mu(e_1, \cdots, e_p)$.

Denn

$$\sum_{\mu=1}^{p} \vartheta'_\mu(q)(u_1 - u_1', \cdots) \frac{du_\mu}{dz}$$

wird dann für $(s, z) = (s_1, z_1)$ ebenfalls zu Null, also auch die Koeffizienten $\vartheta'_\mu(q)(0, \cdots)$, weil zwischen den $\frac{du_\mu}{dz}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ keine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten stattfindet.

Umgekehrt: *Wenn sowohl $\vartheta(e_1, \cdots) = 0$, als die $\vartheta'_\mu(e_1, \cdots) = 0$ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ sind, so muß die Funktion $\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)$ identisch für jedes (s, z) verschwinden.*

Denn da, nach dem früheren (S. 30, 31), für $\vartheta(e_1, \cdots) = 0$, $\vartheta(f_1, \cdots) = 0$:

$$\frac{\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)\ \vartheta(u_1 - u_1' + e_1, \cdots)}{\vartheta(u_1 - u_1' - f_1, \cdots)\ \vartheta(u_1 - u_1' + f_1, \cdots)} = \frac{\sum_\mu \vartheta'_\mu(e) \varphi_\mu(s, z) \cdot \sum_\mu \vartheta'_\mu(e) \varphi_\mu(s_1, z_1)}{\sum_\mu \vartheta'_\mu(f) \varphi_\mu(s, z) \cdot \sum_\mu \vartheta'_\mu(f) \varphi_\mu(s_1, z_1)},$$

so folgt aus $\vartheta'_\mu(e) = 0$ $(\mu = 1, \cdots, p)$ und zwar ohne Hinzunahme von $\vartheta'_\mu(f) = 0$, daß $\vartheta(u_1 - u_1' \pm e_1, \cdots)$ für jedes (s, z) identisch gleich Null sei; die beiden Ausdrücke $\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)$ und $\vartheta(u_1 - u_1' + e_1, \cdots)$ verschwinden aber gleichzeitig identisch, oder nicht [da ein solcher Ausdruck, wenn als Funktion von (s, z), auch als Funktion von (s_1, z_1) identisch verschwindet].

Hiernach bedingen sich die beiden Eigenschaften:

1) $\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)$ verschwindet identisch für jedes (s, z);

2) $\vartheta(e_1, \cdots) = 0, \quad \vartheta'_\mu(e_1, \cdots) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, p)$

gegenseitig; und dann lassen sich die Kongruenzen

$$(e_1, \cdots) \equiv \left(\sum_{\nu=1}^{p-1} u_1^{(\nu)}, \cdots \right)$$

auf verschiedene Weisen erfüllen. Hieraus folgt:

Für $m > 0$ müssen alle Größen $\vartheta'_\mu(q)$ gleich Null sein. Wenn $\vartheta(q) = 0$ und alle $\vartheta'_\mu(q) = 0$ sind, so hat man verschiedene Integralsysteme für die e, also für den Faktor $f(\overset{m}{z})$ der zugehörigen Abelschen Funktion ((1), S. 35) *mindestens zwei Konstanten, d. h. $m > 0$.*

Beachtet man nun weiter, daß bei gerader Charakteristik (q) alle $\vartheta'_\mu(q)$ immer gleich Null sind, so ergibt sich:

Ist $\vartheta(q) = 0$ und (q) gerade, so muß die zugehörige Abelsche Funktion mindestens zwei willkürliche Konstanten enthalten, also $m > 0$ sein.

Und hieraus weiter:

Dem Fall $m = 0$ können nur Abelsche Funktionen mit ungerader Charakteristik und ungerade Thetafunktionen entsprechen.

Die früher gegebene algebraische Darstellung einfacher Thetaquotienten (S. 9, 10 (4), (4′) und S. 32) als Quotient zweier Abelschen Funktionen, nämlich

$$\frac{\vartheta(a)(u_1 - u_1', \cdots)}{\vartheta(b)(u_1 - u_1', \cdots)} = \sqrt{\frac{\varphi_a(s, z) \cdot \varphi_a(s_1, z_1)}{\varphi_b(s, z) \cdot \varphi_b(s_1, z_1)}},$$

ist nur anwendbar, wenn die beiden Thetafunktionen des Quotienten nicht identisch verschwinden; somit nur entsprechend solchen Abelschen Funktionen $\sqrt{\varphi_a}$, $\sqrt{\varphi_b}$, welche zu $m = 0$ gehören, also jedenfalls nur für ungerade Charakteristiken (a), (b).

Ist $m > 0$, so wäre

$$\frac{f(\overset{m}{z}) \sqrt{\prod^{p-1-2m} (z - a_\nu)}}{\sqrt{(z - a_0)^{p-1}}}$$

als Quotient von Thetareihen auszudrücken. Tut man dies durch einen einfachen Thetaquotienten, so verschwindet der Zähler identisch in (s, z), und man muß dann, bei $m = 1$, dafür erste Derivierte nach irgend einem der Argumente u nehmen; zwischen den Derivierten existieren dabei lineare Relationen. Und ebenso muß man bei $m > 1$ auch auf die höheren Derivierten übergehen — was wir jetzt nicht weiter verfolgen können. Dabei würde sich auch die *allgemeine* Gültigkeit des oben vorausgesetzten Satzes (S. 39, 41) ergeben, analog wie oben für $m = 0$.([26]) Bisher ist von diesem Satze nur fest bewiesen, daß [was für $p = 3$ genügen würde] die Charakteristiken der Formen

$$(n) + \sum^{p} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p+1} (a_\nu) \quad \text{gerade},$$

$$(n) + \sum^{p-1} (a_\nu), \ (n) + \sum^{p-2} (a_\nu), \ (n) + \sum^{p+2} (a_\nu), \ (n) + \sum^{p+3} (a_\nu) \quad \text{ungerade}$$

sind. Wir werden später den vollständigen Beweis des Satzes auf anderm Wege erbringen (s. Fortsetzung 7). Jetzt wenden wir uns den Quotienten aus geraden, nicht identisch verschwindenden $\vartheta(q)(0, \cdots)$ zu [Spezialisierung von obigen Abschnitten, S. 23—35].([27])

Fortsetzung: 5. Spezielle Thetaquotienten.

(10. März:)

Sei $m = 0$, also eine ungerade Charakteristik (q) betrachtet, für welche $\vartheta(q)(u_1 - u_1', \cdots)$ nicht identisch in (s, z) verschwindet. Wir bezeichnen mit

$$b_1, b_2, \cdots, b_{p-1}$$

irgend $p - 1$ verschiedene der $2p + 2$ Verzweigungspunkte a; mit

$$c_1, c_2, \cdots, c_{p-1}$$

irgend $p - 1$ andere, von einander verschiedene, dieser Punkte a. Dann haben wir aus dem früheren allgemeinen Satze über die Quotienten von Thetas (S. 9, 10):

$$A \sqrt{\frac{\prod^{p-1}(z - b_\nu) \prod^{p-1}(z_1 - b_\nu)}{\prod^{p-1}(z - c_\nu) \prod^{p-1}(z_1 - c_\nu)}} = \frac{\vartheta\left(u_1 - u_1' - \sum_\nu u_1(b_\nu), \cdots\right)}{\vartheta\left(u_1 - u_1' - \sum_\nu u_1(c_\nu), \cdots\right)} e^{-\sum_\mu \left(\varepsilon_\mu^{(n+\Sigma b_\nu)} - \varepsilon_\mu^{(n+\Sigma c_\nu)}\right)(u_\mu - u_\mu')},$$

wo $u_\mu(b_\nu)$ der Wert von u_μ in b_ν ist, und wo

$$\sum_\nu u_\mu(b_\nu) = \frac{1}{2} \varepsilon_\mu'^{(n+\Sigma b_\nu)} \pi i + \frac{1}{2} \sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'}^{(n+\Sigma b_\nu)} a_{\mu,\mu'},$$

$$\sum_\nu u_\mu(c_\nu) = \frac{1}{2} \varepsilon_\mu'^{(n+\Sigma c_\nu)} \pi i + \frac{1}{2} \sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'}^{(n+\Sigma c_\nu)} a_{\mu,\mu'}.$$

Seien ferner

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta$$

die vier noch übrigen Verzweigungspunkte a. Setzen wir z und z_1 gleich irgend zwei verschiedenen dieser vier Größen, und zwar

$$1) \quad z = \alpha, \ z_1 = \beta; \qquad 2) \quad z = \gamma, \ z_1 = \delta,$$

so wird

1) $$A\sqrt{\frac{\Pi(\alpha-b_\nu)\,\Pi(\beta-b_\nu)}{\Pi(\alpha-c_\nu)\,\Pi(\beta-c_\nu)}} = \frac{\vartheta\left(u_1(\alpha)-u_1(\beta)-\sum\limits_\nu u_1(b_\nu),\cdots\right)}{\vartheta\left(u_1(\alpha)-u_1(\beta)-\sum\limits_\nu u_1(c_\nu),\cdots\right)}\, e^{-\sum\limits_\mu \varepsilon_\mu^{(\Sigma b_\nu-\Sigma c_\nu)}\left(u_\mu(\alpha)-u_\mu(\beta)\right)}.$$

2) $$A\sqrt{\frac{\Pi(\gamma-b_\nu)\,\Pi(\delta-b_\nu)}{\Pi(\gamma-c_\nu)\,\Pi(\delta-c_\nu)}} = \frac{\vartheta\left(u_1(\gamma)-u_1(\delta)-\sum\limits_\nu u_1(b_\nu),\cdots\right)}{\vartheta\left(u_1(\gamma)-u_1(\delta)-\sum\limits_\nu u_1(c_\nu),\cdots\right)}\, e^{-\sum\limits_\mu \varepsilon_\mu^{(\Sigma b_\nu-\Sigma c_\nu)}\left(u_\mu(\gamma)-u_\mu(\delta)\right)}.$$

Aber hier wird die Thetareihe im Zähler des einen Ausdrucks jedesmal im wesentlichen gleich der Thetareihe im Nenner des anderen Ausdrucks; wie früher ergibt sich also durch Multiplikation A^2, und durch Division der Wert des Quadrates eines nicht verschwindenden Thetaquotienten für die Nullwerte der Argumente; wobei man für diese Thetafunktionen beliebige solche gerade Charakteristiken, zu denen überhaupt für die Nullwerte nicht verschwindende Thetafunktionen gehören, erhält.

Durch Multiplikation wird, bis auf einen Exponentialfaktor $\varkappa'$:

$$A = \varkappa' \sqrt[4]{\frac{\Pi(\alpha-c_\nu)\,\Pi(\beta-c_\nu)\,\Pi(\gamma-c_\nu)\,\Pi(\delta-c_\nu)}{\Pi(\alpha-b_\nu)\,\Pi(\beta-b_\nu)\,\Pi(\gamma-b_\nu)\,\Pi(\delta-b_\nu)}}.$$

Zur Division sei

$$u_\mu(a_\nu)-u_\mu(a_0) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_\mu'^{a_\nu}\pi i + \frac{1}{2}\sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'}^{a_\nu} a_{\mu,\mu'},$$

gehörig zur Gruppencharakteristik (a_ν) von $\sqrt{\frac{z-a_\nu}{z-a_0}}$. Also wird

$$u_\mu(\alpha)-u_\mu(\beta) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_\mu'^{(\alpha)-(\beta)}\pi i + \frac{1}{2}\sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'}^{(\alpha)-(\beta)} a_{\mu,\mu'}$$

und die identische Relation

$$(a_1)+(a_2)\cdots+(a_{2p+1}) \equiv (0)$$

zu

$$\Sigma(b_\nu)+\Sigma(c_\nu)+(\alpha)+(\beta)+(\gamma)+(\delta) \equiv 0 \pmod{2},$$

wo die Gruppencharakteristiken $(\alpha), \cdots$ zu $\sqrt{\frac{z-\alpha}{z-a_0}}, \cdots$ gehören, und wo auf der linken Seite unter den $2p+2$ Gruppencharakteristiken auch $\binom{0,\cdots,0}{0,\cdots,0}$ vorkommt, entsprechend $\sqrt{\frac{z-a_0}{z-a_0}}$. Durch Division folgt daher, da:

$$(n)+(\alpha)-(\beta)-\Sigma(b_\nu) \equiv (n)+(\gamma)-(\delta)-\Sigma(c_\nu) \pmod{2}$$

wird, die Formel:

$$\frac{\vartheta(n+\alpha-\beta+\Sigma b_\nu)}{\vartheta(n+\alpha-\beta+\Sigma c_\nu)} = \varkappa_1 \sqrt[4]{\frac{\Pi(\alpha-b_\nu)\,\Pi(\beta-b_\nu)\,\Pi(\gamma-c_\nu)\,\Pi(\delta-c_\nu)}{\Pi(\alpha-c_\nu)\,\Pi(\beta-c_\nu)\,\Pi(\gamma-b_\nu)\,\Pi(\delta-b_\nu)}},$$

in der $\varkappa_1$ ein Exponentialfaktor ist.

Diese Darstellung genügt, um durch Vertauschungen und Produktbildungen alle Quotienten der Form

$$\sqrt[4]{\frac{(a-b)\,(c-d)}{(a-c)\,(b-d)}},$$

wo a, b, c, d irgend vier verschiedene aus den $2p+2$ Verzweigungswerten vorstellen, durch Thetaquotienten für die Nullwerte der Argumente auszudrücken. Denkt man noch eine lineare gebrochene Substitution zwischen z und z' ausgeführt, wobei der letztere Quotient in

$$\sqrt[4]{\frac{(a'-b')\,(c'-d')}{(a'-c')\,(b'-d')}}$$

übergehe, und nimmt drei der Größen a', b', c', d' als $0, 1, \infty$ an, so erhält man die Ausdrücke für die Moduln der hyperelliptischen Funktion.

[Ausgerechnet wird, mit Hilfe der Definition von $\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(v)$ (Seite 8)

$$\varkappa'^2 = \varkappa^2 j,$$

$$\varkappa_1 = \sqrt{j}\cdot e^{\frac{1}{2}\pi i \sum\limits_\mu \varepsilon_\mu^{(\alpha)-(\beta)}\cdot\varepsilon_\mu'^{\Sigma(b_\nu)-\Sigma(c_\nu)}},$$

$$\varkappa^2 = e^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{\mu,\mu'}\right)^2 a_{\mu,\mu'}\varepsilon_\mu^{(n+\Sigma b_\nu)}\cdot\varepsilon_{\mu'}^{(n+\Sigma b_\nu)} + \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{\mu,\mu'}\right)^2 a_{\mu,\mu'}\varepsilon_\mu^{(n+\Sigma c_\nu)}\cdot\varepsilon_{\mu'}^{(n+\Sigma c_\nu)}},$$

$$j = e^{\frac{1}{2}\pi i \sum\limits_\mu \varepsilon_\mu^{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)}\cdot\varepsilon_\mu'^{(\alpha-\beta+\gamma-\delta-2\Sigma c_\nu-2n)}}.]$$

Fortsetzung: 6. Thetaquotienten mit beliebigen Argumenten.

(10. März:)

Seien $(s_1, z_1), (s_2, z_2), \cdots, (s_p, z_p)$ irgend p Punkte von $F(s, z) = 0$, und $u_\mu^{(1)}, u_\mu^{(2)}, \cdots, u_\mu^{(p)}$ die zugehörigen Werte von u_μ. a, b seien irgend zwei Verzweigungspunkte. So kann man den Quotienten

$$\frac{\vartheta\left(\sum\limits_{\nu=1}^{p} u_1^{(\nu)} - u_1(a), \cdots\right)}{\vartheta\left(\sum\limits_{\nu=1}^{p} u_1^{(\nu)} - u_1(b), \cdots\right)}\, e^{-\sum\limits_{\nu,\mu} \varepsilon_\mu^{(a)-(b)} u_\mu^{(\nu)}},$$

wo

$$u_\mu(a)-u_\mu(b) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_\mu'^{(a)-(b)}\cdot\pi i + \frac{1}{2}\sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'}^{(a)-(b)} a_{\mu,\mu'},$$

algebraisch ausdrücken durch die Werte $(s_1, z_1), \cdots, (s_p, z_p)$.

Als Funktion von (s_1, z_1) verschwindet der Zähler dieses Ausdrucks in a und in den $p-1$ Punkten $(s_2', z_2'), \cdots, (s_p', z_p')$, für welche

$$\sum_{\nu=2}^{p} u_\mu'^{(\nu)} \equiv -\sum_{\nu=2}^{p} u_\mu^{(\nu)}.$$

Die Punkte $(s_2, z_2), \cdots, (s_p, z_p)$, $(s_2', z_2'), \cdots, (s_p', z_p')$ sind mit einander durch eine Funktion φ verknüpft; daher wird in unserem hyperelliptischen Falle $z_\nu' = z_\nu$, während s_ν' die von s_ν verschiedene Wurzel von $F(s, z_\nu) = 0$ wird. Ebenso verschwindet der Nenner des Quotienten, als Funktion von (s_1, z_1), in b und denselben $p-1$ Punkten (s_ν', z_ν'). Der Quotient wird daher zu

$$A\sqrt{\frac{z_1 - a}{z_1 - b}}$$

und wegen der Symmetrie in den p Punkten (s_μ, z_μ) zu

$$B\sqrt{\frac{\prod_{\nu=1}^{p}(z_\nu - a)}{\prod_{\nu=1}^{p}(z_\nu - b)}},$$

wo B von den z_ν unabhängig wird und nach der früheren Methode zu bestimmen ist. Zu dem Zwecke teile man hier die $2p+2$ Verzweigungspunkte in drei Gruppen von einander verschiedener:

$$a, b; \quad c_1, \cdots, c_p; \quad d_1, \cdots, d_p;$$

indem man für die z_ν einmal die c_ν, dann die d_ν einsetzt, erhält man

$$B\sqrt{\frac{\prod(c_\nu - a)}{\prod(c_\nu - b)}} = \frac{\vartheta\left(\sum\limits_\nu u_1(c_\nu) - u_1(a), \cdots\right)}{\vartheta\left(\sum\limits_\nu u_1(c_\nu) - u_1(b), \cdots\right)} e^{-\sum\limits_{\nu,\mu} \varepsilon_\mu^{(a)-(b)} u_\mu(c_\nu)},$$

$$B\sqrt{\frac{\prod(d_\nu - a)}{\prod(d_\nu - b)}} = \frac{\vartheta\left(\sum\limits_\nu u_1(d_\nu) - u_1(a), \cdots\right)}{\vartheta\left(\sum\limits_\nu u_1(d_\nu) - u_1(b), \cdots\right)} e^{-\sum\limits_{\nu,\mu} \varepsilon_\mu^{(a)-(b)} u_\mu(d_\nu)};$$

und da

$$\sum_\nu u_\mu(c_\nu) + \sum_\nu u_\mu(d_\nu) + u_\mu(a) + u_\mu(b) \equiv 0 \ \text{(mod. Perioden)},$$

so wird durch Multiplikation B algebraisch erhalten in der Form:

$$B = h\sqrt[4]{\frac{\prod_{b'}(b - b')}{\prod_{a'}(a - a')}},$$

wo unter a' alle Verzweigungspunkte außer a selbst, unter b' alle

solche außer b selbst verstanden sind, h ein Exponentialfaktor [der noch die Moduln enthält].

Die hier vorkommenden Größen der Art

$$\frac{\sqrt{\prod_{\nu=1}^{p}(z_\nu - a)}}{\sqrt[4]{\prod_{a'}(a - a')}}$$

sind diejenigen, welche Weierstraß vorzugsweise „Abelsche Funktionen" nennt („Zur Theorie der Abelschen Funktionen", Formel (2), Crelles J., Bd. 47). Es verhalten sich nämlich, bei festen $z_1, \cdots, z_p$, diese Ausdrücke wie die entsprechenden Thetafunktionen

$$\vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{p} u_1^{(\nu)} - u_1(a), \cdots\right),$$

bis auf Exponentialfaktoren; um diese letzteren auszurechnen und zu beseitigen, müßte man die Charakteristiken der Thetafunktionen einführen und hierzu die Integrale alle von dem festen Verzweigungspunkte a_0 an nehmen, für welchen dem Ausdruck $\sqrt{(z - a_0)^{p-1}}$ die Charakteristik (n) zugelegt wurde (S. 40). Der Quotient, von dem wir ausgingen (S. 47), erhielte dann die Form

$$\frac{\vartheta(n+a)\left(\sum\limits_{\nu=1}^{p}[u_1^{(\nu)} - u_1(a_0)], \cdots\right)}{\vartheta(n+b)\left(\sum\limits_{\nu=1}^{p}[u_1^{(\nu)} - u_1(a_0)], \cdots\right)}.$$

Übrigens gibt auch Weierstraß die mit vierten Wurzeln der Einheit zusammenhängenden Faktoren nicht näher an, sondern läßt sie noch unbestimmt, wird sie aber wohl später hinzufügen. Ferner war beim hyperelliptischen Fall, den er allein behandelt, kaum Veranlassung, die vollständigen Ausdrücke für alle $f(\overset{m}{z})\overset{p-1-2m}{\prod(z-a)}$ einzuführen.

Auf den allgemeinen, nicht-hyperelliptischen, Fall lassen sich die Weierstraßschen Formeln nicht verallgemeinern. Dann lassen sich die Thetaquotienten nicht als Produkte von Funktionen der einzelnen Variabeln, sondern nur als Quotienten von Determinanten aus Funktionen von je einer Variabeln darstellen, also durch viel kompliziertere Ausdrücke. Diese letzteren einzelnen Funktionen von einer Variabeln zeichnen sich alsdann schon so aus, daß eine besondere Benennung nötig wird; und wir haben sie früher (also in anderem Sinne als dem Weierstraßschen) „Abelsche Funktionen" genannt.

Wir haben auch noch die Konstanten in den Thetarelationen vollständig zu bestimmen; und gerade hierbei wird die Betrachtung der *hyperelliptischen* Funktionen von wesentlichem Nutzen sein. Insbesondere haben wir im allgemeinen Falle $p=3$ die Relationen zwischen den $\vartheta'_\mu(0,\cdots)$ und den $\vartheta(0,\cdots)$ (S. 34—35) übersichtlich zu entwickeln.

Fortsetzung: 7. Beweis des vorausgesetzten Satzes (S. 39).

(11. März:)

Zur Ausfüllung der bei dem Satze (S. 39) gelassenen Lücke sollen die Charakteristiken mit Bezug auf eine *gegebene* Querschnittzerlegung für den hyperelliptischen Fall wirklich bestimmt werden.

Als bestimmte Zerlegung der die z-Ebene zweifach bedeckenden Fläche T, mit den Verzweigungspunkten

$$a_0, a_1, \cdots, a_{2p+1},$$

nehmen wir folgende: man verbinde die Punkte in der genannten Ordnung, zuletzt auch a_{2p+1} durch das Unendliche mit a_0, durch eine Linie. Auf beiden Seiten der Linie sind die Blätter von T unverzweigt; die Verbindung wechselt bei jedem Verzweigungswerte. Abwechselnd findet also Kreuzung der Blätter statt, so etwa zwischen $a_1-a_2, a_3-a_4, \cdots, a_{2p+1}-a_0$, während zwischen $a_2-a_3, a_4-a_5, \cdots, a_0-a_1$ keine Kreuzung vorhanden ist. Zur Zerlegung von T in eine einfach zusammenhängende Fläche T' seien die Querschnitte

$$a_1', \cdots, a_p', \quad b_1', \quad b_2', \cdots, b_p'$$

bezw. um

$$a_1-a_2, \cdots, a_{2p-1}-a_{2p},$$

$$a_2-a_3-\cdots-a_{2p+1}, \quad a_4-a_5-\cdots-a_{2p+1}, \cdots, a_{2p}-a_{2p+1}$$

gezogen.

Wir benutzen zunächst die Definition der Gruppencharakteristiken durch Integralsummen:

$$u_\mu(a_\nu)-u_\mu(a_0)=\frac{1}{2}\,\varepsilon_\mu^{\prime a_\nu}\pi i+\frac{1}{2}\sum_{\mu'}\varepsilon^{a_\nu}_{\mu,\mu'}a_{\mu,\mu'}.$$

Wendet man diese Definition auf ein beliebiges Integral erster Gattung

$$w=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_pu_p+\text{const.}$$

an, so wird

$$w(a_\nu)-w(a_0)=\frac{1}{2}\sum_\mu\varepsilon_\mu^{\prime\nu}k^{(\mu)}+\frac{1}{2}\sum_\mu\varepsilon_\mu^{\nu}l^{(\mu)},$$

wo die $\varepsilon_\mu^\nu, \varepsilon_\mu^{\prime\nu}$ ganze Zahlen sind und wo die $k^{(\mu)}, l^{(\mu)}$ die Periodizitätsmoduln von w am Querschnitte a'_μ, bezw. b'_μ vorstellen.

Um die Wertänderung eines Integrals w auf einem in T' laufenden Weg zwischen zwei Punkten von T' zu erhalten, kann man auch einen nicht in T' verlaufenden Weg zwischen denselben Punkten wählen, wenn man dabei die sprunghaften Änderungen an den Querschnitten mitnimmt. Insbesondere drückt sich so der Wert des Integrals zwischen zwei Verzweigungspunkten a_0 und a_ν, auf einem in T' verlaufenden Wege, aus als der negativ genommene Wert desselben Integrals auf demselben Wege, aber je im anderen Blatt von T durchlaufen. Auf letzterem Wege liefert jede Überschreitung eines Querschnittes von T' den bezüglichen Periodizitätsmodul als Beitrag zum Integral. Führt man dies für die einzelnen Integrale $u_1, \cdots, u_p$ aus, so ergibt sich für die Wege von a_0 bis $a_{2\nu-1}$, bezw. $a_{2\nu}$:

$$\text{Charakteristik } (a_{2\nu-1})=\left(\binom{1}{0}^{\nu-1}\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\binom{0}{0}^{p-\nu}\right),$$

$$\text{"} \qquad (a_{2\nu})=\left(\binom{1}{0}^{\nu-1}\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\binom{0}{0}^{p-\nu}\right),$$

wo $\binom{1}{0}^{\nu-1}$ die $(\nu-1)$-malige Wiederholung von $\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}$ bedeutet.(28)

Ganz dasselbe erhält man, wenn man die Definition der Gruppencharakteristiken durch Querschnittsfaktoren benutzt.

Ist nun der zu beweisende Satz richtig, so muß eine Charakteristik (n) existieren, derart daß

$$(n)+\sum^{p+m}(a_\nu)$$

gerade ist für $m\equiv 0$ oder 1, ungerade für $m\equiv 2, 3$ (mod. 4).

