BRIEFWECHSEL ZWISCHEN GUSTAV LEJEUNE-DIRICHLET UND HERRN LEOPOLD KRONECKER

HERAUSGEGEBEN VON

ERNST SCHERING.

Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1885. S. 361—382.

BRIEFWECHSEL ZWISCHEN G. LEJEUNE-DIRICHLET UND HERRN LEOPOLD KRONECKER, HERAUSGEGEBEN VON ERNST SCHERING.

Herr *Kronecker* hat die Güte gehabt, mir die von *Dirichlet* an ihn geschriebenen Briefe zuzusenden, um dieselben der Königlichen Universitäts-Bibliothek in *Göttingen* als Geschenk zu übergeben.

Diese Briefe gehören, außer dem ersten, der Zeit von *Dirichlet*'s Aufenthalt in *Göttingen* an und haben durch diese örtliche Beziehung ein besonderes Interesse für uns. Da dieselben auch eine große geschichtliche Bedeutung für die mathematische Wissenschaft besitzen, so habe ich Herrn *Kronecker* um die Erlaubniß gebeten, diese Briefe sowie auch einige von Herrn *Kronecker* an *Dirichlet* gerichtete Briefe abdrucken zu lassen, auf welche die oben erwähnten sich beziehen, und von welchen ich wußte, daß *Dirichlet*'s Sohn dieselben nach des Vaters Tode an den Verfasser zurückgegeben hatte. Diese Erlaubniß hat Herr *Kronecker* gütigst gewährt und auch gestattet, daß seine Briefe an *Dirichlet* mit dessen Antworten auf dieselben der hiesigen Universitäts-Bibliothek übergeben werden.

E. Sch.

I. *Dirichlet an Herrn Kronecker.*

Ich habe mir, verehrter Freund, so große Nachlässigkeit gegen Sie zu Schulden kommen lassen, daß ich fast verzweifeln muß, Ihre Verzeihung zu erlangen. Sie werden nämlich als junger Mann kaum glaublich finden, was ich zu meiner Entschuldigung anführen kann, da Sie sich schwerlich eine Vorstellung davon machen, wie sehr es einem im Mittelalter, in welches ich schon seit längerer Zeit getreten bin, an der nöthigen Flexibilität fehlt, um sich schnell in Dinge hineinzufinden, mit denen man nicht schon einigermaßen vertraut ist. Als Ihr erster Brief ankam, war ich mit 13 wöchentlichen Vorlesungen u. anderen Geschäften so überladen, daß die wenige Zeit, die ich dem Studium Ihrer interessanten Mittheilung zu widmen im Stande war, durchaus nicht ausreichte, um mir Ihre Untersuchungen klar zu machen. Ich hoffte, daß ich in den Ferien dazu gelangen würde, besser in das Wesen Ihrer Arbeit einzudringen, von der ich durch meine vorläufigen Bemühungen wenigstens die Ueberzeugung gewonnen hatte, daß Sie darin einen vielfach behandelten Gegenstand von einer neuen u. wie mir schien sehr glücklich gewählten Seite angefaßt haben. In dieser Hoffnung fand ich mich aber leider getäuscht, da ich gleich nach Beginn der Ferien von einem Anfall der Grippe heimgesucht wurde, der mich länger als drei Wochen zu jeder Anstrengung unfähig gemacht hat. Nachdem ich jetzt in den letzten Tagen Ihrer Arbeit, wie ich glaube, näher getreten bin, beeile ich mich Ihnen zu sagen, daß es mir sehr wünschenswerth scheint, daß Sie eine kurze Notiz über Ihre Untersuchungen veröffentlichen, da Sie leider durch Ihr fortgesetztes schlechtes Befinden verhindert sind, an eine ausführliche Redaktion derselben für jetzt zu denken. Wenn diese Notiz, die Sie durchaus so einrichten müßten, daß jeder dem Gegenstande nicht fremde Mathematiker sich vollständig daraus vernehmen kann, nicht die Grenzen überschreitet, welche den in den akademischen Monatsbericht aufzunehmenden Aufsätzen gesteckt sind, so werde ich sie mit Vergnügen der Akademie vorlegen u. die Aufnahme in den Bericht beantragen.*)

Das Weitere mündlich. Hoffentlich fällt Ihre hiesige Anwesenheit gar nicht oder doch wenigstens nicht ganz in die Zeit vom 12. bis 22. Mai, während welcher Tage ich meine Frau, die *Karlsbad* besuchen soll, dorthin begleite.**)

Indem ich meine Frau u. mich selbst Ihnen und Ihrer Frau Gemahlin bestens empfehle, nenne ich mich

Ihr treu ergebener

Berlin, 3. Mai 53.

Dirichlet.

*) Die zwei Briefe von *Kronecker*, auf welche sich *Dirichlet* in diesem Briefe bezieht, haben sich in *Dirichlet*'s Nachlaß nicht gefunden. Der wissenschaftliche Inhalt derselben ist in jener Notiz reproducirt, welche von *Dirichlet* im Juni 1853 der *Berliner* Akademie mitgetheilt und im betreffenden Monatsbericht abgedruckt worden ist[1]). *E. Sch.*

**) Herr *Kronecker* theilt mir gütigst mit, daß er Ende Mai 1853 auf einer Reise nach *Paris*, wohin er sich zur Consultation eines dortigen Arztes begab, *Berlin* passirt und *Dirichlet* persönlich die Handschrift für die in der vorstehenden Bemerkung erwähnten Notiz übergeben hat. *E. Sch.*

[1]) Bd. IV S. 1 dieser Ausgabe von L. Kronecker's Werken.

II. *Herr Kronecker an Dirichlet.*

Hochgeehrter Herr Professor,

Zu meiner großen Freude habe ich vielfach gehört, daß Sie Sich in Ihrer neuen Heimath gar sehr gefallen und allen Grund haben mit jenem Wechsel zufrieden zu sein, der freilich uns hier so schweren Verlust gebracht hat. Wie sehr ich grade bei diesem Verlust betheiligt bin und wie tief ich denselben empfinde, brauche ich Ihnen kaum zu sagen, denn Sie wissen selbst, wie unendlich viel ich Ihnen verdanke, und Sie wissen auch, daß Ihnen näher zu sein, der Hauptzweck bei meiner Uebersiedelung nach *Berlin* war. Ich hatte nun jetzt die Absicht Sie noch in diesem Monat zu besuchen, um wenigstens für ein paar Tage den langentbehrten Genuß Ihres persönlichen Verkehrs zu haben; aber da mir *Borchardt* gesagt hat, daß Sie schon in wenigen Tagen nach *Paris* reisen, um dort wohl etwa vier bis sechs Wochen zuzubringen, so will ich die Ausführung jenes Vorhabens bis nach Ihrer Rückkehr verschieben, vorausgesetzt daß Sie Ihre mir früher mündlich gegebene Erlaubniß Sie zu besuchen noch aufrecht erhalten. Ich werde wohl — wenn auch nicht direct von Ihnen — so doch indirect durch *Borchardt* oder andere hiesige Bekannte zur Zeit erfahren, wenn Sie wieder in *Göttingen* sind. Für diese Zeit könnte ich mir nun freilich alle übrigen Mittheilungen aufsparen — aber wer weiß, was sich doch noch Alles zwischen Vorsatz und Ausführung eindrängt — und da ich Ihrer alten Theilnahme noch jetzt gewiß zu sein glaube, so will ich ein paar Worte über mein mathematisches Leben im vergangenen Winter beifügen.

