VIII.

Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

(Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860.)

Obwohl die Differentialgleichungen, nach welchen sich die Bewegung der Gase bestimmt, längst aufgestellt worden sind, so ist doch ihre Integration fast nur für den Fall ausgeführt worden, wenn die Druckverschiedenheiten als unendlich kleine Bruchtheile des ganzen Drucks betrachtet werden können, und man hat sich bis auf die neueste Zeit begnügt, nur die ersten Potenzen dieser Bruchtheile zu berücksichtigen. Erst ganz vor Kurzem hat Helmholtz auch die Glieder zweiter Ordnung mit in die Rechnung gezogen und daraus die objective Entstehung von Combinationstönen erklärt. Es lassen sich indess für den Fall, dass die anfängliche Bewegung allenthalben in gleicher Richtung stattfindet und in jeder auf dieser Richtung senkrechten Ebene Geschwindigkeit und Druck constant sind, die exacten Differentialgleichungen vollständig integriren; und wenn auch zur Erklärung der bis jetzt experimentell festgestellten Erscheinungen die bisherige Behandlung vollkommen ausreicht, so könnten doch, bei den grossen Fortschritten, welche in neuester Zeit durch Helmholtz auch in der experimentellen Behandlung akustischer Fragen gemacht worden sind, die Resultate dieser genaueren Rechnung in nicht allzu ferner Zeit vielleicht der experimentellen Forschung einige Anhaltspunkte gewähren; und dies mag, abgesehen von dem theoretischen Interesse, welches die Behandlung nicht linearer partieller Differentialgleichungen hat, die Mittheilung derselben rechtfertigen.

Für die Abhängigkeit des Drucks von der Dichtigkeit würde das Boyle'sche Gesetz vorauszusetzen sein, wenn die durch die Druckveränderungen bewirkten Temperaturverschiedenheiten sich so schnell ausglichen, dass die Temperatur des Gases als constant betrachtet werden dürfte. Es ist aber wahrscheinlich der Wärmeaustausch ganz

zu vernachlässigen, und man muss daher für diese Abhängigkeit das Gesetz zu Grunde legen, nach welchem sich der Druck des Gases mit der Dichtigkeit ändert, wenn es keine Wärme aufnimmt oder abgiebt.

Nach dem Boyle'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze ist, wenn v das Volumen der Gewichtseinheit, p den Druck und T die Temperatur von $-273°$C an gerechnet bezeichnet,

$$\log p + \log v = \log T + \text{const.}$$

Betrachten wir hier T als Function von p und v und nennen die specifische Wärme bei constantem Drucke c, bei constantem Volumen c', beide auf die Gewichtseinheit bezogen, so wird von dieser Gewichtseinheit, wenn p und v sich um dp und dv ändern, die Wärmemenge

$$c \frac{\partial T}{\partial v} dv + c' \frac{\partial T}{\partial p} dp$$

oder, da $\frac{\partial \log T}{\partial \log v} = \frac{\partial \log T}{\partial \log p} = 1$,

$$T(c\, d\log v + c'\, d\log p)$$

aufgenommen. Wenn daher keine Wärmeaufnahme stattfindet, so ist $d\log p = -\frac{c}{c'} d\log v$, und also, wenn man mit Poisson annimmt, dass das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen $\frac{c}{c'} = k$ von Temperatur und Druck unabhängig ist,

$$\log p = -k \log v + \text{const.}$$

Nach neueren Versuchen von Regnault, Joule und W. Thomson sind diese Sätze für Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff und deren Gemenge unter allen darstellbaren Drucken und Temperaturen wahrscheinlich sehr nahe gültig.

Durch Regnault ist für diese Gase eine sehr nahe Anschmiegung an das Boyle'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz und die Unabhängigkeit der specifischen Wärme c von Temperatur und Druck festgestellt worden.

Für atmosphärische Luft fand Regnault

zwischen	$-30°$C	und	$+10°$C	$c = 0{,}2377$
„	$+10°$C	„	$+100°$C	$c = 0{,}2379$
„	$+100°$C	„	$+215°$C	$c = 0{,}2376$.

Ebenso ergab sich für Drucke von 1 bis 10 Atmosphären kein merklicher Unterschied der specifischen Wärme.

Nach Versuchen von Regnault und Joule scheint ferner für diese Gase die von Clausius adoptirte Annahme Mayer's sehr nahe richtig zu sein, dass ein bei constanter Temperatur sich ausdehnendes Gas nur so viel Wärme aufnimmt, als zur Erzeugung der äusseren

Arbeit erforderlich ist. Wenn das Volumen des Gases sich um dv ändert, während die Temperatur constant bleibt, so ist $d\log p = -d\log v$, die aufgenommene Wärmemenge $T(c - c')\, d\log v$, die geleistete Arbeit pdv. Diese Hypothese giebt daher, wenn A das mechanische Aequivalent der Wärme bezeichnet,

$$AT(c - c')\, d\log v = pdv$$

oder

$$c - c' = \frac{pv}{AT},$$

also von Druck und Temperatur unabhängig.

Hiernach ist auch $k = \frac{c}{c'}$ von Druck und Temperatur unabhängig und ergiebt sich, wenn $c = 0{,}237733$, A nach Joule $= 424{,}55$ Kilogr. met. und, für die Temperatur 0^0C oder $T = \frac{100^\circ\mathrm{C}}{0{,}3665}$, pv nach Regnault $= 7990^{\mathrm{m}}{,}267$ angenommen wird, gleich 1,4101. Die Schallgeschwindigkeit in trockner Luft von 0^0C beträgt in der Secunde

$$\sqrt{7990^{\mathrm{m}}{,}267 \,.\, 9^{\mathrm{m}}{,}8088\, k},$$

und würde also mit diesem Werthe von k gleich $332^{\mathrm{m}}{,}440$ gefunden werden, während die beiden vollständigsten Versuchsreihen von Moll und van Beek dafür, einzeln berechnet, $332^{\mathrm{m}}{,}528$ und $331^{\mathrm{m}}{,}867$, vereinigt $332^{\mathrm{m}}{,}271$ geben und die Versuche von Martins und A. Bravais nach ihrer eignen Berechnung $332^{\mathrm{m}}{,}37$.

1.

Für's erste ist es nicht nöthig, über die Abhängigkeit des Drucks von der Dichtigkeit eine bestimmte Voraussetzung zu machen; wir nehmen daher an, dass bei der Dichtigkeit ϱ der Druck $\varphi(\varrho)$ sei, und lassen die Function φ vorläufig noch unbestimmt.

Man denke sich nun rechtwinklige Coordinaten x, y, z eingeführt, die x-Axe in der Richtung der Bewegung, und bezeichne durch ϱ die Dichtigkeit, durch p den Druck, durch u die Geschwindigkeit für die Coordinate x zur Zeit t und durch ω ein Element der Ebene, deren Coordinate x ist.

Der Inhalt des auf dem Element ω stehenden geraden Cylinders von der Höhe dx ist dann ωdx, die in ihm enthaltene Masse $\omega\varrho dx$. Die Aenderung dieser Masse während des Zeitelements dt oder die Grösse $\omega \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt\, dx$ bestimmt sich durch die in ihn einströmende Masse, welche $= -\omega \frac{\partial \varrho u}{\partial x} dx\, dt$ gefunden wird. Ihre Beschleunigung ist

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$ und die Kraft, welche sie in der Richtung der positiven x-Axe forttreibt, $= -\frac{\partial p}{\partial x} \omega\, dx = -\varphi'(\varrho) \frac{\partial \varrho}{\partial x} \omega\, dx$, wenn $\varphi'(\varrho)$ die Derivirte von $\varphi(\varrho)$ bezeichnet. Man hat daher für ϱ und u die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial \varrho u}{\partial x} \text{ und } \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\varphi'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial x} \text{ oder}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\varphi'(\varrho)\frac{\partial \log \varrho}{\partial x}$$

$$\text{und } \frac{\partial \log \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \log \varrho}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Wenn man die zweite Gleichung, mit $\pm\sqrt{\varphi'(\varrho)}$ multiplicirt, zur ersteren addirt und zur Abkürzung

(1) $$\int \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, d\log \varrho = f(\varrho) \text{ und}$$

(2) $$f(\varrho) + u = 2r,\ f(\varrho) - u = 2s$$

setzt, so erhalten diese Gleichungen die einfachere Gestalt

(3) $$\frac{\partial r}{\partial t} = -\left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)\frac{\partial s}{\partial x},$$

worin u und ϱ durch die Gleichungen (2) bestimmte Functionen von r und s sind. Aus ihnen folgt

(4) $$dr = \frac{\partial r}{\partial x}\left(dx - \left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) dt\right)$$

(5) $$ds = \frac{\partial s}{\partial x}\left(dx - \left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) dt\right).$$

Unter der in der Wirklichkeit immer zutreffenden Voraussetzung, dass $\varphi'(\varrho)$ positiv ist, besagen diese Gleichungen, dass r constant bleibt, wenn x sich mit t so ändert, dass $dx = \left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) dt$, und s constant bleibt, wenn x sich mit t so ändert, dass $dx = \left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) dt$ ist.

Ein bestimmter Werth von r oder von $f(\varrho) + u$ rückt daher zu grösseren Werthen von x mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)} + u$ fort, ein bestimmter Werth von s oder von $f(\varrho) - u$ zu kleineren Werthen von x mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)} - u$.

Ein bestimmter Werth von r wird also nach und nach mit jedem vor ihm stattfindenden Werthe von s zusammentreffen, und die Geschwindigkeit seines Fortrückens wird in jedem Augenblicke von dem Werthe von s abhängen, mit welchem er zusammentrifft.

2.

Die Analysis bietet nun zunächst die Mittel, die Frage zu beantworten, wo und wann ein Werth r' von r einem vor ihm befindlichen Werthe s' von s begegnet, d. h. x und t als Functionen von r und s zu bestimmen. In der That, wenn man in den Gleichungen (3) des vor. Art. r und s als unabhängige Variable einführt, so gehen diese Gleichungen in lineare Differentialgleichungen für x und t über und lassen sich also nach bekannten Methoden integriren. Um die Zurückführung der Differentialgleichungen auf eine lineare zu bewirken, ist es am zweckmässigsten, die Gleichungen (4) und (5) des vorigen Art. in die Form zu setzen:

$$(1) \qquad dr = \frac{\partial r}{\partial x}\left\{ d\left(x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t\right) + \left[dr\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1\right) + ds\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} - 1\right)\right] t \right\}$$

$$(2) \qquad ds = \frac{\partial s}{\partial x}\left\{ d\left(x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t\right) - \left[ds\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1\right) + dr\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} - 1\right)\right] t \right\}.$$

Man erhält dann, wenn man s und r als unabhängige Variable betrachtet, für x und t die beiden linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial\left(x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t\right)}{\partial s} = -\, t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} - 1\right)$$

$$\frac{\partial\left(x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t\right)}{\partial r} = \quad t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} - 1\right).$$

In Folge derselben ist

$$(3) \qquad \left(x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t\right) dr - \left(x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t\right) ds$$

ein vollständiges Differential, dessen Integral, w, der Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\, \partial s} = -\, t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} - 1\right) = m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right)$$

genügt, worin $m = \frac{1}{2\sqrt{\varphi'(\varrho)}}\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} - 1\right)$, also eine Function von $r + s$ ist. Setzt man $f(\varrho) = r + s = \sigma$, so wird $\sqrt{\varphi'(\varrho)} = \frac{d\sigma}{d \log \varrho}$, folglich $m = -\frac{1}{2}\,\frac{d \log \frac{d\varrho}{d\sigma}}{d\sigma}$.

Bei der Poisson'schen Annahme $\varphi(\varrho) = aa\varrho^k$ wird

$$f(\varrho) = \frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\, \varrho^{\frac{k-1}{2}} + \text{const.}$$

und, wenn man für die willkürliche Constante den Werth Null wählt,

$$\sqrt{\varphi'(\varrho)} + u = \frac{k+1}{2}\, r + \frac{k-3}{2}\, s, \quad \sqrt{\varphi'(\varrho)} - u = \frac{k-3}{2}\, r + \frac{k+1}{2}\, s$$

$$m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{1}{\sigma} = \frac{k-3}{2(k-1)(r+s)}.$$

Unter Voraussetzung des Boyle'schen Gesetzes $\varphi(\varrho) = aa\varrho$ erhält man

$$f(\varrho) = a \log \varrho$$

$$\sqrt{\varphi'(\varrho)} + u = r - s + a, \quad \sqrt{\varphi'(\varrho)} - u = s - r + a$$

$$m = -\frac{1}{2a},$$

Werthe, die aus den obigen fliessen, wenn man $f(\varrho)$ um die Constante $\frac{2a\sqrt{k}}{k-1}$, also r und s um $\frac{a\sqrt{k}}{k-1}$ vermindert und dann $k = 1$ setzt.

Die Einführung von r und s als unabhängig veränderlichen Grössen ist indess nur möglich, wenn die Determinante dieser Functionen von x und t, welche $= 2\sqrt{\varphi'(\varrho)}\,\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}$, nicht verschwindet, also nur wenn $\frac{\partial r}{\partial x}$ und $\frac{\partial s}{\partial x}$ beide von Null verschieden sind.

Wenn $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$ ist, ergiebt sich aus (1) $dr = 0$ und aus (2) $x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t$ = einer Function von s. Es ist folglich auch dann der Ausdruck (3) ein vollständiges Differential, und es wird w eine blosse Function von s.

Aus ähnlichen Gründen werden, wenn $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ ist, s auch in Bezug auf t constant, $x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t$ und w Functionen von r.

Wenn endlich $\frac{\partial r}{\partial x}$ und $\frac{\partial s}{\partial x}$ beide $= 0$ sind, so werden in Folge der Differentialgleichungen r, s und w Constanten.

3.

Um die Aufgabe zu lösen, muss nun zunächst w als Function von r und s so bestimmt werden, dass sie der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r\, \partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0$$

und den Anfangsbedingungen genügt, wodurch sie bis auf eine Constante, die ihr offenbar willkürlich hinzugefügt werden kann, bestimmt ist.

Wo und wann ein bestimmter Werth von r mit einem bestimmten Werthe von s zusammentrifft, ergiebt sich dann aus der Gleichung

(2) $\quad \left(x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t\right) dr - \left(x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t\right) ds = dw,$

und hierauf findet man schliesslich u und ϱ als Functionen von x und t durch Hinzuziehung der Gleichungen

(3) $$f(\varrho) + u = 2r, \quad f(\varrho) - u = 2s.$$

In der That folgen, wenn nicht etwa in einer endlichen Strecke dr oder ds Null und folglich r oder s constant ist, aus (2) die Gleichungen

(4) $$x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t = \frac{\partial w}{\partial r},$$

(5) $$x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t = -\frac{\partial w}{\partial s},$$

durch deren Verbindung mit (3) man u und ϱ in x und t ausgedrückt erhält.

Wenn aber r anfangs in einer endlichen Strecke denselben Werth r' hat, so rückt diese Strecke allmählich zu grösseren Werthen von x fort. Innerhalb dieses Gebietes, wo $r = r'$, kann man dann aus der Gleichung (2) den Werth von $x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})\, t$ nicht ableiten, da $dr = 0$; und in der That lässt die Frage, wo und wann dieser Werth r' einem bestimmten Werthe von s begegnet, dann keine bestimmte Antwort zu. Die Gleichung (4) gilt dann nur an den Grenzen dieses Gebietes und giebt an, zwischen welchen Werthen von x zu einer bestimmten Zeit der constante Werth r' von r stattfindet, oder auch, während welches Zeitraums r an einer bestimmten Stelle diesen Werth behält. Zwischen diesen Grenzen bestimmen sich u und ϱ als Functionen von x und t aus den Gleichungen (3) und (5). Auf ähnlichem Wege findet man diese Functionen, wenn s den Werth s' in einem endlichen Gebiete besitzt, während r veränderlich ist, sowie auch wenn r und s beide constant sind. In letzterem Falle nehmen sie zwischen gewissen durch (4) und (5) bestimmten Grenzen constante aus (3) fliessende Werthe an.

4.

Bevor wir die Integration der Gleichung (1) des vor. Art. in Angriff nehmen, scheint es zweckmässig, einige Erörterungen voraufzuschicken, welche die Ausführung dieser Integration nicht voraussetzen. Ueber die Function $\varphi(\varrho)$ ist dabei nur die Annahme nöthig, dass ihre Derivirte bei wachsendem ϱ nicht abnimmt, was in der Wirklichkeit gewiss immer der Fall ist; und wir bemerken gleich hier, was im folgenden Art. mehrfach angewandt werden wird, dass dann

$$\frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2} = \int_0^1 \varphi'(\alpha\varrho_1 + (1-\alpha)\varrho_2)\, d\alpha,$$

wenn nur eine der Grössen ϱ_1 und ϱ_2 sich ändert, entweder constant bleibt oder mit dieser Grösse zugleich wächst und abnimmt, woraus zugleich folgt, dass der Werth dieses Ausdrucks stets zwischen $\varphi'(\varrho_1)$ und $\varphi'(\varrho_2)$ liegt.

Wir betrachten zunächst den Fall, wo die anfängliche Gleichgewichtsstörung auf ein endliches durch die Ungleichheiten $a < x < b$ begrenztes Gebiet beschränkt ist, so dass ausserhalb desselben u und ϱ und folglich auch r und s constant sind; die Werthe dieser Grössen für $x < a$ mögen durch Anhängung des Index 1, für $x > b$ durch den Index 2 bezeichnet werden. Das Gebiet, in welchem r veränderlich ist, bewegt sich nach Art. 1 allmählich vorwärts und zwar seine hintere Grenze mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho_1)} + u_1$, während die vordere Grenze des Gebiets, in welchem s veränderlich ist, mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho_2)} - u_2$ rückwärts geht. Nach Verlauf der Zeit

$$\frac{b - a}{\sqrt{\varphi'(\varrho_1)} + \sqrt{\varphi'(\varrho_2)} + u_1 - u_2}$$

fallen daher beide Gebiete auseinander, und zwischen ihnen bildet sich ein Raum, in welchem $s = s_2$ und $r = r_1$ ist und folglich die Gastheilchen wieder im Gleichgewicht sind. Von der anfangs erschütterten Stelle gehen also zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen aus. In der vorwärtsgehenden ist $s = s_2$; es ist daher mit einem bestimmten Werthe ϱ der Dichtigkeit stets die Geschwindigkeit $u = f(\varrho) - 2s_2$ verbunden, und beide Werthe rücken mit der constanten Geschwindigkeit

$$\sqrt{\varphi'(\varrho)} + u = \sqrt{\varphi'(\varrho)} + f(\varrho) - 2s_2$$

vorwärts. In der rückwärtslaufenden ist dagegen mit der Dichtigkeit ϱ die Geschwindigkeit $-f(\varrho) + 2r_1$ verbunden, und diese beiden Werthe bewegen sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)} + f(\varrho) - 2r_1$ rückwärts. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist für grössere Dichtigkeiten eine grössere, da sowohl $\sqrt{\varphi'(\varrho)}$, als $f(\varrho)$ mit ϱ zugleich wächst.

Denkt man sich ϱ als Ordinate einer Curve für die Abscisse x, so bewegt sich jeder Punkt dieser Curve parallel der Abscissenaxe mit constanter Geschwindigkeit fort und zwar mit desto grösserer, je grösser seine Ordinate ist. Man bemerkt leicht, dass bei diesem Gesetze Punkte mit grösseren Ordinaten schliesslich voraufgehende Punkte mit kleineren Ordinaten überholen würden, so dass zu einem Werthe von x mehr als ein Werth von ϱ gehören würde. Da nun dieses in Wirklichkeit nicht stattfinden kann, so muss ein Umstand eintreten, wodurch dieses Gesetz ungültig wird. In der That liegt nun der Herleitung der Differentialgleichungen die Voraussetzung zu Grunde, dass u und ϱ stetige Functionen von x sind und endliche Derivirten haben; diese Voraussetzung hört aber auf erfüllt zu sein, sobald in irgend einem Punkte die Dichtigkeitscurve senkrecht zur Abscissenaxe wird, und von diesem Augenblicke an tritt in dieser Curve eine Discontinuität ein, so dass ein grösserer Werth von ϱ einem kleineren unmittelbar nachfolgt; ein Fall, der im nächsten Art. erörtert werden wird.

Die Verdichtungswellen, d. h. die Theile der Welle, in welchen die Dichtigkeit in der Fortpflanzungsrichtung abnimmt, werden demnach bei ihrem Fortschreiten immer schmäler und gehen schliesslich in Verdichtungsstösse über; die Breite der Verdünnungswellen aber wächst beständig der Zeit proportional.

Es lässt sich, wenigstens unter Voraussetzung des Poisson'schen (oder Boyle'schen) Gesetzes, leicht zeigen, dass auch dann, wenn die anfängliche Gleichgewichtsstörung nicht auf ein endliches Gebiet beschränkt ist, sich stets, von ganz besonderen Fällen abgesehen, im Laufe der Bewegung Verdichtungsstösse bilden müssen. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein Werth von r vorwärts rückt, ist bei dieser Annahme

$$\frac{k+1}{2}\, r + \frac{k-3}{2}\, s\,;$$

grössere Werthe werden sich also durchschnittlich mit grösserer Geschwindigkeit bewegen, und ein grösserer Werth r' wird einen vorausgehenden kleineren Werth r'' schliesslich einholen müssen, wenn nicht der mit r'' zusammentreffende Werth von s durchschnittlich um

$$(r' - r'')\,\frac{1+k}{3-k}$$

kleiner ist, als der gleichzeitig mit r' zusammentreffende. In diesem Falle würde s für ein positiv unendliches x negativ unendlich werden, und also für $x = +\infty$ die Geschwindigkeit $u = +\infty$ (oder auch statt dessen beim Boyle'schen Gesetz die Dichtigkeit unendlich klein) werden. Von speciellen Fällen abgesehen, wird also immer der Fall eintreten müssen, dass ein um eine endliche Grösse grösserer Werth von r einem kleineren unmittelbar nachfolgt; es werden folglich, durch ein Unendlichwerden von $\frac{\partial r}{\partial x}$, die Differentialgleichungen ihre Gültigkeit verlieren und vorwärtslaufende Verdichtungsstösse entstehen müssen. Ebenso werden fast immer, indem $\frac{\partial s}{\partial x}$ unendlich wird, rückwärtslaufende Verdichtungsstösse sich bilden.

Zur Bestimmung der Zeiten und Orte, für welche $\frac{\partial r}{\partial x}$ oder $\frac{\partial s}{\partial x}$ unendlich wird und plötzliche Verdichtungen ihren Anfang nehmen, erhält man aus den Gleichungen (1) und (2) des Art. 2, wenn man darin die Function w einführt,

$$\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1\right) t\right) = 1,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1\right) t\right) = 1.$$

5.

Wir müssen nun, da sich plötzliche Verdichtungen fast immer einstellen, auch wenn sich Dichtigkeit und Geschwindigkeit anfangs allenthalben stetig ändern, die Gesetze für das Fortschreiten von Verdichtungsstössen aufsuchen.

Wir nehmen an, dass zur Zeit t für $x = \xi$ eine sprungweise Aenderung von u und ϱ stattfinde, und bezeichnen die Werthe dieser und der von ihnen abhängigen Grössen für $x = \xi - 0$ durch Anhängung des Index 1 und für $x = \xi + 0$ durch den Index 2; die relativen Geschwindigkeiten, mit welchen das Gas sich gegen die Unstetigkeitsstelle bewegt, $u_1 - \frac{d\xi}{dt}$, $u_2 - \frac{d\xi}{dt}$, mögen durch v_1 und v_2 bezeichnet werden. Die Masse, welche durch ein Element ω der Ebene, wo $x = \xi$, im Zeitelement dt in positiver Richtung hindurchgeht, ist dann $= v_1 \varrho_1 \omega\, dt = v_2 \varrho_2 \omega\, dt$; die ihr eingedrückte Kraft $(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))\,\omega\, dt$ und der dadurch bewirkte Zuwachs an Geschwindigkeit $v_2 - v_1$; man hat daher

$$(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))\,\omega\, dt = (v_2 - v_1)\, v_1 \varrho_1 \omega\, dt \text{ und } v_1 \varrho_1 = v_2 \varrho_2,$$

woraus folgt $v_1 = \mp \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}}$, also

$$(1) \qquad \frac{d\xi}{dt} = u_1 \pm \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}} = u_2 \pm \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}}.$$

Für einen Verdichtungsstoss muss $\varrho_2 - \varrho_1$ dasselbe Zeichen, wie v_1 und v_2, haben, und zwar für einen vorwärtslaufenden das negative, für einen rückwärtslaufenden das positive. Im erstern Falle gelten die oberen Zeichen und ϱ_1 ist grösser als ϱ_2; es ist daher, bei der zu Anfang des vorigen Artikels gemachten Annahme über die Function $\varphi(\varrho)$

$$(2) \qquad u_1 + \sqrt{\varphi'(\varrho_1)} > \frac{d\xi}{dt} > u_2 + \sqrt{\varphi'(\varrho_2)},$$

und folglich rückt die Unstetigkeitsstelle langsamer fort als die nachfolgenden und schneller als die voraufgehenden Werthe von r; r_1 und r_2 sind also in jedem Augenblicke durch die zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle geltenden Differentialgleichungen bestimmt. Dasselbe gilt, da die Werthe von s sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)} - u$ rückwärts bewegen, auch für s_2 und folglich für ϱ_2 und u_2, aber nicht für s_1. Die Werthe von s_1 und $\frac{d\xi}{dt}$ bestimmen sich aus r_1, ϱ_2 und u_2 eindeutig durch die Gleichungen (1). In der That genügt der Gleichung

$$(3) \quad 2(r_1 - r_2) = f(\varrho_1) - f(\varrho_2) + \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))}{\varrho_1 \varrho_2}}$$

nur ein Werth von ϱ_1; denn die rechte Seite nimmt, wenn ϱ_1 von ϱ_2 an in's Unendliche wächst, jeden positiven Werth nur einmal an, da sowohl $f(\varrho_1)$ als auch die beiden Factoren

$$\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}} - \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} \text{ und } \sqrt{\frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}},$$

in welche sich das letzte Glied zerlegen lässt, beständig wachsen oder doch nur der letztere Factor constant bleibt. Wenn aber ϱ_1 bestimmt ist, erhält man durch die Gleichungen (1) offenbar völlig bestimmte Werthe für u_1 und $\frac{d\xi}{dt}$.

Ganz Aehnliches gilt für einen rückwärtslaufenden Verdichtungsstoss.

6.

Wir haben eben gefunden, dass in einem fortschreitenden Verdichtungsstosse zwischen den Werthen von u und ϱ zu beiden Seiten desselben stets die Gleichung

$$(u_1 - u_2)^2 = \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))}{\varrho_1 \varrho_2}$$

stattfindet. Es fragt sich nun, was eintritt, wenn zu einer gegebenen Zeit an einer gegebenen Stelle beliebig gegebene Unstetigkeiten vorhanden sind. Es können dann von dieser Stelle, je nach den Werthen von u_1, ϱ_1, u_2, ϱ_2, entweder zwei nach entgegengesetzten Seiten laufende Verdichtungsstösse ausgehen, oder ein vorwärtslaufender, oder ein rückwärtslaufender, oder endlich kein Verdichtungsstoss, so dass die Bewegung nach den Differentialgleichungen erfolgt.

Bezeichnet man die Werthe, welche u und ϱ hinter oder zwischen den Verdichtungsstössen im ersten Augenblicke ihres Fortschreitens annehmen, durch Hinzufügung eines Accents, so ist im ersten Falle $\varrho' > \varrho_1$ und $> \varrho_2$, und man hat

$$(1) \quad \begin{aligned} u_1 - u' &= \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_1)(\varphi(\varrho') - \varphi(\varrho_1))}{\varrho' \varrho_1}}, \\ u' - u_2 &= \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_2)(\varphi(\varrho') - \varphi(\varrho_2))}{\varrho' \varrho_2}}; \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} u_1 - u_2 = &\sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_1)(\varphi(\varrho') - \varphi(\varrho_1))}{\varrho' \varrho_1}} \\ &+ \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_2)(\varphi(\varrho') - \varphi(\varrho_2))}{\varrho' \varrho_2}}. \end{aligned}$$

Es muss also, da beide Glieder der rechten Seite von (2) mit ϱ' zugleich wachsen, $u_1 - u_2$ positiv sein und

$$(u_1 - u_2)^2 > \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))}{\varrho_1 \varrho_2};$$

und umgekehrt giebt es, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, stets ein und nur ein den Gleichungen (1) genügendes Werthenpaar von u' und ϱ'.

Damit der letzte Fall eintritt und also die Bewegung sich den Differentialgleichungen gemäss bestimmen lässt, ist es nothwendig und hinreichend, dass $r_1 \leqq r_2$ und $s_1 \geqq s_2$ sei, also $u_1 - u_2$ negativ und $(u_1 - u_2)^2 \geqq (f(\varrho_1) - f(\varrho_2))^2$. Die Werthe r_1 und r_2, s_1 und s_2 treten dann, da der voraufgehende Werth mit grösserer Geschwindigkeit fortrückt, im Fortschreiten auseinander, so dass die Unstetigkeit verschwindet.

Wenn weder die ersteren, noch die letzteren Bedingungen erfüllt sind, so genügt den Anfangswerthen Ein Verdichtungsstoss, und zwar ein vorwärts oder rückwärts laufender, je nachdem ϱ_1 grösser oder kleiner als ϱ_2 ist.

In der That ist dann, wenn $\varrho_1 > \varrho_2$,

$$2(r_1 - r_2) \text{ oder } f(\varrho_1) - f(\varrho_2) + u_1 - u_2$$

positiv, — weil $(u_1 - u_2)^2 < (f(\varrho_1) - f(\varrho_2))^2$ —, und zugleich

$$\leqq f(\varrho_1) - f(\varrho_2) + \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))}{\varrho_1 \varrho_2}}$$

weil

$$(u_1 - u_2)^2 \leqq \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))}{\varrho_1 \varrho_2};$$

es lässt sich also für die Dichtigkeit ϱ' hinter dem Verdichtungsstoss ein der Bedingung (3) des vor. Art. genügender Werth finden und dieser ist $\leqq \varrho_1$. Folglich wird, da $s' = f(\varrho') - r_1$, $s_1 = f(\varrho_1) - r_1$, auch $s' \leqq s_1$, so dass die Bewegung hinter dem Verdichtungsstosse nach den Differentialgleichungen erfolgen kann.

Der andere Fall, wenn $\varrho_1 < \varrho_2$, ist offenbar von diesem nicht wesentlich verschieden.

7.

Um das Bisherige durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, wo sich die Bewegung mit den bis jetzt gewonnenen Mitteln bestimmen lässt, wollen wir annehmen, dass Druck und Dichtigkeit von einander nach dem Boyle'schen Gesetz abhängen und anfangs Dichtigkeit und Geschwindigkeit sich bei $x = 0$ sprungweise ändern, aber zu beiden Seiten dieser Stelle constant sind.

Es sind dann nach dem Obigen vier Fälle zu unterscheiden.

I. Wenn $u_1 - u_2 > 0$, also die beiden Gasmassen sich einander entgegen bewegen und $\left(\frac{u_1 - u_2}{a}\right)^2 > \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{\varrho_1 \varrho_2}$, so bilden sich zwei entgegengesetzt laufende Verdichtungsstösse. Nach Art. 6 (1) ist, wenn $\sqrt[4]{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}$ durch α und durch θ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{u_1 - u_2}{a\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)} = \theta - \frac{1}{\theta}$$

bezeichnet wird, die Dichtigkeit zwischen den Verdichtungsstössen $\varrho' = \theta\theta\sqrt{\varrho_1\varrho_2}$, und nach Art. 5 (1) hat man für den vorwärtslaufenden Verdichtungsstoss

$$\frac{d\xi}{dt} = u_2 + a\alpha\theta = u' + \frac{a}{\alpha\theta},$$

für den rückwärtslaufenden

$$\frac{d\xi}{dt} = u_1 - a\frac{\theta}{\alpha} = u' - a\frac{\alpha}{\theta};$$

die Werthe der Geschwindigkeit und Dichtigkeit sind also nach Verlauf der Zeit t, wenn

$$\left(u_1 - a\frac{\theta}{\alpha}\right)t < x < (u_2 + a\alpha\theta)t,$$

u' und ϱ', für ein kleineres x u_1 und ϱ_1 und für ein grösseres u_2 und ϱ_2.

II. Wenn $u_1 - u_2 < 0$, folglich die Gasmassen sich aus einander bewegen, und zugleich

$$\left(\frac{u_1 - u_2}{a}\right)^2 \geqq \left(\log\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2,$$

so gehen von der Grenze nach entgegengesetzten Richtungen zwei allmählich breiter werdende Verdünnungswellen aus. Nach Art. 4 ist zwischen ihnen $r = r_1$, $s = s_2$, $u = r_1 - s_2$. In der vorwärtslaufenden ist $s = s_2$ und $x - (u + a)t$ eine Function von r, deren Werth, aus den Anfangswerthen $t = 0$, $x = 0$, sich $= 0$ findet; für die rückwärtslaufende dagegen hat man $r = r_1$ und $x - (u - a)t = 0$. Die eine Gleichung zur Bestimmung von u und ϱ ist also, wenn

$$(r_1 - s_2 + a)t < x < (u_2 + a)t, \quad u = -a + \frac{x}{t},$$

für kleinere Werthe von x $r = r_1$ und für grössere $r = r_2$; die andere Gleichung ist, wenn

$$(u_1 - a)t < x < (r_1 - s_2 - a)t, \quad u = a + \frac{x}{t},$$

für ein kleineres x $s = s_1$ und für ein grösseres $s = s_2$.

III. Wenn keiner dieser beiden Fälle stattfindet und $\varrho_1 > \varrho_2$, so entsteht eine rückwärtslaufende Verdünnungswelle und ein vorwärtsschreitender Verdichtungsstoss. Für letzteren findet sich aus Art. 5 (3), wenn θ die Wurzel der Gleichung

$$\frac{2(r_1 - r_2)}{a} = 2\log\theta + \theta - \frac{1}{\theta}$$

bezeichnet, $\varrho' = \theta\theta\varrho_2$ und aus Art. 5 (1)

$$\frac{d\xi}{dt} = u_2 + a\theta = u' + \frac{a}{\theta}.$$

Nach Verlauf der Zeit t ist demnach vor dem Verdichtungsstosse, also wenn $x > (u_2 + a\theta)t$, $u = u_2$, $\varrho = \varrho_2$, hinter dem Verdichtungsstosse aber hat man $r = r_1$ und ausserdem, wenn

$$(u_1 - a)t < x < (u' - a)t, \quad u = a + \frac{x}{t},$$

für ein kleineres x $u = u_1$ und für ein grösseres $u = u'$.

IV. Wenn endlich die beiden ersten Fälle nicht stattfinden und $\varrho_1 < \varrho_2$, so ist der Verlauf ganz wie in III., nur der Richtung nach entgegengesetzt.

8.

Um unsere Aufgabe allgemein zu lösen, muss nach Art. 3 die Function w so bestimmt werden, dass sie der Differentialgleichung

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0$$

und den Anfangsbedingungen genügt.

Schliessen wir den Fall aus, dass Unstetigkeiten eintreten, so sind offenbar nach Art. 1 Ort und Zeit oder die Werthe von x und t, für welche ein bestimmter Werth r' von r mit einem bestimmten Werthe s' von s zusammentrifft, völlig bestimmt, wenn die Anfangswerthe von r und s für die Strecke zwischen den beiden Werthen r' von r und s' von s gegeben sind und überall in dem Grössengebiet (S), welches für jeden Werth von t die zwischen den beiden Werthen, wo $r = r'$ und $s = s'$, liegenden Werthe von x umfasst, die Differentialgleichungen (3) des Art. 1 erfüllt sind. Es ist also auch der Werth von w für $r = r'$, $s = s'$ völlig bestimmt, wenn w überall in dem Grössengebiet (S) der Differentialgleichung (1) genügt und für die Anfangswerthe von r und s die Werthe von $\frac{\partial w}{\partial r}$ und $\frac{\partial w}{\partial s}$, also, bis auf eine additive Constante, auch von w gegeben sind und diese Constante beliebig gewählt worden ist. Denn diese Bedingungen sind mit den obigen gleichbedeutend. Auch folgt aus Art. 3 noch, dass $\frac{\partial w}{\partial r}$ zwar zu beiden Seiten eines Werthes r'' von r, wenn dieser Werth in einer endlichen Strecke stattfindet, verschiedene Werthe annimmt, sich aber allenthalben stetig mit s ändert; ebenso ändert sich $\frac{\partial w}{\partial s}$ mit r, die Function w selbst aber sowohl mit r, als mit s allenthalben stetig.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun an die Lösung unserer Aufgabe gehen, an die Bestimmung des Werthes von w für zwei beliebige Werthe, r' und s', von r und s.

Zur Veranschaulichung denke man sich x und t als Abscisse und Ordinate eines Punkts in einer Ebene und in dieser Ebene die Curven gezogen, wo r und wo s constante Werthe hat. Von diesen Curven mögen die ersteren durch (r), die letzteren durch (s) bezeichnet und in ihnen die Richtung, in welcher t wächst, als die positive betrachtet werden. Das Grössengebiet (S) wird dann repräsentirt durch ein Stück der Ebene, welches begrenzt ist durch die Curve (r'), die Curve (s') und das zwischen beiden liegende Stück der Abscissenaxe, und es handelt sich darum, den Werth von w in dem Durchschnittspunkte der beiden ersteren aus den in letzterer Linie gegebenen Werthen zu bestimmen. Wir wollen die Aufgabe noch etwas verallgemeinern und annehmen, dass das Grössengebiet (S), statt durch diese letztere Linie, durch eine beliebige Curve c begrenzt werde, welche keine der Curven (r) und (s) mehr als einmal schneidet, und dass für die dieser Curve angehörigen Werthenpaare von r und s die Werthe von $\frac{\partial w}{\partial r}$ und $\frac{\partial w}{\partial s}$ gegeben seien. Wie sich aus der Auflösung der Aufgabe ergeben wird, unterliegen auch dann diese Werthe von $\frac{\partial w}{\partial r}$ und $\frac{\partial w}{\partial s}$ nur der Bedingung, sich stetig mit dem Ort in der Curve zu ändern, können aber übrigens willkürlich angenommen werden, während diese Werthe nicht von einander unabhängig sein würden, wenn die Curve c eine der Curven (r) oder (s) mehr als einmal schnitte.

Um Functionen zu bestimmen, welche linearen partiellen Differentialgleichungen und linearen Grenzbedingungen genügen sollen, kann man ein ganz ähnliches Verfahren anwenden, wie wenn man zur Auflösung

eines Systems von linearen Gleichungen sämmtliche Gleichungen, mit unbestimmten Factoren multiplicirt, addirt und diese Factoren dann so bestimmt, dass aus der Summe alle unbekannten Grössen bis auf eine herausfallen.

Man denke sich das Stück (S) der Ebene durch die Curven (r) und (s) in unendlich kleine Parallelogramme zerschnitten und bezeichne durch δr und δs die Aenderungen, welche die Grössen r und s erleiden, wenn die Curvenelemente, welche die Seiten dieser Parallelogramme bilden, in positiver Richtung durchlaufen werden; man bezeichne ferner durch v eine beliebige Function von r und s, welche allenthalben stetig ist und stetige Derivirten hat. In Folge der Gleichung (1) hat man dann

$$0 = \int v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \, \partial s} - m \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right) \delta r \, \delta s \tag{2}$$

über das ganze Grössengebiet (S) ausgedehnt. Es muss nun die rechte Seite dieser Gleichung nach den Unbekannten geordnet, d. h. hier, das Integral durch partielle Integration so umgeformt werden, dass es ausser bekannten Grössen nur die gesuchte Function, nicht ihre Derivirten enthält. Bei Ausführung dieser Operation geht das Integral zunächst über in das über (S) ausgedehnte Integral

$$\int w \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r \, \partial s} + \frac{\partial m v}{\partial r} + \frac{\partial m v}{\partial s} \right) \delta r \, \delta s$$

und ein einfaches Integral, welches sich, weil sich $\frac{\partial w}{\partial r}$ mit s, $\frac{\partial w}{\partial s}$ mit r und w mit beiden Grössen stetig ändert, nur über die Begrenzung von (S) erstrecken wird. Bedeuten dr und ds die Aenderungen von r und s in einem Begrenzungselemente, wenn die Begrenzung in der Richtung durchlaufen wird, welche gegen die Richtung nach Innen ebenso liegt, wie die positive Richtung in den Curven (r) gegen die positive Richtung in den Curven (s), so ist dies Begrenzungsintegral

$$= -\int \left(v \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial s} - m w \right) ds + w \left(\frac{\partial v}{\partial r} + m v \right) dr \right).$$

Das Integral durch die ganze Begrenzung von S ist gleich der Summe der Integrale durch die Curven c, (s'), (r'), welche diese Begrenzung bilden, also, wenn ihre Durchschnittspunkte durch (c, r'), (c, s'), (r', s') bezeichnet werden,

$$= \int_{c,\, r'}^{c,\, s'} + \int_{c,\, s'}^{r',\, s'} + \int_{s',\, r'}^{c,\, r'} .$$

Von diesen drei Bestandtheilen enthält der erste ausser der Function v nur bekannte Grössen, der zweite enthält, da in ihm $ds = 0$ ist, nur die unbekannte Function w selbst, nicht ihre Derivirten; der dritte Bestandtheil aber kann durch partielle Integration in

$$(vw)_{r',s'} - (vw)_{c,r'} + \int_{s',r'}^{c,r'} w\left(\frac{\partial v}{\partial s} + mv\right) ds$$

verwandelt werden, so dass in ihm ebenfalls nur die gesuchte Function w selbst vorkommt.

Nach diesen Umformungen liefert die Gleichung (2) offenbar den Werth der Function w im Punkte (r', s'), durch bekannte Grössen ausgedrückt, wenn man die Function v den folgenden Bedingungen gemäss bestimmt:

$$(3)\quad \begin{cases} 1)\ \text{allenthalben in } S\text{:}\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s} + \dfrac{\partial m v}{\partial r} + \dfrac{\partial m v}{\partial s} = 0 \\ 2)\ \text{für } r = r'\text{:}\qquad \dfrac{\partial v}{\partial s} + mv = 0 \\ 3)\ \text{für } s = s'\text{:}\qquad \dfrac{\partial v}{\partial r} + mv = 0 \\ 4)\ \text{für } r = r',\ s = s'\text{:}\ v = 1. \end{cases}$$

Man hat dann

$$(4)\qquad w_{r',s'} = (vw)_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} \left(v\left(\frac{\partial w}{\partial s} - mw\right) ds + w\left(\frac{\partial v}{\partial r} + mv\right) dr \right).$$

9.

Durch das eben angewandte Verfahren wird die Aufgabe, eine Function w einer linearen Differentialgleichung und linearen Grenzbedingungen gemäss zu bestimmen, auf die Lösung einer ähnlichen, aber viel einfacheren Aufgabe für eine andere Function v zurückgeführt; die Bestimmung dieser Function erreicht man meistens am Leichtesten durch Behandlung eines speciellen Falls jener Aufgabe nach der Fourier'schen Methode. Wir müssen uns hier begnügen, diese Rechnung nur anzudeuten und das Resultat auf anderem Wege zu beweisen. (1)

Führt man in der Gleichung (1) des vor. Art. für r und s als unabhängig veränderliche Grössen $\sigma = r + s$ und $u = r - s$ ein und wählt man für die Curve c eine Curve, in welcher σ constant ist, so lässt sich die Aufgabe nach den Regeln Fourier's behandeln, und man erhält durch Vergleichung des Resultats mit der Gleichung (4) des vor. Art., wenn $r' + s' = \sigma'$, $r' - s' = u'$ gesetzt wird,

$$v = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\mu(u - u')\frac{d\varrho}{d\sigma}\left(\psi_1(\sigma')\psi_2(\sigma) - \psi_2(\sigma')\psi_1(\sigma)\right) d\mu,$$

worin $\psi_1(\sigma)$ und $\psi_2(\sigma)$ zwei solche particulare Lösungen der Differentialgleichung $\psi'' - 2m\psi' + \mu\mu\psi = 0$ bezeichnen, dass

$$\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1' = \frac{d\sigma}{d\varrho}.$$

Bei Voraussetzung des Poisson'schen Gesetzes, nach welchem $m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{1}{\sigma}$, kann man ψ_1 und ψ_2 durch bestimmte Integrale ausdrücken, so dass man für v ein dreifaches Integral erhält, durch dessen Reduction sich ergiebt

$$v = \left(\frac{r' + s'}{r + s}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}} F\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k-1},\ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{(r - r')(s - s')}{(r + s)(r' + s')}\right).$$

Man kann nun die Richtigkeit dieses Ausdrucks leicht beweisen, indem man zeigt, dass er wirklich den Bedingungen (3) des vor. Art. genügt.

Setzt man $v = e^{-\int_{\sigma'}^{\sigma} m\,d\sigma}\, y$, so gehen diese für y über in

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r\,\partial s} + \left(\frac{dm}{d\sigma} - mm\right) y = 0$$

und $y = 1$ sowohl für $r = r'$, als für $s = s'$. Bei der Poisson'schen Annahme kann man aber diesen Bedingungen genügen, wenn man annimmt, dass y eine Function von $z = -\frac{(r - r')(s - s')}{(r + s)(r' + s')}$ sei. Denn es wird dann, wenn man $\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}$ durch λ bezeichnet, $m = \frac{\lambda}{\sigma}$, also $\frac{dm}{d\sigma} - mm = -\frac{\lambda + \lambda^2}{\sigma^2}$ und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s\,\partial r} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{d^2 y}{d\log z^2}\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{dy}{d\log z}\right).$$

Es ist folglich $v = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^\lambda y$ und y eine Lösung der Differentialgleichung

$$(1 - z)\frac{d^2 y}{d\log z^2} - z\frac{dy}{d\log z} + (\lambda + \lambda^2) z y = 0$$

oder nach der in meiner Abhandlung über die Gauss'sche Reihe eingeführten Bezeichnung eine Function

$$P\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 & \\ 0 & 1 + \lambda & 0 & z \end{pmatrix}$$

und zwar diejenige particulare Lösung, welche für $z = 0$ gleich 1 wird.

Nach den in jener Abhandlung entwickelten Transformationsprincipien lässt sich y nicht bloss durch die Functionen $P(0, 2\lambda + 1, 0)$, sondern auch durch die Functionen $P(\frac{1}{2}, 0, \lambda + \frac{1}{2})$, $P(0, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2})$ ausdrücken; man erhält daher für y eine grosse Menge von Darstellungen durch hypergeometrische Reihen und bestimmte Integrale, von denen wir hier nur die folgenden

$$y = F(1+\lambda, -\lambda, 1, z) = (1-z)^{\lambda} F\left(-\lambda, -\lambda, 1, \frac{z}{z-1}\right)$$
$$= (1-z)^{-1-\lambda} F\left(1+\lambda, 1+\lambda, 1, \frac{z}{z-1}\right)$$

bemerken, mit denen man in allen Fällen ausreicht.

Um aus diesen für das Poisson'sche Gesetz gefundenen Resultaten die für das Boyle'sche geltenden abzuleiten, muss man nach Art. 2 die Grössen r, s, r', s' um $\frac{a\sqrt{k}}{k-1}$ vermindern und dann $k=1$ werden lassen, wodurch man erhält $m = -\frac{1}{2a}$ und

$$v = e^{\frac{1}{2a}(r-r'+s-s')} \sum_0^\infty \frac{(r-r')^n (s-s')^n}{n!\, n!\, (2a)^{2n}}.$$

10.

Wenn man den im vor. Art. gefundenen Ausdruck für v in die Gleichung (4) des Art. 8 einsetzt, erhält man den Werth von w für $r=r'$, $s=s'$ durch die Werthe von w, $\frac{\partial w}{\partial r}$ und $\frac{\partial w}{\partial s}$ in der Curve c ausgedrückt; da aber bei unserm Problem in dieser Curve immer nur $\frac{\partial w}{\partial r}$ und $\frac{\partial w}{\partial s}$ unmittelbar gegeben sind und w erst durch eine Quadratur aus ihnen gefunden werden müsste, so ist es zweckmässig, den Ausdruck für $w_{r',s'}$ so umzuformen, dass unter dem Integralzeichen nur die Derivirten von w vorkommen.

Man bezeichne die Integrale der Ausdrücke $-mv\,ds + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + mv\right) dr$ und $\left(\frac{\partial v}{\partial s} + mv\right) ds - mv\,dr$, welche in Folge der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\, \partial s} + \frac{\partial\, mv}{\partial r} + \frac{\partial\, mv}{\partial s} = 0$$

vollständige Differentiale sind, durch P und Σ und das Integral von $P\,dr + \Sigma\,ds$, welcher Ausdruck wegen $\frac{\partial P}{\partial s} = -mv = \frac{\partial \Sigma}{\partial r}$ ebenfalls ein vollständiges Differential ist, durch ω.

Bestimmt man nun die Integrationsconstanten in diesen Integralen so, dass ω, $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ und $\frac{\partial \omega}{\partial s}$ für $r=r'$, $s=s'$ verschwinden, so genügt ω den Gleichungen $\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s} + 1 = v$, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial r\, \partial s} = -mv$ und sowohl für

$r=r'$, als für $s=s'$ der Gleichung $\omega = 0$ und ist, beiläufig bemerkt, durch diese Grenzbedingung und die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r\, \partial s} + m\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s} + 1\right) = 0$$

völlig bestimmt.

Führt man nun in dem Ausdrucke von $w_{r',s'}$ für v die Function ω ein, so kann man ihn durch partielle Integration in

$$(1) \qquad w_{r',s'} = w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + 1\right) \frac{\partial w}{\partial s}\, ds - \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r}\, dr \right)$$

umwandeln.

Um die Bewegung des Gases aus dem Anfangszustande zu bestimmen, muss man für c die Curve, in welcher $t=0$ ist, nehmen; in dieser Curve hat man dann $\frac{\partial w}{\partial r} = x$, $\frac{\partial w}{\partial s} = -x$, und man erhält durch abermalige partielle Integration

$$w_{r',s'} = w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} (\omega\, dx - x\, ds),$$

folglich nach Art. 3, (4) und (5)

$$(2) \qquad \begin{aligned} \left(x - (\sqrt{\varphi'(\varrho)} + u)\, t\right)_{r',s'} &= x_{r'} + \int_{x_{r'}}^{x} \frac{\partial \omega}{\partial r'}\, dx \\ \left(x + (\sqrt{\varphi'(\varrho)} - u)\, t\right)_{r',s'} &= x_{s'} - \int_{x_{r'}}^{x_{s'}} \frac{\partial \omega}{\partial s'}\, dx. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen (2) drücken aber die Bewegung nur aus, so lange $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1\right) t$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1\right) t$ von Null verschieden bleiben. Sobald eine dieser Grössen verschwindet, entsteht ein Verdichtungsstoss, und die Gleichung (1) gilt dann nur innerhalb solcher Grössengebiete, welche ganz auf einer und derselben Seite dieses Verdichtungsstosses liegen. Die hier entwickelten Principien reichen dann, wenigstens im Allgemeinen, nicht aus, um aus dem Anfangszustande die Bewegung zu bestimmen; wohl aber kann man mit Hülfe der Gleichung (1) und der Gleichungen, welche nach Art. 5 für den Verdichtungsstoss gelten, die Bewegung bestimmen, wenn der Ort des Verdichtungsstosses zur Zeit t, also ξ als Function von t, gegeben ist. Wir wollen indess dies nicht weiter verfolgen und verzichten auch auf die Behandlung des Falles, wenn die Luft durch eine feste Wand begrenzt ist, da die Rechnung keine Schwierigkeiten hat und eine Vergleichung der Resultate mit der Erfahrung gegenwärtig noch nicht möglich ist.

IX.

Selbstanzeige der vorstehenden Abhandlung.

(Göttinger Nachrichten, 1859, Nr. 19.)

Diese Untersuchung macht nicht darauf Anspruch, der experimentellen Forschung nützliche Ergebnisse zu liefern; der Verfasser wünscht sie nur als einen Beitrag zur Theorie der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen betrachtet zu sehen. Wie für die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen die fruchtbarsten Methoden nicht durch Entwicklung des allgemeinen Begriffs dieser Aufgabe gefunden worden, sondern vielmehr aus der Behandlung specieller physikalischer Probleme hervorgegangen sind, so scheint auch die Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen durch eine eingehende, alle Nebenbedingungen berücksichtigende, Behandlung specieller physikalischer Probleme am meisten gefördert zu werden, und in der That hat die Lösung der ganz speciellen Aufgabe, welche den Gegenstand dieser Abhandlung bildet, neue Methoden und Auffassungen erfordert, und zu Ergebnissen geführt, welche wahrscheinlich auch bei allgemeineren Aufgaben eine Rolle spielen werden.

Durch die vollständige Lösung dieser Aufgabe dürften die vor einiger Zeit zwischen den englischen Mathematikern Challis, Airy und Stokes lebhaft verhandelten Fragen*), soweit dies nicht schon durch Stokes**) geschehen ist, zu klarer Entscheidung gebracht worden sein, so wie auch der Streit, welcher über eine andere denselben Gegenstand betreffende Frage in der K. K. Ges. d. W. zu Wien zwischen den Herrn Petzval, Doppler und A. von Ettinghausen***) geführt wurde.

Das einzige empirische Gesetz, welches ausser den allgemeinen Bewegungsgesetzen bei dieser Untersuchung vorausgesetzt werden

*) Phil. mag. voll. 33. 34. und 35.

**) Phil. mag. vol. 33. p. 349.

***) Sitzungsberichte der K. K. Ges. d. W. vom 15. Jan., 21. Mai und 1. Juni 1852.

musste, ist das Gesetz, nach welchem der Druck eines Gases sich mit der Dichtigkeit ändert, wenn es keine Wärme aufnimmt oder abgiebt. Die schon von Poisson gemachte, aber damals auf sehr unsicherer Grundlage ruhende Annahme, dass der Druck bei der Dichtigkeit ϱ proportional ϱ^k sich ändere, wenn k das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Druck zu der bei constantem Volumen bedeutet, kann jetzt durch die Versuche von Regnault über die specifischen Wärmen der Gase und ein Princip der mechanischen Wärmetheorie begründet werden, und es schien nöthig diese Begründung des Poisson'schen Gesetzes, da sie noch wenig bekannt zu sein scheint, in der Einleitung voranzuschicken. Der Werth von k findet sich dabei $= 1{,}4101$, während die Schallgeschwindigkeit bei 0^0 C. und trockner Luft nach den Versuchen von Martins und A. Bravais*) $= \frac{332^m{,}37}{1''}$ sich ergeben und für k den Werth 1,4095 liefern würde.

Obwohl die Vergleichung der Resultate unserer Untersuchung mit der Erfahrung durch Versuche und Beobachtungen grosse Schwierigkeiten hat und gegenwärtig kaum ausführbar sein wird, so mögen diese doch, soweit es ohne Weitläufigkeit möglich ist, hier mitgetheilt werden.

Die Abhandlung behandelt die Bewegung der Luft oder eines Gases nur für den Fall, wenn anfangs und also auch in der Folge die Bewegung allenthalben gleich gerichtet ist, und in jeder auf ihrer Richtung senkrechten Ebene Geschwindigkeit und Dichtigkeit constant sind. Für den Fall, wo die anfängliche Gleichgewichtsstörung auf eine endliche Strecke beschränkt ist, ergiebt sich bekanntlich bei der gewöhnlichen Voraussetzung, dass die Druckverschiedenheiten unendlich kleine Bruchtheile des ganzen Drucks sind, das Resultat, dass von der erschütterten Stelle zwei Wellen, in deren jeder die Geschwindigkeit eine bestimmte Function der Dichtigkeit ist, ausgehen und in entgegengesetzten Richtungen mit der bei dieser Voraussetzung constanten Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)}$ fortschreiten, wenn $\varphi(\varrho)$ den Druck bei der Dichtigkeit ϱ und $\varphi'(\varrho)$ die Derivirte dieser Function bezeichnet. Etwas ganz ähnliches gilt nun für diesen Fall auch, wenn die Druckverschiedenheiten endlich sind. Die Stelle, wo das Gleichgewicht gestört ist, zerlegt sich ebenfalls nach Verlauf einer endlichen Zeit in zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen. In diesen ist die Geschwindigkeit, in der Fortpflanzungsrichtung gemessen, eine bestimmte Function $\int \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, d\log\varrho$ der Dichtigkeit, wobei die

*) Ann. de chim. et de phys. Ser. III, T. XIII, p. 5.

Integrationsconstante in beiden verschieden sein kann; in jeder ist also mit einem und demselben Werthe der Dichtigkeit stets derselbe Werth der Geschwindigkeit verbunden, und zwar mit einem grösseren Werthe ein algebraisch grösserer Werth der Geschwindigkeit. Beide Werthe rücken mit constanter Geschwindigkeit fort. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Gase ist $\sqrt{\varphi'(\varrho)}$, im Raume aber um die in der Fortpflanzungsrichtung gemessene Geschwindigkeit des Gases grösser. Unter der in der Wirklichkeit zutreffenden Voraussetzung, dass $\varphi'(\varrho)$ bei wachsendem ϱ nicht abnimmt, rücken daher grössere Dichtigkeiten mit grösserer Geschwindigkeit fort, und hieraus folgt, dass die Verdünnungswellen, d. h. die Theile der Welle, in denen die Dichtigkeit in der Fortpflanzungsrichtung wächst, der Zeit proportional an Breite zunehmen, die Verdichtungswellen aber ebenso an Breite abnehmen, und schliesslich in Verdichtungsstösse übergehen müssen. Die Gesetze, welche vor der Scheidung beider Wellen oder bei einer über den ganzen Raum sich erstreckenden Gleichgewichtsstörung gelten, so wie die Gesetze für das Fortschreiten von Verdichtungsstössen, können hier, weil dazu grössere Formeln erforderlich wären, nicht angegeben werden.