Wir nehmen an, der Lehrsatz sei bewiesen für Charakteristiken aus bloß p Gliedern, und beweisen ihn dann für solche aus $p+1$ Gliedern. Für $p=1$, wo $(a_1)=\binom{0}{1}$, $(a_2)=\binom{1}{1}$, $(n)=\binom{1}{1}$, gilt aber der Satz. Die p-gliedrigen Charakteristiken setzen wir aus

$$(n);\ (a_1), (a_2), \cdots, (a_{2p}),$$

die $(p+1)$-gliedrigen entsprechend aus

$$(n');\ (a_1'), (a_2'), \cdots, (a'_{2p+2})$$

zusammen. Dabei sollen die $2p+2$ Charakteristiken (a') aus den $2p$ Charakteristiken (a) entstehen, indem man

1) vor alle (a) das Glied $\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}$ setzt,

2) die zwei Charakteristiken $\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\binom{0}{0}^p\right)$, $\left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\binom{0}{0}^p\right)$ hinzunimmt.

Das gesuchte (n') ist dann, wie wir zeigen wollen, von der Form anzunehmen:

$$(n')=\left(\begin{matrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{matrix}, n\right).$$

Ist nämlich zunächst

$$(a') = \left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\,a\right),$$

so wird $\sum\limits^{p}(a') = \left(\begin{matrix}p\\0\end{matrix}\,\sum\limits^{p} a\right)$, und

$$(n') + \sum^{p}(a') = \left(\begin{matrix}\varepsilon+p\\\varepsilon'\end{matrix}\,(n + \sum^{p} a)\right);$$

da aber, nach Annahme,

$$(n) + \sum^{p}(a) \equiv 0 \pmod{2},$$

so wird, wie es sein soll:

$$(n') + \sum^{p}(a') \equiv 1 \pmod{2},$$

sobald $\varepsilon + p$ und ε' beide $\equiv 1$ (mod. 2) genommen werden. Wir nehmen also

$$(n') = \left(\begin{matrix}p+1\\1\end{matrix}\,n\right).$$

Benutzt man nun dieses (n') für alle möglichen Kombinationen der (a'), so gilt der Satz. In der Tat: für die Frage, ob

$$(n') + \sum^{p+1+m}(a') \quad \begin{matrix}\text{gerade,}\\\text{ungerade,}\end{matrix} \quad \text{wenn } m \equiv \begin{matrix}0,1\\2,3\end{matrix} \pmod{4},$$

sind vier Fälle zu betrachten:

1) die (a') der Summe sind alle von der Form $\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\,a\right)$;

2) eines der (a') der Summe hat die Form $\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\,\left(\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)^{p}\right)$;

3) eines der (a') hat die Form $\left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\,\left(\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)^{p}\right)$;

4) zwei der (a') sollen von den letzteren beiden Formen sein.

Im Fall 1) wird

$$(n') + \sum^{p+1+m}(a') = \left(\begin{matrix}p+1+p+1+m\\1\end{matrix}\,(n + \sum^{p+1+m} a)\right) \equiv \left(\begin{matrix}m\\1\end{matrix}\,(n + \sum^{p+1+m} a)\right),$$

und der Satz ist für alle Werte von m erfüllt; in den Fällen 2), 3), 4) wird bezw.

$$(n') + \sum^{p+m}(a') + \left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\,\left(\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)^{p}\right) \equiv \left(\begin{matrix}m+1\\0\end{matrix}\,(n + \sum^{p+m} a)\right),$$

$$(n') + \sum^{p+m}(a') + \left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\,\left(\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)^{p}\right) \equiv \left(\begin{matrix}m\\0\end{matrix}\,(n + \sum^{p+m} a)\right),$$

$$(n') + \sum^{p+m-1}(a') + \left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\,\left(\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)^{p}\right) + \left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\,\left(\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)^{p}\right) \equiv \left(\begin{matrix}m+1\\1\end{matrix}\,(n + \sum^{p+m-1} a)\right),$$

und auch hier ist der Satz für alle m erfüllt. Daher gilt der Satz für $p+1$. Nach dem Gesetz, nach dem (n') aus (n) gebildet wurde, wird zugleich

$$(n) = \left(\begin{matrix}p, & p-1, & \cdots, & 1\\1, & 1, & \cdots, & 1\end{matrix}\right),$$

mit abwechselnden Gliedern $\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$ und $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$, dem Schlußglied $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$; so z. B. für $p = 3$ und 4:

$$(n) = \left(\begin{matrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{matrix}\right), \quad \text{bezw.} \quad \left(\begin{matrix}0 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{matrix}\right).$$

Zur Auffindung dieses bestimmten Ausdrucks (n) brauchte man übrigens gar nicht auf die Integrale zurückzugehen, da leicht zu zeigen ist, daß (n) durch seine früher genannten Eigenschaften schon völlig gegeben ist.(29) Die Folge ist, daß diese Systeme von Charakteristiken nicht nur für die hyperelliptischen, sondern für die *allgemeinen Abelschen Funktionen* verwendbar sind. So haben wir für $p = 3$ solche sechs Gruppencharakteristiken $(a_1), \cdots, (a_6)$, nämlich

$$(p), (q), (r), (d'), (e'), (f')$$

$$[\text{mit} \quad (g') \equiv (p) + (q) + (r) + (d') + (e') + (f')]$$

aufgestellt, daß alle Gruppencharakteristiken sich aus ihnen zusammensetzen lassen; und dann wurde (n) so bestimmt, daß die Charakteristiken

$$(n) + \sum^{1}(a_\nu), \; (n) + \sum^{2}(a_\nu), \; (n) + \sum^{5}(a_\nu), \; (n) + \sum^{6}(a_\nu) \quad \text{ungerade,}$$

$$(n), \quad (n) + \sum^{3}(a_\nu), \quad (n) + \sum^{4}(a_\nu) \quad \text{gerade}$$

waren. Dies war früher durch *Induktion* [aus den Gruppen von Paaren Abelscher Funktionen] gefunden; zugleich waren die den Gruppencharakteristiken zugeordneten halben Perioden auch ihrem Werte nach durch Integralsummen völlig bestimmt (S. 13—15, 27—30).

Fortsetzung: 8. Ergänzung der allgemeinen Entwicklungen bei $p = 3$ durch die für den hyperelliptischen Fall geltenden.

(11. März:)

Wir betrachten den hyperelliptischen Fall $p = 3$:

$$w = \int \frac{\overset{2}{\varphi}(z)\,dz}{\sqrt{\{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)(z-e)(z-f)(z-g)(z-h)\}}};$$

mit den Abelschen Funktionen $\sqrt{(z-a)(z-b)}$, wo für a, b irgend zwei verschiedene von den acht Verzweigungspunkten zu nehmen sind, und $f(\overset{1}{z})$. Den ersteren 28 Funktionen entsprechen die 28 ungeraden Charakteristiken, der letzteren aber eine gerade Charakteristik und eine gerade Thetafunktion, die für die Nullwerte der Argumente verschwindet. Unter den 36 geraden Thetafunktionen werden also in unserm Falle für die Nullwerte der Argumente eine verschwinden, die übrigen von Null verschieden sein.

Umgekehrt: wenn eine der 36 geraden Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente verschwindet, so wird durch diese Thetafunktionen das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale gelöst. Sei nämlich, für (n) gerade,

$$\vartheta(n)(0,0,0)=0;$$

so muß

$$\vartheta(u_1-u_1'-e_1,\cdots),$$

wo

$$e_\mu=\frac{1}{2}\sum\varepsilon_\mu'^n\pi i+\frac{1}{2}\sum_{\mu'}\varepsilon_{\mu'}^n a_{\mu,\mu'},$$

so verschwinden für $(s,z)=(s_1,z_1)$, daß die Kongruenzen

$$(e_1,\cdots)\equiv\left(\sum_{\nu=1}^{2}u_1^{(\nu)},\cdots\right)$$

auf zwei, und damit auf unendlich viele Weisen, erfüllt werden können (s. S. 43). Es existiert also eine Funktion, die für zwei Werte unendlich groß und unendlich klein wird: was eben der hyperelliptische Fall ist. Dieser Fall ist also für $p=3$ notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine gerade Thetafunktion für die Nullwerte der Argumente zu Null wird.

Die Funktion, welche in je zwei Punkten 0^1 und ∞^1 wird, wäre

$$\frac{\vartheta_1'(n)(u_1-u_1',\cdots)}{\vartheta_2'(n)(u_1-u_1',\cdots)}\cdot(^{30})$$

Für den hyperelliptischen Fall $p=3$ zerfallen die 63 „Gruppen" von Paaren Abelscher Funktionen in zwei Kategorien:

a) Produkte von zwei eigentlichen Abelschen Funktionen, von der Form $\sqrt{(z-a)(z-b)\times(z-c)(z-d)}$, wo a,b,c,d alle von einander verschieden sind;

b) $(z-\alpha)\sqrt{(z-a)(z-b)}$, wo a,b von einander verschieden sind.

In beiden Fällen bestimmen sich die sechs Zerlegungen jeder Gruppe leicht. Bei a), indem man einmal das Produkt von vier linearen Faktoren dreimal in Paare teilt, und ebenso das zur selben Gruppencharakteristik gehörige Produkt der vier übrigen linearen Faktoren: $\sqrt{(z-e)(z-f)(z-g)(z-h)}$; bei b), indem man die sechs Paare

$\sqrt{(z-a)(z-c)}\times\sqrt{(z-b)(z-c)}$, $\sqrt{(z-a)(z-d)}\times\sqrt{(z-b)(z-d)}$, $\cdots$, $\sqrt{(z-a)(z-h)}\times\sqrt{(z-b)(z-h)}$ bildet. Zu b) muß man hier noch

$$(z-\alpha)\times\sqrt{(z-a)(z-b)}$$

hinzunehmen, als Produkt einer ungeraden Abelschen Funktion mit einer zur geraden Charakteristik (n) gehörigen, noch zwei willkürliche Konstanten enthaltenden Abelschen Funktion $\beta(z-\alpha)$.

Sei nun

$$\vartheta(n)(0,0,0)=0.$$

Wir fragen: welche Relation existiert zwischen den Charakteristiken zweier ungeraden Abelschen Funktionen, damit sie einen Faktor der Art $\sqrt{z-a}$ gemeinschaftlich haben?

Seien die Charakteristiken derselben (k) und (l). Dann muß in der Gruppe $(k)+(l)$ nach b) die gerade Abelsche Funktion, die zu (n) gehört, vorkommen, so daß der andere Faktor die Charakteristik $(n)+(k)+(l)$ haben wird. Also wird $(n)+(k)+(l)$ eine ungerade Charakteristik. Und umgekehrt: wenn $(n)+(k)+(l)$ ungerade ist, so haben (k) und (l) die verlangte Eigenschaft.

Drei ungerade Charakteristiken seien $(k),(l),(m)$. Die Bedingung, daß sie zu je zwei einen gemeinsamen Faktor haben, ist also, daß

$$(k')=(n)+(l)+(m),\ (l')=(n)+(k)+(m),\ (m')=(n)+(k)+(l),$$

wobei

$$(k')+(l')+(m')\equiv(n)\ (\text{mod. }2)$$

wird, alle ungerade seien.

Entweder haben dann $(k),(l),(m)$

1) alle drei denselben Faktor, die Funktionen sind also von der Form

$$\sqrt{\varphi_k}=\sqrt{(z-d)(z-a)},\quad \sqrt{\varphi_l}=\sqrt{(z-d)(z-b)},$$
$$\sqrt{\varphi_m}=\sqrt{(z-d)(z-c)};$$

oder

2) die gemeinsamen Faktoren sind verschieden, die Funktionen werden von der Form

$$\sqrt{\varphi_k}=\sqrt{(z-b)(z-c)},\quad \sqrt{\varphi_l}=\sqrt{(z-a)(z-c)},$$
$$\sqrt{\varphi_m}=\sqrt{(z-a)(z-b)},$$

und es wird

$$(n)+(k)+(l)\equiv(m)\equiv(m'),\ \text{u. s. w.};$$

d. h. $(k'),(l'),(m')$ werden bezw. mit $(k),(l),(m)$ identisch oder nicht, je nachdem man im Fall 2) oder Fall 1) ist.

Im Fall 1) muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \vartheta_1'(k) & \vartheta_2'(k) & \vartheta_3'(k) \\ \vartheta_1'(l) & \vartheta_2'(l) & \vartheta_3'(l) \\ \vartheta_1'(m) & \vartheta_2'(m) & \vartheta_3'(m) \end{vmatrix} = (k, l, m) = 0$$

sein [da zwischen $\varphi_k, \varphi_l, \varphi_m$ dann eine lineare homogene Beziehung stattfindet]. Daraus folgt:

Die Determinante (k, l, m) *verschwindet, wenn* $\vartheta(k' + l' + m')(0,0,0) = 0$ *ist, wo*

$$(k') + (l') \equiv (k) + (l),\ \ (k') + (m') \equiv (k) + (m),\ \ (l') + (m') \equiv (l) + (m),$$

und $(k'), (l'), (m')$ *bezw. von* $(k), (l), (m)$ *verschieden sind.*

Um daher alle Fälle zu erhalten, in welchen $(k, l, m) = 0$ ist, hat man von den drei Gruppen

$$(k) + (l),\quad (k) + (m),\quad (l) + (m)$$

je alle fünf weiteren Zerlegungen zu bilden. Von irgend einer dieser Zerlegungen, etwa

$$(k) + (l) \equiv (k') + (l')$$

wird *eine* Charakteristik (bezw. Abelsche Funktion) (k') in einer Zerlegung der Gruppe $(k) + (m)$ vorkommen:

$$(k) + (m) \equiv (k') + (m'),$$

die andere Charakteristik (l') in einer Zerlegung der dritten Gruppe $(l) + (m)$:

$$(l) + (m) \equiv (l') + (m'),$$

so daß man auf diese Weise drei Abelsche Funktionen mit Charakteristiken $(k'), (l'), (m')$ erhält, deren Summe $\equiv (n')$ sei.

So ergeben sich, den fünf Zerlegungen einer dieser drei Gruppen $(k) + (l)$, $(k) + (m)$, $(l) + (m)$ *entsprechend, fünf Thetafunktionen, von der Eigenschaft, daß das Verschwinden irgend einer derselben für die Nullwerte der Argumente eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Determinante* (k, l, m) *verschwindet:*

$$\vartheta(n_1),\ \vartheta(n_2),\ \cdots,\ \vartheta(n_5),$$

wo

$$(n_1) \equiv (k_1) + (l_1) + (m_1),\ \cdots,\ (n_5) \equiv (k_5) + (l_5) + (m_5),$$

und $(k_\nu), (l_\nu), (m_\nu)$ *eines der eben gefundenen fünf Systeme* $(k'), (l'), (m')$ *vorstellt.*

Von diesen Bedingungen ist auch keine eine Folge der übrigen; und bildet man

$$\frac{(k, l, m)}{\prod_{\nu=1}^{5} \vartheta(k_\nu + l_\nu + m_\nu)(0, 0, 0)},$$

so erhält man eine Funktion der $a_{\mu,\mu'}$, die für alle Wertsysteme der Thetamoduln endlich bleibt, also eine numerische Größe sein muß. Zum Beweis hat man für den allgemeinen Fall $p = 3$ zu zeigen, daß dieser Ausdruck eine algebraische Funktion der sechs Klassenmoduln $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ ist und für alle Werte derselben endlich bleibt, also auch von diesen, daher auch von den sechs Thetamoduln, unabhängig wird. — Durch Entwicklung nach den Potenzen der $e^{a_{\mu,\mu'}}$ und Vergleichung der ersten Glieder erhält man dann leicht den Zahlenwert, $= \pm 1$. — Um zu zeigen, daß der Quotient von den sechs Klassenmoduln algebraisch abhängt, muß man zeigen, daß derselbe von der Querschnittzerlegung der Fläche T unabhängig ist. Dies geschieht, indem man statt der Thetaargumente lineare Funktionen dieser Größen nimmt, derart, daß das Periodizitätsmodulsystem dieselbe Form behält; also durch lineare Periodentransformation der Theta, die durch eine Reihe von Vertauschungen der Querschnitte erzielt werden kann (vgl. Meissel, Cr. J. 48).

In der Beziehung

$$(k, l, m) = \pm \prod_{\nu=1}^{5} \vartheta(n_\nu)(0, 0, 0)$$

sind alle Relationen zwischen den $\vartheta'(a)$ und $\vartheta(b)$ enthalten; und die Beziehung wäre auch direkt durch Ausmultiplizieren, mit Hilfe der Theorie der ternären quadratischen Formen, beweisbar, was auch den Faktor ± 1 genauer bestimmte.

Folgerung. Wir benutzen im allgemeinen Fall $p = 3$ wieder die Bezeichnungen (S. 14):

$$(p), (q), (r),\quad (d'), (e'), (f'), (g'),$$

$$(p) + (q) + (r) + (d') + (e') + (f') + (g') = 0;$$

$$(n), (n) + (d') = (d),\ (n) + (e') = (e),\ (n) + (f') = (f),\ (n) + (g') = (g).$$

Man kann leicht die linearen homogenen Relationen zwischen den Quadraten von irgend vier Abelschen Funktionen, von den Charakteristiken

$$(n) + (p),\quad (n) + (q),\quad (n) + (r),\quad (n) + (d'),$$

für welche die Summe je dreier gerade ist, bilden. Denn da

$$\varphi_{n+p} = \vartheta_1'(n + p) \cdot x' + \vartheta_2'(n + p) \cdot y' + \vartheta_3'(n + p) \cdot z'$$

u. s. w. (s. S. 33, wo x', y', z' definiert sind), so braucht man aus den vier Ausdrücken für $\varphi_{n+p}, \varphi_{n+q}, \varphi_{n+r}, \varphi_{n+d'}$ nur x', y', z' zu eliminieren

(S. 33) und die entstehenden Determinantenkoeffizienten der Art (k, l, m) durch Produkte von Thetafunktionen für die Nullwerte auszudrücken. Entwickelt man so, indem man

$$(k) = (n) + (p), \quad (l) = (n) + (q), \quad (m) = (n) + (r)$$

setzt, die Zerlegungen der Gruppen

$$(p) + (q), \quad (p) + (r), \quad (q) + (r),$$

so ergibt sich, außer der Zerlegung $(n + p) + (n + q)$ der ersteren, noch:

$$(p) + (q) \equiv (n + p + r) + (n + q + r)$$
$$\equiv (n + p + d') + (n + q + d') \equiv \cdots \equiv (n + p + g') + (n + q + g'),$$

wonach die fünf Systeme von Charakteristiken (k'), (l), (m') bezw. werden:

1. $(n + q + r)$, $(n + p + r)$, $(n + p + q)$, mit Summe $n_1 = (n)$,
2. $(n + p + d')$, $(n + q + d')$, $(n + r + d')$,
   mit Summe $(n_2) = (n + p + q + r + d') \equiv (e + f + g)$,

   . . . .

5. $(n + p + g')$, $(n + q + g')$, $(n + r + g')$,
   mit Summe $(n_5) = (n + p + q + r + g') \equiv (d + e + f)$.

Daher wird

$$(n + p, n + q, n + r)$$
$$= \pm\, \vartheta(n)\ \vartheta(e + f + g)\ \vartheta(d + f + g)\ \vartheta(d + e + g)\ \vartheta(d + e + f),$$

woraus durch Vertauschungen von $p, q, r,\ d', e', f', g'$ sich die übrigen Determinanten bis aufs Vorzeichen ergeben.

Die so gefundene Relation zwischen $\varphi_{n+p}, \varphi_{n+q}, \varphi_{n+r}, \varphi_{n+d'}$ muß identisch werden, wenn die φ_{n+p} u. s. w. wieder durch ihre Ausdrücke in x', y', z' ersetzt werden; aber die hierzu nur nötigen Relationen zwischen den *Verhältnissen* von Determinanten der Form (k, l, m) und den Quotienten von Thetaprodukten für die Nullwerte sind schon durch das *Additionstheorem* leicht zu beweisen, nach dem von Jacobi und Rosenhain für $p = 1$, bezw. 2 gegebenen Verfahren. Man hat nur das Additionstheorem selbst durch einfache Rechnung an den Thetareihen herzustellen. Daraus folgen dann schon die früher (S. 34, 35) gegebenen vollständigen Ausdrücke der Klassenmoduln durch die Thetaprodukte.

Von diesem Gesichtspunkte aus sind folgende Schriften zu nennen: Preisschrift von Rosenhain, in den Mém. Sav. Étrangers XI, 1851, über die ultraelliptischen Funktionen, auch die erweiterten elliptischen Funktionen umfassend; Göpel, Crelles Journal 35.(31)

Anmerkungen.

(1) (Zu Seite 1.) Die Vorlesung begann mit der Überführung einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten und mit dem bekannten einfachen Beweis des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen. Zu letzterem Beweis machte Riemann die für die Geschichte dieses Gesetzes nicht unwichtige Bemerkung (Minnigerodesches Heft, 30. Okt. 1861): „Der Beweis rührt von Gauß her, aus der Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate" [von Riemann wohl im Wintersemester 1846/47 gehört]; „in der Vorlesung hat ihn Gauß an die Spitze gestellt, niemals aber in der Abhandlung gebracht, weil er überall die Maxime hat, das Gerüst abzubrechen, nur das Gebäude stehen zu lassen." Vgl. übrigens Gauß, Disquisitiones arithmeticae, Nr. 271.

(2) (Zu Seite 1.) Mitgeteilt aus dem Rochschen und Minnigerodeschen Heft; auch noch in dem Hattendorffschen Heft enthalten. Das Prinzip ist, für $n = 2$, schon von Herrn Prym in dessen „Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie" (Leipzig, Teubner 1882), Abh. I, Art. 2 — als (s. dessen Vorrede) von Riemann herrührend und von demselben in einer Vorlesung als ein für die Theorie der Thetafunktionen fundamentales bezeichnet — mitgeteilt.

(3) (Zu Seite 4.) Die Mitteilungen über die Vorlesungen vom 13. Nov. 1861— 24. Jan. 1862 sind den Heften von Prym und Minnigerode entnommen.

(4) (Zu Seite 5.) Cf. G. Rochs Note von 1864 „Über die Doppeltangenten an Kurven vierter Ordnung", Crelles Journal Bd. 66 (1866), S. 97—120. Der erste Paragraph „Riemannsche Sätze; gerade und ungerade ϑ; Begriff der Abelschen Funktionen" dieser Note war im wesentlichen Riemanns Vorlesung von 1861/62 entnommen; dabei ist der unvollständige Beweis Rochs auf S. 99 durch Art. 26 der Th. A. F. zu ersetzen.

(5) (Zu Seite 5.) Rochs Wiedergabe (s. die unter (4) zitierte Note, S. 101—103) ist hier nach den Heften von Roch, Prym und Minnigerode etwas umgestellt. Vgl. Pryms „Neue Theorie der ultraelliptischen Funktionen" von 1863 (Denkschriften der Wiener Akad., Bd. XXIV, 1864; zweite Ausgabe, mit nachträglichen Bemerkungen und neuen Tafeln, Berlin, Mayer u. Müller 1885; sowie Dissertation, Berlin 1863), § 15; ferner dessen „Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche" (Denkschr. der Schweizerischen Naturf. Ges. Bd. XXII, Zürich 1866; Separatabzüge bei Mayer u. Müller, Berlin), Art. 11, 12, S. 27—30.

(6) (Zu Seite 6.) Die Bezeichnung der Thetafunktion und der Größen ε, ε' ist in völliger Übereinstimmung mit Riemanns Werken, 2. Aufl., XXXI, p. 488 (1. Aufl., XXX, p. 457) und mit Rochs unter (4) angeführter Abhandlung angenommen, während in Riemanns Vorlesung die Größen ε, ε' untereinander

vertauscht waren; sie stimmt mit den Bezeichnungen von Prym (Anm. 5) bis auf die Vorzeichen.

(7) (Zu Seite 8.) Vgl. zu dieser, aus dem Minnigerodeschen Heft gegebenen Darstellung die teilweise davon abweichende in Riemanns Werken, „Zur Theorie der Abelschen Funktionen für den Fall $p=3$“, 2. Aufl., XXXI, S. 487—489 (1. Aufl., XXX, S. 456—458) und in Rochs Aufsatz (s. Anm. (4)), § 1; s. ferner auch Pryms erste Abhandlung (s. Anm. (5)), §§ 16, 17.

(8) (Zu Seite 11.) Diese Einleitung zu der erst vom 7. März 1862 an ausgeführten Behandlung der Abelschen Funktionen im hyperelliptischen Fall ist hier nach dem Minnigerodeschen Hefte wiedergegeben.

(9) (Zu Seite 13.) Seite 13—23 nach den drei Heften.

(10) (Zu Seite 14.) Die „Bemerkung“ fehlt in den beiden Ausgaben von Riemanns Werken. Aber die darin enthaltene Betrachtung ist sehr beachtenswert. Denn sie zeigt noch deutlicher, als schon die S. 10 dieser Nachträge mitgeteilte doppelte Zuordnung der Abelschen Funktionen zu Thetafunktionen, daß Riemann die 2^6-1 Gruppencharakteristiken scharf von den 2^6 Charakteristiken von Thetafunktionen unterschieden hat, indem er *nur* die letzteren in ungerade und gerade einteilte. Die genauere Charakterisierung der 7 Gruppencharakteristiken, mit der Summe 0: d', e' f', g', p, q, r findet sich bei Riemann — wenigstens, was drei derselben p, q, r betrifft (s. XXXI, S. 498 und 500; 1. Aufl., XXX, S. 467, 468) — dahin gegeben: ihre je 6 Zerlegungen in Paare ungerader Charakteristiken haben die Eigenschaft, daß jede Zerlegung der einen Gruppe mit je einer Zerlegung jeder zweiten Gruppe einen Faktor gemein hat; d. h. in der Bezeichnung von Frobenius: diese Gruppencharakteristiken sind paarweise „azygetisch“. Daß Riemann aber hierbei nicht drei der sieben Gruppencharakteristiken bevorzugen wollte, sondern die sieben als gleichartig betrachtete, möchte schon aus der allgemeinen Regel des Textes hervorgehen, nach der aus Verbindung von (n) mit denselben sich die ungeraden, bezw. geraden, Thetacharakteristiken ergeben. Die azygetische Eigenschaft des Gruppencharakteristikensystems hat schon Herr H. Stahl in seiner Note „Beweis eines Satzes von Riemann über ϑ-Charakteristiken“, Crelles J. Bd. 88, als für beliebige p von Riemann angegeben bezeichnet. Dies trifft also mindestens teilweise zu. Vgl. übrigens Anm. (24).

Nach Akt Nr. 19 (Konv. 19_5 d), Bogen 24 der Göttinger Manuskripte) ist die Unterscheidung auf Juli 1861 anzusetzen.

