XIX.

Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation.*)

In dem folgenden Aufsatze ist der Versuch gemacht, ein Verfahren aufzustellen, mittelst dessen man aus einer gegebenen Function einer Veränderlichen eine andere Function derselben Veränderlichen ableiten könne, deren Abhängigkeit von jener ursprünglichen sich durch eine Zahl ausdrücken lässt und die für den Fall, dass diese Zahl eine ganze positive, negative oder null ist, bezüglich mit den Differentialquotienten, Integralen und der ursprünglichen Function übereinstimmt. Die Resultate der Differential- und Integral-Rechnung werden zwar als Grundlage hier vorausgesetzt, aber nicht in der Weise, dass diejenigen derselben, die für alle Differentiale und Integrale, deren Ordnung durch eine ganze Zahl ausgedrückt wird, gelten, auch auf die gebrochenen Ordnungen ausgedehnt würden; sondern sie sollen nur einerseits zur Begründung des oben angedeuteten Verfahrens benutzt werden und andrerseits als Wegweiser dienen dasselbe zu finden.

Zu diesem letzteren Zwecke wollen wir einmal die Reihe der Differentialquotienten etwas näher betrachten. Es ist klar, dass man hierbei nicht von der gewöhnlichen Definition derselben ausgehen kann, die sich auf ihr recurrentes Bildungsgesetz gründet, da man ja durch dasselbe unmöglich auf andere Glieder der Reihe, als auf solche, die ganzen Indices entsprechen, gelangen kann; man muss sich also nach

*) Diese Abhandlung trägt im Manuscript das Datum 14. Jan. 1847 und stammt also aus Riemann's Studienzeit. Riemann dachte ohne Zweifel nicht an ihre Veröffentlichung, auch stützt sich die Betrachtung auf Grundlagen, deren Haltbarkeit er in späteren Jahren nicht mehr anerkannt haben würde. Immerhin ist die Arbeit für Riemann's Entwicklungsgang charakteristisch, und die Resultate sind bemerkenswerth genug, um die Aufnahme in diese Sammlung zu rechtfertigen. Nachträglich hat die Aufnahme noch eine Rechtfertigung gefunden durch das Interesse, das Cayley dieser Arbeit Riemann's schenkte. (Vgl. Note on Riemann's paper „Versuch . . .“. Mathematische Annalen Bd. 16, wo Cayley auf eine verwandte Untersuchung von sich selbst hinweist: „On a doubly infinite Series“, Quart. Journ. 1. VI. p. 45—47.)

einer independenten Bestimmung derselben umsehen. Ein Mittel dazu bietet uns die Entwicklung der Function, welche aus der ursprünglichen durch Vermehrung der Veränderlichen um einen beliebigen Zuwachs entsteht, nach ganzen positiven Potenzen dieses Zuwachses dar. Denn da die bekannte Entwicklung

$$(1)\qquad z_{(x+h)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{1\,.\,2\ldots p}\,\frac{d^p z}{dx^p} h^p$$

(wo $z_{(x+h)}$ das bedeutet, was aus $z_{(x)}$ wird, wenn man darin statt x $x+h$ setzt) für jeden beliebigen Werth von h gültig ist, so müssen die Coefficienten in derselben einen ganz bestimmten Werth haben; man kann dieselben also zur Definition der Differentialquotienten verwenden. Demgemäss stellen wir folgende Definition auf: der $n$te Differentialquotient der Function $z_{(x)}$ ist gleich dem Coefficienten von h^n in der Entwicklung von $z_{(x+h)}$ nach ganzen positiven Potenzen von h, multiplicirt in einen nach x constanten, nur von n abhängigen Factor, nämlich in $1\,.\,2 \ldots n$. Diese Betrachtungsweise der Differentialquotienten führt sehr leicht zur Feststellung einer allgemeinen Operation, in welcher die Differentiation und Integration enthalten ist und welche wir (da die Bezeichnung und Benennung derselben als die Grenze des Quotienten verschwindender Grössen bei dieser Betrachtungsweise keinen Sinn hat) durch ∂_x^ν bezeichnen und nach dem Vorgange von Lagrange in der Benennung „fonctions dérivées" Ableitung benennen wollen.

Wir verstehen nämlich unter $\partial_x^\nu z$ oder unter dem Ausdruck „νte Ableitung von $z_{(x)}$ nach x" den Coefficienten von h^ν in einer nach Potenzen von h, deren Exponenten um eine ganze Zahl von einander abstehen, rückwärts und vorwärts ins Unendliche fortlaufenden Entwicklung von $z_{(x+h)}$, multiplicirt in einen nach x constanten, nur von ν abhängigen Factor, d. h. wir definiren $\partial_x^\nu z$ durch die Gleichung

$$(2)\qquad z_{(x+h)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} k_\nu \partial_x^\nu z\, h^\nu.$$

In dieser Definition muss nun natürlich der von ν allein abhängige Factor k_ν so bestimmt werden, dass für den Fall, dass die Exponenten von h ganze Zahlen sind, die Reihe (2) in die (1) übergeht, weil nur dann die Differentialquotienten wirklich als besondere Fälle in den Ableitungen enthalten sind; sollte dies nicht möglich sein, so wäre diese Definition unserm Zwecke, eine Operation, welche die Differentiation als besondern Fall in sich schliesst, festzustellen, nicht entsprechend, und wir müssten uns also nach einem anderen Wege, ihn zu erreichen, umsehen.

Bevor wir aber diesen Factor zu bestimmen suchen, wollen wir erst Einiges über die Reihen von der angegebenen Form vorausschicken, da sie, wie man sieht, die Grundlagen dieses ganzen Versuchs einer Theorie der Ableitungen bilden.

Man hat wohl die Behauptung aufgestellt, man könne auf die Reihen im Allgemeinen gar keine sicheren Schlüsse gründen, sondern nur unter der Bedingung, dass man den darin vorkommenden Grössen solche Zahlenwerthe beilege, dass die Reihe convergire, d. h. dass sich ihr (wenigstens genäherter) Werth durch eine wirkliche Ziffernaddition finden lasse. Nun können wir aber, wenn, wie hier immer vorausgesetzt wird, die Coefficienten einem bestimmten Gesetze gehorchen, jeden einzelnen Theil derselben genau angeben; sie ist folglich eine in allen ihren Theilen genau begrenzte, also bestimmte Grösse; und ich sehe darin, dass der Mechanismus der Ziffernaddition nicht ausreicht, diesen ihren bestimmten Werth zu finden, keinen Grund, warum wir nicht die Gesetze, die für die Zahlengrössen als solche erwiesen sind, auf sie anwenden und die Resultate, die wir dadurch erhalten, als richtig ansehen sollten.

Um an einem Beispiele zu zeigen, dass man für eine Reihe von der Form (2) wirklich einen Werth finden kann, wollen wir durch ein Verfahren, das in vielen Fällen für diesen Zweck anwendbar ist, die Function x^μ in eine nach gebrochnen Potenzen von $(x-b)$ fortlaufende Reihe entwickeln, eine Entwicklung, deren wir ohnehin im Lauf der Untersuchung bedürfen.

Die Reihe, die x^μ gleich sein soll und die wir der Kürze wegen durch z bezeichnen, sei

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} c_\alpha (x-b)^\alpha.$$

Wenn $z = x^\mu$, so ist

$$\frac{dz}{dx} = \mu x^{\mu-1},$$

folglich

$$\mu z - x\frac{dz}{dx} = 0;$$

es muss also auch

$$\sum \Big[(\mu-\alpha)c_\alpha - b(\alpha+1)c_{\alpha+1}\Big](x-b)^\alpha = 0$$

sein. Dieser Bedingung ist offenbar Genüge geleistet, sobald

$$(\mu-\alpha)c_\alpha - b(\alpha+1)c_{\alpha+1} = 0.$$

Nun sind aber alle Ausdrücke, welche dieser Differentialgleichung genügen, in den verschiedenen Werthen von kx^μ enthalten, es muss also die Reihe z, in der das Gesetz

$$(\mu - \alpha) c_\alpha - b(\alpha + 1) c_{\alpha+1} = 0$$

stattfindet, nothwendig einem derselben gleich sein; um diesen zu finden, machen wir

$$\ldots\ldots c_{\alpha-1}(x-b)^{\alpha-1} + c_\alpha (x-b)^\alpha = p,$$
$$p' = c_{\alpha+1}(x-b)^{\alpha+1} + c_{\alpha+2}(x-b)^{\alpha+2} \ldots\ldots,$$

also

$$p + p' = z = kx^\mu;$$

folglich

$$\mu p - x\frac{dp}{dx} = (\mu - \alpha) c_\alpha (x-b)^\alpha = X, \quad \mu p' - x\frac{dp'}{dx} = -X.$$

Diese Differentialgleichungen haben zum allgemeinen Integral

$$-\int X x^{-\mu-1} dx + k_1 = p x^{-\mu} = c_\alpha (x-b)^\alpha x^{-\mu};$$
$$+ c_{\alpha-1}(x-b)^{\alpha-1} x^{-\mu} \ldots\ldots\ldots$$
$$\int X x^{-\mu-1} dx + k_2 = p' x^{-\mu} = c_{\alpha+1}(x-b)^{\alpha+1} x^{-\mu}$$
$$+ c_{\alpha+2}(x-b)^{\alpha+2} x^{-\mu} \ldots\ldots\ldots$$

Substituirt man hierin für X seinen Werth und $\frac{b}{y}$ für x, so erhält man

$$p x^{-\mu} = c_\alpha (\mu - \alpha) b^{\alpha-\mu} \int y^{\mu-\alpha-1} (1-y)^\alpha dy + k_1$$
$$= c_\alpha b^{\alpha-\mu} (1-y)^\alpha y^{\mu-\alpha} + c_{\alpha-1} b^{\alpha-1-\mu} (1-y)^{\alpha-1} y^{\mu-\alpha+1} + \cdots,$$

$$p' x^{-\mu} = -c_\alpha (\mu - \alpha) b^{\alpha-\mu} \int y^{\mu-\alpha-1} (1-y)^\alpha dy + k_2$$
$$= c_{\alpha+1} b^{\alpha+1-\mu} (1-y)^{\alpha+1} y^{\mu-\alpha-1}$$
$$+ c_{\alpha+2} b^{\alpha+2-\mu} (1-y)^{\alpha+2} y^{\mu-\alpha-2} + \cdots$$

In dem Falle, dass $\mu > \alpha > -1$, verschwinden nun offenbar die Ausdrücke rechts bezüglich für $y = 0$ und $y = 1$, und die beiden Integrale werden ihnen also, das erste von 0 bis y, das zweite von 1 bis y genommen, genau gleich sein, wenn dieselben zwischen diesen Grenzen continuirlich sind. Es könnte scheinen, als ob diese Bedingung verletzt wäre, so bald einige oder alle Glieder einer Reihe ins Positive oder Negative über alle Grenzen hinaus wachsen; daraus würde aber, da sich dieselben gegenseitig aufheben können, nur folgen, dass sich durch eine wirkliche Addition ein bestimmter Werth für die Reihe nicht finden lässt. Da wir nun den Schluss, als ob die Reihe in einem solchen Falle überhaupt keinen bestimmten Werth habe, nach dem Obigen nicht zugeben, so können wir die Continuität oder Discontinuität der Reihen $px^{-\mu}$ und $p'x^{-\mu}$ nur durch die Betrachtung der

ihnen gleichen Integrale erfahren*). Bekanntlich kann nun aber ein Ausdruck nur discontinuirlich werden, wenn sein Differential unendlich wird; der Ausdruck $(1-y)^{\mu-\alpha-1} y^\alpha$ hat aber für alle endlichen Werthe von y einen endlichen Werth, wenn die Exponenten $\mu - \alpha - 1$ und α positiv sind; die Integrale ändern sich also dann stetig, und aus der Betrachtung der singulären Integrale für $y = 1$ und $y = 0$ ersieht man, dass dies auch noch stattfindet, so lange beide Exponenten grösser als -1 bleiben. Es ist demnach für den Fall, dass $\mu > \alpha > -1$ und y endlich ist**),

$$k = z x^{-\mu} = p x^{-\mu} + p' x^{-\mu} = (\mu - \alpha) c_\alpha b^{\alpha-\mu} \int_0^1 (1-y)^{\mu-\alpha-1} y^\alpha dy$$
$$= c_\alpha b^{\alpha-\mu} \frac{\Pi(\alpha)\, \Pi(\mu-\alpha)}{\Pi(\mu)}$$

(wo Π das bekannte bestimmte Integral bezeichnet). Dies Resultat gilt, wie bemerkt, nur, wenn $\mu > \alpha > -1$; es lässt sich aber auf alle Werthe von μ und α ausdehnen, wenn man das Π einer negativen Zahl (wie im Lauf dieser Untersuchung immer angenommen werden soll) als durch das Gesetz $\Pi(n) = \frac{1}{n+1} \Pi(n+1)$ aus den positiven abgeleitet definirt. Denn erstens muss es nach dem Gesetz, welches angenommener Massen zwischen den Coefficienten der Reihe stattfindet, für jeden Werth von α gelten, wenn nur einer derselben $\lessgtr {\mu \atop -1}$ ist; es ist also, wenn μ positiv ist,

$$k x^\mu = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} k \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\alpha)\, \Pi(\mu-\alpha)} b^{\mu-\alpha} (x-b)^\alpha$$

oder

$$\frac{x^\mu}{\Pi(\mu)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} \frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)} \frac{(x-b)^\alpha}{\Pi(\alpha)};$$

daraus aber erhält man durch n malige Differentiation nach x

$$\frac{x^{\mu-n}}{\Pi(\mu-n)} = \sum \frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)} \frac{(x-b)^{\alpha-n}}{\Pi(\alpha-n)},$$

wodurch das Gesetz auch für negative Werthe von μ erwiesen ist.

*) Behandelt man die Integrale vor der Substitution von $\frac{b}{y}$ statt x, so werden sie für $x = 0$ discontinuirlich. Man erkennt aber auch unter dieser Form leicht, dass die ihnen zugehörigen Constanten für positive und negative Werthe von x dieselben Werthe haben müssen, da der Werth der Integrale bei dem Uebergange des x von $+\infty$ zu $-\infty$ sich stetig ändert.

**) Für den Fall, dass $y = \pm\infty$, also $x = 0$, ist der Werth beider Integrale ∞; folglich $k = \infty - \infty$, d. h. beliebig, was offenbar aus der blossen Betrachtung dieses Falles hervorgeht.

Es ist also ganz allgemein

$$(3) \qquad \frac{x^\mu}{\Pi(\mu)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} \frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)} \frac{(x-b)^\alpha}{\Pi(\alpha)}.$$

Bemerkenswerth ist es, dass man durch diese Formel eine Reihe für x^μ nicht erhält, wenn μ eine negative ganze Zahl ist, da der Ausdruck links dann 0 wird, worauf wir später zurückkommen werden. Man sieht auch, dass es Reihen von dieser Form giebt, die der Null oder einer Constanten, für jeden Werth von x, gleich sind.

Nach dieser Protestation gegen das Verdammungsurtheil, welches man den divergirenden Reihen gesprochen hat, wollen wir jetzt den eingeschlagenen Weg zur Feststellung des Begriffs der Ableitungen weiter verfolgen. Man sieht, dass der Zweck, den wir uns gesetzt haben, dass nämlich die Differentiation als besonderer Fall in der Ableitung enthalten sein soll, erfüllt ist, so bald nur die Function k_ν für alle ganzen positiven Werthe von $\nu = \frac{1}{1.2\ldots\nu}$ und für alle ganzen negativen Werthe $= 0$ ist; denn dann geht die Reihe (2) in die Reihe (1) über; dieser Bedingung kann aber offenbar durch unendlich viele verschiedene Functionen von ν genügt werden; man kann ferner durchaus nicht annehmen, dass es nur Eine Entwicklung derselben Function nach denselben Potenzen von h gebe, d. h. dass nur Ein System von Coefficienten einer Reihe von einer bestimmten Form einen bestimmten Werth gebe; man muss vielmehr unendlich viele verschiedene Systeme als möglich voraussetzen; wir haben also, unbeschadet unseres Zweckes, sowohl unter den verschiedenen möglichen Functionen von ν für k_ν als unter verschiedenen möglichen Systemen von Coefficienten die Wahl, und es ist offenbar am zweckmässigsten, diese Wahl womöglich so zu treffen, dass die Ableitungen noch mehreren Gesetzen gehorchen, die bei einer andern Wahl nur für Ableitungen mit ganzen Indices gültig sein würden.

Hierzu dienen folgende Betrachtungen.

Da der Ausdruck $\Sigma k_\nu \partial_x^\nu z h^\nu$ alle in dieser Form möglichen Entwicklungen $z_{(x+h)}$ umfassen soll, so muss

$$\frac{d\Sigma k_\nu \partial_x^\nu z h^\nu}{dh} = \Sigma k_\nu \nu \partial_x^\nu z h^{\nu-1}$$

alle in dieser Form möglichen Entwicklungen von $\frac{dz_{(x+h)}}{dh}$ umfassen, und ebenso

$$\frac{d\Sigma k_\nu \partial_x^\nu z h^\nu}{dx} = \Sigma k_\nu \frac{d\partial_x^\nu z}{dx} h^\nu$$

alle Entwicklungen dieser Form von $\frac{dz_{(x+h)}}{dx}$. Bekanntlich sind nun $\frac{dz_{(x+h)}}{dh}$ und $\frac{dz_{(x+h)}}{dx}$ identisch; beide Ausdrücke umfassen also genau dieselben Reihen; es müssen also auch $k_{\nu+1}(\nu+1)\partial_x^{\nu+1}z$ und $k_\nu \frac{d\partial_x^\nu z}{dx}$ genau dieselben Werthe haben, d. h. sie sind einander gleich; setzt man nun $k_{\nu+1}(\nu+1) = k_\nu$, was der obigen Hauptbedingung offenbar nicht widerspricht, da für ganze Werthe von ν vermöge derselben dies Gesetz stattfinden muss, so erreicht man dadurch, dass auch für die Ableitungen mit gebrochenen Indices

$$\partial_x^{\nu+1} z = \frac{d\partial_x^\nu z}{dx}$$

ist und folglich allgemein, wenn n eine ganze Zahl ist,

$$(4) \qquad \partial_x^{\nu+n} z = \frac{d^n \partial_x^\nu z}{dx^n}.$$

Aus dem angenommenen Gesetze für k_ν folgt, dass

$$\Pi(\nu) k_\nu = \Pi(\nu+1) k_{(\nu+1)}$$

ist, es hat also die Function $\Pi(\nu)k_\nu$, die wir durch l_ν bezeichnen wollen, für alle Werthe von ν, die um ganze Zahlen von einander abstehen, stets denselben Werth. Wir können daher für die zweckmässigste Wahl der Function l_ν nicht mehr aus der Betrachtung einer einzelnen Entwicklungsform, sondern nur aus der Combination verschiedener Schlüsse ziehen; demgemäss wollen wir versuchen, ob wir sie so wählen können, dass $\partial_x^\nu \partial_x^\mu z = \partial_x^{\nu+\mu} z$ ist.

Lässt man zu diesem Zwecke x in der Formel (2) noch einmal wachsen, und bezeichnet man diesen Zuwachs durch k, so ist

$$(\alpha) \ldots z_{(x+h+k)} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} l_\mu l_\nu \partial_x^\mu \partial_x^\nu z \frac{k^\mu}{\Pi(\mu)} \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$$

und dieser Ausdruck bezeichnet alle nach denselben Potenzen von h und k möglichen Entwicklungen von $z_{(x+h+k)}$. Es ist aber auch

$$(\beta) \ldots z_{(x+h+k)} = \sum_{\mu+\nu=-\infty}^{\mu+\nu=\infty} l_{(\mu+\nu)} \partial_x^{\mu+\nu} z \frac{(h+k)^{\mu+\nu}}{\Pi(\mu+\nu)}$$

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} l_{(\mu+\nu)} \partial_x^{\mu+\nu} z \frac{h^\nu k^\mu}{\Pi(\nu)\Pi(\mu)} \text{ [vermöge (3)].}$$

Nun bezeichnet der letzte Ausdruck (β) zwar nicht alle möglichen Entwicklungen dieser Form von $z_{(x+h+k)}$, da die Gleichung (3) nur

Eine Entwicklung von $\frac{(h+k)^{\mu+\nu}}{\Pi(\mu+\nu)}$ giebt, ohne dass dies die einzig mögliche zu sein brauchte; es müssen aber alle in ihm enthaltenen Entwicklungen auch in (α) enthalten sein; stellt man also für die Function l das Gesetz $l_{(\mu+\nu)} = l_\mu l_\nu$ auf, so werden alle Werthe von $\partial_x^{\mu+\nu} z$ auch Werthe von $\partial_x^\mu \partial_x^\nu z$ sein, obgleich der letzte Ausdruck auch noch andere Werthe haben kann.

Es ist also

$$\partial_x^\mu \partial_x^\nu z = \partial_x^{\mu+\nu} z \tag{5}$$

unter der ausgesprochenen Beschränkung.

Aus $l_{(\mu+\nu)} = l_{(\mu)} l_{(\nu)}$ folgt aber

$$l_{(\mu+\nu+\pi)} = l_{(\mu+\nu)} l_\pi = l_\mu l_\nu l_\pi$$

und allgemein, dass das Product der l verschiedener Zahlen gleich ist dem l ihrer Summe, oder wenn man die einzelnen Factoren einander gleich setzt $l_{(m\nu)} = l_{(\nu)}^m$, so oft m eine ganze Zahl ist; bezeichnet man nun $\frac{m\nu}{n}$ durch π, so ist

$$l_{m\nu} = l_{n\pi} = l_\nu^m = l_\pi^n \text{ oder } l_{\left(\frac{m}{n}\nu\right)} = l_\nu^{\frac{m}{n}}.$$

Das Gesetz $l_{\mu\nu} = l_\nu^\mu$ ist also für alle rationalen Werthe von μ, und folglich (nach dem bekannten Gesetz der Interpolation) allgemein gültig. Da nun für ganze Werthe von ν $l_\nu = 1$ sein muss, so ist $l_\nu = 1^\nu$.

Sollen demnach die Gesetze (4) und (5) für die Ableitungen im Allgemeinen gelten, und die Differentiation in der Ableitung als besonderer Fall enthalten sein, so müssen wir die Ableitungen unter denjenigen Functionen von x wählen, die der Gleichung

$$z_{(x+h)} = \sum \frac{1^\nu h^\nu}{\Pi(\nu)} \partial_x^\nu z = \sum \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} \partial_x^\nu z$$

genügen. Diese Wahl wird am zweckmässigsten auf diejenigen unter ihnen fallen, welche am geschmeidigsten für die Rechnung sind; versucht man aber die Entwicklung einiger Functionen von $x+h$ in Reihen, die nach gebrochenen Potenzen von h fortlaufen, so wird man sehen, dass am leichstesten und einfachsten Entwicklungen in solche Reihen sind, in denen der Coefficient von $\frac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ das Differential des Coefficienten von $\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ ist: wir wollen also obige Begrenzung der Ableitungen dahin beschränken, dass das Zeichen $\partial_x^\nu z$ den Coefficienten von $\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ nicht in allen möglichen Entwicklungen von $z_{(x+h)}$ bezeichnen

soll, sondern nur in solchen, in denen der Coefficient von $\frac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ das Differential des Coefficienten von $\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ ist*).

Hieraus folgt zunächst, dass Ein Werth von $\partial_x^\nu z$ nur einer Entwicklung angehören kann; denn gesetzt, ein Werth von $\partial_x^\nu z$, p_ν, gehörte zwei Entwicklungen, a und b, an, so müssten diese beiden Entwicklungen in allen folgenden Gliedern übereinstimmen, da diese durch Differentiation aus p_ν entstehen. Bezeichnen wir nun die vorhergehenden Glieder in a durch $p_{\nu-1}, p_{\nu-2} \ldots$, in b durch $q_{\nu-1}, q_{\nu-2} \ldots$, so müssen $p_{\nu-1}$ und $q_{\nu-1}$ beide zum Differential p_ν haben; sie können also nur um eine Constante verschieden sein, d. h.

$$q_{\nu-1} = p_{\nu-1} + K_1,$$

ebenso muss

$$q_{\nu-2} = p_{\nu-2} + K_1 x + K_2, \quad q_{\nu-3} = p_{\nu-3} + K_1 \frac{x^2}{\Pi(2)} + K_2 x + K_3$$

sein. Die Entwicklung b ist also

$$= a + \sum_{m=\infty}^{m=1} K_m \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{\Pi(n)} \frac{h^{\nu-n-m}}{\Pi(\nu-n-m)} = a + \sum_{m=\infty}^{m=1} K_m \frac{(x+h)^{\nu-m}}{\Pi(\nu-m)};$$

nun soll aber für alle Werthe von $(x+h)$ $a = b$ sein, was bekanntlich nur stattfinden kann, wenn alle Constanten null sind; dann aber sind beide Entwicklungen identisch.

Ist p_ν ein Werth von $\partial_x^\nu z$, so ist $p_\nu + K\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$ (wo n positiv und ganz und K eine endliche Constante ist) ebenfalls ein Werth desselben; denn die Reihe

$$\sum \left(p_\nu + K\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}\right)\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} = \sum p_\nu \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} + K\frac{(x+h)^{-n}}{\Pi(-n)}$$

$$= \sum p_\nu \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} = z_{(x+h)},$$

und es findet in ihr das Gesetz statt

$$\frac{d\left(p_\nu + K\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(\nu-n)}\right)}{dx} = p_{\nu+1} + K\frac{x^{-\nu-n-1}}{\Pi(-\nu-n-1)}.$$

*) Aus (4) folgt zwar, dass wenn $\sum \partial_x^\nu z \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ eine Entwicklung von $z_{(x+h)}$ ist, $\sum \frac{d\,\partial_x^\nu z}{dx}\frac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ ebenfalls eine Entwicklung von $z_{(x+h)}$ ist, aber nicht dass diese beiden Entwicklungen identisch sind. Durch die gemachte Annahme erreicht man auch, dass die Ableitungen mit ganzen negativen Indices, die nach dem Bisherigen noch gar keinen Sinn hatten, mit den Integralen zusammenfallen, wie weiter unten bewiesen werden wird.

Den Inbegriff aller Werthe von $\partial_x^\nu z$, die sich durch Addition von Ausdrücken von der Form $K\dfrac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$ aus einander ableiten lassen, wollen wir ein System von Werthen nennen; es sind also alle Werthe von $\partial_x^\nu z$, die demselben Systeme angehören, in dem Ausdruck

$$(6)\qquad p_\nu + \sum_{n=\infty}^{n=1} K_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$$

enthalten (wo K_n endliche Constanten bedeuten).

Wir wollen nun einen Werth von $\partial_x^\nu z$ zu bestimmen suchen.

Bekanntlich ist

$$z_{(x)} = z_{(k)} + \left(\frac{dz}{dx}\right)_{(k)}(x-k) + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{(k)}\frac{(x-k)^2}{1.2} + \cdots,$$

sobald $z_{(x)}$ zwischen den Grenzen x und k continuirlich ist; setzt man hierin $x+h$ für x und entwickelt die Glieder der Reihe mittels (3) nach Potenzen von h, so erhält man

$$z_{(x+h)} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty} \frac{h^\mu}{\Pi(\mu)}\left(z_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu}}{\Pi(-\mu)} + \left(\frac{dz}{dx}\right)_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu+1}}{\Pi(-\mu+1)} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu+2}}{\Pi(-\mu+2)} + \cdots\right)$$

und in dieser Reihe ist der Coefficient von $\dfrac{h^\mu}{\Pi(\mu)}$ das Differential des Coefficienten von $\dfrac{h^{\mu-1}}{\Pi(\mu-1)}$; er ist folglich ein Werth von $\partial_x^\mu z$, den wir durch p_μ bezeichnen wollen. Differentiirt man nach k, so erhält man

$$\frac{dp_\mu}{dk} = -z_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)},\text{ folglich } p_\mu = \int -z_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)}\,dk.$$

Nun verschwinden alle Glieder der obigen Reihe für $k = x$; das Integral wird also von k bis x genommen $= p_\mu$ sein, wenn es zwischen den Grenzen continuirlich ist; dies ist aber, da z zwischen den Grenzen x und k continuirlich sein soll und $-\mu-1 > -1$, offenbar der Fall und es ist also

$$(7)\qquad \int_x^k -z_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)}\,dk = \frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_k^x (x-t)^{-\mu-1}z_{(t)}\,dt$$

ein Werth von $\partial_x^\mu z$, sobald z zwischen den Grenzen x und k continuirlich und μ negativ ist. Der derselben Entwicklnng angehörige Werth von $\partial_x^{\mu-n} z$ ist gleich

$$\frac{1}{\Pi(-\mu+n-1)}\int_k^x (x-t)^{-\mu+n-1}z_{(t)}\,dt.$$

Man sieht leicht, dass, je nachdem man dem k verschiedene Werthe giebt, verschiedene Entwicklungen von $z_{(x+h)}$ daraus hervorgehen, aber alle diese Entwicklungen gehören demselben Systeme an. Denn aus dem Werth

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_k^x (x-t)^{-\mu-1}z_{(t)}\,dt$$

geht offenbar

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_{k_1}^x (x-t)^{-\mu-1}z_{(t)}\,dt$$

hervor durch Addition von

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_{k_1}^k (x-t)^{-\mu-1}z_{(t)}\,dt = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^{-\mu-1-n}}{\Pi(-\mu-1-n)}\int_{k_1}^k \frac{(-t)^n}{\Pi(n)}z_{(t)}\,dt;$$

da nun z zwischen x und k_1 und also auch zwischen k und k_1 continuirlich ist, so sind alle jene Integrale endliche und zwar nach x constante Grössen. Man wird demnach durch das angewandte Verfahren stets auf dasselbe System von Werthen gelangen; beschränken wir also den Begriff der Ableitungen auf dies System von Werthen, so haben wir die Bestimmung derselben auf bekannte Werthe zurückgeführt und werden mittels dieser Definition die Eigenschaften derselben und ihre Werthe für bestimmte Functionen ableiten können.

Es ist demnach

$$1.\qquad \partial_x^\nu z = \frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int_k^x (x-t)^{-\nu-1}z_{(t)}\,dt + \sum_{n=\infty}^{n=1} K_n\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-n-\nu)},$$

wenn K_n endliche willkürliche Constanten sind*), ν negativ, und z zwischen den Grenzen x und k continuirlich ist; für einen Werth von ν aber, der $\geqq 0$ ist, bezeichnet $\partial_x^\nu z$ dasjenige, was aus $\partial_x^{\nu-m} z$ (wo $m > \nu$) durch $m$malige Differentiation nach x hervorgeht**), ein Werth, welcher stets auch der Gleichung

*) Alle diese willkürlichen Functionen wollen wir durch φ_ν bezeichnen; wir machen zugleich darauf aufmerksam, dass (wenn n positiv und ganz) jede Function φ_ν auch eine Function $\varphi_{\nu-n}$ ist.

**) Die Definition

$$\partial_x^\nu z = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{d^n z_{(x)}}{dx^n}\right)_k \frac{(x-k)^{n-\nu}}{\Pi(n-\nu)} + \varphi_\nu,$$

welche mit der gegebenen identisch ist, würde zwar für alle Werthe von ν gelten; wir haben ihr aber die gewählte ihrer grösseren Geschmeidigkeit wegen vorgezogen.

$$2.\qquad z_{(x+h)} = \sum_{n=\infty}^{n=1} \frac{h^{\nu-n}}{\Pi(\nu-n)} \int^{(n)} \partial_x^\nu z\, dx^n + \frac{h^\nu}{\Pi(n)} \partial_x^\nu z + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{h^{\nu+n}}{\Pi(\nu+n)} \frac{d^n \partial_x^\nu z}{dx^n}$$

genügen muss*). Hieraus folgt

$$3.\qquad \partial_x^{-m} z = \int_k^{x\,(m)} z_{(t)}\, dt^m + \sum_{n=m}^{n=1} K_n \frac{x^{-n+m}}{\Pi(-n+m)}$$

und

$$4.\qquad \partial_x^0 z = z$$

$$5.\qquad \partial_x^m z = \frac{d^m z}{dx^m},$$

ferner

$$6.\qquad \partial_x^\mu \partial_x^\nu z = \partial_x^{\nu+\mu} z + \varphi_\mu .$$

Jeder Werth von $\partial_x^{\nu+\mu} z$ ist also auch ein Werth von $\partial_x^\mu \partial_x^\nu z$.

Das Umgekehrte findet aber nur statt, wenn μ eine ganze positive oder ν eine ganze negative Zahl ist. In diesem Falle sind also beide Ausdrücke identisch. Aus der Definition folgt noch (wenn c eine Constante bedeutet)

$$7.\qquad \partial_x^\nu (p+q) = \partial_x^\nu p + \partial_x^\nu q$$

$$8.\qquad \partial_x^\nu (cp) = c\,\partial_x^\nu p$$

$$9.\qquad \partial_{x+c}^\nu z = \partial_x^\nu z$$

$$10.\qquad \partial_{cx}^\nu z = \partial_x^\nu z\, c^{-\nu}.$$

Zwei Werthe von $\partial_x^\nu z$ und $\partial_x^\mu z$, in denen die Constanten K, K_1, etc. sämmtlich einander gleich sind, sollen correspondirende Werthe heissen. Alle derselben Entwicklung von $z_{(x+h)}$ angehörigen Werthe sind correspondirende.

Wir wollen nun zu der Bestimmung der Ableitungen bestimmter Functionen von x übergehen. Dabei kann es natürlich nur darauf ankommen, einen Werth Einer Ableitung zu finden, da sich aus diesem ihr allgemeiner Werth durch Addition der Function φ sofort ergiebt, und zwar wird dieser Werth, wenn die Umformung des Ausdrucks 1. überhaupt etwas nützen soll, ein einfacherer, als dieser Ausdruck, also eine explicite Function von x in endlicher Form sein

*) Ob die obige Formel 1. alle Werthe enthält, die dieser Gleichung genügen, hängt offenbar davon ab, ob die Functionen φ_ν die einzigen sind, welche, statt $\partial_x^\nu z$ substituirt, die Reihe 2. zu Null machen. Nun lässt sich zwar ohne Schwierigkeit zeigen, dass keine algebraische Function von x, die nicht in φ_ν enthalten ist, dies leistet; ob aber überhaupt keine Function dieser Bedingung genügt, darüber konnte ich bis jetzt zu keinem Resultat gelangen.

müssen. Diese Umformung wird also im Allgemeinen darin bestehen, dass man das x aus dem Integralzeichen herauszuschaffen sucht.

Betrachten wir nun zuerst die Function x^μ.

Ist μ positiv, so ist x^μ für alle Werthe von x continuirlich; es wird also

$$\frac{1}{\Pi(-\nu-1)} \int_0^x (x-t)^{-\nu-1} t^\mu\, dt$$

immer ein Werth von $\partial_x^\nu(x^\mu)$ sein; dies Integral ist aber

$$= \frac{1}{\Pi(-\nu-1)} \int_0^1 x^{\mu-\nu} (1-y)^{-\nu-1} y^\mu\, dy = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)} x^{\mu-\nu}.$$

Da das $m$te Differential hiervon $\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu-m)} x^{\mu-\nu-m} = \partial_x^{\nu+m}(x^\mu)$ ist, (4), so ist für jeden Werth von ν

$$\partial_x^\nu (x^\mu) = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)} x^{\mu-\nu} + \varphi_\nu .$$

Ist μ negativ, so ist x^μ für $x = 0$ discontinuirlich, für alle andern Werthe aber continuirlich; in dem Ausdrucke 1. müssen also x und k stets gleiches Zeichen haben. Nun erhält man aber durch $m$malige partielle Integration

$$\frac{1}{\Pi(-\nu-1)} \int_k^x (x-t)^{-\nu-1} t^\mu\, dt$$

$$= \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-\nu-1-m)\,\Pi(\mu+m)} \int_k^x (x-t)^{-\nu-1-m} t^{\mu+m}\, dt + \varphi_\nu,$$

so lange $-\nu - m > 0$ ist, wodurch sich also, wenn $-\nu > -\mu$ ist, diejenigen Integrale, worin $\mu < -1$ ist, auf solche zurückführen lassen, in denen der Exponent von $t \gtreqless -1$ ist; ist er > -1, so gehört

$$\int_0^k (x-t)^{-\nu-1-m} t^{\mu+m}\, dt$$

zu den Functionen φ_ν, und es ist also

$$\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-\nu-1-m)\,\Pi(\mu+m)} \int_0^x (x-t)^{-\nu-1-m} t^{\mu+m}\, dt = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)} x^{\mu-\nu}$$

ein Werth von $\partial_x^\nu(x^\mu)$, wenn $-\nu > -\mu$, welches Resultat nach dem Gesetze $\partial_x^{\nu+1} z = \frac{d\,\partial_x^\nu z}{dx}$ für jedes ν gelten muss.

Ist aber $\mu + m = -1$, so ist

$$\int_k^x (x-t)^{-\nu-1-m} t^{\mu+m} dt = \log x\, x^{\mu-\nu} - \log k\, x^{\mu-\nu} + \int_k^x \frac{(x-t)^{\mu-\nu} - x^{\mu-\nu}}{t} dt$$

$$= \log x\, x^{\mu-\nu} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\mu-\nu} - x^{\mu-\nu}}{t} dt + \varphi_\nu$$

$$= \log x\, x^{\mu-\nu} + x^{\mu-\nu} \int_0^1 \frac{y^{\mu-\nu} - y}{1-y} dt$$

$$= \log x\, x^{\mu-\nu} - (\Psi(\mu-\nu) - \Psi(0))\, x^{\mu-\nu}.$$

Verallgemeinert man auch das hieraus erhaltene Resultat durch Differentiation, so hat man folgende Werthe für $\partial_x^\nu(x^\mu)$,

11. $$\partial_x^\nu(x^\mu) = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)} x^{\mu-\nu},$$

wenn μ nicht eine negative ganze Zahl ist;

12. $$\partial_x^\nu(x^\mu) = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-1)} \frac{1}{\Pi(\mu-\nu)} \left[\log x\, x^{\mu-\nu} - (\Psi(\mu-\nu) - \Psi(0))\, x^{\mu-\nu}\right],$$

wennn μ eine ganze negative Zahl ist.

Es ist zu bemerken, dass aus der Formel 12. die Formel 11. hervorgeht, sobald man nur die Constanten, die für diesen Fall $\frac{\infty}{\infty}$ werden, einer geeigneten Behandlung unterwirft, was auch in dem Fall geschehen muss, wo $(\mu-\nu)$ und μ beide ganze negative Zahlen sind. Man übersieht leicht, dass die aus diesen Formeln für verschiedene Werthe von ν hervorgehenden Werthe correspondirende sind; dies ist auch der Grund, warum wir in 12. nicht, wie wir es für den Fall $\mu =$ einer negativen ganzen Zahl konnten, den blos $x^{\mu-\nu}$ enthaltenden Theil in die Function φ_ν einschlossen.

Wendet man ein ähnliches Verfahren auf e^x an, so erhält man

13. $$\partial_x^\nu(e^x) = \frac{1}{\Pi(-\nu-1)} \int_{-\infty}^x e^t (x-t)^{-\nu-1} dt = \frac{1}{\Pi(-\nu-1)} e^x \int_0^\infty e^{-y} y^{-\nu-1} dy = e^x.$$

Die Ableitungen von $\log x$ ergeben sich durch dieselbe Methode, noch leichter aber und zwar sogleich für alle Werthe von ν aus 6. und 12.

14. $$\partial_x^\nu(\log x) = \partial_x^\nu \partial_x^{-1} x^{-1} = \frac{1}{\Pi(-\nu)} \left(\log x\, x^{-\nu} - [\Psi(-\nu) - \Psi(0)]\, x^{-\nu}\right).$$

Durch Anwendung der Regeln 7 bis 10 findet man aus 13. und 14. mit der grössten Leichtigkeit auch die Ableitungen von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und arc $(\operatorname{tg} = x)$.

Schliesslich bemerken wir noch, dass sich die aufgestellte Theorie mit derselben Sicherheit auch auf den Fall ausdehnen lässt, wo man den in Rede stehenden Grössen imaginäre Werthe beilegt.

XX.

Neue Theorie des Rückstandes in electrischen Bindungsapparaten.*)

1.

Vorbemerkung.

Herrn Professor Kohlrausch ist es gelungen, die Bildung des Rückstandes in electrischen Bindungsapparaten scharfen Messungen zu unterwerfen und darauf eine den Beobachtungen genügende Theorie dieser Erscheinung zu gründen, welche in Poggendorff's Annalen**) veröffentlicht worden ist. Die Genauigkeit dieser Messungen reizte mich, ein aus andern Gründen wahrscheinliches Gesetz für die Bewegungen der Electricität an denselben zu prüfen; in der Form, welche ihm für diesen Zweck gegeben wurde, ist es auf die Bewegungen der Electricität in allen ponderabeln Körpern anwendbar, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die in Betracht kommenden ponderabeln Körper gegen einander ruhen und keine merklichen thermischen und magnetischen (oder voltainductorischen) Wirkungen und Einflüsse stattfinden. Behufs unbeschränkter Anwendbarkeit bedarf es noch einer Umarbeit und Ergänzung, mit welcher ich mich an einem andern Orte beschäftigen werde.

Im folgenden Aufsatze, welcher einem Schreiben an Herrn Professor Kohlrausch entnommen ist, ist diese neue Theorie des electrischen Rückstandes indess nicht selbstständig, sondern im Anschlusse an seine Theorie entwickelt worden; ich war bestrebt, jene Theorie, nicht geradeswegs die Erscheinungen auf sie zurückzuführen. Ich habe daher die von Herrn Professor Kohlrausch in seiner Abhandlung gebrauchten

*) Die hier mitgetheilte Abhandlung stammt aus dem Jahre 1854; ihre Veröffentlichung unterblieb wahrscheinlich, weil der Verfasser nicht gern auf eine ihm angerathene Abänderung derselben eingehen wollte.

**) Bd. 91. pag. 56.

Begriffe: electrisches Moment der isolirenden Wand, Spannung, Gesammtladung, disponible Ladung, Rückstand, überall durch die hier zu Grunde gelegten Begriffe ausgedrückt und auch sonst in mancher Hinsicht die dortige Betrachtungsweise berücksichtigt.

2.

Das der Rechnung zu Grunde gelegte Gesetz.

Es bezeichne t die Zeit, x, y, z rechtwinklige Coordinaten, ϱ die Dichtigkeit der Spannungselectricität zur Zeit t im Punkte (x, y, z), u den 4πten Theil des (Gauss'schen) Potentials aller wirkenden electrischen Massen im Punkte (x, y, z) zur Zeit t, also die Grösse

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}},$$

wenn $\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'$ die Spannungselectricität des Elements $dx'\,dy'\,dz'$ zur Zeit t bedeutet. Man hat dann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{dz^2}=-\varrho.$$

Die hier anzuwendenden Gesetze für die Bewegungen der Electricität im Innern eines homogenen ponderabeln Körpers unter den erwähnten Umständen sind nun folgende:

I. Die electromotorische Kraft im Punkte (x, y, z) zur Zeit t setzt sich zusammen aus zwei Bestandtheilen, aus einem dem Coulombschen Gesetz gemässen, dessen Componenten proportional

$$-\frac{\partial u}{\partial x},\ -\frac{\partial u}{\partial y},\ -\frac{\partial u}{\partial z}$$

sind, und einem andern, dessen Componenten proportional sind

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial x},\ -\frac{\partial \varrho}{\partial y},\ -\frac{\partial \varrho}{\partial z},$$

so dass ihre Componenten gleichgesetzt werden können

$$-\frac{\partial u}{\partial x}-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial x},\ -\frac{\partial u}{\partial y}-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial y},\ -\frac{\partial u}{\partial z}-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial z},$$

wo $\beta\beta$ nur von der Natur des ponderabeln Körpers abhängt.

II. Die Stromintensität ist der electromotorischen Kraft proportional, also

$$-\frac{\partial u}{\partial x}-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial x}=\alpha\xi,\ -\frac{\partial u}{\partial y}-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial y}=\alpha\eta,\ -\frac{\partial u}{\partial z}-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial z}=\alpha\zeta,$$

wenn α eine von der Natur des ponderabeln Körpers abhängige Constante und ξ, η, ζ die Componenten der Stromintensität sind.

Mit Zuziehung der phoronomischen Gleichung

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0$$

erhält man daher für u die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\varrho$$

und

$$\alpha\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\varrho-\beta\beta\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\right)=0\text{*)}$$

oder, wenn man die Länge β und die Zeit α zur Einheit nimmt,

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\varrho-\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\right)=0.$$

Dies giebt für u eine partielle Differentialgleichung, welche in Bezug auf t vom ersten, in Bezug auf die Raumcoordinaten vom vierten Grade ist, und um von einem bestimmten Zeitpunkte an u allenthalben im Innern des ponderabeln Körpers zu bestimmen, werden ausser dieser Gleichung noch eine Bedingung in jedem Punkte desselben für die Anfangszeit und für die Folge in jedem Oberflächenpunkte zwei Bedingungen erforderlich sein.

*) Hiernach sind die Gleichungen für das Gleichgewicht (in einem electrisirten isolirten Leiter)

$$-\frac{\partial u}{\partial x}-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial x}=0,\ -\frac{\partial u}{\partial y}-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial y}=0,\ -\frac{\partial u}{\partial z}-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial z}=0,$$

oder

$$u-\beta\beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\text{const.},$$

für die Stromausgleichung oder das bewegliche Gleichgewicht im Schliessungsbogen constanter Ketten

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}=0$$

oder

$$\varrho-\beta\beta\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\right)=0.$$

Wenn die Länge β gegen die Dimensionen des Körpers sehr klein ist, so nimmt $u-\text{const.}$ im ersteren Falle, und ϱ im zweiten von der Oberfläche ab sehr schnell ab und ist im Innern allenthalben sehr klein, und zwar ändern sich die Grössen mit dem Abstande p von der Oberfläche, so lange deren Krümmungshalbmesser gegen β sehr gross bleibt, nahe wie $e^{-\frac{p}{\beta}}$. Dieser Fall wird bei den metallischen Leitern angenommen werden müssen.

3.

Plausible Auffassung dieses Gesetzes.

Das Bewegungsgesetz der Electricität ist unter voriger Nummer durch Begriffe, welche jetzt in der Lehre von der Electricität gebräuchlich sind, ausgedrückt worden. Diese Auffassung desselben ist jedoch einer Umarbeitung fähig, durch welche, wie es scheint, ein etwas treueres und vollständigeres Bild des wirklichen Zusammenhangs gewonnen wird.

Statt eine Ursache anzunehmen, welche im Punkte (x, y, z) die positive Electricität in den Richtungen der drei Axen mit den Kräften

$$-\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial x},\ -\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial y},\ -\beta\beta\frac{\partial\varrho}{\partial z}$$

und die negative mit den entgegengesetzten treibt, kann man auch eine Ursache annehmen, welche im Punkte (x, y, z) die positive Electricität mit der Intensität $\beta\beta\varrho$ zu vermindern und die negative zu vermehren strebt, und diese Ursache kann man in einem Widerstreben des Ponderabile gegen das Enthalten von Spannungselectricität oder den electrischen Zustand suchen.

Ebenso kann man auch die electromotorische Kraft, deren Componenten

$$-\frac{\partial u}{\partial x},\ -\frac{\partial u}{\partial y},\ -\frac{\partial u}{\partial z}$$

sind, durch eine Ursache von der Intensität u im Punkte (x, y, z) ersetzen, welche die Dichtigkeit der Electricität gleichen Zeichens zu vermindern und die der entgegengesetzten zu vermehren strebt.

Es ist aber dann, um der Grösse ϱ eine reelle Bedeutung zu geben, nicht nöthig zweierlei Electricitäten anzunehmen und $\varrho\, dx\, dy\, dz$ als den Ueberschuss der positiven Electricität des Elements $dx\, dy\, dz$ über die negative zu betrachten, sondern man kann im Wesentlichen zu der Franklin'schen Auffassung der electrischen Erscheinungen zurückkehren, am einfachsten wohl durch folgende Annahme:

Das Ponderabile, welches Sitz der Electricität ist, erfüllt den Raum stetig[*]) und mit gleichmässiger electrischer Capacität, welche seinem Leitungswiderstande umgekehrt proportional ist, und von welcher die Dichtigkeit der wirklich in ihm enthaltenen Electricität immer nur um einen unmerklich kleinen Bruchtheil abweicht. Bei überschüssiger oder fehlender Electricität (positiver oder negativer Spannungselectricität) geräth das Ponderabile in einen positiv oder negativ electrischen Zustand, vermöge dessen es die Dichtigkeit der in ihm enthaltenen Electricität zu vermindern oder zu vermehren strebt und zwar mit einem Drucke, welcher gleich ist der Dichtigkeit seiner Spannungselectricität, ϱ, multiplicirt in einen von der Natur des Ponderabile abhängigen Factor (seine antelectrische Kraft). Ihrerseits geräth bei auftretender Spannungselectricität

*) Auf einem andern Blatt findet sich hierzu folgende Bemerkung: Insofern dies Ponderabile (Kupfer, Glas) als Sitz der Electricität betrachtet und ihm eine bestimmte electrische Capacität und ein bestimmter Leitungswiderstand beigelegt wird, muss als von ihm eingenommener Raum der ganze Raum, in welchem sich die specifische Eigenthümlichkeit desselben geltend macht, nicht etwa der Ort von Kupfer- oder Glasmoleculen angesehen werden.

die Electricität in einen Zustand, Spannung, vermöge dessen sie ihre Dichtigkeit zu vermindern (oder bei negativer Spannung zu vermehren) strebt und dessen Grösse u in jedem Augenblicke abhängt von sämmtlichen Massen Spannungselectricität nach der Formel

$$u = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\varrho'\, dx'\, dy'\, dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

oder auch vermittelst des Gesetzes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\varrho$$

und der Bedingung, dass u in unendlicher Entfernung von Spannungselectricität unendlich klein bleibt. Die Electricität bewegt sich gegen die ponderabeln Körper mit einer Geschwindigkeit, welche in jedem Augenblicke der aus diesen Ursachen hervorgehenden electromotorischen Kraft gleich ist.