In akustischer Beziehung liefert demnach diese Untersuchung das Resultat, dass in den Fällen, wo die Druckverschiedenheiten nicht als unendlich klein betrachtet werden können, eine Aenderung der Form der Schallwellen, also des Klanges, während der Fortpflanzung eintritt. Eine Prüfung dieses Resultats durch Versuche scheint aber trotz der Fortschritte, welche in der Analyse des Klanges in neuester Zeit durch Helmholtz u. A. gemacht worden sind, sehr schwer zu sein; denn in geringeren Entfernungen ist eine Aenderung des Klanges nicht merklich, und bei grösseren Entfernungen wird es schwer sein, die mannigfachen Ursachen, welche den Klang modificiren können, zu sondern. An eine Anwendung auf die Meteorologie ist wohl nicht zu denken, da die hier untersuchten Bewegungen der Luft solche Bewegungen sind, die sich mit der Schallgeschwindigkeit fortpflanzen, die Strömungen in der Atmosphäre aber allem Anschein nach mit viel geringerer Geschwindigkeit fortschreiten.

Anmerkungen.

(1) (Zu Seite 172.) Zum leichteren Verständniss dieser sehr kurzen Andeutungen sollen folgende Bemerkungen dienen.

Die durch die Bedingungen (3) des Art. 8 definirte Function v enthält nichts mehr, was von den besonderen für die Function w geltenden Grenzbedingungen abhängt. Kann man aber unter einer speciellen Voraussetzung w bestimmen, so ergiebt umgekehrt die Formel (4) eine auch für alle anderen Fälle gültige Bestimmung von v. Es kommt dabei nicht darauf an, dass die gewählten Grenzbedingungen von w auf das mechanische Problem passen; man kann w und seine beiden Differentialquotienten auf der Curve c beliebig wählen.

Wir nehmen also für c eine Curve, in der σ einen constanten Werth hat, und nehmen auf dieser Linie $w = 0$, $\frac{dw}{d\sigma}$ aber gleich einer beliebigen Function von u.

Die Differentialgleichung (1) des Art. 8 wird nun durch Einführung von u und σ in folgende transformirt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2m\frac{\partial w}{\partial \sigma} = 0 \tag{1}$$

und ergiebt als particulare Lösungen

$$\psi \cos \mu u, \qquad \psi \sin \mu u,$$

wenn μ ein willkürlicher Parameter ist, und ψ als Function von σ durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} - 2m\frac{d\psi}{d\sigma} + \mu^2\psi = 0 \tag{2}$$

bestimmt wird. Sind ψ_1 und ψ_2 zwei particulare Lösungen dieser Gleichung, so ist nach einem bekannten Satz

$$\psi_1 \frac{d\psi_2}{d\sigma} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{d\sigma} = \text{Const.}\, e^{\int 2m\,d\sigma}$$

und da (nach Art. 2) $2m = -\frac{d \log \frac{d\varrho}{d\sigma}}{d\sigma}$ ist, so kann man die particularen Lösungen ψ_1, ψ_2 so bestimmen, dass

$$\psi_1 \frac{d\psi_2}{d\sigma} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{d\sigma} = \frac{d\sigma}{d\varrho}, \tag{3}$$

wie im Text verlangt wird.

Bezeichnen wir den constanten Werth, den σ auf der Linie c hat, ohne Index, mit σ' einen beliebigen Werth von σ, so erhalten wir ein für $\sigma' = \sigma$ der Grenzbedingung $w = 0$ genügendes w in dem Ausdruck

$$w_{\sigma', u} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (A \cos \mu u + B \sin \mu u)\,(\psi_1(\sigma')\,\psi_2(\sigma) - \psi_2(\sigma')\,\psi_1(\sigma))\,d\mu, \tag{4}$$

wenn A, B willkürliche Functionen von μ sind. Differentiirt man nach σ' und setzt dann $\sigma' = \sigma$, so folgt

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \sigma'}\right)_{\sigma, u} = \frac{-1}{\pi}\int_0^\infty (A\cos\mu u + B\sin\mu u)\,\frac{d\sigma}{d\varrho}\,d\mu\,.$$

Nun ist nach dem Fourier'schen Lehrsatz, wenn $\varphi(u)$ eine willkürliche Function von u ist,

$$\varphi(u') = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} du\,\varphi(u)\cos\mu(u-u')\,,$$

und man erhält also

$$A\cos\mu u' + B\sin\mu u' = -\frac{d\varrho}{d\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} du\,\frac{dw}{d\sigma}\cos\mu(u-u')\,.$$

Setzt man dies in (4) ein, so erhält man

$$(5)\quad w_{\sigma', u'} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du\,\frac{\partial w}{\partial \sigma}\int_0^\infty d\mu\cos\mu(u-u')\frac{d\varrho}{d\sigma}\big(\psi_1(\sigma')\psi_2(\sigma) - \psi_2(\sigma')\psi_1(\sigma)\big).$$

Nun giebt die Formel (4) des Art. 8 unter den gegenwärtigen Voraussetzungen

$$(6)\qquad w_{\sigma', u'} = -\frac{1}{2}\int_{u'-\sigma+\sigma'}^{u'+\sigma-\sigma'} \frac{\partial w}{\partial \sigma}\,v\,du\,.$$

Nimmt man, was freisteht, $\frac{dw}{d\sigma}$ nur in einer innerhalb des Intervalles $u' - \sigma + \sigma'$ und $u' + \sigma - \sigma'$ gelegenen Strecke von 0 verschieden, ausserhalb dieser Strecke $= 0$ an, so ergiebt die Vergleichung von (5) und (6) unmittelbar die Formel des Textes

$$v = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\mu(u-u')\,\frac{d\varrho}{d\sigma}\big(\psi_1(\sigma')\psi_2(\sigma) - \psi_2(\sigma')\psi_1(\sigma)\big)\,d\mu\,.$$

Die Differentialgleichung (2) wird unter Voraussetzung des Poisson'schen Gesetzes

$$\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} - \frac{2}{\sigma}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{d\psi}{d\sigma} + \mu^2\psi = 0\,.$$

Integrirt man sie durch Potenzreihen, so erhält man zwei particulare Integrale in der Form

$$\sum^n \frac{\left(-\left(\frac{\sigma\mu^{-2}}{2}\right)\right)^n}{\Pi(n)\,\Pi\left(n + \frac{1}{k} - 1\right)}\,,$$

wenn man n das eine Mal von Null, das andere Mal von $1 - \frac{1}{k-1}$ in Stufen von einer Einheit ins Unendliche wachsen lässt.

Durch Anwendung der Formel

$$\frac{1}{2i\pi}\int e^x\,x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\Pi(-\alpha)}$$

kann man diese Reihen summiren und erhält unter Weglassung des Factors $\frac{1}{2\pi i}$ für die beiden particularen Integrale

$$\left(\frac{\sigma\mu}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\int e^{\frac{\sigma\mu}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}\,x^{\frac{1}{k-1}-1}\,dx\,,$$

$$\left(\frac{\sigma\mu}{2}\right)^{1-\frac{3}{k-1}}\int e^{\frac{\sigma\mu}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}\,x^{1-\frac{1}{k-1}}\,dx\,,$$

worin die Integrationen auf complexem Wege von $-\infty$ nach $-\infty$ um den Nullpunkt herum zu nehmen sind. Diese Formeln finden sich wenigstens angedeutet in Riemann's Papieren.

X.

Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides.

(Aus dem neunten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1861.)

Für die Untersuchungen über die Bewegung eines gleichartigen flüssigen Ellipsoides, dessen Elemente sich nach dem Gesetze der Schwere anziehen, hat Dirichlet durch seine letzte von Dedekind herausgegebene Arbeit auf überraschende Weise eine neue Bahn gebrochen. Die Verfolgung dieser schönen Entdeckung hat für den Mathematiker ihren besondern Reiz, ganz abgesehen von der Frage nach den Gründen der Gestalt der Himmelskörper, durch welche diese Untersuchungen veranlasst worden sind. Dirichlet selbst hat die Lösung der von ihm behandelten Aufgabe nur in den einfachsten Fällen vollständig durchgeführt. Für die weitere Ausführung der Untersuchung ist es zweckmässig, den Differentialgleichungen für die Bewegung der flüssigen Masse eine von dem gewählten Anfangszeitpunkte unabhängige Form zu geben, was z. B. dadurch geschehen kann, dass man die Gesetze aufsucht, nach welchen die Grösse der Hauptaxen des Ellipsoides und die relative Bewegung der flüssigen Masse gegen dieselben sich ändert. Indem wir hier die Aufgabe in dieser Weise behandeln, werden wir zwar die Dirichlet'sche Abhandlung voraussetzen, müssen aber dabei zur Vermeidung von Irrungen gleich bevorworten, dass es nicht möglich gewesen ist, die dort gebrauchten Zeichen unverändert beizubehalten.

1.

Wir bezeichnen durch a, b, c die Hauptaxen des Ellipsoides zur Zeit t, ferner durch x, y, z die Coordinaten eines Elements der flüssigen Masse zur Zeit t und die Anfangswerthe dieser Grössen durch Anhängung des Index 0 und nehmen an, dass für die Anfangszeit die Hauptaxen des Ellipsoides mit den Coordinatenaxen zusammenfallen.

Den Ausgangspunkt für die Untersuchung Dirichlet's bildet bekanntlich die Bemerkung, dass man den Differentialgleichungen für die Bewegung der Flüssigkeitstheile genügen kann, wenn man die Coordinaten x, y, z linearen Ausdrücken von ihren Anfangswerthen gleichsetzt, in denen die Coefficienten blosse Functionen der Zeit sind. Diese Ausdrücke setzen wir in die Form

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= l\,\frac{x_0}{a_0} + m\,\frac{y_0}{b_0} + n\,\frac{z_0}{c_0} \\ y &= l'\,\frac{x_0}{a_0} + m'\,\frac{y_0}{b_0} + n'\,\frac{z_0}{c_0} \\ z &= l''\,\frac{x_0}{a_0} + m''\,\frac{y_0}{b_0} + n''\,\frac{z_0}{c_0}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun durch ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes (x, y, z) in Bezug auf ein bewegliches Coordinatensystem, dessen Axen in jedem Augenblicke mit den Hauptaxen des Ellipsoides zusammenfallen, so sind bekanntlich ξ, η, ζ gleich linearen Ausdrücken von x, y, z

$$(2)\qquad \begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{aligned}$$

worin die Coefficienten die Cosinus der Winkel sind, welche die Axen des einen Systems mit den Axen des andern bilden, $\alpha = \cos \xi x$, $\beta = \cos \xi y$ etc., und zwischen diesen Coefficienten finden sechs Bedingungsgleichungen statt, welche sich daraus herleiten lassen, dass durch die Substitution dieser Ausdrücke

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

werden muss.

Da die Oberfläche stets von denselben Flüssigkeitstheilchen gebildet wird, so muss

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \frac{x_0^{\,2}}{a_0^{\,2}} + \frac{y_0^{\,2}}{b_0^{\,2}} + \frac{z_0^{\,2}}{c_0^{\,2}}$$

sein; setzt man also

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\xi}{a} &= \alpha_{,}\,\frac{x_0}{a_0} + \beta_{,}\,\frac{y_0}{b_0} + \gamma_{,}\,\frac{z_0}{c_0} \\ \frac{\eta}{b} &= \alpha'_{,}\,\frac{x_0}{a_0} + \beta'_{,}\,\frac{y_0}{b_0} + \gamma'_{,}\,\frac{z_0}{c_0} \\ \frac{\zeta}{c} &= \alpha''_{,}\,\frac{x_0}{a_0} + \beta''_{,}\,\frac{y_0}{b_0} + \gamma''_{,}\,\frac{z_0}{c_0}, \end{aligned}$$

d. h. bezeichnet man in den Ausdrücken von $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$, $\frac{\zeta}{c}$ durch $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$, welche man durch Einsetzung der Werthe (1) in die Gleichungen (2) erhält, die Coefficienten durch $\alpha_{,}, \beta_{,}, \ldots, \gamma_{,}''$, so bilden diese Grössen $\alpha_{,}, \beta_{,}, \ldots, \gamma_{,}''$ ebenfalls die Coefficienten einer orthogonalen Coordinatentransformation: sie können betrachtet werden als die Cosinus der Winkel, welche die Axen eines beweglichen Coordinatensystems der $\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,}$ mit den Axen des festen Coordinatensystems der x, y, z bilden. Drückt man die Grössen x, y, z mit Hülfe der Gleichungen (2) und (3) in $\frac{x_0}{a_0}, \frac{y_0}{b_0}, \frac{z_0}{c_0}$ aus, so ergiebt sich]

$$
\begin{aligned}
l &= a\alpha\alpha_{,} + b\alpha'\alpha_{,}' + c\alpha''\alpha_{,}'' \\
m &= a\alpha\beta_{,} + b\alpha'\beta_{,}' + c\alpha''\beta_{,}'' \\
n &= a\alpha\gamma_{,} + b\alpha'\gamma_{,}' + c\alpha''\gamma_{,}'' \\[4pt]
l' &= a\beta\alpha_{,} + b\beta'\alpha_{,}' + c\beta''\alpha_{,}'' \\
m' &= a\beta\beta_{,} + b\beta'\beta_{,}' + c\beta''\beta_{,}'' \\
n' &= a\beta\gamma_{,} + b\beta'\gamma_{,}' + c\beta''\gamma_{,}'' \\[4pt]
l'' &= a\gamma\alpha_{,} + b\gamma'\alpha_{,}' + c\gamma''\alpha_{,}'' \\
m'' &= a\gamma\beta_{,} + b\gamma'\beta_{,}' + c\gamma''\beta_{,}'' \\
n'' &= a\gamma\gamma_{,} + b\gamma'\gamma_{,}' + c\gamma''\gamma_{,}''.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Wir können daher die Lage der Flüssigkeitstheilchen oder die Werthe der Grössen $l, m, \ldots, n''$ zur Zeit t als abhängig betrachten von den Grössen a, b, c und der Lage zweier beweglichen Coordinatensysteme und können zugleich bemerken, dass durch Vertauschung dieser beiden Coordinatensysteme in dem Systeme der Grössen l, m, n die Horizontalreihen mit den Verticalreihen vertauscht werden, also l, m', n'' ungeändert bleiben, während von den Grössen m und l', n und l'', n' und m'' jede in die andere übergeht. Es wird nun unser nächstes Geschäft sein, die Differentialgleichungen für die Veränderungen der Hauptaxen und die Bewegung dieser beiden Coordinatensysteme aus den in der Dirichlet'schen Abhandlung (§. 1, 1) angegebenen Grundgleichungen für die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen abzuleiten.

2.

Offenbar ist es erlaubt, in jenen Gleichungen statt der Derivirten nach den Anfangswerthen der Grössen x, y, z, welche dort durch a, b, c bezeichnet sind, die Derivirten nach den Grössen ξ, η, ζ zu setzen; denn die hierdurch gebildeten Gleichungen lassen sich als Aggregate von jenen darstellen und umgekehrt. Wir erhalten dadurch, wenn wir für $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial \zeta}$ ihre Werthe einsetzen,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma &= \varepsilon\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma' &= \varepsilon\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha'' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta'' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma'' &= \varepsilon\frac{\partial V}{\partial \zeta} - \frac{\partial P}{\partial \zeta},
\end{aligned} \tag{1}
$$

worin V das Potential, P den Druck im Punkte x, y, z zur Zeit t und ε die Constante bezeichnet, welche die Anziehung zwischen zwei Masseneinheiten in der Entfernungseinheit ausdrückt.

Es handelt sich nun zunächst darum, die Grössen links vom Gleichheitszeichen in die Form linearer Functionen von den Grössen ξ, η, ζ zu setzen, wozu einige Vorbereitungen nöthig sind.

Durch Differentiation der Gleichungen (2) erhält man, wenn man zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial t}\alpha + \frac{\partial y}{\partial t}\beta + \frac{\partial z}{\partial t}\gamma &= \xi' \\
\frac{\partial x}{\partial t}\alpha' + \frac{\partial y}{\partial t}\beta' + \frac{\partial z}{\partial t}\gamma' &= \eta' \\
\frac{\partial x}{\partial t}\alpha'' + \frac{\partial y}{\partial t}\beta'' + \frac{\partial z}{\partial t}\gamma'' &= \zeta'
\end{aligned} \tag{2}
$$

setzt,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{d\alpha}{dt}x + \frac{d\beta}{dt}y + \frac{d\gamma}{dt}z + \xi' \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{d\alpha'}{dt}x + \frac{d\beta'}{dt}y + \frac{d\gamma'}{dt}z + \eta' \\
\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{d\alpha''}{dt}x + \frac{d\beta''}{dt}y + \frac{d\gamma''}{dt}z + \zeta'
\end{aligned}
$$

und wenn man hierin x, y, z wieder durch ξ, η, ζ ausdrückt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} = {} & \left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha + \frac{d\beta}{dt}\beta + \frac{d\gamma}{dt}\gamma\right)\xi + \left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha' + \frac{d\beta}{dt}\beta' + \frac{d\gamma}{dt}\gamma'\right)\eta \\
& + \left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha'' + \frac{d\beta}{dt}\beta'' + \frac{d\gamma}{dt}\gamma''\right)\zeta + \xi' \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} = {} & \left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha + \frac{d\beta'}{dt}\beta + \frac{d\gamma'}{dt}\gamma\right)\xi + \left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha' + \frac{d\beta'}{dt}\beta' + \frac{d\gamma'}{dt}\gamma'\right)\eta \\
& + \left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha'' + \frac{d\beta'}{dt}\beta'' + \frac{d\gamma'}{dt}\gamma''\right)\zeta + \eta' \\
\frac{\partial \zeta}{\partial t} = {} & \left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha + \frac{d\beta'}{dt}\beta + \frac{d\gamma''}{dt}\gamma\right)\xi + \left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha' + \frac{d\beta''}{dt}\beta' + \frac{d\gamma''}{dt}\gamma'\right)\eta \\
& + \left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha'' + \frac{d\beta''}{dt}\beta'' + \frac{d\gamma''}{dt}\gamma''\right)\zeta + \zeta'.
\end{aligned}
$$

Nun giebt aber die Differentiation der bekannten Gleichungen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$, etc.

$$\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}+\gamma\frac{d\gamma}{dt}=0 \qquad \alpha'\frac{d\alpha'}{dt}+\beta'\frac{d\beta'}{dt}+\gamma'\frac{d\gamma'}{dt}=0$$

$$\alpha''\frac{d\alpha''}{dt}+\beta''\frac{d\beta''}{dt}+\gamma''\frac{d\gamma''}{dt}=0$$

$$(3)\qquad \begin{aligned}\frac{d\alpha'}{dt}\alpha''+\frac{d\beta'}{dt}\beta''+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma''&=-\left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha'+\frac{d\beta''}{dt}\beta'+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma'\right)\\ \frac{d\alpha''}{dt}\alpha+\frac{d\beta''}{dt}\beta+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma&=-\left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha''+\frac{d\beta}{dt}\beta''+\frac{d\gamma}{dt}\gamma''\right)\\ \frac{d\alpha}{dt}\alpha'+\frac{d\beta}{dt}\beta'+\frac{d\gamma}{dt}\gamma'&=-\left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha+\frac{d\beta'}{dt}\beta+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma\right)\end{aligned}$$

und es wird folglich, wenn man diese letzteren drei Grössen durch p, q, r bezeichnet,

$$(4)\qquad \begin{aligned}\xi'&=\frac{\partial\xi}{\partial t}-r\eta+q\zeta\\ \eta'&=r\xi+\frac{\partial\eta}{\partial t}-p\zeta\\ \zeta'&=-q\xi+p\eta+\frac{\partial\zeta}{\partial t}.\end{aligned}$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren ergiebt sich aus den Gleichungen (2)

$$(5)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial^2x}{\partial t^2}\alpha+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\beta+\frac{\partial^2z}{\partial t^2}\gamma&=\frac{\partial\xi'}{\partial t}-r\eta'+q\zeta'\\ \frac{\partial^2x}{\partial t^2}\alpha'+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\beta'+\frac{\partial^2z}{\partial t^2}\gamma'&=r\xi'+\frac{\partial\eta'}{dt}-p\zeta'\\ \frac{\partial^2x}{\partial t^2}\alpha''+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\beta''+\frac{\partial^2z}{\partial t^2}\gamma''&=-q\xi'+p\eta'+\frac{\partial\zeta'}{\partial t},\end{aligned}$$

und aus den Gleichungen Art. 1, (3), wenn $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ die Grössen bezeichnen, welche von den Functionen $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\ldots$, $\gamma_{,}''$ ebenso abhängen, wie die Grössen p, q, r von den Functionen α, β, $\ldots$, γ''

$$(6)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial\frac{\xi}{a}}{\partial t}&=r_{,}\frac{\eta}{b}-q_{,}\frac{\zeta}{c}\\ \frac{\partial\frac{\eta}{b}}{\partial t}&=p_{,}\frac{\zeta}{c}-r_{,}\frac{\xi}{a}\\ \frac{\partial\frac{\zeta}{c}}{\partial t}&=q_{,}\frac{\xi}{a}-p_{,}\frac{\eta}{b}.\end{aligned}$$

Setzt man die Werthe $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ aus (6) in (4) ein, so erhält man

$$(7)\qquad \begin{aligned}\xi'&=\frac{da}{dt}\frac{\xi}{a}+(ar_{,}-br)\frac{\eta}{b}+(cq-aq_{,})\frac{\zeta}{c}\\ \eta'&=(ar-br_{,})\frac{\xi}{a}+\frac{db}{dt}\frac{\eta}{b}+(bp_{,}-cp)\frac{\zeta}{c}\\ \zeta'&=(cq_{,}-aq)\frac{\xi}{a}+(bp-cp_{,})\frac{\eta}{b}+\frac{dc}{dt}\frac{\zeta}{c}.\end{aligned}$$

Was die geometrische Bedeutung dieser Grössen betrifft, so sind, wie leicht ersichtlich ist, ξ', η', ζ' die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes x, y, z der flüssigen Masse parallel den Axen ξ, η, ζ; $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ die ebenso zerlegten relativen Geschwindigkeiten gegen das Coordinatensystem der ξ, η, ζ; ferner in den Gleichungen (1) die Grössen auf der linken Seite die Beschleunigungen und die auf der rechten die beschleunigenden Kräfte parallel diesen Axen; endlich sind p, q, r die augenblicklichen Rotationen des Coordinatensystems der ξ, η, ζ um seine Axen und $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ haben dieselbe Bedeutung für das Coordinatensystem der $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$.

3.

Wenn man nun die Werthe der Grössen ξ', η', ζ' aus (7) in die Gleichungen (5) substituirt und mit Hülfe der Gleichungen (6) die Derivirten von $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$, $\frac{\zeta}{c}$ wieder durch die Grössen ξ, η, ζ ausdrückt, so nehmen die Grössen auf der linken Seite der Gleichungen (1) die Form linearer Ausdrücke von den Grössen ξ, η, ζ an. Auf der rechten Seite hat V die Form

$$H-A\xi^2-B\eta^2-C\zeta^2,$$

worin H, A, B, C auf bekannte Weise von den Grössen a, b, c abhängen; und man genügt ihnen daher, wenn an der Oberfläche der Druck den constanten Werth Q hat, indem man

$$P=Q+\sigma\left(1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}\right)$$

setzt und die zehn Functionen der Zeit a, b, c; p, q, r; $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ und σ so bestimmt, dass die neun Coefficienten der Grössen ξ, η, ζ auf beiden Seiten einander gleich werden und zugleich die aus der Incompressibilität folgende Bedingungsgleichung $abc=a_0b_0c_0$ befriedigt wird. Durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$ in der ersten und von $\frac{\xi}{a}$ in der zweiten Gleichung ergiebt sich

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + 2brr_{,} + 2cqq_{,} - a(r^2 + r_{,}^2 + q^2 + q_{,}^2) = 2\frac{\sigma}{a} - 2\varepsilon a A$$

$$a\frac{dr}{dt} - b\frac{dr_{,}}{dt} + 2\frac{da}{dt}r - 2\frac{db}{dt}r_{,} + apq + bp_{,}q_{,} - 2cpq_{,} = 0$$

$$a\frac{dr_{,}}{dt} - b\frac{dr}{dt} + 2\frac{da}{dt}r_{,} - 2\frac{db}{dt}r + ap_{,}q_{,} + bpq - 2cp_{,}q = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die sechs übrigen durch cyclische Versetzung der Axen, oder auch durch beliebige Vertauschungen, wenn man nur dabei beachtet, dass durch Vertauschung zweier Axen nicht bloss die ihnen entsprechenden Grössen vertauscht werden, sondern zugleich die sechs Grössen $p, q, \ldots, r_{,}$ ihr Zeichen ändern.

Man kann diesen Gleichungen eine für die weitere Untersuchung bequemere Form geben, wenn man statt der Grössen $p, p_{,}; q, q_{,}; r, r_{,}$ ihre halben Summen und Differenzen

$$u = \frac{p + p_{,}}{2}, \quad v = \frac{q + q_{,}}{2}, \quad w = \frac{r + r_{,}}{2}$$

$$u' = \frac{p - p_{,}}{2} \quad v' = \frac{q - q_{,}}{2} \quad w' = \frac{r - r_{,}}{2}$$

als unbekannte Functionen einführt.

Dadurch wird das System von Gleichungen, welchen die zehn unbekannten Functionen der Zeit genügen müssen

$$(\alpha)\begin{cases}(a-c)v^2 + (a+c)v'^2 + (a-b)w^2 + (a+b)w'^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2} = \varepsilon a A - \frac{\sigma}{a}\\ (b-a)w^2 + (b+a)w'^2 + (b-c)u^2 + (b+c)u'^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2b}{dt^2} = \varepsilon b B - \frac{\sigma}{b}\\ (c-b)u^2 + (c+b)u'^2 + (c-a)v^2 + (c+a)v'^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2c}{dt^2} = \varepsilon c C - \frac{\sigma}{c}\\ (b-c)\frac{du}{dt} + 2\frac{d(b-c)}{dt}u + (b+c-2a)vw + (b+c+2a)v'w' = 0\\ (b+c)\frac{du'}{dt} + 2\frac{d(b+c)}{dt}u' + (b-c+2a)vw' + (b-c-2a)v'w = 0\\ (c-a)\frac{dv}{dt} + 2\frac{d(c-a)}{dt}v + (c+a-2b)wu + (c+a+2b)w'u' = 0\\ (c+a)\frac{dv'}{dt} + 2\frac{d(c+a)}{dt}v' + (c-a+2b)wu' + (c-a-2b)w'u = 0\\ (a-b)\frac{dw}{dt} + 2\frac{d(a-b)}{dt}w + (a+b-2c)uv + (a+b+2c)u'v' = 0\\ (a+b)\frac{dw'}{dt} + 2\frac{d(a+b)}{dt}w' + (a-b+2c)uv' + (a-b-2c)u'v = 0\\ abc = a_0 b_0 c_0.\end{cases}$$

Die Werthe von A, B, C ergeben sich aus dem bekannten Ausdrucke für V

$$V = H - A\xi^2 - B\eta^2 - C\zeta^2 = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2+s} - \frac{\eta^2}{b^2+s} - \frac{\zeta^2}{c^2+s}\right),$$

worin

$$\Delta = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right)\left(1 + \frac{s}{c^2}\right)}.$$

Nach ausgeführter Integration dieser Differentialgleichungen hat man noch, um die Functionen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma''$ zu bestimmen, die allgemeine Lösung $\theta, \theta', \theta''$ der Differentialgleichungen

$$(\beta) \qquad \frac{d\theta}{dt} = r\theta' - q\theta'', \quad \frac{d\theta'}{dt} = -r\theta + p\theta'', \quad \frac{d\theta''}{dt} = q\theta - p\theta'$$

zu suchen, — von welchen, wie aus Art. 2, (3) hervorgeht, $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$ die drei particularen Auflösungen sind, die für $t = 0$ die Werthe 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 annehmen, — und zur Bestimmung der Functionen $\alpha_{,}, \beta_{,}, \ldots, \gamma_{,}''$ die allgemeine Lösung der simultanen Differentialgleichungen

$$(\gamma) \qquad \frac{d\theta_{,}}{dt} = r_{,}\theta_{,}' - q_{,}\theta_{,}'', \quad \frac{d\theta_{,}'}{dt} = -r_{,}\theta_{,} + p_{,}\theta_{,}'', \quad \frac{d\theta_{,}''}{dt} = q_{,}\theta_{,} - p_{,}\theta_{,}'.$$

4.

Es fragt sich nun, welche Hülfsmittel für die Integration dieser Differentialgleichungen (α), (β), (γ) die allgemeinen hydrodynamischen Principien darbieten, aus denen Dirichlet sieben Intergrale erster Ordnung der durch die Functionen $l, m, \ldots, n''$ zu erfüllenden Differentialgleichungen (§. 1. (a)) schöpfte. Die aus ihnen fliessenden Gleichungen lassen sich mit Hülfe der oben für ξ', η', ζ' gegebenen Ausdrücke leicht herleiten.

Der Satz von der Erhaltung der Flächen giebt

$$(1) \qquad \begin{aligned}(b-c)^2u + (b+c)^2u' &= g = \alpha\, g^0 + \beta\, h^0 + \gamma\, k^0\\ (c-a)^2v + (c+a)^2v' &= h = \alpha' g^0 + \beta' h^0 + \gamma' k^0\\ (a-b)^2w + (a+b)^2w' &= k = \alpha'' g^0 + \beta'' h^0 + \gamma'' k^0,\end{aligned}$$

worin die Constanten g^0, h^0, k^0, die Anfangswerthe von g, h, k, mit den Constanten $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{K}''$ in der Abhandlung von Dirichlet übereinkommen; er liefert also das aus den sechs letzten Differentialgleichungen (α) leicht zu bestätigende Resultat, dass $\theta = g$, $\theta' = h$, $\theta'' = k$ eine Lösung der Differentialgleichungen (β) ist.

Aus dem Helmholtz'schen Princip der Erhaltung der Rotation folgen die Gleichungen

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
(b-c)^2u-(b+c)^2u' &= g_{,}=\alpha_{,}\,g_{,}^{0}+\beta_{,}\,h_{,}^{0}+\gamma_{,}\,k_{,}^{0}\\
(c-a)^2v-(c+a)^2v' &= h_{,}=\alpha_{,}'\,g_{,}^{0}+\beta_{,}'\,h_{,}^{0}+\gamma_{,}'\,k_{,}^{0}\\
(a-b)^2w-(a+b)^2w' &= k_{,}=\alpha_{,}''\,g_{,}^{0}+\beta_{,}''\,h_{,}^{0}+\gamma_{,}''\,k_{,}^{0},
\end{aligned}
$$

in welchen die Constanten $g_{,}^{0}$, $h_{,}^{0}$, $k_{,}^{0}$ den Grössen $BC\mathfrak{A}$, $CA\mathfrak{B}$, $AB\mathfrak{C}$ der genannten Abhandlung gleich sind.

Der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft endlich giebt ein Integral erster Ordnung der Differentialgleichungen (α)

$$
(\mathrm{I})\qquad
\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right)\\
+(b-c)^2u^2+(c-a)^2v^2+(a-b)^2w^2\\
+(b+c)^2u'^2+(c+a)^2v'^2+(a+b)^2w'^2
\end{array}\right\}=2\varepsilon H+\text{const.}
$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgen zunächst noch zwei Integrale der Gleichungen (α)

$$(\mathrm{II})\qquad g^2+h^2+k^2=\text{const.}=\omega^2$$

$$(\mathrm{III})\qquad g_{,}^2+h_{,}^2+k_{,}^2=\text{const.}=\omega_{,}^2.$$

Ferner lassen sich von den Gleichungen (β) zwei Integrale

$$(\mathrm{IV})\qquad \theta^2+\theta'^2+\theta''^2=\text{const.}$$

$$(\mathrm{V})\qquad \theta g+\theta' h+\theta'' k=\text{const.}$$

angeben, wodurch ihre Integration *allgemein* auf eine Quadratur zurückgeführt wird. Zur Aufstellung ihrer allgemeinen Lösung ist es jedoch, da sie linear und homogen sind, nur nöthig, noch zwei von der Lösung g, h, k verschiedene *particulare* Lösungen zu suchen, für welchen Zweck man die willkürlichen Constanten in diesen beiden Integralgleichungen so wählen kann, dass sich die Rechnung vereinfacht. Giebt man beiden den Werth Null, so hat man

$$(3)\qquad \theta' h+\theta'' k=-g\theta,$$

und ferner erhält man, wenn man diese Gleichung quadrirt und dazu die Gleichung

$$-\theta'^2-\theta''^2=\theta^2$$

multiplicirt mit h^2+k^2, addirt

$$-(\theta' k-\theta'' h)^2=\omega^2\theta^2,$$

folglich

$$(4)\qquad \theta' k-\theta'' h=\omega i\theta.$$

Durch Auflösung dieser beiden linearen Gleichungen (3) und (4) findet sich

$$(5)\qquad \theta'=\frac{-gh+k\omega i}{h^2+k^2}\,\theta$$

$$(6)\qquad \theta''=\frac{-gk-h\omega i}{h^2+k^2}\,\theta$$

und durch Einsetzung dieser Werthe in die erste der Gleichungen (β)

$$\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{-g\frac{dg}{dt}}{h^2+k^2}+\frac{rk+qh}{h^2+k^2}\,\omega i$$

$$(7)\qquad \log\theta=\tfrac{1}{2}\log(h^2+k^2)+\omega i\int\frac{qh+rk}{h^2+k^2}\,dt+\text{const.}$$

Aus dieser in (5), (6) und (7) enthaltenen Lösung der Differentialgleichungen (β) erhält man eine dritte, indem man für $\sqrt{-1}$ überall $-\sqrt{-1}$ setzt, und es ist dann leicht aus den gefundenen drei particularen Lösungen die Ausdrücke für die Functionen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma''$ zu bilden.

Die geometrische Bedeutung jeder reellen Lösung der Differentialgleichungen (β) besteht darin, dass sie, mit einem geeigneten constanten Factor multiplicirt, die Cosinus der Winkel ausdrückt, welche die Axen der ξ, η, ζ zur Zeit t mit einer festen Linie machen. Diese feste Linie wird für die erste der drei eben gefundenen Lösungen durch die Normale auf der unveränderlichen Ebene der ganzen bewegten Masse gebildet, für den reellen und den imaginären Bestandtheil der beiden andern durch zwei in dieser Ebene enthaltene und auf einander senkrechte Linien. Die Cosinus der Winkel zwischen den Axen und jener Normalen sind demnach $\frac{g}{\omega}$, $\frac{h}{\omega}$, $\frac{k}{\omega}$; die Lage der Axen gegen diese Normale ergiebt sich also nach Auflösung der Gleichungen (α) ohne weitere Integration und zur vollständigen Bestimmung ihrer Lage genügt eine einzige Quadratur, z. B. die Integration

$\omega\int_0^t\frac{qh+rk}{h^2+k^2}\,dt$, welche die Drehung der durch die Normale und die Axe der ξ gehenden Ebene um die Normale giebt.

Ganz Aehnliches gilt von den Differentialgleichungen (γ). Man kann auf demselben Wege aus den beiden Integralen

$$(\mathrm{VI})\qquad \theta_{,}^2+\theta_{,}'^2+\theta_{,}''^2=\text{const.}$$

$$(\mathrm{VII})\qquad \theta_{,}g_{,}+\theta_{,}'h_{,}+\theta_{,}''k_{,}=\text{const.}$$

ihre allgemeine Lösung und folglich auch die Werthe der Grössen $\alpha_{,}, \beta_{,}, \ldots, \gamma_{,}''$ zur Zeit t ableiten, und es wird dabei nur eine Quadratur erforderlich sein. Es ergiebt sich dann schliesslich der Ort eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens zur Zeit t aus den oben (Art. 1, (1) und (4)) für die Grössen x, y, z und die Functionen $l, m, \ldots, n''$ gegebenen Ausdrücken.

5.

Wir wollen uns jetzt Rechenschaft darüber geben, was durch die Zurückführung der Differentialgleichungen zwischen den Functionen $l, m, \ldots, n''$ (der Differentialgleichungen (a) §. 1 bei Dirichlet) auf unsere Differentialgleichungen für das Geschäft der Integration gewonnen ist. Das System der Differentialgleichungen (a) ist von der sechszehnten Ordnung, und man kennt von denselben sieben Integrale erster Ordnung, wodurch es auf ein System der neunten Ordnung zurückgeführt wird. Das System (α) ist nur von der zehnten Ordnung, und man kennt von demselben noch drei Integrale erster Ordnung. Durch die hier bewirkte Umformung jener Differentialgleichungen ist also die Ordnung des noch zu integrirenden Systems von Differentialgleichungen um zwei Einheiten erniedrigt, und man hat statt dessen nur schliesslich noch zwei Quadraturen auszuführen. Diese Umformung leistet also dasselbe, wie die Auffindung von zwei Integralen erster Ordnung.

Wir bemerken indess ausdrücklich, dass hierdurch unsere Form der Differentialgleichungen nur für die Integration und die wirkliche Bestimmung der Bewegung einen Vorzug erhält. Für die allgemeinsten Untersuchungen über diese Bewegung ist dagegen diese Form der Differentialgleichungen weniger geeignet, nicht bloss, weil ihre Herleitung weniger einfach ist, sondern auch deshalb, weil der Fall der Gleichheit zweier Axen eine besondere Betrachtung erfordert. Bei Gleichheit zweier Axen tritt nämlich der besondere Umstand ein, dass die ihnen zu gebende Lage durch die Gestalt der flüssigen Masse nicht völlig bestimmt ist; sie hängt dann im Allgemeinen auch von der augenblicklichen Bewegung ab und bleibt nur dann willkürlich, wenn diese Bewegung so beschaffen ist, dass die Axen fortwährend einander gleich bleiben. Die Untersuchung dieses Falles ist zwar immer leicht und bedarf daher keiner weiteren Ausführung, kann aber in speciellen Fällen noch wieder besondere Formen annehmen, und die allgemeinen Untersuchungen, wie z. B. der allgemeine Nachweis der Möglichkeit der Bewegung (§. 2 bei Dirichlet), würden daher wegen der Menge von besonders zu behandelnden Fällen ziemlich weitläufig werden.

Ehe wir zur Behandlung von speciellen Fällen schreiten, in welchen sich die Differentialgleichungen (α) integriren lassen, ist es zweckmässig, zu bemerken, dass in einer Lösung dieser Differentialgleichungen,

wie unmittelbar aus der Form dieser Gleichungen hervorgeht, jede Zeichenänderung der Functionen $u, v, \ldots, w'$ zulässig ist, bei welcher uvw, $uv'w'$, $u'vw'$, $u'v'w$ ungeändert bleiben. Es können also erstens die Zeichen der Functionen u', v', w' gleichzeitig geändert werden, und dadurch werden die Grössen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma''$ mit den Grössen $\alpha_,, \beta_,, \ldots, \gamma_,''$, also in dem System der Grössen $l, m, \ldots, n''$ die Horizontalreihen mit den Verticalreihen vertauscht. Zweitens können gleichzeitig zwei der Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' mit den entgegengesetzten Zeichen versehen werden, und diese Aenderung lässt sich auf eine Aenderung in dem Zeichen einer Coordinatenaxe zurückführen, wobei die Bewegung in eine ihr symmetrisch gleiche übergeht. In dieser Bemerkung ist der von Dedekind gefundene Reciprocitätssatz enthalten.

6.

Wir wollen nun den Fall untersuchen, in welchem eins der Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' fortwährend gleich Null ist, also z. B. $u = u' = 0$; die geometrische Bedeutung dieser Voraussetzung ist diese, dass die Hauptaxe stets in der unveränderlichen Ebene der ganzen bewegten Masse liegt und die augenblickliche Rotationsaxe auf dieser Hauptaxe senkrecht steht.

Aus den sechs letzten Differentialgleichungen (α) folgt sogleich, dass in diesem Falle die Grössen

$$(\mu) \qquad (c-a)^2 v,\ (c+a)^2 v',\ (a-b)^2 w,\ (a+b)^2 w'$$

constant sind und die Gleichungen

$$(\nu) \qquad \begin{aligned} (b+c-2a)\,vw + (b+c+2a)\,v'w' &= 0 \\ (b-c+2a)\,vw' + (b-c-2a)\,v'w &= 0 \end{aligned}$$

stattfinden müssen.

Bei der weiteren Untersuchung ist zu unterscheiden, ob noch ein zweites der drei Grössenpaare Null ist oder nicht, und wir können im Allgemeinen nur noch bemerken, dass in Folge der Gleichungen (μ) die Grössen $h, k, h_,, k_,$ constant sind und folglich auch die Winkel zwischen den Hauptaxen und der unveränderlichen Ebene der ganzen bewegten Masse, und dass dann ferner aus den Differentialgleichungen (β) und (γ) die Verhältnissgleichungen

$$g : h : k = p : q : r$$
$$g_, : h_, : k_, = p_, : q_, : r_,$$

folgen, wodurch die Lösungen dieser Gleichungen sich vereinfachen.

Erster Fall. Nur eins der drei Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' ist gleich Null.

Wenn weder zugleich v und v', noch zugleich w und w' Null sind, folgt aus den Gleichungen (μ) und (ν)

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{v'^2}{v^2} &= \frac{(2a-b-c)(2a+b-c)}{(2a+b+c)(2a-b+c)} = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^4 \text{const.} \\ \frac{w'^2}{w^2} &= \frac{(2a-b-c)(2a-b+c)}{(2a+b+c)(2a+b-c)} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 \text{const.}, \end{aligned}$$

woraus sich mit Hinzuziehung von

$$abc = \text{const.}$$

ergiebt, dass a, b, c und folglich auch v, v', w, w' constant sind.

Setzen wir nun

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{v^2}{(2a+b+c)(2a-b+c)} &= \frac{v'^2}{(2a-b-c)(2a+b-c)} = S \\ \frac{w^2}{(2a+b+c)(2a+b-c)} &= \frac{w'^2}{(2a-b-c)(2a-b+c)} = T, \end{aligned}$$

so erhalten wir aus den drei ersten Differentialgleichungen (α) die drei Gleichungen

$$(3)\qquad (4a^2-b^2-3c^2)S + (4a^2-3b^2-c^2)T = \frac{\varepsilon A}{2} - \frac{\sigma}{2a^2}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} (b^2-c^2)T = \dfrac{\varepsilon B}{2} - \dfrac{\sigma}{2b^2} \\ (c^2-b^2)S = \dfrac{\varepsilon C}{2} - \dfrac{\sigma}{2c^2}. \end{cases}$$

Um hieraus die Werthe von S, T und σ abzuleiten, bilde man aus den Gleichungen (4) die Gleichungen

$$b^2T + c^2S = \frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta(b^2+s)(c^2+s)}$$

$$T + S = \frac{\sigma}{2b^2c^2} - \frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta(b^2+s)(c^2+s)},$$

und substituire diese Werthe in der Gleichung (3)

$$(4a^2-b^2-c^2)(T+S) - 2(b^2T+c^2S) = \frac{\varepsilon A}{2} - \frac{\sigma}{2a^2},$$

wodurch man

$$(5)\qquad \frac{D\sigma}{2a^2b^2c^2} = \frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(\frac{2s+4a^2-b^2-c^2}{(b^2+s)(c^2+s)} + \frac{1}{a^2+s}\right)$$

erhält, wenn zur Abkürzung

$$(6)\qquad 4a^4 - a^2(b^2+c^2) + b^2c^2 = D$$

gesetzt wird.

Durch Einsetzung des Werthes von σ in die Gleichungen (4) findet sich dann

$$(7)\qquad \frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}DS = \frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta(b^2+s)}\left(\frac{4a^2-c^2+b^2}{c^2+s} - \frac{b^2}{a^2+s}\right)$$

$$(8)\qquad \frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}DT = \frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta(c^2+s)}\left(\frac{4a^2-b^2+c^2}{b^2+s} - \frac{c^2}{a^2+s}\right).$$

Es bleibt nun noch zu untersuchen, welchen Bedingungen a, b, c genügen müssen, damit sich aus den Gleichungen (7) und (8) und den Gleichungen (2) für v, v', w, w' reelle Werthe ergeben.

Damit $\left(\frac{v'}{v}\right)^2$ und $\left(\frac{w'}{w}\right)^2$ nicht negativ werden, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Grösse

$$(4a^2-(b+c)^2)(4a^2-(b-c)^2) \geqq 0$$

sei. Es muss also a^2 entweder $\geqq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ oder $\leqq \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$ sein.

Wenn $a \geqq \frac{b+c}{2}$, müssen die Grössen S und T beide $\geqq 0$ sein, damit die Gleichungen (2) für v, v', w, w' reelle Werthe liefern. Man kann nun aber leicht zeigen, dass, wenn $a \geqq \frac{b+c}{2}$, D und die beiden Integrale auf der rechten Seite der Gleichungen (7) und (8) immer positiv sind. Man hat dazu nur nöthig, D in die Form zu setzen

$$a^2(4a^2-(b+c)^2) + bc(2a^2+bc)$$

und das in (7) enthaltene Integral in die Form

$$\frac{\varepsilon\pi}{2a^2b^2c^2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3}\left((4a^2-c^2)s + a^2(4a^2+b^2-c^2) - b^2c^2\right),$$

und dann zu bemerken, dass aus $a \geqq \frac{b+c}{2}$ die folgenden Ungleichheiten fliessen: $4a^2-(b+c)^2 \geqq 0$, $4a^2-c^2 > 0$, ferner

$$4a^2+b^2-c^2 \geqq (b+c)^2+b^2-c^2 = 2b(b+c),$$

und folglich

$$a^2(4a^2+b^2-c^2) \geqq 2b(b+c)a^2 \geqq \tfrac{1}{2}b(b+c)^3 > b^2c^2.$$

Aus diesen Ungleichheiten folgt, dass sowohl D, als das betrachtete Integral nur positive Bestandtheile hat, und dasselbe gilt auch von dem Integral auf der rechten Seite der Gleichung (8), welches aus diesem durch Vertauschung von b und c erhalten wird. Lassen wir nun a die Werthe von $\frac{b+c}{2}$ bis ∞ durchlaufen, so wird, wenn $b > c$, T immer positiv bleiben, S aber nur so lange $a < b$. Die Bedingungen für diesen Fall sind also, wenn b die grössere der beiden Axen b und c bezeichnet,

$$\text{(I)} \qquad \frac{b+c}{2} \leqq a \leqq b.$$

Für die Untersuchung des zweiten Falles, wenn $a^2 \leqq \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$, wollen wir annehmen, dass b die grössere der beiden Axen b und c sei, so dass $a \leqq \frac{b-c}{2}$. Es muss dann, damit v, v', w, w' reell werden, $S \leqq 0$ und $T \geqq 0$ sein. Da aus den Ungleichheiten

$$b^2 \geqq (2a+c)^2 > 4a^2 + c^2$$

hervorgeht, dass das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (8) in unserm Falle stets negativ ist, so wird die letztere Bedingung $T \geqq 0$ nur erfüllt werden, wenn $D(c^2 - a^2) \geqq 0$, also c^2 entweder $< \frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2}$, oder $\geqq a^2$ ist. Dieser Fall spaltet sich also wieder in zwei Fälle, und diese sind, da $\frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2} < a^2$, durch einen endlichen Zwischenraum getrennt, so dass von einem zum andern kein stetiger Uebergang stattfindet. Da das Integral in der Gleichung (7), so lange $c^2 \leqq a^2$ ist, wegen der beiden Ungleichheiten $c^2 + s \leqq a^2 + s$, $4a^2 - c^2 + b^2 > b^2$ nur positiv sein kann, so reduciren sich die zu erfüllenden Bedingungen im ersten dieser Fälle auf $a \leqq \frac{b-c}{2}$ oder

$$\text{(II)} \qquad c \leqq b - 2a \text{ und } c^2 < \frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2}$$

und im zweiten auf

$$\text{(III)} \quad a \leqq \frac{b-c}{2} \text{ und} \int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta(b^2+s)} \left(\frac{4a^2-c^2+b^2}{c^2+s} - \frac{b^2}{a^2+s}\right) \leqq 0.$$

Es ist leicht zu sehen, dass das Integral auf der linken Seite der letzten Ungleichheit, wenn a die Werthe von 0 bis c durchläuft, negativ bleibt, so lange $a \leqq \frac{c}{2}$ ist, während es für $a = c$ einen positiven Werth annimmt; die genaue Bestimmung der Grenzen aber, innerhalb deren diese Ungleichheit erfüllt ist, hängt, wie man sieht, von der Auflösung einer transcendenten Gleichung ab.

In Bezug auf das Zeichen von σ, welches bekanntlich entscheidet, ob die Bewegung ohne äussern Druck möglich ist, können wir bemerken, dass sich der oben gefundene Werth dieser Grösse in die Form

$$\frac{\varepsilon\pi}{D} \int_0^\infty \frac{3s^2 + 6a^2 s + D}{\Delta^3}\, ds$$

setzen lässt, und also in den Fällen I und III, wo $D > 0$, jedenfalls positiv ist, für einen negativen Werth von D aber, wenigstens so lange dieser Werth absolut genommen unter einer gewissen Grenze liegt, negativ wird.

7.

Zweiter Fall. Zwei der Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' sind gleich Null.

Wir haben nun noch den Fall zu behandeln, wenn zwei der Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' fortwährend Null sind, und also nur um eine Hauptaxe eine Rotation stattfindet.

Wenn ausser u und u' auch v und v' fortwährend Null sind, so reduciren sich die Gleichungen (μ) und (ν) auf

$$(a-b)^2 w = \text{const.} = \tau \qquad (a+b)^2 w' = \text{const.} = \tau'$$

und die ersten drei Differentialgleichungen (α) liefern daher die Gleichungen

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \frac{\tau^2}{(a-b)^3} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^3} - \tfrac{1}{2}\frac{d^2 a}{dt^2} &= \varepsilon a A - \frac{\sigma}{a} \\ \frac{\tau^2}{(b-a)^3} + \frac{\tau'^2}{(b+a)^3} - \tfrac{1}{2}\frac{d^2 b}{dt^2} &= \varepsilon b B - \frac{\sigma}{b} \\ - \tfrac{1}{2}\frac{d^2 c}{dt^2} &= \varepsilon c C - \frac{\sigma}{c}, \end{aligned}$$

welche verbunden mit

$$abc = a_0 b_0 c_0$$

die Grössen a, b, c und σ als Functionen der Zeit bestimmen. Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft giebt für diese Differentialgleichungen das Integral erster Ordnung

$$\text{(2)} \quad \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right) + \frac{\tau^2}{(a-b)^2} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^2} = 2\varepsilon H + \text{const.},$$

woraus unmittelbar hervorgeht, dass wenn τ nicht Null ist, die Hauptaxen a und b nie einander gleich werden können.

Ausser den schon von Mac Laurin und Dirichlet untersuchten Fällen, wenn $a = b$, lässt noch der Fall, wenn die Grössen a, b, c constant sind, eine Bestimmung der Bewegung in geschlossenen Ausdrücken zu. In diesem Falle erhält man aus (1) durch Elimination von σ die beiden Gleichungen

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\tau'^2}{(b+a)^3} + \frac{\tau^2}{(b-a)^3} &= \frac{\varepsilon\pi}{b}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\,\frac{(b^2-c^2)s}{(b^2+s)(c^2+s)} = K \\
\frac{\tau'^2}{(b+a)^3} - \frac{\tau^2}{(b-a)^3} &= \frac{\varepsilon\pi}{a}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\,\frac{(a^2-c^2)s}{(a^2+s)(c^2+s)} = L,
\end{aligned}
$$

worin die Integrale auf der rechten Seite durch K und L bezeichnet werden mögen; sie lassen sich auch in die Form setzen

$$
(4) \qquad w'^2 = \frac{\tau'^2}{(b+a)^4} = \frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(\frac{s+ab}{(a^2+s)(b^2+s)} - \frac{c^2}{ab(c^2+s)}\right)
$$

$$
(5) \qquad w^2 = \frac{\tau^2}{(b-a)^4} = \frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(\frac{s-ab}{(a^2+s)(b^2+s)} + \frac{c^2}{ab(c^2+s)}\right).
$$

Nehmen wir an, dass b, wie in den früher betrachteten Fällen, die grössere der beiden Axen a und b bezeichne, so liefern diese beiden Gleichungen dann und auch nur dann für τ^2 und τ'^2 positive Werthe, wenn K positiv und abgesehen vom Zeichen grösser als L ist; und es ist klar, dass die erste Bedingung erfüllt ist, so lange $c < b$. Der zweiten Bedingung wird genügt, wenn $c = a$, also $L = 0$ ist, und folglich auch, da K und L sich mit c stetig ändern, innerhalb eines endlichen Gebiets zu beiden Seiten dieses Werthes. Dieses erstreckt sich aber nicht bis zu den Werthen b und 0; denn für $c = b$ würde τ'^2 negativ werden, für ein unendlich kleines c aber τ^2, da dann

$$
\frac{K}{c} = \varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{b^2}{a^2}s\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{L}{c} = \varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{a^2}{b^2}s\right)^{\frac{1}{2}}}
$$

und folglich $L > K$ wird. Wächst b, während a und c endlich bleiben, in's Unendliche, so kann L nur dann kleiner als K bleiben, wenn zugleich $a^2 - c^2$ in's Unendliche abnimmt; beide Grenzen für c sind also dann nur unendlich wenig von a verschieden. Wenn dagegen b seiner unteren Grenze a unendlich nahe kommt, so convergirt die obere Grenze für c, wo $\tau'^2 = 0$ wird, gegen a, die untere Grenze aber gegen einen Werth, für welchen das Integral auf der rechten Seite von (5) verschwindet. Zur Bestimmung dieses Werthes erhält man, wenn man $\frac{c}{a} = \sin\psi$ setzt, die Gleichung

$$
(-5 + 2\cos 2\psi + \cos 4\psi)(\pi - 2\psi) + 10\sin 2\psi + 2\sin 4\psi = 0,
$$

und diese hat zwischen $\psi = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ nur eine Wurzel, welche

$$
\frac{c}{a} = 0{,}303327\,..
$$

giebt. Für $b = a$ kann freilich c jeden Werth zwischen 0 und b annehmen, da dann τ^2 wegen des Factors $b - a$ immer Null wird. Man erhält dann den von Mac Laurin untersuchten Fall, während sich für $w^2 = w'^2$ die beiden von Jacobi und Dedekind gefundenen Fälle ergeben.

Der eben behandelte Fall fällt für $b = a$ mit dem Falle (I) des vorigen Artikels zusammen und, wenn

$$
\frac{w^2}{(b+c+2a)(b-c+2a)} = \frac{w'^2}{(b+c-2a)(b-c-2a)},
$$

mit dem Falle (III). Von den bisher gefundenen vier Fällen, in denen das flüssige Ellipsoid während der Bewegung seine Form nicht ändert, hängen also diese drei Fälle stetig unter einander zusammen, während der Fall (II) isolirt bleibt.

8.

Die Untersuchung, ob ausser diesen vier Fällen noch andere vorhanden sind, in denen die Hauptaxen während der Bewegung constant bleiben, führt auf eine ziemlich weitläufige Rechnung, welche wir nur kurz andeuten wollen, da sie nur ein negatives Resultat liefert.

Aus der Voraussetzung, dass a, b, c constant sind, kann man zunächst leicht folgern, dass σ constant ist, indem man die drei ersten Differentialgleichungen (α), multiplicirt mit a, b, c, zu einander addirt und dann die Integralgleichung I, Art. 4, also den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, benutzt.

Durch Differentiation dieser drei Gleichungen erhält man dann ferner, wenn man die Werthe von $\frac{du}{dt}, \frac{du'}{dt}, \dots, \frac{dw'}{dt}$ aus den sechs letzten Differentialgleichungen (α) einsetzt, die drei Gleichungen

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&(b-c)\,u\,(vw - v'w') + (b+c)\,u'\,(v'w - vw') = 0 \\
&(c-a)\,v\,(wu - w'u') + (c+a)\,v'\,(w'u - wu') = 0 \\
&(a-b)\,w\,(uv - u'v') + (a+b)\,w'\,(u'v - uv') = 0,
\end{aligned}
$$

von denen eine eine Folge der übrigen ist.

I. Wenn nun keine von den sechs Grössen $u, u', \dots, w'$ Null ist, folgt aus diesen Gleichungen die Gleichheit der folgenden drei Grössenpaare, deren Werthe wir durch $2a'$, $2b'$, $2c'$ bezeichnen wollen:

$$
\begin{aligned}
(a-c)\frac{v}{v'} + (a+c)\frac{v'}{v} &= (a-b)\frac{w}{w'} + (a+b)\frac{w'}{w} = 2a' \\
(b-a)\frac{w}{w'} + (b+a)\frac{w'}{w} &= (b-c)\frac{u}{u'} + (b+c)\frac{u'}{u} = 2b' \\
(c-b)\frac{u}{u'} + (c+b)\frac{u'}{u} &= (c-a)\frac{v}{v'} + (c+a)\frac{v'}{v} = 2c'.
\end{aligned}
$$

Es ergiebt sich dann $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, $b'^2 - c'^2 = b^2 - c^2$, so dass wir

$$aa - a'a' = bb - b'b' = cc - c'c' = \theta$$

setzen können, und aus den drei ersten Differentialgleichungen (α)

$$2\pi a' = \text{const.}, \quad 2\chi b' = \text{const.}, \quad 2\varrho c' = \text{const.},$$

wenn wir $vv' + ww'$, $ww' + uu'$, $uu' + vv'$ zur Abkürzung durch π, χ, ϱ bezeichnen. Aus diesen Gleichungen und der aus den Integralgleichungen II und III leicht herzuleitenden Gleichung

$$(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)\pi + (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)\chi + (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)\varrho$$
$$= \tfrac{1}{4}(\omega^2 - \omega_{,}^2)$$

folgt, wenn nicht $a = b = c$, dass θ und folglich $u, u', \ldots, w'$ constant sein müssen. Es ergiebt sich aber leicht, dass dann die sechs letzten Differentialgleichungen (α) nicht erfüllt werden können; und hierdurch ist, wenn nicht alle drei Axen einander gleich sind, die Unzulässigkeit der Annahme, dass $u, u', \ldots, w'$ sämmtlich von Null verschieden sind, erwiesen.