(11) (Zu Seite 15.) Ebenfalls nach den drei Heften. Vgl. hierzu: H. Weber „Über gewisse in der Theorie der Abelschen Funktionen auftretende Ausnahmefälle“, Math. Ann. XIII; L. Kraus „Note über außergewöhnliche Spezialgruppen auf algebraischen Kurven“, ibid. XVI; M. Noether „Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen“, ibid. XVII.

(12) (Zu Seite 16.) Auf einem Blatt der Göttinger Manuskripte („Varia“ Akt 25. Bogen 34, Pisa 1865) bemerkt Riemann, daß die quadratischen Ausdrücke der φ vermöge der $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ quadratischen Relationen im allgemeinen auf die Form

$$f(\varphi_1, \overset{2}{\varphi_2}, \varphi_3) + \varphi_1 f_1(\varphi_4, \overset{1}{\cdots}, \varphi_p) + \varphi_2 f_2(\varphi_4, \overset{1}{\cdots}, \varphi_p) + \varphi_3 f_3(\varphi_4, \overset{1}{\cdots}, \varphi_p)$$

reduziert werden können.

(13) (Zu Seite 16.) Vgl. etwa die in Anm. (11) zitierten Arbeiten.

(14) (Zu Seite 19.) Nach der Betrachtung des Textes ist die von Herrn Weber,

S. 47 der in Anm. (11) zitierten Note, zu modifizieren. So sind im hyperelliptischen Falle $p=4$ auch dessen Gleichungen (19) und (20) nicht miteinander verträglich.

(15) (Zu Seite 20.) S. den freilich nur für $p=3$ geführten algebraischen Nachweis, Werke 2. Aufl. XXXI (1. Aufl. XXX). Eine allgemein giltige Bestimmung der Anzahl der Zerlegungen einer Gruppencharakteristik in Summen je zweier Thetacharakteristiken findet sich durch den Schluß von p auf $p+1$ auf einem Bogen von Riemanns in Göttingen befindlichen Manuskripten, Akt. Nr. 19 (s. das darin enthaltene Heft „Abelsche Funktionen“, Bogen 11):

„Die Anzahl der geraden Charakteristiken ist $\alpha_p = 2^{p-1}(2^p+1)$, der ungeraden $\beta_p = 2^{p-1}(2^p-1)$. Sei ferner angenommen, daß für p die Anzahl der Zerlegungen irgend einer der $2^{2p}-1$ Gruppencharakteristiken $\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p' \end{pmatrix}$ in Paare sei:

von je 2 geraden Charakteristiken: $\gamma_p = 2^{p-2}(2^{p-1}+1) = \alpha_{p-1}$,

„ „ 2 ungeraden „ $\zeta_p = 2^{p-2}(2^{p-1}-1) = \beta_{p-1}$.

Da die Anzahl aller Zerlegungen von $\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{pmatrix}$ in Paare $= 2^{2p-1}$, so folgt dann, daß die Anzahl der Zerlegungen in Paare von je 1 geraden und 1 ungeraden Charakteristik sei:

$$\delta_p = 2^{2p-1} - \gamma_p - \zeta_p = 2^{2p-2} = \alpha_{p-1} + \beta_{p-1}.$$

Nun hat man aber bei Zufügung einer weiteren Kolonne zu $\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{pmatrix}$ Rekursionsformeln, nämlich für die Paarzerlegung

von $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \varepsilon' & 0 \end{pmatrix}$: $\gamma_{p+1} = 3\gamma_p + \zeta_p$, $\zeta_{p+1} = 3\zeta_p + \gamma_p$, $\delta_{p+1} = 4\delta_p$;

von $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \varepsilon' & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon' & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon' & 1 \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{p+1} = 2\gamma_p + \delta_p, \quad \zeta_{p+1} = 2\zeta_p + \delta_p, \quad \delta_{p+1} = 2\gamma_p + 2\zeta_p + 2\delta_p;$$

von $\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 \\ 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\gamma_{p+1} = \alpha_p, \quad \zeta_{p+1} = \beta_p, \quad \delta_{p+1} = 2^{2p} = \alpha_p + \beta_p.$$

Setzt man hier die Werte von γ_p, ζ_p, δ_p, welche für $p=1$ oder 2 direkt zu bestätigen sind, ein, so erhält man dieselben Formeln, für $p+1$ genommen.“

Für einen direkten Beweis cf. Pryms in Anm. (2) angeführte Arbeit, Abh. III.

(16) (Zu Seite 21.) In der Einleitung zu seiner Habilitationsschrift „De theoremate quodam circa functiones Abelianas“ (Halle, Okt. 1863), welche den vorliegenden Riemannschen Satz (A) behandelt, erwähnt G. Roch, daß Riemann einen abzählenden Beweis gegeben habe, der wegen seiner Abhängigkeit vom Ausdrucke $F(s, z) = 0$ nicht allgemein giltig sei. In der That aber ist dieser Beweis mit leichter Mühe weiter zu führen, indem man nur beachtet, daß die $2p-2$ Punkte, in denen $\sqrt{\xi\eta}$ verschwindet, durch keine Funktion φ verknüpft sein können, wenn $\sqrt{\xi\eta}$ nicht rational werden soll, also den Beweis auf den des Satzes (B) (s. dieselbe Seite) zurückbringt.

(17) (Zu Seite 22.) Riemann hatte durch Versehen gesagt: „bis auf eine additive Konstante bestimmt"; v' ist aber durch die reellen Teile der Periodizitätsmoduln bis auf eine rein imaginäre Konstante bestimmt. Cf. die in Anm. (18) zitierten Arbeiten.

(18) (Zu Seite 22.) Von diesem zweiten, mittels des Dirichletschen Prinzips geführten Beweise des Satzes (A) hat Roch in seiner Anm. (16) genannten Schrift eine Ausführung versucht. Wie Herr Prym („Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen etc.", Crelles J. 70, 1869 und „Beweis zweier Sätze der Funktionentheorie", ibid. 71, 1869) bemerkt, hat Roch dabei übersehen, daß die Funktionen v' auch an den Begrenzungslinien c von T' Periodizitätsmoduln haben müssen, und daß infolgedessen die reellen Teile der Periodizitätsmoduln von v' an den Querschnitten a, b nicht völlig willkürlich sind, daß vielmehr zwischen ihnen eine lineare homogene Relation bestehen muß. An Stelle der Untersuchung in den §§ II und III von Rochs Schrift hat daher die von Prym, insbesondere Art. 4 von dessen Aufsatz in Crelles J. 71, zu treten, um zu beweisen, daß der reelle Teil von v' durch die reellen Teile von $2p-1$ der $2p$ Periodizitätsmoduln in den Beziehungen α), β) völlig bestimmt ist. Die weitere Folgerung, daß jede der Funktionen v' durch $p-1$ von ihnen und eine imaginäre Konstante linear und homogen ausdrückbar ist, ist dann bei Roch § IV richtig (nur daß, da dessen Determinante D immer verschwindet, der erste der beiden Fälle dieses § IV wegfällt); aber das Verständnis dieses Satzes wird eben nur durch die Bemerkung Pryms geklärt. Man sehe auch den unten folgenden Bericht über die Fragmente zur Theorie der allgemeinen Thetafunktionen.

(19) (Zu Seite 23.) Am Schluß der Anm. (16) zitierten Schrift bemerkt Roch, daß Riemann sich auch für $p > 3$ mit den $p-2$ Relationen und den in sie eingehenden Moduln in seinen Vorlesungen beschäftigt habe. Tatsächlich aber hat, nach den hierin zuverlässigen Heften, Riemann nur das vorgetragen, was im Texte, S. 15—23, in großem Drucke mitgeteilt ist. Insbesondere hat er die für $p=4$ existierenden beiden unabhängigen Gleichungen zwischen den Produkten je zweier Abelschen Funktionen nicht diskutiert.

Wohl aber finden sich in den Göttinger Papieren, Akt Nr. 19 (Bogen 9—14, 19—28, 33, 35, 44 desjenigen der fünf Konvolute dieses Aktes, das noch besonders mit „Abelsche Funktionen" überschrieben ist) und Nr. 25 („Varia", Bogen 2, 10, 19, 22—25, 28), eine Reihe zerstreuter Rechnungen über den Fall $p=4$, die aber alle nicht über die ersten Ansätze hinausreichen. Ein Teil derselben geht von drei Relationen der Form aus:

$$\begin{aligned}\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4} + \sqrt{x_5 x_6} + \sqrt{x_7 x_8} &= 0\\ \alpha_1 \sqrt{x_1 x_3} + \alpha_1' \sqrt{x_2 x_4} + \beta_1 \sqrt{x_5 x_7} + \beta_1' \sqrt{x_6 x_8} &= 0\\ \alpha_2 \sqrt{x_1 x_4} + \alpha_2' \sqrt{x_2 x_3} + \beta_2 \sqrt{x_5 x_8} + \beta_2' \sqrt{x_6 x_7} &= 0,\end{aligned}$$

leitet daraus durch Quadrieren und lineare Elimination von $\sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4}$ und $\sqrt{x_5 x_6 x_7 x_8}$ die quadratische Gleichung zwischen den φ her und vereinfacht diese durch verschiedenartige Bestimmungen der Konstanten α, β, wie

$$\alpha_1 = \alpha_1' = \mu + \frac{1}{\mu}, \quad \beta_1 = \beta_1' = \lambda + \frac{1}{\lambda}$$

$$\alpha_2 = \alpha_2' = \mu - \frac{1}{\mu}, \quad \beta_2 = \beta_2' = \lambda - \frac{1}{\lambda},$$

oder

$$\alpha_1 = \mu\alpha, \; \alpha_1' = \frac{\mu}{\alpha}, \quad \beta_1 = \beta, \; \beta_1' = \frac{1}{\beta}$$

$$\alpha_2 = \nu\gamma, \; \alpha_2' = \frac{\nu}{\gamma}, \quad \beta_2 = \delta, \; \beta_2' = \frac{1}{\delta},$$

oder auch

$$\alpha_1 \alpha_1' = \beta_1 \beta_1',$$

bei welch letzterer Annahme sich die quadratische Relation schon aus den beiden ersteren Gleichungen unmittelbar ergibt.

Ein anderer Teil der Rechnungen geht von der Gleichungsform für $p=4$

$$F(\overset{3}{s}, \overset{3}{z}) = 0$$

aus, nimmt verschiedenartige Normalformen für die vier Funktionen φ an, und sucht vier lineare Funktionen derselben $\varphi_1, \cdots, \varphi_4$ so zu bestimmen, daß eine Relation

$$f^2(\overset{2}{s}, \overset{2}{z}) - \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \equiv F(\overset{3}{s}, \overset{3}{z})\, \psi(\overset{1}{s}, \overset{1}{z})$$

besteht, von hier aus aber den Übergang zu jenen Relationen zwischen Wurzelfunktionen zu machen. Als Grundgleichung findet sich auch:

$$\begin{aligned}(s-z)\, s^2 z^2 + sz\,[\alpha(s^2-z^2) + \beta z(s-z) + cz^2] + [\gamma(s^3-z^3) + \delta z(s^2-z^2)\\ + \varepsilon z^2(s-z) - 2cz^3] + [\zeta(s^2-z^2) + \eta z(s-z) + cz^2] + \vartheta(s-z) = 0,\end{aligned}$$

mit 9 Moduln explicite.

Dazu kommen noch einige Rechnungen, um die allenthalben endlichen Integrale für $p=4$ aus der Darstellung durch zwei homogene Gleichungen 2. und 3. Grades zwischen vier Variabeln direkt abzuleiten; sowie für $p=4$ Zerlegungen von Gruppencharakteristiken in Summen von je zwei Charakteristiken.

(20) (Zu Seite 23.) Seite 23—45 nach den Heften von Prym und Minnigerode.

(21) (Zu Seite 27.) Die Einführung von $p+1$ *symmetrisch* eingehenden Grenzen in die Argumente der beiden Thetafunktionen findet sich in F. Pryms Arbeiten (a. a. O.), dann bei H. Stahl: „Über die Behandlung des Jacobischen Umkehrproblems der Abelschen Integrale" (Crelles J. Bd. 89 und Dissertation Berlin 1882); die von $2p-2$ symmetrisch eingehenden Grenzen für $p=3$ bei H. Weber: „Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht 3" (Berlin 1876), für beliebiges p bei M. Noether: „Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abelschen Funktionen" (Math. Ann. Bd. 28), und zwar bei beiden für beliebige Charakteristiken (a), (b), während Riemann in seiner Vorlesung die Formel nur für ungerade Charakteristiken aufgestellt hat. Die Verallgemeinerung auf beliebige Vielfache von $2p-2$ findet sich bei F. Klein: „Zur Theorie der Abelschen Funktionen" (Math. Ann. Bd. 36). Die Jacobische Konstantenbestimmungsmethode ist auch an allen diesen Stellen angewendet.

(22) (Zu Seite 30.) Riemann hat in seiner Vorlesung die Rechnung nur bis Formel (10) incl. vorgetragen und dieselbe dann mit der Bemerkung abgebrochen: „Wir können die Rechnung [für $p=3$] nicht mehr ausführen, weil wir sonst keine Zeit für die hyperelliptischen Funktionen behalten. Man könnte auf diesem Wege die Relationen zwischen allen $\vartheta(0, 0, 0)$ erhalten, wenn man nur erst das ganze System der Quotienten der $\vartheta(0, 0, 0)$ durch die sechs algebraischen Moduln berechnete. Sie ergeben sich übrigens auch auf dem nachher folgenden umgekehrten Wege."

Die weitere Rechnung wurde nach Andeutungen Riemanns in den Göttinger Papieren (in dem obengenannten Akt Nr. 19, Bogen 14, 15, und „Varia" Nr. 25, Bogen 19) ergänzt; sie stimmt im wesentlichen mit der entsprechenden von Weber in dessen Buch, § 24, geführten überein. In Akt 25, Bogen 19, geht Riemann statt von (8) des Textes, von Gleichung (11) der Werke, Nr. XXXI (XXX der 1. Aufl.) aus, ersetzt also x, y, z, t, p, q bezw. durch $x, \xi, y, \eta, z, \zeta$, benutzt die Relationen zwischen diesen in der besonderen Form (17) von XXXI (XXX), und drückt daher $\varDelta$ und den Quotienten $\frac{\vartheta(a+c+d)(0,0,0)}{\vartheta(b+c+d)(0,0,0)}$ durch die Determinanten (α, β, γ) etc. aus den dortigen Moduln aus.

(23) (Zu Seite 31.) Die Ausdrücke für eine durch $p-1$ Punkte bestimmte φ finden sich bei Riemann in dessen Aufsatz „Über das Verschwinden der Thetafunktionen" (Werke XI), Art. 4 enthalten.

(24) (Zu Seite 34.) Hier bieten sich Riemann zwei 7-Systeme von ungeraden Charakteristiken dar:

$$(n+p),\ (n+q),\ (n+r),\ (d),\ (e),\ (f),\ (g),\ \text{mit Summe } (n),$$
$$(n+p+q),\ (n+p+r),\ (n+q+r),\ (d),\ (e),\ (f),\ (g),$$
$$\text{mit Summe } (n+p+q+r),$$

von der Art, daß die Summe je dreier Charakteristiken eines Systems gerade ist, also sogenannte „vollständige" 7-Systeme (vgl. Webers in Anm. (21) zitierte Schrift).

(25) (Zu Seite 34.) Ein indirekter Beweis ist von Riemann später mittels der Theorie der hyperelliptischen Funktionen angedeutet worden. Siehe S. 53—58. Bezüglich der daraus resultierenden Formel für α vgl. Anm. (31).

(26) (Zu Seite 44.) S. die in Anm. (23) zitierte Abhandlung Riemanns von 1865. Vgl. ferner dazu: Pryms Anm. (5) zitierte Abhandlung von 1866, Art. 12, sowie Webers Anm. (11) zitierte Note aus Math. Ann. XIII (1877).

(27) (Zu Seite 45.) Hier bricht das Prymsche Heft ab. Der Schluß ist nach dem Hefte von Minnigerode mitgeteilt.

(28) (Zu Seite 51.) Vgl. die vollständige Ausführung bei Prym in dessen Anm. (5) zitierten Züricher Abhandlung, Art. 3—6, wo nur für den Punkt a_0 der Punkt $z=\infty$ genommen ist.

(29) (Zu Seite 53.) Vgl. Prym am eben zitierten Orte, Art. 13, und die Vervollständigung dieses Art., wie der Art. 3—6, in der unter Anm. (2) angeführten Arbeit, Abh. IV.

(30) (Zu Seite 54.) In der Tat: da hier

$$\vartheta(n)(u_1-u_1', \cdots)$$

identisch verschwindet für jedes (s, z) und jedes (s_1, z_1), so wird

$$\begin{aligned}\vartheta_1'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_1(s,z)+\vartheta_2'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_2(s,z)&\\ +\vartheta_3'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_3(s,z)&=0,\\ \vartheta_1'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_1(s_1,z_1)+\vartheta_2'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_2(s_1,z_1)&\\ +\vartheta_3'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_3(s_1,z_1)&=0,\end{aligned}$$

woraus sich der Thetaquotient als ein φ-Quotient berechnet, dessen Zähler und Nenner für zwei feste Punkte (s_1, z_1), (s_1', z_1) zu Null werden.

(31) (Zu Seite 58.) Ein Ausdruck der im Fall p der Funktionaldeterminante (k, l, m) analogen Determinante als Produkt von $p+2$ geraden Thetafunktionen

für die Nullwerte der Argumente existiert für den hyperelliptischen Fall überhaupt, im allgemeinen Fall nur für $p=3$. Außer Jacobi $(p=1)$ und Rosenhain $(p=2)$, bei welch letzterem die Ableitung der Formel nur angedeutet ist, ist bezüglich der hyperelliptischen Thetareihen Thomae (Crelles J. 71, pag. 218, Formel (14)) anzuführen, welcher die Formel nicht durch direkte Zerlegung, sondern durch Beziehung zu den algebraischen Ausdrücken erhält. Für den hyperelliptischen Fall, und für den allgemeinen Fall $p=3$, hat Frobenius die Relation mittels der partiellen Differentialgleichung für die Thetafunktion direkt abgeleitet (Crelles J. 98). Das Vorzeichen $\pm$ im Ausdruck von (k, l, m) hängt von der Anordnung der Determinante ab.

Die Ableitung der Determinantenverhältnisse aus dem Additionstheorem für $p=3$, und die Berechnung der Klassenmoduln, findet sich in den Schriften von Weber (s. Anm. (21)) und Schottky („Abriß einer Theorie der Abelschen Funktionen von 3 Variabeln", 1880) durchgeführt. Hiernach ergibt sich für ein vollständiges 7-System ungerader Charakteristiken (s. Anm. (24))

$$(a),\ (b),\ (c),\ (d),\ (e),\ (f),\ (g):$$

$$(b, c, d) : -(a, c, d)$$
$$= (-1)^{\sum \varepsilon_\mu^{efg} \varepsilon_\mu'^{a}}\, \vartheta_{aef}\vartheta_{aeg}\vartheta_{afg} : (-1)^{\sum \varepsilon_\mu^{efg} \varepsilon_\mu'^{b}}\, \vartheta_{bef}\vartheta_{beg}\vartheta_{bfg},$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned}&abc\cdots &&\text{statt}\quad (a)+(b)+(c)+\cdots\\ &\vartheta_{abc\cdots} &&\text{statt}\quad \vartheta(a+b+c+\cdots)(0,0,0)\end{aligned}$$

gesetzt ist.

Wendet man dies auf die beiden Riemannschen Systeme (Anm. (24)) an, in welchen (a), (b), (c) gleich

$(n+p)$, $(n+q)$, $(n+r)$, bezw. gleich $(n+q+r)$, $(n+r+p)$, $(n+p+q)$, sind, so folgt für die Größe $\varkappa$ von Seite 34 und den Klassenmodul α von Seite 34—35:

$$\varkappa = \delta\,\frac{\vartheta_{dfg}}{\vartheta_{efg}}, \quad \text{wo} \quad \delta = e^{\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{pqr} \varepsilon_\mu'^{de}},$$

$$\alpha = \frac{1}{\delta}\cdot(-1)^{\sum \varepsilon_\mu^{de} \varepsilon_\mu'^{nqr}} \cdot \frac{\vartheta_{npdf}\vartheta_{npdg}}{\vartheta_{npef}\vartheta_{npeg}}.$$

(Vgl. Webers Schrift, pag. 107 (10), (11).)

Daß der Quotient

$$(n+p,\ n+q,\ n+r) : \vartheta_n \vartheta_{efg}\vartheta_{dfg}\vartheta_{deg}\vartheta_{def}$$

von der Querschnittzerlegung der Fläche T unabhängig ist, ergibt sich auch, indem man das erste der Riemannschen vollständigen 7-Systeme durch die Gesamtheit der vollständigen 7-Systeme ersetzt und dabei die Formel für die Determinantenverhältnisse in dieser Anmerkung benutzt.

Die Blätter des Riemannschen Nachlasses in Akt 19 (Heft 19_5) und 25 („Varia") enthalten überall zerstreut eine Menge hierher gehöriger Rechnungen und Formeln, teils auf hyperelliptische Thetafunktionen für die Nullwerte bei allgemeinem p, teils auf den allgemeinen Fall $p=3$ bezüglich. Dieselben sind, wie es scheint, zum Teil aus den algebraischen Ausdrücken der Thetaquotienten, zum Teil aus der allgemeinen „Riemannschen Thetaformel" (vgl. Anm. (2)), die sich Nr. 19, Konv. 19_5, d), Bogen 3′ und Nr. 25, Bogen 17 findet, abgeleitet. So gibt Nr. 19_5, b), Bogen 32 (nach Rechnungen, die zu den hier S. 56 bis Schluß mitgeteilten Entwicklungen für $p = 3$ gehören) die Formeln des Additionstheorems zwischen den geraden $\vartheta(a)(0, 0, 0)$-Produkten und den linear eingehenden Differentialquotienten der ungeraden ϑ (cf. Webers Schrift, p. 42), durch deren Auflösung der Determinantenquotient der letzteren erhalten wird; die entsprechenden Formeln für den hyperelliptischen Fall und $p \geqq 3$: Nr. 19_5, b), Bogen 50; Nr. 25, Blätter 8, 15 (aus Pisa vom 31. Aug. 1864), 21. Für die p-reihigen Determinanten aus Differentialquotienten $\vartheta_i'(\alpha)$ selbst enthält Nr. 25, Bogen 6 Darstellungen als *Summen von Produkten* von je $p + 2$ geraden $\vartheta(0)$, für $p = 3, 4, \cdots, 7$; so als einfaches Produkt für $p = 3$, als Summe von 2 Produkten für $p = 4$; die Spezialisierung auf ein einfaches Produkt im hyperelliptischen Fall: Bogen 14, Ansätze auf Bogen 30 (auch Bogen 50, ibid.). Endlich kommen für den allgemeinen Fall $p = 3$ auch dreigliedrige Additionsformeln zwischen Produkten von je 4 geraden $\vartheta(0)$ vor (cf. Webers Schrift, pag. 44): Akt Nr. 19, Konv. 19_5, b), Bogen 34, aus der italienischen Zeit 1862—63 stammend; und 6-gliedrige Relationen zwischen geraden $\vartheta^4(0)$ (cf. Webers Schrift, p. 40) in Akt Nr. 25, Bogen 16; auf Bogen 17 auch 10-gliedrige zwischen $\vartheta^4(0)$ für $p = 4$ (cf. Noether, Math. Ann. 16). Die dabei benutzte Charakteristikentheorie ist in früherer Zeit, für $p = 3$, die Hessesche Darstellung durch 8 Indices von der Summe 0, wobei eine gerade Charakteristik ausgezeichnet ist; später die an den hyperelliptischen Funktionen von Riemann selbst entwickelte (cf. Vorlesung). N.

II.

Die Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Verzweigungspunkt.

(Aus einer Vorlesung Wintersemester 1856/57.)

Ist a ein Verzweigungspunkt der Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und geht, während x sich im positiven Sinn um a bewegt, z_1 über in z_3 und z_2 in z_4, was kurz durch $z_1 \to z_3$ und $z_2 \to z_4$ angedeutet werden soll, so ist

$$(1) \qquad \begin{aligned} z_3 &= t z_1 + u z_2 \\ z_4 &= r z_1 + s z_2. \end{aligned}$$

Ist ε irgend eine Konstante, so ist

$$z_1 + \varepsilon z_2 \to z_3 + \varepsilon z_4.$$

Nun ist

$$(2) \qquad z_3 + \varepsilon z_4 = (t + \varepsilon r) z_1 + (u + \varepsilon s) z_2.$$

Nimmt man ein solches ε, daß

$$(3) \qquad \varepsilon(t + \varepsilon r) = u + \varepsilon s$$

wird, so ist

$$(4) \qquad z_3 + \varepsilon z_4 = (t + \varepsilon r)(z_1 + \varepsilon z_2).$$

Es gibt also ein bestimmtes ε so, daß $z_1 + \varepsilon z_2$ in $(z_1 + \varepsilon z_2) \cdot \text{const.}$ übergeht.

Eine solche Funktion ist auch $(x - a)^\alpha$, welche nach einem positiven Umlauf den Faktor $e^{2\pi i \alpha}$ erlangt. Bestimmt man α so, daß $t + \varepsilon r = e^{2\pi i \alpha}$ wird, so nimmt die Funktion $(z_1 + \varepsilon z_2)(x - a)^{-\alpha}$ wieder denselben Wert an, wenn x einen positiven Umlauf um a macht. Daher ist

$$(5) \qquad (z_1 + \varepsilon z_2) = (x - a)^\alpha \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (x - a)^n.$$

Ist ε' die andere Wurzel der Gleichung (3), so ist ebenso

$$z_1 + \varepsilon' z_2 = (x-a)^{\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a'_n (x-a)^n, \tag{6}$$

wo $e^{2\pi i \alpha'} = t + \varepsilon' r$.

Sind ε und ε' nicht einander gleich, so sind die beiden Lösungen $z_1 + \varepsilon z_2 = z^{(\alpha)}$ und $z_1 + \varepsilon' z_2 = z^{(\alpha')}$ voneinander verschieden, also ist jede andere Lösung durch $z^{(\alpha)}$, $z^{(\alpha')}$ linear darstellbar.

Sind aber die Wurzeln der Gleichung (3) einander gleich, so ist

$$-u = r\varepsilon^2, \; -2r\varepsilon = t - s = \frac{2u}{\varepsilon},$$

also

$$z_3 = tz_1 + uz_2 = (t + \varepsilon r) z_1 + \frac{u}{\varepsilon}(z_1 + \varepsilon z_2)$$

und

$$z_3 (x-a)^{-\alpha} e^{-2\pi i \alpha} = z_1 (x-a)^{-\alpha} + (z_1 + \varepsilon z_2) k (x-a)^{-\alpha},$$

wenn $e^{2\pi i \alpha} = t + \varepsilon r$ und $k = \frac{u}{\varepsilon(t + \varepsilon r)}$ gesetzt wird.