Ich habe die ganze Zeit über — seit ich aus dem Seebade zurück bin — eigentlich recht anhaltend gearbeitet, und die dabei erlangten Resultate haben auch mein Streben größtentheils belohnt. Freilich habe ich die Hauptfrage, auf welche ich vor etwa einem Jahre gekommen bin, nicht gelöst, aber eine Einsicht in dieselbe gewonnen, die mir sehr werthvoll ist. Außerdem habe ich den ursprünglichen Zweck, um derentwillen ich jene Frage lösen zu müssen glaubte, ohne diese Lösung so vollständig erreicht, daß mir in dieser Hinsicht wirklich nichts zu wünschen übrig bleibt. Ich habe nämlich eine Methode gefunden zur Herleitung aller Eigenschaften der auflösbaren Gleichungen von Primzahlgraden, deren Einfachheit und Strenge allen gerechten Anforderungen entsprechen dürfte.*) Denn die Methode verlangt keinen

*) Es ist dies, wie Herr *Kronecker* mir gütigst mitgetheilt hat, die Methode, welche er regelmäßig — und zwar zum ersten Male im Winter 1861/62 — in seinen Universitäts-Vor-

irgend höheren Standpunkt mathematischen Fassungsvermögens als das Problem selbst, welches dadurch erledigt wird. Ich werde den Sommer zur sorgfältigen Ausarbeitung dieser Sachen verwenden, und diese wird nur *deßhalb* ziemlich umfangreich werden weil so sehr viel einzelne Resultate herauskommen, und weil ich keinen Raum sparen darf bei der genauen Bezeichnung gewisser ganz neuer Gesichtspunkte*), die namentlich in den *Galois*'schen und *Abel*'schen Fragmenten vermißt werden, und ohne welche die erforderliche Strenge nicht beobachtet werden kann. Einige ganz hübsche Resultate oder — richtiger gesagt — hübsche Anschauungen, die ich bei der Beschäftigung mit jenen „Methoden" erlangt habe, werde ich unter Kurzem in einer kleinen Notiz veröffentlichen, da diese Dinge in den zu redigirenden vollständigen Abhandlungen erst ganz zuletzt an die Reihe und also erst etwa in einem Jahre zur Publikation kommen würden. Ich werde in dieser Notiz auch die allgemeinste Wurzel einer *Abel*'schen ganzzahligen Gleichung als complexe Zahl dargestellt angeben, da es mir jetzt gelungen ist, diese in so einfache Form zu bringen, daß „die erforderlichen zahlentheoretischen Vorbemerkungen" (wie ich mich am Schlusse der im Juni 1853 der hiesigen Akademie überreichten Notiz[2]) ausdrücken mußte) nur noch ganz unbedeutend sind. — Während ich auf diese Weise die Untersuchung der Auflösbarkeit von Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist, vollständig absolvirte, habe ich mich aber auch vielfach mit allgemeineren Arbeiten beschäftigt und zwar einerseits, indem ich die Untersuchung der Gleichungen bezüglich ihrer Auflösbarkeit auch für diejenigen Grade vornahm, die nicht Primzahlen sind, und andrerseits indem ich die Untersuchung der Gleichungen nicht mehr auf ihre Auflösbarkeit beschränkte, sondern auf die Ergründung aller Eigenschaften ausdehnte, die eine Gleichung überhaupt haben kann. In dieser Beziehung bin ich allerdings erst so weit gekommen, das ganze große neue Feld vor mir zu sehen d. h. klar zu wissen, was zu suchen ist; aber dieß ist, wie ich glaube, bei einer Untersuchung von solcher Allgemeinheit auch nicht ganz unbedeutend. Die vollständige Lösung des ganz präcisen Problems, welches ich mir in dieser Hinsicht gestellt habe, dürfte freilich, wenn über-

lesungen gegeben und alsdann im Monatsberichte der *Berliner* Akademie vom März 1879 veröffentlicht hat[1]). *E. Sch.*

*) Nach einer von Herrn *Kronecker* mir gütigst zugegangenen brieflichen Mittheilung sind hiermit die „Gesichtspunkte" gemeint, welche ihn auf die Feststellung des mit dem Ausdrucke „Rationalitäts-Bereich" bezeichneten Begriffes geführt haben. *E. Sch.*

[1]) Bd IV S. 73 dieser Ausgabe von L. Kronecker's Werken. H

[2]) Bd. IV S. 11 dieser Ausgabe. H

haupt, meinen schwachen Kräften erst in geraumer Zeit gelingen. Aber lohnend ist es gewiß Zeit und Mühe an eine einzige Frage zu wenden, welche die ganze Theorie der algebraischen Gleichungen (mit einer unbekannten Größe) vollständig umfaßt. Ich bemerke nur noch, daß ich dieses Problem für die ersten Grade — den siebenten eingeschlossen — gelöst habe, daß die Schwierigkeiten dabei erst mit dem 7ten Grade anfangen, daß ich aber schon für diesen speziellen Fall Ergebnisse erlangt habe, die durch ihre Neuheit wie durch den wunderbaren Zusammenhang mit der complexen Zahlentheorie mir *sehr* interessant scheinen. Dabei zeigte sich mir das Naturgemäße dieser abstrakten algebraischen Untersuchungen in dem bemerkenswerthen Umstande, daß — wie alle auflösbaren und *Abel*'schen Gleichungen in den Theorieen transcendenter analytischer Functionen vorkommen — so auch alle diejenigen „Affecte" (um mit *Jacobi* zu sprechen), die ich als überhaupt nur möglich a priori gefunden habe, bei gewissen bekannten Gleichungen 7ten Grades wirklich auftreten. — Was nun die *Auflösbarkeit* der Gleichungen anlangt, deren Grad eine beliebige zusammengesetzte Zahl ist, so habe ich auch in dieser Untersuchung wesentliche Fortschritte gemacht, ohne sie indessen zum vollständigen Abschluß gebracht zu haben ... meine Arbeit über die Gleichungen von Primzahlgraden wird die einfachen Gesichtspunkte angeben, durch welche das Algebraische und das Zahlentheoretische in diesem ganzen Gebiete gehörig geschieden und in Folge dessen eine Klarheit und Sicherheit erlangt wird, die bisher überall vermißt wurde. Aber Sie werden es gewiß billigen, hochverehrter Herr Professor, daß ich jetzt meine vorerwähnten *allgemeinen* Untersuchungen unterbreche, um einmal an die Redaction des — wenn auch nicht dem Inhalte — so doch dem Umfange nach ziemlich ansehnlichen Materials zu gehen, das sich mir durch fast dreijährige Arbeiten gesammelt hat. Außerdem will ich auch *jetzt gleich* einige ganz kleine Abhandlungen fertig machen, um sie Herrn *Liouville* zu überschicken; und Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie in *Paris* gelegentlich durch Ihr gewichtiges Wort die möglichst baldige Aufnahme derselben ins Journal befürworteten. Ich werde in der ersten dieser Abhandlungen[1]) die Kleinigkeit über *Bernoulli*'sche Zahlen auseinandersetzen, welche ich vor mehr als zehn Jahren gemacht habe; in der zweiten[1]) werde ich eine bei Vorträgen über Kreistheilung passende und äußerst einfache Weise der Zeichenbestimmung von $\Sigma e^{\frac{2k^2\pi i}{p}}$ mittheilen; in der dritten[1]) werde ich einen höchst simpeln Beweis für die Irreductibilität von $1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ geben, und die vierte[1]) wird eine wesentliche Ab-

[1]) Vgl. Zusatz 32 am Ende dieses Bandes. H

kürzung einer von *Kummer* in seinem Aufsatze über die complexen Zahlen angewendeten Methode enthalten. — Dieß, geehrtester Herr Professor, sind meine guten Vorsätze für die nächsten Wochen, — die Ausarbeitung mancher andrer Sachen, die ich in diesem Winter und früher gemacht habe, verschiebe ich noch, weil ich sie noch nicht für reif genug halte, — denn ich habe bei meinen Arbeiten über die auflösbaren Gleichungen die Erfahrung gemacht, daß ich die Dinge erst eine lange Zeit wärmen muß, ehe sie die für die Publication erforderliche Reife erhalten.

Aber ich habe Ihre Lese-Geduld gewiß schon auf eine zu harte Probe gestellt und will deßhalb endlich diese Zeilen schließen, indem ich Ihnen eine recht glückliche Reise wünsche und meine Frau sowie mich selbst Ihnen und Ihrer Frau Gemahlin auf das Angelegentlichste empfehle.

Mit aufrichtigster Verehrung und Anhänglichkeit

Ihr

dankbarer Schüler

Berlin, den 3. Maerz 1856. *Leopold Kronecker*.

Von *Kummer* habe ich die besten Grüße beizufügen.