Die Annahme $a = b = c$ würde auf den Fall einer ruhenden Kugel führen; u', v', w' ergeben sich $= 0$, u, v, w aber bleiben ganz willkürlich, was davon herrührt, dass die Lage der Axen in jedem Augenblicke willkürlich geändert werden kann.

II. Es bleibt also nur die Annahme übrig, dass eine der Grössen $u, u', \ldots, w'$ Null ist, und diese zieht, wie wir gleich sehen werden, immer die früher untersuchte Voraussetzung nach sich, dass eins der drei Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' verschwinde.

1. Wenn eine der Grössen u', v', w', z. B. $u' = 0$ ist, folgen aus (1) die Gleichungen

$$(b - c)uvw = 0, \quad (b - c)uv'w' = 0$$

und diese lassen nur eine von den folgenden Annahmen zu: erstens die früher untersuchte Voraussetzung, zweitens $b = c$, drittens $v = 0$ und $w' = 0$ oder $v' = 0$ und $w = 0$, was nicht wesentlich verschieden ist.

Wenn $b = c$, bleibt u ganz willkürlich und kann also auch $= 0$ gesetzt werden, wodurch der früher untersuchte Fall eintritt.

Wenn $v = 0$ und $w' = 0$, erhält man aus den Differentialgleichungen (α)

$$(b - c - 2a)uv'w = 0,\ (c + a - 2b)uv'w = 0,\ (a - b + 2c)uv'w = 0,$$

und, wenn man die erste dieser Gleichungen zur zweiten addirt,

$$-(a + b)uv'w = 0;$$

es muss also ausser den Grössen u', v, w' noch eine der Grössen u, v', w Null sein, wodurch wieder der früher untersuchte Fall eintritt.

2. Wenn endlich eine der Grössen u, v, w, z. B. $u = 0$ ist, folgt aus den Gleichungen (1)

$$u'v'w = 0, \quad u'vw' = 0$$

und diese Gleichungen führen entweder zu unserer früheren Voraussetzung, oder zu der Annahme, $u = v' = w' = 0$, welche von der eben untersuchten $u' = v = w' = 0$ nicht wesentlich verschieden ist, oder endlich zu der Annahme $u = v = w = 0$. Unter dieser Voraussetzung aber geben die Differentialgleichungen (α) $v'w' = w'u' = u'v' = 0$, und es müssen also noch zwei von den Grössen u', v', w' Null sein, was wieder den früher behandelten Fall liefert.

Es hat sich also ergeben, dass mit der Beständigkeit der Gestalt nothwendig eine Beständigkeit des Bewegungszustandes verbunden ist d. h., dass allemal, wenn die flüssige Masse fortwährend denselben Körper bildet, auch die relative Bewegung aller Theile dieses Körpers immerfort dieselbe bleibt. Die absolute Bewegung im Raume kann man sich in diesem Falle aus zwei einfacheren zusammengesetzt denken, indem man sich zuerst der flüssigen Masse eine innere Bewegung ertheilt denkt, bei welcher sich die Flüssigkeitstheilchen in ähnlichen, parallelen und auf einem Hauptschnitte senkrechten Ellipsen bewegen, und dann dem ganzen System eine gleichförmige Rotation um eine in diesem Hauptschnitte liegende Axe. Wenn dieser Hauptschnitt, wie oben angenommen, senkrecht zur Hauptaxe a ist, so sind die Cosinus der Winkel zwischen der Umdrehungsaxe und den Hauptaxen $0, \frac{h}{\omega}, \frac{k}{\omega}$ und die Umdrehungszeit $\frac{2\pi}{\sqrt{q^2 + r^2}}$. Ferner sind $0, b\frac{h_{,}}{\omega_{,}}, c\frac{k_{,}}{\omega_{,}}$ die auf die Hauptaxen bezogenen Coordinaten des Endpunkts der augenblicklichen Rotationsaxe, und bei der innern Bewegung sind die elliptischen Bahnen der Flüssigkeitstheilchen der in diesem Punkte an das Ellipsoid gelegten Tangentialebene parallel, so dass ihre Mittelpunkte in dieser Rotationsaxe liegen. Die Theilchen bewegen sich in diesen Bahnen so, dass die nach den Mittelpunkten gezogenen Radienvectoren in gleichen Zeiten gleiche Flächen durchstreichen, und durchlaufen sie in der Zeit $\frac{2\pi}{\sqrt{q_{,}^2 + r_{,}^2}}$.

9.

Wir kehren jetzt zurück zur Betrachtung der Bewegung der flüssigen Masse in dem Falle, wenn u, u'; v, v' fortwährend Null sind und also nur um eine Hauptaxe eine Rotation stattfindet, und bemerken zunächst, dass sich den Gleichungen (1) Art. 7, nach welchen sich die Hauptaxen in diesem Falle ändern, noch eine andere anschaulichere mechanische Bedeutung geben lässt. Man kann sie nämlich betrachten als die Gleichungen für die Bewegung eines materiellen Punktes (a, b, c) von der Masse 1, der gezwungen ist auf einer durch die Gleichung $abc =$ const. bestimmten Fläche zu bleiben und von Kräften getrieben wird, deren Potentialfunction der Grösse

$$\frac{\tau^2}{(a-b)^2} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^2} - 2\varepsilon H$$

dem Werthe nach gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt ist.

Bezeichnen wir diese Grösse mit G, so lassen sich die Gleichungen für beide Bewegungen in die Form setzen:

$$(1) \qquad \frac{d^2a}{dt^2}\,\delta a + \frac{d^2b}{dt^2}\,\delta b + \frac{d^2c}{dt^2}\,\delta c + \delta G = 0$$

für alle unendlich kleinen Werthe von δa, δb, δc, welche der Bedingung $abc =$ const. genügen; und der Satz von der Erhaltung der mechanischen Kraft giebt

$$\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right) + G = \text{const.},$$

wonach der von der Formänderung der flüssigen Masse unabhängige Theil der mechanischen Kraft $= G$ ist.

Damit a, b, c und folglich Form und Bewegungszustand des flüssigen Ellipsoids constant bleiben, wenn $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ Null sind, ist es offenbar nothwendig und hinreichend, dass die Variation erster Ordnung der Function G von den veränderlichen Grössen a, b, c, zwischen welchen die Bedingung $abc =$ const. stattfindet, verschwinde, was auf die Gleichungen (3) oder (4) und (5) des Art. 7 führt. Diese Beständigkeit des Bewegungszustandes wird aber nur eine labile sein, wenn der Werth der Function kein Minimumwerth ist; es lassen sich dann immer beliebig kleine Aenderungen des Zustandes der flüssigen Masse angeben, welche eine völlige Aenderung desselben zur Folge haben.

Die directe Untersuchung der Variation zweiter Ordnung für den Fall, wenn die Variation erster Ordnung der Function G verschwindet, würde sehr verwickelt werden; es lässt sich jedoch die Frage, ob die Function für diesen Fall einen Minimumwerth habe, auf folgendem Wege entscheiden.

Zunächst lässt sich leicht zeigen, dass die Function immer, welche Werthe auch τ^2, τ'^2 und a, b, c haben mögen, für ein System von Werthen der unabhängig veränderlichen Grössen ein Minimum haben müsse; es folgt dies offenbar aus den drei Umständen, dass erstens die Function G für den Grenzfall, wenn die Axen unendlich klein oder

unendlich gross werden, sich einem Grenzwerth nähert, der nicht negativ ist, dass zweitens sich immer Werthe von a, b, c angeben lassen, für welche G negativ wird und dass drittens G nie negativ unendlich werden kann. Diese drei Eigenschaften der Function G ergeben sich aber aus bekannten Eigenschaften der Function H. Die Function H erhält ihren grössten Werth in dem Fall, wenn die flüssige Masse die Gestalt einer Kugel annimmt, nämlich den Werth $2\pi\varrho^2$, wenn ϱ den Radius dieser Kugel, also $\sqrt[3]{abc}$ bezeichnet; ferner wird H unendlich klein, wenn eine der Axen unendlich gross und folglich wenigstens Eine andere unendlich klein wird, jedoch so, dass, wenn b in's Unendliche wächst, Hb nicht unendlich klein wird, und folglich in der Function G, wenn nicht zugleich a in's Unendliche wächst, der negative Bestandtheil schliesslich immer den positiven überwiegt.

Wenn τ^2 nicht Null ist, muss schon unter den Werthen von a, b, c, welche der Bedingung $b > a$ genügen, ein Werthensystem enthalten sein, für welches die Function ein Minimum wird; denn dann sind die obigen drei Bedingungen, aus welchen die Existenz eines Minimums folgt, schon für dieses Grössengebiet erfüllt, da G auch für den Grenzfall $a = b$ nicht negativ wird.

Man kann nun ferner untersuchen, wie viele Lösungen die Gleichungen (3) Art. 7 zulassen, welche das Verschwinden der Variation erster Ordnung bedingen. Diese Untersuchung lässt sich leicht führen, wenn man die Werthe der aus ihnen sich ergebenden Ausdrücke für τ^2 und τ'^2 auch für complexe Werthe der Grössen a, b, c in Betracht zieht. Wir können jedoch diese Untersuchung in die gegenwärtige Abhandlung nicht aufnehmen und müssen uns begnügen, das Resultat derselben anzugeben, dessen wir in der Folge bedürfen.

Wenn τ^2 nicht Null ist, lassen die Gleichungen (3) auf jeder Seite von $b = a$ nur Eine Lösung zu; die Variation erster Ordnung verschwindet also auf jeder Seite dieser Gleichung nur für ein Werthensystem, und die Function G muss für dieses ihr Minimum haben, welches wir durch G^* bezeichnen wollen.

Wenn τ^2 Null ist, verschwindet die Variation erster Ordnung immer für $b = a$ und einen Werth von c, der für $\tau'^2 = 0$ gleich a ist und mit wachsendem τ'^2 beständig abnimmt. Die Variation zweiter Ordnung lässt sich für dieses Werthensystem leicht in die Form eines Aggregats von $(\delta a + \delta b)^2$ und $(\delta a - \delta b)^2$ setzen, und hierin ist der Coefficient von $(\delta a + \delta b)^2$ immer positiv, da die Function, wie aus den früheren Untersuchungen bekannt ist, unter allen Werthen, die sie für $b = a$ annehmen kann, hier ihren kleinsten Werth hat.

Der Coefficient von $(\delta a - \delta b)^2$ aber ist

$$\frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(\frac{s-ab}{(a^2+s)(b^2+s)}+\frac{c^2}{ab(c^2+s)}\right),$$

also nur positiv, wenn $\frac{c}{a} > 0{,}303327\ldots$ und folglich $\tau'^2 < \varepsilon\pi\varrho^4 . 8{,}64004\ldots$, aber negativ, wenn $\frac{c}{a}$ diesen Werth überschreitet.

Die Function G hat also für dieses Werthensystem nur im ersten Falle ein Minimum (G^*), und die Untersuchung der Gleichungen (3) zeigt, dass die Variation erster Ordnung dann nur für dieses Werthensystem verschwindet; im letztern Falle aber hat sie einen Sattelwerth; sie muss dann nothwendig noch für zwei Werthensysteme ein Minimum (G^*) haben, und aus der Untersuchung der Gleichungen (3) folgt, dass die Variation erster Ordnung nur noch für zwei Werthensysteme verschwindet, welche durch Vertauschung von b und a aus einander erhalten werden.

Aus dieser Untersuchung ergiebt sich also, dass in dem schon seit Mac Laurin bekannten Falle der Rotation eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoids um seine kleinere Axe die Beständigkeit des Bewegungszustandes nur labil ist, sobald das Verhältniss der kleinern Axe zu den andern kleiner ist als $0{,}303327\ldots$; bei der geringsten Verschiedenheit der beiden andern würde in diesem Falle die flüssige Masse Form und Bewegungszustand völlig ändern und ein fortwährendes Schwanken um den Zustand eintreten, welcher dem Minimum der Function G entspricht. Dieser besteht in einer gleichförmigen Umdrehung eines ungleichaxigen Ellipsoids um seine kleinste Axe verbunden mit einer gleichgerichteten innern Bewegung, bei welcher die Theilchen sich in einander ähnlichen zur Umdrehungsaxe senkrechten Ellipsen bewegen. Die Umlaufszeit ist dabei der Umdrehungszeit gleich, so dass jedes Theilchen schon nach einer halben Umdrehung des Ellipsoids in seine Anfangslage zurückkehrt.

10.

Wenn die mechanische Kraft des Systems,

$$\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{db}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)_0^2\right)+G_0=\Omega,$$

welche offenbar nicht kleiner als G^* sein kann, negativ ist, so kann die Form des Ellipsoids nur innerhalb eines endlichen durch die Ungleichheit $G \leq \Omega$ begrenzten Gebiets fortwährend schwanken.

Für den Fall, dass $\Omega - G^*$ als unendlich klein betrachtet werden kann, können wir diese Schwankungen leicht untersuchen.

Denken wir uns in der Function G für c seinen Werth aus der Gleichung $abc = a_0 b_0 c_0$ substituirt, so giebt die Gleichung (1) des vorigen Artikels

$$\frac{d^2a}{dt^2}-\frac{c}{a}\frac{d^2c}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial a}=0,\quad \frac{d^2b}{dt^2}-\frac{c}{b}\frac{d^2c}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial b}=0.$$

Die Werthe von a, b, c können nun stets nur unendlich wenig von den Werthen, die dem Minimum von G entsprechen, abweichen, und wenn wir die Abweichungen zur Zeit t mit δa, δb, δc bezeichnen und die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen, so erhalten wir zwischen diesen die Gleichungen

$$\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{b}+\frac{\delta c}{c}=0$$

$$(1)\qquad \frac{d^2\delta a}{dt^2}-\frac{c}{a}\frac{d^2\delta c}{dt^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial a^2}\delta a+\frac{\partial^2 G}{\partial a\partial b}\delta b=0$$

$$\frac{d^2\delta b}{dt^2}-\frac{c}{b}\frac{d^2\delta c}{dt^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial b^2}\delta b+\frac{\partial^2 G}{\partial a\partial b}\delta a=0,$$

welchen man bekanntlich genügen kann, wenn man $\frac{d^2\delta a}{dt^2} = -\mu\mu\delta a$, $\frac{d^2\delta b}{dt^2} = -\mu\mu\delta b$, also auch $\frac{d^2\delta c}{dt^2} = -\mu\mu\delta c$ setzt und dann die Constante $\mu\mu$ so bestimmt, dass Eine eine Folge der übrigen wird. Die letztere Bedingung für $\mu\mu$ kommt mit der Bedingung überein, den Ausdruck zweiten Grades von den Grössen δa, δb

$$2\delta^2 G - \mu\mu(\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2)$$

zu einem Quadrat eines linearen Ausdrucks von diesen Grössen zu machen; und dieser genügen, da $\delta^2 G$ und $\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2$ wesentlich positiv sind, immer zwei positive Werthe von $\mu\mu$, welche einander gleich werden, wenn $\delta^2 G$ und $\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2$ sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Diese beiden Werthe von $\mu\mu$ geben zwei Lösungen der Differentialgleichungen (1), bei denen sich δa, δb, δc einer periodischen Function der Zeit von der Form $\sin(\mu t + \text{const.})$ proportional ändern, und aus denen sich ihre allgemeine Lösung zusammensetzen lässt.

Jede einzeln genommen liefert periodische unendlich kleine Oscillationen der Gestalt und des Bewegungszustandes. Hieraus würde freilich nur folgen, dass es zwei Arten von Oscillationen giebt, welche sich desto mehr periodischen nähern, je kleiner sie sind; es ergiebt sich jedoch die Existenz von endlichen periodischen Schwingungen aus folgender Betrachtung.

Wenn Ω negativ ist, muss offenbar a einen und denselben Werth mehr als einmal annehmen, und betrachten wir die Bewegung von dem Augenblicke an, wo a einen solchen Werth zum erstenmal annimmt, so wird die Bewegung durch die Anfangswerthe $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ und b völlig bestimmt sein; es sind also auch die Werthe, welche diese Grössen erhalten, wenn a später wieder diesen Werth annimmt, Functionen von ihren Anfangswerthen. Diese Functionen wollen wir zusammengenommen durch χ bezeichnen. Die Bewegung wird periodisch sein, wenn ihre Werthe den Anfangswerthen gleich sind. In Folge der Gleichung $abc =$ const. und des Satzes von der lebendigen Kraft müssen aber, wenn b und $\frac{da}{dt}$ ihre Anfangswerthe wieder annehmen, auch c, $\frac{db}{dt}$ und $\frac{dc}{dt}$ wieder ihren Anfangswerthen gleich werden. Es sind also hierzu nur zwei Bedingungen zu erfüllen; und man kann, indem man die Derivirten der Functionen χ für den Fall unendlich kleiner Schwingungen bildet, zeigen, dass diese Bedingungsgleichungen sich nicht widersprechen und innerhalb eines endlichen Gebiets reelle Wurzeln haben.

Die Grössen a, b, c lassen sich für diesen Fall periodischer Schwingungen als Function der Zeit durch Fourier'sche Reihen ausdrücken, in welchen freilich sämmtliche Constanten, den von Dirichlet behandelten Fall ausgenommen, nur näherungsweise bestimmt werden können. Dieses kann z. B. dadurch geschehen, dass man die oben für den Fall unendlich kleiner Schwingungen gemachte Entwicklung auf Glieder höherer Ordnung ausdehnt.

Es schien uns der Mühe werth, diese Bewegungen, welche den Bewegungen, bei denen Gestalt und Bewegungszustand constant sind, an Einfachheit zunächst stehen, wenigstens einer oberflächlichen Betrachtung zu unterwerfen. Wir wollen nun die Untersuchung, welche wir im vorigen Artikel für den Fall, wenn nur um eine Hauptaxe eine Rotation stattfindet, ausgeführt haben, auf alle der Dirichlet'schen Voraussetzung genügenden Bewegungen ausdehnen.

11.

Um für diesen Zweck die Differentialgleichungen (α) in eine übersichtlichere Form zu bringen, wollen wir statt der Grössen $u, v, \dots, w'$ die Grössen $g, h, \dots, k_{,}$ einführen und die Bedeutung von G dahin verallgemeinern, dass wir dadurch den Ausdruck

$$\frac{1}{4}\left\{\begin{matrix}\left(\frac{g+g_{,}}{b-c}\right)^2+\left(\frac{h+h_{,}}{c-a}\right)^2+\left(\frac{k+k_{,}}{a-b}\right)^2+\\ \left(\frac{g-g_{,}}{b+c}\right)^2+\left(\frac{h-h_{,}}{c+a}\right)^2+\left(\frac{k-k_{,}}{a+b}\right)^2\end{matrix}\right\}-2\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{a_0b_0c_0\,ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},$$

also auch jetzt den von der Formänderung unabhängigen Theil der mechanischen Kraft bezeichnen.

Es wird dann

$$p=\frac{\partial G}{\partial g},\ q=\frac{\partial G}{\partial h},\ r=\frac{\partial G}{\partial k}$$
$$p_{,}=\frac{\partial G}{\partial g_{,}},\ q_{,}=\frac{\partial G}{\partial h_{,}},\ r_{,}=\frac{\partial G}{\partial k_{,}}$$

und die letzten sechs Differentialgleichungen (α) lassen sich daher in die Form setzen

$$(1)\qquad \begin{aligned}\frac{dg}{dt}&=h\frac{\partial G}{\partial k}-k\frac{\partial G}{\partial h}, & \frac{dg_{,}}{dt}&=h_{,}\frac{\partial G}{\partial k_{,}}-k_{,}\frac{\partial G}{\partial h_{,}}\\ \frac{dh}{dt}&=k\frac{\partial G}{\partial g}-g\frac{\partial G}{\partial k}, & \frac{dh_{,}}{dt}&=k_{,}\frac{\partial G}{\partial g_{,}}-g_{,}\frac{\partial G}{\partial k_{,}}\\ \frac{dk}{dt}&=g\frac{\partial G}{\partial h}-h\frac{\partial G}{\partial g}, & \frac{dk_{,}}{dt}&=g_{,}\frac{\partial G}{\partial h_{,}}-h_{,}\frac{\partial G}{\partial g_{,}},\end{aligned}$$

während die drei ersten in

$$(2)\quad \frac{d^2a}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial a}-2\frac{\sigma}{a}=0,\ \frac{d^2b}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial b}-2\frac{\sigma}{b}=0,\ \frac{d^2c}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial c}-2\frac{\sigma}{c}=0$$

übergehen. Wir bemerken zugleich, dass aus der Integralgleichung II, wenn $\omega=0$, drei Integralgleichungen, $g=0$, $h=0$, $k=0$, folgen, d. h., dass diese Grössen immer Null bleiben, wenn sie anfangs Null sind. Dasselbe gilt natürlich auch von den Grössen $g_{,}$, $h_{,}$, $k_{,}$.

Aus den Differentialgleichungen (1) und (2) ist nun leicht ersichtlich, dass das Verschwinden der Variation erster Ordnung der Function G von den neun veränderlichen Grössen $a, b, \dots, k_{,}$, zwischen welchen die drei Bedingungen

$$abc=\text{const.},\quad g^2+h^2+k^2=\omega^2,\quad g_{,}^2+h_{,}^2+k_{,}^2=\omega_{,}^2$$

stattfinden, nothwendig und hinreichend ist, damit

$$\frac{d^2a}{dt^2},\ \frac{d^2b}{dt^2},\ \frac{d^2c}{dt^2},\ \frac{dg}{dt},\ \dots,\ \frac{dk_{,}}{dt}$$

Null werden und also Gestalt und Bewegungszustand des Ellipsoids constant bleiben, wenn $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ Null sind. Die Fälle, in denen dieses stattfindet, haben wir früher vollständig erörtert. Es ergiebt sich nun aber auch hier wieder leicht, dass die Function G wenigstens für Ein System von Werthen der unabhängig veränderlichen Grössen ein Minimum haben müsse, da sie für den alleinigen Grenzfall, wenn die Axen unendlich gross oder unendlich klein werden, gegen einen Grenzwerth convergirt, der nicht negativ ist, und, wie wir schon gesehen haben, immer für gewisse Werthe der unabhängig veränderlichen Grössen negativ wird, ohne je negativ unendlich zu werden. Für den einem solchen Minimum entsprechenden constanten Bewegungszustand folgt aus dem Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, dass jede der Dirichlet'schen Voraussetzung genügende unendlich kleine Abweichung von demselben nur unendlich kleine Schwankungen zur Folge hat, während in jedem andern Falle die Beständigkeit der Gestalt und des Bewegungszustandes nur labil ist. Die Aufsuchung der einem Minimum von G entsprechenden Bewegungszustände ist nicht bloss für die Bestimmung der möglichen stabilen Formen einer bewegten flüssigen und schweren Masse wichtig, sondern würde auch für die Integration unserer Differentialgleichungen durch unendliche Reihen die Grundlage bilden müssen; wir wollen daher jetzt untersuchen, in welchen von den Fällen, wo ihre Variation erster Ordnung verschwindet, die Function G ein Minimum hat. Aus jedem von den früher gefundenen Fällen, in denen das Ellipsoid seine Form behält, erhält man zwar durch Vertauschung der Axen und Aenderungen in den Zeichen der Grössen $g, h, \ldots, k_{,}$ mehrere Systeme von Werthen der Grössen $a, b, \ldots, k_{,}$, welche das Verschwinden der Variation erster Ordnung der Function G bewirken; wir können aber diese hier zusammenfassen, da die Function G für alle denselben Werth hat und in Bezug auf unsere Frage von allen dasselbe gilt.

Ehe wir die einzelnen Fälle betrachten, müssen wir ferner noch bemerken, dass die Untersuchung, wenn ω oder $\omega_{,}$ Null ist, eine besondere einfachere Gestalt annimmt, indem dann g, h, k oder $g_{,}, h_{,}, k_{,}$ aus der Function G ganz herausfallen. Die frühere Untersuchung der constanten Bewegungszustände giebt nur zwei wesentlich verschiedene Fälle, in denen eine dieser beiden Grössen Null wird. In dem im Art. 6 behandelten Falle kann dies nur eintreten, wenn

$$\frac{w'^2}{w^2} = \frac{(2a-b-c)(2a-b+c)}{(2a+b+c)(2a+b-c)} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4,$$

also der Ausdruck

$$b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - 3a^4, \tag{3}$$

den wir durch E bezeichnen wollen, Null ist; und dann ergiebt sich in der That ω oder $\omega_{,}$ gleich Null. Die Gleichung $E=0$ liefert aber nach a aufgelöst nur eine positive Wurzel, die zwischen $\frac{b+c}{2}$ und b liegt, und kann also nur im Falle (I) erfüllt werden. Ausser diesem Falle giebt noch der im Art. 7 untersuchte Fall ω oder $\omega_{,}$ gleich Null, wenn $\tau^2 = \tau'^2$.

Es lässt sich nun zunächst zeigen, dass in den Fällen (I), (II) und (III) die Function G keinen Minimumwerth haben kann, weil sich immer, während a, b, c constant bleiben, die Grössen $g, h, \ldots, k_{,}$ so ändern lassen, dass der Werth der Function noch abnimmt. Da

g und $g_{,}$ Null und $h, h_{,}, k, k_{,}$, den Fall $E=0$ ausgenommen, nicht Null sind, so finden zwischen den Variationen dieser Grössen die Bedingungen statt

$$\delta g^2 + 2h\delta h + 2k\delta k = 0, \quad \delta g_{,}^2 + 2h_{,}\delta h_{,} + 2k_{,}\delta k_{,} = 0$$

und die Variation von G wird

$$\tfrac{1}{4}\left(\left(\frac{\delta g + \delta g_{,}}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{\delta g - \delta g_{,}}{b+c}\right)^2\right) + \frac{\partial G}{\partial h}\delta h + \frac{\partial G}{\partial k}\delta k + \frac{\partial G}{\partial h_{,}}\delta h_{,} + \frac{\partial G}{\partial k_{,}}\delta k_{,}$$

oder da

$$\frac{\partial G}{\partial h} : \frac{\partial G}{\partial k} = h : k, \quad \frac{\partial G}{\partial h_{,}} : \frac{\partial G}{\partial k_{,}} = h_{,} : k_{,}$$

$$\delta G = \tfrac{1}{4}\left(\left(\frac{\delta g + \delta g_{,}}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{\delta g - \delta g_{,}}{b+c}\right)^2\right) - \frac{1}{2h}\frac{\partial G}{\partial h}\delta g^2 - \frac{1}{2h_{,}}\frac{\partial G}{\partial h_{,}}\delta g_{,}^2. \tag{4}$$

Bildet man die Determinante dieses Ausdrucks zweiten Grades von δg und $\delta g_{,}$ und substituirt darin die aus Art. 6 (1) sich ergebenden Werthe

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{2h}{q} &= b^2 + c^2 - 2a^2 \pm \sqrt{(4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)} \\ \frac{2h_{,}}{q_{,}} &= b^2 + c^2 - 2a^2 \mp \sqrt{(4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)} \end{aligned}$$

und folglich $\frac{hh_{,}}{qq_{,}} = E$, so findet sich diese

$$= \frac{3(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{4E(b^2-c^2)^2}.$$

Sie ist also positiv im Falle (I), wenn $E<0$, und im Falle (III), aber negativ im Falle (I), wenn $E=0$, und im Falle (II). In den beiden ersteren Fällen kann daher der Ausdruck (4) sowohl positive, als negative Werthe annehmen, in den beiden andern aber entweder nur positive, oder nur negative. Er erhält aber für $\delta g_{,} = -\delta g$ den Werth

$$\delta g^2\left(\frac{1}{(b+c)^2} - \frac{b^2+c^2-2a^2}{2E}\right),$$

welcher unter den in diesen Fällen geltenden Voraussetzungen immer negativ ist, wie man leicht sieht, wenn man ihn in die Form setzt

$$-\frac{(b^2+c^2-2a^2)(b^2+4bc+c^2+2a^2) + (4a^2-(b+c)^2)(4a^2-(b-c)^2)}{4(b+c)^2E}\delta g^2$$

und bemerkt, dass $b^2+c^2-2a^2$ stets positiv ist, wenn $E \geq 0$.

Wenn eine der beiden Grössen ω oder $\omega_{,}$, z. B. $\omega_{,} = 0$ ist, wird die Bedingungsgleichung zwischen $\delta g_{,}$, $\delta h_{,}$, $\delta k_{,}$

$$\delta g_{,}^2 + \delta h_{,}^2 + \delta k_{,}^2 = 0;$$

der Ausdruck der Variation von G reducirt sich folglich auf

$$\delta G = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2} - \frac{q}{h}\right)\delta g^2$$

und aus (5) erhält man, da $\frac{2h_,}{q_,} = 0$,

$$\frac{h}{q} = b^2 + c^2 - 2a^2.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes ergiebt sich

$$\delta G = -\frac{(b^2+c^2)(4a^2-(b+c)^2)+(b-c)^2(b^2+4bc+c^2)}{4(b^2-c^2)^2(b^2+c^2-2a^2)}\,\delta g^2$$

also negativ, da $b^2+c^2-2a^2$ und $4a^2-(b+c)^2$ in diesem Falle positiv sind.

In allen diesen Fällen hat also die Function G keinen Minimumwerth, und wir haben nun nur noch den Fall des Art. 7 zu betrachten, wobei wir den singulären Fall, wo $b = a$ und $\tau'^2 > \varepsilon\pi\varrho^4 \cdot 8{,}64004\ldots$, ganz ausschliessen können. Wenn eine der beiden Grössen ω^2 oder $\omega_,^2$ Null ist, liefert dieser Fall für jeden gegebenen Werth der andern Grösse nur Einen constanten Bewegungszustand, für welchen $\tau^2 = \tau'^2$, und die Function G muss dann für diesen ihr Minimum haben. Für je zwei gegebene von Null verschiedene Werthe von ω^2 und $\omega_,^2$ aber liefert dieser Fall zwei constante Bewegungszustände der flüssigen Masse, die durch Vertauschung von τ^2 und τ'^2 in einander übergehen; denn man kann, um τ^2 und τ'^2 aus ω^2 und $\omega_,^2$ zu bestimmen,

$$\tau = \frac{\omega + \omega_,}{2}, \quad \tau' = \frac{\omega - \omega_,}{2}$$

setzen und dabei die Zeichen von ω und $\omega_,$ beliebig wählen.

Man kann aber leicht zeigen, dass in dem einen Falle, wenn ω und $\omega_,$ gleiche Zeichen haben und also τ^2 den grösseren Werth hat, kein Minimum von G stattfindet. Die Bedingungen aus den Variationen der Grössen $g, h, \ldots, k_,$ sind jetzt

$$\delta g^2 + \delta h^2 + 2k\delta k = 0, \quad \delta g_,^2 + \delta h_,^2 + 2k_,\delta k_, = 0,$$

und die Variation von G wird daher

$$\frac{1}{4}\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\delta g+\delta g_,}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{\delta h+\delta h_,}{c-a}\right)^2 + \\ \left(\frac{\delta g-\delta g_,}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{\delta h-\delta h_,}{c+a}\right)^2\end{matrix}\right\} - \frac{1}{4}\left\{\begin{matrix}\left(\frac{1+\frac{\omega_,}{\omega}}{(a-b)^2} + \frac{1-\frac{\omega_,}{\omega}}{(a+b)^2}\right)(\delta g^2+\delta h^2) + \\ \left(\frac{1+\frac{\omega}{\omega_,}}{(a-b)^2} + \frac{1-\frac{\omega}{\omega_,}}{(a+b)^2}\right)(\delta g_,^2+\delta h_,^2)\end{matrix}\right\}.$$

Diese aber erhält einen negativen Werth, wenn ω und $\omega_,$ gleiche Zeichen haben und $\delta h = \delta h_, = 0$, $\delta g_, = -\delta g$ angenommen wird; denn es ergiebt sich

$$\delta G = \left\{\frac{1}{(b+c)^2} - \frac{1}{(b+a)^2} + \left(\frac{1}{(b+a)^2} - \frac{1}{(b-a)^2}\right)\frac{(\omega+\omega_,)^2}{4\omega\omega_,}\right\}\delta g^2$$

und hierin ist $\frac{1}{(b+a)^2} < \frac{1}{(b-a)^2}$ und auch $\frac{1}{(b+c)^2} < \frac{1}{(b+a)^2}$, da für $c \leqq a$ nach Art. 7 (3) $\frac{\tau'^2}{(b+a)^3} \geqq \frac{\tau^2}{(b-a)^3}$, folglich $\tau'^2 > \tau^2$ ist und also τ^2 nur grösser als τ'^2 sein kann, wenn $c > a$.

Die Function hat also auch in diesem Falle kein Minimum und muss folglich in dem allein noch übrig bleibenden Falle ihr Minimum haben.

Dieses findet demnach statt für die im Art. 7 betrachtete Bewegung, wenn $\tau^2 \leqq \tau'^2$ (den oben angegebenen singulären Fall ausgenommen); und in diesem Falle würde daher, während in allen andern Fällen die Beständigkeit der Gestalt und des Bewegungszustandes nur labil ist, jede der Dirichlet'schen Voraussetzung genügende unendlich kleine Aenderung in der Gestalt und dem Bewegungszustande der flüssigen Masse nur unendlich kleine Schwankungen zur Folge haben. Hieraus folgt freilich nicht, dass der Zustand der flüssigen Masse in diesem Falle stabil ist. Die Untersuchung, unter welchen Bedingungen dieses stattfindet, würde sich wohl, da sie auf lineare Differentialgleichungen führt, mit bekannten Mitteln ausführen lassen. Wir müssen jedoch auf die Behandlung dieser Frage in dieser Abhandlung verzichten, die nur der weiteren Entwicklung des schönen Gedankens gewidmet ist, mit welchem Dirichlet seine wissenschaftliche Thätigkeit gekrönt hat.

XI.

Ueber das Verschwinden der Theta-Functionen.

(Aus Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 65. 1865.)

Die zweite Abtheilung meiner im 54. Bande des mathematischen Journals erschienenen Theorie der Abel'schen Functionen enthält den Beweis eines Satzes über das Verschwinden der ϑ-Functionen, welchen ich sogleich wieder anführen werde, indem ich dabei die in jener Abhandlung angewandten Bezeichnungen als dem Leser bekannt voraussetze. Alles in der Abhandlung noch Folgende enthält kurze Andeutungen über die Anwendung dieses Satzes, welcher bei unserer Methode, die sich auf die Bestimmung der Functionen durch ihre Unstetigkeiten und ihr Unendlichwerden stützt, wie man leicht sieht, die Grundlage der Theorie der Abel'schen Functionen bilden muss. Bei dem Satze selbst und dessen Beweis ist jedoch der Umstand nicht gehörig berücksichtigt worden, dass die ϑ-Function durch die Substitution der Integrale algebraischer Functionen Einer Veränderlichen identisch, d. h. für jeden Werth dieser Veränderlichen, verschwinden kann. Diesem Mangel abzuhelfen ist die folgende kleine Abhandlung bestimmt.

Bei der Darstellung der Untersuchungen über ϑ-Functionen mit einer unbestimmten Anzahl von Variablen macht sich das Bedürfniss einer abkürzenden Bezeichnung einer Reihe, wie

$$v_1, v_2, \ldots, v_m$$

geltend, sobald der Ausdruck von v_ν durch ν complicirt ist. Man könnte dieses Zeichen ganz analog den Summen- und Productenzeichen bilden; eine solche Bezeichnung würde aber zu viel Raum wegnehmen und innerhalb der Functionszeichen unbequem für den Druck sein; ich ziehe es daher vor

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \text{ durch } \begin{pmatrix} m \\ \nu\ (v_\nu) \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu bezeichnen, also

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p) \quad \text{durch} \quad \vartheta\begin{pmatrix} p \\ \nu\ (v_\nu) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.

Wenn man in der Function $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ für die p Veränderlichen v die p Integrale $u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p$ algebraischer wie die Fläche T verzweigter Functionen von z substituirt, so erhält man eine Function von z, welche in der ganzen Fläche T ausser den Linien b sich stetig ändert, beim Uebertritt von der negativen auf die positive Seite der Linie b_ν aber den Factor $e^{-u_\nu{}^+ - u_\nu{}^- + 2e_\nu}$ erlangt. Wie im §. 22 bewiesen worden ist, wird diese Function, wenn sie nicht für alle Werthe von z verschwindet, nur für p Punkte der Fläche T unendlich klein von der ersten Ordnung. Diese Punkte wurden durch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ bezeichnet, und der Werth der Function u_ν im Punkte η_μ durch $\alpha_\nu^{(\mu)}$. Es ergab sich dann nach den $2p$ Modulsystemen der ϑ-Function die Congruenz

$$(1)\quad (e_1, e_2, \ldots, e_p) \doteq \left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} + K_1, \sum_1^p \alpha_2^{(\mu)} + K_2, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)} + K_p\right),$$

worin die Grössen K von den bis dahin noch willkürlichen additiven Constanten in den Functionen u abhingen, aber von den Grössen e und den Punkten η unabhängig waren.

Führt man die dort angegebene Rechnung aus, so findet sich

$$(2)\qquad 2K_\nu = \sum \frac{1}{\pi i}\int (u_\nu{}^+ + u_\nu{}^-)\, du_{\nu'} - \varepsilon_\nu \pi i - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon'_\mu a_{\mu,\nu}.$$

In diesem Ausdrucke ist das Integral $\int (u_\nu{}^+ + u_\nu{}^-)\, du_{\nu'}$ positiv durch $b_{\nu'}$ auszudehnen, und in der Summe sind für ν' alle Zahlen von 1 bis p ausser ν zu setzen; $\varepsilon_\nu = \pm 1$, je nachdem das Ende von l_ν auf der positiven oder negativen Seite von a_ν liegt, und $\varepsilon'_\nu = \pm 1$, je nachdem dasselbe auf der positiven oder negativen Seite von b_ν liegt. Die Bestimmung der Vorzeichen ist übrigens nur nöthig, wenn die Grössen e nach den in §. 22 gegebenen Gleichungen aus den Unstetigkeiten von $\log\vartheta$ völlig bestimmt werden sollen; die obige Congruenz (1) bleibt richtig, welche Vorzeichen man wählen mag.

Wir behalten zunächst die dort gemachte vereinfachende Voraussetzung bei, dass die additiven Constanten in den Functionen u so bestimmt werden, dass die Grössen K sämmtlich gleich Null sind. Um die so gewonnenen Resultate schliesslich von dieser beschränkenden Voraussetzung zu befreien, hat man offenbar nur nöthig, überall in den ϑ-Functionen zu den Argumenten $-K_1, -K_2, \ldots, -K_p$ hinzuzufügen.

Wenn also die Function $\vartheta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$ für die p Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ verschwindet *und nicht identisch für jeden Werth von z verschwindet*, so ist

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p) \equiv \left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^p \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}\right).$$

Dieser Satz gilt für ganz beliebige Werthe der Grössen e, und wir haben hieraus, indem wir den Punkt (s, z) mit dem Punkte η_p zusammenfallen liessen, geschlossen, dass

$$\vartheta\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\mu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\mu)}\right) = 0,$$

oder da die ϑ-Function gerade ist,

$$\vartheta\left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\mu)}\right) = 0,$$

welches auch die Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ seien.

2.

Der Beweis dieses Satzes bedarf jedoch einer Vervollständigung wegen des Umstandes, dass die Function

$$\vartheta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$$

identisch verschwinden kann (was in der That bei jedem System von gleich verzweigten algebraischen Functionen für gewisse Werthe der Grössen e eintritt).

Wegen dieses Umstandes muss man sich begnügen, zunächst zu zeigen, dass der Satz richtig bleibt, während die Punkte η unabhängig von einander innerhalb endlicher Grenzen ihre Lage ändern. Hieraus folgt dann die allgemeine Richtigkeit des Satzes nach dem Principe, dass eine Function einer complexen Grösse nicht innerhalb eines endlichen Gebiets gleich Null sein kann, ohne überall gleich Null zu sein.

Wenn z gegeben ist, so können die Grössen $e_1, e_2, \ldots, e_p$ immer so gewählt werden, dass

$$\vartheta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$$

nicht verschwindet; denn sonst müsste die Function $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ für jedwede Werthe der Grössen v verschwinden, und folglich müssten in ihrer Entwicklung nach ganzen Potenzen von $e^{2v_1}, e^{2v_2}, \ldots, e^{2v_p}$ sämmtliche Coefficienten gleich Null sein, was nicht der Fall ist. Die Grössen e können sich dann von einander unabhängig innerhalb endlicher Grössengebiete ändern, ohne dass die Function

$$\vartheta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$$

für diesen Werth von z verschwindet. Oder mit anderen Worten: man kann immer ein Grössengebiet E von $2p$ Dimensionen angeben,

innerhalb dessen sich das System der Grössen e bewegen kann, ohne dass die Function

$$\vartheta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$$

für diesen Werth von z verschwindet. Sie wird also nur für p Lagen von (s, z) unendlich klein von der ersten Ordnung, und bezeichnet man diese Punkte durch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$, so ist

$$(1) \qquad (e_1, e_2, \ldots, e_p) \equiv \left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^p \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}\right).$$

Jeder Bestimmungsweise des Systems der Grössen e innerhalb E oder jedem Punkte von E entspricht dann eine Bestimmungsweise der Punkte η, deren Gesammtheit ein dem Grössengebiete E entsprechendes Grössengebiet H bildet. In Folge der Gleichung (1) entspricht jedem Punkte von H aber auch nur ein Punkt von E; hätte also H nur $2p - 1$, oder weniger Dimensionen, so würde E nicht $2p$ Dimensionen haben können. Es hat folglich H $2p$ Dimensionen. Die Schlüsse, auf welche sich unser Satz stützt, bleiben daher anwendbar für beliebige Lagen der Punkte η innerhalb endlicher Gebiete, und die Gleichung

$$\vartheta\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\mu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\mu)}\right) = 0$$

gilt für beliebige Lagen der Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ innerhalb endlicher Gebiete und folglich allgemein.

3.

Hieraus folgt, dass sich das Grössensystem $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ immer und nur auf eine Weise congruent einem Ausdrucke von der Form $\left(\begin{matrix}p\\ \nu\\ 1\end{matrix}\left(\sum_1^p \alpha_\nu^{(\mu)}\right)\right)$ setzen lässt, wenn $\vartheta\left(\begin{matrix}p\\ \nu\\ 1\end{matrix}(u_\nu - e_\nu)\right)$ nicht für jeden Werth von z verschwindet; denn liessen sich die Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ auf mehr als eine Weise so bestimmen, dass der Congruenz

$$\left(\begin{matrix}p\\ \nu\\ 1\end{matrix}(e_\nu)\right) \equiv \left(\begin{matrix}p\\ \nu\\ 1\end{matrix}\left(\sum_1^p \alpha_\nu^{(\mu)}\right)\right)$$

genügt wäre, so würde nach dem eben bewiesenen Satze die Function $\vartheta\left(\begin{matrix}p\\ \nu\\ 1\end{matrix}(u_\nu - e_\nu)\right)$ für mehr als p Punkte verschwinden, ohne identisch gleich Null zu sein, was unmöglich ist.

Wenn $\vartheta\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(u_\nu - e_\nu) \\ 1 \end{pmatrix}$ identisch verschwindet, muss man, um $\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(e_\nu) \\ 1 \end{pmatrix}$ in die obige Form zu setzen,

$$\vartheta\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(u_\nu + \alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} - e_\nu) \\ 1 \end{pmatrix}$$

betrachten, und wenn diese Function identisch für jeden Werth z, ζ_1, z_1 verschwindet, die Function

$$\vartheta\begin{pmatrix} p \\ \nu\left(u_\nu + \sum_1^2 \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^2 u_\nu^{(\mu)} - e_\nu\right) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{Wir nehmen an, dass} \\ \vartheta\begin{pmatrix} p \\ \nu\left(\sum_1^{m} \alpha_\nu^{(p+2-\mu)} - \sum_1^{m-1} u_\nu^{(p-\mu)} - e_\nu\right) \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{identisch verschwindet,} \\ \vartheta\begin{pmatrix} p \\ \nu\left(\sum_1^{m+1} \alpha_\nu^{(p+2-\mu)} - \sum_1^{m} u_\nu^{(p-\mu)} - e_\nu\right) \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{aber nicht identisch verschwindet.} \end{array}\right.$$

Diese letztere Function verschwindet dann, als Function von ζ_{p+1} betrachtet, für $\varepsilon_{p-1}, \varepsilon_{p-2}, \ldots, \varepsilon_{p-m}$, ausserdem also noch für $p - m$ Punkte, und bezeichnet man diese mit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-m}$, so ist

$$\begin{pmatrix} p \\ \nu\left(-\sum_{p-m+1}^{p} \alpha_\nu^{(\mu)} + e_\nu\right) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ \nu\left(\sum_1^{p-m} \alpha_\nu^{(\mu)}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und diese Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-m}$ können nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass diese Congruenz erfüllt wird, weil sonst die Function für mehr als p Punkte verschwinden würde. Dieselbe Function verschwindet, als Function von z_{p-1} betrachtet, ausser für

$$\eta_{p+1}, \eta_p, \ldots, \eta_{p-m+1}$$

noch für $p - m - 1$ Punkte, und bezeichnet man diese durch

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-m-1},$$

so ist

$$\begin{pmatrix} p \\ \nu\left(-\sum_{p-m}^{p-2} u_\nu^{(\mu)} - e_\nu\right) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ \nu\left(\sum_1^{p-m-1} u_\nu^{(\mu)}\right) \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-m-1}$ sind durch diese Congruenz völlig bestimmt.

Unter der gemachten Voraussetzung (1) können also, um den Congruenzen

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} p \\ \nu\,(e_\nu) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ \nu\left(\sum_1^{p} \alpha_\nu^{(\mu)}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$(3)\qquad \begin{pmatrix} p \\ \nu\,(-e_\nu) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ \nu\left(\sum_1^{p-2} u_\nu^{(\mu)}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu genügen, m von den Punkten η und $m - 1$ von den Punkten ε beliebig gewählt werden, dadurch aber sind die übrigen bestimmt. Offenbar gelten diese Sätze auch umgekehrt, d. h. die Function verschwindet, wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist. Wenn also die Congruenz (2) auf mehr als eine Weise lösbar ist, so ist auch die Congruenz (3) lösbar, und wenn von den Punkten η m, aber nicht mehr, beliebig gewählt werden können, so können von den Punkten ε $m - 1$ beliebig gewählt werden und dadurch sind die übrigen bestimmt, und umgekehrt.

Auf ganz ähnlichem Wege ergiebt sich, dass, wenn

$$\vartheta\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ist, die Congruenzen

$$(4)\qquad \begin{pmatrix} p \\ \nu\,(r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ \nu\left(\sum_1^{p-1} \alpha_\nu^{(\mu)}\right) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} p \\ \nu\,(-r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ \nu\left(\sum_1^{p-1} u_\nu^{(\mu)}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

immer lösbar sind; und zwar können sowohl von den Punkten η als von den Punkten ε m beliebig gewählt werden, und es sind dadurch die übrigen $p - 1 - m$ bestimmt, wenn

$$\vartheta\begin{pmatrix} p \\ \nu\left(\sum_1^{m} u_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m} \alpha_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

identisch gleich Null ist,

$$\vartheta\begin{pmatrix} p \\ \nu\left(\sum_1^{m+1} u_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m+1} \alpha_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

aber nicht identisch gleich Null ist, wobei der Fall $m = 0$ nicht ausgeschlossen ist. Dieser Satz lässt sich auch umkehren. Wenn also von den Punkten η m und nicht mehr beliebig gewählt werden können, so ist die Voraussetzung desselben erfüllt; und es können folglich auch von den Punkten ε m und nicht mehr beliebig gewählt werden.

4.

(1) Bezeichnen wir die Derivirte von
$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$$
nach v_ν mit ϑ'_ν, die zweite Derivirte nach v_ν und v_μ mit $\vartheta''_{\nu,\mu}$ u. s. f.,

so sind, wenn
$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)$$
identisch für jeden Werth von z_1 und ζ_1 verschwindet, sämmtliche Functionen $\vartheta'\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right)$ gleich Null. In der That geht die Gleichung
$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)\right) = 0,$$
wenn s_1 und z_1 unendlich wenig von σ_1 und ζ_1 verschieden sind, über in die Gleichung
$$\sum_1^p \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) d\alpha_\mu^{(1)} = 0.$$
Nehmen wir an, dass
$$du_\mu = \frac{\varphi_\mu(s, z)\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$
sei, so verwandelt sich diese Gleichung nach Weglassung des Factors $\dfrac{d\zeta_1}{\frac{\partial F(\sigma_1, \zeta_1)}{\partial \sigma_1}}$ in
$$\sum_1^p \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) \varphi_\mu(\sigma_1, \zeta_1) = 0;$$
und da zwischen den Functionen φ keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet, so folgt hieraus, dass sämmtliche erste Derivirten von $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ verschwinden müssen.

Um den umgekehrten Satz zu beweisen, nehmen wir an, dass $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ und $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = t_\nu)$ zwei Werthsysteme seien, für welche die

Function ϑ verschwindet, ohne für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)$ und $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + t_\nu)$ identisch zu verschwinden, und bilden den Ausdruck

$$(2)\qquad \frac{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(\alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)}{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + t_\nu)\right)\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(\alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} + t_\nu)\right)}.$$

Betrachten wir diesen Ausdruck als Function von z_1, so ergiebt sich, dass er eine algebraische Function von z_1 und zwar eine rationale Function von s_1 und z_1 ist, da Nenner und Zähler in T'' stetig sind und an den Querschnitten dieselben Factoren erlangen. Für $z_1 = \zeta_1$ und $s_1 = \sigma_1$ werden Nenner und Zähler unendlich klein von der zweiten Ordnung, so dass die Function endlich bleibt; die übrigen Werthe aber, für welche Nenner oder Zähler verschwinden, sind, wie oben bewiesen, durch die Werthe der Grössen r und der Grössen t völlig bestimmt, also von ζ_1 ganz unabhängig. Da nun eine algebraische Function durch die Werthe, für welche sie Null und unendlich wird, bis auf einen constanten Factor bestimmt ist, so ist der Ausdruck gleich einer rationalen von ζ_1 unabhängigen Function von s_1 und z_1, $\chi(s_1, z_1)$, multiplicirt in eine Constante, d. h. eine von z_1 unabhängige Grösse. Da der Ausdruck symmetrisch in Bezug auf die Grössensysteme (s_1, z_1) und (σ_1, ζ_1) ist, so ist diese Constante gleich $\chi(\sigma_1, \zeta_1)$, multiplicirt in eine auch von ζ_1 unabhängige Grösse A. Setzt man nun
$$\sqrt{A}\,\chi(s, z) = \varrho(s, z),$$
so erhält man für unsern Ausdruck (2) den Werth
$$(3)\qquad \varrho(s_1, z_1)\,\varrho(\sigma_1, \zeta_1),$$
wo $\varrho(s, z)$ eine rationale Function von s und z ist.

Um diese zu bestimmen, hat man nur nöthig $\zeta_1 = z_1$ und $\sigma_1 = s_1$ werden zu lassen; es ergiebt sich dann
$$(\varrho(s_1, z_1))^2 = \left\{\frac{\sum_\mu \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) du_\mu^{(1)}}{\sum_\mu \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(t_\nu)\right) du_\mu^{(1)}}\right\}^2$$

oder nach Ausziehung der Quadratwurzel und Weghebung des Factors $\dfrac{dz_1}{\dfrac{\partial F(s_1, z_1)}{\partial s_1}}$

$$\varrho(s_1, z_1) = \pm \frac{\sum\limits_{\mu} \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(r_\nu)\right)\varphi_\mu(s_1, z_1)}{\sum\limits_{\mu} \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(t_\nu)\right)\varphi_\mu(s_1, z_1)}. \tag{4}$$

Man hat daher aus (3) und (4) die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(\alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)}{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + t_\nu)\right)\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(\alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} + t_\nu)\right)} \\ &= \frac{\sum\limits_{\mu} \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(r_\nu)\right)\varphi_\mu(s_1, z_1)}{\sum\limits_{\mu} \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(t_\nu)\right)\varphi_\mu(s_1, z_1)} \cdot \frac{\sum\limits_{\mu} \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(r_\nu)\right)\varphi_\mu(\sigma_1, \zeta_1)}{\sum\limits_{\mu} \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(t_\nu)\right)\varphi_\mu(\sigma_1, \zeta_1)}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)$$

für jeden Werth von z_1 und ζ_1 gleich Null sein muss, wenn die ersten Derivirten der Function $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(v_\nu = r_\nu)$ sämmtlich verschwinden.

5.

Wenn

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^m \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^m u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right) \tag{1}$$

identisch, d. h. für jedwede Werthe von $\overset{m}{\underset{1}{\mu}}\,(\sigma_\mu, \zeta_\mu)$ und $\overset{m}{\underset{1}{\mu}}\,(s_\mu, z_\mu)$, verschwindet, so findet man auf dem oben angegebenen Wege zunächst, indem man $\zeta_m = z_m$, $\sigma_m = s_m$ werden lässt, dass die ersten Derivirten der Function

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p) \text{ für } \overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(v_\nu = \sum_1^{m-1} \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m-1} u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)$$

sämmtlich verschwinden, dann, indem man $\zeta_{m-1} - z_{m-1}$, $\sigma_{m-1} - s_{m-1}$ unendlich klein werden lässt, dass für

$$\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(v_\nu = \sum_1^{m-2} \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m-2} u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)$$

auch die zweiten Derivirten sämmtlich verschwinden; und offenbar ergiebt sich allgemein, dass die Derivirten $n$ter Ordnung sämmtlich verschwinden für

$$\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(v_\nu = \sum_1^{m-n} \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m-n} u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right),$$

welche Werthe auch die Grössen z und die Grössen ζ haben mögen.

Es folgt hieraus, dass unter der gegenwärtigen Voraussetzung (1) für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(v_\nu = r_\nu)$ die ersten bis $m$ten Derivirten der Function

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$$

sämmtlich gleich Null sind.

Um zu zeigen, dass dieser Satz auch umgekehrt gilt, beweisen wir zunächst, dass wenn

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m-1} \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m-1} u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right)$$

identisch verschwindet und die Grössen $\vartheta^{(m)}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\,(r_\nu)\right)$ sämmtlich gleich Null sind, auch

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m} \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m} u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right)$$

identisch verschwinden muss und verallgemeinern zu diesem Zwecke die Gleichung §. 4, (5).

Wir nehmen an, dass

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m-1} u_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m-1} \alpha_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right)$$

identisch verschwinde,

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m} u_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m} \alpha_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right)$$

aber nicht identisch verschwinde, behalten in Bezug auf die Grössen t die frühere Voraussetzung bei und betrachten den Ausdruck

$$(2)\quad \frac{\left\{\begin{array}{c}\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\left(\sum\limits_1^m u_\nu^{(\mu)}-\sum\limits_1^m \alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\\ 1\end{array}\right)\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\left(\sum\limits_1^m \alpha_\nu^{(\mu)}-\sum\limits_1^m u_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\\ 1\end{array}\right)\times\\ \prod\limits_{\varrho,\varrho'}\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\,(u_\nu^{(\varrho)}-u_\nu^{(\varrho')}+t_\nu)\\ 1\end{array}\right)\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\,(\alpha_\nu^{(\varrho)}-\alpha_\nu^{(\varrho')}+t_\nu)\\ 1\end{array}\right)\end{array}\right\}}{\left(\prod\limits_1^m\right)^2\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\,(u_\nu^{(\varrho)}-\alpha_\nu^{(\varrho')}+t_\nu)\\ 1\end{array}\right)\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\,(\alpha_\nu^{(\varrho)}-u_\nu^{(\varrho')}+t_\nu)\\ 1\end{array}\right)}$$

In diesem Ausdrucke sind unter den Productzeichen sowohl für ϱ, als für ϱ' sämmtliche Werthe von 1 bis m zu setzen, im Zähler aber die Fälle, wo $\varrho=\varrho'$ würde, wegzulassen.

Betrachten wir diesen Ausdruck als Function von z_1, so ergiebt sich, dass er an den Querschnitten den Factor 1 erlangt und folglich eine algebraische Function von z_1 ist. Für $z_1=\zeta_\varrho$ und $s_1=\sigma_\varrho$ werden Nenner und Zähler unendlich klein von der zweiten Ordnung, der Bruch bleibt also endlich; die übrigen Werthe aber, für welche Zähler und Nenner verschwinden, sind durch die Grössen $\overset{m}{\underset{2}{\mu}}(s_\mu, z_\mu)$, die Grössen r und die Grössen t, wie oben (§. 3) bewiesen, völlig bestimmt, und folglich von den Grössen ζ ganz unabhängig. Da der Ausdruck nun eine symmetrische Function von den Grössen z ist, so gilt dasselbe für jedes beliebige z_μ: er ist eine algebraische Function von z_μ, und die Werthe dieser Grösse, für welche er unendlich gross oder unendlich klein wird, sind von den Grössen ζ unabhängig. Er ist daher gleich einer von den Grössen ζ unabhängigen algebraischen Function der Grössen z, $\chi(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, multiplicirt in einen von den Grössen z unabhängigen Factor. Da er aber ungeändert bleibt, wenn man die Grössen z mit den Grössen ζ vertauscht, so ist dieser Factor gleich $\chi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$, multiplicirt mit einer von den Grössen z und den Grössen ζ unabhängigen Constanten A; und wir können daher, wenn wir $\sqrt{A}\,\chi(z_1, z_2, \ldots, z_m)=\psi(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ setzen, unserm Ausdrucke (2) die Form

$$(3)\qquad \psi(z_1, z_2, \ldots, z_m)\,\psi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$$

geben, wo $\psi(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ eine algebraische von den Grössen ζ unabhängige Function der Grössen z ist, welche in Folge ihrer Verzweigungsart sich rational in $\overset{m}{\underset{1}{\mu}}(s_\mu, z_\mu)$ ausdrücken lassen muss. Lässt man nun die Punkte η mit den Punkten ε zusammenfallen, so dass die Grössen $\zeta_\mu - z_\mu$ und die Grössen $\sigma_\mu - s_\mu$ sämmtlich unendlich

klein werden, so ergiebt sich, wenn man die Derivirten von $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ wie oben (§. 4, (1)) bezeichnet,

$$(4)\quad \psi(z_1, z_2, \ldots, z_m)=\pm\frac{\left(\sum\limits_1^p\right)^m\vartheta^{(m)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m}\left(\begin{array}{l}p\\ \varrho\,(r_\varrho)\\ 1\end{array}\right)du_{\nu_1}^{(1)}\,du_{\nu_2}^{(2)}\ldots du_{\nu_m}^{(m)}}{\prod\limits_{\mu=1}^{\mu=m}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\vartheta'_\nu\left(\begin{array}{l}p\\ \varrho\,(r_\varrho)\\ 1\end{array}\right)du_\nu^{(\mu)}},$$

wo die Summationen im Zähler sich auf $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ beziehen. Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass die Wahl des Vorzeichens gleichgültig ist, da sie auf den Werth von $\psi(z_1, z_2, \ldots, z_m)\,\psi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$ keinen Einfluss hat, und dass statt der Grössen $du_1^{(\mu)}, du_2^{(\mu)}, \ldots, du_p^{(\mu)}$ auch, im Zähler und Nenner gleichzeitig, die ihnen proportionalen Grössen $\varphi_1(s_\mu, z_\mu)$, $\varphi_2(s_\mu, z_\mu)$, $\ldots$, $\varphi_p(s_\mu, z_\mu)$ eingeführt werden können.

