BERNHARD RIEMANN'S

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE WERKE

UND

WISSENSCHAFTLICHER NACHLASS.

HERAUSGEGEBEN

UNTER MITWIRKUNG VON RICHARD DEDEKIND

VON

HEINRICH WEBER.

ZWEITE AUFLAGE

BEARBEITET VON

HEINRICH WEBER.

MIT EINEM BILDNISS RIEMANN'S.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.

Vorrede zur ersten Auflage.

Das Werk, welches hiermit in die Oeffentlichkeit tritt, ist die endliche Ausführung eines seit lange geplanten Unternehmens. Bei der Bedeutung, welche die grossen Schöpfungen Riemann's für die Entwicklung der neueren Mathematik haben, gehören die meisten der Riemann'schen Abhandlungen zu den unentbehrlichsten Hülfsmitteln des Mathematikers, und eine Sammlung seiner Werke dürfte daher einem allgemein gehegten Wunsche um so mehr entgegen kommen, als die meisten derselben im Buchhandel nicht oder nur schwer zu erhalten sind. Es kommt dazu die dringende Pflicht gegen die Wissenschaft, die im handschriftlichen Nachlass noch verborgenen Untersuchungen und Gedanken der Oeffentlichkeit nicht länger vorzuenthalten.

Schon im Frühjahr 1872 war daher unter mehreren Freunden Riemann's der Plan zu einer solchen Sammlung entstanden und Clebsch hatte mit seiner ganzen Thatkraft die Leitung des Unternehmens in die Hand genommen und sich mit Dedekind vereinigt, in dessen Besitz nach Riemann's Wunsch der handschriftliche Nachlass nach des Verfassers Tod gekommen war, und der bereits mehrere Abhandlungen aus demselben herausgegeben hatte.

Durch den beklagenswerthen und unerwarteten Tod von Clebsch gerieth leider das Vorhaben ins Stocken und blieb längere Zeit gänzlich liegen. Als mir im November 1874 Dedekind im Namen der Frau Professorin Riemann den Vorschlag machte, die Leitung der Herausgabe zu übernehmen, bin ich nicht ohne schwere Bedenken darauf eingegangen. Denn obwohl ich von dem Umfang der damit verbundenen Arbeit damals noch keine richtige Vorstellung hatte, war ich mir der zu übernehmenden Verantwortung wohl bewusst. Nur die Erwägung, dass im Falle meiner Weigerung die Ausführung abermals auf lange Zeit hinausgeschoben zu werden, wenn nicht gänzlich zu scheitern drohte, half mir meine Bedenken überwinden, und so entschloss ich mich, was an mir läge, zu thun, um das Unternehmen zu einem befriedigenden Abschluss zu bringen, da Dedekind mir die Versicherung gab, mich bei der Arbeit nach Kräften zu unterstützen, ein Versprechen, welches er treulich gehalten hat.

Die von Riemann selbst oder nach seinem Tode bereits veröffentlichten Arbeiten wurden revidirt, hin und wieder durch einen im Nachlass aufgefundenen Zusatz bereichert, und in kleinen Ungenauigkeiten verbessert, sonst aber in unveränderter Form aufgenommen. Nur die Abhandlung über die Flächen vom kleinsten Inhalt hat in Folge einer von K. Hattendorff auf meinen Wunsch ausgeführten Ueberarbeitung einige wesentlichere Aenderungen erfahren.

Von den im Nachlass enthaltenen Entwürfen fanden sich einige in fast druckfertiger Form vor, andere aber in einem so fragmentarischen Zustande, dass die Verknüpfung und Darstellung erhebliche Schwierigkeiten machte. Von der grossen Menge nur Formeln ohne Text enthaltender Papiere war wenig für den Druck zu verwerthen. Besonders hervorzuheben ist unter den ersteren die Arbeit über den Rückstand in der Leidener Flasche, welche Riemann schon im Anschluss an die Mittheilung in der Göttinger Naturforscher-Versammlung zur Publication vorbereitet hatte, ferner die in lateinischer Sprache geschriebene Beantwortung einer Preisfrage der Pariser Akademie über isotherme Curven, welche besonders deshalb von hohem Interesse ist, weil darin Riemann's Untersuchungen über die allgemeinen Eigenschaften der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten in den Grundzügen niedergelegt sind und eine merkwürdige Verwendung finden. Die Darstellung in dieser Abhandlung ist eine äusserst knappe, und die Wege, auf denen die endlichen Resultate erhalten wurden, finden sich darin nur im Allgemeinen angedeutet. Von der Ausführung einer beabsichtigten zweiten eingehenderen Darstellung des Gegenstandes wurde Riemann durch seinen Gesundheitszustand abgehalten. Dass ich im Stande bin, diese schöne Untersuchung in der letzten von Riemann herrührenden Redaction zum Abdruck zu bringen, verdanke ich der Güte des beständigen Secretärs der Pariser Akademie, Herrn Dumas, welcher auf ein Namens der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften von Herrn Wöhler an ihn gerichtetes Ansuchen mit der dankenswerthesten Bereitwilligkeit mir das Originalmanuscript zur Verfügung stellte.

Von Riemann's Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten liegt der erste Theil in ziemlich druckfertiger Form von Riemann's Hand vor und war vermuthlich zu der Publication bestimmt, die in der Abhandlung über Abel'sche Functionen angekündigt ist, aber nicht zur Ausführung kam. Ein zweiter Theil, der die wahre Verallgemeinerung der Theorie der hypergeometrischen Reihen enthält, fand sich nur im ersten Entwurfe vor, jedoch so, dass der Gedankengang vollständig hergestellt werden konnte.

Ferner ist hier noch der in italienischer Sprache geschriebene Anfang zu einer Untersuchung über die Darstellbarkeit des Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen durch einen Kettenbruch zu erwähnen, deren Bearbeitung H. A. Schwarz in Göttingen übernommen hat, dem ich hierfür sowie für manchen Rath an anderen Stellen hier meinen Dank ausspreche.

Obwohl die Vorlesungen Riemann's dem ursprünglichen Plane nach von dieser Sammlung ausgeschlossen sind, so habe ich mich doch zur Aufnahme zweier kleinerer, in sich abgeschlossener Untersuchungen über die Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihe und über die Abel'schen Functionen für den Fall $p = 3$ entschlossen, bei deren Bearbeitung ein von G. Roch geführtes Vorlesungsheft zu Grunde gelegt werden konnte, theils wegen des grossen Interesses, welches die Gegenstände haben, theils weil eine zusammenhängende Veröffentlichung dieser Vorlesungen, wie es scheint, vorläufig nicht in Aussicht steht.

Ich erwähne hier noch die den Anhang bildenden naturphilosophischen Fragmente, welche wenigstens eine ungefähre Vorstellung von dem Inhalt der Speculationen geben können, denen Riemann einen grossen Theil seiner Gedankenarbeit widmete und die ihn viele Jahre seines Lebens hindurch begleitet haben. Diese Bruchstücke dürften trotz ihrer Lückenhaftigkeit und Unvollständigkeit geeignet sein, auch in weiteren Kreisen Aufmerksamkeit zu erregen, wenn sie auch nicht viel mehr als die Anfänge und die allgemeinsten Grundzüge einer eigenthümlichen und tiefsinnigen Weltanschauung enthalten.

Eine willkommene Beigabe für die Freunde und Verehrer Riemann's wird endlich die biographische Skizze sein, welche Dedekind auf meinen Wunsch auf der Grundlage von Briefen und anderen Mittheilungen der Riemann'schen Familie, unterstützt durch seine eigenen Erinnerungen verfasst hat.

Was die Anordnung des Stoffes betrifft, so ist in den beiden ersten Abtheilungen die chronologische Reihenfolge streng inne gehalten worden; in der dritten Abtheilung, welche den Nachlass enthält, konnte diese Anordnung nicht ganz consequent durchgeführt werden, theils weil sich die Entstehungszeit hier nicht immer vollständig feststellen liess, theils weil die mehr ausgeführten Untersuchungen dem Fragmentarischen vorangestellt werden sollten.

Königsberg, im März 1876.

H. Weber.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Sechzehn Jahre sind seit dem Erscheinen der ersten Auflage der Gesammtausgabe von Riemann's Werken verstrichen. Der Entwicklungsgang, den in diesem Zeitraum die mathematische Wissenschaft genommen hat, lässt vielfach und deutlich die Spuren von Riemann's Wirken erkennen; wir brauchen nur an den Ausbau der Theorie der Abel'schen Functionen und der linearen Differentialgleichungen, an die Lehre von den mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten und die nicht-euklidische Geometrie zu erinnern, die mit Allem, was damit zusammenhängt, jetzt im Vordergrund des wissenschaftlichen Interesses stehen. Nicht nur Riemann's ausgeführte Arbeiten, sondern auch manche der im Nachlass vorgefundenen, in den gesammten Werken mitgetheilten Andeutungen und Fragmente haben den Anstoss zu weitergehenden Forschungen gegeben.

Die Form und Art der Ausgabe der Gesammtwerke hat die Zustimmung der Mathematiker gefunden. Bedenken und Einwendungen, die hier und da in der Literatur hervorgetreten sind, und sich meist auf die von den Herausgebern zugefügten Noten beziehen, sind in der neuen Auflage nach Möglichkeit berücksichtigt, und erledigen sich wohl durch eine etwas ausführlichere Darstellung.

Der handschriftliche Nachlass wurde im Laufe der Jahre mehrfach und besonders bei der Vorbereitung der neuen Ausgabe einer Durchsicht unterworfen. Die Ausbeute war zwar nicht sehr gross, lieferte aber doch manchen schätzbaren Zusatz, der unter die Anmerkungen aufgenommen werden konnte. Neu hinzugefügt ist das kleine Fragment XXV über die Bewegung der Wärme im Ellipsoid, ferner ein Zusatz zu Nr. XXX (jetzt XXXI) über die quadratischen Relationen, die zwischen den Functionen φ der Theorie der Abel'schen Functionen bestehen. Dem XXV. (jetzt XXVI.) Fragment wurde ein Zusatz im Titel gegeben, wodurch deutlicher auf seine grosse allgemeine Bedeutung hingewiesen werden sollte.

Sorgfältig durchgearbeitet und erweitert sind die Anmerkungen, wodurch wir hoffen, ihre Brauchbarkeit zu erhöhen. Die Erläuterungen

von Dedekind zu dem Fragment über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen sind ganz neu redigirt und erleichtern in dieser Form noch mehr den Zugang zu den Formeln Riemann's.

Auch die Erläuterungen zu Nr. XXII „Commentatio mathematica etc.“ sind etwas ausführlicher gestaltet worden, da die Darstellung in der ersten Auflage das Verständniss noch nicht hinlänglich zu fördern schien. Der Herausgeber hat es dagegen nicht unternommen, die Anwendung auf die Preisaufgabe der Pariser Akademie weiter zu verfolgen; auch ist ihm kein Versuch bekannt geworden, diese Frage weiter zu fördern, so dass das Problem immer noch nicht als vollständig gelöst betrachtet werden kann. Vielleicht ermuthigen diese Zeilen jüngere Fachgenossen, die vor mühseligen Rechnungen nicht zurückschrecken, das Problem aufs Neue in Angriff zu nehmen, das nicht nur durch sich selbst, sondern besonders auch durch die tiefen und eigenartigen Hülfsmittel, die Riemann zu seiner Lösung geschaffen hat, von hohem wissenschaftlichem Werthe ist.

Marburg, im Juli 1892.

H. Weber.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Abhandlungen, die von Riemann selbst veröffentlicht sind.

Zweite Abtheilung.

Abhandlungen, die nach Riemann's Tode bereits herausgegeben sind.

Dritte Abtheilung.

Nachlass.

Anhang.

Fragmente philosophischen Inhalts.

Erste Abtheilung.

I.

Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.

(Inauguraldissertation, Göttingen, 1851; zweiter unveränderter Abdruck, Göttingen 1867.)

1.

Denkt man sich unter z eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle möglichen reellen Werthe annehmen kann, so wird, wenn jedem ihrer Werthe ein einziger Werth der unbestimmten Grösse w entspricht, w eine Function von z genannt, und wenn, während z alle zwischen zwei festen Werthen gelegenen Werthe stetig durchläuft, w ebenfalls stetig sich ändert, so heisst diese Function innerhalb dieses Intervalls stetig oder continuirlich. (1)

Diese Definition setzt offenbar zwischen den einzelnen Werthen der Function durchaus kein Gesetz fest, indem, wenn über diese Function für ein bestimmtes Intervall verfügt ist, die Art ihrer Fortsetzung ausserhalb desselben ganz der Willkür überlassen bleibt.

Die Abhängigkeit der Grösse w von z kann durch ein mathematisches Gesetz gegeben sein, so dass durch bestimmte Grössenoperationen zu jedem Werthe von z das ihm entsprechende w gefunden wird. Die Fähigkeit, für alle innerhalb eines gegebenen Intervalls liegenden Werthe von z durch dasselbe Abhängigkeitsgesetz bestimmt zu werden, schrieb man früher nur einer gewissen Gattung von Functionen zu (functiones continuae nach Euler's Sprachgebrauch); neuere Untersuchungen haben indess gezeigt, dass es analytische Ausdrücke giebt, durch welche eine jede stetige Function für ein gegebenes Intervall dargestellt werden kann. Es ist daher einerlei, ob man die Abhängigkeit der Grösse w von der Grösse z als eine willkürlich gegebene oder als eine durch bestimmte Grössenoperationen bedingte definirt. Beide Begriffe sind in Folge der erwähnten Theoreme congruent.

Anders verhält es sich aber, wenn die Veränderlichkeit der Grösse z nicht auf reelle Werthe beschränkt wird, sondern auch complexe von der Form $x + yi$ (wo $i = \sqrt{-1}$) zugelassen werden.

Es seien $x + yi$ und $x + yi + dx + dyi$ zwei unendlich wenig verschiedene Werthe der Grösse z, welchen die Werthe $u + vi$ und $u + vi + du + dvi$ der Grösse w entsprechen. Alsdann wird, wenn die Abhängigkeit der Grösse w von z eine willkürlich angenommene ist, das Verhältniss $\frac{du + dvi}{dx + dyi}$ sich mit den Werthen von dx und dy, allgemein zu reden, ändern, indem, wenn man $dx + dyi = \varepsilon e^{\varphi i}$ setzt,

$$\begin{aligned}
&\frac{du + dvi}{dx + dyi} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) i \\
&+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) i\right] \frac{dx - dyi}{dx + dyi} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) i \\
&+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) i\right] e^{-2\varphi i}
\end{aligned}$$

wird. Auf welche Art aber auch w als Function von z durch Verbindung der einfachen Grössenoperationen bestimmt werden möge, immer wird der Werth des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ von dem besondern Werthe des Differentials dz unabhängig sein*). Offenbar kann also auf diesem Wege nicht jede beliebige Abhängigkeit der complexen Grösse w von der complexen Grösse z ausgedrückt werden.

Das eben hervorgehobene Merkmal aller irgendwie durch Grössenoperationen bestimmbaren Functionen werden wir für die folgende Untersuchung, wo eine solche Function unabhängig von ihrem Ausdrucke betrachtet werden soll, zu Grunde legen, indem wir, ohne jetzt dessen Allgemeingültigkeit und Zulänglichkeit für den Begriff einer durch Grössenoperationen ausdrückbaren Abhängigkeit zu beweisen, von folgender Definition ausgehen:

*) Diese Behauptung ist offenbar in allen Fällen gerechtfertigt, wo sich aus dem Ausdrucke von w durch z mittelst der Regeln der Differentiation ein Ausdruck von $\frac{dw}{dz}$ durch z finden lässt; ihre streng allgemeine Gültigkeit bleibt für jetzt dahin gestellt.

Eine veränderliche complexe Grösse w heisst eine Function einer andern veränderlichen complexen Grösse z, wenn sie mit ihr sich so ändert, dass der Werth des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werthe des Differentials dz ist.

2.

Sowohl die Grösse z, als die Grösse w werden als veränderliche Grössen betrachtet, die jeden complexen Werth annehmen können. Die Auffassung einer solchen Veränderlichkeit, welche sich auf ein zusammenhängendes Gebiet von zwei Dimensionen erstreckt, wird wesentlich erleichtert durch eine Anknüpfung an räumliche Anschauungen.

Man denke sich jeden Werth $x + yi$ der Grösse z repräsentirt durch einen Punkt O der Ebene A, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, jeden Werth $u + vi$ der Grösse w durch einen Punkt Q der Ebene B, dessen rechtwinklige Coordinaten u, v sind. Eine jede Abhängigkeit der Grösse w von z wird sich dann darstellen als eine Abhängigkeit der Lage des Punktes Q von der des Punktes O. Entspricht jedem Werthe von z ein bestimmter mit z stetig sich ändernder Werth von w, mit andern Worten, sind u und v stetige Functionen von x, y, so wird jedem Punkte der Ebene A ein Punkt der Ebene B, jeder Linie, allgemein zu reden, eine Linie, jedem zusammenhängenden Flächenstücke ein zusammenhängendes Flächenstück entsprechen. Man wird sich also diese Abhängigkeit der Grösse w von z vorstellen können als eine Abbildung der Ebene A auf der Ebene B.

3.

Es soll nun untersucht werden, welche Eigenschaft diese Abbildung erhält, wenn w eine Function der complexen Grösse z, d. h. wenn $\frac{dw}{dz}$ von dz unabhängig ist.

Wir bezeichnen durch o einen unbestimmten Punkt der Ebene A in der Nähe von O, sein Bild in der Ebene B durch q, ferner durch $x + yi + dx + dyi$ und $u + vi + du + dvi$ die Werthe der Grössen z und w in diesen Punkten. Es können dann dx, dy und du, dv als rechtwinklige Coordinaten der Punkte o und q in Bezug auf die Punkte O und Q als Anfangspunkte angesehen werden, und wenn man $dx + dyi = \varepsilon e^{\varphi i}$ und $du + dvi = \eta e^{\psi i}$ setzt, so werden die Grössen ε, φ, η, ψ Polarcoordinaten dieser Punkte für dieselben

Anfangspunkte sein. Sind nun o' und o'' irgend zwei bestimmte Lagen des Punktes o in unendlicher Nähe von O, und drückt man die von ihnen abhängigen Bedeutungen der übrigen Zeichen durch entsprechende Indices aus, so giebt die Voraussetzung

$$\frac{du' + dv'i}{dx' + dy'i} = \frac{du'' + dv''i}{dx'' + dy''i}$$

und folglich

$$\frac{du' + dv'i}{du'' + dv''i} = \frac{\eta'}{\eta''} e^{(\psi' - \psi'')i} = \frac{dx' + dy'i}{dx'' + dy''i} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} e^{(\varphi' - \varphi'')i},$$

woraus $\frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ und $\psi' - \psi'' = \varphi' - \varphi''$, d. h. in den Dreiecken $o'Oo''$ und $q'Qq''$ sind die Winkel $o'Oo''$ und $q'Qq''$ gleich und die sie einschliessenden Seiten einander proportional.

Es findet also zwischen zwei einander entsprechenden unendlich kleinen Dreiecken und folglich allgemein zwischen den kleinsten Theilen der Ebene A und ihres Bildes auf der Ebene B Aehnlichkeit Statt. Eine Ausnahme von diesem Satze tritt nur in den besonderen Fällen ein, wenn die einander entsprechenden Aenderungen der Grössen z und w nicht in einem endlichen Verhältnisse zu einander stehen, was bei Herleitung desselben stillschweigend vorausgesetzt ist*).

4.

Bringt man den Differentialquotienten $\frac{du + dvi}{dx + dyi}$ in die Form

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i\right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} i\right) dyi}{dx + dyi},$$

so erhellt, dass er und zwar nur dann für je zwei Werthe von dx und dy denselben Werth haben wird, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

ist. Diese Bedingungen sind also hinreichend und nothwendig, damit $w = u + vi$ eine Function von $z = x + yi$ sei. Für die einzelnen Glieder dieser Function fliessen aus ihnen die folgenden:

*) Ueber diesen Gegenstand sehe man:

„Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, von C. F. Gauss. (Als Beantwortung der von der königlichen Societät der Wissenschaften in Copenhagen für 1822 aufgegebenen Preisfrage, abgedruckt in: „Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher. Drittes Heft. Altona. 1825.“) (Gauss Werke Bd. IV, p. 189.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

welche für die Untersuchung der Eigenschaften, die Einem Gliede einer solchen Function einzeln betrachtet zukommen, die Grundlage bilden. Wir werden den Beweis für die wichtigsten dieser Eigenschaften einer eingehenderen Betrachtung der vollständigen Function voraufgehen lassen, zuvor aber noch einige Punkte, welche allgemeineren Gebieten angehören, erörtern und festlegen, um uns den Boden für jene Untersuchungen zu ebenen.

* * *

5.

Für die folgenden Betrachtungen beschränken wir die Veränderlichkeit der Grössen x, y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes O nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der es unanstössig sein wird, von auf einander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, dass der Ort des Punktes O über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke, setzen jedoch für einen solchen Fall voraus, dass die auf einander liegenden Flächentheile nicht längs einer Linie zusammenhängen, so dass eine Umfaltung der Fläche, oder eine Spaltung in auf einander liegende Theile nicht vorkommt.

Die Anzahl der in jedem Theile der Ebene auf einander liegenden Flächentheile ist alsdann vollkommen bestimmt, wenn die Begrenzung der Lage und dem Sinne nach (d. h. ihre innere und äussere Seite) gegeben ist; ihr Verlauf kann sich jedoch noch verschieden gestalten.

In der That, ziehen wir durch den von der Fläche bedeckten Theil der Ebene eine beliebige Linie l, so ändert sich die Anzahl der über einander liegenden Flächentheile nur beim Ueberschreiten der Begrenzung, und zwar beim Uebertritt von Aussen nach Innen um $+1$, im entgegengesetzten Falle um -1, und ist also überall bestimmt. Längs des Ufers dieser Linie setzt sich nun jeder angrenzende Flächentheil auf ganz bestimmte Art fort, so lange die Linie die Begrenzung nicht trifft, da eine Unbestimmtheit jedenfalls nur in einem einzelnen Punkte und also entweder in einem Punkte der Linie selbst oder in einer endlichen Entfernung von derselben Statt hat; wir können daher, wenn wir unsere Betrachtung auf einen im Innern der Fläche verlaufenden Theil der Linie l und zu beiden Seiten auf einen hinreichend kleinen Flächenstreifen beschränken, von bestimmten angrenzenden Flächentheilen reden, deren Anzahl auf jeder Seite gleich ist, und die wir, indem wir der Linie eine bestimmte Richtung beilegen, auf der Linken mit $a_1, a_2, \dots a_n$, auf der Rechten mit $a'_1, a'_2, \dots a'_n$ bezeichnen. Jeder Flächentheil a wird sich dann in einen der Flächentheile a' fortsetzen; dieser wird zwar im Allgemeinen für den ganzen Lauf der Linie l derselbe sein, kann sich jedoch für besondere Lagen von l in einem ihrer Punkte ändern. Nehmen wir an, dass oberhalb eines solchen Punktes σ (d. h. längs des vorhergehenden Theils von l) mit den Flächentheilen $a'_1, a'_2, \dots a'_n$ der Reihe nach die Flächentheile $a_1, a_2, \dots a_n$ verbunden seien, unterhalb desselben aber die Flächentheile $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots a_{\alpha_n}$, wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ nur in der Anordnung von $1, 2, \dots n$ verschieden sind, so wird ein oberhalb σ von a_1 in a'_1 eintretender Punkt, wenn er unterhalb σ auf die linke Seite zurücktritt, in den Flächentheil a_{α_1} gelangen, und wenn er den Punkt σ von der Linken zur Rechten (²) umkreiset, wird der Index des Flächentheils, in welchem er sich befindet, der Reihe nach die Zahlen

$$1, \alpha_1, \alpha_{\alpha_1}, \dots \mu, \alpha_\mu, \dots$$

durchlaufen. In dieser Reihe sind, so lange das Glied 1 nicht wiederkehrt, nothwendig alle Glieder von einander verschieden, weil einem beliebigen mittlern Gliede α_μ nothwendig μ und nach einander alle früheren Glieder bis 1 in unmittelbarer Folge vorhergehen; wenn aber nach einer Anzahl von Gliedern, die offenbar kleiner als n sein muss und $= m$ sei, das Glied 1 wiederkehrt, so müssen die übrigen Glieder in derselben Ordnung folgen. Der um σ sich bewegende Punkt kommt alsdann nach je m Umläufen in denselben Flächentheil zurück und ist auf m der auf einander liegenden Flächentheile eingeschränkt, welche sich über σ zu einem einzigen Punkte vereinigen. Wir nennen diesen Punkt einen Windungspunkt $(m - 1)$ter Ordnung der Fläche T. Durch Anwendung desselben Verfahrens auf die übrigen $n - m$ Flächentheile werden diese, wenn sie nicht gesondert verlaufen, in Systeme von $m_1, m_2, \dots$ Flächentheilen zerfallen, in welchem Falle auch noch Windungspunkte $(m_1 - 1)$ter, $(m_2 - 1)$ter... Ordnung in dem Punkte σ liegen.

Wenn die Lage und der Sinn der Begrenzung von T und die Lage ihrer Windungspunkte gegeben ist, so ist T entweder vollkommen bestimmt oder doch auf eine endliche Anzahl verschiedener Gestalten beschränkt; Letzteres, in so fern sich diese Bestimmungsstücke auf verschiedene der auf einander liegenden Flächentheile beziehen können.

Eine veränderliche Grösse, die für jeden Punkt O der Fläche T, allgemein zu reden, d. h. ohne eine Ausnahme in einzelnen Linien und Punkten*) auszuschliessen, Einen bestimmten mit der Lage desselben stetig sich ändernden Werth annimmt, kann offenbar als eine Function von x, y angesehen werden, und überall, wo in der Folge von Functionen von x, y die Rede sein wird, werden wir den Begriff derselben auf diese Art festlegen.

Ehe wir uns jedoch zur Betrachtung solcher Functionen wenden, schalten wir noch einige Erörterungen über den Zusammenhang einer Fläche ein. Wir beschränken uns dabei auf solche Flächen, die sich nicht längs einer Linie spalten.

6.

Wir betrachten zwei Flächentheile als zusammenhängend oder Einem Stücke angehörig, wenn sich von einem Punkte des einen durch das Innere der Fläche eine Linie nach einem Punkte des andern ziehen lässt, als getrennt, wenn diese Möglichkeit nicht Statt findet.

Die Untersuchung des Zusammenhangs einer Fläche beruht auf ihrer Zerlegung durch Querschnitte, d. h. Linien, welche von einem Begrenzungspunkte das Innere einfach — keinen Punkt mehrfach — bis zu einem Begrenzungspunkte durchschneiden. Letzterer kann auch in dem zur Begrenzung hinzugekommenen Theile, also in einem frühern Punkte des Querschnitts, liegen.

Eine zusammenhängende Fläche heisst, wenn sie durch jeden Querschnitt in Stücke zerfällt, eine einfach zusammenhängende, andernfalls eine mehrfach zusammenhängende.

Lehrsatz I. Eine einfach zusammenhängende Fläche A zerfällt durch jeden Querschnitt ab in zwei einfach zusammenhängende Stücke.

Gesetzt, eins dieser Stücke würde durch einen Querschnitt cd nicht zerstückt, so erhielte man offenbar, je nachdem keiner seiner Endpunkte oder der Endpunkt c oder beide Endpunkte in ab fielen, durch Herstellung der Verbindung längs der ganzen Linie ab oder längs des Theils cb oder des Theils cd derselben eine zusammen-

*) Diese Beschränkung ist zwar nicht durch den Begriff einer Function an sich geboten, aber um Infinitesimalrechnung auf sie anwenden zu können erforderlich: eine Function, die in allen Punkten einer Fläche unstetig ist, wie z. B. eine Function, die für ein commensurables x und ein commensurables y den Werth 1, sonst aber den Werth 2 hat, kann weder einer Differentiation, noch einer Integration, also (unmittelbar) der Infinitesimalrechnung überhaupt nicht unterworfen werden. Die für die Fläche T hier willkürlich gemachte Beschränkung wird sich später (Art. 15) rechtfertigen.

hängende Fläche, welche durch einen Querschnitt aus A entstände, gegen die Voraussetzung.

Lehrsatz II. Wenn eine Fläche T durch n_1*) Querschnitte q_1 in ein System T_1 von m_1 einfach zusammenhängenden Flächenstücken und durch n_2 Querschnitte q_2 in ein System T_2 von m_2 Flächenstücken zerfällt, so kann $n_2 - m_2$ nicht $> n_1 - m_1$ sein.

Jede Linie q_2 bildet, wenn sie nicht ganz in das Querschnittsystem q_1 fällt, zugleich einen oder mehrere Querschnitte q_2' der Fläche T_1. Als Endpunkte der Querschnitte q_2' sind anzusehen:

1) die $2n_2$ Endpunkte der Querschnitte q_2, ausgenommen, wenn ihre Enden mit einem Theil des Liniensystems q_1 zusammenfallen,
2) jeder mittlere Punkt eines Querschnitts q_2, in welchem er in einen mittlern Punkt einer Linie q_1 eintritt, ausgenommen, wenn er sich schon in einer andern Linie q_1 befindet, d. h. wenn ein Ende eines Querschnitts q_1 mit ihm zusammenfällt.

Bezeichnet nun μ, wie oft Linien beider Systeme während ihres Laufes zusammentreffen oder auseinandergehen (wo also ein einzelner gemeinsamer Punkt doppelt zu rechnen ist), ν_1, wie oft ein Endstück der q_1 mit einem mittlern Stücke der q_2, ν_2, wie oft ein Endstück der q_2 mit einem mittlern Stücke der q_1, endlich ν_3, wie oft ein Endstück der q_1 mit einem Endstücke der q_2 zusammenfällt, so liefert Nr. 1 $2n_2 - \nu_2 - \nu_3$, Nr. 2 $\mu - \nu_1$ Endpunkte der Querschnitte q_2'; beide Fälle zusammengenommen aber umfassen sämmtliche Endpunkte und jeden nur einmal, und die Anzahl dieser Querschnitte ist daher

$$\frac{2n_2 - \nu_2 - \nu_3 + \mu - \nu_1}{2} = n_2 + s.$$

Durch ganz ähnliche Schlüsse ergiebt sich die Anzahl der Querschnitte q_1' der Fläche T_2, welche durch die Linien q_1 gebildet werden,

$$= \frac{2n_1 - \nu_1 - \nu_3 + \mu - \nu_2}{2},$$

also $= n_1 + s$. Die Fläche T_1 wird nun offenbar durch die $n_2 + s$ Querschnitte q_2' in dieselbe Fläche verwandelt, in welche T_2 durch die $n_1 + s$ Querschnitte q_1' zerfällt wird. Es besteht aber T_1 aus m_1 einfach zusammenhängenden Stücken und zerfällt daher nach Satz I durch $n_2 + s$ Querschnitte in $m_1 + n_2 + s$ Flächenstücke; folglich müsste, wäre $m_2 < m_1 + n_2 - n_1$, die Zahl der Flächenstücke T_2 durch $n_1 + s$ Querschnitte um mehr als $n_1 + s$ vermehrt werden, was ungereimt ist.

*) Unter einer Zerlegung durch mehrere Querschnitte ist stets eine successive zu verstehen, d. h. eine solche, wo die durch einen Querschnitt entstandene Fläche durch einen neuen Querschnitt weiter zerlegt wird.

Zufolge dieses Lehrsatzes ist, wenn die Anzahl der Querschnitte unbestimmt durch n, die Anzahl der Stücke durch m bezeichnet wird, $n - m$ für alle Zerlegungen einer Fläche in einfach zusammenhängende Stücke constant; denn betrachten wir irgend zwei bestimmte Zerlegungen durch n_1 Querschnitte in m_1 Stücke und durch n_2 Querschnitte in m_2 Stücke, so muss, wenn erstere einfach zusammenhängend sind, $n_2 - m_2 \overline{<} n_1 - m_1$, und wenn letztere einfach zusammenhängend sind, $n_1 - m_1 \overline{<} n_2 - m_2$, also wenn Beides zutrifft, $n_2 - m_2 = n_1 - m_1$ sein.

Diese Zahl kann füglich mit dem Namen „Ordnung des Zusammenhangs“ einer Fläche belegt werden; sie wird

durch jeden Querschnitt um 1 erniedrigt — nach der Definition —,

durch eine von einem innern Punkte das Innere einfach bis zu einem Begrenzungspunkte oder einem frühern Schnittpunkte durchschneidende Linie nicht geändert und

durch einen innern allenthalben einfachen in zwei Punkten endenden Schnitt um 1 erhöht,

weil erstere durch Einen, letztere aber durch zwei Querschnitte in Einen Querschnitt verwandelt werden kann.

Endlich wird die Ordnung des Zusammenhangs einer aus mehreren Stücken bestehenden Fläche erhalten, wenn man die Ordnungen des Zusammenhangs dieser Stücke zu einander addirt.

Wir werden uns indess in der Folge meistens auf eine aus Einem Stücke bestehende Fläche beschränken, und uns für ihren Zusammenhang der kunstloseren Bezeichnung eines einfachen, zweifachen etc. bedienen, indem wir unter einer $n$fach zusammenhängenden Fläche eine solche verstehen, die durch $n - 1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerlegbar ist.

In Bezug auf die Abhängigkeit des Zusammenhangs der Begrenzung von dem Zusammenhang einer Fläche erhellt leicht:

1) Die Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche besteht nothwendig aus Einer in sich zurücklaufenden Linie.

Bestände die Begrenzung aus getrennten Stücken, so würde ein Querschnitt q, der einen Punkt eines Stücks a mit einem Punkte eines andern b verbände, nur zusammenhängende Flächentheile von einander scheiden, da sich im Innern der Fläche längs a eine Linie von der einen Seite des Querschnitts q an die entgegengesetzte führen liesse; und folglich würde q die Fläche nicht zerstücken, gegen die Voraussetzung.

2) Durch jeden Querschnitt wird die Anzahl der Begrenzungsstücke entweder um 1 vermindert oder um 1 vermehrt.

Ein Querschnitt q verbindet entweder einen Punkt eines Begrenzungsstücks a mit einem Punkte eines andern b, — in diesem Falle bilden alle diese Linien zusammengenommen in der Folge a, q, b, q ein einziges in sich zurücklaufendes Stück der Begrenzung —

oder er verbindet zwei Punkte eines Stücks der Begrenzung, — in diesem Falle zerfällt dieses durch seine beiden Endpunkte in zwei Stücke, deren jedes mit dem Querschnitte zusammengenommen ein in sich zurücklaufendes Begrenzungsstück bildet —

oder endlich, er endet in einem seiner früheren Punkte und kann betrachtet werden als zusammengesetzt aus einer in sich zurücklaufenden Linie o und einer andern l, welche einen Punkt von o mit einem Punkte eines Begrenzungsstücks a verbindet, — in welchem Falle o eines Theils, und a, l, o, l andern Theils je ein in sich zurücklaufendes Begrenzungsstück bilden.

Es treten also entweder — im erstern Falle — an die Stelle zweier Ein, oder — in den beiden letzteren Fällen — an die Stelle Eines zwei Begrenzungsstücke, woraus unser Satz folgt.

Die Anzahl der Stücke, aus welchen die Begrenzung eines $n$fach zusammenhängenden Flächenstücks besteht, ist daher entweder $= n$ oder um eine gerade Zahl kleiner.

Hieraus ziehen wir noch das Corollar:

Wenn die Anzahl der Begrenzungsstücke einer $n$fach zusammenhängenden Fläche $= n$ ist, so zerfällt diese durch jeden überall einfachen im Innern in sich zurücklaufenden Schnitt in zwei getrennte Stücke.

Denn die Ordnung des Zusammenhangs wird dadurch nicht geändert, die Anzahl der Begrenzungsstücke um 2 vermehrt; die Fläche würde also, wenn sie eine zusammenhängende wäre, einen $n$fachen Zusammenhang und $n+2$ Begrenzungsstücke haben, was unmöglich ist.

7.

Sind X und Y zwei in allen Punkten der über A ausgebreiteten Fläche T stetige Functionen von x, y, so ist das über alle Elemente dT dieser Fläche ausgedehnte Integral

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT=-\int(X\cos\xi+Y\cos\eta)\,ds,$$

wenn in jedem Punkte der Begrenzung die Neigung einer auf sie nach Innen gezogenen Normale gegen die x-Axe durch ξ, gegen die y-Axe durch η bezeichnet wird, und sich diese Integration auf sämmtliche Elemente ds der Begrenzungslinie erstreckt.

Um das Integral $\int\frac{\partial X}{\partial x}dT$ zu transformiren, zerlegen wir den

von der Fläche T bedeckten Theil der Ebene A durch ein System der x-Axe paralleler Linien in Elementarstreifen, und zwar so, dass jeder Windungspunkt der Fläche T in eine dieser Linien fällt. Unter dieser Voraussetzung besteht der auf jeden derselben fallende Theil von T aus einem oder mehreren abgesondert verlaufenden trapezförmigen Stücken. Der Beitrag eines unbestimmten dieser Flächenstreifen, welcher aus der y-Axe das Element dy ausscheidet, zu dem Werthe von $\int\frac{\partial X}{\partial x}dT$ wird dann offenbar $=dy\int\frac{\partial X}{\partial x}dx$, wenn diese Integration durch diejenige oder diejenigen der Fläche T angehörigen geraden Linien ausgedehnt wird, welche auf eine durch einen Punkt von dy gehende Normale fallen. Sind nun die unteren Endpunkte derselben (d. h. welchen die kleinsten Werthe von x entsprechen) $O_{,}$, $O_{,,}$, $O_{,,,}$, ..., die oberen O', O'', O''', ... und bezeichnen wir mit $X_{,}$, $X_{,,}$, ... X', X'', ... die Werthe von X in diesen Punkten, mit $ds_{,}$, $ds_{,,}$, ... ds', ds'', ... die entsprechenden von dem Flächenstreifen aus der Begrenzung ausgeschiedenen Elemente, mit $\xi_{,}$, $\xi_{,,}$, ... ξ', ξ'', ... die Werthe von ξ an diesen Elementen, so wird

$$\begin{aligned}\int\frac{\partial X}{\partial x}dx&=-X_{,}-X_{,,}-X_{,,,}\dots\\&\quad+X'+X''+X'''\dots\end{aligned}$$

Die Winkel ξ werden offenbar spitz an den unteren, stumpf an den oberen Endpunkten, und es wird daher

$$\begin{aligned}dy&=\cos\xi_{,}ds_{,}=\cos\xi_{,,}ds_{,,}\dots\\&=-\cos\xi'ds'=-\cos\xi''ds''\dots\end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Werthe ergiebt sich

$$dy\int\frac{\partial X}{\partial x}dx=-\Sigma X\cos\xi\,ds,$$

wo sich die Summation auf alle Begrenzungselemente bezieht, welche in der y-Axe dy zur Projection haben.

Durch Integration über sämmtliche in Betracht kommende dy werden offenbar sämmtliche Elemente der Fläche T und sämmtliche Elemente der Begrenzung erschöpft, und man erhält daher, in diesem Umfange genommen,

$$\int\frac{\partial X}{\partial x}dT=-\int X\cos\xi\,ds.$$

Durch ganz ähnliche Schlüsse findet man

$$\int\frac{\partial Y}{\partial y}dT=-\int Y\cos\eta\,ds$$

und folglich

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT=-\int(X\cos\xi+Y\cos\eta)\,ds,\ \text{w. z. b. w.}$$

8.

Bezeichnen wir in der Begrenzungslinie, von einem festen Anfangspunkte aus in einer bestimmten später festzusetzenden Richtung gerechnet, die Länge derselben bis zu einem unbestimmten Punkte O_0 durch s, und in der in diesem Punkte O_0 errichteten Normalen die Entfernung eines unbestimmten Punktes O von demselben und zwar nach Innen zu als positiv betrachtet durch p, so können offenbar die Werthe von x und y im Punkte O als Functionen von s und p angesehen werden, und es werden dann in den Punkten der Begrenzungslinie die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial p}=\cos\xi,\quad \frac{\partial y}{\partial p}=\cos\eta,\quad \frac{\partial x}{\partial s}=\pm\cos\eta,\quad \frac{\partial y}{\partial s}=\mp\cos\xi,$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn die Richtung, in welcher die Grösse s als wachsend betrachtet wird, mit p einen gleichen Winkel einschliesst, wie die x-Axe mit der y-Axe, wenn einen entgegengesetzten, die unteren. Wir werden diese Richtung in allen Theilen der Begrenzung so annehmen, dass

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{\partial y}{\partial p}\quad\text{und folglich}\quad\frac{\partial y}{\partial s}=-\frac{\partial x}{\partial p}$$

ist, was die Allgemeinheit unserer Resultate im Wesentlichen nicht beeinträchtigt.

Offenbar können wir diese Bestimmungen auch auf Linien im Innern von T ausdehnen; nur haben wir hier zur Bestimmung der Vorzeichen von dp und ds, wenn deren gegenseitige Abhängigkeit wie dort festgesetzt wird, noch eine Angabe hinzuzufügen, welche entweder das Vorzeichen von dp oder von ds festsetzt; und zwar werden wir bei einer in sich zurücklaufenden Linie angeben, von welchem der durch sie geschiedenen Flächentheile sie als Begrenzung gelten solle, wodurch das Vorzeichen von dp bestimmt wird, bei einer nicht in sich zurücklaufenden aber ihren Anfangspunkt, d. h. den Endpunkt, wo s den kleinsten Werth annimmt.

Die Einführung der für $\cos\xi$ und $\cos\eta$ erhaltenen Werthe in die im vorigen Art. bewiesene Gleichung giebt, in demselben Umfange wie dort genommen,

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT=-\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=\int\left(X\frac{\partial y}{\partial s}-Y\frac{\partial x}{\partial s}\right)ds.$$

9.

Durch Anwendung des Satzes am Schlusse des vorigen Art. auf den Fall, wo in allen Theilen der Fläche

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

ist, erhalten wir folgende Sätze:

I. Sind X und Y zwei in allen Punkten von T endliche und stetige und der Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

genügende Functionen, so ist, durch die ganze Begrenzung von T ausgedehnt,

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=0.$$

Denkt man sich eine beliebige über A ausgestreckte Fläche T_1 in zwei Stücke T_2 und T_3 auf beliebige Art zerfällt, so kann das Integral

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

in Bezug auf die Begrenzung von T_2 betrachtet werden als die Differenz der Integrale in Bezug auf die Begrenzung von T_1 und in Bezug auf die Begrenzung von T_3, indem, wo T_3 sich bis zur Begrenzung von T_1 erstreckt, beide Integrale sich aufheben, alle übrigen Elemente aber einem Elemente der Begrenzung von T_2 entsprechen.

Mittelst dieser Umformung ergiebt sich aus I.:

II. Der Werth des Integrals

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds,$$

durch die ganze Begrenzung einer über A ausgebreiteten Fläche erstreckt, bleibt bei beliebiger Erweiterung oder Verengerung derselben constant, wenn nur dadurch keine Flächentheile ein- oder austreten, innerhalb welcher die Voraussetzungen des Satzes I. nicht erfüllt sind.

Wenn die Functionen X, Y zwar in jedem Theile der Fläche T der vorgeschriebenen Differentialgleichung genügen, aber in einzelnen Linien oder Punkten mit einer Unstetigkeit behaftet sind, so kann man jede solche Linie und jeden solchen Punkt mit einem beliebig kleinen Flächentheil als Hülle umgeben und erhält dann durch Anwendung des Satzes II.:

III. Das Integral

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) ds$$

in Bezug auf die ganze Begrenzung von T ist gleich der Summe der Integrale

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) ds$$

in Bezug auf die Umgrenzungen aller Unstetigkeitsstellen, und zwar behält in Bezug auf jede einzelne dieser Stellen das Integral denselben Werth, in wie enge Grenzen man sie auch einschliessen möge.

Dieser Werth ist für einen blossen Unstetigkeitspunkt nothwendig gleich Null, wenn mit der Entfernung ϱ des Punktes O von demselben zugleich ϱX und ϱY unendlich klein werden; denn führt man in Bezug auf einen solchen Punkt als Anfangspunkt und eine beliebige Anfangsrichtung Polarcoordinaten ϱ, φ ein und wählt zur Umgrenzung einen um denselben mit dem Radius ϱ beschriebenen Kreis, so wird das auf ihn bezügliche Integral durch

$$\int_0^{2\pi} \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) \varrho\, d\varphi$$

ausgedrückt und kann folglich nicht einen von Null verschiedenen Werth $\varkappa$ haben, weil, was auch $\varkappa$ sei, ϱ immer so klein angenommen werden kann, dass abgesehen vom Zeichen $\left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\varrho$ für jeden Werth von φ kleiner als $\frac{\varkappa}{2\pi}$ und folglich

$$\int_0^{2\pi} \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) \varrho\, d\varphi < \varkappa$$

wird.

IV. Ist in einer einfach zusammenhängenden über A ausgebreiteten Fläche für jeden Flächentheil das durch dessen ganze Begrenzung erstreckte Integral

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) ds$$

oder

$$\int \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds = 0,$$

so erhält für irgend zwei feste Punkte O_0 und O dies Integral in Bezug auf alle von O_0 in derselben nach O gehende Linien denselben Werth.

Je zwei die Punkte O_0 und O verbindende Linien s_1 und s_2 bilden zusammengenommen eine in sich zurücklaufende Linie s_3. Diese Linie besitzt entweder selbst die Eigenschaft, keinen Punkt mehrfach zu durchschneiden, oder man kann sie in mehrere allenthalben einfache in sich zurücklaufende Linien zerlegen, indem man von einem beliebigen Punkte aus dieselbe durchlaufend jedesmal, wenn man zu einem frühern Punkte zurückgelangt, den inzwischen durchlaufenen Theil ausscheidet und den folgenden als unmittelbare Fortsetzung des vorhergehenden betrachtet. Jede solche Linie aber zerlegt die Fläche in eine einfach und eine zweifach zusammenhängende; sie bildet daher nothwendig von Einem dieser Stücke die ganze Begrenzung, und das durch sie erstreckte Integral

$$\int \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds$$

wird also der Voraussetzung nach $= 0$. Dasselbe gilt folglich auch von dem durch die ganze Linie s_3 erstreckten Integrale, wenn die Grösse s überall in derselben Richtung als wachsend betrachtet wird; es müssen daher die durch die Linien s_1 und s_2 erstreckten Integrale, wenn diese Richtung ungeändert bleibt, d. h. in einer derselben von O_0 nach O und in der andern von O nach O_0 geht, einander aufheben, also, wenn sie in letzterer geändert wird, gleich werden.

Hat man nun irgend eine beliebige Fläche T, in welcher, allgemein zu reden,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

ist, so schliesse man zunächst, wenn nöthig, die Unstetigkeitsstellen aus, so dass im übrigen Flächenstücke für jeden Flächentheil

$$\int \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds = 0$$

ist, und zerlege dieses durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche T^*. Für jede im Innern von T^* von einem Punkte O_0 nach einem andern O gehende Linie hat dann unser Integral denselben Werth; dieser Werth, für den zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\int_{O_0}^{O} \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds$$

gestattet sein möge, ist daher, O_0 als fest, O als beweglich gedacht, für jede Lage von O, abgesehen vom Laufe der Verbindungslinie ein bestimmter, und kann folglich als Function von x, y betrachtet werden. Die Aenderung dieser Function wird für eine Verrückung von O längs eines beliebigen Linienelements ds durch

$$\left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds$$

ausgedrückt, ist in T^* überall stetig und längs eines Querschnitts von T zu beiden Seiten gleich;

V. das Integral

$$Z = \int_{O_0}^{O} \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds$$

bildet daher, O_0 als fest gedacht, eine Function von x, y, welche in T^* überall sich stetig, beim Ueberschreiten der Querschnitte von T aber um eine längs derselben von einem Zweigpunkte zum andern constante Grösse ändert, und von welcher der partielle Differentialquotient

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = Y, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -X$$

ist.

Die Aenderungen beim Ueberschreiten der Querschnitte sind von einer der Zahl der Querschnitte gleichen Anzahl von einander unabhängiger Grössen abhängig; denn wenn man das Querschnittsystem rückwärts — die späteren Theile zuerst — durchläuft, so ist diese Aenderung überall bestimmt, wenn ihr Werth beim Beginn jedes Querschnitts gegeben wird; letztere Werthe aber sind von einander unabhängig. (3)

10.