D. O.

III. *Herr Kronecker* an *Dirichlet*.

Hochgeehrter Herr Professor,

Als ich Ihnen am 3. Maerz schrieb, hatte ich zwar schon an die Möglichkeit gedacht, daß mein *Göttinger* Reiseprojekt durch irgend etwas vereitelt werden könnte — aber es lag doch nichts vor, um dieß gradezu zu befürchten. Inzwischen hat mich mein altes Uebel wieder gequält, mein kleiner Sohn — den ganzen vorigen Winter leidend — bedurfte einer baldmöglichen Luftveränderung — und so sind wir seit einigen Wochen hier in *Koesen*, von wo ich Ende Juli in ein Seebad gehen werde, um meine eigene Gesundheit wieder möglichst ins Geleis zu bringen.*) Da ich auf diese Weise wieder darauf angewiesen bin, mich schriftlich Ihrem Andenken zu erhalten, so bekommen Sie hier diese Paar Zeilen bloß als Geleitschreiben des Abdruckes von einem kleinen Aufsätzchen, dessen Entstehungsgrund ich Ihnen bereits am 3. Maerz mitgetheilt habe. Ich hoffe, daß dieser Grund genügende Entschuldigung

*) Herr *Kronecker* hat sein *Göttinger* Reiseproject in der That noch im Sommer 1856 ausgeführt.

für die Existenz der beifolgenden Unbedeutendheit in Ihren Augen sein wird, falls Sie einmal gelegentlich einen Blick hinein thun sollten.*) Für diesen Fall erwähne ich nur noch, daß die auf pag. 209[2]) definirten Zahlen k und deren Eigenschaften mir mehr Mühe gemacht haben als man ihnen ansieht, und daß überhaupt die Herleitungen und Beweise der mitgetheilten Resultate über *Abel*'sche Gleichungen manche Schwierigkeiten grade in der erforderlich gewesenen detaillirten Ausarbeitung darboten. — Uebrigens sind die erwähnten Zahlen k in mancher Beziehung interessant, und es erleidet keinen Zweifel, daß sie bei gewissen Formenanzahlen dieselbe Rolle spielen, wie die von Ihnen mit a und b bezeichneten Zahlen in der Theorie der quadratischen Formen. Wenn man nämlich (um die in dem Aufsätzchen den Buchstaben n und m beigelegten Bedeutungen beizubehalten) überhaupt Formen $n$ten Grades mit mehren Variabeln betrachtet, so kann man die den einfachsten complexen Zahlen entsprechenden so definiren: „daß die Formen in lineare Factoren zerlegbar und schon die cyklischen Functionen dieser linearen Factoren rationale Functionen der Variabeln (d. h. mit rationalen Coëfficienten) sein sollen". Derlei Formen $n$ten Grades mit der Determinante m sind dann nichts Anderes als die Normformen (und deren associirte) von complexen Zahlen, die aus den Perioden $\varpi(\varrho)$ gebildet sind, und bei deren Formenanzahl eben die k's auftreten müssen. Sie sehen, daß man auf diese Weise eine einfache Erklärung derjenigen Formen hat, die offenbar die zunächst liegenden sind, und daß hierbei nichts von jenen zufälligen Besonderheiten auftritt, welche *Eisenstein* bei Erklärung der Kreistheilungsformen 3ten Grades mit 3 Variabeln hat zu Hülfe nehmen müssen. — Was meine Arbeiten anlangt, so bin ich in meiner Hauptbeschäftigung nur wenig vorgeschritten, da ich mich mit einigen kleinen Ausarbeitungen habe beschäftigen müssen. Aber ich bin vielfach in den hoffnungsvollen Fernsichten dem, was ich beweisen kann, vorausgeeilt und habe dabei Anschauungen von der Natur der Gleichungen gewonnen, die, wenn sie sich bewähren, ein ganz neues und erhebliches Interesse gewähren dürften. Bei der gänzlichen Neuheit des Feldes aber, auf welchem ich jetzt arbeite, und bei der kaum zu bewältigenden Complicirtheit glaube ich, daß ich jahrelanger Arbeit bedürfen werde, ehe ich zu stricten Resultaten komme. Also, geehrter Herr Professor, erwarten Sie in *dieser* Hinsicht nicht so bald etwas von mir, zumal ich ein gut Theil Zeit auf die sorgfältigste elemen-

*) Diese Worte beziehen sich auf die im Monatsbericht der *Berliner* Akademie vom April 1856 veröffentlichte algebraische Arbeit[1]).

[1]) Bd. IV S. 25 dieser Ausgabe. H

[2]) Bd. IV S. 32 dieser Ausgabe. H

tare Bearbeitung meiner älteren Resultate verwenden werde. Und ich habe ja doch nichts zu versäumen — vorausgesetzt daß meine Gesundheit mit den Jahren besser statt schlechter wird. Nun nur noch eins!

Bei Gelegenheit eines kleinen Sätzchens über ganzzahlige Gleichungen, welches wohl in dem ersten unter *Borchardt's* Namen erscheinenden Hefte des Journals abgedruckt werden wird, kam ich wiederholt auf Ihre Notiz über complexe Einheiten im Monatsberichte der Akademie. Erlauben Sie mir in Bezug darauf Ihnen zu sagen, daß — wie ich glaube — Ihre dortige *Darstellung* zu Mißverständnissen führen kann, und daß es meines Erachtens besser wäre die Sache zum Theil vom Ende anzufangen. *Hat* man nämlich — und Sie zeigen, daß dieß stets zu finden ist — ein System von Einheiten:

$$\Phi_1(\alpha),\ \Phi_2(\alpha), \ldots \Phi_{h-1}(\alpha)$$

für welches — wenn α' und α conjugirt,

$$\Phi_k(\alpha) \cdot \Phi_k(\alpha') = a_k \text{ u. } \log a_k = A_k$$

gesetzt wird — jene Determinante $\Sigma \pm A_1 B_2 C_3 \ldots$ nicht verschwindet, so giebt es keine von 0 verschiedenen Werthe für $m_1, m_2, \ldots m_{h-1}$, so daß die Gleichungen:

$$\begin{gathered} A_1 m_1 + A_2 m_2 + \cdots + A_{h-1} m_{h-1} = 0 \\ B_1 m_1 + B_2 m_2 + \cdots + B_{h-1} m_{h-1} = 0 \\ \vdots \end{gathered}$$

sämmtlich erfüllt würden. *Also* kann nicht

$$\Phi_1(\alpha)^{m_1} \Phi_2(\alpha)^{m_2} \cdots \Phi_{h-1}(\alpha)^{m_{h-1}} = 1$$

sein für irgend welche ganze Werthe von $m_1, m_2 \ldots m_h$, denn sonst folgte wegen der Irreductibilität der zu Grunde gelegten Gleichung:

$$\begin{gathered} \Phi_1(\alpha')^{m_1} \Phi_2(\alpha')^{m_2} \cdots = 1, \\ \Phi_1(\beta)^{m_1} \Phi_2(\beta)^{m_2} \cdots = 1, \\ \Phi_1(\beta')^{m_1} \Phi_2(\beta')^{m_2} \cdots = 1 \text{ etc.} \end{gathered}$$

also durch Multiplication von je zwei dieser Gleichungen:

$$a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \cdots = 1, \quad b_1^{m_1} b_2^{m_2} \cdots = 1 \text{ etc.}$$

für *alle h* Gleichungen was ja eben unmöglich ist. Folglich bilden $\Phi_1(\alpha), \Phi_2(\alpha) \ldots$ ein System von unabhängigen Einheiten.

Ich meine, daß eine solche Umkehr der Aufeinanderfolge Ihrer Schlüsse vor gewissen Mißdeutungen hüten würde. Man ist nämlich durch die Worte pag. 106:

„Sollen nun z. B. drei Auflösungen ...“ und resp. durch die folgende Stelle: „Berücksichtigt man, ...“ veranlaßt zu glauben

1, daß für ein System unabhängiger Einheiten keine einzige der obigen h Gleichungen stattfinden könne — während es doch nur unmöglich ist, daß *alle* stattfinden,

2, könnte man denken, daß die Gleichung $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots = 1$ die Gleichung $b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots = 1$ etc. zur Folge hat, während doch nur aus der Existenz der Gleichung

$$\Phi_1(\alpha)^{m_1} \Phi_2(\alpha)^{m_2} \cdots = 1$$

die aller übrigen folgt. Die Gleichung $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots = 1$, d. h.

$$\Phi_1(\alpha)^{m_1} \Phi_1(\alpha')^{m_1} \Phi_2(\alpha)^{m_2} \Phi_2(\alpha')^{m_2} \cdots = 1,$$

läßt keinerlei Folgerungen über den Bestand derselben zu, wenn α in β verwandelt wird.