Aus der in (2), (3) und (4) enthaltenen Gleichung, welche für den Fall bewiesen ist, dass

$$\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\left(\sum\limits_1^{m-1} u_\nu^{(\mu)}-\sum\limits_1^{m-1}\alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\\ 1\end{array}\right)$$

gleich Null und

$$\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\left(\sum\limits_1^{m} u_\nu^{(\mu)}-\sum\limits_1^{m}\alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\\ 1\end{array}\right)$$

von Null verschieden ist, folgt, dass

$$\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\left(\sum\limits_1^{m} u_\nu^{(\mu)}-\sum\limits_1^{m}\alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\\ 1\end{array}\right)$$

nicht von Null verschieden sein kann, wenn die Functionen $\vartheta^{(m)}\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\,(r_\nu)\\ 1\end{array}\right)$ sämmtlich gleich Null sind.

Wenn also die Functionen $\vartheta^{(m+1)}\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\,(r_\nu)\\ 1\end{array}\right)$ sämmtlich gleich Null sind, so folgt aus der Gültigkeit der Gleichung

$$\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\left(\sum\limits_1^{n} u_\nu^{(\mu)}-\sum\limits_1^{n}\alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\\ 1\end{array}\right)=0$$

für $n=m$ ihre Gültigkeit für $n=m+1$. Gilt daher die Gleichung für $n=0$, oder ist $\vartheta\left(\begin{array}{l}p\\ \nu\,(r_\nu)\\ 1\end{array}\right)=0$, und verschwinden die ersten bis

$m$ten Derivirten der Function $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu)\right)$ für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ sämmtlich, die $(m+1)$ten aber nicht sämmtlich, so gilt die Gleichung auch für alle grösseren Werthe von n bis $n = m$, aber nicht für $n = m + 1$; denn aus $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m+1} u_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m+1} \alpha_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right) = 0$ würde, wie wir vorher schon gefunden hatten, folgen, dass die Grössen $\vartheta^{(m+1)}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right)$ sämmtlich verschwinden müssten.

6.

Fassen wir das eben Bewiesene mit dem Früheren zusammen, so erhalten wir folgendes Resultat:

Ist $\vartheta(r_1, r_2, \ldots, r_p) = 0$, so lassen sich $(p-1)$ Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ so bestimmen, dass

$$(r_1, r_2, \ldots, r_p) \equiv \left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\mu)}\right);$$

und umgekehrt.

Wenn ausser der Function $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ auch ihre ersten bis $m$ten Derivirten für $v_1 = r_1$, $v_2 = r_2$, $\ldots$, $v_p = r_p$ sämmtlich gleich Null, die $(m+1)$ten aber nicht sämmtlich gleich Null sind, so können m von diesen Punkten η, ohne dass die Grössen r sich ändern, beliebig gewählt werden und dadurch sind die übrigen $p - 1 - m$ völlig bestimmt.

Und umgekehrt:

Wenn m und nicht mehr von den Punkten η, ohne dass sich die Grössen r ändern, beliebig gewählt werden können, so sind ausser der Function $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ auch ihre ersten bis $m$ten Derivirten für $v_1 = r_1$, $v_2 = r_2$, $\ldots$, $v_p = r_p$ sämmtlich gleich Null, die $(m+1)$ten aber nicht sämmtlich gleich Null.

Die vollständige Untersuchung aller besondern Fälle, welche bei dem Verschwinden einer ϑ-Function eintreten können, war weniger nöthig wegen der besondern Systeme von gleichverzweigten algebraischen Functionen, für welche diese Fälle eintreten, als vielmehr deshalb, weil ohne diese Untersuchung Lücken in dem Beweise der Sätze entstehen würden, welche auf unsern Satz über das Verschwinden einer ϑ-Function gegründet werden.

Zweite Abtheilung.

XII.

Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

(Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.)*)

Der folgende Aufsatz über die trigonometrischen Reihen besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen. Der erste Theil enthält eine Geschichte der Untersuchungen und Ansichten über die willkürlichen (graphisch gegebenen) Functionen und ihre Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen. Bei ihrer Zusammenstellung war es mir vergönnt, einige Winke des berühmten Mathematikers zu benutzen, welchem man die erste gründliche Arbeit über diesen Gegenstand verdankt. Im zweiten Theile liefere ich über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe eine Untersuchung, welche auch die bis jetzt noch unerledigten Fälle umfasst. Es war nöthig, ihr einen kurzen Aufsatz über den Begriff eines bestimmten Integrales und den Umfang seiner Gültigkeit voraufzuschicken.

Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer willkürlich gegebenen Function durch eine trigonometrische Reihe.

1.

Die von Fourier so genannten trigonometrischen Reihen, d. h. die Reihen von der Form

$$\begin{aligned} &a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots \\ + \tfrac{1}{2} b_0 + {} &b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots \end{aligned}$$

*) Diese Abhandlung ist im Jahre 1854 von dem Verfasser behufs seiner Habilitation an der Universität zu Göttingen der philosophischen Facultät eingereicht. Wiewohl der Verfasser ihre Veröffentlichung, wie es scheint, nicht beabsichtigt hat, so wird doch die hiermit erfolgende Herausgabe derselben in gänzlich ungeänderter Form sowohl durch das hohe Interesse des Gegenstandes an sich als durch die in ihr niedergelegte Behandlungsweise der wichtigsten Principien der Infinitesimal-Analysis wohl hinlänglich gerechtfertigt erscheinen.

Braunschweig, im Juli 1867. R. Dedekind.

spielen in demjenigen Theile der Mathematik, wo ganz willkürliche Functionen vorkommen, eine bedeutende Rolle; ja, es lässt sich mit Grund behaupten, dass die wesentlichsten Fortschritte in diesem für die Physik so wichtigen Theile der Mathematik von der klareren Einsicht in die Natur dieser Reihen abhängig gewesen sind. Schon gleich bei den ersten mathematischen Untersuchungen, die auf die Betrachtung willkürlicher Functionen führten, kam die Frage zur Sprache, ob sich eine solche ganz willkürliche Function durch eine Reihe von obiger Form ausdrücken lasse.

Es geschah dies in der Mitte des vorigen Jahrhunderts bei Gelegenheit der Untersuchungen über die schwingenden Saiten, mit welchen sich damals die berühmtesten Mathematiker beschäftigten. Ihre Ansichten über unsern Gegenstand lassen sich nicht wohl darstellen, ohne auf dieses Problem einzugehen.

Unter gewissen Voraussetzungen, die in der Wirklichkeit näherungsweise zutreffen, wird bekanntlich die Form einer gespannten in einer Ebene schwingenden Saite, wenn x die Entfernung eines unbestimmten ihrer Punkte von ihrem Anfangspunkte, y seine Entfernung aus der Ruhelage zur Zeit t bedeutet, durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

bestimmt, wo α von t und bei einer überall gleich dicken Saite von x unabhängig ist.

Der erste, welcher eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung gab, war d'Alembert.

Er zeigte*), dass jede Function von x und t, welche für y gesetzt, die Gleichung zu einer identischen macht, in der Form

$$f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t)$$

enthalten sein müsse, wie sich dies durch Einführung der unabhängig veränderlichen Grössen $x + \alpha t$, $x - \alpha t$ anstatt x, t ergiebt, wodurch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha\alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{in} \quad 4\,\frac{\partial \dfrac{\partial y}{\partial(x+\alpha t)}}{\partial(x - \alpha t)}$$

übergeht.

Ausser dieser partiellen Differentialgleichung, welche sich aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ergiebt, muss nun y noch die Bedingung erfüllen, in den Befestigungspunkten der Saite stets $= 0$ zu sein; man hat also, wenn in dem einen dieser Punkte $x = 0$, in dem andern $x = l$ ist,

*) Mémoires de l'académie de Berlin. 1747. pag. 214.

$$f(\alpha t) = -\varphi(-\alpha t), \quad f(l + \alpha t) = -\varphi(l - \alpha t)$$

und folglich

$$f(z) = -\varphi(-z) = -\varphi(l - (l + z)) = f(2l + z),$$
$$y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x).$$

Nachdem d'Alembert dies für die allgemeine Lösung des Problems geleistet hatte, beschäftigt er sich in einer Fortsetzung*) seiner Abhandlung mit der Gleichung $f(z) = f(2l + z)$; d. h. er sucht analytische Ausdrücke, welche unverändert bleiben, wenn z um $2l$ wächst.

Es war ein wesentliches Verdienst Euler's, der im folgenden Jahrgange der Berliner Abhandlungen**) eine neue Darstellung dieser d'Alembert'schen Arbeiten gab, dass er das Wesen der Bedingungen, welchen die Function $f(z)$ genügen muss, richtiger erkannte. Er bemerkte, dass der Natur des Problems nach die Bewegung der Saite vollständig bestimmt sei, wenn für irgend einen Zeitpunkt die Form der Saite und die Geschwindigkeit jedes Punktes $\left(\text{also } y \text{ und } \frac{\partial y}{\partial t}\right)$ gegeben seien, und zeigte, dass sich, wenn man diese beiden Functionen sich durch willkürlich gezogene Curven bestimmt denkt, daraus stets durch eine einfache geometrische Construction die d'Alembert'sche Function $f(z)$ finden lässt. In der That, nimmt man an, dass für

$$t = 0, \; y = g(x) \text{ und } \frac{\partial y}{\partial t} = h(x)$$

sei, so erhält man für die Werthe von x zwischen 0 und l

$$f(x) - f(-x) = g(x), \quad f(x) + f(-x) = \frac{1}{\alpha}\int h(x)\,dx$$

und folglich die Function $f(z)$ zwischen $-l$ und l; hieraus aber ergiebt sich ihr Werth für jeden andern Werth von z vermittelst der Gleichung

$$f(z) = f(2l + z).$$

Dies ist in abstracten, aber jetzt allgemein geläufigen Begriffen dargestellt, die Euler'sche Bestimmung der Function $f(z)$.

Gegen diese Ausdehnung seiner Methode durch Euler verwahrte sich indess d'Alembert sofort***), weil seine Methode nothwendig voraussetze, dass y sich in t und x analytisch ausdrücken lasse.

*) Ibid. pag. 220.

**) Mémoires de l'académie de Berlin. 1748. pag. 69.

***) Mémoires de l'académie de Berlin. 1750. pag. 358. En effet on ne peut ce me semble exprimer y analytiquement d'une manière plus générale, qu'en la supposant une fonction de t et de x. Mais dans cette supposition on ne trouve la solution du problème que pour les cas où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermées dans une seule et même équation.

Ehe eine Antwort Euler's hierauf erfolgte, erschien eine dritte von diesen beiden ganz verschiedene Behandlung dieses Gegenstandes von Daniel Bernoulli*). Schon vor d'Alembert hatte Taylor**) gesehen, dass $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und zugleich y für $x = 0$ und für $x = l$ stets gleich 0 sei, wenn man $y = \sin\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi\alpha t}{l}$ und hierin für n eine ganze Zahl setze. Er erklärte hieraus die physikalische Thatsache, dass eine Saite ausser ihrem Grundtone auch den Grundton einer $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ so langen (übrigens ebenso beschaffenen) Saite geben könne, und hielt seine particuläre Lösung für allgemein, d. h. er glaubte, die Schwingung der Saite würde stets, wenn die ganze Zahl n der Höhe des Tons gemäss bestimmt würde, wenigstens sehr nahe durch die Gleichung ausgedrückt. Die Beobachtung, dass eine Saite ihre verschiedenen Töne gleichzeitig geben könne, führte nun Bernoulli zu der Bemerkung, dass die Saite (der Theorie nach) auch der Gleichung

$$y = \Sigma a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi\alpha}{l}(t - \beta_n)$$

gemäss schwingen könne, und weil sich aus dieser Gleichung alle beobachteten Modificationen der Erscheinung erklären liessen, so hielt er sie für die allgemeinste***). Um diese Ansicht zu stützen, untersuchte er die Schwingungen eines masselosen gespannten Fadens, der in einzelnen Punkten mit endlichen Massen beschwert ist, und zeigte, dass die Schwingungen desselben stets in eine der Zahl der Punkte gleiche Anzahl von solchen Schwingungen zerlegt werden kann, deren jede für alle Massen gleich lange dauert.

Diese Arbeiten Bernoulli's veranlassten einen neuen Aufsatz Euler's, welcher unmittelbar nach ihnen unter den Abhandlungen der Berliner Akademie abgedruckt ist†). Er hält darin d'Alembert gegenüber fest††), dass die Function $f(z)$ eine zwischen den Grenzen $-l$ und l ganz willkürliche sein könne, und bemerkt†††), dass Bernoulli's Lösung (welche er schon früher als eine besondere aufgestellt hatte) dann allgemein sei und zwar nur dann allgemein sei, wenn die Reihe

$$a_1 \sin\frac{x\pi}{l} + a_2 \sin\frac{2x\pi}{l} + \cdots$$

$$+ \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos\frac{x\pi}{l} + b_2 \cos\frac{2x\pi}{l} + \cdots$$

*) Mémoires de l'académie de Berlin. 1753. p. 147.

**) Taylor de methodo incrementorum.

***) l. c. p. 157. art. XIII.

†) Mémoires de l'académie de Berlin. 1753. p. 196.

††) l. c. p. 214.

†††) l. c. art. III—X.

für die Abscisse x die Ordinate einer zwischen den Abscissen 0 und l ganz willkürlichen Curve darstellen könne. Nun wurde es damals von Niemand bezweifelt, dass alle Umformungen, welche man mit einem analytischen Ausdrucke — er sei endlich oder unendlich — vornehmen könne, für jedwede Werthe der unbestimmten Grössen gültig seien oder doch nur in ganz speciellen Fällen unanwendbar würden. Es schien daher unmöglich, eine algebraische Curve oder überhaupt eine analytisch gegebene nicht periodische Curve durch obigen Ausdruck darzustellen, und Euler glaubte daher, die Frage gegen Bernoulli entscheiden zu müssen.

Der Streit zwischen Euler und d'Alembert war indess noch immer unerledigt. Dies veranlasste einen jungen, damals noch wenig bekannten Mathematiker, Lagrange, die Lösung der Aufgabe auf einem ganz neuen Wege zu versuchen, auf welchem er zu Euler's Resultaten gelangte. Er unternahm es*), die Schwingungen eines masselosen Fadens zu bestimmen, welcher mit einer endlichen unbestimmten Anzahl gleich grosser Massen in gleich grossen Abständen beschwert ist, und untersuchte dann, wie sich diese Schwingungen ändern, wenn die Anzahl der Massen in's Unendliche wächst. Mit welcher Gewandtheit, mit welchem Aufwande analytischer Kunstgriffe er aber auch den ersten Theil dieser Untersuchung durchführte, so liess der Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen doch viel zu wünschen übrig, so dass d'Alembert in einer Schrift, welche er an die Spitze seiner opuscules mathématiques stellte, fortfahren konnte, seiner Lösung den Ruhm der grössten Allgemeinheit zu vindiciren. Die Ansichten der damaligen berühmten Mathematiker waren und blieben daher in dieser Sache getheilt; denn auch in spätern Arbeiten behielt jeder im Wesentlichen seinen Standpunkt bei.

Um also schliesslich ihre bei Gelegenheit dieses Problems entwickelten Ansichten über die willkürlichen Functionen und über die Darstellbarkeit derselben durch eine trigonometrische Reihe zusammenzustellen, so hatte Euler zuerst diese Functionen in die Analysis eingeführt und, auf geometrische Anschauung gestützt, die Infinitesimalrechnung auf sie angewandt. Lagrange**) hielt Euler's Resultate (seine geometrische Construction des Schwingungsverlaufs) für richtig; aber ihm genügte die Euler'sche geometrische Behandlung dieser

*) Miscellanea Taurinensia. Tom. I. Recherches sur la nature et la propagation du son.

**) Miscellanea Taurinensia. Tom. II. Pars math. pag. 18.

Functionen nicht. D'Alembert*) dagegen ging auf die Euler'sche Auffassungsweise der Differentialgleichung ein und beschränkte sich, die Richtigkeit seiner Resultate anzufechten, weil man bei ganz willkürlichen Functionen nicht wissen könne, ob ihre Differentialquotienten stetig seien. Was die Bernoulli'sche Lösung betraf, so kamen alle drei darin überein, sie nicht für allgemein zu halten; aber während d'Alembert**), um Bernoulli's Lösung für minder allgemein, als die seinige, erklären zu können, behaupten musste, dass auch eine analytisch gegebene periodische Function sich nicht immer durch eine trigonometrische Reihe darstellen lasse, glaubte Lagrange***) diese Möglichkeit beweisen zu können.

2.

Fast fünfzig Jahre vergingen, ohne dass in der Frage über die analytische Darstellbarkeit willkürlicher Functionen ein wesentlicher Fortschritt gemacht wurde. Da warf eine Bemerkung Fourier's ein neues Licht auf diesen Gegenstand; eine neue Epoche in der Entwicklung dieses Theils der Mathematik begann, die sich bald auch äusserlich in grossartigen Erweiterungen der mathematischen Physik kund that. Fourier bemerkte, dass in der trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \begin{cases} \qquad\qquad a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots \\ + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots \end{cases}$$

die Coefficienten sich durch die Formeln

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

bestimmen lassen. Er sah, dass diese Bestimmungsweise auch anwendbar bleibe, wenn die Function $f(x)$ ganz willkürlich gegeben sei; er setzte für $f(x)$ eine so genannte discontinuirliche Function (die Ordinate einer gebrochenen Linie für die Abscisse x) und erhielt so eine Reihe, welche in der That stets den Werth der Function gab.

Als Fourier in einer seiner ersten Arbeiten über die Wärme, welche er der französischen Akademie vorlegte†), (21. Dec. 1807) zuerst den Satz aussprach, dass eine ganz willkürlich (graphisch) gegebene Function sich durch eine trigonometrische Reihe ausdrücken lasse,

*) Opuscules mathématiques p. d'Alembert. Tome premier. 1761. pag. 16. art. VII—XX.

**) Opuscules mathématiques. Tome I. pag. 42. art. XXIV.

***) Misc. Taur. Tom. III. Pars math. pag. 221. art. XXV.

†) Bulletin des sciences p. la soc. philomatique. Tome I. p. 112.

war diese Behauptung dem greisen Lagrange so unerwartet, dass er ihr auf das Entschiedenste entgegentrat. Es soll*) sich hierüber noch ein Schriftstück im Archiv der Pariser Akademie befinden. Dessenungeachtet verweist**) Poisson überall, wo er sich der trigonometrischen Reihen zur Darstellung willkürlicher Functionen bedient, auf eine Stelle in Lagrange's Arbeiten über die schwingenden Saiten, wo sich diese Darstellungsweise finden soll. Um diese Behauptung, die sich nur aus der bekannten Rivalität zwischen Fourier und Poisson erklären lässt***), zu widerlegen, sehen wir uns genöthigt, noch einmal auf die Abhandlung Lagrange's zurückzukommen; denn über jenen Vorgang in der Akademie findet sich nichts veröffentlicht.

Man findet in der That an der von Poisson citirten Stelle†) die Formel:

„$y = 2\int Y \sin X\pi\, dX \times \sin x\pi + 2\int Y \sin 2X\pi\, dX \times \sin 2x\pi$
$+ 2\int Y \sin 3X\pi\, dX \times \sin 3x\pi + \text{etc.} + 2\int Y \sin nX\pi\, dX \times \sin nx\pi$,
de sorte que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse X."

Diese Formel sieht nun allerdings ganz so aus wie die Fourier'sche Reihe, so dass bei flüchtiger Ansicht eine Verwechselung leicht möglich ist; aber dieser Schein rührt bloss daher, weil Lagrange das Zeichen $\int dX$ anwandte, wo er heute das Zeichen $\Sigma \Delta X$ angewandt haben würde. Sie giebt die Lösung der Aufgabe, die endliche Sinusreihe

$$a_1 \sin x\pi + a_2 \sin 2x\pi + \cdots + a_n \sin nx\pi$$

so zu bestimmen, dass sie für die Werthe

$$\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \cdots, \frac{n}{n+1}$$

von x, welche Lagrange unbestimmt durch X bezeichnet, gegebene Werthe erhält. Hätte Lagrange in dieser Formel n unendlich gross werden lassen, so wäre er allerdings zu dem Fourier'schen Resultat gelangt. Wenn man aber seine Abhandlung durchliest, so sieht man, dass er weit davon entfernt ist zu glauben, eine ganz willkürliche Function lasse sich wirklich durch eine unendliche Sinusreihe darstellen. Er hatte vielmehr die ganze Arbeit gerade unternommen, weil er glaubte, diese willkürlichen Functionen liessen sich nicht durch eine

*) Nach einer mündlichen Mittheilung des Herrn Professor Dirichlet.

**) Unter Andern in dem verbreiteten Traité de mécanique Nro. 323. p. 638.

***) Der Bericht im bulletin des sciences über die von Fourier der Akademie vorgelegte Abhandlung ist von Poisson.

†) Misc. Taur. Tom. III. Pars math. pag. 261.

Formel ausdrücken, und von der trigonometrischen Reihe glaubte er, dass sie jede analytisch gegebene periodische Function darstellen könne. Freilich erscheint es uns jetzt kaum denkbar, dass Lagrange von seiner Summenformel nicht zur Fourier'schen Reihe gelangt sein sollte; aber dies erklärt sich daraus, dass durch den Streit zwischen Euler und d'Alembert sich bei ihm im Voraus eine bestimmte Ansicht über den einzuschlagenden Weg gebildet hatte. Er glaubte das Schwingungsproblem für eine unbestimmte endliche Anzahl von Massen erst vollständig absolviren zu müssen, bevor er seine Grenzbetrachtungen anwandte. Diese erfordern eine ziemlich ausgedehnte Untersuchung*), welche unnöthig war, wenn er die Fourier'sche Reihe kannte.

Durch Fourier war nun zwar die Natur der trigonometrischen Reihen vollkommen richtig erkannt**); sie wurden seitdem in der mathematischen Physik zur Darstellung willkürlicher Functionen vielfach angewandt, und in jedem einzelnen Falle überzeugte man sich leicht, dass die Fourier'sche Reihe wirklich gegen den Werth der Function convergire; aber es dauerte lange, ehe dieser wichtige Satz allgemein bewiesen wurde.

Der Beweis, welchen Cauchy in einer der Pariser Akademie am 27. Febr. 1826 vorgelesenen Abhandlung gab***), ist unzureichend, wie Dirichlet gezeigt hat†). Cauchy setzt voraus, dass, wenn man in der willkürlich gegebenen periodischen Function $f(x)$ für x ein complexes Argument $x + yi$ setzt, diese Function für jeden Werth von y endlich sei. Dies findet aber nur Statt, wenn die Function gleich einer constanten Grösse ist. Man sieht indess leicht, dass diese Voraussetzung für die ferneren Schlüsse nicht nothwendig ist. Es reicht hin, wenn eine Function $\varphi(x + yi)$ vorhanden ist, welche für alle positiven Werthe von y endlich ist und deren reeller Theil für $y = 0$ der gegebenen periodischen Function $f(x)$ gleich wird. Will man diesen Satz, der in der That richtig ist††), voraussetzen, so führt allerdings der von Cauchy eingeschlagene Weg zum Ziele, wie umgekehrt dieser Satz sich aus der Fourier'schen Reihe ableiten lässt.

*) Misc. Taur. Tom. III. Pars math. S. 251.

**) Bulletin d. sc. Tom. I. p. 115. Les coefficients $a, a', a'', \ldots$, étant ainsi déterminés etc.

***) Mémoires de l'ac. d. sc. de Paris. Tom. VI. p. 603.

†) Crelle Journal für die Mathematik. Bd. IV. p. 157 & 158.

††) Der Beweis findet sich in der Inauguraldissertation des Verfassers.

3.

Erst im Januar 1829 erschien im Journal von Crelle*) eine Abhandlung von Dirichlet, worin für Functionen, die durchgehends eine Integration zulassen und nicht unendlich viele Maxima und Minima haben, die Frage ihrer Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen in aller Strenge entschieden wurde.

Die Erkenntniss des zur Lösung dieser Aufgabe einzuschlagenden Weges ergab sich ihm aus der Einsicht, dass die unendlichen Reihen in zwei wesentlich verschiedene Klassen zerfallen, je nachdem sie, wenn man sämmtliche Glieder positiv macht, convergent bleiben oder nicht. In den ersteren können die Glieder beliebig versetzt werden, der Werth der letzteren dagegen ist von der Ordnung der Glieder abhängig. In der That, bezeichnet man in einer Reihe zweiter Klasse die positiven Glieder der Reihe nach durch

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

die negativen durch

$$-b_1,\ -b_2,\ -b_3,\ \ldots,$$

so ist klar, dass sowohl Σa, als Σb unendlich sein müssen; denn wären beide endlich, so würde die Reihe auch nach Gleichmachung der Zeichen convergiren; wäre aber eine unendlich, so würde die Reihe divergiren. Offenbar kann nun die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Werth grösser als C wird, und so lange negative, bis ihr Werth kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes. Da nun sowohl die Grössen a, als die Grössen b mit wachsendem Index zuletzt unendlich klein werden, so werden auch die Abweichungen von C, wenn man in der Reihe nur hinreichend weit fortgeht, beliebig klein werden, d. h. die Reihe wird gegen C convergiren.

Nur auf die Reihen erster Klasse sind die Gesetze endlicher Summen anwendbar; nur sie können wirklich als Inbegriff ihrer Glieder betrachtet werden, die Reihen der zweiten Klasse nicht; ein Umstand, welcher von den Mathematikern des vorigen Jahrhunderts übersehen wurde, hauptsächlich wohl aus dem Grunde, weil die Reihen, welche nach steigenden Potenzen einer veränderlichen Grösse fortschreiten, allgemein zu reden (d. h. einzelne Werthe dieser Grösse ausgenommen), zur ersten Klasse gehören.

*) Bd. IV. pag. 157.

Die Fourier'sche Reihe gehört nun offenbar nicht nothwendig zur ersten Klasse; ihre Convergenz konnte also gar nicht, wie Cauchy vergeblich*) versucht hatte, aus dem Gesetze, nach welchem die Glieder abnehmen, abgeleitet werden. Es musste vielmehr gezeigt werden, dass die endliche Reihe

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin\alpha d\alpha \sin x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin 2\alpha d\alpha \sin 2x + \cdots$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha \sin nx$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos\alpha d\alpha \cos x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos 2\alpha d\alpha \cos 2x + \cdots$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha \cos nx,$$

oder, was dasselbe ist, das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}d\alpha$$

sich, wenn n in's Unendliche wächst, dem Werthe $f(x)$ unendlich annähert.

Dirichlet stützt diesen Beweis auf die beiden Sätze:

1) Wenn $0 < c \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$, nähert sich $\int_0^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$ mit wachsendem n zuletzt unendlich dem Werth $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$;

2) wenn $0 < b < c \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$, nähert sich $\int_b^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$ mit wachsendem n zuletzt unendlich dem Werth 0,

vorausgesetzt, dass die Function $\varphi(\beta)$ zwischen den Grenzen dieser Integrale entweder immer abnimmt, oder immer zunimmt.

Mit Hülfe dieser beiden Sätze lässt sich, wenn die Function f nicht unendlich oft vom Zunehmen zum Abnehmen oder vom Abnehmen zum Zunehmen übergeht, das Integral

*) Dirichlet in Crelle's Journal. Bd. IV. pag. 158. Quoi qu'il en soit de cette première observation, ... à mesure que n croît.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}d\alpha$$

offenbar in eine endliche Anzahl von Gliedern zerlegen, von denen eins*) gegen $\frac{1}{2}f(x+0)$, ein anderes gegen $\frac{1}{2}f(x-0)$, die übrigen aber gegen 0 convergiren, wenn n ins Unendliche wächst.

Hieraus folgt, dass durch eine trigonometrische Reihe jede sich nach dem Intervall 2π periodisch wiederholende Function darstellbar ist, welche

1) durchgehends eine Integration zulässt,

2) nicht unendlich viele Maxima und Minima hat und

3) wo ihr Werth sich sprungweise ändert, den Mittelwerth zwischen den beiderseitigen Grenzwerthen annimmt.

Eine Function, welche die ersten beiden Eigenschaften hat, die dritte aber nicht, kann durch eine trigonometrische Reihe offenbar nicht dargestellt werden; denn die trigonometrische Reihe, die sie ausser den Unstetigkeiten darstellt, würde in den Unstetigkeitspunkten selbst von ihr abweichen. Ob und wann aber eine Function, welche die ersten beiden Bedingungen nicht erfüllt, durch eine trigonometrische Reihe darstellbar sei, bleibt durch diese Untersuchung unentschieden.

Durch die Arbeit Dirichlet's ward einer grossen Menge wichtiger analytischer Untersuchungen eine feste Grundlage gegeben. Es war ihm gelungen, indem er den Punkt, wo Euler irrte, in volles Licht brachte, eine Frage zu erledigen, die so viele ausgezeichnete Mathematiker seit mehr als siebzig Jahren (seit dem Jahre 1753) beschäftigt hatte. In der That für alle Fälle der Natur, um welche es sich allein handelte, war sie vollkommen erledigt, denn so gross auch unsere Unwissenheit darüber ist, wie sich die Kräfte und Zustände der Materie nach Ort und Zeit im Unendlichkleinen ändern, so können wir doch sicher annehmen, dass die Functionen, auf welche sich die Dirichlet'sche Untersuchung nicht erstreckt, in der Natur nicht vorkommen.

Dessenungeachtet scheinen diese von Dirichlet unerledigten Fälle aus einem zweifachen Grunde Beachtung zu verdienen.

*) Es ist nicht schwer zu beweisen, dass der Werth einer Function f, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, stets, sowohl wenn der Argumentwerth abnehmend, als wenn er zunehmend gleich x wird, entweder festen Grenzwerthen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ (nach Dirichlet's Bezeichnung in Dove's Repertorium der Physik. Bd. 1. pag. 170) sich nähern, oder unendlich gross werden müsse. (1)

Erstlich steht, wie Dirichlet selbst am Schlusse seiner Abhandlung bemerkt, dieser Gegenstand mit den Principien der Infinitesimalrechnung in der engsten Verbindung und kann dazu dienen, diese Principien zu grösserer Klarheit und Bestimmtheit zu bringen. In dieser Beziehung hat die Behandlung desselben ein unmittelbares Interesse.

Zweitens aber ist die Anwendbarkeit der Fourier'schen Reihen nicht auf physikalische Untersuchungen beschränkt; sie ist jetzt auch in einem Gebiete der reinen Mathematik, der Zahlentheorie, mit Erfolg angewandt, und hier scheinen gerade diejenigen Functionen, deren Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe Dirichlet nicht untersucht hat, von Wichtigkeit zu sein.

Am Schlusse seiner Abhandlung verspricht freilich Dirichlet, später auf diese Fälle zurückzukommen, aber dieses Versprechen ist bis jetzt unerfüllt geblieben. Auch die Arbeiten von Dirksen und Bessel über die Cosinus- und Sinusreihen leisten diese Ergänzung nicht; sie stehen vielmehr der Dirichlet'schen an Strenge und Allgemeinheit nach. Der mit ihr fast ganz gleichzeitige Aufsatz Dirksen's*), welcher offenbar ohne Kenntniss derselben geschrieben ist, schlägt zwar im Allgemeinen einen richtigen Weg ein, enthält aber im Einzelnen einige Ungenauigkeiten. Denn abgesehen davon, dass er in einem speciellen Falle**) für die Summe der Reihe ein falsches Resultat findet, stützt er sich in einer Nebenbetrachtung auf eine nur in besonderen Fällen mögliche Reihenentwicklung***), so dass sein Beweis nur für Functionen mit überall endlichen ersten Differentialquotienten vollständig ist. Bessel†) sucht den Dirichlet'schen Beweis zu vereinfachen. Aber die Aenderungen in diesem Beweise gewähren keine wesentliche Vereinfachung in den Schlüssen, sondern dienen höchstens dazu, ihn in geläufigere Begriffe zu kleiden, während seine Strenge und Allgemeinheit beträchtlich darunter leidet.

Die Frage über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe ist also bis jetzt nur unter den beiden Voraussetzungen entschieden, dass die Function durchgehends eine Integration zulässt und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat. Wenn die letztere Voraussetzung nicht gemacht wird, so sind die beiden Integraltheoreme Dirichlet's zur Entscheidung der Frage unzulänglich; wenn aber die erstere wegfällt, so ist schon die Fourier'sche Coefficientenbestimmung nicht anwendbar. Der im Folgenden, wo diese Frage ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Function untersucht werden soll, eingeschlagene Weg ist hierdurch, wie man sehen wird, bedingt; ein so directer Weg, wie der Dirichlet's, ist der Natur der Sache nach nicht möglich.

*) Crelle's Journal. Bd. IV. p. 170.
**) l. c. Formel 22.
***) l. c. Art. 3.
†) Schumacher. Astronomische Nachrichten. Nro. 374 (Bd 16. p. 229).

Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?

Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)\,dx$.

Hat sie diese Eigenschaft nicht, so hat $\int_a^b f(x)\,dx$ keine Bedeutung. Man hat jedoch in mehreren Fällen versucht, diesem Zeichen auch dann eine Bedeutung beizulegen, und unter diesen Erweiterungen des Begriffs eines bestimmten Integrals ist eine von allen Mathematikern angenommen. Wenn nämlich die Function $f(x)$ bei Annäherung des Arguments an einen einzelnen Werth c in dem Intervalle (a, b) unendlich gross wird, so kann offenbar die Summe S, welchen Grad von Kleinheit man auch den δ vorschreiben möge, jeden beliebigen

Werth erhalten; sie hat also keinen Grenzwerth, und $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ würde nach dem Obigen keine Bedeutung haben. Wenn aber alsdann

$$\int\limits_a^{c-\alpha_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\alpha_2}^b f(x)\,dx$$

sich, wenn α_1 und α_2 unendlich klein werden, einer festen Grenze nähert, so versteht man unter $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ diesen Grenzwerth.

Andere Festsetzungen von Cauchy über den Begriff des bestimmten Integrales in den Fällen, wo es dem Grundbegriffe nach ein solches nicht giebt, mögen für einzelne Klassen von Untersuchungen zweckmässig sein; sie sind indess nicht allgemein eingeführt und dazu, schon wegen ihrer grossen Willkürlichkeit, wohl kaum geeignet.

5.

Untersuchen wir jetzt zweitens den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffs oder die Frage: in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht?

Wir betrachten zunächst den Integralbegriff im engern Sinne, d. h. wir setzen voraus, dass die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden, convergirt. Bezeichnen wir also die grösste Schwankung der Function zwischen a und x_1, d. h. den Unterschied ihres grössten und kleinsten Werthes in diesem Intervalle, durch D_1, zwischen x_1 und x_2 durch D_2 ..., zwischen x_{n-1} und b durch D_n, so muss

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$$

mit den Grössen δ unendlich klein werden. Wir nehmen ferner an, dass, so lange sämmtliche δ kleiner als d bleiben, der grösste Werth, den diese Summe erhalten kann, Δ sei; Δ wird alsdann eine Function von d sein, welche mit d immer abnimmt und mit dieser Grösse unendlich klein wird. Ist nun die Gesammtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen grösser als σ sind, $= s$, so wird der Beitrag dieser Intervalle zur Summe $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ offenbar $\geqq \sigma s$. Man hat daher

$$\sigma s \leqq \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n \leqq \Delta, \text{ folglich } s \leqq \frac{\Delta}{\sigma}.$$

$\frac{\Delta}{\sigma}$ kann nun, wenn σ gegeben ist, immer durch geeignete Wahl von

d beliebig klein gemacht werden; dasselbe gilt daher von s, und es ergiebt sich also:

Damit die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden, convergirt, ist ausser der Endlichkeit der Function $f(x)$ noch erforderlich, dass die Gesammtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, was auch σ sei, durch geeignete Wahl von d beliebig klein gemacht werden kann.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren:

Wenn die Function $f(x)$ immer endlich ist, und bei unendlichem Abnehmen sämmtlicher Grössen δ die Gesammtgrösse s der Intervalle, in welchen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser, als eine gegebene Grösse σ, sind, stets zuletzt unendlich klein wird, so convergirt die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden.

Denn diejenigen Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, liefern zur Summe $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ einen Beitrag, kleiner als s, multiplicirt in die grösste Schwankung der Function zwischen a und b, welche (n. V.) endlich ist; die übrigen Intervalle einen Beitrag $< \sigma(b - a)$. Offenbar kann man nun erst σ beliebig klein annehmen und dann immer noch die Grösse der Intervalle (n. V.) so bestimmen, dass auch s beliebig klein wird, wodurch der Summe $\delta_1 D_1 + \cdots + \delta_n D_n$ jede beliebige Kleinheit gegeben, und folglich der Werth der Summe S in beliebig enge Grenzen eingeschlossen werden kann.

Wir haben also Bedingungen gefunden, welche nothwendig und hinreichend sind, damit die Summe S bei unendlichem Abnehmen der Grössen δ convergire und also im engern Sinne von einem Integrale der Function $f(x)$ zwischen a und b die Rede sein könne. ([2])

Wird nun der Integralbegriff wie oben erweitert, so ist offenbar, damit die Integration durchgehends möglich sei, die letzte der beiden gefundenen Bedingungen auch dann noch nothwendig; an die Stelle der Bedingung, dass die Function immer endlich sei, aber tritt die Bedingung, dass die Function **nur** bei Annäherung des Arguments an einzelne Werthe unendlich werde, und dass sich ein bestimmter Grenzwerth ergebe, wenn die Grenzen der Integration diesen Werthen unendlich genähert werden.

6.

Nachdem wir die Bedingungen für die Möglichkeit eines bestimmten Integrals im Allgemeinen, d. h. ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der zu integrirenden Function, untersucht haben, soll nun diese Untersuchung in besonderen Fällen theils angewandt, theils weiter ausgeführt werden, und zwar zunächst für die Functionen, welche zwischen je zwei noch so engen Grenzen unendlich oft unstetig sind.

Da diese Functionen noch nirgends betrachtet sind, wird es gut sein, von einem bestimmten Beispiele auszugehen. Man bezeichne der Kürze wegen durch (x) den Ueberschuss von x über die nächste ganze Zahl, oder, wenn x zwischen zweien in der Mitte liegt und diese Bestimmung zweideutig wird, den Mittelwerth aus den beiden Werthen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, also die Null, ferner durch n eine ganze, durch p eine ungerade Zahl und bilde alsdann die Reihe

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \cdots = \sum_{1,\infty} \frac{(nx)}{nn};$$

so convergirt, wie leicht zu sehen, diese Reihe für jeden Werth von x; ihr Werth nähert sich, sowohl, wenn der Argumentwerth stetig abnehmend, als wenn er stetig zunehmend gleich x wird, stets einem festen Grenzwerth, und zwar ist, wenn $x = \frac{p}{2n}$ (wo p, n relative Primzahlen)

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2nn}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = f(x) - \frac{\pi\pi}{16nn},$$

$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2nn}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = f(x) + \frac{\pi\pi}{16nn},$$

sonst aber überall $f(x+0) = f(x)$, $f(x-0) = f(x)$.

Diese Function ist also für jeden rationalen Werth von x, der in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ein Bruch mit geradem Nenner ist, unstetig, also zwischen je zwei noch so engen Grenzen unendlich oft, so jedoch, dass die Zahl der Sprünge, welche grösser als eine gegebene Grösse sind, immer endlich ist. Sie lässt durchgehends eine Integration zu. In der That genügen hierzu neben ihrer Endlichkeit die beiden Eigenschaften, dass sie für jeden Werth von x beiderseits einen Grenzwerth $f(x+0)$ und $f(x-0)$ hat, und dass die Zahl der Sprünge, welche grösser oder gleich einer gegebenen Grösse σ sind, stets endlich ist. Denn wenden wir unsere obige Untersuchung an, so lässt sich offenbar in Folge dieser beiden Umstände d stets so klein annehmen, dass in sämmtlichen Intervallen, welche diese Sprünge nicht enthalten, die Schwankungen kleiner als σ sind, und dass die Gesammtgrösse der Intervalle, welche diese Sprünge enthalten, beliebig klein wird.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Functionen, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima haben (zu welchen übrigens die eben betrachtete nicht gehört), wo sie nicht unendlich werden, stets

diese beiden Eigenschaften besitzen und daher allenthalben, wo sie nicht unendlich werden, eine Integration zulassen, wie sich auch leicht direct zeigen lässt. (3)

Um jetzt den Fall, wo die zu integrirende Function $f(x)$ für einen einzelnen Werth unendlich gross wird, näher in Betracht zu ziehen, nehmen wir an, dass dies für $x = 0$ stattfinde, so dass bei abnehmendem positiven x ihr Werth zuletzt über jede gegebene Grenze wächst.

Es lässt sich dann leicht zeigen, dass $xf(x)$ bei abnehmendem x von einer endlichen Grenze a an, nicht fortwährend grösser als eine endliche Grösse c bleiben könne. Denn dann wäre

$$\int_x^a f(x)\,dx > c\int_x^a \frac{dx}{x},$$

also grösser als $c\left(\log\frac{1}{x} - \log\frac{1}{a}\right)$, welche Grösse mit abnehmendem x zuletzt in's Unendliche wächst. Es muss also $xf(x)$, wenn diese Function nicht in der Nähe von $x = 0$ unendlich viele Maxima und Minima hat, nothwendig mit x unendlich klein werden, damit $f(x)$ einer Integration fähig sein könne. Wenn andererseits

$$f(x)\,x^{\alpha} = \frac{f(x)\,dx\,(1-\alpha)}{d\,(x^{1-\alpha})}$$

bei einem Werth von $\alpha < 1$ mit x unendlich klein wird, so ist klar, dass das Integral bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergirt.

Ebenso findet man, dass im Falle der Convergenz des Integrals die Functionen

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log\log\frac{1}{x}},\; f(x)\,x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log\log\log\frac{1}{x}}\;\cdots,$$

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x}\cdots\log^{n-1}\frac{1}{x}\log^{n}\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log^{1+n}\frac{1}{x}}$$

nicht bei abnehmendem x von einer endlichen Grenze an fortwährend grösser als eine endliche Grösse bleiben können, und also, wenn sie nicht unendlich viele Maxima und Minima haben, mit x unendlich klein werden müssen; dass dagegen das Integral $\int f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergire, sobald

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x}\cdots\log^{n-1}\frac{1}{x}\left(\log^{n}\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \frac{f(x)\,dx\,(1-\alpha)}{-d\left(\log^{n}\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha}}$$

für $\alpha > 1$ mit x unendlich klein wird.

Hat aber die Function $f(x)$ unendlich viele Maxima und Minima, so lässt sich über die Ordnung ihres Unendlichwerdens nichts bestimmen. In der That, nehmen wir an, die Function sei ihrem absoluten Werthe nach, wovon die Ordnung des Unendlichwerdens allein abhängt, gegeben, so wird man immer durch geeignete Bestimmung des Zeichens bewirken können, dass das Integral $\int f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergire. Als Beispiel einer solchen Function, welche unendlich wird und zwar so, dass ihre Ordnung (die Ordnung von $\frac{1}{x}$ als Einheit genommen) unendlich gross ist, mag die Function

$$\frac{d\left(x \cos e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx} = \cos e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}} \sin e^{\frac{1}{x}}$$

dienen.

Das möge über diesen im Grunde in ein anderes Gebiet gehörigen Gegenstand genügen; wir gehen jetzt an unsere eigentliche Aufgabe, eine allgemeine Untersuchung über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

Untersuchung der Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Function.

7.

Die bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand hatten den Zweck, die Fourier'sche Reihe für die in der Natur vorkommenden Fälle zu beweisen; es konnte daher der Beweis für eine ganz willkürlich angenommene Function begonnen, und später der Gang der Function behufs des Beweises willkürlichen Beschränkungen unterworfen werden, wenn sie nur jenen Zweck nicht beeinträchtigten. Für unsern Zweck darf derselbe nur den zur Darstellbarkeit der Function nothwendigen Bedingungen unterworfen werden; es müssen daher zunächst zur Darstellbarkeit nothwendige Bedingungen aufgesucht und aus diesen dann zur Darstellbarkeit hinreichende ausgewählt werden. Während also die bisherigen Arbeiten zeigten: wenn eine Function diese und jene Eigenschaften hat, so ist sie durch die Fourier'sche Reihe darstellbar; müssen wir von der umgekehrten Frage ausgehen: Wenn eine Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, was folgt daraus über ihren Gang, über die Aenderung ihres Werthes bei stetiger Aenderung des Arguments?

Demnach betrachten wir die Reihe

$$\begin{gathered} a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots \\ + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots \end{gathered}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2} b_0 = A_0,\ a_1 \sin x + b_1 \cos x = A_1,\ a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x = A_2, \ldots$$

setzen, die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

als gegeben. Wir bezeichnen diesen Ausdruck durch Ω und seinen Werth durch $f(x)$, so dass diese Function nur für diejenigen Werthe von x vorhanden ist, wo die Reihe convergirt.

Zur Convergenz einer Reihe ist nothwendig, dass ihre Glieder zuletzt unendlich klein werden. Wenn die Coefficienten a_n, b_n mit wachsendem n in's Unendliche abnehmen, so werden die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein; andernfalls kann dies nur für besondere Werthe von x stattfinden. Es ist nöthig, beide Fälle getrennt zu behandeln.

8.

Wir setzen also zunächst voraus, dass die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden.

Unter dieser Voraussetzung convergirt die Reihe

$$C + C'x + A_0 \frac{xx}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} \cdots = F(x),$$

welche man aus Ω durch zweimalige Integration jedes Gliedes nach x erhält, für jeden Werth von x. Ihr Werth $F(x)$ ändert sich mit x stetig, und diese Function F von x lässt folglich allenthalben eine Integration zu.

Um Beides — die Convergenz der Reihe und die Stetigkeit der Function $F(x)$ — einzusehen, bezeichne man die Summe der Glieder bis $-\frac{A_n}{nn}$ einschliesslich durch N, den Rest der Reihe, d. h. die Reihe

$$-\frac{A_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{A_{n+2}}{(n+2)^2} - \cdots$$

durch R und den grössten Werth von A_m für $m > n$ durch ε. Alsdann bleibt der Werth von R, wie weit man diese Reihe fortsetzen möge, offenbar abgesehen vom Zeichen

$$< \varepsilon \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) < \frac{\varepsilon}{n}$$

und kann also in beliebig kleine Grenzen eingeschlossen werden, wenn man n nur hinreichend gross annimmt; folglich convergirt die Reihe.

Ferner ist die Function $F(x)$ stetig; d. h. ihrer Aenderung kann jede Kleinheit gegeben werden, wenn man der entsprechenden Aenderung von x eine hinreichende Kleinheit vorschreibt. Denn die Aenderung von $F(x)$ setzt sich zusammen aus der Aenderung von R und von N; offenbar kann man nun erst n so gross annehmen, dass R, was auch x sei, und folglich auch die Aenderung von R für jede Aenderung von x beliebig klein wird, und dann die Aenderung von x so klein annehmen, dass auch die Aenderung von N beliebig klein wird.

Es wird gut sein, einige Sätze über diese Function $F(x)$, deren Beweise den Faden der Untersuchung unterbrechen würden, voraufzuschicken.

Lehrsatz 1. Falls die Reihe Ω convergirt, convergirt

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

wenn α und β so unendlich klein werden, dass ihr Verhältniss endlich bleibt, gegen denselben Werth wie die Reihe.

In der That wird

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

$$=A_0+A_1\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta}+A_2\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\frac{\sin 2\beta}{2\beta}+A_3\frac{\sin 3\alpha}{3\alpha}\frac{\sin 3\beta}{3\beta}+\cdots$$

oder, um den einfacheren Fall, wo $\beta=\alpha$, zuerst zu erledigen,

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha\alpha}=A_0+A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2+A_2\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)^2+\cdots$$

Ist die unendliche Reihe

$$A_0+A_1+A_2+\cdots=f(x),$$

die Reihe

$$A_0+A_1+\cdots+A_{n-1}=f(x)+\varepsilon_n,$$

so muss sich für eine beliebig gegebene Grösse δ ein Werth m von n angeben lassen, so dass, wenn $n>m$, $\varepsilon_n<\delta$ wird. Nehmen wir nun α so klein an, dass $m\alpha<\pi$, setzen wir ferner mittelst der Substitution

$$A_n=\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n,$$

$\sum\limits_{0,\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 A_n$ in die Form

$$f(x)+\sum_{1,\infty}\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\},$$

und theilen wir diese letztere unendliche Reihe in drei Theile, indem wir

1) die Glieder vom Index 1 bis m einschliesslich,
2) vom Index $m+1$ bis zur grössten unter $\frac{\pi}{\alpha}$ liegenden ganzen Zahl, welche s sei,
3) von $s+1$ bis unendlich,

zusammenfassen, so besteht der erste Theil aus einer endlichen Anzahl stetig sich ändernder Glieder und kann daher seinem Grenzwerth 0 beliebig genähert werden, wenn man α hinreichend klein werden lässt; der zweite Theil ist, da der Factor von ε_n beständig positiv ist, offenbar abgesehen vom Zeichen

$$<\delta\left\{\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2\right\};$$

um endlich den dritten Theil in Grenzen einzuschliessen, zerlege man das allgemeine Glied in

$$\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)-\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$$

und

$$\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}=-\varepsilon_n\frac{\sin(2n-1)\alpha\sin\alpha}{(n\alpha)^2};$$

so leuchtet ein, dass es

$$<\delta\left\{\frac{1}{(n-1)^2\alpha\alpha}-\frac{1}{nn\alpha\alpha}\right\}+\delta\frac{1}{nn\alpha}$$

und folglich die Summe von $n=s+1$ bis $n=\infty$

$$<\delta\left\{\frac{1}{(s\alpha)^2}+\frac{1}{s\alpha}\right\},$$

welcher Werth für ein unendlich kleines α in

$$\delta\left\{\frac{1}{\pi\pi}+\frac{1}{\pi}\right\}\quad\text{übergeht.}$$

Die Reihe

$$\sum\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$$

nähert sich daher mit abnehmendem α einem Grenzwerth, der nicht grösser als

$$\delta\left\{1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi\pi}\right\}$$

sein kann, also Null sein muss, und folglich convergirt

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha\alpha},$$

welches

$$=f(x)+\sum\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\},$$

mit in's Unendliche abnehmendem α gegen $f(x)$, wodurch unser Satz für den Fall $\beta=\alpha$ bewiesen ist.

Um ihn allgemein zu beweisen, sei

$$F(x+\alpha+\beta)-2F(x)+F(x-\alpha-\beta)=(\alpha+\beta)^2(f(x)+\delta_1)$$
$$F(x+\alpha-\beta)-2F(x)+F(x-\alpha+\beta)=(\alpha-\beta)^2(f(x)+\delta_2),$$

woraus

$$F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)$$
$$= 4\alpha\beta f(x) + (\alpha+\beta)^2 \delta_1 - (\alpha-\beta)^2 \delta_2 .$$

In Folge des eben Bewiesenen werden nun δ_1 und δ_2 unendlich klein, sobald α und β unendlich klein werden; es wird also auch

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}\,\delta_1 - \frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}\,\delta_2$$

unendlich klein, wenn dabei die Coefficienten von δ_1 und δ_2 nicht unendlich gross werden, was nicht stattfindet, wenn zugleich $\frac{\beta}{\alpha}$ endlich bleibt; und folglich convergirt alsdann

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

gegen $f(x)$, w. z. b. w.

Lehrsatz 2.

$$\frac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{2\alpha}$$

wird stets mit α unendlich klein.

Um dieses zu beweisen, theile man die Reihe

$$\sum A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$

in drei Gruppen, von welchen die erste alle Glieder bis zu einem festen Index m enthält, von dem an A_n immer kleiner als ε bleibt, die zweite alle folgenden Glieder, für welche $n\alpha \overline{\overline{<}}$ als eine feste Grösse c ist, die dritte den Rest der Reihe umfasst. Es ist dann leicht zu sehen, dass, wenn α in's Unendliche abnimmt, die Summe der ersten endlichen Gruppe endlich bleibt, d. h. $<$ eine feste Grösse Q; die der zweiten $< \varepsilon \frac{c}{\alpha}$, die der dritten

$$< \varepsilon \sum_{c < n\alpha} \frac{1}{nn\alpha\alpha} < \frac{\varepsilon}{\alpha c}.$$

Folglich bleibt

$$\frac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{2\alpha}, \text{ welches } = 2\alpha \sum A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2,$$
$$< 2\left(Q\alpha + \varepsilon\left(c + \frac{1}{c}\right)\right),$$

woraus der z. b. Satz folgt.

Lehrsatz 3. Bezeichnet man durch b und c zwei beliebige Constanten, die grössere durch c, und durch $\lambda(x)$ eine Function, welche nebst ihrem ersten Differentialquotienten zwischen b und c immer stetig ist und an den Grenzen gleich Null wird, und von welcher der zweite Differentialquotient nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, so wird das Integral

$$\mu\mu \int_b^c F(x) \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx,$$

wenn μ in's Unendliche wächst, zuletzt kleiner als jede gegebene Grösse.

Setzt man für $F(x)$ seinen Ausdruck durch die Reihe, so erhält man für

$$\mu\mu \int_b^c F(x) \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

die Reihe (Φ)

$$\mu\mu \int_b^c \left(C + C'x + A_0 \frac{xx}{2}\right) \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$
$$- \sum_{1,\infty} \frac{\mu\mu}{nn} \int_b^c A_n \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx.$$

Nun lässt sich $A_n \cos\mu(x-a)$ offenbar als ein Aggregat von $\cos(\mu+n)(x-a)$, $\sin(\mu+n)(x-a)$, $\cos(\mu-n)(x-a)$, $\sin(\mu-n)(x-a)$ ausdrücken, und bezeichnet man in demselben die Summe der beiden ersten Glieder durch $B_{\mu+n}$, die Summe der beiden letzten Glieder durch $B_{\mu-n}$, so hat man $\cos\mu(x-a)\,A_n = B_{\mu+n} + B_{\mu-n}$,

$$\frac{d^2 B_{\mu+n}}{dx^2} = -(\mu+n)^2 B_{\mu+n}, \quad \frac{d^2 B_{\mu-n}}{dx^2} = -(\mu-n)^2 B_{\mu-n},$$

und es werden $B_{\mu+n}$ und $B_{\mu-n}$ mit wachsendem n, was auch x sei, zuletzt unendlich klein.

Das allgemeine Glied der Reihe (Φ)

$$-\frac{\mu\mu}{nn} \int_b^c A_n \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

wird daher

$$= \frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2} \int_b^c \frac{d^2 B_{\mu+n}}{dx^2}\,\lambda(x)\,dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2} \int_b^c \frac{d^2 B_{\mu-n}}{dx^2}\,\lambda(x)\,dx$$

oder durch zweimalige partielle Integration, indem man zuerst $\lambda(x)$, dann $\lambda'(x)$ als constant betrachtet,

$$= \frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2} \int_b^c B_{\mu+n}\,\lambda''(x)\,dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2} \int_b^c B_{\mu-n}\,\lambda''(x)\,dx,$$

da $\lambda(x)$ und $\lambda'(x)$ und daher auch die aus dem Integralzeichen tretenden Glieder an den Grenzen $= 0$ werden.

Man überzeugt sich nun leicht, dass $\int_b^c B_{\mu \pm n}\,\lambda''(x)\,dx$, wenn μ

in's Unendliche wächst, was auch n sei, unendlich klein wird; denn dieser Ausdruck ist gleich einem Aggregat der Integrale

$$\int_b^c \cos(\mu \pm n)(x-a)\,\lambda''(x)\,dx, \quad \int_b^c \sin(\mu \pm n)(x-a)\,\lambda''(x)\,dx,$$

und wenn $\mu \pm n$ unendlich gross wird, so werden diese Integrale, wenn aber nicht, weil dann n unendlich gross wird, ihre Coefficienten in diesem Ausdrucke unendlich klein.

Zum Beweise unseres Satzes genügt es daher offenbar, wenn von der Summe

$$\sum \frac{\mu^2}{(\mu-n)^2 n^2}$$

über alle ganzen Werthe von n ausgedehnt, welche den Bedingungen $n < -c'$, $c'' < n < \mu - c'''$, $\mu + c^{IV} < n$ genügen, für irgend welche positive Werthe der Grössen c gezeigt wird, dass sie, wenn μ unendlich gross wird, endlich bleibt. Denn abgesehen von den Gliedern, für welche $-c' < n < c''$, $\mu - c''' < n < \mu + c^{IV}$, welche offenbar unendlich klein werden und von endlicher Anzahl sind, bleibt die Reihe (Φ) offenbar kleiner als diese Summe, multiplicirt mit dem grössten Werthe von $\int_b^c B_{\mu \pm n}\lambda''(x)\,dx$, welcher unendlich klein wird.