Setzt man für die bisher durch X bezeichnete Function

$$u\frac{\partial u'}{\partial x} - u'\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad u\frac{\partial u'}{\partial y} - u'\frac{\partial u}{\partial y}$$

für Y, so wird

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = u\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right) - u'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

wenn also die Functionen u und u' den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = 0$$

genügen, so wird

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

und es finden auf den Ausdruck

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) ds,$$

welcher

$$= \int\left(u\frac{\partial u'}{\partial p} - u'\frac{\partial u}{\partial p}\right) ds$$

wird, die Sätze des vorigen Art. Anwendung.

Machen wir nun in Bezug auf die Function u die Voraussetzung, dass sie nebst ihren ersten Differentialquotienten etwaige Unstetigkeiten jedenfalls nicht längs einer Linie erleidet, und für jeden Unstetigkeitspunkt zugleich mit der Entfernung ϱ des Punktes O von demselben $\varrho\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\varrho\frac{\partial u}{\partial y}$ unendlich klein werden, so können die Unstetigkeiten von u in Folge der Bemerkung zu III. des vorigen Art. ganz unberücksichtigt bleiben.

Denn alsdann kann man in jeder von einem Unstetigkeitspunkte ausgehenden geraden Linie einen Werth R von ϱ so annehmen, dass

$$\varrho\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \varrho\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \varrho\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varrho}$$

unterhalb desselben immer endlich bleibt, und bezeichnet U den Werth von u für $\varrho = R$, M abgesehen vom Zeichen den grössten Werth der Function $\varrho\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ in jenem Intervall, so wird, in derselben Bedeutung genommen, stets $u - U < M(\log\varrho - \log R)$ sein, folglich $\varrho(u - U)$ und also auch ϱu mit ϱ zugleich unendlich klein werden; dasselbe gilt aber der Voraussetzung nach von $\varrho\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\varrho\frac{\partial u}{\partial y}$ und folglich wenn u' keiner Unstetigkeit unterliegt, auch von

$$\varrho\left(u\frac{\partial u'}{\partial x} - u'\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{und} \quad \varrho\left(u\frac{\partial u'}{\partial y} - u'\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

der im vorigen Art. erörterte Fall tritt hier also ein.

Wir nehmen nun ferner an, dass die den Ort des Punktes O bildende Fläche T allenthalben einfach über A ausgebreitet sei, und denken uns in derselben einen beliebigen festen Punkt O_0, wo u, x, y die Werthe u_0, x_0, y_0 erhalten. Die Grösse

$$\tfrac{1}{2}\log\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right) = \log r,$$

als Function von x, y betrachtet, hat alsdann die Eigenschaft, dass

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} = 0$$

wird, und ist nur für $x = x_0$, $y = y_0$, also in unserm Falle nur für Einen Punkt der Fläche T mit einer Unstetigkeit behaftet.

Es wird daher nach Art. 9, III., wenn wir $\log r$ für u' setzen,

$$\int\left(u\frac{\partial \log r}{\partial p} - \log r\,\frac{\partial u}{\partial p}\right) ds$$

in Bezug auf die ganze Begrenzung von T gleich diesem Integrale in Bezug auf eine beliebige Umgrenzung des Punktes O_0 und also, wenn wir dazu die Peripherie eines Kreises, wo r einen constanten Werth hat, wählen und von einem ihrer Punkte in einer beliebigen festen Richtung den Bogen bis O in Theilen des Halbmessers durch φ bezeichnen, gleich

$$-\int_0^{2\pi} u \frac{\partial \log r}{\partial r} r\, d\varphi - \log r \int \frac{\partial u}{\partial p} ds,$$

oder da ([4])

$$\int \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0 \text{ ist}, \quad = -\int_0^{2\pi} u\, d\varphi,$$

welcher Werth, wenn u im Punkte O_0 stetig ist, für ein unendlich kleines r in $-u_0 2\pi$ übergeht.

Unter den in Bezug auf u und T gemachten Voraussetzungen haben wir daher für einen beliebigen Punkt O_0 im Innern der Fläche, in welchem u stetig ist,

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial p} - u \frac{\partial \log r}{\partial p} \right) ds$$

in Bezug auf die ganze Begrenzung derselben und

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\, d\varphi$$

in Bezug auf einen um O_0 beschriebenen Kreis. Aus dem ersten dieser Ausdrücke ziehen wir folgenden

Lehrsatz. Wenn eine Function u innerhalb einer die Ebene A allenthalben einfach bedeckenden Fläche T, allgemein zu reden, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt und zwar so, dass

1) die Punkte, in welchen diese Differentialgleichung nicht erfüllt ist, keinen Flächentheil,
2) die Punkte, in welchen u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ unstetig werden, keine Linie stetig erfüllen,
3) für jeden Unstetigkeitspunkt zugleich mit der Entfernung ϱ des Punktes O von demselben die Grössen $\varrho \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varrho \frac{\partial u}{\partial y}$ unendlich klein werden und

4) bei u eine durch Abänderung ihres Werthes in einzelnen Punkten hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist,

so ist sie nothwendig nebst allen ihren Differentialquotienten für alle Punkte im Innern dieser Fläche endlich und stetig.

In der That, betrachten wir den Punkt O_0 als beweglich, so ändern sich in dem Ausdrucke

$$\int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial p} - u \frac{\partial \log r}{\partial p} \right) ds$$

nur die Werthe $\log r$, $\frac{\partial \log r}{\partial x}$, $\frac{\partial \log r}{\partial y}$. Diese Grössen aber sind für jedes Element der Begrenzung, so lange O_0 im Innern von T bleibt, nebst allen ihren Differentialquotienten endliche und stetige Functionen von x_0, y_0, da die Differentialquotienten durch gebrochene rationale Functionen dieser Grössen ausgedrückt werden, die nur Potenzen von r im Nenner enthalten. Dasselbe gilt daher auch für den Werth unsres Integrals und folglich für die Function u_0. Denn diese könnte unter den früheren Voraussetzungen nur in einzelnen Punkten, indem sie unstetig würde, einen davon verschiedenen Werth haben, welche Möglichkeit durch die Voraussetzung 4) unsers Lehrsatzes wegfällt.

11.

Unter denselben Voraussetzungen in Bezug auf u und T, wie am Schlusse des vorigen Art., haben wir folgende Sätze:

I. Wenn längs einer Linie $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ ist, so ist u überall $= 0$.

Wir beweisen zunächst, dass eine Linie λ, wo $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ ist, nicht die Begrenzung eines Flächentheils a, wo u positiv ist, bilden könne.

Gesetzt, dies fände statt, so scheide man aus a ein Stück aus, welches eines Theils durch λ, andern Theils durch eine Kreislinie begrenzt wird und den Mittelpunkt O_0 dieses Kreises nicht enthält, welche Construction allemal möglich ist. Man hat dann, wenn man die Polarcoordinaten von O in Bezug auf O_0 durch r, φ bezeichnet, durch die ganze Begrenzung dieses Stücks ausgedehnt

$$\int \log r \frac{\partial u}{\partial p} ds - \int u \frac{\partial \log r}{\partial p} ds = 0,$$

also in Folge der Annahme auch für den ganzen ihr angehörigen Kreisbogen

$$\int u\, d\varphi + \log r \int \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0,$$

oder da

$$\int \frac{\partial u}{\partial p}\, ds = 0$$

ist,

$$\int u\, d\varphi = 0,$$

was mit der Voraussetzung, dass u im Innern von a positiv sei, unverträglich ist.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, dass die Gleichungen $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ nicht in einem Begrenzungstheile eines Flächenstücks b, wo u negativ ist, stattfinden können.

Wenn nun in der Fläche T in einer Linie $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ ist und in irgend einem Theile derselben u von Null verschieden wäre, so müsste ein solcher Flächentheil offenbar entweder durch diese Linie selbst oder durch einen Flächentheil, wo $u = 0$ wäre, also jedenfalls durch eine Linie wo u und $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ wäre, begrenzt werden, was nothwendig auf eine der vorhin widerlegten Annahmen führt.

II. Wenn der Werth von u und $\frac{\partial u}{\partial p}$ längs einer Linie gegeben ist, so ist u dadurch in allen Theilen von T bestimmt.

Sind u_1 und u_2 irgend zwei bestimmte Functionen, welche den der Function u auferlegten Bedingungen genügen, so gilt dies auch, wie sich durch Substitution in diese Bedingungen sofort ergiebt, für ihre Differenz $u_1 - u_2$. Stimmten nun u_1 und u_2 längs einer Linie nebst ihren ersten Differentialquotienten nach p überein, in einem andern Flächentheile aber nicht, so würden längs dieser Linie $u_1 - u_2 = 0$ und $\frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial p} = 0$ sein, ohne überall $= 0$ zu sein, dem Satze I. zuwider.

III. Die Punkte im Innern von T, wo u einen constanten Werth hat, bilden, wenn u nicht überall constant ist, nothwendig Linien, welche Flächentheile, wo u grösser ist, von Flächentheilen, wo u kleiner ist, scheiden.

Dieser Satz ist aus folgenden zusammengesetzt:

u kann nicht in einem Punkte im Innern von T ein Minimum oder ein Maximum haben;

u kann nicht nur in einem Theile der Fläche constant sein;

die Linien, in denen $u = a$ ist, können nicht beiderseits Flächentheile begrenzen, wo $u - a$ dasselbe Zeichen hat;

Sätze, deren Gegentheil, wie leicht zu sehen, allemal eine Verletzung der im vorigen Art. bewiesenen Gleichung

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\, d\varphi$$

oder

$$\int_0^{2\pi} (u - u_0)\, d\varphi = 0$$

herbeiführen müsste und folglich unmöglich ist.

12.

Wir wenden uns jetzt zurück zur Betrachtung einer veränderlichen complexen Grösse $w = u + vi$, welche, allgemein zu reden (d. h. ohne eine Ausnahme in einzelnen Linien und Punkten auszuschliessen), für jeden Punkt O der Fläche T Einen bestimmten mit der Lage desselben stetig und den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

gemäss sich ändernden Werth hat, und bezeichnen diese Eigenschaft von w nach dem früher Festgestellten dadurch, dass wir w eine Function von $z = x + yi$ nennen. Zur Vereinfachung des Folgenden setzen wir dabei im Voraus fest, dass bei einer Function von z eine durch Abänderung ihres Werthes in einem einzelnen Punkte hebbare Unstetigkeit nicht vorkommen solle.

Der Fläche T wird vorerst ein einfacher Zusammenhang und eine allenthalben einfache Ausbreitung über die Ebene A beigelegt.

Lehrsatz. Wenn eine Function w von z eine Unterbrechung der Stetigkeit jedenfalls nicht längs einer Linie erleidet und ferner für jeden beliebigen Punkt O' der Fläche, wo $z = z'$ sei, $w(z - z')$ mit unendlicher Annäherung des Punktes O unendlich klein wird, so ist sie nothwendig nebst allen ihren Differentialquotienten in allen Punkten im Innern der Fläche endlich und stetig.

Die über die Veränderungen der Grösse w gemachten Voraussetzungen zerfallen, wenn $z - z' = \varrho e^{\varphi i}$ gesetzt wird, für u und v in die folgenden:

$$1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

und

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

für jeden Theil der Fläche T;

3) die Functionen u und v sind nicht längs einer Linie unstetig;
4) für jeden Punkt O' werden mit der Entfernung ϱ des Punktes O von demselben ϱu und ϱv unendlich klein;
5) für die Functionen u und v sind Unstetigkeiten, die durch Abänderung ihres Werthes in einzelnen Punkten gehoben werden könnten, ausgeschlossen.

In Folge der Voraussetzungen 2), 3), 4) ist für jeden Theil der Fläche T das über dessen ganze Begrenzung ausgedehnte Integral

$$\int \left(u \frac{\partial x}{\partial s} - v \frac{\partial y}{\partial s}\right) ds$$

nach Art. 9, III. $= 0$ und das Integral

$$\int_{O_0}^{O} \left(u \frac{\partial x}{\partial s} - v \frac{\partial y}{\partial s}\right) ds$$

erhält daher (nach Art. 9, IV.) durch jede von O_0 nach O gehende Linie erstreckt denselben Werth und bildet, O_0 als fest gedacht, eine bis auf einzelne Punkte nothwendig stetige Function U von x, y, von welcher (und zwar nach 5) in jedem Punkte) der Differentialquotient $\frac{\partial U}{\partial x} = u$ und $\frac{\partial U}{\partial y} = -v$ ist. Durch Substitution dieser Werthe für u und v aber gehen die Voraussetzungen 1), 3), 4), in die Bedingungen des Lehrsatzes am Schlusse des Art. 10 über. Die Function U ist daher nebst allen ihren Differentialquotienten in allen Punkten von T endlich und stetig und dasselbe gilt folglich auch von der complexen Function $w = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} i$ und ihren nach z genommenen Differentialquotienten.

13.

Es soll jetzt untersucht werden, was eintritt, wenn wir unter Beibehaltung der sonstigen Voraussetzungen des Art. 12 annehmen, dass für einen bestimmten Punkt O' im Innern der Fläche $(z-z')w = \varrho e^{\varphi i} w$ bei unendlicher Annäherung des Punktes O nicht mehr unendlich klein wird. In diesem Falle wird also w bei unendlicher Annäherung des Punktes O an O' unendlich gross, und wir nehmen an, dass, wenn die Grösse w nicht mit $\frac{1}{\varrho}$ von gleicher Ordnung bleibt, d. h. der Quotient beider sich einer endlichen Grenze nähert, wenigstens die Ordnungen beider Grössen in einem endlichen Verhältnisse zu einander stehen, so dass sich eine Potenz von ϱ angeben lässt, deren Product in w für ein unendlich kleines ϱ entweder unendlich

klein wird oder endlich bleibt. Ist μ der Exponent einer solchen Potenz und n die nächst grössere ganze Zahl, so wird die Grösse $(z-z')^n w = \varrho^n e^{n\varphi i} w$ mit ϱ unendlich klein, und es ist daher $(z-z')^{n-1} w$ eine Function von z (da $\frac{d(z-z')^{n-1} w}{dz}$ von dz unabhängig ist), welche in diesem Theile der Fläche den Voraussetzungen des Art. 12 genügt und folglich im Punkte O' endlich und stetig ist. Bezeichnen wir ihren Werth im Punkte O' mit a_{n-1}, so ist $(z-z')^{n-1} w - a_{n-1}$ eine Function, die in diesem Punkte stetig und $= 0$ ist und folglich mit ϱ unendlich klein wird, woraus man nach Artikel 12 schliesst, dass $(z-z')^{n-2} w - \frac{a_{n-1}}{z-z'}$ eine im Punkte O' stetige Function ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens wird offenbar w mittelst Subtraction eines Ausdruckes von der Form

$$\frac{a_1}{z-z'} + \frac{a_2}{(z-z')^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(z-z')^{n-1}}$$

in eine Function verwandelt, welche im Punkte O' endlich und stetig bleibt.

Wenn daher unter den Voraussetzungen des Art. 12 die Aenderung eintritt, dass bei unendlicher Annäherung von O an einen Punkt O' im Innern der Fläche T die Function w unendlich gross wird, so ist die Ordnung dieses unendlich Grossen (eine im verkehrten Verhältnisse der Entfernung wachsende Grösse als ein unendlich Grosses erster Ordnung betrachtet) wenn sie endlich ist, nothwendig eine ganze Zahl; und ist diese Zahl $= m$, so kann die Function w durch Hinzufügung einer Function, welche $2m$ willkürliche Constanten enthält, in eine in diesem Punkte O' stetige verwandelt werden.

Anm. Wir betrachten eine Function als Eine willkürliche Constante enthaltend, wenn die möglichen Arten, sie zu bestimmen, ein stetiges Gebiet von Einer Dimension umfassen.

14.

Die im Art. 12 und 13 in Bezug auf die Fläche T gemachten Beschränkungen sind für die Gültigkeit der gewonnenen Resultate nicht wesentlich. Offenbar kann man jeden Punkt im Innern einer beliebigen Fläche mit einem Stücke derselben umgeben, welches die dort vorausgesetzten Eigenschaften besitzt, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wo dieser Punkt ein Windungspunkt der Fläche ist.

Um diesen Fall zu untersuchen, denken wir uns die Fläche T oder ein beliebiges Stück derselben, welches einen Windungspunkt $(n-1)$ter Ordnung O', wo $z = z' = x' + y' i$ sei, enthält, mittelst der Function

$\zeta = (z - z')^{\frac{1}{n}}$ auf einer andern Ebene A abgebildet, d. h. wir denken uns den Werth der Function $\zeta = \xi + \eta i$ im Punkte O durch einen Punkt Θ, dessen rechtwinklige Coordinaten ξ, η sind, in dieser Ebene vertreten, und betrachten Θ als Bild des Punktes O. Auf diesem Wege erhält man als Abbildung dieses Theils der Fläche T eine zusammenhängende über A ausgebreitete Fläche, die im Punkte Θ', dem Bilde des Punktes O', keinen Windungspunkt hat, wie sogleich gezeigt werden soll.

Zur Fixirung der Vorstellungen denke man sich um den Punkt O in der Ebene A mit dem Halbmesser R einen Kreis beschrieben und parallel mit der x-Axe einen Durchmesser gezogen, wo also $z - z'$ reelle Werthe annehmen wird. Das durch diesen Kreis ausgeschiedene den Windungspunkt umgebende Stück der Fläche T wird dann zu beiden Seiten des Durchmessers in n, wenn R hinreichend klein gewählt wird, abgesondert verlaufende halbkreisförmige Flächenstücke zerfallen. Wir bezeichnen auf derjenigen Seite des Durchmessers, wo $y - y'$ positiv ist, diese Flächenstücke durch $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$, auf der entgegengesetzten Seite durch $a_1', a_2' \ldots\ldots a_n'$, und nehmen an, dass für negative Werthe von $z - z'$ $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ der Reihe nach mit $a_1', a_2' \ldots\ldots a_n'$, für positive dagegen mit $a_n', a_1' \ldots\ldots a_{n-1}'$ verbunden seien, so dass ein den Punkt O' (im erforderlichen Sinne) umkreisender Punkt der Reihe nach die Flächen $a_1, a_1', a_2, a_2' \ldots\ldots a_n, a_n'$ durchläuft und durch a_n' wieder in a_1 zurückgelangt, welche Annahme offenbar gestattet ist. Führen wir nun für beide Ebenen Polarcoordinaten ein, indem wir $z - z' = \varrho e^{\varphi i}$, $\zeta = \sigma e^{\psi i}$ setzen, und wählen zur Abbildung des Flächenstücks a_1 denjenigen Werth von

$(z - z')^{\frac{1}{n}} = \varrho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\varphi}{n} i}$, welchen letzterer Ausdruck unter der Annahme $0 \overline{\gtrless} \varphi \overline{\gtrless} \pi$ erhält, so wird für alle Punkte von a_1 $\sigma \overline{\gtrless} R^{\frac{1}{n}}$ und $0 \overline{\gtrless} \psi \overline{\gtrless} \frac{\pi}{n}$; die Bilder derselben in der Ebene A fallen also sämmtlich in einen von $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{\pi}{n}$ sich erstreckenden Sector eines um Θ' mit dem Radius $R^{\frac{1}{n}}$ beschriebenen Kreises, und zwar entspricht jedem Punkte von a_1 Ein zugleich mit demselben stetig fortrückender Punkt dieses Sectors und umgekehrt, woraus folgt, dass die Abbildung der Fläche a_1 eine zusammenhängende einfach über diesen Sector ausgebreitete Fläche ist. Auf ähnliche Art erhält man für die Fläche a_1' als Abbildung einen von $\psi = \frac{\pi}{n}$ bis $\psi = \frac{2\pi}{n}$, für a_2 einen von $\psi = \frac{2\pi}{n}$ bis

$\psi = \frac{3\pi}{n}$, endlich für a_n' einen von $\psi = \frac{2n-1}{n}\pi$ bis $\psi = 2\pi$ sich erstreckenden Sector, wenn man φ für jeden Punkt dieser Flächen der Reihe nach zwischen π und 2π, 2π und $3\pi \ldots\ldots (2n-1)\pi$ und $2n\pi$ wählt, was immer und nur auf eine Weise möglich ist. Diese Sectoren schliessen sich aber in derselben Folge an einander, wie die Flächen a und a', und zwar so, dass den hier zusammenstossenden Punkten auch dort zusammenstossende Punkte entsprechen; sie können daher zu einer zusammenhängenden Abbildung eines den Punkt O' einschliessenden Stückes der Fläche T zusammengefügt werden, und diese Abbildung ist offenbar eine über die Ebene A einfach ausgebreitete Fläche.

Eine veränderliche Grösse, die für jeden Punkt O einen bestimmten Werth hat, hat dies auch für jeden Punkt Θ und umgekehrt, da jedem O nur ein Θ und jedem Θ nur ein O entspricht; ist sie ferner eine Function von z, so ist sie dies auch von ζ, indem, wenn $\frac{dw}{dz}$ von dz, auch $\frac{dw}{d\zeta}$ von $d\zeta$ unabhängig ist, und umgekehrt. Es ergiebt sich hieraus, dass auf alle Functionen w von z auch im Windungspunkte O' die Sätze der Art. 12 und 13 angewandt werden können, wenn man sie als Functionen von $(z - z')^{\frac{1}{n}}$ betrachtet. Dies liefert folgenden Satz:

Wenn eine Function w von z bei unendlicher Annäherung von O an einen Windungspunkt $(n-1)$ter Ordnung O' unendlich wird, so ist dieses unendlich Grosse nothwendig von gleicher Ordnung mit einer Potenz der Entfernung, deren Exponent ein Vielfaches von $\frac{1}{n}$ ist, und kann, wenn dieser Exponent $= -\frac{m}{n}$ ist, durch Hinzufügung eines Ausdrucks von der Form

$$\frac{a_1}{(z-z')^{\frac{1}{n}}} + \frac{a_2}{(z-z')^{\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{a_m}{(z-z')^{\frac{m}{n}}},$$

wo $a_1, a_2 \ldots\ldots a_m$ willkürliche complexe Grössen sind, in eine im Punkte O' stetige verwandelt werden.

Dieser Satz enthält als Corollar, dass die Function w im Punkte O' stetig ist, wenn $(z - z')^{\frac{1}{n}} w$ bei unendlicher Annäherung des Punktes O an O' unendlich klein wird.

15.

Denken wir uns jetzt eine Function von z, welche für jeden Punkt O der beliebig über A ausgebreiteten Fläche T einen bestimmten Werth hat und nicht überall constant ist, geometrisch dargestellt, so dass ihr Werth $w = u + vi$ im Punkte O durch einen Punkt Q der Ebene B vertreten wird, dessen rechtwinklige Coordinaten u, v sind, so ergiebt sich Folgendes:

I. Die Gesammtheit der Punkte Q kann betrachtet werden als eine Fläche S bildend, in welcher jedem Punkte Ein bestimmter mit ihm stetig in T fortrückender Punkt O entspricht.

Um dieses zu beweisen, ist offenbar nur der Nachweis erforderlich, dass die Lage des Punktes Q mit der des Punktes O sich allemal (und zwar, allgemein zu reden, stetig) ändert. Dieser ist in dem Satze enthalten:

Eine Function $w = u + vi$ von z kann nicht längs einer Linie constant sein, wenn sie nicht überall constant ist.

Beweis: Hätte w längs einer Linie einen constanten Werth $a + bi$ so wären $u - a$ und $\frac{\partial(u-a)}{\partial p}$, welches $= -\frac{\partial v}{\partial s}$, für diese Linie und

$$\frac{\partial^2(u-a)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u-a)}{\partial y^2}$$

überall $= 0$; es müsste also nach Art. 11, I. $u - a$ und folglich, da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

auch $v - b$ überall $= 0$ sein, gegen die Voraussetzung.

II. In Folge der in I. gemachten Voraussetzung kann zwischen den Theilen von S nicht ein Zusammenhang Statt finden ohne einen Zusammenhang der entsprechenden Theile von T; umgekehrt kann überall, wo in T Zusammenhang Statt findet und w stetig ist, der Fläche S ein entsprechender Zusammenhang beigelegt werden.

Dieses vorausgesetzt entspricht die Begrenzung von S einestheils der Begrenzung von T, anderntheils den Unstetigkeitsstellen; ihre inneren Theile aber sind, einzelne Punkte ausgenommen, überall schlicht über B ausgebreitet, d. h. es findet nirgends eine Spaltung in auf einander liegende Theile und nirgends eine Umfaltung Statt.

Ersteres könnte, da T überall einen entsprechenden Zusammenhang besitzt, offenbar nur eintreten, wenn in T eine Spaltung vorkäme — der Annahme zuwider —; Letzteres soll sogleich bewiesen werden.

Wir beweisen zuvörderst, dass ein Punkt Q', wo $\frac{dw}{dz}$ endlich ist, nicht in einer Falte der Fläche S liegen kann.

In der That, umgeben wir den Punkt O', welcher Q' entspricht, mit einem Stücke der Fläche T von beliebiger Gestalt und unbestimmten Dimensionen, so müssen (nach Art. 3) die Dimensionen desselben stets so klein angenommen werden können, dass die Gestalt des entsprechenden Theils von S beliebig wenig abweicht, und folglich so klein, dass die Begrenzung desselben aus der Ebene B ein Q' einschliessendes Stück ausscheidet. Dies aber ist unmöglich, wenn Q' in einer Falte der Fläche S liegt.

Nun kann $\frac{dw}{dz}$, als Function von z, nach I. nur in einzelnen Punkten $= 0$, und, da w in den in Betracht kommenden Punkten von T stetig ist, nur in den Windungspunkten dieser Fläche unendlich werden; folglich etc. w. z. b. w.

III. Die Fläche S ist folglich eine Fläche, für welche die im Art. 5 für T gemachten Voraussetzungen zutreffen; und in dieser Fläche hat für jeden Punkt Q die unbestimmte Grösse z Einen bestimmten Werth, welcher sich mit der Lage von Q stetig und so ändert, dass $\frac{dz}{dw}$ von der Richtung der Ortsänderung unabhängig ist. Es bildet daher in dem früher festgelegten Sinne z eine stetige Function der veränderlichen complexen Grösse w für das durch S dargestellte Grössengebiet.

Hieraus folgt ferner:

Sind O' und Q' zwei entsprechende innere Punkte der Flächen T und S und in denselben $z = z'$, $w = w'$, so nähert sich, wenn keiner von ihnen ein Windungspunkt ist, bei unendlicher Annäherung von O an O' $\frac{w - w'}{z - z'}$ einer endlichen Grenze, und die Abbildung ist daselbst eine in den kleinsten Theilen ähnliche; wenn aber Q' ein Windungspunkt $(n-1)$ter, O' ein Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung ist, so nähert sich $\frac{(w-w')^{\frac{1}{n}}}{(z-z')^{\frac{1}{m}}}$ bei unendlicher Annäherung von O an O' einer endlichen Grenze, und für die anstossenden Flächentheile findet eine Abbildungsart Statt, die sich leicht aus Art. 14 ergiebt.

* * *

16. (5)

Lehrsatz. Sind α und β zwei beliebige Functionen von x, y, für welche das Integral

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$

durch alle Theile der beliebig über A ausgebreiteten Fläche T ausgedehnt einen endlichen Werth hat, so erhält das Integral bei Aenderung von α um stetige oder doch nur in einzelnen Punkten unstetige Functionen, die am Rande $=0$ sind, immer für eine dieser Functionen einen Minimumwerth und, wenn man durch Abänderung in einzelnen Punkten hebbare Unstetigkeiten ausschliesst, nur für Eine.

Wir bezeichnen durch λ eine unbestimmte stetige oder doch nur in einzelnen Punkten unstetige Function, welche am Rande $=0$ ist und für welche das Integral

$$L=\int\left(\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right)dT$$

über die ganze Fläche ausgedehnt einen endlichen Werth erhält, durch ω eine unbestimmte der Functionen $\alpha+\lambda$, endlich das über die ganze Fläche erstreckte Integral

$$\int\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$

durch Ω. Die Gesammtheit der Functionen λ bildet ein zusammenhängendes in sich abgeschlossenes Gebiet, indem jede dieser Functionen stetig in jede andere übergehen, sich aber nicht einer längs einer Linie unstetigen unendlich annähern kann, ohne dass L unendlich wird (Art. 17); für jedes λ erhält nun, $\omega=\alpha+\lambda$ gesetzt, Ω einen endlichen Werth, der mit L zugleich unendlich wird, sich mit der Gestalt von λ stetig ändert, aber nie unter Null herabsinken kann; folglich hat Ω wenigstens für Eine Gestalt der Function ω ein Minimum.

Um den zweiten Theil unseres Satzes zu beweisen, sei u eine der Functionen ω, welche Ω einen Minimumwerth ertheilt, h eine unbestimmte in der ganzen Fläche constante Grösse, so dass $u+h\lambda$ den der Function ω vorgeschriebenen Bedingungen genügt. Der Werth von Ω für $\omega=u+h\lambda$, welcher

$$\begin{aligned}&=\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT\\&+2h\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]dT\\&+h^2\int\left(\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right)dT=M+2Nh+Lh^2\quad\text{wird,}\end{aligned}$$

muss alsdann für jedes λ (nach dem Begriffe des Minimums) grösser als M werden, sobald h nur hinreichend klein genommen ist. Dies erfordert aber, dass für jedes λ $N=0$ sei; denn andernfalls würde

$$2Nh+Lh^2=Lh^2\left(1+\frac{2N}{Lh}\right)$$

negativ werden, wenn h dem N entgegengesetzt und abgesehen vom Zeichen $<\frac{2N}{L}$ angenommen würde. Der Werth von Ω für $\omega=u+\lambda$, in welcher Form offenbar alle möglichen Werthe von ω enthalten sind, wird daher $=M+L$, und folglich kann, da L wesentlich positiv ist, Ω für keine Gestalt der Function ω einen kleinern Werth erhalten, als für $\omega=u$.

Findet nun für eine andere u' der Functionen ω ein Minimumwerth M' von Ω Statt, so muss von diesem offenbar dasselbe gelten, man hat also $M'\geqq M$ und $M\geqq M'$, folglich $M=M'$. Bringt man aber u' auf die Form $u+\lambda'$, so erhält man für M' den Ausdruck $M+L'$, wenn L' den Werth von L für $\lambda=\lambda'$ bezeichnet, und die Gleichung $M=M'$ giebt $L'=0$. Dies ist nur möglich, wenn in allen Flächentheilen

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial\lambda'}{\partial y}=0$$

ist, und es hat daher, so weit λ' stetig ist, diese Function nothwendig einen constanten und folglich, da sie am Rande $=0$ und nicht längs einer Linie unstetig ist, höchstens in einzelnen Punkten einen von Null verschiedenen Werth. Zwei der Functionen ω, welche Ω einen Minimumwerth ertheilen, können also nur in einzelnen Punkten von einander verschieden sein, und wenn in der Function u alle durch Abänderung in einzelnen Punkten hebbaren Unstetigkeiten beseitigt werden, ist diese vollkommen bestimmt.

17.

Es soll jetzt der Beweis nachgeliefert werden, dass λ unbeschadet der Endlichkeit von L sich nicht einer längs einer Linie unstetigen Function γ unendlich annähern könne, d. h. wird die Function λ der Bedingung unterworfen, ausserhalb eines die Unstetigkeitslinie einschliessenden Flächentheils T' mit γ übereinzustimmen, so kann T' stets so klein angenommen werden, dass L grösser als eine beliebig gegebene Grösse C werden muss.

Wir bezeichnen, s und p in Bezug auf die Unstetigkeitslinie in der gewohnten Bedeutung genommen, für ein unbestimmtes s die Krümmung, eine auf der Seite der positiven p convexe als positiv betrachtet, durch $\varkappa$, den Werth von p an der Grenze von T' auf der positiven Seite durch p_1, auf der negativen Seite durch p_2 und die entsprechenden Werthe von γ durch γ_1 und γ_2. Betrachten wir nun irgend einen stetig gekrümmten Theil dieser Linie, so liefert der zwischen den Normalen in den Endpunkten enthaltene Theil von T', wenn er sich nicht bis zu den Krümmungsmittelpunkten erstreckt, zu L den Beitrag

$$\int ds \int_{p_2}^{p_1} dp\,(1-\varkappa p)\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)^2 \frac{1}{(1-\varkappa p)^2}\right];$$

der kleinste Werth des Ausdrucks

$$\int_{p_2}^{p_1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2 (1-\varkappa p)\,dp$$

bei den festen Grenzwerthen γ_1 und γ_2 von λ findet sich aber nach bekannten Regeln

$$= \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2 \varkappa}{\log(1-\varkappa p_2) - \log(1-\varkappa p_1)},$$

und folglich wird jener Beitrag nothwendig, wie auch λ innerhalb T' angenommen werden möge,

$$> \int \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2 \varkappa\, ds}{\log(1-\varkappa p_2) - \log(1-\varkappa p_1)}.$$

Die Function γ wäre für $p=0$ stetig, wenn der grösste Werth, den $(\gamma_1-\gamma_2)^2$ für $\pi_1 > p_1 > 0$ und $\pi_2 < p_2 < 0$ erhalten kann, mit $\pi_1 - \pi_2$ unendlich klein würde; wir können folglich für jeden Werth von s eine endliche Grösse m so annehmen, dass, wie klein auch $\pi_1 - \pi_2$ angenommen werden möge, stets innerhalb der durch $\pi_1 > p_1 \geqq 0$ und $\pi_2 < p_2 \overline{\overline{<}}\, 0$ (wo die Gleichheiten sich gegenseitig ausschliessen) ausgedrückten Grenzen Werthe von p_1 und p_2 enthalten sind, für welche $(\gamma_1-\gamma_2)^2 > m$ wird. Nehmen wir ferner unter den früheren Beschränkungen eine Gestalt von T' beliebig an, indem wir p_1 und p_2 bestimmte Werthe P_1 und P_2 beilegen, und bezeichnen den Werth des durch den in Betracht gezogenen Theil der Unstetigkeitslinie ausgedehnten Integrals

$$\int \frac{m \varkappa\, ds}{\log(1-\varkappa P_2) - \log(1-\varkappa P_1)}$$

durch a, so können wir offenbar

$$\int \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2 \varkappa\, ds}{\log(1-\varkappa p_2) - \log(1-\varkappa p_1)} > C$$

machen, indem wir p_1 und p_2 für jeden Werth von s so annehmen, dass den Ungleichheiten

$$p_1 < \frac{1-(1-\varkappa P_1)^{\frac{a}{C}}}{\varkappa},\quad p_2 > \frac{1-(1-\varkappa P_2)^{\frac{a}{C}}}{\varkappa} \text{ und } (\gamma_1-\gamma_2)^2 > m$$

genügt wird. Dies aber hat zur Folge, dass, wie auch λ innerhalb T' angenommen werden möge, der aus dem in Betracht gezogenen Stücke von T' stammende Theil von L und folglich um so mehr L selbst $> C$ wird, w. z. b. w. ([6])

18.

Nach Art. 16 haben wir für die dort festgelegte Function u und für irgend eine der Functionen λ

$$N = \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right] dT,$$

durch die ganze Fläche T ausgedehnt, $=0$. Aus dieser Gleichung sollen jetzt weitere Schlüsse gezogen werden.

Scheidet man aus der Fläche T ein die Unstetigkeitsstellen von u, β, λ einschliessendes Stück T' aus, so findet sich der von dem übrigen Stücke T'' herrührende Theil von N mit Hülfe der Art. 7, 8, wenn man $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\lambda$ für X und $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\lambda$ für Y setzt,

$$= -\int \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dT - \int \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s}\right) \lambda\, ds.$$

In Folge der der Function λ auferlegten Grenzbedingung wird der auf das mit T gemeinschaftliche Begrenzungsstück von T'' bezügliche Theil von

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s}\right) \lambda\, ds$$

gleich 0, so dass N betrachtet werden kann als zusammengesetzt aus dem Integral

$$-\int \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dT$$

in Bezug auf T'' und

$$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right] dT + \int \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s}\right) \lambda\, ds$$

in Bezug auf T'.

Offenbar würde nun, wenn $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in irgend einem Theile der Fläche T von 0 verschieden wäre, N ebenfalls einen von 0 verschiedenen Werth erhalten, sobald man λ, was frei steht, innerhalb T' gleich 0 und innerhalb T'' so wählte, dass $\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ überall dasselbe Zeichen hätte. Ist aber $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in allen Theilen von $T = 0$, so verschwindet der von T'' herrührende Bestandtheil von N für jedes λ, und die Bedingung $N = 0$ ergiebt dann, dass die auf die Unstetigkeitsstellen bezüglichen Bestandtheile $= 0$ werden.

Für die Functionen $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}$ haben wir daher, wenn wir erstere $= X$ und letztere $= Y$ setzen, nicht bloss allgemein zu reden die Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

sondern es wird auch durch die ganze Begrenzung irgend eines Theils von T erstreckt

$$\int \left(X \frac{\partial x}{\partial p} + Y \frac{\partial y}{\partial p} \right) ds = 0,$$

in so fern dieser Ausdruck überhaupt einen bestimmten Werth hat.

Zerlegen wir also (nach Art. 9, V) die Fläche T, wenn sie einen mehrfachen Zusammenhang besitzt, durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende T^*, so hat das Integral

$$-\int_{O_0}^{O} \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) ds$$

für jede im Innern von T^* von O_0 nach O gehende Linie denselben Werth und bildet, O_0 als fest gedacht, eine Function von x, y, welche in T^* überall eine stetige und längs eines Querschnitts beiderseits eine gleiche Aenderung erleidet. Diese Function ν zu β hinzugefügt, liefert uns eine Function $v = \beta + \nu$, von welcher der Differentialquotient $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ist.

Wir haben daher folgenden

Lehrsatz. Ist in einer zusammenhängenden, durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende T^* zerlegten Fläche T eine complexe Function $\alpha + \beta i$ von x, y gegeben, für welche

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT$$

durch die ganze Fläche ausgedehnt einen endlichen Werth hat, so kann sie immer und nur auf Eine Art in eine Function von z verwandelt werden durch Hinzufügung einer Function $\mu + \nu i$ von x, y, welche folgenden Bedingungen genügt:

1) μ ist am Rande $= 0$ oder doch nur in einzelnen Punkten davon verschieden, ν in einem Punkte beliebig gegeben,

2) die Aenderungen von μ sind in T, von ν in T^* nur in einzelnen Punkten und nur so unstetig, dass

$$\int \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right] dT \text{ und } \int \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 \right] dT$$

durch die ganze Fläche erstreckt endlich bleiben, und letztere längs der Querschnitte beiderseits gleich.

Die Zulänglichkeit der Bedingungen zur Bestimmung von $\mu + \nu i$ folgt daraus, dass μ, durch welches ν bis auf eine additive Constante bestimmt ist, stets zugleich ein Minimum des Integrals Ω liefert, da, $u = \alpha + \mu$ gesetzt, offenbar für jedes λ $N = 0$ wird; eine Eigenschaft, die nach Art. 16 nur Einer Function zukommen kann.

19.

Die Principien, welche dem Lehrsatze am Schlusse des vorigen Art. zu Grunde liegen, eröffnen den Weg, bestimmte Functionen einer veränderlichen complexen Grösse (unabhängig von einem Ausdrucke für dieselben) zu untersuchen.

Zur Orientirung auf diesem Felde wird ein Ueberschlag über den Umfang der zur Bestimmung einer solchen Function innerhalb eines gegebenen Grössengebiets erforderlichen Bedingungen dienen.

Halten wir uns zunächst an einen bestimmten Fall, so kann, wenn die über A ausgebreitete Fläche, durch welche dies Grössengebiet dargestellt wird, eine einfach zusammenhängende ist, die Function $w = u + vi$ von z folgenden Bedingungen gemäss bestimmt werden:

1) für u ist in allen Begrenzungspunkten ein Werth gegeben, der sich für eine unendlich kleine Ortsänderung um eine unendlich kleine Grösse von derselben Ordnung, übrigens aber beliebig ändert*);

2) der Werth von v ist in irgend einem Punkte beliebig gegeben;

3) die Function soll in allen Punkten endlich und stetig sein.

Durch diese Bedingungen aber ist sie vollkommen bestimmt.

In der That folgt dies aus dem Lehrsatze des vorigen Art., wenn man, was immer möglich sein wird, $\alpha + \beta i$ so bestimmt, dass α am Rande dem gegebenen Werth gleich und in der ganzen Fläche für jede unendlich kleine Ortsänderung die Aenderung von $\alpha + \beta i$ unendlich klein von derselben Ordnung ist.

*) An sich sind die Aenderungen dieses Werthes nur der Beschränkung unterworfen, nicht längs eines Theils der Begrenzung unstetig zu sein; eine weitere Beschränkung ist nur gemacht, um hier unnöthige Weitläufigkeiten zu vermeiden.

Es kann also, allgemein zu reden, u am Rande als eine ganz willkürliche Function von s gegeben werden, und dadurch ist v überall mit bestimmt; umgekehrt kann aber auch v in jedem Begrenzungspunkte beliebig angenommen werden, woraus dann der Werth von u folgt. Der Spielraum für die Wahl der Werthe von w am Rande umfasst daher eine Mannigfaltigkeit von Einer Dimension für jeden Begrenzungspunkt, und die vollständige Bestimmung derselben erfordert für jeden Begrenzungspunkt Eine Gleichung, wobei es indess nicht wesentlich sein wird, dass jede dieser Gleichungen sich auf den Werth Eines Gliedes in Einem Begrenzungspunkte allein bezieht. Es wird diese Bestimmung auch so geschehen können, dass für jeden Begrenzungspunkt Eine mit der Lage dieses Punktes ihre Form stetig ändernde, beide Glieder enthaltende Gleichung gegeben ist, oder für mehrere Theile der Begrenzung gleichzeitig so, dass jedem Punkte eines dieser Theile $n-1$ bestimmte Punkte, aus jedem der übrigen Theile einer, zugesellt und für je n solcher Punkte gemeinschaftlich n mit ihrer Lage stetig veränderliche Gleichungen gegeben sind. Diese Bedingungen, deren Gesammtheit eine stetige Mannigfaltigkeit bildet und welche durch Gleichungen zwischen willkürlichen Functionen ausgedrückt werden, werden aber, um für die Bestimmung einer im Innern des Grössengebiets überall stetigen Function zulässig und hinreichend zu sein, allgemein zu reden, noch einer Beschränkung oder Ergänzung durch einzelne Bedingungsgleichungen — Gleichungen für willkürliche Constanten — bedürfen, indem bis auf diese sich die Genauigkeit unserer Schätzung offenbar nicht erstreckt.

Für den Fall, wo das Gebiet der Veränderlichkeit der Grösse z durch eine mehrfach zusammenhängende Fläche dargestellt wird, erleiden diese Betrachtungen keine wesentliche Abänderung, indem die Anwendung des Lehrsatzes in Art. 18 eine bis auf die Aenderungen beim Ueberschreiten der Querschnitte ebenso wie vorhin beschaffene Function liefert — Aenderungen, welche $=0$ gemacht werden können, wenn die Grenzbedingungen eine der Anzahl der Querschnitte gleiche Anzahl verfügbarer Constanten enthalten.

Der Fall, wo im Innern längs einer Linie auf Stetigkeit verzichtet wird, ordnet sich dem vorigen unter, wenn man diese Linie als einen Schnitt der Fläche betrachtet.

Wenn endlich in einem einzelnen Punkte eine Verletzung der Stetigkeit, also nach Art. 12 ein Unendlichwerden der Function, zugelassen wird, so kann unter Beibehaltung der sonstigen in unserm Anfangsfalle gemachten Voraussetzungen für diesen Punkt eine Function von z, nach deren Subtraction die zu bestimmende Function stetig

werden soll, beliebig gegeben werden; dadurch aber ist sie völlig bestimmt. Denn nimmt man die Grösse $\alpha + \beta i$ in einem beliebig kleinen um den Unstetigkeitspunkt beschriebenen Kreise gleich dieser gegebenen Function, übrigens aber den früheren Vorschriften gemäss an, so wird das Integral

$$\int\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right)dT$$

über diesen Kreis erstreckt $=0$, über den übrigen Theil erstreckt einer endlichen Grösse gleich, und man kann also den Lehrsatz des vorigen Art. anwenden, wodurch man eine Function mit den verlangten Eigenschaften erhält. Hieraus kann man mit Hülfe des Lehrsatzes im Art. 13 folgern, dass im Allgemeinen, wenn in einem einzelnen Unstetigkeitspunkte die Function unendlich gross von der Ordnung n werden darf, eine Anzahl von $2n$ Constanten verfügbar wird.

Geometrisch dargestellt liefert (nach Art. 15) eine Function w einer innerhalb eines gegebenen Grössengebiets von zwei Dimensionen veränderlichen complexen Grösse z von einer gegebenen A bedeckenden Fläche T ein ihr in den kleinsten Theilen, einzelne Punkte ausgenommen, ähnliches, B bedeckendes Abbild S. Die Bedingungen, welche so eben zur Bestimmung der Function hinreichend und nothwendig befunden worden sind, beziehen sich auf ihren Werth entweder in Begrenzungs- oder in Unstetigkeitspunkten; sie erscheinen also (Art. 15) sämmtlich als Bedingungen für die Lage der Begrenzung von S, und zwar geben sie für jeden Begrenzungspunkt Eine Bedingungsgleichung. Bezieht sich jede derselben nur auf Einen Begrenzungspunkt, so werden sie durch eine Schaar von Curven repräsentirt, von denen für jeden Begrenzungspunkt Eine den geometrischen Ort bildet. Werden zwei mit einander stetig fortrückende Begrenzungspunkte gemeinschaftlich zwei Bedingungsgleichungen unterworfen, so entsteht dadurch zwischen zwei Begrenzungstheilen eine solche Abhängigkeit, dass, wenn die Lage des einen willkürlich angenommen wird, die Lage des andern daraus folgt. Aehnlicher Weise ergiebt sich für andere Formen der Bedingungsgleichungen eine geometrische Bedeutung, was wir indess nicht weiter verfolgen wollen.

20.

Die Einführung der complexen Grössen in die Mathematik hat ihren Ursprung und nächsten Zweck in der Theorie einfacher*) durch

*) Wir betrachten hier als Elementaroperationen Addition und Subtraction, Multiplication und Division, Integration und Differentiation, und ein Abhängigkeits-

Grössenoperationen ausgedrückter Abhängigkeitsgesetze zwischen veränderlichen Grössen. Wendet man nämlich diese Abhängigkeitsgesetze in einem erweiterten Umfange an, indem man den veränderlichen Grössen, auf welche sie sich beziehen, complexe Werthe giebt, so tritt eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmässigkeit hervor. Die Fälle, in denen dies geschehen ist, umfassen zwar bis jetzt erst ein kleines Gebiet — sie lassen sich fast sämmtlich auf diejenigen Abhängigkeitsgesetze zwischen zwei veränderlichen Grössen zurückführen, wo die eine entweder eine algebraische*) Function der andern ist oder eine solche Function, deren Differentialquotient eine algebraische Function ist —, aber beinahe jeder Schritt, der hier gethan ist, hat nicht bloss den ohne Hülfe der complexen Grössen gewonnenen Resultaten eine einfachere, geschlossenere Gestalt gegeben, sondern auch zu neuen Entdeckungen die Bahn gebrochen, wozu die Geschichte der Untersuchungen über algebraische Functionen, Kreis- oder Exponentialfunctionen, elliptische und Abel'sche Functionen den Beleg liefert.

Es soll kurz angedeutet werden, was durch unsere Untersuchung für die Theorie solcher Functionen gewonnen ist.

Die bisherigen Methoden, diese Functionen zu behandeln, legten stets als Definition einen **Ausdruck** der Function zu Grunde, wodurch ihr Werth für **jeden** Werth ihres Arguments gegeben wurde; durch unsere Untersuchung ist gezeigt, dass, in Folge des allgemeinen Charakters einer Function einer veränderlichen complexen Grösse, in einer Definition dieser Art ein Theil der Bestimmungsstücke eine Folge der übrigen ist, und zwar ist der Umfang der Bestimmungsstücke auf die zur Bestimmung nothwendigen zurückgeführt worden. Dies vereinfacht die Behandlung derselben wesentlich. Um z. B. die Gleichheit zweier Ausdrücke derselben Function zu beweisen, musste man sonst den einen in den andern transformiren, d. h. zeigen, dass beide für jeden Werth der veränderlichen Grösse übereinstimmten; jetzt genügt der Nachweis ihrer Uebereinstimmung in einem weit geringern Umfange.

Eine Theorie dieser Functionen auf den hier gelieferten Grundlagen würde die Gestaltung der Function (d. h. ihren Werth für jeden Werth ihres Arguments) unabhängig von einer Bestimmungsweise derselben durch Grössenoperationen festlegen, indem zu dem allgemeinen Begriffe einer Function einer veränderlichen complexen Grösse nur die

gesetz als desto **einfacher**, durch je weniger Elementaroperationen die Abhängigkeit bedingt wird. In der That lassen sich durch eine endliche Anzahl dieser Operationen alle bis jetzt in der Analysis benutzten Functionen definiren.