Uebrigens müssen diese Bewegungsgesetze der Electricität, wenn deren Verhältniss zu Wärme und Magnetismus in Rechnung gezogen werden soll, vorbemerktermassen selbst noch abgeändert und umgeformt werden, und dann wird eine veränderte Auffassung dieser Erscheinungen nöthig.[*])

4.

Behandlung des Problems der Rückstandsbildung. Ausdruck der zu bestimmenden Grössen durch das Potential.

Indem ich mich nun zur Untersuchung der Rückstandsbildung wende, beschäftige ich mich zunächst damit, die zu bestimmenden Grössen durch das Potential, oder vielmehr, was die Rechnung vereinfacht, durch die ihm proportionale Function u auszudrücken. Zu grösserer Bequemlichkeit für die an abstracte Grössenbetrachtung minder gewöhnten Physiker habe ich das Potential als das Maass einer Ursache, Spannung, betrachtet, welche die Dichtigkeit der Electricität im Punkte (x, y, z) zu vermindern strebt, und diese im Punkte $(x, y, z) = u$, also die Componenten der durch sie bewirkten electromotorischen Kraft

$$= -\frac{\partial u}{\partial x},\ -\frac{\partial u}{\partial y},\ -\frac{\partial u}{\partial z}$$

gesetzt. Man muss dann als Spannungseinheit die im Innern einer Kugel vom Radius 1 durch auf der Oberfläche vertheilte Electricität von der Dichtigkeit 1 entstehende Spannung annehmen oder als Einheit der electromotorischen Kräfte die von der Masse 4π in der Ent-

*) Dieser ganze Artikel ist im Manuscript durchgestrichen, wahrscheinlich nur aus dem Grunde, weil der Verfasser durch die Eigenthümlichkeit der hier vorgetragenen Auffassung, welche auf das Innigste mit seinen naturphilosophischen Principien zusammenhängt, bei den Physikern damals Anstoss zu erregen befürchtete.

fernungseinheit erzeugte. Zur Vereinfachung der Rechnung ist ferner als Zeiteinheit α, als Längeneinheit β eingeführt worden; macht man die Einheit der electromotorischen Kräfte auf die hier angenommene Weise von der electrischen Masseneinheit abhängig, so sind α und $\beta\beta$ die Maasse für den Leitungswiderstand $\left(=\frac{\text{electromotorische Kraft}}{\text{Stromintensität}}\right)$ und die antelectrische Kraft $\left(=\frac{\text{Druck des Ponderabile}}{\text{Dichtigkeit der Spannungselectricität}}\right)$ des ponderabeln Sitzes.

Zur Discussion der vorliegenden Beobachtungen genügt die Lösung der Aufgabe: die Aenderungen der Spannungselectricität im Innern einer überall gleich dicken homogenen Wand zu bestimmen, wenn die Oberflächen mit vollkommenen Leitern belegt sind, gleiche Mengen entgegengesetzter Electricität empfangen und keine electromotorische Kraft besitzen (keine Contactwirkung in ihnen stattfindet), und ihre Dimensionen gegen die Dicke der Wand als unendlich gross betrachtet werden dürfen (d. h. der Einfluss des Randes und der Krümmung vernachlässigt werden darf).

Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte der Wand, die x-Axe auf ihre Oberflächen senkrecht und bezeichnet ihre halbe Dicke durch a, so wird der Ausdruck für die Wand $a > x > -a$, u eine blosse Function von x und

$$\varrho = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

folglich

$$\int_{x'}^{x''} \varrho\, \partial x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x''}.$$

Die zwischen zwei Werthen von x über der Flächeneinheit enthaltene Electricitätsmenge ist also, geometrisch ausgedrückt, gleich der Differenz zwischen den Tangenten der Neigungen der Spannungscurve, d. h. der Curve, deren Ordinate für die Abscisse x gleich u ist; diese Curve ist gerade, wo keine Spannungselectricität vorhanden ist, nach oben (oder für Orte mit grösseren Ordinaten) convex, wo positive, nach unten, wo negative stetig vertheilt ist, und gebrochen für einen Werth von x, bei welchem eine endliche Menge angehäuft ist.

Die durch eine Ladung erzeugte oder durch eine Entladung vernichtete Spannung wird daher stets dargestellt durch eine Curve von der Form A, d. h. ist sie in den Belegungen u_a, u_{-a} und folglich in der Mitte

$$\frac{u_a + u_{-a}}{2} = u_0,$$

so ist sie im Innern

$$= u_0 + \frac{x}{a}(u_a - u_0).$$

Durch das Eindringen der Electricität ins Innere erhält die Spannungscurve die Form B. Für die Flächeneinheit ist die Gesammtmenge der geschiedenen Electricitäten gleich der Tangente ihrer Neigung in der Mitte

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0,$$

das electrische Moment

$$\int_{-a}^{+a} \varrho x\, \partial x = u_a - u_{-a} - a\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_a + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}\right) = u_a - u_{-a},$$

also gleich der Spannungsdifferenz der Oberflächen.

Durch eine Entladung wird die Spannung in den Belegungen aufgehoben. Die vernichtete Spannung ist daher in den Belegungen $= u_a$, u_{-a}, im Innern

$$= u_0 + \frac{x}{a}(u_a - u_0),$$

die disponible Ladung für die Flächeneinheit

$$= \frac{1}{a}(u_a - u_0),$$

die bleibende Spannung im Innern

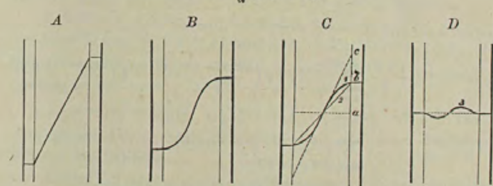
$$= u - u_0 - \frac{x}{a}(u_a - u_0),$$

und für die Flächeneinheit der verborgene Rückstand

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \frac{1}{a}(u_a - u_0),$$

die der Oberfläche ($x = a$) durch die Entladung mitgetheilte Electricitätsmenge

$$= -\frac{1}{a}(u_a - u_0).$$



1) Spannungscurve der Gesammtladung
2) " der disponiblen Ladung
3) " des Rückstandes.
Gesammtladung: $= ac$, disponible Ladung: ab, Rückstand: $= bc$.

5.

Lösung der Aufgabe im einfachsten Falle, wo kein Ab- und Zufluss durch die Oberflächen stattfindet.

Nach dieser Uebersicht und geometrischen Darstellung der gesuchten Grössen gehe ich zu ihrer Bestimmung durch Rechnung nach dem angegebenen Gesetze über. Ich behandle zunächst den Fall, wo anfangs im Innern keine freie Electricität vorhanden ist, und den Oberflächen auf der Flächeneinheit die Masseneinheit mitgetheilt wird, später aber kein Ab- und Zufluss durch die Oberflächen stattfindet.

Die Bedingungen zur Bestimmung von u sind:

$$\text{für } t>0,\ a>x>-a \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\varrho, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} = 0$$

$$t=0,\ a>x>-a \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$t>0,\ x=\pm a \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0,$$

welche letzteren ausdrücken, dass in den Oberflächen sowohl die Electricitätsmengen, als der Durchfluss, und folglich die electromotorische Kraft $= 0$ sein soll.

Diesen Bedingungen genügen zwei Ausdrücke, der eine für kleine, der andere für grosse Werthe von t brauchbar.

Setzt man zur Abkürzung

$$\int_\lambda^\infty e^{-\lambda\lambda}\, d\lambda = \varphi(\lambda)$$

und

$$\int_\lambda^\infty \varphi(\lambda)\, d\lambda = \tfrac{1}{2} e^{-\lambda\lambda} - \lambda\varphi(\lambda) = \psi(\lambda),$$

so genügt erstens

$$u-u_0 = e^{-t}\left[x + \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \sum_{1,\infty}^{n} (-1)^n \left(\psi\left(\frac{a(2n-1)-x}{2\sqrt{t}}\right) - \psi\left(\frac{a(2n-1)+x}{2\sqrt{t}}\right)\right)\right],$$

zweitens

$$u-u_0 = e^{-t} \sum \frac{(-1)^{n-1}\, 2a}{\pi\pi(n-\frac{1}{2})^2} e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi\pi}{aa} t} \sin(n-\tfrac{1}{2})\frac{x\pi}{a}.$$

Die hieraus sich ergebenden Bestimmungen sind:

für die Vertheilung der Electricität*)

*) Vergl. Jacobi. Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. §§. 61, 63.

$$\varrho = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} \sum (-1)^{n-1} \left(e^{-\frac{(a(2n-1)-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(a(2n-1)+x)^2}{4t}}\right)$$

$$= \frac{2e^{-t}}{a} \sum (-1)^{n-1} e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi\pi}{aa} t} \sin(n-\tfrac{1}{2})\frac{x\pi}{a},$$

für die Gesammtladung

$$Q_t^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = e^{-t}\left(1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum (-1)^n \varphi\left(\frac{(n-\frac{1}{2})a}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

$$= e^{-t} \sum \frac{(-1)^{n-1}\, 2}{(n-\frac{1}{2})\pi} e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi\pi}{aa} t},$$

für die disponible Ladung

$$L_t^* = \frac{u_a - u_{-a}}{2a} = e^{-t}\left\{1 - \frac{2\sqrt{t}}{a\sqrt{\pi}}\left(1 + 4\sum (-1)^n \psi\left(\frac{an}{\sqrt{t}}\right)\right)\right\}$$

$$= e^{-t} \sum \frac{2}{\pi\pi(n-\frac{1}{2})^2} e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi\pi}{aa} t},$$

für den Rückstand

$$r_t^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \frac{u_a - u_{-a}}{2a}$$

$$= \frac{2\sqrt{t}\, e^{-t}}{a\sqrt{\pi}} \left\{1 + 4\sum (-1)^n \left(\psi\left(\frac{an}{\sqrt{t}}\right) + \frac{a}{2\sqrt{t}} \varphi\left(\frac{(n-\frac{1}{2})a}{\sqrt{t}}\right)\right)\right\}$$

$$= e^{-t} \sum \frac{2}{\pi(n-\frac{1}{2})} \left((-1)^{n-1} - \frac{1}{\pi(n-\frac{1}{2})}\right) e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \frac{\pi\pi}{aa} t}.$$

6.

Zurückführung der allgemeinen Aufgabe auf diesen einfachsten Fall.

Um auf diesen einfachsten Fall den Fall zurückzuführen, wo Ab- und Zufluss durch die Oberflächen stattfindet, bezeichne $\chi(t)$ den Ausdruck für die Spannungsdifferenz $u - u_0$ zur Zeit t in diesem einfachsten Falle; für negative Werthe von t sei $\chi(t) = 0$.

Soll nun die Spannung bestimmt werden, welche entsteht, wenn den Oberflächen $(x = \pm a)$ zur Zeit 0 die Mengen $\pm\mu$, darauf zur Zeit t' die Mengen $\pm\mu'$, zur Zeit t'' die Mengen $\pm\mu''$, ... mitgetheilt werden, so hat man

$$u - u_0 = \mu\chi(t) + \mu'\chi(t-t') + \mu''\chi(t-t'') + \cdots;$$

denn dieser Werth genügt sämmtlichen zu seiner Bestimmung gegebenen Bedingungen.

Findet ein stetiger Ab- und Zufluss von Electricität statt, so wird

$$u - u_0 = \int_0^t \chi(t-\tau) \frac{d\mu}{d\tau}\, d\tau,$$

wenn $\pm \frac{d\mu}{d\tau}$ die im Zeitelement $d\tau$ durch die Oberfläche ($x = \pm a$) nach Innen strömende Electricitätsmenge bezeichnet.

Beide Ausdrücke kann man zusammenfassen in dem Ausdruck

$$u - u_0 = \int_0^t \chi(t - \tau)\, d\mu,$$

wenn man durch $\pm d\mu$ die im Zeitelement $d\tau$ auf der Oberfläche ($x = \pm a$) hinzukommende Electricitätsmenge bezeichnet, wo diese dann einen endlichen Werth hat oder $d\tau$ proportional ist, je nachdem eine plötzliche Ladung oder Entladung, oder ein stetiger Ab- oder Zufluss stattfindet.

Aus diesem Ausdrucke für die Spannung folgt

$$Q_t = \int_0^t Q^*_{t-\tau}\, d\mu, \quad L_t = \int_0^t L^*_{t-\tau}\, d\mu, \quad r_t = \int_0^t r^*_{t-\tau}\, d\mu.$$

In diesen Formeln sind die Zeiten in Theilen von α, die Längen in Theilen von β ausgedrückt; um bekannte Maasse einzuführen, hat man nur a und x durch $\frac{a}{\beta}$, $\frac{x}{\beta}$; t und τ durch $\frac{t}{\alpha}$, $\frac{\tau}{\alpha}$ zu ersetzen.

7.

Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen.

Um nun die erhaltenen Formeln mit dem wirklichen Verlaufe der Rückstandsbildung zu vergleichen, wie er durch die in Poggendorff's Annalen veröffentlichten Messungen des Herrn Professor Kohlrausch mit so grosser Genauigkeit festgestellt worden ist, geht man wohl am zweckmässigsten von der Thatsache aus, dass die Ladungscurve einer Parabel nahe kommt mit allmählich abnehmendem Parameter, d. h. dass die Grösse $\frac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}}$ langsam abnimmt.

Zufolge der für L_t abgeleiteten Formel ist $L_0 - L_t$ für sehr kleine Werthe von t proportional $\sqrt{t}$ und zwar

$$\frac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}} = L_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\beta\beta}{aa\alpha}}.$$

Zufolge der Messungen muss man annehmen, dass diese Proportionalität näherungsweise noch während der Beobachtungen stattfindet.

Man wird daher die Zeit $\frac{aa}{\beta\beta}\alpha$ in roher Annäherung aus den Beobachtungen bestimmen können, und dann ist in der That

$$\frac{L_0^* - e^{\frac{t}{\alpha}} L_t^*}{\sqrt{t}} =$$
$$L_0^* \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\beta\beta}{aa\alpha}} \left(1 - 4\psi\left(\sqrt{\frac{aa\alpha}{\beta\beta t}}\right) + 4\psi\left(2\sqrt{\frac{aa\alpha}{\beta\beta t}}\right) - 4\psi\left(3\sqrt{\frac{aa\alpha}{\beta\beta t}}\right) + \cdots\right)$$

eine Function, welche mit wachsendem t langsam abnimmt. Nichtsdestoweniger würde $\frac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}}$ mit wachsendem t zunehmen, wenn man $\frac{1}{\alpha}$ einen merklichen Werth beilegte. Dasselbe scheint sich auch zu ergeben, wenn man einen beträchtlichen Verlust durch die Luft annimmt, wenigstens wenn man dafür das Coulomb'sche Gesetz zu Grunde legt.

Man wird daher für die erste Bearbeitung der Beobachtungen die Zeit α (d. h. den Leitungswiderstand des Glases für die dem Coulomb-schen Gesetz gemässen electromotorischen Kräfte) unendlich gross annehmen, den Verlust durch die Luft vernachlässigen und sich zunächst darauf beschränken müssen, zu untersuchen, in wie weit sich durch gehörige Bestimmung von $\frac{aa}{\beta\beta}\alpha$ den Beobachtungen genügen lässt.

Sobald man sich überzeugt hat, dass die Voraussetzungen der Rechnung näherungsweise richtig sind, ist eine schärfere Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen verlorene Arbeit, wenn man nicht die Gelegenheit hat, die Quellen der Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung an der Hand der Erfahrung aufzusuchen, um die wegen der Abweichungen von den Voraussetzungen der Rechnung nöthigen Correctionen anzubringen. Da mir nun zu einem experimentellen Studium des Gegenstandes die Mittel fehlen, so musste ich von einer weiteren Verfolgung desselben vorläufig abstehen.

8.

Verhältniss dieses Problems zur Electrometrie und zur Theorie verwandter Erscheinungen.

Die Grösse $\frac{\beta\beta}{aa\alpha}$, bei der Flasche b etwa $\frac{1}{2000}$, giebt den Quotienten $\frac{\text{antelectrische Kraft}}{\text{Leitungswiderstand}}$ des Glases der Flasche in absolutem Maass, wenn als Längeneinheit die Flaschendicke, als Zeiteinheit die Secunde angenommen wird. Für diese Bestimmung ist es gleichgültig, wie man die Einheit der electromotorischen Kräfte von der Einheit der electrischen Massen abhängig macht; die Constanten α und $\beta\beta$ würden aber den Leitungswiderstand und die antelectrische Kraft in einem andern Maasse als dem Weber'schen geben, wo die Einheit der electromotorischen Kräfte durch die dem Ampère'schen Gesetz gemässen Wirkungen der Masseneinheit festgesetzt wird.

Zur Vergleichung des hier untersuchten Falles mit den Erscheinungen an guten Leitern kann die Betrachtung des Beharrungszustandes bei constant erhaltener Spannungsdifferenz der Oberflächen (oder constantem Zufluss) dienen. Für diesen ist

die Dichtigkeit im Innern: $\varrho = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x - e^{-x}$,

die Spannung: $u = u_0 - e^x + e^{-x} + x(e^a + e^{-a})$,

die Spannungsdifferenz der Oberflächen:

$$u_a - u_{-a} = 2\left(a(e^a + e^{-a}) - (e^a - e^{-a})\right),$$

die Gesammtladung: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = e^a + e^{-a} - 2$,

der Rückstand: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \frac{u_a - u_{-a}}{2a} = \frac{e^a - e^{-a}}{a} - 2$,

die in der Zeiteinheit durchfliessende Menge:

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) = -(e^a + e^{-a}),$$

oder gleich proportionalen Grössen, wobei zur Vereinfachung, wie oben, als Zeiteinheit α, als Längeneinheit β, als Spannungseinheit die Spannung im Innern einer Kugel vom Radius 1 bei auf der Oberfläche vertheilter Electricität von der Dichtigkeit 1 angenommen ist.

Besonders wichtig scheint mir die Prüfung des vermutheten Gesetzes und eventualiter die Bestimmung der Constanten α und β bei den Gasen zu sein. Die Beobachtungen von Riess*) und Kohlrausch**), nach welchen für den Electricitätsverlust an die Luft in einem geschlossenen Raume das Gesetz Coulomb's nicht gilt, können vielleicht als Ausgangspunkt für diese Untersuchung dienen und es wäre für dieselben wohl zunächst ein System von Messungen über den Electricitätsverlust im Innern eines einigermassen regelmässigen geschlossenen Raumes zu wünschen.

*) Pogg. Ann. Bd. 71. pag. 359.
**) Pogg. Ann. Bd. 72. pag. 374.

XXI.

Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten.

(20. Febr. 1857.)

Bekanntlich lässt sich jede Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung in n von einander unabhängige particulare Lösungen linear mit constanten Coefficienten ausdrücken. Sind die Coefficienten der Differentialgleichung rationale Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, so wird jeder Zweig der, allgemein zu reden, vielwerthigen Functionen, welche ihr genügen, sich linear mit constanten Coefficienten in n für jeden Werth von x eindeutig bestimmte Functionen ausdrücken lassen, welche freilich dann längs eines gewissen Liniensystems unstetig sein müssen. Sind die Coefficienten aber algebraische Functionen von x, welche sich rational in x und eine μ-werthige algebraische Function von x ausdrücken lassen, so gehört zu jedem Zweig dieser μ-werthigen Function eine Gruppe von n von einander unabhängigen particularen Lösungen, so dass in diesem Falle jeder Zweig einer Lösung der Differentialgleichung als ein linearer Ausdruck von höchstens μn eindeutigen Functionen sich darstellen lässt, welcher aber von ihnen immer nur n einer Gruppe angehörige enthalten wird. Aus diesen Vorbemerkungen wird man, da sich jede nicht homogene lineare Differentialgleichung leicht in eine homogene von der nächst höhern Ordnung verwandeln lässt, ersehen, dass die folgenden Sätze alle linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten umfassen.

Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Functionen von x, welche für alle complexen Werthe dieser Grösse einändrig und endlich sind, ausser für $a, b, c, \ldots, g$, und welche durch einen Umlauf des x um einen dieser Verzweigungswerthe in lineare Functionen mit constanten Coefficienten von ihren früheren Werthen übergehen.

Zu ihrer näheren Bestimmung scheide man die Gesammtheit der complexen Werthe in zwei Gebiete durch eine in sich zurücklaufende

Linie, die der Reihe nach durch sämmtliche Verzweigungswerthe $(g, \ldots, c, b, a)$ geht, so dass in jedem dieser Gebiete die Functionen völlig gesondert und stetig verlaufen, und betrachte die Werthe der Functionen in dem auf der positiven Seite dieser Linie liegenden Gebiete als gegeben. Durch einen positiven Umlauf des x um a gehe nun y_1 in $\sum\limits_{i=1}^{i=n} A_i^{(1)} y_i$; y_2 in $\Sigma A_i^{(2)} y_i, \ldots$; y_n in $\Sigma A_i^{(n)} y_i$ über und ähnlich durch einen positiven Umlauf um b y_ν in $\Sigma B_i^{(\nu)} y_i$, etc., durch einen positiven Umlauf um g y_ν in $\Sigma G_i^{(\nu)} y_i$.

Bezeichnet man nun zur Abkürzung das System der n Werthe $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ durch (y), das System der nn Coefficienten

$$\begin{matrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \ldots & A_n^{(1)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & \ldots & A_n^{(2)} \\ . & . & . & . \\ A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & \ldots & A_n^{(n)} \end{matrix}$$

durch (A), das System der B durch $(B), \ldots$, der G durch (G), und die aus (y) mittelst des Coefficientensystems (A) gebildeten Werthe $\Sigma A_i^{(1)} y_i, \Sigma A_i^{(2)} y_i, \ldots, \Sigma A_i^{(n)} y_i$ durch $(A)(y_1, y_2, .., y_n) = (A)(y)$, so findet zwischen diesen Coefficientensystemen die Gleichung

$$(G)(F) \ldots (B)(A) = (0) \tag{1}$$

statt, wenn man durch (0) ein Coefficientensystem bezeichnet, das nichts ändert, oder in welchem die Coefficienten der abwärts nach rechts gehenden Diagonale $= 1$ und alle übrigen $= 0$ sind. In der That, durchläuft x die ganze Grenzlinie so, dass es sich von einem Verzweigungswerth zum folgenden auf der positiven Seite bewegt, dann aber jedesmal um diesen Verzweigungswerth positiv herum, so gehen die Functionen (y) nach und nach in $(G)(y)$, $(G)(F)(y)$, schliesslich in $(G)(F)\,..\,(B)(A)(y)$ über. Es hat aber denselben Erfolg, wenn x die negative Seite der Grenzlinie oder die ganze Begrenzung des negativerseits liegenden Gebiets durchläuft, wobei $(y_1, y_2, .., y_n)$ ihre früheren Werthe wieder annehmen müssen, da sie in diesem Gebiet allenthalben einändrig sind.

Ein System von n Functionen, welches die eben angegebenen Eigenschaften hat, werde durch

$$Q\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & g & x \\ A & B & C & \ldots & G & \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Man betrachte nun als zu einer Klasse gehörig sämmtliche Systeme, für welche die Verzweigungswerthe und die um sie stattfindenden

Substitutionen gegebene der Gleichung (1) genügende Werthe haben, was, wie sich bald ergeben wird, für unendlich viele Systeme der Fall ist. Nach einem leicht zu beweisenden, von Jacobi vielfach angewandten Satze lässt sich jede Substitution, allgemein zu reden, in drei Substitutionen zerlegen, von denen die letzte die inverse der ersten ist, und in der mittleren die Coefficienten ausser der Diagonale sämmtlich $= 0$ sind, so dass durch sie jede von den Grössen, auf welche sie angewandt wird, nur einen Factor erhält. Es lässt sich also z. B.

$$(A) = (\alpha)\left\{\begin{matrix} \lambda_1, & 0 & .. & 0 \\ 0, & \lambda_2 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0 & .. & \lambda_n \end{matrix}\right\}(\alpha)^{-1}$$

setzen, wenn $(\alpha)^{-1}$ die inverse Substitution von (α) bezeichnet. Die Grössen λ werden dabei die n Wurzeln einer durch (A) völlig bestimmten Gleichung $n$ten Grades. Für den Fall, dass diese Gleichung gleiche Wurzeln hätte, müsste man der mittleren Substitution eine etwas abgeänderte Form geben; wir wollen aber zur Vereinfachung diesen Fall vorläufig ausschliessen und annehmen, dass er bei der Zerlegung der Substitutionen $(A), (B), \ldots, (G)$ nicht eintritt. Die Substitution (α) kann in

$$(\alpha)\left\{\begin{matrix} l_1, & 0, & .. & 0 \\ 0, & l_2, & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & .. & l_n \end{matrix}\right\}$$

durch Hinzufügung einer nur multiplicirenden Substitution verwandelt werden; in dieser Form aber sind, wie die Gleichungen, durch welche sie bestimmt wird, zeigen, alle möglichen Werthe derselben enthalten.

Durch einen positiven Umlauf des x um a gehen die Werthe der Functionen y aus $(p_1, p_2, .., p_n)$ in $(A)(p)$ über. Die Werthe der durch die Substitution $(\alpha)^{-1}$ aus (y) gebildeten Functionen

$$(z_1, z_2, .., z_n) = (\alpha)^{-1}(y)$$

gehen daher aus $(\alpha)^{-1}(p)$ in

$$(\alpha)^{-1}(A)(p) = \left\{\begin{matrix} \lambda_1, & 0, & .. & 0 \\ 0, & \lambda_2, & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & .. & \lambda_n \end{matrix}\right\}(\alpha)^{-1}(p)$$

über, oder $(z_1, z_2, .., z_n)$ in $(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, .., \lambda_n z_n)$.

Wenn eine Function z durch einen positiven Umlauf des x um a den constanten Factor λ erhält, so kann sie durch Multiplication mit einer Potenz von $(x - a)$ in eine Function verwandelt werden, die in der Umgebung von a einändrig ist. In der That erhält $(x - a)^\mu$ durch einen positiven Umlauf des x um a den Factor $e^{\mu 2\pi i}$; bestimmt man also μ so, dass $e^{\mu 2\pi i} = \lambda$, oder setzt man $\mu = \frac{\log \lambda}{2\pi i}$, so wird $z(x-a)^{-\mu}$ eine für $x = a$ einändrige Function. Diese Function lässt sich also nach ganzen Potenzen von $(x-a)$ entwickeln, und z selbst nach Potenzen, die sich von μ um ganze Zahlen unterscheiden.

Demnach sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nach Potenzen von $x - a$ entwickelbar, deren Exponenten in der Form

$$\frac{\log \lambda_1}{2\pi i} + m, \quad \frac{\log \lambda_2}{2\pi i} + m, \ldots, \quad \frac{\log \lambda_n}{2\pi i} + m$$

enthalten sind, wenn m eine ganze Zahl bedeutet. Wir wollen nun annehmen, dass die Functionen y nirgends unendlich von unendlich grosser Ordnung werden, so dass diese Reihen auf der Seite der fallenden Potenzen abbrechen müssen, und bezeichnen durch $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ die niedrigsten Potenzen in diesen Reihen, so dass

$$z_1(x-a)^{-\mu_1}, \ldots, z_n(x-a)^{-\mu_n}$$

endliche von 0 verschiedene Werthe haben. Offenbar kann die Differenz zweier von den Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ nie eine ganze Zahl sein, da die Werthe der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sämmtlich von einander verschieden sind; dagegen werden die Werthe der entsprechenden Exponenten bei zwei zu derselben Klasse gehörigen Systemen sich nur um ganze Zahlen unterscheiden können, da die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ durch (A) völlig bestimmt sind. Diese Exponenten können dazu dienen, die verschiedenen Functionensysteme derselben Klasse von einander zu unterscheiden, oder doch sie zu gruppiren, und es genügt, wenn sie bekannt sind, statt (A) die Substitution (α) anzugeben, da die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ schon durch sie bestimmt sind: wir werden uns daher zur genaueren Charakteristik des Systems $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ des Ausdrucks

$$Q\left\{\begin{matrix} a & b & \ldots & g & \\ (\alpha) & (\beta) & \ldots & (\vartheta) & \\ \mu_1 & \nu_1 & \ldots & \varrho_1 & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \mu_n & \nu_n & \ldots & \varrho_n & \end{matrix}\right\}$$

bedienen, in welchem die Grössen der übrigen Verticalreihen für die Verzweigungswerthe $b, \ldots, g$ die analoge Bedeutung haben sollen, wie die der ersten für a. Es liegt dabei auf der Hand, dass jedes System als ein specieller Fall eines andern betrachtet werden kann, in welchem die entsprechenden Exponenten zum Theil oder sämmtlich niedriger sind.

Es ist nun nicht schwer zu beweisen, dass zwischen je $n+1$ Systemen, die derselben Klasse angehören, eine lineare homogene Gleichung mit ganzen Functionen von x als Coefficienten stattfindet. Wir unterscheiden die entsprechenden Grössen in diesen $n+1$ Systemen durch obere Indices. Nehmen wir an, dass zwischen ihnen die n Gleichungen stattfinden:

$$(2) \qquad \begin{aligned} a_0 y_1 + a_1 y_1^{(1)} + \cdots + a_n y_1^{(n)} &= 0 \\ a_0 y_2 + a_1 y_2^{(1)} + \cdots + a_n y_2^{(n)} &= 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_0 y_n + a_1 y_n^{(1)} + \cdots + a_n y_n^{(n)} &= 0, \end{aligned}$$

so müssen die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ proportional sein den Determinanten der Systeme, welche man erhält, wenn man in dem Systeme der $n(n+1)$ Grössen y der Reihe nach die 1te, 2te, .., $(n+1$te) Verticalreihe weglässt. Eine solche Determinante $\Sigma \pm y_1^{(1)} y_2^{(2)} \ldots y_n^{(n)}$ erhält durch einen positiven Umlauf des x um a den Factor Det. (A) und kann für $x = a$ nicht unendlich von unendlich grosser Ordnung werden; sie lässt sich also nach um 1 steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln. Um den niedrigsten Exponenten in dieser Entwicklung zu bestimmen, kann diese Determinante in die Form gesetzt werden

$$\text{Det.}\,(\alpha)\, \Sigma \pm z_1^{(1)} z_2^{(2)} \ldots z_n^{(n)}.$$

In letzterer Determinante ist das erste Glied

$$z_1^{(1)} z_2^{(2)} \ldots z_n^{(n)} = (x-a)^{\mu_1^{(1)} + \mu_2^{(2)} + \cdots + \mu_n^{(n)}}$$

multiplicirt in eine Function, die für $x = a$ einen endlichen und von 0 verschiedenen Werth hat. Der niedrigste Exponent in der Entwicklung dieses Gliedes nach Potenzen von $(x-a)$ ist daher

$$= \mu_1^{(1)} + \mu_2^{(2)} + \cdots + \mu_n^{(n)}$$

und hieraus erhält man durch Permutation der oberen Indices die niedrigsten Exponenten in den Entwicklungen der übrigen Glieder. Offenbar ist der gesuchte Exponent, allgemein zu reden, gleich dem kleinsten von diesen Werthen und jedenfalls nicht kleiner. Bezeichnen wir den kleinsten dieser Werthe durch $\bar{\mu}$, den ähnlichen Werth für den zweiten Verzweigungswerth durch $\bar{\nu}, \ldots$, für den letzten durch $\bar{\varrho}$, so ist

$$\Sigma \pm y_1^{(1)} y_2^{(2)} \ldots y_n^{(n)} (x-a)^{-\bar{\mu}} (x-b)^{-\bar{\nu}} \ldots (x-g)^{-\bar{\varrho}}$$

eine Function von x, welche für alle endlichen complexen Werthe einändrig und endlich bleibt und für $x = \infty$ unendlich gross höchstens von der Ordnung $-(\bar{\mu} + \bar{\nu} + \cdots + \bar{\varrho})$ wird, folglich eine ganze Function höchstens vom Grade $-(\bar{\mu} + \bar{\nu} + \cdots + \bar{\varrho})$. Diese Grösse muss daher, wenn die Function nicht identisch verschwindet, eine ganze, nicht negative Zahl sein.

Die partiellen Determinanten, welchen die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ proportional sind, verhalten sich demnach wie ganze Functionen, multiplicirt mit Potenzen von $x-a$, $x-b$, .., $x-g$, deren Exponenten in den verschiedenen Determinanten sich um ganze Zahlen unterscheiden. Die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ verhalten sich daher selbst wie ganze Functionen und können in den Gleichungen (2) durch diese ersetzt werden, wodurch man den zu beweisenden Satz erhält.

Die Derivirten der Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nach x bilden offenbar ein derselben Klasse angehöriges System, denn die Differentialquotienten der Functionen $(A)(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, in welche $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ durch einen positiven Umlauf des x um a übergehen, sind

$$= (A)\left(\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}\right),$$

da die Coefficienten in (A) constant sind. Durch diese Bemerkung erhält man aus dem eben bewiesenen Satz die beiden Corollare:

„*Die Functionen y eines Systems genügen einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind.*“

und:

„*Jedes derselben Klasse angehörige System lässt sich in diese Functionen und ihre $n-1$ ersten Differentialquotienten linear mit rationalen Coefficienten ausdrücken.*“

Mit Hülfe des letzteren lässt sich ein allgemeiner Ausdruck für sämmtliche Systeme einer Klasse bilden, aus welchem man sofort sehen würde, dass die Anzahl sämmtlicher Systeme, wie oben behauptet, unendlich ist; es soll indess hier nur angewandt werden zur Aufsuchung aller Systeme, in welchen nicht bloss die Substitutionen, sondern auch die Exponenten dieselben sind. Für ein beliebiges System $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ mit denselben Substitutionen und denselben Exponenten wie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ hat man nach demselben, wenn man die Derivirten nach Lagrange bezeichnet, n lineäre Gleichungen von der Form:

$$c_0 Y_1 = b_0 y_1 + b_1 y_1' + \cdots + b_{n-1} y_1^{(n-1)}$$
$$c_0 Y_2 = b_0 y_2 + b_1 y_2' + \cdots + b_{n-1} y_2^{(n-1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_0 Y_n = b_0 y_n + b_1 y_n' + \cdots + b_{n-1} y_n^{(n-1)},$$

wobei die Coefficienten ganze Functionen von x sind. Die Function c_0 hängt nur von den Functionen y ab, und für den Grad der Functionen b ergiebt sich ein endliches Maximum, so dass sie nur eine endliche Anzahl von Coefficienten haben. Damit umgekehrt die aus

diesen Gleichungen sich ergebenden Functionen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ die verlangten Eigenschaften haben, müssen diese Coefficienten so beschaffen sein, dass für die Verzweigungswerthe ihre Exponenten nicht niedriger sind als die der Functionen y und dass sie für alle anderen Werthe von x endlich bleiben. Diese Bedingungen liefern für die Coefficienten der Potenzen von x in den Functionen b ein System linearer homogener Gleichungen. Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt, wenn sie zur Bestimmung der Coefficienten hinreichen, als allgemeinsten Werth der Functionen (Y) den Werth const.(y), wenn dies nicht der Fall ist aber einen Ausdruck von der Form:

$$Y_1 = ky_1 + k_1 Y_1^{(1)} + \cdots + k_m Y_1^{(m)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_n = ky_n + k_1 Y_n^{(1)} + \cdots + k_m Y_n^{(m)}$$

mit den willkürlichen Constanten $k, k_1, \ldots, k_m$. Von diesen willkürlichen Constanten kann man eine nach der andern als Function der übrigen so bestimmen, dass das Anfangsglied in der Entwicklung einer der Functionen $(\alpha)^{-1}(Y)$, $(\beta)^{-1}(Y), \ldots, (\vartheta)^{-1}(Y)$ Null wird, wodurch die Exponentensumme jedesmal wenigstens um eine Einheit erhöht wird, so dass schliesslich die Exponentensumme wenigstens um m erhöht und die Anzahl der willkürlichen Constanten um ebenso viel vermindert ist. Auf diese Weise kann man aus jedem Systeme von n Functionen ein anderes mit höheren Exponenten ableiten, welches durch die Substitutionen und die Exponenten in seiner Charakteristik bis auf einen allen Functionen gemeinschaftlichen constanten Factor völlig bestimmt ist. Es werde nun auch dieser Factor dadurch bestimmt, dass man den Coefficienten der niedrigsten Potenz von $x-a$ in der Entwicklung der ersten von den Functionen $(\alpha)^{-1}(y)$ gleich 1 setzt, so dass die Functionen y eindeutig bestimmt sind.*)

Man hat dann nur nöthig scharf aufzufassen, wie sich der Verlauf dieser Functionen mit der Lage eines der Verzweigungswerthe, z. B. a ändert, um zu dem Satz zu gelangen, dass die Grössen y ein ähnliches System von Functionen wie von x auch von a bilden mit den Verzweigungswerthen $b, c, d, \ldots, g, x$ und Substitutionen, die aus $(A), (B), \ldots, (F)$ zusammengesetzt sind. Für den Fall, dass es unmöglich ist, die Functionen mit a so zu än-

*) Bis hierher reicht ein vollständig ausgearbeitetes Manuscript Riemann's. Da wo die kleingedruckten Worte beginnen, steht am Rande die Bemerkung „von hier an nicht richtig“. Ich glaubte aber trotzdem nicht, diese Stelle ganz unterdrücken zu dürfen, weil sie doch die Keime zu einer Weiterentwicklung der darin angedeuteten wichtigen Theorie enthält. — Auf einigen Blättern, welche Entwürfe zu der vorstehenden Abhandlung enthalten, finden sich die Grundzüge zu einer Weiterführung der vorstehenden Untersuchungen, die ich im Nachfolgenden in möglichst unveränderter Form mittheile. W.

dern, dass sämmtliche Substitutionen constant bleiben, — weil die Anzahl der in ihnen enthaltenen willkürlichen Constanten geringer ist als die Anzahl der hierfür zu erfüllenden Bedingungen —, kann man das System als einen besonderen Fall eines Systems mit niedrigeren Exponenten betrachten, in welchem für diese speciellen Werthe von $a, b, \ldots, g$ die Coefficienten einiger Anfangsglieder in den Reihen für $(\alpha)^{-1}(y)$, $(\beta)^{-1}(y), \ldots, (\vartheta)^{-1}(y)$ verschwinden.

In Folge dieses Satzes bilden die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Functionen von p Veränderlichen $a, b, \ldots, g, x$, welche, wenn sämmtliche veränderliche Grössen wieder ihre früheren Werthe annehmen, entweder die früheren Werthe wieder erhalten, oder in lineare Ausdrücke ihrer früheren Werthe übergehen, mit einem constanten Coefficientensystem, das aus den $p-2$ beliebig gegebenen Systemen $(A), (B), (C), \ldots, (F)$ irgendwie zusammengesetzt ist.

Auf eine weitere Untersuchung dieser Functionen von mehreren Veränderlichen und der Hülfsmittel, welche der letzte Satz für die Integration linearer Differentialgleichungen bietet, muss ich für jetzt verzichten und bemerke nur noch, dass ein Integral einer algebraischen Function als ein specieller Fall der hier behandelten Functionen betrachtet werden kann, und dass man durch Anwendung dieser Principien auf ein solches Integral auf Functionen geführt wird, welche die allgemeinen ϑ-Reihen mit beliebigen Periodicitätsmoduln darstellen.

Bestimmung der Form der Differentialgleichung.

Es wird die nächste Aufgabe der auf diese Principien zu gründenden Theorie der linearen Differentialgleichungen sein, die einfachsten Systeme jeder Klasse aufzusuchen, und zu diesem Ende zunächst die Form der Differentialgleichung näher zu bestimmen. Verstehen wir unter den obigen Functionen $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ jetzt, wie Lagrange, die successiven Derivirten der Function y, so werden die Gleichungen (2) die Differentialgleichung, welcher sie genügen, darstellen. Der Grad der ganzen Functionen, welche für die Coefficienten gesetzt werden können, bestimmt sich folgendermassen: durch jede Differentiation nach x werden sämmtliche Exponenten der Charakteristik, vorausgesetzt dass keiner eine ganze Zahl ist, um die Einheit erniedrigt. Es bleibt daher:

$$\sum \pm \left(y_1 y_2^{(1)} \ldots y_n^{(n-1)}\right)(x-a)^{-\bar{\mu}}(x-b)^{-\bar{\nu}} \ldots (x-g)^{-\bar{\varrho}} = X_0$$

allenthalben endlich und einändrig, wenn man

$$\bar{\mu} = \Sigma_i \mu_i - \frac{n \,.\, n-1}{2};\; \bar{\nu} = \Sigma_i \nu_i - \frac{n \,.\, n-1}{2};\ldots;\bar{\varrho} = \Sigma_i \varrho_i - \frac{n \,.\, n-1}{2}$$

setzt. Für $x = \infty$ wird, da die Functionen y endlich und einändrig bleiben, $\Sigma \pm y_1 y_2^{(1)} \ldots y_n^{(n-1)}$ unendlich klein von der Ordnung: $n(n-1)$. Der Grad der ganzen Function X_0 ist daher

$$r = (m-2)\frac{n \,.\, n-1}{2} - s,$$

wenn m die Anzahl der Verzweigungswerthe und s die Summe der Exponenten in der Charakteristik bezeichnet.

Wenn in dem System der $n \,.\, n+1$ Grössen y statt der letzten Verticalreihe die $(n+1-t)$te weggelassen wird, so muss die aus ihnen gebildete Determinante allgemein zu reden mit um t höheren Potenzen von $x-a, x-b, \ldots, x-g$ multiplicirt werden und wird dadurch eine ganze Function vom Grade $r+(m-1)t$ [nur für $t=n$ ist dieser Grad $r+(m-2)n$].

Die Differentialgleichung lässt sich daher, wenn man das Product $(x-a)(x-b)\ldots(x-g)$ durch ω bezeichnet in die Form:

$$X_n y + \omega X_{n-1} y' + \cdots \omega^n X_0 y^{(n)} = 0$$

setzen, so dass die Grössen X_t ganze rationale Functionen vom Grade $r+(m-1)t$ sind. [X_n vom Grade $r+(m-2)n$.]

Man untersuche jetzt, welchen Bedingungen die Coefficienten dieser Functionen genügen müssen, damit nur für die Werthe $a, b, \ldots, g$ eine Verzweigung eintritt und die Unstetigkeitsexponenten für sie die gegebenen Werthe haben. Eine Verzweigung findet so lange und nur so lange nicht statt, als sich alle Lösungen der Differentialgleichung nach ganzen Potenzen der Aenderung von x entwickeln lassen, oder so lange die Entwicklung von y nach dem Mac-Laurin'schen Satz n willkürliche Constanten enthält. Dies ist immer der Fall, wenn a_n von 0 verschieden ist. Man hat daher nur den Fall $a_n = 0$ zu untersuchen. Setzt man die Differentialgleichung in die Form:

$$b_0 y + b_1 (x-a) y' + b_2 (x-a)^2 y'' + \cdots + b_n (x-a)^n y^{(n)} = 0,$$

so müssen, damit um $x = a$ die Function y den vorgeschriebenen Charakter hat, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sämmtlich Wurzeln der Gleichung

$$b_0 + b_1 \mu + \cdots + b_n \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1) = 0$$

sein. Dieses liefert n Bedingungen für die Functionen X und erfordert überdies, da alle Grössen μ endlich und unter einander ungleich sind, dass b_n für $x = a$ nicht 0 sei. Aehnliches gilt für die übrigen Wurzeln $b, c, \ldots, g$ von $\omega = 0$. Es kann sonach $X_0 = 0$ mit $\omega = 0$ keine Wurzel gemeinschaftlich haben.

Ist nun (für eine Wurzel von $X_0 = 0$) $a_n = 0$, a_{n-1} aber von 0 verschieden, so können (für diese) $y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ willkürlich angenommen werden, dann aber ist $y^{(n-1)}$ durch die Differentialgleichung

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

bestimmt, so dass $n-1$ willkürliche Constanten in den $n-1$ ersten Gliedern der Mac-Laurin'schen Reihe auftreten, die letzte Constante aber frühestens im $(n+1)$ten. Man nehme an, dass sie zuerst im $(n+h)$ten erscheine.

Eliminirt man dann aber in der $h$ten Derivirten der Differentialgleichung:

$$a_n y^{(n+h)} + (h a_n' + a_{n-1}) y^{(n+h-1)} + \cdots = 0$$

die Grössen $y^{(n+h-2)}, \ldots, y^{(n-1)}$ mittelst der vorhergehenden Derivirten und der Differentialgleichung selbst, so müssen die Coefficienten von $y^{(n+h-1)}, y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots, y$ sämmtlich verschwinden, da diese Grössen von einander unabhängig sind. Man erhält also

$$h a_n' + a_{n-1} = 0,$$

also a_n' von 0 verschieden und ausserdem noch $n-1$ Gleichungen, und es ergeben sich n Bedingungsgleichungen für die Coefficienten der Functionen X.

Man setze nun zweitens voraus, dass a_n und a_{n-1} gleichzeitig verschwinden, a_{n-2} aber endlich bleibt, so dass die $n-2$ ersten Glieder der Mac-Laurin'schen Reihe $n-2$ willkürliche Constanten enthalten, und nehme an, dass die folgende im $(n+h-1)$ten, die letzte im $(n+h'-1)$ten zuerst auftrete. Alsdann ergeben sich, damit $y^{(n+h-2)}$ und $y^{(n+h'-2)}$ von den Werthen der niedrigeren Differentialquotienten unabhängig werden, die Gleichungen:

$$a_n' = 0, \quad \frac{h \,.\, h-1}{2} a_n'' + h a_{n-1}' + a_{n-2} = 0,$$

$$\frac{h' \,.\, h'-1}{2} a_n'' + h' a_{n-1}' + a_{n-2} = 0,$$

also a_n'' und a_{n-1}' von Null verschieden, und ausserdem $2n-3$ Gleichungen. Es werden also zwei Linearfactoren von $a_n = 0$ und man erhält $2n$ Bedingungen für die Functionen X.

Auf ähnliche Art findet man für den Fall wenn a_n, a_{n-1}, a_{n-2} gleichzeitig verschwinden, a_{n-3} aber endlich bleibt, und die drei letzten willkürlichen Constanten zuerst im $(n+h-2)$ten, $(n+h'-2)$ten, $(n+h''-2)$ten Gliede auftreten, die Bedingungen:

$$a_n' = 0, \quad a_n'' = 0, \; a_{n-1}' = 0,$$

$$\frac{h.h-1.h-2}{1\,.\,2\,.\,3} a_n''' + \frac{h\,.\,h-1}{1\,.\,2} a_{n-1}'' + h a_{n-2}' + a_{n-3} = 0$$

für h, h', h'' und ausserdem noch $3n-6$ Gleichungen, so dass a_n drei und nur drei gleiche Wurzeln hat, und $3n$ Bedingungen erfüllt werden müssen. Durch Verallgemeinerung dieser Schlüsse ergiebt sich offenbar, dass jeder Linearfactor von X_0 n Bedingungen zwischen den Functionen X zur Folge hat*).

*) Ueber das Verhalten der Differentialgleichung für unendliche Werthe von x findet sich im Riemann'schen Manuscript nichts; die Abzählung der Constanten ist nur angedeutet; das Folgende ist daher so gut als möglich vom Herausgeber

Wir wollen nun annehmen, dass einer der singulären Punkte, etwa g im Unendlichen liegt und mit ω die Function $(m-1)$ten Grades

$$\omega = (x-a)(x-b)\cdots$$

bezeichnen.

Die aus der Matrix

$$\begin{matrix} y_1 \,.\, y_1' \ldots y_1^{(n)} \\ y_2 ,\, y_2 \ldots y_2^{(n)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n ,\, y_n' \ldots y_n^{(n)} \end{matrix}$$

gebildeten n-reihigen Determinanten sollen mit $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ bezeichnet sein, so dass $y_1, y_2, \ldots, y_n$ particulare Lösungen der Differentialgleichung

$$y \Delta_0 + y' \Delta_1 + y'' \Delta_2 + \ldots + y^{(n)} \Delta_n = 0$$

sind. Die Function

$$\Delta_k (x-a)^{-k\Sigma\mu} (x-b)^{-\Sigma\nu} \ldots \omega^{-k + \frac{n.n+1}{2}} = X_{n-k}$$

ist dann, wie schon oben bemerkt, eine ganze rationale Function von x, deren Grad sich aus der Betrachtung des singulären Punktes $x = \infty$ ergiebt, nämlich, wenn mit r_t der Grad von X_t bezeichnet wird,

$$r_t = r + (m-2)t,$$

worin

$$r = (m-2)\frac{n\,.\,n-1}{2} - s$$

der Grad von X_0 und

$$s = \Sigma\mu + \Sigma\nu + \cdots + \Sigma\varrho$$

eine ganze Zahl ist.