Ich erwähne nur noch der Fälle, wo in der That für ein System unabhängiger Einheiten $\Phi_1(\alpha), \ldots \Phi_{h-1}(\alpha)$ eine oder mehre der Gleichungen

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots = 1, \quad b_1^{m_1} b_2^{m_2} \cdots = 1, \ldots$$

(aber natürlich *nicht alle*) befriedigt werden. Wenn nämlich z. B. eine Einheit $\Psi(\alpha)$ existirt, deren analytischer Modul $= 1$ ist, und welche doch nicht Wurzel der Einheit ist (und es ist leicht zu zeigen daß dieß *möglich* ist), so muß nach Ihrem Fundamentalsatze

$$\omega \Psi(\alpha) = \Phi_1(\alpha)^{m_1} \Phi_2(\alpha)^{m_2} \cdots \Phi_{h-1}(\alpha)^{m_{h-1}}$$

sein, wenn $\Phi_1(\alpha), \ldots$ die Fundamentaleinheiten und ω eine Wurzel der Einheit bedeutet. Verwandelt man hierin $\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$, so wird

$$\omega^{-1} \cdot \Psi(\alpha') = \Phi_1(\alpha')^{m_1} \Phi_2(\alpha')^{m_2} \cdots \Phi_{h-1}(\alpha')^{m_{h-1}}$$

und durch Multiplication, wenn man berücksichtigt, daß $\Psi(\alpha)\Psi(\alpha') = 1$ ist:

$$1 = a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \ldots a_{h-1}^{m_{h-1}},$$

wo die m's von 0 verschieden sind. Es gäbe noch mancherlei hierbei zu erwähnen, doch lohnt es nicht der Schreiberei, und ich verlasse deshalb diesen Gegenstand, um Sie nur noch zu fragen, ob Sie die Bemerkung für interessant halten, daß man cyklometrische Auflösungen der Gleichung $x^2 + Dy^2 = 4p$ finden kann, wenn $p \equiv 1 \pmod{D}$ ist. Es ist dieß leicht als Verallgemeinerung der *Jacobi*'schen Ψ's zu sehen, woraus dort nur die Auflösung von $x^2 + 3y^2 = 4p$ und $x^2 + 7y^2 = 4p$ sich ergiebt.

Es ist mir diese ganze Bemerkung nur abgefallen von allgèmeineren Betrachtungen, die sich aber im Uebrigen noch nicht hinreichend fruchtbringend gezeigt haben.

Nimmt man der größeren Einfachheit wegen $D = \lambda$ einer Primzahl von der Form $4n + 3$, so ist, wenn $\alpha^\lambda = 1, x^p = 1$ und $p = k\lambda + 1$, nach *Jacobi*'s Bezeichnung

$$(\alpha, x) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \cdots,$$

und das Product $\Pi(\alpha^a, x)$, welches sich auf alle quadratischen Reste a von λ bezieht, ist wie leicht zu sehen von der Form $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\sqrt{-\lambda}$ wo u und v ganze Zahlen sind. Es ist nun

$$\frac{u + v\sqrt{-\lambda}}{u - v\sqrt{-\lambda}} = \left(\frac{U + V\sqrt{-\lambda}}{U - V\sqrt{-\lambda}}\right)^{\frac{\Sigma b - \Sigma a}{\lambda}}$$

wenn U u. V die Zahlen der Auflösung von $U^2 + \lambda V^2 = 4p$ bedeuten. Man sieht hieraus, daß man für ein gegebenes p und λ eine Gleichung vom Grade $\frac{\Sigma b - \Sigma a}{\lambda}$ aufstellen kann, welche (wenn $U^2 + \lambda V^2 = 4p$ in ganzen Zahlen auflösbar ist) eine einzige rationale Wurzel hat, aus welcher die Werthe von U und V unmittelbar hervorgehen. —

Ich habe mich — zu meinem Schrecken sehe ich es — schon wieder allzusehr ausgebreitet und bitte Sie deßhalb um Entschuldigung. Ich bitte Sie ferner mich und meine Frau Ihrer Frau Gemahlin angelegentlichst zu empfehlen und bitte Sie endlich mir Ihr so sehr schätzbares Wohlwollen stets zu bewahren.

Mit innigster Anhänglichkeit und Verehrung

Ihr

dankbarer Schüler

Koesen, den 26. Juni 1856. *Leopold Kronecker.*

IV. *Herr Kronecker an Dirichlet.*

Hochgeehrter Herr Professor!

Ich habe soeben an Herrn Dr. *Dedekind* ein Paar Zeilen geschrieben, und da treibt mich meine alte Anhänglichkeit auch Ihnen einige Worte zu schicken selbst auf die Gefahr hin, daß Ihr Interesse für mich inzwischen einigermaßen erkaltet sein sollte. Zumal habe ich nicht recht Aussicht Sie bald einmal persönlich wiederzusehen*), denn Sie reisen stets nach Westen, und ich kann aus vielfachen Gründen

*) *Dirichlet* hatte im December 1856 *Berlin* besucht.

nicht nach *Göttingen* kommen. — Mit meinen mathematischen Arbeiten ist es mir im vergangenen Winter sonderbar gegangen, nämlich sowohl in meinen algebraischen Ausarbeitungen als in den weiteren Untersuchungen über die Affecte der Gleichungen bin ich immerfort von scheinbar wenig damit zusammenhängenden Dingen unterbrochen worden, ohne daß ich grade Grund hätte mit diesen Unterbrechungen unzufrieden zu sein. Denn ich habe so manche sehr interessante Sachen gefunden, und da ich mich zumeist *da*durch so unabhängig fühle, daß mich keine Spur irgend welchen Ehrgeizes quält, da ich vielmehr einzig und allein meine Freude in der Erkenntniß des Wahren habe, so kommt es mir wenig darauf an, *wozu* ich grade meine Zeit verwende, wenn ich sie nur überhaupt *gut* benutze. — Die beiden Hauptepisoden meiner Arbeiten betrafen die complexe Multiplication der elliptischen Functionen und die Theorie der allgemeinsten idealen Zahlen. In Bezug auf das erste Thema habe ich Ihnen meine ersten Resultate schon im December hier mitgetheilt. Ich habe in den ersten drei Monaten dieses Jahres noch viele ähnliche Resultate gefunden, Alles streng bewiesen und überhaupt die betreffende Untersuchung eigentlich abgeschlossen. Das dabei durchforschte kleine mathematische Gebiet war mir in vieler Beziehung äußerst interessant. Die Eleganz der Resultate und die Einfachheit der Beweismethoden, der Zusammenhang der Analysis und Zahlentheorie, die weiteren Aussichten, die die Sachen gewähren — alles das vereinigte sich, um meinen Eifer in der Untersuchung anzuspornen und nachher zu belohnen. Ich werde kurz die wesentlichsten Resultate anführen: 1, die Moduln k für welche Multiplication mit $a + b\sqrt{-D}$ stattfindet sind Wurzeln einer auflösbaren Gleichung Hten Grades, deren Coëfficienten complexe Zahlen von der Form $a + b\sqrt{-D}$ sind, wo H die Anzahl der quadratischen Formen für die Determinante $-D$ bedeutet. 2, die Gleichung hat den Charakter der von *Abel* behandelten Gleichungen, daß sämmtliche Wurzeln rationale Functionen einer einzigen sind, und daß, wenn: k, $\theta(k)$, $\theta_1(k)$ solche Wurzeln bedeuten, $\theta\theta_1(k) = \theta_1\theta(k)$ ist. Die Anzahl der hierbei nach *Abel* entstehenden Cykeln oder Perioden ist gleich dem Irregularitäts-Exponenten von *Gauss* für $-D$. Ist jene Anzahl $= 1$ also jene Gleichung eine (wie ich es nenne) „*Abel*'sche" so ist die Determinante regulär. Es ist mir nicht aussichtlos, daß ich noch werde bestimmen können, ob jene Gleichung eine *Abel*'sche ist oder nicht und damit also, ob die Determinante regulär oder irregulär ist. Wenigstens kann ich schon jetzt den Charakter einer solchen Bestimmung angeben, und der ist merkwürdig genug. 3, Aus den H Moduln k lassen sich die Coëfficienten eines Systems nicht äquivalenter quadratischer Formen der Determinante $-D$ in transcendenter Form angeben. 4, Gewisse rationale Functionen der irrationalen Größen k lassen sich als ideale Zahlen betrachten, welche die quadratischen Formen ersetzen. Diese idealen Zahlen erschließen manche Eigenthümlichkeit der Zahlentheorie und Algebra, und ich erwähne in dieser Beziehung nur, daß sie bei Aufstellung der *Abel*'schen Gleichungen mit complexen Coëfficienten mit Nothwendigkeit erscheinen. Ihre Analogie mit den *wirklichen* Zahlen $a + b\sqrt{-D}$ geht ferner daraus hervor, daß sie dieselben bei der Multiplication der elliptischen Functionen gradezu ersetzen. 5, Der erwähnten Untersuchung gebührt jedenfalls das Verdienst auf den für die Berechnung und überhaupt einfachsten Ausdruck der Formenanzahl für die Determinante $-D$ aufmerksam gemacht zu haben. Aus jener Untersuchung resultiren nämlich eine Menge recurrirender Formeln der allereinfachsten Art für die zu den Determinanten: $-D$, $-D+1^2$, $-D+2^2$, $-D+3^2 \dots$ gehörigen Formenanzahlen. Viele dieser Formeln lassen sich ganz simpel aus dem Zusammenhang der Formenanzahl mit der Anzahl der Darstellungen als Summe von 3 Quadraten ableiten und, was schöner ist, jene Theorie giebt einen Beweis dieses Zusammenhanges. Aber ein andrer Theil jener Formeln scheint mir arithmetisch schwer beweisbar. Ich habe trotz mancher daran gewendeten Mühe keine Ahnung davon, wie es möglich sein wird. Ich theile Ihnen zur Probe eine *dieser* Formeln hier mit: Sei $F(m)$ die Anzahl der Formen für die Determinante $-m$, so ist:

$$F(n) + 2F(n-1) + 2F(n-4) + 2F(n-9) + 2F(n-16) + \cdots = \Phi(n),$$

wo $\Phi(n)$ die Summe derjenigen Divisoren von n bedeutet welche größer als $\sqrt{n}$ sind, und wo $n \equiv 3 \bmod 4$ ist. 6, Wenn n Primzahl, so ist $\Phi(n) = n$, und da findet eine merkwürdige Eigenschaft der Formen statt, die ich noch nicht bewiesen und auf sehr eigenthümlichen Inductionswegen gefunden habe, eine Eigenschaft, welche zeigt, daß die Determinanten $n, n-1, n-4, \dots$ in vieler Beziehung zusammen zu betrachten sind. Denkt man sich nämlich alle reducirten Formen für alle diese Determinanten: $-(n-r^2)$ und für alle diese Formen (a, b, c) die Zahlen, welchen der Ausdruck $\frac{b \pm \sqrt{-n+r^2}}{a}$ oder besser: $\frac{b \pm r}{a}$ modulo n congruent ist, so erhält man grade alle Zahlen $0, 1, 2 \dots (n-1)$. Ist das nicht schön? 7, Wenn D als Summe 3er Quadrate darstellbar ist, so erhält man auf die einfachste Art die Formenanzahl ausgedrückt durch die Anzahl der Darstellungen als Summe von 2 Quadraten von: $D-1, D-4, D-9 \dots$; da diese Anzahlen nur von den Primfactoren abhängen, so ergiebt dieß eine Weise zur Berechnung der Formenanzahl die — mit Hülfe einer Factorentafel — im Wesentlichen nur auf „Ablesen“ hinaus kommt.

8, Diejenigen Moduln k, für welche die Modulargleichungen gleiche Wurzeln haben sind von der oben bezeichneten Art. Es charakterisirt dieß die von mir betrachteten elliptischen Functionen als gewissermaßen Grenzwerthe der allgemeinen und zwar als solche, die einen Schritt näher liegen als die äußerste Grenze d. h. die Kreisfunctionen. Während es für diese nur Multiplication giebt, findet für meine besonderen ellipt. F. zwar auch Transformation statt, aber dieselbe ist hier selbst eine *Art* von Multiplication; die Multiplication wird durch die forma principalis, die Transformationen werden durch die andern Formen repräsentirt. Haec hactenus. Augenblicklich stecke ich tief in Untersuchungen über allgemeine complexe Zahlen von der Form, wie Sie die Einheiten betrachtet haben. Ich habe die Begriffe der idealen Zahlen, die Reduction der Formen etc. festgestellt und durch diese allgemeinsten Betrachtungen eine sehr bemerkenswerthe Einfachheit erzielt. Und es ist keine *hohle* Allgemeinheit; denn ich bin sehr schönen Resultaten auf der Spur und weiß ziemlich genau, wie weit ich kommen werde. Das Schönste daran ist, daß man den Begriff der derivirten Formen für alle diese zerlegbaren Formen allgemein aufstellen und, wie ich glaube, auch das Verhältniß der Formenanzahl für primitive und derivirte allgemein bestimmen kann. Für eine große Classe (wozu die quadratischen Formen, die Kreistheilungsformen gehören) ist es mir bereits gelungen. Auch geben meine Untersuchungen eine Einsicht in Ihr Resultat über die Formenanzahl für eine reelle Determinante in der complexen Zahlentheorie. Doch genug! Raum, Zeit und wohl auch Ihre Geduld sind zu Ende, und deßhalb bitte ich nur noch ein Bischen Wohlwollen zu bewahren

Ihrem Ihnen aufrichtig ergebenen

Berlin, 17. Mai 57.
Köthener Str. 12.

Leopold Kronecker.

V. *Dirichlet an Herrn Kronecker.*

Herrn Dr. *Kronecker*
in *Berlin*
Köthener Str. Nr. 12.

Da Sie, verehrter Freund, aus Erfahrung wissen, wie tief bei mir die üble Gewohnheit eingewurzelt ist, die Briefe selbst meiner liebsten Freunde sehr spät zu beantworten, so werden Sie sich kaum wundern, wenn die durch *Borchardt* u. *Ehlert* hierher überbrachte Nachricht, daß Sie von *Berlin* abwesend seyen, meinen festen Entschluß, Ihnen während der Pfingstferien zu schreiben, nicht zur Ausführung hat kommen lassen. Da Sie aber, wie ich von *Dedekind* erfahre, wieder zurück sind u. *Berlin* bald wieder verlassen wollen, so kann ich nicht länger zögern, Ihnen meinen innigsten Dank für Ihren so interessanten Brief abzustatten. Für die überaus große Freude, welche mir die Mittheilung Ihrer schönen Entdeckungen verursacht hat, finde ich keinen passenderen Ausdruck als Ihnen aus vollster Ueberzeugung *macte virtute* zuzurufen. Zugleich kann ich Ihnen nicht verhehlen, daß sich dieser Freude etwas Egoismus beimischt, da ich mir bei aller Bescheidenheit das Zeugniß nicht versagen kann, daß ich Sie zuerst in die unteren Regionen einer der Wissenschaften eingeführt habe, auf deren Höhen Sie jetzt als Meister einherschreiten. Ich rede absichtlich nur von einer dieser Wissenschaften, denn an Ihrer algebraischen Größe muß ich mich völlig unschuldig erklären.

Mein Interesse an den merkwürdigen Beziehungen, die Sie zwischen den quadratischen Formen, der Algebra u. den elliptischen Funktionen aufgefunden haben, ist um so lebhafter, als ich selbst zuweilen ähnlichen Beziehungen nachgespürt habe. Ein hierauf bezüglicher Gesichtspunkt ist in meiner Abh. R. s. d. a. § 7 angedeutet, doch wird das am bezeichneten Orte Gesagte, wie ich später bemerkt, sehr durch die dort vorausgesetzte Bedingung verdunkelt, daß bei den doppelten Summationen nach x u. y, das Trinom $ax^2 + 2bxy + cy^2$ relative Primzahl zu D seyn muß. Ich habe den Gegenstand von dem durch Beseitigung der erwähnten Bedingung sehr vereinfachten Gesichtspunkt aus eine gute Strecke weiter verfolgt, glaube jedoch, wenn ich anders Ihre leider sehr kurzen Mittheilungen richtig deute, daß die von mir gemachten Bemerkungen kaum etwas mit Ihren schönen Resultaten gemein haben, welche wesentlich auf der Partikularisirung des Moduls zu beruhen scheinen, während meine Betrachtung die Unbestimmtheit von k und des davon abhängigen q voraussetzt. Um so begieriger bin ich, das Fundament und den eigentlichen Ausgangspunkt Ihrer Untersuchungen kennen zu lernen, auf deren baldige Publikation ich rechnen zu dürfen glaube, da Sie selbst Ihre Arbeit als im Wesentlichen abgeschlossen betrachten und als eine von mäßigem Umfange bezeichnen.

Was mich betrifft, so bin ich jetzt mit der Ausarbeitung der hydrodynamischen Abhandlung beschäftigt, von deren Gegenstand zu Weihnachten flüchtig zwischen uns die Rede war. Das Hauptresultat läßt sich ungefähr so formuliren.

„Hat eine incompressible homogene flüssige Masse deren Theile sich nach dem *Newton*'schen Gesetze anziehen und die an ihrer Oberfläche einen constanten

oder nur von der Zeit abhängigen Druck erleidet, anfänglich die Gestalt eines Ellipsoides, ist ferner die anfängliche Bewegung so beschaffen, daß sie in zwei einfachere zerlegbar ist, eine Drehung um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit für alle Massenelemente, u. eine zweite Bewegung, bei welcher alle Massenelemente sich in Bezug auf drei bestimmte sich im Mittelpunkte rechtwinklig durchschneidende Ebenen so bewegen, daß ihre Geschwindigkeiten senkrecht gegen jede dieser Ebenen zerlegt, den Abständen von demselben proportional sind, so wird die Oberfläche zu einer beliebigen Zeit die Form eines Ellipsoides haben, welches mit dem ursprünglichen concentrisch ist, dessen Axen aber in Größe und Richtung mit der Zeit veränderlich sind. Hinsichtlich der Bewegung der einzelnen Elemente gilt dasselbe, was für den ersten Augenblick vorausgesetzt wurde, d. h. die augenblickliche Bewegung ist zu jeder Zeit aus zwei einfachen, wie sie oben definirt wurden, zusammengesetzt, so jedoch daß die Drehungsaxe u. die drei Ebenen welche diesen Bewegungen entsprechen, im Allgemeinen mit der Zeit veränderlich sind.