Nun ist aber, wenn die Grössen $c > 1$ sind, die Summe

$$\sum \frac{\mu^2}{(\mu-n)^2 n^2} = \frac{1}{\mu} \sum \frac{\frac{1}{\mu}}{\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^2 \left(\frac{n}{\mu}\right)^2},$$

in den obigen Grenzen, kleiner als

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{(1-x)^2 x^2},$$

ausgedehnt von

$$-\infty \text{ bis } -\frac{c'-1}{\mu}, \quad \frac{c''-1}{\mu} \text{ bis } 1-\frac{c'''-1}{\mu}, \quad 1+\frac{c^{IV}-1}{\mu} \text{ bis } \infty;$$

denn zerlegt man das ganze Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ von Null anfangend in Intervalle von der Grösse $\frac{1}{\mu}$, und ersetzt man überall die Function unter dem Integralzeichen durch den kleinsten Werth in jedem Intervall, so erhält man, da diese Function zwischen den Integrationsgrenzen nirgends ein Maximum hat, sämmtliche Glieder der Reihe.

Führt man die Integration aus, so erhält man

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + 2\log x - 2\log(1-x)\right) + \text{const.}$$

und folglich zwischen den obigen Grenzen einen Werth, der mit μ nicht unendlich gross wird. (4)

9.

Mit Hülfe dieser Sätze lässt sich über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, deren Glieder für jeden Argumentwerth zuletzt unendlich klein werden, Folgendes feststellen:

I. Wenn eine nach dem Intervall 2π periodisch sich wiederholende Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe, deren Glieder für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden, darstellbar sein soll, so muss es eine stetige Function $F(x)$ geben, von welcher $f(x)$ so abhängt, dass

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

wenn α und β unendlich klein werden und dabei ihr Verhältniss endlich bleibt, gegen $f(x)$ convergirt.

Es muss ferner

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx,$$

wenn $\lambda(x)$ und $\lambda'(x)$ an den Grenzen des Integrals $= 0$ und zwischen denselben immer stetig sind, und $\lambda''(x)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, mit wachsendem μ zuletzt unendlich klein werden.

II. Wenn umgekehrt diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so giebt es eine trigonometrische Reihe, in welcher die Coefficienten zuletzt unendlich klein werden, und welche überall, wo sie convergirt, die Function darstellt.

Denn bestimmt man die Grössen C', A_0 so, dass

$$F(x) - C'x - A_0\frac{xx}{2}$$

eine nach dem Intervall 2π periodisch wiederkehrende Function ist und entwickelt diese nach Fourier's Methode in die trigonometrische Reihe

$$C - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \cdots,$$

indem man

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)dt = C,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\cos n(x-t)\,dt = -\frac{A_n}{nn}$$

setzt, so muss (n. V.)

$$A_n = -\frac{nn}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\cos n(x-t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein werden; woraus nach Satz 1 des vorigen Art. folgt, dass die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

überall, wo sie convergirt, gegen $f(x)$ convergirt. (⁵)

III. Es sei $b < x < c$, und $\varrho(t)$ eine solche Function, dass $\varrho(t)$ und $\varrho'(t)$ für $t = b$ und $t = c$ den Werth 0 haben und zwischen diesen Werthen stetig sich ändern, $\varrho''(t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und dass ferner für $t = x$ $\varrho(t) = 1$, $\varrho'(t) = 0$, $\varrho''(t) = 0$, $\varrho'''(t)$ und $\varrho^{IV}(t)$ aber endlich und stetig sind; so wird der Unterschied zwischen der Reihe

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n$$

und dem Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein. Die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

wird daher convergiren oder nicht convergiren, je nachdem

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

sich mit wachsendem n zuletzt einer festen Grenze nähert oder dies nicht stattfindet.

In der That wird

$$A_1 + A_2 + \cdots A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\sum_{1,n} -nn\cos n(x-t)\,dt,$$

oder, da

$$2\sum_{1,n} -nn\cos n(x-t) = 2\sum_{1,n}\frac{d^2\cos n(x-t)}{dt^2} = \frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}$$

ist,

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,dt.$$

Nun wird aber nach Satz 3 des vorigen Art.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\lambda(t)\,dt$$

bei unendlichem Zunehmen von n unendlich klein, wenn $\lambda(t)$ nebst ihrem ersten Differentialquotienten stetig ist, $\lambda''(t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und für $t = x$ $\lambda(t) = 0$, $\lambda'(t) = 0$, $\lambda''(t) = 0$, $\lambda'''(t)$ und $\lambda^{IV}(t)$ aber endlich und stetig sind. (⁶)

Setzt man hierin $\lambda(t)$ ausserhalb der Grenzen b, c gleich 1 und zwischen diesen Grenzen $= 1 - \varrho(t)$, was offenbar verstattet ist, so folgt, dass die Differenz zwischen der Reihe $A_1 + \cdots + A_n$ und dem Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird. Man überzeugt sich aber leicht durch partielle Integration, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c\left(C't + A^0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt,$$

wenn n unendlich gross wird, gegen A_0 convergirt, wodurch man obigen Satz erhält.

10.

Aus dieser Untersuchung hat sich also ergeben, dass, wenn die Coefficienten der Reihe Ω zuletzt unendlich klein werden, dann die Convergenz der Reihe für einen bestimmten Werth von x nur abhängt von dem Verhalten der Function $f(x)$ in unmittelbarer Nähe dieses Werthes.

Ob nun die Coefficienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, wird in vielen Fällen nicht aus ihrem Ausdrucke durch bestimmte Integrale, sondern auf anderm Wege entschieden werden müssen. Es verdient indess ein Fall hervorgehoben zu werden, wo sich dies unmittelbar aus der Natur der Function entscheiden lässt, wenn nämlich die Function $f(x)$ durchgehends endlich bleibt und eine Integration zulässt.

In diesem Falle muss, wenn man das ganze Intervall von $-\pi$ bis π der Reihe nach in Stücke von der Grösse

$$\delta_1, \ \delta_2, \ \delta_3, \ldots$$

zerlegt, und durch D_1 die grösste Schwankung der Function im ersten, durch D_2 im zweiten, u. s. w. bezeichnet,

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \delta_3 D_3 + \cdots$$

unendlich klein werden, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden.

Zerlegt man aber das Integral $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n(x-a)\, dx$, in welcher Form von dem Factor $\frac{1}{\pi}$ abgesehen die Coefficienten der Reihe enthalten sind, oder was dasselbe ist, $\int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin n(x-a)\, dx$ von $x = a$ anfangend in Integrale vom Umfange $\frac{2\pi}{n}$, so liefert jedes derselben zur Summe einen Beitrag kleiner als $\frac{2}{n}$, multiplicirt mit der grössten Schwankung in seinem Intervall, und ihre Summe ist also kleiner als eine Grösse, welche n. V. mit $\frac{2\pi}{n}$ unendlich klein werden muss.

In der That: diese Integrale haben die Form

$$\int\limits_{a+\frac{s}{n}2\pi}^{a+\frac{s+1}{n}2\pi} f(x) \sin n(x-a)\, dx.$$

Der Sinus wird in der ersten Hälfte positiv, in der zweiten negativ. Bezeichnet man also den grössten Werth von $f(x)$ in dem Intervall des Integrals durch M, den kleinsten durch m, so ist einleuchtend, dass man das Integral vergrössert, wenn man in der ersten Hälfte $f(x)$ durch M, in der zweiten durch m ersetzt, dass man aber das Integral verkleinert, wenn man in der ersten Hälfte $f(x)$ durch m und in der zweiten durch M ersetzt. Im ersteren Falle aber erhält man den Werth $\frac{2}{n}(M-m)$, im letzteren $\frac{2}{n}(m-M)$. Es ist daher dies

Integral abgesehen vom Zeichen kleiner als $\frac{2}{n}(M-m)$ und das Integral

$$\int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin n(x-a)\, dx$$

kleiner als

$$\frac{2}{n}(M_1 - m_1) + \frac{2}{n}(M_2 - m_2) + \frac{2}{n}(M_3 - m_3) + \cdots,$$

wenn man durch M_s den grössten, durch m_s den kleinsten Werth von $f(x)$ im $s$ten Intervall bezeichnet; diese Summe aber muss, wenn $f(x)$ einer Integration fähig ist, unendlich klein werden, sobald n unendlich gross und also der Umfang der Intervalle $\frac{2\pi}{n}$ unendlich klein wird.

In dem vorausgesetzten Falle werden daher die Coefficienten der Reihe unendlich klein.

11.

Es bleibt nun noch der Fall zu untersuchen, wo die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, ohne dass dies für jeden Argumentwerth stattfindet. Dieser Fall lässt sich auf den vorigen zurückführen.

Wenn man nämlich in den Reihen für den Argumentwerth $x+t$ und $x-t$ die Glieder gleichen Ranges addirt, so erhält man die Reihe

$$2A_0 + 2A_1 \cos t + 2A_2 \cos 2t + \cdots,$$

in welcher die Glieder für jeden Werth von t zuletzt unendlich klein werden und auf welche also die vorige Untersuchung angewandt werden kann.

Bezeichnet man zu diesem Ende den Werth der unendlichen Reihe

$$C + C'x + A_0 \frac{xx}{2} + A_0 \frac{tt}{2} - A_1 \frac{\cos t}{1} - A_2 \frac{\cos 2t}{4} - A_3 \frac{\cos 3t}{9} - \cdots$$

durch $G(t)$, so dass $\frac{F(x+t) + F(x-t)}{2}$ überall, wo die Reihen für $F(x+t)$ und $F(x-t)$ convergiren, $= G(t)$ ist, so ergiebt sich Folgendes:

I. Wenn die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, so muss

$$\mu\mu \int\limits_{b}^{c} G(t) \cos \mu(t-a)\, \lambda(t)\, dt,$$

wenn λ eine Function wie oben — Art. 9 — bezeichnet, mit wachsendem μ zuletzt unendlich klein werden. Der Werth dieses Integrals setzt sich zusammen aus den beiden Bestandtheilen

$$\mu\mu\int_b^c \frac{F(x+t)}{2}\cos\mu(t-a)\,\lambda(t)\,dt \text{ und } \mu\mu\int_b^c \frac{F(x-t)}{2}\cos\mu(t-a)\,\lambda(t)\,dt,$$

wofern diese Ausdrücke einen Werth haben. Das Unendlichkleinwerden desselben wird daher bewirkt durch das Verhalten der Function F an zwei symmetrisch zu beiden Seiten von x gelegenen Stellen. Es ist aber zu bemerken, dass hier Stellen vorkommen müssen, wo jeder Bestandtheil für sich nicht unendlich klein wird; denn sonst würden die Glieder der Reihe für jeden Argumentwerth zuletzt unendlich klein werden. Es müssen also dann die Beiträge der symmetrisch zu beiden Seiten von x gelegenen Stellen einander aufheben, so dass ihre Summe für ein unendliches μ unendlich klein wird. Hieraus folgt, dass die Reihe Ω nur für solche Werthe der Grösse x convergiren kann, zu welchen die Stellen, wo nicht

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

für ein unendliches μ unendlich klein wird, symmetrisch liegen. Offenbar kann daher nur dann, wenn die Anzahl dieser Stellen unendlich gross ist, die trigonometrische Reihe mit nicht in's Unendliche abnehmenden Coefficienten für eine unendliche Anzahl von Argumentwerthen convergiren.

Umgekehrt ist

$$A_n = -nn\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(G(t) - A_0\frac{tt}{2}\right)\cos nt\,dt$$

und wird also mit wachsendem n zuletzt unendlich klein, wenn

$$\mu\mu\int_b^c G(t)\cos\mu(t-a)\,\lambda(t)\,dt$$

für ein unendliches μ immer unendlich klein wird.

II. Wenn die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, so hängt es nur von dem Gange der Function $G(t)$ für ein unendlich kleines t ab, ob die Reihe convergirt oder nicht, und zwar wird der Unterschied zwischen

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n$$

und dem Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t)\,\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein, wenn b eine zwischen 0 und π enthaltene noch so kleine Constante und $\varrho(t)$ eine solche Function bezeichnet, dass $\varrho(t)$ und $\varrho'(t)$ immer stetig und für $t=b$ gleich Null sind, $\varrho''(t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und für $t=0$, $\varrho(t)=1$, $\varrho'(t)=0$, $\varrho''(t)=0$, $\varrho'''(t)$ und $\varrho''''(t)$ aber endlich und stetig sind.

12.

Die Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe können freilich noch etwas beschränkt und dadurch unsere Untersuchungen ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Function noch etwas weiter geführt werden. So z. B. kann in dem zuletzt erhaltenen Satze die Bedingung, dass $\varrho''(0)=0$ sei, weggelassen werden, wenn man in dem Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t)\,\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

$G(t)$ durch $G(t)-G(0)$ ersetzt. Es wird aber dadurch nichts Wesentliches gewonnen.

Indem wir uns daher zur Betrachtung besonderer Fälle wenden, wollen wir zunächst der Untersuchung für eine Function, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, diejenige Vervollständigung zu geben suchen, deren sie nach den Arbeiten Dirichlet's noch fähig ist.

Es ist oben bemerkt, dass eine solche Function allenthalben integrirt werden kann, wo sie nicht unendlich wird, und es ist offenbar, dass dies nur für eine endliche Anzahl von Argumentwerthen eintreten kann. Auch lässt der Beweis Dirichlet's, dass in dem Integralausdrucke für das $n$te Glied der Reihe und für die Summe ihrer n ersten Glieder der Beitrag aller Strecken mit Ausnahme derer, wo die Function unendlich wird, und der dem Argumentwerth der Reihe unendlich nahe liegenden mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird, und dass

$$\int_x^{x+b} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}} dt,$$

wenn $0 < b < \pi$ und $f(t)$ zwischen den Grenzen des Integrals nicht unendlich wird, für ein unendliches n gegen $\pi f(x+0)$ convergirt, in der That nichts zu wünschen übrig, wenn man die unnöthige Voraussetzung, dass die Function stetig sei, weglässt. Es bleibt also nur noch zu untersuchen, in welchen Fällen in diesen Integralausdrücken der Beitrag der Stellen, wo die Function unendlich wird, mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird. Diese Untersuchung ist noch nicht erledigt; sondern es ist nur gelegentlich von Dirichlet gezeigt, dass dies stattfindet unter der Voraussetzung, dass die darzustellende Function eine Integration zulässt, was nicht nothwendig ist.

Wir haben oben gesehen, dass, wenn die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden, die Function $F(x)$, deren zweiter Differentialquotient $f(x)$ ist, endlich und stetig sein muss, und dass

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

mit α stets unendlich klein wird. Wenn nun $F'(x+t) - F'(x-t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, so muss es, wenn t Null wird, gegen einen festen Grenzwerth L convergiren oder unendlich gross werden, und es ist offenbar, dass

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha (F'(x+t) - F'(x-t))\, dt = \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

dann ebenfalls gegen L oder gegen ∞ convergiren muss und daher nur unendlich klein werden kann, wenn $F'(x+t) - F'(x-t)$ gegen Null convergirt. Es muss daher, wenn $f(x)$ für $x = a$ unendlich gross wird, doch immer $f(a+t) + f(a-t)$ bis an $t = 0$ integrirt werden können. Dies reicht hin, damit

$$\left(\int_b^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^c\right) dx\, (f(x) \cos n\,(x-a))$$

mit abnehmendem ε convergire und mit wachsendem n unendlich klein werde. Weil ferner die Function $F(x)$ endlich und stetig ist, so muss $F'(x)$ bis an $x = a$ eine Integration zulassen und $(x-a)F'(x)$ mit $(x-a)$ unendlich klein werden, wenn diese Function nicht unendlich viele Maxima und Minima hat; woraus folgt, dass

$$\frac{d\,(x-a)F'(x)}{dx} = (x-a) f(x) + F'(x)$$

und also auch $(x-a)f(x)$ bis an $x = a$ integrirt werden kann. Es kann daher auch $\int f(x) \sin n\,(x-a)\, dx$ bis an $x = a$ integrirt werden, und damit die Coefficienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, ist offenbar nur noch nöthig, dass

$$\int_b^c f(x) \sin n\,(x-a)\, dx, \text{ wo } b < a < c,$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein werde. Setzt man

$$f(x)\,(x-a) = \varphi(x),$$

so ist, wenn diese Function nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, für ein unendliches n

$$\int_b^c f(x) \sin n\,(x-a)\, dx = \int_b^c \frac{\varphi(x)}{x-a} \sin n\,(x-a)\, dx = \pi \frac{\varphi(a+0) + \varphi(a-0)}{2},$$

wie Dirichlet gezeigt hat. Es muss daher

$$\varphi(a+t) + \varphi(a-t) = f(a+t)\,t - f(a-t)\,t$$

mit t unendlich klein werden, und da

$$f(a+t) + f(a-t)$$

bis an $t = 0$ integrirt werden kann und folglich auch

$$f(a+t)\,t + f(a-t)\,t$$

mit t unendlich klein wird, so muss sowohl $f(a+t)\,t$, als $f(a-t)\,t$ mit abnehmendem t zuletzt unendlich klein werden. Von Functionen, welche unendlich viele Maxima und Minima haben, abgesehen, ist es also zur Darstellbarkeit der Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe mit in's Unendliche abnehmenden Coefficienten hinreichend und nothwendig, dass, wenn sie für $x = a$ unendlich wird, $f(a+t)\,t$ und $f(a-t)\,t$ mit t unendlich klein werden und $f(a+t) + f(a-t)$ bis an $t = 0$ integrirt werden kann.

Durch eine trigonometrische Reihe, deren Coefficienten nicht zuletzt unendlich klein werden, kann eine Function $f(x)$, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, da

$$\mu\mu \int_b^c F(x) \cos \mu\,(x-a)\, \lambda(x)\, dx$$

nur für eine endliche Anzahl von Stellen für ein unendliches μ nicht unendlich klein wird, auch nur für eine endliche Anzahl von Argumentwerthen dargestellt werden, wobei es unnöthig ist länger zu verweilen.

13.

Was die Functionen betrifft, welche unendlich viele Maxima und Minima haben, so ist es wohl nicht überflüssig zu bemerken, dass eine Function $f(x)$, welche unendlich viele Maxima und Minima hat, einer Integration durchgehends fähig sein kann, ohne durch die Fourier'sche Reihe darstellbar zu sein. (7) Dies findet z. B. statt, wenn $f(x)$ zwischen 0 und 2π gleich

$$\frac{d\left(x^{\nu}\cos\frac{1}{x}\right)}{dx}, \text{ und } 0 < \nu < \tfrac{1}{2}$$

ist. Denn es wird in dem Integral $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$ mit wachsendem n der Beitrag derjenigen Stelle, wo x nahe $=\sqrt{\frac{1}{n}}$ ist, allgemein zu reden, zuletzt unendlich gross, so dass das Verhältniss dieses Integrals zu

$$\tfrac{1}{2}\sin\left(2\sqrt{n}-na+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}\,n^{\frac{1-2\nu}{4}}$$

gegen 1 convergirt, wie man auf dem gleich anzugebenden Wege finden wird. Um dabei das Beispiel zu verallgemeinern, wodurch das Wesen der Sache mehr hervortritt, setze man

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x)\cos\psi(x)$$

und nehme an, dass $\varphi(x)$ für ein unendlich kleines x unendlich klein und $\psi(x)$ unendlich gross werde, übrigens aber diese Functionen nebst ihren Differentialquotienten stetig seien und nicht unendlich viele Maxima und Minima haben. Es wird dann

$$f(x) = \varphi'(x)\cos\psi(x) - \varphi(x)\,\psi'(x)\sin\psi(x)$$

und

$$\int f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

gleich der Summe der vier Integrale

$$\tfrac{1}{2}\int\varphi'(x)\cos\left(\psi(x)\pm n(x-a)\right)dx,$$

$$-\tfrac{1}{2}\int\varphi(x)\,\psi'(x)\sin\left(\psi(x)\pm n(x-a)\right)dx.$$

Man betrachte nun, $\psi(x)$ positiv genommen, das Glied

$$-\tfrac{1}{2}\int\varphi(x)\,\psi'(x)\sin\left(\psi(x)+n(x-a)\right)dx$$

und untersuche in diesem Integrale die Stelle, wo die Zeichenwechsel des Sinus sich am langsamsten folgen. Setzt man

$$\psi(x) + n(x-a) = y,$$

so geschieht dies, wo $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, und also,

$$\psi'(\alpha) + n = 0$$

gesetzt, für $x = \alpha$. Man untersuche also das Verhalten des Integrals

$$-\tfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\,\psi'(x)\sin y\,dx$$

für den Fall, dass ε für ein unendliches n unendlich klein wird, und führe hiezu y als Variable ein. Setzt man

$$\psi(\alpha) + n(\alpha-a) = \beta,$$

so wird für ein hinreichend kleines ε

$$y = \beta + \psi''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2} + \cdots$$

und zwar ist $\psi''(\alpha)$ positiv, da $\psi(x)$ für ein unendlich kleines x positiv unendlich wird; es wird ferner

$$\frac{dy}{dx} = \psi''(\alpha)(x-\alpha) = \pm\sqrt{2\psi''(\alpha)(y-\beta)},$$

je nachdem $x-\alpha \gtrless 0$, und

$$-\tfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\,\psi'(x)\sin y\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\int\limits_{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}^{\beta} - \int\limits_{\beta}^{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}\right)\left(\sin y\,\frac{dy}{\sqrt{y-\beta}}\right)\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

$$= -\int\limits_0^{\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}\sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}\,\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}.$$

Lässt man also mit wachsendem n die Grösse ε so abnehmen, dass $\psi''(\alpha)\varepsilon\varepsilon$ unendlich gross wird, so wird, falls

$$\int\limits_0^{\infty}\sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

welches bekanntlich gleich ist $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}$, nicht Null ist, von Grössen niederer Ordnung abgesehen

$$-\tfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\psi'(x)\sin(\psi(x)+n(x-a))dx = -\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\pi}\,\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}.$$

Es wird daher, wenn diese Grösse nicht unendlich klein wird, das Verhältniss von

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

zu dieser Grösse, da dessen übrige Bestandtheile unendlich klein werden, bei unendlichem Zunehmen von n gegen 1 convergiren.

Nimmt man an, dass $\varphi(x)$ und $\psi'(x)$ für ein unendlich kleines x mit Potenzen von x von gleicher Ordnung sind und zwar $\varphi(x)$ mit x^ν und $\psi'(x)$ mit $x^{-\mu-1}$, so dass $\nu > 0$ und $\mu \geqq 0$ sein muss, so wird für ein unendliches n

$$\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

von gleicher Ordnung mit $\alpha^{\nu-\frac{\mu}{2}}$ und daher nicht unendlich klein, wenn $\mu \geqq 2\nu$. Ueberhaupt aber wird, wenn $x\psi'(x)$ oder, was damit identisch ist, wenn $\frac{\psi(x)}{\log x}$ für ein unendlich kleines x unendlich gross ist, sich $\varphi(x)$ immer so annehmen lassen, dass für ein unendlich kleines x $\varphi(x)$ unendlich klein,

$$\varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\sqrt{2\psi''(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\frac{d}{dx}\frac{1}{\psi'(x)}}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\lim\frac{1}{x\psi'(x)}}}$$

aber unendlich gross wird, und folglich $\int\limits_x f(x)\,dx$ bis an $x=0$ erstreckt werden kann, während

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

für ein unendliches n nicht unendlich klein wird. Wie man sieht, heben sich in dem Integrale $\int\limits_x f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen von x die Zuwachse des Integrals, obwohl ihr Verhältniss zu den Aenderungen von x sehr rasch wächst, wegen des raschen Zeichenwechsels der Function $f(x)$ einander auf; durch das Hinzutreten des Factors $\cos n(x-a)$ aber wird hier bewirkt, dass diese Zuwachse sich summiren.

Ebenso wohl aber, wie hienach für eine Function trotz der durchgängigen Möglichkeit der Integration die Fourier'sche Reihe nicht convergiren und selbst ihr Glied zuletzt unendlich gross werden kann,

— ebenso wohl können trotz der durchgängigen Unmöglichkeit der Integration von $f(x)$ zwischen je zwei noch so nahen Werthen unendlich viele Werthe von x liegen, für welche die Reihe Ω convergirt.

Ein Beispiel liefert, (nx) in der Bedeutung, wie oben (Art. 6.) genommen, die durch die Reihe

$$\sum_{1,\infty}\frac{(nx)}{n}$$

gegebene Function, welche für jeden rationalen Werth von x vorhanden ist und sich durch die trigonometrische Reihe

$$\sum_{1,\infty}\frac{{}^n\Sigma^{\theta}-(-1)^{\theta}}{n\pi}\sin 2nx\pi, \quad (8)$$

wo für θ alle Theiler von n zu setzen sind, darstellen lässt, welche aber in keinem noch so kleinen Grössenintervall zwischen endlichen Grenzen enthalten ist und folglich nirgends eine Integration zulässt.

Ein anderes Beispiel erhält man, wenn man in den Reihen

$$\sum_{0,\infty} c_n\cos nnx, \quad \sum_{1,\infty} c_n\sin nnx$$

für $c_0, c_1, c_2, \ldots$ positive Grössen setzt, welche immer abnehmen und zuletzt unendlich klein werden, während $\sum\limits_{1,n}^{s} c_s$ mit n unendlich gross wird. Denn wenn das Verhältniss von x zu 2π rational und in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, ein Bruch mit dem Nenner m ist, so werden offenbar diese Reihen convergiren oder in's Unendliche wachsen, je nachdem

$$\sum_{0,m-1}\cos nnx, \quad \sum_{0,m-1}\sin nnx$$

gleich Null oder nicht gleich Null sind. Beide Fälle aber treten nach einem bekannten Theoreme der Kreistheilung*) zwischen je zwei noch so engen Grenzen für unendlich viele Werthe von x ein.

In einem eben so grossen Umfange kann die Reihe Ω auch convergiren, ohne dass der Werth der Reihe

$$C' + A_0 x - \sum\frac{1}{nn}\frac{dA_n}{dx},$$

welche man durch Integration jedes Gliedes aus Ω erhält, durch ein noch so kleines Grössenintervall integrirt werden könnte.

Wenn man z. B. den Ausdruck

*) Disquis. ar. pag. 636 art. 356. (Gauss Werke Bd. I. pag. 442.)

$$\sum_{1,\infty} \frac{1}{n^3}(1-q^n)\log\left(\frac{-\log(1-q^n)}{q^n}\right),$$

wo die Logarithmen so zu nehmen sind, dass sie für $q=0$ verschwinden, nach steigenden Potenzen von q entwickelt und darin $q=e^{xi}$ setzt, so bildet der imaginäre Theil eine trigonometrische Reihe, welche zweimal nach x differentiirt in jedem Grössenintervall unendlich oft convergirt, während ihr erster Differentialquotient unendlich oft unendlich wird.

In demselben Umfange, d. h. zwischen je zwei noch so nahen Argumentwerthen unendlich oft, kann die trigonometrische Reihe auch selbst dann convergiren, wenn ihre Coefficienten nicht zuletzt unendlich klein werden. Ein einfaches Beispiel einer solchen Reihe bildet die unendliche Reihe $\sum\limits_{1,\infty} \sin(n!x\pi)$, wo $n!$, wie gebräuchlich,

$$=1.2.3\ldots n,$$

welche nicht bloss für jeden rationalen Werth von x convergirt, indem sie sich in eine endliche verwandelt, sondern auch für eine unendliche Anzahl von irrationalen, von denen die einfachsten sind $\sin 1$, $\cos 1$, $\frac{2}{e}$ und deren Vielfache, ungerade Vielfache von e, $\frac{e-\frac{1}{e}}{4}$, u. s. w. (2)

Inhalt.

Anmerkungen.

(1) (Zu Seite 237. Anmerkung.) Nehmen wir an, dass die Function $f(x)$ in dem Intervalle Δ zwischen x und $x_1 > x$ nicht wachse, und bezeichnen wir mit g die obere Grenze der Werthe, die $f(x+\xi)$ für $0 < \xi < \Delta$ annimmt, d. h. einen Werth, der von keinem dieser Functionswerthe überschritten, aber mit jedem beliebigen Grad von Annäherung erreicht wird, so wird $g - f(x+\xi)$ mit wachsendem ξ niemals abnehmen, während es doch beliebig klein werden soll, d. h. es ist $\lim\limits_{\xi=0} (g - f(x+\xi)) = 0$, $g = f(x+0)$. Der Satz, dass ein System reeller Zahlen $\mathfrak{S}$, dessen in endlicher oder unendlicher Zahl vorhandene Individuen s einen endlichen Zahlwerth nicht übersteigen, eine obere Grenze hat, ist wohl zuerst von Weierstrass präcis ausgesprochen und bewiesen (vgl. O. Biermann, Theorie der analytischen Functionen §. 16. Leipzig, Teubner, 1884). Sehr einfach ist der Beweis auf Grund der Anschauungen von Dedekind über Irrationalzahlen (Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, Vieweg, 1872). Theilt man nämlich die reelle Zahlenreihe in zwei Theile A und B ein, so dass jede Zahl a in A von Zahlen des Systems $\mathfrak{S}$ überschritten, jede Zahl b in B nicht überschritten wird, so werden diese beiden Theile A und B durch eine existirende Zahl g getrennt, der offenbar die charakterischen Merkmale der oberen Grenze von $\mathfrak{S}$ zukommen.

(2) (Zu Seite 241.) Es findet sich hierzu eine fragmentarische handschriftliche Bemerkung von Riemann, die wir folgendermassen herzustellen versuchen, da sie zur Vervollständigung des Beweises nothwendig ist, dass das Verschwinden von Δ mit d auch die für die Convergenz von S ausreichende Bedingung ist. Es könnte scheinen als ob, wenn auch bei zwei verschiedenen Eintheilungen, in denen die Intervalle δ', δ'' kleiner als d und folglich der Unterschied zwischen dem grössten und kleinsten Werthe (oberer und unterer Grenze) der Summe S, die für die beiden Eintheilungen mit S', S'' bezeichnet sei, kleiner als eine gegebene Grösse ε ist, doch die Summen S', S'' selbst um ein endliches Stück auseinander liegen könnten. Um die Unmöglichkeit hiervon einzusehen, bilde man eine dritte Eintheilung δ, der die Summe S entspreche, indem man δ' und δ'' gleichzeitig ausführt. Da nun jedes Element δ' aus einer ganzen Anzahl von Elementen δ besteht, so wird, wenn ein beliebiger Werth von S betrachtet wird, die Summe der diesen Elementen δ entsprechenden Glieder von S zwischen dem grössten und kleinsten Werth des dem Element δ' entsprechenden Gliedes von S' liegen, und folglich auch die ganze Summe S zwischen dem grössten und kleinsten Werth von S' und ebenso auch zwischen dem grössten und kleinsten Werth von S''; folglich können S, S', S'' nicht um mehr als ε von einander verschieden sein.

(3) (Zu Seite 243.) Dass jede endliche Function $f(x)$, die zwischen den Grenzen a und b nicht wächst, und folglich jede Function, die nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, einer Integration fähig ist, beweist man so.

Sei

$$a = x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_n = b,$$

$$\delta_1 = x_2 - x_1,\ \delta_2 = x_3 - x_2, \cdots \delta_{n-1} = x_n - x_{n-1},$$

$$D_1 = f(x_1) - f(x_2),\ D_2 = f(x_2) - f(x_3), \cdots D_{n-1} = f(x_{n-1}) - f(x_n),$$

$$D_1 + D_2 + \cdots + D_{n-1} = f(a) - f(b).$$

Da nach Voraussetzung $f(x)$ nicht wächst, so sind die Grössen $D_1, D_2, \cdots D_{n-1}$ die grössten Schwankungen in den Intervallen $\delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_{n-1}$ und alle positiv oder wenigstens keines von ihnen negativ. Ist m die Anzahl derjenigen Intervalle, in denen $D > \sigma$, so ist $m\sigma < f(a) - f(b)$ oder

$$m < \frac{f(a) - f(b)}{\sigma}.$$

Sind also die sämmtlichen Intervalle δ kleiner als d, so ist die Gesammtgrösse der Intervalle, von denen die grösste Schwankung grösser als σ ist, $< \frac{f(a) - f(b)}{\sigma} d$ und wird also, w. z. b. w., mit d zugleich unendlich klein.

(4) (Zu Seite 251.) Die hier gebrauchten Grössen $B_{\mu \pm n}$ haben den Ausdruck

$$\begin{aligned} B_{\mu+n} &= \tfrac{1}{2} \cos(\mu + n)(x - a)\left(a_n \sin na + b_n \cos na\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \sin(\mu + n)(x - a)\left(a_n \cos na - b_n \sin na\right), \\ B_{\mu-n} &= \tfrac{1}{2} \cos(\mu - n)(x - a)\left(a_n \sin na + b_n \cos na\right) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} \sin(\mu - n)(x - a)\left(a_n \cos na - b_n \sin na\right). \end{aligned}$$

Zur Ergänzung ist noch zu beweisen, dass auch

$$\mu\mu \int_b^c \left(C + C'x + A_0 \frac{xx}{2}\right) \cos\mu(x - a)\, \lambda(x)\, dx$$

den Grenzwerth 0 hat. Dies erreicht man wohl am einfachsten, wenn man

$$\left(C + C'x + A_0 \frac{xx}{2}\right) \cos\mu(x - a) = -\frac{1}{\mu\mu} \frac{d^2 B}{dx^2},$$

$$B = \left(C - \frac{3A_0}{\mu\mu} + C'x + A_0 \frac{xx}{2}\right) \cos\mu(x - a) - 2\left(C' + A_0 x\right) \frac{\sin\mu(x - a)}{\mu}$$

setzt und eine zweimalige partielle Integration anwendet. Dass Integrale wie

$$\int_b^c \cos\mu(x - a)\, \lambda''(x)\, dx, \quad \int_b^c \sin\mu(x - a)\, \lambda''(x)\, dx$$

mit unendlich wachsendem μ verschwinden, kann man entweder nach der Dirichlet'schen Methode, oder einfacher mittels des du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes beweisen, wonach, wenn $\varphi(x)$ eine zwischen den Grenzen b und c nicht wachsende oder nicht abnehmende Function und ξ ein zwischen b und c gelegener Werth ist,

$$\int_b^c f(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(b) \int_b^\xi f(x)\, dx + \varphi(c) \int_\xi^c f(x)\, dx.$$

(5) (Zu Seite 252.) Die unter II. aufgestellten Sätze bedürfen einer Erläuterung: Da die Function $f(x)$ um 2π periodisch angenommen ist, so muss

$$F(x+2\pi) - F(x) = \varphi(x)$$

die Eigenschaft haben, dass

$$\frac{\varphi(x+\alpha+\beta) - \varphi(x+\alpha-\beta) - \varphi(x-\alpha+\beta) + \varphi(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

unter der im Text gemachten Voraussetzung sich mit α und β der Grenze 0 nähert. Es ist daher $\varphi(x)$ eine lineare Function von x, und folglich lassen sich die Constanten C', A_0 so bestimmen, dass

$$\Phi(x) = F(x) - C'x - A_0 \frac{xx}{2}$$

eine um 2π periodische Function von x ist.

Nun ist über die Function $F(x)$ weiter die Voraussetzung gemacht, dass für beliebige Grenzen b, c

$$\mu\mu \int_b^c F(x) \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

mit unendlich wachsendem μ sich der Grenze 0 nähere, wenn $\lambda(x)$ den im Text angegebenen Bedingungen genügt, woraus folgt, dass unter den gleichen Voraussetzungen

$$\mu\mu \int_b^c \Phi(x) \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

sich der Grenze 0 nähert.

Es sei nun $b < -\pi$, $c > \pi$, und man nehme, was zulässig ist, $\lambda(x)$ im Intervall von $-\pi$ bis $+\pi = 1$, so folgt, dass auch:

$$\mu\mu \int_b^{-\pi} \Phi(x) \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx + \mu\mu \int_\pi^c \Phi(x) \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$
$$+ \mu\mu \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(x) \cos\mu(x-a)\,dx$$

Null zur Grenze hat. Nun kann man, wenn μ eine ganze Zahl n ist, mit Rücksicht auf die Periodicität von $\Phi(x)$ für diese Summe setzen:

$$nn \int_{b+2\pi}^c \Phi(x) \cos n(x-a)\,\lambda_1(x)\,dx + nn \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(x) \cos n(x-a)\,dx,$$

wenn in dem Intervall von $b+2\pi$ bis π $\lambda_1(x) = \lambda(x-2\pi)$ und in dem Intervall von π bis c $\lambda_1(x) = \lambda(x)$ ist, so dass $\lambda_1(x)$ zwischen den Grenzen $b+2\pi$ und c den Voraussetzungen über die Function $\lambda(x)$ genügt. Demnach hat das erste Glied der obigen Summe für sich den Grenzwerth 0, und folglich ist auch der Grenzwerth von

$$\mu\mu \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(x) \cos\mu(x-a)\,dx$$

gleich Null.

(6) (Zu Seite 253.) Hier scheint für die Function $\lambda(x)$ die Bedingung hinzugefügt werden zu müssen, dass sie sich nach dem Intervall 2π periodisch wiederholt (die mit der nachher gemachten Annahme verträglich ist). In der That würde z. B. das in Rede stehende Integral nicht sich der Grenze 0 nähern, wenn $F(t) - C't - A_0 \frac{tt}{2} =$ const. und $\lambda(t) = (x-t)^3$ gesetzt würde. Dagegen lässt sich unter der Voraussetzung der Periodicität von $\lambda(x)$ das Verschwinden dieses Integrals durch Ausführung der Differentiation

$$\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}$$

durch Anwendung des Satzes 3, Art. 8 und eines ähnlichen Verfahrens wie in der Anmerkung (5) leicht darthun.

Gegen die Anmerkungen (5) (6), die in der ersten Auflage dieser Gesammtausgabe die Nummern (1) (2) hatten, hat Ascoli in einer Abhandlung über trigonometrische Reihen (Accademia dei Lincei 1880) verschiedene Bedenken erhoben. Sie sollen gleichwohl hier unverändert bleiben; nur möge Folgendes beigefügt werden.

Der Beweis des Satzes, nach dem die in der Anmerkung (5) mit $\varphi(x)$ bezeichnete Function eine lineare sein muss (für den ich auf eine Abhandlung von G. Cantor in Crelle's Journal Bd. 72, S. 141 verweise), setzt allerdings voraus, dass die Function $f(x)$ für jeden Werth von x existirt (also auch endlich ist). Mir scheinen aber die Nummern I, II des Art. 9 überhaupt nur dann ganz verständlich, wenn diese Existenz vorausgesetzt wird, selbst dann, wenn man wie Ascoli will, die Forderung, durch Hinzufügung eines Ausdrucks $-C'x - A_0 \frac{xx}{2}$ in eine periodische Function verwandelt zu werden, unter die Bedingungen für die Function $F(x)$ mit aufnimmt. Lässt man die Voraussetzung der durchgängigen Existenz von $f(x)$ fallen, so kann es unendlich viele verschiedene Functionen $F(x)$ geben, die sich nicht blos um lineare Ausdrücke von einander unterscheiden. Art. 9, III behält allerdings seine Bedeutung auch dann noch, wenn die durchgehende Existenz von $f(x)$ nicht vorausgesetzt wird, sondern wie in Art. 8 $F(x)$ durch die Reihe $C - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} \cdots$ definirt ist.

Bei der Anmerkung (6) ist zuzugeben, dass es genügt, da die Function $\lambda(t)$ in den Formeln des Textes nur in dem Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ vorkommt, nicht die Periodicität von $\lambda(t)$ und $\lambda'(t)$, sondern nur die Formeln $\lambda(\pi) = \lambda(-\pi)$, $\lambda'(\pi) = \lambda'(-\pi)$ vorauszusetzen, also nicht eigentlich die Periodicität, sondern die Möglichkeit der stetigen periodischen Fortsetzung. Da aber die Function $F(t) - C't - \frac{A_0}{2} t^2$ auf Seite 251 durch die Reihe $C - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} \cdots$ und nicht wie Ascoli annimmt, durch $-\frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} \cdots$ definirt ist, so ist die Annahme des Beispiels, dass $F(t) - c't - \frac{A_0}{2} t^2$ eine von Null verschiedene Constante sei, sehr wohl zulässig.

Auch das Verfahren, das ich nach Analogie der Note (5) zum Beweis des Verschwindens des Integrals

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi(t)\,\frac{d\,d\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\lambda(t)\,dt$$

angewandt habe, muss ich etwas genauer darlegen.

Führt man die Differentiation unter dem Integral aus, so erhält man einen mehrgliedrigen Ausdruck, dessen einer Term, wenn zur Abkürzung $\frac{2n+1}{2}=\mu$ gesetzt wird, lautet

$$-\mu^2\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi(t)\,\frac{\lambda(t)}{\sin\frac{x-t}{2}}\,\sin\mu(x-t)\,dt\,,$$

oder wenn $\lambda(t)=\lambda_1(t)\sin\frac{x-t}{2}$ und $x=a+\pi$ gesetzt wird,

$$(-1)^n\mu^2\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi(t)\,\lambda_1(t)\cos\mu(a-t)\,dt\,.$$

Man wähle nun b, c so, dass das Intervall von b bis c das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ einschliesst und bestimme im ersteren Intervall eine Function $\lambda(t)$ so, dass zwischen $-\pi$ und $+\pi$ $\lambda(t)=\lambda_1(t)$, an den Grenzen aber $\lambda(t)$ und $\lambda'(t)$ verschwinden, ferner eine Function $\lambda_2(t)$ in dem Intervall von $b+2\pi$ bis c so, dass zwischen $b+2\pi$ und π $\lambda_2(t)=-\lambda(t-2\pi)$ und zwischen π und c $\lambda_2(t)=\lambda(t)$ wird, was also voraussetzt, dass $\lambda_2(\pi)=-\lambda_1(-\pi)$, $\lambda_2'(\pi)=\lambda_1'(-\pi)$ sei. Dann ergiebt sich wie in der Anmerkung (5)

$$\mu^2\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi(t)\,\lambda_1(t)\cos\mu(a-t)\,dt=\mu^2\int_{b}^{c}\Phi(t)\,\lambda(t)\cos\mu(a-t)\,dt$$
$$-\mu^2\int_{b+2\pi}^{c}\Phi(t)\,\lambda_2(t)\cos\mu(a-t)\,dt$$

und die beiden Bestandtheile rechts verschwinden nach Satz 3, Art. 8 mit unendlich wachsendem μ. Ebenso verfährt man mit den übrigen Bestandtheilen des vorliegenden Integrals.

(7) (Zu Seite 260.) Es möge hier auf die Arbeiten von P. du Bois-Reymond hingewiesen werden, die nach Riemann die Theorie der trigonometrischen Reihen noch wesentlich gefördert haben. Es ist dort durch Beispiele nachgewiesen, dass es selbst durchaus endliche und stetige Functionen mit unendlich vielen Maxima und Minima giebt, die eine Darstellung durch trigonometrische Reihen nicht gestatten.

(8) (Zu Seite 263.) Das Zeichen $\Sigma^\theta-(-1)^\theta$ ist als eine Summe von positiven und negativen Einheiten zu verstehen, so dass jedem geraden Theiler von n ein negatives, jedem ungeraden ein positives Glied entspricht. Man findet

diese Entwicklung (wenn auch auf einem nicht ganz einwurfsfreien Wege), wenn man die Function (x) durch die bekannte Formel

$$-\sum_{1,\infty}^{m}(-1)^m\,\frac{\sin 2m\pi x}{m\pi}$$

ausdrückt, dies in die Summe $\Sigma\frac{(nx)}{n}$ einsetzt und die Ordnung der Summationen vertauscht.

(9) (Zu Seite 264.) Der Werth $x=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ gehört, wie Genochi in einem diese Beispiele betreffenden Aufsatz bemerkt (Intorno ad alcune serie, Torino 1875) nicht zu den Werthen von x, für welche die Reihe $\sum_{1,\infty}\sin(n!\,x\pi)$ convergirt. Aber auch für $x=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ ist die Reihe nicht, wie Genochi angiebt, convergent.

XIII.

Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

(Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.)*)

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der

*) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; einige Ausführungen derselben findet man in der Beantwortung der Pariser Preisaufgabe nebst den Anmerkungen zu derselben.

Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können. Hieraus entsteht die Aufgabe, die einfachsten Thatsachen aufzusuchen, aus denen sich die Massverhältnisse des Raumes bestimmen lassen — eine Aufgabe, die der Natur der Sache nach nicht völlig bestimmt ist; denn es lassen sich mehrere Systeme einfacher Thatsachen angeben, welche zur Bestimmung der Massverhältnisse des Raumes hinreichen; am wichtigsten ist für den gegenwärtigen Zweck das von Euklid zu Grunde gelegte. Diese Thatsachen sind wie alle Thatsachen nicht nothwendig, sondern nur von empirischer Gewissheit, sie sind Hypothesen; man kann also ihre Wahrscheinlichkeit, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtung allerdings sehr gross ist, untersuchen und hienach über die Zulässigkeit ihrer Ausdehnung jenseits der Grenzen der Beobachtung, sowohl nach der Seite des Unmessbargrossen, als nach der Seite des Unmessbarkleinen urtheilen.

I. Begriff einer $n$fach ausgedehnten Grösse.

Indem ich nun von diesen Aufgaben zunächst die erste, die Entwicklung des Begriffs mehrfach ausgedehnter Grössen, zu lösen versuche, glaube ich um so mehr auf eine nachsichtige Beurtheilung Anspruch machen zu dürfen, da ich in dergleichen Arbeiten philosophischer Natur, wo die Schwierigkeiten mehr in den Begriffen, als in der Construction liegen, wenig geübt bin und ich ausser einigen ganz kurzen Andeutungen, welche Herr Geheimer Hofrath Gauss in der zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste, in den Göttingenschen gelehrten Anzeigen und in seiner Jubiläumsschrift darüber gegeben hat, und einigen philosophischen Untersuchungen Herbart's, durchaus keine Vorarbeiten benutzen konnte.

1.

Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer andern ein stetiger Uebergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder discrete Mannigfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen heissen im erstern Falle Punkte, im letztern Elemente dieser Mannigfaltigkeit. Begriffe, deren Bestimmungsweisen eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, sind so häufig, dass sich für beliebig gegebene Dinge wenigstens in den gebildeteren Sprachen immer ein Begriff auffinden lässt, unter welchem sie enthalten sind (und die Mathematiker konnten daher in der Lehre von den discreten Grössen unbedenklich von der Forderung ausgehen, gegebene Dinge als gleichartig zu betrachten), dagegen sind die Veranlassungen zur Bildung von Begriffen, deren Bestimmungsweisen eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, im gemeinen Leben so selten, dass die Orte der Sinnengegenstände und die Farben wohl die einzigen einfachen Begriffe sind, deren Bestimmungsweisen eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden. Häufigere Veranlassung zur Erzeugung und Ausbildung dieser Begriffe findet sich erst in der höhern Mathematik.

Bestimmte, durch ein Merkmal oder eine Grenze unterschiedene Theile einer Mannigfaltigkeit heissen Quanta. Ihre Vergleichung der Quantität nach geschieht bei den discreten Grössen durch Zählung, bei den stetigen durch Messung. Das Messen besteht in einem Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Grössen; zum Messen wird also ein Mittel erfordert, die eine Grösse als Massstab für die andere fortzutragen. Fehlt dieses, so kann man zwei Grössen nur vergleichen, wenn die eine ein Theil der andern ist, und auch dann nur das Mehr oder Minder, nicht das Wieviel entscheiden. Die Untersuchungen, welche sich in diesem Falle über sie anstellen lassen, bilden einen allgemeinen von Massbestimmungen unabhängigen Theil der Grössenlehre, wo die Grössen nicht als unabhängig von der Lage existirend und nicht als durch eine Einheit ausdrückbar, sondern als Gebiete in einer Mannigfaltigkeit betrachtet werden. Solche Untersuchungen sind für mehrere Theile der Mathematik, namentlich für die Behandlung der mehrwerthigen analytischen Functionen ein Bedürfniss geworden, und der Mangel derselben ist wohl eine Hauptursache, dass der berühmte Abel'sche Satz und die Leistungen von Lagrange, Pfaff, Jacobi für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen so lange unfruchtbar geblieben sind. Für den gegenwärtigen Zweck genügt es, aus diesem allgemeinen Theile der Lehre von den ausgedehnten Grössen, wo weiter nichts vorausgesetzt wird, als was in dem Begriffe derselben schon enthalten ist, zwei Punkte hervorzuheben, wovon der erste die Erzeugung des Begriffs einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, der zweite die Zurückführung der Ortsbestimmungen in einer gegebenen Mannigfaltigkeit auf Quantitätsbestimmungen betrifft und das wesentliche Kennzeichen einer $n$fachen Ausdehnung deutlich machen wird.

2.

Geht man bei einem Begriffe, dessen Bestimmungsweisen eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, von einer Bestimmungsweise auf eine bestimmte Art zu einer andern über, so bilden die durchlaufenen Bestimmungsweisen eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, deren wesentliches Kennzeichen ist, dass in ihr von einem Punkte nur nach zwei Seiten, vorwärts oder rückwärts, ein stetiger Fortgang möglich ist. Denkt man sich nun, dass diese Mannigfaltigkeit wieder in eine andere, völlig verschiedene, übergeht, und zwar wieder auf bestimmte Art, d. h. so, dass jeder Punkt in einen bestimmten Punkt der andern übergeht, so bilden sämmtliche so erhaltene Bestimmungsweisen eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. In ähnlicher Weise erhält man eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, wenn man sich vorstellt, dass eine zweifach ausgedehnte in eine völlig verschiedene auf bestimmte Art übergeht, und es ist leicht zu sehen, wie man diese Construction fortsetzen kann. Wenn man, anstatt den Begriff als bestimmbar, seinen Gegenstand als veränderlich betrachtet, so kann diese Construction bezeichnet werden als eine Zusammensetzung einer Veränderlichkeit von $n + 1$ Dimensionen aus einer Veränderlichkeit von n Dimensionen und aus einer Veränderlichkeit von Einer Dimension.

3.

Ich werde nun zeigen, wie man umgekehrt eine Veränderlichkeit, deren Gebiet gegeben ist, in eine Veränderlichkeit von einer Dimension und eine Veränderlichkeit von weniger Dimensionen zerlegen kann. Zu diesem Ende denke man sich ein veränderliches Stück einer Mannigfaltigkeit von Einer Dimension — von einem festen Anfangspunkte an gerechnet, so dass die Werthe desselben unter einander vergleichbar sind —, welches für jeden Punkt der gegebenen Mannigfaltigkeit einen bestimmten mit ihm stetig sich ändernden Werth hat, oder mit andern Worten, man nehme innerhalb der gegebenen Mannigfaltigkeit eine stetige Function des Orts an, und zwar eine solche Function, welche nicht längs eines Theils dieser Mannigfaltigkeit constant ist. Jedes System von Punkten, wo die Function einen constanten Werth hat, bildet dann eine stetige Mannigfaltigkeit von weniger Dimensionen, als die gegebene. Diese Mannigfaltigkeiten gehen bei Aenderung der Function stetig in einander über; man wird daher annehmen können, dass aus einer von ihnen die übrigen hervorgehen, und es wird dies, allgemein zu reden, so geschehen können, dass jeder Punkt in einen bestimmten Punkt der andern übergeht; die Ausnahmsfälle, deren

Untersuchung wichtig ist, können hier unberücksichtigt bleiben. Hierdurch wird die Ortsbestimmung in der gegebenen Mannigfaltigkeit zurückgeführt auf eine Grössenbestimmung und auf eine Ortsbestimmung in einer minderfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Es ist nun leicht zu zeigen, dass diese Mannigfaltigkeit $n-1$ Dimensionen hat, wenn die gegebene Mannigfaltigkeit eine $n$fach ausgedehnte ist. Durch $n$malige Wiederholung dieses Verfahrens wird daher die Ortsbestimmung in einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Grössenbestimmungen, und also die Ortsbestimmung in einer gegebenen Mannigfaltigkeit, wenn dieses möglich ist, auf eine endliche Anzahl von Quantitätsbestimmungen zurückgeführt. Es giebt indess auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Grössenbestimmungen erfordert. Solche Mannigfaltigkeiten bilden z. B. die möglichen Bestimmungen einer Function für ein gegebenes Gebiet, die möglichen Gestalten ein erräumlichen Figur u. s. w.

II. Massverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, dass die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede messbar ist.

Es folgt nun, nachdem der Begriff einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit construirt und als wesentliches Kennzeichen derselben gefunden worden ist, dass sich die Ortsbestimmung in derselben auf n Grössenbestimmungen zurückführen lässt, als zweite der oben gestellten Aufgaben eine Untersuchung über die Massverhältnisse, deren eine solche Mannigfaltigkeit fähig ist, und über die Bedingungen, welche zur Bestimmung dieser Massverhältnisse hinreichen. Diese Massverhältnisse lassen sich nur in abstracten Grössenbegriffen untersuchen und im Zusammenhange nur durch Formeln darstellen; unter gewissen Voraussetzungen kann man sie indess in Verhältnisse zerlegen, welche einzeln genommen einer geometrischen Darstellung fähig sind, und hiedurch wird es möglich, die Resultate der Rechnung geometrisch auszudrücken. Es wird daher, um festen Boden zu gewinnen, zwar eine abstracte Untersuchung in Formeln nicht zu vermeiden sein, die Resultate derselben aber werden sich im geometrischen Gewande darstellen lassen. Zu Beidem sind die Grundlagen enthalten in der berühmten Abhandlung des Herrn Geheimen Hofraths Gauss über die krummen Flächen.

1.

Massbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit der Grössen vom Ort, die in mehr als einer Weise stattfinden kann; die zunächst sich darbietende Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist wohl die, dass die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei, also jede Linie durch jede messbar sei. Wird die Ortsbestimmung auf Grössenbestimmungen zurückgeführt, also die Lage eines Punktes in der gegebenen $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch n veränderliche Grössen x_1, x_2, x_3, und so fort bis x_n ausgedrückt, so wird die Bestimmung einer Linie darauf hinauskommen, dass die Grössen x als Functionen Einer Veränderlichen gegeben werden. Die Aufgabe ist dann, für die Länge der Linien einen mathematischen Ausdruck aufzustellen, zu welchem Zwecke die Grössen x als in Einheiten ausdrückbar betrachtet werden müssen. Ich werde diese Aufgabe nur unter gewissen Beschränkungen behandeln und beschränke mich erstlich auf solche Linien, in welchen die Verhältnisse zwischen den Grössen dx — den zusammengehörigen Aenderungen der Grössen x — sich stetig ändern; man kann dann die Linien in Elemente zerlegt denken, innerhalb deren die Verhältnisse der Grössen dx als constant betrachtet werden dürfen, und die Aufgabe kommt dann darauf zurück, für jeden Punkt einen allgemeinen Ausdruck des von ihm ausgehenden Linienelements ds aufzustellen, welcher also die Grössen x und die Grössen dx enthalten wird. Ich nehme nun zweitens an, dass die Länge des Linienelements, von Grössen zweiter Ordnung abgesehen, ungeändert bleibt, wenn sämmtliche Punkte desselben dieselbe unendlich kleine Ortsänderung erleiden, worin zugleich enthalten ist, dass, wenn sämmtliche Grössen dx in demselben Verhältnisse wachsen, das Linienelement sich ebenfalls in diesem Verhältnisse ändert. Unter diesen Annahmen wird das Linienelement eine beliebige homogene Function ersten Grades der Grössen dx sein können, welche ungeändert bleibt, wenn sämmtliche Grössen dx ihr Zeichen ändern, und worin die willkürlichen Constanten stetige Functionen der Grössen x sind. Um die einfachsten Fälle zu finden, suche ich zunächst einen Ausdruck für die $(n-1)$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, welche vom Anfangspunkte des Linienelements überall gleich weit abstehen, d. h. ich suche eine stetige Function des Orts, welche sie von einander unterscheidet. Diese wird vom Anfangspunkt aus nach allen Seiten entweder ab- oder zunehmen müssen; ich will annehmen, dass sie nach allen Seiten zunimmt und also in dem Punkte ein Minimum hat. Es muss dann, wenn ihre ersten und zweiten Differentialquotienten endlich sind, das Differential erster Ordnung verschwinden und das zweiter Ordnung darf nie negativ werden; ich nehme an, dass es immer positiv bleibt. Dieser Differentialausdruck zweiter Ordnung bleibt alsdann constant, wenn ds constant bleibt, und wächst im quadratischen Verhältnisse, wenn die Grössen dx und also auch ds sich sämmtlich in demselben Verhältnisse ändern; er ist also $=$ const. ds^2 und folglich ist $ds =$ der Quadratwurzel aus einer immer positiven ganzen homogenen Function zweiten Grades der Grössen dx, in welcher die Coefficienten stetige Functionen der Grössen x sind. Für den Raum wird, wenn man die Lage der Punkte durch rechtwinklige Coordinaten ausdrückt, $ds = \sqrt{\Sigma(dx)^2}$; der Raum ist also unter diesem einfachsten Falle enthalten. Der nächst einfache Fall würde wohl die Mannigfaltigkeiten umfassen, in welchen sich das Linienelement durch die vierte Wurzel aus einem Differentialausdrucke vierten Grades ausdrücken lässt. Die Untersuchung dieser allgemeinern Gattung würde zwar keine wesentlich andere Principien erfordern, aber ziemlich zeitraubend sein und verhältnissmässig auf die Lehre vom Raume wenig neues Licht werfen, zumal da sich die Resultate nicht geometrisch ausdrücken lassen; ich beschränke mich daher auf die Mannigfaltigkeiten, wo das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades ausgedrückt wird. Man kann einen solchen Ausdruck in einen andern ähnlichen transformiren, indem man für die n unabhängigen Veränderlichen Functionen von n neuen unabhängigen Veränderlichen setzt. Auf diesem Wege wird man aber nicht jeden Ausdruck in jeden transformiren können; denn der Ausdruck enthält $n\frac{n+1}{2}$ Coefficienten, welche willkürliche Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind; durch Einführung neuer Veränderlicher wird man aber nur n Relationen genügen und also nur n der Coefficienten gegebenen Grössen gleich machen können. Es sind dann die übrigen $n\frac{n-1}{2}$ durch die Natur der darzustellenden Mannigfaltigkeit schon völlig bestimmt, und zur Bestimmung ihrer Massverhältnisse also $n\frac{n-1}{2}$ Functionen des Orts erforderlich. Die Mannigfaltigkeiten, in welchen sich, wie in der Ebene und im Raume, das Linienelement auf die Form $\sqrt{\Sigma dx^2}$ bringen lässt, bilden daher nur einen besondern Fall der hier zu untersuchenden Mannigfaltigkeiten; sie verdienen wohl einen besonderen Namen, und ich will also diese Mannigfaltigkeiten, in welchen sich das Quadrat des Linienelements auf die Summe der Quadrate von selbständigen Differentialien bringen lässt, eben nennen. Um nun die wesentlichen Verschiedenheiten sämmtlicher in der vorausgesetzten Form darstellbarer Mannigfaltigkeiten über-

sehen zu können, ist es nöthig, die von der Darstellungsweise herrührenden zu beseitigen, was durch Wahl der veränderlichen Grössen nach einem bestimmten Princip erreicht wird.