Die Differentialgleichung für y lässt sich nun in die Form setzen

$$\omega^n X_0 y^{(n)} + \omega^{n-1} X_1 y^{(n-1)} + \ldots + \omega X_{n-1} y' + X_n y = 0$$

und wegen der r Nullpunkte von X_0, die nicht zu den singulären gehören sollen, müssen nach dem Obigen rn Bedingungen zwischen den in dieser Differentialgleichung enthaltenen Constanten stattfinden.

Es bleiben sonach in der Differentialgleichung an verfügbaren Constanten (da ein Coefficient $= 1$ gesetzt werden darf)

$$\sum (r_t + 1) - 1 - rn = r + n + (m-2)\frac{n\,.\,n+1}{2}$$

oder für r seinen Werth gesetzt

ergänzt. Es ist bereits in der ersten Auflage bemerkt, dass es eine wesentliche Vereinfachung zur Folge hat, wenn man einen der Unstetigkeitspunkte ins Unendliche verlegt. Bei dieser Vereinfachung, die hier durchgeführt ist, wird zugleich ein Irrthum vermieden, der bei der Constantenzählung in der ersten Auflage enthalten war, auf den mich Herr Dr. Hilbert aufmerksam gemacht hat. W.

$$-s + (m-2)\,n^2 + n$$

und in einem beliebigen System von n particularen Integralen $y_1, y_2 \ldots y_n$, wobei noch n^2 Integrationsconstanten hinzutreten,

$$-s + (m-1)n^2 + n$$

unbestimmte Constanten.

Die Zahl der Coefficienten in den Substitutionen (A), $(B) \ldots (G)$ beträgt mn^2 und so viele Bedingungen würden also erfüllt werden müssen, wenn diese Substitutionen beliebig vorgeschrieben sind. Nun sind aber diese Substitutionen an die Bedingung (1) gebunden, so dass n^2 von den erwähnten Bedingungen eine identische Folge der übrigen sind. Es bleiben daher $(m-1)n^2$ Bedingungen übrig und die Anzahl der nun noch verfügbaren Constanten beträgt $n-s$. Diese Zahl muss mindestens $=1$ sein, da ein gemeinschaftlicher Factor bei allen y willkürlich bleiben muss und daraus folgt

$$s \overline{\overline{<}}\, n-1.$$

XXII.

Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill^ma^ Academia Parisiensi propositae:

„Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes.“ *)

Et his principiis via sternitur ad majora.

1.

Quaestionem ab ill^ma^ Academia propositam ita tractabimus, ut primum quaestionem generaliorem solvamus:

quales esse debeant proprietates corporis motum caloris determinantes et distributio caloris, ut detur systema linearum quae semper isothermae maneant,

deinde

ex solutione generali hujus problematis eos casus seligamus, in quibus proprietates illae evadant ubique eaedem, sive corpus sit homogeneum.

Pars prima.

2.

Priorem quaestionem ut aggrediamur, considerandus est motus caloris in corpore qualicunque. Si u denotat temperaturam tempore

---

*) Diese Beantwortung der von der Pariser Akademie im Jahre 1858 gestellten und 1868 zurückgezogenen Preisaufgabe wurde von Riemann am 1. Juli 1861 der Akademie eingereicht. Der Preis wurde derselben nicht zuerkannt, weil die Wege, auf denen die Resultate gefunden wurden, nicht vollständig angegeben sind. Von der Ausführung einer beabsichtigten ausführlicheren Bearbeitung des Gegenstandes wurde Riemann durch seinen Gesundheitszustand abgehalten.

t in puncto (x_1, x_2, x_3) aequationem generalem, secundum quam haec functio u variatur, hujus esse formae constat,

$$\text{(I)}\qquad \frac{\partial\left(a_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{1,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(a_{2,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{2,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{2,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_2} + \frac{\partial\left(a_{3,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{3,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{3,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_3} = h\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Qua in aequatione quantitates a conductibilitates resultantes, h calorem specificum pro unitate voluminis, sive productum ex calore specifico in densitatem designant et tanquam functiones pro lubitu datae ipsarum x_1, x_2, x_3 spectantur. Disquisitionem nostram ad eum casum restringimus, in quo conductibilitas eadem est in binis directionibus oppositis ideoque inter quantitates a relatio

$$a_{\iota,\iota'} = a_{\iota',\iota}$$

intercedit. Praeterea quum calor a loco calidiore in frigidiorem migret necesse est, ut forma secundi gradus

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{2,2}, & a_{3,3} \\ a_{2,3}, & a_{3,1}, & a_{1,2} \end{pmatrix}$$

sit positiva.

3.

Iam in aequatione (I) in locos coordinatarum rectangularium x_1, x_2, x_3 tres variabiles independentes quaslibet novas s_1, s_2, s_3 introducamus.

Haec transformatio aequationis (I) facillime inde peti potest, quod haec aequatio conditio est necessaria et sufficiens, ut, designante δu variationem quamcunque infinite parvam ipsius u, integrale

$$(A)\qquad \delta\int\!\!\int\!\!\int\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\frac{\partial u}{\partial x_{\iota'}}dx_1\,dx_2\,dx_3 + \int\!\!\int\!\!\int 2h\frac{\partial u}{\partial t}\delta u\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

per corpus extensum, solum a valore variationis δu in superficie pendeat. Introductis novis variabilibus haec expressio (A) transibit in

$$(B)\qquad \delta\int\!\!\int\!\!\int\sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'}\frac{\partial u}{\partial s_\iota}\frac{\partial u}{\partial s_{\iota'}}ds_1\,ds_2\,ds_3 + \int\!\!\int\!\!\int 2k\frac{\partial u}{\partial t}\delta u\,ds_1\,ds_2\,ds_3$$

posito brevitatis causa

$$\frac{\sum\limits_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\iota}\frac{\partial s_\nu}{\partial x_{\iota'}}}{\sum\pm\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\frac{\partial s_3}{\partial x_3}} = b_{\mu,\nu},\qquad \frac{h}{\sum\pm\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\frac{\partial s_3}{\partial x_3}} = k.$$

Quodsi formarum secundi gradus

$$(1)\quad \begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{2,2}, & a_{3,3} \\ a_{2,3}, & a_{3,1}, & a_{1,2} \end{pmatrix}\qquad (2)\quad \begin{pmatrix} b_{1,1}, & b_{2,2}, & b_{3,3} \\ b_{2,3}, & b_{3,1}, & b_{1,2} \end{pmatrix}$$

determinantes sunt A, B et formae adjunctae

$$(3)\quad \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}, & \alpha_{2,2}, & \alpha_{3,3} \\ \alpha_{2,3}, & \alpha_{3,1}, & \alpha_{1,2} \end{pmatrix}\qquad (4)\quad \begin{pmatrix} \beta_{1,1}, & \beta_{2,2}, & \beta_{3,3} \\ \beta_{2,3}, & \beta_{3,1}, & \beta_{1,2} \end{pmatrix}$$

invenietur

$$A = B\sum\pm\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\frac{\partial s_3}{\partial x_3}$$

et

$$\beta_{\mu,\nu} = \sum_{\iota,\iota'}\alpha_{\iota,\iota'}\frac{\partial x_\iota}{\partial s_\mu}\frac{\partial x_{\iota'}}{\partial s_\nu}$$

ideoque

$$\sum_{\iota,\iota'}\alpha_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,dx_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'}\beta_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}$$

et

$$\frac{h}{A} = \frac{k}{B}.$$

Unde facile perspicitur transformationem aequationis (I) reduci posse ad transformationem expressionis $\sum\limits_{\iota,\iota'}\alpha_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,dx_{\iota'}$.

Quae quum ita sint, problema nostrum generale hoc modo solvere possumus, ut primum quaeramus, quales esse debeant functiones $b_{\iota,\iota'}$ et k ipsarum s_1, s_2, s_3, ut u ab una harum quantitatum non pendere possit. Qua quaestione soluta expressio $\Sigma\beta_{\iota,\iota'}ds_\iota ds_{\iota'}$ formari poterit. Tum ut, datis valoribus quantitatum $a_{\iota,\iota'}$ et quantitatis h, inveniamus, num u functio temporis et duarum tantum variabilium fieri possit et quibusnam in casibus, quaerendum est, an expressio illa $\Sigma\beta_{\iota,\iota'}ds_\iota ds_{\iota'}$ in formam datam transformari possit; et hanc quaestionem infra videbimus eadem fere methodo tractari posse, qua Gauss in theoria superficierum curvarum usus est.

4.

Primum igitur quaeramus, quales esse debeant functiones $b_{\iota,\iota'}$ et k ipsarum s_1, s_2, s_3, ut u ab una harum quantitatum non pendere possit. Ut denotationem simpliciorem reddamus, quantitates s_1, s_2, s_3 per α, β, γ designemus et formam (2) per

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$$

si u a γ non pendet, aequatio differerentialis erit formae

$$\text{(II)}\qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + 2c'\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + b\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + e\frac{\partial u}{\partial\alpha} + f\frac{\partial u}{\partial\beta} - k\frac{\partial u}{\partial t} = F = 0$$

posito

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial c'}{\partial \beta} + \frac{\partial b'}{\partial \gamma} = e, \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} + \frac{\partial c'}{\partial \alpha} + \frac{\partial a'}{\partial \gamma} = f.$$

Tribuendo ipsi γ valores determinatos diversos ex aequatione (II) inter sex quotientes differentiales ipsius u obtinebuntur aequationes diversae, quarum coefficientes a γ non pendent. Quodsi ex his aequationibus m sunt a se independentes

$$F_1 = 0, \; F_2 = 0, \ldots, F_m = 0,$$

ita ut caeterae omnes ex iis sequantur, aequatio $F = 0$ necesse est pro quovis ipsius γ valore ex his m aequationibus fluat, unde F formae esse debet

$$c_1 F_1 + c_2 F_2 + \cdots + c_m F_m,$$

qua in expressione solae quantitates c a γ pendent.

Iam casus singulos, quando m est $1, 2, 3, 4$ paulo accuratius examinemus simulque aequationes a γ independentes, in quas aequatio $F = 0$ dissolvitur, in formas simpliciores redigere curemus.

Casus primus, $m = 1$.

Si $m = 1$, in aequatione (II) rationes coefficientium a γ non pendebunt. At introducendo in locum ipsius γ novam variabilem $\int k\, d\gamma$ semper effici potest, ut k fiat $= 1$, quo pacto coefficientes omnes a γ evadent independentes. Porro introducendo in locos ipsarum α, β novas variabiles semper effici potest, ut a et b evanescant. Hoc enim evenit, si expressio $b\, d\alpha^2 + 2c'\, d\alpha\, d\beta + a\, d\beta^2$ (quae quadratum expressionis differentialis linearis esse nequit, si (2) est forma positiva) in formam $m\, d\alpha'\, d\beta'$ redigitur et quantitates α', β' tanquam variabiles independentes sumuntur.

Aequatio igitur differentialis (II) hoc in casu in formam

$$2c' \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + e \frac{\partial u}{\partial \alpha} + f \frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

redigi potest et in forma (2) a, b tum erunt $= 0$, a' et b' functiones lineares ipsius γ, et c' a γ independens. Caeterum patet temperaturam in hoc casu semper a γ independentem manere, si temperatura initialis sit functio quaelibet solarum α et β.

Casus secundus, $m = 2$.

Si aequatio (II) in duas aequationes a γ independentes disciuditur, ope alterius $\frac{\partial u}{\partial t}$ ex altera ejici potest. Brevitatis causa haec ita exhibeatur

(1) $$\Delta u = 0,$$

illa

(2) $$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

denotantibus Δ et Λ expressiones characteristicas ex ∂_α et ∂_β conflatas.

Aequationem priorem facile perspicitur mutatis variabilibus independentibus ita transformari posse ut sit Δ

$$\text{vel} = \partial_\alpha \partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta$$
$$\text{vel} = \partial_\alpha^2 + e\partial_\alpha + f\partial_\beta$$
$$\text{vel} = \partial_\alpha,$$

valoribus $e = 0$, $f = 0$ non exclusis.

Quoniam sit

$$0 = \partial_t \Delta u = \Delta \partial_t u = \Delta \Lambda u,$$

ex his duabus aequationibus (1) et (2) sequitur

(3) $$\Delta \Lambda u = 0.$$

Iam duo distinguendi sunt casus, prout haec aequatio (3) vel ex aequatione (1) fluat, (α), sive sit

$$\Delta \Lambda = \Theta \Delta$$

denotante Θ novam expressionem characteristicam, vel non fluat, (β), novamque aequationem a Δu independentem sistat.

Casum priorem (α) ut saltem pro una forma ipsius Δ perscrutemur, supponamus

$$\Delta = \partial_\alpha \partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta.$$

Tum $\Delta \Lambda u$ ope aequationis $\Delta u = 0$ ad expressionem reduci potest, quae solas derivationes secundum alteram utram variabilem contineat et coefficientes omnes cifrae aequales habere debeat. Ponamus, quum terminus $\partial_\alpha \partial_\beta$ continens ope aequationis $\Delta u = 0$ ejici possit,

$$\Lambda = a\partial_\alpha^2 + b\partial_\beta^2 + c\partial_\alpha + d\partial_\beta$$

formemusque expressionem

$$\Delta \Lambda - \Lambda \Delta.$$

In hac expressione quum coefficientes ipsarum $\partial_\alpha^3, \partial_\beta^3$ evanescere debeant, invenitur $\frac{\partial a}{\partial \beta} = 0$, $\frac{\partial b}{\partial \alpha} = 0$, unde si casus speciales $a = 0$, $b = 0$ excluduntur, mutatis variabilibus independentibus effici potest, ut sit $a = b = 1$. Tum autem invenitur ponendo coefficientes ipsarum $\partial_\alpha^2, \partial_\beta^2$ in expressione reducta $\Delta \Lambda$ cifrae aequales

$$\frac{\partial c}{\partial \beta} = 2\frac{\partial e}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial d}{\partial \alpha} = 2\frac{\partial f}{\partial \beta},$$

unde poni potest

$$\Delta = \partial_\alpha \partial_\beta + \frac{\partial m}{\partial \beta} \partial_\alpha + \frac{\partial n}{\partial \alpha} \partial_\beta$$

$$\Lambda = \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2 + 2 \frac{\partial m}{\partial \alpha} \partial_\alpha + 2 \frac{\partial n'}{\partial \beta_1} \partial_\beta$$

denotantibus m, n functiones ipsarum α, β, quae jam duabus aequationibus differentialibus sufficere debent, ut coefficientes ipsarum $\partial_\alpha, \partial_\beta$ in expressione reducta $\Delta \Lambda$ evanescant.

Prorsus simili modo in reliquis casibus specialibus formae simplicissimae ipsarum Δ et Λ inveniuntur conditioni

$$\Delta \Lambda = \Theta \Delta$$

satisfacientes. Sed huic disquisitioni prolixiori quam difficiliori hic non immoramur.

Caeterum patet in hoc casu temperaturam semper a γ independentem manere, si temperatura initialis est functio quaelibet ipsarum α et β aequationi $\Delta u = 0$ satisfaciens; sequitur enim ex aequationibus

$$\Delta u = 0$$

$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$0 = \Theta \Delta u = \Delta \Lambda u = \Delta \partial_t u = \frac{\partial \Delta u}{\partial t}$ et proin aequatio $\Delta u = 0$ subsistere pergit, si initio valet et functio u secundum aequationem $\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$ variatur. Tum autem satisfit legi motus caloris sive aequationi $F = 0$.

5.

Restat casus specialis alter (β) quando $\Delta \Lambda u = 0$ a $\Delta u = 0$ est independens. Ut simul et casus sequentes $m = 3, m = 4$ amplectemur, suppositionem generaliorem examinemus, praeter aequationem $\Delta u = 0$ haberi aequationem differentialem quamlibet linearem $\Theta u = 0$, ipsum $\frac{\partial u}{\partial t}$ non continentem et a $\Delta u = 0$ independentem.

Si Δ est formae $\partial_\alpha \partial_\beta + e \partial_\alpha + f \partial_\beta$, ope aequationis $\Delta u = 0$ expressio Θ a derivationibus secundum ambas variabiles liberari potest.

Iam duo distinguendi sunt casus.

Si ex expressione Θ omnes quotientes differentiales secundum alteram utram variabilem ex. gr. secundum β simul excidunt, obtinetur aequatio differentialis solos quotientes differentiales secundum α continens formae

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial \alpha^\nu} = 0, \tag{1}$$

sin minus, semper elici poterit aequatio differentialis formae

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = 0 \tag{2}$$

sive solos quotientes differentiales secundum t continens.

Nam in hoc casu expressiones $\Lambda u, \Lambda^2 u, \Lambda^3 u, \ldots$, quibus quotientes differentiales ipsius u secundum t aequales sunt, ope aequationum $\Delta u = 0, \Theta u = 0$ semper ita transformari possunt, ut solos quotientes differentiales secundum alteram utram variabilem contineant eosque non altiores quam Θu. Quorum numerus quum sit finitus, eliminando aequationem formae (2) obtineri posse manifestum est. Coefficientes a_ν utriusque aequationis sunt functiones ipsarum α, β.

Observare conveniet, alteram utram harum aequationum semper valere etiamsi Δ non sit formae $\partial_\alpha \partial_\beta + e \partial_\alpha + f \partial_\beta$. Casus specialis, quando $\Delta = \partial_\alpha^2 + e \partial_\alpha + f \partial_\beta$ ad utrumque casum referri potest, quum ope aequationis $\Delta u = 0$ tum ex Θu, tum ex Λu omnes derivationes secundum β ejici possint, quo facto aequatio utriusque formae facile obtinetur. Si $f = 0$, hic casus sicuti casus $\Delta = \partial_\alpha$ ad casum priorem referendus est.

Iam casum posteriorem accuratius perscrutemur.

Solutionem generalem aequationis

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = 0$$

e terminis formae $f(t) e^{\lambda t}$ conflatam esse constat, denotante $f(t)$ functionem integram ipsius t et λ quantitatem a t non pendentem, facileque perspicitur hos terminos singulos aequationi (I) satisfacere debere. Iam demonstrabimus fieri non posse, ut sit λ functio ipsarum x_1, x_2, x_3.

Sit $k t^n$ terminus summus functionis $f(t)$ distinguanturque duo casus.

1°. Quando λ aut realis est aut formae $\mu + \nu i$ et μ, ν functiones unius variabilis realis α ipsarum x_1, x_2, x_3, substituendo $u = f(t) e^{\lambda t}$ in parte laeva aequationis (I) coefficiens ipsius $t^{n+2} e^{\lambda t}$ invenitur

$$= k \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2 \sum_{\iota, \iota'} a_{\iota, \iota'} \frac{\partial \alpha}{\partial x_\iota} \frac{\partial \alpha}{\partial x_{\iota'}}.$$

Sed haec quantitas evanescere nequit, nisi

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} = 0$$

sive $\alpha = \text{const.}$, quum forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{2,2}, & a_{3,3} \\ a_{2,3}, & a_{3,1}, & a_{1,2} \end{pmatrix}$$

ut supra monuimus, sit forma positiva.

2^0. Quando λ est formae $\mu + \nu i$ et μ, ν sunt functiones independentes ipsarum x_1, x_2, x_3, quantitates $\mu + \nu i$ et $\mu - \nu i$ pro variabilibus independentibus α et β sumi poterunt continebitque ipsum u praeter terminum $f(t)e^{\alpha t}$ etiam terminum complexum conjugatum $\varphi(t)e^{\beta t}$. Quodsi

$$\Delta u = a\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + c\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + e\frac{\partial u}{\partial \alpha} + f\frac{\partial u}{\partial \beta}$$

est, ex aequatione $\Delta u = 0$ substituendo $u = f(t)e^{\alpha t}$ et aequando coefficientem ipsius $t^{n+2}e^{\alpha t}$ cifrae, obtinetur $a = 0$ et perinde $c = 0$ substituendo $u = \varphi(t)e^{\beta t}$. Unde ope aequationis $\Delta u = 0$ aequatio $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ ita transformari potest, ut solos quotientes differentiales secundum alteram utram variabilem contineat. Sed substituendo

$$u = f(t)e^{\alpha t}, \quad u = \varphi(t)e^{\beta t}$$

coefficiens summi cujusque horum quotientium differentialium invenitur $= 0$, unde et hi quotientes differentiales ex aequatione $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ omnes excidere debent, q. e. a., quum u ex hyp. non sit constans.

In casu igitur posteriori functio u componitur e numero finito terminorum formae $f(t)e^{\lambda t}$, in quibus λ est constans et $f(t)$ functio integra ipsius t.

In casu priori quando habetur aequatio formae

$$\sum a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial \alpha^\nu} = 0, \tag{1}$$

functio u erit formae

$$u = \sum_\nu q_\nu p_\nu,$$

denotantibus p_1, p_2, ... solutiones particulares aequationis (1) et q_1, q_2, .. constantes arbitrarias sive functiones solarum β et t. Quodsi haec expressio in aequatione

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

substituitur, obtinetur aequatio formae

$$\sum PQ = 0,$$

in qua quantitates Q sunt quotientes differentiales ipsarum q ideoque functiones solarum β et t, quantitates P autem functiones solarum α et β. At tali aequationi supra vidimus, si ex n terminis componatur, subjacere μ aequationes lineares inter functiones Q et $n - \mu$ aequationes inter functiones P, quarum coefficientes sint functiones solius β, denotante μ quempiam numerorum 0, 1, 2, .., n. Obtinebuntur

igitur expressiones ipsarum $\frac{\partial q}{\partial t}$ per quotientes differentiales ipsarum q secundum β ab ipsa α liberae.

Iam casus singulos problematis nostri ad hunc casum pertinentes perlustremus.

Quando $m = 2$ et Δ est formae $\partial_\alpha \partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta$, aequatio reducta $\Delta \Lambda u = 0$, si a quotientibus differentialibus secundum β libera evadit, formam induet:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} + r\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + s\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0,$$

unde u erit formae

$$ap + bq + c,$$

denotantibus a, b, c functiones solarum β et t, p et q autem functiones solarum α et β. Iam in locum ipsius α variabilis independens q introduci potest. Quo pacto obtinetur

$$u = ap + b\alpha + c,$$

ubi jam sola p est functio ambarum variabilium α et β. Substituendo hanc expressionem in aequationibus

$$\Delta u = 0, \qquad \Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

coefficientium formae facile eruuntur.

Restat casus quando jam una aequationum, in quas aequatio $F = 0$ discinditur, formam (1) habet, ideoque formam

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + s\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

Tum erit $u = ap + b$, denotantibus a et b functiones solarum β et t et p functionem solarum α et β. Si in locum ipsius α variabilis independens p introducitur, prodibit

$$u = a\alpha + b, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Invenimus igitur, si m sit $= 2$ sive aequatio $F = 0$ in duas aequationes

$$\Delta u = 0$$

$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

dissolvatur, esse aut $\Delta \Lambda = \Theta \Delta$, aut functionem u compositam esse e numero finito terminorum formae $f(t)e^{\lambda t}$, in quibus λ constans et $f(t)$ functio integra ipsius t est, aut formam induere

$$\varphi(\beta, t)\,\chi(\alpha, \beta) + \alpha\varphi_1(\beta, t) + \varphi_2(\beta, t),$$

si $m = 3$, functionem u aut esse e numero finito terminorum $f(t)e^{\lambda t}$ conflatam aut formae

$$\varphi(\beta, t)\alpha + \varphi_1(\beta, t).$$

Casus denique $m = 4$ nullo negotio penitus absolvi potest.

Si enim praeter aequationem $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ habentur tres aequationes inter

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta},\ \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2},\ \frac{\partial u}{\partial \alpha},\ \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

aut prodibit aequatio formae

$$r \frac{\partial u}{\partial \alpha} + s \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0$$

et proin variabiles independentes ita eligere licebit, ut u fiat functio unius tantum variabilis, aut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta},\ \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2},$$

ideoque etiam Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ per $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial \beta}$ exprimi poterunt. Tum autem emerget aequatio formae

$$a \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

unde u habebit formam

$$pe^{\lambda t} + qe^{\mu t} + r \text{ vel } (p + qt) e^{\lambda t} + r$$

constatque per praecedentia λ et μ esse constantes.

Iam sumta p pro variabili independente α et substitutis his expressionibus in aequatione $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ invenitur fieri non posse, ut q sit functio ipsius α, siquidem λ et μ sint inaequales. Ergo p et q vice variabilium independentium fungi possunt. Praeterea ex aequatione $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ invenitur $r = \text{const.}$

In hoc igitur casu u aut est functio ipsius t et unius tantum variabilis, aut alteram utram formarum

$$\alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t} + \text{const.},\quad (\alpha + \beta t) e^{\lambda t} + \text{const.}$$

induet, valore $\mu = 0$ non excluso.

Postquam formae quas functio u induere potest inventae sunt, aequationes $F_\nu = 0$, quas brevitati consulentes perscribere noluimus, facillimae sunt formatu. Unde in singulis quibusque casibus et forma

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}, & b_{2,2}, & b_{3,3} \\ b_{2,3}, & b_{3,1}, & b_{1,2} \end{pmatrix}$$

et forma adjuncta

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1}, & \beta_{2,2}, & \beta_{3,3} \\ \beta_{2,3}, & \beta_{3,1}, & \beta_{1,2} \end{pmatrix}$$

innotescet. Si jam in expressionibus $\Sigma \beta_{\iota,\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$ in locos quantitatum s_1, s_2, s_3 functiones quaelibet ipsarum x_1, x_2, x_3 substituuntur,

manifesto obtinebuntur casus omnes, in quibus u functio temporis et duarum tantum variabilium fieri possit. Unde quaestio prior soluta erit.

Superest ut quaeramus, quando expressio $\Sigma \beta_{\iota,\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$ in formam datam $\Sigma \alpha_{\iota,\iota'} dx\, dx_{\iota'}$ transformari possit.

Pars secunda.

De transformatione expressionis $\sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$ in formam datam $\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'} dx_\iota dx_{\iota'}$.

Quum quaestio ab Ill[ma] Academia ad corpora homogenea restricta sit, in quibus conductibilitates resultantes sint constantes, evolvamus primum conditiones, ut expressio $\sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$, aequando quantitates s functionibus ipsarum x, in formam $\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'} dx_\iota dx_{\iota'}$, constantibus coefficientibus $a_{\iota,\iota'}$ affectam transformari possit. Deinde de transformatione in formam quamlibet datam pauca adjiciemus.

Expressionem $\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'} dx_\iota dx_{\iota'}$, si est, id quod supponimus, forma positiva ipsarum dx, semper in formam $\sum_\iota dx_\iota^2$ redigi posse constat. Unde si $\sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$ in formam $\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'} dx_\iota dx_{\iota'}$ transformari potest, redigi etiam potest in formam $\sum_\iota dx_\iota^2$ et vice versa. Quaeramus igitur, quando in formam $\sum_\iota dx_\iota^2$ transformari possit.

Sit determinans $\Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \dots b_{n,n} = B$ et determinantes partiales $= \beta_{\iota,\iota'}$; quo pacto erit $\sum_\iota \beta_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'} = B$ et $\sum_\iota \beta_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota''} = 0$, si $\iota' \gtrless \iota''$.

Si $\sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'} ds_\iota ds_{\iota'} = \sum_\iota dx_\iota^2$ pro valoribus quibuslibet ipsarum dx, substituendo $d + \delta$ pro d invenitur etiam $\sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'} ds_\iota \delta s_{\iota'} = \Sigma dx_\iota \delta x_\iota$ pro valoribus quibuslibet ipsarum dx et δx.

Hinc si quantitates ds_ι per dx_ι et quantitates δx_ι per quantitates δs_ι exprimuntur, sequitur

$$\frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu} = \sum_\iota b_{\nu,\iota} \frac{\partial s_\iota}{\partial x_{\nu'}} \tag{1}$$

et proinde

$$\frac{\partial s_\iota}{\partial x_{\nu'}} = \sum_\nu \frac{\beta_{\nu,\iota}}{B} \frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu}. \tag{2}$$

Unde porro deducitur, quoniam sit

$$\sum_\nu \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota} = 1 \text{ et } \sum_\nu \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_{\iota'}} = 0, \text{ si } \iota \gtrless \iota',$$

$$(3)\qquad \sum_{\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_{\iota'}} = b_{\iota,\iota'}, \qquad (4)\quad \sum_{\nu} \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu}\frac{\partial s_{\iota'}}{\partial x_\nu} = \frac{\beta_{\iota,\iota'}}{B}$$

et differentiando formulam (3)

$$(4)\qquad \sum_{\nu} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_\iota \partial s_{\iota''}}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_{\iota'}} + \sum_{\nu} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota} = \frac{\partial b_{\iota,\iota'}}{\partial s_{\iota''}}.$$

Iam ex his ipsarum

$$\frac{\partial b_{\iota,\iota'}}{\partial s_{\iota''}}, \quad \frac{\partial b_{\iota,\iota''}}{\partial s_{\iota'}}, \quad \frac{\partial b_{\iota',\iota''}}{\partial s_\iota}$$

expressionibus eruitur

$$(5)\qquad 2\sum_{\nu} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota} = \frac{\partial b_{\iota,\iota'}}{\partial s_{\iota''}} + \frac{\partial b_{\iota,\iota''}}{\partial s_{\iota'}} - \frac{\partial b_{\iota',\iota''}}{\partial s_\iota}$$

et si haec quantitas per $p_{\iota,\iota',\iota''}$ designatur

$$(6)\qquad 2\,\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}} = \sum_{\iota} \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu}\, p_{\iota,\iota',\iota''}.$$

Quantitatibus $p_{\iota,\iota',\iota''}$ iterum differentiatis obtinetur

$$\frac{\partial p_{\iota,\iota',\iota''}}{\partial s_{\iota'''}} - \frac{\partial p_{\iota,\iota',\iota'''}}{\partial s_{\iota''}} = 2\sum_{\nu} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_\iota \partial s_{\iota'''}} - 2\sum_{\nu} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota'''}}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_\iota \partial s_{\iota''}},$$

unde tandem prodit, substitutis valoribus modo inventis (6) et (4)

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 b_{\iota,\iota''}}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 b_{\iota',\iota'''}}{\partial s_\iota \partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota,\iota'''}}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota',\iota''}}{\partial s_\iota \partial s_{\iota'''}} \\ &+ \tfrac{1}{2}\sum_{\nu,\nu'} \left(p_{\nu,\iota',\iota'''}\, p_{\nu',\iota,\iota''} - p_{\nu,\iota,\iota'''}\, p_{\nu',\iota',\iota''}\right) \frac{\beta_{\nu,\nu'}}{B} = 0. \end{aligned}$$

Hujus modi igitur aequationibus functiones b satisfaciant necesse est, quando $\sum\limits_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ in formam $\sum\limits_{\iota} dx_\iota^2$ transformari potest: partes laevas harum aequationum designabimus per

$$(\iota\iota', \iota''\iota''').$$

Ut indoles harum aequationum melius perspiciatur, formetur expressio

$$\delta\delta \sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'} - 2d\delta \sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, \delta s_{\iota'} + dd \sum b_{\iota,\iota'}\, \delta s_\iota\, \delta s_{\iota'}$$

determinatis variationibus secundi ordinis d^2, $d\delta$, δ^2 ita, ut sit

$$\delta' \sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'} - \delta \sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, \delta' s_{\iota'} - d \sum b_{\iota,\iota'}\, \delta s_\iota\, \delta' s_{\iota'} = 0$$

$$\delta' \sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'} - 2d \sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, \delta' s_{\iota'} = 0$$

$$\delta' \sum b_{\iota,\iota'}\, \delta s_\iota\, \delta s_{\iota'} - 2\delta \sum b_{\iota,\iota'}\, \delta s_\iota\, \delta' s_{\iota'} = 0,$$

denotante δ' variationem quamcunque. Quo pacto haec expressio invenietur

$$(\mathrm{II})\qquad -\sum (\iota\iota', \iota''\iota''')\,(ds_\iota\, \delta s_{\iota'} - ds_{\iota'}\, \delta s_\iota)\,(ds_{\iota''}\, \delta s_{\iota'''} - ds_{\iota'''}\, \delta s_{\iota''}).$$

Iam ex hac formatione hujus expressionis sponte patet, mutatis variabilibus independentibus transmutari eam in expressionem a nova forma ipsius $\Sigma b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ eadem lege dependentem. At si quantitates b sunt constantes, omnes coefficientes expressionis (II) cifrae aequales evadunt. Unde si $\Sigma b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ in expressionem similem constantibus coefficientibus affectam transformari potest, expressio (II) identice evanescat necessè est.

Perinde patet, si expressio (II) non evanescat, expressionem

$$(\mathrm{III})\qquad -\tfrac{1}{2}\,\frac{\sum (\iota\iota', \iota''\iota''')\,(ds_\iota\, \delta s_{\iota'} - ds_{\iota'}\, \delta s_\iota)\,(ds_{\iota''}\, \delta s_{\iota'''} - ds_{\iota'''}\, \delta s_{\iota''})}{\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'} \sum b_{\iota,\iota'}\, \delta s_\iota\, \delta s_{\iota'} - \left(\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, \delta s_{\iota'}\right)^2}$$

mutatis variabilibus independentibus non mutari, insuperque immutatam manere, si in locos variationum ds_ι, δs_ι expressiones ipsarum lineares quaelibet independentes $\alpha ds_\iota + \beta \delta s_\iota$, $\gamma ds_\iota + \delta\delta s_\iota$ substituantur. Valores autem maximi et minimi hujus functionis (III) ipsarum ds_ι, δs_ι neque a forma expressionis $\Sigma b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ neque a valoribus variationum ds_ι, δs_ι pendebunt, unde ex his valoribus dignosci poterit, an duae hujusmodi expressiones in se transformari possint.

Disquisitiones haece interpretatione quadam geometrica illustrari possunt, quae quamquam conceptibus inusitatis nitatur, tamen obiter eam addigitavisse juvabit.

Expressio $\sqrt{\Sigma b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}}$ spectari potest tanquam elementum lineare in spatio generaliore n dimensionum nostrum intuitum transcendente. Quodsi in hoc spatio a puncto $(s_1, s_2, \ldots s_n)$ ducantur omnes lineae brevissimae, in quarum elementis initialibus variationes ipsarum s sunt ut $\alpha ds_1 + \beta\delta s_1 : \alpha ds_2 + \beta \delta s_2 : \ldots : \alpha ds_n + \beta \delta s_n$, denotantibus α et β quantitates quaslibet, hae lineae superficiem constituent, quam in spatium vulgare nostro intuitui subjectum evolvere licet. Quo pacto expressio (III) erit mensura curvaturae hujus superficiei in puncto $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ (1).

Si jam ad casum $n = 3$ redimus, expressio (II) est forma secundi gradus ipsarum

$$ds_2\, \delta s_3 - ds_3\, \delta s_2, \quad ds_3\, \delta s_1 - ds_1\, \delta s_3, \quad ds_1\, \delta s_2 - ds_2\, \delta s_1,$$

unde in hoc casu sex obtinemus aequationes, quibus functiones b satisfacere debent, ut $\Sigma b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ in formam constantibus coefficientibus gaudentem transformari possit. Nec difficile, ope notionum modo traditarum, est demonstratu, has sex conditiones, ut hoc fieri possit, sufficere. Observandum tamen est ternas tantum esse a se independentes.

Iam ut quaestionem ab Ill$^{\text{ma}}$ Academia propositam persolvamus, in his sex aequationibus formae functionum b, methodo supra exposita inventae, sunt substituendae, quo pacto omnes casus invenientur, in quibus temperatura u in corporibus homogeneis functio temporis et duarum tantum variabilium fieri possit.

Sed angustia temporis non permisit hos calculos perscribere. Contenti igitur esse debemus, postquam methodos quibus usi sumus exposuimus, solutiones singulas quaestionis propositae enumerasse.

Si brevitatis causa casum simplicissimum, quando temperatura u secundum legem

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = aa\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

variatur, solum respicimus, ad quem casus reliquos facile reduci posse constat: casus $m = 1$ tum tantum evenire potest, quando u est constans aut in lineis rectis parallelis, aut in circulis helicibusve, ita ut coordinatis rectangularibus z, $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$ rite electis, poni possit $\alpha = r$, $\beta = z + \varphi\,.\,\text{const.}$

Casus $m = 2$ locum inveniet si $u = f(\alpha) + \varphi(\beta)$, casus $m = 3$ si $u = \alpha e^{\lambda t} + f(\beta)$, denotante λ constantem realem, casus denique $m = 4$, ut jam supra invenimus, si u est aut $= \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t} + \text{const.}$, aut $= (\alpha + \beta t)e^{\lambda t} + \text{const.}$, aut $= f(\alpha)$.

Iam ut formae functionis u penitus innotescant, annotari tantum opus est, temperaturam u, nisi sit formae $\alpha e^{\lambda t}$, tum tantum functionem temporis et unius variabilis esse posse, quando sit constans aut in planis parallelis, aut in cylindris eadem axi gaudentibus, aut in sphaeris concentricis. Si u est formae $\alpha e^{\lambda t}$, ex aequatione differentiali (I) sequitur

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_3^2} = \lambda aa\alpha$$

et perinde in casu quarto substituendo valores ipsius u in aequatione differentiali (I), functiones α et β facile determinantur, dummodo animadvertas, in hoc casu $\alpha e^{\lambda t}$ et $\beta e^{\mu t}$ esse posse quantitates complexas conjugatas. ([2])

Anmerkungen.

(1) (Zu Seite 403.) Diese Untersuchungen enthalten die analytischen Ausführungen zu den in der Abhandlung „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ (S. 272) angedeuteten Resultaten. Die Frage ist die nach den Bedingungen der Transformirbarkeit eines Differentialausdrucks zweiter Ordnung in einen andern, insbesondere einen mit constanten Coefficienten. Diese Frage ist seit dem ersten Erscheinen der genannten Riemann'schen Abhandlung eingehend von Christoffel und Lipschitz untersucht worden, die auf verschiedenen Wegen zu den gleichen Resultaten wie Riemann gelangen (Crelle's Journal Bd. 70, 71, 72, 82). Später hat auch R. Beez sich mit dem Gegenstande beschäftigt (Schlömilch's Zeitschrift Bd. 20, 21, 24). Gegen die Bemerkungen, die in der ersten Auflage dieser Ausgabe auf Grund einer älteren (ungedruckten) Untersuchung von R. Dedekind von mir lediglich in der Absicht beigefügt waren, dem Leser die Ausführung der von Riemann gegebenen Rechnungsvorschrift zu erleichtern, sind in der letztgenannten Arbeit Bedenken vorgebracht, die wohl nur in der etwas zu kurzen Ausdrucksweise dieser Bemerkungen ihren Grund haben können. Sie sollen daher hier mit etwas grösserer Ausführlichkeit wiederholt werden.

Es sei das Quadrat des Linienelements im Raume von n Dimensionen

$$ds^2 = \sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}.$$

Dann ergeben sich zur Bestimmung der kürzesten Linien die Differentialgleichungen

$$\text{(1)} \qquad d \sum_{\iota} b_{\iota,\mu} \frac{ds_\iota}{dr} = \tfrac{1}{2}\, dr \sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial b_{\iota,\iota'}}{\partial s_\mu} \frac{ds_\iota}{dr} \frac{ds_{\iota'}}{dr}$$

und

$$\sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'} \frac{ds_\iota}{dr} \frac{ds_{\iota'}}{dr} = 1,$$

wenn

$$r = \int \sqrt{\sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}}$$

die Länge der kürzesten Linie selbst von einem willkürlichen festen Punkt 0 bis zu einem variablen Punkt bedeutet.

Der Punkt 0 sei der, in dessen Nachbarschaft das Verhalten des Raumes von n Dimensionen untersucht werden soll. Man denke sich von ihm aus in allen Richtungen kürzeste Linien gezogen und führe nun ein System neuer Variablen ein vermittelst der Substitution

$$x_1 = rc_1, \quad x_2 = rc_2, \; \ldots, \quad x_n = rc_n,$$

worin die Grössen c_ι die Bedeutung haben:

$$c_\iota = \left(\frac{ds_\iota}{dr}\right)_0,$$

so dass zwischen ihnen die Relation besteht:

$$\sum_{\iota,\iota'} b^{(0)}_{\iota,\iota'} c_\iota c_{\iota'} = 1,$$

und dass sie längs einer jeden, vom Punkt 0 auslaufenden kürzesten Linie constant sind. Die c_ι treten als Integrationsconstanten der Differentialgleichungen (1) auf, und um die Variabeln x_ι als Functionen der ursprünglichen Variabeln s_ι darzustellen, muss natürlich die vollständige Integration dieser Differentialgleichungen vorausgesetzt werden.

Das Charakteristische dieser neuen Variabeln, die man „Centralcoordinaten eines veränderlichen Punktes m in Bezug auf den Punkt 0" nennen kann, besteht darin, dass sie im Punkt 0 verschwinden, und dass ihre Werthe beim Fortschreiten längs einer kürzesten Linie der Länge r dieser kürzesten Linie proportional wachsen. Diese Eigenschaften bleiben erhalten, wenn statt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ein System von n von einander unabhängigen linearen homogenen Functionen mit constanten Coefficienten von diesen Variabeln eingeführt wird. Dadurch kann man erreichen, dass, wie Riemann, in der Abhandlung Hypothesen der Geometrie II, 2, S. 279, verlangt, $r^2 = \Sigma x_\iota^2$ wird. Dies ist aber ganz unwesentlich und soll hier nicht weiter berücksichtigt werden.

Ist nun, in den neuen Variabeln ausgedrückt, das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'} dx_\iota dx_{\iota'},$$

so folgt leicht, indem man längs einer von 0 auslaufenden kürzesten Linie fortschreitet, also $ds^2 = dr^2$ setzt,

(2) $$\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'} c_\iota c_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'} c_\iota c_{\iota'} = 1.$$

Drückt man die Differentialgleichungen der kürzesten Linien in den neuen Variabeln aus, so ergiebt sich für die vom Punkt 0 auslaufenden kürzesten Linien

$$d \sum_\iota a_{\mu,\iota} c_\iota = \tfrac{1}{2} dr \sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_\mu} c_\iota c_{\iota'},$$

woraus folgt

(3) $$\sum_{\iota,\iota'} p_{\mu,\iota,\iota'} x_\iota x_{\iota'} = 0,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist (S. 402)

$$p_{\mu,\iota,\iota'} = \frac{\partial a_{\iota,\mu}}{\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial a_{\iota',\mu}}{\partial x_\iota} - \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_\mu}.$$

Die Gleichung (3) lässt sich auch so schreiben:

(3') $$\sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_\mu} x_\iota x_{\iota'} = 2 \sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial a_{\iota,\mu}}{\partial x_{\iota'}} x_\iota x_{\iota'}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\omega_\mu = \sum_\iota a_{\mu,\iota} x_\iota; \quad \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} = a_{\mu,\nu} + \sum_\iota \frac{\partial a_{\mu,\iota}}{\partial x_\nu} x_\iota,$$

so lässt sich die Gleichung (3') schreiben:

$$\omega_\mu + \sum_\iota \frac{\partial \omega_\iota}{\partial x_\mu} x_\iota = 2 \sum_\iota \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\iota} x_\iota.$$

Setzt man ferner

$$2\omega = \sum_\iota \omega_\iota x_\iota; \quad 2\frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = \omega_\mu + \sum_\iota \frac{\partial \omega_\iota}{\partial x_\mu} x_\iota,$$

so folgt hieraus:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = \sum_\iota \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\iota} x_\iota; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} + \sum_\iota \frac{\partial^2 \omega_\mu}{\partial x_\iota \partial x_\nu} x_\iota,$$

und hieraus:

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu} + \sum_\iota \frac{\partial}{\partial x_\iota}\left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}\right) x_\iota = 0,$$

woraus hervorgeht, dass die $\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}$ homogene Functionen der (-1)ten Ordnung sind. Bezeichnen wir eine solche Function mit $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, so hat man

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^{-1} f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Setzt man daher voraus, dass die Coefficienten $a_{\iota,\iota'}$ und ihre Ableitungen im Punkte 0 bestimmte endliche Werthe haben, so folgt, wenn man $t = 0$ setzt, dass die Function f identisch verschwinden muss, dass also $\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}$ ist. Es ist also auch

$$\sum_\iota \frac{\partial a_{\mu,\iota}}{\partial x_\nu} x_\iota = \sum_\iota \frac{\partial a_{\nu,\iota}}{\partial x_\mu} x_\iota,$$

und daraus ergiebt sich mit Hülfe von (3'):

$$\sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial a_{\mu,\iota}}{\partial x_{\iota'}} x_\iota x_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_\mu} x_\iota x_{\iota'} = 0,$$

und durch Integration der Differentialgleichungen der kürzesten Linie:

(4) $$\sum_\iota a_{\mu,\iota} c_\iota = \sum_\iota a^{(0)}_{\mu,\iota} c_\iota,$$

oder nach Multiplication mit r

$$\sum_\iota a_{\mu,\iota} x_\iota = \sum_\iota a^{(0)}_{\mu,\iota} x_\iota.$$

Dies alles sind identische Gleichungen, d. h. sie gelten für jedes Werthsystem der unabhängigen Variabeln x_ι.

Bedeuten nun $t_{\iota,\iota'} = t_{\iota',\iota}$ irgend welche Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche mit ihren Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschliesslich im Punkte 0 bestimmte endliche Werthe haben, und besteht die identische Gleichung

$$\sum_{\iota,\iota'} t_{\iota,\iota'} x_\iota x_{\iota'} = 0,$$

so folgen daraus, wenn man dreimal differentiirt, und nach der Differentiation $x_\iota = 0$ setzt, die für den Punkt 0 gültigen Gleichungen:

$$t_{\iota,\iota'} = 0; \quad \frac{\partial t_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}} + \frac{\partial t_{\iota',\iota''}}{\partial x_\iota} + \frac{\partial t_{\iota,\iota''}}{\partial x_{\iota'}} = 0.$$

Setzt man hierin $t_{\iota,\iota'} = p_{\mu,\iota,\iota'}$, so ergiebt sich für den Punkt 0

$$p_{\iota,\iota',\iota''} = 0; \quad \frac{\partial p_{\iota,\iota',\iota''}}{\partial x_{\iota'''}} + \frac{\partial p_{\iota,\iota'',\iota'''}}{\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial p_{\iota,\iota',\iota'''}}{\partial x_{\iota''}} = 0.$$

Aus der ersten derselben erhält man durch Addition von $p_{\iota',\iota,\iota''} = 0$

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}} = 0, \quad \text{im Punkt } 0,$$

aus der zweiten

$$2\left(\frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota''}}{\partial x_{\iota'''}\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'''}}{\partial x_{\iota'}\partial x_{\iota''}}\right) - \frac{\partial^2 a_{\iota'',\iota'''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'}} + \frac{\partial^2 a_{\iota''',\iota'}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota''}} + \frac{\partial^2 a_{\iota',\iota''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'''}}.$$

Vertauscht man hierin ι und ι', addirt und bezeichnet mit S die Summe der sechs Derivirten von der Form $\frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}}$, so folgt

$$S = 3\left(\frac{\partial^2 a_{\iota'',\iota'''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'}} - \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}}\right),$$

und da S sich nicht ändert, wenn man ι'', ι''' mit ι, ι' vertauscht:

$$\text{(6)} \qquad \frac{\partial^2 a_{\iota'',\iota'''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'}} = \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}},$$

$$\text{(7)} \quad \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota''}}{\partial x_{\iota'''}\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'''}}{\partial x_{\iota'}\partial x_{\iota''}} - \frac{\partial^2 a_{\iota'',\iota'''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'}} + \frac{\partial^2 a_{\iota''',\iota'}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota''}} + \frac{\partial^2 a_{\iota',\iota''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'''}} = 0,$$

im Punkt 0.