Da nun

$$z_1 (x-a)^{-\alpha} \to z_3 (x-a)^{-\alpha} e^{-2\alpha\pi i},$$

so muß

$$z_1 (x-a)^{-\alpha} \to z_1 (x-a)^{-\alpha} + (z_1 + \varepsilon z_2) k (x-a)^{-\alpha}.$$

Da ferner

$$\frac{k}{2\pi i}(x-a)^{-\alpha}(z_1 + \varepsilon z_2)\, l(x-a) \to \frac{k}{2\pi i}(x-a)^{-\alpha}(z_1 + \varepsilon z_2)\, l(x-a) + k(x-a)^{-\alpha}(z_1 + \varepsilon z_2),$$

so muß die Funktion

$$z_1 (x-a)^{-\alpha} - \frac{k}{2\pi i}(x-a)^{-\alpha}(z_1 + \varepsilon z_2)\, l(x-a)$$

bei einem Umlauf von x um a ungeändert bleiben, also sich in der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n (x-a)^n$ darstellen lassen, daher ist

$$z_1 = (x-a)^{\alpha}\, l(x-a) \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (x-a)^n + (x-a)^{\alpha} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n (x-a)^n,$$

wenn

$$z_1 + \varepsilon z_2 = (x-a)^{\alpha} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$

ist.

Anmerkung: Die vorstehenden Ausführungen sind wörtliche Wiedergabe aus einer von E. Schering angefertigten Nachschrift der Riemannschen Vorlesung über Differentialgleichungen im Wintersemester 1856/57 und zwar von Seiten 222, 223 des Heftes. Sie zeigen ebenso wie die in III, A mitgeteilten Formeln, daß Riemann das Auftreten logarithmischer Integrale in der Tat in seinen Publikationen nur aus äußeren Gründen ausgeschlossen hat. Vgl. Werke pag. 69, oben (64 der 1. Aufl.) und pag. 381 (359) ff.
W.

III.

Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe.

(Wintersemester 1858/59.)

A. Über die Definition der P-Funktion durch bestimmte Integrale.

Wir haben das Resultat erhalten, daß Integrale von der Form

$$\int s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds$$

zwischen den Grenzen 0, 1, ∞, x^{-1} genommen auf sehr viele Arten durch hypergeometrische Reihen darstellbar sind, und daher auch einer linearen Differentialgleichung genügen.

Wir wollen nun umgekehrt untersuchen, wie sich ein solches Integral als Funktion von x verhält, und werden direkt zeigen, daß es eine P-Funktion ist.

Betrachten wir nämlich das Integral

$$\int_0^1 s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds,$$

so wird die Funktion unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn s einen der Werte 0, ∞, 1, x^{-1} annimmt, sonst ändert sich die Funktion stetig.

Das Integral ist längs der reellen Achse von 0 bis 1 erstreckt, wir können es aber auch auf jedem andern Weg nehmen, wenn dieser nur keinen der Unstetigkeitspunkte mit der Strecke der reellen Zahlen von Null bis 1 einschließt.

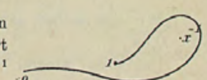

Fig. 1.

Lassen wir daher x^{-1} einen positiven Umlauf um den Punkt 1 machen, so ändert sich das Integral immer stetig, solange x^{-1} nicht durch den Integrationsweg hindurchgeht. Lassen wir also den Integrationsweg immer in geeigneter Weise ausweichen, wenn x^{-1} den Umlauf um 1 macht, so wird auch am Ende des Umlaufes das Integral übergegangen sein in ein anderes, welches von Null ausgehend um x^{-1} herumläuft und dann erst nach 1 zurückkehrt.

Der Faktor $(1-xs)^c$ wird während der Integration von 1 nach x^{-1} einen andern Wert haben, als bei der Integration von x^{-1} nach 1, weil bei Umlaufung von x^{-1} das Argument um $2\pi c$ sich ändert. Ziehen wir daher die beiden Integrale zusammen, so erhalten wir

$$\int_0^1 + (1-e^{2\pi i c})\int_1^{x^{-1}}.$$

Wir sehen also, daß das Integral von Null bis 1 bei einem Umlauf von x^{-1} um den Punkt 1 übergeht in eine lineare Verbindung zweier der 6 Integrale, welche zwischen den Punkten $0, 1, \infty, x^{-1}$ möglich sind. Dasselbe Resultat würden wir bei jedem der 6 andern Integrale und den Verzweigungspunkten $0, \infty, 1$ finden.

Wir werden nun zeigen, daß man die folgenden Gleichungen ansetzen kann:

$$P_\alpha = \text{const.}\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\,ds$$

$$P_{\alpha'} = \text{const.}\int_{x^{-1}}^{\infty} x^\alpha(1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\,ds$$

$$P_\beta = \text{const.}\int_0^{x^{-1}} x^\alpha(1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\,ds$$

$$P_{\beta'} = \text{const.}\int_1^{\infty} x^\alpha(1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\,ds$$

$$P_\gamma = \text{const.}\int_{-\infty}^{0} x^\alpha(1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\,ds$$

$$P_{\gamma'} = \text{const.}\int_1^{x^{-1}} x^\alpha(1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\,ds.$$

Wir untersuchen nämlich, wie sich diese Integrale verhalten für $x = 0, \infty, 1$.

Das erste Integral verhält sich in der Nähe von $x=0$ wie $x^\alpha \cdot \text{const.}$, und um das zweite zu untersuchen braucht man bloß die Substitution $s=(s'x)^{-1}$ zu machen. Die Grenzen gehen dann in 0 und 1 über, und für $x=0$ verhält sich das Integral wie $x^{\alpha'} \cdot \text{const.}$

Das Integral für $P_{\beta'}$ verhält sich im Unendlichen in der Tat wie $x^{-\beta'}$. Das Integral für P_β zeigt aber nach der Substitution $s'=xs$, daß es sich im Unendlichen verhält wie $\text{const.}\, x^{\alpha+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'-1} = x^{-\beta}$.

Das Integral für P_γ zeigt direkt, daß es sich für $x=1$ verhält wie $\text{const.}\,(1-x)^\gamma$ und das Integral für $P_{\gamma'}$ zeigt nach der Substitution $s = 1 - \frac{x-1}{x}s'$, daß es sich für $x=1$ verhält wie $\text{const.}\,(1-x)^{\gamma'}$.

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, daß sich alle die obigen Integrale immer durch zwei unter ihnen linear ausdrücken lassen.

Wir haben die Funktionen $P_\alpha, P_{\alpha'}, P_\beta, P_{\beta'}, P_\gamma, P_{\gamma'}$ erst bis auf konstante Faktoren bestimmt. Wir bestimmen nun diese konstanten Faktoren im ersten und letzten Paar so, daß wir die Basen der Potenzen für positives reelles x zwischen Null und Eins zwischen den Integrationsgrenzen immer reell und positiv haben.

Integrieren wir dann die Funktion

$$(-s)^a(1-s)^b(1-xs)^c\,ds$$

um das gesamte Gebiet der Größen mit positivem imaginärem Bestandteil, so ist das Integral Null und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{0} + \int_0^1 + \int_1^{x^{-1}} + \int_{x^{-1}}^{\infty} = 0.$$

Drücken wir nun die einzelnen Integrale durch die nach der früheren Bedingung bestimmten $P_\alpha, P_{\alpha'}, \cdots$ etc. aus, so bekommen wir:

$$P_\gamma + e^{-a\pi i}P_\alpha + e^{-(a+b)\pi i}P_{\gamma'} + e^{-(a+b+c)\pi i}P_{\alpha'} = 0,$$

und wenn wir ebenso um das Gebiet der s-Werte mit negativem imaginärem Teil integrieren:

$$P_\gamma + e^{+a\pi i}P_\alpha + e^{(a+b)\pi i}P_{\gamma'} + e^{(a+b+c)\pi i}P_{\alpha'} = 0,$$

wo

$$a = -\alpha'-\beta'-\gamma',\ b = -\alpha'-\beta-\gamma,\ c = -\alpha-\beta'-\gamma$$

gesetzt ist. Multipliziert man die erste Gleichung mit $e^{(\sigma-\alpha')\pi i}$, die zweite mit $e^{-(\sigma-\alpha')\pi i}$ und subtrahiert, so kommt

$$P_\gamma \sin(\sigma-\alpha')\pi + P_\alpha \sin(\sigma+\beta'+\gamma')\pi - P_{\gamma'}\sin(\sigma-\alpha)\pi$$
$$- P_{\alpha'}\sin(\sigma+\beta'+\gamma)\pi = 0.$$

Um aus dieser Formel eine Funktion zu eliminieren, braucht man bloß σ so zu wählen, daß der Faktor dieser Funktion verschwindet, so z. B. $\sigma = \alpha'$ für P_γ oder $\sigma = \alpha$ für $P_{\gamma'}$.

Aus diesen Formeln folgt dann, daß sich in der Tat jedes der 6 Integrale durch irgend zwei andere ausdrücken läßt. Denn es lassen sich die Integrale von $-\infty$ bis Null und von 1 bis x^{-1} ausdrücken durch die Integrale von Null bis 1 und von x^{-1} bis ∞, und für die beiden übrigen Integrale hat man

$$\int_0^{x^{-1}} = \int_0^1 + \int_1^{x^{-1}}$$

$$\int_1^{\infty} = \int_1^{x^{-1}} + \int_{x^{-1}}^{\infty}.$$

Es haben also in der Tat diese Integrale alle Eigenschaften, welche die P-Funktion definieren und zwar liefern sie gerade die Funktionen $P_{\alpha}, P_{\alpha'}, P_{\beta}, P_{\beta'}, P_{\gamma}, P_{\gamma'}$.

Denn sie gehen bei Umläufen um die Verzweigungspunkte in lineare Verbindungen derselben Integrale über, lassen sich durch zwei unter ihnen ausdrücken und zeigen das für die Verzweigungspunkte vorgeschriebene Verhalten.

Führt man zur Abkürzung die Bezeichnung ein:

$$P(a, b, c, x) = \int_0^1 s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds,$$

so gibt das obige Verfahren, angewendet auf die Funktion

$$(-s)^a (1-s)^b (1-xs)^c ds,$$

die Relation

$$\sin \pi\sigma \int_{-\infty}^{0} (-s)^a (1-s)^b (1-xs)^c ds + \sin \pi(\sigma + a) \int_0^1 s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds$$

$$+ \sin \pi(\sigma + a + b) \int_1^{x^{-1}} s^a (s-1)^b (1-xs)^c ds$$

$$+ \sin \pi(\sigma + a + b + c) \int_{x^{-1}}^{\infty} s^a (s-1)^b (xs-1)^c ds = 0$$

oder wenn man sämtliche Integrale auf die Grenzen 0, 1 transformiert, was im ersten durch die Substitution $s' = \frac{s}{s-1}$, im dritten durch $s' = \frac{x}{1-x}(s-1)$ und im vierten durch $s' = (xs)^{-1}$ geschieht und $a + b + c + d + 2 = 0$ setzt:

$$\sin \pi\sigma\, P(a, d, c, 1-x) + \sin \pi(\sigma + a)\, P(a, b, c, x)$$

$$+ \sin \pi(\sigma + a + b)\, P\left(b, c, a, \frac{x-1}{x}\right) x^{-b-1} (1-x)^{b+c+1}$$

$$+ \sin \pi(\sigma + a + b + c)\, P(d, c, b, x)\, x^{c+d+1} = 0.$$

Setzt man $\sigma = -a - b$, so erhält man

$$\sin \pi(c+d)\, P(a, d, c, 1-x) = \sin \pi b\, P(a, b, c, x) - \sin \pi c\, P(d, c, b, x)\, x^{c+d+1},$$

und diese Relation gestattet das Integral $P(a, d, c, 1-x)$ durch Potenzreihen nach x darzustellen, was direkt nicht möglich ist. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß nicht etwa $c + d$ gleich einer ganzen Zahl wird.

Doch kann man auch in diesem Fall die Darstellung von $P(a, d, c, 1-x)$ finden durch Differentiation der obigen Gleichung. Denken wir uns b und c konstant und a variabel, so ist d auch von a abhängig und wir erhalten

$$\frac{\partial d}{\partial a} = -1.$$

Nach der Differentiation nach a ist dann $a + b + 1 = -(c + d + 1) = m$ zu setzen. Wir erhalten so:

$$(-1)^m \pi P(a, d, c, 1-x) = \frac{\partial P(d, c, b, x)}{\partial a} \sin \pi b + \frac{\partial P(d, c, b, x)}{\partial d} x^{-m} \sin \pi c$$

$$+ lx \cdot x^{-m} P(d, c, b, x) \sin \pi c$$

und bekommen

$$\frac{\partial P(a, b, c, x)}{\partial a} = \int_0^1 ls \cdot s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds$$

$$\frac{\partial P(d, c, b, x)}{\partial d} = \int_0^1 ls \cdot s^d (1-s)^c (1-xs)^b ds.$$

Diese Integrale lassen sich nach Potenzen von x entwickeln, bequemer geht man aber von den Reihenentwicklungen selbst aus.

Es ist

$$\sin \pi b\, P(a, b, c, x)$$

$$= -\frac{\pi}{\Pi(-1-b)\,\Pi(-1-c)} \sum_0^{\infty} \frac{\Pi(-1-c+n)\,\Pi(a+n)}{\Pi n\, \Pi(a+b+n+1)} x^n$$

und daher

$$\sin \pi(c+d)\, P(a, d, c, 1-x)$$

$$= -\frac{\pi}{\Pi(-1-b)\,\Pi(-1-c)} \left(\sum_0^{\infty} \frac{\Pi(-1-c+n)\,\Pi(a+n)}{\Pi n\, \Pi(a+b+n+1)} x^n \right.$$

$$\left. - \sum_0^{\infty} \frac{\Pi(n-1-b)\,\Pi(n+d)}{\Pi(n)\,\Pi(n+c+d+1)} x^{n+c+d+1} \right).$$

Wird hier $a + b + 1 = -(c + d + 1) = m$ gesetzt, so würden bei positivem m in der zweiten Reihe Π-Funktionen mit negativen ganzen Zahlen als Argument auftreten, solange $n < m$. Diese müssen vorher umgeformt werden, indem man Zähler und Nenner mit $\Pi(-2-n-c-d)$ multipliziert.

Man erhält dann für diese Glieder:

$$\frac{\sin\pi(c+d)}{\pi}\sum_0^{m-1}(-1)^n\frac{\Pi(n-1-b)\,\Pi(n+d)\,\Pi(-2-n-c-d)}{\Pi(n)}x^{n+c+d+1}.$$

Differenziert man nun nach a, so erhält man

$$(-1)^{m-1}P(a,d,c,1-x)$$

$$=\frac{(-1)^m}{\Pi(-1-b)\,\Pi(-1-c)}\sum_0^{m-1}(-1)^n\frac{\Pi(n-1-b)\,\Pi(n+d)\,\Pi(m-n-1)}{\Pi(n)}x^{n-m}$$

$$+\frac{1}{\Pi(-1-b)\,\Pi(-1-c)}\sum_0^{\infty}\frac{\Pi(-1-c+n)\,\Pi(n+a)}{\Pi(n)\,\Pi(n+m)}(\Psi(n+a)-\Psi(n+m))\,x^n$$

$$+\frac{1}{\Pi(-1-b)\,\Pi(-1-c)}\sum_m^{\infty}\frac{\Pi(n-1-b)\,\Pi(n+d)}{\Pi(n)\,\Pi(n-m)}(\Psi(n+d)-\Psi(n-m)+lx)\,x^{n-m}$$

oder nach Reduktion

$$(-1)^{m-1}P(a,d,c,1-x)\,\Pi(a-m)\,\Pi(d+m)$$

$$=\sum_{n=-1}^{n=-m}(-1)^n\frac{\Pi(n+a)\,\Pi(n+m+d)\,\Pi(-n-1)}{\Pi(m+n)}x^n$$

$$+\sum_0^{\infty}\frac{\Pi(n+a)\,\Pi(n+m+d)}{\Pi n\,\Pi(n+m)}x^n(\Psi(n+a)+\Psi(n+m+d)-\Psi(n)-\Psi(n+m)+lx).$$

Anmerkungen. Diese Abhandlung und die folgende ist der v. Bezoldschen Nachschrift einer Vorlesung über die hypergeometrische Reihe entnommen, über welche (s. auch Vorrede) weiter unten ausführlich berichtet wird. Für die hier behandelte Frage siehe Werke pag. 81 (76 der ersten Aufl.) unten.

Die Behandlung des Grenzfalles $c+d+1=-m$ ist in dieser Nachschrift von dem vorhergehenden durch eine Auseinandersetzung über die Normierung der konstanten Faktoren getrennt, welche aber ebenso wie die Entwicklungen über den Grenzfall in den Rechnungen und zum Teil auch im Text lückenhaft ist. Der letztere wurde daher nach einer Vorlesungspräparation mit dem Datum 12./II. 1857 (Heft 19_2 von Akt 19) gegeben, jedoch die Bezeichnung mit der vorhergehenden in Übereinstimmung gebracht. $\Psi(n)$ ist das Gaußsche Zeichen, dessen Werke III, S. 153.

Zur Behandlung des Ausnahmefalles sei bemerkt, daß er im wesentlichen mit den Nummern 44—47 der von Gauß nachgelassenen Abhandlung über die hypergeometrische Reihe Problem und Methode gemeinsam hat. Für die neuere Litteratur der hier behandelten Fragen vgl. man die Dissertation von Schellenberg, Göttingen 1892.

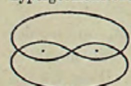

Fig. 2.

Was die Doppelumlaufintegrale betrifft (vgl. die Anmerkung (3) Werke pag. 87 der 2. Aufl.), so ist es vielleicht von Interesse, daß sich in den Riemannschen Papieren im Akt „Varia 28" auf einem einzelnen Blatt ohne jeden Text verschiedene Skizzen zu Integrationswegen, wie sie den kanonischen Querschnitten entsprechen, finden

und ebenda auch zweimal die Doppelumlaufkurve gezeichnet ist und zwar in der vorstehenden Gestalt.

Hierher gehört auch noch ein Blatt aus „Varia 26", welches zwar ohne Text ist, jedoch zeigt, daß Riemann bereits das hypergeometrische Integral als absolute Invariante auffaßte.

Es sind die folgenden Formeln:

$$Pdz=\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{\frac{\gamma+\delta+1}{2}}\left(\frac{a-c}{d-b}\right)^{\frac{\delta+\beta+1}{2}}\left(\frac{a-d}{b-c}\right)^{\frac{\beta+\gamma+1}{2}}$$

$$\cdot[(a-b)(c-d)(a-d)(d-b)(a-c)(b-c)]^{1/6}\cdot(z-a)^\alpha(z-b)^\beta(z-c)^\gamma(z-d)^\delta\,dz$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+2=0$$

$$x=\frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$$

$$\int_a^b Pdz=x^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}+\frac16}(1-x)^{\frac{\alpha+\gamma+1}{2}+\frac16}\int_0^1 y^\alpha(1-y)^\beta(1-xy)^\delta\,dy$$

$$=\frac{\Pi\alpha\,\Pi\beta}{\Pi(\alpha+\beta+1)}x^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}+\frac16}(1-x)^{\frac{\alpha+\gamma+1}{2}+\frac16}F(\alpha+1,-\delta,\alpha+\beta+2,x)$$

$$=\frac{\Pi\alpha\,\Pi\beta}{\Pi(\alpha+\beta+1)}x^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}+\frac16}(1-x)^{\frac{\beta+\delta+1}{2}+\frac16}F(\beta+1,-\gamma,\alpha+\beta+2,x)$$

$$\int_c^d Pdz=x^{\frac{\gamma+\delta+1}{2}+\frac16}(1-x)^{\frac{\alpha+\gamma+1}{2}+\frac16}\int_0^1 y^\gamma(1-y)^\delta(1-xy)^\beta\,dy$$

$$=\frac{\Pi(\gamma)\,\Pi(\delta)}{\Pi(\gamma+\delta+1)}x^{\frac{\gamma+\delta+1}{2}+\frac16}(1-x)^{\frac{\delta+\beta+1}{2}+\frac16}F(\delta+1,-\beta,\gamma+\delta+2,x)$$

$$=\frac{\Pi(\gamma)\,\Pi(\delta)}{\Pi(\gamma+\delta+1)}x^{\frac{\gamma+\delta+1}{2}+\frac16}(1-x)^{\frac{\gamma+\alpha+1}{2}+\frac16}F(\gamma+1,-\beta,\gamma+\delta+2,x).$$

[Durch Integration längs beider Seiten einer geschlossenen Linie durch a, b, c, d erhält man ähnlich wie im Text die Formel]:

$$0=\sin s\pi P_1+\sin(s+\beta)\pi P_2+\sin(s+\beta+\gamma)\pi P_3+\sin(s+\beta+\gamma+\delta)\pi P_3=0$$

[und hieraus für]

$$\alpha+\beta+1=m=-(\gamma+\delta+1):$$

$$\pi\cos(m-1)\pi P_2=-\sin\alpha\pi\frac{\partial P_1}{\partial m}+\sin\delta\pi\frac{\partial P_3}{\partial m}.$$

Die Worte in eckiger Klammer sind hier hinzugefügt, und in der ersten Formel $^1/_6$ statt dem, wie das folgende zeigt, nur aus Versehen geschriebenen $^1/_3$ gesetzt.

W.

B. Über die aus linearen Differentialgleichungen entspringenden Funktionen.

1.

Wir wollen eine Funktion betrachten, welche einer Differentialgleichung genügt

(1) $$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Wenn wir zwei partikuläre Lösungen der Differentialgleichung mit Y_1, Y_2 bezeichnen, so muß sich jede Lösung der Differentialgleichung durch Y_1, Y_2 linear und homogen darstellen lassen.

Durchläuft x einen geschlossenen Weg, auf welchem a_0, a_1, a_2 wieder ihre ursprünglichen Werte annehmen, so werden Y_1, Y_2 übergehen in lineare homogene Funktionen der nämlichen Größen mit konstanten Koeffizienten.

Bezeichnen wir nun den Quotienten von Y_1, Y_2 etwa mit z, so wird dieser auf einem solchen Weg übergeführt in

(2) $$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Betrachten wir umgekehrt x als Funktion von z, so wird die Funktion

$$x = f(z)$$

die Eigenschaft haben, daß

$$f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Wenn die Funktion z mehrere Verzweigungsstellen hat, so wird es mehrere solche rationale Transformationen ersten Grades geben, bei denen $f(z)$ ungeändert bleibt, und da durch wiederholte Anwendung mehrerer solcher Transformationen nacheinander wieder eine rationale Transformation ersten Grades entsteht, welche man aus diesen zusammengesetzt nennen kann, so wird $f(z)$ ungeändert bleiben bei den zu Verzweigungsstellen gehörigen und den daraus zusammengesetzten Transformationen.

Nehmen wir nun an, wir hätten eine Funktion, welche die Eigenschaft hat, ungeändert zu bleiben bei gewissen Substitutionen dieser Art und stellen wir uns die Aufgabe, die Differentialgleichung, mit welcher die Funktion zusammenhängt, daraus abzuleiten.

Wenn z in $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ übergeht, so nimmt $x = f(z)$ wieder denselben Wert an. Wenn wir nach x differenzieren, so geht $\frac{dz}{dx}$ bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges von x über in die Derivierte von $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ nach x, wir haben also

$$\frac{dz'}{dx} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sei. Wir erhalten dann

$$\left(\frac{dz'}{dx}\right)^{-1/2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} (\gamma z + \delta)$$

$$z'\left(\frac{dz'}{dx}\right)^{-1/2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} (\alpha z + \beta).$$

Es gehen also $\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}$ und $z\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}$ über in lineare Ausdrücke derselben Funktionen.

Setzen wir daher

$$Y_1 = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}$$

$$Y_2 = z\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2},$$

so sind Y_1, Y_2 zwei partikuläre Lösungen derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten algebraische Funktionen sind.

Wenn also eine Funktion mit einer solchen Eigenschaft gegeben ist, so kann man umgekehrt wieder zur Differentialgleichung übergehen und man wird die Koeffizienten der Differentialgleichung ableiten können, wenn man die Eigenschaften der Funktion x kennt. Man wird daraus die Eigenschaften von Y_1, Y_2 ableiten können und hieraus die Differentialgleichung. Wir verfahren so, daß wir aus Y_1, Y_2 die Ausdrücke bilden $Y_2' Y_1 - Y_1' Y_2$, $Y_1'' Y_2 - Y_2'' Y_1$, $Y_2'' Y_1' - Y_1'' Y_2'$.

Sind diese Funktionen proportional zu a_0, a_1, a_2, so findet die Gleichung

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

statt.

Wir erhalten

$$Y_2' Y_1 - Y_1' Y_2 = 1, \quad Y_1'' Y_2 - Y_2'' Y_1 = 0,$$

$$Y_2'' Y_1' - Y_1'' Y_2' = -\left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}.$$

Die Differentialgleichung für Y_1, Y_2 lautet also

$$y'' - \left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} y = 0,$$

und die Funktion z genügt der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} = -a_2,$$

wo a_2 eine algebraische Funktion von x ist.(1)

Dies ist also der Weg, den man einzuschlagen hat, um die Differentialgleichung abzuleiten, wenn eine Funktion mit der Eigenschaft gegeben ist, daß sie durch rationale Substitutionen ersten Grades ungeändert bleibt. Es lassen sich aber fast immer unmittelbar aus der Aufgabe noch andere Bedingungen herleiten, wodurch sich diese algebraische Funktion bestimmen läßt.

2.

Wir wollen dies anwenden auf die Funktionen, die sich in hypergeometrische Reihen und die damit zusammenhängenden Funktionen entwickeln lassen. Die Funktion, die wir durch $P\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma'\end{pmatrix}, x\Big)$ bezeichnet haben, wollen wir jetzt als Funktion von x durch y bezeichnen und x betrachten als Funktion des Quotienten zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung, welcher diese Funktion y genügt. Dann können wir $P^{(\alpha)}$ als die Funktion Y_1 und als die andere Funktion $P^{(\alpha')}$ betrachten.

Wir müssen zunächst untersuchen, welche Änderungen Y_1/Y_2 mit x erfährt. Für $P^{(\alpha)}$ erhalten wir eine Reihe, welche mit x^α anfängt und für $P^{(\alpha')}$ eine ähnliche Reihe, welche mit $x^{\alpha'}$ beginnt und nach um 1 steigenden Potenzen von x fortschreitet.