2.

Zu diesem Ende denke man sich von einem beliebigen Punkte aus das System der von ihm ausgehenden kürzesten Linien construirt; die Lage eines unbestimmten Punktes wird dann bestimmt werden können durch die Anfangsrichtung der kürzesten Linie, in welcher er liegt, und durch seine Entfernung in derselben vom Anfangspunkte und kann daher durch die Verhältnisse der Grössen dx^0, d. h. der Grössen dx im Anfang dieser kürzesten Linie und durch die Länge s dieser Linie ausgedrückt werden. Man führe nun statt dx^0 solche aus ihnen gebildete lineare Ausdrücke $d\alpha$ ein, dass der Anfangswerth des Quadrats des Linienelements gleich der Summe der Quadrate dieser Ausdrücke wird, so dass die unabhängigen Variabeln sind: die Grösse s und die Verhältnisse der Grössen $d\alpha$; und setze schliesslich statt $d\alpha$ solche ihnen proportionale Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dass die Quadratsumme $= s^2$ wird. Führt man diese Grössen ein, so wird für unendlich kleine Werthe von x das Quadrat des Linienelements $= \Sigma dx^2$, das Glied der nächsten Ordnung in demselben aber gleich einem homogenen Ausdruck zweiten Grades der $n\frac{n-1}{2}$ Grössen $(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$, $(x_1\,dx_3 - x_3\,dx_1)$, ..., also eine unendlich kleine Grösse von der vierten Dimension, so dass man eine endliche Grösse erhält, wenn man sie durch das Quadrat des unendlich kleinen Dreiecks dividirt, in dessen Eckpunkten die Werthe der Veränderlichen sind $(0, 0, 0, \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \ldots)$. Diese Grösse behält denselben Werth, so lange die Grössen x und dx in denselben binären Linearformen enthalten sind, oder so lange die beiden kürzesten Linien von den Werthen 0 bis zu den Werthen x und von den Werthen 0 bis zu den Werthen dx in demselben Flächenelement bleiben, und hängt also nur von Ort und Richtung desselben ab. Sie wird offenbar $= 0$, wenn die dargestellte Mannigfaltigkeit eben, d. h. das Quadrat des Linienelements auf Σdx^2 reducirbar ist, und kann daher als das Mass der in diesem Punkte in dieser Flächenrichtung stattfindenden Abweichung der Mannigfaltigkeit von der Ebenheit angesehen werden. Multiplicirt mit $-\frac{3}{4}$ wird sie der Grösse gleich, welche Herr Geheimer Hofrath Gauss das Krümmungsmass einer Fläche genannt hat. Zur Bestimmung der Massverhältnisse einer $n$fach ausgedehnten in der vorausgesetzten Form darstellbaren Mannigfaltigkeit wurden vorhin $n\frac{n-1}{2}$ Functionen des Orts nöthig gefunden;

wenn also das Krümmungsmass in jedem Punkte in $n\frac{n-1}{2}$ Flächenrichtungen gegeben wird, so werden daraus die Massverhältnisse der Mannigfaltigkeit sich bestimmen lassen, wofern nur zwischen diesen Werthen keine identischen Relationen stattfinden, was in der That, allgemein zu reden, nicht der Fall ist. Die Massverhältnisse dieser Mannigfaltigkeiten, wo das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades dargestellt wird, lassen sich so auf eine von der Wahl der veränderlichen Grössen völlig unabhängige Weise ausdrücken. Ein ganz ähnlicher Weg lässt sich zu diesem Ziele auch bei den Mannigfaltigkeiten einschlagen, in welchen das Linienelement durch einen weniger einfachen Ausdruck, z. B. durch die vierte Wurzel aus einem Differentialausdruck vierten Grades, ausgedrückt wird. Es würde sich dann das Linienelement, allgemein zu reden, nicht mehr auf die Form der Quadratwurzel aus einer Quadratsumme von Differentialausdrücken bringen lassen und also in dem Ausdrucke für das Quadrat des Linienelements die Abweichung von der Ebenheit eine unendlich kleine Grösse von der zweiten Dimension sein, während sie bei jenen Mannigfaltigkeiten eine unendlich kleine Grösse von der vierten Dimension war. Diese Eigenthümlichkeit der letztern Mannigfaltigkeiten kann daher wohl Ebenheit in den kleinsten Theilen genannt werden. Die für den jetzigen Zweck wichtigste Eigenthümlichkeit dieser Mannigfaltigkeiten, derentwegen sie hier allein untersucht worden sind, ist aber die, dass sich die Verhältnisse der zweifach ausgedehnten geometrisch durch Flächen darstellen und die der mehrfach ausgedehnten auf die der in ihnen enthaltenen Flächen zurückführen lassen, was jetzt noch einer kurzen Erörterung bedarf.

3.

In die Auffassung der Flächen mischt sich neben den inneren Massverhältnissen, bei welchen nur die Länge der Wege in ihnen in Betracht kommt, immer auch ihre Lage zu ausser ihnen gelegenen Punkten. Man kann aber von den äussern Verhältnissen abstrahiren, indem man solche Veränderungen mit ihnen vornimmt, bei denen die Länge der Linien in ihnen ungeändert bleibt, d. h. sie sich beliebig — ohne Dehnung — gebogen denkt, und alle so auseinander entstehenden Flächen als gleichartig betrachtet. Es gelten also z. B. beliebige cylindrische oder conische Flächen einer Ebene gleich, weil sie sich durch blosse Biegung aus ihr bilden lassen, wobei die innern Massverhältnisse bleiben, und sämmtliche Sätze über dieselben — also die ganze Planimetrie — ihre Gültigkeit behalten; dagegen gelten sie als wesentlich verschieden von der Kugel, welche sich nicht ohne Dehnung in eine Ebene verwandeln lässt. Nach der vorigen Untersuchung werden in jedem Punkte die innern Massverhältnisse einer zweifach ausgedehnten Grösse, wenn sich das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades ausdrücken lässt, wie dies bei den Flächen der Fall ist, charakterisirt durch das Krümmungsmass. Dieser Grösse lässt sich nun bei den Flächen die anschauliche Bedeutung geben, dass sie das Product aus den beiden Krümmungen der Fläche in diesem Punkte ist, oder auch, dass das Product derselben in ein unendlich kleines aus kürzesten Linien gebildetes Dreieck gleich ist dem halben Ueberschusse seiner Winkelsumme über zwei Rechte in Theilen des Halbmessers. Die erste Definition würde den Satz voraussetzen, dass das Product der beiden Krümmungshalbmesser bei der blossen Biegung einer Fläche ungeändert bleibt, die zweite, dass an demselben Orte der Ueberschuss der Winkelsumme eines unendlich kleinen Dreiecks über zwei Rechte seinem Inhalte proportional ist. Um dem Krümmungsmass einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in einem gegebenen Punkte und einer gegebenen durch ihn gelegten Flächenrichtung eine greifbare Bedeutung zu geben, muss man davon ausgehen, dass eine von einem Punkte ausgehende kürzeste Linie völlig bestimmt ist, wenn ihre Anfangsrichtung gegeben ist. Hienach wird man eine bestimmte Fläche erhalten, wenn man sämmtliche von dem gegebenen Punkte ausgehenden und in dem gegebenen Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert, und diese Fläche hat in dem gegebenen Punkte ein bestimmtes Krümmungsmass, welches zugleich das Krümmungsmass der $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in dem gegebenen Punkte und der gegebenen Flächenrichtung ist.

4.

Es sind nun noch, ehe die Anwendung auf den Raum gemacht wird, einige Betrachtungen über die ebenen Mannigfaltigkeiten im Allgemeinen nöthig, d. h. über diejenigen, in welchen das Quadrat des Linienelements durch eine Quadratsumme vollständiger Differentialien darstellbar ist.

In einer ebenen $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist das Krümmungsmass in jedem Punkte in jeder Richtung Null; es reicht aber nach der frühern Untersuchung, um die Massverhältnisse zu bestimmen, hin zu wissen, dass es in jedem Punkte in $n\frac{n-1}{2}$ Flächenrichtungen, deren Krümmungsmasse von einander unabhängig sind, Null sei. Die Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass überall $= 0$ ist, lassen sich betrachten als ein besonderer Fall derjenigen Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass allenthalben constant ist. Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass constant ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung bewegen lassen. Denn offenbar würden die Figuren in ihnen nicht beliebig verschiebbar und drehbar sein können, wenn nicht in jedem Punkte in allen Richtungen das Krümmungsmass dasselbe wäre. Andererseits aber sind durch das Krümmungsmass die Massverhältnisse der Mannigfaltigkeit vollständig bestimmt; es sind daher um einen Punkt nach allen Richtungen die Massverhältnisse genau dieselben, wie um einen andern, und also von ihm aus dieselben Constructionen ausführbar, und folglich kann in den Mannigfaltigkeiten mit constantem Krümmungsmass den Figuren jede beliebige Lage gegeben werden. Die Massverhältnisse dieser Mannigfaltigkeiten hängen nur von dem Werthe des Krümmungsmasses ab, und in Bezug auf die analytische Darstellung mag bemerkt werden, dass, wenn man diesen Werth durch α bezeichnet, dem Ausdruck für das Linienelement die Form

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2}$$

gegeben werden kann.

5.

Zur geometrischen Erläuterung kann die Betrachtung der Flächen mit constantem Krümmungsmass dienen. Es ist leicht zu sehen, dass sich die Flächen, deren Krümmungsmass positiv ist, immer auf eine Kugel, deren Radius gleich 1 dividirt durch die Wurzel aus dem Krümmungsmass ist, wickeln lassen werden; um aber die ganze Mannigfaltigkeit dieser Flächen zu übersehen, gebe man einer derselben die Gestalt einer Kugel und den übrigen die Gestalt von Umdrehungsflächen, welche sie im Aequator berühren. Die Flächen mit grösserem Krümmungsmass, als diese Kugel, werden dann die Kugel von innen berühren und eine Gestalt annehmen, wie der äussere der Axe abgewandte Theil der Oberfläche eines Ringes; sie würden sich auf Zonen von Kugeln mit kleinerem Halbmesser wickeln lassen, aber mehr als einmal herumreichen. Die Flächen mit kleinerem positiven Krümmungsmass wird man erhalten, wenn man aus Kugelflächen mit grösserem Radius ein von zwei grössten Halbkreisen begrenztes Stück ausschneidet und die Schnittlinien zusammenfügt. Die Fläche mit dem Krümmungsmass Null wird eine auf dem Aequator stehende Cylinderfläche sein; die Flächen mit negativem Krümmungsmass aber werden diesen Cylinder von aussen berühren und wie der innere der Axe zugewandte Theil der Oberfläche eines Ringes geformt sein. Denkt man sich diese Flächen als Ort für in ihnen bewegliche Flächenstücke, wie den Raum als Ort für Körper, so sind in allen diesen Flächen die Flächenstücke ohne Dehnung beweglich. Die Flächen mit positivem Krümmungsmass lassen sich stets so formen, dass die Flächenstücke auch ohne Biegung beliebig bewegt werden können, nämlich zu Kugelflächen, die mit negativem aber nicht. Ausser dieser Unabhängigkeit der Flächenstücke vom Ort findet bei der Fläche mit dem Krümmungsmass Null auch eine Unabhängigkeit der Richtung vom Ort statt, welche bei den übrigen Flächen nicht stattfindet.

III. Anwendung auf den Raum.

1.

Nach diesen Untersuchungen über die Bestimmung der Massverhältnisse einer $n$fach ausgedehnten Grösse lassen sich nun die Bedingungen angeben, welche zur Bestimmung der Massverhältnisse des Raumes hinreichend und nothwendig sind, wenn Unabhängigkeit der Linien von der Lage und Darstellbarkeit des Linienelements durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdrucke zweiten Grades, also Ebenheit in den kleinsten Theilen vorausgesetzt wird.

Sie lassen sich erstens so ausdrücken, dass das Krümmungsmass in jedem Punkte in drei Flächenrichtungen $= 0$ ist, und es sind daher die Massverhältnisse des Raumes bestimmt, wenn die Winkelsumme im Dreieck allenthalben gleich zwei Rechten ist.

Setzt man aber zweitens, wie Euklid, nicht bloss eine von der Lage unabhängige Existenz der Linien, sondern auch der Körper voraus, so folgt, dass das Krümmungsmass allenthalben constant ist, und es ist dann in allen Dreiecken die Winkelsumme bestimmt, wenn sie in Einem bestimmt ist.

Endlich könnte man drittens, anstatt die Länge der Linien als unabhängig von Ort und Richtung anzunehmen, auch eine Unabhängigkeit ihrer Länge und Richtung vom Ort voraussetzen. Nach dieser Auffassung sind die Ortsänderungen oder Ortsverschiedenheiten complexe in drei unabhängige Einheiten ausdrückbare Grössen.

2.

Im Laufe der bisherigen Betrachtungen wurden zunächst die Ausdehnungs- oder Gebietsverhältnisse von den Massverhältnissen gesondert, und gefunden, dass bei denselben Ausdehnungsverhältnissen verschiedene Massverhältnisse denkbar sind; es wurden dann die Systeme einfacher Massbestimmungen aufgesucht, durch welche die Massverhältnisse des Raumes völlig bestimmt sind und von welchen alle Sätze über dieselben eine nothwendige Folge sind; es bleibt nun die Frage zu erörtern, wie, in welchem Grade und in welchem Umfange diese Voraussetzungen durch die Erfahrung verbürgt werden. In dieser Beziehung findet zwischen den blossen Ausdehnungsverhältnissen und den Massverhältnissen eine wesentliche Verschiedenheit statt, insofern bei erstern, wo die möglichen Fälle eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, die Aussagen der Erfahrung zwar nie völlig gewiss, aber nicht ungenau sind, während bei letztern, wo die möglichen Fälle eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, jede Bestimmung aus der Erfahrung immer ungenau bleibt — es mag die Wahrscheinlichkeit, dass sie nahe richtig ist, noch so gross sein. Dieser Umstand wird wichtig bei der Ausdehnung dieser empirischen Bestimmungen über die Grenzen der Beobachtung in's Unmessbargrosse und Unmessbarkleine; denn die letztern können offenbar jenseits der Grenzen der Beobachtung immer ungenauer werden, die ersteren aber nicht.

Bei der Ausdehnung der Raumconstructionen in's Unmessbargrosse ist Unbegrenztheit und Unendlichkeit zu scheiden; jene gehört zu den Ausdehnungsverhältnissen, diese zu den Massverhältnissen. Dass der Raum eine unbegrenzte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei, ist eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Aussenwelt angewandt wird, nach welcher in jedem Augenblicke das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes construirt werden und welche sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des Raumes besitzt daher eine grössere empirische Gewissheit, als irgend eine äussere Erfahrung. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit keineswegs; vielmehr würde der Raum, wenn man Unabhängigkeit der Körper vom Ort voraussetzt, ihm also ein constantes Krümmungsmass zuschreibt, nothwendig endlich sein, so bald dieses Krümmungsmass einen noch so kleinen positiven Werth hätte. Man würde, wenn man die in einem Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert, eine unbegrenzte Fläche mit constantem positiven Krümmungsmass, also eine Fläche erhalten, welche in einer ebenen dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit die Gestalt einer Kugelfläche annehmen würde und welche folglich endlich ist.

3.

Die Fragen über das Unmessbargrosse sind für die Naturerklärung müssige Fragen. Anders verhält es sich aber mit den Fragen über das Unmessbarkleine. Auf der Genauigkeit, mit welcher wir die Erscheinungen in's Unendlichkleine verfolgen, beruht wesentlich die Erkenntniss ihres Causalzusammenhangs. Die Fortschritte der letzten Jahrhunderte in der Erkenntniss der mechanischen Natur sind fast allein bedingt durch die Genauigkeit der Construction, welche durch die Erfindung der Analysis des Unendlichen und die von Archimed, Galiläi und Newton aufgefundenen einfachen Grundbegriffe, deren sich die heutige Physik bedient, möglich geworden ist. In den Naturwissenschaften aber, wo die einfachen Grundbegriffe zu solchen Constructionen bis jetzt fehlen, verfolgt man, um den Causalzusammenhang zu erkennen, die Erscheinungen in's räumlich Kleine, so weit es das Mikroskop nur gestattet. Die Fragen über die Massverhältnisse des Raumes im Unmessbarkleinen gehören also nicht zu den müssigen.

Setzt man voraus, dass die Körper unabhängig vom Ort existiren, so ist das Krümmungsmass überall constant, und es folgt dann aus den astronomischen Messungen, dass es nicht von Null verschieden sein kann; jedenfalls müsste sein reciprocer Werth eine Fläche sein, gegen welche das unsern Teleskopen zugängliche Gebiet verschwinden müsste. Wenn aber eine solche Unabhängigkeit der Körper vom Ort nicht stattfindet, so kann man aus den Massverhältnissen im Grossen nicht auf die im Unendlichkleinen schliessen; es kann dann in jedem Punkte das Krümmungsmass in drei Richtungen einen beliebigen Werth haben, wenn nur die ganze Krümmung jedes messbaren Raumtheils nicht merklich von Null verschieden ist; noch complicirtere Verhältnisse können eintreten, wenn die vorausgesetzte Darstellbarkeit eines Linienelements durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades nicht stattfindet. Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar, dass die Massverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind, und dies würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären liessen.

Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern Grunde der Massverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raume gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, dass bei einer discreten Mannigfaltigkeit das Princip der Massverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muss. Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Thatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, dass diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird.

Es führt dies hinüber in das Gebiet einer andern Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt.

Uebersicht.

*) Art. I. bildet zugleich die Vorarbeit für Beiträge zur analysis situs.

*) Die Untersuchung über die möglichen Massbestimmungen einer n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist sehr unvollständig, indess für den gegenwärtigen Zweck wohl ausreichend.

**) Der §. 3 des Art. III bedarf noch einer Umarbeitung und weiteren Ausführung. (Bemerkungen von Riemann.)

XIV.

Ein Beitrag zur Elektrodynamik.

(Aus Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Bd. CXXXI.)

Der Königlichen Societät erlaube ich mir eine Bemerkung mitzutheilen, welche die Theorie der Elektricität und des Magnetismus mit der des Lichts und der strahlenden Wärme in einen nahen Zusammenhang bringt. Ich habe gefunden, dass die elektrodynamischen Wirkungen galvanischer Ströme sich erklären lassen, wenn man annimmt, dass die Wirkung einer elektrischen Masse auf die übrigen nicht momentan geschieht, sondern sich mit einer constanten (der Lichtgeschwindigkeit innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler gleichen) Geschwindigkeit zu ihnen fortpflanzt. Die Differentialgleichung für die Fortpflanzung der elektrischen Kraft wird bei dieser Annahme dieselbe, wie die für die Fortpflanzung des Lichts und der strahlenden Wärme.

Es seien S und S' zwei von constanten galvanischen Strömen durchflossene und gegen einander nicht bewegte Leiter, ε sei ein elektrisches Massentheilchen im Leiter S, welches sich zur Zeit t im Punkte (x, y, z) befinde, ε' ein elektrisches Massentheilchen von S' und befinde sich zur Zeit t im Punkte (x', y', z'). Ueber die Bewegung der elektrischen Massentheilchen, welche in jedem Leitertheilchen für die positiv und negativ elektrischen entgegengesetzt ist, mache ich die Voraussetzung, dass sie in jedem Augenblicke so vertheilt sind, dass die Summen

$$\Sigma \varepsilon f(x, y, z), \ \Sigma \varepsilon' f(x', y', z'),$$

über sämmtliche Massentheilchen der Leiter ausgedehnt gegen dieselben Summen, wenn sie nur über die positiv elektrischen oder nur über die negativ elektrischen Massentheilchen ausgedehnt werden, vernachlässigt werden dürfen, sobald die Function f und ihre Differentialquotienten stetig sind.

Diese Voraussetzung kann auf sehr mannigfaltige Weise erfüllt werden. Nimmt man z. B. an, dass die Leiter in den kleinsten Theilen krystallinisch sind, so dass sich dieselbe relative Vertheilung der

Elektricitäten in bestimmten gegen die Dimensionen der Leiter unendlich kleinen Abständen periodisch wiederholt, so sind, wenn β die Länge einer solchen Periode bezeichnet, jene Summen unendlich klein, wie $c\beta^n$, wenn f und ihre Derivirten bis zur $(n-1)$ ten Ordnung stetig sind, und unendlich klein wie $e^{-\frac{c}{\beta}}$, wenn sie sämmtlich stetig sind.

Erfahrungsmässiges Gesetz der elektrodynamischen Wirkungen.

Sind die specifischen Stromintensitäten nach mechanischem Mass zur Zeit t im Punkte (x, y, z) parallel den drei Axen u, v, w, und im Punkte (x', y', z') u', v', w', und bezeichnet r die Entfernung beider Punkte, c die von Kohlrausch und Weber bestimmte Constante, so ist der Erfahrung nach das Potential der von S auf S' ausgeübten Kräfte

$$-\frac{2}{cc}\int\int \frac{uu' + vv' + ww'}{r}\, dS\, dS',$$

dieses Integral über sämmtliche Elemente dS und dS' der Leiter S und S' ausgedehnt. Führt man statt der specifischen Stromintensitäten die Producte aus den Geschwindigkeiten in die specifischen Dichtigkeiten und dann für die Producte aus diesen in die Volumelemente die in ihnen enthaltenen Massen ein, so geht dieser Ausdruck über in

$$\Sigma\Sigma \frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc} \frac{1}{r} \frac{dd'(r^2)}{dt\,dt},$$

wenn die Aenderung von r^2 während der Zeit dt, welche von der Bewegung von ε herrührt, durch d, und die von der Bewegung von ε' herrührende durch d' bezeichnet wird.

Dieser Ausdruck kann durch Hinwegnahme von

$$\frac{d\Sigma\Sigma \frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc} \frac{1}{r} \frac{d'(r^2)}{dt}}{dt},$$

welches durch die Summirung nach ε verschwindet, in

$$-\Sigma\Sigma \frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} \frac{d'(r^2)}{dt}$$

und dieses wieder durch Addition von

$$\frac{d'\Sigma\Sigma \frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc}\, rr \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}}{dt},$$

welches durch die Summation nach ε' Null wird, in

$$\Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon'\frac{rr}{cc}\frac{d\,d'\left(\frac{1}{r}\right)}{dt\,dt}$$

verwandelt werden.

Ableitung dieses Gesetzes aus der neuen Theorie.

Nach der bisherigen Annahme über die elektrostatische Wirkung wird die Potentialfunction U beliebig vertheilter elektrischer Massen, wenn ϱ ihre Dichtigkeit im Punkte (x, y, z) bezeichnet, durch die Bedingung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-4\pi\varrho=0,$$

und durch die Bedingung, dass U stetig und in unendlicher Entfernung von wirkenden Massen constant sei, bestimmt. Ein particulares Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0,$$

welches überall ausser dem Punkte (x', y', z') stetig bleibt, ist

$$\frac{f(t)}{r}$$

und diese Function bildet die vom Punkte (x', y', z') aus erzeugte Potentialfunction, wenn sich in demselben zur Zeit t die Masse $-f(t)$ befindet.

Statt dessen nehme ich nun an, dass die Potentialfunction U durch die Bedingung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\alpha\alpha\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+\alpha\alpha 4\pi\varrho=0$$

bestimmt wird, so dass die vom Punkte (x', y', z') aus erzeugte Potentialfunction, wenn sich in demselben zur Zeit t die Masse $-f(t)$ befindet,

$$=\frac{f\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)}{r}$$

wird.

Bezeichnet man die Coordinaten der Masse ε zur Zeit t durch x_t, y_t, z_t, und die der Masse ε' zur Zeit t' durch $x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}$, und setzt zur Abkürzung

$$\left((x_t-x'_{t'})^2+(y_t-y'_{t'})^2+(z_t-z'_{t'})^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r(t,t')}=F(t,t'),$$

so wird nach dieser Annahme das Potential von ε auf ε' zur Zeit t

$$=-\varepsilon\varepsilon' F\left(t-\frac{r}{\alpha},\ t\right).$$

Das Potential der von sämmtlichen Massen ε des Leiters S auf die Massen ε' des Leiters S' von der Zeit 0 bis zur Zeit t ausgeübten Kräfte wird daher

$$P=-\int_0^t \Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon' F\left(t-\frac{r}{\alpha},\ \tau\right)d\tau,$$

die Summen über sämmtliche Massen beider Leiter ausgedehnt.

Da die Bewegung für entgegengesetzt elektrische Massen in jedem Leitertheilchen entgegengesetzt ist, so erlangt die Function $F(t, t')$ durch die Derivation nach t die Eigenschaft, mit ε, und durch die Derivation nach t' die Eigenschaft, mit ε' ihr Zeichen zu ändern. Bei der vorausgesetzten Vertheilung der Elektricitäten wird daher, wenn man die Derivationen nach t durch obere und nach t' durch untere Accente bezeichnet, $\Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon' F_{n'}^{(n)}(\tau, \tau)$, über sämmtliche elektrische Massen ausgedehnt, nur dann nicht unendlich klein gegen die über die elektrischen Massen einer Art erstreckte Summe, wenn n und n' beide ungerade sind.

Man nehme nun an, dass die elektrischen Massen während der Fortpflanzungszeit der Kraft von einem Leiter zum anderen nur einen sehr kleinen Weg zurücklegen, und betrachte die Wirkung während eines Zeitraums, gegen welchen die Fortpflanzungszeit verschwindet. In dem Ausdrucke von P kann man dann zunächst

$$F\left(\tau-\frac{r}{\alpha},\ \tau\right)$$

durch

$$F\left(\tau-\frac{r}{\alpha},\ \tau\right)-F(\tau,\tau)=-\int_0^{\frac{r}{\alpha}} F'(\tau-\sigma,\ \tau)\,d\sigma$$

ersetzen, da $\Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon' F(\tau, \tau)$ vernachlässigt werden darf. Man erhält dadurch

$$P=\int_0^t d\tau\,\Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon'\int_0^{\frac{r}{\alpha}} F'(\tau-\sigma,\ \tau)\,d\sigma,$$

oder wenn man die Ordnung der Integrationen umkehrt und $\tau+\sigma$ für τ setzt,

$$P=\Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon'\int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma\int_{-\sigma}^{t-\sigma} d\tau\,F'(\tau,\ \tau+\sigma).$$

Verwandelt man die Grenzen des innern Integrals in 0 und t, so wird dadurch an der obern Grenze der Ausdruck

$$H(t) = \Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma \int_{-\sigma}^{0} d\tau F'(t+\tau,\, t+\tau+\sigma)$$

hinzugefügt, und an der untern Grenze der Werth dieses Ausdrucks für $t = 0$ hinweggenommen. Man hat also

$$P = \int_0^t d\tau \Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma F'(\tau,\, \tau+\sigma) - H(t) + H(0).$$

In diesem Ausdruck kann man $F'(\tau, \tau+\sigma)$ durch $F'(\tau, \tau+\sigma) - F'(\tau, \tau)$ ersetzen, da

$$\Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon' \frac{r}{\alpha} F'(\tau,\, \tau)$$

vernachlässigt werden darf. Man erhält dadurch als Factor von $\varepsilon\varepsilon'$ einen Ausdruck, der sowohl mit ε als mit ε' sein Zeichen ändert, so dass sich bei den Summationen die Glieder nicht gegen einander aufheben, und unendlich kleine Bruchtheile der einzelnen Glieder vernachlässigt werden dürfen. Es ergiebt sich daher, indem man

$$F'(\tau,\, \tau+\sigma) - F'(\tau,\, \tau) \text{ durch } \sigma \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{d\tau\, d\tau}$$

ersetzt und die Integration nach σ ausführt, bis auf einen zu vernachlässigenden Bruchtheil

$$P = \int_0^t \Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon' \frac{rr}{2\alpha\alpha} \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{d\tau\, d\tau} d\tau - H(t) + H(0).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $H(t)$ und $H(0)$ vernachlässigt werden dürfen; denn es ist

$$F'(t+\tau,\, t+\tau+\sigma) = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dt^2}\tau + \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{dt\, dt}(\tau+\sigma) + \cdots,$$

folglich:

$$H(t) = \Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon' \left(\frac{rr}{2\alpha\alpha} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} - \frac{r^3}{6\alpha^3} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dt^2} + \frac{r^3}{6\alpha^3} \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{dt\, dt} + \cdots\right).$$

Hierin aber ist nur das erste Glied des Factors von $\varepsilon\varepsilon'$ mit dem Factor in dem ersten Bestandtheile von P von gleicher Ordnung, und dieses liefert wegen der Summation nach ε' nur einen zu vernachlässigenden Bruchtheil desselben.

Der Werth von P, welcher sich aus unserer Theorie ergiebt, stimmt mit dem erfahrungsmässigen

$$P = \int_0^t \Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon' \frac{rr}{cc} \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{d\tau\, d\tau} d\tau$$

überein, wenn man $\alpha\alpha = \frac{1}{2}cc$ annimmt.

Nach der Bestimmung von Weber und Kohlrausch ist

$$c = 439450 \cdot 10^6 \,\frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}},$$

woraus sich α zu 41949 geographischen Meilen in der Secunde ergiebt, während für die Lichtgeschwindigkeit von Busch aus Bradley's Aberrationsbeobachtungen 41994 Meilen, und von Fizeau durch directe Messung 41882 Meilen gefunden worden sind.

Dieser Aufsatz wurde von Riemann der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 10. Februar 1858 überreicht, wie aus einer dem Titel des Manuscriptes hinzugefügten Bemerkung des damaligen Secretärs der Gesellschaft hervorgeht, später aber wieder zurückgezogen. Nachdem der Aufsatz nach Riemann's Tode veröffentlicht worden war, wurde er durch Clausius (Poggendorff's Annalen Bd. CXXXV p. 606) einer Kritik unterworfen, deren wesentlichster Einwand in Folgendem besteht:

Nach den Voraussetzungen hat die Summe:

$$P = -\int_0^t \Sigma\Sigma\varepsilon\varepsilon' F\left(\tau - \frac{r}{\alpha},\, \tau\right) d\tau$$

einen verschwindend kleinen Werth. Die Operation, vermöge deren später dafür ein nicht verschwindend kleiner Werth gefunden wird, muss daher einen Irrthum enthalten, den Clausius in der Ausführung einer unberechtigten Umkehrung der Integrationsfolge findet.

Der Einwand scheint mir begründet und ich bin mit Clausius der Meinung, dass Riemann sich denselben selbst gemacht und deshalb die Arbeit vor der Publication zurückgezogen hat.

Obwohl damit der wesentlichste Inhalt der Riemann'schen Deduction dahinfallen würde, habe ich mich doch zur Aufnahme dieses Aufsatzes in die vorliegende Sammlung entschlossen, weil ich nicht zu entscheiden wagte, ob er nicht doch noch Keime zu weiteren fruchtbaren Gedanken über diese höchst interessante Frage enthält.

W.

XV.

Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als $2n$ fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist.

(Auszug aus einem Schreiben Riemann's an Herrn Weierstrass.)

(Aus Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 71.)

... Den Beweis des Satzes, auf welchen Sie neulich die Unterhaltung lenkten, dass eine einwerthige mehr als $2n$ fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist, habe ich im Gespräch wohl nicht ganz klar ausgedrückt, auch nur die Grundgedanken angegeben; ich theile ihn Ihnen daher hier noch einmal mit.

Es sei f eine $2n$ fach periodische Function von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und — ich darf wohl meine Ihnen bekannten Benennungen gebrauchen — der Periodicitätsmodul von x_ν für die μte Periode a_μ^ν. Es lassen sich dann bekanntlich die Grössen x in die Form

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=2n} a_\mu^\nu \xi_\mu \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, n$$

setzen*), so dass die Grössen ξ reell sind. Lässt man nun die Grössen ξ die Werthe von 0 bis 1 mit Ausschluss eines von diesen Grenzwerthen durchlaufen, so hat das dadurch entstehende $2n$ fach ausgedehnte Grössengebiet die Eigenschaft, dass jedes System von Werthen der n Veränderlichen einem und nur einem Werthsysteme innerhalb dieses Grössengebiets nach den $2n$ Modulsystemen congruent ist. Ich werde, um mich später kürzer ausdrücken zu können, dieses Gebiet „das bei diesen $2n$ Modulsystemen periodisch sich wiederholende Grössengebiet“ nennen.

Hat die Function nun noch ein $(2n+1)$tes Modulsystem, welches sich nicht aus den $2n$ ersten Modulsystemen zusammensetzen lässt, so

*) Dies ist nicht immer der Fall, sondern nur, wenn die $2n$ Gleichungen, durch welche die Grössen ξ bestimmt werden, von einander unabhängig sind; die Ausnahmen sind aber leicht zu behandeln.

kann man die einem Grössensysteme nach diesem Modulsysteme congruenten Grössensysteme auf innerhalb dieses Gebiets liegende nach den $2n$ ersten Modulsystemen ihnen congruente zurückführen und dadurch offenbar beliebig viele innerhalb dieses Gebiets liegende und nach den $2n+1$ Modulsystemen einander congruente Grössensysteme erhalten, wenn nicht zwei von den nach dem $(2n+1)$ten Modulsysteme congruente Grössensysteme auch nach den $2n$ ersten Modulsystemen congruent sind. In diesem Falle würden zwischen den $2n+1$ Modulsystemen n Gleichungen von der Form

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n+1} a_\mu^\nu m_\mu = 0,$$

worin die Grössen m ganze Zahlen wären, stattfinden, und folglich, wie ich später zeigen werde, die $2n+1$ Modulsysteme sich aus $2n$ Modulsystemen zusammensetzen lassen.

Man theile nun für jede der Grössen ξ die Strecke von 0 bis 1 in q gleiche Theile, wodurch das bei den $2n$ ersten Modulsystemen periodisch wiederkehrende Gebiet in q^{2n} Gebiete zerfällt, in deren jedem sich die Grössen ξ nur um $\frac{1}{q}$ ändern. Offenbar müssen dann von mehr als q^{2n} nach den $2n+1$ Modulsystemen einander congruenten und in jenem Gebiete liegenden Grössensystemen nothwendig zwei in dasselbe Theilgebiet fallen, so dass sich die Werthe derselben Grösse ξ in beiden keinenfalls um mehr als $\frac{1}{q}$ von einander unterscheiden. Die Function bleibt also dann ungeändert, während keine der Grössen ξ um mehr als $\frac{1}{q}$ geändert wird, und ist folglich, da q beliebig gross genommen werden kann, wenn sie stetig ist, eine Function von weniger als n linearen Ausdrücken der Grössen x.

Es ist nun noch zu zeigen, dass sich $2n+1$ Modulsysteme, zwischen denen die n Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n+1} a_\mu^\nu m_\mu = 0$$

stattfinden, aus $2n$ Modulsystemen zusammensetzen lassen.

Man kann zunächst leicht beweisen, dass sich zu einem Modulsysteme

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n} a_\mu^\nu m_\mu = b_1^\nu,$$

worin die Grössen m ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, immer $2n-1$ andere Modulsysteme $b_2, b_3, \ldots, b_{2n}$ so finden lassen, dass Congruenz nach den Modulsystemen a mit Congruenz nach den Modulsystemen b identisch ist. Es seien θ_1 der grösste gemeinschaftliche Theiler von m_1 und m_2 und α, β zwei der Gleichung

$$\beta m_1 - \alpha m_2 = \theta_1$$

genügende ganze Zahlen. Setzt man dann

$$a_1^\nu m_1 + a_2^\nu m_2 = c_1^\nu \theta_1$$

und

$$\alpha a_1^\nu + \beta a_2^\nu = b_{2n}^\nu,$$

so hat man

$$a_1^\nu = \beta c_1^\nu - \frac{m_2}{\theta_1} b_{2n}^\nu, \quad a_2^\nu = -\alpha c_1^\nu + \frac{m_1}{\theta_1} b_{2n}^\nu.$$

Es lassen sich also auch umgekehrt die Modulsysteme a_1 und a_2 aus den Modulsystemen b_{2n} und c_1 zusammensetzen, und folglich ist Congruenz nach jenen mit Congruenz nach diesen gleichbedeutend. Man kann daher die Modulsysteme a_1 und a_2 durch die Modulsysteme c_1 und b_{2n} ersetzen. Auf dieselbe Weise kann man nun, wenn θ_2 der grösste gemeinschaftliche Theiler von θ_1 und m_2 ist, die Modulsysteme c_1 und a_3 durch das Modulsystem

$$\frac{1}{\theta_2}(\theta_1 c_1^\nu + m_3 a_3^\nu) = c_2^\nu$$

und durch ein Modulsystem b_{2n-1} ersetzen. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man offenbar den zu beweisenden Satz. Der Inhalt des periodisch sich wiederholenden Gebiets ist für die neuen Modulsysteme b derselbe wie für die alten.

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich in den n Gleichungen

$$\sum_1^{2n+1} a_\mu^\nu m_\mu = 0$$

die $2n$ ersten Modulsysteme so durch $2n$ neue $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ ersetzen, dass diese Gleichungen die Form

$$p b_1^\nu - q a_{2n+1}^\nu = 0$$

annehmen, worin p und q ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind. Sind nun γ, δ zwei der Gleichung

$$p\delta + q\gamma = 1$$

genügende ganze Zahlen, so lassen sich offenbar die beiden Modulsysteme b_1 und a_{2n+1} durch das eine Modulsystem

$$\gamma b_1^\nu + \delta a_{2n+1}^\nu = \frac{a_{2n+1}^\nu}{p} = \frac{b_1^\nu}{q}$$

ersetzen. Sämmtliche Modulsysteme, welche sich aus den Modulsystemen

$a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ zusammensetzen lassen, können also auch aus den $2n$ Modulsystemen $\frac{b_1}{q}, b_2, b_3, \ldots, b_{2n}$ zusammengesetzt werden, und umgekehrt. Der Inhalt des periodisch wiederkehrenden Gebiets beträgt für diese $2n$ Modulsysteme nur $\frac{1}{q}$ von dem für die $2n$ ersten Modulsysteme a. Hat die Function nun ausser diesen Modulsystemen noch ein durch ähnliche ganzzahlige Gleichungen mit ihnen verbundenes, so lassen sich wieder $2n$ neue Modulsysteme finden, aus welchen sich alle diese Modulsysteme zusammensetzen lassen, und der Inhalt des periodisch sich wiederholenden Gebiets wird dabei wieder auf einen aliquoten Theil reducirt. Wenn dieses Gebiet unendlich klein wird, so wird die Function eine Function von weniger als n linearen Ausdrücken der Veränderlichen und zwar von $n-1$ oder $n-2$ oder $n-m$, jenachdem nur eine, oder zwei oder m Dimensionen dieses Grössengebiets unendlich klein werden. Soll dies aber nicht eintreten, so muss die Operation schliesslich abbrechen, und man wird also zu $2n$ Modulsystemen gelangen, aus welchen sich sämmtliche Modulsysteme der Function zusammensetzen lassen.

Göttingen, den 26ten October 1859.

XVI.

Estratto di una lettera scritta in lingua Italiana il dì 21 Gennaio 1864 al Sig. Professore Enrico Betti.

(Annali di Matematica, Ser. 1, T. VII.)

Carissimo Amico

... Per trovare l'attrazione di un cilindro omogeneo retto ellisoidale qualunque, io considero, introducendo coordinate rettangolari x, y, z, il cilindro infinito limitato della diseguaglianza:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0$$

ripieno di massa di densità costante $+1$, se $z < 0$, e di densità -1, se $z > 0$. Allora se poniamo, come è solito, il potenziale nel punto x, y, z eguale a V e

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z,$$

si ha per $z = 0$, $V = 0$, $X = 0$, $Y = 0$.

Z è eguale al potenziale dell' ellisse:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0$$

colla densità 2, e si trova col metodo di Dirichlet, se denotiamo con σ la radice maggiore dell' equazione:

$$1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{s} = F = 0,$$

e

$$\sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right)s}$$

con D:

$$4\int_\sigma^\infty \frac{\sqrt{F}\,ds}{D}.$$

X ed Y si possono determinare dalle equazioni:

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

e dalle condizioni:

$$X = 0, \quad Y = 0$$

per $z = 0$.

Per effettuare questa determinazione conviene di sostituire invece di $4\int_\sigma^\infty$, $2\int_\infty^\infty$ esteso per il contorno intero di un pezzo del Piano degli s, che contiene il valore σ senza contenere verun altro valore di diramazione o di discontinuità della funzione sotto il segno integrale. Se denotiamo le radici di $F = 0$ in ordine di grandezza con σ, σ', σ'' questi valori sono tutti reali e in ordine di grandezza:

$$\sigma, 0, \sigma', -b^2, \sigma'', -a^2,$$

in modo che:

$$\sigma > 0 > \sigma' > -b^2 > \sigma'' > -a^2.$$

Posto

$$F = t - \frac{z^2}{s}$$

viene

$$Z = 2\int_\infty^\infty \frac{\sqrt{ts - z^2}}{D\sqrt{s}}\,ds,$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \int_\infty^\infty \frac{s\frac{\partial t}{\partial x}(ts - z^2)^{-\frac{1}{2}}}{D\sqrt{s}}\,ds;$$

ma:

$$\int_0^z (ts - z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz = \int_0^{\frac{z}{\sqrt{ts}}} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\xi = \int_0^{\frac{z}{\sqrt{ts}}} \left(\frac{1}{\xi^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} d\log\xi,$$

e:

$$\frac{s\frac{\partial t}{\partial x}\,ds}{D\sqrt{s}} = -2abx(a^2 + s)^{-\frac{3}{2}}(b^2 + s)^{-\frac{1}{2}}\,ds = \frac{4abx}{b^2 - a^2}\,d\sqrt{\frac{b^2 + s}{a^2 + s}}.$$

Dunque si trova per integrazione parziale:

$$X = \frac{2abxz}{b^2 - a^2}\int_\infty^\infty \sqrt{\frac{b^2+s}{a^2+s}}(ts - z^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\log ts.$$

Se si prende la via dell' integrazione come nella espressione di Z il valore dell' integrale sodisfa sempre alla condizione:

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x};$$

ma può differire di funzioni di x e di y, la funzione sotto segno integrale essendo discontinua anche per $t = 0$. Dunque occorre una determinazione olteriore della via dell' integrazione.

Nella espressione di $\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$ la funzione sotto segno integrale è continua per $s = 0$; dunque il pezzo del piano degli s, per il cui contorno l'integrale è esteso, deve contenere $s = \sigma$ e può contenere o no $s = 0$, ma nessuno altro dei valori sopra notati. Nella espressione di X questo pezzo deve essere determinato in modo che X sia $= 0$ per $z = 0$; e affinchè ciò avvenga, dovendo contenere $s = \sigma$, deve anche contenere la maggiore radice di $ts = 0$ (la quale è la maggiore radice di $t = 0$, se

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0,$$

ed è $= 0$, se:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0)$$

ma nessun altra radice di $ts = 0$. Perchè per $z = 0$ le radici di $F = 0$ coincidono colle radici di $ts = 0$, e se la via dell' integrazione passasse tra due valori di discontinuità che coincidono per $z = 0$, doverebbe per $z = 0$ passare per questo valore in modo che l'integrale nella espressione di X diverrebbe infinito ed il valore nonostante il fattore z rimarrebbe finito. --

Vostro aff^{mo} Amico Riemann.

XVII.

Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung. *)

1.

Eine Fläche lässt sich im Sinne der analytischen Geometrie darstellen, indem man die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines in ihr beweglichen Punktes als eindeutige Functionen von zwei unabhängigen veränderlichen Grössen p und q angiebt. Nehmen dann p und q bestimmte constante Werthe an, so entspricht dieser einen Combination immer nur ein einziger Punkt der Fläche. Die unabhängigen Variabeln p und q können in sehr mannigfacher Weise gewählt werden. Für eine einfach zusammenhängende Fläche geschieht dies zweckmässig wie folgt. Man lässt die Fläche längs der ganzen Begrenzung abnehmen um einen Flächenstreifen, dessen Breite überall unendlich klein in derselben Ordnung ist. Durch Wiederholung dieses Verfahrens wird die Fläche fortwährend verkleinert, bis sie in einen Punkt übergeht. Die hierbei der Reihe nach auftretenden Begrenzungscurven sind in sich zurücklaufende, von einander getrennte Linien. Man kann sie dadurch unterscheiden, dass man in jeder von ihnen der Grösse p einen besondern constanten Werth beilegt, der um ein Unendlichkleines zu- oder abnimmt, je nachdem man zu der benachbarten umschliessenden oder umschlossenen Curve übergeht. Die Function p hat dann einen constanten Maximalwerth in der Begrenzung der Fläche und einen Minimalwerth in dem einen Punkte im Innern, in welchen die

*) Dieser Abhandlung liegt ein Manuscript Riemann's zu Grunde, welches nach der eigenen Aeusserung des Verfassers in den Jahren 1860 und 1861 entstanden ist. Dieses Manuscript, welches in gedrängter Kürze nur die Formeln und keinen Text enthält, wurde mir von Riemann im April 1866 zur Bearbeitung anvertraut. Es ist daraus die Abhandlung hervorgegangen, welche ich am 6. Januar 1867 der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen eingereicht habe, und welche im 13. Band der Abhandlungen dieser Gesellschaft abgedruckt ist. Diese Abhandlung kommt hier in sorgfältiger Ueberarbeitung zum zweiten Male zum Abdruck. K. Hattendorff.

allmählich abnehmende Fläche zuletzt zusammenschrumpft. Den Uebergang von einer Begrenzung der abnehmenden Fläche zur nächsten kann man dadurch hergestellt denken, dass man jeden Punkt der Curve (p) in einen bestimmten unendlich nahen Punkt der Curve $(p+dp)$ übergehen lässt. Die Wege der einzelnen Punkte bilden dann ein zweites System von Curven, die von dem Punkte des Minimalwerthes von p strahlenförmig nach der Begrenzung der Fläche verlaufen. In jeder dieser Curven legt man q einen besondern constanten Werth bei, der in einer beliebig gewählten Anfangscurve am kleinsten ist und von da beim Uebergange von einer Curve des zweiten Systems zur andern stetig wächst, wenn man zum Zweck des Ueberganges irgend eine Curve (p) in bestimmter Richtung durchläuft. Beim Uebergange von der letzten Curve (q) zur Anfangscurve ändert sich q sprungweise um eine endliche Constante.

Um eine mehrfach zusammenhängende Fläche ebenso zu behandeln, kann man sie zuvor durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerlegen.

Irgend ein Punkt der Fläche lässt sich hiernach als Durchschnitt einer bestimmten Curve des Systems (p) mit einer bestimmten Curve des Systems (q) auffassen. Die in dem Punkte (p, q) errichtete Normale verläuft von der Fläche aus in zwei entgegengesetzten Richtungen, der positiven und der negativen. Zu ihrer Unterscheidung hat man über die gegenseitige Lage der wachsenden positiven Normale, der wachsenden p und der wachsenden q eine Bestimmung zu treffen. Ist nichts anderes festgesetzt, so möge, von der positiven x-Axe aus gesehen, die positive y-Axe auf dem kürzesten Wege in die positive z-Axe übergeführt werden durch eine Drehung von rechts nach links. Und die Richtung der wachsenden positiven Normale liege zu den Richtungen der wachsenden p und der wachsenden q, wie die positive x-Axe zur positiven y-Axe und zur positiven z-Axe. Die Seite der Fläche, auf welcher die positive Normale liegt, soll die positive Seite der Fläche genannt werden.

2.

Ueber das Gebiet der Fläche sei ein Integral zu erstrecken, dessen Element gleich ist dem Element $dpdq$ multiplicirt in eine Functionaldeterminante, also

$$\int\int\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}\right)dpdq,$$

wofür zur Abkürzung geschrieben werden soll

$$\int\int(df\,dg).$$

Denkt man sich f und g als unabhängige Variable eingeführt, so geht das Integral über in $\int\int df\,dg$, und es lässt sich die Integration nach f oder nach g ausführen. Die wirkliche Einsetzung von f und g als unabhängigen Variabeln verursacht aber Schwierigkeiten oder wenigstens weitläufige Unterscheidungen, wenn dieselbe Werthecombination von f und g in mehreren Punkten der Fläche oder in einer Linie vorhanden ist. Sie ist ganz unmöglich, wenn f und g complex sind.

Es ist daher zweckmässig, zur Ausführung der Integration nach f oder g das Verfahren von Jacobi (Crelle's Journal Bd. 27 p. 208) anzuwenden, bei welchem p und q als unabhängige Variable beibehalten werden. Um in Beziehung auf f zu integriren, hat man die Functionaldeterminante in die Form zu bringen

$$\frac{\partial\left(f\frac{\partial g}{\partial q}\right)}{\partial p}-\frac{\partial\left(f\frac{\partial g}{\partial p}\right)}{\partial q}$$

und erhält zunächst

$$\int\frac{\partial\left(f\frac{\partial g}{\partial p}\right)}{\partial q}dq=0,$$

weil die Integration durch eine in sich zurücklaufende Linie erstreckt wird. Dagegen ist

$$\int\frac{\partial\left(f\frac{\partial g}{\partial q}\right)}{\partial p}dp$$

in der Richtung der wachsenden p zu nehmen, d. h. von dem Minimalpunkte im Innern durch eine Curve (q) bis zur Begrenzung. Man erhält $f\frac{\partial g}{\partial q}$ und zwar den Werth, den dieser Ausdruck in der Begrenzung annimmt, da an der untern Grenze des Integrals $\frac{\partial g}{\partial q}=0$ ist. Folglich wird

$$\int\int(df\,dg)=\int f\frac{\partial g}{\partial q}dq=\int f\,dg$$

und das einfache Integral rechts ist in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung erstreckt. Andererseits hat man nach der eingeführten Bezeichnung $(df\,dg)=-(dg\,df)$, und daher

$$\int\int(df\,dg)=-\int\int(dg\,df)=-\int g\,df,$$

wobei das einfache Integral rechts ebenfalls in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung der Fläche zu nehmen ist.

3.

Die Fläche, deren Punkte durch die Curvensysteme (p), (q) festgelegt sind, soll in der folgenden Weise auf einer Kugel vom Radius 1 abgebildet werden. Im Punkte (p, q) der Fläche, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, ziehe man die positive Normale und lege zu ihr eine Parallele durch den Mittelpunkt der Kugel. Der Endpunkt dieser Parallelen auf der Kugeloberfläche ist die Abbildung des Punktes (x, y, z). Durchläuft der Punkt (x, y, z) auf der stetig gekrümmten Fläche eine zusammenhängende Linie, so wird auch die Abbildung derselben auf der Kugel eine zusammenhängende Linie sein. Auf dieselbe Weise erhält man als Abbildung eines Flächenstücks ein Flächenstück, als Abbildung der ganzen Fläche eine Fläche, welche die Kugel oder einen Theil derselben einfach oder mehrfach bedeckt.

Der Punkt auf der Kugel, welcher die Richtung der positiven x-Axe angiebt, werde zum Pol gewählt und der Anfangsmeridian durch den Punkt gelegt, welcher der positiven y-Axe entspricht. Die Abbildung des Punktes (x, y, z) wird dann auf der Kugel festgelegt durch ihre Poldistanz r und den Winkel φ, welchen ihr Meridian mit dem Anfangsmeridian einschliesst. Für das Vorzeichen von φ gilt die Bestimmung, dass der der positiven z-Axe entsprechende Punkt die Coordinaten $r = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ haben soll.

4.

Hiernach erhält man als Differential-Gleichung der Fläche

$$\cos r\, dx + \sin r \cos\varphi\, dy + \sin r \sin\varphi\, dz = 0. \tag{1}$$

Sind y und z die unabhängigen Variabeln, so ergeben sich für r und φ die Gleichungen

$$\cos r = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\sin r \cos\varphi = \frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\mp\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\sin r \sin\varphi = \frac{\frac{\partial x}{\partial z}}{\mp\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}},$$

in welchen gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten.

Ein Parallelogramm auf der positiven Seite der Fläche, begrenzt von den Curven (p) und $(p+dp)$, (q) und $(q+dq)$, projicirt sich auf der yz-Ebene in einem Flächenelemente, dessen Inhalt gleich dem absoluten Werthe von $(dy\,dz)$ ist. Das Vorzeichen dieser Functionaldeterminante ist verschieden, je nachdem die im Punkte (p, q) errichtete positive Normale mit der positiven x-Axe einen spitzen oder stumpfen Winkel einschliesst. In dem ersten Falle liegen nämlich die Projectionen von dp und dq in der yz-Ebene ebenso zu einander wie die positive y-Axe zur positiven z-Axe, im zweiten Falle umgekehrt. Daher ist die Functionaldeterminante im ersten Falle positiv, im zweiten negativ. Und der Ausdruck

$$\frac{1}{\cos r}(dy\,dz)$$

ist immer positiv. Er giebt den Inhalt des unendlich kleinen Parallelogramms auf der Fläche. Um also den Inhalt der Fläche selbst zu erhalten, hat man das Doppelintegral

$$S = \int\int \frac{1}{\cos r}(dy\,dz)$$

über die ganze Fläche zu erstrecken.

Soll dieser Inhalt ein Minimum sein, so ist die erste Variation des Doppelintegrals $= 0$ zu setzen. Man erhält

$$\int\int \frac{\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial \delta x}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial \delta x}{\partial z}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}}(dy\,dz) = 0,$$

und es gilt das obere oder das untere Zeichen vor der Wurzel, je nachdem $(dy\,dz)$ positiv oder negativ ist. Die linke Seite lässt sich schreiben

$$\begin{aligned}
&\int\int \frac{\partial}{\partial y}(-\sin r\cos\varphi\,\delta x)(dy\,dz)\\
+&\int\int \frac{\partial}{\partial z}(-\sin r\sin\varphi\,\delta x)(dy\,dz)\\
-&\int\int \delta x\frac{\partial}{\partial y}(-\sin r\cos\varphi)(dy\,dz)\\
-&\int\int \delta x\frac{\partial}{\partial z}(-\sin r\sin\varphi)(dy\,dz).
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Integrale reduciren sich auf einfache Integrale, die in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung der Fläche zu nehmen sind, nämlich

$$\int \delta x(-\sin r\cos\varphi\, dz + \sin r\sin\varphi\, dy).$$

Der Werth ist $= 0$, da in der Begrenzung $\delta x = 0$ ist. Die Bedingung des Minimum lautet also

$$\int\int \delta x \left(\frac{\partial (\sin r \cos\varphi)}{\partial y} + \frac{\partial (\sin r \sin\varphi)}{\partial z}\right)(dy\, dz) = 0.$$

Sie wird erfüllt, wenn

(2) $$-\sin r \sin\varphi\, dy + \sin r \cos\varphi\, dz = d\mathfrak{x}$$

ein vollständiges Differential ist.

5.

Die Coordinaten r und φ auf der Kugel lassen sich ersetzen durch eine complexe Grösse $\eta \doteq \operatorname{tg}\frac{r}{2} e^{\varphi i}$, deren geometrische Bedeutung leicht zu erkennen ist. Legt man nämlich an die Kugel im Pol eine Tangentialebene, deren positive Seite von der Kugel abgekehrt ist, und zieht vom Gegenpol eine Gerade durch den Punkt (r, φ), so trifft diese die Tangentialebene in einem Punkte, der die complexe Grösse 2η repräsentirt. Dem Pol entspricht $\eta = 0$, dem Gegenpol $\eta = \infty$. Für die Punkte, welche die Richtungen der positiven y- und der positiven z-Axe angeben, ist $\eta = +1$ und resp. $= +i$.

Führt man noch die complexen Grössen

$$\eta' = \operatorname{tg}\frac{r}{2} e^{-\varphi i},\ s = y + zi,\ s' = y - zi$$

ein, so gehen die Gleichungen (1) und (2) über in folgende:

(1*) $$(1 - \eta\eta')dx + \eta'\, ds + \eta\, ds' = 0,$$

(2*) $$(1 + \eta\eta')d\mathfrak{x}i - \eta'\, ds + \eta\, ds' = 0.$$

Diese lassen sich durch Addition und Subtraction verbinden. Dabei werde

$$x + \mathfrak{x}i = 2X,\quad x - \mathfrak{x}i = 2X'$$

gesetzt, so dass umgekehrt $x = X + X'$ ist. Das Problem findet dann seinen analytischen Ausdruck in den beiden Gleichungen

(3) $$ds - \eta\, dX + \frac{1}{\eta'}\, dX' = 0,$$

(4) $$ds' + \frac{1}{\eta}\, dX - \eta'\, dX' = 0.$$

Betrachtet man X und X' als unabhängige Variable und stellt die Bedingungen dafür auf, das ds und ds' vollständige Differentiale sind, so findet sich

$$\frac{\partial\eta}{\partial X'} = 0,\ \frac{\partial\eta'}{\partial X} = 0,$$

d. h. es ist η nur von X, η' nur von X' abhängig, und deshalb umgekehrt X eine Function nur von η, X' eine Function nur von η'.