Wir verstehen nun unter $a_{\iota,\iota'}$, $\frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}}$, $\frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}}$ die Werthe dieser Grössen im Punkt 0. Unter dieser Voraussetzung haben wir für ein vom Punkt 0 auslaufendes Linienelement ds_0

$$ds_0^2 = \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$$

und für ein von einem unendlich benachbarten Punkt mit den (unendlich kleinen) Coordinaten $x_1, x_2, .., x_n$ auslaufendes Linienelement ds bis zu den Gliedern zweiter Ordnung einschliesslich:

$$ds^2 = \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} + \sum_{\iota,\iota',\iota''} \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}} x_{\iota''}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''} \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}} x_{\iota''} x_{\iota'''}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}.$$

Hierin verschwindet nach (5) das zweite Glied und das dritte

$$\Theta = \tfrac{1}{2} \sum_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''} \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}} x_{\iota''} x_{\iota'''}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$$

ist der Ausdruck für die Abweichung des vorliegenden Raumes von n Dimensionen von der Ebenheit in der der durch x_ι, dx_ι bestimmten Flächenrichtung; denn mit Hilfe von (6) und (7) kann man diesem eine Form geben, aus der ersichtlich ist, dass er nur von den Verbindungen $x_\iota\, dx_{\iota'} - x_{\iota'}\, dx_\iota$ abhängt. Man schreibe nämlich durch Vertauschung der Indices Θ in folgenden vier Formen

$$\Theta = \tfrac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}} x_{\iota''} x_{\iota'''}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota',\iota''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'''}} x_\iota x_{\iota'''}\, dx_{\iota'}\, dx_{\iota''}$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'''}}{\partial x_{\iota'}\partial x_{\iota''}} x_{\iota'} x_{\iota''}\, dx_\iota\, dx_{\iota'''}$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota'',\iota'''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'}} x_\iota x_{\iota'}\, dx_{\iota''}\, dx_{\iota'''}.$$

Auf den vierten dieser Ausdrücke wenden wir (6) an und auf den zweiten und dritten (6) und (7), wodurch sich nach einer nochmaligen Vertauschung der Indices ergiebt

$$\Theta = \tfrac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}} x_{\iota''} x_{\iota'''}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$$
$$\tfrac{1}{2}\Theta = -\tfrac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}} x_\iota x_{\iota'''}\, dx_{\iota'}\, dx_{\iota''}$$
$$\tfrac{1}{2}\Theta = -\tfrac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}} x_{\iota'} x_{\iota''}\, dx_\iota\, dx_{\iota'''}$$
$$\Theta = \tfrac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}} x_\iota x_{\iota'}\, dx_{\iota''}\, dx_{\iota'''}.$$

Addirt man diese vier Gleichungen, so folgt

$$\text{(8)} \qquad \Theta = \tfrac{1}{6} \sum_{\iota,\iota'';\iota',\iota'''} \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\partial x_{\iota'''}} \left(x_\iota\, dx_{\iota''} - x_{\iota''}\, dx_\iota\right)\left(x_{\iota'}\, dx_{\iota'''} - x_{\iota'''}\, dx_{\iota'}\right).$$

Dieser Ausdruck für Θ ist aber nur unter der Voraussetzung abgeleitet, dass die Variabeln x_ι die besondere Bedeutung der Centralcoordinaten haben. Es ist nun noch die Aufgabe, ihn auf beliebige Coordinaten zu transformiren. Dies geschieht nach Riemann's Vorschrift dadurch, dass man ihn in eine Form bringt, deren Unabhängigkeit von den benutzten Variabeln in die Augen fällt.

Wir setzen zunächst unter Beibehaltung der Centralcoordinaten an Stelle der unendlich kleinen Coordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die ihnen proportionalen Differentiale $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, also

$$\Theta = \tfrac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}\, \delta x_{\iota''}\, \delta x_{\iota'''}. \tag{9}$$

Wir wählen die sonst ganz willkürlichen Differentiale dx_ι, δx_ι so dass

$$d\,dx_\iota = 0,\quad d\delta x_\iota = 0,\quad \delta\, dx_\iota = 0,\quad \delta\delta x_\iota = 0, \tag{10}$$

was z. B. durch constante dx_ι, δx_ι erreicht wird, und was zur Folge hat, dass d und δ vertauschbar sind, d. h. dass für jede beliebige Ortsfunction φ

$$d\delta\varphi = \delta d\varphi. \tag{I}$$

Unter dieser Voraussetzung kann man aus (5), (6), (7) die Formel ableiten

$$dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} = \delta\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} = -2\, d\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'}$$

und mit ihrer Hilfe

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\, dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} \tag{II}$$

$$= \tfrac{1}{6}\Big\{ dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} - 2\, d\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'} + \delta\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} \Big\}.$$

Bedeutet δ' eine willkürliche, nur mit d und δ vertauschbare Variation, so ergeben sich aus (5) und (10) die Gleichungen

$$\delta' \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, d\delta' x_\iota\, \delta x_{\iota'} + \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta\delta' x_{\iota'},$$

$$d \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta' x_\iota\, \delta x_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, d\delta' x_\iota\, \delta x_{\iota'},$$

$$\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta' x_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta\delta' x_{\iota'},$$

woraus folgt:

$$\delta' \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'} - d \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta' x_\iota\, \delta x_{\iota'} - \delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta' x_{\iota'} = 0, \tag{III}$$

und wenn man $d = \delta$ setzt:

$$\delta' \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} - 2d \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta' x_{\iota'} = 0 \tag{IV}$$

$$\delta' \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} - 2\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta' x_{\iota'} = 0. \tag{V}$$

Wenn nun an Stelle der Variabeln x_ι andere Variabeln s_ι, die Functionen von ihnen sind, eingeführt werden, so ergiebt sich für ganz beliebige Differentiale d, δ eine Umformung

$$\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, \delta s_{\iota'}$$

und man erhält also den umgeformten Ausdruck von Θ, indem man in (II) $b_{\iota,\iota'}$, s_ι an Stelle von $a_{\iota,\iota'}$, x_ι setzt, oder mit andern Worten, indem man in (II) unter den x_ι nicht mehr die Centralcoordinaten, sondern beliebige Coordinaten versteht. Freilich werden die Bedingungen (5), (6), (7), (10) dann nicht mehr

gültig sein, wohl aber werden die Bedingungen (I), (III), (IV), (V) für alle Systeme von Coordinaten befriedigt sein, wenn sie es für eines, z. B. das der Centralcoordinaten, sind. Wenn wir also bei der weiteren Umformung von (II) von keinen andern als den Relationen (I), (III), (IV), (V) Gebrauch machen, so werden die Resultate für beliebige Variabeln gültig sein. Die Rechnung ist nun, wenn auch etwas lang, doch ganz ohne Schwierigkeiten. Berechnet man die rechte Seite von (II), so heben sich allein schon durch die Vertauschbarkeit der Differentiale die Differentiale dritter Ordnung fort. Die Differentiale zweiter Ordnung kann man mit Hilfe der aus (III), (IV), (V) folgenden Gleichungen

$$2 \sum_{\iota} a_{\iota,\iota'}\, d\,dx_\iota = -\sum_{\iota,\iota'} p_{\nu,\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'},$$

$$2 \sum_{\iota} a_{\iota,\iota'}\, d\delta x_\iota = -\sum_{\iota,\iota'} p_{\nu,\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'},$$

$$2 \sum_{\iota} a_{\iota,\iota'}\, \delta\delta x_\iota = -\sum_{\iota,\iota'} p_{\nu,\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'},$$

worin $p_{\nu,\iota,\iota'}$ wie auf Seite 402 die Bedeutung

$$p_{\nu,\iota,\iota'} = \frac{\partial a_{\nu,\iota}}{\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial a_{\nu,\iota'}}{\partial x_\iota} - \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_\nu}$$

hat, herausschaffen, und so erhält man den Ausdruck

$$dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} - 2d\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'} + \delta\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$$

$$= \sum_{\iota\iota',\iota''\iota'''} (\iota\iota',\iota''\iota''')\,(dx_\iota\, \delta x_{\iota'} - \delta x_\iota\, dx_{\iota'})\,(dx_{\iota''}\, \delta x_{\iota'''} - \delta x_{\iota''}\, dx_{\iota'''}),$$

wenn $(\iota\iota', \iota''\iota''')$ dieselbe Bedeutung hat, wie im Riemann'schen Text (S. 402), und die Summe so zu nehmen ist, dass von zwei Paaren von Indices ι, ι' und ι', ι und ebenso von zwei Paaren ι'', ι''' und ι''', ι'' nur je das eine beizuhalten ist.

Aus diesem Ausdruck erhalten wir nun das Krümmungsmaass unseres allgemeinen Raumes. Es seien nämlich

$$ds = \sqrt{\textstyle\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}},\quad \delta s = \sqrt{\textstyle\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'}}$$

zwei Linienelemente in demselben, und

$$\frac{\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'}}{ds\, \delta s} = \cos\vartheta$$

der Cosinus des Winkels, den sie einschliessen.

Der Flächeninhalt des von ihnen gebildeten unendlich kleinen Dreiecks ist dann

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\, ds\, \delta s \sin\vartheta$$

und es ergiebt sich

$$4\Delta^2 = \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} - \Big(\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'}\Big)^2$$

$$= \sum_{\iota\iota',\iota''\iota'''} (a_{\iota,\iota''}\, a_{\iota',\iota'''} - a_{\iota',\iota''}\, a_{\iota,\iota'''})\,(dx_\iota\, \delta x_{\iota'} - \delta x_\iota\, dx_{\iota'})\,(dx_{\iota''}\, \delta x_{\iota'''} - \delta x_{\iota''}\, dx_{\iota'''}),$$

$$-\tfrac{3}{8}\,\frac{dd\sum\limits_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta x_\iota\,\delta x_{\iota'}}{\Delta^2}$$

$$=-\tfrac{1}{2}\,\frac{dd\sum\limits_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta x_\iota\,\delta x_{\iota'}-2d\delta\sum\limits_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta x_{\iota'}+\delta\delta\sum\limits_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,dx_{\iota'}}{\sum\limits_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,dx_{\iota'}\sum\limits_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta x_\iota\,\delta x_{\iota'}-\Big(\sum\limits_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta x_{\iota'}\Big)^2}$$

$$=-\tfrac{1}{2}\,\frac{\sum\limits_{\iota\iota',\,\iota''\iota'''}(\iota\iota',\,\iota''\iota''')\,(dx_\iota\,\delta x_{\iota'}-\delta x_\iota\,dx_{\iota'})\,(dx_{\iota''}\,\delta x_{\iota'''}-\delta x_{\iota''}\,dx_{\iota'''})}{\sum\limits_{\iota\iota',\,\iota''\iota'''}(a_{\iota,\iota''}a_{\iota',\iota'''}-a_{\iota,\iota'''}a_{\iota',\iota''})\,(dx_\iota\,\delta x_{\iota'}-\delta x_\iota\,dx_{\iota'})\,(dx_{\iota''}\,\delta x_{\iota'''}-\delta x_{\iota''}\,dx_{\iota'''})}.$$

Es ist nun noch nachzuweisen, dass dieser Ausdruck mit dem übereinstimmt, den Gauss für das Krümmungsmaass einer Fläche aufstellt, wenn wir eine Fläche betrachten, welche von solchen kürzesten Linien gebildet wird, in deren Anfangselementen die Variationen der x sich verhalten wie

$$\alpha dx_1+\beta\delta x_1:\alpha dx_2+\beta\delta x_2:\ldots:\alpha dx_n+\beta\delta x_n,$$

wenn α und β beliebige Grössen bedeuten.

Wir setzen wie oben $x_\iota=rc_\iota$, so dass die c_ι in jeder vom Punkt 0 auslaufenden kürzesten Linie constant sind, und r die Länge dieser kürzesten Linie bis zu einem unbestimmten Punkt bedeutet. Dann ist, wie oben gezeigt,

$$\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,c_\iota\,c_{\iota'}=\sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\,c_\iota\,c_{\iota'}=1.$$

Legen wir nun zwei feste Systeme der Grössen c_ι zu Grunde, $c_\iota^{(0)}$ und c_ι' und betrachten ein veränderliches System

(11) $$c_\iota=\alpha c_\iota^{(0)}+\beta c_\iota',$$

so haben wir hiernach:

$$\alpha^2+2\alpha\beta\cos(r^{(0)},r')+\beta^2=1,$$

wodurch die Grössen c_ι in Functionen einer einzigen Variabeln übergehen, für welche wir den Winkel φ nehmen können, den das Anfangselement von r mit dem Anfangselement von $r^{(0)}$ bildet, und der sich aus dem Ausdruck ergiebt

$$\cos\varphi=\sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\,c_\iota\,c_{\iota'}^{(0)}.$$

Wenn sich nun die Grössen r, c_ι um die unendlich kleinen Grössen dr, dc_ι ändern, welche der Bedingung genügen:

$$\sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\,c_\iota\,dc_{\iota'}=0,$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichungen (4)

(12) $$\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,c_\iota\,dc_{\iota'}=\sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\,c_\iota\,dc_{\iota'}=0.$$

Ferner haben wir

$$dx_\iota=r\,dc_\iota+c_\iota\,dr,$$

also:

$$ds^2=\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,dx_{\iota'}=dr^2+r^2\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dc_\iota\,dc_{\iota'}=dr^2+r^2\mu\,d\varphi^2,$$

wenn zur Abkürzung

$$\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dc_\iota\,dc_{\iota'}=\mu\,d\varphi^2$$

gesetzt wird.

Nun haben wir aber:

(13) $$\cos\varphi=\sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\,c_\iota\,c^{(0)}_{\iota'},\quad -\sin\varphi\,d\varphi=\sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\,c^{(0)}_\iota\,dc_{\iota'},$$

und aus (11) folgt ein Ausdruck von der Form

$$dc_\iota=ac_\iota^{(0)}+bc_\iota;\quad a=\beta d\alpha-\alpha d\beta,\quad b=d\beta,$$

also aus (12) und (13)

$$-\sin\varphi\,d\varphi=a+b\cos\varphi,$$
$$0=a\cos\varphi+b.$$

Hieraus durch Elimination von a und b:

$$\sin\varphi\,dc_\iota=d\varphi\left(c_\iota\cos\varphi-c_\iota^{(0)}\right).$$

Daraus folgt weiter

$$d\varphi^2=\sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\,dc_\iota\,dc_{\iota'}$$

und mithin

(14) $$\mu=\frac{\sum\limits_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dc_\iota\,dc_{\iota'}}{\sum\limits_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\,dc_\iota\,dc_{\iota'}}.$$

Bezeichnen wir diesen Ausdruck durch $\frac{m^2}{r^2}$, so erhalten wir die Form, welche Gauss dem Linienelement auf einer beliebigen Fläche gegeben hat, nämlich:

$$ds^2=dr^2+m^2d\varphi^2$$

(Disquisitiones generales circa superficies curvas art. 19) und für das Krümmungsmaass ergiebt sich

$$k=-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}.$$

Ist nun die Oberfläche im Punkt $r=0$ stetig gekrümmt, so ist in diesem Punkt

$$m=0,\quad \frac{\partial m}{\partial r}=1,\quad \frac{\partial^2 m}{\partial r^2}=0,$$

und daher in diesem Punkt

$$k=-\frac{\partial^3 m}{\partial r^3}.$$

Für die Function μ ergiebt sich hieraus für denselben Punkt

$$\mu = 1, \quad \frac{\partial \mu}{\partial r} = 0, \quad k = -\tfrac{3}{2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2}.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen sind in Folge von (14), (5) befriedigt; aus der dritten ergiebt sich

$$k = -\tfrac{3}{2}\frac{\sum\limits_{\iota\iota',\iota''\iota'''}\left(\frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}}\right)_0 c_{\iota''}c_{\iota'''}\,dc_\iota\,dc_{\iota'}}{\sum\limits_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\,dc_\iota\,dc_{\iota'}},$$

was mit dem oben gefundenen Ausdruck übereinstimmt.

Construirt man die vom Punkt 0 auslaufenden kürzesten Linien, deren Anfangsrichtung durch die Gleichungen (11) bestimmt sind, so erhält man eine Fläche im transcendenten Raume. Die Coordinaten eines Punktes dieser Fläche lassen sich durch zwei unabhängige Variabeln ausdrücken, und wenn diese mit p, q bezeichnet werden, so ergiebt sich für das Quadrat des Linienelementes auf dieser Fläche ein Ausdruck der Form

$$ds = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$

worin E, F, G Functionen von p und q sind. Nimmt man für x, y, z ein System particularer Lösungen der simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2 = E$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} = F$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 = G,$$

so wird

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

und wenn man x, y, z als Coordinaten eines Punktes in unserem Raume auffasst, so erhält man eine Fläche, auf die nach Riemann's Ausdruck die Fläche im transcendenten Raume abgewickelt d. h. ohne Aenderung des Linienelementes Punkt für Punkt bezogen werden kann.

Man kann aus diesen Formeln leicht den Ausdruck für das Linienelement unter Voraussetzung eines constanten Krümmungsmaasses ableiten, der auf Seite 282 angegeben ist. Wenn nämlich k den constanten Werth α hat, so ergiebt sich

$$m = \frac{\sin\sqrt{\alpha}\,r}{\sqrt{\alpha}},$$

und wenn man für die c_ι solche lineare Verbindungen von ihnen eingeführt annimmt, dass

$$\Sigma c_\iota^2 = 1$$

wird, also

$$d\varphi^2 = \Sigma dc_\iota^2,$$

so ergiebt sich für ds^2

$$ds^2 = dr^2 + \frac{\sin^2\sqrt{\alpha}\,r}{\alpha}\,\Sigma dc_\iota^2.$$

Setzt man also (was als Specialfall die stereographische Projection der Kugelfläche auf die Ebene enthält)

$$x_\iota = \frac{2c_\iota}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\alpha}\,r}{2}, \qquad \sum x_\iota^2 = \frac{4}{\alpha}\operatorname{tg}^2\frac{\sqrt{\alpha}}{2}r,$$

so folgt

$$\sum dx_\iota^2 = \frac{dr^2}{\cos^4\frac{\sqrt{\alpha}}{2}r} + \frac{4}{\alpha}\operatorname{tg}^2\frac{\sqrt{\alpha}}{2}r.\sum dc_\iota^2$$

und

$$ds = \cos^2\frac{\sqrt{\alpha}}{2}r\sqrt{\sum dx_\iota^2}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x_\iota^2}\sqrt{\sum dx_\iota^2}.$$

(2) (Zu Seite 404). Die vollständige Verification der hier aufgestellten Schlussresultate scheint noch verwickelte Rechnungen zu erfordern, die ich aus den sehr unvollständigen vorhandenen Bruchstücken nur zum Theil herstellen konnte. Was sich daraus entziffern liess, theile ich hier mit in der Hoffnung, dass es bei einem erneuten Versuch, die Resultate vollständig herzuleiten, als Grundlage dienen könne.

Wir beantworten zunächst die Frage, in welchen Fällen die Temperatur ausser von der Zeit nur von Einer Veränderlichen abhängt. In diesen Fällen hat die Differentialgleichung, nach welcher die Bewegung der Wärme geschieht, die Form

$$(1) \qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + b\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Wenn nun die Coefficienten a, b nicht Functionen der einzigen Variabeln α sind, so zerfällt diese Differentialgleichung in die beiden folgenden:

$$a'\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + b'\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a''\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + b''\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0,$$

worin a', b', a'', b'' nur von α abhängen.

Durch Einführung einer neuen Variablen an Stelle von α lässt sich die zweite dieser Gleichungen in die Form $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$ bringen, so dass u die Form erhält $u_1\alpha + u_2$, wenn u_1, u_2 Functionen der Zeit allein sind. Die erste der obigen Gleichungen nimmt dann die Gestalt an

$$(c\alpha + c_1)\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

worin c, c_1 Constanten sind. Daraus folgt nun weiter

$$cu_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \qquad 0 = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

also hat u die Form $\alpha e^{\lambda t} + \text{const.}$

Wenn aber in der Differentialgleichung (1) die Coefficienten a, b schon Functionen von α allein sind, so können wir unbeschadet der Allgemeinheit $b = 0$ annehmen (durch Einführung einer neuen Variablen für α), und da die Differentialgleichung (1) durch Transformation aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

hervorgegangen sein muss, so kommt unsere Aufgabe auf die folgende zurück:

Es sollen alle Functionen α der Coordinaten x, y, z gefunden werden, die den beiden Differentialgleichungen

$$\Delta = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = 0, \quad D = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2 = f(\alpha)$$

zugleich genügen.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = r, \quad p^2 + q^2 + r^2 = m,$$

und haben nun vier Fälle zu unterscheiden:

1. Wenn p, q, r von einander unabhängige Functionen der Coordinaten x, y, z sind, so ist α eine Function von m, $\varphi(m)$, und wir können p, q, r als unabhängige Variable an Stelle von x, y, z einführen. Setzen wir

$$s = \alpha - px - qy - rz, \quad ds = -x\,dp - y\,dq - z\,dr,$$

so folgt:

$$x = -\frac{\partial s}{\partial p}, \quad y = -\frac{\partial s}{\partial q}, \quad z = -\frac{\partial s}{\partial r},$$

$$\alpha = s - p\frac{\partial s}{\partial p} - q\frac{\partial s}{\partial q} - r\frac{\partial s}{\partial r} = \varphi(m).$$

Setzt man

$$s = \psi(m) + t$$

und bestimmt die Function $\psi(m)$ aus der Differentialgleichung

$$\psi(m) - 2m\psi'(m) = \varphi(m),$$

so ergiebt sich für t die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$t - p\frac{\partial t}{\partial p} - q\frac{\partial t}{\partial q} - r\frac{\partial t}{\partial r} = 0,$$

deren allgemeine Lösung ist:

$$t = p\chi\left(\frac{q}{p}, \frac{r}{p}\right) = p\chi(\beta, \gamma),$$

wenn χ eine willkürliche Function bedeutet und zur Abkürzung

$$\beta = \frac{q}{p}, \quad \gamma = \frac{r}{p}$$

gesetzt wird.

Wir haben also

$$
\begin{aligned}
& -x = \frac{\partial s}{\partial p} = 2p\psi'(m) + \chi - \beta\chi'(\beta) - \gamma\chi'(\gamma) \\
(2) \qquad & -y = \frac{\partial s}{\partial q} = 2q\psi'(m) + \chi'(\beta) \\
& -z = \frac{\partial s}{\partial r} = 2r\psi'(m) + \chi'(\gamma).
\end{aligned}
$$

Nun folgt aus der Gleichung

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

durch Einführung von p, q, r als unabhängige Variable

$$\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} = 0,$$

oder durch Substitution von (2)

$$
\begin{aligned}
& m\left(12\psi'(m)^2 + 16m\psi'(m)\psi''(m)\right) \\
& + \sqrt{m}\left(4\psi'(m) + 4m\psi''(m)\right)\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}\left\{(\beta^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2} + 2\beta\gamma\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\partial\gamma} + (\gamma^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2}\right\} \\
& + (1+\beta^2+\gamma^2)^2\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\partial\gamma}\right)^2\right) = 0,
\end{aligned}
$$

und da m, β, γ von einander unabhängige Variable sind, so spaltet sich diese Gleichung in die drei folgenden:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\partial\gamma}\right)^2 = \frac{k}{(1+\beta^2+\gamma^2)^2},$$

$$(4) \qquad (\beta^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2} + 2\beta\gamma\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\partial\gamma} + (\gamma^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2} = \frac{k_1}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$(5) \qquad m\left(12\psi'(m)^2 + 16m\psi'(m)\psi''(m)\right) + k_1\sqrt{m}\left(4\psi'(m) + 4m\psi''(m)\right) + k = 0,$$

worin k, k_1 unbestimmte Constanten bedeuten. Führt man an Stelle der Function χ eine neue Function χ_1 ein durch die Gleichung

$$\chi = \tfrac{1}{2}k_1\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2} + \chi_1,$$

so gehen die Gleichungen (3), (4) in folgende über:

$$(6) \qquad \frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta\partial\gamma}\right)^2 = \frac{k'}{(1+\beta^2+\gamma^2)^2},$$

$$(7) \qquad (\beta^2+1)\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta^2} + 2\beta\gamma\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta\partial\gamma} + (\gamma^2+1)\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\gamma^2} = 0.$$

Diese Gleichungen können aber nur dann zusammen bestehen, wenn χ_1 eine lineare Function von β, γ, und folglich $k' = 0$ ist; denn betrachten wir

$$\chi_1 - \beta\frac{\partial\chi_1}{\partial\beta} - \gamma\frac{\partial\chi_1}{\partial\gamma}, \quad \frac{\partial\chi_1}{\partial\beta}, \quad \frac{\partial\chi_1}{\partial\gamma}$$

als rechtwinklige Coordinaten, so ist (6) die Differentialgleichung einer Fläche mit constantem Krümmungsmaass, (7) die einer Minimalfläche, zwei Eigenschaften, die bekanntlich nur bei der Ebene zusammentreffen.

Hieraus ergiebt sich, wenn a, b, c Constanten bedeuten, für χ ein Ausdruck von der Form:

$$\chi = a + b\beta + c\gamma + \tfrac{1}{2}k_1\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2},$$

und die Gleichungen (2) gehen in folgende über:

$$x + a = -\frac{\frac{1}{2}k_1 + 2\sqrt{m}\psi'(m)}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$y + b = -\frac{\left(\frac{1}{2}k_1 + 2\sqrt{m}\psi'(m)\right)\beta}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$z + c = -\frac{\left(\frac{1}{2}k_1 + 2\sqrt{m}\psi'(m)\right)\gamma}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 = \left(\tfrac{1}{2}k_1 + 2\sqrt{m}\psi'(m)\right)^2,$$

woraus folgt, dass die Flächen $\alpha = \text{const.}$ oder $m = \text{const.}$ concentrische Kugeln sind.

2. Wenn zwischen den Variablen p, q, r eine von den Coordinaten x, y, z freie Gleichung besteht, so kann r als Function von p, q angesehen werden, und wir haben

$$dr = a\,dp + b\,dq,$$

wenn

$$a = \frac{\partial r}{\partial p}, \quad b = \frac{\partial r}{\partial q}, \quad \frac{\partial a}{\partial q} = \frac{\partial b}{\partial p}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = a\frac{\partial p}{\partial x} + b\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = a\frac{\partial q}{\partial x} + b\frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = a\frac{\partial r}{\partial x} + b\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Wenn nun nicht

(8) $$p^2 + q^2 + r^2 = \text{const.}$$

ist, so wird α von denselben beiden Variablen abhängen wie p, q, r, und daraus geht hervor:

$$r = ap + bq,$$

und durch Differentiation:

$$p\frac{\partial a}{\partial p} + q\frac{\partial b}{\partial p} = 0; \quad p\frac{\partial a}{\partial q} + q\frac{\partial b}{\partial q} = 0,$$

(9) $$\frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q} - \frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial b}{\partial p} = 0.$$

Setzen wir nun, wie vorhin, auch in dem Fall, wo die Gleichung (8) besteht,

$$s = \alpha - xp - yq - zr,$$

$$ds = -x\,dp - y\,dq - z\,dr = -(x + az)\,dp - (y + bz)\,dq,$$

so folgt, dass auch s nur von p, q abhängt, und es ergiebt sich

(10) $$\frac{\partial s}{\partial p} = -(x + az), \quad \frac{\partial s}{\partial q} = -(y + bz).$$

Führt man nun in der Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

p, q, z als unabhängige Variable ein, so folgt

$$\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q} - a\left(\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial z}\right) - b\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial z}\right) = 0,$$

und daraus mit Hülfe von (10)

$$z\left\{\frac{\partial a}{\partial p}(1 + b^2) - ab\left(\frac{\partial a}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial p}\right) + \frac{\partial b}{\partial q}(1 + a^2)\right\}$$
$$+ \frac{\partial^2 s}{\partial p^2}(1 + b^2) - 2ab\frac{\partial^2 s}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2}(1 + a^2) = 0.$$

Da nun a, b, s von z unabhängig sind, so zerfällt diese Gleichung in die beiden folgenden:

(11) $$\frac{\partial^2 s}{\partial p^2}(1 + b^2) - 2ab\frac{\partial^2 s}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2}(1 + a^2) = 0$$

(12) $$\frac{\partial a}{\partial p}(1 + b^2) - ab\left(\frac{\partial a}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial p}\right) + \frac{\partial b}{\partial q}(1 + a^2) = 0.$$

Betrachten wir nun p, q, r als rechtwinklige Coordinaten, so ist (12) die Differentialgleichung einer Minimalfläche, welche nach (8) oder (9) zugleich

eine Kugel oder eine in die Ebene abwickelbare Fläche sein müsste. Dies kann nur vereinigt sein, wenn die Fläche eine Ebene ist, und daher a, b Constanten sind, die man bei passender Bestimmung der Richtung der z-Axe gleich Null annehmen kann. Demnach ergiebt sich aus (11)

(13) $$\frac{\partial^2 s}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2} = 0,$$

und ferner wie im ersten Fall

$$s = \psi(m) + p\chi\left(\frac{q}{p}\right),$$

$$m = p^2 + q^2, \quad r = 0,$$

$$-x = \frac{\partial s}{\partial p} = \psi'(m)\,2p + \chi(\beta) - \beta\chi'(\beta),$$

$$-y = \frac{\partial s}{\partial q} = \psi'(m)\,2q + \chi'(\beta),$$

wenn $\beta = \frac{q}{p}$ gesetzt wird.

Aus (13) folgt daher

$$\sqrt{m}\left(4\psi'(m) + 4m\psi''(m)\right) + (1 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}\chi''(\beta) = 0,$$

eine Gleichung, die in die beiden folgenden zerfällt:

$$\sqrt{m}\left(4\psi'(m) + 4m\psi''(m)\right) = -k,$$

$$\chi''(\beta) = \frac{k}{\sqrt{1 + \beta^2}^3},$$

worin k constant ist. Die Integration dieser letzteren Gleichung ergiebt, wenn a, b willkürliche Constanten sind,

$$\chi(\beta) = k\sqrt{1 + \beta^2} + a + b\beta.$$

Demnach haben wir

$$x + a = -\frac{2\psi'(m)\sqrt{m} + k}{\sqrt{1 + \beta^2}},$$

$$y + b = -\frac{(2\psi'(m)\sqrt{m} + k)\,\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}},$$

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = \left(2\psi'(m)\sqrt{m} + k\right)^2.$$

Die isothermen Flächen sind daher in diesem Fall Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt und gemeinschaftlicher Axe.

Der dritte Fall, in dem p, q, r Functionen einer und derselben Variablen sind, kann nicht vorkommen. Ist nämlich

$$p = \psi_1(\mu), \quad q = \psi_2(\mu), \quad r = \psi_3(\mu),$$

so folgt aus den Gleichungen

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}:$$

$$\psi_1'(\mu) : \psi_2'(\mu) : \psi_3'(\mu) = \frac{\partial \mu}{\partial x} : \frac{\partial \mu}{\partial y} : \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

und die Gleichung $\Delta = 0$ liefert

$$\psi_1'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial x} + \psi_2'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \psi_3'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,$$

was sich offenbar widerspricht.

Es bleibt also nur der vierte Fall, in dem p, q, r constant sind, und daher die Schaar der isothermen Flächen aus parallelen Ebenen besteht.

Von der allgemeineren Frage, wann die Temperatur ausser von der Zeit nur von zwei Variablen abhängig ist, lässt sich der erste Fall, der im Text durch $m = 1$ charakterisirt ist, in folgender Weise beantworten.

Wir haben in diesem Fall die quadratische Form

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$$

in der a', b' lineare Functionen von γ sind, während c' von γ unabhängig ist. Ferner ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0, & c', & b' \\ c', & 0, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix} = 2a'b'c' - cc'c'$$

constant. Die adjungirte Form zu dieser ist

$$-(a'd\alpha + b'd\beta - c'd\gamma)^2 + 2(2a'b' - cc')\,d\alpha\, d\beta,$$

in der $2a'b' - cc'$ von γ unabhängig ist.

Nun können wir durch Einführung einer neuen Variablen an Stelle von γ, welche eine lineare Function von γ ist, diese Form in die einfachere transformiren:

$$(a\,d\alpha + c\,d\gamma)^2 + 2m\,d\alpha\,d\beta,$$

in der a eine lineare Function von γ, c und m von γ unabhängig sind. Es sind nun die Fälle aufzufinden, in welchen diese Form in eine andere mit constanten Coefficienten, oder speciell in die Form $dx^2 + dy^2 + dz^2$ transformirbar ist.

Zu dem Ende bilden wir die Gleichungen $(\iota\iota', \iota''\iota''') = 0$ (S. 402), welche in diesem Fall die Gestalt annehmen:

$$(1,1) \qquad m\frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} - \frac{\partial c}{\partial \beta}\frac{\partial m}{\partial \beta} = 0,$$

$$(2,2) \qquad mc\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha\,\partial \gamma}\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial \gamma} - \frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)\left(c\frac{\partial m}{\partial \alpha} + m\frac{\partial a}{\partial \gamma}\right) = 0,$$

$$(3,3) \qquad 2mc\left(\frac{\partial^2 a^2}{\partial \beta^2} - 2\frac{\partial^2 m}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right) + 4c\frac{\partial m}{\partial \beta}\left(\frac{\partial m}{\partial \alpha} - a\frac{\partial a}{\partial \beta}\right) - \frac{m}{c}\left(\frac{\partial ac}{\partial \beta}\right)^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} (2,3) \qquad & 2mc\left(\frac{\partial^2 a^2}{\partial \beta\,\partial \gamma} - \frac{\partial^2 ac}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right) + 4m\frac{\partial c}{\partial \beta}\left(a\frac{\partial c}{\partial \alpha} - a\frac{\partial a}{\partial \gamma} + c\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right) \\ & + 2c\left(c\frac{\partial a}{\partial \beta} - a\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial \alpha} - a\frac{\partial a}{\partial \beta}\right) - 2m\frac{\partial c}{\partial \alpha}\frac{\partial ac}{\partial \beta} \\ & + a\frac{\partial ac}{\partial \beta}\left(c\frac{\partial a}{\partial \beta} - a\frac{\partial c}{\partial \beta}\right) = 0, \end{aligned}$$

$$(3,1) \qquad 2mc\frac{\partial^2 ac}{\partial \beta^2} - 2c\frac{\partial ac}{\partial \beta}\frac{\partial m}{\partial \beta} - 2m\frac{\partial c}{\partial \beta}\frac{\partial ac}{\partial \beta} = 0,$$

$$(1,2) \qquad 2m\left(2c\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha\,\partial \beta} - \frac{\partial^2 ac}{\partial \beta\,\partial \gamma}\right) + \left(c\frac{\partial a}{\partial \beta} - a\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)^2 = 0.$$

Aus (1, 2) folgt, dass $c\frac{\partial a}{\partial \beta} - a\frac{\partial c}{\partial \beta}$, also auch $\frac{\partial \frac{a}{c}}{\partial \beta}$ von γ unabhängig ist; setzt man daher $a = a_1 + \gamma a_2$, so folgt, dass a_2 von der Form ist $cf(\alpha)$, und $f(\alpha)$ von β unabhängig.

Wir haben daher

$$(a\,d\alpha + c\,d\gamma)^2 + 2m\,d\alpha\,d\beta = \big(a_1\,d\alpha + c(f(\alpha)\,d\alpha + d\gamma)\big)^2 + 2m\,d\alpha\,d\beta;$$

führt man also statt γ eine neue Variable $\gamma + \int f(\alpha)\,d\alpha$ ein, so geht die quadratische Form in eine andere von derselben Gestalt über, in der nur a von γ unabhängig ist. Bei dieser Annahme erhält die Gleichung (2, 2) die Form

$$m\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial c}{\partial \alpha}\frac{\partial m}{\partial \alpha} = 0,$$

woraus in Verbindung mit (1, 1) hervorgeht:

$$\frac{\partial \log \frac{\partial c}{\partial \alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \log m}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \log \frac{\partial c}{\partial \beta}}{\partial \beta} = \frac{\partial \log m}{\partial \beta},$$

und daraus

$$\frac{\partial c}{\partial \alpha} = m\varphi(\beta), \quad \frac{\partial c}{\partial \beta} = m\psi(\alpha).$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden.

1) wenn $\varphi(\beta) = \psi(\alpha) = 0$ ist, so ist $c =$ const. und aus (1, 2) folgt $\frac{\partial a}{\partial \beta} = 0$. Führt man also an Stelle von γ eine neue Variable $c\gamma + \int a\,d\alpha$ ein, so erreicht man, dass in der quadratischen Form $a = 0$, $c = 1$ wird, und aus (3, 3) folgt dann

$$\frac{\partial^2 \log m}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0, \qquad 2m = \chi(\alpha)\vartheta(\beta).$$

Führt man daher an Stelle von α, β die Variablen $\int \chi(\alpha)\,d\alpha$, $\int \vartheta(\beta)\,d\beta$ ein, so erhält man die quadratische Form

$$d\gamma^2 + d\alpha\,d\beta,$$

welche durch die Substitution $\alpha = x + iy$, $\beta = x - iy$, $\gamma = z$ übergeht in

$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Die isothermen Curven $\alpha =$ const., $\beta =$ const. sind also in diesem Fall parallele gerade Linien.

2) Wenn $\varphi(\beta) = 0$, $\psi(\alpha)$ nicht $= 0$ ist, so ist c von α unabhängig, und aus (1,2) folgt, dass $\frac{a}{c}$ von β unabhängig ist. Auf ähnliche Weise, wie oben erreicht man nun, dass a verschwindet, und ferner ergiebt sich

$$\frac{1}{\psi(\alpha)}\frac{\partial c}{\partial \beta} = m,$$

wodurch die Gleichungen (1, 1) ... (1, 2) sämmtlich befriedigt sind. Führt man

$\int \frac{2\,d\alpha}{\psi(\alpha)}$, c als neue Variable an Stelle von α, β ein, so erhält man die quadratische Form $\beta^2 d\gamma^2 + d\alpha\, d\beta$, welche in $dx^2 + dy^2 + dz^2$ übergeht durch die Substitution

$$x + iy = \beta, \quad x - iy = \alpha - \beta\gamma^2, \quad z = \beta\gamma.$$

Hieraus kann man aber mittelst der Gleichungen $\alpha =$ const., $\beta =$ const. keine reellen Curven erhalten. Der Fall $\psi(\alpha) = 0$, $\varphi(\beta)$ nicht $= 0$ ist von diesem nicht wesentlich verschieden.

3) Wenn weder $\psi(\alpha)$ noch $\varphi(\beta)$ verschwindet, so führe man für α, β die neuen Variablen $\int \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)}$, $\int \frac{d\beta}{\varphi(\beta)}$ ein, wodurch man erreicht, dass

$$\frac{\partial c}{\partial \alpha} = m, \quad \frac{\partial c}{\partial \beta} = m, \quad \frac{\partial c}{\partial \alpha} - \frac{\partial c}{\partial \beta} = 0,$$

also $c = f(\alpha + \beta)$, $m = f'(\alpha + \beta)$ wird.

Nun folgt aus (1, 3)

$$\frac{\partial \log \frac{\partial a c}{\partial \beta}}{\partial \beta} = \frac{\partial \log c m}{\partial \beta},$$

und daraus durch Integration

$$ac = f^2 \varphi(\alpha) + \psi(\alpha);$$

durch Einführung der Variabeln $\gamma + \int \varphi(\alpha) d\alpha$ statt γ erreicht man, dass $\varphi(\alpha) = 0$ und mithin $ac = \psi(\alpha)$ wird. Dann folgt aus (1, 2):

$$\frac{f^3 f''}{f'} = -\psi(\alpha)^2.$$

Da nun die eine Seite dieser Gleichung nur von α, die andere nur von $\alpha + \beta$ abhängt, so muss jede derselben einer Constanten k^2 gleich sein, woraus sich für die Function f die Differentialgleichung zweiter Ordnung ergiebt:

$$f'' - \frac{k^2 f'}{f^3} = 0,$$

wonach die Gleichungen (1, 1) . . (1, 2) alle befriedigt sind. Die einmalige Integration dieser Gleichung ergiebt, wenn k_1 eine neue Constante bedeutet:

$$2f' = k_1^2 - \frac{k^2}{f^2}.$$

Setzen wir nun $\alpha = x + iy$, $\beta = x - iy$, und führen für γ eine neue Variable $\gamma - ik \int \frac{dx}{f^2}$ ein, so erhalten wir

$$(c\,d\gamma + a\,d\alpha)^2 + 2m\,d\alpha\,d\beta = \left(f\,d\gamma + \frac{k}{f}\,dy\right)^2 + 2f'(dx^2 + dy^2)$$
$$= f^2 d\gamma^2 + 2k\,d\gamma\,dy + 2f'\,dx^2 + k_1^2\,dy^2.$$

Setzen wir ferner

$$2f'\,dx^2 = \frac{df^2}{2f'} = \frac{f^2 df^2}{k_1^2 f^2 - k^2} = d\xi^2,$$

woraus folgt

$$\xi = \frac{1}{k_1^2}\sqrt{k_1^2 f^2 - k^2}, \qquad f^2 = k_1^2 \xi^2 + \frac{k^2}{k_1^2},$$

so geht unsere quadratische Form über in

$$\left(\frac{k}{k_1}\,d\gamma + k_1\,dy\right)^2 + k_1^2 \xi^2 d\gamma^2 + d\xi^2.$$

Beziehen wir dieselbe auf Polarcoordinaten, indem wir setzen:

$$\xi = r, \quad k_1 \gamma = \varphi, \quad k_1 y + \frac{k}{k_1}\gamma = z,$$

so nimmt sie die Form an:

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Die Curven $\alpha =$ const., $\beta =$ const. werden daher

$$r = \text{const.}, \quad z - \frac{k}{k_1^2}\varphi = \text{const.},$$

worin k auch $= 0$ sein kann, also Schraubenlinien oder Kreise.

In dem Specialfall $k_1 = 0$ erhalten wir $\xi = \frac{if^2}{2k}$ und die quadratische Form wird

$$-2ki\,\xi\,d\gamma^2 + 2k\,d\gamma\,dy + d\xi^2,$$

oder indem wir an Stelle von ξ, $\frac{2ky}{\sqrt{-2ki}}$, $\sqrt{-2ki}\,\gamma$ wieder α, β, γ schreiben:

$$\alpha\,d\gamma^2 + d\beta\,d\gamma + d\alpha^2,$$

welche in die Form $dx^2 + dy^2 + dz^2$ übergeht durch die Substitution

$$x + iy = \beta + \alpha\gamma - \tfrac{1}{12}\gamma^3,$$
$$x - iy = \gamma,$$
$$z = \alpha - \tfrac{1}{4}\gamma^2;$$

aber den hieraus sich ergebenden Gleichungen

$$z + \tfrac{1}{4}(x - iy)^2 = \alpha = \text{const.},$$
$$(x + iy) - \alpha(x - iy) + \tfrac{1}{12}(x - iy)^3 = \beta = \text{const.}$$

entsprechen keine reellen Curven.

In den übrigen Fällen ist es mir nicht gelungen, die Rechnung vollständig durchzuführen.

W.

XXIII.

Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita.*)

I.

Avendo una frazione continua infinita della forma

$$a + \cfrac{b_1 x}{1 + \cfrac{b_2 x}{1 + \cfrac{b_3 x}{1 + \cdots}}},$$

che per valori di x abbastanza piccoli converge e rappresenta la funzione $f(x)$, si vede facilmente, che la ridotta m^{esima} è uguale al quoziente $\frac{p_m}{q_m}$ di due funzioni intere p_m e q_m, i cui gradi sono ambedue n, se $m = 2n+1$, e n e $n-1$, se $m = 2n$. La differenza tra la ridotta e la funzione $f(x)$, se x è infinitesimo, è infinitesima dell' ordine m^{esimo}. Ma affinchè questo avvenga, debbono essere sodisfatte tante condizioni, quante sono le quantità arbitrarie contenute nella funzione fratta uguale alla ridotta.

Dunque la ridotta m^{esima} può determinarsi mediante la condizione di coincidere nei primi m termini dello svolgimento secondo le potenze di x colla funzione da svolgere e mediante i gradi del numeratore e del denominatore, che sono per $m = 2n+1$ ambedue n, e n e $n-1$ per $m = 2n$.

II.

Questo modo di determinare la ridotta conduce immediatamente all' espressione della ridotta, quando si tratta di svolgere il quoziente delle serie ipergeometriche

$$P^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{pmatrix} x\Big) = P \text{ e } P^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha & \beta+1 & \gamma \\ \alpha'-1 & \beta' & \gamma'\end{pmatrix} x\Big) = Q,$$

*) Die Bearbeitung dieses Fragments, dessen Entstehung in den October 1863 fällt, rührt von H. A. Schwarz her.

ove si faccia uso delle proprietà caratteristiche esposte nella memoria [Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen].

Infatti, poichè per x infinitesimo $\frac{P}{Q} - \frac{p_m}{q_m}$ divieni infinitesimo dell' ordine m e Qq_m dell' ordine α, l'espressione $q_m P - p_m Q$ diviene infinitesima dell' ordine $m + \alpha$, e si dimostra facilmente, che questa espressione ha tutte le proprietà caratteristiche di una funzione sviluppabile in serie ipergeometrica in modo che si abbia

$$\begin{aligned} & q_{2n+1}P - p_{2n+1}Q \\ &= P\begin{pmatrix}\alpha+2n+1 & \beta-n & \gamma \\ \alpha'-1 & \beta'-n & \gamma'\end{pmatrix} x\Big) = x^n P\begin{pmatrix}\alpha+n+1 & \beta & \gamma \\ \alpha'-n-1 & \beta' & \gamma'\end{pmatrix} x\Big) = x^n P_{n+1} \\ (1) \quad & q_{2n}P - p_{2n}Q = P\begin{pmatrix}\alpha+2n & \beta+1-n & \gamma \\ \alpha'-1 & \beta'-n & \gamma'\end{pmatrix} x\Big) = x^n Q_n \end{aligned}$$

dove P_n, Q_n denotano ciò che divengono P, Q, quando si mutano α, α' in $\alpha+n$, $\alpha'-n$. Ora, se facciamo variare continuamente x e le funzioni di x, in modo che l'indice del valore complesso x percorra un giro intorno l'indice di 1, q_m, p_m riprendono gli stessi valori, mentre P, Q, P_n, Q_n si convertono in altri rami di queste funzioni.

Dunque: se designiamo con P', Q', P'_n, Q'_n altri rami corrispondenti di queste funzioni, abbiamo anche

$$(2) \qquad \begin{aligned} q_{2n+1}P' - p_{2n+1}Q' &= x^n P'_{n+1} \\ q_{2n}P' - p_{2n}Q' &= x^n Q'_n. \end{aligned}$$

Dalle equazioni (1) e (2) s'ottiene:

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{PP'_{n+1} - P'P_{n+1}}{QP'_{n+1} - Q'P_{n+1}}, \quad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{PQ'_n - P'Q_n}{QQ'_n - Q'Q_n}.$$

Dunque, per trovare per quali valori di x, $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ e $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ convergano verso $\frac{P}{Q}$, basta ricercare quando $\frac{P_n}{P'_n}$ e $\frac{Q_n}{Q'_n}$ col crescere indefinito di n convergano verso zero.

[III.]

A questo scopo conviene introdurre l'espressioni di P_n e Q_n per integrali definiti. Ponendo

$$\begin{aligned} [-\alpha' - \beta' - \gamma' &= a \\ -\alpha' - \beta - \gamma &= b \\ -\alpha - \beta' - \gamma &= c] \end{aligned}$$

può esprimersi

$$P_n \text{ per } \left[x^{\alpha+n}(1-x)^{\gamma}\int_0^1 s^{a+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}\,ds\right]$$

e

$$Q_n \text{ per } \left[x^{\alpha+n}(1-x)^{\gamma}\int_0^1 s^{a+1+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}\,ds\right].$$

Per avere il valore generale delle funzioni P_n, Q_n bisognerebbe moltiplicare gli integrali per fattori costanti, ma possiamo sostituire nelle equazioni (1) gli integrali comprendendo i fattori costanti nelle funzioni intere p_m, q_m. Quanto ai valori delle funzioni sotto il segno integrale, è indifferente qualunque valore si prenda, purchè si prendano per s^a, $(1-s)^b$, $(1-xs)^c$ gli stessi valori in ogni integrale.

[Nun bleiben die Ausdrücke für $\frac{p_m}{q_m}$ auch unverändert, wenn für P', Q', P'_n, Q'_n dieselben linearen Verbindungen dieser Grössen und der Grössen $P, Q, P_n, Q_n : AP+BP', AQ+BQ', AP_n+BP'_n, AQ_n+BQ'_n$ gesetzt werden, wo A und B zwei Constanten bezeichnen, von welchen B nicht gleich Null ist. Solche correspondirende Functionen ergeben sich, wenn die obigen Integrale anstatt von 0 bis 1 von irgend einem der vier Werthe 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞ zu irgend einem dieser vier Werthe und zwar alle auf demselben Wege erstreckt werden.]

Dunque si possono prendere per P'_n, Q'_n gli stessi integrali estesi da uno ad uno intorno di $\frac{1}{x}$.

Gli integrali [durch welche der letzten Annahme zufolge P_n, Q_n, P'_n, Q'_n ausgedrückt sind, ändern bei einer continuirlichen Variation des Weges der Integration zwischen den angegebenen Grenzen ihren Werth nicht] purchè il cammino d'integrazione non oltrepassi l'indice di $\frac{1}{x}$, e possiamo disporre del cammino dell' integrazione in modo che si possa più facilmente trovare il limite verso il quale converge il valore dell' integrale col crescere di n.

A questo scopo $\frac{s(1-s)}{1-xs}\cdots$

[Hier bricht der Text ab. Es lassen sich aber aus einigen Handzeichnungen und Formeln die Schlüsse, deren Riemann sich bedient hat, etwa in folgender Weise herstellen.