Wenn wir zunächst annehmen, daß α, β, γ; α', β', γ' reell sind und daß die Koeffizienten der Anfangsglieder der Reihen für $P^{(\alpha)}$, $P^{(\alpha')}$ reell sind, dann sind die Koeffizienten aller folgenden Glieder ebenfalls reell, und es sind $P^{(\alpha)}$ und $P^{(\alpha')}$ für ein reelles x zwischen 0 und 1 beide reell und positiv. Daher wird auch $Y_1/Y_2 = z$ reell und positiv sein, während x von 0 nach 1 übergeht. Ist $\alpha > \alpha'$, so wird $z = 0$ für $x = 0$ und für $x = 1$ wird es einen endlichen Wert haben.

Wie verhält sich nun die Funktion für negative Werte von x? Hier wird

$$z = x^{\alpha - \alpha'} Q(x),$$

wo Q der Quotient zweier nach ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihen mit reellen Koeffizienten und für kleine Werte von x positiv ist.

Also wird in der Nähe von $x = 0$

$$z = Q \cdot r^{\alpha - \alpha'} e^{(\alpha - \alpha') i \varphi},$$

wo $x = re^{i\varphi}$ gesetzt ist und φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genommen ist. Geht x in der Nähe der Null von $+r$ nach $-r$ durch Werte mit positivem imaginärem Bestandteil, so wird für $x = -r$

$$z = Q(-r) \cdot r^{\alpha - \alpha'} e^{(\alpha - \alpha') i \pi},$$

also, da für genügend kleines r $Q(-r)$ positiv ist, eine Größe mit dem Argument $(\alpha - \alpha')\pi$.

Es sei zunächst $(\alpha - \alpha') < 1$, dann wird z für negative Werte von x Werte durchlaufen, deren Argument $(\alpha - \alpha')\pi$ ist. Diese Werte liegen daher in der z-Ebene auf einer geraden Linie, welche mit der Achse der reellen z den Winkel $(\alpha - \alpha')\pi$ bildet.

Wir haben noch den Verlauf von z zu untersuchen, wenn x von 1 bis ∞ geht. Wir wissen, daß $P^{(\alpha)}$ und $P^{(\alpha')}$ gleich sind linearen Ausdrücken von $P^{(\gamma)}$, $P^{(\gamma')}$ mit konstanten Koeffizienten, und zwar sind diese Koeffizienten reell. Wenn x größer wird als 1, so ist

$$\frac{P^{(\gamma')}}{P^{(\gamma)}} = (1 - x)^{\gamma' - \gamma} (1 + A_1 (1 - x) + \cdots).$$

Wenn wir für $0 < x < 1$ das Argument von x gleich Null nehmen, so erhalten wir für die Werte von z die Form

$$z = \frac{p + p' e^{(\gamma - \gamma')\pi i}}{q + q' e^{(\gamma - \gamma')\pi i}}$$

und p, p', q, q' bleiben immer reell. Die Werte von z liegen daher auf einem Kreisbogen.

Es fragt sich nur noch, ob z jeden Wert, der innerhalb dieser Figur liegt, einmal und nur einmal annimmt.

Innerhalb dieses Größengebietes ist z eine stetige Funktion von x. Wenn wir umgekehrt x als Funktion von z betrachten, so wird die Derivierte $\frac{dz}{dx}$ immer endlich und stetig bleiben, wenn nicht x eine mehrdeutige Funktion von z ist; und umgekehrt, wenn dieses der Fall wäre, so würde für einen Verzweigungswert dieser Funktion $\frac{dz}{dx} = \infty$ oder $\frac{dz}{dx} = 0$ werden müssen.

Um also zu untersuchen, ob $\frac{dz}{dx}$ immer endlich bleibt, bilden wir

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1'}{Y_2^2}$$

Nun ist

$$Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = C x^{\alpha + \alpha' - 1} (1 - x)^{\gamma + \gamma' - 1},$$

und Y_2 nirgends im Innern unendlich. Also kann $\frac{dz}{dx}$ nicht verschwinden, außer in den Stellen 0, 1, ∞. [Es wird aber auch nicht unendlich] und darum ist x innerhalb des von zwei Geraden und dem Kreisbogen begrenzten Gebietes eine eindeutige Funktion von z.(2)

Bei komplizierteren Differentialgleichungen wird im allgemeinen x nicht eine eindeutige Funktion von z werden.

In der Theorie der ganzen elliptischen Integrale hat man auch den Quotienten $\frac{K'}{K}$ als Variable eingeführt, und ähnlich ist es auch bei diesen Funktionen.

3.

Wir bedürfen jetzt der Abbildung der Kugelfläche auf eine Ebene, so daß die kleinsten Teile einander ähnlich werden.(3) Wir führen auf der Kugel vom Radius 1 Polarkoordinaten ein und verstehen unter Θ den Bogen eines größten Kreises durch einen festen Punkt O, von 0 an gezählt, und unter φ den Winkel dieses größten Kreises mit einem festen größten Kreis in O, so daß $\Theta =$ const. die Gleichung der Parallelkreise und $\varphi =$ const. die Gleichung der Meridiankurven wird.

Die Koordinaten eines Punktes in der Ebene bezeichnen wir mit u, v und diese werden zufolge der Abbildung Funktionen von Θ, φ.

Das Linienelement auf der Kugelfläche wird

$$d\Theta^2 + \sin\Theta^2 d\varphi$$

und in der Ebene

$$du^2 + dv^2.$$

Das Verhältnis

$$\frac{d\Theta^2 + \sin\Theta^2 d\varphi^2}{du^2 + dv^2} = \frac{(d\Theta + i\sin\Theta d\varphi)(d\Theta - i\sin\Theta d\varphi)}{(du + i\,dv)(du - i\,dv)}$$

soll nun unabhängig von dem Verhältnis $d\Theta : d\varphi$ sein. Daher müssen die Faktoren des Zählers einzeln durch die des Nenners teilbar sein, und zwar können wir immer annehmen, daß $du + idv$ den Faktor $d\Theta + i\sin\Theta d\varphi$ teilt. Denn wir können ja die Koordinaten in der Ebene beliebig annehmen. Würden wir die andere Annahme machen, so würde die Ähnlichkeit die entgegengesetzte sein.

Wenn wir $u + iv = z$ setzen, so ist

$$dz = m\,(d\Theta + i\sin\Theta d\varphi),$$

wo m eine Funktion von Θ und φ bedeutet und so zu wählen ist, daß die rechte Seite ein vollständiges Differential ist. Setzen wir $m = (\sin\Theta)^{-1}$, so bekommen wir

$$z = \log\operatorname{tang}\frac{\Theta}{2} + i\varphi.$$

Die allgemeinste Lösung der Aufgabe bekommen wir, wenn wir eine Funktion der complexen Variablen $\log\operatorname{tang}\frac{\Theta}{2} + i\varphi$ für z nehmen.

Wir setzen $z = \operatorname{tang}\frac{\Theta}{2}e^{i\varphi}$.

Diese Funktion nimmt auf der Kugeloberfläche jeden Wert einmal und nur einmal an, wenn Θ von 0 bis π geht und φ von 0 bis 2π. Für den einen Pol wird dann $z = 0$ und für den andern unendlich. Man kann den Punkt der Kugel, welcher einem Punkt der Ebene entspricht, leicht finden, wenn man sich die Kugel die z-Ebene im Nullpunkt berührend denkt, und dann von diesem aus auf der Kugel den Winkel Θ zählt. Man hat nur den andern Pol mit z zu verbinden und den Schnittpunkt von Pz mit der Kugel aufzusuchen. Zwei Punkten, welche auf der Kugel diametral gegenüber liegen, entsprechen die Werte c und $1/c'$, wenn c und c' konjugierte Größen sind. Geht ein Kreis durch die Punkte a und b, so ist auf diesem Kreis das Argument von $\frac{z-a}{z-b}$ konstant.

4.

Wir haben früher den Quotienten zweier Partikularlösungen $P^{(\alpha)} : P^{(\alpha')}$ durch z bezeichnet und haben untersucht, wie sich z ändert, wenn x die Begrenzung des Gebietes der Größen mit positivem imaginärem Bestandteil durchläuft. Wir erhalten so als Begrenzung des Gebietes für z zwei gerade Linien, welche den Winkel $(\alpha - \alpha')\pi$ miteinander bilden in dem $x = 0$ entsprechenden Punkte, und einen Kreisbogen, welcher mit den beiden Geraden resp. die Winkel $(\beta - \beta')\pi$, $(\gamma - \gamma')\pi$ bildet.

Wir setzen diese drei Winkel als positiv und kleiner als π voraus [Ist dann auch noch ihre Summe größer als π,] so kann man die Übertragung dieser ebenen Figur auf die Kugel immer so einrichten, daß den Begrenzungslinien größte Kreise entsprechen.

Dann wird das Gebiet von z auf der Kugel auf ein sphärisches Dreieck abgebildet, dessen Winkel $(\alpha - \alpha')\pi$, $(\beta - \beta')\pi$, $(\gamma - \gamma')\pi$ sind, und die wir mit $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ bezeichnen. Betrachten wir die Verteilung der Werte von x auf diesem sphärischen Dreieck, so wird an der Spitze des Winkels $\lambda\pi$: $x = 0$, an der Spitze von $\mu\pi$: $x = \infty$ und an der Spitze von $\nu\pi$: $x = 1$ werden. Denken wir uns die Funktion x fortgesetzt über eine der Begrenzungslinien, so wird, während x die Werte mit negativem imaginärem Bestandteil durchläuft, z die Werte durchlaufen müssen, welche in einem symmetrisch-kongruenten anstoßenden sphärischen Dreieck liegen. Es würden sich so beständig symmetrisch-kongruente sphärische Dreiecke anschließen. Auf diese Weise lassen sich die Werte, welche die Funktion z von x annimmt, wenn diese Funktion beliebig weit fortgesetzt wird, geometrisch darstellen.

5.

Betrachten wir also x als Funktion von z, $x = f(z)$, so wird diese Funktion außer von z nur noch abhängen von den Exponentendifferenzen λ, μ, ν. Denn die Ausdrücke für z bleiben ungeändert, wenn wir y mit einem Ausdruck von der Form $x^\delta(1-x)^\varepsilon$ multiplizieren. Bezeichnet x_1 eine andere ähnliche Funktion von z mit den Exponentendifferenzen λ_1, μ_1, ν_1, so kann man sich die Frage stellen: *In welchen Fällen findet zwischen x und x_1 eine algebraische Relation statt?*

Wenn wir nun annehmen, daß zwischen x und x_1 eine algebraische Gleichung $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{x_1}) = 0$ besteht, so können wir ein Gebiet für z abgrenzen, so daß in diesem Gebiet die Funktionen x und x_1 jedes der Gleichung $F = 0$ genügende Wertepaar einmal und nur einmal annehmen. Nun entsprechen einem bestimmten Werte von x n Werte von x_1, es wird also jeder Wert von x in diesem Gebiete n-mal vorkommen müssen, also das Größengebiet von x die ganze unendliche Ebene n-mal überdecken. Dann aber besteht das Gebiet von z aus n Paaren symmetrisch-kongruenter, sphärischer Dreiecke, mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. Ebenso wird aber jeder Wert von x_1 m-mal vorkommen müssen und es muß daher dieselbe Figur sich auch aus m Paaren symmetrisch-kongruenter Dreiecke mit den Winkeln $\lambda_1\pi$, $\mu_1\pi$, $\nu_1\pi$ zusammensetzen lassen.

Es muß sich also dann ein und dieselbe sphärische Figur sowohl aus n Paaren symmetrisch-kongruenter Dreiecke mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ zusammensetzen lassen, als auch aus m Paaren solcher Dreiecke mit den Winkeln $\lambda_1\pi$, $\mu_1\pi$, $\nu_1\pi$.

Das ist dieselbe Frage, wie die folgende: Wann läßt sich eine Funktion $z(x)$ durch eine algebraische Substitution in eine ähnliche transformieren? (4)

Wir haben nun schon einige solche algebraische Transformationen kennen gelernt und wollen diese jetzt geometrisch deuten.

Es konnte jede der Funktionen $P(\mu, \nu, \frac{1}{2}, x)$, $P(\nu, 2\mu, \nu, x_1)$, $P(\mu, 2\nu, \mu, x_2)$ durch die andern ausgedrückt werden, wobei

$$x = 4x_1(1-x_1) = \frac{1}{4x_2(1-x_2)}$$

war.

Wir hätten also ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, in welchem ein Winkel $\mu\pi$, der andere $\nu\pi$ ist.

Wenn wir an dieses längs der Basis ein symmetrisch-kongruentes Dreieck anlegen, so können wir das sphärische Viereck $ABCD$ auch zerlegen in zwei symmetrisch-kongruente Dreiecke mit den Winkeln $2\mu\pi, \nu\pi, \nu\pi$ oder $2\nu\pi, \mu\pi, \mu\pi$.

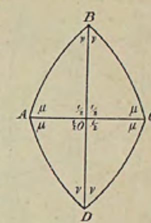

Fig. 3.

Wir können auch leicht die algebraischen Gleichungen zwischen den Funktionen x, x_1, x_2 finden, welche zu den einzelnen Dreiecken gehören, nämlich x zu AOB, x_1 zu ADB und x_2 zu ACB. Nehmen wir an, x erhalte in O den Wert 1, in B den Wert 0 und in C — und daher auch in A — den Wert ∞. Weil nun das Viereck einerseits aus zwei Paaren zu x gehöriger und andrerseits aus einem Paar zu x_1 gehöriger Dreiecke zusammengesetzt ist, so ist x eine rationale Funktion von x_1, welche jeden Wert zweimal annimmt, wenn x_1 alle seine Werte einmal annimmt. Nehmen wir an, x_1 nehme die Werte ∞, 1, 0 an resp. in ADB, so wird x_1 auch in C den Wert ∞ annehmen. Dann wird x nur unendlich, wenn es auch x_1 wird, und ist daher eine ganze rationale Funktion zweiten Grades von x_1, welche für $x_1 = 0, 1$ verschwindet. Daher ist

$$x = cx_1(1-x_1),$$

wo die Konstante c durch die Bemerkung bestimmt werden kann, daß bei einmaliger Umlaufung des Punktes 0 mit der Variablen z der zugehörige Wert von x_1 einmal umkreist wird, dagegen von x der Wert 1 zweimal. Also verschwindet, wenn x_1 für $z = 0$ den Wert ξ_1 annimmt, auch die Derivierte $\frac{dx}{dx_1}$ für $x_1 = \xi_1$. Dies gibt $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $c = 4$. Damit ist die frühere Transformation

$$x = 4x_1(1-x_1)$$

wiedergewonnen. Ebenso könnte man die Gleichung $x = \frac{1}{4x_2(1-x_2)}$ erhalten.

Man würde auch auf geometrischem Wege finden, daß, wenn zwei Exponentendifferenzen ganz willkürlich bleiben sollen, keine andern Transformationen möglich sind, indem sich keine andere Figur auf mehr als eine Art aus Paaren symmetrisch-kongruenter Dreiecke zusammensetzen läßt. Für den Fall, daß nur eine Exponentendifferenz willkürlich ist, haben wir zunächst das gleichseitige Dreieck ABC (Fig. 4) mit den Winkeln $\nu\pi$. Zerlegen wir dieses durch die Winkel-

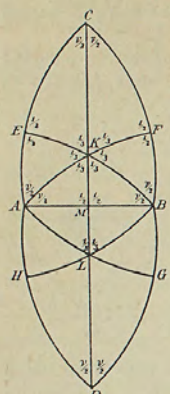

Fig. 4.

halbierenden, so erhalten wir drei Paare symmetrisch-kongruenter Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\nu\pi}{2}$, und daher läßt sich die Funktion $P(\nu, \nu, \nu, x)$ durch eine algebraische Transformation in die Funktion

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{\nu}{2}, x_1\right)$$

überführen oder auch unter Anwendung der vorigen Transformation in die Funktion

$$P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \nu, x_2\right) \text{ und } P\left(\frac{2}{3}, \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}, x_3\right),$$

und auch in

$$P\left(\nu, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x_4\right), \quad P\left(\frac{\nu}{2}, 2\nu, \frac{\nu}{2}, x_5\right).$$

Das rechtwinklig gleichschenklige sphärische Dreieck ABC (Fig. 5) würde zur Funktion

$$P\left(\frac{1}{2}, \nu, \nu, x\right)$$

gehören und die Transformation ergeben in $P(\nu, 2\nu, \nu, x_1)$ und $P\left(\frac{1}{4}, \nu, \frac{1}{2}, x_2\right)$, sowie in $P\left(\frac{1}{4}, 2\nu, \frac{1}{4}, x_3\right)$.

Außer diesen Transformationen, bei denen noch eine Exponentendifferenz willkürlich bleibt, müssen aber noch einige andere stattfinden, bei welchen alle Exponentendifferenzen feste Werte haben. Jeder reguläre Körper muß auf eine solche Transformation führen, denn wir haben ja hier die Zusammensetzung einer und derselben sphärischen Figur aus kongruenten sphärischen Dreiecken. Ist aber diese bekannt, so lassen sich die Transformationen leicht wirklich aufstellen.

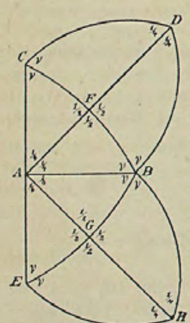

Fig. 5.

Eine besondere Behandlung würde der Fall erfordern, wo eine Exponentendifferenz gleich Null [oder die Summe der drei Winkel $\leq \pi$ ist].(5) In diesem Falle wird man statt der sphärischen Dreiecke ebene Figuren zu betrachten haben.

6.

Wir wurden auf diese letztere Betrachtung geführt durch die Einführung des Quotienten zweier Partikularlösungen unserer Differentialgleichung oder vielmehr durch Betrachtung des Quotienten als Funktion der unabhängigen Variablen.

Wir müssen nun noch andere Funktionen betrachten, die ebenfalls mit den Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen zusammenhängen.

Wir haben bisher nur Differentialgleichungen von der Form behandelt

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_n y = 0,$$

wo die $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ rationale Funktionen von x waren, und die wesentlichste Eigenschaft der Lösungen war, daß, wenn wir n Partikularlösungen haben, jede andere Lösung ein linearer Ausdruck mit konstanten Koeffizienten eben dieser ist. Daraus folgt, daß, wenn die Koeffizienten und x wieder denselben Wert annehmen, diese Funktionen lineare Funktionen der früheren sein müssen. Wir haben aber den Fall noch nicht behandelt, wo die Differentialgleichung linear ist, aber nicht homogen, so daß die rechte Seite nicht Null ist, sondern eine gegebene Funktion von x. Wir wollen annehmen, wir hätten eine solche Differentialgleichung

$$a_0 \frac{d^n \eta}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \eta}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} \eta}{dx^{n-2}} + \cdots + a_n \eta = C(x).$$

Die Auflösung einer solchen Gleichung läßt sich zurückführen auf die Auflösung einer linearen homogenen Gleichung n^{ter} Ordnung, und zwar gibt es hauptsächlich zwei Methoden, die beide von **Lagrange** herrühren.

Wenn man die n partikulären Integrale $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ der Gleichung für $C(x) = 0$ kennt, so wird, wenn man für y den Ausdruck $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots + C_n y_n$ setzt, dieser Ausdruck der ersten Differentialgleichung genügen, wenn die C_i Konstanten sind. Wenn man aber diesen Ausdruck in die zweite Differentialgleichung einführt und die C_i als Funktionen von x betrachtet, so verschwinden die Glieder, welche die C_i selbst enthalten und man hat dann noch einen Ausdruck, der nur die Derivierten der C_i enthält. Diese Differentialgleichung für die Derivierten der C_i läßt sich dann integrieren und η daraus bestimmen. Man bekommt dann die C_i durch bloße Quadraturen, aber es sind mehrere Integrationen nacheinander auszuführen.

Es gibt nun eine andere, ebenfalls von **Lagrange** herrührende Methode, die bequemer ist. Diese besteht darin, daß man die gegebene Differentialgleichung mit einem unbestimmten Faktor v multipliziert und dann zwischen den Grenzen 0 und x beiderseits integriert. Die einzelnen Glieder der linken Seite sind dann durch partielle Integration so umzuformen, daß in jedem Glied η als Faktor unter dem Integralzeichen erscheint.

Man erhält so bei unbestimmter Integration

$$\int \eta \left(a_n v - \frac{d(a_{n-1} v)}{dx} + \frac{d^2(a_{n-2} v)}{dx^2} - \frac{d^3(a_{n-3} v)}{dx^3} + \cdots \right) dx$$

$$+ \eta \left(a_{n-1} v - \frac{d(a_{n-2} v)}{dx} + \cdots \right) + \frac{d\eta}{dx} \left(a_{n-2} v - \frac{d(a_{n-3} v)}{dx} + \cdots \right)$$

$$+ \cdots + a_0 v \frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}} = \int C(x) v dx.$$

Wird dann für v eine Lösung der Differentialgleichung [6]

$$a_n v - \frac{d(a_{n-1} v)}{dx} + \frac{d^2(a_{n-2} v)}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n(a_0 v)}{dx^n} = 0$$

gesetzt, so fällt das Integral links weg. Bezeichnen wir die n unabhängigen partikulären Lösungen derselben mit $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$, so können wir für v setzen $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$ und die Verhältnisse der $c_1, c_2, \cdots, c_n$ so bestimmen, daß, wenn wir die Integration zwischen 0 und x ausführen, an der obern Grenze alle Koeffizienten von η und seinen Derivierten verschwinden bis auf eine. Wir erhalten so η und seine Derivierten ausgedrückt durch einfache Integrale. Was nun die Eigenschaften dieser Funktionen betrifft, so haben wir früher nur bemerkt, daß dieselben sich zurückführen lassen auf die Lösungen einer homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. Wenn η irgend eine Lösung bedeutet, so ist auch $\eta + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n$ eine solche und jede andere ist in dieser Form enthalten, denn der Teil, der von den y herrührt, wird gleich 0 und der von η herrührende $= C(x)$. Daraus folgt nun, daß die Funktion η übergeht in $\eta + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n$, wenn x und die Koeffizienten wieder denselben Wert annehmen.

7.

Gehen wir jetzt zu speziellen Fällen über, so haben wir gefunden, daß das Integral

$$\int s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds$$

zwischen irgend zwei Werten genommen, für welche die Funktion unter dem Integralzeichen gleich Null wird, als Funktion von x einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten in x genügen muß, und zwar folgt dies daraus, daß sich die Werte, in welche

das Integral übergeht, wenn x einen der Punkte $0, 1, \infty$ umläuft, homogen und linear mit konstanten Koeffizienten durch zwei unter ihnen ausdrücken ließen. Die Differentialgleichung können wir leicht verifizieren, indem wir das Integral einsetzen. Wenn wir nun links statt des bestimmten Integrals das unbestimmte einsetzen, so läßt sich die Integration auch unbestimmt ausführen, aber das Resultat verschwindet dann nicht an den Grenzen und die rechte Seite wird dann nicht gleich Null.

Es war

$$P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}$$

$$= \text{const.}\, x^{\alpha} (1-x)^{\gamma} \int s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'} (1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma} (1-xs)^{\alpha-\beta-\gamma} ds,$$

das Integral genommen zwischen irgend zweien der Werte $0, 1, \infty, x^{-1}$. Wir wollen noch α und γ gleich Null setzen und schreiben

$$y = \int s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds.$$

Die linke Seite der Differentialgleichung wird dann

$$(1-x) \frac{d^2 y}{(d \log x)^2} + (a + b + 1 - (a - c + 1) x) \frac{dy}{d \log x} + c(1+a) xy.$$

Substituieren wir für y die Funktion

$$\eta = \int_0^s s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds,$$

so wird der obige Ausdruck eine Funktion von s und x, $F(s, x)$. Wenn nun s einen geschlossenen Weg durchläuft, so wird sich η ändern, aber der neue Wert von η wird sich homogen und linear ausdrücken lassen durch das Integral von 0 bis s und Integrale zwischen den Grenzen $0, 1, \infty, x^{-1}$. Da nun die letzteren Integrale den Differentialausdruck zu Null machen, so kann sich $F(s, x)$ nur um einen konstanten Faktor ändern, wenn s einen geschlossenen Weg durchläuft; außerdem muß es für $s = 0, 1, \infty, x^{-1}$ verschwinden bei geeigneter Beschränkung von a, b, c. Dadurch könnte man den Ausdruck direkt bestimmen. Rechnet man denselben durch Einsetzen des Integrals für η aus, so erhält man

$$F(s, x) = cx \int s^a (1-s)^b (1-xs)^{c-2} ((a+1)(1-xs)(1-s)$$

$$- (b+1) s (1-xs) - (c-1) s (1-s) x) ds = cx s^{a+1} (1-s)^{b+1} (1-xs)^{c-1},$$

wenn für die untere Grenze eine Nullstelle der rechten Seite gewählt wird.

Wir erhalten also für das Integral

$$\eta = \int_0^s s^a (1-s)^b (1-xs)^c \, ds$$

die Differentialgleichung

$$(1-x)\frac{d^2\eta}{(d\log x)^2} + (a+b+1-(a-c+1)x)\frac{d\eta}{d\log x} + c(1+a)x\eta$$
$$= cxs^{a+1}(1-s)^{b+1}(1-xs)^{c-1}.$$

8.

Wir wollen annehmen, wir hätten eine Differentialgleichung von der Form

$$f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + g(x)\frac{dy}{dx} + h(x)y = 0$$

und wollen versuchen, unsere Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral zu lösen.

Dies gelingt sehr häufig durch den Ansatz (7)

$$y = \int (x-s)^\alpha v \, ds,$$

wobei v eine Funktion von s allein ist, und die Grenzen von x unabhängig sein sollen. Wir substituieren den Ausdruck in die Differentialgleichung und bekommen dann unter dem Integralzeichen

$$v\left(\alpha(\alpha-1)f(x)(x-s)^{\alpha-2} + \alpha g(x)(x-s)^{\alpha-1} + h(x)(x-s)^\alpha\right).$$

Wir können nun $f(x), g(x), h(x)$ nach Potenzen von $(x-s)$ entwickeln, und wenn die Funktionen f, g, h ganze rationale Funktionen sind, so werden wir nur eine endliche Anzahl von Gliedern erhalten von der Form

$$C\varphi(s)(x-s)^{\alpha+h}v.$$

Durch partielle Integration können wir dann den Exponenten von $(x-s)$ beliebig in jedem Glied erhöhen und so erreichen, daß wir unter dem Integralzeichen einen Ausdruck bekommen

$$(x-s)^{\alpha+n}P(v),$$

wo $P(v) = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung für v ist, welche zwar noch den Parameter α, aber nicht mehr x enthält.