Wie leicht zu sehen, involvirt der vorausgesetzte ursprüngliche Bewegungszustand 8 willkürliche Größen u. es ist merkwürdig, daß sich für einen solchen Anfangszustand der allgemeine Charakter der eintretenden Bewegung angeben läßt. Ich sage „der allgemeine Charakter der Bewegung“ denn zur vollständigen Kenntniß derselben sind 9 Funktionen der Zeit zu bestimmen, welche durch eben so viele Gl. definirt werden, eine endliche u. 8 Differt. gl. 2ter Ordnung, für welche man allgemein 7 Integrale erster Ordnung angeben kann. Die vollständige Lösung läßt sich nur in speciellen Fällen durchführen, von denen einer der einfachsten der ist, wenn das Ellipsoid zwei gleiche Axen hat u. die Bewegung ohne anfängliche Geschwindigkeit beginnt.

Aus meinen Gl. ergiebt sich die Lösung eines Problems, welches einiges Interesse darzubieten scheint, wenn gleich das Resultat ein rein negatives ist. Die bekannten von *Maclaurin* und *Jacobi* gefundenen Resultate führen naturgemäß auf die Frage, in welchen Fällen ein flüssiges homogenes Ellipsoid, dessen Elemente sich gegenseitig nach dem *Newton*'schen Gesetze anziehen, wie ein fester Körper um seinen Schwerpunkt rotiren kann u. die Antwort lautet, daß dies nur möglich ist, wenn die Bewegung um eine feste, mit einer der Hauptaxen des Ellipsoids zusammenfallende Axe geschieht, was der von *Maclaurin* und *Jacobi* untersuchte Fall ist.

Wenn ich mich nun noch meines mir von meiner Frau gegebenen Auftrages entledige, so ist das Papier und also auch dieser lange Brief zu Ende. Der Auftrag ist der, Sie zu bitten, daß Sie meine Frau gefälligst bei Ihrer Frau entschuldigen wollen, daß sie sie (schöner Stil) vorigen Winter nicht hat besuchen können. *Ehlert* kann bezeugen, wie sehr meine Frau während ihres kurzen Aufenthaltes gehetzt gewesen ist u. nur den kleinsten Theil der von ihr beabsichtigten Besuche hat machen können.

Vale et mihi fave

Göttingen 4. Juli 1857. *Dirichlet.*

VI. *Dirichlet an Herrn Kronecker.*

Ich beeile mich, verehrter Freund, Ihnen für Ihren freundlichen Brief*) zu danken und zugleich den früheren vom Mai Ihrem Wunsche gemäß zu überschicken. Es versteht sich von selbst daß Sie mir den letzteren, der mein Eigenthum ist, später wieder zustellen müssen, doch hat es damit keine Eile, da mir eine von *Dedekind* genommene Abschrift jeden Augenblick zu Gebote steht. Von Ihrem freundlichen Versprechen, mich zu besuchen, nehme ich, wie die Juristen sagen, Akt, hoffe jedoch Sie vielleicht noch früher in *Berlin* zu sehen. Ihres Auftrages wegen *Riemann*, dessen jetzigen Aufenthalt ich nicht sicher kenne — er war längere Zeit in *Harzburg* — entledige ich mich dadurch, daß ich heute an *Dedekind* schreibe, um durch diesen Ihr Gesuch an *Riemann* gelangen zu lassen.

Empfehlen Sie mich u. meine Frau Ihrer Frau Gemahlin bestens und grüßen Sie unsere Freunde *Ehlert, Kummer, Weierstrass und Borchardt*, falls er zurück ist, ergebenst von

Ihrem treu ergebenen

Göttingen 4. Okt. 57. *Dirichlet.*

VII. *Herr Kronecker an Dirichlet.*

Hochgeehrter Herr Professor,

Zuvörderst meinen herzlichsten Dank für die ungemein prompte Erfüllung meiner neulichen Bitte! — Inzwischen bin ich von einem sehr schweren Verluste betroffen worden — meine Mutter ist im 59sten Jahre ihres Lebens, wenn auch an

*) Dieser Brief von Herrn *Kronecker* hat sich in *Dirichlet*'s Nachlaß nicht vorgefunden.

einer chronischen Krankheit, doch so plötzlich gestorben, daß, als ich vor sechs Wochen auf die erste Nachricht hin nach *Liegnitz* eilte, ich sie schon nicht mehr lebend antraf. Ich verweilte damals noch einige Wochen bei meinem armen Vater, und ich war selbst geistig und körperlich von dem Schlage sehr mitgenommen. Nachher kamen mancherlei leichtere Krankheiten in meiner kleinen Familie hier — Sie können Sich also denken, daß meine Arbeiten nur sehr langsam von Statten gingen, und ich muß Sie um Nachsicht bitten.

Die kleine Notiz, die ich über meine „Ellipt. Functions-Arbeiten" redigirt habe, erlaube ich mir Ihnen anbei zu überreichen und noch drei Exemplare zur ganz gelegentlichen Abgabe an die Herren *Riemann, Dedekind* und *Stern* beizufügen. Zur Entschuldigung hätte ich dabei mehr zu sagen als der Text selbst Raum einnimmt; doch werde ich die ausführliche Ausarbeitung so bald folgen lassen, daß diese selbst Alles erklären soll. Einige kleine Nachlässigkeiten meines Briefes vom 17. Mai, welcher anbei zurückfolgt, finden sich in der gedruckten Notiz verbessert. Nur zwei Punkte sind es, über die ich im Frühjahr eine wirklich irrige Meinung hatte. I. Ich hatte damals einen Beweis für die Irreductibilität der Gleichungen gemacht, von denen die Modulwerthe abhängen — und dieser Beweis ist falsch. Ich bin zwar immer noch überzeugt, daß jene Gleichungen irreductibel sind, aber da ich es noch nicht beweisen kann, mußte ich einstweilen den darauf gegründeten Schluß auf den Irregularitätsexponenten aufgeben. Dieser Schluß würde — so lange jene Irreductibilität noch nicht feststeht — nur in einer alternativen Form gemacht werden können, die weder schön noch einfach genug ist, um in die beiliegende Notiz mit aufgenommen zu werden. — II. Ich hatte ferner im Frühjahr die irrige Meinung mit dem qu. Gebiete mathematischer Untersuchung gewissermaßen fertig zu sein, während sich mir jetzt noch eine Fülle neuen und reichen Materials bietet. Indessen werde ich dieses Mal gegen meine Gewohnheit und Neigung doch an die Veröffentlichung gehen, *ehe* ich die Sache *ganz* durchgearbeitet habe; ich werde in zwei Theilen meiner Arbeit die Auflösbarkeit jener Gleichungen und die Anwendung derselben auf die Theorie der quadratischen Formen negativer Determinante geben, die weiteren Anwendungen aber namentlich auf die Composition der Formen wahrscheinlich noch verschieben. — Ich hoffe Sie werden diese Genügsamkeit Ihres armen Schülers billigen — denn ich sehe endlich ein, daß ich meinem Ideal nicht mehr nachstreben kann und darf, nämlich auch nur *eine* — wenn auch in niedrigeren Regionen sich bewegende — doch so in sich vollendete Arbeit zu liefern, wie die Ihrigen Alle sind. Es ist einmal mein Kreuz, daß ich immer auf Gebiete geführt werde, die bessere geistige Kräfte erfordern, als mir von der Natur verliehen sind, und die mehr *Zeit* in Anspruch nehmen als die ist, auf welche ich bei meinem doch eigentlich sehr unzuverlässigen Körper zu rechnen habe. — Bei meiner Ausarbeitung will ich *nichts* aus der Theorie der quadr. Formen voraussetzen, um deutlich zu zeigen, daß sich die ellipt. Functionen das Alles selbst machen. Doch, ehe ich das auch für die „Composition" mache, muß ich Sie, den Meister aller dieser Gebiete, durchaus selbst sprechen. Hoffentlich kommen Sie in den Weihnachtsferien hierher; wenn nicht — so komme ich später nach *Göttingen*. Von *Kummer*, der mit seinem Reciprocitätsgesetzbeweise sehr schön vorgeschritten ist, soll ich Ihnen die herzlichsten Grüße ausrichten. Ihrer Frau Gemahlin, die hoffentlich glücklich dort angekommen ist, bitte ich mich selbst und meine Frau, die ihre Grippe immer noch nicht ganz verwunden hat, bestens zu empfehlen. Sie selbst endlich, geehrter Herr Professor, ersuche ich Ihr für mich über Alles schätzbares Wohlwollen auch fernerhin zu bewahren

Ihrem Ihnen treu und dankbar ergebenen

Berlin 2. Decbr. 57. *Leopold Kronecker.*

Grüßen Sie *Riemann* und *Dedekind* gefälligst herzlichst von mir

D. O.

VIII. *Dirichlet an Herrn Kronecker.*

Herrn *Dr. Kronecker*
(aus *Berlin*) z. Z.
in
frei *Ilsenburg.*

Göttingen 23. Juli 58.