Man setze:]

$$\frac{s(1-s)}{1-xs} = e^{f(s)}$$

[und betrachte in der Ebene der complexen Grösse s die Curven, längs denen der Modul von $e^{f(s)}$ einen constanten Werth hat. Für sehr kleine Werthe dieses Moduls umgeben diese Curven die Punkte 0 und 1 nahezu wie concentrische Kreise mit kleinen Radien. Für sehr grosse Werthe des Moduls umgeben diese Curven den Punkt $s = \frac{1}{x}$ und den Punkt $s = \infty$. In beiden Fällen bestehen die Curven also aus zwei getrennten Theilen. Lässt man den Modul von kleinen Werthen an wachsen, so werden die getrennten Theile, welche die Punkte 0 und 1 umgeben und demselben Werthe des Moduls entsprechen, einander immer näher rücken, bis sie nur eine Curve bilden, welche einen Doppelpunkt hat. Für diesen Doppelpunkt muss $f'(s)$ gleich Null sein. Eine ähnliche Betrachtung findet statt, wenn man den erwähnten Modul von sehr grossen Werthen an abnehmen lässt.

Es ergeben sich folgende Gleichungen:]

$$f(s) = \log(1-s) - \log\left(\frac{1}{s} - x\right),$$

$$f'(s) = -\frac{1}{1-s} + \frac{1}{\frac{1}{s} - x}\,\frac{1}{ss} = \frac{1-2s+xs^2}{s(1-s)(1-xs)}.$$

[Für $f'(s) = 0$ ist also]

$$1-2s+xs^2 = 0,\ s(1-xs) = 1-s,\ 1-2s+s^2 = (1-x)s^2 = (1-s)^2$$

$$\frac{1}{s} - 1 = \sqrt{1-x} = 1 - xs$$

$$\frac{1-s}{1-xs} = s.$$

[Es werde nun mit $\sqrt{1-x}$ derjenige Werth der Quadratwurzel bezeichnet, dessen reeller Bestandtheil positiv ist, wobei der Fall, dass x reell und $\geqq 1$ ist, von der Betrachtung ausgeschlossen wird. Ferner mögen σ, σ' die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$1 - 2s + xs^2 = 0,$$

$$\sigma = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}},\quad \sigma' = \frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$$

bezeichnen, so dass der Modul von σ kleiner ist als der Modul von σ'.

Dann ist

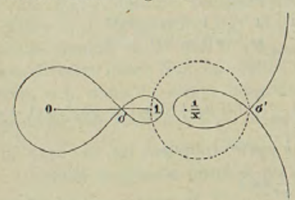
$$e^{f(\sigma)} = \sigma^2 = \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2,\quad e^{f(\sigma')} = \sigma'^2 = \left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}\right)^2.$$

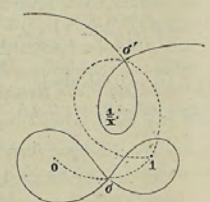
Man denke sich nun den Punkt $s = 0$ mit dem Punkte $s = 1$ so durch eine Linie verbunden, dass dieselbe den Punkt $s = \sigma$ enthält und dass bei dem Fortschreiten auf dieser Linie der Modul von $e^{f(s)}$ auf dem Wege von $s = 0$ bis $s = \sigma$ beständig im Zunehmen, auf dem

Wege von $s = \sigma$ bis $s = 1$ aber beständig im Abnehmen begriffen ist. Eine solche Linie kann als Integrationsweg für die von $s = 0$ bis $s = 1$ zu erstreckenden Integrale dienen, durch welche die Functionen P_n, Q_n ausgedrückt werden.

Für diejenigen Integrale hingegen, welche an die Stelle der Functionen P'_n, Q'_n gesetzt werden, kann ein Integrationsweg dienen, welcher vom Punkte $s = 1$ zunächst nach dem Punkte $s = \sigma'$ führt, von dort nach dem Punkte $s = 1$ zurückführt und hierbei den Punkt $s = \frac{1}{x}$ umschliesst. Dieser Integrationsweg kann so gewählt werden, dass der Modul von $e^{f(s)}$ sein Maximum auf dieser Linie nur im Punkte $s = \sigma'$ erreicht.

In den nachstehenden Figuren, zu denen sich Entwürfe von Riemann's Hand vorgefunden haben, sind die Integrationswege durch punktirte Linien angedeutet.





Es handelt sich nun darum, einen Ausdruck zu finden, welcher den Werth des Integrals

$$\int_0^1 s^{a+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}\,ds$$

für unendlich grosse Werthe von n asymptotisch darstellt.

Man setze

$$s^a(1-s)^b(1-xs)^c = \varphi(s),$$

so ist zu berechnen $\int_0^1 e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds$ für $n = \infty$.

Diejenigen Theile des Integrationsweges, welche nicht in der Nähe des singulären Werthes $s = \sigma$ liegen, ergeben zu dem Werthe des Integrales einen Beitrag, welcher für unendlich grosse Werthe von n nicht allein unendlich klein wird, sondern auch — weil der reelle Bestandtheil von $n(f(\sigma) - f(s))$ unter den angegebenen Voraussetzungen über jedes Maass hinaus wächst — unendlich klein wird im Verhältniss

zu dem Theile des Integrals, welches sich auf einen in der Nähe des Werthes $s = \sigma$ liegenden Theil des Integrationsweges bezieht. Aus diesem Grunde genügt es zur Auffindung eines für $\lim n = \infty$ geltenden asymptotischen Ausdruckes für das erwähnte Integral, die Summation auf einen in der Nähe des Werthes $s = \sigma$ liegenden Theil des Integrationsweges zu beschränken. Man setze daher, mit h eine Grösse bezeichnend, deren Modul nur kleine Werthe annehmen soll:]

$$s = \sigma + h$$

$$f(s) = f(\sigma) + \tfrac{1}{2}f''(\sigma)h^2 + (h^3)$$

$$nf(s) = nf(\sigma) + n\frac{f''(\sigma)}{2}h^2 + n(h^3)$$

$$-n\frac{f''(\sigma)}{2}h^2 = z^2$$

$$dh = \frac{dz}{\sqrt{-n\frac{f''(\sigma)}{2}}}$$

$$e^{nf(s)} = e^{nf(\sigma)}\,e^{-z^2+\left(\frac{z^3}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds = e^{nf(\sigma)}\varphi\left(\sigma + \frac{z}{\sqrt{-n\frac{f''(\sigma)}{2}}}\right)e^{-z^2}\frac{dz}{\sqrt{-n\frac{f''(\sigma)}{2}}}.$$

[Wird nun der in der Nähe des Punktes $s = \sigma$ liegende Theil des Integrationsweges geradlinig angenommen und zwar so, dass der von den beiden Tangenten der Curve

$$\operatorname{mod} e^{f(s)} = \operatorname{mod} e^{f(\sigma)}$$

im Punkte $s = \sigma$ gebildete rechte Winkel durch denselben halbirt wird, so convergiren für $\lim n = \infty$ die Grenzen der auf die Variable z sich beziehenden Integration beziehlich gegen die Werthe $-\infty$ und $+\infty$, und es ist daher der Beitrag, den die in der Nähe des Werthes $s = \sigma$ liegenden Elemente des betrachteten Integrales für sehr grosse Werthe von n zu dem Werthe des Integrals ergeben, asymptotisch gleich

$$\frac{e^{nf(\sigma)}\varphi(\sigma)}{\sqrt{-n\frac{f''(\sigma)}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz = \sqrt{\frac{\pi}{-\frac{f''(\sigma)}{2}}}\,\frac{e^{nf(\sigma)}}{\sqrt{n}}\varphi(\sigma).$$

Nun ist

$$e^{nf(\sigma)} = \sigma^{2n} = \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n}$$

$$-\frac{f''(\sigma)}{2} = \frac{1}{\sigma(1-\sigma)} = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{1-x}}$$

$$\varphi(\sigma) = \sigma^{a+b}(1-x)^{\frac{b+c}{2}}.$$

Es ist demnach der asymptotische Werth von $\int_0^1 e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds$ gleich

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}(1-x)^{\frac{b+c}{2}+\frac{1}{4}}.$$

Durch analoge Schlüsse wird der asymptotische Werth von $\int_1^1 e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds$ als

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}(1-x)^{\frac{b+c}{2}+\frac{1}{4}}$$

gefunden.

Unter den angegebenen Voraussetzungen ergiebt sich also für den Quotienten $P_n : P'_n$ der asymptotische Werth:]

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}.$$

[Für alle Werthe von x, mit Ausnahme derjenigen, welche reell und grösser als 1 sind, sowie mit Ausnahme des Werthes $x=1$, convergirt daher der Quotient $P_n : P'_n$ mit unendlich zunehmendem n gegen Null.

Dasselbe gilt, wenn a in $a+1$ verwandelt wird, von dem Quotienten $Q_n : Q'_n$.

Hiermit ist bewiesen, dass die Näherungswerthe des Kettenbruches von der in I. angegebenen Form, in welchen der Quotient

$$\frac{P^{a}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma', & x\end{pmatrix}}{P^{a}\begin{pmatrix}\alpha & \beta+1 & \gamma & \\ \alpha'-1 & \beta' & \gamma', & x\end{pmatrix}}$$

entwickelt werden kann, für alle Werthe von x, welche nicht reell und $\geqq 1$ sind, mit wachsendem Index gegen den Werth dieses Quotienten convergiren.]

XXIV.

Ueber das Potential eines Ringes.

Um die Wirkung eines beliebigen Körpers, dessen Theile eine Anziehung oder Abstossung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ausüben, für jeden Punkt ausserhalb dieses Körpers zu bestimmen, hat man bekanntlich eine Function V der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z dieses Punktes zu suchen, welche den Namen des Potentials oder der Potentialfunction der wirkenden Massen führt und deren Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ den Componenten der beschleunigenden Kraft im Punkte x, y, z gleich oder entgegengesetzt sind, je nachdem die Masseneinheit eine gleiche um die Längeneinheit entfernte Masse mit der Einheit der Kraft anzieht oder abstösst. Zur Bestimmung dieser Function, welche der Bedingung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

genügen muss, ist es hinreichend, wenn in jedem Punkte der Oberfläche des Körpers noch eine Bedingung gegeben ist, und es bietet sich die Aufgabe häufig in der Form dar, dass nicht die Vertheilung der Massen im Körper, sondern gewisse Bedingungen, denen ihre Wirkung in der Oberfläche genügen soll, gegeben sind, z. B. dass V einer willkürlich gegebenen Function gleich werden soll, also in jedem Punkte der Oberfläche die ihr parallele Componente gegeben ist, oder dass in jedem Punkte in Einer gegebenen Richtung die Componente einen gegebenen Werth erhalten soll. Das Verfahren, um diese Aufgabe zu lösen, besteht bekanntlich darin, dass man aus particularen Lösungen der Differentialgleichung (1)

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

einen allgemeinen Ausdruck

$$a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \cdots + a_n Q_n + \cdots = R$$

mit den willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ zusammensetzt, welcher ebenfalls der Differentialgleichung (1) genügt, und dann diese

Constanten so bestimmt, dass die Grenzbedingungen erfüllt werden. Die Ausdrücke R convergiren im Allgemeinen nur für gewisse Werthe der Coordinaten x, y, z, so dass für jeden bestimmten Ausdruck der ganze unendliche Raum durch eine Fläche s in zwei Theile zerfällt, in deren einem dieser Ausdruck convergirt, während er in dem andern, allgemein zu reden, (d. h. von einzelnen Punkten und Linien abgesehen) divergirt. So z. B. wird der Ausdruck

$$\sum a_n e^{z\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}} \cos \alpha_n x \cos \beta_n y$$

für eine bestimmte auf der z-Axe senkrechte Ebene zu convergiren aufhören. Führt man statt x, y, z Polarcoordinaten ein und entwickelt V nach Potenzen des Radiusvectors, wo dann bekanntlich die Coefficienten der $n$ten Potenz sich aus den Kugelfunctionen $n$ter Ordnung, multiplicirt mit willkürlichen Constanten, zusammensetzen, so erhält man eine Reihe, welche für eine bestimmte Kugelfläche, die den Pol zum Mittelpunkt hat, zu convergiren aufhört. Es ist nun beachtenswerth, dass einer bestimmten Form der Entwicklung R schon eine bestimmte Schaar von Grenzflächen der Convergenz entspricht (im ersteren Falle eine Schaar paralleler Ebenen, im zweiten eine Schaar concentrischer Kugelflächen), während es von den Werthen der Coefficienten abhängt, für welche Fläche dieser Schaar die Divergenz eintritt.

Offenbar muss nun der Ausdruck R für das ganze Gebiet, wo die Function V bestimmt werden soll, convergiren, weil man nur dann diesen Ausdruck in die Grenzbedingungen einsetzen kann, um die willkürlichen Constanten in ihm zu bestimmen. Andererseits aber lässt sich leicht zeigen, dass ein Ausdruck, welcher der Differentialgleichung (1) genügt, nur da, wo er zu convergiren aufhört, eine willkürlich gegebene Function darstellen kann. Folglich muss die Form des Ausdrucks R so bestimmt werden, dass die Oberfläche des Körpers eine der ihm angehörenden Grenzflächen der Convergenz ist.

Es soll zunächst für einen Ring mit kreisförmigem Querschnitte diese Aufgabe gelöst werden, was für manche physikalische Untersuchungen nicht unerwünscht sein dürfte.

1.

Legt man die z-Axe in die Axe des Ringes und den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt des Ringes, so erhält die Gleichung der Ringoberfläche die Form

$$(\sqrt{x^2+y^2} \pm a)^2 + z^2 = c^2.$$

Ich suche zunächst statt x, y, z solche Variabeln einzuführen, dass eine derselben in der Oberfläche des Ringes einen constanten Werth erhält und zugleich die Differentialgleichung (1) eine möglichst einfache Form behält.

Führt man in der (x, y)-Ebene Polarcoordinaten ein, indem man

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

setzt, so wird die Differentialgleichung (1)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial V}{r\partial r} + \frac{\partial^2 V}{rr\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

die Grenzgleichung von φ unabhängig, nämlich

$$(r+a)^2 + z^2 = c^2$$

und

$$(r-a)^2 + z^2 = c^2,$$

also in der (r, z)-Ebene die Grenze durch zwei mit dem Radius c um die Punkte $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ beschriebenen Kreise gebildet.

Ich führe nun statt r und z zwei neue Veränderliche ϱ und ψ ein, indem ich für $r+zi$ eine Function einer complexen Grösse $\varrho e^{\psi i}$ setze,

$$r + zi = f(\varrho e^{\psi i}),$$

und die Grösse $\varrho e^{\psi i}$ als Function von $r+zi$ so bestimme, dass ihr Modul ϱ in jedem der beiden Grenzkreise einen constanten Werth erhält und sie ausserhalb der beiden Kreise allenthalben stetig und endlich bleibt.

Diesen Bedingungen wird genügt, wenn man

$$r + zi = \frac{\beta + \gamma\varrho e^{\psi i}}{1+\varrho e^{\psi i}}$$

und

$$\beta = -\gamma = \sqrt{aa-cc}$$

setzt; denn es wird dann

$$a + r + zi = \frac{(a+\beta) + (a+\gamma)\varrho e^{\psi i}}{1+\varrho e^{\psi i}}$$

$$(a+r+zi)(a+r-zi) = \frac{\frac{a+\beta}{(a+\gamma)\varrho} + e^{\psi i}}{1+\varrho e^{\psi i}} \, \frac{\frac{a+\beta}{(a+\gamma)\varrho} + e^{-\psi i}}{1+\varrho e^{-\psi i}} (a+\gamma)^2\varrho^2.$$

Diese Grösse wird von ψ unabhängig, wenn

$$\frac{a+\beta}{(a+\gamma)\varrho} = \varrho,$$

und zwar

$$= (a+\gamma)^2\varrho^2 = (a+\beta)(a+\gamma).$$

Ebenso wird die Grösse

$$(-a+r+zi)(-a+r-zi)$$

von ψ unabhängig und zwar

$$= (-a+\beta)(-a+\gamma),$$

wenn

$$\varrho\varrho = \frac{-a+\beta}{-a+\gamma}.$$

Es entsprechen also den Werthen

$$\varrho\varrho = \frac{a+\beta}{a+\gamma},\quad \varrho\varrho = \frac{-a+\beta}{-a+\gamma}$$

zwei um die Punkte $(-a, 0)$, $(a, 0)$ mit den Radien

$$\sqrt{(a+\beta)(a+\gamma)},\quad \sqrt{(-a+\beta)(-a+\gamma)}$$

beschriebene Kreise. Sollen beide Radien $= c$ werden, so muss

$$(a+\beta)(a+\gamma) - (-a+\beta)(-a+\gamma) = 2a(\beta+\gamma) = 0,$$

also $\gamma = -\beta$, $aa - \beta\beta = cc$, also $\beta = \sqrt{aa-cc}$ sein.

2.

Die Umformung der Differentialgleichung (1) kann dadurch erleichtert werden, dass man $V = r^\mu U$ setzt, wodurch

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial V}{r\partial r} &= r^\mu \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 2\mu r^{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial r} + \mu(\mu-1)r^{\mu-2}U\\ &\qquad + r^{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial r} + \mu r^{\mu-2}U\\ &= r^\mu\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + (2\mu+1)r^{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial r} + \mu\mu r^{\mu-2}U,\end{aligned}$$

und μ so annimmt, dass das zweite Glied wegfällt, also $\mu = -\frac{1}{2}$. Die Differentialgleichung (1) wird dann

$$rr\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \tfrac{1}{4}U = 0.$$

Bezeichnet man nun der Kürze wegen die complexen Grössen $r + zi$ durch y und $\varrho e^{\psi i}$ durch η und die conjugirten Grössen durch y' und η', so erhält man

$$r = \frac{y+y'}{2},\quad zi = \frac{y-y'}{2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial z}\,i\right),\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial y'} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

folglich

$$rr\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = (y+y')^2\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial y'};$$

ferner

$$y = \beta\frac{1-\eta}{1+\eta},\quad y' = \beta\frac{1-\eta'}{1+\eta'},\quad y + y' = 2\beta\frac{1-\eta\eta'}{(1+\eta)(1+\eta')},$$

$$y = \beta\left(-1 + \frac{2}{1+\eta}\right),\quad dy = -2\beta\frac{d\eta}{(1+\eta)^2},\quad dy' = -2\beta\frac{d\eta'}{(1+\eta')^2},$$

$$(y+y')^2\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial y'} = (1-\eta\eta')^2\frac{\partial^2 U}{\partial\eta\,\partial\eta'} = \frac{(1-\eta\eta')^2}{\eta\eta'}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\log\eta\,\partial\log\eta'},$$

oder (da $\eta\eta' = \varrho^2$, $\log\eta = \log\varrho + \psi i$, $\log\eta' = \log\varrho - \psi i$)

$$= \frac{(1-\varrho^2)^2}{\varrho^2}\,\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\log\varrho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right).$$

Die partielle Differentialgleichung wird also

$$\left(\frac{\varrho - \frac{1}{\varrho}}{2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\log\varrho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \tfrac{1}{4}U = 0.$$

3.

Es ist jetzt leicht, U in eine Reihe von particularen Integralen dieser Differentialgleichung zu entwickeln, welche gleichzeitig für alle Werthe von φ und ψ convergirt oder divergirt. Zu dem Ende hat man nur diesen particularen Integralen die Form zu geben

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} m\psi \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} n\varphi,$$

multiplicirt in eine Function P von ϱ, welche der Differentialgleichung

$$\text{(II)}\qquad \left(\frac{\varrho - \frac{1}{\varrho}}{2}\right)^2\left(\frac{d^2 P}{d\log\varrho^2} - mmP\right) - (nn - \tfrac{1}{4})P = 0$$

genügt. Die Bestimmung der willkürlichen Constanten ergiebt sich dann durch die Fourier'sche Reihe.

Setzt man

$$\frac{\varrho - \frac{1}{\varrho}}{2} = t,$$

so wird

$$\frac{dP}{d\log\varrho} = \frac{dP}{dt}\,\frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2},$$

$$\frac{d^2 P}{d\log\varrho^2} = \left(\frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2}\right)^2\frac{d^2 P}{dt^2} + \frac{\varrho - \frac{1}{\varrho}}{2}\,\frac{dP}{dt} = (tt+1)\frac{d^2 P}{dt^2} + t\frac{dP}{dt},$$

und die Differentialgleichung (II) geht über in

$$tt(tt+1)\frac{d^2 P}{dt^2} + t^3\frac{dP}{dt} - (mm\,tt + nn - \tfrac{1}{4})P = 0.$$

Diese Differentialgleichung enthält nur Glieder von zwei verschiedenen Dimensionen in Bezug auf t und lässt sich folglich nach dem seit Euler bekannten Verfahren durch hypergeometrische Reihen integriren. Die Lösung lässt sich auf sehr mannigfaltige Art durch andere hypergeometrische Reihen ausdrücken, nämlich durch solche, deren viertes Element den Werth oder den reciproken Werth folgender neun Grössen hat,

$$-\left(\frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2}\right)^2, \left(\frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2}\right)^2, \left(\frac{1 - \varrho\varrho}{1 + \varrho\varrho}\right)^2; \quad \varrho\varrho,\ 1 - \varrho\varrho,\ 1 - \frac{1}{\varrho\varrho};$$
$$\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\right)^2, \ -\frac{(1-\varrho)^2}{4\varrho}, \ \frac{(1+\varrho)^2}{4\varrho},$$

und zwar giebt es nach jeder dieser achtzehn Grössen vier verschiedene Entwicklungen, welche der Differentialgleichung genügen, von denen indess je zwei dieselbe particulare Lösung darstellen. Im Allgemeinen wird man nach der kleinsten dieser Grössen entwickeln. Entwickelt man nach einer solchen, welche für $\varrho = 1$ verschwindet, so zeigt sich, dass von den beiden particularen Lösungen die eine für $\varrho = 1$ unendlich wird. Da V endlich bleiben soll, so muss in dem Werth von P der Coefficient dieser particularen Lösung verschwinden und P der für $\varrho = 1$ endlich bleibenden proportional sein. Von den verschiedenen Ausdrücken derselben will ich Einen anzuführen mich begnügen und durch $P^{n,m}$ bezeichnen, nämlich

$$P^{n,m} = (1 - \varrho\varrho)^{n+\frac{1}{2}} \varrho^{\pm m} F(n \pm m + \tfrac{1}{2},\ n + \tfrac{1}{2},\ 2n + 1,\ 1 - \varrho\varrho).$$

Da sich in den Werthen der $P^{n,m}$ die ersten drei Elemente der hypergeometrischen Reihen nur durch ganze Zahlen unterscheiden, so lassen sich alle $P^{n,m}$ linear in zwei derselben $P^{0,0}$, $P^{0,1}$ ausdrücken (Comm. Gott. rec. Vol. II*),) welche ganze elliptische Integrale erster und zweiter Gattung sind**) und vielleicht am bequemsten nach dem Princip des arithmetisch-geometrischen Mittels, d. h. durch wiederholte Transformationen zweiter Ordnung, gefunden werden.

W.

*) Gauss' Werke Bd. III. S. 131.

**) Sämmtliche $P^{n,m}$ lassen sich durch ganze elliptische Integrale im weitern Sinne ausdrücken.

XXV.

Verbreitung der Wärme im Ellipsoid.

Bei dem Problem der Wärmebewegung in einem homogenen isotropen Körper handelt es sich nach der Theorie von Fourier um die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

worin a^2 eine positive Constante ist (das Verhältniss der Leitungsfähigkeit zu dem Product aus der Dichtigkeit und der specifischen Wärme). Es ist die Function u so zu bestimmen, dass sie im Innern eines gegebenen Körpers der Differentialgleichung (1) genügt, dass sie für $t = 0$ stetig in eine gegebene Function der Coordinaten (den Anfangszustand) übergeht, und dass sie ausserdem an der Oberfläche noch einer Bedingung genügt, z. B. in eine gegebene Function übergeht.

Handelt es sich um einen von einem Ellipsoid mit den Halbaxen $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ begrenzten Körper, so kann man elliptische Coordinate einführen, indem man unter λ, μ, ν die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} - 1 \equiv f(\lambda) = 0 \tag{2}$$

versteht, mit der Grenzbestimmung

$$-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha,$$

so dass an der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids $\lambda = 0$ ist.

Die Transformation der Gleichung (1) wird am leichtesten nach der Methode von Jacobi ausgeführt. Man erhält durch Differentiation von (2)

$$\begin{aligned} &\frac{2x}{\alpha - \lambda} + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \\ (3) \qquad &\frac{2y}{\beta - \lambda} + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0 \\ &\frac{2z}{\gamma - \lambda} + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

$$f'(\lambda) = \frac{x^2}{(\alpha - \lambda)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \lambda)^2} = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{\theta(\lambda)}, \tag{4}$$

wenn zur Abkürzung

(5) $$(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda) = \theta(\lambda)$$

gesetzt ist. Ferner aus (3) und (4)

(6) $$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2 = \frac{4}{f'(\lambda)}.$$

Darnach erhält man für das Volumelement $d\tau$ in den neuen Coordinaten den Ausdruck

$$d\tau = \frac{1}{8}\sqrt{f'(\lambda) f'(\mu) f'(\nu)}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

und die Umformung des über einen beliebigen Raum erstreckten Integrals

$$\iiint\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right) dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint\left(\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)^2 \frac{1}{f'(\lambda)} + \left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)^2 \frac{1}{f'(\mu)} + \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \frac{1}{f'(\nu)}\right) \frac{1}{2}\sqrt{f'(\lambda) f'(\mu) f'(\nu)}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Indem man von diesem Integral in beiden Formen die erste Variation bildet, erhält man die gesuchte Umformung

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \frac{1}{4}\sqrt{f'(\lambda) f'(\mu) f'(\nu)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \lambda}\sqrt{\frac{f'(\mu) f'(\nu)}{f'(\lambda)}}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \mu}\sqrt{\frac{f'(\nu) f'(\lambda)}{f'(\mu)}}\frac{\partial u}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \nu}\sqrt{\frac{f'(\lambda) f'(\mu)}{f'(\nu)}}\frac{\partial \mu}{\partial \nu},$$

und durch Einführung der Bezeichnung (4), (5) geht die Differentialgleichung (1) in folgende über

(7) $$-(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= 4a^2\left\{(\mu - \nu)\sqrt{\theta(\lambda)}\frac{\partial \sqrt{\theta(\lambda)}\frac{\partial u}{\partial \lambda}}{\partial \lambda} + (\nu - \lambda)\sqrt{\theta(\mu)}\frac{\partial \sqrt{\theta(\mu)}\frac{\partial u}{\partial \mu}}{\partial \mu}\right.$$

$$\left. + (\lambda - \mu)\sqrt{\theta(\nu)}\frac{\partial \sqrt{\theta(\nu)}\frac{\partial u}{\partial \nu}}{\partial \nu}\right\}.$$

Um particulare Lösungen dieser Gleichung aufzusuchen, setze man

(8) $$u = e^{-4a^2 g^2 t}\, u_\lambda\, u_\mu\, u_\nu,$$

worin g eine willkürliche Constante ist, und nehme u_λ nur von λ, u_μ nur von μ und u_ν nur von ν abhängig an. So ergiebt sich, wenn

(9) $$U_\lambda = \frac{\sqrt{\theta(\lambda)}}{u_\lambda}\frac{d\sqrt{\theta(\lambda)}\frac{du_\lambda}{d\lambda}}{d\lambda}$$

gesetzt wird, so dass U_λ nur von λ abhängig ist, und U_μ, U_ν die entsprechende Bedeutung haben

(10) $$g^2(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu) = (\mu - \nu)U_\lambda + (\nu - \lambda)U_\mu + (\lambda - \mu)U_\nu.$$

Wenn man diese Gleichung zweimal nach λ differentiirt, so folgt

$$-2g^2 = \frac{d^2 U_\lambda}{d\lambda^2}$$

oder

$$U_\lambda = -g^2\lambda^2 - h\lambda - k$$

und ebenso

$$U_\nu = -g^2\nu^2 - h\nu - k$$

$$U_\mu = -g^2\mu^2 - h\mu - k,$$

wenn h und k willkürliche Constanten sind, die, damit (10) erfüllt sei, in allen drei Formeln die gleichen sein müssen. Es ergiebt sich also aus (9) für u_λ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\sqrt{\theta(\lambda)}\frac{d\sqrt{\theta(\lambda)}\frac{du}{d\lambda}}{d\lambda} + (g^2\lambda^2 + h\lambda + k)u = 0$$

oder in rationaler Form

(11) $$\theta(\lambda)\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\theta'(\lambda)\frac{du}{d\lambda} + (g^2\lambda^2 + h\lambda + k)u = 0$$

und die gleiche Differentialgleichung ergiebt sich auch für u_μ, u_ν, nur dass die Variable λ durch μ oder ν zu ersetzen ist.*)

*) Dieser Untersuchung liegt ein Blatt aus Riemann's Nachlass zu Grunde, das die Zeitbestimmung Ostern bis Pfingsten 1856 trägt. Die Differentialgleichung (11), auf die hier das Problem zurückgeführt ist, geht in die sogenannte Lamé'sche über, wenn $g = 0$ gesetzt wird. Wir haben hier ein Beispiel einer Differentialgleichung, deren Integral in dem singulären Punkt $\lambda = \infty$ sich, um uns eines neuerdings gebräuchlichen Ausdrucks zu bedienen, nicht regulär verhält.
W.

XXVI.

Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen.

Conforme Abbildung von durch Kreise begrenzten Figuren.*)

Das Problem, die Vertheilung der statischen Electricität oder der Temperatur im stationären Zustand in unendlichen cylindrischen Leitern mit parallelen Erzeugenden zu bestimmen, vorausgesetzt, dass im ersteren Fall die vertheilenden Kräfte, im letzteren die Temperaturen der Oberflächen constant sind längs geraden Linien, die zu den Erzeugenden parallel sind, ist gelöst, sobald eine Lösung der folgenden mathematischen Aufgabe gefunden ist:

In einer ebenen, zusammenhängenden, einfach ausgebreiteten, aber von beliebigen Curven begrenzten Fläche S eine Function u der rechtwinkligen Coordinaten x, y so zu bestimmen, dass sie im Innern der Fläche S der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und an den Grenzen beliebige vorgeschriebene Werthe annimmt.

Diese Aufgabe lässt sich zunächst auf eine einfachere zurückführen:

Man bestimme eine Function $\zeta = \xi + \eta i$ des complexen Arguments $z = x + yi$, welche an sämmtlichen Grenzcurven von S nur reell ist, in je einem Punkt einer jeden dieser Grenzcurven unendlich von der ersten Ordnung wird, übrigens aber in der ganzen Fläche S endlich und stetig bleibt. Es lässt sich von dieser Function leicht zeigen,

*) Von dieser und den folgenden Abhandlungen liegen ausgeführte Manuscripte von Riemann nicht vor. Sie sind aus Blättern zusammengestellt, welche ausser wenigen Andeutungen nur Formeln enthalten.

Der zweite Theil der Ueberschrift bezeichnet wohl besser die allgemeine Bedeutung des Fragmentes, als die in der ersten Auflage allein genannte specielle Anwendung. W.

dass sie jeden beliebigen reellen Werth auf jeder der Grenzcurven ein und nur einmal annimmt, und dass sie im Innern der Fläche S jeden complexen Werth mit positiv imaginärem Theil $n$mal annimmt, wenn n die Anzahl der Grenzcurven von S ist, vorausgesetzt, dass bei einem positiven Umgang um eine der Grenzcurven ζ von $-\infty$ bis $+\infty$ geht. Durch diese Function erhält man auf der obern Hälfte der Ebene, welche die complexe Variable ζ repräsentirt, eine $n$fach ausgebreitete Fläche T, welche ein conformes Abbild der Fläche S liefert, und welche durch die Linien begrenzt ist, die in den n Blättern mit der reellen Axe zusammenfallen. Da die Flächen S und F gleich vielfach zusammenhängend sein müssen, nämlich n-fach, so hat T in seinem Innern $2n - 2$ einfache Verzweigungspunkte (vgl. Theorie der Abel-schen Functionen, Art. 7. S. 113) und unsere Aufgabe ist zurückgeführt auf die folgende:

Eine wie T verzweigte Function des complexen Arguments ζ zu finden, deren reeller Theil u im Innern von T stetig ist und an den n Begrenzungslinien beliebige vorgeschriebene Werthe hat.

Kennt man nun eine wie T verzweigte Function $\varpi = h + ig$ von ζ, welche in einem beliebigen Punkt ε im Innern von T logarithmisch unendlich ist, deren imaginärer Theil ig ausser in ε in T stetig ist und an der Grenze von T verschwindet, so hat man nach dem Green-schen Satze (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse Art. 10. S. 18 f.):

$$u_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi}\int u \frac{\partial g}{\partial \eta} d\xi,$$

wo die Integration über die n Begrenzungslinien von T erstreckt ist.

Die Function g aber lässt sich auf folgende Art bestimmen. Man setze die Fläche T über die ganze Ebene ζ fort, indem man auf der unteren Hälfte (wo ζ einen negativ imaginären Theil besitzt) das Spiegelbild der oberen Hälfte hinzufügt. Dadurch erhält man eine die ganze Ebene ζ $n$fach bedeckende Fläche, welche $4n - 4$ einfache Verzweigungspunkte besitzt und welche sonach zu einer Klasse algebraischer Functionen gehört, für welche die Zahl $p = n - 1$ ist. (Theorie der Abel'schen Functionen Art. 7 und 12, S. 113, 119.)

Die Function ig ist nun der imaginäre Theil eines Integrals dritter Gattung, dessen Unstetigkeitspunkte in dem Punkt ε und in dem dazu conjugirten ε' liegen, und dessen Periodicitätsmoduln sämmtlich reell sind. Eine solche Function ist bis auf eine additive Constante völlig bestimmt und unsere Aufgabe ist somit gelöst, sobald es gelungen ist, die Function ζ von z zu finden.

Wir werden diese letztere Aufgabe unter der Voraussetzung weiter behandeln, dass die Begrenzung von S aus n Kreisen gebildet ist. Es können dabei entweder sämmtliche Kreise ausser einander liegen, so dass sich die Fläche S ins Unendliche erstreckt, oder es kann ein Kreis alle übrigen einschliessen, wobei S endlich bleibt. Der eine Fall kann durch Abbildung mittelst reciproker Radien leicht auf den andern zurückgeführt werden.

Ist die Function ζ von z in S bestimmt, so lässt sich dieselbe über die Begrenzung von S stetig fortsetzen, dadurch dass man zu jedem Punkt von S in Bezug auf jeden der Grenzkreise den harmonischen Pol nimmt und in diesem der Function ζ den conjugirt imaginären Werth ertheilt. Dadurch wird das Gebiet S für die Function ζ erweitert, seine Begrenzung besteht aber wieder aus Kreisen, mit denen man ebenso verfahren kann, und diese Operation lässt sich ins Unendliche fortsetzen, wodurch das Gebiet der Function ζ mehr und mehr über die ganze z-Ebene ausgedehnt wird.

Im Folgenden bedienen wir uns, um auszudrücken, dass zwei Grössen a, a' conjugirt imaginär sind, des Zeichens:

$$a \mathrel{+\!\!\!\!=} a',$$

die dadurch ausgedrückte Verknüpfung zweier Grössen bleibt bestehen, wenn beiderseits conjugirt imaginäre Grössen addirt werden, oder wenn mit solchen multiplicirt oder dividirt wird; auch kann beiderseits die Wurzel gezogen werden, wenn dieselbe richtig erklärt wird.

Ist nun $\zeta \mathrel{+\!\!\!\!=} \zeta'$ und entsprechen den Werthen ζ, ζ' die Werthe z, z', so ist, wenn r der Radius eines der Grenzkreise von S ist, und z im Mittelpunkt desselben den Werth p hat:

$$\frac{z-p}{r} \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{r}{z'-p},$$

woraus sich ergiebt:

$$z \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{az'+b}{cz'+\partial},$$

wenn a, b, c, ∂ Constanten bedeuten. Hieraus:

$$\frac{dz}{d\zeta} \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{a\partial - bc}{(cz'+\partial)^2}\frac{dz'}{d\zeta'}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{1}{\sqrt{a\partial - bc}}\frac{cz'+\partial}{\sqrt{\frac{dz'}{d\zeta'}}}$$

$$\frac{z}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{1}{\sqrt{a\partial - bc}}\frac{az'+b}{\sqrt{\frac{dz'}{d\zeta'}}}.$$

Setzt man also:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} = y, \quad \frac{z}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} = y_1$$

und bezeichnet die Werthe, welche y, y_1 für ζ' annehmen, mit y', y'_1, so ergiebt sich:

(1)
$$y \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{cy'_1 + \partial y'}{\sqrt{a\partial - bc}}$$
$$y_1 \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{ay'_1 + by'}{\sqrt{a\partial - bc}},$$

woraus:

(2)
$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{c\frac{d^2y'_1}{d\zeta'^2} + \partial\frac{d^2y'}{d\zeta'^2}}{\sqrt{a\partial - bc}}$$
$$\frac{d^2y_1}{d\zeta^2} \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{a\frac{d^2y'_1}{d\zeta'^2} + b\frac{d^2y'}{d\zeta'^2}}{\sqrt{a\partial - bc}}.$$

Nun folgt aus

(3)
$$z = \frac{y_1}{y}$$

durch Differentiation:

$$y\frac{dy_1}{d\zeta} - y_1\frac{dy}{d\zeta} = 1$$

$$y\frac{d^2y_1}{d\zeta^2} - y_1\frac{d^2y}{d\zeta^2} = 0$$

oder

(4)
$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{d\zeta^2} = \frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{d\zeta^2}$$

und ebenso:

(5)
$$\frac{1}{y'}\frac{d^2y'}{d\zeta'^2} = \frac{1}{y'_1}\frac{d^2y'_1}{d\zeta'^2}.$$

Hieraus und aus (1), (2) folgt weiter:

(6)
$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{d\zeta^2} = \frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{d\zeta^2} \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{1}{y'}\frac{d^2y'}{d\zeta'^2} = \frac{1}{y'_1}\frac{d^2y'_1}{d\zeta_1'^2}.$$

Setzen wir also

(7)
$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} = sy,$$

so ist s eine Function von ζ, die für conjugirt imaginäre Werthe von ζ selbst conjugirt imaginäre Werthe erhält, und die sich also nicht ändert, wenn man in der Fläche T und ihrer symmetrischen Fortsetzung auf beliebigem Weg zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Mithin ist s eine wie T verzweigte algebraische Function von ζ; y und y_1 sind particuläre Lösungen der linearen Differentialgleichung (7) und z ist das Verhältniss derselben. Nimmt man umgekehrt die algebraische Function s in T beliebig an, jedoch so, dass sie in conjugirten Punkten conjugirt imaginäre Werthe erhält und mithin für reelle Werthe von ζ reell wird, und nimmt irgend zwei particuläre Lösungen von (7), so liefert die Function $z = \frac{y_1}{y}$ ein conformes Abbild der Fläche T, welches durch Kreise begrenzt wird. Die dabei auftretenden unbestimmten Constanten hat man dadurch zu bestimmen, dass dieses Abbild in seinem Innern von singulären Punkten frei und mithin in der z-Ebene einfach ausgebreitet ist, und dass die Grenzkreise gegebene Lagen erhalten.

XXVII.

Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung.*)

I.

Es soll die Fläche vom kleinsten Inhalt bestimmt werden, welche begrenzt ist von drei Geraden, die sich in zwei Punkten schneiden, so dass die Fläche zwei Ecken in ihrer Begrenzung und einen ins Unendliche verlaufenden Sector besitzt.

Die Winkel, welche die drei geraden Linien mit einander bilden, seien $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$. Auf der Kugel wird die gesuchte Fläche abgebildet durch ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ sind, so dass $\alpha + \beta + \gamma > 1$ ist.

Es mögen mit a, b, c die Punkte bezeichnet werden, welche in der Ebene der complexen Variablen t den beiden Ecken und dem ins Unendliche verlaufenden Sector entsprechen. (Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt, Art. 13, S. 314.) Dann hat man:

$$u = \int \frac{\text{const.}\, dt}{(t-c)\sqrt{(t-a)(t-b)}}$$

oder

$$u = \text{const.} \log \frac{\sqrt{\frac{t-a}{c-a}} - \sqrt{\frac{t-b}{c-b}}}{\sqrt{\frac{t-a}{c-a}} + \sqrt{\frac{t-b}{c-b}}}.$$

Nimmt man, was freisteht, $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$ an, so folgt hieraus:

$$du = \text{const.} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}; \quad u = \text{const.} \log \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$$

*) Für das erste dieser Beispiele findet sich auf einem einzelnen Blatt in Riemann's Nachlass das Resultat kurz aber vollständig angegeben. Bezüglich des zweiten liegt nur eine Bemerkung vor, in der nicht mehr als die Möglichkeit der Lösung ausgesprochen ist. Für die Ausführung ist daher der Herausgeber verantwortlich. Einige besondere Fälle des letzteren Problems sind von H. A. Schwarz behandelt. (Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Berlin 1871.)

und die letztere Constante hat den Werth $\sqrt{\frac{\gamma C}{2\pi}}$, wenn C den kürzesten Abstand der beiden einander nicht schneidenden Linien bedeutet.

Setzt man nun nach Art. 14 der genannten Abhandlung (S. 316)

$$k_1 = \sqrt{\frac{du}{d\eta}}, \quad k_2 = \eta\sqrt{\frac{du}{d\eta}},$$

so sind diese Functionen in allen Punkten der t-Ebene, ausser $0, \infty, 1$ endlich und einändrig, und wenn man das Verhalten dieser Functionen in der Umgebung der singulären Punkte nach der an erwähnter Stelle (S. 317) angegebenen Methode untersucht, so erkennt man, dass k_1, k_2 zwei Zweige der Function

$$P\left\{\begin{matrix} \frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{4}-\frac{\beta}{2} & -\frac{\gamma}{2} \\ \frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{4}+\frac{\beta}{2} & +\frac{\gamma}{2} \end{matrix}\; t\right\}$$

sind, und für η hat man den Quotienten zweier Zweige dieser Function zu setzen.

II.

Die gesuchte Fläche vom kleinsten Inhalt sei begrenzt von zwei in parallelen Ebenen gelegenen geradlinigen Polygonen ohne einspringende Ecken und mit je einem Umlauf. In diesem Falle wird die Fläche zweifach zusammenhängend sein, und kann erst durch einen Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden.

Die Abbildung der Minimalfläche auf der Kugel wird begrenzt sein durch zwei Systeme von Bögen grösster Kreise, deren Ebenen senkrecht stehen auf den Ebenen der Grenzpolygone, und welche demnach in zwei diametral entgegengesetzten Punkten der Kugelfläche zusammenlaufen. Jeder dieser beiden Punkte entspricht den sämmtlichen Ecken der beiden Grenzpolygone. An jeder Polygonseite findet sich Ein Umkehrpunkt der Normale, welcher dem Endpunkt des betreffenden Kreisbogens entspricht. Das Bild der Minimalfläche wird also die Kugelfläche vollständig und einfach bedecken.

Projiciren wir die Kugelfläche auf ihre Tangentialebene in einem der Punkte, in welchem die Begrenzungsbögen zusammenlaufen, so erhalten wir als Bild der Minimalfläche ein Flächenstück H, welches die Ebene der complexen Variablen η völlig ausfüllt, und begrenzt ist einerseits durch ein System geradliniger Strecken, welche sternförmig vom Nullpunkt auslaufen, bis zu gewissen Punkten $C_1, C_2, \ldots, C_n$, andererseits von einem zweiten System geradliniger Strecken, die von gewissen anderen Punkten $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m$ nach dem unendlichen fernen

Punkt verlaufen, und deren Verlängerungen daher im 0-Punkt zusammentreffen (wenn n und m die Anzahlen der Ecken der beiden gegebenen Polygone bedeuten).

Diese zweifach zusammenhängende Fläche soll nun in der Ebene einer complexen Variablen t auf eine die obere Halbebene **doppelt** bedeckende Fläche T_1 abgebildet werden, so dass den beiden Begrenzungen die reellen Werthe von t entsprechen. Diese Fläche muss, damit sie zweifach zusammenhängend sei, zwei Verzweigungspunkte enthalten. Fügen wir zur Fläche T_1 ihr Spiegelbild in Bezug auf die reelle Axe hinzu, so erhalten wir eine die ganze t-Ebene doppelt bedeckende Fläche T, deren vier Verzweigungspunkte conjugirt imaginären Werthen von t entsprechen. Durch Einführung einer neuen Variablen t' an Stelle von t, die mit t durch eine in Bezug auf beide Variable quadratische Gleichung zusammenhängt, lässt sich erreichen, dass die Verzweigungspunkte den Werthen $t' = \pm i, \pm\frac{i}{k}$ entsprechen, worin k reell und < 1 ist, und dass ausserdem einem beliebigen reellen Werth von t ein gegebener reeller Werth von t' in einem der beiden Blätter entspricht.

Wir haben also t als Function der complexen Variablen η so zu bestimmen, dass sie in jedem Punkt der Fläche H einen bestimmten, stetig mit dem Ort veränderlichen, Werth hat, in den beiden Begrenzungen von H reell ist, und in je einem Punkt der beiden Begrenzungslinien unendlich von der ersten Ordnung wird. Setzen wir diese Function über die Begrenzung hinaus dadurch stetig fort, dass wir derselben an symmetrisch zu beiden Seiten einer jeden Begrenzungsstrecke gelegenen Punkten conjugirt imaginäre Werthe ertheilen, so hat, wie man leicht erkennt, die Function $\frac{d \log \eta}{dt}$ für conjugirt imaginäre Werthe von t selbst conjugirt imaginäre Werthe. Sie ist also in der ganzen Fläche T einwerthig und, einzelne Punkte ausgenommen, stetig, muss mithin eine rationale Function von t und

$$\Delta(t) = \sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}$$

sein.

Bezeichnen wir die reellen Werthe von t, welche den Punkten $C_1, C_2, \ldots, C_n, C'_1, C'_2, \ldots, C'_m$ entsprechen, mit $c_1, c_2, \ldots, c_n, c'_1, c'_2, \ldots, c'_m$, die gleichfalls reellen Werthe, welche den mit dem Nullpunkte, bezw. unendlich fernen Punkte zusammenfallenden Ecken der Fläche H entsprechen, mit $b_1, b_2, \ldots, b_n, b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$, so muss $\frac{d \log \eta}{dt}$ unendlich klein in der ersten Ordnung werden für

$$t = c_1, c_2, \ldots, c_n, c'_1, c'_2, \ldots, c'_m,$$

unendlich gross in der ersten Ordnung für

$$t = b_1, b_2, \ldots, b_n, b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$$

und in den Verzweigungspunkten

$$t = \pm i, \quad \pm \frac{i}{k}.$$

Wir können demnach setzen:

$$\frac{d \log \eta}{dt} = \frac{\varphi(t, \Delta(t))}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}},$$

worin φ eine rationale Function von t und $\Delta(t)$ bedeutet, welche unendlich klein wird in den Punkten c, c', unendlich gross in den Punkten b, b', und welche dadurch bis auf einen constanten reellen Factor bestimmt ist. Damit übrigens eine solche Function φ existire, muss eine Bedingungsgleichung zwischen den Punkten c, c', b, b' bestehen, vermöge deren einer dieser Punkte durch die übrigen bestimmt ist. (Theorie der Abel'schen Functionen Art. 8, S. 114.) Ueberdies kann nach dem oben Bemerkten von den Punkten c, c', b, b' einer beliebig angenommen werden. Die zu $\log \eta$ hinzutretende additive Constante ist bestimmt, wenn der zu einem der Punkte c gehörige Werth von η, η_0 gegeben ist, wonach sich ergiebt:

$$\log \eta - \log \eta_0 = \int_c^t \frac{\varphi(t, \Delta(t))\, dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}.$$

In diesem Ausdruck bleiben, nachdem η_0 und c festgesetzt sind, noch $2n + 2m$ unbestimmte Constanten, nämlich $2n + 2m - 2$ von den Werthen c, c', b, b', der Modul k und ein reeller constanter Factor in φ.

Für diese Constanten ergeben sich zunächst zwei Bedingungen, welche besagen, dass der reelle Theil des Integrals

$$\int \frac{\varphi(t, \Delta(t))\, dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}$$

über eine geschlossene, beide Verzweigungspunkte $i, \frac{i}{k}$ einschliessende Linie verschwinden soll und dass der imaginäre Theil desselben Integrals den Werth $2\pi i$ haben soll. Für die $2n + 2m - 2$ übrig bleibenden Constanten erhält man eine ebenso grosse Zahl von Bedingungen aus der Forderung, dass den Punkten c, c' die gegebenen Punkte C, C' in der η-Ebene entsprechen sollen.

Wir denken uns nun die x-Axe senkrecht gegen die Ebenen der beiden Grenzpolygone gelegt, und untersuchen die Abbildung der Minimalfläche in der Ebene der complexen Variablen X, nachdem dieselbe durch einen von einer Begrenzung zur andern gelegten Schnitt

in eine einfach zusammenhängende verwandelt ist. Der reelle Theil von X ist dann in den beiden Begrenzungen und in jedem zu denselben parallelen Schnitt der Fläche constant. Der imaginäre Theil wächst, während man auf einem solchen Schnitt herumgeht, beständig, und zwar im Ganzen um eine constante Grösse. Daraus folgt, dass das Bild unserer Fläche in der X-Ebene von einem Parallelogramm begrenzt ist, welches die Ebene einfach bedeckt, von dem zwei Seiten, welche der Begrenzung der Fläche entsprechen, der imaginären Axe parallel sind. Die beiden andern Seiten, die den Rändern des Querschnitts entsprechen, können zwar krummlinig sein, kommen aber durch eine Verschiebung parallel der imaginären Axe mit einander zur Deckung.