Die Grenzen müssen dann so gewählt werden, daß der Ausdruck, welcher bei der partiellen Integration heraustritt, an diesen verschwindet.

Wenn wir z. B. setzen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad g(x) = b_0 + b_1 x, \quad h(x) = c_0,$$

so würde die Entwicklung von $f(x)$ nach Potenzen von $(x-s)$ nur drei Glieder, die von $g(x)$ nur zwei erhalten und der höchste Exponent von $(x-s)$ würde α sein.

Wir würden dann für v die Differentialgleichung erhalten

$$\frac{d^2(vf(s))}{ds^2} + \frac{d}{ds}(v(\alpha-1)f'(s) + g(s)) + \left(\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)f''(s) + \alpha g'(s) + c_0\right)v = 0,$$

und die Grenzen s_0, s_1 im Integral wären so zu bestimmen, daß

$$\Big|_{s_0}^{s_1} \alpha(x-s)^{\alpha-1}\cdot vf(s) + (x-s)^\alpha\left(\frac{d(vf(s))}{ds} + v((\alpha-1)f'(s) + g(s))\right)$$

verschwindet.

Ließen wir aber z. B. die obere Grenze veränderlich, so würden wir eine nicht homogene lineare Differentialgleichung erhalten, welcher das Integral

$$\eta = \int_{s_0}^{s} (x-s)^\alpha v \, ds$$

genügt.

Wendet man dieses Verfahren auf die Differentialgleichung für

$$y = \int_0^1 s^a (1-s)^b (1-xs)^c \, ds$$

an, nachdem man für x geschrieben hat x^{-1}, so erhält man wieder die früher abgeleitete Differentialgleichung für

$$\eta = \int_0^s s^a (1-s)^b (1-xs)^c \, ds.$$

Wenden wir nun diese Betrachtung auf die elliptischen Integrale erster Gattung an.

Man bezeichnet so die Integrale

$$\frac{1}{2}\int (1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}x^{-1/2}\,dx.$$

Sind die Grenzen 0 und 1, so heißt das Integral ein ganzes elliptisches Integral:

$$K = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}x^{-1/2}\,dx.$$

Die Differentialgleichung für die ganzen elliptischen Integrale lautet

$$(1-k^2)\frac{d^2K}{(2d\log k)^2} - k^2\frac{dK}{(2d\log k)} - \frac{1}{4}k^2K = 0.$$

Wenn wir nun aus dieser Differentialgleichung die für das Integral

$$u = \int_0^x (1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}x^{-1/2}\,dx$$

herleiten, so ergibt sich

$$(1-k^2)\frac{d^2u}{(2d\log k)^2}-k^2\frac{du}{(2d\log k)}-\frac{1}{4}k^2u=-\frac{1}{2}k^2x^{1/2}(1-x)^{1/2}(1-k^2x)^{-3/2}$$

als Differentialgleichung, welcher das unbestimmte elliptische Integral genügt.

Die allgemeine Lösung ist dann

$$u+CK+C'K'.$$

Sehr viele Eigenschaften der ganzen elliptischen Integrale wurden erst gefunden durch die Untersuchung des unbestimmten Integrals, und in der That ist dieses eine sehr einfache Funktion des Parameters x. Ebenso verhält es sich mit dem allgemeineren Integral

$$\eta=\int_0^s s^a(1-s)^b(1-xs)^c ds.$$

Es ist eine viel einfachere Funktion von s wie von x und die bestimmten Integrale zwischen den Grenzen 0 und 1 oder 1 und x^{-1} treten dann bei der Untersuchung des η als Funktion von s auf. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist dann

$$\eta+C\int_0^1+C'\int_1^{1/x}.$$

Auf die Differentialgleichungen, welche sich nach der auseinandergesetzten Methode durch bestimmte Integrale lösen lassen, kann man dieselben Bemerkungen anwenden. Aber auch bei solchen, welche sich nicht durch bestimmte Integrale lösen lassen, kann man ähnlich verfahren.

Sei die Differentialgleichung

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_ny=0$$

und setzt man in die linke Seite für y eine Funktion von x, welche einen Parameter enthält, so wird die rechte Seite eine Funktion von x und dem Parameter, welche wir mit X bezeichnen. Betrachten wir dann die Differentialgleichung

$$a_0\frac{d^n\eta}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}\eta}{dx^{n-2}}+\cdots+a_n\eta=X,$$

so wird bei passender Wahl von X und dem Parameter sehr häufig η eine viel einfachere Funktion vom Parameter sein als von x. Diese Transcendenten spielen eine sehr wichtige Rolle für die Theorie dieser Differentialgleichungen.

9.

Wir wollen noch die ganzen elliptischen Integrale etwas ausführlicher betrachten und untersuchen, wie sich K und K' ändern, wenn k^2 nach einem Umlauf um den Punkt 1 wieder denselben Wert annimmt. K würde dann übergehen in ein Integral von 0 ausgehend positiv um k^{-2} herum und wieder nach 1 zurück, und wenn wir den letzten Teil dieses Integrationsweges auf das Stück von 1 bis k^{-2} zusammenziehen, so erhalten wir für den neuen Wert von K

$$\int_0^1\frac{1}{2}x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}dx$$

$$-2\int_1^{k^{-2}}\frac{1}{2}x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}dx=K-2iK'.$$

Das Integral für K' wird dabei gar nicht geändert. Bei einem positiven Umlauf von k^{-2} um den Nullpunkt geht K über in $3K-2iK'$ und iK' in $2K-iK'$. Ein positiver Umlauf um den Punkt ∞, oder was dasselbe ist ein negativer um die Punkte 0, 1, würde K unverändert lassen und iK' überführen in $iK'+2K$.

Die Formeln, welche die Abhängigkeit der ganzen elliptischen Integrale vom Modul k^2 geben, sind von Jacobi in den *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* entwickelt worden. Er nahm als Variable $q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, aber in der Differentialgleichung führte er bereits den Quotienten K'/K, also den Quotienten zweier Partikularlösungen, als Variable ein. Wenn wir nun K'/K als Variable einführen und k^2 als Funktion derselben betrachten wollen,(8) so müssen wir fragen: Wie verhält sich K'/K, wenn k^2 die Werte mit positivem imaginärem Teil durchläuft?

Wenn k^2 von 0 bis 1 geht, so bleibt K'/K reell, und zwar wird es ∞ für k^2 gleich 0 und 0 für $k'^2=1-k^2=0$, also $k^2=1$.

Nun läßt sich K in der Nähe von $k^2=0$ nach ganzen positiven Potenzen dieser Größe entwickeln und K' darstellen in der Form

$$-\frac{1}{\pi}\log k^2-\frac{2}{\pi}(a_0+a_1k^2+\cdots).$$

Daraus erkennt man, daß wenn k^2 durch Werte mit positivem imaginärem Teil übergeführt wird in $-k^2$ und dann nach $-\infty$ geht, $\frac{K'}{K}$ Werte annimmt, deren imaginärer Bestandteil beständig gleich $-i$ ist, also die Strecke $0,-\infty$ auf eine zur reellen Achse parallele Gerade durch den Punkt $-i$ abgebildet wird.

Ferner gehen K und K' ineinander über, wenn k^2 und $1-k^2$ miteinander vertauscht werden. Damit folgt dann aus der angegebenen Reihenentwicklung, daß der imaginäre Teil von $\frac{K}{K'}$ konstant, und zwar $+i$ wird, wenn k^2 von 1 bis ∞ geht, die Werte von K'/K also auf einem Halbkreis vom Radius $1/_2$ liegen, dessen Mittelpunkt im Punkte $-\frac{1}{2}i$ gelegen ist, und der daher die beiden geraden Linien, nämlich die reelle Achse und die durch den Punkt $-i$ zu ihr gezogene Parallele, berührt. Diese Figur würde uns die Werte veranschaulichen, welche K'/K annimmt, wenn k^2 die Werte mit positivem imaginärem Bestandteil annimmt. Fügen wir dazu das Gebiet der Werte von K'/K, welche den Werten mit negativen imaginären Bestandteilen entsprechen und welches längs der Linie $k^2=0$ bis $k^2=1$ mit dem ersten zusammenhängt, so gibt uns das Innere dieser Figur die Werte, welche $\frac{K'}{K}$ annimmt, wenn k^2 die ganze Ebene durchläuft, ohne jedoch eine der Strecken $0, -\infty$ oder $1, \infty$ zu überschreiten.

Wir können nun auch untersuchen, welche Werte $\frac{K'}{K}$ annimmt, wenn k^2 eine dieser Strecken überschreitet und also z. B. einen positiven Umlauf um den Punkt 1 macht. Dann geht $\frac{K'}{K}$ über in $\frac{K'}{K-2iK'}$, und wir haben nur nachzusehen, welche Größen $\frac{K'}{K-2iK'}$ durchläuft, wenn $\frac{K'}{K}$ die erste Figur durchläuft. Wir würden dann finden, daß dieses Größengebiet ebenfalls von einem Halbkreis, welcher über der Strecke $0, i$ steht und drei kleineren Halbkreisen, von denen einer über $\frac{1}{2}i, i$ und die beiden andern über $\frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i$ und $\frac{1}{3}i, 0$ stehen, begrenzt wird.

Dem Werte $k^2=0$ würde jetzt der Wert $\frac{1}{2}i$ entsprechen, dem Werte $k^2=1$ der Wert $\frac{1}{3}i$. Wir würden überhaupt k bestimmen können, wenn $\frac{K'}{K}$ gleich wird $\sqrt{-1}$ multipliziert mit rationalen Zahlen, bloß dadurch, daß wir untersuchen, wie sich die Funktion $\frac{K'}{K}$ ändert, wenn k^2 immer wieder denselben Wert, aber auf verschiedenen Wegen, annimmt.

Wenn wir auf diese Weise die Funktion $\frac{K'}{K}$ verfolgen, so würden wir auch finden, daß, wie weit wir auch die Funktion fortsetzen mögen, $\frac{K'}{K}$ doch jeden Wert nur einmal annimmt, wenn k^2 beliebig oft sich um die Punkte $0, 1, \infty$ herum bewegt. Die Funktion nimmt also jeden komplexen Wert [mit positivem reellem Teil] nur einmal an.

Haben wir nun eine Funktion Y, die nur unstetig und vieldeutig wird für $0, 1, \infty$, so können wir in diese Funktion für x setzen $\varphi(z)$, wo $k^2 = \varphi\left(\frac{K'}{K}\right)$ ist. Dann wird Y eine Funktion von z, die für

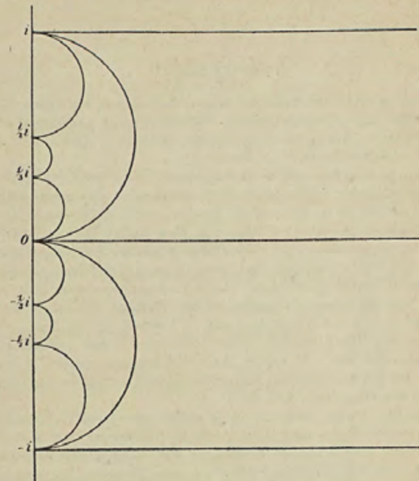

Fig. 6.

jeden Wert von z nur einen bestimmten Wert annimmt. Es würde dann z, wenn x sich z. B. um Null herumbewegt, aus einem Gebiet in ein anderes übergehen. Wir erhalten also Y und beliebige eindeutige Funktionen von Y als eindeutige Funktionen von z, wenn wir für x setzen $\varphi(z)$, wo φ die Funktion ist, welche k^2 [als Funktion von $\frac{K'}{K}$ liefert]. (9)

Anmerkungen.

Die hier entwickelten Gedanken Riemanns sind erst viel später und unabhängig von ihm zur Geltung gekommen. Für die hypergeometrische Reihe kommt hierbei zunächst die Arbeit von H. A. Schwarz, Crelles J. 75 (Ges. Abh. II, S. 211 ff., vgl. auch S. 353—355 u. 363 ff.) in Betracht.

Was die Entwicklung und Bedeutung der Lehre von den Kreisbogendreiecken, den Dreiecksfunktionen, elliptischen Modulfunktionen und allgemeinen automorphen Funktionen betrifft, so sei hier auf die autographierten Vorlesungen von F. Klein über die hypergeometrische Funktion und über lineare Differentialgleichungen, sowie auf dessen gemeinsam mit Fricke herausgegebenen Vorlesungen über Modulfunktionen und über automorphe Funktionen, ferner auf das Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen von Schlesinger verwiesen. Die Redaktion des Textes schließt so eng als möglich an den Wortlaut des Heftes an.

(1) (Zu Seite 78.) Vgl. Schwarz, Ges. Abh. II, S. 353 ff.

(2) (Zu Seite 80.) Die Richtigkeit dieser Behauptung hängt wesentlich von den Voraussetzungen über $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ ab. Vgl. Schwarz, Ges. Abh. II, S. 221—233. Weitere Untersuchungen über allgemeine Kreisbogendreiecke bei Klein, Math. Ann. 37; Schilling, Math. Ann. 39, 44, 46.

(3) (Zu Seite 80.) Dieser Abschnitt wurde aufgenommen, weil C. Neumann in der Vorrede seiner Vorlesungen über Abelsche Funktionen und auch Klein in seiner Schrift über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale auf eine derartige Mitteilung aus Riemanns Vorlesungen Bezug nehmen.

(4) (Zu Seite 82.) Man sehe hierzu E. Papperitz, Math. Ann. 27. Dort auch weitere Litteraturangaben.

(5) (Zu Seite 84.) Die in eckige Klammern eingeschlossenen Worte sind Zusatz des Herausgebers.

(6) (Zu Seite 86.) Vgl. Schlesinger, Handbuch I, Abschnitt 2, Kap. 3, 4.

(7) (Zu Seite 88.) Vgl. Schlesinger, Handbuch II, Abschnitt 12.

(8) (Zu Seite 91.) Über die weitverzweigte Litteratur der elliptischen Modulfunktionen sehe man Klein-Fricke, Modulfunktionen; Schlesinger, Handbuch II, Abschnitt 13.

(9) (Zu Seite 93.) Zu diesem Theorem s. F. Klein, Math. Ann. 14; E. Papperitz, Math. Ann. 34. Die Litteratur über weitergehende Verwertung und Verallgemeinerung dieses Satzes bei W. Osgood, Encyklop. d. math. Wiss. II B 2, Nr. 27—29.

W.

IV.

Mathematische Noten

(ausgezogen aus dem Nachlaß).

A. Über eine Verallgemeinerung der sechs Gleichungen (19) der Abhandlung Ges. Werke 2. Aufl. XXXI (XXX der 1. Aufl.).

(Aus Akt Nr. 19, Konv. 19_5, d) und Konv. 19_5, b), Bogen 4—6; Akt Nr. 25, Bogen 1, 24.)

Indem sich Riemann eine Abelsche Funktion für $p = 3$ in der Form

$$\sqrt{\alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x''}, \quad \text{wo} \quad \alpha\alpha'\alpha'' = 1,$$

geschrieben denkt, nimmt er die 6 Verhältnisse

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta, \quad \alpha' : \beta' : \gamma' : \delta'$$

aus den Koeffizienten von 4 Abelschen Funktionen

$$\sqrt{\alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x''}, \quad \sqrt{\beta x + \beta' x' + \beta'' x''}, \quad \sqrt{\gamma x + \gamma' x' + \gamma'' x''},$$
$$\sqrt{\delta x + \delta' x' + \delta'' x''}$$

als Klassenmoduln, und stellt bezüglich der 6 Paare von Abelschen Funktionen, welche in einer „Gruppe" enthalten sind, die Aufgabe:

„Wenn die Größen $a, b, c, d;\ a', b', c', d';\ a'', b'', c'', d''$ beliebig gegeben sind, die Lösungen der 6 Gleichungen

$$(1) \quad \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0, \quad \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \frac{d}{\delta} = 0;$$

$$(2) \quad \alpha' a' + \beta' b' + \gamma' c' + \delta' d' = 0, \quad \frac{a'}{\alpha'} + \frac{b'}{\beta'} + \frac{c'}{\gamma'} + \frac{d'}{\delta'} = 0;$$

$$(3) \quad \alpha\alpha' a'' + \beta\beta' b'' + \gamma\gamma' c'' + \delta\delta' d'' = 0, \quad \frac{a''}{\alpha\alpha'} + \frac{b''}{\beta\beta'} + \frac{c''}{\gamma\gamma'} + \frac{d''}{\delta\delta'} = 0$$

zu finden, d. h. die ihnen genügenden Wertsysteme der 6 Größen

$$\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}; \quad \frac{\beta'}{\alpha'}, \frac{\gamma'}{\alpha'}, \frac{\delta'}{\alpha'}$$

zu bestimmen.

Die Aufgabe hat 6 Lösungssysteme. Um sie zu finden, sei die Bezeichnung eingeführt:

$$(\beta a' b'' - \alpha a'' b')\left(\frac{a' b''}{\beta} - \frac{a'' b'}{\alpha}\right) \equiv a'^2 b''^2 + a''^2 b'^2 - a' a'' b' b'' \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$= (ab) = (ba), \quad \text{etc.};$$

so ergibt die Elimination von $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ aus (2), (3):

$$\begin{aligned}
&(ab)(cd)[(ab)+(cd)-(ad)-(bc)-(ac)-(bd)]\\
&+(ac)(bd)[(ac)+(bd)-(ad)-(bc)-(ab)-(cd)]\\
&+(ad)(bc)[(ad)+(bc)-(ac)-(bd)-(ab)-(cd)]\\
&+(ab)(ac)(ad)+(ba)(bc)(bd)+(ca)(cb)(cd)+(da)(db)(dc)=0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (1) folgt

$$a^2 + d^2 + ad\left(\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\delta}{\alpha}\right) \equiv b^2 + c^2 + bc\left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) = r,$$

$$a^2 + c^2 + ac\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \equiv b^2 + d^2 + bd\left(\frac{\beta}{\delta} + \frac{\delta}{\beta}\right) = s,$$

$$a^2 + b^2 + ab\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) \equiv c^2 + d^2 + cd\left(\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\delta}{\gamma}\right) = t.$$

Man führe statt $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ die Unbekannten r, s, t ein, so folgt aus (1)

$$r + s + t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2; \tag{5}$$

und aus der identischen Relation

$$l^2 + m^2 + n^2 - lmn - 4 = 0$$

zwischen

$$l = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}, \quad m = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}, \quad n = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$$

folgt mit Hilfe von (5)

$$\begin{aligned}
&rst - s(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) - t(a^2 - c^2)(b^2 - d^2) - a^2 d^2 (a^2 + d^2)\\
&\quad - b^2 c^2 (b^2 + c^2) + b^2 c^2 d^2 + a^2 c^2 d^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 b^2 c^2 = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Da (4), entwickelt, in den Gliedern 3. Dimension nur $r \cdot s \cdot t$ enthält, so erhält man aus (4) mit Hilfe von (6) eine Gleichung 2. Grades in r, s, t; dieser Gleichung, und (5), (6) genügen also 6 Wertsysteme von r, s, t; und jedem derselben entsprechen 2 zueinander reziproke Wertsysteme der Größen $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}; \frac{\beta'}{\alpha'}, \frac{\gamma'}{\alpha'}, \frac{\delta'}{\alpha'}$."

Um (4) zu erhalten, sei gesetzt:

$$\beta a' b'' - \alpha a'' b' = (AB) = -(BA), \quad \frac{a' b''}{\beta} - \frac{a'' b'}{\alpha} = (A_1 B_1) = -(B_1 A_1),$$

wo

$$(AB)(A_1 B_1) = (ab),$$

so wird aus (2), (3):

$$\beta'(AB) + \gamma'(AC) + \delta'(AD) = 0, \quad \frac{(A_1 B_1)}{\beta'} + \frac{(A_1 C_1)}{\gamma'} + \frac{(A_1 D_1)}{\delta'} = 0,$$

also

$$(ad) - (ab) - (ac) = \frac{\beta'}{\gamma'}(AB)(A_1 C_1) + \frac{\gamma'}{\beta'}(AC)(A_1 B_1); \quad \text{etc.}$$

Setzt man

$$(ad) - (ab) - (ac) = l', \ (bd) - (ba) - (bc) = m', \ (cd) - (ca) - (cb) = n',$$
$$(AB)(A_1 C_1) = \lambda, \ (AC)(A_1 B_1) = \lambda'; \ (BC)(B_1 A_1) = \mu, \ (BA)(B_1 C_1) = \mu';$$
$$(CA)(C_1 B_1) = \nu, \ (CB)(C_1 A_1) = \nu',$$

also

$$\lambda' \mu' \nu' = \lambda \mu \nu = -(ab)(ac)(bc),$$

und betrachtet die 3 Gleichungen

$$l' = \lambda \frac{\beta'}{\gamma'} + \lambda' \frac{\gamma'}{\beta'}, \quad m' = \mu \frac{\gamma'}{\alpha'} + \mu' \frac{\alpha'}{\gamma'}, \quad n' = \nu \frac{\alpha'}{\beta'} + \nu' \frac{\beta'}{\alpha'},$$

so hat man die identische Relation

$$l' m' n' - \lambda \mu \nu \left(\frac{l'^2}{\lambda \lambda'} + \frac{m'^2}{\mu \mu'} + \frac{n'^2}{\nu \nu'} - 4\right) = 0,$$

daher

$$\begin{aligned}
&[(ad)-(ab)-(ac)][(bd)-(ba)-(bc)][(cd)-(ca)-(cb)] - 4(ab)(ac)(bc)\\
&\quad + (bc)[(ad)-(ab)-(ac)]^2 + (ca)[(bd)-(ba)-(bc)]^2\\
&\quad + (ab)[(cd)-(ca)-(cb)] = 0,
\end{aligned}$$

was mit Gleichung (4) übereinstimmt. N.

B. Bedingungen für die Klassenmoduln von $p = 3$ zur Reduktion auf den Fall $p = 2$.

(Aus Akt Nr. 19, Konv. 19_5, b), Bogen 30; Akt Nr. 25, Blatt 18.)

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für sämtliche 6 Paare von Abelschen Funktionen *einer* Gruppe die beiden Glieder einander gleich werden (und folglich sich die 6-fach periodischen Thetareihen auf 4-fach periodische reduzieren lassen), ist die, daß eine lineäre Gleichung zwischen drei Gliedern verschiedener Paare einer Gruppe stattfindet" [d. h. daß sich für die Kurve 4. Ordnung drei Doppeltangenten mit ungeraden Charakteristiken, deren Summe gerade ist, in einem Punkte treffen].

[Je nach der Gruppe hat man für die Moduln folgende Möglichkeiten:]

„(1) $(\alpha, \beta, \gamma) = 0$: $\alpha'' = \beta'' = \gamma'' = 0$; im ganzen 32 ähnliche Fälle.

(2) $\alpha = \beta$: $\alpha' \beta' = \alpha'' \beta''$; „ „ 18 „ „

(3) $$\frac{\alpha + \frac{1}{\alpha} - \beta - \frac{1}{\beta}}{\alpha' + \frac{1}{\alpha'} - \beta' - \frac{1}{\beta'}} = \frac{\alpha + \frac{1}{\alpha} - \gamma - \frac{1}{\gamma}}{\alpha' + \frac{1}{\alpha'} - \gamma' - \frac{1}{\gamma'}} : \ \alpha'' = \beta'' = \gamma'' = 1;$$

im ganzen 6 ähnliche Fälle.

(4) $\alpha = \beta,\ \alpha' = \beta',\ \alpha'' = \beta''$; im ganzen 6 ähnliche Fälle.

(5) $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \gamma = \gamma' = 1$; 1 Fall.

Wenn man die halbe Gruppe, von der man ausgeht, mit der zuletzt erhaltenen vertauscht, geht (3) in (4) über, (1), (2), (5) in sich selbst.“

Über letzteren Punkt enthält 19_5, b), 30 noch einige Rechnungen.

(Cf. Roch, in Crelles Journ. Bd. 66, S. 111; ferner Cayley in Crelles J. 94, S. 107 ff. (Werke XII, S. 87 ff.), F. Klein in Math. Ann. Bd. 36, S. 59 ff.) N.

C. Die Riemannsche Thetaformel.

(Aus Akt Nr. 19, Konv. 19_5, d); Nr. 25, Bogen 17; Andeutungen in Nr. 19, Konv. 19_5, b), Bogen 33, 34; Nr. 25, Bogen 10, 16.)

Die von Prym („Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel etc.“ Leipzig, Teubner 1882, und Crelles J. Bd. 93) sogenannte „Riemannsche Thetaformel“ findet sich in folgender Gestalt vor:

$$\sum_{\varepsilon}\sum_{\varepsilon'}(-1)^{\sum(\varepsilon_\nu\eta_\nu'+\varepsilon_\nu'\eta_\nu)}\,\vartheta\left(x_\nu'+\varepsilon_\nu'\frac{\pi i}{2}+\sum\varepsilon_\mu\frac{a_{\mu,\nu}}{2}\right)e^{\sum\varepsilon_\nu x_\nu'+\sum\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\frac{a_{\mu,\nu}}{4}}$$
$$\times(y_\nu')\cdot(z_\nu')\cdot(t_\nu')$$

$$=2^p\cdot\vartheta\left(x_\nu+\eta_\nu'\frac{\pi i}{2}+\sum\eta_\mu\frac{a_{\mu,\nu}}{2}\right)e^{\sum\eta_\nu x_\nu+\sum\eta_\mu\eta_\nu\frac{a_{\mu,\nu}}{4}}\cdot(y_\nu)\cdot(z_\nu)\cdot(t_\nu),$$

wo

$$2x_\nu'=x_\nu+y_\nu+z_\nu+t_\nu,\quad 2y_\nu'=x_\nu+y_\nu-z_\nu-t_\nu,$$
$$2z_\nu'=x_\nu-y_\nu+z_\nu-t_\nu,\quad 2t_\nu'=x_\nu-y_\nu-z_\nu+t_\nu.$$

Nur steht an beiden Orten

$$\sum\varepsilon_\nu^2\frac{a_{\nu,\nu}}{4}\quad\text{statt}\quad\sum\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\frac{a_{\mu,\nu}}{4},$$
$$\sum\eta_\nu^2\frac{a_{\nu,\nu}}{4}\quad\text{statt}\quad\sum\eta_\mu\eta_\nu\frac{a_{\mu,\nu}}{4}.$$

Von hier geht Riemann durch die Substitutionen

$$x_\nu=2s_\nu'+s_\nu,\qquad y_\nu=s_\nu+m_\nu'\frac{\pi i}{2}+\sum m_\mu\frac{a_{\mu,\nu}}{2}.$$
$$z_\nu=s_\nu+n_\nu'\frac{\pi i}{2}+\sum n_\mu\frac{a_{\mu,\nu}}{2},\quad t_\nu=s_\nu-(m_\nu'+n_\nu')\frac{\pi i}{2}-\sum(m_\mu+n_\mu)\frac{a_{\mu,\nu}}{2}$$

weiter (cf. auch Prym, Acta Math. III, Formel (R″)) und zu Additionsformeln für die Nullwerte über. N.