*) D. h. wo zwischen beiden eine algebraische Gleichung Statt findet.

zur Bestimmung der Function nothwendigen Merkmale hinzugefügt würden, und dann erst zu den verschiedenen Ausdrücken deren die Function fähig ist übergehen. Der gemeinsame Charakter einer Gattung von Functionen, welche auf ähnliche Art durch Grössenoperationen ausgedrückt werden, stellt sich dann dar in der Form der ihnen auferlegten Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Wird z. B. das Gebiet der Veränderlichkeit der Grösse z über die ganze unendliche Ebene A einfach oder mehrfach erstreckt, und innerhalb derselben der Function nur in einzelnen Punkten eine Unstetigkeit, und zwar nur ein Unendlichwerden, dessen Ordnung endlich ist, gestattet (wobei für ein unendliches z diese Grösse selbst, für jeden endlichen Werth z' derselben aber $\frac{1}{z-z'}$ als ein unendlich Grosses erster Ordnung gilt), so ist die Function nothwendig algebraisch, und umgekehrt erfüllt diese Bedingung jede algebraische Function.

Die Ausführung dieser Theorie, welche, wie bemerkt, einfache durch Grössenoperationen bedingte Abhängigkeitsgesetze ins Licht zu setzen bestimmt ist, unterlassen wir indess jetzt, da wir die Betrachtung des Ausdruckes einer Function gegenwärtig ausschliessen.

Aus demselben Grunde befassen wir uns hier auch nicht damit, die Brauchbarkeit unserer Sätze als Grundlagen einer **allgemeinen** Theorie dieser Abhängigkeitsgesetze darzuthun, wozu der Beweis erfordert wird, dass der hier zu Grunde gelegte Begriff einer Function einer veränderlichen complexen Grösse mit dem einer durch Grössenoperationen ausdrückbaren Abhängigkeit*) völlig zusammenfällt. (7)

21.

Es wird jedoch zur Erläuterung unserer allgemeinen Sätze ein ausgeführtes Beispiel ihrer Anwendung von Nutzen sein.

Die im vorigen Artikel bezeichnete Anwendung derselben ist, obwohl die bei ihrer Aufstellung zunächst beabsichtigte, doch nur eine specielle. Denn wenn die Abhängigkeit durch eine endliche Anzahl der dort als Elementaroperationen betrachteten Grössenoperationen bedingt ist, so enthält die Function nur eine endliche Anzahl von Parametern, was für die Form eines Systems von einander unabhängiger Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen, die zu ihrer Bestimmung hin-

*) Es wird darunter jede durch eine endliche oder unendliche Anzahl der vier einfachsten Rechnungsoperationen, Addition und Subtraction, Multiplication und Division, ausdrückbare Abhängigkeit begriffen. Der Ausdruck Grössenoperationen soll (im Gegensatze zu Zahlenoperationen) solche Rechnungsoperationen andeuten, bei denen die Commensurabilität der Grössen nicht in Betracht kommt.

reichen, den Erfolg hat, dass unter ihnen längs einer Linie in jedem Punkte willkürlich zu bestimmende Bedingungen gar nicht vorkommen können. Für unsern jetzigen Zweck schien es daher geeigneter, nicht ein dorther entnommenes Beispiel zu wählen, sondern vielmehr ein solches, wo die Function der complexen Veränderlichen von einer willkürlichen Function abhängt.

Zur Veranschaulichung und bequemeren Fassung geben wir demselben die am Schlusse des Art. 19 gebrauchte geometrische Einkleidung. Es erscheint dann als eine Untersuchung über die Möglichkeit, von einer gegebenen Fläche ein zusammenhängendes in den kleinsten Theilen ähnliches Abbild zu liefern, dessen Gestalt gegeben ist, wo also in obiger Form ausgedrückt, für jeden Begrenzungspunkt des Abbildes eine Ortscurve, und zwar für alle dieselbe, ausserdem aber (Art. 5) der Sinn der Begrenzung und die Windungspunkte desselben gegeben sind. Wir beschränken uns auf die Lösung dieser Aufgabe in dem Falle, wo jedem Punkte der einen Fläche nur Ein Punkt der andern entsprechen soll und die Flächen einfach zusammenhängend sind, für welchen Fall sie in folgendem Lehrsatz enthalten ist.

Zwei gegebene einfach zusammenhängende ebene Flächen können stets so auf einander bezogen werden, dass jedem Punkte der einen Ein mit ihm stetig fortrückender Punkt der andern entspricht und ihre entsprechenden kleinsten Theile ähnlich sind; und zwar kann zu Einem innern Punkte und zu Einem Begrenzungspunkte der entsprechende beliebig gegeben werden; dadurch aber ist für alle Punkte die Beziehung bestimmt.

Wenn zwei Flächen T und R auf eine dritte S so bezogen sind, dass zwischen den entsprechenden kleinsten Theilen Aehnlichkeit Statt findet, so ergiebt sich daraus eine Beziehung zwischen den Flächen T und R, von welcher offenbar dasselbe gilt. Die Aufgabe, zwei beliebige Flächen auf einander so zu beziehen, dass Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen Statt findet, ist dadurch auf die zurückgeführt, jede beliebige Fläche durch Eine bestimmte in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden. Wir haben hiernach, wenn wir in der Ebene B um den Punkt, wo $w = 0$ ist, mit dem Radius 1 einen Kreis K beschreiben, um unsern Lehrsatz darzuthun, nur nöthig zu beweisen: Eine beliebige einfach zusammenhängende A bedeckende Fläche T kann durch den Kreis K stets zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet werden und zwar nur auf Eine Art so, dass dem Mittelpunkte ein beliebig gegebener innerer Punkt O_0 und einem beliebig gegebenen Punkte der Peripherie ein beliebig gegebener Begrenzungspunkt O' der Fläche T entspricht.

Wir bezeichnen die bestimmten Bedeutungen von z, Q für die Punkte O_0, O' durch entsprechende Indices und beschreiben in T um O_0 als Mittelpunkt einen beliebigen Kreis Θ, welcher sich nicht bis zur Begrenzung von T erstreckt und keinen Windungspunkt enthält. Führen wir Polarcoordinaten ein, indem wir $z - z_0 = re^{\varphi i}$ setzen, so wird die Function $\log(z - z_0) = \log r + \varphi i$. Der reelle Werth ändert sich daher im ganzen Kreise mit Ausnahme des Punktes O_0, wo er unendlich wird, stetig. Der imaginäre aber erhält, wenn überall unter den möglichen Werthen von φ der kleinste positive gewählt wird, längs des Radius, wo $z - z_0$ reelle positive Werthe annimmt, auf der einen Seite den Werth 0, auf der andern den Werth 2π, ändert sich aber dann in allen übrigen Punkten stetig. Offenbar kann dieser Radius durch eine ganz beliebige vom Mittelpunkte nach der Peripherie gezogene Linie l ersetzt werden, so dass die Function $\log(z - z_0)$ beim Uebertritt des Punktes O von der negativen (d. h. wo nach Art. 8 p negativ wird) auf die positive Seite dieser Linie eine plötzliche Verminderung um $2\pi i$ erleidet, übrigens aber sich mit dessen Lage im ganzen Kreise Θ stetig ändert. Nehmen wir nun die complexe Function $\alpha + \beta i$ von x, y im Kreise $\Theta = \log(z - z_0)$, ausserhalb desselben aber, indem wir l beliebig bis an den Rand verlängern, so an, dass sie

1) an der Peripherie von $\Theta = \log(z - z_0)$, am Rande von T bloss imaginär wird,
2) beim Uebertritt von der negativen auf die positive Seite der Linie l sich um $-2\pi i$, sonst aber bei jeder unendlich kleinen Ortsänderung um eine unendlich kleine Grösse von derselben Ordnung ändert,

was immer möglich sein wird, so erhält das Integral

$$\int\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right) dT,$$

über Θ ausgedehnt den Werth Null, über den ganzen übrigen Theil erstreckt einen endlichen Werth, und es kann daher $\alpha + \beta i$ durch Hinzufügung einer bis auf einen bloss imaginären constanten Rest bestimmten stetigen Function von x, y, welche am Rande bloss imaginär ist, in eine Function $t = m + ni$ von z verwandelt werden. Der reelle Theil m dieser Function wird am Rande $= 0$, im Punkte $O_0 = -\infty$ und ändert sich im ganzen übrigen T stetig. Für jeden zwischen 0 und $-\infty$ liegenden Werth a von m zerfällt daher T durch eine Linie, wo $m = a$ ist, in Theile, wo $m < a$ ist und die O_0 im Innern enthalten, einerseits und andererseits in Theile, wo $m > a$ ist und deren

Begrenzung theils durch den Rand von T, theils durch Linien, wo $m = a$ ist, gebildet wird. Die Ordnung des Zusammenhangs der Fläche T wird durch diese Zerfällung entweder nicht geändert oder erniedrigt, die Fläche zerfällt daher, da diese Ordnung $= -1$ ist, entweder in zwei Stücke von der Ordnung des Zusammenhangs 0 und -1, oder in mehr als zwei Stücke. Letzteres aber ist unmöglich, weil dann wenigstens in Einem dieser Stücke m überall endlich und stetig und in allen Theilen der Begrenzung constant sein müsste, folglich entweder in einem Flächentheil einen constanten Werth, oder irgendwo — in einem Punkte oder längs einer Linie — einen Maximum- oder Minimumwerth haben müsste, gegen Art. 11, III. Die Punkte, wo m constant ist, bilden also in sich zurücklaufende allenthalben einfache Linien, welche ein den Punkt O_0 einschliessendes Stück begrenzen, und zwar nimmt m nach Innen zu nothwendig ab, woraus folgt, dass bei einem positiven Umlaufe (wo nach Art. 8 s wächst) n soweit es stetig ist, stets zunimmt, und also, da es nur beim Uebertritt von der negativen auf die positive Seite der Linie l eine plötzliche Aenderung um -2π*) erleidet, jedem Werth zwischen 0 und 2π Einmal von einem Vielfachen von 2π abgesehen gleich wird. Setzen wir nun $e^t = w$, so werden e^m und n Polarcoordinaten des Punktes Q in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises K. Die Gesammtheit der Punkte Q bildet dann offenbar eine über K allenthalben einfach ausgebreitete Fläche S; der Punkt Q_0 derselben fällt auf den Mittelpunkt des Kreises; der Punkt Q' aber kann vermittelst der in n noch verfügbaren Constante auf einen beliebig gegebenen Punkt der Peripherie gerückt werden, w. z. b. w.

In dem Falle, wo der Punkt O_0 ein Windungspunkt $(n-1)$ter Ordnung ist, gelangt man, wenn nur $\log(z - z_0)$ durch $\frac{1}{n}\log(z - z_0)$ ersetzt wird, durch ganz ähnliche Schlüsse zum Ziele, deren weitere Ausführung man indess aus Art. 14 leicht ergänzen wird.

22.

Die vollständige Durchführung der Untersuchung des vorigen Artikels für den allgemeinern Fall, wo Einem Punkte der einen Fläche

*) Da die Linie l von einem im Innern des Stücks gelegenen Punkte bis zu einem äussern führt, so muss sie, wenn sie dessen Begrenzung mehrmals schneidet, Einmal mehr von Innen nach Aussen, als von Aussen nach Innen gehen, und die Summe der plötzlichen Aenderungen von n während eines positiven Umlaufs ist daher stets $= -2\pi$.

mehrere Punkte der andern entsprechen sollen, und ein einfacher Zusammenhang für dieselben nicht vorausgesetzt wird, unterlassen wir hier, zumal da, aus geometrischem Gesichtspunkte aufgefasst, unsere ganze Untersuchung sich in einer allgemeinern Gestalt hätte führen lassen. Die Beschränkung auf ebene, einzelne Punkte ausgenommen, schlichte Flächen, ist nämlich für dieselbe nicht wesentlich; vielmehr gestattet die Aufgabe, eine beliebig gegebene Fläche auf einer andern beliebig gegebenen in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden, eine ganz ähnliche Behandlung. Wir begnügen uns, hierüber auf zwei Gauss'sche Abhandlungen, die zu Art. 3 citirte und die disquis. gen. circa superf. art. 13, zu verweisen.

Inhalt.*)

*) Diese Inhaltsübersicht rührt fast vollständig von Riemann her.

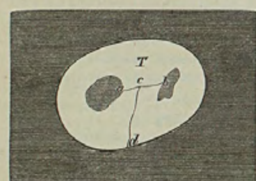
Anmerkungen.

(1) (zu Seite 3.) In Riemann's Papieren findet sich der folgende an diese Stelle gehörige Zusatz:

„Unter dem Ausdruck: die Grösse w ändert sich stetig mit z zwischen den Grenzen $z = a$ und $z = b$ verstehen wir: in diesem Intervall entspricht jeder unendlich kleinen Aenderung von z eine unendlich kleine Aenderung von w oder, greiflicher ausgedrückt: für eine beliebig gegebene Grösse ε lässt sich stets die Grösse α so annehmen, dass innerhalb eines Intervalls für z, welches kleiner als α ist, der Unterschied zweier Werthe von w nie grösser als ε ist. Die Stetigkeit einer Function führt hiernach, auch wenn dies nicht besonders hervorgehoben ist, ihre beständige Endlichkeit mit sich."

(2) (zu Seite 8.) Wenn hier nicht ein Versehen vorliegt, so ist der Ausdruck „von der Linken zur Rechten" in einer der gewöhnlichen entgegengesetzten Bedeutung gebraucht, wonach der Sinn des Umkreisens vom Standpunkt eines im Mittelpunkt aufgestellten den kreisenden Punkt mit den Augen verfolgenden Beobachters beurtheilt wird.

(3) (zu Seite 18.) Zur Erläuterung dieser im Ausdruck etwas dunkeln Stelle kann folgendes Beispiel dienen:



In der beistehenden Figur ist T eine dreifach zusammenhängende Fläche. (ab) sei der erste Querschnitt q_1, (cd) der zweite q_2. Man hat hier drei verschiedene constante Werthdifferenzen der Function

$$Z = \int_{0_0}^{0} \left(Y \frac{\partial x}{\partial s} - X \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

zu unterscheiden. Diese seien: an der Strecke (ac): A, an der Strecke (cb): B, an der Strecke (cd): C. Durchläuft man also zuerst (cd), so kann hier C irgend einen Werth haben. Durchläuft man hierauf (bc), so kann hier B einen andern beliebigen Werth haben. An (ac) ist aber hiernach die constante Werthdifferenz A der Function Z völlig bestimmt, nämlich (wenn die Vorzeichen passend bestimmt werden) $A = B + C$. Auf ähnliche Weise schliesst man allgemein, dass, so oft beim Rückwärtsdurchlaufen des Querschnittsystems ein schon durchlaufener Querschnitt einmündet, die Aenderung, welche die constante Werthdifferenz der Function dadurch erfährt, vollkommen bestimmt ist.

(4) (zu Seite 20.) Die Formel

$$\int \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0$$

wird erhalten, wenn man in dem Integral

$$\int \left(u \frac{\partial u'}{\partial p} - u' \frac{\partial u}{\partial p} \right) ds$$

$u' = 1$ annimmt, wodurch es, über die Begrenzung eines Flächenstücks ausgedehnt, in dem u die Voraussetzungen des Art. 10 erfüllt, verschwindet.

(5) (zu Seite 30.) Das Beweisverfahren des Art. 16 wird von Riemann später (Theorie der Abel'schen Functionen, Abh. VI dieser Ausgabe Nr. 3 und Nr. 4, Art. 1) als Dirichlet'sches Princip bezeichnet (auf Grund Dirichlet'scher Vorlesungen). Auch Gauss wendet ähnliche Schlüsse an (Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte, Werke Bd. V). In späterer Zeit ist die Bündigkeit dieser Schlussweise angefochten worden; besonders wird, und mit Recht, die Evidenz der Existenz eines Minimums für das Integral Ω bestritten. Die Richtigkeit des Satzes selbst, der durch diesen Schluss bewiesen werden soll, der den functionentheoretischen Arbeiten von Riemann ihren eigenthümlich einfachen und allgemeinen Charakter verleiht, ist durch neuere Forschungen auf anderer Grundlage bewiesen. (Vgl. besonders die einschlagenden Arbeiten von H. A. Schwarz, Monatsberichte der Berliner Akademie, October 1870, Journal f. Mathematik Bd. 74, auch gesammelte Abhandlungen, und C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential, Leipzig 1877; Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, 2. Auflage, Leipzig 1884.)

(6) (zu Seite 33.) Die folgenden Bemerkungen sind fast wörtlich den in Riemann's handschriftlichem Nachlass gefundenen Entwürfen zu Art. 17 entnommen und dienen theils zur Erläuterung, theils zur Ergänzung der Untersuchung.

Von den Werthen P_1 und P_2 kann auch einer überall $= 0$ genommen werden, wenn nur T' eine endliche Breite behält, wodurch unser Beweis auf den Fall anwendbar wird, wo die Unstetigkeit längs eines Theils der Begrenzung einträte, oder durch Abänderung von γ längs einer Linie im Innern entstanden wäre. Für m ist deshalb nicht geradezu der kleinste Werth von $(\gamma_1 - \gamma_2)^2$ in dem angegebenen Intervall von p_1 und p_2 gesetzt, damit der Beweis auch auf den Fall anwendbar ist, wo γ unendlich viele Maxima und Minima, also z. B. in der Nähe der Unstetigkeitslinie den Werth $\sin \frac{1}{p}$, hätte.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass L über alle Grenzen wächst, wenn λ sich einer Function γ unbegrenzt nähert, die in einem Punkt O' so unstetig wird, dass in einem Theil einer mit dem Radius ϱ um O' beschriebenen Kreislinie $\varrho \frac{\partial \gamma}{\partial x}$, $\varrho \frac{\partial \gamma}{\partial y}$ für ein unendlich kleines ϱ sich einer endlichen Grenze nähern oder unendlich werden.

Es lässt sich in diesem Fall ein Werth R von ϱ so annehmen, dass unterhalb desselben

$$\varrho^2 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} \right)^2 \right] d\varphi$$

nicht 0 wird. Bezeichnen wir den kleinsten Werth dieser Grösse in diesem Intervall durch a, so wird der Beitrag eines zwischen $\varrho = R$ und $\varrho = r$ (wo $r < R$) enthaltenen Kreisringes zu L

$$\int_r^R d\varrho \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)^2\right] \varrho\, d\varphi > \int_r^R \frac{a}{\varrho}\, d\varrho > a\,(\log R - \log r)$$

und folglich, wenn man $r = Re^{-\frac{C}{a}}$ annimmt, $> C$. Wählt man also zur Begrenzung von T' einen Kreis, wo $\varrho < Re^{-\frac{C}{a}}$, so wird der aus dem übrigen T stammende Theil von L und folglich L selbst, wie auch λ im Innern des Kreises angenommen werden möge, $> C$.

(Diese Untersuchung bezieht sich zwar zunächst auf einen Punkt, der kein Windungspunkt und kein Begrenzungspunkt ist, erleidet aber eine wesentliche Aenderung nur für einen Begrenzungspunkt, wo die Fläche eine Spitze, d. h. ihre Begrenzung einen Rückkehrpunkt hat. Die Bestimmung eines Grades der Unstetigkeit, welchen λ nicht erreichen kann, beruht indess auch hier auf denselben Principien und wir begnügen uns daher mit der Andeutung dieses Falles.)

Es liefert also, wenn der Flächentheil, wo λ und γ verschieden sind, unendlich klein wird, im Fall einer Unstetigkeitslinie T' selbst, im Fall eines Unstetigkeitspunktes der übrige Theil von T einen unendlichen Beitrag zu L, und unsere Behauptung ist daher, wenn die Unstetigkeit den hier vorausgesetzten Grad erreicht, gerechtfertigt. Ihre Gültigkeit in diesem Umfang genügt für uns und in der That wird sie für leichtere Unstetigkeiten unrichtig, wie z. B. wenn γ in der Entfernung ϱ des Punktes O vom Unstetigkeitspunkt $= \left(\log \frac{1}{\varrho}\right)^{\mu}$ und $\mu < \frac{1}{2}$ ist. Wir geben daher dem ersten Theil des Satzes im Art. 16 folgende Beschränkung: Das Integral Ω hat, $\omega = \alpha + \lambda$ gesetzt, entweder für eine der Functionen λ ein Minimum, oder λ nimmt, während Ω sich einem kleinsten Grenzwerth nähert, doch nur in einzelnen Punkten eine Unstetigkeit an, bei welcher die Ordnung von $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$, wenn sie unendlich werden, die Einheit nicht erreicht.

Eine Unstetigkeit der Function ω, die durch Abänderung eines Werthes in einem Punkt hebbar ist, muss z. B. eintreten, wenn in der Fläche irgendwo ein Stich, also ein einzelner Begrenzungspunkt, wo $\lambda = 0$ sein müsste, angenommen würde.

(7) (zu Seite 39.) Spätere Untersuchungen haben dargethan, dass die Kraft analytischer Ausdrücke weiter reicht, als es nach diesem Ausspruch von Riemann den Anschein hat. Merkwürdige Beispiele hiervon hat zuerst Seidel gegeben; (Crelles Journal Bd. 73, S. 279), der unter anderem analytische Ausdrücke, die von z abhängen, aufgestellt hat, die in einem Kreis gleich einer beliebigen Function von z, ausserhalb $= 0$ sind, oder die überall mit Ausnahme einer Kreisperipherie $= 0$, auf der Kreisperipherie $= 1$ sind. Lässt man bestimmte Integrale zu, so kann man sogar noch weiter gehen und z. B. x oder y oder $\sqrt{x^2 + y^2}$ als Function von $z = x + yi$ darstellen.

Weierstrass hat gezeigt (zur Functionentheorie, Monatsberichte der Berliner Akademie, August 1880, auch in der Sammlung von Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin 1886), wie man unendliche Reihen finden kann, deren Glieder rationale Functionen von z sind, die in einer beliebigen Anzahl verschiedener Gebiete der Variablen z verschiedene beliebig gegebene Functionen von z darstellen.

II.

Ueber die Gesetze der Vertheilung von Spannungselectricität in ponderabeln Körpern, wenn diese nicht als vollkommene Leiter oder Nichtleiter, sondern als dem Enthalten von Spannungselectricität mit endlicher Kraft widerstrebend betrachtet werden.

(Amtlicher Bericht über die 31. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Göttingen im September 1854.*)

Mittelst der sinnreichen Werkzeuge für Spannungselectricität, welche Herr Prof. Kohlrausch in der gestrigen Sitzung dieser Section erwähnte, hat derselbe auch die Bildung des Rückstandes in der Leydener Flasche und in andern Apparaten zur Bindung von Electricität untersucht. Diese Erscheinung ist im Wesentlichen folgende: Wenn man eine Leydener Flasche, nachdem sie längere Zeit geladen gestanden hat, entladet und sie dann eine Zeit lang isolirt stehen lässt, so tritt nach einiger Zeit eine merkliche Ladung wieder auf. Sie führt zu der Annahme, dass bei der ersten Entladung nur ein Theil der geschiedenen Electricitätsmenge sich wieder vereinigte, ein Theil aber in der Flasche zurückblieb. Den ersten Theil nennt man die disponible Ladung, den zweiten den Rückstand. Die Genauigkeit der Messungen, welche Herr Prof. Kohlrausch über das Sinken der disponibeln Ladung und über das Wiederauftreten des Rückstandes angestellt hat, reizte mich, an derselben ein aus andern Gründen wahrscheinliches Gesetz zu prüfen, welches eine in der bisherigen Theorie der Spannungselectricität vorhandene Lücke ausfüllt.

Bekanntlich beziehen sich die mathematischen Untersuchungen über Spannungselectricität auf ihre Vertheilung in vollkommenen und völlig isolirten Leitern; man betrachtet also die ponderabeln Körper entweder als absolute Leiter oder als absolute Nichtleiter. Eine Folge davon ist, dass nach dieser Theorie sich beim Gleichgewicht die ge-

*) Vortrag gehalten am 21. Sept. 1854.

sammte Spannungselectricität nur an den Grenzflächen der Leiter und Isolatoren ansammelt. Zugestandenermassen aber ist dies eine blosse Fiction. In der Natur wird es weder einen Körper geben, in welchen durchaus keine Spannungselectricität eindringen kann, noch einen Körper, in welchem sich die gesammte Spannungselectricität auf eine mathematische Fläche zusammenziehen kann. Man muss vielmehr annehmen, dass die ponderabeln Körper dem Aufnehmen oder dem Enthalten von Spannungselectricität mit endlicher Kraft widerstreben, und zwar ist die Annahme, deren Consequenzen sich der Erfahrung gemäss zeigen, die, dass sie nicht dem electrisch Werden oder dem Aufnehmen von Spannungselectricität, sondern dem electrisch Sein oder dem Enthalten von Spannungselectricität widerstreben. Das Gesetz dieses Widerstrebens ist, je nach der dualistischen oder unitarischen Vorstellungsart, folgendes. Nach der dualistischen Vorstellungsart, nach welcher die Spannungselectricität der Ueberschuss der positiven Electricität über die negative ist, muss man in jedem Punkte des ponderabeln Körpers eine Ursache annehmen, welche mit einer der Dichtigkeit dieses Ueberschusses proportionalen Intensität die Dichtigkeit der Electricität gleichen Zeichens — derjenigen, welche im Ueberschuss vorhanden ist — zu vermindern und die der entgegengesetzten zu vermehren strebt. Nach der unitarischen Auffassungsweise, nach welcher die Spannungselectricität der Ueberschuss der in dem Körper enthaltenen Electricität über die ihm natürliche ist, muss man in jedem Punkte desselben eine Ursache annehmen, welche mit einer der Dichtigkeit dieses Ueberschusses proportionalen Intensität die Dichtigkeit der Electricität zu vermindern oder bei negativem Ueberschuss zu vermehren strebt. Ausser dieser Bewegungsursache hat man nun, wenn keine merklichen thermischen oder magnetischen oder voltainductorischen Wirkungen und Einflüsse stattfinden, und die ponderabeln Körper gegen einander ruhen, nur noch die dem Coulomb'schen Gesetz gemässe electromotorische Kraft in Rechnung zu ziehen. Unter denselben Umständen kann man für die Abhängigkeit der erfolgten Bewegung von den Bewegungsursachen Proportionalität zwischen electromotorischer Kraft und Stromintensität annehmen.

Um diese Bewegungsgesetze in Formeln auszudrücken, seien x, y, z rechtwinklige Coordinaten und im Punkte (x, y, z) zur Zeit t die Dichtigkeit der Spannungselectricität ϱ, und u der $4\pi^{\text{te}}$ Theil des Potentials der gesammten Spannungselectricität nach Gauss'scher Definition, nach welcher das Potential in einem bestimmten Punkte gleich ist dem Integral über sämmtliche Massen Spannungselectricität, jede dividirt durch die Entfernung von diesem Punkte. Die dem Coulomb'schen Gesetz

gemässe electromotorische Kraft ist dann, nach den Richtungen der drei Axen zerlegt, proportional

$$-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial z},$$

die von der Reaction des ponderabeln Körpers herrührende proportional

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \varrho}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \varrho}{\partial z}.$$

Die Componenten der electromotorischen Kraft können also gleich gesetzt werden

$$-\frac{\partial u}{\partial x}-\beta^2\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}-\beta^2\frac{\partial \varrho}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial z}-\beta^2\frac{\partial \varrho}{\partial z},$$

wo β^2 nur von der Natur des ponderabeln Körpers abhängt. Diesen sind nun die Componenten der Stromintensität proportional, sie sind also $=\alpha\xi, \alpha\eta, \alpha\zeta$, wenn man durch ξ, η, ζ die Componenten der Stromintensität und durch α eine von der Natur des ponderabeln Körpers abhängige Constante bezeichnet.

Verbindet man hiermit die phoronomische Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0,$$

welche man erhält, indem man die in das Raumelement $dx\,dy\,dz$ im Zeitelement dt einströmende Electricitätsmenge auf doppelte Weise ausdrückt, und die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\varrho,$$

welche aus dem Begriffe des Potentials folgt, so erhält man, indem man erstere mit α multiplicirt und für ξ, η, ζ ihre Werthe setzt, die Gleichung

$$\alpha\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\varrho-\beta^2\left\{\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2}\right\}=0.$$

Diese giebt für u eine partielle Differentialgleichung, welche in Bezug auf t vom ersten, in Bezug auf die Raumcoordinaten vom vierten Grade ist, und um von einem bestimmten Zeitpunkte an u innerhalb des ponderabeln Körpers allenthalben vollständig zu bestimmen, werden ausser dieser Gleichung in jedem Punkte desselben Eine Bedingung für die Anfangszeit und für die Folge in jedem Oberflächenpunkte zwei Bedingungen erforderlich sein.

Ich werde nun die Consequenzen dieser Gesetze in einigen besonderen Fällen mit der Erfahrung vergleichen.

Für das Gleichgewicht (in einem System isolirter Leiter) ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \beta^2 \frac{\partial \varrho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \beta^2 \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0$$

oder

$$u + \beta^2 \varrho = \text{Const.},$$

oder, da

$$-\varrho = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$u - \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \text{Const.}$$

Für die Stromausgleichung oder den Beharrungszustand der Vertheilung (im Schliessungsbogen constanter Ketten) ist

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

oder

$$\varrho - \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Wenn nun die Länge β gegen die Dimensionen des ponderabeln Körpers sehr klein ist, so nimmt u — Const. im erstern Falle und ϱ im zweiten von der Oberfläche ab sehr schnell ab und ist im Innern überall sehr klein, und zwar ändern sich diese Grössen mit dem Abstande p von der Oberfläche nahe wie $e^{-\frac{p}{\beta}}$. Dieser Fall wird bei den metallischen Leitern angenommen werden müssen; wird $\beta = 0$ gesetzt, so erhält man die bekannten Formeln für vollkommene Leiter.

Bei der Anwendung dieser Gesetze auf die Rückstandsbildung in der Leydener Flasche musste ich, da Angaben über die Dimensionen der Apparate fehlten, annehmen, dass die Dimensionen derselben gegen den Abstand der Belegungen als unendlich gross betrachtet werden dürften. Mit der Ausführung der Rechnung wage ich die verehrten Anwesenden nicht zu ermüden und begnüge mich das Resultat derselben anzugeben.

Aus den Messungen des Herrn Prof. Kohlrausch hatte sich ergeben, dass die disponible Ladung, als Function der Zeit betrachtet, nahe durch eine Parabel dargestellt wird, dass jedoch der Parameter der Parabel, welche sich der Ladungscurve am nächsten anschliesst, langsam abnimmt, so dass wenn man die anfängliche Ladung durch L_0, die zur Zeit t durch L_t bezeichnet, $\frac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}}$ eine Grösse ist, welche mit wachsendem t allmählich abnimmt.

Dasselbe ergab sich auch aus der Rechnung, wenn angenommen wurde, dass sowohl α als β^2 beim Glase, wie dies von vorn herein zu erwarten war, sehr gross sei und als unendlich gross betrachtet

werden dürfe, während ihr Quotient endlich bleibt. Eine schärfere Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen habe ich nicht angestellt, namentlich aus dem Grunde, weil mir Angaben über die Dimensionen der Apparate und überhaupt alle Mittel fehlten, die wegen der Abweichungen von den Voraussetzungen der Rechnung nöthigen Correctionen zu bestimmen. Es wäre eine solche namentlich zur Bestimmung der electrischen Constanten des Glases zu wünschen. Doch halte ich das hier aufgestellte Gesetz für die Vertheilung der Spannungselectricität für vollkommen durch die Messungen des Herrn Prof. Kohlrausch bestätigt.

Ich darf wohl noch in der Kürze die Anwendung dieses Gesetzes auf einen andern Gegenstand besprechen.

Bekanntlich wird die Fortpflanzung der galvanischen Ströme in metallischen Leitern und die in Folge derselben stattfindende Stromausgleichung bei constanten oder langsam sich ändernden electromotorischen Kräften durch die dabei auftretende Spannungselectricität bewirkt. Dieser Vorgang ist wegen seiner ungemein kurzen Dauer und der hinzukommenden thermischen und magnetischen Wirkungen nur in seinen Resultaten der experimentalen Forschung zugänglich, und die einzigen experimentellen Bestimmungen, welche wir darüber haben, sind die Messungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Telegraphendrähten und die Ohm'schen Gesetze der Stromausgleichung. Eine genauere Analyse der Ohm'schen Gesetze führt indess ebenfalls zu der hier gemachten Annahme, und ich wurde in der That dadurch zuerst auf sie geführt.

Ohm bestimmt die Stromvertheilung bei der Stromausgleichung durch folgende zwei Bedingungen:

1) Um die den wirklich erfolgten Stromintensitäten proportionalen electromotorischen Kräfte zu erhalten, muss man zu den äussern electromotorischen Kräften Kräfte hinzufügen, welche die Differentialquotienten Einer Function des Orts, der Spannung, sind.

2) Bei der Stromausgleichung strömt in jeden Theil des ponderabeln Leiters eben so viel Electricität ein als aus.

Ohm glaubte nun, dass die Spannung, diese Function des Orts, von welcher die inneren electromotorischen Kräfte die Differentialquotienten sind, von der Spannungselectricität so abhinge, dass sie ihrer Dichtigkeit proportional sei, welche Annahme in der That das Zustandekommen beider Bedingungen erklärt. Aber es haben schon, fast gleichzeitig, Herr Prof. Weber*) und Kirchhoff**) darauf aufmerksam

*) Abhandlungen d. k. sächs. Ges. d. W. 1852, I. S. 293.

**) Poggendorff's Annalen. Bd. 79, S. 506.

gemacht, dass dann die Electricität im Gleichgewicht sein müsste, wenn sie den ponderabeln Körper mit gleichmässiger Dichtigkeit erfüllte, während sie doch der Erfahrung nach beim Gleichgewicht auf der Oberfläche vertheilt ist. Die Spannung muss eine Function sein, welche beim Gleichgewicht im ganzen Leiter constant ist, und also vielmehr dem Potential der Spannungselectricität proportional sein, und diese innern electromotorischen Kräfte sind mit den dem Coulomb-schen Gesetz gemässen identisch.

Diese Ansicht über die Spannung wurde auch von den meisten Forschern angenommen. Dabei aber blieb es ununtersucht, durch welche Ursachen bei der Stromausgleichung die zweite Bedingung hergestellt wurde, dass in jedem ponderabeln Körpertheil die Electricitätsmenge constant bleibe.

Nach der dualistischen Auffassung muss sowohl die positive als die negative Electricitätsmenge constant bleiben; dass kein merklicher Ueberschuss Einer Electricität sich bilde, scheint man, wenigstens so lange man auf die Grössenverhältnisse nicht näher eingeht, aus der Anziehung der entgegengesetzten Electricitäten nach dem Coulomb'schen Gesetz erklären zu können, und man muss dann noch eine Ursache, dass die neutrale Electricität in jedem Körpertheil constant bleibe, also einen Druck des Ponderabile auf sie, annehmen. Diese Annahme habe ich auf Anregung des Herrn Prof. Weber schon vor mehreren Jahren der Rechnung zu unterwerfen gesucht, ohne zu einem befriedigenden Resultat zu gelangen.

Nach unitarischer Auffassung bedarf es nur einer Ursache, welche die in einem ponderabeln Körpertheil enthaltene Electricitätsmenge constant zu erhalten strebt. Man wird so geradeswegs zu der obigen Annahme geführt, dass jeder ponderabele Körper Electricität von bestimmter Dichtigkeit zu besitzen strebt und sowohl einem grösseren als einem geringeren erfüllt Sein widerstrebt. Das Gesetz dieses Widerstrebens kann man so annehmen, wie es sich für das Glas durch die Erfahrung bestätigt hat.

Diese Betrachtungen führen also dazu, die ursprüngliche Franklin'sche Auffassung der electrischen Erscheinungen als diejenige anzunehmen, welche man für das tiefere Eindringen in den Zusammenhang dieser Erscheinungen unter sich und mit andern Erscheinungen zu Grunde zu legen und der weitern Aus- und Umbildung nach den Geboten und Winken der Erfahrung zu unterwerfen hat.

Möchten sie in dem Kreise bewährter Forscher, vor denen ich sie zu entwickeln die Ehre hatte, einer nähern Prüfung werth gefunden werden.

III.

Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe.

(Aus Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 95, 28. März 1855.)

Die Nobili'schen Farbenringe bilden ein schätzbares Mittel, die Gesetze der Stromverzweigung in einem durch Zersetzung leitenden Körper experimentell zu studiren. Die Erzeugungsweise dieser Ringe ist folgende. Man übergiesst eine Platte von Platin, vergoldetem Silber oder Neusilber mit einer Auflösung von Bleioxyd in concentrirter Kalilauge und lässt den Strom einer starken galvanischen Batterie durch die Spitze eines feinen in eine Glasröhre eingeschmolzenen Platindrahts in die Flüssigkeitsschicht ein- und durch die Platte austreten. Das Anion, Bleisuperoxyd nach Beetz, lagert sich dann auf der Metallplatte in einer zarten durchsichtigen Schicht ab, welche je nach der Entfernung vom Eintrittspunkte des Stroms verschiedene Dicke besitzt, so dass die Platte nach Entfernung der Flüssigkeit Newton'sche Farbenringe zeigt. Aus diesen Farbenringen lässt sich dann die relative Dicke der Schicht in verschiedenen Entfernungen bestimmen und hieraus mittelst des Faraday'schen Gesetzes, nach welchem die Menge der abgeschiedenen Substanz der durchgegangenen Electricitätsmenge allenthalben proportional sein muss, die Stromvertheilung beim Austritt aus der Flüssigkeit ableiten.

Der erste Versuch, die Stromvertheilung durch Rechnung zu bestimmen und das gefundene Resultat mit der Erfahrung zu vergleichen, ist von E. Becquerel gemacht worden. Derselbe hat vorausgesetzt, dass die Ausdehnung der Flüssigkeitsschicht gegen ihre Dicke als unendlich gross betrachtet werden dürfe, der Strom durch einen Punkt ihrer Oberfläche eintrete und sich nach den Ohm'schen Gesetzen in derselben ausbreite. Er glaubt nun bei diesen Voraussetzungen ohne merklichen Fehler die Strömungscurven als gerade Linien betrachten zu können und leitet aus dieser Annahme das Gesetz ab, dass die Dicke der niedergeschlagenen Schicht dem Abstande vom Eintrittspunkte umgekehrt proportional sein müsste, welches Gesetz er experimentell bestätigt habe.

Herr Du-Bois-Reymond hat dagegen in einem vor der physikalischen Gesellschaft zu Berlin gehaltenen Vortrage gezeigt, dass bei Voraussetzung gerader Strömungslinien die Dicke der in ihrem Endpunkte abgeschiedenen Substanz vielmehr dem Cubus ihrer Länge umgekehrt proportional sich ergiebt und dadurch Herrn Beetz zu einer Reihe von dem Anschein nach bestätigenden Versuchen veranlasst, welche in Poggendorff's Annalen Bd. 71, S. 71 beschrieben sind und viel Vertrauen erwecken.

Die genaue Rechnung indessen lehrt, dass die Voraussetzung gerader Strömungslinien unzulässig ist und ein ganz falsches Resultat liefert. Allerdings sind die Strömungslinien, wenigstens bei grösserer Entfernung ihres Austrittspunktes (da sie zwischen zwei sehr nahen Parallel-Linien liegen und höchstens einen Wendepunkt besitzen), in dem mittleren Theile ihres Laufes in beträchtlicher Ausdehnung sehr wenig gekrümmt; hieraus aber darf man keineswegs schliessen, dass sie ohne merklichen Fehler durch gerade von ihrem Eintrittspunkte nach ihrem Austrittspunkte gehende Linien ersetzt werden können. Ich werde zunächst die bei genauer Rechnung aus den Voraussetzungen der Herren E. Becquerel und Du-Bois-Reymond fliessenden Folgerungen entwickeln und schliesslich auf die Versuche des Herrn Beetz zurückzukommen mir erlauben.

Ich nehme an, dass der Eintritt des Stromes in die durch zwei horizontale Ebenen begrenzte Flüssigkeitsschicht in einem Punkte stattfinde, und bezeichne für einen Punkt derselben den Horizontalabstand vom Einströmungspunkt durch r, die Höhe über der unteren Grenzfläche durch z, die Erhebung seiner Spannung über die Spannung an der oberen Seite dieser Grenzfläche durch u.[1] Ferner sei die Stärke des ganzen Stromes S, der specifische Leitungswiderstand der Flüssigkeit w, im Einströmungspunkt $z = \alpha$, an der Oberfläche $z = \beta$. Es muss nun u als Function von r und z bestimmt werden; die Stromintensität im Punkte $(r, 0)$, welcher nach dem Faraday'schen Gesetz die gesuchte Dicke der dort niedergeschlagenen Schicht proportional sein muss, ist dann gleich dem Werthe von $\frac{1}{w}\frac{\partial u}{\partial z}$ in diesem Punkte.

Wird zunächst vorausgesetzt, dass die Ausdehnung der Flüssigkeitsschicht gegen ihre Dicke als unendlich gross betrachtet werden dürfe, so sind die Bedingungen zur Bestimmung von u

(1) für $-\infty < r < \infty$, $0 < z < \beta$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

(2) für $-\infty < r < \infty$, $z = 0$, $\qquad u = 0;$

(3) für $-\infty < r < \infty$, $z = \beta$, $\qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$

(4) für $r = \pm\infty$, $0 < z < \beta$, $\qquad u$ endlich;

(5) für $r = 0$, $z = \alpha$,

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{wS}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{rr + (z-\alpha)^2}} \\ \text{oder} \quad &= \frac{wS}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{rr + (z-\alpha)^2}} \end{aligned}\right\} + \text{einer}$$

stetigen Function von r, z, je nachdem der Einströmungspunkt im Innern oder in der Oberfläche liegt.

Diesen Bedingungen genügt

$$u = \frac{Sw}{4\pi}\sum_{-\infty,\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta + \alpha)^2}}\right)$$

oder wenn man zur Vereinfachung $S = \frac{4\pi}{w}$ annimmt:

$$u = \sum_{-\infty,\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta + \alpha)^2}}\right).$$

Setzt man $u = a_1 \sin\frac{\pi z}{2\beta} + a_2 \sin 2\frac{\pi z}{2\beta} + a_3 \sin 3\frac{\pi z}{2\beta} + \cdots$, so wird für ein gerades n der Coefficient $a_n = 0$ und für ein ungerades

$$\beta a_n = \int_0^{2\beta}\sin n\frac{\pi t}{2\beta}\sum_{-\infty,\infty}(-1)^m\left(\frac{dt}{\sqrt{rr + (t + 2m\beta - \alpha)^2}}\right.$$
$$\left. - \frac{dt}{\sqrt{rr + (t + 2m\beta + \alpha)^2}}\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sin n\frac{\pi}{2\beta}(t+\alpha) - \sin n\frac{\pi}{2\beta}(t-\alpha)\right)\frac{dt}{\sqrt{rr + tt}}$$
$$= 2\sin n\frac{\pi\alpha}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\cos n\frac{\pi t}{2\beta}\frac{dt}{\sqrt{rr + tt}} = 2\sin n\frac{\pi\alpha}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{n\frac{\pi}{2\beta}ti}\,dt}{\sqrt{rr + tt}}.$$

In letzterem Integral kann statt $\int_{-\infty}^{\infty}$ auch $2\int_{ri}^{\infty i}$ geschrieben werden.

Führt man für t als Veränderliche tri ein, so erhält man

$$a_n = \frac{4 \sin n \frac{\pi}{2\beta} \alpha}{\beta} \int_1^\infty \frac{e^{-n \frac{\pi}{2\beta} rt} dt}{\sqrt{tt-1}}, \qquad (^2)$$

also

$$u = \Sigma \sin n \frac{\pi}{2\beta} z \frac{4 \sin n \frac{\pi}{2\beta} \alpha}{\beta} \int_1^\infty \frac{e^{-n \frac{\pi}{2\beta} rt} dt}{\sqrt{tt-1}},$$

über alle positiven ungeraden Werthe von n ausgedehnt.

Nimmt man an, dass die Flüssigkeit bei $r = c$ begrenzt sei und zwar beispielshalber durch einen Nichtleiter, so muss für $r = c$ $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ werden und also zu dem oben erhaltenen Werth von u, der durch u' bezeichnet werden möge, noch eine Function u'' hinzugefügt werden, welche folgenden Bedingungen genügt

(1) für $-c < r < c$, $0 < z < \beta$,

$$\frac{\partial^2 u''}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u''}{\partial r} + \frac{\partial^2 u''}{\partial z^2} = 0;$$

(2) für $-c < r < c$, $z = 0$, $\qquad u'' = 0;$

(3) für $-c < r < c$, $z = \beta$, $\qquad \frac{\partial u''}{\partial z} = 0;$

(4) für $r = \pm c$; $0 < z < \beta$, $\qquad \frac{\partial u''}{\partial r} = -\frac{\partial u'}{\partial r};$

und überall stetig ist.

Den Bedingungen (1) bis (3) zufolge muss u'' ebenfalls in der Form

$$b_1 \sin \frac{\pi}{2\beta} z + b_3 \sin 3 \frac{\pi}{2\beta} z + b_5 \sin 5 \frac{\pi}{2\beta} z + \cdots$$

darstellbar sein, und zwar fliesst aus (1) für b_n die Bedingung

$$\frac{d^2 b_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{db_n}{dr} - \frac{nn\pi\pi}{4\beta\beta} b_n = 0.$$

Eine particuläre Lösung dieser Gleichung ist, wie schon bekannt, $\int_1^\infty \frac{e^{-n \frac{\pi}{2\beta} rt} dt}{\sqrt{tt-1}}$; eine andere erhält man, wenn man dasselbe Integral zwischen -1 und 1 nimmt; die allgemeinste ist also, wenn c_n und γ_n Constanten bedeuten,

$$b_n = c_n \int_1^\infty \frac{e^{-n \frac{\pi}{2\beta} rt} dt}{\sqrt{tt-1}} + \gamma_n \int_{-1}^1 \frac{e^{-n \frac{\pi}{2\beta} rt} dt}{\sqrt{1-tt}}$$

oder wenn man

$$\int_1^\infty \frac{e^{-2qt} dt}{\sqrt{tt-1}} \text{ durch } f(q), \int_{-1}^1 \frac{e^{-2qt} dt}{\sqrt{1-tt}} \text{ durch } \varphi(q)$$

bezeichnet:

$$b_n = c_n f\left(n \frac{\pi}{4\beta} r\right) + \gamma_n \varphi\left(n \frac{\pi}{4\beta} r\right).$$

Die Entwicklung nach steigenden Potenzen von q giebt

$$f(q) = \sum_{0,\infty} \frac{q^{2m}}{m!\,m!} (\Psi(m) - \log q)$$

$$\varphi(q) = \pi \sum_{0,\infty} \frac{q^{2m}}{m!\,m!}; \qquad (^3)$$

es wird also $f(q)$ für $q = 0$ unendlich und damit u'' für $r = 0$ stetig bleibe, muss $c_n = 0$ sein; γ_n ergiebt sich dann aus (4) gleich

$$-\frac{4 \sin n \frac{\pi}{2\beta} \alpha}{\beta} \frac{f'\left(n \frac{\pi}{4\beta} c\right)}{\varphi'\left(n \frac{\pi}{4\beta} c\right)},$$

mithin

$$u = \Sigma^n \sin n \frac{\pi}{2\beta} z \frac{4 \sin n \frac{\pi}{2\beta} \alpha}{\beta} \left\{ f\left(n \frac{\pi}{4\beta} r\right) - \varphi\left(n \frac{\pi}{4\beta} r\right) \frac{f'\left(n \frac{\pi}{4\beta} c\right)}{\varphi'\left(n \frac{\pi}{4\beta} c\right)} \right\},$$

über alle positiven ungeraden Werthe von n ausgedehnt.

Zur Berechnung von $f(q)$ und $\varphi(q)$ können für grosse Werthe von q die halbconvergenten Reihen

$$f(q) = e^{-2q} \sqrt{\frac{\pi}{4q}} \sum_{m < 4q+1} (-1)^m \frac{(1 \,.\, 3 \ldots \overline{2m-1})^2}{m!\,(16q)^m},$$

$$\varphi(q) = e^{2q} \sqrt{\frac{\pi}{4q}} \sum_{m < 4q+1} \frac{(1 \,.\, 3 \ldots \overline{2m-1})^2}{m!\,(16q)^m} \qquad (^4)$$

benutzt werden, welche indess ihren Werth nur bis auf Bruchtheile von der Ordnung der Grösse e^{-4q} geben; genügt diese Genauigkeit nicht, so ist es wohl am zweckmässigsten die Entwicklungen nach steigenden Potenzen von q anzuwenden.