Dieses Parallelogramm muss sich auf die obere Hälfte T_1 der Fläche T so abbilden lassen, dass die beiden der imaginären Axe parallelen Seiten desselben den beiden Rändern von T_1, die beiden anderen Seiten den beiden Ufern eines Querschnitts von T_1 entsprechen. Eine solche Abbildung wird daher vermittelt durch die Function

$$X = iC \int \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}} + C',$$

worin die Constante C reell ist, C' beliebig angenommen werden kann, wenn über die Lage des Anfangspunkts auf der x-Axe verfügt wird. Ist h der senkrechte Abstand der beiden parallelen Grenzebenen, so ergiebt sich:

$$h = 4C \int_0^i \frac{i\, dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}},$$

wodurch die Constante C bestimmt ist.

Hiernach ist die Aufgabe, abgesehen von der Bestimmung der Constanten, gelöst, denn man hat nach den Formeln S. 310

$$Y = \frac{1}{2} \int dX \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)$$

$$Z = -\frac{i}{2} \int dX \left(\eta + \frac{1}{\eta}\right),$$

wodurch die Coordinaten x, y, z der Minimalfläche als Functionen zweier unabhängiger Variablen dargestellt sind.

Für die in η vorkommenden Constanten ergeben sich noch zwei Bedingungen, welche besagen, dass die reellen Theile der Integrale, durch welche Y und Z ausgedrückt sind, über eine den Nullpunkt einschliessende geschlossene Curve in der η-Ebene erstreckt, den Werth 0 haben müssen.

Nimmt man h und die Richtungen der begrenzenden Geraden als gegeben an, so hängen unsere Ausdrücke, abgesehen von den additiven Constanten in X, Y, Z, von $n+m-2$ unbestimmten Constanten ab, für welche man die Entfernungen der Punkte C, C' vom Nullpunkt in der η-Ebene annehmen kann, zwischen denen nach dem soeben Bemerkten zwei Relationen bestehen müssen. Ebenso gross ist aber auch die Anzahl der Constanten, welche die gegenseitige Lage der Grenzpolygone bestimmen. Man kann nämlich, indem man zwei Polygonseiten zur Fixirung des Coordinaten-Anfangspunkts festhält, jeder der $n+m-2$ übrigen noch eine Parallelverschiebung in ihrer Ebene ertheilen.

Einfachere Gestalten nehmen die Resultate an, wenn wir gewisse Symmetrieen in den Verhältnissen der begrenzenden Vielecke voraussetzen. Es möge im Folgenden der Fall betrachtet werden, dass die beiden Vielecke regulär seien und die beiden Endflächen einer gerade abgestumpften geraden Pyramide mit regulär-vieleckiger Basis bilden.

Die Umkehrpunkte der Normalen liegen in diesem Fall sämmtlich in den Mittelpunkten der begrenzenden Geraden, und fallen daher paarweise in dieselbe durch die Axe der Pyramide gehende Ebene.

Legen wir die y-Axe senkrecht gegen eine der begrenzenden Geraden, so wird in der η-Ebene ein Punkt C und ein Punkt C' in der reellen Axe liegen, auf welcher sie die Abstände η_0, η_0' vom Nullpunkt haben mögen. Die Punkte C, bezw. C' liegen auf zwei concentrischen Kreisen, auf welchen sie die Ecken je eines regulären Polygons bilden, und zwar so, dass immer ein Punkt C und ein Punkt C' auf demselben Radius-Vector liegt.

Da nun in der Begrenzung der Fläche T ein Punkt beliebig angenommen werden kann, so mag festgesetzt sein, dass dem auf der reellen Axe gelegenen Punkt C der Punkt $t=0$ in einem der beiden Blätter von T entspreche. Es folgt dann aus der Symmetrie, dass das zwischen C und C' liegende Stück der reellen Axe in der η-Ebene in der Fläche T einer Linie entspricht, welche vom Punkte $t=0$ im ersten Blatt nach dem Verzweigungspunkt $t=i$, und von da zurück zum Punkte $t=0$ im zweiten Blatt längs der imaginären Axe verläuft. Demnach hat die Function $\varphi(t, \Delta(t))$ für rein imaginäre Werthe von t selbst rein imaginäre Werthe, und dem Punkte C' entspricht der Werth $t=0$ im zweiten Blatt.

Nun wird die Fläche H durch die Substitution $\eta\eta' = \eta_0\eta_0'$ auf eine mit H congruente Fläche H' abgebildet in der Weise, dass die Punkte C in die Punkte C' übergehen und umgekehrt (nur in vertauschter Ordnung).

Hieraus ergiebt sich, dass den beiden in der Fläche H gelegenen Punkten η und $\eta' = \frac{\eta_0\eta_0'}{\eta}$ über einander liegende Punkte in beiden Blättern der Fläche T entsprechen. Und da $d\log\eta + d\log\eta' = 0$ ist, so muss $\varphi(t, \Delta(t))$ in übereinander liegenden Punkten beider Blätter denselben Werth haben, ist also rational in t ausdrückbar und hat zufolge der oben gemachten Bemerkung die Form $t\psi(t^2)$, wenn ψ eine rationale Function bedeutet.

Dies veranlasst uns, die Fläche T auf eine Fläche S abzubilden durch die Substitution:

$$\frac{1+t^2}{1+k^2t^2} = s^2,$$

wonach der oberen Hälfte der Fläche T ein die s-Ebene einfach bedeckendes Blatt entspricht, welches längs der reellen Axe zwischen den Punkten $s=1$ und $s=\frac{1}{k}$ und zwischen den Punkten $s=-1$, $s=-\frac{1}{k}$ aufgeschlitzt ist. Die Ränder dieser beiden Schlitze entsprechen den Grenzen der Fläche H. Für X ergiebt sich hiernach der Ausdruck

$$X = \frac{h}{4K}\int\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

wenn

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

ist, während sich η als algebraische Function von s darstellen lässt.

Für eine Begrenzung durch Quadrate findet man

$$\eta = c\sqrt{\frac{(1-ms)(1-m's)}{(1+ms)(1+m's)}},$$

den Ecken des Quadrats in der einen Begrenzung entsprechen die Punkte $s=\frac{1}{m}$, $s=\frac{1}{m'}$ an beiden Rändern des Schlitzes, den Umkehrpunkten der Normalen die Punkte $s=1$, $s=\frac{1}{k}$ und ein an beiden Rändern des Schlitzes gelegener Punkt $s=\frac{1}{n}$, der aus der Gleichung $\frac{d\log\eta}{ds}=0$ zu bestimmen ist, und man hat:

$$1 > m > n > m' > k.\text{*)}$$

*) Es lässt sich die vorstehende Betrachtung auf viele Fälle ausdehnen, in denen die beiden Polygone nicht regulär sind. So behält der obige Ausdruck für η seine Gültigkeit für die Begrenzung durch zwei Rechtecke, deren Mittelpunkte

Für die Begrenzung durch gleichseitige Dreiecke ergiebt sich:

$$\eta = c\left(\frac{1-ms}{1+ms}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1-ks}{1+ks}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Um für diesen letzteren Fall die Möglichkeit der Constantenbestimmung zu untersuchen, setze man zunächst $s = \pm 1$, wodurch sich ergiebt:

$$\eta_0 = c\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{\frac{1}{3}}; \quad \eta_0' = c\left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{1}{3}},$$

also:

$$c = \sqrt{\eta_0 \eta_0'}, \quad \sqrt{\frac{\eta_0}{\eta_0'}} = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{\frac{1}{3}}$$

und für den besonderen Fall, dass beide Dreiecke congruent sind,

$$\eta_0 \eta_0' = 1, \quad c = 1.$$

Den Ecken des Dreiecks in der einen Begrenzung entsprechen die Punkte $s = \frac{1}{m}$ an beiden Rändern des Schlitzes und der Punkt $\frac{1}{k}$, so dass $k < m < 1$ sein muss. Der erste Umkehrpunkt der Normalen findet statt für $s = 1$, die beiden andern entsprechen einem Punkte $s = \frac{1}{n}$ an beiden Rändern des Schlitzes, so dass

$$k < n < m$$

sein muss. Für n erhält man zunächst aus der Gleichung $\frac{d \log \eta}{ds} = 0$ die Bestimmung:

$$n^2 = \frac{km(m+2k)}{2m+k},$$

woraus für jedes Werthsystem von k, m, welches der Bedingung

$$0 < k < m < 1$$

genügt, ein Werth von n hervorgeht, welcher zwischen k und m liegt.

Man erhält aber zwischen m, n, k noch eine zweite Gleichung, welche ausdrückt, dass für $s = \frac{1}{n}$ $\eta^3 = \eta_0^3$ werden soll. Diese Gleichung ist:

$$\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 \frac{1-k}{1+k} = \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^2 \frac{n-k}{n+k},$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen n eliminirt, so erhält man folgende Relation zwischen k und m:

$$k\left(\frac{1+m^2+2mk}{k(1+m^2)+2m}\right)^2 = m\left(\frac{2k+m}{k+2m}\right)^3,$$

aus welcher k durch m zu bestimmen ist.

in einer zu ihrer Ebene senkrechten Linie liegen, vorausgesetzt, dass der Modul von $\eta\eta'$ für die Umkehrpunkte der Normalen denselben Werth hat. Dies findet z. B. statt, wenn beide Rechtecke congruent sind.

Für $k = 0$ ist die linke Seite dieser Gleichung Null, die rechte $\frac{m}{8}$, für $k = m$ ist der Unterschied zwischen linker und rechter Seite

$$\frac{(1-m^2)^3}{m(3+m^2)^2}$$

also positiv für $m < 1$. Es existirt daher zu jedem Werth von m, der kleiner als 1 ist, eine ungerade Anzahl von Werthen von $k < m$. Da sich nun ferner leicht ergiebt, dass die Function

$$\log k \frac{(1+m^2+2mk)^2(k+2m)^3}{(k(1+m^2)+2m)^2(2k+m)^3}$$

zwischen $k = 0$ und $k = m$ nur Ein Maximum hat, so folgt, dass für jedes $m < 1$ Ein und nur Ein unseren Bedingungen genügender Werth von k gefunden werden kann, und darnach ergiebt sich auch nur Ein zugehöriger Werth von n. Für die beiden Grenzen $m = 0$ und $m = 1$ erhält man $k = n = m$.

Für die Functionen X, Y, Z finden sich hiernach, wenn man über die additiven Constanten verfügt, die Ausdrücke:

$$X = \frac{h}{4K}\int_1^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

$$Y = \frac{h}{8K}\int_1^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)$$

$$Z = -\frac{ih}{8K}\int_1^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right).$$

Die beiden noch übrigen Constanten m und $\sqrt{\eta_0\eta_0'}$ bestimmt man aus den gegebenen Längen der Dreieckseiten. Bezeichnen wir diese mit a und b, so ergiebt sich:

$$a = \frac{ih}{2K}\int_1^{\frac{1}{m}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)$$

$$b = \frac{ih}{2K}\int_1^{\frac{1}{m}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\left(\frac{\eta}{\eta_0\eta_0'} + \frac{\eta_0\eta_0'}{\eta}\right).$$

In dem besonderen Fall $a = b$ ist $\eta_0\eta_0' = 1$ und es bleibt zur Bestimmung der Constanten m die eine transcendente Gleichung

$$\frac{a}{h} = \frac{i}{2K}\int_1^{\frac{1}{m}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right).$$

Lässt man in dem Ausdruck zur Rechten m von 0 bis 1 gehen, so behält derselbe positive Werthe, wird aber an beiden Grenzen unendlich gross. Er muss also für einen zwischenliegenden Werth von m ein Minimum haben. Daraus folgt, dass es für das Verhältniss $\frac{a}{h}$ eine untere Grenze giebt, jenseits der die Aufgabe keine Lösung mehr hat, während für jeden Werth von $\frac{a}{h}$, der über dieser Grenze liegt, zwei Werthe von m, also zwei Lösungen der Aufgabe existiren. Es ist anzunehmen, dass nur der kleinere der beiden Werthe von m einem wirklichen Minimum des Flächeninhalts entspricht.

XXVIII.

Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen.

I.

Additamentum ad $\S^{\mathrm{um}}$ 40.

[Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum.]

Formulae in hoc $\S^{\circ}$ propositae in eo casu, ubi modulus ipsius q unitatem aequat, consideratione satis dignae videntur, quippe quae functiones unius variabilis pro quovis argumenti valore discontinuas praebeant.

Series quidem propositae magna ex parte pro modulo ipsius q unitati aequali non convergunt, sed integrando series convergentes inde derivari possunt; itaque primo integralia formularum **1—7** proponamus

$$(48)\quad \int_0^q (\log k - \log 4\sqrt{q})\frac{dq}{q} = -4\log(1+q) + \frac{4}{4}\log(1+q^2) - \frac{4}{9}\log(1+q^3) + \frac{4}{16}\log(1+q^4) - \cdots$$

$$(49)\quad \int_0^q -\log k' \frac{dq}{q} = 4\log\frac{1+q}{1-q} + \frac{4}{9}\log\frac{1+q^3}{1-q^3} + \frac{4}{25}\log\frac{1+q^5}{1-q^5} + \cdots$$

$$(50)\quad \int_0^q \log\frac{2K}{\pi}\frac{dq}{q} = 4\log(1+q) + \frac{4}{9}\log(1+q^3) + \frac{4}{25}\log(1+q^5) + \cdots$$

$$(51)\quad \int_0^q \left(\frac{2K}{\pi}-1\right)\frac{dq}{q} = -4\log(1-q) + \frac{4}{3}\log(1-q^3) - \frac{4}{5}\log(1-q^5) + \cdots$$
$$= +2i\log\frac{1-qi}{1+qi} + \frac{2i}{2}\log\frac{1-q^2i}{1+q^2i} + \frac{2i}{3}\log\frac{1-q^3i}{1+q^3i} + \cdots$$

$$(52)\quad \int_0^q \frac{2kK}{\pi}\frac{dq}{q} = 4\log\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}} - \frac{4}{3}\log\frac{1+\sqrt{q^3}}{1-\sqrt{q^3}} + \frac{4}{5}\log\frac{1+\sqrt{q^5}}{1-\sqrt{q^5}} + \cdots$$
$$= 4i\log\frac{1-\sqrt{q}i}{1+\sqrt{q}i} + \frac{4i}{3}\log\frac{1-\sqrt{q^3}i}{1+\sqrt{q^3}i} + \frac{4i}{5}\log\frac{1-\sqrt{q^5}i}{1+\sqrt{q^5}i} + \cdots$$

$$(53)\quad \int_0^q \left(\frac{2k'K}{\pi}-1\right)\frac{dq}{q} = -4\log(1+q) + \frac{4}{3}\log(1+q^3) - \frac{4}{5}\log(1+q^5) + \cdots$$
$$= -2i\log\frac{1-qi}{1+qi} + \frac{2i}{2}\log\frac{1-q^2i}{1+q^2i} - \frac{2i}{3}\log\frac{1-q^3i}{1+q^3i} + \cdots$$

$$(54)\quad \int_0 \left(\frac{2\sqrt{k'}K}{\pi}-1\right)\frac{dq}{q} = -\frac{4}{2}\log(1+q^2)+\frac{4}{6}\log(1+q^6)$$
$$-\frac{4}{10}\log(1+q^{10})+\frac{4}{14}\log(1+q^{14})-\cdots$$
$$= -\frac{2i}{2}\log\frac{1-q^2 i}{1+q^2 i}+\frac{2i}{4}\log\frac{1-q^4 i}{1+q^4 i}$$
$$-\frac{2i}{6}\log\frac{1-q^6 i}{1+q^6 i}+\frac{2i}{8}\log\frac{1-q^8 i}{1+q^8 i}-\cdots,$$

ubi logarithmos ita sumendos esse manifestum est, ut evanescant posito $q=0$.

Functiones eaedem ad dignitates ipsius q evolutae adhibitis Cl[i] Jacobi denotationibus hoc modo repraesentantur

$$(55)\quad \int_0 (\log k-\log 4\sqrt{q})\frac{dq}{q} = -4\sum\frac{\varphi(p)}{p^2}\Big(q^p-\frac{3}{4}q^{2p}-\frac{3}{16}q^{4p}$$
$$-\frac{3}{64}q^{8p}-\frac{3}{256}q^{16p}-\cdots\Big)$$

$$(56)\quad \int_0 -\log k'\frac{dq}{q} = 8\sum\frac{\varphi(p)}{p^2}q^p$$

$$(57)\quad \int_0 \log\frac{2K}{\pi}\frac{dq}{q} = 4\sum\frac{\varphi(p)}{p^2}\Big(q^p-\frac{1}{2}q^{2p}-\frac{1}{4}q^{4p}-\frac{1}{8}q^{8p}-\frac{1}{16}q^{16p}-\cdots\Big)$$

$$(58)\quad \int_0 \left(\frac{2K}{\pi}-1\right)\frac{dq}{q} = 4\sum\frac{\psi(n)q^{2^l(4m-1)^2 n}}{2^l(4m-1)^2 n}$$

$$(59)\quad \int_0 \frac{2kK}{\pi}\frac{dq}{q} = 8\sum\frac{\psi(n)q^{\frac{(4m-1)^2 n}{2}}}{(4m-1)^2 n}$$

$$(60)\quad \int_0 \left(\frac{2k'K}{\pi}-1\right)\frac{dq}{q} = -4\sum\frac{\psi(n)q^{(4m-1)^2 n}}{(4m-1)^2 n}$$
$$+4\sum\frac{\psi(n)q^{2^{l+1}(4m-1)^2 n}}{2^{l+1}(4m-1)^2 n}$$

$$(61)\quad \int_0 \left(\frac{2\sqrt{k'}K}{\pi}-1\right)\frac{dq}{q} = -4\sum\frac{\psi(n)q^{2(4m-1)^2 n}}{2(4m-1)^2 n}$$
$$+4\sum\frac{\psi(n)q^{2^{l+2}(4m-1)^2 n}}{2^{l+2}(4m-1)^2 n}.$$

Accuratiori functionum propositarum disquisitioni tanquam lemma antemittimus theorema sequens generale.

Si series

$$a_0+a_1+a_2+\cdots$$

eo quo scripsimus ordine summata summam habet convergentem, functio ipsius r hac serie

$$a_0+a_1 r+a_2 r^2+\cdots$$

expressa, convergente r versus limitem 1, convergit versus valorem eundem.

Hinc facile deducitur.

Si functio $f(q)$ complexae quantitatis q pro modulis ipsius q unitate minoribus exhibeatur per seriem

$$a_0+a_1 q+a_2 q^2+\cdots$$

hanc seriem pro valore q_0 cujus modulus sit unitas, si habeat summam, exprimere valorem eum, quem functio $f(q)$ nanciscatur convergente q versus q_0 ita, ut modulus tantum mutetur, i. e. secundum notam repraesentationem geometricam, appropinquante puncto, per quod quantitas q repraesentatur, in linea ad limitem spatii, pro quo functio est data, normali.

Quamobrem hos tantum valores functionum propositarum hic respicimus, etiamsi evolutiones 48—54 latius pateant.

Sit brevitatis gratia (x) aut absolute minima quantitatum a quantitate x numero integro distantium, aut, si x ex numero integro et fractione $\frac{1}{2}$ composita est, $=0$, porro $E(x)$ numerus integer maximus non major quam x: obtinemus e 48, attribuendo ipsi q valorem $q_0=e^{xi}$

$$(62)\quad \int_0^{e^{xi}} (\log k-\log 4\sqrt{q})\frac{dq}{q}$$
$$= -2\log 4\cos\frac{x^2}{2}+\frac{2}{4}\log 4\cos\frac{2x^2}{2}-\frac{2}{9}\log 4\cos\frac{3x^2}{2}$$
$$+\frac{2}{16}\log 4\cos\frac{4x^2}{2}-\cdots$$
$$-4\pi i\left(\frac{x}{2\pi}\right)+\frac{4\pi i}{4}\left(\frac{2x}{2\pi}\right)-\frac{4\pi i}{9}\left(\frac{3x}{2\pi}\right)+\frac{4\pi i}{16}\left(\frac{4x}{2\pi}\right)-\cdots$$
$$=2\sum\frac{(-1)^n\log 4\cos\frac{nx^2}{2}}{nn}\left[+4\pi i\sum\frac{(-1)^n}{nn}\left(\frac{nx}{2\pi}\right)\right].$$

Pars imaginaria hujus seriei convergit, quicumque est valor ipsius x, pars realis, si $\frac{x}{2\pi}$ est numerus surdus, non convergit, sin minus, denotando literis m, n numeros integros inter se primos, et ponendo $\frac{x}{2\pi}=\frac{m}{n}$ ita exhiberi potest:

1^0 si n impar, aequalis fit,

$$\frac{\pi^2}{n^2}\sum_{1,n-1}^{s}\frac{(-1)^s\cos\frac{\pi s}{n}}{\sin\frac{\pi s^2}{n}}\log 4\cos\frac{sm\pi^2}{n}-\frac{\pi^2}{6n^2}\log 4,$$

2^0 si n est par, designante p numerum imparem

$$=\frac{\pi^2}{n^2}\sum_{1,\frac{n}{2}-1}^{s}\frac{2(-1)^s\log 4\cos\frac{sm\pi^2}{n}}{\sin\pi\frac{s^2}{n}}+\frac{\pi^2}{3n^2}\log 4$$

$$+\frac{2\pi^2}{n^2}(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\log\frac{q_0-q}{q_0+q}+\log n+\frac{8}{\pi^2}\sum\frac{\log p}{p^2}\right),$$

quae formula manifesto ita est intelligenda, functionem propositam, subtracta functione

$$\frac{2\pi^2}{n^2}(-1)^{\frac{n}{2}}\log\frac{q_0-q}{q_0+q},$$

si convergat q modo supra stabilito versus limitem q_0, convergere versus limitem finitum, ejusque valorem assignat.

Perinde obtinetur

$$(63)\quad \int_0^{e^{xi}}-\log k'\frac{dq}{q}=-2\log\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}-\frac{2}{9}\operatorname{tg}\frac{3x^2}{2}-\frac{2}{25}\log\operatorname{tg}\frac{5x^2}{2}-\cdots$$

$$+4\pi i\left(\left(\frac{x}{2\pi}\right)-\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{4\pi i}{9}\left(\left(\frac{3x}{2\pi}\right)-\left(\frac{3x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{4\pi i}{25}\left(\left(\frac{5x}{2\pi}\right)-\left(\frac{5x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right)\right)+\cdots$$

$$=-\sum_{-\infty,\infty}\frac{\log\operatorname{tg}\frac{px^2}{2}}{p^2}+\left[4\pi i\sum_{1,\infty}\frac{1}{p^2}\left(\left(\frac{px}{2\pi}\right)-\left(\frac{px}{2\pi}+\frac{1}{2}\right)\right)\right]$$

$$(64)\quad \int_0^{e^{xi}}\log\frac{2K}{\pi}\frac{dq}{q}=2\log 4\cos\frac{x^2}{2}+\frac{2}{9}\log 4\cos\frac{3x^2}{2}+\cdots$$

$$+4\pi i\left(\frac{x}{2\pi}\right)+\frac{4\pi i}{9}\left(\frac{3x}{2\pi}\right)+\frac{4\pi i}{25}\left(\frac{5x}{2\pi}\right)+\cdots$$

$$=\sum_{-\infty,\infty}\frac{\log 4\cos\frac{px^2}{2}}{p^2}\left[+4\pi i\sum_{1,\infty}\frac{1}{p^2}\left(\frac{px}{2\pi}\right)\right]$$

$$(65)\quad \int_0^{e^{xi}}\left(\frac{2K}{\pi}-1\right)\frac{dq}{q}=-2\log 4\sin\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\log 4\sin\frac{3x^2}{2}$$

$$-\frac{2}{5}\log 4\sin\frac{5x^2}{2}+\cdots$$

$$-4\pi i\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right)+\frac{4\pi i}{3}\left(\frac{3x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right)-\cdots$$

$$=i\log\operatorname{tg}\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)^2+\frac{i}{2}\log\operatorname{tg}\left(\frac{4x+\pi}{4}\right)^2+\frac{i}{3}\log\operatorname{tg}\left(\frac{6x+\pi}{4}\right)^2+\cdots$$

$$+2\pi\left(\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{3}{4}\right)\right)+\frac{2\pi}{2}\left(\left(\frac{2x}{2\pi}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2x}{2\pi}+\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$+\frac{2\pi}{3}\left(\left(\frac{3x}{2\pi}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3x}{2\pi}+\frac{3}{4}\right)\right)+\cdots$$

$$(66)\quad \int_0^{e^{xi}}\frac{2kK}{\pi}\frac{dq}{q}=-2\log\operatorname{tg}\frac{x^2}{4}+\frac{2}{3}\log\operatorname{tg}\frac{3x^2}{4}-\frac{2}{5}\log\operatorname{tg}\frac{5x^2}{4}+\cdots$$

$$+4\pi i\left(\left(\frac{x}{4\pi}\right)-\left(\frac{x}{4\pi}+\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{4\pi i}{3}\left(\left(\frac{3x}{4\pi}\right)-\left(\frac{3x}{4\pi}+\frac{1}{2}\right)\right)+\cdots$$

$$=2i\log\operatorname{tg}\left(\frac{x+\pi}{4}\right)^2+\frac{2i}{3}\log\operatorname{tg}\left(\frac{3x+\pi}{4}\right)^2$$

$$+\frac{2i}{5}\log\operatorname{tg}\left(\frac{5x+\pi}{4}\right)^2+\cdots$$

$$+4\pi\left(\left(\frac{x}{4\pi}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{x}{4\pi}+\frac{3}{4}\right)\right)+\frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{3x}{4\pi}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3x}{4\pi}+\frac{3}{4}\right)\right)+\cdots$$

$$(67)\quad \int_0^{e^{xi}}\left(\frac{2k'K}{\pi}-1\right)\frac{dq}{q}=-2\log 4\cos\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\log 4\cos\frac{3x^2}{2}$$

$$-\frac{2}{5}\log 4\cos\frac{5x^2}{2}+\cdots$$

$$-4\pi i\left(\frac{x}{2\pi}\right)+\frac{4\pi i}{3}\left(\frac{3x}{2\pi}\right)-\frac{4\pi i}{5}\left(\frac{5x}{2\pi}\right)+\cdots$$

$$=-i\log\operatorname{tg}\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)^2+\frac{i}{2}\log\operatorname{tg}\left(\frac{4x+\pi}{4}\right)^2$$

$$-\frac{i}{3}\log\operatorname{tg}\left(\frac{6x+\pi}{4}\right)^2+\cdots$$

$$-2\pi\left(\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$+\frac{2\pi}{2}\left(\left(\frac{2x}{2\pi}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2x}{2\pi}+\frac{3}{4}\right)\right)-\cdots$$

$$(68)\quad \int_0^{e^{xi}}\left(\frac{2\sqrt{k'}K}{\pi}-1\right)\frac{dq}{q}=-\log 4\cos x^2+\frac{1}{3}\log 4\cos 3x^2$$

$$-\frac{1}{5}\log 4\cos 5x^2+\cdots$$

$$-2\pi i\left(\frac{x}{\pi}\right)+\frac{2\pi i}{3}\left(\frac{3x}{\pi}\right)-\frac{2\pi i}{5}\left(\frac{5x}{\pi}\right)+\cdots$$

$$=-\frac{i}{2}\log\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{i}{4}\log\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$-\frac{i}{6}\log\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)^2+\cdots$$

$$-\pi\left(\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{x}{\pi}+\frac{3}{4}\right)\right)+\frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{2x}{\pi}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2x}{\pi}+\frac{3}{4}\right)\right)$$
$$-\frac{\pi}{3}\left(\left(\frac{3x}{\pi}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3x}{\pi}+\frac{3}{4}\right)\right)+\cdots$$

Posito $x=\frac{m}{n}2\pi$ fit pars imaginaria formulae 65

1^0 si n est numerus par

$$=\sum_{0,\infty}^{s}-4\pi i\sum_{1,n-1}^{p}\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p+ns}\left(\frac{pm}{n}+\frac{1}{2}\right)(-1)^{\frac{ns}{2}},$$

2^0 si n est numerus impar

$$=\sum_{0,\infty}^{s}-4\pi i\sum_{1,2n-1}^{p}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{p+2ns}\left(\frac{pm}{n}+\frac{1}{2}\right)(-1)^{s},$$

quam patet habere valorem finitum, nisi n est $\equiv 0$ mod 4.

Convergentia summae

$$a_0+a_1+a_2+a_3\ldots\ldots$$

postulat, ut data quantitate quamvis parva ε assignari possit terminus a_n, a quo summa usque ad terminum quemvis a_m extensa nanciscatur valorem absolutum ipso ε minorem. Iam posito brevitatis gratia

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1}&=a_{n+1}\\ \varepsilon_{n+2}&=a_{n+1}+a_{n+2}\\ \varepsilon_{n+3}&=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

functio

$$f(r)=a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots$$

facile sub hac forma exhibetur

$$\begin{aligned}&=a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots+a_nr^n+\varepsilon_{n+1}r^{n+1}+(\varepsilon_{n+2}-\varepsilon_{n+1})r^{n+2}\\ &\qquad+(\varepsilon_{n+3}-\varepsilon_{n+2})r^{n+3}+\cdots\\ &=a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots+a_nr^n+\varepsilon_{n+1}(r^{n+1}-r^{n+2})\\ &\qquad+\varepsilon_{n+2}(r^{n+2}-r^{n+3})+\cdots\end{aligned}$$

Unde patet convergente r versus limitem 1 functionem $f(r)$ tandem quavis quantitate minus a valore seriei

$$a_0+a_1+a_2\ldots$$

distare. Summa terminorum altioris gradus quam n, quum sint ε_{n+1}, $\varepsilon_{n+2},\ldots$ ex hyp. omnes omisso signo $<\varepsilon$, differentiaeque $r^{n+1}-r^{n+2}\ldots$ omnes positivae, manifesto evadit quantitate absoluta

$$\begin{aligned}&<\varepsilon(r^{n+1}-r^{n+2})+\varepsilon(r^{n+2}-r^{n+3})+\cdots\\ &<\varepsilon r^{n+1},\end{aligned}$$

summa autem terminorum non altioris gradus quam n est functio algebraica ipsius r, quam constat appropinquando r unitati summae

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

quantumvis appropinquari posse; unde patet appropinquando r unitati differentiam functionis $f(r)$ a valore seriei

$$a_0+a_1+\cdots$$

infra quantitatem quamvis datam descendere.

Ex hoc theoremate, quod Cl° Abel tribuendum esse Cl[us] Dirichlet modo (1852 Sept. 14) quum antecedentia jam essent scripta monuit, facile deducitur . . . .

II.

$$\log k=\log 4\sqrt[]{q}+\sum(-1)^n\frac{4}{n}\frac{q^n}{1+q^n},\quad q=e^{xi}.$$

1) $x=\frac{2m}{n}\pi$, n ungerade.

$$\begin{aligned}\log k&=i\left(\frac{x}{2}+\sum(-1)^s\frac{2}{s}\operatorname{tg}s\frac{x}{2}\right)\\ &=i\left(\frac{x}{2}+\sum_{0,\infty}^{t}\sum_{1,2n}^{s}(-1)^s\frac{2}{2nt+s}\operatorname{tg}\frac{sm}{n}\pi\right)\\ &=i\frac{x}{2}+2i\int_0^1\sum_{1,2n}^{s}(-1)^s\operatorname{tg}\frac{sm}{n}\pi\frac{x^{s-1}dx}{1-x^{2n}}\\ &=i\frac{x}{2}+2\int_0^1\sum_{1,2n}^{s}(-1)^s\frac{\alpha^{2sm}-1}{\alpha^{2sm}+1}\frac{1}{2n}\sum_{1,2n}^{t}\frac{\alpha^{-ts}\alpha^t dx}{1-\alpha^t x},\quad \alpha=e^{\frac{2\pi i}{2n}},\\ &=i\frac{x}{2}+\frac{1}{2n}\int_0^1\sum_{1,2n}^{t}\frac{\alpha^t dx}{1-\alpha^t x}2\sum_{1,n-1}^{\sigma}\sum_{1,2n}^{s}(-1)^{s+\sigma-1}\alpha^{s(2m\sigma-t)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+r\alpha^{2sm}}&=\sum\frac{(-1)^\sigma\alpha^{2s\sigma m}r^\sigma}{1-r^{2n}}=-\frac{1}{2n}\sum_{0,2n-1}(-1)^\sigma\sigma\alpha^{2s\sigma m}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{0,n-1}(-1)^\sigma\alpha^{2s\sigma m},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=i\frac{x}{2}+2\sum_{1,n-1}\log(1-\alpha^{n+2m\sigma})(-1)^\sigma\\ &=i\frac{x}{2}+\sum_{1,n-1}\log\alpha^{2m\sigma}(-1)^\sigma\\ &=i\frac{x}{2}+2\pi i\left(\sum_{1,n-1}\frac{2m\sigma}{2n}(-1)^\sigma-\sum_{1,n-1}(-1)^\sigma E\left(\frac{2m\sigma}{2n}+\frac{1}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

---

2) $x = \frac{m}{n}\pi$, m, n ungerade.

$$\log k = -\frac{q+q_0}{q-q_0}\frac{3}{2n^2}\sum_{1,\infty}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n}\log\frac{1+q^n}{1-q^n}. \qquad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{4n}}$$

$$+\frac{x}{2}i + 2\int_0^1 \sum_{1,4n-1}^{s}(-1)^s \frac{x^{s-1}dx}{1-x^{4n}}\frac{\alpha^{2ms}-1}{\alpha^{2ms}+1}$$

$$= A + \frac{x}{2}i +$$

$$2\int_0^1 \sum_{1,4n}^{t}\frac{\alpha^t dx}{1-\alpha^t x}\frac{1}{4n}\cdot - \frac{1}{2n}\sum_{1,4n-1}^{s}\sum_{0,2n-1}^{\sigma}(-1)^{s+\sigma}\sigma\alpha^{2s\sigma m}(\alpha^{2ms}-1)\alpha^{-st}$$

$$= A + \frac{x}{2}i + 2.2\pi i\sum_{1,n-1}\frac{s}{n}(-1)^s\left(\frac{ms-n}{2n} - E\left(\frac{ms}{2n}\right)\right),\ m\mu \equiv 1 \bmod. 2n,$$

$$= A + \pi i\left(\frac{m-\mu}{2} + \frac{\mu}{2n} + 2\sum_{1,n-1}E\left(\frac{\mu s}{2n}\right)(-1)^s - 2\sum_{1,n-1}E\left(\frac{ms}{2n}\right)(-1)^s\right)$$

---

3) $x = \frac{m}{2n}\pi$, m ungerade.

$$\log k = \frac{q+q_0}{q-q_0}\frac{3}{8n^2}\sum\frac{1}{s^2} + \frac{1}{2n}\log\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)$$

$$+\frac{x}{2}i + i\sum^{t}\sum_{1,8n-1}^{s}(-1)^s\frac{2}{8nt+s}\operatorname{tg} s\frac{m}{4n}\pi$$

$$= A + \frac{x}{2}i + 2\int_0^1\sum_{1,8n-1}^{s}\frac{x^{s-1}dx}{1-x^{8n}}\frac{\alpha^{2ms}-1}{\alpha^{2ms}+1}(-1)^s \qquad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{8n}}$$

$$= A + \frac{x}{2}i +$$

$$2\int_0^1\sum_{1,8n}^{t}\frac{\alpha^t dx}{1-\alpha^t x}\frac{1}{8n}\cdot - \frac{1}{4n}\sum_{1,8n-1}^{s}\sum_{0,4n-1}^{\sigma}(-1)^{s+\sigma}\sigma\alpha^{2s\sigma m}(\alpha^{2ms}-1)\alpha^{-st}$$

$$t \equiv 2rm + 4n \bmod. 8n$$

$$= A + \frac{x}{2}i + 2\sum_{1,4n-1}^{r}\log(1-\alpha^{4n+2rm})\frac{1}{8n}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{4n}\left(8n\left((-1)^{r-1}(r-1) - (-1)^r r\right) + 8n(-1)^r(4n-1)\right)$$

$$= A + \frac{x}{2}i + 2\sum_{-2n+1,2n-1}^{s}\log(1-\alpha^{2sm})\frac{-s}{2n}(-1)^s$$

$$= A + \frac{x}{2}i - 4\sum_{0,2n-1}^{s}\log(-\alpha^{2sm})\frac{s}{4n}(-1)^s$$

$$= A + \frac{x}{2}i - 4\sum_{0,2n-1}^{s}\left(\frac{sm}{4n} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{s}{4n}\right)(-1)^s 2\pi i$$

(x) = absolut kleinster Rest von x.

$$-\log k' = 8\sum\frac{1}{t}\frac{q^t}{1-q^{2t}} = 4i\sum\frac{1}{t\sin tx},\ q = e^{xi}.$$

1) $x = \frac{m}{2n}\pi$, m ungerade.

$$-\log k' = 4i\sum_{0,\infty}^{t}\sum_{1,4n-1}^{s}\frac{1}{4nt+s}\frac{1}{\sin\frac{sm\pi}{2n}}$$

$$= 8\int_0^1\sum^{s}\frac{x^{s-1}dx}{1-x^{4n}}\frac{\alpha^{sm}}{1-\alpha^{2ms}} \qquad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{4n}}$$

$$= 8\int_0^1\sum_{1,4n}^{t}\frac{\alpha^t dx}{1-\alpha^t x}\frac{1}{4n}\cdot - \frac{1}{2n}\sum_{1,4n-1}^{s}\sum_{0,2n-1}^{\sigma}\sigma\alpha^{ms(2\sigma+1)}\alpha^{-ts}$$

$$\frac{1}{1-r\alpha^{2ms}} = \sum_{0,2n-1}^{\sigma}\frac{r^\sigma\alpha^{2ms\sigma}}{1-r^{2n}}$$

$$\frac{1}{1-\alpha^{2ms}} = -\frac{1}{2n}\sum_{0,2n-1}^{\sigma}\sigma\alpha^{2ms\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{0,n-1}^{\sigma}\alpha^{2ms\sigma}$$

$$= \sum_{0,n-1}[\log(1+\alpha^{m(2r+1)}) - \log(1+\alpha^{-m(2r+1)})]$$

$$= -\pi i\left((m-2)n - 4\sum_{0,n-1}^{s}E\left(\frac{m(2s+1)}{4n}\right)\right)$$

---

2) $x = \frac{m\pi}{n}$, n ungerade. $\qquad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{2n}}$

$$-\log k' = -\frac{q+q_0}{q-q_0}\frac{\pi^2}{4n^2}q_0^{-n} + 8\int_0^1\sum_{1,2n-1}^{s}\frac{x^{s-1}dx}{1-x^{2n}}\frac{\alpha^{ms}}{1-\alpha^{2ms}}$$

$$= A +$$

$$8\int_0^1\sum_{1,2n}^{t}\frac{\alpha^t dx}{1-\alpha^t x}\cdot - \frac{1}{2n}\sum_{1,2n-1}^{s}\sum_{0,n-1}^{\sigma}\left(\frac{\sigma - \left(\frac{n-1}{2}\right)}{n}\right)\alpha^{ms(2\sigma+1)}\alpha^{-ts}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ t \equiv m(2r+1) \\ 2)\ t \equiv m(2r+1) + n \end{array}\right. \bmod. 2n$$

$$= A + 8 \sum_{0,n-1} \log(1 - \alpha^{m(2r+1)}) \frac{1}{2n} \left(\frac{r - \frac{n-1}{2}}{n}\right) n$$

$$- 8 \sum \log(1 - \alpha^{m(2r+1)+n}) \frac{1}{2n} \left(\frac{r - \frac{n-1}{2}}{n}\right) n$$

$$= A + 8 \sum_{1,\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{s}{n}\right) \left(\log(1 - \alpha^{2ms+mn}) - \log(1 - \alpha^{-2ms+mn})\right)$$

$$- 4 \sum \left(\frac{s}{n}\right) \left(\log(1 - \alpha^{2ms+(m+1)n}) - \log(1 - \alpha^{-2ms+(m+1)n})\right)$$

$$= A + 8\pi i \sum_{1,\frac{n-1}{2}} \left(\frac{s}{n}\right) \left(\left(\frac{2ms + (m+1)n}{2n}\right) - \left(\frac{2ms + mn}{2n}\right)\right)$$

$$= A + 4\pi i \sum \left(\frac{s}{n}\right) (\cdots\cdots)$$

$$= A + 4\pi i \sum \left(\frac{\mu s}{n}\right) \left(\left(\frac{2s + (m+1)n}{2n}\right) - \left(\frac{2s + mn}{2n}\right)\right),$$

$$m\mu \equiv 1 \text{ mod. } n$$

$$= A + 4\pi i (-1)^{m+1} \sum_{1,\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\mu s}{n}\right)$$

$$= (-1)^{m+1} \left[\frac{\pi^2}{4n^2} \frac{q + q_0}{q - q_0} + \pi i \left(\frac{n^2 - 1}{2n} \mu - 4 \sum_{1,\frac{n-1}{2}} E\left(\frac{\mu s}{n} + \frac{1}{2}\right)\right)\right]$$

$$\log \frac{2K}{\pi} = 4 \sum \frac{q^t}{t(1 + q^t)} = \log\left(\frac{q_0 + q}{q_0 - q}\right) + 4 \sum \frac{1}{t} \left(\frac{q^t}{1 + q^t} - \frac{1}{2} \frac{q^t}{q_0^t}\right)$$

$$= \log \frac{q_0 + q}{q_0 - q} + 2i \sum \frac{1}{t} \operatorname{tg} t \frac{x}{2}$$

1) $x = \frac{2m}{n}\pi$, n ungerade.

$$\alpha = e^{\frac{2\pi}{2n} i}, \quad \frac{1}{1 + r\alpha^{2sm}} = \sum_{0,n-1} \frac{(-1)^\sigma r^\sigma \alpha^{2s\sigma m}}{1 + r^n}$$

$$\log \frac{2K}{\pi} = \log \frac{q_0 + q}{q_0 - q} + 2 \sum \sum_{1,2n-1}^{s} \frac{1}{2nt + s} \frac{\alpha^{2ms} - 1}{\alpha^{2ms} + 1}$$

$$= \log \frac{q_0 + q}{q_0 - q} + 2 \int_0^1 \sum_{1,2n}^{t} \frac{\alpha^t dx}{1 - \alpha^t x} \cdot - \frac{1}{2n} \sum^{s} \alpha^{-ts} \sum_{1,n-1}^{\sigma} (-1)^\sigma \alpha^{2s\sigma m}$$

$$= \log \frac{q_0 + q}{q_0 - q} + 2 \sum_{1,n-1} \log(1 - \alpha^{2rm}) (-1)^r \frac{1}{2n} n$$

$$- 2 \sum_{1,n-1} \log(1 - \alpha^{2rm+n}) (-1)^r \frac{1}{2n} n$$

$$= A + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{rm}{n} + \frac{1}{2}\right) (-1)^r 2\pi i - \frac{1}{2} \sum \left(\frac{rm}{n}\right) (-1)^r 2\pi i$$

$$= \log \frac{q_0 + q}{q_0 - q} + 2\pi i \sum_{1,\frac{n-1}{2}}^{s} \left(\left(s \frac{2m}{n} + \frac{1}{2}\right) - \left(s \frac{2m}{n}\right)\right)$$

---

2) $x = \frac{m}{n}\pi$, n ungerade, m ungerade, $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{4n}}$.

$$\log \frac{2K}{\pi} = \frac{q + q_0}{q - q_0} \frac{\pi^2}{4n^2} + \log \frac{q_0 + q}{q_0 - q} + 2 \sum \sum_{1,4n-1}^{s} \frac{1}{4nt + s} \frac{\alpha^{2ms} - 1}{\alpha^{2ms} + 1}$$

$$= A +$$

$$2 \int_0^1 \sum_{1,4n}^{t} \frac{\alpha^t dx}{1 - \alpha^t x} \frac{1}{4n} \cdot - \frac{1}{2n} \sum_{1,4n-1}^{s} \sum_{0,2n-1}^{\sigma} (-1)^\sigma \sigma \alpha^{2s\sigma m} (\alpha^{2ms} - 1) \alpha^{-ts}$$

$$= A + 2 \int_0^1 \sum_{1,4n}^{t} \frac{\alpha^t dx}{1 - \alpha^t x} \frac{1}{4n} 2 \sum_{1,4n-1}^{s} \sum_{1,2n-1}^{\sigma} (-1)^\sigma \left(\frac{\sigma - n}{2n}\right) \alpha^{2ms\sigma} \alpha^{-ts}$$

$$\begin{matrix} 1) \ t \equiv 2mr \\ 2) \ t \equiv 2mr + 2n \end{matrix} \ \text{mod. } 4n$$

$$= A - 2 \sum_{1,2n-1} \log(1 - \alpha^{2mr}) \frac{1}{4n} (-1)^r \left(\frac{r - n}{2n}\right) 4n$$

$$+ 2 \sum \log(1 - \alpha^{2mr+2n}) (-1)^r \left(\frac{r - n}{2n}\right)$$

$$= A - 2\pi i \sum_{1,2n-1} (-1)^r \left(\left(\frac{mr + n}{2n}\right) - \left(\frac{mr}{2n}\right)\right) \left(\frac{r - n}{2n}\right)$$

$$= A - 2\pi i \sum_{1,2n-1} (-1)^r \left(\left(\frac{r + n}{2n}\right) - \left(\frac{r}{2n}\right)\right) \left(\frac{\mu r - n}{2n}\right),$$

$$m\mu \equiv 1 \text{ mod. } 2n$$

$$= A + 2\pi i \sum_{1,n-1} (-1)^r \left(\frac{\mu r - n}{2n}\right)$$

---

3) $x = \frac{m}{2n}\pi$, m ungerade.

$$\log \frac{2K}{\pi} = \log \frac{q_0 + q}{q_0 - q} + 2 \sum \sum_{1,4n-1}^{s} \frac{1}{4nt + s} \frac{\alpha^{ms} - 1}{\alpha^{ms} + 1} \qquad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{4n}}$$

$$= A + 2 \int_0^1 \sum_{1,2n}^{t} \frac{\alpha^t dx}{1 - \alpha^t x} \frac{1}{4n} 2 \sum_{1,4n-1}^{s} \sum_{1,4n-1}^{\sigma} (-1)^\sigma \left(\frac{\sigma - 2n}{4n}\right) \alpha^{ms\sigma} \alpha^{-ts}$$

$$= A + 2\pi i \sum_{1,2n-1} (-1)^r \left(\frac{\mu r - 2n}{4n}\right), \quad m\mu \equiv 1 \text{ mod. } 4n.$$

Erläuterungen zu den Fragmenten XXVIII.

Von R. Dedekind.

Die Entstehungszeit (September 1852) des ersten der beiden Fragmente macht es wahrscheinlich, dass Riemann darauf ausging, für die Abhandlung über die trigonometrischen Reihen (XII) Beispiele von Functionen zu finden, die unendlich oft in jedem Intervall unstetig werden, und vielleicht sollte die zweite Untersuchung, welche sich auf einem kaum leserlichen Blatte findet, demselben Zwecke dienen. Die hier von Riemann benutzte Methode zur Bestimmung des Verhaltens der in der Theorie der elliptischen Functionen auftretenden Modulfunctionen für den Fall, dass das complexe Periodenverhältniss

$$(1) \qquad \omega = \frac{K'i}{K} = \frac{\log q}{\pi i}$$

sich einem rationalen Werthe nähert, gestattet aber zugleich eine sehr interessante Anwendung auf die sogenannte Theorie der unendlich vielen Formen der ϑ-Functionen, nämlich auf die Bestimmung der bei der Transformation erster Ordnung auftretenden Constanten, welche bekanntlich von Jacobi und Hermite auf die Gauss'schen Summen, also auf die Theorie der quadratischen Reste zurückgeführt ist. Die Darstellung dieses Zusammenhangs bildet den Gegenstand der folgenden Erläuterungen.