D. Integrale einfacher totaler Differentialien erster Gattung, bezüglich einer algebraischen Fläche.

(Aus Akt Nr. 19, Konv. 19_5, d); Nr. 26, Bogen 1.)

An einigen Stellen der Papiere (Nr. 19_5, b), Bogen 44, 45; Nr. 25, Bogen 27, 30) finden sich Bildungen von Integralen erster Gattung, die zu einer vollständigen *Schnittkurve* zweier algebraischer Flächen, oder zu der Kurve, die aus q Gleichungen mit $q+1$ Variabeln entsteht, gehören; mit Abzählungen über die Zahl der Verzweigungspunkte.

Ebenso findet sich schon (Nr. 25, Bogen 27) der *Begriff eines zu einer algebraischen Fläche $F=0$ gehörigen Doppelintegrals erster Gattung,* mit Normierung für die nicht-homogene und für die homogene Form der Gleichung $F=0$. Dabei ist aber nur an isolierte Doppelpunkte der Fläche gedacht, und irrtümlich angenommen, daß die Zählerfunktion φ des Differentialausdrucks für diese Doppelpunkte verschwinden müsse. Analog (Nr. 19_5, b)) das m-fache Integral 1. Gattung für eine algebraische Gleichung mit $m+1$ Variabeln.

Der Begriff des *totalen einfachen Differentials erster Gattung für eine algebraische Fläche* ist von Riemann gefaßt und in einigen Rechnungen verfolgt worden.

Für die nicht-homogene Gleichungsform

$$F(\overset{m}{x},\overset{n}{y},\overset{r}{z})=0$$

finden sich die Formeln (Nr. 19_5, d)):

$$du=\frac{\xi dy-\eta dx}{F'(z)}=\frac{\eta dz-\zeta dy}{F'(x)}=\frac{\zeta dx-\xi dz}{F'(y)},$$

wo $\xi=\xi(\overset{m-1}{x},\overset{n-2}{y},\overset{r-2}{z})$ etc., und

$$\xi F'(x)+\eta F'(y)+\zeta F'(z)=F\cdot\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y},\overset{r-2}{z});$$

und aus der Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\varphi,$$
$$\xi F'(x)+\eta F'(y)+\zeta F'(z)=F\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right).$$

Aus der homogenen Form von

$$F(x,\overset{n}{y},z)=0,$$

nämlich

$$t^nF\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t}\right)=f(x,\overset{n}{y},z,t)$$

wird

$$du = \frac{\xi' dy - \eta' dx}{f'(z)} = \cdots, \quad \xi', \eta', \zeta' \text{ homogen vom Grade } n-2,$$

abgeleitet; und aus dem Verhalten für $t = 0$ wird geschlossen:

$$\xi' = -\psi_4 x + \psi_1 t, \quad \eta' = -\psi_4 y + \psi_2 t, \quad \zeta' = -\psi_4 z + \psi_3 t,$$

und hieraus auf die Form der obigen ξ, η, ζ für die Gleichung $F(x, \overset{n}{y}, z) = 0$:

$$\xi = -\psi_4 x + \psi_1, \quad \eta = -\psi_4 y + \psi_2, \quad \zeta = -\psi_4 z + \psi_3,$$

wo $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ vom Grade $n-3$ in x, y, z werden. Ferner die Formeln:

$$\psi_1 f'(x) + \psi_2 f'(y) + \psi_3 f'(z) + \psi_4 f'(t) = f \cdot \varphi,$$

$$\varphi = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi_4}{\partial t}.$$

Auch Versuche der Konstantenzählung für die Anzahl der durch diese Relationen hervorgebrachten Bedingungen. Sodann (ibid. und Nr. 26, Bogen 1) Anwendung auf die Bedingungen für vollständige Differentialien, bezüglich einer Gleichung

$$F(x_1, \overset{n}{x_2}, \cdots, x_m) = 0$$

mit mehr als 2 unabhängigen Variabeln.

Endlich wird (Nr. 26, Bogen 1) zur Anwendung eine Fläche

$$F(t, y, z) = 0$$

berechnet, deren Punkte den Punktpaaren einer Kurve mit $p = 2$ zugeordnet sind, vermöge

$$s_1^2 = f(\overset{6}{x_1}), \quad s_2^2 = f(\overset{6}{x_2}),$$

$$t = s_1 + s_2, \quad y = x_1 + x_2, \quad z = x_1 x_2;$$

und dafür werden die beiden Integralsummen u_1, u_2 des Umkehrproblems als zugehörige Integrale erster Gattung totaler Differentialien angegeben.

(Cf. Picard in Journ. de Math., sér. IV, t. 1, 1885.) N.

E. Die Perioden der hyperelliptischen Integrale erster Gattung als Funktionen eines Verzweigungspunktes.

(Akt Nr. 4.)

Die Werte der Funktion $s = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)(z-x)}$ seien auf der doppelt überdeckten z-Ebene derart ausgebreitet, daß die beiden Blätter längs der Verzweigungsschnitte $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $x\infty$, zusammenhängen Ist dann w ein zur Fläche gehöriges Integral erster Gattung, so sind

$$(1) \qquad y_1 = 2\int_{\infty}^{\alpha} dw, \quad y_2 = 2\int_{\alpha}^{\beta} dw, \quad y_3 = 2\int_{\gamma}^{\delta} dw, \quad y_4 = 2\int_{\delta}^{x} dw$$

die Perioden desselben. Dabei sollen die Integrale im ersten Blatt auf der obern Seite des Verzweigungsschnittes genommen werden.

Wird dann noch gesetzt

$$(2) \qquad u = \int_{\beta}^{\gamma} dw, \quad v = \int_{x}^{\infty} dw,$$

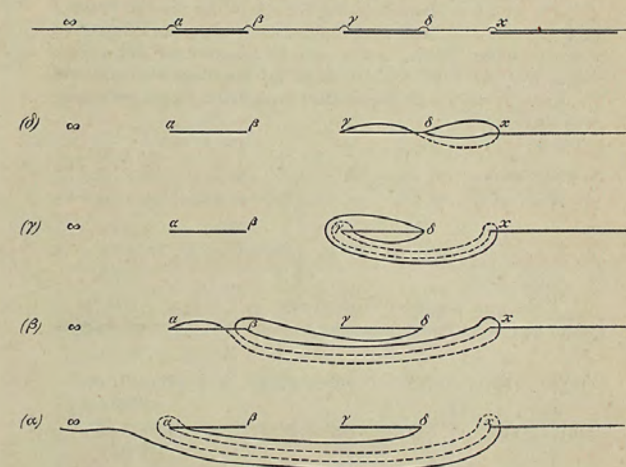

Fig. 7.

so erhält man die Relationen

$$(3) \qquad \begin{aligned} y_1 + y_2 + u + y_3 + y_4 + v &= 0 \\ y_1 - y_2 + u - y_3 + y_4 - v &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$(4) \qquad \begin{aligned} u + y_1 + y_4 &= 0 \\ v + y_2 + y_3 &= 0, \end{aligned}$$

indem man einmal an der obern Seite einer von $-\infty$ nach $\alpha\beta\gamma\delta$ und $+\infty$ ziehenden Linie integriert, das andere Mal an der untern Seite derselben Linie.

Setzt man

$$w = \int \frac{(z-x)}{s}\, dz, \tag{5}$$

so wird $\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{s}$ das zweite Integral erster Gattung mit den Perioden y_1', y_2', y_3', y_4', und es ist

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' + y_3 y_4' - y_4 y_3' = 0. \tag{6}$$

Vollzieht nun x der Reihe nach einen positiven Umlauf um $\delta, \gamma, \beta, \alpha$, so daß der Integrationsweg der y beständig vor dem Punkte x ausweicht, so erhält man die Substitutionen, welche die Perioden bei diesen Umläufen erleiden, indem man die Integrale auf dem abgeänderten Weg mit Hilfe von (4) durch die ursprünglichen ausdrückt. (In der Figur sind die im zweiten Blatt verlaufenden Linien gestrichelt.) Man erhält so

	δ	γ	β	α
y_1 geht über in	y_1	y_1	y_1	$-y_1-2y_2-2y_3$
y_2 " " "	y_2	y_2	$2y_1+y_2+2y_3$	$2y_1+3y_2+2y_3$
y_3 " " "	y_3-2y_4	$3y_3-2y_4$	y_3	y_3
y_4 " " "	y_4	$2y_3-y_4$	$2y_1+2y_3+y_4$	$2y_1+2y_2+2y_3+y_4$

Bildet man nun die 6 Verbindungen $(y_i y_k' - y_k y_i') = (ik)$, so erleiden auch diese lineare homogene Substitutionen, und zwar folgende:

	δ	γ	β	α
(12)	(12)	(12)	(12) + 2 (13)	(12) + 2 (23) + 2 (13)
(43)	(43)	(43)	(43) + 2 (13)	(43) + 2 (23) − 2 (13)
(13)	(13) − 2 (14)	3 (13) − 2 (14)	(13)	− (13) − 2 (23)
(24)	(24)	2 (23) − (24)	(24) + 2 (14) − 2 (12) − 2 (23) + 2 (34)	− 2 (12) − 2 (23) + 2 (14) + 3 (24) + 2 (34)
(14)	(14)	2 (13) − (14)	2 (13) + (14)	2 (12) + 2 (13) − 2 (24) − (14) − 2 (34)
(23)	(23) − 2 (24)	3 (23) − 2 (24)	2 (13) + (23)	2 (13) + 3 (23)

Anmerkung. Das Blatt in Riemanns Nachlaß enthält nur die Formeln mit einigen hier verbesserten Versehen und einer verwischten Bleistiftskizze, aus welcher das Verfahren zu erkennen ist. Die zweite Tabelle ist überdies lückenhaft.

Über den Gegenstand selbst, der erst von Fuchs, Crelles J., Bd. 71 unabhängig wieder aufgenommen wurde, und die Litteratur vgl. man Schlesinger, Handbuch d. Th. d. linearen Differentialgleichungen, § 246—250. Für den Zusammenhang mit Riemanns Untersuchungen über Abelsche Funktionen Th. A. F., Art. 25 (Werke, S. 138 (131 der 1. Aufl.)), sowie den Schluß von Nr. IV, F dieser Nachträge. W.

F. Über die Abbildung der Verzweigungsfläche durch ein Integral erster Gattung.

(Schriftliche Mitteilung Riemanns an Fr. Prym auf eine mündliche Frage.)

Ich habe in meinen Vorlesungen bemerkt, daß man die Zerschneidung der Fläche T durch die p Linien a und b immer so einrichten könne, daß das Bild (S) der Fläche in der w-Ebene aus p Blättern bestehe, deren jedes durch zwei Paare kongruenter Kurven begrenzt ist, und $2p-2$ einfache Verzweigungspunkte habe. Dies Verfahren ist aber nicht in allen Fällen das bequemste und zweckmäßigste, so z. B., wie ich schon sagte, nicht für die Integrale, die ich durch u*) bezeichne, und auch nicht in Ihrem Falle. In diesen beiden Fällen kann man eine einblättrige Fläche (S) erhalten.

Sie wünschen jedoch zu wissen, was aus der obigen p-blättrigen Fläche für $p=2$ in Ihrem speziellen Falle wird.

Dies läßt sich am leichtesten übersehen, wenn man an die Fläche (S) eine kongruente benachbarte Fläche anfügt. In der Figur sind die beiden benachbarten Flächen längs einer Seite der kleineren Parallelogramme aneinander gefügt, so daß diese zusammen ein (blau gezeichnetes) Blatt bilden. Außerdem hat sowohl die Fläche (S), als die ihr kongruente ein anderes Blatt, welches für die eine rot, für die andere schwarz gezeichnet ist. Die Kreuzungslinien zweier Flächen haben die Farben beider.**)

Sie werden nun leicht erkennen, daß man, wenn man zwei Verzweigungspunkte, einen von (S) und einen der benachbarten Fläche, umkreist, erst nach drei Umläufen zum Ausgangspunkt zurückkommt.

Fallen also diese beiden Punkte zusammen, so erhält man einen Punkt, um welchen die Fläche sich dreimal windet.

Ihr Integral kann als ein spezieller Fall angesehen werden von dem Integral

$$w = \int \frac{\varphi(s, z)\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}},$$

*) Die transcendent normierten Integrale erster Gattung.

**) In der Figur sind hier die blauen Linien durch Strichelung, die roten durch Strichpunktierung gegeben.

worin φ das Quadrat einer sogenannten Abelschen Funktion, d. h. so beschaffen ist, daß die $2p-2$ Punkte, für welche $\frac{\varphi(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird, paarweise zusammenfallen.

In diesem Falle kann man diese $p-1$ Punkte zu gemeinschaft-

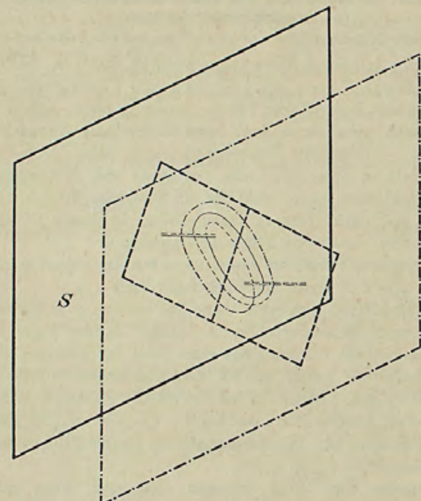

Fig. 8.

lichen Anfangs- und Endpunkten von $p-1$ Paaren der Linien a und b machen.

Die Fläche, welche die Werte von w repräsentiert, wird dann ein Parallelogramm, dessen Seiten die Bilder des p^{ten} Paares (a, b) sind, und aus welchem $p-1$ Parallelogramme ausgeschieden sind, in deren jedem die vier Eckpunkte Bilder Eines Punktes sind, in welchem $\frac{\varphi}{\frac{\partial F}{\partial s}}$ unendlich klein von der zweiten Ordnung wird.

(Für $p=2$ erhalten Sie ein Parallelogramm, aus welchem ein Parallelogramm ausgeschnitten ist.)

Die Betrachtung dieses Falles ist vorteilhaft für die Untersuchung

der Differentialgleichungen, welche bei beliebigem p der bekannten Differentialgleichung

$$k(1-k^2)\frac{\partial^2 K}{\partial k^2} + (1-3k^2)\frac{\partial K}{\partial k} = kK$$

entsprechen.

Pisa, 27. März 65. B. R.

Anmerkung. Diese Mitteilung fand sich zunächst in einem Entwurf im Akte 26 („Varia"). Einer gütigen Mitteilung von Herrn F. Prym verdanken wir dann den Text des in seinem Besitz befindlichen Originals und die weitere Nachricht, daß dieser Aufsatz als Antwort auf seine mündliche Anfrage von Riemann niedergeschrieben wurde, als diesem das Sprechen schwer fiel. Die Mitteilung enthält auch die Skizze einer Figur, welche jedoch hier aus rein technischen Gründen etwas abgeändert wurde. Zum Gegenstande vgl. Th. A. F. Art. 12. Ferner F. Klein, Vorlesungen über Riemannsche Flächen, I, S. 60—77 mit weiteren Litteraturangaben. W.

G. Über Thetafunktionen, welche zu besondern Riemannschen Flächen gehören.

Im Akt 19 („Abelsche Funktionen VI"), sowie im Akt 25 („Varia") der Göttinger Papiere finden sich auf einigen Bogen Rechnungen und Andeutungen mit spärlichem Text, welche das im folgenden auseinandergesetzte Problem behandeln. Es sind dies die Bogen 4′, 5′, 6′ von Nr. 19_5, d), von denen 4′ das Datum „Göttingen, Oktober 1862", 5′ das Datum „Göttingen, Januar 1865" trägt. Ferner Bogen 4, 10, 29, 31, 32, 33 von Akt 25. Es sind verschiedene Spezialfälle behandelt, welche jedoch in der Bezeichnung nicht immer deutlich getrennt sind. Auch für die Deutung der Schlußformeln reicht der Text nicht aus, jedoch lassen sie etwa die Richtung erkennen, nach welcher Riemann vorzudringen suchte. Der Ansatz Riemanns gibt übrigens auch einen von den Thetafunktionen unabhängigen Existenzbeweis für die Wurzelfunktionen*).

Man denke sich eine Verzweigungsfläche vom Geschlechte p in der Gestalt eines Systems P von p Parallelogrammen, welche durch $2p-2$ Verzweigungspunkte zu einem Ganzen verbunden sind, gegeben und diese Fläche über a_p hinaus fortgesetzt und λ-mal wiederholt. Die Seite b_p wird dabei λ-mal so lang und die Seiten a_ν, b_ν $(\nu < p)$ vervielfältigen sich λ-mal zu $a_\nu^{(\alpha)}, b_\nu^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \cdots, \lambda)$. Man sehe die Figur, zu welcher sich Skizzen auf den erwähnten Blättern finden.

*) Vgl. Anm. (18) zu der in diesen „Nachträgen" unter I publizierten Vorlesung.

Das so entstehende System P' von $\lambda(p-1)+1$ Parallelogrammen mit $\lambda(2p-2)$ Verzweigungspunkten ist vom Geschlechte $\lambda(p-1)+1$ und definiert seinerseits eine Klasse algebraischer Funktionen. Diejenige Funktion erster Gattung auf P', welche am Querschnitt $a_\nu^{(\alpha)}$ den Periodizitätsmodul 1, aber an den übrigen Schnitten a den Periodizitätsmodul 0 hat, sei $w_\nu^{(\alpha)}$. Der Modul von $w_\nu^{(\alpha)}$ am Querschnitt $b_\nu^{(\alpha+\beta)}$, oder von $w_\nu^{(\alpha+\beta)}$ an $b_\nu^{(\alpha)}$, sei $c_{\nu,\nu'}^{(\beta)} = c_{\nu',\nu}^{(-\beta)}$. Die Funktion, welche am Querschnitt a_p den Modul πi, an den übrigen Schnitten a den Modul 0 hat, ist $\frac{1}{\lambda} u_p$, wenn mit u_ν die Funktion erster Gattung des Systems P bezeichnet wird, welche an a_ν den Modul πi, an den übrigen Schnitten a den Modul 0 und am Schnitt b'_μ den Modul $a_{\nu,\mu}$ hat. Am Querschnitt $b_\nu^{(\alpha)}$

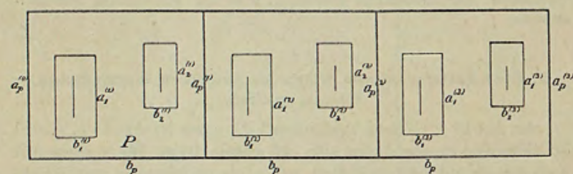

Fig. 9.

hat sie den Modul $\frac{1}{\lambda} a_{\nu,p}$, folglich ist auch der Modul von $w_\nu^{(\alpha)}$ an dem Querschnitt b_p gegeben durch $\frac{1}{\lambda} a_{\nu,p}$. Der Modul von $\frac{1}{\lambda} u_p$ an diesem Querschnitt ist $\frac{1}{\lambda} a_{p,p}$.

Da nun das System P' längs $a_p^{(0)}$ und $a_p^{(\lambda)}$ geschlossen zu denken ist, so bleibt es bei cyklischer Vertauschung der λ Parallelogramme des Systems P' umgeändert. Es folgt dann aus der Betrachtung der Periodeneigenschaften ohne weiteres:

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} w_\nu^{(\alpha)} = u_\nu.$$

Versteht man unter ε eine primitive Wurzel der Gleichung $\varepsilon^\lambda = 1$ und setzt

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} w_\nu^{(\alpha)} \varepsilon^{\alpha\varkappa} = v_\nu^{(\varkappa)},$$

so folgt

$$\lambda w_\nu^{(\alpha)} = u_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{\lambda-1} v_\nu^{(\varkappa)} \varepsilon^{-\alpha\varkappa}.$$

Dabei haben die $dv_\nu^{(\varkappa)}$ die Eigenschaft, daß sie an entsprechenden Stellen des ersten, zweiten etc. Systems P sich verhalten wie $\varepsilon^\varkappa : \varepsilon^{2\varkappa} : \varepsilon^{3\varkappa}$ etc.

Man erhält die Perioden der $v_\nu^{(\varkappa)}$ an den Schnitten $a_\mu^{(\alpha)}$ gleich Null, wenn ν von μ verschieden ist und gleich $\pi i \varepsilon^{\alpha\varkappa}$, wenn $\mu = \nu$ ist. Setzt man ferner

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} c_{\nu',\nu}^{(\alpha)} \varepsilon^{\alpha\varkappa} = b_{\nu,\nu'}^{(\alpha)},$$

so ist die Periode von $v_\nu^{(\varkappa)}$ am Schnitte $b_\nu^{(\beta)}$ gegeben durch $\varepsilon^{\beta\varkappa} b_{\nu,\nu'}^{(\varkappa)}$.

Nun folgen verschiedene Ansätze und Rechnungen, welche zeigen, daß Riemann mit den Perioden der Größen $w_\nu^{(\alpha)}$ Thetareihen bildete, welche er mit Ω bezeichnet, und ebenso aus den Perioden der $v_\nu^{(\varkappa)}$ und denen der u_ν. Er untersuchte dann das Verhalten dieser drei Arten von Thetafunktionen, wenn einfache Integrale für die Argumente eingeführt werden und deren Beziehungen zueinander. Doch ist ein bestimmtes Resultat nicht erkennbar.

Auf andern Blättern finden sich Ansätze, in denen zuerst das System P über die Linie a_p hinaus einmal, sodann das ganze so entstandene System über b_p hinaus λ-mal wiederholt wird. Es finden sich Rechnungen, welche darauf hinweisen, daß Riemann diese Theta durch Heranziehung von den Integralen $\int d \log \vartheta$ und $\int \log \vartheta \, du$ analogen Integralen auf ihr Verschwinden auf dem System P' untersuchte. Nähere Ausführungen beziehen sich auf $\lambda = 2$, also einmalige Wiederholung der ursprünglichen Fläche. Diese tragen auch das Datum „Göttingen, Oktober 1862".

Hier bildet er $\vartheta(v_1 - e_1, v_2 - e_2, \cdots, v_{p-1} - e_{p-1})$ und sodann die Integrale $\int d \log \vartheta$, $\int \log \vartheta \, du_\nu$, $\int \log \vartheta \, dv_\nu$ und erhält so, wenn die Werte von v_ν an den $2p-2$ Stellen, für welche $\vartheta = 0$ ist, mit $\beta_\nu^{(\mu)} (\mu = 1, \cdots, 2p-2,\ \nu > 1, \cdots, p-1)$, entsprechend die von u_ν mit $\alpha_\nu^{(\mu)} (\nu = 1, \cdots, p)$ bezeichnet werden:

$$\sum_{\mu=1}^{2p-2} \alpha_\nu^{(\mu)} = (h_\nu' - h_\nu)\pi i + \sum_{1}^{p} a_{\nu,\mu}(g_\mu' - g_\mu) - 2a_{\nu,p} g_p,$$

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{2}\sum_{1}^{2p-2} \beta_\nu^{(\mu)} + \frac{h_\nu + h_\nu'}{2}\pi i + \sum_{\mu=1}^{p} \frac{g_\mu + g_\mu'}{2} b_{\nu,\mu} = r_\nu,$$

$$\sum_{1}^{2p-2} \alpha_p^{(\mu)} = h_p \pi i + \sum_{\mu=1}^{p-1} a_{p,\mu}(g_\mu' - g_\mu).$$

Es findet sich noch die Notiz:

$$
\text{(B)}\quad \left.\begin{array}{l}
\text{wenn } \vartheta \text{ gerade } h_p \equiv 0 \bmod 2 \text{ vorzusetzen } \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} \\
\text{wenn } \vartheta \text{ ungerade } h_p \equiv 1 \bmod 2 \text{ vorzusetzen } \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}
\end{array}\right. \text{Gruppe } \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\binom{0}{0}^{p-1},
$$

so daß unverkennbar der Plan vorhanden ist, das Verschwinden von $\vartheta(g_h)(v_1 \cdots v_{p-1})$ in Zusammenhang zu bringen mit den Charakteristiken der auf P unverzweigten $\sqrt{\varphi}$. Die übrigen Aufzeichnungen konnte ich nicht in bestimmter Weise deuten.

Am Schlusse finden sich die auch sonst wiederkehrenden Formeln

$$1)\quad \frac{\Omega(2u_1, 2u_2, \cdots, 2u_p, 0, 0 \cdots 0)}{\vartheta(u_1 \cdots u_p)\,\vartheta\left(u_1, \cdots, u_{p-1}, u_p + \frac{\pi i}{2}\right)} \text{ unabhängig von den Größen } u,$$

$$2)\quad \frac{\Omega(0, 0 \cdots 0, 2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_{p-1})}{\left(\Theta(v_1 \cdots v_{p-1})\right)^2} \text{ unabhängig von den Größen } v,$$

$$3)\quad \frac{\Omega(u_\nu - u'_\nu - a_{p,\nu}, v_\nu - v'_\nu - 2e_\nu)}{\Theta(v_\nu - e_\nu)\,\Theta(v'_\nu - e_\nu)} \text{ unabhängig von den Größen } e,$$

$$4)\quad \frac{\Omega(u_\nu - u'_\nu - 2e_\nu, v_\nu - v'_\nu)}{\vartheta(u_\nu - u'_\nu - e_\nu)\,\vartheta\left(e_1 \cdots e_{p-1}, e_p + \frac{\pi i}{2}\right)} \begin{array}{l}\text{unabhängig von den Größen } e,\\ \text{wenn } \vartheta(e_1 \cdots e_p) = 0,\end{array}$$

$$3^*)\quad \frac{\Omega(u_\nu - u'_\nu, 2s_\nu)}{\Theta\left(\frac{v_\nu - v'_\nu}{2} + s_\nu\right)\Theta\left(\frac{v'_\nu - v_\nu}{2} - s_\nu\right)} \text{ unabhängig von den Größen } s.$$

Hiernach steht es außer Zweifel, daß Riemann ähnliche Untersuchungen, wie sie der Herausgeber im zweiten Teil seines Buches „Untersuchungen über Thetafunktionen" 1895 angestellt hat, geplant und teilweise durchgeführt hat. Man vergleiche zu den Formeln (A) und (B) die § 40—48 dieser Schrift, wo sich das Ergebnis am Ende von § 48 mit (B) genau deckt.