Für hinreichend grosse Werthe von $\frac{r}{\beta}$ erhält man also mit Vernachlässigung von Grössen von der Ordnung der Grösse $e^{-3 \frac{\pi}{2\beta} r}$

$$u = \sin\frac{\pi z}{2\beta}\,\frac{4\sin\frac{\pi\alpha}{2\beta}}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{r}}\left\{e^{-\frac{\pi r}{2\beta}}\sum\frac{(1\,.\,3\ldots\overline{2m-1})^2}{m!}\left(-\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m\right.$$

$$-\sum\frac{(1\,.\,3\ldots\overline{2m-1})^2}{m!}\left(\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m e^{\frac{\pi}{2\beta}(r-2c)}\times$$

$$\left.\frac{\sum\frac{(1\,.\,3\ldots\overline{2m-1})^2\,(2m+1)}{m!\,(2m-1)}\left(-\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}{\sum\frac{(1\,.\,3\ldots\overline{2m-1})^2\,(2m+1)}{m!\,(2m-1)}\left(\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}\right\}$$

und die Dicke der Schicht proportional $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$ oder proportional

$$\frac{e^{-\frac{\pi r}{2\beta}}}{\sqrt{r}}\sum\frac{(1\,.\,3\ldots\overline{2m-1})^2}{m!}\left(-\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m$$

$$-\frac{e^{\frac{\pi}{2\beta}(r-2c)}}{\sqrt{r}}\sum\frac{(1\,.\,3\ldots\overline{2m-1})^2}{m!}\left(\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m\times$$

$$\frac{\sum\frac{(1\,.\,3\ldots\overline{2m-1})^2\,(2m+1)}{m!\,(2m-1)}\left(-\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}{\sum\frac{(1\,.\,3\ldots\overline{2m-1})^2\,(2m+1)}{m!\,(2m-1)}\left(\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}.$$

Dieses Resultat bleibt im Allgemeinen auch richtig, wenn statt des Einströmungspunktes eine beliebige Umdrehungsfläche als Kathode angenommen wird; denn für Werthe von r zwischen c und demjenigen Werthe, bis zu welchem die Bedingungen (1) bis (3) gültig bleiben, muss u auch dann durch eine Reihe von der Form

$$u = \Sigma K_n \sin n\frac{\pi z}{2\beta}\left\{f\left(n\frac{\pi r}{4\beta}\right) - \varphi\left(n\frac{\pi r}{4\beta}\right)\frac{f'\left(n\frac{\pi c}{4\beta}\right)}{\varphi'\left(n\frac{\pi c}{4\beta}\right)}\right\}$$

dargestellt werden. Eine Ausnahme würde nur eintreten, wenn $K_1 = 0$ würde.

Die von Herrn E. Becquerel gemachte und von Herrn Du-Bois-Reymond im Wesentlichen beibehaltene specielle Voraussetzung ist die, dass die Kathode ein Punkt der Oberfläche, also $\alpha = \beta$ sei; in diesem Falle ist, wie die geführte Rechnung zeigt, die Dicke der Schicht für grosse Werthe von $\frac{r}{\alpha}$ weder der Entfernung vom Einströmungspunkte, wie Herr Becquerel, noch ihrem Cubus, wie Herr Du-Bois-

Reymond gefunden hat, umgekehrt proportional, sondern sie nimmt mit wachsenden $\frac{r}{\alpha}$ vielmehr ab, wie eine Potenz mit dem Exponenten $\frac{r}{\alpha}$, so dass $\frac{\alpha\log\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}{r}$ sich einem festen Grenzwerthe $-\frac{\pi}{2}$ schliesslich bis zu jedem Grade nähert. Dagegen ist das Gesetz des Herrn Du-Bois-Reymond nicht bloss näherungsweise für grosse Werthe von $\frac{r}{\alpha}$, sondern strenge richtig, wenn $\beta = \infty$ ist, da sich alsdann

$$u = \sum_{-\infty,\,\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{rr+(z+2m\beta-\alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{rr+(z+2m\beta+\alpha)^2}}\right)$$

auf

$$\frac{1}{\sqrt{rr+(z-\alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{rr+(z+\alpha)^2}}$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \text{ auf } \frac{2\alpha}{\sqrt{rr+\alpha\alpha}^{\,3}}$$

reducirt. Die Vermuthung aber, aus welcher derselbe dieses Resultat abgeleitet hat, dass nämlich die Strömungslinien als gerade betrachtet werden dürften, bestätigt sich keineswegs. Die Gleichung der Strömungslinien ist

$$\int\left(r\frac{\partial u}{\partial z}dr - r\frac{\partial u}{\partial z}dz\right) = v = \text{const.},$$

und zwar ist die Constante, multiplicirt mit $\frac{2\pi}{w}$, wenn man das Integral so nimmt, dass es für $r = 0$ verschwindet, gleich dem innerhalb der Umdrehungsfläche (v = const.) fliessenden Theile des Stromes. In unserem Falle also sind die Strömungslinien die in der Gleichung

$$v = 2 - \frac{z+\alpha}{\sqrt{rr+(z+\alpha)^2}} + \frac{z-\alpha}{\sqrt{rr+(z-\alpha)^2}} = \text{const.}$$

enthaltenen Linien, welche Linien für alle grösseren Werthe der const. beträchtlich von einer geraden abweichen. Da Herr Du-Bois-Reymond zwar die Annahme macht, dass der Einströmungspunkt in der Oberfläche liege, seine ferneren Schlüsse aber nicht wesentlich auf diese Annahme stützt, so liegt wohl die Vermuthung nahe, dass bei den Versuchen des Herrn Beetz, welche eine nicht zu verkennende Annäherung an das Gesetz der Cuben ergeben, die Forderung des Herrn Du-Bois-Reymond, dass die Oberfläche der Flüssigkeit durch den Einströmungspunkt gehe, nicht berücksichtigt worden ist, sondern dass Herr Beetz, was zweckmässiger sein dürfte, grössere Flüssigkeitsmengen anwandte, so dass in der Reihe für $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$

$$\sum_{0,\,\infty} (-1)^m \left(\frac{2m\beta + \alpha}{\sqrt{rr + (2m\beta + \alpha)^2}^3} - \frac{2m\beta - \alpha}{\sqrt{rr + (2m\beta - \alpha)^2}^3} \right)$$

die späteren Glieder oder doch ihre Summe gegen das erste vernachlässigt werden konnten. In diesem Falle würden die hübschen Versuche des Herrn Beetz wirklich als ein Beweis anzusehen sein, dass die Stromvertheilung nahezu nach den vorausgesetzten Gesetzen erfolgt. Sollte aber diese Vermuthung irrig sein, so wäre aus Herrn Beetz's Versuchen zu schliessen, dass noch andere Umstände bei der Berechnung der Stromvertheilung in Betracht zu ziehen sind, deren Ermittlung einer neuen experimentellen Untersuchung obliegen würde.*)

---

*) In einer späteren Abhandlung (Poggendorff's Annalen Bd. 95, p. 22) ist Beetz auf diesen Gegenstand zurückgekommen. Es ergiebt sich daraus zunächst, dass bei den Versuchen von Beetz die Einströmungsstelle immer unmittelbar an der Oberfläche der Flüssigkeit lag und mithin die Vermuthung von Riemann irrig ist. Es ist aber gleichwohl nicht nothwendig, nach anderen Umständen zu suchen, welche die Gesetze der Stromvertheilung beeinflussen könnten, da das theoretische Resultat von Riemann mit den Versuchen in noch vollständigerer Uebereinstimmung steht als das von Du-Bois-Reymond, wie aus den in der erwähnten Abhandlung enthaltenen Zusammenstellungen zu ersehen ist.

Am Anfang der achtziger Jahre sind solche Versuche in ausgedehntem Maasse und unter mannigfach veränderten Umständen von Guébhard angestellt worden. Die theoretische Deutung, die Guébhard seinen Versuchen giebt, stimmt mit der von Riemann nicht überein. Es scheint, dass bei diesen Vorgängen ausser der Leitung der Electricität noch andere Einflüsse, besonders die electromotorische Kraft der Polarisation zu berücksichtigen sind. (Compt. rend. 90, 93, 94. Journal de Physique (2) I. u. II. und in der Zeitschrift L'Electricien.) W.

Anmerkungen.

(1) (Zu Seite 56.) Es ist hier die Voraussetzung gemacht, dass die Spannung (das Potential) in der begrenzenden Platte constant sei, oder, was damit gleichbedeutend ist, dass die Strömung überall senkrecht gegen die Grenzfläche erfolgt. Da die begrenzende Platte in den Versuchen von Metall ist, dessen Leitungsfähigkeit gegen die der Flüssigkeit ausserordentlich gross ist, so ist diese Annahme statthaft. Ein Bedenken dagegen würde nur dann zu erheben sein, wenn die Metallplatte sehr dünn wäre. (Vgl. eine Mittheilung des Herausgebers „Ueber stationäre Strömung der Electricität in Platten" in den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften 1889 Nr. 6.)

(2) (Zu Seite 58.) Die Umformung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{n\frac{\pi}{2\beta}ti}\,dt}{\sqrt{rr+tt}} = 2\int_{ri}^{\infty i} \frac{e^{n\frac{\pi}{2\beta}ti}\,dt}{\sqrt{rr+tt}} = 2\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\pi rt}{2\beta}}\,dt}{\sqrt{tt-1}}$$

beruht auf dem Satze, dass bei der Integration einer Function complexen Arguments der Integrationsweg geändert werden darf, wenn dabei kein singulärer Punkt überschritten wird.

(3) (Zu Seite 59.) Die Reihenentwicklungen für die Functionen $f(q)$ und $\varphi(q)$ lassen sich auf elementarem Wege folgendermaassen ableiten.

Die beiden Functionen

$$f(q) = \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-2qt}\,dt}{\sqrt{tt-1}}, \quad \varphi(q) = \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-2qt}\,dt}{\sqrt{1-tt}}$$

sind particuläre Lösungen der Differentialgleichung (auf Seite 58)

$$\frac{d^2y}{dq^2} + \frac{1}{q}\frac{dy}{dq} - 4y = 0.$$

Integrirt man diese Differentialgleichung durch eine nach steigenden Potenzen von q fortschreitende Reihe, so erhält man, wenn man einen constanten Factor durch $\varphi(0) = \pi$ bestimmt,

$$\varphi(q) = \pi \sum_{0,\,\infty}^{m} \frac{q^{2m}}{\Pi(m)\,\Pi(m)},$$

wenn man sich des Gauss'schen Zeichens $\Pi(m)$ bedient, das für ein ganzzahliges m die Bedeutung $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m$ oder $m!$ hat.

Eine zweite particuläre Lösung findet sich nun, wenn man

$$y = u - \frac{1}{\pi}\varphi(q)\log q$$

setzt und für u eine Potenzreihe von der Form

$$\sum \frac{a_m\, q^{2m}}{\Pi(m)\,\Pi(m)}$$

aus der Differentialgleichung ableitet.

Für die Coefficienten a_m erhält man die Recursionsformel

$$a_m - a_{m-1} = \frac{1}{m}$$

und folglich, wenn man den ersten unbestimmt bleibenden Coefficienten $a_0 = \Psi(0)$ setzt,

$$a_m = \Psi(0) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} = \Psi(m),$$

worin $\Psi(m)$ die von Gauss eingeführte Function $\frac{d \log \Pi(m)}{dm}$ ist. (Gauss, Disq. circa ser. inf. Werke Bd. III, Seite 153.)

Setzt man also

$$F(q) = \sum_{0,\infty}^{m} \frac{q^{2m}}{\Pi(m)\,\Pi(m)} \left(\Psi(m) - \log q\right),$$

so muss, wenn A, B noch zu bestimmende Constanten sind,

$$F(q) = A f(q) + B \varphi(q)$$

sein. Die Werthe dieser Constanten erhält man aus $q = 0$. Es ist nämlich

$$\operatorname*{Lim}_{q=0} \left(F(q) + \log q\right) = \Psi(0),$$

und durch partielle Integration:

$$f(q) = \int_q^\infty \frac{e^{-2t}\,dt}{\sqrt{tt - qq}} = \int_q^\infty e^{-2t}\, d \log\left(\sqrt{tt - qq} + t\right)$$

$$= -e^{-2q} \log q + 2 \int_q^\infty e^{-2t} \log\left(\sqrt{tt - qq} + t\right) dt,$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{q=0} \left(f(q) + \log q\right) = 2 \int_0^\infty e^{-2t} \log 2t\, dt = \int_0^\infty e^{-t} \log t\, dt = \Psi(0).$$

Also erhält man $A = 1$, $B = 0$ und in Uebereinstimmung mit der Formel des Textes $f(q) = F(q)$.

(4) (Zu Seite 59.) Von den beiden nach fallenden Potenzen von q fortschreitenden (halbconvergenten) Reihen erhält man die erste, einschliesslich der Genauigkeitsgrenze, aus dem Integralausdruck

$$f(q) = \int_1^\infty \frac{e^{-2qt}\,dt}{\sqrt{tt - 1}} = e^{-2q} \int_0^\infty \frac{e^{-2qt}\,dt}{\sqrt{t\,(t+2)}}$$

$$= \frac{e^{-2q}}{\sqrt{2q}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{\sqrt{t}\,\sqrt{\frac{t}{2q} + 2}},$$

durch Entwicklung von $\left(\frac{t}{2q} + 2\right)^{-\frac{1}{2}}$ nach steigenden Potenzen von t nach dem Taylor'schen Lehrsatz mit Rücksicht auf das Restglied. Die zweite dieser Formeln aber bot Schwierigkeiten, die bereits H. Hankel in einer Arbeit über die Cylinderfunctionen (Bd. I der Mathem. Annalen) hervorhob. Zur Aufklärung sollen mit Bezugnahme auf eine Abhandlung des Herausgebers (Zur Theorie der Bessel'schen Functionen, Mathem. Annalen Bd. XXXVII, S. 404) die folgenden Bemerkungen hier Platz finden.

Definirt man mit Benutzung einer jetzt üblichen Bezeichnung zwei Functionen des complexen Argumentes x

$$J(x) = \sum_{0,\infty}^{m} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{\Pi(m)\,\Pi(m)},$$

$$Y(x) = 2 \sum_{0,\infty}^{m} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-2m} \left(\log \frac{x}{2} - \Psi(m)\right)}{\Pi(m)\,\Pi(m)},$$

wobei, um $Y(x)$ eindeutig zu bestimmen, $\log \frac{x}{2}$ für reelle positive Werthe von x reell und die x-Ebene durch einen längs des negativen Theils der reellen Axe verlaufenden Schnitt begrenzt angenommen sei, so wird, indem wir q als reell und positiv voraussetzen,

$$\varphi(q) = \pi J(2iq),$$

$$f(q) = -\frac{1}{2} Y(2iq) + \frac{\pi i}{2} J(2iq).$$

In der oben erwähnten Arbeit sind zwei Functionen

$$S_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-s}\,ds}{\sqrt{s\left(1 - \frac{s}{2ix}\right)}}$$

$$S_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-s}\,ds}{\sqrt{s\left(1 + \frac{s}{2ix}\right)}}$$

definirt, durch die sich $J(x)$, $Y(x)$ und folglich auch $\varphi(q)$, $f(q)$ ausdrücken lassen:

$$\sqrt{\frac{4q}{\pi}}\, e^{2q} f(q) = S_1(2iq),$$

$$\sqrt{\frac{4q}{\pi}}\, e^{-2q} \varphi(q) = S_2(2iq) - i e^{-4q} S_1(2iq).$$

Nun folgt aus Art. X der genannten Abhandlung, dass, wenn $S_1(2iq)$, $S_2(2iq)$ durch die endlichen Reihen

$$\sum_{0,n-1}^{m} (-1)^m \frac{\left(1 \cdot 3 \cdots \overline{2m-1}\right)^2}{\Pi(m)\,(16q)^m},$$

$$\sum_{0,n-1}^{m} \frac{\left(1 \cdot 3 \cdots \overline{2m-1}\right)^2}{\Pi(m)\,(16q)^m}$$

ersetzt werden, der Fehler für ein reelles positives q, sofern $n < 4q$ und nicht zu klein ist, etwa von der Grösse

$$\sqrt{2n}\, e^{-n}$$

oder, wenn man mit der willkürlichen Zahl n möglichst nahe an $4q$ herangeht,

$$\sqrt{8q}\, e^{-4q}$$

ist. Mit gleicher Genauigkeit kann man also auch

$$\sqrt{\frac{4q}{\pi}}\, e^{2q} f(q), \quad \sqrt{\frac{4q}{\pi}}\, e^{-2q} \varphi(q)$$

durch dieselben Ausdrücke darstellen, in Uebereinstimmuug mit den Formeln des Textes.

Es darf hier natürlich der Begriff der halbconvergenten Reihe nicht in dem beschränkten Sinne gebraucht werden, wonach die Summe der n ersten Glieder einem bestimmten Werthe so sich nähert, dass der Unterschied immer kleiner ist als das zuletzt hinzugefügte Glied. Eine divergente Reihe mit nur positiven Gliedern kann selbstverständlich jeden beliebigen positiven Werth in dem Sinne genähert darstellen, dass der Werth der Summe den darzustellenden Werth durch Hinzufügung eines weiteren Gliedes überschreitet, und dass also, wenn man unmittelbar vor oder nach diesem Gliede abbricht, der Fehler kleiner ist als dies Glied, und dann wieder fortwährend wächst. Es kommt also nur darauf an, die am zweckmässigsten anzuwendende Gliederzahl und die ungefähre Grösse des letzten dieser Glieder zu ermitteln. In dem vorliegenden Fall ist dieser Zweck erreicht, wenn man die Gliederzahl n möglichst nahe an $4q$ heranrückt.

IV.

Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen.

(Aus dem siebenten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1857.)

Die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, als Function ihres vierten Elements x betrachtet, stellt diese Function nur dar, so lange der Modul von x die Einheit nicht überschreitet. Um diese Function in ihrem ganzen Umfange, bei unbeschränkter Veränderlichkeit dieses ihres Arguments, zu untersuchen, bieten die bisherigen Arbeiten über dieselbe zwei Wege dar. Man kann nämlich entweder von einer linearen Differentialgleichung, welcher sie genügt, ausgehen, oder von ihrem Ausdrucke durch bestimmte Integrale. Jeder dieser Wege gewährt eigenthümliche Vortheile; jedoch ist bis jetzt, in der reichhaltigen Abhandlung von Kummer im 15. Bande des mathematischen Journals von Crelle und auch in den noch unveröffentlichten Untersuchungen von Gauss*), nur der erste betreten, wohl hauptsächlich deshalb, weil die Rechnung mit bestimmten Integralen zwischen complexen Grenzen noch zu wenig ausgebildet war, oder doch nicht als einem grossen Leserkreise geläufig vorausgesetzt werden konnte.

In der folgenden Abhandlung habe ich diese Transcendente nach einer neuen Methode behandelt, welche im Wesentlichen auf jede Function, die einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten genügt, anwendbar bleibt. Nach derselben lassen sich die früher zum Theil durch ziemlich mühsame Rechnungen gefundenen Resultate fast unmittelbar aus der Definition ableiten, und dies ist in dem hier vorliegenden Theile dieser Abhandlung geschehen, hauptsächlich in der Absicht für die vielfachen Anwendungen dieser Function in physikalischen und astronomischen Untersuchungen eine bequeme Uebersicht über ihre möglichen Darstellungen zu geben. Es ist nöthig, einige allgemeine Vorbemerkungen über die Betrachtung einer Function bei unbeschränkter Veränderlichkeit ihres Arguments voraufzuschicken.

*) Gauss Werke. Bd. III 1886. S. 207. W.

Betrachtet man den Werth der unabhängig veränderlichen Grösse $x = y + zi$ zur leichteren Auffassung ihrer Veränderlichkeit als vertreten durch einen Punkt einer unendlichen Ebene, dessen rechtwinklige Coordination y, z sind, und denkt sich die Function w in einem Theile dieser Ebene gegeben, so kann sie von dort aus nach einem leicht zu beweisenden Satze nur auf eine Weise der Gleichung $\frac{\partial w}{\partial z} = i \frac{\partial w}{\partial y}$ gemäss stetig fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung muss selbstredend nicht in blossen Linien geschehen, worauf eine partielle Differentialgleichung nicht angewandt werden könnte, sondern in Flächenstreifen von endlicher Breite. Bei Functionen, welche, wie die hier zu untersuchende, „mehrwerthig" sind oder für denselben Werth von x je nach dem Wege, auf welchem die Fortsetzung geschehen ist, mehrere Werthe annehmen können, giebt es gewisse Punkte der x-Ebene, um welche herum sich die Function in eine andere fortsetzt, wie z. B. bei $\sqrt{(x-a)}$, $\log (x-a)$, $(x-a)^{\mu}$, wenn μ keine ganze Zahl ist, der Punkt a. Wenn man von diesem Punkte a aus sich eine beliebige Linie gezogen denkt, so kann der Werth der Function in der Umgebung von a so gewählt werden, dass er sich ausserhalb dieser Linie überall stetig ändert; sie nimmt aber dann zu beiden Seiten dieser Linie verschiedene Werthe an, so dass die Fortsetzung der Function über diese Linie hinüber eine von der jenseits schon vorhandenen verschiedene Function giebt.

Zur Erleichterung des Ausdrucks sollen die verschiedenen Fortsetzungen Einer Function für denselben Theil der x-Ebene „Zweige" dieser Function genannt werden und ein Werth von x, um welchen herum sich ein Zweig einer Function in einen andern fortsetzt, ein „Verzweigungswerth"; für einen Werth, in welchem keine Verzweigung stattfindet, heisst die Function „einändrig oder monodrom".

1.

Ich bezeichne durch

$$P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

eine Function von x, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1) Sie ist für alle Werthe von x ausser a, b, c einändrig und endlich.

2) Zwischen je drei Zweigen dieser Function P', P'', P''' findet eine lineäre homogene Gleichung mit constanten Coefficienten Statt,

$$c' P' + c'' P'' + c''' P''' = 0.$$

3) Die Function lässt sich in die Formen

$$c_\alpha P^{(\alpha)} + c_{\alpha'} P^{(\alpha')}, \; c_\beta P^{(\beta)} + c_{\beta'} P^{(\beta')}, \; c_\gamma P^{(\gamma)} + c_{\gamma'} P^{(\gamma')}$$

mit constanten $c_\alpha, c_{\alpha'}, \cdots, c_{\gamma'}$ setzen, so dass

$$P^{(\alpha)} (x-a)^{-\alpha}, \; P^{(\alpha')} (x-a)^{-\alpha'}$$

für $x = a$ einändrig bleiben und weder Null noch unendlich werden, und ebenso $P^{(\beta)} (x-b)^{-\beta}$, $P^{(\beta')} (x-b)^{-\beta'}$ für $x = b$ und $P^{(\gamma)} (x-c)^{-\gamma}$, $P^{(\gamma')} (x-c)^{-\gamma'}$ für $x = c$. In Betreff der sechs Grössen $\alpha, \alpha', \ldots, \gamma'$ wird vorausgesetzt, dass keine der Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl und die Summe aller, $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$ sei.

Wie mannigfaltig die Functionen seien, welche diesen Bedingungen genügen, bleibt vorläufig unentschieden und wird sich im Laufe der Untersuchung (Art. 4) ergeben. Zu grösserer Bequemlichkeit des Ausdrucks werde ich x die Veränderliche, a, b, c den ersten, zweiten, dritten Verzweigungswerth und α, α'; β, β'; γ, γ' das erste, zweite, dritte Exponentenpaar der P-function nennen.

2.

Zunächst einige unmittelbare Folgerungen aus der Definition.

In der Function $P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$ können die drei ersten Verticalreihen beliebig unter einander vertauscht werden, sowie auch α mit α', β mit β', γ mit γ'. Es ist ferner

$$P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} a' & b' & c' & \\ \alpha & \beta & \gamma & x' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix},$$

wenn man für x' einen rationalen Ausdruck ersten Grades von x setzt, der für $x = a, b, c$ die Werthe a', b', c' annimmt.

Für $P \begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$, auf welche Function sich demzufolge alle P-functionen mit denselben $\alpha, \alpha', \ldots, \gamma'$ zurückführen lassen, werde ich zur Abkürzung auch blos $P \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}$ setzen.

In einer solchen Function können also von den Grössen α, α'; β, β'; γ, γ' die Grössen jedes Paars unter sich, sowie auch die drei Grössenpaare beliebig mit einander vertauscht werden, wenn man nur in der sich ergebenden P-function als Veränderliche einen rationalen Ausdruck ersten Grades von x substituirt, welcher für die zum ersten, zweiten, dritten Exponentenpaar dieser Function gehörigen Werthe von x die Werthe $0, \infty, 1$ annimmt. Auf diese Weise erhält man die Function $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{pmatrix}, x)$ ausgedrückt durch P-functionen mit den Veränderlichen x, $1-x$, $\frac{1}{x}$, $1-\frac{1}{x}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{1}{1-x}$ und denselben Exponenten in anderer Ordnung.

Aus der Definition folgt ferner:

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\delta} = P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+\delta & \beta-\delta & \gamma & x \\ \alpha'+\delta & \beta'-\delta & \gamma' & \end{Bmatrix};$$

also auch

$$x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon}\, P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\alpha+\delta & \beta-\delta-\varepsilon & \gamma+\varepsilon & \\ \alpha'+\delta & \beta'-\delta-\varepsilon & \gamma'+\varepsilon & x\end{pmatrix}.$$

Durch diese Umformung können zwei Exponenten verschiedener Paare beliebig gegebene Werthe erhalten und als Werthe der Exponenten, da zwischen ihnen die Bedingung $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$ stattfindet, jedwede andere eingeführt werden, für welche die drei Differenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ dieselben sind. Aus diesem Grunde werde ich später zur Erleichterung der Uebersicht durch

$$P(\alpha-\alpha', \beta-\beta', \gamma-\gamma', x)$$

sämmtliche in der Form $x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon}\, P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}$ enthaltenen Functionen bezeichnen.

3.

Es ist jetzt vor allen Dingen nöthig, den Verlauf der Function etwas genauer zu untersuchen. Zu diesem Ende denke man sich durch sämmtliche Verzweigungspunkte der Function eine in sich zurücklaufende Linie l gezogen, welche die Gesammtheit der complexen Werthe in zwei Grössengebiete scheidet. Innerhalb jedes von ihnen wird alsdann jeder Zweig der Function stetig und von den übrigen gesondert verlaufen; längs der gemeinschaftlichen Grenzlinie aber werden zwischen den Zweigen des einen und des andern Gebiets in verschiedenen Begrenzungstheilen verschiedene Relationen stattfinden. Zu ihrer bequemeren Darstellung werde ich die mittels des Coefficientensystems $S=\begin{pmatrix}p, & q \\ r, & s\end{pmatrix}$ aus den Grössen t, u gebildeten lineären Ausdrücke $pt+qu$, $rt+su$ durch $(S)(t, u)$ bezeichnen. Es möge ferner nach Analogie der von Gauss vorgeschlagenen Benennung „positiv laterale Einheit“ für $+i$ als „positive“ Seitenrichtung zu einer gegebenen Richtung diejenige bezeichnet werden, welche zu ihr ebenso

liegt, wie $+i$ zu 1 (also bei der üblichen Darstellungsweise der complexen Grössen die linke). Demgemäss macht x einen „positiven Umlauf um einen Verzweigungswerth a“, wenn es sich durch die ganze Begrenzung eines nur diesen und keinen andern Verzweigungswerth enthaltenden Grössengebiets in einer gegen die Richtung von Innen nach Aussen positiv liegenden Richtung bewegt. Es gehe nun die Linie l der Reihe nach durch die Punkte $x=c$, $x=b$, $x=a$, und in dem auf ihrer positiven Seite liegenden Gebiete seien P', P'' zwei in keinem constanten Verhältnisse stehende Zweige der Function P. Jeder andere Zweig P''' lässt sich dann, da in der vorausgesetztermassen stattfindenden Gleichung $c'P'+c''P''+c'''P'''=0$ c''' nicht verschwinden kann, lineär und mit constanten Coefficienten in P' und P'' ausdrücken. Nimmt man nun an, dass P', P'' durch einen positiven Umlauf der Grösse x um a in $(A)(P', P'')$, um b in $(B)(P', P'')$, um c in $(C)(P', P'')$ übergehe, so wird durch die Coefficienten der Systeme (A), (B), (C) die Periodicität der Function völlig bestimmt sein. Zwischen diesen finden aber noch Relationen Statt. Wenn nämlich x das negative Ufer der Linie l durchläuft, so müssen die Functionen P', P'' die vorigen Werthe wieder annehmen, da der durchlaufene Weg negativerseits die ganze Begrenzung eines Grössengebiets bildet, innerhalb dessen diese Functionen allenthalben einändrig sind. Es ist dies aber dasselbe, als ob der Werth x sich von einem der Werthe c, b, a bis zum folgenden auf der positiven Seite fortbewegt, dann aber jedesmal um diesen Werth positiv herum, wobei (P', P'') der Reihe nach in $(C)(P', P'')$, $(C)(B)(P', P'')$, schliesslich in $(C)(B)(A)(P', P'')$ übergeht. Es ist daher

$$(1) \qquad (C)(B)(A) = \begin{pmatrix}1, & 0 \\ 0, & 1\end{pmatrix},$$

welche Gleichung vier Bedingungsgleichungen zwischen den zwölf Coefficienten von A, B, C liefert.

Bei der Discussion dieser Bedingungsgleichungen beschränke ich mich, zur Fixirung der Vorstellungen, auf die Function $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}$, also auf den Fall, wenn $a=0$, $b=\infty$, $c=1$, was die Allgemeinheit der Resultate nicht wesentlich beeinträchtigt, und wähle für die durch $1, \infty, 0$ zu ziehende Linie l die Linie der reellen Werthe, welche, um der Reihe nach durch c, b, a zu gehen, von $-\infty$ nach $+\infty$ gerichtet sein muss. Innerhalb des auf der positiven Seite dieser Linie liegenden Gebiets, welches die complexen Werthe mit positiv imaginärem Gliede enthält, sind dann die oben charakterisirten Bestandtheile der Function P, die Grössen P^{α}, $P^{\alpha'}$, P^{β}, $P^{\beta'}$, P^{γ}, $P^{\gamma'}$, einändrige

Functionen von x und sind bis auf constante Factoren, welche von der Wahl der Grössen $c_\alpha, c_{\alpha'}, \ldots, c_{\gamma'}$ abhängen, völlig bestimmt, wenn die Function P gegeben ist. Die Functionen P^α, $P^{\alpha'}$ gehen durch einen positiven Umlauf der Grösse x um 0 in $P^\alpha e^{\alpha 2\pi i}$, $P^{\alpha'} e^{\alpha' 2\pi i}$ über und ebenso durch einen positiven Umlauf dieser Grösse um ∞ die Functionen P^β, $P^{\beta'}$ in $P^\beta e^{\beta 2\pi i}$, $P^{\beta'} e^{\beta' 2\pi i}$ und durch einen positiven Umlauf um 1 die Functionen P^γ, $P^{\gamma'}$ in $P^\gamma e^{\gamma 2\pi i}$, $P^{\gamma'} e^{\gamma' 2\pi i}$. Bezeichnet man den Werth, in welchen P durch einen positiven Umlauf von x um 0 übergeht, durch P', so ist, wenn

$$P = c_\alpha P^\alpha + c_{\alpha'} P^{\alpha'},\quad P' = c_\alpha e^{\alpha 2\pi i} P^\alpha + c_{\alpha'} e^{\alpha' 2\pi i} P^{\alpha'}.$$

Diese Ausdrücke haben eine von Null verschiedene Determinante, da n. V. $\alpha - \alpha'$ keine ganze Zahl ist, und folglich können P^α, $P^{\alpha'}$ auch umgekehrt in P, P' also auch in $P^\beta, P^{\beta'}$; $P^\gamma\, P^{\gamma'}$ lineär mit constanten Coefficienten ausgedrückt werden. Setzt man nun

$$\begin{aligned} P^\alpha &= \alpha_\beta P^\beta + \alpha_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha_\gamma P^\gamma + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'}, \\ P^{\alpha'} &= \alpha'_\beta P^\beta + \alpha'_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha'_\gamma P^\gamma + \alpha'_{\gamma'} P^{\gamma'}, \end{aligned}$$

und zur Abkürzung $\begin{Bmatrix} \alpha_\beta, & \alpha_{\beta'} \\ \alpha'_\beta, & \alpha'_{\beta'} \end{Bmatrix} = (b)$, $\begin{Bmatrix} \alpha_\gamma, & \alpha_{\gamma'} \\ \alpha'_\gamma, & \alpha'_{\gamma'} \end{Bmatrix} = (c)$

und die inversen Substitutionen von (b) und (c) bezw. $= (b)^{-1}$ und $(c)^{-1}$, so ergeben sich für die Functionen $(P^\alpha, P^{\alpha'})$ die Substitutionen

$$(A) = \begin{Bmatrix} e^{\alpha 2\pi i}, & 0 \\ 0 & , e^{\alpha' 2\pi i} \end{Bmatrix},\ (B) = (b) \begin{Bmatrix} e^{\beta 2\pi i}, & 0 \\ 0 & , e^{\beta' 2\pi i} \end{Bmatrix} (b)^{-1},\ (C) = (c) \begin{Bmatrix} e^{\gamma 2\pi i}, & 0 \\ 0 & , e^{\gamma' 2\pi i} \end{Bmatrix} (c)^{-1}.$$

Aus der Gleichung $(C)\,(B)\,(A) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ folgt nun zunächst, da die Determinante einer zusammengesetzten Substitution dem Producte aus den Determinanten ihrer Componenten gleich ist,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{Det}\,(A)\ \mathrm{Det}\,(B)\ \mathrm{Det}\,(C) \\ &= e^{(\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma')2\pi i}\ \mathrm{Det}\,(b)\ \mathrm{Det}\,(b)^{-1}\ \mathrm{Det}\,(c)\ \mathrm{Det}\,(c)^{-1} \end{aligned}$$

oder, da $\mathrm{Det}\,(b)\ \mathrm{Det}\,(b)^{-1} = 1$, $\mathrm{Det}\,(c)\ \mathrm{Det}\,(c)^{-1} = 1$,

(2) $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' =$ einer ganzen Zahl, womit die obige Annahme, dass diese Exponentensumme $= 1$ sei, vereinbar ist.

Die übrigen drei in $(C)\,(B)\,(A) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ enthaltenen Relationen geben drei Bedingungen für (b) und (c), welche indess leichter auf folgendem Wege gefunden werden.

Wenn x erst um 0 und dann um ∞ negativ herumgeht, so bildet der durchlaufene Weg zugleich einen positiven Umlauf um 1. Der Werth, in welchen P^α dadurch übergeht, ist daher

$$= \alpha_\gamma e^{\gamma 2\pi i} P^\gamma + \alpha_{\gamma'} e^{\gamma' 2\pi i} P^{\gamma'} = (\alpha_\beta e^{-\beta 2\pi i} P^\beta + \alpha_{\beta'} e^{-\beta' 2\pi i} P^{\beta'})\, e^{-\alpha 2\pi i}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit einem willkürlichen Factor $e^{-\sigma\pi i}$ und die Gleichung

$$\alpha_\gamma P^\gamma + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'} = \alpha_\beta P^\beta + \alpha^{\beta'} P^{\beta'} \text{ mit } e^{\sigma\pi i}$$

und subtrahirt, so ergiebt sich nach Abwerfung eines allgemeinen Factors

$$\begin{gathered} \alpha_\gamma \sin(\sigma - \gamma)\pi\, e^{\gamma\pi i} P^\gamma + \alpha_{\gamma'} \sin(\sigma - \gamma')\pi\, e^{\gamma'\pi i} P^{\gamma'} = \\ \alpha_\beta \sin(\sigma + \alpha + \beta)\pi\, e^{-(\alpha+\beta)\pi i} P^\beta + \alpha_{\beta'} \sin(\sigma + \alpha + \beta')\pi\, e^{-(\alpha+\beta')\pi i} P^{\beta'}. \end{gathered}$$

Aus ganz ähnlichen Gründen hat man auch, wenn man überall α' für α setzt, die Gleichung

$$\begin{gathered} \alpha'_\gamma \sin(\sigma - \gamma)\pi\, e^{\gamma\pi i} P^\gamma + \alpha'_{\gamma'} \sin(\sigma - \gamma')\pi\, e^{\gamma'\pi i} P^{\gamma'} = \\ \alpha'_\beta \sin(\sigma + \alpha' + \beta)\pi\, e^{-(\alpha'+\beta)\pi i} P^\beta + \alpha'_{\beta'} \sin(\sigma + \alpha' + \beta')\pi\, e^{-(\alpha'+\beta')\pi i} P^{\beta'} \end{gathered}$$

mit der willkürlichen Grösse σ. Befreit man beide Gleichungen von einer der Functionen, z. B. $P^{\gamma'}$, indem man σ demgemäss bestimmt, so können sich die resultirenden Gleichungen nur durch einen allgemeinen constanten Factor unterscheiden, da $\frac{P^\beta}{P^{\beta'}}$ nicht constant ist. Diese Elimination von $P^{\gamma'}$ giebt daher:

$$(3)\quad \frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma} = \frac{\alpha_\beta \sin(\alpha + \beta + \gamma')\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_\beta \sin(\alpha' + \beta + \gamma')\pi\, e^{-\alpha'\pi i}} = \frac{\alpha_{\beta'} \sin(\alpha + \beta' + \gamma')\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_{\beta'} \sin(\alpha' + \beta' + \gamma')\pi\, e^{-\alpha'\pi i}}$$

und die ähnliche Elimination von P^γ

$$(3)\quad \frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}} = \frac{\alpha_\beta \sin(\alpha + \beta + \gamma)\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_\beta \sin(\alpha' + \beta + \gamma)\pi\, e^{-\alpha'\pi i}} = \frac{\alpha_{\beta'} \sin(\alpha + \beta' + \gamma)\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_{\beta'} \sin(\alpha' + \beta' + \gamma)\pi\, e^{-\alpha'\pi i}},$$

welches die vier gesuchten Relationen sind. Aus ihnen ergeben sich die Verhältnisse der Quotienten $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}, \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}, \frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma}, \frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}$. Die Gleichheit der beiden aus der zweiten und vierten fliessenden Werthe von $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta} : \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}$ erhellt leicht als eine Folge aus $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$ mittelst der Identität $\sin s\pi = \sin(1 - s)\pi$.

Demnach sind von den Grössen $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}, \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}, \frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma}, \frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}$ durch eine von ihnen, z. B. $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}$, die übrigen bestimmt und die drei Grössen $\alpha'_{\beta'}, \alpha'_\gamma, \alpha'_{\gamma'}$ durch die fünf Grössen $\alpha_\beta, \alpha'_\beta, \alpha_{\beta'}, \alpha_\gamma, \alpha_{\gamma'}$. Diese fünf Grössen aber hängen von den in $P^\alpha, P^{\alpha'}, P^\beta, P^{\beta'}, P^\gamma, P^{\gamma'}$, wenn die Function P gegeben ist, noch willkürlichen Factoren oder vielmehr von deren Verhältnissen ab, und können durch geeignete Bestimmung derselben jedwede endliche Werthe erhalten. ([1])

4.

Die soeben gemachte Bemerkung bahnt den Weg zu dem Satze, dass in zwei P-functionen mit gleichen Exponenten die denselben Exponenten entsprechenden Bestandtheile sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

In der That, ist P_1 eine Function mit denselben Exponenten wie P, so kann man die fünf Grössen α_β, $\alpha_{\beta'}$, α_γ, $\alpha_{\gamma'}$ und α'_β bei beiden gleich annehmen und dann müssen auch die Grössen $\alpha'_{\beta'}$, α'_γ, $\alpha'_{\gamma'}$ bei beiden übereinstimmen. Man hat also gleichzeitig:

$$(P^\alpha, P^{\alpha'}) = (b)\,(P^\beta, P^{\beta'}) = (c)\,(P^\gamma, P^{\gamma'})$$

und

$$(P_1^\alpha, P_1^{\alpha'}) = (b)\,(P_1^\beta, P_1^{\beta'}) = (c)\,(P_1^\gamma, P_1^{\gamma'}),$$

folglich

$$(P^\alpha P_1^{\alpha'} - P^{\alpha'} P_1^\alpha) = \mathrm{Det}(b)(P^\beta P_1^{\beta'} - P^{\beta'} P_1^\beta) = \mathrm{Det}(c)(P^\gamma P_1^{\gamma'} - P^{\gamma'} P_1^\gamma).$$

Von diesen drei Ausdrücken bleibt der erste, mit $x^{-\alpha-\alpha'}$ multiplicirt, offenbar für $x = 0$ einändrig und endlich; ebenso der zweite, mit $x^{\beta+\beta'} = x^{-\alpha-\alpha'-\gamma-\gamma'+1}$ multiplicirt, für $x = \infty$, der dritte, mit $(1-x)^{-\gamma-\gamma'}$ multiplicirt, für $x = 1$, und dasselbe gilt von allen drei Ausdrücken für alle von 0, ∞, 1 verschiedenen Werthe von x; es ist daher

$$(P^\alpha P_1^{\alpha'} - P^{\alpha'} P_1^\alpha)\, x^{-\alpha-\alpha'}\, (1-x)^{-\gamma-\gamma'}$$

eine allenthalben stetige und einändrige Function, also eine Constante. Sie ist ferner $= 0$ für $x = \infty$ und muss folglich allenthalben $= 0$ sein.

Hieraus folgt

$$\frac{P_1^{\alpha'}}{P^{\alpha'}} = \frac{P_1^\alpha}{P^\alpha}$$

$$\frac{P_1^\beta}{P^\beta} = \frac{P_1^{\beta'}}{P^{\beta'}} = \frac{\alpha_\beta P_1^\beta + \alpha_{\beta'} P_1^{\beta'}}{\alpha_\beta P^\beta + \alpha_{\beta'} P^{\beta'}} = \frac{P_1^\alpha}{P^\alpha}$$

$$\frac{P_1^\gamma}{P^\gamma} = \frac{P_1^{\gamma'}}{P^{\gamma'}} = \frac{\alpha_\gamma P_1^\gamma + \alpha_{\gamma'} P_1^{\gamma'}}{\alpha_\gamma P^\gamma + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'}} = \frac{P_1^\alpha}{P^\alpha}.$$

Die Function $\frac{P_1^\alpha}{P^\alpha}$ ist demnach einwerthig und muss überdies allenthalben endlich, also, w. z. b. ist, constant sein, wenn noch bewiesen wird, dass P^α und $P^{\alpha'}$ nicht zugleich für einen von 0, 1, ∞ verschiedenen Werth von x verschwinden können.

Zu diesem Ende bemerke man, dass

$$P^\alpha \frac{dP^{\alpha'}}{dx} - P^{\alpha'} \frac{dP^\alpha}{dx} = \mathrm{Det}\,(b)\left(P^\beta \frac{dP^{\beta'}}{dx} - P^{\beta'} \frac{dP^\beta}{dx}\right)$$
$$= \mathrm{Det}\,(c)\left(P^\gamma \frac{dP^{\gamma'}}{dx} - P^{\gamma'} \frac{dP^\gamma}{dx}\right),$$

und folglich für $x = 0, \infty, 1$ unendlich klein von den Ordnungen $\alpha + \alpha' - 1, \beta + \beta' + 1 = 2 - \alpha - \alpha' - \gamma - \gamma', \gamma + \gamma' - 1$ wird, übrigens aber stetig und einändrig bleibt, so dass

$$\left(P^\alpha \frac{dP^{\alpha'}}{dx} - P^{\alpha'} \frac{dP^\alpha}{dx}\right) x^{-\alpha-\alpha'+1}\, (1-x)^{-\gamma-\gamma'+1}$$

eine allenthalben stetige und einändrige Function bildet, folglich einen constanten Werth hat. Dieser constante Werth dieser Function ist nothwendig von Null verschieden, weil sonst $\log P^\alpha - \log P^{\alpha'} =$ const., folglich $\alpha = \alpha'$ sein würde gegen die Voraussetzung; offenbar müsste sie gleich Null werden, wenn für einen von 0, 1, ∞ verschiedenen Werth von x P^α und $P^{\alpha'}$ gleichzeitig verschwänden, da $\frac{dP^\alpha}{dx}$, $\frac{dP^{\alpha'}}{dx}$ als Derivirte einändrig und stetig bleibender Functionen nicht unendlich werden können.

Es werden daher P^α und $P^{\alpha'}$ für keinen von 0, 1, ∞ verschiedenen Werth von x gleichzeitig $= 0$, und es bleibt die einwerthige Function

$$\frac{P_1^\alpha}{P^\alpha} = \frac{P_1^{\alpha'}}{P^{\alpha'}} = \frac{P_1^\beta}{P^\beta} = \frac{P_1^{\beta'}}{P^{\beta'}} = \frac{P_1^\gamma}{P^\gamma} = \frac{P_1^{\gamma'}}{P^{\gamma'}}$$

allenthalben endlich, mithin constant, w. z. b. w.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, dass in zwei Zweige Einer P-function, deren Quotient nicht constant ist, jede andere P-function mit gleichen Exponenten sich lineär mit constanten Coefficienten ausdrücken lässt und dass durch die im Art. 1 geforderten Eigenschaften die zu definirende Function bis auf zwei lineär in ihr enthaltene Constanten völlig bestimmt ist. Diese werden in jedem Falle leicht aus den Werthen der Function für specielle Werthe der Veränderlichen gefunden, am bequemsten, indem man die Veränderliche einem der Verzweigungswerthe gleich setzt.

Ob es immer eine jenen Bedingungen genügende Function gebe, bleibt freilich noch unentschieden, wird sich aber später durch die wirkliche Darstellung der Function mittelst bestimmter Integrale und hypergeometrischer Reihen erledigen und bedarf daher keiner besondern Untersuchung.

5.

Ausser den für jedwede Werthe der Exponenten möglichen Transformationen des Art. 2 ergeben sich aus der Definition noch leicht die beiden Transformationen:

$$\text{(A)} \qquad P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta & \gamma & x \\ \frac{1}{2} & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 & \\ \gamma & 2\beta & \gamma & \sqrt{x} \\ \gamma' & 2\beta' & \gamma' & \end{Bmatrix},$$

wo nach dem Früheren $\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=\frac{1}{2}$ sein muss, und

$$\text{(B)} \qquad P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 0 & \gamma & x \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 1 & \varrho & \varrho^2 & \\ \gamma & \gamma & \gamma & \sqrt[3]{x} \\ \gamma' & \gamma' & \gamma' & \end{Bmatrix},$$

wo $\gamma+\gamma'=\frac{1}{3}$ und ϱ eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bezeichnet. Um sämmtliche Functionen, welche sich mit Hülfe dieser Transformationen auf einander zurückführen lassen, bequem zu übersehen, ist es zweckmässig, statt der Exponenten ihre Differenzen einzuführen und, wie oben vorgeschlagen, durch $P(\alpha-\alpha', \beta-\beta', \gamma-\gamma', x)$ sämmtliche in der Form $x^\delta(1-x)^\varepsilon P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}$ enthaltenen Functionen zu bezeichnen, wobei $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ die erste, zweite, dritte Exponentendifferenz genannt werden mag.

Aus den Formeln im Art. 2 folgt dann, dass in der Function

$$P(\lambda, \mu, \nu, x)$$

die Grössen λ, μ, ν beliebig in's Entgegengesetzte verwandelt und beliebig unter einander vertauscht werden können. Die Veränderliche nimmt dabei einen der 6 Werthe x, $1-x$, $\frac{1}{x}$, $1-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$ an, und zwar haben von den 48 auf diese Weise sich ergebenden P-functionen je acht, welche durch blosse Zeichenänderung der Grössen λ, μ, ν aus einander hervorgehen, dieselbe Veränderliche.