Hiernach ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, η als Function der complexen Variabeln X oder umgekehrt X als Function der complexen Variabeln η so zu bestimmen, dass zugleich den Grenzbedingungen Genüge geleistet werde. Kennt man η als Function von X, so ergiebt sich daraus η', indem man in dem Ausdrucke von η jede complexe Zahl in die conjugirte verwandelt. Alsdann hat man nur noch die Gleichungen (3) und (4) zu integriren, um die Ausdrücke für s und s' zu erlangen. Aus diesen erhält man endlich durch Elimination von $\mathfrak{x}$ eine Gleichung zwischen x, y, z, die Gleichung der Minimalfläche.

6.

Sind die Gleichungen (3) und (4) integrirt, so lässt sich auch der Inhalt der Minimalfläche selbst leicht angeben, nämlich

$$S = \int\int \frac{1}{\cos r}(dy\, dz) = \int\int \frac{1 + \eta\eta'}{1 - \eta\eta'}(dy\, dz).$$

Die Functionaldeterminante $(dy\, dz)$ formt sich in folgender Weise um

$$\begin{aligned}(dy\, dz) &= \left(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s'} - \frac{\partial y}{\partial s'}\frac{\partial z}{\partial s}\right)(ds\, ds') \\ &= \frac{i}{2}(ds\, ds') \\ &= \frac{i}{2}\left(\eta\eta' - \frac{1}{\eta\eta'}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta'}(d\eta\, d\eta').\end{aligned}$$

Danach erhält man

$$\begin{aligned}2iS &= \int\int\left(2 + \eta\eta' + \frac{1}{\eta\eta'}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta'}(d\eta\, d\eta') \\ &= \int\int\left(2\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta'} + \frac{\partial s}{\partial \eta}\frac{\partial s'}{\partial \eta'} + \frac{\partial s}{\partial \eta'}\frac{\partial s'}{\partial \eta}\right)(d\eta\, d\eta') \\ &= 2\int\int\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta'} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta'} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \eta'}\right)(d\eta\, d\eta').\end{aligned}$$

Zur weiteren Umformung dieses Ausdruckes kann man y aus Y und Y', z aus Z und Z' ebenso zusammensetzen wie x aus X und X', so dass die Gleichungen gelten

$$X = \int\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\ X' = \int\frac{\partial x}{\partial \eta'}d\eta',$$

$$Y = \int\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta,\ Y' = \int\frac{\partial y}{\partial \eta'}d\eta',$$

$$Z = \int\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta,\ Z' = \int\frac{\partial z}{\partial \eta'}d\eta'.$$

$$\begin{aligned}x &= X + X',\ \mathfrak{x}i = X - X',\\ y &= Y + Y',\ \mathfrak{y}i = Y - Y',\\ z &= Z + Z',\ \mathfrak{z}i = Z - Z'.\ (^1)\end{aligned}$$

Alsdann erhält man schliesslich

$$(5)\qquad \begin{aligned} S &= -i\int\int[(dX\,dX') + (dY\,dY') + (dZ\,dZ')] \\ &= \tfrac{1}{2}\int\int[(dx\,d\mathfrak{x}) + (dy\,d\mathfrak{y}) + (dz\,d\mathfrak{z})]. \end{aligned}$$

7.

Die Minimalfläche und ihre Abbildungen auf der Kugel wie in den Ebenen, deren Punkte resp. die complexen Grössen η, X, Y, Z repräsentiren, sind einander in den kleinsten Theilen ähnlich. Man erkennt dies sofort, wenn man das Quadrat des Linearelementes in diesen Flächen ausdrückt. Dasselbe ist

auf der Kugel $\qquad \sin r^2\, d\log\eta\, d\log\eta'$,

in der Ebene der η $\qquad d\eta\, d\eta'$

in der Ebene der X $\qquad \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\eta'}\,d\eta\,d\eta'$,

in der Ebene der Y $\qquad \frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\eta'}\,d\eta\,d\eta'$,

in der Ebene der Z $\qquad \frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta'}\,d\eta\,d\eta'$,

in der Minimalfläche selbst

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (dX + dX')^2 + (dY + dY')^2 + (dZ + dZ')^2 \\ &= 2(dX\,dX' + dY\,dY' + dZ\,dZ') \\ &= 2\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\eta'} + \frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\eta'} + \frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta'}\right) d\eta\,d\eta'. \end{aligned}$$

Es ist nämlich nach den Gleichungen (3) und (4), wenn man darin η und η' als unabhängige Variable ansieht:

$$\eta\frac{dX}{d\eta} = \frac{\partial s}{\partial\eta} = -\eta^2\frac{\partial s'}{\partial\eta},$$

$$\eta'\frac{dX'}{d\eta'} = \frac{\partial s'}{\partial\eta'} = -\eta'^2\frac{\partial s}{\partial\eta'}$$

und deshalb

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0,$$

$$dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = 0.$$

Das Verhältniss von irgend zwei der obigen Quadrate von Linearelementen ist unabhängig von $d\eta$ und $d\eta'$, d. h. von der Richtung des Elementes, und darin beruht die in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung. Da die Linearvergrösserung bei der Abbildung in irgend einem Punkte nach allen Richtungen dieselbe ist, so erhält man die Flächenvergrösserung gleich dem Quadrat der Linearvergrösserung. Das Quadrat des Linearelementes in der Minimalfläche ist aber gleich

der doppelten Summe der Quadrate der entsprechenden Linearelemente in den Ebenen der X, der Y und der Z. Daher ist auch das Flächenelement in der Minimalfläche gleich der doppelten Summe der entsprechenden Flächenelemente in jenen Ebenen. Dasselbe gilt von der ganzen Fläche und ihren Abbildungen in den Ebenen der X, Y, Z.

8.

Eine wichtige Folgerung lässt sich noch aus dem Satze von der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen ziehen, wenn man eine neue complexe Variable η_1 dadurch einführt, dass man auf der Kugel den Pol in einen beliebigen Punkt ($\eta = \alpha$) verlegt und den Anfangsmeridian beliebig wählt. Hat dann η_1 für das neue Coordinatensystem dieselbe Bedeutung wie η für das alte, so kann man jetzt ein unendlich kleines Dreieck auf der Kugel sowohl in der Ebene der η als in der der η_1 abbilden. Die beiden Bilder sind dann auch Abbildungen von einander und in den kleinsten Theilen ähnlich. Für den Fall der directen Aehnlichkeit ergiebt sich ohne Weiteres, dass $\frac{d\eta_1}{d\eta}$ unabhängig ist von der Richtung der Verschiebung von η, d. h. dass η_1 eine Function der complexen Variabeln η ist. Den Fall der inversen (symmetrischen) Aehnlichkeit kann man auf den vorigen zurückführen, indem man statt η_1 die conjugirte complexe Grösse nimmt. Um nun η_1 als Function von η auszudrücken, hat man zu beachten, dass $\eta_1 = 0$ ist in dem einen Punkte der Kugel, für welchen $\eta = \alpha$, und $\eta_1 = \infty$ in dem diametral gegenüberliegenden Punkte, d. h. für $\eta = -\frac{1}{\alpha'}$. Danach ergiebt sich $\eta_1 = c\frac{\eta - \alpha}{1 + \alpha'\eta}$. Zur Bestimmung der Constanten c dient die Bemerkung, dass, wenn $\eta_1 = \beta$ ist für $\eta = 0$, daraus $\eta_1 = -\frac{1}{\beta'}$ gefunden wird für $\eta = \infty$. Es ist also $\beta = -c\alpha$ und $-\frac{1}{\beta'} = \frac{c}{\alpha'}$, d. h. $\beta = -\frac{\alpha}{c'}$. Hieraus ergiebt sich $cc' = 1$ und daher $c = e^{\theta i}$ für ein reelles θ. Die Grössen α und θ können beliebige Werthe erhalten: α hängt von der Lage des neuen Pols, θ von der Lage des neuen Anfangsmeridians ab. Diesem neuen Coordinatensystem auf der Kugel entsprechen die Richtungen der Axen eines neuen rechtwinkligen Systems. Es mögen in dem neuen System x_1, s_1, s_1' dasselbe bezeichnen wie x, s, s' in dem alten. Dann erlangt man die Transformationsformeln

$$\eta_1 = \frac{\eta - \alpha}{1 + \alpha' \eta} e^{\vartheta i},$$

$$\begin{aligned}
(6) \qquad (1 + \alpha\alpha') x_1 \quad &= (1 - \alpha\alpha') x + \alpha' s + \alpha s', \\
(1 + \alpha\alpha') s_1 e^{-\vartheta i} &= \quad - \quad 2\alpha x + \quad s - \alpha^2 s', \\
(1 + \alpha\alpha') s_1' e^{\vartheta i} \quad &= \quad - \quad 2\alpha' x - \alpha'^2 s + \quad s'.
\end{aligned}$$

9.

Aus den Transformationsformeln (6) berechnen wir

$$\left(\frac{d\eta_1}{d\eta}\right)^2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} = \frac{\eta_1}{\eta} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

oder

$$(d \log \eta_1)^2 \frac{d x_1}{\partial \log \eta_1} = (d \log \eta)^2 \frac{\partial x}{\partial \log \eta}.$$

Hiernach empfiehlt es sich, eine neue complexe Grösse u einzuführen, welche durch die Gleichung definirt wird

$$(7) \qquad u = \int \sqrt{i \frac{\partial x}{\partial \log \eta}}\, d \log \eta,$$

und die von der Lage des Coordinatensystems (x, y, z) unabhängig ist. Gelingt es dann, u als Function von η zu bestimmen, so erhält man

$$(8) \qquad x = - i \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 d \log \eta + i \int \left(\frac{du'}{d \log \eta'}\right)^2 d \log \eta'.$$

x ist der Abstand des zu η gehörigen Punktes der Minimalfläche von einer Ebene, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten rechtwinklig zur Richtung $\eta = 0$ gelegt ist. Man erhält den Abstand desselben Punktes der Minimalfläche von einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegten Ebene, die rechtwinklig auf der Richtung $\eta = \alpha$ steht, indem man in (8) $\frac{\eta - \alpha}{1 + \alpha' \eta} e^{\vartheta i}$ statt η setzt. Speciell also für $\alpha = 1$ und $\alpha = i$

$$\begin{aligned}
(9) \qquad y &= - \frac{i}{2} \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) d \log \eta \\
&\quad + \frac{i}{2} \int \left(\frac{du'}{d \log \eta'}\right)^2 \left(\eta' - \frac{1}{\eta'}\right) d \log \eta'.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(10) \qquad z &= - \frac{1}{2} \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 \left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) d \log \eta \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \left(\frac{du'}{d \log \eta'}\right)^2 \left(\eta' + \frac{1}{\eta'}\right) d \log \eta'.
\end{aligned}$$

10.

Die Grösse u ist als Function von η zu bestimmen, d. h. als einwerthige Function des Ortes in derjenigen Fläche, welche, über die η-Ebene ausgebreitet, die Minimalfläche in den kleinsten Theilen ähnlich abbildet. Daher kommt es vor allen Dingen auf die Unstetigkeiten und Verzweigungen in dieser Abbildung an. Bei der Untersuchung derselben hat man Punkte im Innern der Fläche von Begrenzungspunkten zu unterscheiden.

Handelt es sich um einen Punkt im Innern der Minimalfläche, so lege man in ihn den Anfangspunkt des Coordinatensystems (x, y, z), die Axe der positiven x in die positive Normale, folglich die yz-Ebene tangential. Dann fehlen in der Entwicklung von x das freie Glied und die in y und z multiplicirten Glieder. Durch geeignet gewählte Richtung der y-Axe und der z-Axe kann man auch das in yz multiplicirte Glied verschwinden lassen. Die partielle Differentialgleichung der Minimalfläche reducirt sich unter dieser Voraussetzung für unendlich kleine Werthe von y und z auf $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0$. Das Krümmungsmass ist also negativ, die Haupt-Krümmungsradien sind einander entgegengesetzt gleich. Die Tangentialebene theilt die Fläche in vier Quadranten, wenn die Krümmungshalbmesser nicht ∞ sind. Diese Quadranten liegen abwechselnd über und unter der Tangentialebene. Beginnt die Entwicklung von x erst mit den Gliedern $n$ter Ordnung $(n > 2)$, so sind die Krümmungsradien ∞, und die Tangentialebene theilt die Fläche in $2n$ Sectoren, die abwechselnd über und unter jener Ebene liegen und von den Krümmungslinien halbirt werden. ([2])

Will man nun X als Function der complexen Variabeln Y ansehen, so ergiebt sich in dem Falle der vier Sectoren

$$\log X = 2 \log Y + \text{funct. cont.},$$

in dem Falle der $2n$ Sectoren

$$\log X = n \log Y + \text{f. c.}$$

Und da nach (8) und (9) $\frac{dX}{dY} = \frac{-2\eta}{1 - \eta\eta}$ ist, so beginnt die Entwicklung von η im ersten Falle mit der ersten, im zweiten mit der $(n-1)$ten Potenz von Y. Umgekehrt wird also, wenn Y als Function von η angesehen werden soll, die Entwicklung im ersten Falle nach ganzen Potenzen von η, im zweiten nach ganzen Potenzen von $\eta^{\frac{1}{n-1}}$ fortschreiten. D. h. die Abbildung auf der η-Ebene hat an der betreffenden Stelle keinen oder einen $(n-2)$fachen Verzweigungspunkt, je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt.

Was u betrifft, so ergiebt sich $\frac{du}{d\log Y} = \frac{du}{d\log\eta}\,\frac{d\log\eta}{d\log Y}$, also mit Hülfe der Gleichung (9)

$$\left(\frac{du}{d\log Y}\right)^2 = -2i\frac{dY}{d\eta}\,\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\left(\frac{d\eta}{dY}\right)^2\frac{Y^2}{\eta^2}.$$

Demnach ist in einem $(n-2)$fachen Verzweigungspunkte der Abbildung auf der η-Ebene

$$\log\frac{du}{d\log Y} = \frac{n}{2}\log Y + \text{f. c.}$$

oder

$$\log\frac{du}{dY} = \left(\frac{n}{2}-1\right)\log Y + \text{f. c.}$$

11.

Die weitere Untersuchung soll zunächst auf den Fall beschränkt werden, dass die gegebene Begrenzung aus geraden Linien besteht. Dann lässt sich die Abbildung der Begrenzung auf der η-Ebene wirklich herstellen. Die in irgend welchen Punkten einer geraden Begrenzungslinie errichteten Normalen liegen in parallelen Ebenen, und daher ist die Abbildung auf der Kugel ein Bogen eines grössten Kreises.

Um einen Punkt im Innern einer geraden Begrenzungslinie zu untersuchen, legt man wie vorher in ihn den Anfangspunkt der Coordinaten, die positive x-Axe in die positive Normale. Dann fällt die ganze Begrenzungslinie in die yz-Ebene. Der reelle Theil von X ist demnach in der ganzen Begrenzungslinie $= 0$. Geht man also durch das Innere der Minimalfläche um den Anfangspunkt der Coordinaten herum von einem vorangehenden bis zu einem nachfolgenden Begrenzungspunkte, so muss dabei der Arcus von X sich ändern um $n\pi$, ein ganzes Vielfaches von π. Der Arcus von Y ändert sich gleichzeitig um π. Man hat also, wie vorher

$$\begin{aligned}\log X &= n\log Y + \text{f. c.}\\ \log\eta &= (n-1)\log Y + \text{f. c.}\\ \log\frac{du}{dY} &= \left(\frac{n}{2}-1\right)\log Y + \text{f. c.}\end{aligned}$$

Dem betrachteten Begrenzungspunkte entspricht ein $(n-2)$facher Verzweigungspunkt in der Abbildung auf der η-Ebene. In dieser Abbildung macht das auf den Punkt folgende Begrenzungsstück mit dem ihm vorhergehenden den Winkel $(n-1)\pi$.

12.

Bei dem Uebergange von einer Begrenzungslinie zur folgenden hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder treffen sie zusammen in

einem im Endlichen liegenden Schnittpunkte, oder sie erstrecken sich ins Unendliche.

Im ersten Falle sei $\alpha\pi$ der im Innern der Minimalfläche liegende Winkel der beiden Begrenzungslinien. Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den zu untersuchenden Eckpunkt, die positive x-Axe in die positive Normale, so ist in beiden Begrenzungslinien der reelle Theil von $X = 0$. Beim Uebergange von der ersten Begrenzungslinie zur folgenden ändert sich also der Arcus von X um $m\pi$, ein ganzes Vielfaches von π, der Arcus von Y um $\alpha\pi$. Man hat daher

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{m}\log X &= \log Y + \text{f. c.}\\ \left(1-\frac{\alpha}{m}\right)\log X &= \log\eta + \text{f. c.}\\ \log\frac{du}{dY} &= \left(\frac{m}{2\alpha}-1\right)\log Y + \text{f. c.}\end{aligned}$$

Erstreckt sich die Fläche zwischen zwei auf einander folgenden Begrenzungsgeraden ins Unendliche, so lege man die positive x-Axe in ihre kürzeste Verbindungslinie, parallel der positiven Normalen im Unendlichen. Die Länge der kürzesten Verbindungslinie sei A, und $\alpha\pi$ der Winkel, welchen die Projection der Minimalfläche in der yz-Ebene ausfüllt. Dann bleiben die reellen Theile von X und $i\log\eta$ im Unendlichen endlich und stetig und nehmen in den begrenzenden Geraden constante Werthe an. Hieraus ergiebt sich (für $y=\infty, z=\infty$)

$$\begin{aligned}X &= -\frac{Ai}{2\alpha\pi}\log\eta + \text{f. c.}\\ u &= \sqrt{\frac{A}{2\alpha\pi}}\log\eta + \text{f. c.}\\ Y &= -\frac{Ai}{4\alpha\pi}\,\frac{1}{\eta} + \text{f. c.}\end{aligned}$$ ([5])

Legt man die x_1-Axe eines Coordinatensystems in eine begrenzende Gerade, die x_2-Axe eines andern Systems in die zweite begrenzende Gerade u. s. f., so ist in der ersten Linie $\log\eta_1$, in der zweiten $\log\eta_2$ u. s. f. rein imaginär, da die Normale zu der betreffenden Axe der x_1, der x_2 u. s. f. senkrecht steht. Es ist also $i\frac{\partial x_1}{\partial\log\eta_1}$ in der ersten Begrenzungslinie reell, $i\frac{\partial x_2}{\partial\log\eta_2}$ in der zweiten u. s. f. Da aber auch für ein beliebiges Coordinatensystem (x, y, z) immer

$$\sqrt{i\frac{\partial x}{\partial\log\eta}}\,d\log\eta = \sqrt{i\frac{\partial x_1}{\partial\log\eta_1}}\,d\log\eta_1 = \sqrt{i\frac{\partial x_2}{\partial\log\eta_2}}\,d\log\eta_2 \ldots$$

ist, so findet sich, dass in jeder geraden Begrenzungslinie

$$du = \sqrt{i\frac{\partial x}{\partial \log \eta}}\, d\log \eta$$

entweder reelle oder rein imaginäre Werthe besitzt.

13.

Die Minimalfläche ist bestimmt, sobald man eine der Grössen u, η, X, Y, Z durch eine der übrigen ausgedrückt hat. Dies gelingt in vielen Fällen. Besondere Beachtung verdienen darunter diejenigen, in welchen $\frac{du}{d\log\eta}$ eine algebraische Function von η ist. Dazu ist nöthig und hinreichend, dass die Abbildung auf der Kugel und ihre symmetrischen und congruenten Fortsetzungen eine geschlossene Fläche bilden, welche die ganze Kugel einfach oder mehrfach bedeckt.

Im Allgemeinen aber wird es schwierig sein, direct eine der Grössen u, η, X, Y, Z durch eine der übrigen auszudrücken. Statt dessen kann man aber auch jede von ihnen als Function einer neuen zweckmässig gewählten unabhängigen Variabeln bestimmen. Wir führen eine solche unabhängige Variable t ein, dass die Abbildung der Fläche auf der t-Ebene die halbe unendliche Ebene einfach bedeckt, und zwar diejenige Hälfte, für welche der imaginäre Theil von t positiv ist. In der That ist es immer möglich, t als Function von u (oder von irgend einer der übrigen Grössen η, X, Y, Z) in der Fläche so zu bestimmen, dass der imaginäre Theil in der Begrenzung $= 0$ ist, und dass sie in einem beliebigen Begrenzungspunkte ($u = b$) unendlich von der ersten Ordnung wird, d. h.

$$t = \frac{\text{const.}}{u-b} + \text{f. c.} \qquad (u = b).$$

Der Arcus des Factors von $\frac{1}{u-b}$ ist durch die Bedingung bestimmt, dass der imaginäre Theil von t in der Begrenzung $= 0$, im Innern der Fläche positiv sein soll. Es bleibt also in dem Ausdrucke von t nur der Modul dieses Factors und eine additive Constante willkürlich.

Es sei $t = a_1, a_2, \ldots$, für die Verzweigungspunkte im Innern der Abbildung auf der η-Ebene, $t = b_1, b_2, \ldots$ für die Verzweigungspunkte in der Begrenzung, die nicht Eckpunkte sind, $t = c_1, c_2, \ldots$ für die Eckpunkte, $t = e_1, e_2, \ldots$ für die ins Unendliche sich erstreckenden Sectoren. Wir wollen der Einfachheit wegen voraussetzen, dass die sämmtlichen Grössen a, b, c, e im endlichen Gebiete der t-Ebene liegen.

Dann hat man

$$\begin{aligned}
&\text{für } t = a \quad \log\frac{du}{dt} = \left(\frac{n}{2} - 1\right)\log(t-a) + \text{f. c.},\\
&\;\;\text{„} \;\; t = b \quad \log\frac{du}{dt} = \left(\frac{n}{2} - 1\right)\log(t-b) + \text{f. c.},\\
&\;\;\text{„} \;\; t = c \quad \log\frac{du}{dt} = \left(\frac{m}{2} - 1\right)\log(t-c) + \text{f. c.},\\
&\;\;\text{„} \;\; t = e \qquad\quad u = \sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}}\log(t-e) + \text{f. c.}
\end{aligned}$$

Man kann die Untersuchung auf den Fall $n = 3$, $m = 1$ beschränken, d. h. auf einfache Verzweigungspunkte, und den allgemeinen Fall aus diesem dadurch ableiten, dass man mehrere einfache Verzweigungspunkte zusammenfallen lässt.

Um den Ausdruck für $\frac{du}{dt}$ zu bilden, hat man zu beachten, dass längs der Begrenzung dt reell, du entweder reell oder rein imaginär ist. Demnach ist $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ reell, wenn t reell ist. Diese Function kann man über die Linie der reellen Werthe von t hinüber stetig fortsetzen, indem man die Bestimmung trifft, dass für conjugirte Werthe t und t' der Variabeln auch die Function conjugirte Werthe haben soll. Alsdann ist $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ für die ganze t-Ebene bestimmt und zeigt sich einwerthig.

Es seien a_1', a_2', ... die conjugirten Werthe zu a_1, a_2, ..., und das Product $(t-a_1)(t-a_2)\ldots$ werde mit $\Pi(t-a)$ bezeichnet Alsdann ist

$$u = \text{const.} + \int\sqrt{\frac{\Pi(t-a)\,\Pi(t-a')\,\Pi(t-b)}{\Pi(t-c)}}\,\frac{\text{const.}\,dt}{\Pi(t-e)}. \tag{11}$$

Die Constanten a, b, c etc. müssen so bestimmt werden, dass für

$$t = e \quad u = \sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}}\log(t-e) + \text{f. c.}$$

wird. Damit u für alle Werthe von t ausser a, b, c, e endlich und stetig bleibe, muss für die Anzahl dieser letztgenannten Werthe eine Relation bestehen. Es muss die Differenz der Anzahl der Eckpunkte und der in der Begrenzung liegenden Verzweigungspunkte um 4 grösser sein als die doppelte Differenz der Anzahl der innern Verzweigungspunkte und der ins Unendliche verlaufenden Sectoren. Setzt man zur Abkürzung

$$\Pi(t-a)\,\Pi(t-a')\,\Pi(t-b) = \varphi(t),$$
$$\Pi(t-c)\,\Pi(t-e)^2 = \chi(t),$$

d. h.
$$\frac{du}{dt} = \text{const.}\sqrt{\frac{\varphi(t)}{\chi(t)}},$$
so ist die ganze Function $\varphi(t)$ vom Grade $\nu - 4$, wenn $\chi(t)$ vom Grade ν ist. Hier bedeutet ν die Anzahl der Eckpunkte vermehrt um die doppelte Anzahl der ins Unendliche verlaufenden Sectoren.

14.

Es ist noch η als Function von t auszudrücken. Direct gelangt man dazu nur in den einfachsten Fällen. Im Allgemeinen ist der folgende Weg einzuschlagen. Es sei v eine noch näher zu bestimmende Function von t, die als bekannt vorausgesetzt wird. In den Gleichungen (8), (9), (10) kommt es wesentlich an auf $\frac{du}{d\log\eta}$, wofür man auch schreiben kann $\frac{du}{dv}\frac{dv}{d\log\eta}$. Der letzte Factor lässt sich ansehen als Product der beiden Factoren

(12)
$$k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}}, \quad k_2 = \eta\sqrt{\frac{dv}{d\eta}},$$
die der Differentialgleichung erster Ordnung genügen

(13)
$$k_1\frac{dk_2}{dv} - k_2\frac{dk_1}{dv} = 1,$$
sowie der Differentialgleichung zweiter Ordnung

(14)
$$\frac{1}{k_1}\frac{d^2k_1}{dv^2} = \frac{1}{k_2}\frac{d^2k_2}{dv^2}.$$

Gelingt es also, die eine oder die andere Seite dieser letzten Gleichung als Function von t auszudrücken, so lässt sich eine homogene lineäre Differentialgleichung zweiter Ordnung herstellen, von welcher k_1 und k_2 particuläre Integrale sind. Es sei k das vollständige Integral. Wir ersetzen $\frac{d^2k}{dv^2}$ durch das ihm gleichbedeutende
$$\frac{\frac{dv}{dt}\frac{d^2k}{dt^2} - \frac{dk}{dt}\frac{d^2v}{dt^2}}{\left(\frac{dv}{dt}\right)^3}$$
und erhalten für k die Differentialgleichung

(15)
$$\frac{dv}{dt}\frac{d^2k}{dt^2} - \frac{d^2v}{dt^2}\frac{dk}{dt} - \left(\frac{dv}{dt}\right)^3\left\{\frac{1}{k_1}\frac{d^2k_1}{dv^2}\right\}k = 0.$$

Von der Gleichung (15) seien zwei von einander unabhängige particuläre Integrale K_1 und K_2 gefunden, deren Quotient $K_2 : K_1 = H$

ein von Bögen grösster Kreise begrenztes Abbild der positiven t-Halbebene auf der Kugelfläche liefert. Dasselbe leistet dann jeder Ausdruck von der Form

(16)
$$\eta = e^{\theta i}\frac{H - \alpha}{1 + \alpha' H},$$
worin θ reell und α, α' conjugirte complexe Grössen sind.

Die Function v ist so zu wählen, dass für endliche Werthe von t die Unstetigkeiten von $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ nicht ausserhalb der Punkte a, a', b, c, e liegen.

Setzt man

(17)
$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(t)\chi(t)}} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}},$$
so wird die Function $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ im Endlichen unstetig nur für die Punkte a, a', b, c, und zwar für jeden unendlich in erster Ordnung. Man erhält nämlich für $t = c$
$$v - v_c = \frac{2\sqrt{t-c}}{\sqrt{f'(c)}}$$
$$\eta - \eta_c = \text{const.}(t-c)^\gamma.$$
Folglich:
$$k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}} = \text{const.}(v - v_c)^{\frac{1}{2}-\gamma}$$
und hieraus:
$$\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{4}\frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})f'(c)}{t-c}.$$
Entsprechende Ausdrücke erhält man für $t = a$, a', b, in denen c resp. durch a, a', b, und γ durch 2 zu ersetzen ist.

Eine ähnliche Betrachtung lehrt, dass für $t = c$ die Function $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ stetig bleibt.

Für $t = \infty$ ergiebt sich
$$\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} = \left(-\frac{\nu}{2} + 2\right)\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)t^{2\nu-6}.$$
Demnach lautet der Ausdruck für $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ wie folgt:
$$\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{4}\sum\frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})f'(g)}{(t-g)} + F(t).$$
Die Summe bezieht sich auf alle Punkte $g = a$, a', b, c, und bei a, a', b ist 2 statt γ zu setzen. $F(t)$ ist eine ganze Function vom Grade $(2\nu - 6)$, in der die ersten beiden Coefficienten sich folgendermassen bestimmen. Man bringe dv in die Form

$$dv = \frac{t^{-\nu+4}\frac{dt}{tt}}{\sqrt{f(t)\,t^{-2\nu+4}}} = t^{-\nu+4}\,dv_1$$

oder kürzer $= \alpha\, dv_1$.

Dann ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \alpha^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

folglich

$$\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \alpha^{-2}\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

oder

$$\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = t^{-2\nu+8}\,\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} - \alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

oder

$$\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = t^{-2\nu+8}\,\Sigma\tfrac{1}{4}\frac{(\gamma\gamma-\frac{1}{4})f'(g)}{t-g}$$

$$+\, t^{-2\nu+8}F(t) - \alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}.$$

Die Function auf der linken Seite ist endlich für $t = \infty$. Folglich hat man rechts in der Entwicklung von $t^{-2\nu+8}F(t)$ und von $\alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}$ die Coefficienten von t^2 und resp. von t einander gleich zu setzen. Die Entwickelung von $\alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}$ giebt nach einfacher Rechnung

$$\alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2} = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\nu}{2}+2\right)t^{-\nu+5}\,\frac{d\left(t^{-\nu+2}f(t)\right)}{dt}.$$

Hiernach bleiben in $F(t)$ noch $2\nu - 7$ unbestimmte Coefficienten. Es ist aber wichtig zu bemerken, dass dieselben reell sein müssen Denn wir haben in §. 12 gefunden, dass du reell oder rein imaginär ist in allen geraden Begrenzungslinien der Minimalfläche und folglich auch an jeder Stelle in der Begrenzung der Abbildungen. Vermöge der Gleichung (17) gilt dasselbe von dv. Daraus lässt sich beweisen, dass für reelle Werthe von t die Function $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ nothwendigerweise reelle Werthe besitzt.

Um diesen Beweis zu führen, betrachten wir die Abbildung auf der Kugel vom Radius 1 und nehmen irgend einen Theil der Begrenzung, also den Bogen eines gewissen grössten Kreises. Im Pole dieses grössten Kreises legen wir die Tangential-Ebene an und bezeichnen

sie als die Ebene der η_1. Dann lassen sich die constanten Grössen α_1, α_1', θ_1 so bestimmen, dass

$$\eta_1 = e^{\theta_1 i}\,\frac{H-\alpha_1}{1+\alpha_1' H}$$

ist, und wir erhalten zwei Functionen $k_1' = \sqrt{\frac{dv}{d\eta_1}}$ und $k_2' = \eta_1\sqrt{\frac{dv}{d\eta_1}}$, die particuläre Integrale der Differentialgleichung (15) sind. Folglich haben wir

$$\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{k_1'}\frac{d^2k_1'}{dv^2}.$$

Der eben betrachtete Theil der Begrenzung bildet sich in der η_1-Ebene ab durch die Gleichung

$$\eta_1 = e^{\varphi_1 i},$$

und wenn man dies in k_1' einführt, so erkennt man leicht, dass in dem fraglichen Begrenzungstheile $\frac{1}{k_1'}\frac{d^2k_1'}{dv^2}$ reell ausfällt. Folglich gilt dasselbe von $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$, und da diese Betrachtung für jedes einzelne Begrenzungsstück angestellt werden kann, so ist $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ reell in der ganzen Begrenzung.

Nun fällt aber bei einem reellen oder rein imaginären dv die Function $\frac{1}{k_1'}\frac{d^2k_1'}{dv^2}$ auch dann reell aus, wenn man allgemeiner

$$\eta_1 = \varrho_1 e^{\varphi_1 i}$$

setzt und den Modul ϱ_1 constant nimmt. Damit also die Axe der reellen t sich auf der Kugel vom Radius 1 wirklich in Bögen grösster Kreise abbilde, muss für jeden Begrenzungstheil $\varrho_1 = 1$ sein. Dies liefert ebenso viele Bedingungsgleichungen, als einzelne Begrenzungslinien gegeben sind.

Bei dieser Untersuchung ist, wie schon im vorigen Paragraphen, vorausgesetzt, dass die Werthe a, b, c, e sämmtlich endlich seien. Trifft dies nicht zu, so bedarf die Betrachtung einer geringen Modification.

Anmerkung. Die Aufgabe ist hiermit vollständig formulirt. Im einzelnen Falle kommt es nur darauf an, die Differentialgleichung (15) wirklich aufzustellen und zu integriren. Uebrigens ist es nicht unwichtig, zu bemerken, dass die Anzahl der in der Lösung auftretenden willkürlichen reellen Constanten ebenso gross ist wie die Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche vermöge der Natur der Aufgabe und vermöge der Daten des Problems erfüllt sein müssen. Wir bezeichnen die Anzahl der Punkte a, b, c, e resp. mit A, B, C, E und beachten, dass $2A + B + 4 = C + 2E = \nu$ ist. In der Differentialgleichung (15) treten $2A + B + 4C + 5E - 10$ willkürliche reelle Constanten auf, nämlich: die

Winkel γ, deren Anzahl C ist; die $2\nu - 7$ Constanten der Function $F(t)$; die reellen Grössen b, c, e, von denen man dreien beliebige Werthe geben kann, indem man für t eine lineare Substitution mit reellen Coefficienten macht; die reellen und imaginären Theile der Grössen a. Zu diesen willkürlichen Constanten kommen bei der Integration noch 10 hinzu, nämlich, wenn $\eta = \frac{\alpha k_1 + \beta k_2}{\gamma k_1 + \delta k_2}$ ist, die drei complexen Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, die für 6 reelle Constanten zu zählen sind, ein (reeller oder rein imaginärer) Factor von du, und je eine additive reelle Constante in den Ausdrücken für x, y, z. Diese Constanten müssen aber noch Bedingungsgleichungen unterworfen werden, die erfüllt sein müssen, wenn unsere Formeln wirklich eine Minimalfläche darstellen sollen. Von diesen Bedingungsgleichungen sind $2A + B$ den Punkten a, a', b entsprechend, die aussagen, dass in den in der Umgebung dieser Punkte gültigen Entwicklungen der Lösungen der Differentialgleichung (15) keine Logarithmen auftreten (vergl. Anmerkung (4)), und $C + E$, die besagen, dass die zwischen den einzelnen Punkten c, e gelegenen Stücke der Axe der reellen t sich auf der Kugel mit dem Radius 1 in $C + E$ Bögen grösster Kreise abbilden. Sonach ist die Anzahl der in der Lösung übrig bleibenden unbestimmten Constanten $3C + 4E$.

Die Daten des Problems bestehen in den Coordinaten der Eckpunkte, und in den Winkeln, die die Richtungen der ins Unendliche verlaufenden Begrenzungslinien festlegen. Diese Daten sprechen sich in $3C + 4E$ Gleichungen aus, zu deren Erfüllung man eine ebenso grosse Zahl verfügbarer Constanten hat. (*)

Beispiele.

15.

Die Begrenzung bestehe aus zwei unendlichen geraden Linien, die nicht in einer Ebene liegen. Ihre kürzeste Verbindungslinie habe die Länge A, und es sei $\alpha\pi$ der Winkel, welchen die Projection der Fläche auf der rechtwinklig gegen jene Verbindungslinie gelegten Ebene ausfüllt.

Nimmt man die kürzeste Verbindungslinie zur x-Axe, so hat in jeder der beiden Begrenzungsgeraden x einen constanten Werth. Ebenso ist φ in jeder der beiden Begrenzungsgeraden constant. In unendlicher Entfernung ist die positive Normale für den einen Sector parallel der positiven, für den andern Sector parallel der negativen x-Axe. Die Begrenzung bildet sich auf der Kugel in zwei grössten Kreisen ab, die durch die Pole $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ gehen und den Winkel $\alpha\pi$ einschliessen.

Hiernach hat man

$$X = -\frac{iA}{2\alpha\pi} \log \eta$$

$$s = -\frac{iA}{2\alpha\pi}\left(\eta - \frac{1}{\eta'}\right)$$

$$s' = -\frac{iA}{2\alpha\pi}\left(\frac{1}{\eta} - \eta'\right),$$

folglich

$$(a) \qquad x = -i\frac{A}{2\alpha\pi}\log\left(\frac{\eta}{\eta'}\right) = -i\frac{A}{2\alpha\pi}\log\left(-\frac{s}{s'}\right),$$

worin man die Gleichung der Schraubenfläche erkennt.

16.

Die Begrenzung bestehe aus drei geraden Linien, von denen zwei sich schneiden und die dritte zur Ebene der beiden ersten parallel läuft.

Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden, die positive x-Axe in die negative Normale, so bildet jener Schnittpunkt auf der Kugel sich ab im Punkte $\eta = \infty$. Die Abbildung der beiden ersten Geraden sind grösste Halbkreise, die von $\eta = \infty$ bis $\eta = 0$ laufen. Ihr Winkel sei $\alpha\pi$. Die Abbildung der dritten Linie ist der Bogen eines grössten Kreises, der von $\eta = 0$ ausgeht, an einer gewissen Stelle umkehrt und in sich selbst bis zum Punkte $\eta = 0$ zurückläuft. Dieser Bogen bilde mit den beiden ersten grössten Halbkreisen die Winkel $-\beta\pi$ und $\gamma\pi$, so dass β und γ absolute Zahlen sind und $\beta + \gamma = \alpha$ sich ergiebt. Um die Abbildung auf der halben t-Ebene zu erhalten, setzen wir fest, dass $t = \infty$ sein soll für $\eta = \infty$, dass dem unendlichen Sector zwischen der ersten und dritten Linie $t = b$, dem unendlichen Sector zwischen der zweiten und dritten Linie $t = c$, dem Umkehrpunkte der Normalen auf der dritten Linie $t = a$ entsprechen soll. Dabei sind a, b, c reell und $c > a > b$. Diesen Bestimmungen entspricht $\eta = (t-b)^\beta (t-c)^\gamma$. Der Werth a hängt von b und c ab. Man hat nämlich

$$\frac{d\log\eta}{dt} = \frac{\beta(t-c) + \gamma(t-b)}{(t-b)(t-c)}$$

und dieses muss für den Umkehrpunkt $= 0$ sein, also $a = \frac{c\beta + b\gamma}{\beta + \gamma}$. Man hat weiter nach Art. 12 und 13

$$du = \sqrt{\frac{A(c-b)(\beta+\gamma)}{2\pi}}\,\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}\,dt}{(t-b)(t-c)},$$

oder wenn man $c - b = \frac{2\pi}{A}$ annimmt

$$du = \sqrt{\beta+\gamma}\,\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}\,dt}{(t-b)(t-c)},$$

$$\frac{du}{d\log\eta} = \frac{1}{\sqrt{(\beta+\gamma)(t-a)}},$$

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta = \frac{dt}{(t-b)(t-c)}.$$

Folglich

$$x = -i\int\frac{dt}{(t-b)(t-c)} + i\int\frac{dt'}{(t'-b)(t'-c)},$$

$$y = -\frac{i}{2}\int\frac{(t-b)^{\beta}(t-c)^{\gamma}-(t-b)^{-\beta}(t-c)^{-\gamma}}{(t-b)(t-c)}\,dt$$

$$(b)\qquad +\frac{i}{2}\int\frac{(t'-b)^{\beta}(t'-c)^{\gamma}-(t'-c)^{-\beta}(t'-c)^{-\gamma}}{(t'-b)(t'-c)}\,dt',$$

$$z = -\tfrac{1}{2}\int\frac{(t-b)^{\beta}(t-c)^{\gamma}+(t-b)^{-\beta}(t-c)^{-\gamma}}{(t-b)(t-c)}\,dt$$

$$-\tfrac{1}{2}\int\frac{(t'-b)^{\beta}(t'-c)^{\gamma}+(t'-b)^{-\beta}(t'-c)^{-\gamma}}{(t'-b)(t'-c)}\,dt'.$$

17.

Die Begrenzung bestehe aus drei einander kreuzenden geraden Linien, deren kürzeste Abstände A, B, C sein mögen. Zwischen je zwei begrenzenden Linien erstreckt sich die Fläche ins Unendliche. Es seien $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ die Winkel der Richtungen, in welchen die Grenzlinien des ersten, des zweiten, des dritten Sectors ins Unendliche verlaufen. Setzt man fest, dass für die drei Sectoren der Minimalfläche im Unendlichen die Grösse t resp. $= 0, \infty, 1$ sein soll, so erhält man

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{t(1-t)}.$$

$\varphi(t)$ ist eine ganze Function zweiten Grades. Ihre Coefficienten bestimmen sich daraus, dass

für $t = 0$ $\qquad \dfrac{du}{d\log t} = \sqrt{\dfrac{A\alpha}{2\pi}}$

für $t = \infty$ $\qquad \dfrac{du}{d\log t} = \sqrt{\dfrac{B\beta}{2\pi}}$

für $t = 1$ $\qquad \dfrac{du}{d\log(1-t)} = \sqrt{\dfrac{C\gamma}{2\pi}}$

sein muss.

Danach ergiebt sich

$$\varphi(t) = \frac{A\alpha}{2\pi}(1-t) + \frac{C\gamma}{2\pi}t - \frac{B\beta}{2\pi}t(1-t).$$

Je nachdem die Wurzeln der Gleichung $\varphi(t) = 0$ imaginär oder reell sind, hat die Abbildung auf der Kugel einen Verzweigungspunkt im Innern oder zwei Umkehrpunkte der Normalen auf der Begrenzung.

Die Functionen $k_1 = \sqrt{\dfrac{dv}{d\eta}}$ und $k_2 = \eta\sqrt{\dfrac{dv}{d\eta}}$ werden nur für die drei Sectoren unstetig, wenn man $\dfrac{dv}{d\eta} = \varphi(t)$ nimmt. Und zwar ist die Unstetigkeit von k_1 der Art, dass

für $t = 0$ $\qquad t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}k_1,$

für $t = \infty$ $\qquad t^{-\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2}}k_1,$

für $t = 1$ $\qquad (1-t)^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}}k_1$

einändrig und verschieden von 0 und ∞ wird. k_1 und k_2 sind particuläre Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich ergiebt, wenn man $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ aus seinen Unstetigkeiten als Function von t darstellt und t statt v als unabhängige Variable in $\frac{d^2k}{dv^2}$ einführt. Hat man das particuläre Integral k_1 gefunden, so ergiebt sich k_2 aus der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(c)\qquad k_1\frac{dk_2}{dt} - k_2\frac{dk_1}{dt} = \varphi(t).$$

Das vollständige Integral der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung werde mit

$$(d)\qquad k = Q\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2} & -\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2} & -\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}\end{matrix}\;t\right\}.$$

bezeichnet. Diese Function genügt wesentlich denselben Bedingungen, die in der Abhandlung über die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ als Definition der P-Function ausgesprochen sind*). Sie weicht von der P-Function darin ab, dass die Summe der Exponenten -1 ist, nicht $+1$ wie bei P.

Man kann die Function Q mit Hülfe einer Function P und ihrer ersten Derivirten ausdrücken. Zunächst ist nämlich

$$k = t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\,Q\left\{\begin{matrix}0 & \frac{-\alpha-\beta-\gamma-1}{2} & 0 \\ \alpha & \frac{-\alpha+\beta-\gamma-1}{2} & \gamma\end{matrix}\;t\right\}.$$

*) Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen. (S. 67 dieser Sammlung.)

Setzt man nun

$$\sigma = P\begin{Bmatrix} 0 & \frac{-\alpha-\beta-\gamma+1}{2} & 0 & \\ & & & t \\ \alpha & \frac{-\alpha+\beta-\gamma+1}{2} & \gamma & \end{Bmatrix},$$

so lassen sich die Constanten a, b, c so bestimmen, dass

$$(e)\qquad k = t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\left((a+bt)\sigma + ct(1-t)\frac{d\sigma}{dt}\right)$$

wird. In der That hat man nur diesen Ausdruck in die Differentialgleichung (c) einzusetzen und die Differentialgleichung zweiter Ordnung für σ zu beachten, um zu der Gleichung zu gelangen

$$\varphi(t) = t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\gamma}\left(\sigma_1\frac{d\sigma_2}{dt} - \sigma_2\frac{d\sigma_1}{dt}\right)F(t),$$

$$F(t) = a(a+c\alpha)(1-t) + (a+b)(a+b-c\gamma)t$$
$$-t(1-t)\left(b - \frac{\alpha+\beta+\gamma-1}{2}c\right)\left(b - \frac{\alpha-\beta+\gamma-1}{2}c\right).$$

Vermöge der Eigenschaften der Function σ kann man setzen

$$t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\gamma}\left(\sigma_1\frac{d\sigma_2}{dt} - \sigma_2\frac{d\sigma_1}{dt}\right) = 1,$$

und folglich muss $F(t) = \varphi(t)$ sein. Hieraus ergeben sich drei Bedingungsgleichungen für a, b, c, die eine sehr einfache Form annehmen, wenn man

$$a + \frac{\alpha}{2}c = p,\quad b - \frac{\alpha+\gamma-1}{2}c = q,\quad a + b - \frac{\gamma}{2}c = -r$$

setzt. Die Bedingungsgleichungen lauten dann

$$pp - \alpha\alpha(p+q+r)^2 = \frac{A\alpha}{2\pi},$$

$$qq - \beta\beta(p+q+r)^2 = \frac{B\beta}{2\pi},$$

$$rr - \gamma\gamma(p+q+r)^2 = \frac{C\gamma}{2\pi}.$$

Mit Hülfe der Function

$$\lambda = P\begin{Bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2} & \\ & & & t \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2} & \end{Bmatrix},$$

deren Zweige λ_1 und λ_2 der Differentialgleichung genügen

$$\lambda_1\frac{d\lambda_2}{d\log t} - \lambda_2\frac{d\lambda_1}{d\log t} = 1,$$

kann man k noch einfacher ausdrücken, nämlich

$$(f)\qquad k = t^{\frac{1}{2}}\left((p+qt)\lambda + ct(1-t)\frac{d\lambda}{dt}\right).$$

Es würde nicht schwer sein, die einzelnen Zweige der Function k in der Form von bestimmten Integralen herzustellen. Der Weg dazu ist in Art. 7 der Abhandlung über die Function P vorgezeichnet.

In dem besondern Falle, dass die drei begrenzenden geraden Linien den Coordinatenaxen parallel laufen, ist $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$. Dann erhält man

$$\lambda = P\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ & & & t \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \end{pmatrix} = \left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}} P\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \\ & & & t \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \end{pmatrix}.$$

Der Zweig λ_1 dieser Function ist

$$= \left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}}\ \text{const.},$$

und daraus ergiebt sich

$$k_1 = \sqrt{2}\,t^{\frac{1}{4}}(t-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}}\left\{p + qt - \frac{c}{4} - \frac{c}{4}\sqrt{t(t-1)}\right\},$$

$$k_2 = -\sqrt{2}\,t^{\frac{1}{4}}(t-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{t^{\frac{1}{2}} - (t-1)^{\frac{1}{2}}}\left\{p + qt - \frac{c}{4} + \frac{c}{4}\sqrt{t(t-1)}\right\}.$$

Mit Hülfe dieser beiden Functionen lassen sich dX, dY, dZ folgendermassen ausdrücken

$$dX = -ik_1k_2\frac{dt}{t^2(1-t)^2},$$

$$dY = -\frac{i}{2}(k_2^2 - k_1^2)\frac{dt}{t^2(1-t)^2},$$

$$dZ = -\frac{1}{2}(k_2^2 + k_1^2)\frac{dt}{t^2(1-t)^2}.$$

$$iX = (p+q-r)^2\sqrt{\frac{t}{t-1}} + (-p+q+r)^2\sqrt{\frac{t-1}{t}}$$
$$+\frac{1}{2}(p+3q+r)(p-q+r)\log\frac{t^{\frac{1}{2}}+(t-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}-(t-1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$(g)\qquad iY = -(p-q+r)^2t^{\frac{1}{2}} - (-p+q+r)^2t^{-\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{1}{2}(p+q+3r)(p+q-r)\log\frac{1+t^{\frac{1}{2}}}{1-t^{\frac{1}{2}}},$$

$$iZ = (p-q+r)^2(1-t)^{\frac{1}{2}} + (p+q-r)^2(1-t)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{1}{2}(3p+q+r)(-p+q+r)\log\frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}.$$

Wenn p, q, r reell sind, so geben die doppelten Coefficienten von i in den drei Grössen rechts die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Fläche.

18.

Die Begrenzung bestehe aus vier sich schneidenden geraden Linien, die man erhält, wenn von den Kanten eines beliebigen Tetraeders zwei nicht zusammenstossende weggelassen werden. Die Abbildung auf der Kugeloberfläche ist ein sphärisches Viereck, dessen Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$ sein mögen. Es ergiebt sich

$$du = \frac{C\,dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}} = \frac{C\,dt}{\sqrt{\Delta(t)}},$$

wenn die reellen Werthe $t = a, b, c, d$ die Punkte der t-Ebene bezeichnen, in welchen sich die Eckpunkte des Vierecks abbilden.

Soll die in §. 14 entwickelte Methode zur Bestimmung von η angewandt werden, so hat man hier speciell $\varphi(t) = 1$, $\chi(t) = \Delta(t)$, folglich $v = \frac{u}{C}$ und

$$k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}}, \quad k_2 = \eta\sqrt{\frac{dv}{d\eta}}.$$

Die Functionen k_1 und k_2 genügen der Differentialgleichung

$$k_1 \frac{dk_2}{dv} - k_2 \frac{dk_1}{dv} = 1$$

und sind particuläre Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{4}{k}\frac{d^2k}{dv^2} = \frac{(\alpha\alpha - \frac{1}{4})\Delta'(a)}{t-a} + \frac{(\beta\beta - \frac{1}{4})\Delta'(b)}{t-b}$$
$$+ \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\Delta'(c)}{t-c} + \frac{(\delta\delta - \frac{1}{4})\Delta'(d)}{t-d} + h.$$

Die Function $F(t)$ des §. 14 ist hier vom zweiten Grade, aber die Coefficienten von t^2 und von t sind gleich Null, also h eine Constante. In der letzten Gleichung hat man auf der linken Seite t als unabhängige Variable einzuführen und erhält

$$(h) \qquad \frac{4}{k}\left(\Delta(t)\frac{d^2k}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\Delta'(t)\frac{dk}{dt}\right)$$
$$= \frac{(\alpha\alpha - \frac{1}{4})\Delta'(a)}{t-a} + \frac{(\beta\beta - \frac{1}{4})\Delta'(b)}{t-b} + \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\Delta'(c)}{t-c} + \frac{(\delta\delta - \frac{1}{4})\Delta'(d)}{t-d} + h$$

als die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher k Genüge leisten muss.

Sind x, y, z als Functionen von t wirklich ausgedrückt, so treten in der Lösung noch 16 unbestimmte reelle Constanten auf, nämlich die vier Grössen a, b, c, d, von denen wie oben drei beliebig angenommen werden können, die vier Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die Grösse h,

ferner 6 reelle Constanten in dem Ausdrucke für η, ein constanter Factor in du und je eine additive Constante in x, y, z. Zur Bestimmung dieser 16 Grössen sind 16 Bedingungsgleichungen vorhanden, nämlich 4 Gleichungen, welche ausdrücken, dass die vier Begrenzungslinien in der Ebene der η sich auf der Kugel in grössten Kreisen abbilden, und 12 Gleichungen, welche aussagen, dass x, y, z in den 4 Eckpunkten gegebene Werthe haben.

In dem speciellen Falle eines regulären Tetraeders ist die Abbildung auf der Kugel ein regelmässiges Viereck, in welchem jeder Winkel $= \frac{2}{3}\pi$. Die Diagonalen halbiren sich und stehen rechtwinklig auf einander. Die den Eckpunkten diametral gegenüberliegenden Punkte der Kugeloberfläche sind die Ecken eines congruenten Vierecks. Zwischen beiden liegen vier dem ursprünglichen ebenfalls congruente Vierecke, die je zwei Eckpunkte mit dem ursprünglichen, zwei mit dem gegenüberliegenden gemein haben. Diese sechs Vierecke füllen die Kugeloberfläche einfach aus. Es wird also $\frac{du}{d\log\eta}$ eine algebraische Function von η sein.

Man kann die gesuchte Minimalfläche über ihre ursprüngliche Begrenzung dadurch stetig fortsetzen, dass man sie um jede ihrer Grenzlinien als Drehungsaxe um 180° dreht. Längs einer solchen Grenzlinie haben dann die ursprüngliche Fläche und die Fortsetzung gemeinschaftliche Normalen. Wiederholt man die Construction an den neuen Flächentheilen, so lässt sich die ursprüngliche Fläche beliebig weit fortsetzen. Welche Fortsetzung man aber auch betrachte, immer bildet sie sich auf der Kugel in einem der sechs congruenten Vierecke ab. Und zwar haben die Abbildungen von zwei Flächentheilen eine Seite gemein oder sie liegen einander gegenüber, je nachdem die Flächentheile selbst in einer Grenzlinie an einander stossen oder an gegenüberliegenden Grenzlinien eines mittleren Flächentheils gelegen sind. In dem letzteren Falle können die betreffenden Flächentheile durch parallele Verschiebung zur Deckung gebracht werden. Daher muss $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$ unverändert bleiben, wenn η mit $-\frac{1}{\eta}$ vertauscht wird.

Legt man den Pol $(\eta = 0)$ in den Mittelpunkt eines Vierecks, den Anfangsmeridian durch die Mitte einer Seite, so ist für die Eckpunkte dieses Vierecks

$$\eta = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\,e^{\pm\frac{\pi i}{4}}, \quad \operatorname{tg}\frac{c}{2}\,c^{\pm\frac{3\pi i}{4}}$$

und

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Punkte, denen entgegengesetzte Werthe von η angehören, haben dieselbe x-Coordinate. Es muss also $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$ bei der Vertauschung von η mit $-\eta$ unverändert bleiben. Hiernach erhält man

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 = \frac{C_1}{\sqrt{\eta^4+\eta^{-4}+14}}.$$

Die Constante C_1 muss reell sein, damit du^2 in der Begrenzung reelle Werthe besitze.

Zu demselben Resultate gelangt man auf dem folgenden Wege. Die Substitution

$$\left\{\frac{\eta^2+\eta^{-2}-2\sqrt{3}\,i}{\eta^2+\eta^{-2}+2\sqrt{3}\,i}\right\}^3 = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2$$

liefert auf der t-Ebene eine Abbildung, die von einer geschlossenen überall stetig gekrümmten Linie begrenzt wird. Die Rechnung zeigt, dass $d\log t$ in der Begrenzung rein imaginär ist. Folglich ist die Abbildung der Begrenzung in der t-Ebene ein Kreis um den Mittelpunkt $t=0$. Der Radius dieses Kreises ist $=1$. Den Eckpunkten

$$\eta = \pm \operatorname{tg}\frac{c}{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}}$$

entspricht $t=\pm 1$, den Eckpunkten

$$\eta = \pm \operatorname{tg}\frac{c}{2}\,e^{\frac{-\pi i}{4}}$$

entspricht $t=\pm i$. Geht man an irgend einer dieser vier Stellen durch das Innere der Minimalfläche von einer Grenzlinie zur folgenden, so ändert sich dabei der Arcus von dt um π. Daher kann man, wie in §. 13, auch hier setzen

$$\frac{du}{dt} = \frac{C_2}{\sqrt{(t^2-1)(t^2+1)}},$$

und es muss C_2^2 rein imaginär sein, damit du^2 in der Begrenzung reell ausfalle. Es findet sich $C_1 = 3\sqrt{3}C_2^2\,i$.

Dieser Ausdruck stimmt mit dem vorher aufgestellten für $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$ Zur weitern Vereinfachung nehme man

$$\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 = \omega^3,\quad \eta^2+\eta^{-2} = 2\lambda$$

und beachte, dass

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta = \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 \frac{d\lambda}{d\log\eta}\,d\lambda.$$

Dann ergiebt eine sehr einfache Rechnung

$$X = -i\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta = C\int\frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\varrho\omega)(1-\varrho^2\omega)}},$$

$$(i)\quad Y = -\frac{i}{2}\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)d\log\eta = C\varrho^2\int\frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\varrho^2\omega)}},$$

$$Z = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)d\log\eta = C\varrho\int\frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\varrho\omega)}},$$

wenn $\varrho = -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ eine dritte Wurzel der Einheit bezeichnet. Die reelle Constante $C=\frac{1}{8}C_1$ bestimmt sich aus der gegebenen Länge der Tetraederkanten.

19.

Endlich soll noch die Aufgabe der Minimalfläche für den Fall behandelt werden, dass die Begrenzung aus zwei beliebigen Kreisen besteht, die in parallelen Ebenen liegen. Dann kennt man die Richtung der Normalen in der Begrenzung nicht. Daher lässt sich diese auch nicht auf der Kugel abbilden. Man gelangt aber zur Lösung der Aufgabe durch die Annahme, dass alle zu den Ebenen der Grenzkreise parallel gelegten ebenen Schnitte Kreise seien. Und es wird sich zeigen, dass unter dieser Annahme der Minimalbedingung Genüge geleistet werden kann.