Den Mittelpunkt der Theorie dieser Modulfunctionen, welche man auch ganz unabhängig von der der elliptischen Functionen aufstellen kann, und welche seit dem Erscheinen der ersten Auflage von Riemann's Werken der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden ist, bildet in gewissem Sinne die Function

$$(2) \qquad \eta(\omega) = 1^{\frac{\omega}{24}}\,\Pi(1 - 1^{\omega\nu}) = q^{\frac{1}{12}}\,\Pi(1 - q^{2\nu}),$$

wo zur Abkürzung

$$(3) \qquad e^{2\pi i z} = 1^z, \quad \text{also } q = 1^{\frac{\omega}{2}}$$

gesetzt ist, und wo das Productzeichen sich auf alle natürlichen Zahlen ν erstreckt. Da diese Function der complexen Variablen $\omega = x + yi$, deren Ordinate y stets positiv ist, im Innern des hier-

durch begrenzten, einfach zusammenhängenden Gebietes nirgends Null oder unendlich gross wird, so sind auch alle Potenzen von $\eta(\omega)$ mit beliebigen Exponenten, und ebenso $\log \eta(\omega)$ durchaus einwerthige Functionen von ω, sobald ihr Werth an einer bestimmten Stelle festgesetzt ist. Die Function $\log \eta(\omega)$ soll dadurch definirt werden, dass, wenn y über alle Grenzen wächst, also q verschwindet, die Grösse

$$(4) \qquad \log \eta(\omega) - \frac{\omega\pi i}{12} = 0$$

wird; dann ist $\log \eta(\omega)$ conjugirt mit $\log \eta(-\omega')$, wo ω', wie immer im Folgenden, die mit ω conjugirte Grösse bedeutet. Nun ist bekanntlich (Fundam. nova §. 36)

$$\eta(2\omega)\,\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) = 1^{\frac{1}{48}}\,\eta(\omega)^3,$$

$$\sqrt[4]{k} = 1^{\frac{1}{48}}\sqrt{2}\,\frac{\eta(2\omega)}{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)},$$

$$\sqrt[4]{k'} = 1^{\frac{1}{48}}\,\frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)},$$

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1^{-\frac{1}{24}}\,\frac{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)^2}{\eta(\omega)},$$

also nach der obigen Festsetzung:

$$\log \eta(2\omega) + \log \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) + \log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) = \frac{\pi i}{24} + 3 \log \eta(\omega)$$

$$(5) \qquad \begin{aligned} \log k &= \log 4 + \frac{\pi i}{6} + 4 \log \eta(2\omega) - 4 \log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) \\ \log k' &= \frac{\pi i}{6} + 4 \log \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) - 4 \log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) \\ \log \frac{2K}{\pi} &= -\frac{\pi i}{6} + 4 \log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) - 2 \log \eta(\omega), \end{aligned}$$

wo die Logarithmen linker Hand (wie in den Fund. nova §. 40) als einwerthige Functionen von ω so definirt sind, dass die drei Grössen

$$\log k - \log 4 - \frac{\omega\pi i}{2} = \log k - \log 4\sqrt{q},$$

$$\log k' \text{ und } \log \frac{2K}{\pi}$$

mit q unendlich klein werden.

Aus diesem Verhalten der Functionen ergiebt sich nun mit Hülfe der Transformation erster Ordnung der ϑ-Functionen das von Riemann untersuchte Verhalten bei Annäherung von ω an einen reellen rationalen Werth, wobei q sich zugleich einer bestimmten Einheitswurzel q_0 nähert. Setzt man

$$\vartheta_1(z, \omega) = \sum 1^{(s+\frac{1}{2})^2 \frac{\omega}{2} + (s+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})}$$

$$= 2\eta(\omega)\, 1^{\frac{\omega}{12}} \sin z\pi\, \Pi(1 - 1^{\omega\nu+z})(1 - 1^{\omega\nu-z}),$$

wo die Summation auf alle ganzen Zahlen s auszudehnen ist, so wird, wenn man die nach z genommene Derivirte durch einen Accent bezeichnet,

$$\vartheta_1'(0, \omega) = 2\pi\eta(\omega)^3.$$

Sind nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier der Bedingung

$$(6) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende ganze Zahlen, so ist bekanntlich

$$\vartheta_1\left(z, \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = c\sqrt{\alpha + \beta\omega}\; 1^{\frac{1}{2}\beta(\alpha+\beta\omega)z^2}\, \vartheta_1\big((\alpha + \beta\omega)z, \omega\big),$$

wo c eine von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und der Wahl der Quadratwurzel abhängige achte Einheitswurzel bedeutet, deren Bestimmung von Hermite auf die Gauss'schen Summen zurückgeführt ist (Liouville's Journal, Serie II. T. III. 1858). Für $z = 0$ ergiebt sich hieraus

$$\vartheta_1'\left(0, \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = c(\alpha + \beta\omega)^{\frac{3}{2}}\, \vartheta_1'(0, \omega),$$

also

$$(7) \qquad \eta\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = c^{\frac{1}{3}}(\alpha + \beta\omega)^{\frac{1}{2}}\, \eta(\omega),$$

und aus dieser Transformation von $\eta(\omega)$ ist diejenige von $\log\eta(\omega)$ abzuleiten.

Der Fall $\beta = 0$ erledigt sich unmittelbar durch die Definitionen (2) und (4) von $\eta(\omega)$, $\log\eta(\omega)$ und giebt

$$(8) \qquad \log\eta(1 + \omega) = \log\eta(\omega) + \frac{\pi i}{12},$$

oder allgemeiner, wenn n irgend eine ganze Zahl ist,

$$(9) \qquad \log\eta(n + \omega) = \log\eta(\omega) + \frac{n\pi i}{12}.$$

Ist aber β von Null verschieden, so wird die Grösse $\mu = -(\alpha + \beta\omega)^2$ nirgends negativ, und man kann folglich $\log\mu$ eindeutig so definiren, dass der imaginäre Bestandtheil stets zwischen $\pm\pi i$ bleibt, und folglich conjugirten Werthen von μ auch conjugirte Werthe von $\log\mu$ entsprechen; dann wird zufolge (7)

$$(10) \qquad \log\eta\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = \log\eta(\omega) + \frac{1}{4}\log\left\{-(\alpha + \beta\omega)^2\right\} + (\alpha, \beta, \gamma, \delta)\frac{\pi i}{12},$$

wo $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ eine durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vollständig bestimmte ganze Zahl bedeutet, welche dieselbe bleibt, wenn diese vier Zahlen mit (-1) multiplicirt werden. Die vollständige Bestimmung dieser Zahl leistet offenbar noch sehr viel mehr, als die der obigen Einheitswurzel c, und bildet den eigentlichen Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Zunächst lässt sich $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ auf eine nur von α, β abhängige Zahl zurückführen. Genügen nämlich die Zahlen γ', δ' ebenfalls der Bedingung $\alpha\delta' - \beta\gamma' = 1$, so ist bekanntlich $\gamma' = \gamma + n\alpha$, $\delta' = \delta + n\beta$, wo n jede ganze Zahl bedeutet; mithin wird nach (9)

$$\log\eta\left(\frac{\gamma' + \delta'\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = \log\eta\left(n + \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = \log\eta\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) + \frac{n\pi i}{12},$$

und hieraus folgt nach (10), dass

$$(\alpha, \beta, \gamma', \delta') - \frac{\delta'}{\beta} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) - \frac{\delta}{\beta}$$

nur von den beiden Zahlen α, β abhängt; man kann daher

$$(11) \qquad \beta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha + \delta - 2(\alpha, \beta),$$

also

$$(12) \qquad \log\eta\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = \log\eta(\omega) + \frac{1}{4}\log\left\{-(\alpha + \beta\omega)^2\right\} + \frac{\alpha + \delta - 2(\alpha, \beta)}{12\beta}\pi i$$

setzen, wo $2(\alpha, \beta)$ und, wie sich später ergiebt, auch (α, β) selbst eine ganze, lediglich von den beiden relativen Primzahlen α, β abhängende Zahl bedeutet; zugleich ergiebt sich

$$(13) \qquad (-\alpha, -\beta) = -(\alpha, \beta).$$

Ersetzt man ferner alle Glieder der Gleichung (12) durch die zugehörigen conjugirten Grössen, so erhält man nach den obigen Bemerkungen

$$\log\eta\left(-\frac{\gamma + \delta\omega'}{\alpha + \beta\omega'}\right) = \log\eta(-\omega') + \frac{1}{4}\log\left\{-(\alpha + \beta\omega')^2\right\} - \frac{\alpha + \delta - 2(\alpha, \beta)}{12\beta}\pi i,$$

und da die linke Seite nach (12) auch in der Form

$$\log\eta\left(\frac{-\gamma + \delta(-\omega')}{\alpha - \beta(-\omega')}\right) = \log\eta(-\omega') + \frac{1}{4}\log\left\{-(\alpha + \beta\omega')^2\right\} + \frac{\alpha + \delta - 2(\alpha, -\beta)}{12(-\beta)}\pi i$$

dargestellt werden kann, so ergiebt sich

$$(14) \qquad (\alpha, -\beta) = (\alpha, \beta)$$

und zufolge (13) auch

$$(15) \qquad (-\alpha, \beta) = -(\alpha, \beta).$$

Soll ferner der Satz (12) auch noch für den Fall $\beta = 0$, $\alpha = \delta = \pm 1$ gelten, so ist die Definition des Symbols (α, β) durch die Festsetzung

$$(\pm 1, 0) = \pm 1 \tag{16}$$

zu vervollständigen, welche auch mit (13), (14), (15) harmonirt.

Aus (15) folgt $(0, \pm 1) = 0$; setzt man daher $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 0$, so geht der Satz (12) über in den speciellen Fall der complementären Transformation

$$\log \eta \left(\frac{-1}{\omega}\right) = \log \eta (\omega) + \tfrac{1}{4} \log (-\omega^2). \tag{17}$$

Ersetzt man nun in dem Satze (12) die Grösse ω durch $1 + \omega$ und durch $\frac{-1}{\omega}$, und drückt die Grössen

$$\log \eta \left(\frac{\gamma + \delta + \delta\omega}{\alpha + \beta + \beta\omega}\right) \quad \text{und} \quad \log \eta \left(\frac{\delta - \gamma\omega}{\beta - \alpha\omega}\right)$$

wieder nach dem Satze (12) durch $\log \eta (\omega)$ aus, so erhält man mit Rücksicht auf (8) und (17) leicht die beiden folgenden, für jedes Paar von relativen Primzahlen α, β geltenden Sätze

$$(\alpha + \beta, \beta) = (\alpha, \beta) \tag{18}$$

$$2\alpha(\alpha, \beta) + 2\beta(\beta, \alpha) = 1 + \alpha^2 + \beta^2 - 3(\alpha\beta), \tag{19}$$

wo $(\alpha\beta)$ den absoluten Werth von $\alpha\beta$ bedeutet. Mit Zuziehung des letzteren Satzes, welcher in naher Beziehung zu dem Reciprocitätssatze in der Theorie der quadratischen Reste steht, kann man der Gleichung (11) auch die Form

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 2\gamma(\alpha, \beta) + 2\delta(\beta, \alpha) - (\alpha\gamma + \beta\delta) \pm 3\alpha\delta \tag{20}$$

geben, wo das Vorzeichen $\pm$ so zu wählen ist, dass $\pm\,\alpha\beta$ der absolute Werth von $\alpha\beta$ wird; hierdurch erscheint die zuerst in (10) auftretende Zahl $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ wieder in Form einer ganzen Zahl.

Es leuchtet nun ein, dass die beiden Sätze (18) und (19) nicht nur die früheren Eigenschaften (13) bis (16) in sich schliessen, sondern auch ausreichen, um in jedem Falle den Werth des Symbols (α, β) durch eine Kettenbruch-Entwicklung vollständig und zwar als ganze Zahl zu bestimmen. Dies geht schon aus dem Satze

$$(\alpha, \alpha + \beta) = (\alpha, \beta) - (\beta, \alpha) + \beta - \alpha, \quad \text{wenn } \alpha\beta \geqq 0, \tag{21}$$

hervor, welcher leicht aus (18) und (19) abgeleitet wird; und umgekehrt leuchtet ein, dass dieser Satz (21) in Verbindung mit (18), d. h. mit dem Satze

$$(\alpha', \beta) = (\alpha, \beta), \quad \text{wenn } \alpha' \equiv \alpha (\text{mod.}\, \beta), \tag{22}$$

ebenfalls die vollständige Bestimmung des Symbols (α, β) enthält und

eine sehr bequeme Berechnung einer Tabelle liefert. Es ist endlich sehr zweckmässig, dem Symbol (α, β) auch dann eine bestimmte Bedeutung beizulegen, wenn die ganzen Zahlen α, β nicht relative Primzahlen sind, sondern einen beliebigen (positiven) grössten gemeinsamen Theiler p haben; in diesem Falle setzen wir

$$(\alpha, \beta) = p\left(\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{p}\right), \tag{23}$$

weil dann offenbar die beiden Sätze (21), (22) ungeändert bestehen bleiben, während freilich das erste Glied 1 auf der rechten Seite des Satzes (19) durch p^2 zu ersetzen ist; aber in den beiden Sätzen (21), (22) ist jetzt auch ohne Zuziehung von (23) die vollständige Bestimmung von (α, β) enthalten, und sie gelten sogar für den Fall $\alpha = \beta = 0$, wenn

$$(0, 0) = 0 \tag{24}$$

gesetzt wird. Durch diese Erweiterung des Symbols (α, β) gelingt es oft, solche Sätze, die sonst in verschiedene Fälle zerfallen würden, in einem einzigen Ausspruch zu vereinigen (vergl. die in (28), (34) enthaltenen Sätze).

Obgleich nun das Symbol (α, β) durch die Eigenschaften (21), (22) für jedes Paar von ganzen rationalen Zahlen α, β vollständig bestimmt ist, so würde es doch schwer sein, aus ihnen einen allgemeinen Ausdruck für dasselbe abzuleiten. Mit Hülfe der von Riemann in dem zweiten Fragmente angewandten Methode gelingt es aber, einen solchen Ausdruck in Form einer endlichen Summe aufzustellen. Diese Methode besteht in der Untersuchung des Verhaltens der Modulfunctionen, wenn $\omega = x + yi$ sich einem rationalen, in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruche $\frac{-\alpha}{\beta}$ annähert. Geschieht diese Annäherung in der Weise, dass $\alpha + \beta x$ unendlich klein von höherer Ordnung wird als $\sqrt{y}$, so wird die Ordinate der in dem Satze (12) auftretenden Grösse

$$\omega_1 = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega} = \frac{\delta}{\beta} - \frac{1}{\beta(\alpha + \beta\omega)}$$

positiv unendlich gross, mithin nach (4)

$$\log \eta (\omega_1) - \frac{\omega_1 \pi i}{12} = 0,$$

also

$$\log \eta (\omega) + \frac{\pi i}{12\beta(\alpha + \beta\omega)} + \frac{1}{4} \log \left\{-(\alpha + \beta\omega)^2\right\} = \frac{2(\alpha, \beta) - \alpha}{12\beta} \pi i;$$

ersetzt man, um sich der Bezeichnung von Riemann zu nähern, α, β durch $-m$, n, so kann man diesen Satz so aussprechen: nähert sich die Variable $\omega = x + yi$ dem irreducibelen Bruche $m:n$ so an, dass $nx - m$ von höherer Ordnung unendlich klein wird als $\sqrt{y}$, so wird zuletzt

$$(25)\quad \log\eta(\omega) + \frac{\pi i}{12n(n\omega - m)} + \frac{1}{4}\log\left\{-(n\omega - m)^2\right\} = \frac{m - 2(m, n)}{12n}\pi i.$$

Unterwirft man aber die Annäherung der schärferen Bedingung, dass $nx - m$ von höherer Ordnung unendlich klein wird als y^2, so verschwinden gleichzeitig die imaginären Bestandtheile des zweiten und dritten Gliedes links, und folglich ergiebt sich durch Subtraction der conjugirten Grössen der Annäherungssatz

$$(26)\qquad \log\eta(\omega) - \log\eta(-\omega') = \frac{m - 2(m, n)}{6n}\pi i,$$

welcher zufolge der obigen Erweiterung des Symbols (m, n) auch dann gilt, wenn die ganzen Zahlen m, n irgend welchen gemeinsamen Theiler haben.

Bevor wir denselben benutzen, um unsere Aufgabe zu lösen, bemerken wir noch Folgendes. Sind a, ∂ positive ganze Zahlen und c eine beliebige ganze Zahl, und genügt die Annäherung von ω an ihren rationalen Grenzwerth der letzten, schärferen Bedingung, so gilt dasselbe offenbar auch für die Annäherung der Grösse

$$\frac{c + \partial\omega}{a} \text{ an den Werth } \frac{cn + \partial m}{an},$$

und folglich wird gleichzeitig mit (26) auch die Annäherung

$$\log\eta\left(\frac{c + \partial\omega}{a}\right) - \log\eta\left(-\frac{c + \partial\omega'}{a}\right) = \frac{cn + \partial m - 2(cn + \partial m, an)}{6an}\pi i$$

eintreten. Nun besteht, wenn p eine Primzahl ist, der aus der Transformation $p$ter Ordnung oder aus (2) leicht abzuleitende Satz

$$(27)\quad \log\eta(p\omega) + \sum \log\eta\left(\frac{s + \omega}{p}\right) = \frac{(p-1)\pi i}{24} + (p+1)\log\eta(\omega),$$

wo s in der Summe die p Zahlen $0, 1, 2 \ldots (p-1)$ zu durchlaufen hat; zieht man hiervon die durch den Uebergang zu den conjugirten Grössen entstehende Gleichung ab, so ergiebt sich durch die Grenzannäherung der Satz

$$(28)\qquad p(pm, n) + \sum (m + ns, np) = p(p+1)(m, n),$$

wo s ein beliebiges vollständiges Restsystem (mod. p) durchlaufen muss. Aus dem Satze (27) lassen sich auf verschiedene Weise allgemeinere Sätze ableiten, die für beliebige zusammengesetzte Zahlen p gelten, und aus jedem dieser Sätze entspringt wieder ein ähnlicher Satz über

das Symbol (m, n); doch dürfen wir auf diese, an sich sehr interessanten Eigenschaften der Function $\log\eta(\omega)$ und des Symbols (m, n) hier nicht eingehen.

Indem wir uns nun unserer Aufgabe zuwenden, benutzen wir die aus (2) und (4) folgende Darstellung

$$(29)\qquad \log\eta(\omega) = \frac{\omega\pi i}{12} + \sum \log(1 - 1^{\omega\nu}),$$

wo ν alle natürlichen Zahlen durchläuft, und die Logarithmen rechts zugleich mit 1^{ω} verschwinden; es wird daher

$$\log(1 - 1^{\omega\nu}) = -\sum \frac{1^{\omega\nu\mu}}{\mu},$$

wo auch μ alle natürlichen Zahlen durchläuft, und wenn man die Summation nach ν ausführt, so erhält man die Umformung von Jacobi (Fund. nova §. 39)

$$(30)\qquad \log\eta(\omega) = \frac{\omega\pi i}{12} - \sum \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1^{\omega\mu}}{1 - 1^{\omega\mu}},$$

mithin

$$\log\eta(\omega) - \log\eta(-\omega') = \frac{(\omega + \omega')\pi i}{12} - \sum \frac{a_\mu}{\mu},$$

wo zur Abkürzung

$$a_\mu = \frac{1}{1 - 1^{\omega\mu}} - \frac{1}{1 - 1^{-\omega'\mu}}$$

gesetzt ist.

Jetzt lassen wir die positive Ordinate y der Grösse $\omega = x + yi$ unendlich klein werden, während die Abscisse x von vornherein den constanten rationalen Werth $m:n$ besitzen soll, wodurch die obige, schärfere Bedingung offenbar erfüllt ist. Die ganzen Zahlen m, n dürfen im Folgenden einen beliebigen gemeinsamen Theiler haben, doch nehmen wir den Nenner n als positiv an. Setzen wir zur Abkürzung

$$1^x = 1^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{2m\pi i}{n}} = \theta;\quad 1^{yi} = e^{-2\pi y} = r,$$

so genügt die Constante θ der Bedingung $\theta^n = 1$, und r bedeutet einen variablen positiven echten Bruch, der wachsend sich dem Werthe 1 annähert; zugleich ist

$$a_\mu = \frac{1}{1 - \theta^\mu r^\mu} - \frac{1}{1 - \theta^{-\mu} r^\mu},$$

und es handelt sich um die Bestimmung des Grenzwerthes von

$$\log\eta(\omega) - \log\eta(-\omega') = \frac{m\pi i}{6n} - \sum \frac{a_\mu}{\mu}.$$

Durch Vereinigung von je zwei Zählern a_μ, welche den Zahlen $\mu = sn + \nu$ und $\mu = (s+1)n - \nu$ entsprechen, wo $0 < \nu < \frac{1}{2}n$, ergiebt sich nun leicht, dass der absolute Betrag der Summe

$$A_\mu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu$$

für alle Werthe von r einschliesslich $r = 1$ unterhalb einer von r und μ unabhängigen, endlichen Constanten bleibt, und hieraus folgt nach einem allgemeinen Satze*), dass die Reihe

$$\sum \frac{a_\mu}{\mu} = \sum A_\mu \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+1}\right),$$

wenn ihre Glieder nach wachsenden μ geordnet werden, auch noch für $r = 1$ convergirt und an dieser Stelle stetig ist; mit Rücksicht auf den Satz (26) ergiebt sich daher

$$\frac{(m,n)\pi i}{3n} = \sum \frac{b_\mu}{\mu},$$

wo

$$b_\mu = \lim a_\mu = 0 \text{ oder } = \frac{1}{1-\theta^\mu} - \frac{1}{1-\theta^{-\mu}},$$

je nachdem $\theta^\mu = 1$ ist oder nicht; durch Anwendung der Transformation

$$\frac{1}{1-\theta^\mu} = -\frac{1}{n}\sum \sigma\theta^{\mu\sigma},$$

wo σ die Werthe $1, 2 \ldots (n-1)$ durchläuft, erhält man aber die für alle μ geltende Darstellung

$$b_\mu = \frac{1}{n}\sum \sigma(\theta^{-\mu\sigma} - \theta^{\mu\sigma}),$$

aus welcher sich die Summe unserer unendlichen Reihe auch ohne Benutzung bestimmter Integrale sehr leicht ergiebt.

Ist z irgend ein reeller Werth, so wollen wir den von z um eine ganze Zahl abstehenden, zwischen $\pm\frac{1}{2}$ liegenden Werth der Deutlichkeit halber nicht mit (z), sondern mit $(\!(z)\!)$ bezeichnen; für solche Werthe von z aber, welche in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegen, soll nach Riemann (S. 242 und 457) die hier unstetige periodische Function $(\!(z)\!) = 0$, also gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden unendlich nahe benachbarten Werthen $(\!(z+0)\!) = -\frac{1}{2}$ und $(\!(z-0)\!) = +\frac{1}{2}$ gesetzt werden. Nach einem sehr bekannten

*) Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, Aufl. 2. §. 143.

Satze aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, der sich auch unmittelbar aus der Logarithmen-Reihe ergiebt, gilt dann stets die Darstellung

$$2\pi i(\!(z)\!) = \sum \frac{(-1)^\mu(1^{-z\mu} - 1^{z\mu})}{\mu},$$

wo μ die natürlichen Zahlen wachsend durchläuft, also auch

(31) $$2\pi i\left(\!\left(z - \frac{1}{2}\right)\!\right) = \sum \frac{1^{-z\mu} - 1^{z\mu}}{\mu}.$$

Hieraus folgt

$$\sum \frac{\theta^{-\mu\sigma} - \theta^{\mu\sigma}}{\mu} = 2\pi i\left(\!\left(\frac{\sigma m}{n} - \frac{1}{2}\right)\!\right),$$

mithin

$$\frac{(m,n)}{6n} = \sum \frac{\sigma}{n}\left(\!\left(\frac{\sigma m}{n} - \frac{1}{2}\right)\!\right);$$

da aber, wie sich durch Verwandlung von σ in $n - \sigma$ ergiebt,

$$\frac{1}{2}\sum \left(\!\left(\frac{\sigma m}{n} - \frac{1}{2}\right)\!\right) = 0$$

ist, so erhält man hieraus leicht durch Subtraction den folgenden Ausdruck

(32) $$(m,n) = 6n\sum \left(\!\left(\frac{s}{n} - \frac{1}{2}\right)\!\right)\left(\!\left(\frac{ms}{n} - \frac{1}{2}\right)\!\right),$$

wo n positiv angenommen ist, und s ein beliebiges vollständiges Restsystem (mod. n) durchläuft. Dieser Ausdruck für das Symbol (m, n) in Form einer endlichen Summe gestattet noch manche Umformungen und Vereinfachungen, auf welche wir unten noch näher eingehen wollen. Dass derselbe auch dann gilt, wenn die Zahlen m, n einen beliebigen (positiven) gemeinschaftlichen Theiler p haben, lässt sich mit Rücksicht auf (23) nachträglich mit Hülfe des auch sonst wichtigen Satzes

(33) $$\sum \left(\!\left(\frac{x+p'}{p} - \frac{1}{2}\right)\!\right) = \left(\!\left(x - \frac{1}{2}\right)\!\right)$$

leicht bestätigen, in welchem x eine beliebige reelle Zahl bedeutet und p' ein vollständiges Restsystem (mod. p) durchläuft.

Machen wir jetzt die Voraussetzung, dass m, n relative Primzahlen sind, und setzen wir zur Abkürzung

$$B = \frac{\pi i}{24n(n\omega - m)}, \quad C = \frac{1}{4}\log\left\{-(n\omega - m)^2\right\},$$

$$\mu = \frac{1-(-1)^m}{2}, \quad \nu = \frac{1-(-1)^n}{2},$$

so ist $(1-\mu)(1-\nu) = 0$, $m \equiv \mu$, $n \equiv \nu$ (mod. 2), und aus dem Annäherungs-Satze (25)

$$\log\eta(\omega) = \frac{m - 2(m,n)}{12n}\pi i - 2B - C$$

folgt gleichzeitig

$$\log \eta(2\omega) = \frac{m-(2m,n)}{6n}\pi i - (4-3\nu)B - C + \frac{\nu}{2}\log 2$$

$$\log \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{m-2(m,2n)}{24n}\pi i - (4-3\mu)B - C + \frac{1-\mu}{2}\log 2$$

$$\log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) = \frac{m+n-2(m+n,2n)}{24n}\pi i + (2-3\mu-3\nu)B - C + \frac{\mu+\nu-1}{2}\log 2;$$

die hier auftretenden Symbole sind zufolge (28) durch die stets geltende Relation

$$(34)\qquad 2(2m,n) + (m,2n) + (m+n,2n) = 6(m,n)$$

mit einander verbunden. Gleichzeitig ergeben sich hieraus zufolge (5) die Annäherungen

$$\begin{aligned} &\log k = \frac{3m+2(m+n,2n)-4(2m,n)}{6n}\pi i + (\mu+2\nu-2)(12B-2\log 2)\\ (35)\quad &\log k' = \frac{(m+n,2n)-(m,2n)}{3n}\pi i + (2\mu+\nu-2)(12B-2\log 2)\\ &\log \frac{2K}{\pi} = \frac{(m,n)-(m+n,2n)}{3n}\pi i + (1-\mu-\nu)(12B-2\log 2) - 2C. \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Sätze mit den acht Formeln des zweiten Fragmentes ergiebt, dass Riemann auf die Bestimmung der unendlich grossen reellen Bestandtheile, welche in den Gliedern mit B, C enthalten sind, weniger Werth gelegt hat; sie sind zum Theil ungenau dargestellt, zum Theil ganz weggelassen. Auch in den imaginären Bestandtheilen fanden sich (bei der dritten, vierten und fünften Formel) einige kleine Versehen, die sich aber ohne Zwang schon in der ersten Auflage berichtigen liessen, während die reellen Theile auch jetzt ungeändert abgedruckt werden. Dass die Riemann'schen Formeln in den imaginären Bestandtheilen mit den vorstehenden Sätzen (35) übereinstimmen, ist nicht überall auf den ersten Blick zu erkennen, und es würde zu weit führen, diese Uebereinstimmung hier vollständig nachzuweisen; doch wollen wir, weil der Gegenstand wichtig genug ist, zur Erleichterung noch folgende Bemerkungen hinzufügen.

Unter dem Nenner einer rationalen Zahl x verstehen wir immer die kleinste positive ganze Zahl n, für welche das Product nx ebenfalls eine ganze Zahl m wird, und diese nennen wir den Zähler von x. Es giebt dann immer unendlich viele Zahlen x', welche denselben Nenner n haben, und deren Zähler m' der Congruenz $mm' \equiv 1 \pmod{n}$ genügen, und jede solche Zahl x' soll ein Gefährte (socius) von x heissen (vergl. Art. 77 der Disqu. Arithm.). Nennt man zwei Zahlen x, y schlechthin congruent, wenn ihre Differenz eine ganze Zahl ist,

und bezeichnet dies durch $x \equiv y$, so entspricht jeder Classe von congruenten Zahlen x eine und nur eine Classe von Zahlen x', und wenn p eine ganze Zahl und zwar relative Primzahl zu n bedeutet, so ist $p(px')' \equiv x$. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$(36)\qquad D(x) = \frac{(m,n)}{u} = 6\sum\left(\left(\frac{s}{n}-\frac{1}{2}\right)\right)\left(\left(\frac{ms}{n}-\frac{1}{2}\right)\right),$$

so hat diese Function, wie sich aus dem vorstehenden Ausdrucke, oder auch aus (18), (15), (12), (34) leicht ergiebt, die Eigenschaften

$$(37)\qquad \begin{aligned} &D(x) = D(x+1) = -D(-x) = D(x'),\\ &D(2x) + D\left(\frac{x}{2}\right) + D\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3D(x). \end{aligned}$$

Ersetzt man die in den Riemann'schen Formeln bisweilen benutzte Function $E(x)$, welche die grösste in x enthaltene ganze Zahl bedeutet, durch den Ausdruck

$$(38)\qquad E(x) = x - \frac{1}{2} - \left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\right),$$

in welchem nur, wenn x selbst eine ganze Zahl ist, statt $E(x)$ wieder das arithmetische Mittel $x-\frac{1}{2}$ aus $E(x+0)$ und $E(x-0)$ zu nehmen ist, so treten in den meisten dieser Formeln zuletzt nur noch Functionen von der Form

$$(39)\qquad R(x) = \sum (\!(\nu x)\!), \quad S(x) = \sum\left(\left(\nu x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

auf, wo die Summationen sich auf alle diejenigen, nicht negativen ganzen Zahlen ν beziehen, welche kleiner als der halbe Nenner von x sind; diese Functionen haben die Eigenschaften

$$(40)\qquad \begin{aligned} &R(x) = R(x+1) = -R(-x)\\ &S(x) = S(x+1) = -S(-x)\\ &R(x) - S(x) = R(x') - S(x') = \frac{1}{2}h, \end{aligned}$$

wo h den Ueberschuss der Anzahl der positiven Glieder $(\!(\nu x)\!)$ über die der negativen bedeutet, und stehen in folgenden Beziehungen zu der Function $D(x)$. Allgemein ist nach (36)

$$(41)\qquad 6S(x') = D(2x) - 2D(x).$$

Hat die Zahl x einen geraden Nenner n, so ist

$$(42)\qquad \begin{aligned} &R(x) = -S(x) = \frac{1}{4}h = \frac{1}{3}D(x) - \frac{1}{6}D(2x),\\ &R\left(\frac{x}{2}\right) + R\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2R(x). \end{aligned}$$

Hat aber die Zahl x einen ungeraden Nenner n, so zerfallen die Zahlen y, welche der Bedingung $2y \equiv x$ genügen, also $\equiv \frac{1}{2} x$ oder $\equiv \frac{1}{2}(x+1)$ sind, in zwei Classen von Zahlen, von denen diejenigen, welche denselben Nenner n haben, mit x_1, die übrigen mit x_2 bezeichnet werden sollen; die letzteren haben den Nenner $2n$. Dann ist

$$R(x_2) = R(x) - S(x) = 2R(x) - S(2x) \tag{43}$$

und

$$\begin{aligned} D(x) &= 6R(x_2) - 4R(x) - 4R(x') \\ D(2x) &= 6R(x_2) - 8R(x) - 2R(x') \\ D(x_1) &= 6R(x_2) - 2R(x) - 8R(x') \\ D(x_2) &= 6R(x_2) - 2R(x) - 2R(x'), \end{aligned} \tag{44}$$

wodurch wieder die obige Bedingung

$$D(2x) + D(x_1) + D(x_2) = 3D(x) \tag{45}$$

erfüllt wird. Die Uebereinstimmung der drei ersten Darstellungen in (44) ergiebt sich aus den früheren Eigenschaften von $R(x)$ mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$x_1 \equiv x_2 + \tfrac{1}{2} \equiv (2x')'; \quad \left(x + \tfrac{1}{2}\right)' \equiv (4x)' + \tfrac{1}{2}; \quad (x_2)' \equiv (x')_2;$$

und umgekehrt ist

$$\begin{aligned} 6R(x) &= 3D(x) - 2D(2x) - D(x_1) = D(x_2) - D(2x) \\ 6R(x') &= 3D(x) - D(2x) - 2D(x_1) = D(x_2) - D(x_1) \\ 6R(x_2) &= 5D(x) - 2D(2x) - 2D(x_1) = 2D(x_2) - D(x). \end{aligned} \tag{46}$$

Die Herleitung dieser und zahlreicher anderer Relationen, welche alle in naher Beziehung zu der Theorie der quadratischen Reste stehen, müssen wir uns aber für eine andere Gelegenheit versparen.

XXIX.

Fragment aus der Analysis Situs.

Zwei Einstrecke werden derselben oder verschiedenen Gruppen zugerechnet, je nachdem das eine stetig in das andere übergehen kann oder nicht.

Je zwei Einstrecke, welche durch dasselbe Punktepaar begrenzt werden, bilden zusammen ein zusammenhängendes unbegrenztes Einstreck und zwar kann dies die ganze Begrenzung eines Zweistrecks bilden oder nicht, je nachdem sie derselben oder verschiedenen Gruppen angehören.

Ein inneres, zusammenhängendes, unbegrenztes Einstreck kann, einmal genommen, entweder zur ganzen Begrenzung eines innern Zweistrecks ausreichen oder nicht.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ m innere zusammenhängende unbegrenzte n-Strecke, welche, einmal genommen, weder einzeln noch in Verbindung ein inneres $(n+1)$-Streck vollständig begrenzen können, und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ m ebenso beschaffene n-Strecke, deren jedes mit einem oder einigen der a zusammengenommen ein inneres $(n+1)$-Streck vollständig begrenzen kann, so kann jedes innere zusammenhängende n-Streck, welches mit den a die ganze Begrenzung eines inneren $(n+1)$-Strecks bilden kann, dies auch mit den b und umgekehrt.

Bildet irgend ein unbegrenztes inneres n-Streck mit den a zusammengenommen die ganze Begrenzung eines inneren $(n+1)$-Strecks, so können in Folge der Voraussetzungen die a nach und nach eliminirt und durch die b ersetzt werden.

Ein n-Streck A heisst in ein anderes B veränderlich, wenn durch A und durch Stücke von B ein inneres $(n+1)$-Streck vollständig begrenzt werden kann.

Wenn im Innern einer stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit mit Hülfe von m festen, für sich nicht begrenzenden, n-Strecksstücken jedes unbegrenzte n-Streck begrenzend ist, so hat diese Mannigfaltigkeit einen $(m+1)$-fachen Zusammenhang $n$ter Dimension.

Eine stetig ausgedehnte zusammenhängende Mannigfaltigkeit heisst einfach zusammenhängend, wenn der Zusammenhang jeder Dimension einfach ist.

Ein Querschnitt einer begrenzten stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit A heisst jede im Innern derselben verlaufende zusammenhängende Mannigfaltigkeit B von weniger Dimensionen, deren Begrenzung ganz in die Begrenzung von A fällt.

Der Zusammenhang eines n-Strecks wird durch jeden einfach zusammenhängenden $(n-m)$-streckigen Querschnitt entweder in der $m$ten Dimension um 1 erniedrigt oder in der $(m-1)$ten Dimension um 1 erhöht.

Der Zusammenhang μter Dimension kann nur geändert werden, indem entweder unbegrenzte nicht begrenzende μ-Strecke in begrenzte oder begrenzende in nicht begrenzende verwandelt werden, ersteres in sofern zur Begrenzung eines μ-Strecks, letzteres in sofern zur Begrenzung eines $(\mu+1)$-Strecks neue Theile hinzukommen.

Abhängigkeit des Zusammenhangs der Begrenzung B einer stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit A von dem Zusammenhang derselben.

Die unbegrenzten innerhalb B nicht begrenzenden Vielstrecke zerfallen in solche, welche innerhalb A nicht begrenzen, und solche, welche innerhalb A begrenzen. Untersuchen wir zunächst, wie der Zusammenhang von B durch einen einfach zusammenhängenden Querschnitt von A geändert wird.

A sei von der $n$ten, der Querschnitt q von der $m$ten Dimension, a eine Hülle eines Punktes von q von der $(n-1-m)$ten Dimension, welche q nicht schneidet, p die Begrenzung von q.

Der Zusammenhang von A wird in der $(n-1-m)$ten Dimension um 1 vermehrt, wenn a innerhalb A' nicht begrenzt, in der $(n-m)$ten Dimension um 1 vermindert, wenn a innerhalb A' begrenzt,

$$A' - A = \begin{pmatrix} m+1 \\ +1 \end{pmatrix} \text{ wenn } a \text{ innerhalb } A' \text{ nicht begrenzt } (\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix} \text{ wenn } a \text{ innerhalb } A' \text{ begrenzt } (\beta)$$

. . . .*)

*) Es finden sich im Manuscript hier noch einige Zeichen, deren Bedeutung und Zusammenhang ich nicht entziffern konnte.

	Aenderung von A	Aenderung von B
I. a innerhalb A' nicht begrenzend a innerhalb B' nicht begrenzend folglich p innerhalb B begrenzend.	$\begin{pmatrix} m+1 \\ +1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m-1 & m \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$
II. a innerhalb A' begrenzend a innerhalb B' nicht begrenzend folglich p innerhalb B begrenzend.	$\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m-1 & m \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$
III. a innerhalb A' begrenzend a innerhalb B' begrenzend folglich p innerhalb B nicht begrenzend.	$\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m & m-1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Zwei Vielstreckstheile (Raumtheile) heissen zusammenhängend oder einem Stück gehörig, wenn sich von einem inneren Punkt des einen durch das Innere des Vielstrecks (Raumes) eine Linie nach einem inneren Punkt des andern ziehen lässt.

Lehrsätze aus der Theoria Situs.

(1.) Ein Vielstreck von weniger als $n-1$ Dimensionen kann nicht Theile eines n-Strecks von einander scheiden. Ein zusammenhängendes n-Streck hat entweder die Eigenschaft, durch jeden $(n-1)$-streckigen Querschnitt in Stücke zu zerfallen oder nicht. Den Inbegriff der ersteren bezeichnen wir durch a.

Wird ein unter a gehöriges n-Streck durch einen $(n-2)$-streckigen Querschnitt in ein anderes verwandelt, so ist dies zusammenhängend und gehört entweder zu a oder nicht.

Diejenigen n-Strecke a, welche durch jeden $(n-2)$-streckigen Querschnitt unter die Nicht-a versetzt werden, bezeichnen wir durch a_1.

(2.) Wird ein Vielstreck A durch einen μ-streckigen Querschnitt in ein anderes A' verwandelt, so bildet jeder Querschnitt von mehr als $\mu+1$ Dimensionen von A einen Querschnitt von A' und umgekehrt.

Wird eins der n-Strecke a_1 durch einen $(n-3)$-streckigen Querschnitt in ein anderes verwandelt, so gehört dies zu den $a(2)$, kann aber entweder zu den a_1 gehören oder nicht.

Diejenigen unter den a_1, welche durch jeden $(n-3)$-streckigen Querschnitt unter die Nicht-a_1 versetzt werden, bezeichnen wir durch a_2.

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man zuletzt eine Kategorie a_{n-2} von n-Strecken, welche diejenigen der a_{n-3} umfasst, die durch jeden einstreckigen (linearen) Querschnitt unter die Nicht-a_{n-3} versetzt werden. Diese n-Strecke a_{n-2} nennen wir einfach zusammenhängend. Die n-Strecke a_μ sind also einfach zusammenhängend, in sofern von Querschnitten von $n - \mu - 2$ oder weniger Dimensionen abgesehen wird und sollen bis zur $(n - \mu - 2)$ten Dimension einfach zusammenhängend genannt werden*).

Ein n-Streck, welches nicht bis zur $(n - 1)$ten Dimension einfach zusammenhängend ist, kann durch einen $(n - 1)$-streckigen Querschnitt zerlegt werden, ohne in Stücke zu zerfallen. Das entstandene n-Streck kann, wenn es nicht bis zur $(n - 1)$ten Dimension einfach zusammenhängend ist, durch einen ähnlichen Querschnitt weiter zerlegt werden, und offenbar lässt sich dies Verfahren fortsetzen, so lange man nicht zu einem bis zur $(n - 1)$ten Dimension einfach zusammenhängenden gelangt ist. Die Anzahl der Querschnitte, durch welche eine solche Zerlegung des n-Strecks in ein bis zur ersten Dimension einfach zusammenhängendes bewerkstelligt wird, kann zwar nach der Wahl derselben verschieden ausfallen, offenbar aber muss sie für eine Gattung von Zerlegungen am kleinsten werden**).

*) In Uebereinstimmung mit dem Folgenden sollten wohl die n-Strecke a_μ als zusammenhängend bis zur $(n - \mu - 1)$ten Dimension bezeichnet sein.

**) Zu erwähnen ist zu diesem Fragmente in Aufsatz von Betti (Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, Annali di Matematica ser. 2, vol. IV, 1871) der mir zur Zeit des Erscheinens der ersten Auflage von Riemann's Werken noch nicht bekannt war, und der verwandte Gedanken und Ausführungen enthält.

W.

XXX.

Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihe.*)

Es kann die Untersuchung der Convergenz einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern immer reducirt werden auf die Untersuchung eines bestimmten Integrals nach folgendem Satz:

Es sei

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

eine Reihe mit positiven abnehmenden Gliedern, ferner $f(x)$ eine mit wachsendem x abnehmende Function, so ist:

$$f(\alpha) > \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)\,dx > f(\alpha + 1)$$

und mithin:

$$f(0) + f(1) + \cdots + f(n) > \int_0^{n+1} f(x)\,dx > f(1) + f(2) + \cdots + f(n+1)$$

Die Reihe

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots$$

convergirt und divergirt daher gleichzeitig mit dem Integral

$$\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Ist nun $f(n)$ positiv und $a_n < f(n)$, so wird die Reihe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

ebenfalls convergiren, sobald jenes Integral convergirt. Daraus folgt der Satz:

Ist $a_n < f(x)$, sobald $n \geqq x$ ist, so convergirt die Reihe Σa_n, sobald das Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$ convergirt.

*) Diese und die folgende Abhandlung sind einer Vorlesung entnommen, welche Riemann in den Jahren 1861 und 1862 gehalten hat. Der Bearbeitung liegt ein von G. Roch geführtes Heft zu Grunde.

Setzt man nun $x = \varphi(y)$, $f(x) = f(\varphi(y)) = F(y)$, so erhält man

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int F(y)\,\varphi'(y)\,dy.$$

Wenn nun die beiden Variablen x, y gleichzeitig ab- und zunehmen (und zwar bis unendlich), so wird nach den gemachten Voraussetzungen mit wachsendem y $F(y)$ abnehmen, $\varphi(y)$ wachsen. Darnach gehen die oben gefundenen Bedingungen der Convergenz in folgende über:

Die Reihe Σa_n convergirt, wenn für $n \geq \varphi(y)$ $a_n < F(y)$, oder, was dasselbe ist, wenn für $a_n \geq F(y)$ $n < \varphi(y)$ ist und das Integral

$$\int_b^\infty F(y)\,\varphi'(y)\,dy$$

convergirt.

Ist nun $a_n > F(y)$, so sind es auch $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Ist also $a_{n+1} < F(y)$, so ist n die Anzahl der Reihenglieder, welche grösser als $F(y)$ sind. Daher lässt sich der Satz auch so ausdrücken:

Sind $F(y)$, $\varphi(y)$ zwei Functionen, von denen die erste mit wachsendem y abnimmt, die zweite (ins Unendliche) zunimmt, und ist die Anzahl der Glieder einer Reihe mit positiven Gliedern, die gleich oder grösser als $F(y)$ sind, kleiner als $\varphi(y)$, so convergirt die Reihe, wenn das Integral $\int_b^\infty F(y)\,\varphi'(y)\,dy$ convergirt.

Es sollen nun solche Functionen für die p-fach unendliche ϑ-Reihe

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{m}\right)^p e^{\sum_1^p{}_{\iota} \sum_1^p{}_{\iota'} a_{\iota,\iota'} m_\iota m_{\iota'} + 2\sum_1^p{}_{\iota} m_\iota v_\iota}$$

aufgesucht werden, in der wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, zunächst voraussetzen können, die Grössen $a_{\iota,\iota'}$ und v_ι seien reell.

Das allgemeine Glied dieser Reihe:

$$e^{\sum_1^p{}_{\iota} \sum_1^p{}_{\iota'} a_{\iota,\iota'} m_\iota m_{\iota'} + 2\sum_1^p{}_{\iota} m_\iota v_\iota}$$

ist grösser als e^{-h^2}, wenn

$$-\sum_1^p{}_{\iota} \sum_1^p{}_{\iota'} a_{\iota,\iota'} m_\iota m_{\iota'} - 2\sum_1^p{}_{\iota} m_\iota v_\iota < h^2.$$

Für unsern Zweck kommt es also darauf an, festzustellen, wie viele Combinationen der ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_p$ dieser Ungleichung genügen.

Zu dem Ende betrachten wir zunächst das mehrfache bestimmte Integral

$$A = \int\int\cdots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_p,$$

dessen Begrenzung gegeben ist durch die Ungleichung

$$-\sum_1^p{}_{\iota} \sum_1^p{}_{\iota'} a_{\iota,\iota'} x_\iota x_{\iota'} < 1.$$

Das Integral wird immer, und nur dann einen endlichen Werth haben, wenn die homogene Function zweiten Grades

$$-\sum_1^p{}_{\iota} \sum_1^p{}_{\iota'} a_{\iota,\iota'} x_\iota x_{\iota'}$$

in eine Summe von p positiven Quadraten zerlegt werden kann. Denn ist

$$-\sum\sum a_{\iota,\iota'} x_\iota x_{\iota'} = t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_p^2,$$

so ist die Begrenzung des Integrals bestimmt durch die Ungleichung

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_p^2 < 1$$

und das Integral A wird:

$$A = \int\int\cdots\int\left(\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\cdots\frac{\partial x_p}{\partial t_p}\right) dt_1\,dt_2\ldots dt_p.$$

Die Functionaldeterminante ist eine endliche Constante und von den Variablen t kann keine absolut grösser als 1 werden.

Wären andererseits die t^2 nicht alle positiv, oder würden einige in der transformirten Form fehlen, so würden im Integral A auch unendliche Werthe von t vorkommen und somit A selbst unendlich werden.

Dieses Ergebniss wird in Nichts geändert, wenn wir statt der oben angenommenen Begrenzung des Integrals A die folgende nehmen:

$$-\sum_\iota \sum_{\iota'} a_{\iota,\iota'} x_\iota x_{\iota'} - 2\sum_\iota \alpha_\iota x_\iota < 1,$$

wenn die α_ι beliebige reelle Grössen sind. Betrachten wir nun die Ungleichung

$$-\sum_\iota \sum_{\iota'} a_{\iota,\iota'} m_\iota m_{\iota'} - 2\sum_\iota v_\iota m_\iota < h^2,$$

oder, indem wir $\frac{m_\iota}{h} = x_\iota$ setzen,

$$-\sum_\iota \sum_{\iota'} a_{\iota,\iota'} x_\iota x_{\iota'} - 2\sum_\iota \frac{v_\iota}{h} x_\iota < 1,$$

so folgt zunächst, dass für jedes endliche h nur eine endliche Anzahl von Combinationen der ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_p$ dieser Ungleichung genügt, denn die x_ι müssen alle innerhalb gewisser endlicher Grenzen bleiben, und innerhalb solcher Grenzen giebt es nur eine endliche Anzahl rationaler Zahlen mit gegebenem Nenner h.

Es sei also $\mathfrak{Z}_h$ die Anzahl der zulässigen Combinationen der Zahlen m.

Betrachtet man nun die über alle diese Combinationen erstreckte Summe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_p} \int\limits_{\frac{m_1}{h}}^{\frac{m_1+1}{h}} dx_1 \int\limits_{\frac{m_2}{h}}^{\frac{m_2+1}{h}} dx_2 \ldots \int\limits_{\frac{m_p}{h}}^{\frac{m_p+1}{h}} dx_p = \frac{\mathfrak{Z}_h}{h^p},$$

so ist dieselbe für jedes endliche h endlich und nähert sich mit unendlich wachsendem h der Grenze A, von der wir nachgewiesen haben, dass sie gleichfalls endlich ist, falls die Function $-\sum_\iota \sum_{\iota'} a_{\iota,\iota'} x_\iota x_{\iota'}$ durch p positive Quadrate darstellbar ist. Setzt man diese Summe daher gleich $A+k$, so ist k eine endliche Grösse, die mit unendlich wachsendem h gegen 0 convergirt. Es ist also

$$\mathfrak{Z}_h = (A+k)h^p,$$

und dies ist die Anzahl n der Glieder der Theta-Reihe, welche $> e^{-h^2}$ sind. Es ist sonach

$$n < (A+K)h^p,$$

worin K eine Constante ist, der man, wenn man nur das h, von dem man ausgeht, gross genug annimmt, einen beliebig kleinen Werth ertheilen kann. Die Functionen $F(y)$, $\varphi(y)$ können also folgendermassen angenommen werden

$$F(y) = e^{-y^2}, \quad \varphi(y) = (A+K)y^p$$

und da das Integral

$$\int_0^\infty e^{-y^2}(A+K)py^{p-1}\,dy$$

convergirt, so gilt das gleiche von der ϑ-Reihe unter der angegebenen Voraussetzung. Hieraus schliesst man: Die p-fach unendliche Theta-Reihe convergirt für alle Werthe der Variablen $v_1, v_2, \ldots, v_p$, falls der reelle Theil der quadratischen Form im Exponenten wesentlich negativ ist.