Von den in diesem Art. angegebenen Transformationen A und B ist die erste anwendbar, wenn von den Exponentendifferenzen entweder eine gleich $\frac{1}{2}$ oder zwei einander gleich sind, die zweite, wenn von ihnen entweder zwei $=\frac{1}{3}$ oder alle drei einander gleich sind. Durch successive Anwendung dieser Transformationen erhält man daher durch einander ausgedrückt:

I. $\qquad P(\mu, \nu, \frac{1}{2}, x_2)$, $P(\mu, 2\nu, \mu, x_1)$ und $P(\nu, 2\mu, \nu, x_3)$,

wobei $\sqrt{(1-x_2)} = 1-2x_1$, $\sqrt{\left(1-\frac{1}{x_2}\right)} = 1-2x_3$, also

$$x_2 = 4x_1(1-x_1) = \frac{1}{4x_3(1-x_3)} \text{ sich ergiebt.}$$

II. $\qquad P(\nu, \nu, \nu, x_3)$, $P\left(\nu, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x_2\right)$, $P\left(\frac{\nu}{2}, 2\nu, \frac{\nu}{2}, x_1\right)$,

$\qquad P(\frac{1}{3}, \nu, \frac{1}{3}, x_4)$, $P\left(\frac{1}{3}, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x_5\right)$, $P\left(\frac{\nu}{2}, \frac{2}{3}, \frac{\nu}{2}, x_6\right)$,

wenn $1-\frac{1}{x_4} = \left(\frac{x_3+\varrho}{x_3+\varrho^2}\right)^3$ und folglich $\frac{1}{x_4} = \frac{3(\varrho-\varrho^2)\,x_3(1-x_3)}{(\varrho^2+x_3)^3}$,

$x_4(1-x_4) = \frac{(\varrho+x_3)^3(\varrho^2+x_3)^3}{27\,x_3^2(1-x_3)^2} = \frac{(1-x_3(1-x_3))^3}{27\,x_3^2(1-x_3)^2}$; ferner nach I.

$4x_4(1-x_4) = x_5 = \frac{1}{4x_6(1-x_6)}$, $4x_3(1-x_3) = x_2 = \frac{1}{4x_1(1-x_1)}$.

III. $\qquad P(\nu, \nu, \frac{1}{2}, x_2)$, $P(\nu, 2\nu, \nu, x_1)$,

$\qquad P(\frac{1}{4}, \nu, \frac{1}{2}, x_3)$, $P(\frac{1}{4}, 2\nu, \frac{1}{4}, x_4)$,

wenn $x_3 = \frac{1}{4}\left(2-x_2-\frac{1}{x_2}\right) = 4x_4(1-x_4)$, $x_2 = 4x_1(1-x_1)$.

Alle diese Functionen können noch mittelst der allgemeinen Transformationen umgeformt und dadurch ihre Exponentendifferenzen beliebig vertauscht und mit beliebigen Vorzeichen versehen werden. Ausser den beiden Transcendenten II. und III. lässt, wenn eine Exponentendifferenz willkürlich bleiben soll, nur noch die Function $P(\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = P(\nu, 1, \nu)$ eine häufigere Wiederholung der Transformationen A und B zu, welche indess, da

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ \nu & -\nu & 1 & x \end{pmatrix} = \text{const. } x^\nu + \text{const.}',$$

auf ganz elementare Formeln führt.

In der That ist die Transformation B nur anwendbar auf $P(\nu, \nu, \nu)$ oder $P(\frac{1}{3}, \nu, \frac{1}{3})$, also nur auf die Transcendente II.; die Transformation A aber lässt sich häufiger als in I. nur wiederholen, wenn entweder von den Grössen μ, ν, 2μ, 2ν eine gleich $\frac{1}{2}$ gesetzt oder eine der Gleichungen $\mu=\nu$, $\mu=2\nu$, $\nu=2\mu$ angenommen wird. Von diesen Annahmen führt $\mu=2\nu$ oder $\nu=2\mu$ auf die Transcendente II., $\mu=\nu$, sowie 2μ oder $2\nu=\frac{1}{2}$ auf die Transcendente III., endlich μ oder $\nu=\frac{1}{2}$ auf die Function $P(\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Anzahl der verschiedenen Ausdrücke, welche man durch diese Transformationen für jede der Transcendenten I—III. erhält, ergiebt sich, wenn man berücksichtigt, dass in den obigen P-functionen als Veränderliche alle Wurzeln der Gleichungen, durch welche sie bestimmt werden, zulässig sind und jede Wurzel zu einem Systeme von 6 Werthen gehört, welche mittelst der allgemeinen Transformation für einander als Veränderliche eingeführt werden können.

Es führen aber im Falle I. die beiden Werthe von x_1 und x_3, welche zu einem gegebenen x_2 gehören, auf dasselbe System von 6 Werthen, so dass jede der Functionen I. durch P-functionen mit $6.3=18$ verschiedenen Veränderlichen ausgedrückt werden kann.

Im Falle II. führen von den zu einem gegebenen Werthe von x_5 gehörigen Werthen die beiden Werthe von x_6 und x_4, die 6 Werthe von x_3 und von den 6 Werthen von x_1 je zwei zu demselben Systeme von 6 Werthen, während die drei Werthe von x_2 zu drei verschiedenen Systemen von je 6 Werthen führen. Es liefern also x_1 und x_2 je drei und x_3, x_4, x_5, x_6 je ein System von 6 Werthen, also alle zusammen $6.10 = 60$ Werthe, durch deren P-functionen sich jede der Functionen II. ausdrücken lässt.

Im Falle III. endlich liefern x_3, die beiden Werthe von x_2, die beiden Werthe von x_4, und von den vier Werthen von x_1 je zwei ein System von 6 Werthen, so dass jede der Functionen III. durch P-functionen von $6.5 = 30$ verschiedenen Veränderlichen darstellbar ist.

In jeder P-function können nun ohne Aenderung der Veränderlichen mittelst der allgemeinen Transformationen die Exponentendifferenzen beliebige Vorzeichen erhalten, und also kann, da keine dieser Exponentendifferenzen $= 0$ ist, eine und dieselbe Function auf 8 verschiedene Arten als P-function derselben Veränderlichen dargestellt werden. Die Anzahl sämmtlicher Ausdrücke beträgt also im Falle I. $8.6.3 = 144$, im Falle II. $8.6.10 = 480$, im Falle III. $8.6.5 = 240$.

6.

Wenn man sämmtliche Exponenten einer P-function um ganze Zahlen ändert, so bleiben in den Gleichungen (3) Art. 3 die Grössen

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi\, e^{-\alpha'\pi i}},\quad \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi\, e^{-\alpha'\pi i}}$$
$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi\, e^{-\alpha'\pi i}},\quad \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi\, e^{-\alpha'\pi i}}$$

ungeändert.

Sind daher in den Functionen $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}$, $P_1\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \\ \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' & x\end{pmatrix}$ die entsprechenden Exponenten α_1 und α, etc., um ganze Zahlen verschieden, so kann man die acht Grössen $(\alpha_\beta)_1$, $(\alpha'_\beta)_1$, $(\alpha_{\beta'})_1, \ldots$ den acht Grössen α_β, α'_β, $\alpha_{\beta'}, \ldots$ gleich annehmen, da aus der Gleichheit der fünf willkürlichen die Gleichheit der drei übrigen folgt.

Nach der im Art. 4 angewandten Schlussweise folgt hieraus:

$$P^\alpha P_1^{\alpha'_1} - P^{\alpha'} P_1^{\alpha_1} = \mathrm{Det}(b)(P^\beta P_1^{\beta'_1} - P^{\beta'} P_1^{\beta_1}) = \mathrm{Det}(c)(P^\gamma P_1^{\gamma'_1} - P^{\gamma'} P_1^{\gamma_1});$$

und wenn man von den Grössen $\alpha + \alpha_1'$ und $\alpha_1 + \alpha'$, $\beta + \beta_1'$ und $\beta_1 + \beta'$, $\gamma + \gamma_1'$ und $\gamma_1 + \gamma'$ diejenigen Grössen jedes Paars, welche um eine *positive* ganze Zahl kleiner sind, als die andern, durch $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ bezeichnet, so ist

$$(P^\alpha P_1^{\alpha'_1} - P^{\alpha'} P_1^{\alpha_1})\, x^{-\overline{\alpha}}\, (1-x)^{-\overline{\gamma}}$$

eine Function von x, welche einändrig und endlich bleibt für $x = 0$, $x = 1$ und alle übrigen endlichen Werthe von x, für $x = \infty$ aber

unendlich wird von der Ordnung $-\overline{\alpha} - \overline{\gamma} - \overline{\beta}$, folglich eine ganze Function F vom Grade $-\overline{\alpha} - \overline{\beta} - \overline{\gamma}$.

Man bezeichne nun, wie früher, die Exponentendifferenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ durch λ, μ, ν. In Betreff dieser ergiebt sich zunächst: ihre Summe ändert sich um eine gerade Zahl, wenn sich sämmtliche Exponenten um ganze Zahlen ändern; denn sie übertrifft die Summe sämmtlicher Exponenten, welche unverändert $= 1$ bleibt, um

$$-2(\alpha' + \beta' + \gamma'),$$

welche Grösse sich dabei um eine gerade Zahl ändert. Sie können sich aber dabei um jedwede ganze Zahlen ändern, deren Summe gerade ist. Bezeichnet man ferner $\alpha_1 - \alpha_1'$, $\beta_1 - \beta_1'$, $\gamma_1 - \gamma_1'$ durch λ_1, μ_1, ν_1 und durch $\varDelta\lambda$, $\varDelta\mu$, $\varDelta\nu$ die absoluten Werthe der Differenzen $\lambda - \lambda_1$, $\mu - \mu_1$, $\nu - \nu_1$, so ist von den Grössen $\alpha + \alpha_1'$ und $\alpha' + \alpha_1$ diejenige, welche um die positive Zahl $\varDelta\lambda$ kleiner ist als die andere

$$= \frac{\alpha + \alpha_1' + \alpha' + \alpha_1}{2} - \frac{\varDelta\lambda}{2}, \text{ also}$$
$$-\overline{\alpha} = \frac{\varDelta\lambda}{2} - \frac{\alpha + \alpha_1' + \alpha' + \alpha_1}{2} \text{ und ebenso}$$
$$-\overline{\beta} = \frac{\varDelta\mu}{2} - \frac{\beta + \beta_1' + \beta' + \beta_1}{2}$$
$$-\overline{\gamma} = \frac{\varDelta\nu}{2} - \frac{\gamma + \gamma_1' + \gamma' + \gamma_1}{2}.$$

Der Grad der ganzen Function F, welcher gleich der Summe dieser Grössen ist, ergiebt sich daher

$$= \frac{\varDelta\lambda + \varDelta\mu + \varDelta\nu}{2} - 1.$$

7.

Sind jetzt $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}$, $P_1\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \\ \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' & x\end{pmatrix}$, $P_2\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \\ \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' & x\end{pmatrix}$ drei Functionen, in welchen sich die entsprechenden Exponenten um ganze Zahlen unterscheiden, so fliesst aus diesem Satze mittelst der identischen Gleichung

$$P^\alpha (P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha'_2} - P_1^{\alpha'_1} P_2^{\alpha_2}) + P_1^{\alpha_1} (P_2^{\alpha_2} P^{\alpha'} - P_2^{\alpha'_2} P^\alpha)$$
$$+ P_2^{\alpha_2} (P^\alpha P_1^{\alpha'_1} - P^{\alpha'} P_1^{\alpha_1}) = 0$$

der wichtige Satz, dass zwischen ihren entsprechenden Gliedern eine lineäre homogene Gleichung stattfindet, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind, und dass also

„sämmtliche P-functionen, deren entsprechende Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, sich in zwei beliebige von ihnen lineär mit rationalen Functionen von x als Coefficienten ausdrücken lassen".

Eine specielle Folge aus den Beweisgründen dieses Satzes ist, dass sich der zweite Differentialquotient einer P-function lineär mit rationalen Functionen als Coefficienten in den ersten und die Function selbst ausdrücken lässt, und also die Function einer lineären homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt.

Beschränkt man sich, um ihre Ableitung möglichst zu vereinfachen, auf den Fall $\gamma = 0$, auf welchen der allgemeine nach Art. 2 leicht zurückgeführt wird, und setzt $P = y$, $P^{\alpha} = y'$, $P^{\alpha'} = y''$, so ergiebt sich, dass die Functionen

$$y' \frac{dy''}{d \log x} - y''. \frac{dy'}{d \log x},$$

$$\frac{d^2 y'}{d \log x^2} y'' - \frac{d^2 y''}{d \log x^2}. y',$$

$$\frac{dy'}{d \log x} \frac{d^2 y''}{d \log x^2} - \frac{dy''}{d \log x} \frac{d^2 y'}{d \log x^2}$$

mit $x^{-\alpha-\alpha'} (1-x)^{-\gamma'+2}$ multiplicirt, endlich und einändrig bleiben für endliche Werthe von x und unendlich von der ersten Ordnung werden für $x = \infty$, und dass überdies das erste dieser Producte für $x = 1$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Für

$$y = \text{const.}' \, y' + \text{const.}'' \, y''$$

findet daher eine Gleichung von der Form statt

$$(1-x) \frac{d^2 y}{d \log x^2} - (A + Bx) \frac{dy}{d \log x} + (A' - B'x) y = 0,$$

in welcher A, B, A', B', noch zu bestimmende Constanten bezeichnen.

Nach der Methode der unbestimmten Coefficienten lässt sich eine Lösung dieser Differentialgleichung nach um 1 steigenden oder fallenden Potenzen in eine Reihe

$$\Sigma a_n x^n$$

entwickeln, und zwar wird der Exponent μ des Anfangsgliedes im ersten Falle, wo er der niedrigste ist, durch die Gleichung

$$\mu\mu - A\mu + A' = 0,$$

und im zweiten, wo er der höchste ist, durch die Gleichung

$$\mu\mu + B\mu + B' = 0$$

bestimmt. Die Wurzeln der ersteren Gleichung müssen α und α', die der letztern $-\beta$ und $-\beta'$ sein und folglich ist

$$A = \alpha + \alpha', \; A' = \alpha\alpha',$$
$$B = \beta + \beta', \; B' = \beta\beta',$$

und es genügt die Function $P \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} x = y$ der Differentialgleichung

$$(1-x) \frac{d^2 y}{d \log x^2} - (\alpha + \alpha' + (\beta + \beta') x) \frac{dy}{d \log x} + (\alpha\alpha' - \beta\beta' x) y = 0.$$

Es bestimmen sich ferner die Coefficienten aus einem von ihnen mittelst der Recursionsformel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+\beta)(n+\beta')}{(n+1-\alpha)(n+1-\alpha')},$$

welcher $a_n = \dfrac{\text{Const.}}{\Pi(n-\alpha)\,\Pi(n-\alpha')\,\Pi(-n-\beta)\,\Pi(-n-\beta')}$ genügt.

Demnach bildet die Reihe

$$y = \text{Const.}\, \Sigma \frac{x^n}{\Pi(n-\alpha)\,\Pi(n-\alpha')\,\Pi(-n-\beta)\,\Pi(-n-\beta')},$$

sowohl wenn die Exponenten von α oder α' an um die Einheit steigen, als auch wenn sie von $-\beta$ oder $-\beta'$ an um die Einheit fallen, eine Lösung der Differentialgleichung und zwar bezw. diejenigen particularen Lösungen, welche oben durch P^{α}, $P^{\alpha'}$, P^{β}, $P^{\beta'}$ bezeichnet worden sind.

Nach Gauss, welcher durch $F(a, b, c, x)$ eine Reihe bezeichnet, in welcher der Quotient des $(n+1)$ten Gliedes in das folgende $= \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} x$ und das erste Glied $= 1$ ist, lässt sich dieses Resultat für den einfachsten Fall, für $\alpha = 0$, so ausdrücken

$$P^{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} x = \text{Const.}\, F(\beta, \beta', 1-\alpha', x)$$

oder

$$F(a, b, c, x) = P^{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1-c & b & c-a-b \end{pmatrix} x.$$

Aus demselben erhält man auch leicht einen Ausdruck der P-function durch ein bestimmtes Integral, indem man in dem allgemeinen Gliede der Reihe für die Π-functionen ein Euler'sches Integral zweiter Gattung einführt und dann die Ordnung der Summation und Integration vertauscht. Auf diese Weise findet man, dass das Integral

$$x^{\alpha} (1-x)^{\gamma} \int s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'} (1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma} (1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma} ds$$

von einem der vier Werthe $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$ bis zu einem dieser vier Werthe auf beliebigem Wege erstreckt eine Function $P \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} x$ bildet und bei passender Wahl dieser Grenzwerthe und des Weges von einem zum andern jede der sechs Functionen $P^{\alpha}, P^{\beta}, \ldots, P^{\gamma'}$ darstellt. (²) Es lässt sich aber auch direct zeigen, dass das Integral die charakteristischen Eigenschaften einer solchen Function besitzt. Es wird dies in der Folge geschehen, wo dieser Ausdruck der P-function durch ein bestimmtes Integral zur Bestimmung der in P^{α}, $P^{\alpha'}$, .. noch willkürlich gebliebenen Factoren benutzt werden soll; und ich bemerke hier nur noch, dass es, um diesen Ausdruck allgemein anwendbar zu machen, einer Modification des Weges der Integration bedarf, wenn die Function unter dem Integralzeichen für einen der Werthe $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$ so unendlich wird, dass sie die Integration bis an denselben nicht zulässt. (3)

8.

Zufolge der im Art. 2 und dem vorigen erhaltenen Gleichungen

$$P^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix} = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\, P^{\alpha}\begin{pmatrix}0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & x\end{pmatrix} =$$

$$\text{Const. } x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\, F(\beta+\alpha+\gamma,\ \beta'+\alpha+\gamma,\ \alpha-\alpha'+1,\ x)$$

fliesst aus jedem Ausdrucke einer Function durch eine P-function eine Entwicklung derselben in eine hypergeometrische Reihe, welche nach steigenden Potenzen der Veränderlichen in dieser P-function fortschreitet. Nach Art. 5 giebt es 8 Darstellungen einer Function durch P-functionen mit derselben Veränderlichen, welche durch Vertauschung zusammengehöriger Exponenten aus einander erhalten werden, also z. B. 8 Darstellungen mit der Veränderlichen x. Von diesen liefern aber je zwei, welche durch Vertauschung ihres zweiten Paares, β und β', aus einander entstehen, dieselbe Entwicklung; man erhält also vier Entwicklungen nach steigenden Potenzen von x, von denen zwei, welche durch Vertauschung von γ und γ' aus einander erhalten werden, die Function P^{α}, die beiden andern die Function $P^{\alpha'}$ darstellen. Diese vier Entwicklungen convergiren, so lange der Modul von $x < 1$, und divergiren, wenn er grösser als 1 ist, während die vier Reihen nach fallenden Potenzen von x, welche P^{β} und $P^{\beta'}$ darstellen, sich umgekehrt verhalten. Für den Fall, wenn der Modul von x gleich 1 ist, folgt aus der Fourier'schen Reihe, dass die Reihen zu convergiren aufhören, wenn die Function für $x = 1$ unendlich von einer höhern Ordnung als der ersten wird, aber convergent bleiben, wenn sie nur unendlich von einer niedrigern Ordnung als 1 wird oder endlich bleibt. (4) Es convergirt also auch in diesem Falle nur die Hälfte der 8 Entwicklungen nach Potenzen von x, so lange der reelle Theil von $\gamma' - \gamma$ nicht zwischen -1 und $+1$ liegt, und sie convergiren sämmtlich, sobald dieses stattfindet.

Demnach hat man zur Darstellung einer P-function im Allgemeinen 24 verschiedene hypergeometrische Reihen, welche nach steigenden oder fallenden Potenzen von drei verschiedenen Grössen fortschreiten, und von denen für einen gegebenen Werth von x jedenfalls die Hälfte, also zwölf convergiren. Im Falle I. Art. 5 sind alle diese Anzahlen mit 3, im Falle II. mit 10, im Falle III. mit 5 zu multipliciren. Am geeignetsten zur numerischen Rechnung werden von diesen Reihen meistens diejenigen sein, deren viertes Element den kleinsten Modul hat.

Was die Ausdrücke einer P-function durch bestimmte Integrale betrifft, die sich durch die am Schlusse des vorigen Art. aus den Transformationen des Art. 5 ableiten lassen, so sind diese Ausdrücke sämmtlich von einander verschieden. Man erhält also im Allgemeinen 48, im Falle I. 144, im Falle II. 480, im Falle III. 240 bestimmte Integrale, welche dasselbe Glied einer P-function darstellen und also zu einander ein von x unabhängiges Verhältniss haben. Von diesen lassen sich je 24, welche durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen der Exponenten aus einander hervorgehen, auch in einander transformiren durch eine solche Substitution ersten Grades, dass für irgend drei von den Werthen $0, 1, \infty, \frac{1}{x}$ der Integrationsveränderlichen s die neue Veränderliche die Werthe $0, 1, \infty$ annimmt. Die übrigen Gleichungen erfordern, soweit ich sie untersucht habe, zu ihrer Bestätigung durch Methoden der Integralrechnung die Transformation von vielfachen Integralen.

V.

Selbstanzeige der vorstehenden Abhandlung.

(Göttinger Nachrichten, 1857, Nr. 1.)

Am 6. November 1856 wurde der königlichen Societät eine von ihrem Assessor, Herrn Doctor Riemann, eingereichte mathematische Abhandlung vorgelegt, welche „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen" enthält.

Diese Abhandlung ist einer Classe von Functionen gewidmet, welche bei der Lösung mancher Aufgaben der mathematischen Physik gebraucht werden. Aus ihnen gebildete Reihen leisten bei schwierigeren Problemen dieselben Dienste, wie in den einfacheren Fällen die jetzt so vielfach angewandten Reihen, welche nach Cosinus und Sinus der Vielfachen einer veränderlichen Grösse fortschreiten. Diese Anwendungen, namentlich astronomische, scheinen, nachdem schon Euler sich aus theoretischem Interesse mehrfach mit diesen Functionen beschäftigt hatte, Gauss zu seinen Untersuchungen über dieselben veranlasst zu haben, von denen er einen Theil in seiner der Kön. Soc. im J. 1812 übergebenen Abhandlung über die Reihe, welche er durch $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bezeichnet, veröffentlicht hat.

Diese Reihe ist eine Reihe, in welcher der Quotient des $(n+1)$ ten Gliedes in das folgende

$$= \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)}\, x$$

und das erste Glied $= 1$ ist. Die für sie jetzt gewöhnliche Benennung hypergeometrische Reihe ist schon früher von Johann Friedrich Pfaff für die allgemeineren Reihen vorgeschlagen worden, in denen der Quotient eines Gliedes in das folgende eine rationale Function des Stellenzeigers ist; während Euler nach Wallis darunter eine Reihe verstand, in welcher dieser Quotient eine ganze Function ersten Grades des Stellenzeigers ist.

Der unveröffentlichte Theil der Gauss'schen Untersuchungen über diese Reihe, welcher sich in seinem Nachlasse vorgefunden hat, ist

unterdessen schon im J. 1835 durch die im 15. Bande des Journals von Crelle enthaltenen Arbeiten Kummer's ergänzt worden. Sie betreffen die Ausdrücke der Reihe durch ähnliche Reihen, in denen statt des Elements x eine algebraische Function dieser Grösse vorkommt. Einen speciellen Fall dieser Umformungen hatte schon Euler aufgefunden und in seiner Integralrechnung, so wie in mehren Abhandlungen behandelt (in der einfachsten Gestalt in den N. Acta Acad. Petr. T. XII. p. 58); und diese Relation ward später von Pfaff (Disquis. anal. Helmstadii 1797), Gudermann (Crelle J. Bd. 7. S. 306) und Jacobi auf verschiedenen Wegen bewiesen. Kummer gelang es, die Methode Euler's zu einem Verfahren auszubilden, durch welches sämmtliche Transformationen gefunden werden konnten; die wirkliche Ausführung desselben erforderte aber so weitläufige Discussionen, dass er für die Transformationen dritten Grades von der Durchführung derselben abstand und sich begnügte, die Transformationen ersten und zweiten Grades und die aus ihnen zusammengesetzten vollständig abzuleiten.

In der anzuzeigenden Abhandlung wird auf diese Transcendenten eine Methode angewandt, deren Princip in der Inaug. Diss. des Verfassers (Art. 20) ausgesprochen worden ist und durch die sich sämmtliche früher gefundenen Resultate fast ohne Rechnung ergeben. Einige weitere mittelst derselben Methode gewonnenen Ergebnisse hofft der Verf. demnächst der Königlichen Societät vorlegen zu können.

Anmerkungen zur Abhandlung IV.

(1) (Zu Seite 73.) In einer handschriftlichen Notiz von Riemann (vom Juli 1856) finden sich die folgenden Formeln, die man aus (3) erhält, wenn man über die 5 willkürlichen Coefficienten angemessen verfügt:

$$\alpha_{\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi}, \qquad \alpha_{\beta'} = -\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi},$$

$$\alpha'_{\beta} = \frac{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi}, \qquad \alpha'_{\beta'} = -\frac{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi},$$

$$\alpha_{\gamma} = \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi}\, e^{(\alpha'+\gamma)\pi i}, \quad \alpha_{\gamma'} = -\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi}\, e^{(\alpha'+\gamma')\pi i},$$

$$\alpha'_{\gamma} = \frac{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi}\, e^{(\alpha+\gamma)\pi i}, \quad \alpha'_{\gamma'} = -\frac{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi}\, e^{(\alpha+\gamma')\pi i}.$$

(2) (Zu Seite 81.) Man erhält, wenn man zur Abkürzung

$$S = s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}$$

setzt, von constanten Factoren abgesehen,

$$P^{\alpha} = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int_0^1 S\,ds, \quad P^{\beta} = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int_0^{\frac{1}{x}} S\,ds, \quad P^{\gamma} = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int_{-\infty}^0 S\,ds$$

$$P^{\alpha'} = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} S\,ds, \quad P^{\beta'} = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int_1^{\infty} S\,ds, \quad P^{\gamma'} = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int_1^{\frac{1}{x}} S\,ds.$$

In jedem dieser Integrale kann die Bedeutung der mehrwerthigen Function S in beliebiger Weise festgelegt werden. Verfügt man in bestimmter Weise darüber, so erhält man zur Bestimmung constanter Factoren

$$(P^{\alpha}x^{-\alpha})_0 = \frac{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\,\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha-\alpha')}$$

$$(P^{\alpha'}x^{-\alpha'})_0 = -\frac{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\,\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)}{\Pi(\alpha'-\alpha)}\, e^{\pi i(\gamma-\gamma')}$$

$$(P^{\beta}x^{\beta})_{\infty} = \frac{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\,\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)}{\Pi(\beta-\beta')}\, e^{\pi i\gamma}$$

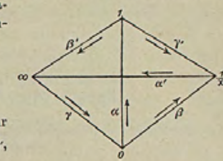
$$(P^{\beta'}x^{\beta'})_{\infty} = \frac{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\,\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)}{\Pi(\beta'-\beta)}\, e^{-\pi i\gamma'}$$

$$(P^{\gamma}(1-x)^{-\gamma})_1 = \frac{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\,\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')}{\Pi(\gamma-\gamma')}\, e^{-\pi i(\alpha'+\beta'+\gamma')}$$

$$(P^{\gamma'}(1-x)^{-\gamma'})_1 = \frac{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\,\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)}{\Pi(\gamma'-\gamma)}\, e^{\pi i(\alpha'+\beta+\gamma)}.$$

Auch diese Formeln finden sich in Riemann's Papieren an verschiedenen Stellen.

Man kann die Constanten α_{β} ... auch auf folgendem Wege bestimmen. Nimmt man die Function S in dem Viereck $0, \infty\ 1, \frac{1}{x}$ der nebenstehenden Figur an, so können die Zweige $P^{\alpha}, P^{\alpha'}, P^{\beta}, P^{\beta'}, P^{\gamma}, P^{\gamma'}$ durch die in der Figur durch die Pfeile angedeuteten Integrationen definirt werden. Man liest dann unmittelbar aus der Figur die Relationen ab

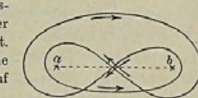


$$P^{\alpha} = P^{\beta} - P^{\gamma'} \quad = -P^{\beta'} - P^{\gamma}$$

$$P^{\alpha'} = -P^{\beta} - P^{\gamma} = P^{\beta'} - P^{\gamma'},$$

die zusammen mit den Formeln (3) auf S. 73 zur Bestimmung der Coefficienten $\alpha_{\beta}, \alpha_{\beta'}, \alpha'_{\beta}, \alpha'_{\beta'}, \alpha_{\gamma}, \alpha_{\gamma'}, \alpha'_{\gamma}, \alpha'_{\gamma'}$ ausreichen.

(3) (Zu Seite 82.) Einen Integrationsweg, der in allen Fällen statthaft ist, erhält man nach Pochhammer (Math. Annalen Bd. 35) durch einen Doppelumlauf um zwei Verzweigungspunkte, wie ihn die Figur zeigt. Ist die Integration bis a und b gestattet, so kann dieser Integrationsweg so zusammengezogen werden, dass er aus vier zwischen a und b verlaufenden Linien besteht. Bezeichnet man mit P das Integral über eine dieser Linien, so ist das über den Doppelumlauf erstreckte Integral



$$(1-e^{2\alpha\pi i})(1-e^{-2\beta\pi i})\,P.$$

F. Klein hat diesen Darstellungen der P-functionen durch Einführung homogener Variablen eine noch elegantere Fassung gegeben. (Math. Annalen Bd. 38.)

(4) (Zu Seite 82.) Nach der Ergänzung, die Dirichlet seinem Convergenzbeweis der Fourier'schen Reihe in dem Zusatz zu der Abhandlung über Kugelfunctionen gegeben hat (Crelle's Journal Bd. 4, Dove's Repertorium Bd. I, Crelle's Journal Bd. 17, Dirichlet's Werke S. 117, 133, 305) kann eine periodische Function eines reellen Argumentes, die in einem Punkt von niedrigerer als der ersten Ordnung unendlich wird, in eine Fourier'sche Reihe entwickelt werden. Wendet man diesen Satz an auf die Werthe, die eine in eine hypergeometrische Reihe entwickelbare P-Function auf dem Einheitskreis hat, so ergiebt sich eine Reihe, die von der nicht verschieden sein kann, die man erhält, wenn man in der hypergeometrischen Reihe den Modul (absoluten Werth) von $x = 1$ setzt.

VI.

Theorie der Abel'schen Functionen.

(Aus Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 54. 1857.)

I. Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Grössen.

Die Absicht, den Lesern des Journals für Mathematik Untersuchungen über verschiedene Transcendenten, insbesondere auch über Abel'sche Functionen vorzulegen, macht es mir wünschenswerth, um Wiederholungen zu vermeiden, eine Zusammenstellung der allgemeinen Voraussetzungen, von denen ich bei ihrer Behandlung ausgehen werde, in einem besonderen Aufsatze voraufzuschicken.

Für die unabhängig veränderliche Grösse setze ich stets die jetzt allgemein bekannte Gauss'sche geometrische Repräsentation voraus, nach welcher eine complexe Grösse $z = x + yi$ vertreten wird durch einen Punkt einer unendlichen Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y sind; ich werde dabei die complexen Grössen und die sie repräsentirenden Punkte durch dieselben Buchstaben bezeichnen. Als Function von $x + yi$ betrachte ich jede Grösse w, die sich mit ihr der Gleichung

$$i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

gemäss ändert, ohne einen Ausdruck von w durch x und y vorauszusetzen. Aus dieser Differentialgleichung folgt nach einem bekannten Satze, dass die Grösse w durch eine nach ganzen Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe von der Form $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z-a)^n$ darstellbar ist, sobald sie in der Umgebung von a allenthalben *einen* bestimmten mit z stetig sich ändernden Werth hat, und dass diese Darstellbarkeit stattfindet bis zu einem Abstande von a oder Modul von $z - a$, für welchen eine Unstetigkeit eintritt. Es ergiebt sich aber aus den Betrachtungen, welche der Methode der unbestimmten Coefficienten zu Grunde liegen, dass

die Coefficienten a_n völlig bestimmt sind, wenn w in einer endlichen übrigens beliebig kleinen von a ausgehenden Linie gegeben ist.

Beide Ueberlegungen verbindend, wird man sich leicht von der Richtigkeit des Satzes überzeugen:

Eine Function von $x + yi$, die in einem Theile der (x, y)-Ebene gegeben ist, kann darüber hinaus nur auf Eine Weise stetig fortgesetzt werden.

Man denke sich nun die zu untersuchende Function nicht durch irgend welche z enthaltende analytische Ausdrücke oder Gleichungen bestimmt, sondern dadurch, dass der Werth der Function in einem beliebig begrenzten Theile der z-Ebene gegeben ist und sie von dort aus stetig (der partiellen Differentialgleichung

$$i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

gemäss) fortgesetzt wird. Diese Fortsetzung ist nach den obigen Sätzen eine völlig bestimmte, vorausgesetzt, dass sie nicht in blossen Linien geschieht, wobei eine partielle Differentialgleichung nicht zur Anwendung kommen könnte, sondern durch Flächenstreifen von endlicher Breite. Je nach der Beschaffenheit der fortzusetzenden Function wird nun entweder die Function für denselben Werth von z immer wieder denselben Werth annehmen, auf welchem Wege auch die Fortsetzung geschehen sein möge, oder nicht. Im ersteren Falle nenne ich sie *einwerthig*, sie bildet dann eine für jeden Werth von z völlig bestimmte und nicht längs einer Linie unstetige Function. Im letzteren Falle, wo sie *mehrwerthig* heissen soll, hat man, um ihren Verlauf aufzufassen, vor Allem seine Aufmerksamkeit auf gewisse Punkte der z-Ebene zu richten, um welche herum sich die Function in eine andere fortsetzt. Ein solcher Punkt ist z. B. bei der Function $\log(z-a)$ der Punkt a. Denkt man sich von diesem Punkte a aus eine beliebige Linie gezogen, so wird man in der Umgebung von a den Werth der Function so wählen können, dass sie sich ausser dieser Linie überall stetig ändert; zu beiden Seiten dieser Linie nimmt sie aber dann verschiedene Werthe an, auf der negativen*) einen um $2\pi i$ grösseren, als auf der positiven. Die Fortsetzung der Function von einer Seite dieser Linie aus, z. B. von der negativen, über sie hinüber in das jenseitige Gebiet giebt dann offenbar eine von der dort schon vorhandenen verschiedene Function und zwar im hier betrachteten Falle eine allenthalben um $2\pi i$ grössere.

---

*) Im Anschlusse an die von Gauss vorgeschlagene Benennung positiv laterale Einheit für $+i$ werde ich als positive Seitenrichtung zu einer gegebenen Richtung diejenige bezeichnen, welche zu ihr ebenso liegt, wie $+i$ zu 1.

Zur bequemeren Bezeichnung dieser Verhältnisse sollen die verschiedenen Fortsetzungen *einer* Function für denselben Theil der z-Ebene *Zweige* dieser Function genannt werden und ein Punkt, um welchen sich ein Zweig einer Function in einen andern fortsetzt, eine *Verzweigungsstelle* dieser Function; wo keine Verzweigung stattfindet, heisst die Function *einändrig* oder *monodrom*.

Ein Zweig einer Function von mehreren unabhängig veränderlichen Grössen, $z, s, t, \ldots$ ist *einändrig* in der Umgebung eines bestimmten Werthensystems $z = a, \; s = b, \; t = c, \ldots$, wenn allen Werthencombinationen bis zu einem endlichen Abstande von demselben (oder bis zu einer bestimmten endlichen Grösse der Moduln von $z - a, \; s - b, \; t - c, \ldots$) ein bestimmter mit den veränderlichen Grössen stetig sich ändernder Werth dieses Zweiges der Function entspricht. Eine Verzweigungsstelle oder eine Stelle, um welche sich ein Zweig in einen andern fortsetzt, wird bei einer Function von mehreren Veränderlichen durch sämmtliche einer Gleichung zwischen ihnen genügende Werthe der unabhängig veränderlichen Grössen gebildet.

Nach einem oben angeführten bekannten Satze ist die Einändrigkeit einer Function identisch mit ihrer Entwickelbarkeit, ihre Verzweigung mit ihrer Nichtentwickelbarkeit nach ganzen positiven oder negativen Potenzen der Aenderungen der veränderlichen Grössen. Es scheint aber nicht zweckmässig, jene von ihrer Darstellungsweise unabhängigen Eigenschaften durch diese an eine bestimmte Form ihres Ausdrucks geknüpften Merkmale auszudrücken.

Für manche Untersuchungen, namentlich für die Untersuchung algebraischer und Abel'scher Functionen ist es vortheilhaft, die Verzweigungsart einer mehrwerthigen Function in folgender Weise geometrisch darzustellen. Man denke sich in der (x, y)-Ebene eine andere mit ihr zusammenfallende Fläche (oder auf der Ebene einen unendlich dünnen Körper) ausgebreitet, welche sich so weit und nur so weit erstreckt, als die Function gegeben ist. Bei Fortsetzung dieser Function wird also diese Fläche ebenfalls weiter ausgedehnt werden. In einem Theile der Ebene, für welchen zwei oder mehrere Fortsetzungen der Function vorhanden sind, wird die Fläche doppelt oder mehrfach sein; sie wird dort aus zwei oder mehreren Blättern bestehen, deren jedes einen Zweig der Function vertritt. Um einen Verzweigungspunkt der Function herum wird sich ein Blatt der Fläche in ein anderes fortsetzen, so dass in der Umgebung eines solchen Punktes die Fläche als eine Schraubenfläche mit einer in diesem Punkte auf der (x, y)-Ebene senkrechten Axe und unendlich kleiner Höhe des Schraubenganges betrachtet werden kann. Wenn die Function nach mehreren

Umläufen des z um den Verzweigungswerth ihren vorigen Werth wieder erhält (wie z. B. $(z - a)^{\frac{m}{n}}$, wenn m, n relative Primzahlen sind, nach n Umläufen von z um a), muss man dann freilich annehmen, dass sich das oberste Blatt der Fläche durch die übrigen hindurch in das unterste fortsetzt.

Die mehrwerthige Function hat für jeden Punkt einer solchen ihre Verzweigungsart darstellenden Fläche nur *einen* bestimmten Werth und kann daher als eine völlig bestimmte Function des Orts in dieser Fläche angesehen werden.

2. Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien.

Bei der Untersuchung der Functionen, welche aus der Integration vollständiger Differentialien entstehen, sind einige der analysis situs angehörige Sätze fast unentbehrlich. Mit diesem von Leibnitz, wenn auch vielleicht nicht ganz in derselben Bedeutung, gebrauchten Namen darf wohl ein Theil der Lehre von den stetigen Grössen bezeichnet werden, welcher die Grössen nicht als unabhängig von der Lage existirend und durch einander messbar betrachtet, sondern von den Massverhältnissen ganz absehend, nur ihre Orts- und Gebietsverhältnisse der Untersuchung unterwirft. Indem ich eine von Massverhältnissen ganz abstrahirende Behandlung dieses Gegenstandes mir vorbehalte, werde ich hier nur die bei der Integration zweigliedriger vollständiger Differentialien nöthigen Sätze in einem geometrischen Gewande darstellen.

Es sei eine in der (x, y)-Ebene einfach oder mehrfach ausgebreitete Fläche T gegeben*) und X, Y seien solche stetige Functionen des Orts in dieser Fläche, dass in ihr allenthalben $Xdx + Ydy$ ein vollständiges Differential, also

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

ist. Bekanntlich ist dann

$$\int (Xdx + Ydy),$$

um einen Theil der Fläche T positiv oder negativ herum — d. h. durch die ganze Begrenzung entweder allenthalben nach der positiven

*) Man sehe die vorhergehende Abhandlung S. 90.

oder allenthalben nach der negativen Seite gegen die Richtung von Innen nach Aussen (siehe die Anmerkung Seite 89 der vorhergehenden Abhandlung) — erstreckt, $= 0$, da dies Integral dem über diesen Theil ausgedehnten Flächenintegrale

$$\int \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dT$$

identisch im ersteren Falle gleich, im zweiten entgegengesetzt ist. Das Integral

$$\int (X dx + Y dy)$$

hat daher, zwischen zwei festen Punkten auf zwei verschiedenen Wegen erstreckt, denselben Werth, wenn diese beiden Wege zusammengenommen die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche T bilden. Wenn also jede im Innern von T in sich zurücklaufende Curve die ganze Begrenzung eines Theils von T bildet, so hat das Integral von einem festen Anfangspunkte bis zu einem und demselben Endpunkte erstreckt immer denselben Werth und ist eine von dem Wege der Integration unabhängige allenthalben in T stetige Function von der Lage des Endpunkts. Dies veranlasst zu einer Unterscheidung der Flächen in einfach zusammenhängende, in welchen jede geschlossene Curve einen Theil der Fläche vollständig begrenzt — wie z. B. ein Kreis —, und mehrfach zusammenhängende, für welche dies nicht stattfindet, — wie z. B. eine durch zwei concentrische Kreise begrenzte Ringfläche. Eine mehrfach zusammenhängende Fläche lässt sich durch Zerschneidung in eine einfach zusammenhängende verwandeln (s. die durch Zeichnungen erläuterten Beispiele am Schluss dieser Abhandlung). Da diese Operation wichtige Dienste bei der Untersuchung der Integrale algebraischer Functionen leistet, so sollen die darauf bezüglichen Sätze kurz zusammengestellt werden; sie gelten für beliebig im Raume liegende Flächen.

Wenn in einer Fläche F zwei Curvensysteme a und b zusammengenommen einen Theil dieser Fläche vollständig begrenzen, so bildet jedes andere Curvensystem, das mit a zusammen einen Theil von F vollständig begrenzt, auch mit b die ganze Begrenzung eines Flächentheils, der aus den beiden ersteren Flächentheilen längs a (durch Addition oder Subtraction, jenachdem sie auf entgegengesetzter oder auf gleicher Seite von a liegen) zusammengesetzt ist. Beide Curvensysteme leisten daher für völlige Begrenzung eines Theils von F dasselbe und können für die Erfüllung dieser Forderung einander ersetzen. (1)

Wenn in einer Fläche F sich n geschlossene Curven $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ziehen lassen, welche weder für sich noch mit einander einen Theil dieser

Fläche F vollständig begrenzen, mit deren Zuziehung aber jede andere geschlossene Curve die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche F bilden kann, so heisst die Fläche eine $(n+1)$fach zusammenhängende.

Dieser Charakter der Fläche ist unabhängig von der Wahl des Curvensystems $a_1, a_2, \ldots, a_n$, da je n andere geschlossene Curven $b_1, b_2, \ldots b_n$, welche zu völliger Begrenzung eines Theils dieser Fläche nicht ausreichen, ebenfalls mit jeder andern geschlossenen Curve zusammengenommen einen Theil von F völlig begrenzen.

In der That, da b_1 mit Linien a zusammengenommen einen Theil von F vollständig begrenzt, so kann eine dieser Curven a durch b_1 und die übrigen Curven a ersetzt werden. Es ist daher mit b_1 und diesen $n-1$ Curven a jede andere Curve, und folglich auch b_2, zu völliger Begrenzung eines Theils von F ausreichend, und es kann eine dieser $n-1$ Curven a durch b_1, b_2 und die übrigen $n-2$ Curven a ersetzt werden. Dieses Verfahren kann offenbar, wenn, wie vorausgesetzt, die Curven b zu vollständiger Begrenzung eines Theils von F nicht ausreichen, so lange fortgesetzt werden, bis sämmtliche a durch die b ersetzt worden sind.

Eine $(n+1)$fach zusammenhängende Fläche F kann durch einen Querschnitt — d. h. eine von einem Begrenzungspunkte durch das Innere bis zu einem Begrenzungspunkte geführte Schnittlinie — in eine $n$fach zusammenhängende F' verwandelt werden. Es gelten dabei die durch die Zerschneidung entstehenden Begrenzungstheile schon während der weiteren Zerschneidung als Begrenzung, so dass ein Querschnitt keinen Punkt mehrfach durchschneiden, aber in einem seiner früheren Punkte enden kann.

Da die Linien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu völliger Begrenzung eines Theils von F nicht ausreichen, so muss, wenn man sich F durch diese Linien zerschnitten denkt, sowohl das auf der rechten, als das auf der linken Seite von a_n anliegende Flächenstück noch andere von den Linien a verschiedene und also zur Begrenzung von F gehörige Begrenzungstheile enthalten. Man kann daher von einem Punkte von a_n sowohl in dem einen, als in dem andern dieser Flächenstücke eine die Curven a nicht schneidende Linie bis zur Begrenzung von F ziehen. Diese beiden Linien q' und q'' zusammengenommen bilden alsdann einen Querschnitt q der Fläche F, welcher das Verlangte leistet.

In der That sind in der durch diesen Querschnitt aus F entstehenden Fläche F' die Linien $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ im Innern von F' verlaufende geschlossene Curven, welche zur Begrenzung eines Theils von F, also auch von F' nicht hinreichen. Jede andere im Innern von F' verlaufende geschlossene Curve l aber bildet mit ihnen die ganze Begrenzung eines Theils von F'. Denn die Linie l bildet mit einem

Complex aus den Linien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die ganze Begrenzung eines Theils f von F. Es lässt sich aber zeigen, dass in der Begrenzung desselben a_n nicht vorkommen kann; denn dann würde, je nachdem f auf der linken oder rechten Seite von a_n läge, q' oder q'' aus dem Innern von f nach einem Begrenzungspunkte von F, also nach einem ausserhalb f gelegenen Punkte, führen und also die Begrenzung von f schneiden müssen gegen die Voraussetzung, dass l sowohl als die Linien a, den Durchschnittspunkt von a_n und q ausgenommen, stets im Innern von F' bleiben.

Die Fläche F', in welche F durch den Querschnitt q zerfällt, ist demnach, wie verlangt, eine $n$fach zusammenhängende.

Es soll jetzt bewiesen werden, dass die Fläche F durch jeden Querschnitt p, welcher sie nicht in getrennte Stücke zerfällt, in eine $n$fach zusammenhängende F'' verwandelt wird. Wenn die zu beiden Seiten des Querschnitts p angrenzenden Flächentheile zusammenhängen, so lässt sich eine Linie b von der einen Seite desselben durch das Innere von F'' auf die andere Seite zum Anfangspunkte zurück ziehen. Diese Linie b bildet eine im Innern von F in sich zurücklaufende Linie, welche, da der Querschnitt von ihr aus nach beiden Seiten zu einem Begrenzungspunkte führt, von keinem der beiden Flächenstücke, in welche sie F zerschneidet, die ganze Begrenzung bildet. Man kann daher eine der Curven a durch die Curve b und jede der übrigen $n-1$ Curven a durch eine im Innern von F'' verlaufende Curve und wenn nöthig die Curve b ersetzen, worauf der Beweis, dass F'' $n$fach zusammenhängend ist, durch dieselben Schlüsse, wie vorhin, geführt werden kann.

Eine $(n+1)$fach zusammenhängende Fläche wird daher durch jeden sie nicht in Stücke zerschneidenden Querschnitt in eine $n$fach zusammenhängende verwandelt.

Die durch einen Querschnitt entstandene Fläche kann durch einen neuen Querschnitt weiter zerlegt werden, und bei $n$maliger Wiederholung dieser Operation wird eine $(n+1)$fach zusammenhängende Fläche durch n nach einander gemachte sie nicht zerstückelnde Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt.

Um diese Betrachtungen auf eine Fläche ohne Begrenzung, eine geschlossene Fläche, anwendbar zu machen, muss diese durch Ausscheidung eines beliebigen Punktes in eine begrenzte verwandelt werden, so dass die erste Zerlegung durch diesen Punkt und einen in ihm anfangenden und endenden Querschnitt, also durch eine geschlossene Curve, geschieht. Die Oberfläche eines Ringes z. B., welche eine drei-

fach zusammenhängende ist, wird durch eine geschlossene Curve und einen Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt.

Auf das im Eingange betrachtete Integral des vollständigen Differentials $Xdx + Ydy$ wird nun die eben behandelte Zerschneidung der mehrfach zusammenhängenden Flächen in einfach zusammenhängende, wie folgt, angewandt. Ist die die (x, y)-Ebene bedeckende Fläche T, in welcher X, Y allenthalben stetige der Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

genügende Functionen des Orts sind, $n$fach zusammenhängend, so wird sie durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhängende T' zerschnitten. Die Integration von $Xdx + Ydy$ von einem festen Anfangspunkte aus durch Curven im Innern von T' liefert dann einen nur von der Lage des Endpunkts abhängigen Werth, welcher als Function von dessen Coordinaten betrachtet werden kann. Substituirt man für die Coordinaten die Grössen x, y, so erhält man eine Function

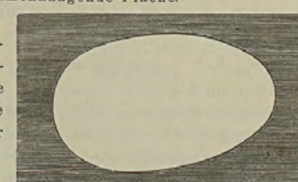
$$z = \int (Xdx + Ydy)$$

von x, y, welche für jeden Punkt von T' völlig bestimmt ist und sich innerhalb T' allenthalben stetig, beim Ueberschreiten eines Querschnitts aber, allgemein zu reden, um eine endliche von einem Knotenpunkte des Schnittnetzes zum andern constante Grösse ändert. Die Aenderungen beim Ueberschreiten der Querschnitte sind von einer der Zahl der Querschnitte gleichen Anzahl von einander unabhängiger Grössen abhängig; denn wenn man das Schnittsystem rückwärts, — die späteren Theile zuerst —, durchläuft, so ist diese Aenderung überall bestimmt, wenn ihr Werth beim Beginn jedes Querschnitts gegeben wird; letztere Werthe aber sind von einander unabhängig.