Da Sie, verehrter Freund, neulich auf dem Bahnhofe zu *Harzburg**) den Wunsch äußerten, den Ausgangspunkt meiner Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen den quadratischen Formen von negativer Determinante und den elliptischen Funktionen kennen zu lernen, so will ich Ihnen meine Grundformel für den speciellen Fall, wo die Determinante eine negativ genommene Primzahl p von der Form $4n + 3$ ist, mit zwei Worten mittheilen und so gut es ohne mich in lange

*) *Dirichlet* war im Juli bei Herrn *Kronecker*, welcher den Sommer in *Ilsenburg* zubrachte, einige Tage zum Besuch. Auf *Dirichlet*'s Rückreise nach *Göttingen* begleitete ihn Herr *Kronecker* zu Wagen von *Ilsenburg* nach *Harzburg*.

Erörterungen, zu denen mir die Muße fehlt, einzulassen, geschehen kann. Eine Andeutung dieses Zusammenhanges habe ich schon im zweiten Theile meiner Abhandlung R. s. d. a. etc. gegeben, aber die Sache ist dort durch den Umstand complicirt, daß die Zahlen bei der Darstellung ausgeschlossen werden, welche mit der Determinante einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Hebt man diese Voraussetzung auf, so stellt sich die Formel für den erwähnten besonderen Fall und unter Anwendung der *Jacobi*'schen Zeichen wie folgt:

$$\frac{k}{\sqrt{p}}\,\frac{K}{\pi}\sum\left(\frac{s}{p}\right)\sin\operatorname{am} s\,\frac{4K}{\pi} = \sum q^{\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)} + \text{etc.}$$

Die Summe auf der ersten Seite erstreckt sich von $s = 1$ bis $s = p - 1$, u. die Doppelsummen auf der zweiten beziehen sich auf alle Systeme x, y, für welche die jedesmalige quadratische Form (a, b, c) (der ersten Art oder proprie primitiva) ungerade wird. Die eben ausgesprochene Bedingung ließe sich übrigens leicht entfernen, wenn man auch die Formen der zweiten Art zuziehen wollte. Jede Doppelsumme läßt sich nun, wie schon am angeführten Orte bemerkt, in eine endliche Anzahl von Produkten von je zwei einfachen Summen der Form

$$\sum_{x=-\infty}^{x=\infty} q^{(\delta x+\varepsilon)^2}$$

zerlegen, wo δ u. ε rationale Zahlen sind. Jede solche einfache Summe aber läßt sich, wie aus den von *Jacobi* gegebenen Eigenschaften von Θ leicht folgt, aber so viel ich weiß, bisher nirgends bemerkt worden ist, in die Form

$$\sqrt{\frac{K}{a}}\,\varphi(k)$$

bringen, wo $\varphi(k)$ eine algebraische Funktion des zu q gehörigen Moduls k ist. Da nun andrerseits jeder der auf der ersten Seite vorkommenden sin am ebenfalls eine algebraische Funktion von k ist, so drückt die Gleich. eine Relation aus zwischen algebraischen Funktionen des flüssig bleibenden k. Man kann daher sagen, daß die *ganze* Theorie der Formen von negativer Determinante und der durch sie darstellbaren Zahlen auf Beziehungen zwischen den Wurzeln algebraischer Gleichungen zurückkommt u. sich aus diesen Beziehungen muß ableiten lassen, was ein um so bemerkenswertheres rapprochement ist, als sich bis jetzt bei Formen von positiver Determinante keine Spur eines ähnlichen Zusammenhanges findet.

Seit unserm neulichen Gespräch auf der Fahrt von *Ilsenburg* nach *Harzburg* ist es mir gelungen, die Summe $\sum_{s=1}^{s=n}\left[\frac{n}{s}\right]$, wo [ ] nach *Gauss* das größte Ganze bezeichnet und die ich bisher nur mit einem Fehler der Ordnung $\sqrt{n}$ angeben konnte, bedeutend in die Enge zu treiben. Die Auffindung des hiezu dienenden Mittels, welches aller Wahrscheinlichkeit nach auch auf die folgenden Fälle anwendbar seyn wird, macht mir zwar großes Vergnügen, kommt mir aber insofern zu ungelegener Zeit als ich dadurch von der Vollendung der hydrodynamischen Abhandlung abgezogen werde, welche doch endlich fertig werden muß.

Mit der Bitte mich Ihrer Frau Gemahlin und den andern *Ilsenburger* Damen so wie H. Dr. *Benzler* bestens zu empfehlen

Ihr treu ergebener

Dirichlet.

Mit *Borchardt* wird es besser gehen, da er meine Frau in *Charlottenburg* zu besuchen die Absicht hatte.

IX. *Dirichlet an Herrn Kronecker.*

Göttingen 31./7. 58.

Seit ich Ihnen, verehrter Freund, gestern vor acht Tagen geschrieben habe, habe ich von meiner Frau einen Brief aus *Preußen* erhalten, aus welchem hervorzugehen *scheint*, daß sie *Borchardt* welcher sie in *Charlottenburg* zu besuchen die Absicht geäußert hatte, nicht gesehen hat. Ich muß daher fürchten, daß sich der Zustand unsres Freundes neuerdings verschlimmert hat und bitte Sie deshalb mir mit zwei Worten zu sagen, was Sie aus *Berlin* über ihn erfahren haben. Ein gestern von *Heine* eingelaufener Brief erwähnt mit keiner Silbe, daß Sie ihn in den Harz citirt hätten; es wird nun wohl ganz unterbleiben, da Ihre Abreise nach *Helgoland* nach dem was Sie mir neulich sagten, vor der Thür seyn muß.

Mit meinen besten Empfehlungen für Ihre Frau Gemahlin

Ihr ergebenster

Dirichlet.

X. *Herr Kronecker an Dirichlet.*

Ilsenburg Sonntag 1. August 58.