Legt man die x-Axe rechtwinklig gegen die Ebenen der Grenzkreise, so ist die Gleichung der Schnittcurve in einer parallelen Ebene

$$(k)\qquad F = y^2+z^2+2\alpha y+2\beta z+\gamma = 0,$$

und α, β, γ sind als Functionen von x zu bestimmen. Zur Abkürzung werde

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{n}$$

gesetzt, so dass

$$\cos r = n\frac{\partial F}{\partial x},\quad \sin r\cos\varphi = n\frac{\partial F}{\partial y},\quad \sin r\sin\varphi = n\frac{\partial F}{\partial z}$$

ist. Dann lässt sich die Bedingung des Minimum in die Form bringen

$$\frac{\partial\left(n\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(n\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(n\frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0$$

oder nach Ausführung der Differentiation

$$4\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(F+\alpha^2+\beta^2-\gamma)+4\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}-4\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(F+\alpha^2+\beta^2-\gamma)$$
$$+4\cdot 2(F+\alpha^2+\beta^2-\gamma) = 0.$$

Schreibt man $\alpha^2+\beta^2-\gamma = -q$ und beachtet, dass $F=0$ ist, so geht die letzte Gleichung über in

$$(l)\qquad q\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}+2q=0$$

und giebt nach einmaliger Integration

$$\frac{1}{q}\frac{\partial F}{\partial x}+2\int\frac{dx}{q}+\text{const.}=0\,.$$

Die Integrationsconstante ist von x unabhängig. Nimmt man andererseits $\int\frac{dx}{q}$ unabhängig von y und z, so muss die Integrationsconstante eine lineäre Function von y und z sein, weil $\frac{1}{q}\frac{\partial F}{\partial x}$ eine solche ist. Man hat also

$$\frac{1}{q}\frac{\partial F}{\partial x}+2\int\frac{dx}{q}+2ay+2bz+\text{const.}=0\,.$$

Vergleicht man damit das Resultat der directen Differentiation von F, nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2y\frac{d\alpha}{dx}+2z\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\gamma}{dx},$$

so ergiebt sich

$$\frac{d\alpha}{dx}=-aq,\quad \frac{d\beta}{dx}=-bq$$

und wenn man $\int q\,dx=m$ setzt:

$$\alpha=-am+d,\quad \beta=-bm+e\,.$$

Hiernach hat man

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2aqy-2bqz+\frac{d\gamma}{dx},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-2ay\frac{dq}{dx}-2bz\frac{dq}{dx}+\frac{d^2\gamma}{dx^2},$$

und diese Ausdrücke sind in die Gleichung (l) einzuführen. Nach gehöriger Hebung erhält man

$$q\frac{d^2\gamma}{dx^2}-\frac{dq}{dx}\frac{d\gamma}{dx}+2q=0,$$

eine Gleichung, die sich weiter vereinfacht, wenn man beachtet, dass

$$\gamma=q+\alpha^2+\beta^2=q+f(m)=\frac{dm}{dx}+f(m),$$

$$f(m)=(a^2+b^2)\,m^2-2\,(ad+be)\,m+d^2+e^2.$$

Nimmt man hieraus $\frac{d\gamma}{dx}$ und $\frac{d^2\gamma}{dx^2}$, so geht die Differentialgleichung, welche die Bedingung des Minimum ausdrückt, über in folgende:

$$(m)\qquad q\frac{d^2q}{dx^2}-\left(\frac{dq}{dx}\right)^2+2q+2\,(a^2+b^2)\,q^3=0\,.$$

Zur Ausführung der Integration setze man $\frac{dq}{dx}=p$ und betrachte

q als unabhängige Variable. Dadurch erhält man für p^2 als Function von q eine lineäre Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich

$$\frac{1}{2}q\frac{d(p^2)}{dq}-p^2+2q+2\,(a^2+b^2)\,q^3=0$$

oder

$$\frac{q^2 d(p^2)-p^2 d(q^2)}{q^4}=-\left(\frac{4}{q^2}+4(a^2+b^2)\right)dq.$$

Das Integral lautet

$$(n)\qquad \frac{p^2}{q^2}=\frac{4}{q}-4\,(a^2+b^2)\,q+8c.$$

Darin ist für p wieder $\frac{dq}{dx}$ zu setzen, wodurch man erhält

$$dx=\frac{dq}{2\sqrt{q+2cq^2-(a^2+b^2)\,q^3}},$$

$$dm=\frac{q\,dq}{2\sqrt{q+2cq^2-(a^2+b^2)\,q^3}}.$$

Also ergiebt sich

$$(o)\qquad \begin{aligned} x&=\int\frac{dq}{2\sqrt{q+2cq^2-(a^2+b^2)\,q^3}},\\ m&=\int\frac{q\,dq}{2\sqrt{q+2cq^2-(a^2+b^2)\,q^3}},\\ y&=am-d+\sqrt{-q}\cos\psi,\\ z&=bm-e+\sqrt{-q}\sin\psi.\end{aligned}$$

Man hat demnach x, y, z als Functionen von zwei reellen Variabeln q und ψ ausgedrückt. Die Ausdrücke sind, abgesehen von algebraischen Gliedern, elliptische Integrale mit der obern Grenze q. Nach der oben entwickelten allgemeinen Methode hätte man x, y, z erhalten als Summen von zwei conjugirten Functionen zweier conjugirter complexer Variabeln. Danach liegt die Vermuthung nahe, dass diese complexen Ausdrücke mit Hülfe der Additionstheoreme der elliptischen Functionen sich je in einen einzigen Integralausdruck mit der Variabeln q zusammenziehen lassen.

Und dies ist leicht zu bestätigen. Man hat nämlich aus den Formeln für die Richtungscoordinaten r und φ der Normalen

$$\frac{\eta}{\eta'}=e^{2\varphi i}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}i}{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial z}i}=\frac{y+zi+\alpha+\beta i}{y-zi+\alpha-\beta i}=e^{2\psi i}.$$

Verbindet man damit die Definitionsgleichung von q, nämlich:

$$(y+zi+\alpha+\beta i)\,(y-zi+\alpha-\beta i)=-q,$$

so ergiebt sich

$$(y+zi)+(\alpha+\beta i)=(-q)^{\frac{1}{2}}\,\eta^{\frac{1}{2}}\,\eta'^{-\frac{1}{2}},$$
$$(y-zi)+(\alpha-\beta i)=(-q)^{\frac{1}{2}}\,\eta^{-\frac{1}{2}}\,\eta'^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner hat man

$$\operatorname{cotg} r=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{-q}}\{p-2aq(y+\alpha)-2bq(z+\beta)\}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}-\sqrt{\eta\eta'}=\frac{\cos\frac{r}{2}^2-\sin\frac{r}{2}^2}{\sin\frac{r}{2}\cos\frac{r}{2}}=\frac{1}{\sqrt{-q}}\{p-2aq(y+\alpha)-2bq(z+\beta)\}.$$

Auf der rechten Seite sind für $y+\alpha$ und $z+\beta$ die eben gefundenen Ausdrücke in η und η' einzuführen. Dadurch geht die Gleichung über in folgende:

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}=(-q)^{\frac{1}{2}}\left[(a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}+(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\+(-q)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\eta\eta'}-\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right).\end{aligned}$$

Quadrirt man beide Seiten dieser Gleichung und setzt für $\frac{p^2}{q^2}$ seinen Werth aus (n), so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$(p)\quad\begin{aligned}&(-q)\left[(a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}-(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+\frac{1}{(-q)}\left[\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right]^2\\&=8c-2(a+bi)\left(\eta'-\frac{1}{\eta}\right)-2(a-bi)\left(\eta-\frac{1}{\eta'}\right).\end{aligned}$$

Die so gefundene Gleichung, welche den Zusammenhang von q, η, η' angiebt, kann man als Integral einer Differentialgleichung für η und η' ansehen und q als Integrationsconstante auffassen. Die Differentialgleichung ergiebt sich durch unmittelbare Differentiation in folgender Form

$$\begin{aligned}0=&\frac{d\eta}{\eta}\left[\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)\right.\\&\qquad\left.-\sqrt{-q}\left((a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}-(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]\\&+\frac{d\eta'}{\eta'}\left[\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)\right.\\&\qquad\left.+\sqrt{-q}\left((a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}-(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right].\end{aligned}$$

Mit Hülfe der primitiven Gleichung (p) lassen sich aber die Factoren von $\frac{d\eta}{\eta}$ und $\frac{d\eta'}{\eta'}$ anders ausdrücken. Man braucht nur die linke Seite

von (p) in zweifacher Weise zu einem vollständigen Quadrat zu ergänzen, indem man das fehlende doppelte Product das eine mal positiv, das andere mal negativ hinzufügt. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)+\sqrt{-q}\left((a+bi)\sqrt{\frac{\eta'}{\eta}}-(a-bi)\sqrt{\frac{\eta}{\eta'}}\right)\\&\qquad=\pm 2\sqrt{\left[2c+(a+bi)\frac{1}{\eta}-(a-bi)\eta\right]},\\&\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)-\sqrt{-q}\left((a+bi)\sqrt{\frac{\eta'}{\eta}}-(a-bi)\sqrt{\frac{\eta}{\eta'}}\right)\\&\qquad=\pm 2\sqrt{\left[2c+(a-bi)\frac{1}{\eta'}-(a+bi)\eta'\right]}.\end{aligned}$$

Nimmt man die Quadratwurzeln mit gleichen Vorzeichen, so geht die Differentialgleichung über in

$$(q)\quad\begin{aligned}0=&\frac{d\eta}{2\eta\sqrt{2c+(a+bi)\frac{1}{\eta}-(a-bi)\eta}}\\&+\frac{d\eta'}{2\eta'\sqrt{2c+(a-bi)\frac{1}{\eta'}-(a+bi)\eta'}}.\end{aligned}$$

Ihr Integral in algebraischer Form ist in der Gleichung (p) ausgesprochen oder, was auf dasselbe hinauskommt, in den beiden Gleichungen

$$(r)\quad\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-q}}(1+\eta\eta')=&\sqrt{\eta'[(a+bi)+2c\eta-(a-bi)\eta^2]}\\&+\sqrt{\eta[(a-bi)+2c\eta'-(a+bi)\eta'^2]},\\\sqrt{-q}\big((a+bi)\eta'-(a-bi)\eta\big)=&\sqrt{\eta'[(a+bi)+2c\eta-(a-bi)\eta^2]}\\&-\sqrt{\eta[(a-bi)+2c\eta'-(a+bi)\eta'^2]}.\end{aligned}$$

In transcendenter Form lautet das Integral

$$(s)\quad\begin{aligned}\text{const.}=&\int\frac{d\eta}{2\sqrt{\eta[(a+bi)+2c\eta-(a-bi)\eta^2]}}\\&+\int\frac{d\eta'}{2\sqrt{\eta'[(a-bi)+2c\eta'-(a+bi)\eta'^2]}},\end{aligned}$$

und die Integrationsconstante lässt sich ausdrücken

$$\text{const.}=\int\frac{dq}{2\sqrt{q[1+2cq-(a^2+b^2)q^2]}},$$

was aus der Gleichung (r) leicht hervorgeht, wenn man η oder η' constant und zwar $=0$ nimmt. Man erkennt darin das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung.

Anmerkungen.

Die erste Ausgabe der Abhandlung über Flächen kleinsten Inhalts durch Hattendorff in den Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1867 war eingeleitet durch eine historische Betrachtung, die bereits in der ersten Auflage dieser Gesammtausgabe als nicht von Riemann herrührend in Uebereinstimmung mit dem leider früh verstorbenen Hattendorff unterdrückt wurde. Sie ist auch in der zweiten Auflage nicht mit aufgenommen. Zu erwähnen ist aber, dass ungefähr gleichzeitig mit Riemann Weierstrass Untersuchungen über die Flächen vom kleinsten Inhalt angestellt hat, deren Resultate in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom October und December 1866 zuerst veröffentlicht sind. Die Weierstrass'schen Arbeiten haben den Anstoss gegeben zu den weitergehenden Untersuchungen von H. A. Schwarz, von denen die erste Mittheilung im Monatsberichte der Berliner Akademie vom April 1865 gemacht ist. Die ausführliche Veröffentlichung der gekrönten Preisschrift „Bestimmung einer speciellen Minimalfläche“ erschien im Jahre 1871. Darin ist neben Anderem das in Art. 18 der Riemann'schen Abhandlung behandelte Problem der durch ein regelmässiges räumliches Viereck begrenzten Minimalfläche bis zur wirklichen Aufstellung einer Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z der Fläche durchgeführt. Zu erwähnen ist noch die an Riemann direct anknüpfende, im Jahre 1867 von der philosophischen Facultät zu Göttingen gekrönte Preisschrift von Arthur Schondorff „Ueber die Minimalfläche, deren Begrenzung von einem doppelt-gleichschenkligen räumlichen Viereck gebildet wird“.

Die Riemann'sche Abhandlung ist hier, mit wenigen nothwendigen Aenderungen, in der letzten Hattendorff'schen Bearbeitung abgedruckt. Einige Erläuterungen und Zusätze gebe ich in den nachstehenden Anmerkungen, wobei ich Mittheilungen und Winke von H. A. Schwarz mit Dank benutzt habe.

(1) (Zu Seite 307.) Es ist hierbei zu beachten, dass nach (3) und (4)

$$2\frac{dy}{d\eta}=\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)\frac{dX}{d\eta},\quad 2i\frac{dz}{d\eta}=\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)\frac{dX}{d\eta}$$

Functionen von η allein sind, und dass also auch Y, Z als Functionen von η allein betrachtet werden können. Y', Z' sind dann die conjugierten Functionen, die nur von η' abhängen.

(2) (Zu Seite 311.) Für unendlich kleine Werthe von η (also auch von r) ergiebt sich aus (1) und (2)

$$\frac{dx}{dy}=-\sin r\cos\varphi,\quad \frac{d\mathfrak{x}}{dy}=-\sin r\sin\varphi,$$

$$\frac{dx}{dz}=-\sin r\sin\varphi,\quad \frac{d\mathfrak{x}}{dz}=\sin r\cos\varphi,$$

also

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{d\mathfrak{x}}{dz},\quad \frac{dx}{dz}=\frac{d\mathfrak{x}}{dy},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}+\frac{d^2x}{dz^2}=0.$$

Hieraus folgt, dass $2X=x+i\mathfrak{x}$ eine Function von $y-iz$ ist; also ist auch $2Y$ eine Function von $y-iz$. Da nun y der reelle Theil von $2Y$ ist, so ergiebt sich für unendlich kleine η, wenn eine rein imaginäre additive Constante bei Y geeignet bestimmt wird,

$$2Y=y-iz.$$

Wird nun auch die rein imaginäre additive Constante bei X so bestimmt, dass X mit η verschwindet, so ergeben sich die weiterhin benutzten Entwicklungen.

(3) (Zu Seite 313.) Wenn der Winkel $\alpha=0$ und also zwei Begrenzungsgerade einander parallel werden, so treten an Stelle dieser Entwickelungen die folgenden:

$$Y=-\frac{iA}{2\pi}\log\eta+\text{f. c.},$$

$$\left(\frac{du}{d\eta}\right)^2=-\frac{A}{\pi\eta}+\text{f. c.},$$

$$X=-\frac{iA}{\pi}\eta+\text{f. c.}$$

(4) (Zu Seite 320.) Der Schlüssel zu Art. 14 ist in den Entwicklungen des Fragments XXV zu suchen. Es handelt sich bei der Bestimmung von η als Function von t um die conforme Abbildung einer von Kreisbogen begrenzten Figur in der η-Ebene auf die positive t-Halbebene.

Setzt man

$$(1)\qquad y_1=\sqrt{\frac{dt}{d\eta}},\quad y_2=\eta\sqrt{\frac{dt}{d\eta}},$$

so ist nach dem genannten Fragment

$$\frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{1}{y_2}\frac{d^2y_2}{dt^2}=\sigma$$

eine rationale Function von t, die für reelle Werthe von t reelle Werthe hat, und y_1, y_2 sind zwei particulare Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\sigma y;$$

η ist der Quotient zweier Particularlösungen dieser Gleichung. Man kann diese Gleichung dadurch transformiren, dass man y_1, y_2 mit einem und demselben Factor multiplicirt, ohne ihm dadurch die Eigenschaft zu nehmen, dass der Quotient zweier Particularlösungen die Function η giebt. Setzt man, indem man unter f zunächst eine willkürliche Function von t versteht,

$$(3)\qquad k=yf^{-\frac{1}{4}},$$

so erhält man für k die Differentialgleichung

$$(4)\qquad f\frac{d^2k}{dt^2}+\frac{1}{2}f'(t)\frac{dk}{dt}=k\,\Phi(t),$$

worin

$$\Phi(t) = \sigma f - \frac{1}{16 f}\left[4 f f''(t) - 3 f'(t)^2\right], \tag{5}$$

und wenn also f eine rationale Function von t ist, so gilt das gleiche von Φ.

Die Formeln des Art. 14 erhält man, wenn man unter $f(t)$ die ganze rationale Function $(2\nu - 4)^{\text{ten}}$ Grades

$$f(t) = \Pi(t-a)\;\Pi(t-a')\;\Pi(t-b)\;\Pi(t-c)\;\Pi(t-e)^2$$

versteht, und die Betrachtung der Unstetigkeiten ergiebt

$$\Phi(t) = \frac{1}{4}\,\Sigma\,\frac{\left(\gamma\gamma - \frac{1}{4}\right) f'(g)}{t-g} + F(t), \tag{6}$$

wenn $F(t)$ eine ganze rationale Function vom Grade $2\nu - 6$ mit reellen Coefficienten ist. Um auf andere Weise als im Text die Coefficienten der beiden höchsten Potenzen in der Function $F(t)$ zu finden, beachte man, dass, wenn $t = \infty$ ein gewöhnlicher Punkt der Fläche ist, die Entwicklung von $\frac{d\eta}{dt}$ nach fallenden Potenzen von t mit t^{-2} anfängt, und dass folglich die Entwicklung k_1 mit $t^{-\frac{\nu}{2}+2}$ beginnt.

Es muss sich also die Differentialgleichung (4) durch eine Reihe von folgender Form integriren lassen

$$k = \sum_{0,\infty}^{i} c_i\, t^{-\frac{\nu}{2}+2-i}$$

und dies hat man in (4) einzusetzen, um Recursionsformeln zur successiven Berechnung der Coefficienten c_i zu erhalten. Setzt man

$$\Phi(t) = \sum^{i} h_i\, t^{2\nu-6-i},$$

$$f(t) = \sum^{i} a_i\, t^{2\nu-4-i},$$

so erhält man aus (4)

$$\begin{aligned} &\sum a_i t^{-i} \sum c_i\left(2 - \frac{\nu}{2} - i\right)\left(1 - \frac{\nu}{2} - i\right) t^{-i} \\ &+ \frac{1}{2}\sum a_i (2\nu - 4 - i)\, t^{-i} \sum c_i \left(2 - \frac{\nu}{2} + i\right) t^{-i} \\ &= \sum c_i t^{-i} \sum h_i t^{-i}. \end{aligned}$$

Die Gleichsetzung der von t unabhängigen Glieder ergiebt

$$h_0 = \left(2 - \frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)$$

und die Vergleichung der Glieder mit t^{-1}

$$h_1 = a_1\left(1 - \frac{\nu}{4}\right)(\nu - 3).$$

c_0 und c_1 können nicht bestimmt werden und die Vergleichung der höheren Glieder ergiebt die Coefficienten $c_2, c_3, \ldots$

Auf ganz ähnliche Weise kann man auch die in der Anmerkung zu Art. 14 erwähnten, den Punkten a, a', b entsprechenden Bedingungsgleichungen erhalten.

Setzt man nämlich $\tau = t - a,\ t - a',\ t - b$, so muss sich die Differentialgleichung (4) durch eine Reihe der Form

$$k = \sum_{0,\infty}^{s} c_s\, \tau^{-\frac{3}{4}+s}$$

integriren lassen. Ist nun

$$\Phi = \sum l_s\, \tau^{s-1}, \quad f = \sum a_s\, \tau^{s+1},$$

so ergiebt sich aus der Differentialgleichung (4)

$$\begin{aligned} \sum a_s \tau^s \sum c_s\left(s - \frac{3}{4}\right)\left(s - \frac{7}{4}\right)\tau^s + \frac{1}{2}\sum a_s (s+1)\tau^s \sum c_s\left(s - \frac{3}{4}\right)\tau^s \\ = \sum c_s \tau^s \sum l_s \tau^s. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Vergleichung der von τ unabhängigen Glieder giebt in Uebereinstimmung mit der Formel (6)

$$l_0 = \frac{15}{16}\,\alpha_0\,,$$

und die beiden nächsten Potenzen von τ ergeben

$$c_1\left(l_0 + \frac{7}{16}\alpha_0\right) + c_0\left(l_1 - \frac{9}{16}\alpha_1\right) = 0$$

$$c_1\left(l_1 - \frac{1}{16}\alpha_1\right) + c_0\left(l_2 - \frac{3}{16}\alpha_2\right) = 0,$$

woraus durch Elimination von c_0, c_1 eine Relation zwischen l_0, l_1, l_2 folgt. c_2 kann aus (7) nicht bestimmt werden. Die höheren Glieder geben die Bestimmung der Coefficienten $c_3, c_4 \ldots$

XVIII.

Mechanik des Ohres.

(Aus Henle und Pfeuffer's Zeitschrift für rationelle Medicin, dritte Reihe, Bd. 29.)*)

1. Ueber die in der Physiologie der feineren Sinnesorgane anzuwendende Methode.

Für die Physiologie eines Sinnesorganes sind ausser den allgemeinen Naturgesetzen zwei besondere Grundlagen nöthig, eine psychophysische, die erfahrungsgemässe Feststellung der Leistungen des Organes, und eine anatomische, die Erforschung seines Baues.

Es sind demnach zwei Wege möglich, um zur Kenntniss seiner Functionen zu gelangen. Man kann entweder vom Baue des Organes ausgehen und hieraus die Gesetze der Wechselwirkung seiner Theile und den Erfolg äusserer Einwirkungen zu bestimmen suchen,

oder man kann von den Leistungen des Organes ausgehen und diese zu erklären versuchen.

Bei dem ersten Wege schliesst man von gegebenen Ursachen auf die Wirkungen, bei dem zweiten sucht man zu gegebenen Wirkungen die Ursachen.

Man kann mit Newton und Herbart den ersten Weg den synthetischen, den zweiten den analytischen nennen.

Synthetischer Weg.

Der erste Weg liegt dem Anatomen am nächsten. Mit der Untersuchung der einzelnen Bestandtheile des Organs beschäftigt, fühlt er

*) Der grosse Mathematiker, den ein früher Tod unserer Hochschule und der Wissenschaft entriss, beschäftigte sich, angeregt durch die von Helmholtz begründete neue Lehre von den Tonempfindungen, in seinen letzten Lebensmonaten mit der Theorie des Gehörorgans. Was sich darüber aufgezeichnet in seinen Papieren vorfand und hier mitgetheilt wird, berührt allerdings nur einen kleinen und minder wesentlichen Theil der Aufgabe; doch rechtfertigt sich ohne Zweifel die Veröffentlichung dieses Fragments durch die Bedeutung des Verfassers und durch den Werth seiner Aussprüche, wie seines Beispiels für die methodische Behandlung des Gegenstandes. Den ersten Abschnitt und den grössten Theil des zweiten hat der Verf. in Reinschrift hinterlassen; der Schluss des zweiten, vom letzten Absatze auf S. 348 an, wurde aus zerstreuten Blättern und Sätzen, in welchen R. seine ersten Entwürfe niederzulegen pflegte, zusammengestellt. Die Bemerkung, in welcher er sich gegen die Helmholtz'sche Theorie von den Bewegungen des Ohres erklärt, würde erst durch seine eigene Ausführung verständlich geworden sein; Riemann's gesprächsweise Aeusserungen lassen vermuthen, dass die Verschiedenheit der beiderseitigen Ansichten erst bei dem Problem der Uebertragung der Schallschwingungen auf die Organe der Schnecke hervorgetreten sein würde, und dass R. das dabei zu lösende mathematische Problem als ein hydraulisches aufgefasst habe.

Schering. Henle.

sich veranlasst, bei jedem einzelnen Theile zu fragen, welchen Einfluss er auf die Thätigkeit des Organs haben möge. Dieser Weg würde auch in der Physiologie der Sinnesorgane mit demselben Erfolg eingeschlagen werden können, wie in der Physiologie der Bewegungsorgane, wenn die physikalischen Eigenschaften der einzelnen Theile sich bestimmen liessen. Die Bestimmung dieser Eigenschaften aus den Beobachtungen bleibt aber bei mikroskopischen Objecten immer mehr oder weniger ungewiss und jedenfalls im höchsten Grade ungenau.

Man ist daher zu einer Ergänzung nach Gründen der Analogie oder Teleologie genöthigt, wobei die grösste Willkür unvermeidlich ist, und aus diesem Grunde führt das synthetische Verfahren in der Physiologie der Sinnesorgane selten zu richtigen und jedenfalls nicht zu sichern Ergebnissen.

Analytischer Weg.

Bei dem zweiten Wege sucht man zu den Leistungen des Organes die Erklärung.

Das Geschäft zerfällt in drei Theile.

1. Das Aufsuchen einer Hypothese, welche zur Erklärung der Leistungen genügt.

2. Die Untersuchung, in wie weit sie zur Erklärung nothwendig ist.

3. Die Vergleichung mit der Erfahrung, um sie zu bestätigen oder zu berichtigen.

I. Man muss das Instrument gleichsam nacherfinden und in so fern die Leistungen des Organs als Zweck, seine Schöpfung als Mittel zu diesem Zweck betrachten. Aber der Zweck ist kein vermutheter, sondern ein durch die Erfahrung gegebener, und wenn man von der Herstellung des Organs absieht, kann der Begriff der Endursachen ganz ausser dem Spiele bleiben.

Zu den thatsächlichen Leistungen des Organs sucht man in dem Baue des Organs die Erklärung. Bei dem Aufsuchen dieser Erklärung hat man zuvörderst die Aufgabe des Organs zu analysiren; hieraus werden sich eine Reihe von secundären Aufgaben ergeben, und erst nachdem man sich überzeugt hat, dass sie gelöst sein müssen, sucht man die Art und Weise, wie sie gelöst sind, aus dem Baue des Organs zu schliessen.

II. Nachdem aber eine Vorstellung gewonnen worden ist, welche zur Erklärung des Organs ausreicht, darf man nicht unterlassen zu untersuchen, in wie weit sie zur Erklärung nothwendig ist. Man muss sorgfältig unterscheiden, welche Voraussetzungen unbedingt oder vielmehr in Folge unbezweifelter Naturgesetze nothwendig sind, und

22*

welche Vorstellungsarten vielleicht durch andere ersetzt werden können, das ganz willkürlich Hinzugedachte aber ausscheiden. Nur auf diese Weise können die nachtheiligen Folgen der Benutzung von Analogien bei dem Aufsuchen der Erklärung beseitigt werden, und auf diese Weise wird auch die Prüfung der Erklärung an der Erfahrung (durch Aufstellung von zu beantwortenden Fragen) wesentlich erleichtert.

III. Zur Prüfung der Erklärung an der Erfahrung können theils die Folgerungen dienen, die sich aus ihr für die Leistungen des Organs ergeben, theils die bei dieser Erklärung vorauszusetzenden physikalischen Eigenschaften der Bestandtheile des Organs. Was die Leistungen des Organs betrifft, so ist eine genaue Vergleichung mit der Erfahrung äusserst schwierig, und man muss die Prüfung der Theorie meist auf die Frage beschränken, ob kein Ergebniss eines Versuchs oder einer Beobachtung ihr widerspricht. Was dagegen die Folgerungen über die physikalischen Eigenschaften der Bestandtheile betrifft, so können diese von allgemeiner Tragweite sein und zu Fortschritten in der Erkenntniss der Naturgesetze Anlass geben, wie dies z. B. bei dem Aufsuchen der Erklärung der Achromasie des Auges durch Euler der Fall war.

Für die beiden eben einander gegenübergestellten Forschungsweisen gelten übrigens die Bezeichnungen synthetisch und analytisch nur a potiori. Genau genommen ist weder eine rein synthetische, noch eine rein analytische Forschung möglich. Denn jede Synthese stützt sich auf das Ergebniss einer vorausgehenden Analyse und jede Analyse bedarf zu ihrer Bestätigung oder Berichtigung durch die Erfahrung der nachfolgenden Synthese. Bei dem ersten Verfahren bilden die allgemeinen Bewegungsgesetze das vorausgesetzte Ergebniss einer früheren Analyse.

Das erste vorzugsweise synthetische Verfahren ist für die Theorie der **feineren Sinnesorgane** deshalb zu verwerfen, weil die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Verfahrens zu unvollständig erfüllt sind, die Ergänzung der Voraussetzungen durch Analogie und Teleologie hier aber völlig willkürlich bleibt.

Bei dem zweiten vorzugsweise analytischen Verfahren kann die Hülfe der Teleologie und Analogie zwar auch nicht ganz entbehrt, wohl aber bei ihrer Benutzung die Willkürlichkeit vermieden werden, indem man

1) die Anwendung der Teleologie auf die Frage beschränkt, durch welche Mittel die **thatsächlichen** Leistungen des Organs ausgeführt werden, nicht aber bei den einzelnen Bestandtheilen des Organs die Frage nach dem Nutzen aufwirft;

2) die Anwendung von Analogien (das „Dichten von Hypothesen“) sich zwar nicht, wie **Newton** will, gänzlich versagt, aber hinterher die Bedingungen, die zur Erklärung der Leistungen des Organs erfüllt sein **müssen**, heraushebt, und die zur Erklärung nicht nöthigen Vorstellungen, welche durch Benutzung der Analogie herbeigeführt worden sind, davon absondert.

Nach diesen Principien müssen nun für unsern Zweck zuvörderst die Leistungen des Gehörorgans festgestellt werden. Mit welcher Schärfe, Feinheit und Treue das Ohr die Wahrnehmung des Schalles, seines Klanges und Tones, seiner Stärke und Richtung vermittelt, dieses muss durch Beobachtung und Versuch so genau, wie irgend möglich, bestimmt werden.

Ich setze diese Thatsachen als bekannt voraus. In dem Buche „die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik“ von **Helmholtz**, findet man die Fortschritte zusammengestellt, welche in der so äusserst schwierigen Ermittelung der Thatsachen, die die Wahrnehmung der Töne betreffen, in neuester Zeit gemacht worden sind und zwar vorzüglich von **Helmholtz** selbst.

Da ich den Folgerungen, welche **Helmholtz** aus den Versuchen und Beobachtungen zieht, entgegen zu treten vielfach genöthigt bin, so glaube ich um so mehr gleich hier aussprechen zu müssen, wie sehr ich die grossen Verdienste seiner Arbeiten über unsern Gegenstand anerkenne. Sie sind aber meiner Ansicht nach nicht in seinen Theorien von den Bewegungen des Ohres zu suchen, sondern in der Verbesserung der erfahrungsmässigen Grundlage für die Theorie dieser Bewegungen.

Ebenso muss ich auch den Bau des Ohres hier als bekannt voraussetzen, und bitte den geneigten Leser, nöthigenfalls ein mit Abbildungen versehenes Handbuch der Anatomie zur Hülfe zu nehmen. Die Ergebnisse der neuesten Forschungen über den Bau der Schnecke und des Ohres überhaupt findet man dargestellt in der vor Kurzem erschienenen dritten Lieferung des zweiten Bandes von **Henle's** Handbuch der Anatomie des Menschen.

Ich betrachte es hier allein als meine Aufgabe, jene psychophysischen Thatsachen aus diesen anatomischen Thatsachen zu erklären.

Die Theile des Ohres, die für unsern Zweck in Betracht kommen, sind die Paukenhöhle und das Labyrinth, welches aus dem Vorhofe, den Bogengängen und der Schnecke besteht. Wir verfahren nun so, dass wir zunächst aus dem Baue dieser Theile zu schliessen suchen, was jeder derselben zu den Leistungen des Ohres beitragen möge, dann aber bei jedem einzelnen Theile wieder von der durch ihn zu lösenden

Aufgabe ausgehen und zunächst die Bedingungen aufsuchen, deren Erfüllung zu einer genügenden Lösung der Aufgabe erforderlich ist.

2. Paukenhöhle.

Man hat längst erkannt, dass der Apparat in der Paukenhöhle die Wirkung hat, den Druck der Luft auf das Labyrinthwasser verstärkt zu übertragen.

Nach den oben entwickelten Principien müssen wir nun aus den in der Erfahrung gegebenen Leistungen des Organs die Bedingungen ableiten, welche bei dieser Uebertragung erfüllt werden müssen. Es ergeben sich diese vorzüglich aus der Feinheit des Ohres in der Wahrnehmung des Klanges und aus der grossen Schärfe, welche das Ohr, zumal das unverkümmerte Ohr des Wilden und des Wüstenbewohners, besitzt. Versteht man unter Klang die Beschaffenheit des Schalles, welche von Stärke und Richtung desselben unabhängig ist, so wird diese offenbar durch den Apparat völlig treu mitgetheilt, wenn er die Druckänderung der Luft in jedem Augenblick in constantem Verhältniss vergrössert auf das Labyrinthwasser überträgt.

Es ist unverfänglich, dies als Zweck des Apparats anzusehen, wenn man nur dabei nicht unterlässt, zugleich aus den Leistungen des Ohres zu bestimmen, wie weit man durch die Erfahrung berechtigt d. h. genöthigt ist, die wirkliche Erfüllung dieses Zwecks vorauszusetzen.

Wir wollen dies sogleich thun, vorher jedoch für die Beschaffenheit der Druckänderung, von welcher der Klang abhängt, einen mathematischen Ausdruck suchen. Die Curve, welche die Geschwindigkeit der Druckänderung als Function der Zeit darstellt, bestimmt die Schallwelle vollständig bis auf ihre Richtung, also auch Stärke und Klang des Schalles. Nimmt man nun statt dieser Geschwindigkeit den Logarithmus von dieser Geschwindigkeit, oder wenn man lieber will, von deren Quadrat, so erhält man eine Curve, deren Form von Richtung und Stärke des Schalles unabhängig ist, die aber den Klang vollständig bestimmt und daher „Klangcurve" heissen möge.

Löste der Apparat seine Aufgabe vollkommen, so würden die Klangcurven des Labyrinthwassers mit den Klangcurven der Luft völlig übereinstimmen. Durch die Feinheit des Ohres in der Wahrnehmung des Klanges halten wir uns nun zu der Annahme berechtigt, dass die Klangcurve durch die Uebertragung nur sehr wenig geändert werde und also das Verhältniss zwischen den gleichzeitigen Druckänderungen der Luft und des Labyrinthwassers während eines Schalles sehr nahe constant bleibe.

Eine langsame Veränderlichkeit dieses Verhältnisses ist damit sehr

wohl vereinbar und wahrscheinlich. Sie würde nur eine Veränderlichkeit des Ohres in der Schätzung der Schallstärke zur Folge haben, deren Annahme die Erfahrung durchaus nicht verbietet. Würde die Klangcurve merklich geändert, so scheint eine solche Feinheit des Gehörs, wie sie sich z. B. in der Wahrnehmung geringer Verschiedenheiten der Aussprache zeigt, mir kaum denkbar. Die unmittelbare Beurtheilung der Feinheit der Klangwahrnehmungen und besonders die Schätzung der den Klangverschiedenheiten entsprechenden Verschiedenheiten der Klangcurve bleibt freilich immer sehr subjectiv.

Die Verschiedenheit des Klanges dient uns aber auch, die Entfernung der Schallquelle zu schätzen. Von dieser Klangverschiedenheit können wir die mechanische Ursache, die Veränderung der Klangcurve bei der Fortpflanzung des Schalles in der Luft durch Rechnung bestimmen.

Wir können indess dies hier nicht weiter verfolgen und wollen von dem Uebertragungsapparat nur fordern, dass er keine groben Entstellungen des Klanges bewirke, obgleich wir glauben, dass seine Treue viel grösser ist, als man gewöhnlich annimmt.

I. Der Apparat in der Paukenhöhle (im unverkümmerten Zustande) ist ein mechanischer Apparat von einer Empfindlichkeit, die Alles, was wir von Empfindlichkeit mechanischer Apparate kennen, himmelweit hinter sich lässt.

In der That ist es durchaus nicht unwahrscheinlich, dass durch denselben Schallbewegungen treu mitgetheilt werden, die so klein sind, dass sie mit dem Mikroskop nicht wahrgenommen werden könnten.

Die mechanische Kraft der schwächsten Schälle, welche das Ohr noch wahrnimmt, lässt sich freilich kaum direct schätzen; aber man kann mit Hülfe des Gesetzes, nach welchem die Stärke des Schalles bei seiner Verbreitung in der Luft abnimmt, zeigen, dass das Ohr Schälle wahrnimmt, deren mechanische Kraft Millionen Mal kleiner ist, als die der Schälle von gewöhnlicher Stärke.

In Ermangelung anderer von Fehlerquellen freier Beobachtungen berufe ich mich auf die Angabe von Nicholson, nach welcher das Rufen der Schildwachen von Portsmouth 4 bis 5 englische Meilen weit zu Ride auf der Insel Wight bei Nacht deutlich gehört wird. Wenn man erwägt, welche Vorrichtungen Colladon nöthig hatte, um die Verbreitung des Schalles im Wasser wahrzunehmen, so wird man zugeben, dass von einer erheblichen Verstärkung des Schalles durch Fortpflanzung im Wasser nicht die Rede sein kann und dass hier in der That die mechanische Kraft des Schalles umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung und wahrscheinlich noch schneller abnimmt. Da die Entfernung von 4 bis 5 Meilen etwa 2000 Mal so gross ist als die Entfernung von 8 bis 10 Fuss, so ist die mechanische Kraft der das Trommelfell treffenden Schallwellen hier vier Millionen Mal kleiner, als in der Entfernung von 8 bis 10 Fuss von der Schildwache und die Bewegungen sind 2000 Mal kleiner. Man muss zugeben, dass bei den Schall-Empfindungen durchaus nichts von Verhältnissen, wie 1 zu 1000 Millionen oder 1 zu Tausend bemerkt wird. Nach den neueren Untersuchungen über das Verhältniss der psychischen Schätzung der Schallstärken zum physischen oder mechanischen Mass der Schallstärke bildet dies jedoch durchaus keinen Einwand gegen die eben erhaltenen Resultate. Wahrscheinlich ist dies Abhängigkeitsverhältniss gerade so, wie das unserer Schätzung der Lichtstärke oder Grösse der Fixsterne zu der mechanischen Kraft des uns von ihnen zugesandten Lichtes. Hier hat man bekanntlich aus den Stern-Aichungen geschlossen, dass die mechanische Kraft des Lichtes im geometrischen Verhältnisse abnimmt, wenn die Grösse des Fixsternes in arithmetischer Reihe steigt.

Theilte man dem analog die Schälle, von denen von gewöhnlicher Stärke bis zu den eben noch wahrnehmbaren, in Schälle von der ersten bis zur achten Grösse, so würde die mechanische Kraft für die Schälle zweiter Grösse etwa $^1/_{10}$, für die dritter $^1/_{100}$, ..., für die achter $^1/_{10\cdot000000}$, den zehn Millionten Theil so gross sein, als für die Schälle erster Grösse, und die Weite der Bewegungen würde für die Schälle erster, dritter, fünfter, siebenter Grösse sich wie $1 : {}^1/_{10} : {}^1/_{100} : {}^1/_{1000}$ verhalten.

Ich habe oben bei der Betrachtung der das Ohr treffenden Schallwellen vor dem Trommelfell Halt gemacht, weil Einige eine Dämpfung der stärkeren Schälle (durch Spannung des Trommelfells?) annehmen. Ich muss jedoch gestehen, dass mir diese Meinung als eine völlig willkürliche Vermuthung erscheint. Es mögen allerdings, wenn ein starker Knall die Membranen des Labyrinths zu verletzen droht, Schutzvorrichtungen wirksam werden; aber ich finde in der Beschaffenheit der Gehörseindrücke durchaus nichts Analoges mit dem Beleuchtungsgrad des Gesichtsfeldes beim Auge, und wüsste durchaus nicht, was eine fortwährend veränderliche Reflexthätigkeit des M. tensor tympani für das genaue Auffassen eines Musikstücks nützen sollte. Meiner Ansicht nach hat man durchaus keinen Grund, bei dem Schalle in 10 Fuss Entfernung von der Schildwache ein anderes Verhältniss zwischen den Bewegungen der Luft vor dem Trommelfell und den Bewegungen der Steigbügelplatte anzunehmen, als in der Entfernung von 20,000 Fuss; aber selbst wenn man eine ziemlich starke Veränderlichkeit der Spannung des Trommelfells annimmt, werden unsere Schlüsse dadurch nicht beeinträchtigt. Wenn nun die Bewegungen der Steigbügelplatte in der Entfernung von 10 Fuss von der Schildwache wahrscheinlich zu den eben mit blossen Augen noch wahrnehmbaren gehören, so werden die Bewegungen in der Entfernung von 20,000 Fuss bei einer 2000 fachen Vergrösserung eben wahrnehmbar sein.

II. Soll der Paukenapparat so kleine Bewegungen treu mittheilen, wie er es der Erfahrung nach thut, so müssen die festen Körper, aus denen er besteht, an den Stellen, wo sie auf einander wirken sollen, völlig genau auf einander schliessen; denn offenbar kann ein Körper einem anderen eine Bewegung nicht mittheilen, sobald er um mehr als die Weite der Bewegung von ihm absteht.

Es wird ferner nur ein kleiner Theil der mechanischen Kraft der Schallbewegung durch anderweitige Arbeit, wie Spannung von Gelenkkapseln und Membranen, für das Labyrinth verloren gehen dürfen.

Ein solcher Verlust wird vermieden durch die äusserst geringe Breite des freien Randes der Membran des Vorhofsfensters. Wäre dieser Rand breiter, so würden die Schwingungen der Steigbügelplatte beinahe ganz durch Schwingungen dieses Randes ausgeglichen werden, und auf die Membranen der Schnecke und des Schneckenfensters nur eine geringe Wirkung stattfinden.

Die Wirkung dieses Membranenrandes auf die Steigbügelplatte wird wegen der geringen Breite des Randes für die verschiedenen Lagen der Steigbügelplatte während der Schallbewegung sehr verschieden sein. Man muss daher, wenn sie den Klang nicht entstellen soll, annehmen, dass die Elasticität der Membran sehr gering ist, und die Steigbügelplatte nicht durch sie, sondern durch andere Kräfte in die richtige Gleichgewichtslage gebracht wird.

III. Da die Theile des Paukenapparates, um die erfahrungsgemässe Schärfe des Ohres möglich zu machen, fortwährend mit mehr als mikroskopischer Genauigkeit in einander greifen müssen, so scheinen Correctionsvorrichtungen wegen der Ausdehnung und Zusammenziehung der Körper durch die Wärme durchaus unentbehrlich. Die Temperaturänderungen mögen innerhalb der Paukenhöhle nur sehr klein sein; dass sie aber stattfinden, ist nicht zu bezweifeln. Für die Temperaturvertheilung im menschlichen Körper gilt, wenn die äussere Temperatur hinreichend lange constant gewesen ist, nahe das Gesetz, dass der Abstand der Temperatur an einer beliebigen Stelle des Körpers von der Hirntemperatur proportional ist dem Abstande der äusseren Temperatur von der Hirntemperatur. Dieses Gesetz ergiebt sich aus dem Newton'schen und der Voraussetzung, dass der Wärmeleitungscoefficient und die specifische Wärme innerhalb der in Betracht kommenden Temperaturen constant sei, eine Voraussetzung, die wahrscheinlich nahe erfüllt ist. Man kann durch dieses Gesetz aus dem Abstande der Temperatur der Paukenhöhle von der Hirntemperatur auf die Temperaturänderungen schliessen. Wenn sich nun auch der Temperaturunterschied zwischen Paukenhöhle und Hirn nicht bestimmen lässt, so kann man doch aus mehreren Gründen, aus den Communicationen mit der äusseren Luft durch den äusseren Gehörgang und die Tuba, auch wohl aus der Art und Weise der Blutversorgung der Paukenhöhle, mit grosser Wahrscheinlichkeit schliessen, dass ein merklicher Temperaturunterschied stattfindet.

Dagegen hat der Pyramidenknochen, weil er den Can. caroticus enthält, wahrscheinlich sehr nahe die Temperatur des Hirns, und wir müssen daher annehmen, dass die innere Auskleidung der Paukenhöhle ein sehr schlechter Wärmeleiter und Strahler ist.

Von den übrigen die Paukenhöhle umgebenden Knochen lässt sich freilich wohl nicht behaupten, dass sie eine so hohe Temperatur besitzen, wie das Hirn oder die Pyramide. Doch enthalten sie bedeutende Wärmequellen in Blutleitern, grossen Arterien und Venen und sind, wie die Pyramide, durch Schleimhaut und Periost gegen die Ausstrahlung in die Paukenhöhle geschützt. Wir dürfen daher annehmen, dass ihre Temperatur merklich höher ist als die der Paukenhöhle.

Wenn nun die äussere Temperatur sinkt, so wird nach dem oben angeführten Gesetze der Abstand von der Hirntemperatur allenthalben im Körper in demselben Verhältniss (auf das Doppelte) steigen, die Paukenhöhle wird sich in Folge dessen merklich, die umgebenden Knochen nur sehr wenig abkühlen, und die Gehörknöchelchen werden sich merklich zusammenziehen, während die Wände der Paukenhöhle fast ungeändert bleiben.

Viel mehr als dieses, dass die Gehörknöchelchen sich beim Sinken der äusseren Temperatur viel stärker abkühlen und zusammenziehen, als die Wände der Paukenhöhle, dürfte sich über den Einfluss der Temperatur auf den Paukenapparat bei unserer gänzlichen Unbekanntschaft mit den thermischen Eigenschaften seiner Bestandtheile nicht feststellen lassen.

IV. Ich werde nun zunächst die Veränderungen zu bestimmen suchen, welche bei einem Sinken der äusseren Temperatur in der Lage der Gehörknöchelchen eintreten, damit alle zur Berührung bestimmten Theile des Apparates fortfahren, genau auf einander zu schliessen. Der Theil des Gehörknöchelsystems, der am unveränderlichsten mit der Wand der Paukenhöhle verbunden ist, ist das Ambos-Paukengelenk. Durch Abkühlung werden alle Entfernungen in festen Körpern kleiner, also auch die Entfernung des Ambos-Steigbügelgelenks von dieser Gelenkfläche. Vom Hammer ist wahrscheinlich das obere Griffende derjenige Theil, welcher, wenigstens parallel dem Paukenfellring, die geringsten Verschiebungen zulässt. Da nun bei der Abkühlung die Entfernung des Ambos-Paukengelenks von dem am unveränderlichsten befestigten Punkt des oberen Hammergriffs im Paukenfell nahe ungeändert bleibt, die Entfernungen dieser Punkte vom Ambos-Hammergelenk aber beide abnehmen, so muss sich am Ambos-Hammergelenk der Winkel zwischen den nach diesen Punkten gehenden Linien etwas weiter öffnen.

Bei diesen beiden Aenderungen in der Lage der Gehörknöchelchen wird der Hammer ein wenig in der Richtung vorn-median-hinten und gleichzeitig (um das Gelenkknöpfchen des Amboses in seiner Höhe zu erhalten) sehr wenig in der Richtung vorn-oben-hinten gedreht. Der lange Fortsatz des Hammers würde dabei in der Fissur nach oben und medianwärts bewegt werden, wenn er gegen Griff und Kopf des Hammers eine und dieselbe Lage behielte. Durch die Wirkung der Abkühlung wird er aber stärker gekrümmt und dem Hammergriff genähert, so dass er sich während der Temperaturänderung wahrscheinlich nur allmählich ein wenig aus der Fissur herausbewegt.

V. Wir haben eben die Bedingungen aufgestellt, denen die Lage der Gehörknöchelchen wahrscheinlich genügt, damit sie fortwährend genau auf einander schliessen und dabei weder im Rande der Vorhofsmembran, noch im Paukenfell eine merklich ungleichmässige Spannung erzeugen. Wir fragen nun nach den Mitteln, durch welche den Gehörknöchelchen jederzeit die richtige Lage gegeben und gesichert wird. (Es wird dies meist durch einander entgegengesetzte Kräfte geschehen, welche bei der richtigen Lage des Knöchelchens sich das Gleichgewicht halten und es, wenn es aus ihr entfernt würde, in sie zurücktreiben würden.)

Es ist klar, dass diese in den beiden die Lage der Gehörknöchelchen regulirenden Muskeln, in den Gelenkkapseln, Ligamenten, den Schleimhautfalten und den beiden Membranen, mit denen die Gehörknöchelchen verwachsen sind, gesucht werden müssten. Bei diesem Aufsuchen der Ursachen einer bestimmten Wirkung auf die Gehörknöchelchen ergeben sich jedoch, namentlich wenn man die Schleimhautfalten mit in Betracht zieht, oft mehrere Wege zur Erzielung der Wirkung als möglich. Um aus diesen verschiedenen Möglichkeiten die wahrscheinlichste herauszufinden, ist es vor allen Dingen nöthig, sich durch anatomische Untersuchungen an frischen Präparaten ein ungefähres Urtheil über die Elasticität und Spannung der Bänder, Häute etc. zu verschaffen, was mir unmöglich ist. Man darf jedoch auch hoffen, durch sorgfältige Entwicklung der Consequenzen der verschiedenen

Hypothesen bei den falschen auf Unwahrscheinlichkeiten zu stossen und diese so zu excludiren.

Es ist für unsere jetzige Untersuchung zweckmässig, zu unterscheiden zwischen dem lauschenden, zum genauen Hören adaptirten Ohr und dem nicht lauschenden Ohr, und für bestimmte Fragen zwischen dem Ohr des Neugeborenen und des Erwachsenen. Wir machen die Unterscheidung zwischen dem lauschenden und nicht lauschenden Ohr, wenn die Steigbügelplatte durch den Zug des M. tensor tympani ein wenig gegen das Labyrinthwasser gedrückt wird, so dass der Druck im Labyrinthwasser ein wenig stärker ist als in der Luft der Paukenhöhle; es werden dabei die Theile der festen Körper, deren Berührung gesichert werden soll, ein wenig gegen einander gedrückt. Diejenigen nun, welche eine solche fortwährende Spannung des Apparates (das Paukenfell etwa ausgenommen) für unwahrscheinlich halten, mögen annehmen, dass bei den Temperaturänderungen die Gehörknöchelchen durch die Wirkung der Haft- und Gelenkbänder und die allmähliche Aenderung der Contraction der Muskeln ihre Lage ändern, ohne gegen einander gedrückt zu werden, weil wir gefunden haben, dass nur dann das genaue Ineinandergreifen aller Theile des Apparats gesichert ist.

Es bleibt dann unsere Untersuchung für das lauschende, zum genauen Hören absichtlich vorgerichtete Ohr giltig, während daneben doch immer die Möglichkeit bestehen bleibt, dass das Ohr (des Wachenden?) fortwährend, wenn auch vielleicht in geringerem Grade, adaptirt ist.

Der Gehörknöchelapparat besteht aus einem aus zwei Theilen (Hammer und Ambos) zusammengesetzten, um eine Axe drehbaren Körper und aus einem mit diesem Körper articulirenden, auf das Wasser des Vorhofsfensters drückenden Stempel (dem Steigbügel). Das eine Ende der Umdrehungsaxe, der kurze Fortsatz des Amboses, ist mittelst des Ambos-Paukengelenks an der hintern Wand der Paukenhöhle befestigt, das andere Ende, der lange Fortsatz des Hammers, ragt, nur von Weichtheilen umgeben, in eine Spalte zwischen dem vordern obern Ende des Paukenfellrings und dem Felsenbein und legt sich in eine Furche dieses Ringes. (Wenigstens ist es so beim Ohr des Neugeborenen.)

Die Bestimmung der relativen Lage der Gehörknöchelchen gegen die Paukenhöhle wird sehr erleichtert durch das Verfahren von Henle, die Paukenhöhle sich so gedreht zu denken, dass die Umdrehungsaxe horizontal von hinten nach vorn geht und das Vorhofsfenster vertical steht.

Wird der Stiel des Hammers durch Steigerung des Druckes der Luft auf das mit ihm verwachsene Trommelfell nach innen getrieben, so wird die Basis des Steigbügels gegen die Membran des (ovalen)

Vorhofsfensters gedrückt, der Druck im Labyrinthwasser gesteigert und dadurch die Membran des (runden) Schneckenfensters nach aussen getrieben.

Damit der Apparat die kleinsten Druckänderungen der Luft, in stets gleichem Verhältniss vergrössert, dem Labyrinthwasser mittheilen könne, ist es vor allen Dingen nöthig, dass der Druck des Steigbügels stets in völlig gleicher Weise auf das Labyrinthwasser wirke. Zu diesem Ende muss

1) der Druck der Basis stets Eine und dieselbe Fläche treffen und die Richtung der Bewegung unveränderlich sein;

2) es dürfen keine Anheftungen des Steigbügels an die Wand des Vorhofsfensters stattfinden, wenigstens keine solchen, die irgend einen merklichen Einfluss auf seine Lage und Bewegung ausüben könnten;

3) der Steigbügel darf nie aufhören, gegen die Membran des Vorhofsfensters zu drücken.

Wie man bei einiger Ueberlegung leicht finden wird, würden die Druckänderungen der Luft entweder gar nicht oder nach völlig veränderten Gesetzen auf das Labyrinthwasser wirken, sobald Eine dieser Bedingungen verletzt würde.

Um die Erfüllung der 3. Bedingung zu sichern, muss durch den M. tensor tympani, welcher den Hammerstiel nach innen zieht, der Druck gegen die Membran des Vorhofsfensters stets auf einer solchen Höhe erhalten werden, dass er die grössten, beim Hören zu erwartenden Druckänderungen beträchtlich übertrifft. Wahrscheinlich wird am Schnecken- oder Vorhofsfenster eine Wirkung dieses Druckes, sei es die Spannung oder Krümmung (Ausdehnung, Formänderung) der Membran empfunden und durch den M. tensor tympani der für das genaue Hören günstigste Druck hergestellt.

Der Druck hängt nur von der Lage des Hammerstiels ab, und um die erforderliche Einstellung dieses Stiels zu bewirken, muss der Zug des Muskels gerade so stark sein, dass er der Wirkung der Spannung des Paukenfells bei dieser Einstellung das Gleichgewicht hält. Ob die Spannung des Paukenfells dabei grösser oder kleiner ist, darauf kommt gar nichts an; nur muss sie, wie wir jetzt zeigen wollen, so gross bleiben, dass nur ein sehr kleiner Theil der mechanischen Kraft der das Ohr treffenden Wellen an die Luft im Innern der Paukenhöhle verloren geht.

Wenn eine in freier Luft ausgespannte Membran von einer Schallwelle getroffen wird, so entstehen eine Schwingung der Membran, eine zurückgeworfene Luftwelle und eine weitergehende (gebrochene) Luftwelle. Wie sich die mechanische Kraft der Schallwelle auf diese drei Wirkungen vertheilt, hängt von der Spannung der Membran ab. Ist diese Spannung sehr gering, so sind die beiden ersten Wirkungen sehr schwach, und es geht die Schallwelle fast unverändert weiter. Ist dagegen die Membran so stark gespannt, dass ihre Bewegungen nur sehr klein sind gegen die Schwingungen der Lufttheilchen in der auf sie treffenden Schallwelle, so kann sie der Luft auf der hintern Seite nur sehr kleine Bewegungen mittheilen und folglich auch ihren Druck nur wenig verändern, und es wird fast die ganze Druckänderung auf der vordern Seite zur Spannung der Membran verwandt. Ausserdem aber entsteht, wenn die Membran in freier Luft ausgespannt ist, eine zurückgeworfene Welle.

Die Lage des Linsenbeines gegen das Vorhofsfenster kann also nicht unverändert bleiben; aber es kann durch Drehung des Amboses um seinen Befestigungspunkt (das Paukengelenk) bewirkt werden, dass das Linsenbein sich nur parallel der Längsaxe des Vorhofsfensters verschiebt, und also nur in dieser Richtung eine Drehung des Steigbügels um das Centrum der Ambosgelenkfläche nöthig ist, um die Steigbügelplatte an ihrem Platze zu erhalten. Da nun nur für diese Richtung eine Vorrichtung (der M. stapedius) vorhanden ist, den Steigbügel um das Ambosgelenkknöpfchen willkürlich zu drehen, für die darauf senkrechte aber nicht, so darf man wohl vermuthen, dass die letztere Vorrichtung eben dadurch überflüssig gemacht worden ist, dass das Ambosgelenkknöpfchen fortwährend in derselben Höhe erhalten wird.

VI. Dem Zuge der Sehne des M. tensor tympani wird zum Theil das Gleichgewicht gehalten durch die Befestigung des Hammergriffs im Paukenfell und des Paukenfells im Sulcus tympanicus. Die Anheftung des Paukenfells an dem Hammergriff reicht aber (nach v. Tröltsch und Gerlach) nur wenig höher, als der Insertionspunkt der Sehne, und ihr Endpunkt liegt selbst schon höher als die Endigungen des Sulcus tympanicus.

Offenbar kann also die Befestigung des Paukenfells im S. t. dem M. tensor tympani allein nicht das Gleichgewicht halten. Zum Gleichgewicht des Hammers ist vielmehr erforderlich, dass auf den oberhalb des Insertionspunkts gelegenen Theil ein gleich grosses entgegengesetzt gerichtetes Drehungsmoment wirke, wie auf den unterhalb gelegenen Griff. Man kann diese zur Herstellung des Gleichgewichts nöthige Kraft suchen

1) entweder in der Verbindung des Paukenfells mit den oberflächlichen Schichten der Haut des äusseren Gehörgangs,

2) oder in der Wirkung der hinteren Paukenfelltasche,

3) oder vielleicht in dem Zusammenwirken der Anheftungen des Hammerkopfes an die Paukenhöhlenwand durch den Ambos einerseits und anderseits durch das Lig. superius Arnoldi. Diese Anheftungen bilden einen etwa gegen die Spitze des kurzen Fortsatzes gerichteten Winkel und drücken, wenn sie gespannt sind, diese Spitze gegen das Paukenfell.

Dritte Abtheilung.