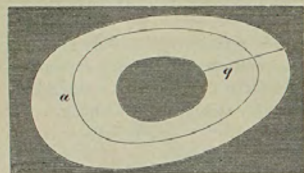
Um das, was oben (S. 92, 93) unter einer $n$fach zusammenhängenden Fläche verstanden wird, anschaulicher zu machen, folgen in den nachstehenden Zeichnungen Beispiele von einfach, zweifach und dreifach zusammenhängenden Flächen.

Einfach zusammenhängende Fläche.

Sie wird durch jeden Querschnitt in getrennte Stücke zerfällt, und es bildet in ihr jede geschlossene Curve die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche.

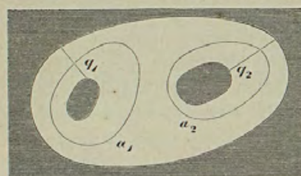


Zweifach zusammenhängende Fläche.

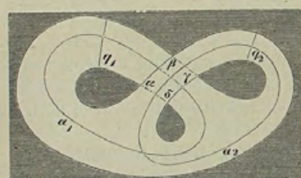


Sie wird durch jeden sie nicht zerstückelnden Querschnitt q in eine einfach zusammenhängende zerschnitten. Mit Zuziehung der Curve a kann in ihr jede geschlossene Curve die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche bilden.

Dreifach zusammenhängende Fläche.



In dieser Fläche kann jede geschlossene Curve mit Zuziehung der Curven a_1 und a_2 die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche bilden. Sie zerfällt durch jeden sie nicht zerstückelnden Querschnitt in eine zweifach zusammenhängende und durch zwei solche Querschnitte, q_1 und q_2, in eine einfach zusammenhängende.



In dem Theile $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ der Ebene ist die Fläche doppelt. Der a_1 enthaltende Arm der Fläche ist als unter dem andern fortgehend betrachtet und daher durch punktirte Linien angedeutet.

3. Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

Wenn in einer Ebene, in welcher die rechtwinkligen Coordinaten eines Punkts x, y sind, der Werth einer Function von $x + yi$ in einer endlichen Linie gegeben ist, so kann diese von dort aus nur auf eine Weise stetig fortgesetzt werden und ist also dadurch völlig bestimmt (siehe oben S. 89). Sie kann aber auch in dieser Linie nicht willkürlich angenommen werden, wenn sie von ihr aus einer stetigen Fortsetzung in die anstossenden Flächentheile nach beiden Seiten hin fähig

sein soll, da sie durch ihren Verlauf in einem noch so kleinen endlichen Theile dieser Linie schon für den übrigen Theil bestimmt ist. Bei dieser Bestimmungsweise einer Function sind also die zu ihrer Bestimmung dienenden Bedingungen nicht von einander unabhängig.

Als Grundlage für die Untersuchung einer Transcendenten ist es vor allen Dingen nöthig, ein System zu ihrer Bestimmung hinreichender von einander unabhängiger Bedingungen aufzustellen. Hierzu kann in vielen Fällen, namentlich bei den Integralen algebraischer Functionen und ihren inversen Functionen, ein Princip dienen, welches Dirichlet zur Lösung dieser Aufgabe für eine der Laplace'schen partiellen Differentialgleichung genügende Function von drei Veränderlichen, — wohl durch einen ähnlichen Gedanken von Gauss veranlasst — in seinen Vorlesungen über die dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportional wirkenden Kräfte seit einer Reihe von Jahren zu geben pflegt. Für diese Anwendung auf die Theorie von Transcendenten ist jedoch gerade ein Fall besonders wichtig, auf welchen dies Princip in seiner dortigen einfachsten Form nicht anwendbar ist, und welcher dort als von ganz untergeordneter Bedeutung unberücksichtigt bleiben kann. Dieser Fall ist der, wenn die Function an gewissen Stellen des Gebiets, wo sie zu bestimmen ist, vorgeschriebene Unstetigkeiten annehmen soll; was so zu verstehen ist, dass sie an jeder solchen Stelle der Bedingung unterworfen ist, unstetig zu werden, wie eine dort gegebene unstetige Function, oder sich nur um eine dort stetige Function von ihr zu unterscheiden. Ich werde hier das Princip in der für die beabsichtigte Anwendung erforderlichen Form darstellen und erlaube mir dabei in Betreff einiger Nebenuntersuchungen auf die in meiner Doctordissertation (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Göttingen 1851) gegebene Darstellung desselben zu verweisen.

Man nehme an, dass eine die (x, y)-Ebene einfach oder mehrfach bedeckende beliebig begrenzte Fläche T und in derselben zwei für jeden ihrer Punkte eindeutig bestimmte reelle Functionen von x, y, die Functionen α und β gegeben seien, und bezeichne das durch die Fläche T ausgedehnte Integral

$$\int\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right)dT$$

durch $\Omega(\alpha)$, wobei die Functionen α und β beliebige Unstetigkeiten besitzen können, wenn nur das Integral dadurch nicht unendlich wird. Es bleibt dann auch $\Omega(\alpha-\lambda)$ endlich, wenn λ allenthalben stetig ist und endliche Differentialquotienten hat. Wird diese stetige Function λ

der Bedingung unterworfen, nur in einem unendlich kleinen Theile der Fläche T von einer unstetigen Function γ verschieden zu sein, so wird $\Omega(\alpha - \lambda)$ unendlich gross, wenn γ längs einer Linie unstetig ist oder in einem Punkte so unstetig ist, dass

$$\int \left(\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} \right)^2 \right) dT$$

unendlich wird (Meine Inaug. Diss. Art. 17); es bleibt aber $\Omega(\alpha - \lambda)$ endlich, wenn γ nur in einzelnen Punkten und nur so unstetig ist, dass

$$\int \left(\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} \right)^2 \right) dT$$

durch die Fläche T erstreckt endlich bleibt, wie z. B. wenn γ in der Umgebung eines Punktes im Abstande r von demselben $= (-\log r)^{\varepsilon}$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ist. Zur Abkürzung mögen hier die Functionen, in welche λ unbeschadet der Endlichkeit von $\Omega(\alpha - \lambda)$ übergehen kann, unstetig von der ersten Art, die Functionen, für welche dies nicht möglich ist, unstetig von der zweiten Art genannt werden. Denkt man sich nun in $\Omega(\alpha - \mu)$ für μ alle stetigen oder von der ersten Art unstetigen Functionen gesetzt, welche an der Grenze verschwinden, so erhält dies Integral immer einen endlichen, aber seiner Natur nach nie einen negativen Werth, und es muss daher wenigstens einmal, für $\alpha - \mu = u$, ein Minimumwerth eintreten, so dass Ω für jede Function $\alpha - \mu$, die unendlich wenig von u verschieden ist, grösser als $\Omega(u)$ wird.

Bezeichnet daher σ eine beliebige stetige oder von erster Art unstetige Function des Orts in der Fläche T, die an der Grenze allenthalben gleich 0 ist, und h eine von x, y unabhängige Grösse, so muss $\Omega(u + h\sigma)$ sowohl für ein positives, als für ein negatives hinreichend kleines h grösser als $\Omega(u)$ werden, und daher in der Entwicklung dieses Ausdrucks nach Potenzen von h der Coefficient von h verschwinden. Ist dieser 0, so ist

$$\Omega(u + h\sigma) = \Omega(u) + h^2 \int \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 \right) dT$$

und folglich Ω immer ein Minimum. Das Minimum tritt nur für eine einzige Function u ein; denn fände auch ein Minimum für $u + \sigma$ statt, so könnte $\Omega(u + \sigma)$ nicht $> \Omega(u)$ sein, weil sonst

$$\Omega(u + h\sigma) < \Omega(u + \sigma)$$

für $h < 1$ würde; also könnte $\Omega(u + \sigma)$ nicht kleiner als die anliegenden Werthe sein. Ist aber $\Omega(u + \sigma) = \Omega(u)$, so muss σ constant, also da es in der Begrenzung 0 ist, überall 0 sein. Es wird daher

nur für eine einzige Function u das Integral Ω ein Minimum und die Variation erster Ordnung oder das h proportionale Glied in $\Omega(u + h\sigma)$

$$2h \int dT \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass das Integral

$$\int \left(\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right)$$

durch die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche T erstreckt stets $= 0$ ist. Zerlegt man nun (nach der vorhergehenden Abhandlung) die Fläche T, wenn sie eine mehrfach zusammenhängende ist, in eine einfach zusammenhängende T', so liefert die Integration durch das Innere von T' von einem festen Anfangspunkte bis zum Punkte (x, y) eine Function von x, y,

$$\nu = \int \left(\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right) + \text{const.},$$

welche in T' überall stetig oder unstetig von der ersten Art ist und sich beim Ueberschreiten der Querschnitte um endliche von einem Knotenpunkte des Schnittnetzes zum andern constante Grössen ändert. Es genügt dann $v = \beta - \nu$ den Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

und folglich ist $u + vi$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial (u + vi)}{\partial y} - i \frac{\partial (u + vi)}{\partial x} = 0$$

oder eine Function von $x + yi$.

Man erhält auf diesem Wege den in der erwähnten Abhandlung Art. 18 ausgesprochenen Satz:

Ist in einer zusammenhängenden durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende T' zerlegten Fläche T eine complexe Function $\alpha + \beta i$ von x, y gegeben, für welche

$$\int \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right) dT$$

durch die ganze Fläche ausgedehnt einen endlichen Werth hat, so kann sie immer und nur auf Eine Art in eine Function von $x + yi$ verwandelt werden durch Subtraction einer Function $\mu + \nu i$ von x, y, welche folgenden Bedingungen genügt:

1) *μ ist am Rande $= 0$ oder doch nur in einzelnen Punkten davon verschieden, ν in Einem Punkte beliebig gegeben.*

2) *Die Aenderungen von μ sind in T, von ν in T' nur in einzelnen Punkten und nur so unstetig, dass*

$$\int\left(\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right)dT$$

und

$$\int\left(\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2\right)dT,$$

durch die ganze Fläche erstreckt, endlich bleiben, und letztere längs der Querschnitte beiderseits gleich.

Wenn die Function $\alpha+\beta i$, wo ihre Differentialquotienten unendlich werden, unstetig wird, wie eine gegebene dort unstetige Function von $x+yi$, und keine durch eine Abänderung ihres Werthes in einem einzelnen Punkte hebbare Unstetigkeit besitzt, so bleibt $\Omega(\alpha)$ endlich, und es wird $\mu+\nu i$ in T' allenthalben stetig. Denn da eine Function von $x+yi$ gewisse Unstetigkeiten, wie z. B. Unstetigkeiten erster Art, gar nicht annehmen kann (Meine Diss. Art. 12), so muss die Differenz zweier solcher Functionen stetig sein, sobald sie nicht von der zweiten Art unstetig ist.

Nach dem eben bewiesenen Satze lässt sich daher eine Function von $x+yi$ so bestimmen, dass sie im Innern von T, von der Unstetigkeit des imaginären Theils in den Querschnitten abgesehen, gegebene Unstetigkeiten annimmt, und ihr reeller Theil an der Grenze einen dort allenthalben beliebig gegebenen Werth erhält; wenn nur für jeden Punkt, wo ihre Differentialquotienten unendlich werden sollen, die vorgeschriebene Unstetigkeit die einer gegebenen dort unstetigen Function von $x+yi$ ist. Die Bedingung an der Grenze kann man, wie leicht zu sehen, ohne eine wesentliche Aenderung der gemachten Schlüsse durch manche andere ersetzen.

4. Theorie der Abel'schen Functionen.

In der folgenden Abhandlung habe ich die Abel'schen Functionen nach einer Methode behandelt, deren Principien in meiner Inauguraldissertation*) aufgestellt und in einer etwas veränderten Form in den drei vorhergehenden Aufsätzen dargestellt worden sind. Zur Erleichterung der Uebersicht schicke ich eine kurze Inhaltsangabe voraus.

Die erste Abtheilung enthält die Theorie eines Systems von gleichverzweigten algebraischen Functionen und ihren Integralen, soweit für dieselbe nicht die Betrachtung von ϑ-Reihen massgebend ist, und handelt

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Göttingen 1851.

im §. 1—5 von der Bestimmung dieser Functionen durch ihre Verzweigungsart und ihre Unstetigkeiten, im §. 6—10 von den rationalen Ausdrücken derselben in zwei durch eine algebraische Gleichung verknüpfte veränderliche Grössen, und im §. 11—13 von der Transformation dieser Ausdrücke durch rationale Substitutionen. Der bei dieser Untersuchung sich darbietende Begriff einer Klasse von algebraischen Gleichungen, welche sich durch rationale Substitutionen in einander transformiren lassen, dürfte auch für andere Untersuchungen wichtig und die Transformation einer solchen Gleichung in Gleichungen niedrigsten Grades ihrer Klasse (§. 13) auch bei anderen Gelegenheiten von Nutzen sein. Diese Abtheilung behandelt endlich im §. 14—16 zur Vorbereitung der folgenden die Anwendung des Abel'schen Additionstheorems für ein beliebiges System allenthalben endlicher Integrale von gleichverzweigten algebraischen Functionen zur Integration eines Systems von Differentialgleichungen.

In der zweiten Abtheilung werden für ein beliebiges System von immer endlichen Integralen gleichverzweigter, algebraischer, $\overline{2p+1}$fach zusammenhängender Functionen die Jacobi'schen Umkehrungsfunctionen von p veränderlichen Grössen durch $p$fach unendliche ϑ-Reihen ausgedrückt, d. h. durch Reihen von der Form

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^p e^{\left(\sum\limits_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_1^p v_\mu m_\mu},$$

worin die Summationen im Exponenten sich auf μ und μ', die äusseren Summationen auf $m_1, m_2, \ldots, m_p$ beziehen. Es ergiebt sich, dass zur allgemeinen Lösung dieser Aufgabe eine — wenn $p>3$ specielle — Gattung von ϑ-Reihen ausreicht, in denen zwischen den $\frac{p(p+1)}{2}$ Grössen a $\frac{(p-2)(p-3)}{1.2}$ Relationen stattfinden, so dass nur $3p-3$ willkürlich bleiben. Dieser Theil der Abhandlung bildet zugleich eine Theorie dieser speciellen Gattung von ϑ-Functionen; die allgemeinen ϑ-Functionen bleiben hier ausgeschlossen, lassen sich jedoch nach einer ganz ähnlichen Methode behandeln.

Das hier erledigte Jacobi'sche Umkehrungsproblem ist für die hyperelliptischen Integrale schon auf mehreren Wegen durch die beharrlichen mit so schönem Erfolge gekrönten Arbeiten von Weierstrass gelöst worden, von denen eine Uebersicht im 47. Bande des Journ. für Mathem. (S. 289) mitgetheilt worden ist. Es ist jedoch bis jetzt nur von dem Theile dieser Arbeiten, welcher in den §§. 1 und 2 und der ersten die elliptischen Functionen betreffenden Hälfte des §. 3 der angeführten Abhandlung skizzirt wird, die wirkliche Ausführung veröffentlicht (Bd. 52, S. 285 d. Journ. f. Math.); in wie weit zwischen den späteren Theilen dieser Arbeiten und meinen hier dargestellten eine Uebereinstimmung nicht bloss in Resultaten, sondern auch in den zu ihnen führenden Methoden stattfindet, wird grossentheils erst die versprochene ausführliche Darstellung derselben ergeben können.

Die gegenwärtige Abhandlung bildet mit Ausnahme der beiden letzten §§. 26 und 27, deren Gegenstand damals nur kurz angedeutet werden konnte, einen Auszug aus einem Theile meiner von Michaelis 1855 bis Michaelis 1856 zu Göttingen gehaltenen Vorlesungen. Was die Auffindung der einzelnen Resultate betrifft, so wurde ich auf das im §. 1—5, 9 und 12 Mitgetheilte und die dazu nöthigen vorbereitenden Sätze, welche später Behufs der Vorlesungen so, wie es in dieser Abhandlung geschehen ist, weiter ausgeführt wurden, im Herbste 1851 und zu Anfang 1852 durch Untersuchungen über die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen geführt, ward aber dann durch einen andern Gegenstand von dieser Untersuchung abgezogen. Erst um Ostern 1855 wurde sie wieder aufgenommen und in den Oster- und Michaelisferien jenes Jahres bis zu §. 21 incl. fortgeführt; das Uebrige wurde bis Michaelis 1856 hinzugefügt. Einzelne ergänzende Zusätze sind an manchen Stellen während der Ausarbeitung hinzugekommen.

Erste Abtheilung.

1.

Ist s die Wurzel einer irreductibeln Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten ganze Functionen $m$ten Grades von z sind, so entsprechen jedem Werthe von z n Werthe von s, die sich mit z überall, wo sie nicht unendlich werden, stetig ändern. Stellt man daher (nach S. 90) die Verzweigungsart dieser Function durch eine in der z-Ebene ausgebreitete unbegrenzte Fläche T dar, so ist diese in jedem Theile der Ebene $n$fach, und s ist dann eine einwerthige Function des Orts in dieser Fläche. Eine unbegrenzte Fläche kann entweder als eine Fläche mit unendlich weit entfernter Begrenzung oder als eine geschlossene angesehen werden, und Letzteres soll bei der Fläche T geschehen, so dass dem Werthe $z = \infty$ in jedem der n Blätter der Fläche Ein Punkt entspricht, wenn nicht etwa für $z = \infty$ eine Verzweigung stattfindet.

Jede rationale Function von s und z ist offenbar ebenfalls eine einwerthige Function des Orts in der Fläche T und besitzt also die-

selbe Verzweigungsart wie die Function s, und es wird sich unten ergeben, dass auch das Umgekehrte gilt.

Durch Integration einer solchen Function erhält man eine Function, deren verschiedene Fortsetzungen für denselben Theil der Fläche T sich nur um Constanten unterscheiden, da ihre Derivirte für denselben Punkt dieser Fläche immer denselben Werth wieder annimmt.

Ein solches System von gleichverzweigten algebraischen Functionen und Integralen dieser Functionen bildet zunächst den Gegenstand unserer Betrachtung; statt aber von diesen Ausdrücken dieser Functionen auszugehen, werden wir sie mit Anwendung des Dirichlet'schen Princips (S. 99) durch ihre Unstetigkeiten definiren.

2.

Zur Vereinfachung des Folgenden heisse eine Function *für einen Punkt der Fläche T unendlich klein von der ersten Ordnung,* wenn ihr Logarithmus bei einem positiven Umlaufe um ein diesen Punkt umgebendes Flächenstück, in welchem sie endlich und von Null verschieden bleibt, um $2\pi i$ wächst. Es ist demnach für einen Punkt, um den die Fläche T sich μ mal windet, wenn dort z einen endlichen Werth a hat, $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$, also $(dz)^{\frac{1}{\mu}}$, wenn aber $z = \infty$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ unendlich klein von der ersten Ordnung. Der Fall, wo eine Function in einem Punkte der Fläche T unendlich klein oder unendlich gross von der νten Ordnung wird, kann so betrachtet werden, als wenn die Function in ν dort zusammenfallenden (oder unendlich nahen) Punkten unendlich klein oder unendlich gross von der ersten Ordnung wird, wie in der Folge bisweilen geschehen soll.

Die Art und Weise, wie jene hier zu betrachtenden Functionen unstetig werden, kann dann so ausgedrückt werden. Wird eine von ihnen in einem Punkte der Fläche T unendlich, so kann sie, wenn r eine beliebige Function bezeichnet, die in diesem Punkte unendlich klein von der ersten Ordnung wird, stets durch Subtraction eines endlichen Ausdrucks von der Form

$$A \log r + Br^{-1} + Cr^{-2} + \cdots$$

in eine dort stetige verwandelt werden, wie sich aus den bekannten — nach Cauchy oder durch die Fourier'sche Reihe zu beweisenden — Sätzen über die Entwicklung einer Function in Potenzreihen ergiebt.

3.

Man denke sich jetzt eine in der z-Ebene allenthalben n fach ausgebreitete unbegrenzte und nach dem Obigen als geschlossen zu betrachtende zusammenhängende Fläche T gegeben und diese in eine einfach zusammenhängende T' zerschnitten. Da die Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche aus Einem Stücke besteht, eine geschlossene Fläche aber durch eine ungerade Anzahl von Schnitten eine gerade Zahl von Begrenzungsstücken, durch eine gerade eine ungerade erhält, so ist zu dieser Zerschneidung eine gerade Anzahl von Schnitten erforderlich. Die Anzahl dieser Querschnitte sei $= 2p$. Die Zerschneidung werde zur Vereinfachung des Folgenden so ausgeführt, dass jeder spätere Schnitt von einem Punkte eines früheren bis zu dem anstossenden Punkte auf der anderen Seite desselben geht: wenn sich dann eine Grösse längs der ganzen Begrenzung von T' stetig ändert und im ganzen Schnittsysteme zu beiden Seiten gleiche Aenderungen erleidet, so ist die Differenz der beiden Werthe, die sie in demselben Punkte des Schnittnetzes annimmt, in allen Theilen Eines Querschnitts derselben Constanten gleich.

Man setze nun $z = x + yi$ und nehme in T eine Function $\alpha + \beta i$ von x, y folgendermassen an:

In der Umgebung der Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ bestimme man sie gleich gegebenen in diesen Punkten unendlich werdenden Functionen von $x + yi$, und zwar um ε_ν, indem man eine beliebige Function von z, die in ε_ν unendlich klein von der ersten Ordnung wird, durch r_ν bezeichnet, gleich einem endlichen Ausdrucke von der Form

$$A_\nu \log r_\nu + B_\nu r_\nu^{-1} + C_\nu r_\nu^{-2} + \cdots = \varphi_\nu(r_\nu),$$

worin A_ν, B_ν, C_ν, ... willkürliche Constanten sind. Man ziehe ferner nach einem beliebigen Punkte von allen Punkten ε, für welche die Grösse A von Null verschieden ist, einander nicht schneidende Linien durch das Innere von T', von ε_ν die Linie l_ν. Man nehme endlich die Function in der ganzen noch übrigen Fläche T so an, dass sie ausser den Linien l und den Querschnitten überall stetig, auf der positiven (linken) Seite der Linie l_ν um $-2\pi i A_\nu$ und auf der positiven Seite des νten Querschnitts um die gegebene Constante $h^{(\nu)}$ grösser ist, als auf der andern, und dass das Integral

$$\int \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \Big) \, dT$$

durch die Fläche T ausgedehnt einen endlichen Werth erhält. Dies ist wie leicht zu sehen immer möglich, wenn die Summe sämmtlicher

Grössen A gleich Null ist, aber auch nur unter dieser Bedingung, weil nur dann die Function nach einem Umlaufe um das System der Linien l den vorigen Werth wieder annehmen kann.

Die Constanten $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(2p)}$, um welche eine solche Function auf der positiven Seite der Querschnitte grösser ist, als auf der andern, sollen die *Periodicitätsmoduln* dieser Function genannt werden.

Nach dem Dirichlet'schen Princip kann nun die Function $\alpha + \beta i$ in eine Function ω von $x + yi$ verwandelt werden durch Subtraction einer ähnlichen in T' allenthalben stetigen Function von x, y mit rein imaginären Periodicitätsmoduln, und diese ist bis auf eine additive Constante völlig bestimmt. Die Function ω stimmt dann mit $\alpha + \beta i$ in den Unstetigkeiten im Innern von T' und in den reellen Theilen der Periodicitätsmoduln überein. Für ω können daher die Functionen φ_ν und die reellen Theile ihrer Periodicitätsmoduln willkürlich gegeben werden. Durch diese Bedingungen ist sie bis auf eine additive Constante völlig bestimmt, folglich auch der imaginäre Theil ihrer Periodicitätsmoduln.

Es wird sich zeigen, dass diese Function ω sämmtliche im §. 1 bezeichneten Functionen als specielle Fälle unter sich enthält.

4.

Allenthalben endliche Functionen ω. (Integrale erster Gattung.)

Wir wollen jetzt die einfachsten von ihnen betrachten und zwar zuerst diejenigen, die immer endlich bleiben und also im Innern von T' allenthalben stetig sind. Sind $w_1, w_2, \ldots, w_p$ solche Functionen, so ist auch

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.},$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ beliebige Constanten sind, eine solche Function. Es seien die Periodicitätsmoduln der Functionen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ für den νten Querschnitt $k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)}, \ldots, k_p^{(\nu)}$. Der Periodicitätsmodul von w für diesen Querschnitt ist dann $\alpha_1 k_1^{(\nu)} + \alpha_2 k_2^{(\nu)} + \cdots + \alpha_p k_p^{(\nu)} = k^{(\nu)}$; und setzt man die Grössen α in die Form $\gamma + \delta i$, so sind die reellen Theile der $2p$ Grössen $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(2p)}$ lineare Functionen der Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$. Wenn nun zwischen den Grössen w_1, $w_2, \ldots, w_p$ keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet, so kann die Determinante dieser linearen Ausdrücke nicht verschwinden; denn es liessen sich sonst die Verhältnisse der Grössen α so bestimmen, dass die Periodicitätsmoduln des reellen Theils von w sämmtlich 0 würden, folglich der reelle Theil von w und also auch w

selbst nach dem Dirichlet'schen Princip eine Constante sein müsste. Es können daher dann die $2p$ Grössen γ und δ so bestimmt werden, dass die reellen Theile der Periodicitätsmoduln gegebene Werthe erhalten; und folglich kann w jede immer endlich bleibende Function ω darstellen, wenn $w_1, w_2, \ldots, w_p$ keiner linearen Gleichung mit constanten Coefficienten genügen. Diese Functionen lassen sich aber immer dieser Bedingung gemäss wählen; denn so lange $\mu < p$, finden zwischen den Periodicitätsmoduln des reellen Theils von

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_\mu w_\mu + \text{const.}$$

lineare Bedingungsgleichungen statt; es ist daher $w_{\mu+1}$ nicht in dieser Form enthalten, wenn man, was nach dem Obigen immer möglich ist, die Periodicitätsmoduln des reellen Theils dieser Function so bestimmt, dass sie diesen Bedingungsgleichungen nicht genügen.

Functionen ω, die für einen Punkt der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung werden. (Integrale zweiter Gattung.)

Es sei ω nur für einen Punkt ε der Fläche T unendlich, und für diesen seien alle Coefficienten in φ ausser B gleich 0. Eine solche Function ist dann bis auf eine additive Constante bestimmt durch die Grösse B und die reellen Theile ihrer Periodicitätsmoduln. Bezeichnet $t^0(\varepsilon)$ irgend eine solche Function, so können in dem Ausdrucke

$$t(\varepsilon) = \beta t^0(\varepsilon) + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

die Constanten $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ immer so bestimmt werden, dass für ihn die Grösse B und die reellen Theile der Periodicitätsmoduln beliebig gegebene Werthe erhalten. Dieser Ausdruck stellt also jede solche Function dar.

Functionen ω, welche für zwei Punkte der Fläche T logarithmisch unendlich werden. (Integrale dritter Gattung.)

Betrachten wir drittens den Fall, wo die Function ω nur logarithmisch unendlich wird, so muss dies, da die Summe der Grössen A gleich 0 sein muss, wenigstens für zwei Punkte der Fläche T, ε_1 und ε_2, geschehen und $A_2 = -A_1$ sein. Ist von den Functionen, bei denen dies statt hat und die beiden letztern Grössen $= 1$ sind, irgend eine $\varpi^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, so sind nach ähnlichen Schlüssen, wie oben, alle übrigen in der Form

$$\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varpi^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

enthalten.

Für die folgenden Bemerkungen nehmen wir zur Vereinfachung an, dass die Punkte ε keine Verzweigungspunkte sind und nicht im Unendlichen liegen. Man kann dann $r_\nu = z - z_\nu$ setzen, indem man durch z_ν den Werth von z in ε_ν bezeichnet. Wenn man dann $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ so nach z_1 differentiirt, dass die reellen Theile der Periodicitätsmoduln (oder auch p von den Periodicitätsmoduln) und der Werth von $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ für einen beliebigen Punkt der Fläche T constant bleiben, so erhält man eine Function $t(\varepsilon_1)$, die in ε_1 unstetig wie $\frac{1}{z - z_1}$ wird. Umgekehrt ist, wenn $t(\varepsilon_1)$ eine solche Function ist, $\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} t(\varepsilon_1)\, dz_1$, durch eine beliebige in T von ε_2 nach ε_3 führende Linie genommen, gleich einer Function $\varpi(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Auf ähnliche Art erhält man durch n successive Differentiationen eines solchen $t(\varepsilon_1)$ nach z_1 Functionen ω, welche im Punkte ε_1 wie $n!(z - z_1)^{-n-1}$ unstetig werden und übrigens endlich bleiben.

Für die ausgeschlossenen Lagen der Punkte ε bedürfen diese Sätze einer leichten Modification.

Offenbar kann nun ein mit constanten Coefficienten aus Functionen w, aus Functionen ϖ und ihren Derivirten nach den Unstetigkeitswerthen gebildeter linearer Ausdruck so bestimmt werden, dass er im Innern von T' beliebig gegebene Unstetigkeiten von der Form, wie ω, erhält, und die reellen Theile seiner Periodicitätsmoduln beliebig gegebene Werthe annehmen. Durch einen solchen Ausdruck kann also jede gegebene Function ω dargestellt werden.

5.

Der allgemeine Ausdruck einer Function ω, die für m Punkte der Fläche T, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ unendlich gross von der ersten Ordnung wird, ist nach dem Obigen

$$s = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \cdots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.},$$

worin t_ν eine beliebige Function $t(\varepsilon_\nu)$ und die Grössen α und β Constanten sind. Wenn von den m Punkten ε eine Anzahl ϱ in denselben Punkt η der Fläche T zusammenfallen, so sind die ϱ diesen Punkten zugehörigen Functionen t zu ersetzen durch eine Function $t(\eta)$ und deren $\varrho - 1$ erste Derivirte nach ihrem Unstetigkeitswerthe (§. 2).

Die $2p$ Periodicitätsmoduln dieser Function s sind lineare homogene Functionen der $p + m$ Grössen α und β. Wenn $m \geqq p + 1$, lassen sich also $2p$ von den Grössen α und β als lineare homogene Functionen der übrigen so bestimmen, dass die Periodicitätsmoduln sämmtlich 0 werden. Die Function enthält dann noch $m-p+1$ willkürliche Constanten, von denen sie eine lineare homogene Function ist, und kann als ein linearer Ausdruck von $m-p$ Functionen betrachtet werden, deren jede nur für $p+1$ Werthe unendlich von der ersten Ordnung wird.

Wenn $m=p+1$ ist, so sind die Verhältnisse der $2p+1$ Grössen α und β bei jeder Lage der $p+1$ Punkte ε völlig bestimmt. Es können jedoch für besondere Lagen dieser Punkte einige der Grössen β gleich 0 werden. Die Anzahl dieser Grössen sei $=m-\mu$, so dass die Function nur für μ Punkte unendlich von der ersten Ordnung wird. Diese μ Punkte müssen dann eine solche Lage haben, dass von den $2p$ Bedingungsgleichungen zwischen den $p+\mu$ übrigen Grössen β und α $p+1-\mu$ eine identische Folge der übrigen sind, und es können daher nur $2\mu-p-1$ von ihnen beliebig gewählt werden. Ausserdem enthält die Function noch 2 willkürliche Constanten.

Es sei nun s so zu bestimmen, dass μ möglichst klein wird. Wenn s μ mal unendlich von der ersten Ordnung wird, so ist dies auch mit jeder rationalen Function ersten Grades von s der Fall; man kann daher für die Lösung dieser Aufgabe einen der μ Punkte beliebig wählen. Die Lage der übrigen muss dann so bestimmt werden, dass $p+1-\mu$ von den Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen α und β eine identische Folge der übrigen sind; es muss also, wenn die Verzweigungswerthe der Fläche T nicht besondern Bedingungsgleichungen genügen, $p+1-\mu \leqq \mu-1$ oder $\mu \geqq \frac{1}{2}p+1$ sein.

Die Anzahl der in einer Function s, die nur für m Punkte der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung wird und übrigens stetig bleibt, enthaltenen willkürlichen Constanten ist in allen Fällen $=2m-p+1$.

Eine solche Function ist die Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten ganze Functionen m^{ten} Grades von z sind.

Sind $s_1, s_2, \ldots, s_n$ die n Werthe der Function s für dasselbe z, und bezeichnet σ eine beliebige Grösse, so ist $(\sigma-s_1)(\sigma-s_2)\ldots(\sigma-s_n)$ eine einwerthige Function von z, die nur für einen Punkt der z-Ebene, der mit einem Punkte ε zusammenfällt, unendlich wird und unendlich von einer so hohen Ordnung, als Punkte ε auf ihn fallen. In der That wird für jeden auf ihn fallenden Punkt ε, der kein Verzweigungspunkt ist, nur *ein* Factor dieses Products von einer um 1 höheren Ordnung unendlich, für einen Punkt ε, um den die Fläche T sich μ mal windet, aber μ Factoren von einer um $\frac{1}{\mu}$ höheren Ordnung. Bezeichnet man nun die Werthe von z in *den* Punkten ε, wo z nicht

unendlich ist, durch $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu$ und $(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\ldots(z-\zeta_\nu)$ durch a_0, so ist $a_0(\sigma-s_1)\ldots(\sigma-s_n)$ eine einwerthige Function von z, die für alle endlichen Werthe von z endlich ist und für $z=\infty$ unendlich von der m^{ten} Ordnung wird, also eine ganze Function m^{ten} Grades von z. Sie ist zugleich eine ganze Function n^{ten} Grades von σ, die für $\sigma=s$ verschwindet. Bezeichnet man sie durch F und, wie wir in der Folge thun wollen, *eine ganze Function F n^{ten} Grades von σ und m^{ten} Grades von z* durch $F(\overset{n}{\sigma}, \overset{m}{z})$, so ist s die Wurzel der Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z})=0$.

Die Function F ist eine Potenz einer unzerfällbaren — d. h. nicht als ein Product aus ganzen Functionen von σ und z darstellbaren — Function. Denn jeder ganze rationale Factor von $F(\sigma, z)$ bildet, da er für einige der Wurzeln $s_1, s_2, \ldots s_n$ verschwinden muss, für $\sigma=s$ eine Function von z, die in einem Theile der Fläche T verschwindet und folglich, da diese Fläche zusammenhängend ist, in der ganzen Fläche 0 sein muss. Zwei unzerfällbare Factoren von $F(\sigma, z)$ könnten aber nur für eine endliche Anzahl von Werthenpaaren zugleich verschwinden, wenn die eine nicht durch Multiplication mit einer Constanten aus der andern erhalten werden könnte. Folglich muss F eine Potenz einer unzerfällbaren Function sein.

Wenn der Exponent ν dieser Potenz >1 ist, so wird die Verzweigungsart der Function s nicht dargestellt durch die Fläche T, sondern durch eine in der z-Ebene allenthalben $\frac{n}{\nu}$fach ausgebreitete Fläche τ, in welcher die Fläche T allenthalben ν fach ausgebreitet ist. Es kann dann zwar s als eine wie T verzweigte Function betrachtet werden, nicht aber umgekehrt T als verzweigt, wie s.

Eine solche nur in einzelnen Punkten von T unstetige Function, wie s, ist auch $\frac{d\omega}{dz}$. Denn diese Function nimmt zu beiden Seiten der Querschnitte und der Linien l denselben Werth an, da die Differenz der beiden Werthe von ω in diesen Linien längs denselben constant ist; sie kann nur unendlich werden, wo ω unendlich wird, und in den Verzweigungspunkten der Fläche und ist sonst allenthalben stetig, da die Derivirte einer einändrig und endlich bleibenden Function ebenfalls einändrig und endlich bleibt.

Es sind daher sämmtliche Functionen ω algebraische wie T verzweigte Functionen von z oder Integrale solcher Functionen. Dieses System von Functionen ist bestimmt, wenn die Fläche T gegeben ist und hängt nur von der Lage ihrer Verzweigungspunkte ab.

6.

Es sei jetzt die irreductible Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ gegeben und die Art der Verzweigung der Function s oder der sie darstellenden Fläche T zu bestimmen. Wenn für einen Werth β von z μ Zweige der Function zusammenhängen, so dass einer dieser Zweige sich erst nach μ Umläufen des z um β wieder in sich selbst fortsetzt, so können diese μ Zweige der Function (wie nach Cauchy oder durch die Fourier'sche Reihe leicht bewiesen werden kann) dargestellt werden durch eine Reihe nach steigenden rationalen Potenzen von $z - \beta$ mit Exponenten vom kleinsten gemeinschaftlichen Nenner μ, und umgekehrt.

Ein Punkt der Fläche T, in welchem nur zwei Zweige einer Function zusammenhängen, so dass sich um diesen Punkt der erste in den zweiten und dieser in jenen fortsetzt, heisse ein *einfacher Verzweigungspunkt*.

Ein Punkt der Fläche, um welchen sie sich $(\mu + 1)$mal windet, kann dann angesehen werden als μ zusammengefallene (oder unendlich nahe) einfache Verzweigungspunkte.

Um dies zu zeigen, seien in einem diesen Punkt umgebenden Stücke der z-Ebene $s_1, s_2, \ldots s_{\mu+1}$ einändrige Zweige der Function s und in der Begrenzung desselben, bei positiver Umschreibung auf einander folgend, $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ einfache Verzweigungspunkte. Durch einen positiven Umlauf um a_1 werde s_1 mit s_2, um a_2 s_1 mit $s_3, \ldots,$ um a_μ s_1 mit $s_{\mu+1}$ vertauscht. Es gehen dann nach einem positiven Umlaufe um ein alle diese Punkte (und keinen andern Verzweigungspunkt) enthaltendes Gebiet

$$s_1, s_2, \ldots, s_\mu, s_{\mu+1}$$

$$\text{in } s_2, s_3, \ldots, s_{\mu+1}, s_1, \text{ über,}$$

und es entsteht daher, wenn sie zusammenfallen, ein μfacher Windungspunkt.

Die Eigenschaften der Functionen ω hängen wesentlich davon ab, wie vielfach zusammenhängend die Fläche T ist. Um dies zu entscheiden, wollen wir zunächst die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte der Function s bestimmen.

In einem Verzweigungspunkte nehmen die dort zusammenhängenden Zweige der Function denselben Werth an, und es werden daher zwei oder mehrere Wurzeln der Gleichung

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

einander gleich. Dies kann nur geschehen, wenn

$$F'(s) = a_0 n s^{n-1} + a_1 \overline{n-1}\, s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

oder die einwerthige Function von z, $F'(s_1) F'(s_2) \ldots F'(s_n)$, verschwindet. Diese Function wird für endliche Werthe von z nur unendlich, wenn $s = \infty$, also $a_0 = 0$ ist und muss, um endlich zu bleiben, mit a_0^{n-2} multiplicirt werden. Sie wird dann eine einwerthige, für ein endliches z endliche Function von z, welche für $z = \infty$ unendlich von der $2m(n-1)$ten Ordnung wird, also eine ganze Function $2m(n-1)$ten Grades. Die Werthe von z, für welche $F'(s)$ und $F(s)$ gleichzeitig verschwinden, sind also die Wurzeln der Gleichung $2m(n-1)$ten Grades

$$Q(z) = a_0^{n-2} \prod_i F'(s_i) = 0 \text{ oder auch, da } F'(s_i) = a_0 \prod_{i'} (s_i - s_{i'}), \ (i \gtrless i'),$$

$$= a_0^{2(n-1)} \prod_{i,\,i'} (s_i - s_{i'}) = 0, \ (i \gtrless i'),$$

welche durch Elimination von s aus $F'(s) = 0$ und $F(s) = 0$ gebildet werden kann.

Wird $F(s, z) = 0$ für $s = \alpha$, $z = \beta$, so ist

$$F(s, z) = \frac{\partial F}{\partial s}(s - \alpha) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - \beta)$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s-\alpha)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z}(s-\alpha)(z-\beta) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z-\beta)^2\right\}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots,$$

$$F'(s) = \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s-\alpha) + \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z}(z-\beta) + \cdots$$

Ist also für $(s = \alpha, z = \beta)$ $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$ und verschwinden $\frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$ dann nicht, so wird $s - \alpha$ unendlich klein, wie $(z - \beta)^{\frac{1}{2}}$, und findet also ein einfacher Verzweigungspunkt statt. Es werden zugleich in dem Producte $\prod_i F'(s_i)$ zwei Factoren unendlich klein wie $(z - \beta)^{\frac{1}{2}}$, und $Q(z)$ erhält dadurch den Factor $(z - \beta)$. In dem Falle, dass $\frac{\partial F}{\partial z}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$ nie verschwinden, wenn gleichzeitig $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$ werden, entspricht demnach jedem linearen Factor von $Q(z)$ *ein* einfacher Verzweigungspunkt, und die Anzahl dieser Punkte ist also $= 2m(n-1)$.

Die Lage der Verzweigungspunkte hängt von den Coefficienten der Potenzen von z in den Functionen a ab und ändert sich stetig mit denselben.

Wenn diese Coefficienten solche Werthe annehmen, dass zwei demselben Zweigepaar angehörige einfache Verzweigungspunkte zusammenfallen, so heben diese sich auf, und es werden zwei Wurzeln von $F(s)$ einander gleich, ohne dass eine Verzweigung stattfindet. Setzt sich um jeden von ihnen s_1 in s_2 und s_2 in s_1 fort, so geht durch einen Umlauf um ein beide enthaltendes Stück der z-Ebene s_1 in s_1 und s_2 in s_2 über, und beide Zweige werden einändrig, wenn sie zusammenfallen. Es bleibt dann also auch ihre Derivirte $\frac{ds}{dz}$ einändrig und endlich, und folglich wird $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{ds}{dz}\frac{\partial F}{\partial s} = 0$.

Wird $F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ für $s = \alpha$, $z = \beta$, so ergeben sich aus den drei folgenden Gliedern der Entwicklung von $F(s, z)$ zwei Werthe für $\frac{s-\alpha}{z-\beta} = \frac{ds}{dz}$, $(s = \alpha, z = \beta)$. Sind diese Werthe ungleich und endlich, so können die beiden Zweige der Function s, denen sie angehören, dort nicht zusammenhängen und sich nicht verzweigen. Es wird dann $\frac{\partial F}{\partial s}$ für beide unendlich klein wie $z-\beta$, und $Q(z)$ erhält dadurch den Factor $(z-\beta)^2$; es fallen also nur zwei einfache Verzweigungspunkte zusammen.

Um in jedem Falle, wenn für $z = \beta$ mehrere Wurzeln der Gleichung $F(s) = 0$ gleich α werden, zu entscheiden, wie viele einfache Verzweigungspunkte für $(s = \alpha, z = \beta)$ zusammenfallen, und wie viele von diesen sich aufheben, muss man diese Wurzeln (nach dem Verfahren von **Lagrange***) soweit nach steigenden Potenzen von $z-\beta$ entwickeln, bis diese Entwicklungen sämmtlich von einander verschieden werden, wodurch sich die wirklich noch stattfindenden Verzweigungen ergeben. Und man muss dann untersuchen, von welcher Ordnung $F'(s)$ für jede dieser Wurzeln unendlich klein wird, um die Anzahl der ihnen zugehörigen linearen Factoren von $Q(z)$ oder der für $(s = \alpha, z = \beta)$ zusammengefallenen einfachen Verzweigungspunkte zu bestimmen.

Bezeichnet die Zahl ϱ, wie oft sich die Fläche T um den Punkt (s, z) windet, so wird im Punkte (z) $F'(s)$ so oft unendlich klein von der ersten Ordnung, als dort einfache Verzweigungspunkte zusammenfallen, $dz^{1-\frac{1}{\varrho}}$ so oft, als deren wirklich stattfinden, folglich $F'(s)\,dz^{\frac{1}{\varrho}-1}$ so oft, als von ihnen sich aufheben.

Ist die Anzahl der wirklich stattfindenden einfachen Verzweigungen w, die Anzahl der sich aufhebenden $2r$, so ist

$$\mathrm{w} + 2r = 2(n-1)m.$$

---

*) Lagrange, Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. Mém. de l'Académie de Berlin XXIV 1780, Oeuvres de Lagrange Tome III p. 5. W.

Nimmt man an, dass die Verzweigungspunkte nur paarweise und sich aufhebend zusammenfallen, so ist für r Werthenpaare $(s = \gamma_\varrho, z = \delta_\varrho)$

$$F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z}\right)^2$$

nicht Null und für w Werthenpaare von s und z $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ nicht Null und $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$ nicht Null.

Wir beschränken uns meistens auf die Behandlung dieses Falles, da sich die Resultate auf die übrigen als Grenzfälle desselben leicht ausdehnen lassen, und wir können dies hier um so mehr thun, da wir die Theorie dieser Functionen auf eine von der Ausdrucksform unabhängige, keinen Ausnahmefällen unterworfene Grundlage gestützt haben.

7.

Es findet nun bei einer einfach zusammenhängenden, über einen endlichen Theil der z-Ebene ausgebreiteten Fläche zwischen der Anzahl ihrer einfachen Verzweigungspunkte und der Anzahl der Umdrehungen, welche die Richtung ihrer Begrenzungslinie macht, die Relation statt, dass die letztere um eine Einheit grösser ist, als die erstere; und aus dieser ergiebt sich für eine mehrfach zusammenhängende Fläche eine Relation zwischen diesen Anzahlen und der Anzahl der Querschnitte, welche sie in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Wir können diese Relation, welche im Grunde von Massverhältnissen unabhängig ist und der *analysis situs* angehört, hier für die Fläche T so ableiten.

Nach dem **Dirichlet**'schen Princip lässt sich in der einfach zusammenhängenden Fläche T' die Function $\log \zeta$ von z so bestimmen, dass ζ für einen beliebigen Punkt im Innern derselben unendlich klein von der ersten Ordnung wird, und $\log \zeta$ längs einer beliebigen sich nicht schneidenden, von dort nach der Begrenzung führenden Linie auf der positiven Seite um $-2\pi i$ grösser, als auf der negativen, übrigens aber allenthalben stetig und längs der Begrenzung von T' rein imaginär ist. Es nimmt dann die Function ζ jeden Werth, dessen Modul < 1, einmal an; die Gesammtheit ihrer Werthe wird folglich durch eine über einen Kreis in der ζ-Ebene einfach ausgebreitete Fläche vertreten. Jedem Punkte von T' entspricht ein Punkt des Kreises, und umgekehrt. Es wird daher für einen beliebigen Punkt der Fläche, wo $z = z'$, $\zeta = \zeta'$, die Function $\zeta - \zeta'$ unendlich klein von der ersten Ordnung, und folglich bleibt dort, wenn die Fläche T' sich $(\mu + 1)$mal um ihn windet, bei endlichem z'

$$(\mu+1)\frac{z-z'}{(\zeta-\zeta')^{\mu+1}}=\frac{dz}{d\zeta(\zeta-\zeta')^{\mu}},$$

bei unendlichem z' aber

$$(\mu+1)\frac{z^{-1}}{(\zeta-\zeta')^{\mu+1}}=-\frac{dz}{zz\,d\zeta(\zeta-\zeta')^{\mu}}$$

endlich. Das Integral $\int d\log\frac{dz}{d\zeta}$, um den ganzen Kreis positiv herumgenommen, ist gleich der Summe der Integrale um die Punkte, wo $\frac{dz}{d\zeta}$ unendlich oder Null wird, und also $=2\pi i(\mathrm{w}-2n)$. Bezeichnet s ein Stück der Begrenzung von T' von einem und demselben bestimmten Punkte bis zu einem veränderlichen Punkte der Begrenzung, und σ das entsprechende Stück auf dem Kreisumfange, so ist

$$\log\frac{dz}{d\zeta}=\log\frac{dz}{ds}+\log\frac{ds}{d\sigma}-\log\frac{d\zeta}{d\sigma},$$

und, durch die ganze Begrenzung ausgedehnt,

$$\int d\log\frac{dz}{ds}=(2p-1)\,2\pi i,\quad \int d\log\frac{ds}{d\sigma}=0,\quad -\int d\log\frac{d\zeta}{d\sigma}=-2\pi i,$$

also

$$\int d\log\frac{dz}{d\zeta}=(2p-2)\,2\pi i.$$

Es ergiebt sich demnach $\mathrm{w}-2n=2(p-1)$. Da nun

$$\mathrm{w}=2((n-1)\,m-r),$$

so ist

$$p=(n-1)(m-1)-r. \ (^2)$$

8.