Die Formeln 1, 2, 3, 4, 3* lassen erkennen, daß Riemann das Zerfallen der — übrigens wechselnd und nirgends vollständig definierten — Funktion Ω nach einer Transformation zweiten Grades in bloß von den v_ν und den u_ν einzeln abhängige Faktoren bereits ins Auge gefaßt hat.

Anmerkung. Auf Bogen 4', Akt 19_5, d) der Riemann-Papiere stimmt die Tinte des Datums (Göttingen, Oktober 1862) nicht mit der des Textes überein, wohl aber mit Tinte des Textes und Datums (Pisa, Januar 1865) von Bogen 5'. Es scheint also, daß Riemann sich diese Notizen aus Göttingen mitgenommen und in Pisa nachträglich bei der Benutzung datiert hat. Beide Bögen machen einen durchaus zusammengehörigen Eindruck, und stellen sie wohl einen Teil der Untersuchungen über Abelsche Funktionen dar, welche Riemann in Italien auszuarbeiten beabsichtigte. W.

V.

Berichte.

Bericht über das Heft: „Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe, S.-S. 1859"

(niedergeschrieben von W. v. Bezold).

Cod. Msc. Riemann 29. Gr. 8. 136 Seiten, in Gabelsberger Stenographie, sogenanntes Pandektenpapier. Die einzelnen Vorlesungen sind nicht äußerlich getrennt und die Trennung nicht mehr festzustellen. Das Heft bezieht sich wahrscheinlich auf die W.-S. 1858/59 gehaltene Vorlesung (vgl. Vorrede dieser „Nachträge").

S. 1—26 enthält eine ziemlich ausführliche Einleitung über komplexe Größen und Funktionen, Integrale und Integrierbarkeit im allgemeinen, den Cauchyschen Satz und seine Anwendung zu Reihenentwicklungen und Auswertung bestimmter Integrale.

S. 27—35. Die Konvergenz und die gliedweise Integration von Reihen, Potenzreihen, Hinweis auf Briot und Bouquet, Études des fonctions avec des variables imaginaires, J. d. l'école polytechnique, Cah. 36 (1856).

S. 36—42. Das Unendlichwerden der Funktionen, Definition der Ordnung desselben durch $\int d \log y$, die algebraischen Funktionen und ihre Verzweigung.

S. 43—60. Allgemeine Sätze über Verzweigung und lineare Substitutionen, das Funktionensystem $Q\begin{pmatrix} a, b, c \cdots \\ A, B, C \cdots \end{pmatrix}x$. Im wesentlichen der Inhalt des Fragmentes XXI bis etwa S. 385 (363 der 1. Aufl.) der Werke. Eingeschoben ein kurzer Abriß der Determinantentheorie unter Hinweis auf Vandermonde und Cramer.

S. 61. Es werden zunächst nur zwei Verzweigungspunkte angenommen und gezeigt, daß das ganze Funktionensystem Q sich dann zusammensetzen läßt aus Funktionen der Form $(x-a)^\mu (x-b)^{-\varkappa-\mu} g_\varkappa(x)$, wo $g_\varkappa(x)$ eine ganze Funktion $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von x ist.

S. 61—83. Gibt etwa den Inhalt der Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (Werke IV). Eingeschoben sind S. 71, 72 die Haupteigenschaften der Eulerschen Integrale und namentlich der Π-Funktion, insbesondere die Darstellung von $\Pi(\mu)$ als Schlingenintegral. (Die Formel

$$\frac{2\pi i}{\Pi(\mu)} = \int_\infty^\infty e^{-x}(-x)^{-\mu-1}\,dx$$

findet sich bereits in einer Vorlesungspräparation von 1855, Akt 19_3 „Best. Integrale. Funktionentheorie". Vgl. auch Werke, S. 146 (137 der 1. Aufl.).)

Die in diesen Nachträgen unter III, A mitgeteilten Ausführungen finden sich von S. 75 an.

S. 84—97 enthält die Herleitung des Gaußschen Kettenbruches, insbesondere S. 89—94 die Entwicklungen des Fragmentes, Werke XXIII. (Der Anfang der Untersuchung, einschließlich des Beginnes der Herleitung der asymptotischen Formel, findet sich bereits auf den letzten Seiten und der Innenseite des Einbandes des Scheringschen Heftes über die Vorlesung W.-S. 1856/57, sodaß also diese Entwicklungen spätestens in diese Zeit zu datieren sind. Es sei bei der Gelegenheit bemerkt, daß aus der ganzen Fassung namentlich bei Schering hervorgeht, daß es sich bei der asymptotischen Formel um eine Weiterentwicklung der von Laplace herrührenden Methode zur Gewinnung asymptotischer Ausdrücke handelt. Man vergleiche Théorie analytique des probabilités, livre I, 2. partie. Mit diesen Gedanken stehen auch im Zusammenhang die Entwicklungen im § 13 der Habilitationsschrift [Werke, S. 260 (246)], welchen man übrigens in dieser Zeit auch bei andern Autoren z. B. Hamilton begegnet.)

Der Abschnitt enthält noch Anwendungen der Kettenbruchentwicklungen auf das Wahrscheinlichkeitsintegral und das Integral $\int_y^\infty e^{-t} t^{c-1}\,dt$, sowie Bemerkungen über semikonvergente Reihen und den Integrallogarithmus.

S. 97—106 enthält der Hauptsache nach die Anwendung der allgemeinen Theoreme auf die *functiones contiguas* und eine Andeutung, wie die Kettenbrüche zu benutzen seien zur wirklichen Herstellung der Relationen zwischen diesen.

S. 107 gibt die 24 Ausdrücke der P-Funktion durch die hypergeometrische Reihe und die Konvergenzverhältnisse.

S. 108—114 gibt als Beispiel die Anwendung der vorgetragenen Theorie auf die ganzen elliptischen Integrale, die Kugelfunktionen, die Entwicklungskoeffizienten von $(1 - 2r\cos\varphi + r^2)^{-1/2}$ nach $\cos n\varphi$ durch hypergeometrische Reihen.

S. 114—118 reproduziert den Hauptinhalt der Arbeiten Heines, Crelles J. 32, 34.

S. 118—136 ist im vorstehenden unter III, B wiedergegeben. W.

Bericht über die Akten Nr. 19, 25 (mit 18), 26, 4 des Riemannschen Nachlasses.

Die auf der kgl. Universitätsbibliothek zu Göttingen aufbewahrten Nachlaßpapiere Riemanns, welche zum größeren Teil aus losen Bogen und Blättern bestehen, sind von Herrn Weber behufs Herausgabe der Werke zu Konvoluten zusammengefaßt und benutzt worden. Da auf die Aktenhefte, nun bezeichnet als Nr. 19, 25, 26, 4, in unsern „Nachträgen" wiederholt Bezug genommen ist, und da wir vorstehend einige Riemannsche Untersuchungen aus diesen Papieren mitgeteilt haben, so sei über dieselben hier kurz berichtet, als Ergänzung zu dem bereits in den „Anmerkungen" zu den „Vorlesungen" und „Noten" angeführten.

Akt Nr. 19.

Dieser Akt zerfällt in 5 Hefte, die mit $19_1 — 19_5$ bezeichnet seien.

Heft 19_1: In 4°, „P-Funktion", aus Wintersemester 1856/57. Lose, datierte Vorbereitungen zur Vorlesung und zur Abhandlung, Werke IV.

Heft 19_2: In 4°, „P-Funktion durch bestimmte Integrale", 12. Februar 1857. Nur einige lose Blätter.

Heft 19_3: In 4°, „Bestimmte Integrale. Funktionentheorie". Teilweise datierte Vorbereitungen zur Vorlesung über Funktionentheorie, Winter 1855/56, den Gang der Abhandlung über Abelsche Funktionen, Werke VI, bis zum Abelschen Theorem gehend. Ferner Blätter zur Vorlesung über die Theorie der Funktionen einer komplexen Größe, Winter 1856/57, ausmündend in Betrachtung von Funktionen, die einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen, wozu Hefte 19_1, 19_2 gehören.

Einige Notizen. 7. Nov. 1855: „In der Mathematik muß man solche Begriffe, wie Stetigkeit, Unendlichkeit, Ähnlichkeit und Unähnlichkeit immer auf Gleichheiten und Ungleichheiten zurückzuführen suchen. Nur dadurch können die Methoden, durch welche man sie der Rechnung (Untersuchung) unterwirft, zur völligen Klarheit gebracht werden. Es werden die Beweise der Fundamentalsätze der Infinitesimalrechnung dadurch, daß man zugleich diese Aufgabe zu lösen hat, etwas umständlicher."

15. Nov. 1855: „Die Erkenntnis des Umstandes, daß die unendlichen Reihen und die mehrfachen Integrale in zwei Klassen zerfallen [je nachdem der Grenzwert unabhängig von der Anordnung, bezw. von der Art, wie man das Gebiet, wenn es ins Unendliche geht, wachsen läßt; oder nicht], bildet einen Wendepunkt in der Auffassung des Unendlichen in der Mathematik."

28. Febr. 1856, auf Jacobis Bemerkung über die Umkehrung eines Abelschen Integrals bezüglich: „Vielleicht etwas unvorsichtig, es lasse sich keine mehr als zweifach periodische Funktion von einer Variabeln denken."

Heft 19_4: In 4°, „Elliptische und Abelsche Funktionen. Funktionentheorie." Vorbereitung zur Vorlesung über elliptische Funktionen, von Sommer 1856, an Legendre anknüpfend und bis zur Transformationstheorie und Darstellung durch die Thetafunktionen gehend; sodann Fortsetzung über Abelsche Funktionen, von Sommer 1856. Ferner Manuskriptentwürfe und Abklatsch von Abhandlung VI. Zusatz zum ersten Absatz von XIV. Anfang der Vorlesung von Sommer 1859 über elliptische und Abelsche Funktionen.

Heft 19_5: In 2°, in blauem Umschlag mit Aufschrift „Abelsche Funktionen VI, 19". Dieses Heft zerfällt wieder in vier einzelne Konvolute:

a) Entwurf zu Abhandlung XI „Über das Verschwinden der Thetafunktionen"; der Abhandlung fast wörtlich entsprechend. Mit Briefentwurf an Dedekind, aus Italien 1865. — Einige Seiten aus der algebraischen Theorie von Weierstraß über Integrale erster und zweiter Gattung; sehr wahrscheinlich aus einer Mitteilung von Weierstraß an Riemann*).

b) 51 lose Bogen und Blätter, mit Bleistift nochmals überschrieben: „Abelsche Funktionen". Dieses Konvolut enthält hauptsächlich Vorbereitungen und Rechnungen zu der hier herausgegebenen Vorlesung von 1861/62, besonders über $p=3$, auch 4; beginnend 1858, wo schon die Gleichungen (17)—(20) von Werke XXXI (XXX der 1. Aufl.) auftreten. Dazu zahlreiche zerstreute Notizen anderer Art. (Dies ist das in den Anmerkungen zitierte Konvolut 19_5, b), Bogen 1—51.)

c) Überschrieben: „Abelsche Funktionen. Entwürfe zu der großen Abhandlung". Bleistiftentwürfe zu VI.

d) Überschrieben: „ϑ-Funktionen", innen: „Italien. ϑ-Funktionen". 6 Bogen, teilweise aus der italienischen Zeit (in den Anmerkungen mit 19_5, d), Bogen $1'—6'$ zitiert). N.

---

*) Diese Blätter sind Herrn Mittag-Leffler zur Publikation in den Acta Mathematica übergeben.

Akt Nr. 25, „Varia", mit Akt Nr. 18.

Der Akt Nr. 25 enthält 47 lose Bogen und Blätter und eine Reihe besondere Konvolute. Die Blätter gehören mit Akt 19_5, b) zusammen. Einige der Hefte enthalten Notizen aus der Frühzeit, besonders physikalischen Inhalts. Ferner naturphilosophisch-mechanische Rechnungen: Variationsformeln bei sich zeitlich fortpflanzendem Potential; über Kräfte, die das „Widerstreben eines Raumatoms gegen die Verschmelzung mit einem benachbarten" messen; wobei es sich um die Zurückführung von Fernwirkungen auf Aktionen von zwischenliegenden materiellen Atomen zu handeln scheint. Ferner einige Bogen mit historisch-litterarischen Anmerkungen über Leibniz' Leben und Schriften. Heftchen über Zahlentheorie, Vorlesungsheft über Elastizität und Elektrizität von 1858, Entwürfe zur Habilitationsschrift XII und zum Habilitationsgesuch, mit den [Werke, 2. Aufl. S. 547 (1. Aufl. S. 515) berührten] drei zur Probevorlesung vorgeschlagenen Thematen:

1) Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe.

2) Über die Auflösung zweier Gleichungen zweiten Grades mit zwei unbekannten Größen.

3) Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Akt Nr. 18, „Naturphilosophisches", gehört eigentlich zu den Heften des Aktes Nr. 25; er enthält auch noch Blätter zu XII der Werke. N.

An einigen Stellen finden sich Rechnungen über das Integral

$$\int e^{-av}\,\vartheta(v-a)^{\alpha}\,\vartheta(v-b)^{\beta}\,\vartheta(v-c)^{\gamma}\,\vartheta(v-d)^{\delta}\,dv,$$

wo ϑ die elliptische Thetafunktion bezeichnet, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ und die Integration zwischen singulären Stellen zu verstehen ist. Doch ist ein bestimmtes Resultat nicht erkennbar. W.

Akt Nr. 26, „Varia".

Enthält, außer wenigen Rechnungen — so über die Reihe

$$\varphi(b)=\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{an^4+bn^3+cn^2+dn},$$

in der c und d als Funktionen von b angesehen werden —, ein frühes Heft mit einem Aufsatz: „Über den Gang des Potentials auf der Achse einer Franklinschen Tafel mit kreisförmigen Belegungen" und ähnlichem, nach Clausius; ferner ein Heft: „ϑ-Funktionen, Nobilische Ringe, Attraktion des elliptischen Zylinders. Reziprozitätsgesetz". Dann den Vorschlag zu einer von der Fakultät zu stellenden hydrodynamischen Preisfrage; Berichtsentwürfe bez. der Hannoverschen Gradmessungsarbeiten und Arbeiten in Bezug auf die Gestalt der Erde, an denen sich Riemann theoretisch beteiligen will; und die folgenden Thesenentwürfe zur Doktor-Disputation:

1) Es existieren keine magnetischen Fluida.

2) Faradays „Induction in curved lines" ist nicht haltbar.

3) Man kann ohne der Allgemeinheit zu schaden die Differentialrechnung der Analysis vorausschicken.

4) Das Reversionspendel ist nicht das geeignetste Mittel um die Pendellängen zu bestimmen.

5) Die Lehre von der Erhaltung der Kraft ist experimentell noch nicht genügend erwiesen.

6) Der Begriff Spannung ist bisher in der Elektrizitätslehre noch nicht mit der gehörigen Schärfe aufgefaßt worden. N.

Akt Nr. 4: „P-Funktionen, Svolgimento XXIII. 4."

Enthält 101 lose Blätter, darunter Entwürfe zu dem Fragment XXIII der Werke von H. Weber, und Korrespondenz, welche sich auf die Herausgabe bezieht. Auf einigen schlecht erhaltenen Blättern finden sich nicht näher zu entziffernde Ansätze und Rechnungen über P-Funktionen mit 4 und 5 Verzweigungspunkten. Auf einem Blatt ist die unter IV, E mitgeteilte Untersuchung skizziert. W.

Persönliches.

In den hier besprochenen Papieren Riemanns finden sich mitten unter Rechnungen auf einigen Blättern Zitate aus der antiken und deutschen Litteratur, welche, da er sie bei der Arbeit vor sich hatte, seinen Stimmungen und Anschauungen besonders entsprochen haben dürften. Einige darunter sind recht bezeichnend und wir setzen sie darum her.

1. Non hoc praecipuum amicorum munus est, prosequi defunctum ignavo questu, sed quae voluerit meminisse, quae mandaverit consequi.
(Tacitus, Annales II. 71.)

2. Wo es die Sache leidet, halte ich es immer für besser, nicht mit dem Anfang anzufangen, der immer das Schwerste ist.
(Schiller, Briefwechsel mit Goethe vom 5./II. 1796.)
(Das Original enthält nach „Schwerste" noch die Worte „und Leerste".)

3. Wenn Du Wissenschaft lehrst und sie nicht mit lebender Anmut
Vorträgst, gehet der Jüngling, der hört, zu dem lieberen Buche.
Schneller lernt er sie dort und besser, weil er sie froh lernt.
Aber es kann auch kein Buch den erfreuenden Lehrer verdrängen,
Der mit Beredtsamkeit sprechend den horchenden Jüngling begeistert.
Er bereitet sich vor, wie, wer gefällt auf dem Schauplatz.
Dies hat er oft zwei Stunden gethan, um eine zu lehren.
(Klopstock, Werke, Epigramm 62.)

4. Sei, wenn neues du wagst, so bestimmt als möglich; doch sei auch
Völlig gewiss, man seh's schief und erkläre dich falsch.
Denn du begehst ja nur einmal den schrecklichen Fehler der Neuheit,
Und kein Leisten ist noch, dem man sie passe, gemacht.
(Klopstock, Werke, Epigramm 67.)

5. Die Wissenschaft hat dreierlei Thun:
Suchen, Binden, Gestalten.
Sie denken, sie könnten lorbeerruhn,
Wenn sie's mit einem gehalten. (Franz Kugler.)

6. *Ταράσσει τοὺς ἀνθρώπους οὐ τὰ πράγματα ἀλλὰ τὰ περὶ τῶν πραγμάτων δόγματα.* (Epictet, Enchiridion c. 5.)

Das Interesse Riemanns an physiologischer Optik bezeugen zwei von ihm selbst angefertigte Aufnahmen des blinden Fleckes in beiden Augen. W. N.

Verzeichnis der von Riemann angekündigten Vorlesungen. (1)

W.-S. 1854/55: Die Theorie der Integration der partiellen Differentialgleichungen nebst Anwendung derselben auf verschiedene Probleme der Physik. (2)

S.-S. 1855: Bestimmte Integrale. 4 Std. wöch.

W.-S. 1855/56: Die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere elliptische und Abelsche. (3) 3 Std. wöch.

S.-S. 1856: Die mathematische Theorie der Elastizität fester Körper. 4 Std. wöch., morgens um 7 Uhr.

" Auserlesene physikalische Probleme. 2 Std. wöch., unentgeltlich.

W.-S. 1856/57: Die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere hypergeometrische Reihen und verwandte Transcendenten. (4) Freit. von 12—1 Uhr, Sonnab. von 11—1 Uhr.

S.-S. 1857: Die Theorie der elliptischen und Abelschen Funktionen. 5 Std. wöch. um 11 Uhr.

W.-S. 1857/58: Die Theorie der elliptischen und Abelschen Funktionen. 4 Std. wöch. um 8 Uhr.

S.-S. 1858: Die mathematische Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. (6) 4 Std. wöch. um 9 Uhr.

" Ausgewählte physikalische Probleme. Mittw. um 9 Uhr öffentlich.

W.-S. 1858/59: Über Funktionen einer veränderlichen Größe, insbesondere über hypergeometrische Reihen und verwandte Transcendenten. (5) 4 Std. wöch. um 10 Uhr.

" Die höhere Mechanik. 4 Std. wöch. um 9 Uhr.

S.-S. 1859: Die mathematische Theorie der Schwere, des Magnetismus und der Elektrizität. (6) Mont., Dienst., Donnerst., Freit. um 9 Uhr.

" Über elliptische Funktionen. Mont., Dienst., Donnerst., Freit. um 5 Uhr.

W.-S. 1859/60: Die mathematische Theorie der Elastizität fester Körper. 4 Std. wöch. um 11 Uhr.

S.-S. 1860: Die mathematische Theorie der Schwere, der Elektrizität und des Magnetismus. (6) Mont., Dienst., Mittw. u. Donnerst. um 9 Uhr.

" Die Methode der kleinsten Quadrate. 2 Std. wöch. um 5 Uhr öffentl.

W.-S. 1860/61: Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit Anwendung auf physikalische Probleme. (2) Mont., Dienst., Mittw., Donnerst. u. Freit. um 11 Uhr.

S.-S. 1861: Die mathematische Theorie der Schwere, der Elektrizität und des Magnetismus. (6) 5 Std. wöch. um 9 Uhr.

" Über Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere elliptische und Abelsche. (7) 4 Std. wöch. um 10 Uhr.

W.-S. 1861/62: Fortsetzung der Vorlesungen über die Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe. (8) 3 Std. wöch. um 11 Uhr, unentgeltlich.

S.-S. 1862: Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit Anwendungen auf physikalische Fragen. (2) 5 Std. wöch. um 9 Uhr.

W.-S. 1862/63: Die mathematische Theorie der Schwere, des Magnetismus und der Elektrizität. 5 Std. wöch. um 11 Uhr.

S.-S. 1863: [wie ad S.-S. 1862].

W.-S. 1863/64: Ausgewählte Kapitel der mathematischen Physik.

S.-S. 1864: [wie ad S.-S. 1862].

W.-S. 1864/65, S.-S. 1865, W.-S. 1865/66 (und W.-S. 1866/67): Ankündigung soll nach Rückkehr von der Reise erfolgen.

S.-S. 1866: Ankündigung wird erfolgen, sobald seine Gesundheit Riemann zu lesen erlaubt. (9)

Anmerkungen.

(1) Das Verzeichnis ist aus den „Göttinger Nachrichten", Jahrg. 1854—1866, gezogen.

(2) Auf diese Vorlesung bezieht sich K. Hattendorffs Herausgabe: „Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen von Bernh. Riemann," Braunschweig, Fr. Vieweg u. Sohn, 1869, von der jetzt, statt einer 4. Ausgabe, eine völlige Neugestaltung durch Herrn H. Weber vorliegt. Die Hattendorffsche Nachschrift (vgl. die Vorrede dieses Buches) war die der Vorlesung von W.-S. 1860/61. Das von Riemann herrührende Manuskript der Vorlesung, datiert Michaelis 1854, welches Hattendorff benutzt hat, liegt bei den Göttinger Papieren (vgl. F. Klein in Gött. Nachr. 1897, H. 2, S. 189).

(3) An diese Vorlesung schließt Riemanns Abhandlung über die Theorie der Abelschen Funktionen (Werke VI) an. Nach einer Bemerkung in der Einleitung zu dieser Abhandlung (Werke, S. 102 der 2., S. 95 der 1. Ausgabe) hat sich die Vorlesung noch auf das Sommersemester 1856 ausgedehnt, obwohl für dieses Semester keine Fortsetzung angekündigt war. Auf diese Vorlesung bezieht sich ferner der erste und größere Teil, S. 1—192, des bei den Göttinger Papieren als Akt Nr. 37 liegenden Heftes von E. Schering (vgl. F. Klein in Gött. Nachr., Gesch. Mitteil. 1898, H. 1, S. 18 Anm.). Aus dem ersten Stück des Heftes sei hervorgehoben, daß die Einleitung Begriff und Bedeutung der komplexen Größen eingehend bespricht und daß einige Ausführungen zum Dirichletschen Prinzip gegeben werden, welche in den ersten Versuchen etwas abweichen von der Ausführung in der Abhandlung; aus dem letzten Stück, neben dem von H. Stahl benutzten Teil über elliptische Funktionen (Sommer 1856), eine eingehende Diskussion der Abbildung der zweiblättrigen Riemannschen Fläche durch ein Integral erster Gattung, sowie für diesen nämlichen Fall die Erledigung der algebraischen Darstellung einfacher Thetaquotienten mit vollständiger Konstantenbestimmung. Diese letzteren Diskussionen scheinen nachträgliche Bearbeitungen Scherings zu sein. Eine kürzere Nachschrift der Vorlesung durch Herrn R. Dedekind erwähnt Herr H. Stahl in dem Vorwort zu seinen „Elliptische Funktionen, Vorlesungen von B. Riemann", Leipzig, B. G. Teubner 1899.

(4) An diese Vorlesung schließen IV, XXI und XXIII der Ges. Werke an; ferner II dieser „Nachträge". Auf sie bezieht sich der zweite Teil des in Anm. (3) angeführten Scheringschen Heftes, von S. 193—276. (Vgl. Vorrede und Anm. zu II dieser „Nachträge".)

(5) Zu dieser Vorlesung gehört III, A und III, B dieser „Nachträge". Über die bezügliche v. Bezoldsche Nachschrift, Akt Nr. 29 der Göttinger Papiere, vgl. den besonderen Bericht auf S. 109 und die Vorrede.

(6) Von dieser 1858—1861 viermal angekündigten Vorlesung existiert eine Bearbeitung durch K. Hattendorff: „Schwere, Elektrizität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von B. Riemann", Hannover 1876, C. Rümpler, welche, nach der Vorrede dieser Bearbeitung, auf einer Nachschrift der letzten Vorlesung von Sommer 1861 beruht.

(7) Zu dieser Vorlesung gehört die bei den Göttinger Papieren liegende Nachschrift von K. Hattendorff; einige jetzt nachträglich nach Göttingen abgegebene Bogen beziehen sich auf den Anfang der anschließenden Vorlesung von W.-S. 1861/62. Aus dieser Nachschrift ist das in einer kleineren Anzahl von Exemplaren autographisch vervielfältigte Heft von Herrn F. Prym entstanden, ebenso eine Reihe weiterer noch existierender Vorlesungshefte; das Rochsche Heft (vgl. Ges. Werke, S. 483 (456 der 1. Aufl.)) ist in diesem Teile vielleicht selbständige Nachschrift. Aus dem Hattendorff-Prymschen Hefte, in Verbindung mit dem in (3) angeführten Scheringschen, ist dann das ebenda angeführte Buch von Herrn H. Stahl (vgl. das Vorwort dieses Buches) hervorgegangen.

(8) Aus dieser Vorlesung stammen XXX und XXXI (XXIX u. XXX der 1. Aufl.) der Ges. Werke und I der „Nachträge". Vgl. darüber die Vorrede zu diesen Nachträgen, ebenso über die bezüglichen Nachschriften von Herrn F. Prym und B. Minnigerode, und die Bearbeitung eines Teils derselben durch G. Roch. Diese Vorlesung war zugleich die letzte vollständig gehaltene Vorlesung Riemanns.

(9) Von den angekündigten Vorlesungen S.-S. 1855 (Bestimmte Integrale), S.-S. 1856 und W.-S. 1859/60 (Elastizität fester Körper), S.-S. 1857 und W.-S. 1857/58 (Elliptische und Abelsche Funktionen), W.-S. 1858/59 (Höhere Mechanik), S.-S. 1859 (Elliptische Funktionen), S.-S. 1860 (Methode der kleinsten Quadrate) liegen bis jetzt keine Nachschriften vor. N.