XXXI.

Zur Theorie der Abel'schen Functionen.

Es sei $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ ein Grössensystem, welches die Eigenschaft hat, dass

$$\vartheta(e_1, e_2, \ldots, e_p) = 0$$

ist. Nach Art. 23 der Abhandlung über die Theorie der Abel'schen Functionen (S. 134) lässt sich unter dieser Voraussetzung die Congruenz befriedigen

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p) \equiv \left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv \left(-\sum_p^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_p^{2p-2} \alpha_p^{(\nu)}\right)$$

durch gewisse Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2p-2}$, welche durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind. Sind daher u_μ und u'_μ die Werthe, welche die Integrale erster Gattung u_μ für zwei unbestimmte Werthsysteme s, z und s_1, z_1 annehmen, so verschwindet die Function

$$\vartheta(u_1 - u'_1 - e_1, \ldots, u_p - u'_p - e_p)$$

als Function von s, z betrachtet für $(s, z) = (s_1, z_1)$ und in den $p-1$ Punkten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$, als Function von s_1, z_1 betrachtet für $(s_1, z_1) = (s, z)$ und in den Punkten $\eta_p, \ldots, \eta_{2p-2}$. Ist also $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ ein Grössensystem von denselben Eigenschaften wie $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$, so wird die Function

$$(1) \qquad \frac{\vartheta(u_1 - u'_1 - e_1, \ldots)\,\vartheta(u_1 - u'_1 + e_1, \ldots)}{\vartheta(u_1 - u'_1 - f_1, \ldots)\,\vartheta(u_1 - u'_1 + f_1, \ldots)},$$

die sowohl in Bezug auf s, z als in Bezug auf s_1, z_1 rational ist, in je einem durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften Punktsystem unendlich gross und unendlich klein von der ersten Ordnung werden, und wird daher darstellbar sein in der Form

$$(2) \qquad \frac{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z) \quad \sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)}{\sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s, z) \quad \sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)},$$

worin die Coefficienten b, c von s, z und s_1, z_1 unabhängig sind.

Wenn nun die Grössensysteme e, f die Eigenschaft haben, dass

$$
(3) \qquad \begin{aligned}(e_1, e_2, .., e_p) &\equiv (-e_1, -e_2, .., -e_p)\\ (f_1, f_2, .., f_p) &\equiv (-f_1, -f_2, .., -f_p)\end{aligned}
$$

ist, so fallen die Punkte, in denen die Function (1) oder (2) Null resp. unendlich wird, paarweise zusammen und wir erhalten eine Function, welche nur in $p-1$ Punkten unendlich gross und unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Hiernach ist die Function

$$
\sqrt{\frac{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s,z) \quad \sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s_1,z_1)}{\sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s,z) \quad \sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s_1,z_1)}}
$$

wie die Fläche T' verzweigt und nimmt beim Ueberschreiten der Querschnitte Factoren an, welche $= \pm 1$ sind. Die auf diese Weise bestimmten Functionen

$$
\sqrt{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z)},
$$

welche in $p-1$ Punkten unendlich klein in der ersten Ordnung werden, heissen Abel'sche Functionen. Sie entstehen aus den Functionen φ durch paarweises Zusammenfallen der 0-Punkte und Wurzelziehen. Die Anzahl dieser Functionen ist im Allgemeinen eine endliche.

Es verlangt nämlich die Congruenz (3), dass die Grössensysteme e, f von der Form seien

$$
\left(\varepsilon_1' \frac{\pi i}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 a_{1,1} + \cdots + \tfrac{1}{2}\varepsilon_p a_{p,1}, \ldots, \varepsilon_p' \frac{\pi i}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 a_{1,p} + \cdots + \tfrac{1}{2}\varepsilon_p a_{p,p}\right),
$$

worin die $\varepsilon, \varepsilon'$ ganze Zahlen bedeuten, welche auf ihre kleinsten Reste (modulo 2) reducirt werden können. Die Bedingung $\vartheta(e_1, e_2, .., e_p) = 0$ wird durch ein solches Grössensystem im Allgemeinen nur erfüllt, wenn

$$
(4) \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_1' + \varepsilon_2 \varepsilon_2' + \cdots + \varepsilon_p \varepsilon_p' \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)
$$

ist. Solcher Zahlensysteme $\varepsilon, \varepsilon'$ existiren aber $2^{p-1}(2^p - 1)$, und so gross ist daher auch im Allgemeinen die Zahl der Abel'schen Functionen. Der Zahlencomplex

$$
\begin{pmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2, & .., & \varepsilon_p\\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & .., & \varepsilon_p'\end{pmatrix}.
$$

heisst die Charakteristik der Function

$$
\sqrt{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z)}
$$

und wird mit

$$
\left(\sqrt{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z)}\right)
$$

bezeichnet. Man nennt die Charakteristik ungerade, wenn die Congruenz (4) erfüllt ist, sonst gerade. Die Anzahl der geraden Charakteristiken beträgt $2^{p-1}(2^p + 1)$ und diesen entsprechen im Allgemeinen keine Abel'schen Functionen.

Unter der Summe zweier Charakteristiken versteht man die Charakteristik, welche durch Addition entsprechender Elemente entsteht, wonach die Elemente immer auf 0 oder 1 reducirt werden können. Summe und Differenz zweier Charakteristiken sind daher identisch.

Es soll nun zunächst die Gleichung $F(s, z) = 0$ durch Einführung neuer Variablen in eine symmetrische Form gebracht werden. Ist $p \geqq 3$, so existiren mindestens drei von einander linear unabhängige Functionen φ, und man kann daher die Gleichung $F(s, z) = 0$ umformen durch Einführung der Variablen

$$
\xi = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad \eta = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}
$$

(falls zwischen diesen keine identische Gleichung besteht, was im Allgemeinen nicht der Fall ist).

Genügen die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nicht besonderen Bedingungen, so gehören zu jedem Werth von ξ $2p-2$ Werthe von η und umgekehrt, da jede der beiden Functionen

$$
\varphi_1 - \xi\varphi_3, \; \varphi_2 - \eta\varphi_3
$$

für ein constantes ξ, resp. η in $2p-2$ Punkten verschwindet. Die resultirende Gleichung $F(\xi, \eta) = 0$ ist also in Bezug auf jede der Variablen vom Grade $2p-2$. Da ausserdem dieser Grad erhalten bleiben muss, wenn für ξ, η irgend eine lineare Substitution gemacht wird, so kann in dieser Gleichung kein Glied in Bezug auf ξ, η zusammengenommen die $(2p-2)$te Dimension übersteigen. Die übrigen Functionen φ werden, durch ξ, η ausgedrückt, in Functionen übergehen, in denen kein Glied die $(2p-5)$te Dimension überschreiten kann, wie man daraus erkennt, dass $\int \frac{\varphi}{\frac{\partial F}{\partial \xi}} d\eta$ endlich bleiben muss für unendliche Werthe von ξ und η.

Die Anzahl der Constanten, die in einer solchen Function $(2p-5)$ten Grades vorkommen, ist $= (p-2)(2p-3)$. Bestimmt man r von ihnen so, dass die Functionen φ für die r Werthepaare (γ, δ), wo $\frac{\partial F}{\partial \xi}, \frac{\partial F}{\partial \eta}$ zugleich verschwinden, ebenfalls 0 werden, so müssen p Constanten übrig bleiben, da es p linear unabhängige Integrale erster Gattung giebt. Es ist demnach

$$(p-2)(2p-3)=p+r$$

und folglich:

$$r=2(p-1)(p-3).$$

Zu demselben Ergebniss gelangt man auf folgendem Wege: Die Function $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ wird in $(2p-2)(2p-3)$ Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung, und diese Zahl ist $= \mathrm{w} + 2r$, wenn w die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte ist. Andererseits ist (Theorie der Abel'schen Functionen Art. 7, S. 113)

$$\mathrm{w}=2(n+p-1),\quad n=2p-2,$$
$$\mathrm{w}=2(3p-3),$$

mithin:

$$r=(p-1)(2p-3)-\tfrac{1}{2}\mathrm{w}=2(p-1)(p-3).$$

Werden nun sämmtliche Functionen φ durch ξ, η ausgedrückt, so müssen die beiden Gleichungen:

$$\xi=\frac{\varphi_1}{\varphi_3},\quad \eta=\frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

identisch werden, also:

$$\varphi_1=\xi\varphi_3,\quad \varphi_2=\eta\varphi_3.$$

Es muss mithin eine Function φ_3 geben, die in Bezug auf ξ, η nur von der $(2p-6)$ten Dimension ist. Diese Function φ wird also für $(2p-2)(2p-6)=2r$ der Gleichung $F=0$ genügende Werthepaare von ξ, η verschwinden und wird demnach nur in den r Punktpaaren (γ, δ) gleich Null werden können.

Endlich geht durch Einführung der neuen Variablen $\xi=\frac{x}{z}$, $\eta=\frac{y}{z}$ und Multiplication mit z^{2p-2} die Gleichung $F=0$ in eine homogene Gleichung vom Grade $2p-2$ für die drei Veränderlichen x, y, z über:

$$\overset{2p-2}{F}(x, y, z)=0.$$

Wie wir gesehen haben, ist unter den Functionen φ eine von der $(2p-6)$ten Ordnung in Bezug auf ξ, η; bezeichnen wir diese mit ψ, so ist $\frac{\varphi}{\psi}$ eine für endliche ξ, η immer endliche Function, die für unendliche ξ und η unendlich von der ersten Ordnung wird. Umgekehrt kann jede Function, die diese Eigenschaften hat, in der Form $\frac{\varphi}{\psi}$ dargestellt werden. (Theorie der Abel'schen Functionen Art. 10, S. 118.)

Functionen, die für endliche Werthe von ξ, η endlich bleiben und für unendliche ξ, η unendlich in der zweiten Ordnung werden, sind in der Form darstellbar

$$\frac{f(\xi,\eta)}{\psi},$$

wo $f(\xi, \eta)$ eine ganze Function von der $(2p-4)$ten Dimension in ξ, η ist, die für die r Werthepaare γ, δ verschwinden muss. Die Function $f(\xi, \eta)$ enthält

$$(p-1)(2p-3)-r=3p-3$$

Constanten und kann daher (Abel'sche Functionen Art. 5, S. 107) jede Function von diesen Eigenschaften darstellen. Die Function $f(\xi, \eta)$ wird, ausser in den r Werthepaaren γ, δ, in $4p-4$ Punkten unendlich klein in der ersten Ordnung.

Zu diesen Functionen gehört jede Function zweiten Grades von den $p-1$ Variablen $\frac{\varphi}{\psi}$; eine solche enthält $\frac{p\cdot p+1}{2}$ Constanten. Da aber die allgemeine Function $\frac{f}{\psi}$ nur $3p-3$ Constanten enthält, so müssen zwischen den $p-1$ Variablen $\frac{\varphi}{\psi}$

$$\frac{p\cdot p+1}{2}-3p+3=\frac{p-2\,.\,p-3}{2}$$

Gleichungen zweiten Grades bestehen, oder, was dasselbe ist, zwischen den p Functionen φ müssen $\frac{p-2\,.\,p-3}{2}$ homogene Gleichungen zweiten Grades bestehen.*)

Für den Fall $p=3$ ist die Gleichung $F(\xi,\eta)=0$ oder $F(x,y,z)=0$ vom vierten Grad; es ist $r=0$ und die Function ψ reducirt sich auf eine Constante. Keine der Functionen φ kann den ersten Grad übersteigen und der allgemeine Ausdruck dieser Functionen ist

$$\varphi=c\xi+c'\eta+c'',$$

oder, wo es nur auf die Verhältnisse solcher Functionen ankommt,

$$\varphi=cx+c'y+c''z,$$

worin c, c', c'' Constanten sind. Jede Function φ wird in vier Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung und es giebt 28 solcher Functionen, deren Nullpunkte paarweise zusammenfallen. Die Quadratwurzeln aus diesen sind die Abel'schen Functionen und wir haben zu untersuchen, wie sich die Charakteristiken diesen 28 Functionen zuordnen.

*) Dieser Abschnitt ist erst in der neuen Auflage hinzugekommen.

Führen wir als Variable x, y, z drei solche Functionen φ ein, welche zweimal unendlich klein in der zweiten Ordnung werden, so dass $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ Abel'sche Functionen sind, so hat die daraus hervorgehende Gleichung $F(x,y,z) = 0$ die Eigenschaft, in ein vollständiges Quadrat überzugehen, wenn x oder y oder $z = 0$ gesetzt werden. Es sei daher

$$\begin{aligned} &\text{für } x = 0: F = (y - \alpha z)^2 (y - \alpha' z)^2 \\ &\text{für } y = 0: F = (z - \beta x)^2 (z - \beta' x)^2 \\ &\text{für } z = 0: F = (x - \gamma y)^2 (x - \gamma' y)^2. \end{aligned}$$

Sind nun a, b, c die Coefficienten von x^4, y^4, z^4 in $F(x, y, z)$, so ist:

$$\alpha\alpha' = \pm\sqrt{\frac{c}{b}}, \quad \beta\beta' = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}, \quad \gamma\gamma' = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

und folglich:

(5) $$\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma' = \pm 1.$$

Kennt man daher die Grössen $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$, so kann man alle Glieder der Function $F(x, y, z)$ bilden, welche nicht das Product xyz enthalten, und F enthält ausserdem nur noch ein Glied $xyzt$, worin t eine lineare homogene Function von x, y, z ist.

Wenn nun in der Gleichung (5) das obere Zeichen gilt, so kann man den ersteren Theil von F immer darstellen als das Quadrat einer homogenen Function zweiten Grades f von x, y, z. Denn setzen wir

$$f = a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{2,3}yz + 2a_{3,1}zx + 2a_{1,2}xy,$$

so ergeben sich zur Bestimmung der Coefficienten $a_{i,k}$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' &= \frac{a_{3,3}}{a_{2,2}}, & \alpha + \alpha' &= -2\frac{a_{2,3}}{a_{2,2}}, \\ \beta\beta' &= \frac{a_{1,1}}{a_{3,3}}, & \beta + \beta' &= -2\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}, \\ \gamma\gamma' &= \frac{a_{2,2}}{a_{1,1}}, & \gamma + \gamma' &= -2\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}, \end{aligned}$$

welche immer befriedigt werden können, wenn $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma' = 1$ ist. Unter dieser Voraussetzung geht also $F = 0$ über in

(6) $$f^2 - xyzt = 0.$$

Setzt man $t = 0$, so erhält man aus $f^2 = 0$ wieder zwei Paare einander gleicher Wurzeln und demnach ist auch $\sqrt{t}$ eine Abel'sche Function und zwar eine solche, dass $\sqrt{xyzt}$ eine rationale Function von x,y,z ist. Sind daher (a) (b) (c) (d) die Charakteristiken von $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}, \sqrt{t}$, so muss

$$(a + b + c + d) = \binom{0\,0\,0}{0\,0\,0}$$

oder

$$(d) = (a + b + c)$$

sein. Es muss also die Summe der Charakteristiken der drei Functionen $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ eine ungerade Charakteristik sein.

Ist umgekehrt diese Voraussetzung erfüllt, und ist $\sqrt{t}$ diejenige Abel'sche Function, die zu der Charakteristik $(a + b + c)$ gehört, so ist $\sqrt{xyzt}$ eine Function, die beim Ueberschreiten der Querschnitte sich stetig ändert und mithin rational durch x, y, z darstellbar ist, diese Function kann aber den zweiten Grad nicht übersteigen, und daher ergiebt sich auch immer unter dieser Voraussetzung eine Gleichung von der Form (6). Diese Gleichung kann nicht identisch sein, wenn $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}, \sqrt{t}$ verschiedene Abel'sche Functionen sind.

Da es 28 Abel'sche Functionen giebt, so kann die Gleichung $F = 0$ auf mehrere Arten in die Form (6) gebracht werden. Wir wollen zunächst untersuchen, ob das Paar Abel'scher Functionen $\sqrt{z}, \sqrt{t}$ durch ein anderes Paar $\sqrt{p}, \sqrt{q}$ ersetzt werden kann.

Es möge also $F = 0$ durch Einführung von x, y, p, q in die Form gebracht werden:

$$\psi^2 - xypq = 0;$$

dann muss, wenn ein constanter Factor passend bestimmt wird, die identische Gleichung bestehen:

$$f^2 - xyzt = \psi^2 - xypq$$

oder:

$$(f - \psi)(f + \psi) = xy(zt - pq).$$

Es muss demnach $f - \psi$ oder $f + \psi$ durch xy theilbar sein und kann sich, da beide vom zweiten Grade sind, nur um einen constanten Factor davon unterscheiden. Sei demnach

(7) $$\psi - f = \alpha xy, \quad \alpha(\psi + f) = -zt + pq,$$

woraus:

(8) $$\psi = \alpha xy + f, \quad 2\alpha f + \alpha^2 xy + zt = pq.$$

Die linke Seite dieser letzteren Gleichung muss also in zwei lineare Factoren zerfallen; denken wir uns diese Function entwickelt in der Form

$$a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{2,3}yz + 2a_{3,1}zx + 2a_{1,2}xy,$$

so sind die Coefficienten $a_{i,k}$ Functionen zweiten Grades von α; da aber die Determinante

$$\sum \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$$

verschwinden muss, so erhält man eine Gleichung 6ten Grades für α, von der leicht einzusehen ist, dass sie die Wurzeln $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ hat, entsprechend den beiden Zerlegungen zt und xy.

Es bleibt also eine Gleichung vierten Grades übrig, deren Wurzeln vier Functionenpaare p, q liefern, welche die verlangte Eigenschaft haben.

Aus der zweiten Gleichung (8) folgt noch mit Hülfe von (6)

$$pqzt = z^2t^2 + 2\alpha fzt + \alpha^2 f^2 = (zt + \alpha f)^2,$$

so dass man die gewünschte Form der Gleichung $F = 0$ auch durch die Functionen p, q, z, t herstellen kann. Gehen wir demnach von zwei beliebigen Abel'schen Functionen $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ aus, so erhalten wir 6 Paare solcher Functionen:

$$\sqrt{xy},\ \sqrt{zt},\ \sqrt{p_1q_1},\ \sqrt{p_2q_2},\ \sqrt{p_3q_3},\ \sqrt{p_4q_4},$$

welche die Eigenschaft haben, dass durch je zwei derselben die Gleichung $F = 0$ auf die Form gebracht wird:

$$f^2 - xyzt = 0.$$

Diese 6 Functionen müssen beim Ueberschreiten der Querschnitte dieselben Factoren annehmen, da sonst nicht das Product von zweien derselben rational sein könnte. Solche 6 Producte von je zwei Abel-schen Functionen nennen wir zu einer Gruppe gehörig. Da die Factorensysteme an den Querschnitten für Producte von Abel'schen Functionen durch die Summen der Charakteristiken bestimmt sind, so folgt, dass die Charakteristiken aller Paare einer Gruppe dieselbe Summe ergeben müssen, welche die Gruppencharakteristik heisst.

Aus den Gleichungen (8) und (6) ergiebt sich noch

$$2f = \frac{pq - zt}{\alpha} - \alpha xy = 2\sqrt{xy}\,\sqrt{zt},$$

woraus:

$$pq = \alpha^2 xy + 2\alpha\sqrt{xy}\,\sqrt{zt} + zt$$

oder:

(9)
$$\sqrt{pq} = \sqrt{zt} + \alpha\sqrt{xy},$$

woraus man den Schluss zieht, dass jedes Product einer Gruppe linear durch zwei Producte derselben Gruppe ausgedrückt werden kann.

Ordnet man sämmtliche 28 Abel'sche Functionen zu Paaren, so erhält man $\frac{28.27}{2} = 6.63$ Paare, welche zu 6 und 6 in 63 Gruppen zerfallen. Jede der von $\begin{pmatrix}0\,0\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix}$ verschiedenen 63 Charakteristiken kann Gruppencharakteristik sein.

Um die Charakteristiken der 6 Paare einer Gruppe zu erhalten, hat man daher die betreffende Gruppencharakteristik auf 6 Arten in

zwei ungerade Charakteristiken zu zerlegen. Als Beispiel hierfür diene die Gruppe mit der Gruppencharakteristik $\begin{pmatrix}0\,0\,1\\0\,0\,0\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0\,0\,1\\0\,0\,0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\,0\,1\\1\,0\,0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\,0\,0\\1\,0\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\,1\,1\\0\,1\,0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,1\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\,1\,1\\1\,0\,0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\,1\,0\\1\,0\,0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\,1\,1\\0\,1\,0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\,1\,0\\0\,1\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\,1\,1\\1\,1\,0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\,1\,0\\1\,1\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\,0\,1\\1\,1\,0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\,0\,0\\1\,1\,0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wenn drei Paare Abel'scher Functionen bekannt sind, so erhält man die übrigen Paare derselben Gruppe durch Auflösung einer cubischen Gleichung, und man kann mit ihrer Hülfe sämmtliche übrigen Abel'schen Functionen mit ihren Charakteristiken bestimmen.

Um dies durchzuführen, nehmen wir an, es seien $\sqrt{x\xi}, \sqrt{y\eta}, \sqrt{z\zeta}$ drei Paare einer Gruppe, so dass ξ, η, ζ als lineare homogene Functionen von x, y, z gegeben sind.

Durch passende Bestimmung constanter Factoren kann die Gleichung (9) in der Form angenommen werden:

(10)
$$\sqrt{x\xi} + \sqrt{y\eta} + \sqrt{z\zeta} = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$z\zeta = x\xi + y\eta + 2\sqrt{x\xi y\eta}$$

oder

(11)
$$4x\xi y\eta = (z\zeta - x\xi - y\eta)^2,$$

so dass

(12)
$$f = z\zeta - x\xi - y\eta$$

wird.

Um alle in die Gruppe $\sqrt{x\xi}, \sqrt{y\eta}$ gehörigen Paare zu finden, hat man nach dem Obigen eine biquadratische Gleichung zu lösen, von der aber eine Wurzel, dem Paare $\sqrt{z\zeta}$ entsprechend, bereits bekannt ist. Die Rechnung wird daher symmetrischer, wenn man zunächst die Paare der Gruppe $\sqrt{x\eta}$, in welche auch das Paar $\sqrt{y\xi}$ gehört, aufsucht.

Ist $\sqrt{pq}$ ein weiteres unbekanntes Paar dieser Gruppe, so hat man neben der Gleichung (11) eine mit ihr identische:

(13)
$$4y\xi pq = \varphi^2,$$

wenn (nach 8)

$$\varphi = f + 2\lambda y\xi,$$

worin λ eine noch unbekannte Constante bedeutet. Hieraus erhält man mittelst (11) und (12)

$$\varphi^2 = 4\lambda y\xi\left(x\xi + y\eta - z\zeta + \frac{x\eta}{\lambda} + \lambda y\xi\right),$$

und demnach ist (von dem Factor λ abgesehen)

$$\begin{aligned}pq &= x\xi + y\eta - z\zeta + \frac{x\eta}{\lambda} + \lambda y\xi\\ &= \left(\xi + \frac{\eta}{\lambda}\right)(x + \lambda y) - z\zeta;\end{aligned}$$

für $x + \lambda y = 0$ und $z = 0$ muss eine der beiden Functionen p, q, etwa p verschwinden, woraus, wenn μ einen weiteren unbekannten Coefficienten bedeutet, folgt:

$$(14)\qquad \begin{aligned} p &= x + \lambda y + \mu z, \\ pq &= p\left(\xi + \frac{\eta}{\lambda}\right) - \mu z\left(\xi + \frac{\eta}{\lambda} + \frac{\zeta}{\mu}\right), \end{aligned}$$

und hieraus weiter, da p und z nicht identisch sind,

$$(15)\qquad \xi + \frac{\eta}{\lambda} + \frac{\zeta}{\mu} = -a^2 p,$$

also mit Hülfe von (13):

$$ax + a\lambda y + a\mu z + \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{\lambda a} + \frac{\zeta}{\mu a} = 0,$$

oder indem man λa, μa durch b, c ersetzt:

$$(16)\qquad ax + by + cz + \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c} = 0,$$

wonach man, da es auf einen constanten Factor bei p und q nicht ankommt, erhält:

$$p = ax + by + cz = -\left(\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c}\right),$$

$$q = \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + cz = -\left(ax + by + \frac{\zeta}{c}\right).$$

Da es vier Paare p, q giebt, so müssen sich vier Systeme a, b, c bestimmen lassen.

Um hierzu zu gelangen berücksichtige man, dass zwischen den 6 Functionen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ drei homogene lineare Gleichungen bestehen, die wir durch $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ bezeichnen. Wir leiten hieraus mit den unbestimmten Coefficienten l_1, l_2, l_3 eine lineare Combination her:

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 = \alpha x + \beta y + \gamma z + \alpha' \xi + \beta' \eta + \gamma' \zeta = 0,$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ lineare homogene Ausdrücke in l_1, l_2, l_3 sind. Diese Relation wird die Form (16) haben, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma',$$

woraus man vier Werthsysteme für die Verhältnisse $l_1 : l_2 : l_3$ erhält.

Man gelangt am elegantesten zum Ziel, wenn man sich die Functionen ξ, η, ζ durch drei Gleichungen von der Form gegeben denkt:

$$(17)\qquad \begin{aligned} x + y + z + \xi + \eta + \zeta &= 0, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \frac{\xi}{\alpha} + \frac{\eta}{\beta} + \frac{\zeta}{\gamma} &= 0, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \frac{\xi}{\alpha'} + \frac{\eta}{\beta'} + \frac{\zeta}{\gamma'} &= 0. \end{aligned}$$

Dass die Coefficienten in den ersten dieser Gleichungen die Werthe 1 haben, kann man durch Hinzufügung constanter Factoren zu x, y, z, ξ, η, ζ bewirken, wobei zugleich die Gleichung (10) ihre Form nicht ändert.

Aus den Gleichungen (17) muss als identische Folge eine vierte von der gleichen Form sich ergeben:

$$(18)\qquad \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \frac{\xi}{\alpha''} + \frac{\eta}{\beta''} + \frac{\zeta}{\gamma''} = 0.$$

Um also α'', β'', γ'' zu erhalten, hat man die Coefficienten λ, λ', λ'' aus folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \lambda''\alpha'' &= \lambda'\alpha' + \lambda\alpha + 1, & \frac{\lambda''}{\alpha''} &= \frac{\lambda'}{\alpha'} + \frac{\lambda}{\alpha} + 1, \\ \lambda''\beta'' &= \lambda'\beta' + \lambda\beta + 1, & \frac{\lambda''}{\beta''} &= \frac{\lambda'}{\beta'} + \frac{\lambda}{\beta} + 1, \\ \lambda''\gamma'' &= \lambda'\gamma' + \lambda\gamma + 1, & \frac{\lambda''}{\gamma''} &= \frac{\lambda'}{\gamma'} + \frac{\lambda}{\gamma} + 1. \end{aligned}$$

Durch Multiplication zweier entsprechender von diesen Gleichungen ergiebt sich

$$(20)\qquad \begin{aligned} \lambda''^2 &= \lambda'^2 + \lambda^2 + \lambda\lambda'\left(\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha}\right) + \lambda\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \lambda'\left(\alpha' + \frac{1}{\alpha'}\right) + 1, \\ \lambda''^2 &= \lambda'^2 + \lambda^2 + \lambda\lambda'\left(\frac{\beta}{\beta'} + \frac{\beta'}{\beta}\right) + \lambda\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) + \lambda'\left(\beta' + \frac{1}{\beta'}\right) + 1, \\ \lambda''^2 &= \lambda'^2 + \lambda^2 + \lambda\lambda'\left(\frac{\gamma}{\gamma'} + \frac{\gamma'}{\gamma}\right) + \lambda\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) + \lambda'\left(\gamma' + \frac{1}{\gamma'}\right) + 1. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus je zweien derselben λ'', so ergeben sich für $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda'}$ die folgenden beiden linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{\lambda'}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - \beta - \frac{1}{\beta}\right) &+ \frac{1}{\lambda}\left(\alpha' + \frac{1}{\alpha'} - \beta' - \frac{1}{\beta'}\right) \\ &+ \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha'} - \frac{\beta'}{\beta} - \frac{\beta}{\beta'}\right), \\ 0 = \frac{1}{\lambda'}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - \gamma - \frac{1}{\gamma}\right) &+ \frac{1}{\lambda}\left(\alpha' + \frac{1}{\alpha'} - \gamma' - \frac{1}{\gamma'}\right) \\ &+ \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha'} - \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma'}\right), \end{aligned}$$

woraus λ, λ' eindeutig berechnet werden können.

Aus einer der Gleichungen (20) erhält man λ'' abgesehen vom Vorzeichen und aus (19) endlich α'', β'', γ'' ebenfalls bis auf das allen gemeinschaftliche Vorzeichen, welches der Natur der Sache nach unbestimmt bleibt*).

*) Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} = (\alpha, \beta, \gamma), \qquad \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{\alpha}, & \beta, & \gamma \\ \frac{1}{\alpha'}, & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha}, \beta, \gamma\right) \text{ etc.},$$

Hat man auf diese Weise α'', β'', γ'', so erhält man in der Gruppe $\sqrt{x\eta}$, $\sqrt{y\xi}$ die folgenden vier Paare Abel'scher Functionen:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{x+y+z}, & \sqrt{\xi+\eta+z} \\
\sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha}+\frac{\eta}{\beta}+\gamma z} \\
\sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha'}+\frac{\eta}{\beta'}+\gamma' z} \\
\sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha''}+\frac{\eta}{\beta''}+\gamma'' z}.
\end{array}$$

Auf die gleiche Weise ergeben sich in der Gruppe $\sqrt{x\zeta}$, $\sqrt{z\xi}$ die Paare:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{x+y+z}, & \sqrt{\xi+y+\zeta} \\
\sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha}+\beta y+\frac{\zeta}{\gamma}} \\
\sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha'}+\beta' y+\frac{\zeta}{\gamma'}} \\
\sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}, & \sqrt{\frac{\xi}{\alpha''}+\beta'' y+\frac{\zeta}{\gamma''}}
\end{array}$$

und in der Gruppe $\sqrt{y\zeta}$, $\sqrt{z\eta}$ die Paare:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{x+y+z}, & \sqrt{x+\eta+\zeta} \\
\sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z}, & \sqrt{\alpha x+\frac{\eta}{\beta}+\frac{\zeta}{\gamma}} \\
\sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z}, & \sqrt{\alpha' x+\frac{\eta}{\beta'}+\frac{\zeta}{\gamma'}} \\
\sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}, & \sqrt{\alpha'' x+\frac{\eta}{\beta''}+\frac{\zeta}{\gamma''}},
\end{array}$$

so dass ausser den gegebenen 6 Abel'schen Functionen 16 weitere bestimmt sind. Um die Charakteristiken derselben zu erhalten, hat man nur zu beachten, dass die drei hier betrachteten Gruppen vier Abel'sche Functionen gemeinschaftlich enthalten. Bildet man also die entsprechenden Gruppen der Charakteristiken, so müssen diese vier Charakteristiken gemeinschaftlich haben und diese hat man den Functionen

$$\sqrt{x+y+z},\ \sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z},\ \sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z},\ \sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}$$

so kann man α'', β'', γ'' aus den Gleichungen

$$\alpha\alpha'\alpha''.\beta\beta'\beta''=(\alpha,\beta,\gamma)\left(\alpha,\beta,\frac{1}{\gamma}\right):\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\gamma\right)\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$\alpha\alpha'\alpha'':\beta\beta'\beta''=\left(\alpha,\frac{1}{\beta},\gamma\right)\left(\alpha,\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right):\left(\frac{1}{\alpha},\beta,\gamma\right)\left(\frac{1}{\alpha},\beta,\frac{1}{\gamma}\right)$$

und den analogen Gleichungen bestimmen.

in einer beliebigen Weise zuzuordnen. Die Charakteristiken der übrigen Abel'schen Functionen sind dadurch vollständig bestimmt, weil sie mit diesen in den drei Gruppen in derselben Weise gepaart auftreten müssen, wie die entsprechenden Abel'schen Functionen. Diese Charakteristiken lassen sich in folgender Weise symmetrisch darstellen.

Es seien die Charakteristiken der Gruppen $\sqrt{y\zeta}$, $\sqrt{z\xi}$, $\sqrt{x\eta}$ resp. mit (p), (q), (r) bezeichnet, ferner mit (d), (e), (f), (g) die Charakteristiken der vier Functionen

$$\sqrt{x+y+z},\ \sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z},\ \sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z},\ \sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}$$

und mit $(n+p)$ die von $\sqrt{x}$. Hiernach erhält man folgende Ausdrücke für die Charakteristiken:

$$(21)\quad \begin{array}{llll}
(\sqrt{x})=(n+p), & (\sqrt{y})=(n+q), & (\sqrt{z})=(n+r) & \\
(\sqrt{\xi})=(n+q+r), & (\sqrt{\eta})=(n+r+p), & (\sqrt{\zeta})=(n+p+q) & \\
(\sqrt{x+y+z}) & =(d), & (\sqrt{x+\eta+\zeta}) & =(p+d), \\
(\sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma z}) & =(e), & \left(\sqrt{\alpha x+\frac{\eta}{\beta}+\frac{\zeta}{\gamma}}\right) & =(p+e) \\
(\sqrt{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z}) & =(f), & \left(\sqrt{\alpha' x+\frac{\eta}{\beta'}+\frac{\zeta}{\gamma'}}\right) & =(p+f), \\
(\sqrt{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z}) & =(g), & \left(\sqrt{\alpha'' x+\frac{\eta}{\beta''}+\frac{\zeta}{\gamma''}}\right) & =(p+g). \\
(\sqrt{\xi+y+\zeta}) & =(q+d), & (\sqrt{\xi+\eta+z}) & =(r+d), \\
\left(\sqrt{\frac{\xi}{\alpha}+\beta y+\frac{\zeta}{\gamma}}\right) & =(q+e), & \left(\sqrt{\frac{\xi}{\alpha}+\frac{\eta}{\beta}+\gamma z}\right) & =(r+e), \\
\left(\sqrt{\frac{\xi}{\alpha'}+\beta' y+\frac{\zeta}{\gamma'}}\right) & =(q+f), & \left(\sqrt{\frac{\xi}{\alpha'}+\frac{\eta}{\beta'}+\gamma' z}\right) & =(r+f), \\
\left(\sqrt{\frac{\xi}{\alpha''}+\beta'' y+\frac{\zeta}{\gamma''}}\right) & =(q+g), & \left(\sqrt{\frac{\xi}{\alpha''}+\frac{\eta}{\beta''}+\gamma'' z}\right) & =(r+g).
\end{array}$$

Nehmen wir beispielsweise an:

$$(\sqrt{x})=\begin{pmatrix}1\,0\,1\\1\,0\,0\end{pmatrix},\quad (\sqrt{y})=\begin{pmatrix}1\,1\,1\\1\,0\,0\end{pmatrix},\quad (\sqrt{z})=\begin{pmatrix}1\,0\,1\\1\,1\,0\end{pmatrix},$$

$$(\sqrt{\xi})=\begin{pmatrix}1\,0\,0\\1\,0\,0\end{pmatrix},\quad (\sqrt{\eta})=\begin{pmatrix}1\,1\,0\\1\,0\,0\end{pmatrix},\quad (\sqrt{\zeta})=\begin{pmatrix}1\,0\,0\\1\,1\,0\end{pmatrix},$$

was statthaft ist, weil hiernach $\sqrt{x\xi}$, $\sqrt{y\eta}$, $\sqrt{z\zeta}$ in dieselbe Gruppe $\begin{pmatrix}0\,0\,1\\0\,0\,0\end{pmatrix}$ gehören, so folgt:

$$(p)=\begin{pmatrix}0\,1\,1\\0\,1\,0\end{pmatrix},\quad (q)=\begin{pmatrix}0\,0\,1\\0\,1\,0\end{pmatrix},\quad (r)=\begin{pmatrix}0\,1\,1\\0\,0\,0\end{pmatrix},\quad (n)=\begin{pmatrix}1\,1\,0\\1\,1\,0\end{pmatrix}.$$

Die vollständigen Gruppen (p), (q) sind

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix},\\\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

woraus man erhält:

$$(d)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad(e)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad(f)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad(g)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

und die Charakteristiken der in (21) zusammengestellten Functionen sind, in der gleichen Reihenfolge geschrieben:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\\\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\\\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\\\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\\\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},\\\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}.\end{gathered}$$

Es gilt nun von drei Abel'schen Functionen einer Gruppe, von denen keine zwei einem Paare angehören, der Satz, dass die Summe ihrer Charakteristiken immer eine gerade Charakteristik ist; denn betrachten wir z. B. die drei Functionen $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ und drücken ξ, η, ζ linear durch x, y, z aus, so kann die Gleichung (10) in der Form angenommen werden:

$$\sqrt{x(ax+by+cz)}+\sqrt{y(a'x+b'y+c'z)}+\sqrt{z(a''x+b''y+c''z)}=0.$$

Setzen wir hierin der Reihe nach $x=0$, $y=0$, $z=0$, so erhalten wir für die Producte der Wurzeln der quadratischen Gleichungen, die sich für das Verhältniss der beiden andern Variablen ergeben, die Werthe:

$$-\frac{c''}{b'},\quad -\frac{a}{c''},\quad -\frac{b'}{a},$$

deren Product $=-1$ ist. Dies aber ist nach S. 492, 493 das Kriterium dafür, dass die Summe der Charakteristiken der Functionen $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ eine gerade Charakteristik sei.

Gestützt auf diesen Satz kann man beweisen, dass die 16 Abel-schen Functionen, die wir oben bestimmt haben, verschieden sind von den 12 in der Gruppe $\sqrt{x\xi}$ vorkommenden Functionen. Denn ist $\sqrt{pq}$ ein in die Gruppe $\sqrt{x\xi}$ gehöriges Paar, so sind die Charakteristiken

$$(\sqrt{x})+(\sqrt{\xi})+(\sqrt{p}),\quad(\sqrt{y})+(\sqrt{\eta})+(\sqrt{p}),\quad(\sqrt{z})+(\sqrt{\zeta})+(\sqrt{p})$$

ungerade und es kann nach dem soeben bewiesenen Satze $\sqrt{p}$ in keiner der drei Gruppen

$$(\sqrt{x\eta})=(\sqrt{y\xi}),\quad(\sqrt{x\zeta})=(\sqrt{z\xi}),\quad(\sqrt{y\zeta})=(\sqrt{z\eta})$$

vorkommen.

Die 16 oben bestimmten Functionen liefern daher alle Abel'schen Functionen, die nicht in der Gruppe $\sqrt{x\xi}$ enthalten sind, und wenn wir die noch fehlenden 6 Functionen dieser Gruppe aufsuchen, so sind damit sämmtliche 28 Abel'sche Functionen bestimmt.

Um diese zu erhalten setzen wir

$$t=x+y+z,\quad u=\xi+\eta+z,$$

und gehen aus von der Gleichung:

$$\sqrt{tu}=\sqrt{x\eta}+\sqrt{y\xi}, \tag{22}$$

welche sich leicht aus (10) und (17) ergiebt. Wir setzen die Functionen

$$t,\ x,\ y,\ u,\ \eta,\ \xi$$

an Stelle von

$$x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta$$

in der vorigen Betrachtung, und erhalten zunächst zwischen diesen Variablen die Gleichung:

$$t-x-y-u+\eta+\xi=0, \tag{23}$$

neben welcher noch drei andere bestehen müssen von der Form

$$at+bx+cy+a'u+b'\eta+c'\xi=0 \tag{24}$$

mit der Bedingung

$$aa'=bb'=cc'.$$

An Stelle der Gruppen $(p+q+r)$, (p), (q), (r) treten jetzt die folgenden:

$$\begin{aligned}(\sqrt{tu})&=(\sqrt{x\eta})=(\sqrt{y\xi})=(r),\\(\sqrt{x\xi})&=(\sqrt{y\eta})=(\sqrt{z\zeta})=(p+q+r),\\(\sqrt{t\xi})&=(\sqrt{uy})\qquad\qquad=(n+d+q+r),\\(\sqrt{t\eta})&=(\sqrt{ux})\qquad\qquad=(n+d+p+r).\end{aligned} \tag{25}$$

In der ersten dieser Gruppen, in (r), kommen folgende Paare von Charakteristiken vor:

$$\begin{aligned}(r)&=(n+p)+(n+r+p)=(n+q)+(n+r+q)\\&=(d)+(r+d)=(e)+(r+e)=(f)+(r+f)=(g)+(r+g),\end{aligned}$$

und aus der Gleichung (23) erhalten wir folgende Abel'sche Functionen:

$$\sqrt{t-x-y}=\sqrt{z},\quad \sqrt{t+\eta+\xi}=\sqrt{-\zeta},$$
$$\sqrt{-u-x+\xi}=\sqrt{\xi+y+\zeta},\quad \sqrt{-u+\eta-y}=\sqrt{x+\eta+\zeta},$$

deren Charakteristiken sind:

$$(n+r),\quad (n+p+q),\quad (q+d),\quad (p+d),$$

die sich in folgender Weise in die drei letzten Gruppen (25) vertheilen:

$$(p+q+r)=(n+r)+(n+p+q),$$
$$(n+d+q+r)=(n+r)+(q+d),$$
$$(n+d+p+r)=(n+r)+(p+d).$$

Die Charakteristiken der noch nicht bestimmten Abel'schen Functionen müssen nun, wie oben bewiesen, in der Gruppe $(p+q+r)$ enthalten sein. Bezeichnen wir daher diese Charakteristiken mit (k_1), (k_1'), (k_1''), (k_2), (k_2'), (k_2''), so muss sich ergeben:

$$(p+q+r)=(k_1+k_2)=(k_1'+k_2')=(k_1''+k_2'')$$

und diese Charakteristiken kommen nicht in der Gruppe (r) vor.

Die Vergleichung der Gruppen (25) mit den Gruppen $(p+q+r)$, (p), (q), (r) lehrt nun aber, dass in denselben sämmtliche ungerade Charakteristiken überhaupt vorkommen müssen, und ferner, dass die drei noch übrigen Paare der Gruppen $(p+q+r)$, $(n+d+q+r)$, $(n+d+p+r)$ je eine Charakteristik gemein haben müssen.

Nun kommt die Charakteristik $(q+e)$ weder in der Gruppe (r) noch in $(p+q+r)$ vor, und daraus folgt, dass man (k_1) so auswählen kann, dass entweder

$$(k_1+q+e)=(n+d+q+r)$$

oder

$$(k_1+q+e)=(n+d+p+r).$$

Aus ersterer Annahme würde folgen:

$$(k_1)=(n+r+d+e).$$

Dies aber ist nicht möglich, denn wir haben in der Gruppe (p) die Paare:

$$(n+r),\ (n+r+p)$$
$$(d),\ (d+p)$$
$$(e),\ (e+p)$$

und daher ist nach dem oben (S. 500) bewiesenen Satz

$$(n+r+d+e)$$

gerade. Demnach ergiebt sich

$$(k_1)=(n+d+e+p+q+r),$$

und hieraus:

$$k_2=(n+d+e).$$

Ebenso schliesst man:

$$(k_1')=(n+d+f+p+q+r),\quad (k_2')=(n+d+f),$$
$$(k_1'')=(n+d+g+p+q+r),\quad (k_2'')=(n+d+g),$$

und es enthält die Gruppe $(n+d+p+r)$ die Paare:

$$(k_1),(q+e);\quad (k_1'),(q+f);\quad (k_1''),(q+g),$$

woraus für die Gruppe $(n+d+q+r)$ die Paare folgen:

$$(k_1),(p+e);\quad (k_1'),(p+f);\quad (k_1''),(p+g).$$

Nach den Resultaten der früheren Betrachtung ergeben sich aus einer Gleichung von der Form (24) die vier Abel'schen Functionen:

$$\sqrt{at+bx+cy}=\sqrt{-(a'u+b'\eta+c'\xi)},$$
$$\sqrt{a'u+bx+cy}=\sqrt{-(at+b'\eta+c'\xi)},$$
$$\sqrt{at+b'\eta+cy}=\sqrt{-(a'u+bx+c'\xi)},$$
$$\sqrt{at+bx+c'\xi}=\sqrt{-(a'u+b'\eta+cy)},$$

deren Charakteristiken resp. sind:

$$(k_1),\ (k_2),\ (p+e),\ (q+e),$$

und unsere Aufgabe ist daher gelöst, wenn es gelungen ist, die Coefficienten a, b, c, a', b', c' zu bestimmen.

Nun ist aber die Function, deren Charakteristik $(p+e)$ ist, oben bereits bestimmt; sie ist:

$$\sqrt{\alpha x+\frac{\eta}{\beta}+\frac{\zeta}{\gamma}}$$

und wenn wir

$$v=\alpha x+\frac{\eta}{\beta}+\frac{\zeta}{\gamma}=-\left(\frac{\xi}{\alpha}+\beta y+\gamma z\right)$$

setzen, so können wir die Coefficienten a, b, c, a', b', c' dadurch bestimmen, dass wir v in folgender zweifachen Form darstellen:

$$v=at+b'\eta+cy=-a'u-bx-c'\xi.$$

Dies erreichen wir auf folgende Weise: mittelst

$$u=\xi+\eta+z=-x-y-\zeta$$

eliminiren wir aus den beiden Ausdrücken von v die Variablen z und ζ, wodurch sich ergiebt:

$$v+\frac{u}{\gamma}=x\left(\alpha-\frac{1}{\gamma}\right)+\frac{\eta}{\beta}-\frac{y}{\gamma}$$
$$v+\gamma u=-\xi\left(\frac{1}{\alpha}-\gamma\right)+\gamma\eta-\beta y.$$

Indem man hieraus η und y eliminirt, folgt:

$$v=u\frac{\beta-\gamma}{1-\beta\gamma}+x\frac{\beta(1-\alpha\gamma)}{1-\beta\gamma}-\frac{\xi}{\alpha}\frac{1-\alpha\gamma}{1-\beta\gamma},$$

und auf die gleiche Weise:

$$v = t\frac{1-\alpha\gamma}{\alpha-\gamma} + \frac{\eta}{\beta}\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma} - y\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\alpha-\gamma}$$

woraus sich ergiebt:

$$a = \frac{1-\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}, \quad a' = -\frac{\beta-\gamma}{1-\beta\gamma},$$

$$b = -\frac{\beta(1-\alpha\gamma)}{1-\beta\gamma}, \quad b' = \frac{1}{\beta}\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma},$$

$$c = -\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\alpha-\gamma}, \quad c' = \frac{1}{\alpha}\frac{1-\alpha\gamma}{1-\beta\gamma}.$$

Hiernach lassen sich die beiden Abel'schen Functionen

$$\sqrt{at+bx+cy}, \quad \sqrt{a'u+bx+cy}$$

bilden. Ersetzt man darin t und u durch ihre Ausdrücke in x, y, z, ξ, η, ζ, so ergeben sich nach Unterdrückung constanter Factoren für die Function, die zur Charakteristik (k_1) gehört, die beiden Ausdrücke:

$$\sqrt{\frac{x}{1-\beta\gamma}+\frac{y}{1-\gamma\alpha}+\frac{z}{1-\alpha\beta}}, \quad \sqrt{\frac{\xi}{\alpha(\gamma-\beta)}+\frac{\eta}{\beta(\gamma-\alpha)}+\frac{z}{1-\alpha\beta}},$$

und für die zur Charakteristik (k_2) gehörige Function:

$$\sqrt{\frac{\xi}{\alpha(1-\beta\gamma)}+\frac{y}{\beta(1-\gamma\alpha)}+\frac{\zeta}{\gamma(1-\alpha\beta)}}, \quad \sqrt{\frac{x}{\gamma-\beta}+\frac{y}{\gamma-\alpha}+\frac{\zeta}{\gamma(1-\alpha\beta)}}.$$

Die zu den Charakteristiken (k_1'), (k_2'); (k_1''), (k_2'') gehörigen Functionen ergeben sich hieraus sofort dadurch, dass man α, β, γ durch α', β', γ' resp. α'', β'', γ'' ersetzt, womit sämmtliche Abel'sche Functionen nebst ihren Charakteristiken bestimmt sind. Die Charakteristiken (k_1), (k_2), (k_1'), (k_2'), (k_1''), (k_2'') würden sich bei dem oben gewählten Beispiel folgendermaassen gestalten:

$$(k_1) = \begin{pmatrix}0\,1\,1\\1\,1\,0\end{pmatrix}, \quad (k_1') = \begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,1\,0\end{pmatrix}, \quad (k_1'') = \begin{pmatrix}1\,1\,1\\0\,1\,0\end{pmatrix},$$

$$(k_2) = \begin{pmatrix}0\,1\,0\\1\,1\,0\end{pmatrix}, \quad (k_2') = \begin{pmatrix}0\,1\,1\\0\,1\,0\end{pmatrix}, \quad (k_2'') = \begin{pmatrix}1\,1\,0\\0\,1\,0\end{pmatrix}.$$

Da nun, wie oben gezeigt, α'', β'', γ'' durch α, β, γ, α', β', γ' ausgedrückt werden können, so sind hiernach sämmtliche Abel'sche Functionen mit allen ihren algebraischen Beziehungen ausgedrückt durch $3p-3=6$ Constanten, welche man als die Moduln der Classe für den Fall $p=3$ ansehen kann.

Anhang.