Der allgemeine Ausdruck der wie T verzweigten Functionen s' von z, die für m' beliebig gegebene Punkte von T unendlich von der ersten Ordnung werden und übrigens stetig bleiben, enthält nach dem Obigen $m'-p+1$ willkürliche Constanten und ist eine lineare Function derselben (§. 5). Lassen sich also, wie jetzt gezeigt werden soll, rationale Ausdrücke von s und z bilden, die für m' beliebig gegebene, der Gleichung $F=0$ genügende Werthenpaare von s und z unendlich von der ersten Ordnung werden und lineare Functionen von $m'-p+1$ willkürlichen Constanten sind, so kann durch diese Ausdrücke jede Function s' dargestellt werden.

Damit der Quotient zweier ganzen Functionen $\chi(s,z)$ und $\psi(s,z)$ für $s=\infty$ und $z=\infty$ beliebige endliche Werthe annehmen kann, müssen beide von gleichem Grade sein; der Ausdruck, durch welchen

s' dargestellt werden soll, sei daher von der Form $\dfrac{\psi(\overset{\nu}{s},\overset{\mu}{z})}{\chi(\overset{\nu}{s},\overset{\mu}{z})}$, und überdies sei $\nu\geq n-1$, $\mu\geq m-1$. Wenn zwei Zweige der Function s ohne zusammenzuhängen einander gleich werden, also für zwei verschiedene Punkte der Fläche T $z=\gamma$ und $s=\delta$ wird, so wird s', allgemein zu reden, in diesen beiden Punkten verschiedene Werthe annehmen; soll also $\psi-s'\chi$ allenthalben $=0$ sein, so muss für zwei verschiedene Werthe von s' $\psi(\gamma,\delta)-s'\chi(\gamma,\delta)=0$ sein, folglich $\chi(\gamma,\delta)=0$ und $\psi(\gamma,\delta)=0$. Es müssen also die Functionen χ und ψ für die r Werthenpaare $s=\gamma_\varrho$, $z=\delta_\varrho$ (S. 112) verschwinden*).

Die Function χ verschwindet für einen Werth von z, für welchen die einwerthige und für ein endliches z endliche Function von z

$$K(z)=a_0{}^{\nu}\chi(s_1)\chi(s_2)\ldots\chi(s_n)=0$$

ist; diese Function wird für ein unendliches z unendlich von der Ordnung $m\nu+n\mu$ und ist also eine ganze Function $(m\nu+n\mu)$ten Grades. Da für die Werthenpaare (γ,δ) zwei Factoren des Products $\prod_i\chi(s_i)$ unendlich klein von der ersten Ordnung werden, also $K(z)$ unendlich klein von der zweiten Ordnung, so wird χ ausserdem noch unendlich klein von der ersten Ordnung für

$$i=m\nu+n\mu-2r$$

Werthenpaare von s und z oder Punkte von T.

Ist $\nu>n-1$, $\mu>m-1$, so bleibt der Werth der Function χ ungeändert, wenn man

$$\chi(\overset{\nu}{s},\overset{\mu}{z})+\varrho(\overset{\nu-n}{s},\overset{\mu-m}{z})\,F(\overset{n}{s},\overset{m}{z}),$$

worin ϱ beliebig ist, für $\chi(\overset{\nu}{s},\overset{\mu}{z})$ setzt; es können also

$$(\nu-n+1)(\mu-m+1)$$

von den Coefficienten dieses Ausdrucks willkürlich angenommen werden. Werden nun von den

---

*) Es ist hier, wie gesagt, nur der Fall berücksichtigt, wo die Verzweigungspunkte der Function s nur paarweise und sich aufhebend zusammenfallen. Im Allgemeinen müssen in einem Punkte von T, wo nach der Auffassung im §. 6 sich aufhebende Verzweigungspunkte zusammenfallen, χ und ψ, wenn T sich um diesen Punkt ϱ mal windet, unendlich klein werden, wie $F'(s)\,dz^{\frac{1}{\varrho}-1}$, damit die ersten Glieder in der Entwicklung der darzustellenden Function nach ganzen Potenzen von $(\Delta z)^{\frac{1}{\varrho}}$ beliebige Werthe annehmen können.

$$(\mu + 1)(\nu + 1) - (\nu - n + 1)(\mu - m + 1)$$

noch übrigen r als lineare Functionen der übrigen so bestimmt, dass χ für die r Werthenpaare (γ, δ) verschwindet, so enthält die Function χ noch

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\mu + 1)(\nu + 1) - (\nu - n + 1)(\mu - m + 1) - r \\ &= n\mu + m\nu - (n - 1)(m - 1) - r + 1 \end{aligned}$$

willkürliche Constanten. Es ist also

$$i - \varepsilon = (n - 1)(m - 1) - r - 1 = p - 1.$$

Nimmt man μ und ν so an, dass $\varepsilon > m'$ ist, so kann man χ so bestimmen, dass es für m' beliebig gegebene Werthenpaare unendlich klein von der ersten Ordnung wird, und dann, wenn $m' > p$, ψ so einrichten, dass $\frac{\psi}{\chi}$ für alle übrigen Werthe endlich bleibt. In der That ist ψ ebenfalls eine lineare homogene Function von ε willkürlichen Constanten, und es lassen sich also, wenn $\varepsilon - i + m' > 1$ ist, $i - m'$ von ihnen als lineare Functionen der übrigen so bestimmen, dass ψ für die $i - m'$ Werthenpaare von s und z, für welche χ noch unendlich klein von der ersten Ordnung wird, ebenfalls verschwindet. Die Function ψ enthält demnach $\varepsilon - i + m' = m' - p + 1$ willkürliche Constanten, und $\frac{\psi}{\chi}$ kann also jede Function s' darstellen.

9.

Da die Functionen $\frac{d\omega}{dz}$ algebraische wie s verzweigte Functionen von z sind (§. 5), so lassen sie sich zufolge des eben bewiesenen Satzes rational in s und z ausdrücken, und sämmtliche Functionen ω als Integrale rationaler Functionen von s und z.

Ist w eine allenthalben endliche Function ω, so wird $\frac{dw}{dz}$ unendlich von der ersten Ordnung für jeden einfachen Verzweigungspunkt der Fläche T, da dw und $(dz)^{\frac{1}{2}}$ dort unendlich klein von der ersten Ordnung sind, bleibt aber sonst allenthalben stetig und wird für $z = \infty$ unendlich klein von der zweiten Ordnung. Umgekehrt bleibt das Integral einer Function, die sich so verhält, allenthalben endlich.

Um diese Function $\frac{dw}{dz}$ als Quotient zweier ganzen Functionen von s und z auszudrücken, muss man (nach §. 8) zum Nenner eine Function nehmen, die verschwindet in den Verzweigungspunkten und für die r Werthenpaare (γ, δ). Dieser Bedingung genügt man am einfachsten

durch eine Function, die nur für diese Werthe 0 wird. Eine solche ist

$$\frac{\partial F}{\partial s} = a_0 n s^{n-1} + a_1 (n - 1) s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

Diese wird für ein unendliches s unendlich von der $(n - 2)$ten Ordnung (da a_0 dann unendlich klein von der ersten Ordnung wird) und für ein unendliches z unendlich von der $m$ten Ordnung. Damit $\frac{dw}{dz}$ ausser den Verzweigungspunkten endlich und für ein unendliches z unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, muss also der Zähler eine ganze Function $\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$ sein, die für die r Werthenpaare (γ, δ) (S. 112) verschwindet. Demnach ist

$$w = \int \frac{\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}} = -\int \frac{\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})\,ds}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

worin $\varphi = 0$ für $s = \gamma_\varrho$, $z = \delta_\varrho$, $\varrho = 1, 2, \ldots, r$.

Die Function φ enthält $(n - 1)(m - 1)$ constante Coefficienten, und wenn r von ihnen als lineare Fuuctionen der übrigen so bestimmt werden, dass $\varphi = 0$ für die r Werthenpaare $s = \gamma$, $z = \delta$, so bleiben noch $(m - 1)(n - 1) - r$ oder p willkürlich, und es erhält φ die Form

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \cdots + \alpha_p \varphi_p,$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ besondere Functionen φ, von denen keine eine lineare Function der übrigen ist, und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ beliebige Constanten sind. Als allgemeiner Ausdruck von w ergiebt sich, wie oben auf anderem Wege

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

Die nicht allenthalben endlich bleibenden Functionen ω und also die Integrale zweiter und dritter Gattung lassen sich nach denselben Principien rational in s und z ausdrücken, wobei wir indess hier nicht verweilen, da die allgemeinen Regeln des vorigen Paragraphen keiner weitern Erläuterung bedürfen und zur Betrachtung bestimmter Formen dieser Integrale erst die Theorie der ϑ-Functionen Anlass giebt.

10.

Die Function φ wird ausser für die r Werthenpaare (γ, δ) noch für $m(n - 2) + n(m - 2) - 2r$ oder $2(p - 1)$ der Gleichung $F = 0$ genügende Werthenpaare von s und z unendlich klein von der ersten Ordnung. Sind nun

$$\varphi^{(1)} = \alpha_1^{(1)} \varphi_1 + \alpha_2^{(1)} \varphi_2 + \cdots + \alpha_p^{(1)} \varphi_p$$

und

$$\varphi^{(2)} = \alpha_1^{(2)} \varphi_1 + \alpha_2^{(2)} \varphi_2 + \cdots + \alpha_p^{(2)} \varphi_p$$

zwei beliebige Functionen φ, so kann man in dem Ausdrucke $\frac{\varphi^{(2)}}{\varphi^{(1)}}$ den Nenner so bestimmen, dass er für $p-1$ beliebig gegebene der Gleichung $F=0$ genügende Werthenpaare von s und z gleich Null wird, und dann den Zähler so, dass er für $p-2$ von den übrigen Werthenpaaren, für welche $\varphi^{(1)}$ noch gleich 0 wird, gleichfalls verschwindet. Er ist dann noch eine lineare Function von zwei willkürlichen Constanten und folglich ein allgemeiner Ausdruck einer Function, die nur für p Punkte der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung wird. Eine Function, die für weniger als p Punkte unendlich wird, bildet einen speciellen Fall dieser Function; es lassen sich daher alle Functionen, die für weniger als $p+1$ Punkte der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung werden, in der Form $\frac{\varphi^{(2)}}{\varphi^{(1)}}$ oder in der Form $\frac{dw^{(2)}}{dw^{(1)}}$, wenn $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ zwei allenthalben endliche Integrale rationaler Functionen von s und z sind, darstellen.

11.

Eine wie T verzweigte Function z_1 von z, die für n_1 Punkte dieser Fläche unendlich von der ersten Ordnung wird, ist nach dem Früheren (S. 108) die Wurzel einer Gleichung von der Form

$$G(\overset{n}{z_1}, \overset{n_1}{z}) = 0$$

und nimmt daher jeden Werth für n_1 Punkte der Fläche T an. Wenn man sich also jeden Punkt von T durch einen den Werth von z_1 in diesem Punkte geometrisch repräsentirenden Punkt einer Ebene abgebildet denkt, so bildet die Gesammtheit dieser Punkte eine in der z_1-Ebene allenthalben n_1 fach ausgebreitete und die Fläche T — bekanntlich in den kleinsten Theilen ähnlich — abbildende Fläche T_1. Jedem Punkt in der einen Fläche entspricht dann *ein* Punkt in der andern. Die Functionen ω oder die Integrale wie T verzweigter Functionen von z gehen daher, wenn man für z als unabhängig veränderliche Grösse z_1 einführt, in Functionen über, welche in der Fläche T_1 allenthalben *einen* bestimmten Werth und dieselben Unstetigkeiten haben, wie die Functionen ω in den entsprechenden Punkten von T, und welche folglich Integrale wie T_1 verzweigter Functionen von z_1 sind.

Bezeichnet s_1 irgend eine andere wie T verzweigte Function von z, die für m_1 Punkte von T und also auch von T_1 unendlich von der ersten Ordnung wird, so findet (§. 5) zwischen s_1 und z_1 eine Gleichung von der Form

$$F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1}) = 0$$

statt, worin F_1 eine Potenz einer unzerfällbaren ganzen Function von s_1 und z_1 ist, und es lassen sich, wenn diese Potenz die erste ist, alle wie T_1 verzweigten Functionen von z_1, folglich alle rationalen Functionen von s und z rational in s_1 und z_1 ausdrücken (§. 8).

Die Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ kann also durch eine rationale Substitution in $F(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1}) = 0$ und diese in jene transformirt werden.

Die Grössengebiete (s, z) und (s_1, z_1) sind gleichvielfach zusammenhängend, da jedem Punkte des einen *ein* Punkt des andern entspricht. Bezeichnet daher r_1 die Anzahl der Fälle, in welchen s_1 und z_1 für zwei verschiedene Punkte des Grössengebiets (s_1, z_1) beide denselben Werth annehmen und folglich gleichzeitig F_1, $\frac{\partial F_1}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial F_1}{\partial z_1}$ gleich 0 und

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1^2}\,\frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1^2} - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1\,\partial z_1}\right)^2$$

nicht Null ist, so muss

$$(n_1-1)(m_1-1) - r_1 = p = (n-1)(m-1) - r$$

sein.

12.

Man betrachte nun als zu Einer *Klasse* gehörend *alle irreductiblen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche sich durch rationale Substitutionen in einander transformiren lassen*, so dass $F(s, z) = 0$ und $F_1(s_1, z_1) = 0$ zu derselben Klasse gehören, wenn sich für s und z solche rationale Functionen von s_1 und z_1 setzen lassen, dass $F(s, z) = 0$ in $F_1(s_1, z_1) = 0$ übergeht und zugleich s_1 und z_1 rationale Functionen von s und z sind.

Die rationalen Functionen von s und z bilden, als Functionen von irgend einer von ihnen ζ betrachtet, ein System gleichverzweigter algebraischer Functionen. Auf diese Weise führt jede Gleichung offenbar zu einer Klasse von Systemen gleichverzweigter algebraischer Functionen, welche sich durch Einführung einer Function des Systems als unabhängig veränderlicher Grösse in einander transformiren lassen und zwar alle Gleichungen Einer Klasse zu derselben Klasse von Systemen algebraischer Functionen, und umgekehrt führt (§. 11) jede Klasse von solchen Systemen zu Einer Klasse von Gleichungen.

Ist das Grössengebiet (s, z) $(2p+1)$ fach zusammenhängend und die Function ζ in μ Punkten desselben unendlich von der ersten Ordnung, so ist die Anzahl der Verzweigungswerthe der gleichverzweigten Functionen von ζ, welche durch die übrigen rationalen Functionen von s und z gebildet werden, $2(\mu + p - 1)$, und die Anzahl der willkürlichen Constanten in der Function ζ $2\mu - p + 1$ (§. 5). Diese lassen sich so bestimmen, dass $2\mu - p + 1$ Verzweigungswerthe gegebene Werthe annehmen, wenn diese Verzweigungswerthe von einander unabhängige Functionen von ihnen sind, und zwar nur auf eine endliche Anzahl Arten, da die Bedingungsgleichungen algebraisch sind. In jeder Klasse von Systemen gleichverzweigter $(2p+1)$fach zusammenhängender Functionen giebt es daher eine endliche Anzahl von Systemen μwerthiger Functionen, in welchen $2\mu - p + 1$ Verzweigungswerthe gegebene Werthe annehmen. Wenn andererseits die $2(\mu + p - 1)$ Verzweigungspunkte einer die ζ-Ebene allenthalben μfach bedeckenden $(2p+1)$fach zusammenhängenden Fläche beliebig gegeben sind, so giebt es (§§. 3—5) immer ein System wie diese Fläche verzweigter algebraischer Functionen von ζ. Die $3p - 3$ übrigen Verzweigungswerthe in jenen Systemen gleichverzweigter μwerthiger Functionen können daher beliebige Werthe annehmen; und es hängt also eine Klasse von Systemen gleichverzweigter $(2p+1)$fach zusammenhängender Functionen und die zu ihr gehörende Klasse algebraischer Gleichungen von $3p - 3$ stetig veränderlichen Grössen ab, welche die Moduln dieser Klasse genannt werden sollen.

Diese Bestimmung der Anzahl der Moduln einer Klasse $(2p+1)$fach zusammenhängender algebraischer Functionen gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass es $2\mu - p + 1$ Verzweigungswerthe giebt, welche von einander unabhängige Functionen der willkürlichen Constanten in der Function ζ sind. Diese Voraussetzung trifft nur zu, wenn $p > 1$, und die Anzahl der Moduln ist nur dann $= 3p - 3$, für $p = 1$ aber $= 1$. Die directe Untersuchung derselben wird indess schwierig durch die Art und Weise, wie die willkürlichen Constanten in ζ enthalten sind. Man führe deshalb in einem Systeme gleichverzweigter $(2p+1)$fach zusammenhängender Functionen, um die Anzahl der Moduln zu bestimmen, als unabhängig veränderliche Grösse nicht eine dieser Functionen, sondern ein allenthalben endliches Integral einer solchen Function ein.

Die Werthe, welche die Function w von z innerhalb der Fläche T' annimmt, werden geometrisch repräsentirt durch eine einen endlichen Theil der w-Ebene einfach oder mehrfach bedeckende und die Fläche T' (in den kleinsten Theilen ähnlich) abbildende Fläche, welche durch S bezeichnet werden soll. Da w auf der positiven Seite des

νten Querschnitts um die Constante $k^{(\nu)}$ grösser ist, als auf der negativen, so besteht die Begrenzung von S aus Paaren von parallelen Curven, welche denselben Theil des T' begrenzenden Schnittsystems abbilden, und es wird die Ortsverschiedenheit der entsprechenden Punkte in den parallelen, den νten Querschnitt abbildenden Begrenzungstheilen von S durch die complexe Grösse $k^{(\nu)}$ ausgedrückt. Die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte der Fläche S ist $2p - 2$, da dw in $2p - 2$ Punkten der Fläche T unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Die rationalen Functionen von s und z sind dann Functionen von w, welche für jeden Punkt von S Einen bestimmten, wo sie nicht unendlich werden, stetig sich ändernden Werth haben und in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile denselben Werth annehmen. Sie bilden daher ein System gleichverzweigter und $2p$fach periodischer Functionen von w. Es lässt sich nun (auf ähnlichem Wege, wie in den §§. 3—5) zeigen, dass, die $2p - 2$ Verzweigungspunkte und die $2p$ Ortsverschiedenheiten paralleler Begrenzungstheile der Fläche S als willkürlich gegeben vorausgesetzt, immer ein System wie diese Fläche verzweigter Functionen existirt, welche in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile denselben Werth annehmen und also $2p$fach periodisch sind, und die, als Functionen von einer von ihnen betrachtet, ein System gleichverzweigter $(2p+1)$fach zusammenhängender algebraischer Functionen bilden, folglich zu einer Klasse von $(2p+1)$fach zusammenhängenden algebraischen Functionen führen. In der That ergiebt sich nach dem Dirichlet'schen Princip, dass in der Fläche S eine Function von w bis auf eine additive Constante bestimmt ist durch die Bedingungen, im Innern von S beliebig gegebene Unstetigkeiten von der Form wie ω in T' anzunehmen und in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile um Constanten, deren reeller Theil gegeben ist, verschiedene Werthe zu erhalten. Hieraus schliesst man ähnlich, wie im §. 5, die Möglichkeit von Functionen, welche nur in einzelnen Punkten von S unstetig werden und in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile denselben Werth annehmen. Wird eine solche Function z in n Punkten von S unendlich von der ersten Ordnung und sonst nicht unstetig, so nimmt sie jeden complexen Werth in n Punkten von S an; denn wenn a eine beliebige Constante ist, so ist $\int d \log(z - a)$, um S erstreckt, $= 0$, da die Integration durch parallele Begrenzungstheile sich aufhebt, und es wird daher $z - a$ in S ebenso oft unendlich klein, als unendlich von der ersten Ordnung. Die Werthe, welche z annimmt, werden folglich durch eine über die z-Ebene allenthalben $n$fach ausgebreitete Fläche repräsentirt, und die übrigen ebenso verzweigten und periodischen Functionen von w bilden daher ein System wie diese Fläche verzweigter $(2p+1)$fach zusammenhängender algebraischer Functionen von z, w. z. b. w.

Für eine beliebig gegebene Klasse $(2p+1)$fach zusammenhängender algebraischer Functionen kann man nun in dem als unabhängig veränderliche Grösse einzuführenden

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + c$$

die Grössen α so bestimmen, dass p von den $2p$ Periodicitätsmoduln gegebene Werthe annehmen, und c wenn $p > 1$ so, dass einer von den $2p - 2$ Verzweigungswerthen der periodischen Functionen von w einen gegebenen Werth erhält. Dadurch ist w völlig bestimmt, und also sind es auch die $3p - 3$ übrigen Grössen, von denen die Verzweigungsart und Periodicität jener Functionen von w abhängt; und da jedweden Werthen dieser $3p - 3$ Grössen eine Klasse von $(2p+1)$fach zusammenhängenden algebraischen Functionen entspricht, so hängt eine solche von $3p - 3$ unabhängig veränderlichen Grössen ab.

Wenn $p = 1$ ist, so ist kein Verzweigungspunkt vorhanden, und es lässt sich in

$$w = \alpha_1 w_1 + c$$

die Grösse α_1 so bestimmen, dass *ein* Periodicitätsmodul einen gegebenen Werth erhält, und dadurch ist der andere Periodicitätsmodul bestimmt. Die Anzahl der Moduln einer Klasse ist also dann $= 1$.

13.

Nach den obigen (im §. 11 entwickelten) Principien der Transformation muss man, um eine beliebig gegebene Gleichung $F(s, z) = 0$ durch eine rationale Substitution in eine Gleichung derselben Klasse

$$F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1}) = 0$$

von möglichst niedrigem Grade zu transformiren, zuerst für z_1 einen rationalen Ausdruck in s und z, $r(s, z)$, so bestimmen, dass n_1 möglichst klein wird, und dann s_1 gleich einem andern rationalen Ausdrucke $r'(s, z)$ so, dass m_1 möglichst klein wird und zugleich die zu einem beliebigen Werthe von z_1 gehörigen Werthe von s_1 nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen, so dass $F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1})$ nicht eine höhere Potenz einer unzerfällbaren Function sein kann.

Wenn das Grössengebiet (s, z) $(2p+1)$fach zusammenhängend ist, so ist der kleinste Werth, den n_1 annehmen kann, allgemein zu reden,

$\geqq \frac{p}{2} + 1$ (§. 5) und die Anzahl der Fälle, in denen s_1 und z_1 für zwei verschiedene Punkte des Grössengebiets beide denselben Werth annehmen,

$$= (n_1 - 1)(m_1 - 1) - p.$$

In einer Klasse von algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen haben demnach, wenn ihre Moduln nicht besonderen Bedingungsgleichungen genügen, die Gleichungen niedrigsten Grades folgende Form:

$$\begin{array}{lll}
\text{für } p = 1, & F(\overset{2}{s}, \overset{2}{z}) = 0, & r = 0 \\
\phantom{\text{für }} p = 2, & F(\overset{2}{s}, \overset{3}{z}) = 0, & r = 0 \\
p > 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 2\mu - 3, \\ p = 2\mu - 2, \end{array} \right. & \begin{array}{l} F(\overset{\mu}{s}, \overset{\mu}{z}) = 0, \\ F(\overset{\mu}{s}, \overset{\mu}{z}) = 0, \end{array} & \begin{array}{l} r = (\mu - 2)^2 \\ r = (\mu - 1)(\mu - 3). \end{array}
\end{array}$$

Von den Coefficienten der Potenzen von s und z in den ganzen Functionen F müssen r als lineare homogene Functionen der übrigen so bestimmt werden, dass $\frac{\partial F}{\partial s}$ und $\frac{\partial F}{\partial z}$ für r der Gleichung $F = 0$ genügende Werthenpaare gleichzeitig verschwinden. Die rationalen Functionen von s und z, als Functionen von einer von ihnen betrachtet, stellen dann alle Systeme $(2p+1)$fach zusammenhängender algebraischer Functionen dar.

14.

Ich benutze nun nach **Jacobi** (Journ. f. Math. Bd. 9 Nr. 32 §. 8*) das **Abel**'sche Additionstheorem zur Integration eines Systems von Differentialgleichungen; ich werde mich dabei auf das beschränken, was in dieser Abhandlung später nöthig ist.

Führt man in einem allenthalben endlichen Integrale w einer rationalen Function von s und z als unabhängig veränderliche Grösse eine rationale Function von s und z, ζ, ein, die für m Werthenpaare von s und z unendlich von der ersten Ordnung wird, so ist $\frac{dw}{dz}$ eine $m$werthige Function von ζ. Bezeichnet man die m Werthe von w für dasselbe ζ durch $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(m)}$, so ist

$$\frac{dw^{(1)}}{d\zeta} + \frac{dw^{(2)}}{d\zeta} + \cdots + \frac{dw^{(m)}}{d\zeta}$$

*) Jacobi's gesammelte Werke Bd. II, S. 15. W.

eine einwerthige Function von ζ, deren Integral allenthalben endlich bleibt, und folglich ist auch $\int d(w^{(1)} + w^{(2)} + \cdots + w^{(m)})$ allenthalben einwerthig und endlich, mithin constant. Auf ähnliche Weise findet sich, wenn $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(m)}$ die demselben ζ entsprechenden Werthe eines beliebigen Integrals ω einer rationalen Function von s und z bezeichnen, $\int d(\omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \cdots + \omega^{(m)})$ bis auf eine additive Constante aus den Unstetigkeiten von ω und zwar als Summe von einer rationalen Function und mit constanten Coefficienten versehenen Logarithmen rationaler Functionen von ζ.

Mittelst dieses Satzes lassen sich, wie jetzt gezeigt werden soll, folgende p gleichzeitige Differentialgleichungen zwischen den $p+1$ der Gleichung $F(s, z) = 0$ genügenden Werthenpaaren von s und z, $(s_1, z_1), (s_2, z_2), \ldots, (s_{p+1}, z_{p+1})$

$$\frac{\varphi_\pi(s_1, z_1)\,dz_1}{\dfrac{\partial F(s_1, z_1)}{\partial s_1}} + \frac{\varphi_\pi(s_2, z_2)\,dz_2}{\dfrac{\partial F(s_2, z_2)}{\partial s_2}} + \cdots + \frac{\varphi_\pi(s_{p+1}, z_{p+1})\,dz_{p+1}}{\dfrac{\partial F(s_{p+1}, z_{p+1})}{\partial s_{p+1}}} = 0$$

für $\pi = 1, 2, \ldots, p$, allgemein oder vollständig (complete) integriren.

Durch diese Differentialgleichungen sind p von den Grössenpaaren (s_μ, z_μ) als Functionen des einen noch übrigen völlig bestimmt, wenn für einen beliebigen Werth des letzteren die Werthe der übrigen gegeben werden. Wenn man also diese $p+1$ Grössenpaare als Functionen *einer* veränderlichen Grösse ζ so bestimmt, dass sie für denselben Werth 0 dieser Grösse *beliebig* gegebene Anfangswerthe $(s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), \ldots, (s_{p+1}^0, z_{p+1}^0)$ annehmen und den Differentialgleichungen genügen, so hat man dadurch die Differentialgleichungen allgemein integrirt. Nun lässt sich die Grösse $\frac{1}{\zeta}$ als einwerthige und folglich rationale Function von (s, z) immer so bestimmen, dass sie nur für alle oder einige von den $p+1$ Werthenpaaren (s_μ^0, z_μ^0) unendlich und für diese nur unendlich von der ersten Ordnung wird, da sich in dem Ausdrucke

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p+1} \beta_\mu t(s_\mu^0, z_\mu^0) + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \alpha_\mu w_\mu + \text{const.}$$

die Verhältnisse der Grössen α und β immer so bestimmen lassen, dass die Periodicitätsmoduln sämmtlich 0 werden. Es genügen dann, wenn kein $\beta = 0$ ist, den zu lösenden Differentialgleichungen die $p+1$ Zweige der $(p+1)$werthigen gleichverzweigten Functionen s und z von ζ, $(s_1, z_1), (s_2, z_2), \ldots, (s_{p+1}, z_{p+1})$, welche für $\zeta = 0$ die Werthe $(s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), \ldots, (s_{p+1}^0, z_{p+1}^0)$ annehmen. Wenn aber

von den Grössen β einige, etwa die $p+1-m$ letzten gleich 0 werden, so werden die zu lösenden Differentialgleichungen befriedigt durch die m Zweige der $m$werthigen Functionen s und z von ζ, (s_1, z_1), $(s_2, z_2), \ldots, (s_m, z_m)$, welche für $\zeta = 0$ gleich $(s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), \ldots$, (s_m^0, z_m^0) werden, und durch constante, also ihren Anfangswerthen $s_{m+1}^0, \ldots, z_{p+1}^0$ gleiche Werthe der Grössen $s_{m+1}, z_{m+1}; \ldots; s_{p+1}, z_{p+1}$. Im letzteren Falle sind von den p linearen homogenen Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\varphi_\pi(s_\mu, z_\mu)\,dz_\mu}{\dfrac{\partial F(s_\mu, z_\mu)}{\partial s_\mu}} = 0$$

für $\pi = 1, 2, \ldots, p$ zwischen den Grössen $\dfrac{dz_\mu}{\dfrac{\partial F(s_\mu, z_\mu)}{\partial s_\mu}}$ $p+1-m$ eine Folge der übrigen; es ergeben sich hieraus $p+1-m$ Bedingungsgleichungen, welche, damit dieser Fall eintritt, zwischen den Functionen $(s_1, z_1), \ldots, (s_m, z_m)$ und also auch zwischen ihren Anfangswerthen $(s_1^0, z_1^0), \ldots, (s_m^0, z_m^0)$ erfüllt sein müssen, und es können daher von diesen, wie oben (§. 5) gefunden, nur $2m-p-1$ beliebig gegeben werden.

15.

Es sei nun

$$\int \frac{\varphi_\pi(s, z)\,dz}{\dfrac{\partial F(s, z)}{\partial s}} + \text{const.},$$

durch das Innere von T' integrirt, gleich w_π und der Periodicitätsmodul von w_π für den νten Querschnitt gleich $k_\pi^{(\nu)}$, so dass sich die Functionen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ des Grössenpaars (s, z) beim Uebertritt des Punkts (s, z) von der negativen auf die positive Seite des νten Querschnitts gleichzeitig um $k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)}, \ldots, k_p^{(\nu)}$ ändern. Zur Abkürzung mag ein System von p Grössen $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ einem andern $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ *congruent nach $2p$ Systemen zusammengehöriger Moduln* genannt werden, wenn es aus ihm durch gleichzeitige Aenderungen sämmtlicher Grössen um zusammengehörige Moduln erhalten werden kann. Ist der Modul der πten Grösse im νten Systeme $= k_\pi^{(\nu)}$, so heisst demnach

$$(b_1, b_2, \ldots, b_p) \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_p),$$

wenn

$$b_\pi = a_\pi + \sum_{\nu=1}^{\nu=2p} m_\nu k_\pi^{(\nu)}$$

für $\pi = 1, 2, \ldots, p$ und $m_1, m_2, \ldots, m_{2p}$ ganze Zahlen sind.

Da sich p beliebige Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ immer und nur auf eine Weise in die Form $a_\pi = \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=2p} \xi_\nu k_\pi^{(\nu)}$ setzen lassen, so dass die $2p$ Grössen ξ reell sind, und durch Aenderung dieser Grössen ξ um ganze Zahlen alle congruenten Systeme und nur diese sich ergeben, so erhält man aus jeder Reihe congruenter Systeme eins und nur eins, wenn man in diesen Ausdrücken jede Grösse ξ alle Werthe von einem beliebigen Werthe bis zu einem um 1 grösseren, einen der beiden Grenzwerthe eingeschlossen, stetig durchlaufen lässt.

Dieses festgesetzt, folgt aus den obigen Differentialgleichungen oder aus den p Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p+1} dw_\pi^{(\mu)} = 0 \text{ für } \pi = 1, 2, \ldots, p$$

durch Integration

$$(\Sigma w_1^{(\mu)}, \Sigma w_2^{(\mu)}, \ldots, \Sigma w_p^{(\mu)}) \equiv (c_1, c_2, \ldots, c_p),$$

worin $c_1, c_2, \ldots, c_p$ constante von den Werthen (s^0, z^0) abhängige Grössen sind.

16.

Drückt man ζ als Quotienten zweier ganzen Functionen von s und z, $\frac{\chi}{\psi}$, aus, so sind die Grössenpaare $(s_1, z_1), \ldots, (s_m, z_m)$ die gemeinschaftlichen Wurzeln der Gleichungen $F = 0$ und $\frac{\chi}{\psi} = \zeta$. Da die ganze Function

$$\chi - \zeta\psi = f(s, z)$$

für alle Werthenpaare, für welche χ und ψ gleichzeitig verschwinden ebenfalls, was auch ζ sei, verschwindet, so können die Grössenpaare $(s_1, z_1), \ldots, (s_m, z_m)$ auch definirt werden als gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichung $F = 0$ und einer Gleichung $f(s, z) = 0$, deren Coefficienten so sich ändern, dass alle übrigen gemeinschaftlichen Wurzeln constant bleiben. Wenn $m < p + 1$, kann ζ in der Form $\frac{\varphi^{(1)}}{\varphi^{(2)}}$ dargestellt werden (§. 10) und f in der Form

$$\varphi^{(1)} - \zeta\varphi^{(2)} = \varphi^{(3)}.$$

Die allgemeinsten Werthe der den p Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} dw_\pi^{(\mu)} = 0 \text{ für } \pi = 1, 2, \ldots, p$$

genügenden Functionenpaare $(s_1, z_1), \ldots, (s_p, z_p)$ werden daher gebildet durch p gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichungen $F = 0$ und $\varphi = 0$, welche so sich ändern, dass die übrigen gemeinschaftlichen Wurzeln constant bleiben. Hieraus folgt leicht der später nöthige Satz, dass die Aufgabe, $p - 1$ von den $2p - 2$ Grössenpaaren $(s_1, z_1), \ldots, (s_{2p-2}, z_{2p-2})$ als Functionen der $p - 1$ übrigen so zu bestimmen, dass die p Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2p-2} dw_\pi^{(\mu)} = 0 \text{ für } \pi = 1, 2, \ldots, p$$

erfüllt werden, völlig allgemein gelöst wird, wenn man für diese $2p - 2$ Grössenpaare die von den r Wurzeln $s = \gamma_\varrho$, $z = \delta_\varrho$ (§. 6) verschiedenen gemeinschaftlichen Wurzeln der Gleichungen $F = 0$ und $\varphi = 0$ oder die $2p - 2$ Werthenpaare nimmt, für welche dw unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, und dass diese Aufgabe daher nur *eine* Lösung zulässt. Solche Grössenpaare sollen *durch die Gleichung* $\varphi = 0$ *verknüpft* heissen. Infolge der Gleichungen

$$\sum_1^{2p-2} dw_\pi^{(\mu)} = 0 \text{ wird } \Big(\sum_1^{2p-2} w_1^{(\mu)}, \sum_1^{2p-2} w_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^{2p-2} w_p^{(\mu)}\Big),$$

die Summe über solche Grössenpaare ausgedehnt, congruent einem constanten Grössensysteme $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$, worin c_π nur von der additiven Constante in der Function w_π oder dem Anfangswerthe des sie ausdrückenden Integrals abhängt.

Zweite Abtheilung.

17.

Für die ferneren Untersuchungen über Integrale von algebraischen, $(2p + 1)$fach zusammenhängenden Functionen ist die Betrachtung einer $p$fach unendlichen ϑ-Reihe von grossem Nutzen, d. h. einer $p$fach unendlichen Reihe, in welcher der Logarithmus des allgemeinen Gliedes eine ganze Function zweiten Grades der Stellenzeiger ist. Es sei in dieser Function für ein Glied, dessen Stellenzeiger $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sind, der Coefficient des Quadrats m_μ^2 gleich $a_{\mu,\mu}$, des doppelten Products $m_\mu m_{\mu'}$ gleich $a_{\mu,\mu'} = a_{\mu',\mu}$, der doppelten Grösse m_μ gleich v_μ, und das constante Glied $= 0$. Die Summe der Reihe, über alle ganzen positiven oder negativen Werthe der Grössen m ausgedehnt, werde als Function der p Grössen v betrachtet und durch $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ bezeichnet, so dass

$$(1.)\qquad \vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^p e^{\left(\sum\limits_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_1^p v_\mu m_\mu},$$

worin die Summationen im Exponenten sich auf μ und μ', die äusseren Summationen auf $m_1, m_2, \ldots, m_p$ beziehen. Damit diese Reihe convergirt, muss der reelle Theil von $\left(\sum\limits_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ wesentlich negativ sein oder, als eine Summe von positiven oder negativen Quadraten reeller linearer von einander unabhängiger Functionen der Grössen m dargestellt, aus p negativen Quadraten zusammengesetzt sein.

Die Function ϑ hat die Eigenschaft, dass es Systeme von gleichzeitigen Aenderungen der p Grössen v giebt, durch welche $\log\vartheta$ nur um eine lineare Function der Grössen v geändert wird, und zwar $2p$ von einander unabhängige Systeme (d. h. von denen keins eine Folge der übrigen ist). Denn man hat, die ungeändert bleibenden Grössen v unter dem Functionszeichen ϑ weglassend, für $\mu = 1, 2, \ldots, p$

$$(2.)\qquad \vartheta = \vartheta(v_\mu + \pi i) \quad \text{und}$$

$$(3.)\qquad \vartheta = e^{2v_\mu + a_{\mu,\mu}}\,\vartheta(v_1 + a_{1,\mu}, v_2 + a_{2,\mu}, \ldots, v_p + a_{p,\mu}),$$

wie sich sofort ergiebt, wenn man in der Reihe für ϑ den Stellenzeiger m_μ in $m_\mu + 1$ verwandelt, wodurch sie, während ihr Werth ungeändert bleibt, in den Ausdruck zur Rechten übergeht.

Die Function ϑ ist durch diese Relationen und durch die Eigenschaft, allenthalben endlich zu bleiben, bis auf einen constanten Factor bestimmt. Denn in Folge der letzteren Eigenschaft und der Relationen (2.) ist sie eine einwerthige, für endliche v endliche Function von $e^{2v_1}, e^{2v_2}, \ldots, v^{2v_p}$ und folglich in eine $p$fach unendliche Reihe von der Form

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^p A_{m_1, m_2, \ldots, m_p}\, e^{2\sum\limits_1^p v_\mu m_\mu}$$

mit den constanten Coefficienten A entwickelbar. Aus den Relationen (3.) ergiebt sich aber

$$A_{m_1, \ldots, m_\nu + 1, \ldots, m_p} = A_{m_1, \ldots, m_\nu, \ldots, m_p}\, e^{2\sum\limits_1^p a_{\mu,\nu} m_\mu + a_{\nu,\nu}}$$

folglich

$$A_{m_1, \ldots, m_p} = \text{const.}\, e^{\left(\sum\limits_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}}, \text{ w. z. b. w.}$$

Man kann daher diese Eigenschaften der Function zu ihrer Definition verwenden. Die Systeme gleichzeitiger Aenderungen der Grössen v, durch welche sich $\log\vartheta$ nur um eine lineare Function von ihnen ändert, sollen *Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmoduln der unabhängig veränderlichen Grössen* in dieser ϑ-Function genannt werden.

18.

Ich substituire nun für die p Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_p$ p immer endlich bleibende Integrale $u_1, u_2, \ldots, u_p$ rationaler Functionen einer veränderlichen Grösse z und einer $(2p+1)$fach zusammenhängenden algebraischen Function s dieser Grösse, und für die zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der Grössen v zusammengehörige (d. h. an denselben Querschnitte stattfindende) Periodicitätsmoduln dieser Integrale, so dass $\log\vartheta$ in eine Function *einer* Veränderlichen z übergeht, welche sich, wenn s und z nach beliebiger stetiger Aenderung von z den vorigen Werth wieder annehmen, um lineare Functionen der Grössen u ändert.

Es soll zunächst gezeigt werden, dass eine solche Substitution für jede $(2p+1)$fach zusammenhängende Function s möglich ist. Die Zerschneidung der Fläche T muss zu diesem Zwecke so durch $2p$ in sich zurücklaufende Schnitte $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ geschehen, dass folgende Bedingungen erfüllt werden. Wenn man $u_1, u_2, \ldots, u_p$ so wählt, dass der Periodicitätsmodul von u_μ an dem Schnitte a_μ gleich πi, an den übrigen Schnitten a gleich 0 ist, und man den Periodicitätsmodul von u_μ an dem Schnitte b_ν durch $a_{\mu,\nu}$ bezeichnet, so muss $a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$ und der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu,\mu'} a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ für alle reellen (ganzen) Werthe der p Grössen m negativ sein.

19.

Die Zerlegung der Fläche T werde nicht wie bisher nur durch in sich zurücklaufende Querschnitte, sondern folgendermassen ausgeführt. Man mache zuerst einen in sich zurücklaufenden die Fläche nicht zerstückelnden Schnitt a_1 und führe dann einen Querschnitt b_1 von der positiven Seite von a_1 auf die negative zum Anfangspunkte zurück, worauf die Begrenzung aus *einem* Stücke bestehen wird. Einen dritten die Fläche nicht zerstückelnden Querschnitt kann man demzufolge (wenn die Fläche noch nicht einfach zusammenhängend ist) von einem beliebigen Punkte dieser Begrenzung bis zu einem beliebigen Begrenzungspunkte, also auch zu einem früheren Punkte dieses Querschnitts führen. Man thue das Letztere, so dass dieser Querschnitt aus einer in sich zurücklaufenden Linie a_2 und einem dieser Linie voraufgehenden Theile c_1 besteht, welcher das frühere Schnittsystem mit ihr verbindet. Den folgenden Querschnitt b_2 ziehe man von der positiven Seite von a_2 auf die negative zum Anfangspunkte zurück, worauf die Begrenzung wieder aus *einem* Stücke besteht. Die weitere Zerschneidung kann daher, wenn nöthig, wieder durch zwei in demselben Punkte anfangende und endende Schnitte a_3 und b_3 und eine das System der Linien a_2 und b_2 mit ihnen verbindende Linie c_2 geschehen. Wird dieses Verfahren fortgesetzt, bis die Fläche einfach zusammenhängend ist, so erhält man ein Schnittnetz, welches aus p Paaren von zwei in einem und demselben Punkte anfangenden und endenden Linien a_1 und b_1, a_2 und b_2, $\ldots$, a_p und b_p besteht und aus $p-1$ Linien $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$, welche jedes Paar mit dem folgenden verbinden. Es möge c_ν von einem Punkte von b_ν nach einem Punkte von $a_{\nu+1}$ gehen. Das Schnittnetz wird als so entstanden betrachtet, dass der $(2\nu-1)$te Querschnitt aus $c_{\nu-1}$ und der von dem Endpunkte von $c_{\nu-1}$ zu diesem zurückgezogenen Linie a_ν besteht, und der 2νte durch die von der *positiven* auf die *negative* Seite von a_ν gezogene Linie b_ν gebildet wird. Die Begrenzung der Fläche besteht bei dieser Zerschneidung nach einer geraden Anzahl von Schnitten aus *einem*, nach einer ungeraden aus zwei Stücken.

Ein allenthalben endliches Integral w einer rationalen Function von s und z nimmt dann zu beiden Seiten einer Linie c denselben Werth an. Denn die ganze früher entstandene Begrenzung besteht aus *einem* Stücke und bei der Integration längs derselben von der einen Seite der Linie c bis auf die andere wird $\int dw$ durch jedes früher entstandene Schnittelement zweimal, in entgegengesetzter Richtung, erstreckt. Eine solche Function ist daher in T allenthalben ausser den Linien a und b stetig. Die durch diese Linien zerschnittene Fläche T möge durch T'' bezeichnet werden.

20.

Es seien nun $w_1, w_2, \ldots, w_p$ von einander unabhängige solche Functionen, und der Periodicitätsmodul von w_μ an dem Querschnitte a_ν gleich $A_\mu^{(\nu)}$ und an dem Querschnitte b_ν gleich $B_\mu^{(\nu)}$. Es ist dann das Integral $\int w_\mu dw_{\mu'}$, um die Fläche T'' positiv herum ausgedehnt, $=0$, da die Function unter dem Integralzeichen allenthalben endlich ist. Bei dieser Integration wird jede der Linien a und b zweimal, einmal in positiver und einmal in negativer Richtung durchlaufen, und

es muss während jener Integration, wo sie als Begrenzung des positiverseits gelegenen Gebiets dient, für w_μ der Werth auf der positiven Seite oder $w_\mu{}^+$, während dieser der Werth auf der negativen oder $w_\mu{}^-$ genommen werden. Es ist also dies Integral gleich der Summe aller Integrale $\int(w_\mu{}^+ - w_\mu{}^-)dw_{\mu'}$ durch die Linien a und b. Die Linien b führen von der positiven zur negativen Seite der Linien a, und folglich die Linien a von der negativen zur positiven Seite der Linien b. Das Integral durch die Linie a_ν ist daher

$$\int A_\mu^{(\nu)} dw_{\mu'} = A_\mu^{(\nu)} \int dw_{\mu'} = A_\mu^{(\nu)} B_{\mu'}^{(\nu)},$$

und das Integral durch die Linie b_ν

$$= \int B_\mu^{(\nu)} dw_{\mu'} = -B_\mu^{(\nu)} A_{\mu'}^{(\nu)}.$$

Das Integral $\int w_\mu dw_{\mu'}$, um die Fläche T'' positiv herum erstreckt, ist also

$$= \sum_\nu \left(A_\mu^{(\nu)} B_{\mu'}^{(\nu)} - B_\mu^{(\nu)} A_{\mu'}^{(\nu)}\right),$$

und diese Summe folglich $=0$. Diese Gleichung gilt für je zwei von den Functionen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ und liefert also $\frac{p(p-1)}{1.2}$ Relationen zwischen deren Periodicitätsmoduln.

Nimmt man für die Functionen w die Functionen u oder wählt man sie so, dass $A_\mu^{(\nu)}$ für ein von μ verschiedenes ν gleich 0 und $A_\nu^{(\nu)} = \pi i$ ist, so gehen diese Relationen über in $B_{\mu'}^{(\mu)}\pi i - B_\mu^{(\mu')}\pi i = 0$ oder in $a_{\mu,\mu'} = a_{\mu',\mu}$.

21.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Grössen a die zweite oben nöthig gefundene Eigenschaft besitzen.

Man setze $w = \mu + \nu i$ und den Periodicitätsmodul dieser Function an dem Schnitte a_ν gleich $A^{(\nu)} = \alpha_\nu + \gamma_\nu i$ und an dem Schnitte b_ν gleich $B^{(\nu)} = \beta_\nu + \delta_\nu i$. Es ist dann das Integral

$$\int \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2\right) dT$$

oder

$$\int \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) dT \; {}^{*)}$$

*) Dies Integral drückt den Inhalt der Fläche aus, welche die Gesammtheit der Werthe, die w innerhalb T'' annimmt, auf der w-Ebene repräsentirt.

durch die Fläche T'' gleich dem Begrenzungsintegral $\int \mu\, dv$ um T'' positiv herum erstreckt, also gleich der Summe der Integrale $\int(\mu^+ - \mu^-)\,dv$ durch die Linien a und b. Das Integral durch die Linie a_ν ist $= \alpha_\nu \int dv = \alpha_\nu \delta_\nu$, das Integral durch die Linie b_ν gleich $\beta_\nu \int dv = -\beta_\nu \gamma_\nu$ und folglich

$$\int \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 \right) dT = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} (\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu).$$

Diese Summe ist daher stets positiv.

Hieraus ergiebt sich die zu beweisende Eigenschaft der Grössen a, wenn man für w setzt $u_1 m_1 + u_2 m_2 + \cdots + u_p m_p$. Denn es ist dann $A^{(\nu)} = m_\nu \pi i$, $B^{(\nu)} = \sum\limits_\mu a_{\mu,\nu} m_\mu$, folglich α_ν stets $= 0$ und

$$\int \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 \right) dT = -\Sigma \beta_\nu \gamma_\nu = -\pi \Sigma m_\nu \beta_\nu$$

oder gleich dem reellen Theile von $-\pi \sum\limits_{\mu,\nu} a_{\mu,\nu} m_\mu m_\nu$, welcher also für alle reellen Werthe der Grössen m positiv ist.

22.

Setzt man nun in der ϑ-Reihe (1) §. 17 für $a_{\mu,\mu'}$ den Periodicitätsmodul der Function u_μ an dem Schnitt $b_{\mu'}$ und, durch $e_1, e_2, \ldots, e_p$ beliebige Constanten bezeichnend, $u_\mu - e_\mu$ für v_μ, so erhält man eine in jedem Punkte von T eindeutig bestimmte Function von z,

$$\vartheta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p),$$

welche ausser den Linien b stetig und endlich und auf der positiven Seite der Linie b_ν $\left(e^{-2(u_\nu - e_\nu)}\right)$ mal so gross als auf der negativen ist, wenn man den Functionen u in den Linien b selbst den Mittelwerth von den Werthen zu beiden Seiten beilegt. Für wie viele Punkte von T' oder Werthenpaare von s und z diese Function unendlich klein von der ersten Ordnung wird, kann durch Betrachtung des Begrenzungsintegrals $\int d \log \vartheta$, um T' positiv herum erstreckt, gefunden werden; denn dieses Integral ist gleich der Anzahl dieser Punkte multiplicirt mit $2\pi i$. Andererseits ist dies Integral gleich der Summe der Integrale $\int(d \log \vartheta^+ - d \log \vartheta^-)$ durch sämmtliche Schnittlinien a, b und c. Die Integrale durch die Linien a und c sind $= 0$, das Integral durch b_ν aber gleich $-2\int du_\nu = 2\pi i$, die Summe aller also $= p 2\pi i$. Die Function ϑ wird daher unendlich klein von der ersten Ordnung in p Punkten der Fläche T', welche durch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ bezeichnet werden mögen.

Durch einen positiven Umlauf des Punktes (s, z) um einen dieser Punkte wächst $\log \vartheta$ um $2\pi i$, durch einen positiven Umlauf um das Schnittepaar a_ν und b_ν um $-2\pi i$. Um daher die Function $\log \vartheta$ allenthalben eindeutig zu bestimmen, führe man von jedem Punkte η einen Schnitt durch das Innere nach je einem Linienpaar, von η_ν den Schnitt l_ν nach a_ν und b_ν, und zwar nach ihrem gemeinschaftlichen Anfangs- und Endpunkte, und nehme in der dadurch entstandenen Fläche T^* die Function allenthalben stetig an. Sie ist dann auf der positiven Seite der Linien l um $-2\pi i$, auf der positiven Seite der Linie a_ν um $g_\nu 2\pi i$ und auf der positiven Seite der Linie b_ν um $-2(u_\nu - e_\nu) - h_\nu 2\pi i$ grösser, als auf der negativen, wenn g_ν und h_ν ganze Zahlen bezeichnen.

Die Lage der Punkte η und die Werthe der Zahlen g und h hängen von den Grössen e ab, und diese Abhängigkeit lässt sich auf folgendem Wege näher bestimmen. Das Integral $\int \log \vartheta\, du_\mu$, um T^* positiv herum erstreckt, ist $= 0$, da die Function $\log \vartheta$ in T^* stetig bleibt. Dieses Integral ist aber auch gleich der Summe der Integrale $\int(\log \vartheta^+ - \log \vartheta^-)\, du_\mu$ durch sämmtliche Schnittlinien l, a, b und c und findet sich, wenn man den Werth von u_μ im Punkte η_ν durch $\alpha_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet,

$$= 2\pi i \left(\sum_\nu \alpha_\mu^{(\nu)} + h_\mu \pi i + \sum_\nu g_\nu a_{\nu,\mu} - e_\mu + k_\mu \right),$$

worin k_μ von den Grössen e, g, h und der Lage der Punkte η unabhängig ist. Dieser Ausdruck ist also $= 0$.

Die Grösse k_μ hängt von der Wahl der Function u_μ ab, welche durch die Bedingung, an dem Schnitte a_μ den Periodicitätsmodul πi, an den übrigen Schnitten a den Periodicitätsmodul 0 anzunehmen, nur bis auf eine additive Constante bestimmt ist. Nimmt man für u_μ eine um die Constante c_μ grössere Function und zugleich e_μ um c_μ grösser, so bleiben die Function ϑ und folglich die Punkte η und die Grössen g, h ungeändert, der Werth von u_μ im Punkte η_ν aber wird $\alpha_\mu^{(\nu)} + c_\mu$. Es geht daher k_μ in $k_\mu - (p-1)c_\mu$ über und verschwindet, wenn $c_\mu = \frac{k_\mu}{p-1}$ genommen wird.

Man kann folglich, wie für die Folge geschehen soll, die additiven Constanten in den Functionen u oder die Anfangswerthe in den sie ausdrückenden Integralen so bestimmen, dass man durch die Substitution von $u_\mu - \Sigma \alpha_\mu^{(\nu)}$ für v_μ in $\log \vartheta(v_1, \ldots, v_p)$ eine Function erhält, welche in den Punkten η logarithmisch unendlich wird und, durch T^* stetig fortgesetzt, auf der positiven Seite der Linien l um $-2\pi i$, der Linien a um 0 und der Linie b_ν um $-2\left(u_\nu - \sum\limits_1^p \alpha_\nu^{(\mu)}\right)$ grösser wird, als auf der negativen. Zur Bestimmung dieser Anfangswerthe werden sich später leichtere Mittel darbieten, als der obige Integralausdruck für k_μ.

23.

Setzt man $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \equiv (\alpha_1^{(p)}, \alpha_2^{(p)}, \ldots, \alpha_p^{(p)})$ nach den $2p$ Modulsystemen der Functionen u (§. 15), also

$$(v_1, v_2, \ldots, v_p) \equiv \left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right),$$

so wird $\vartheta = 0$. Wird umgekehrt $\vartheta = 0$ für $v_\mu = r_\mu$, so ist $(r_1, r_2, \ldots, r_p)$ einem Grössensysteme von der Form

$$\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right)$$

congruent. Denn setzt man $v_\mu = u_\mu - \alpha_\mu^{(p)} + r_\mu$, indem man η_p beliebig wählt, so wird die Function ϑ ausser in η_p noch in $p-1$ andern Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung, und bezeichnet man diese durch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$, so ist

$$\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv (r_1, r_2, \ldots, r_p). \text{ *)}$$

Die Function ϑ bleibt ungeändert, wenn man sämmtliche Grössen v in's Entgegengesetzte verwandelt; denn verwandelt man in der Reihe für $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ sämmtliche Indices m in's Entgegengesetzte, wodurch der Werth der Reihe ungeändert bleibt, da $-m_\nu$ dieselben Werthe wie m_ν durchläuft, so geht $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ über in $\vartheta(-v_1, -v_2, \ldots, -v_p)$.

Nimmt man nun die Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ beliebig an, so wird $\vartheta\left(-\sum\limits_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum\limits_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)}\right) = 0$ und folglich, da die Function ϑ wie eben bemerkt gerade ist, auch $\vartheta\left(\sum\limits_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum\limits_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)}\right) = 0$. Es lassen sich also die $p-1$ Punkte $\eta_p, \eta_{p-1}, \ldots, \eta_{2p-2}$ so bestimmen, dass

$$\left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv \left(-\sum_p^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_p^{2p-2} \alpha_p^{(\nu)}\right)$$

und folglich

*) Vgl. hierzu Abhandlung XI. W.

$$\left(\sum_1^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{2p-2} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv (0, \ldots\ldots, 0)$$

ist. Die Lage der $p-1$ letzten Punkte hängt dann von der Lage der $p-1$ ersten so ab, dass bei beliebiger stetiger Aenderung derselben $\sum\limits_1^{2p-2} d\alpha_\pi^{(\nu)} = 0$ für $\pi = 1, 2, \ldots, p$, und folglich sind (§. 16) die Punkte η solche $2p-2$ Punkte, für welche ein dw unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, oder wenn man den Werth des Grössenpaars (s, z) im Punkte η_ν durch (σ_ν, ζ_ν) bezeichnet, so sind $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpfte Werthenpaare (§. 16).

Bei den hier gewählten Anfangswerthen der Integrale u wird also

$$\left(\sum_1^{2p-2} u_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{2p-2} u_p^{(\nu)}\right) \equiv (0, \ldots, 0),$$

wenn die Summationen über sämmtliche von den Grössenpaaren $(\gamma_\varrho, \delta_\varrho)$ (§. 6) *verschiedene gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichung $F = 0$ und der Gleichung $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_p\varphi_p = 0$ erstreckt werden, wobei die constanten Grössen c beliebig sind.*

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ m Punkte, für welche eine rationale Function ξ von s und z, die m mal unendlich von der ersten Ordnung wird, denselben Werth annimmt, und $u_\pi^{(\mu)}, s_\mu, z_\mu$ die Werthe von u_π, s, z im Punkte ε_μ, so ist (§. 15) $\left(\sum\limits_1^m u_1^{(\mu)}, \sum\limits_1^m u_2^{(\mu)}, \ldots, \sum\limits_1^m u_p^{(\mu)}\right)$ congruent einem constanten, d. h. vom Werthe der Grösse ξ unabhängigen Grössensysteme $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$, und es kann dann für jede beliebige Lage eines Punktes ε die Lage der übrigen so bestimmt werden, dass

$$\left(\sum_1^m u_1^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^m u_p^{(\mu)}\right) \equiv (b_1, \ldots, b_p).$$

Man kann daher, wenn $m = p$, $(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p)$ und, wenn $m < p$,

$$\left(u_1 - \sum_1^{p-m} \alpha_1^{(\nu)} - b_1, \ldots, u_p - \sum_1^{p-m} \alpha_p^{(\nu)} - b_p\right)$$

für jede beliebige Lage des Punktes (s, z) und der $p-m$ Punkte η auf die Form $\left(-\sum\limits_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum\limits_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)}\right)$ bringen, indem man einen der Punkte ε mit (s, z) zusammenfallen lässt, und folglich ist

$$\vartheta\left(u_1 - \sum_1^{p-m} \alpha_1^{(\nu)} - b_1, \ldots, u_p - \sum_1^{p-m} \alpha_p^{(\nu)} - b_p\right)$$

für jedwede Werthe des Grössenpaars (s, z) und der $p - m$ Grössenpaare (σ_ν, ζ_ν) gleich 0.

24.

Aus der Untersuchung des §. 22 folgt als Corollar, dass ein beliebig gegebenes Grössensystem $(e_1, \ldots, e_p)$ immer einem und nur einem Grössensysteme von der Form $(\sum_1^p \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\nu)})$ congruent ist, wenn die Function $\vartheta(u_1 - e_1, \ldots, u_p - e_p)$ nicht identisch verschwindet; denn es müssen dann die Punkte η die p Punkte sein, für welche diese Function 0 wird. Wenn aber $\vartheta(u_1^{(p)} - e_1, \ldots, u_p^{(p)} - e_p)$ für jeden Werth von (s_p, z_p) verschwindet, so lässt sich

$$(u_1^{(p)} - e_1, \ldots, u_p^{(p)} - e_p) \equiv \left(-\sum_1^{p-1} u_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} u_p^{(\nu)}\right)$$

setzen (§. 23), und es lassen sich also für jeden Werth des Grössenpaars (s_p, z_p) die Grössenpaare $(s_1, z_1), \ldots, (s_{p-1}, z_{p-1})$ so bestimmen, dass

$$\left(\sum_1^p u_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^p u_p^{(\nu)}\right) \equiv (e_1, \ldots, e_p),$$

und folglich, bei stetiger Aenderung von (s_p, z_p), $\sum_1^p du_\pi^{(\nu)} = 0$ ist für $\pi = 1, 2, \ldots, p$. Die p Grössenpaare (s_ν, z_ν) sind daher p von den Grössenpaaren $(\gamma_\varrho, \delta_\varrho)$ verschiedene Wurzeln einer Gleichung $\varphi = 0$, deren Coefficienten so sich ändern, dass die übrigen $p - 2$ Wurzeln constant bleiben. Bezeichnet man die Werthe von u_π für diese $p - 2$ Werthenpaare von s und z durch $u_\pi^{(p+1)}, u_\pi^{(p+2)}, \ldots, u_\pi^{(2p-2)}$, so ist

$$\left(\sum_1^{2p-2} u_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{2p-2} u_p^{(\nu)}\right) \equiv (0, \ldots\ldots, 0)$$

und folglich

$$(e_1, \ldots, e_p) \equiv \left(-\sum_{p+1}^{2p-2} u_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_{p+1}^{2p-2} u_p^{(\nu)}\right).$$

Umgekehrt ist, wenn diese Congruenz stattfindet,

$$\vartheta(u_1^{(p)} - e_1, \ldots, u_p^{(p)} - e_p) = \vartheta\left(\sum_p^{2p-2} u_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_p^{2p-2} u_p^{(\nu)}\right) = 0.$$

Ein beliebig gegebenes Grössensystem $(e_1, \ldots, e_p)$ ist also nur Einem Grössensystem von der Form $(\sum_1^p \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\nu)})$ congruent, wenn es

nicht einem Grössensysteme von der Form $(-\sum_1^{p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-2} \alpha_p^{(\nu)})$ congruent ist, und unendlich vielen, wenn dieses stattfindet.

Da $\vartheta(u_1 - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots, u_p - \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}) = \vartheta(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} - u_1, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)} - u_p)$, so ist ϑ eine ganz ähnliche Function wie von (s, z) auch von jedem der p Grössenpaare (σ_μ, ζ_μ). Diese Function von (σ_μ, ζ_μ) wird $= 0$ für das Werthenpaar (s, z) und für die den übrigen $p - 1$ Grössenpaaren (σ, ζ) durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften $p - 1$ Punkte. Denn bezeichnet man den Werth von u_π in diesen Punkten mit $\beta_\pi^{(1)}, \beta_\pi^{(2)}, \ldots, \beta_\pi^{(p-1)}$, so ist

$$\left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}\right) \equiv \left(\alpha_1^{(\mu)} - \sum_1^{p-1} \beta_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)} - \sum_1^{p-1} \beta_p^{(\nu)}\right)$$

und folglich $\vartheta = 0$, wenn η_μ mit einem dieser Punkte oder mit dem Punkte (s, z) zusammenfällt.

25.

Aus den bisher entwickelten Eigenschaften der Function ϑ ergiebt sich der Ausdruck von $\log \vartheta$ durch Integrale algebraischer Functionen von $(s, z), (\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$.

Die Grösse $\log \vartheta(u_1^{(2)} - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots) - \log \vartheta(u_1^{(1)} - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots)$ ist, als Function von (σ_μ, ζ_μ) betrachtet, eine Function von der Lage des Punkts η_μ, welche im Punkte ε_1, wie $-\log(\zeta_\mu - z_1)$, im Punkte ε_2, wie $\log(\zeta_\mu - z_2)$ unstetig wird und auf der positiven Seite einer von ε_1 nach ε_2 zu ziehenden Linie um $2\pi i$, auf der positiven Seite der Linie b_ν um $2(u_\nu^{(1)} - u_\nu^{(2)})$ grösser ist, als auf der negativen, ausser den Linien b und der Verbindungslinie von ε_1 und ε_2 aber allenthalben stetig bleibt. Bezeichnet nun $\varpi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ irgend eine Function von (σ_μ, ζ_μ), welche ausser den Linien b ebenso unstetig ist und auf der einen Seite einer solchen Linie ebenfalls um eine Constante grösser ist, als auf der andern, so unterscheidet sie sich (§. 3) von dieser nur um eine von (σ_μ, ζ_μ) unabhängige Grösse, und folglich ist sie von $\sum_1^p \varpi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ nur um eine von sämmtlichen Grössen (σ, ζ) unabhängige und also bloss von (s_1, z_1) und (s_2, z_2) abhängende Grösse verschieden. $\varpi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ drückt den Werth einer Function $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ des §. 4 für $(s, z) = (\sigma_\mu, \zeta_\mu)$ aus, deren Periodicitätsmoduln an den Schnitten a gleich 0 sind. Aendert man diese Function um die Constante c, so ändert sich $\sum_1^p \varpi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ um pc; man kann daher, wie für die Folge geschehen soll, die additive Constante in der Function $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ oder den Anfangswerth in dem sie darstellenden Integrale dritter Gattung so bestimmen, dass $\log\vartheta^{(2)} - \log\vartheta^{(1)} = \sum\limits_1^p \varpi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Da ϑ von jedem der Grössenpaare (σ, ζ) auf ähnliche Art, wie von (s, z) abhängt, so kann die Aenderung von $\log\vartheta$, wenn irgend eins der Grössenpaare $(s, z), (\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$ eine endliche Aenderung erleidet, während die übrigen constant bleiben, durch eine Summe von Functionen ϖ ausgedrückt werden. Offenbar kann man also, indem man nach und nach die einzelnen Grössenpaare $(s, z), (\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$ ändert, $\log\vartheta$ ausdrücken durch eine Summe von Functionen ϖ und

$$\log\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$$

oder den Werth von $\log\vartheta$ für ein beliebiges anderes Werthensystem. Die Bestimmung von $\log\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Function der $3p-3$ Moduln des Systems rationaler Functionen von s und z (§. 12) erfordert ähnliche Betrachtungen, wie sie von Jacobi in seinen Arbeiten über elliptische Functionen zur Bestimmung von $\Theta(0)$ angewandt worden sind. Man kann dazu gelangen, indem man mit Hülfe der Gleichungen

$$4\frac{\partial\vartheta}{\partial a_{\mu,\mu}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v_\mu^2} \text{ und } 2\frac{\partial\vartheta}{\partial a_{\mu,\mu'}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v_\mu\,\partial v_{\mu'}},$$

wenn μ von μ' verschieden ist, die Differentialquotienten von $\log\vartheta$ nach den Grössen a in

$$d\log\vartheta = \sum\frac{\partial\log\vartheta}{\partial a_{\mu,\mu'}}\,da_{\mu,\mu'}$$

durch Integrale algebraischer Functionen ausdrückt. Für die Ausführung dieser Rechnung scheint jedoch eine ausführlichere Theorie der Functionen, welche einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten genügen, nöthig, die ich nach den hier angewandten Principien nächstens zu liefern beabsichtige.

Ist (s_2, z_2) unendlich wenig von (s_1, z_1) verschieden, so geht $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ über in $dz_1 t(\varepsilon_1)$, worin $t(\varepsilon_1)$ ein Integral zweiter Gattung einer rationalen Function von s und z ist, welches in ε_1 wie $\frac{1}{z-z_1}$ unstetig wird und an den Schnitten a den Periodicitätsmodul 0 hat; und es ergiebt sich, dass der Periodicitätsmodul eines solchen Integrals an dem Schnitte b_ν gleich $2\frac{du_\nu^{(1)}}{dz_1}$ ist und die Integrationsconstante sich so bestimmen lässt, dass die Summe der Werthe von $t(\varepsilon_1)$ für die p Werthenpaare $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$ gleich $\frac{\partial\log\vartheta^{(1)}}{\partial z_1}$ wird. Es ist dann

$\frac{\partial\log\vartheta^{(1)}}{\partial\zeta_\mu}$ gleich der Summe der Werthe von $t(\eta_\mu)$ für die den $p-1$ von (σ_μ, ζ_μ) verschiedenen Grössenpaaren (σ, ζ) durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften $p-1$ Werthenpaare und für das Werthenpaar (s, z), und man erhält für

$$\frac{\partial\log\vartheta^{(1)}}{\partial z_1}\,dz_1 + \sum_1^p\frac{\partial\log\vartheta^{(1)}}{\partial\zeta_\mu}\,d\zeta_\mu = d\log\vartheta^{(1)},$$

einen Ausdruck, welchen Weierstrass für den Fall, wenn s nur eine zweiwerthige Function von z ist, gegeben hat (Journ. für Mathem. Bd. 47 S. 300 Form. 35).

Die Eigenschaften von $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ und $t(\varepsilon_1)$ als Functionen von (s_1, z_1) und (s_2, z_2) ergeben sich aus den Gleichungen

$$\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{p}\left(\log\vartheta(u_1^{(2)} - pu_1, \ldots) - \log\vartheta(u_1^{(1)} - pu_1, \ldots)\right)$$

und

$$t(\varepsilon_1) = \frac{1}{p}\frac{\partial\log\vartheta(u_1^{(1)} - pu_1, \ldots)}{\partial z_1},$$

welche in den obigen Ausdrücken für $\log\vartheta^{(2)} - \log\vartheta^{(1)}$ und $\frac{\partial\log\vartheta^{(1)}}{\partial z_1}$ als specielle Fälle enthalten sind. ([3])

26.

Es soll jetzt die Aufgabe behandelt werden, algebraische Functionen von z als Quotienten zweier Producte von gleichvielen Functionen $\vartheta(u_1 - e_1, \ldots)$ und Potenzen der Grössen e^u darzustellen.

Ein solcher Ausdruck erlangt bei den Uebergängen von (s, z) über die Querschnitte constante Factoren, und diese müssen Wurzeln der Einheit sein, wenn er algebraisch von z abhängen und also bei stetiger Fortsetzung für dasselbe z nur eine endliche Anzahl von Werthen annehmen soll. Sind alle diese Factoren μte Wurzeln der Einheit, so ist die μte Potenz des Ausdrucks eine einwerthige und folglich rationale Function von s und z.

Umgekehrt lässt sich leicht zeigen, dass jede algebraische Function r von z, die innerhalb der ganzen Fläche T' stetig fortgesetzt, allenthalben nur *einen* bestimmten Werth annimmt und beim Ueberschreiten eines Querschnitts einen constanten Factor erlangt, sich auf mannigfaltige Art als Quotient zweier Producte von ϑ-Functionen und Potenzen der Grössen e^u ausdrücken lässt. Man bezeichne einen Werth von u_μ für $r = \infty$ durch β_μ und für $r = 0$ durch γ_μ und nehme $\log r$, indem man von jedem Punkte, wo r unendlich von der ersten Ordnung wird, nach je einem Punkte, wo r unendlich klein von der ersten Ordnung wird, eine Linie durch das Innere von T' zieht, ausser diesen Linien in T' allenthalben stetig an. Ist dann $\log r$ auf der positiven Seite der Linie b_ν um $g_\nu 2\pi i$ und auf der positiven Seite der Linie a_ν um $-h_\nu 2\pi i$ grösser, als auf der negativen, so ergiebt sich durch die Betrachtung des Begrenzungsintegrals $\int \log r\, du_\mu$

$$\Sigma\gamma_\mu - \Sigma\beta_\mu = g_\mu \pi i + \sum_\nu h_\nu a_{\mu,\nu}$$

für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, worin g_ν und h_ν nach dem oben Bemerkten rationale Zahlen sein müssen und die Summen auf der linken Seite der Gleichung über sämmtliche Punkte, wo r unendlich klein oder unendlich gross von der ersten Ordnung wird, auszudehnen sind, indem man einen Punkt, wo r unendlich klein oder unendlich gross von einer höheren Ordnung wird, als aus mehreren solchen Punkten bestehend betrachtet (§. 2). Wenn diese Punkte bis auf p gegeben sind, so lassen sich diese p immer und, allgemein zu reden, nur auf eine Weise so bestimmen, dass die $2p$ Factoren $e^{g_\nu 2\pi i}$, $e^{-h_\nu 2\pi i}$ gegebene Werthe annehmen (§§. 15, 24).

Wenn man nun in dem Ausdrucke

$$\frac{P}{Q} e^{-2\Sigma h_\nu u_\nu},$$

worin P und Q Producte von gleichvielen Functionen $\vartheta(u_1 - \Sigma\alpha_1^{(\pi)}, \ldots)$ mit demselben (s, z) und verschiedenen (σ, ζ) sind, die Werthenpaare von s und z, für welche r unendlich wird, für Grössenpaare (σ, ζ) in den ϑ-Functionen des Nenners und die Werthenpaare, für welche r verschwindet, für Grössenpaare (σ, ζ) in den ϑ-Functionen des Zählers substituirt und die übrigen Grössenpaare (σ, ζ) im Nenner und im Zähler gleich annimmt, so stimmt der Logarithme dieses Ausdrucks in Bezug auf die Unstetigkeiten im Innern von T' mit $\log r$ überein, und ändert sich beim Ueberschreiten der Linien a und b, wie $\log r$, nur um rein imaginäre längs diesen Linien constante Grössen; er unterscheidet sich also von $\log r$ nach dem Dirichlet'schen Princip nur um eine Constante und der Ausdruck selbst von r nur durch einen constanten Factor. Bei dieser Substitution darf selbstredend keine der ϑ-Functionen identisch, für jeden Werth von z, verschwinden. Dieses würde geschehen (§. 23), wenn sämmtliche Werthenpaare, für welche eine einwerthige Function von (s, z) verschwindet, für Grössenpaare (σ, ζ) in einer und derselben ϑ-Function substituirt würden.

27.

Als Quotient *zweier* ϑ-Functionen, multiplicirt mit Potenzen der Grössen e^u, lässt sich demnach eine einwerthige oder rationale Function

von (s, z) nicht darstellen. Alle Functionen r aber, die für dasselbe Werthenpaar von s und z mehrere Werthe annehmen und nur für p oder weniger Werthenpaare unendlich von der ersten Ordnung werden, sind in dieser Form darstellbar und umfassen alle in dieser Form darstellbaren algebraischen Functionen von z. Man erhält, abgesehen von einem constanten Factor, jede und jede nur einmal, wenn man in

$$\frac{\vartheta(v_1 - g_1\pi i - \sum_\nu h_\nu a_{1,\nu}, \ldots)}{\vartheta(v_1, \ldots, v_p)} e^{-2\sum_\nu v_\nu h_\nu}$$

für h_ν und g_ν rationale ächte Brüche und $u_\nu - \sum_1^p \alpha_\nu^{(\mu)}$ für v_ν setzt.

Diese Grösse ist zugleich eine algebraische Function von jeder der Grössen ζ und die (im vor. §.) entwickelten Principien reichen völlig hin, um sie durch die Grössen $z, \zeta_1, \ldots, \zeta_p$ algebraisch auszudrücken.

In der That: Als Function von (s, z) nimmt sie, durch die ganze Fläche T' stetig fortgesetzt, allenthalben *einen* bestimmten Werth an, wird unendlich von der ersten Ordnung für die Werthenpaare $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$ und erlangt an dem Schnitte a_ν beim Uebergange von der positiven zur negativen Seite den Factor $e^{h_\nu 2\pi i}$, an dem Schnitte b_ν den Factor $e^{-g_\nu 2\pi i}$; und jede andere dieselben Bedingungen erfüllende Function von (s, z) unterscheidet sich von ihr nur durch einen von (s, z) unabhängigen Factor. Als Function von (σ_μ, ζ_μ) nimmt sie, durch die ganze Fläche T' stetig fortgesetzt, allenthalben *einen* bestimmten Werth an, wird unendlich von der ersten Ordnung für das Werthenpaar (s, z) und für die den übrigen $p-1$ Grössenpaaren (σ, ζ) durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften $p-1$ Werthenpaare $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \ldots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$ und erlangt an dem Schnitte a_ν den Factor $e^{-h_\nu 2\pi i}$, an dem Schnitte b_ν den Factor $e^{g_\nu 2\pi i}$; und jede andere dieselben Bedingungen erfüllende Function von (σ_μ, ζ_μ) unterscheidet sich von ihr nur durch einen von (σ_μ, ζ_μ) unabhängigen Factor. Bestimmt man also eine algebraische Function von $z, \zeta_1, \ldots, \zeta_p$

$$f((s, z); (\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p))$$

so, dass sie als Function von jeder dieser Grössen dieselben Eigenschaften besitzt, so unterscheidet sie sich von dieser nur durch einen von sämmtlichen Grössen $z, \zeta_1, \ldots, \zeta_p$ unabhängigen Factor und wird also $= Af$, wenn A diesen Factor bezeichnet. Um diesen Factor zu bestimmen, drücke man in f die von (σ_μ, ζ_μ) verschiedenen Grössenpaare (σ, ζ) durch $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \ldots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$ aus, wodurch er in

$$g\left((\sigma_\mu,\ \zeta_\mu);\ (s,\ z),\ (\sigma_1^{(\mu)},\ \zeta_1^{(\mu)}),\ \ldots,\ (\sigma_{p-1}^{(\mu)},\ \zeta_{p-1}^{(\mu)})\right)$$

übergehe; offenbar erhält man dann den inversen Werth der darzustellenden Function und also einen Ausdruck, welcher $=\frac{1}{Af}$ sein muss, wenn man in Ag für (σ_μ, ζ_μ) das Grössenpaar (s, z) und für die Grössenpaare (s, z), $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)})$, $\ldots$, $(\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$ die Werthenpaare von (s, z) substituirt, für welche die darzustellende Function und also $f = 0$ wird. Hieraus ergiebt sich A^2 und also A bis auf das Vorzeichen, welches durch directe Betrachtung der ϑ-Reihen in dem darzustellenden Ausdrucke gefunden werden kann. (4)

Anmerkungen.

(1) (Zu Seite 92.) Der hier ausgesprochene Satz bedarf einer gewissen Einschränkung und näheren Präcisirung, wie von Tonelli bemerkt ist (Atti della R. accademia dei Lincei Ser. II vol. 2 1875. Im Auszug in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1875).

Wenn das Curvensystem a sowohl mit dem Curvensystem b als mit einem zweiten Curvensystem c einen Theil der Fläche F vollständig begrenzt, so ist, damit die Curvensysteme b und c zusammen genommen gleichfalls einen Theil der Fläche begrenzen, im Allgemeinen erforderlich, dass nicht schon ein Theil der Curven a mit b oder mit c zusammen einen Flächentheil begrenzen.

Der von den Curvensystemen b, c begrenzte Flächentheil, der, auch wenn die Flächentheile a, b und a, c einfach sind, aus mehreren getrennten Stücken bestehen kann, wird von Tonelli in folgender Weise beschrieben: Er besteht aus der Gesammtheit der Flächentheile a, b und a, c, wenn von den gemeinsamen Stücken dieser beiden Flächentheile diejenigen weggenommen werden, die durch Curven a begrenzt sind.

Das von Tonelli gewählte Beispiel einer geschlossenen und durch einen Punkt begrenzten fünffach zusammenhängenden Doppel-Ringfläche erläutert und veranschaulicht diese Verhältnisse.

Auf die von Riemann gemachte Anwendung dieses Satzes auf die Definition des $(n+1)$fachen Zusammenhanges, in der das zuvor mit a bezeichnete System immer nur aus einer Curve, nämlich der durch b ersetzten Curve a besteht, sind diese Bemerkungen ohne Einfluss.

(2) (Zu Seite 114.) Setzt man $dz = ds\, e^{i\varphi}$, so ist φ der Winkel, den die Richtung des Elementes ds der Begrenzungslinie mit der x-Axe bildet, und also das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\log\frac{dz}{ds} = \frac{1}{2\pi}\int d\varphi$$

gleich der Anzahl der Umdrehungen, welche die Richtung der Begrenzungslinie beim Durchlaufen in positivem Sinne macht. Dabei wird jeder Querschnitt zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen, so dass diese Theile der Drehung sich aufheben, und nur die von den $2p-1$ Knotenpunkten des Querschnittnetzes (§. 3) herrührenden Drehungen, deren jede 2π beträgt, übrig bleiben. So ergiebt sich die Relation $w - 2n = 2(p-1)$, die der Ausdruck für den am Anfang des §. 7 ausgesprochenen Lehrsatz ist.

Einen Beweis dieses Theorems, der vom Dirichlet'schen Princip keinen Gebrauch macht und überhaupt von Massverhältnissen ganz absieht, hat C. Neumann gegeben (Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale Cap. 7, §. 8, zweite Auflage, Leipzig 1884).

(3) (Zu Seite 139.) Den in §. 25 angeregten Gedankengang haben J. Thomae (Journal für Mathematik Bd. 66, 71, 75), Fuchs (ebenda Bd. 73) und F. Klein (Mathematische Annalen Bd. 36) weiter verfolgt.

(4) (Zu Seite 142.) Ueber die Form der algebraischen Function f mögen noch einige Bemerkungen folgen. Ist n der kleinste gemeinschaftliche Nenner der Grössen h_ν und g_ν, so ist die $n$te Potenz von f eine einwerthige Function sowohl von (s, z) als von sämmtlichen Grössenpaaren (σ, ζ) und folglich f die $n$te Wurzel aus einer rationalen Function. Diese rationale Function muss als Function von (s, z) so bestimmt werden, dass sie für die p Grössenpaare (σ, ζ) unendlich von der $n$ten Ordnung wird, und dass von den np Punkten, für welche sie unendlich klein wird, ebenfalls je n zusammenfallen.

Ist l irgend eine Function von (s, z), welche an den Querschnitten dieselben Factoren erlangt, wie f, und bezeichnet λ_μ den Werth dieser Function für das Werthenpaar (σ_μ, ζ_μ), so ist $f \cdot l^{-1} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p$ eine rationale Function ϱ von (s, z) und sämmtlichen Grössen (σ, ζ); also:

$$f = \frac{\varrho l}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p}.$$

[Bemerkung aus den in Riemann's Nachlass befindlichen Entwürfen zur vorstehenden Abhandlung.]

VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\, \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

Betrachtet man nun das Integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x - 1}$$

von $+\infty$ bis $+\infty$ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergiebt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ so bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird. Man hat daher

$$2 \sin \pi s\, \Pi(s-1)\, \zeta(s) = i \int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden.

Diese Gleichung giebt nun den Werth der Function $\zeta(s)$ für jedes beliebige complexe s und zeigt, dass sie einwerthig und für alle endlichen Werthe von s, ausser 1, endlich ist, so wie auch, dass sie verschwindet, wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist. (1)

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das angegebene Grössengebiet auch negativ um das Grössengebiet, welches sämmtliche übrigen complexen Grössen enthält, erstreckt werden, da das Integral durch Werthe mit unendlich grossem Modul dann unendlich klein ist. Im Innern dieses Grössengebiets aber wird die Function unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn x gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ wird und das Integral ist daher gleich der Summe der Integrale negativ um diese Werthe genommen. Das Integral um den Werth $n 2\pi i$ aber ist $= (-n 2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, man erhält daher

$$2 \sin \pi s\, \Pi(s-1)\, \zeta(s) = (2\pi)^s\, \Sigma n^{s-1}\, ((-i)^{s-1} + i^{s-1}),$$

also eine Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$, welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken lässt:

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}}\, \zeta(s)$$

bleibt ungeändert, wenn s in $1 - s$ verwandelt wird.

Diese Eigenschaft der Function veranlasste mich statt $\Pi(s-1)$ das Integral $\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)$ in dem allgemeinen Gliede der Reihe $\sum \frac{1}{n^s}$

einzuführen, wodurch man einen sehr bequemen Ausdruck der Function $\zeta(s)$ erhält. In der That hat man

$$\frac{1}{n^s}\, \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-nn\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}\, dx,$$

also, wenn man

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x} = \psi(x)$$

setzt,

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}}\, \zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx,$$

oder da

$$2\psi(x) + 1 = x^{-\frac{1}{2}} \left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right), \text{ (Jacobi, Fund. S. 184) *)}$$

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}}\, \zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-3}{2}}\, dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right) dx.$$

Ich setze nun $s = \frac{1}{2} + ti$ und

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\, \pi^{-\frac{s}{2}}\, \zeta(s) = \xi(t),$$

so dass

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - (tt + \tfrac{1}{4}) \int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}} \cos(\tfrac{1}{2} t \log x)\, dx$$

oder auch

$$\xi(t) = 4 \int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)\right)}{dx}\, x^{-\frac{1}{4}} \cos(\tfrac{1}{2} t \log x)\, dx.$$

Diese Function ist für alle endlichen Werthe von t endlich, und lässt sich nach Potenzen von tt in eine sehr schnell convergirende Reihe entwickeln. Da für einen Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, $\log \zeta(s) = -\Sigma \log(1 - p^{-s})$ endlich bleibt, und von den Logarithmen der übrigen Factoren von $\xi(t)$ dasselbe gilt, so kann die Function $\xi(t)$ nur verschwinden, wenn der imaginäre Theil von t zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ liegt. Die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t) = 0$, deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist etwa

*) Jacobi's gesammelte Werke Bd. I. S. 235. W.

$$= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

denn das Integral $\int d \log \xi(t)$ positiv um den Inbegriff der Werthe von t erstreckt, deren imaginärer Theil zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ und deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist (bis auf einen Bruchtheil von der Ordnung der Grösse $\frac{1}{T}$) gleich $\left(T \log \frac{T}{2\pi} - T\right) i$; dieses Integral aber ist gleich der Anzahl der in diesem Gebiet liegenden Wurzeln von $\xi(t) = 0$, multiplicirt mit $2\pi i$. Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

Bezeichnet man durch α jede Wurzel der Gleichung $\xi(\alpha) = 0$, so kann man $\log \xi(t)$ durch

$$\Sigma \log \left(1 - \frac{tt}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0)$$

ausdrücken; denn da die Dichtigkeit der Wurzeln von der Grösse t mit t nur wie $\log \frac{t}{2\pi}$ wächst, so convergirt dieser Ausdruck und wird für ein unendliches t nur unendlich wie $t \log t$; er unterscheidet sich also von $\log \xi(t)$ um eine Function von tt, die für ein endliches t stetig und endlich bleibt und mit tt dividirt für ein unendliches t unendlich klein wird. Dieser Unterschied ist folglich eine Constante, deren Werth durch Einsetzung von $t = 0$ bestimmt werden kann.

Mit diesen Hülfsmitteln lässt sich nun die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als x sind, bestimmen.

Es sei $F(x)$, wenn x nicht gerade einer Primzahl gleich ist, gleich dieser Anzahl, wenn aber x eine Primzahl ist, um $\frac{1}{2}$ grösser, so dass für ein x, bei welchem $F(x)$ sich sprungweise ändert,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}.$$

Ersetzt man nun in

$$\log \zeta(s) = -\Sigma \log(1 - p^{-s}) = \Sigma p^{-s} + \tfrac{1}{2} \Sigma p^{-2s} + \tfrac{1}{3} \Sigma p^{-3s} + \cdots$$

$$p^{-s} \text{ durch } s \int_p^\infty x^{-s-1}\, dx, \quad p^{-2s} \text{ durch } s \int_{p^2}^\infty x^{-s-1}\, dx, \ldots,$$

so erhält man

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x) x^{-s-1}\, dx,$$

wenn man

$$F(x) + \tfrac{1}{2} F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3} F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

durch $f(x)$ bezeichnet.

Diese Gleichung ist gültig für jeden complexen Werth $a + bi$ von s, wenn $a > 1$. Wenn aber in diesem Umfange die Gleichung

$$g(s) = \int_0^\infty h(x) x^{-s}\, d \log x$$

gilt, so kann man mit Hülfe des Fourier'schen Satzes die Function h durch die Function g ausdrücken. Die Gleichung zerfällt, wenn $h(x)$ reell ist und

$$g(a + bi) = g_1(b) + i g_2(b),$$

in die beiden folgenden:

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x) x^{-a} \cos(b \log x)\, d \log x,$$

$$i g_2(b) = -i \int_0^\infty h(x) x^{-a} \sin(b \log x)\, d \log x.$$

Wenn man beide Gleichungen mit

$$(\cos(b \log y) + i \sin(b \log y))\, db$$

multiplicirt und von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt, so erhält man in beiden auf der rechten Seite nach dem Fourier'schen Satze $\pi h(y) y^{-a}$, also, wenn man beide Gleichungen addirt und mit $i y^a$ multiplicirt,

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s) y^s\, ds,$$

worin die Integration so auszuführen ist, dass der reelle Theil von s constant bleibt. ([2])

Das Integral stellt für einen Werth von y, bei welchem eine sprungweise Aenderung der Function $h(y)$ stattfindet, den Mittelwerth aus den Werthen der Function h zu beiden Seiten des Sprunges dar. Bei der hier vorausgesetzten Bestimmungsweise der Function $f(x)$ besitzt diese dieselbe Eigenschaft, und man hat daher völlig allgemein

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s}\, y^s ds.$$

Für $\log \xi$ kann man nun den früher gefundenen Ausdruck

$$\frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) - \log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \Sigma^\alpha \log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + \log\xi(0)$$

substituiren; die Integrale der einzelnen Glieder dieses Ausdrucks würden aber dann ins Unendliche ausgedehnt nicht convergiren, weshalb es zweckmässig ist, die Gleichung vorher durch partielle Integration in

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\,\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds}\, x^s ds$$

umzuformen.

Da

$$-\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \lim\left(\sum_{n=1}^{n=m} \log\left(1+\frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2}\log m\right),$$

für $m = \infty$, also

$$-\frac{d\,\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_{1}^{\infty} \frac{d\,\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

so erhalten dann sämmtliche Glieder des Ausdruckes für $f(x)$ mit Ausnahme von

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{ss}\log\xi(0)\, x^s ds = \log\xi(0)$$

die Form

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}\, x^s ds.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta} = \frac{1}{(\beta-s)\beta},$$

und, wenn der reelle Theil von s grösser als der reelle Theil von β ist,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s ds}{(\beta-s)\beta} = \frac{x^\beta}{\beta} = \int\limits_{\infty}^{x} x^{\beta-1} dx,$$

oder

$$= \int\limits_{0}^{x} x^{\beta-1} dx,$$

je nachdem der reelle Theil von β negativ oder positiv ist. Man hat daher

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}\, x^s ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) x^s ds$$

$$= \int\limits_{\infty}^{x} \frac{x^{\beta-1}}{\log x}\, dx + \text{const. im ersten}$$

und

$$= \int\limits_{0}^{x} \frac{x^{\beta-1}}{\log x}\, dx + \text{const. im zweiten Falle.}$$

Im ersten Falle bestimmt sich die Integrationsconstante, wenn man den reellen Theil von β negativ unendlich werden lässt; im zweiten Falle erhält das Integral von 0 bis x um $2\pi i$ verschiedene Werthe, je nachdem die Integration durch complexe Werthe mit positivem oder negativem Arcus geschieht, und wird, auf jenem Wege genommen, unendlich klein, wenn der Coefficient von i in dem Werthe von β positiv unendlich wird, auf letzterem aber, wenn dieser Coefficient negativ unendlich wird. Hieraus ergiebt sich, wie auf der linken Seite $\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)$ zu bestimmen ist, damit die Integrationsconstante wegfällt.

Durch Einsetzung dieser Werthe in den Ausdruck von $f(x)$ erhält man

$$f(x) = Li(x) - \Sigma^\alpha\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)$$

$$+ \int\limits_{x}^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x} + \log\xi(0), \text{ (}^3\text{)}$$

wenn in Σ^α für α sämmtliche positiven (oder einen positiven reellen Theil enthaltenden) Wurzeln der Gleichung $\xi(\alpha) = 0$, ihrer Grösse nach geordnet, gesetzt werden. Es lässt sich, mit Hülfe einer genaueren Discussion der Function ξ, leicht zeigen, dass bei dieser Anordnung der Werth der Reihe

$$\Sigma\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) \log x$$

mit dem Grenzwerth, gegen welchen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} \frac{d\,\frac{1}{s}\,\Sigma \log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds}\, x^s\, ds$$

bei unaufhörlichem Wachsen der Grösse b convergirt, übereinstimmt; durch veränderte Anordnung aber würde sie jeden beliebigen reellen Werth erhalten können.

Aus $f(x)$ findet sich $F(x)$ mittelst der durch Umkehrung der Relation

$$f(x) = \Sigma \frac{1}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

sich ergebenden Gleichung

$$F(x) = \Sigma (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

worin für m der Reihe nach die durch kein Quadrat ausser 1 theilbaren Zahlen zu setzen sind und μ die Anzahl der Primfactoren von m bezeichnet.

Beschränkt man Σ^{α} auf eine endliche Zahl von Gliedern, so giebt die Derivirte des Ausdrucks für $f(x)$ oder, bis auf einen mit wachsendem x sehr schnell abnehmenden Theil,

$$\frac{1}{\log x} - 2\,\Sigma^{\alpha} \frac{\cos(\alpha \log x)\, x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

einen angenäherten Ausdruck für die Dichtigkeit der Primzahlen + der halben Dichtigkeit der Primzahlquadrate + $\frac{1}{3}$ von der Dichtigkeit der Primzahlcuben u. s. w. von der Grösse x.

Die bekannte Näherungsformel $F(x) = Li(x)$ ist also nur bis auf Grössen von der Ordnung $x^{\frac{1}{2}}$ richtig und giebt einen etwas zu grossen Werth; denn die nicht periodischen Glieder in dem Ausdrucke von $F(x)$ sind, von Grössen, die mit x nicht in's Unendliche wachsen, abgesehen:

$$Li(x) - \tfrac{1}{2} Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \tfrac{1}{3} Li\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \tfrac{1}{5} Li\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \tfrac{1}{6} Li\left(x^{\frac{1}{6}}\right)$$
$$- \tfrac{1}{7} Li\left(x^{\frac{1}{7}}\right) + \cdots$$

In der That hat sich bei der von Gauss und Goldschmidt vorgenommenen und bis zu x = drei Millionen fortgesetzten Vergleichung von $Li(x)$ mit der Anzahl der Primzahlen unter x diese Anzahl schon vom ersten Hunderttausend an stets kleiner als $Li(x)$ ergeben, und

zwar wächst die Differenz unter manchen Schwankungen allmählich mit x. Aber auch die von den periodischen Gliedern abhängige stellenweise Verdichtung und Verdünnung der Primzahlen hat schon bei den Zählungen die Aufmerksamkeit erregt, ohne dass jedoch hierin eine Gesetzmässigkeit bemerkt worden wäre. Bei einer etwaigen neuen Zählung würde es interessant sein, den Einfluss der einzelnen in dem Ausdrucke für die Dichtigkeit der Primzahlen enthaltenen periodischen Glieder zu verfolgen. Einen regelmässigeren Gang als $F(x)$ würde die Function $f(x)$ zeigen, welche sich schon im ersten Hundert sehr deutlich als mit $Li(x) + \log \xi(0)$ im Mittel übereinstimmend erkennen lässt.

Anmerkungen.

In einem Briefe, dessen Entwurf im Nachlass vorliegt, findet sich, nachdem das Resultat der Arbeit mitgetheilt ist, folgende Bemerkung:

„Den Beweis habe ich noch nicht völlig ausgeführt, und ich möchte in Betreff desselben . . noch die Bemerkung beifügen, dass die beiden Sätze, welche ich dort nur angeführt habe,

dass zwischen 0 und T etwa $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$ reelle Wurzeln der Gleichung $\xi(\alpha)=0$ liegen, und

dass die Reihe $\Sigma^{\alpha}\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)$, wenn die Glieder nach wachsenden α geordnet werden, gegen denselben Grenzwerth convergirt, wie

$$\frac{1}{2\pi i\log x}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\log\frac{\xi\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)i\right)}{\xi(0)}}{ds}\,x^{s}\,ds$$ bei unaufhörlichem Wachsen der Grösse b

aus einer neuen Entwicklung der Function ξ folgen, welche ich aber noch nicht genug vereinfacht hatte, um sie mittheilen zu können.“

Trotz mancher späterer Untersuchungen (Scheibner, Pilz, Stieltjes) sind die Dunkelheiten dieser Arbeit noch nicht völlig aufgehellt.

(1) (Zu Seite 146.) Dies Verhalten der Function $\zeta(s)$ ergiebt sich mit Benutzung der zweiten Form dieser Function

$$2\,\zeta(s)=\pi i\,\Pi(-s)\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-x)^{s-1}}{e^{x}-1}\,dx$$

und mit Rücksicht darauf, dass $\frac{1}{e^{x}-1}+\frac{1}{2}$ in der Entwicklung nach steigenden Potenzen von x nur ungerade Potenzen enthält.

(2) (Zu Seite 149.) Der Ausdruck dieses Satzes ist nicht ganz genau. Die beiden Gleichungen, einzeln in der angegebenen Weise behandelt, ergeben, wenn die Integrationsgrenzen 0, ∞ auf $\log x$ bezogen werden, $\pi y^{-\alpha}\left(h(y)\pm h\left(\frac{1}{y}\right)\right)$, und also erst in ihrer Summe die Formel des Textes.

(3) (Zu Seite 151.) Die Function $Li(x)$ ist für reelle Werthe von x, die grösser als 1 sind, zu definiren durch das Integral $\int_{0}^{x}\frac{dx}{\log x}\pm\pi i$, wo das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Integration durch complexe

Werthe mit positivem oder negativem Arcus geschieht. Daraus leitet man leicht die von Scheibner (Schlömilch's Zeitschrift Bd. V) gegebene Entwicklung her

$$Li(x)=\log\log x-\Gamma'(1)+\sum_{1,\infty}^{x}\frac{(\log x)^{n}}{n\,.\,n!},$$

die für alle Werthe von x gilt, und für negative reelle Werthe eine Unstetigkeit ergiebt. (Vgl. Gauss-Bessel Briefwechsel.)

Befolgt man die von Riemann angedeutete Rechnung, so findet man in der Formel $\log\frac{1}{2}$ anstatt $\log\xi(0)$. Möglicherweise liegt nur ein Schreib- oder Druckfehler vor, $\log\xi(0)$ an Stelle von $\log\zeta(0)$, da $\zeta(0)=\frac{1}{2}$ ist.