Hochgeehrter Herr Professor. Ich empfange soeben ihr gestriges Schreiben und beeile mich Ihnen über unsern Freund *Borchardt* Nachricht zu geben, mit dem ich heut vor acht Tagen in *Braunschweig* zusammen war. Wie das gekommen, ohne daß ich die mit Ihnen getroffene Verabredung erfüllen konnte, darüber muß ich Ihnen mit ein paar Worten Aufschluß geben. Das ziemlich andauernd schöne Wetter am Montag nach Ihrer Abreise von hier trieb mich nämlich zur Ausführung meines Planes einen mehrtägigen Ausflug nach dem *Brocken* und dem *Unterharz* zu unternehmen. Durch Wetter- und andere Störungen verlängerte sich meine Abwesenheit von hier bis Sonnabend vor acht Tagen. Ich hatte inzwischen nicht an *Borchardt* noch an *Heine* geschrieben, da ich nach der früheren *Kummer*'schen Mittheilung über *Borchardt*'s Befinden dessen Abreise als noch weit hinausgeschoben betrachtete. Zu meinem Erstaunen fand ich nun aber bei meiner Rückkunft hierher am Sonnabend *Borchardt*'s Nachricht vor, daß er Sonntag Mittag in *Braunschweig* eintreffen würde. Es war nun rein unmöglich Ihnen noch rechtzeitig davon Mittheilung zu machen, zumal ich wußte daß Sie Montag wieder Vorlesungen halten und also selbst ein längeres Warten *Borchardt*'s in *Braunschweig* nichts genützt haben würde. Ich reiste also Sonntag allein hinüber und war mit *Borchardt* von 1 bis 8 Uhr zusammen. Er hat es natürlich sehr bedauert, um Ihren — vielleicht auch um *Heine*'s Besuch — durch Umstände gekommen zu sein, deren Abwendung zum Theil vielleicht in meiner Gewalt war. Indessen, geehrter Herr Professor, Sie haben jetzt alle Data, um selbst das Verdict über mich auszusprechen. Soviel über meine etwaigen Entschuldigungsgründe; was *Borchardt* anlangt, so fand ich ihn freilich sehr schwach und angegriffen, indessen hoffe ich doch daß er die Reise nach der Insel *Wight*, die er in kurzen Tagereisen und in Begleitung eines gewandten Dieners machte, glücklich vollendet haben wird. Er denkt auf der Insel *Wight* auch seine Cousine *Hellborn*, jetzt verheirathete *Sußmann*, mit ihrem Manne zu treffen, so daß er also sich dort um so weniger verlassen fühlen wird. *Borchardt* hatte, wie ich vor einigen Tagen von *Berlin* hörte, vor einigen Wochen erst wieder einen kleinen Anfall gehabt, und seitdem datirt sich die eigentliche Besserung, während bis dahin die Krankheit mehr schleichend verlaufen war aber auch gar nicht recht weichen wollte. — *Borchardt* gedenkt an 5 Wochen in *England* zu verweilen und, wenn es ihm alsdann gut geht, noch auf einige Zeit nach *Sorrent* zu gehen. Freilich liegen die beiden Seeküsten etwas weit auseinander — aber Dampfwagen und Dampfschiffe laufen ja schnell. *Borchardt*'s Adresse von der Insel *Wight* werde ich erst in *Helgoland* erfahren, wohin ich übermorgen mit meinem Sohne *Ernst* abzureisen gedenke, und wohin mir vielleicht (einem gestrigen *Berliner* Briefe nach zu schließen) *Weierstraß* und *Kummer* folgen werden.

Nach allen diesen Personalien komme ich nun dazu Ihnen für Ihren freundlichen Brief vom 23sten Juli aufs Herzlichste zu danken und Ihnen zu sagen, wie sehr ich mich durch diese prompte Mittheilung geschmeichelt fühle und noch mehr, wie ungemein mich der Inhalt jenes Schreibens interessirt hat; daß Sie in der Bestimmung von $\sum\left[\frac{n}{s}\right]$ so vorgeschritten sind, ist doch eigentlich so prächtig, daß keinerlei Rücksicht Ihre Freude daran beeinträchtigen darf. Auch wird Sie gewiß kein Bedenken von der weiteren Verfolgung der bezüglichen Untersuchungen abhalten, denn die Macht des Reizes derselben ist zu groß. Endlich aber wird es Ihrem umfassenden Geiste gewiß nicht schwer die Ausarbeitung fertiger Untersuchungen selbst bei Arbeiten auf ganz andern Gebieten nebenher gehen zu lassen. Das ist eben der Vorzug unsrer großen Männer, daß sie nicht nur die Fülle der Gedanken *haben*, sondern daß diese ihnen auch kein Hinderniß ist für deren Ausbeutung. — Ihre schönen Mittheilungen über die ellipt. Functionen werde ich mir gleich nach meiner Rückkunft nach *Berlin* ordentlich zu Nutze machen. Ich werde mir die von Ihnen angedeutete Umformung von $\sum q^{\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)}$ in Producte von je zwei einfachen Summen $\sum q^{(\delta x+\varepsilon)^2}$ zu verschaffen und namentlich die rationalen Zahlen δ und ε zu bestimmen suchen. Diese hängen *direct* wahrscheinlich von den Coëfficienten der Formen ab, wenigstens so daß — während die linke Seite Ihrer Hauptgleichung offenbar algebraische von der Modulargleichung $p$ter Ordnung abhängige Functionen enthält — auf der rechten Seite algebraische Functionen vorkommen werden, welche aus Modulargleichungen andrer Ordnungen entstehen. Solche Beziehungen sind mir aber algebraisch vom höchsten Interesse — man kennt zwar schon dergleichen, aber die aus Ihrer Gleichung resultirenden sind sicher ganz verschieden von den bereits bekannten. Auch die zahlentheoretischen Folgerungen aus Ihrer Gleichung müssen ganz verschieden sein von denjenigen, die *ich* aus der Theorie der ellipt. Functionen gezogen habe. Aber ich glaube, daß Ihre Gleichung auch dann noch interessante Ergebnisse liefern wird, wenn man darin dem Modul k einen derjenigen speciellen Zahlenwerthe giebt, die ich besonders untersucht habe. Alle meine dießfällsigen Ideen und Absichten sind natürlich noch sehr unbestimmt — denn

Ilsenburg ist kein gutes Klima für mathematische Studien — aber von *Berlin* aus hoffe ich Ihnen den Dank für Ihre schätzbaren Mittheilungen zu *bethätigen*. Meine liebe Frau läßt sich Ihnen angelegentlichst empfehlen, und ich selbst bitte Sie mir Ihre überaus werthe Freundschaft zu bewahren.

Ihr treu ergebener

Kronecker.

Beste Grüße Ihrem Sohn *Ernst* und meine besten Empfehlungen Ihrer Frau Mutter, so wie den Herren *Weber*, *Listing* und *Riemann*. Ich bitte Sie noch von meinen Ihnen mitgetheilten Ideen über die Algebra der Zukunft, namentlich über die Benutzung der *Jacobi*'schen linearen Gleichungen für $\sqrt{M}$ nichts Anderen mitzutheilen. Ich möchte erst selbst sehen, ob meine Speculationen Erfolg haben.

D. O.

BEURTHEILUNG DER FÜR DEN STEINERPREIS DES JAHRES 1868 EINGEREICHTEN ARBEITEN

ERTHEILUNG DES STEINERPREISES FÜR 1882 UND AUSSCHREIBUNG EINER NEUEN PREISFRAGE FÜR DAS JAHR 1884

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 2. Juli 1868. S. 417—421 und vom 29. Juni 1882. S. 731—736.

BEURTHEILUNG DER FÜR DEN STEINERPREIS DES JAHRES 1868 EINGEREICHTEN ARBEITEN.[1]

In der öffentlichen Sitzung am *Leibniz*tage des Jahres 1866 hatte die Akademie nach der Bestimmung der *Steiner*'schen Stiftung folgende Preisfrage gestellt:

> Für diejenigen geometrischen Probleme, deren algebraische Lösung von Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade abhängt, fehlt es noch an der Feststellung der zur constructiven Lösung erforderlichen und ausreichenden fundamentalen Hilfsmittel, so wie an den Methoden zur systematischen Benutzung dieser Hilfsmittel.
>
> Indem die Akademie die Frage, die sie stellt, auf die Probleme beschränkt, welche auf kubische Gleichungen führen, wünscht sie, dass wenigstens an einer Anzahl von speciellen Beispielen gezeigt werde, wie diese Lücke in dem Gebiete der constructiven Geometrie ausgefüllt werden könne. Namentlich verlangt sie die vollständige Lösung des folgenden Problems:
>
> „Wenn dreizehn Punkte in der Ebene gegeben sind, so sollen durch geometrische Construction diejenigen drei Punkte bestimmt werden, welche mit den gegebenen zusammen ein System von sechszehn Durchschnittspunkten zweier Curven vierten Grades bilden.“
>
> Bei der Lösung sind die Fälle zu berücksichtigen, in welchen einige der dreizehn Punkte imaginär und demgemäss nicht als individuelle Punkte, sondern als Durchschnittspunkte vorgelegter Curven gegeben sind. Gewünscht wird ferner, dass sämtliche geometrische Constructionen durch die entsprechenden algebraischen Operationen erläutert werden.

---

1) Vgl. Zusatz 33 am Ende dieses Bandes.

Es sind für diese Preisfrage vier Bewerbungsschriften rechtzeitig eingegangen.

Die erste Bewerbungsschrift mit dem Motto: „Wissenschaft ist Macht“ besteht aus zwei Abhandlungen unter folgenden Titeln: „Ueber die constructive Lösung geometrischer Aufgaben des dritten und vierten Grades“ und „Ueber die Construction unbekannter Durchschnittspunkte bei geometrischen Curven in rein synthetischer Form dargestellt“. — In der ersten dieser beiden Abhandlungen wird eine grössere Anzahl geometrischer Aufgaben der in der Preisfrage bezeichneten Kategorie auf drei Fundamentalprobleme zurückgeführt, deren constructive Lösung gleich im Eingange der Arbeit gegeben ist. Bei dieser Lösung behält der Verfasser im Anschlusse an die Behandlung der im gewöhnlichen Sinne geometrisch construirbaren Probleme den festen Kreis als Hilfsmittel bei und bedarf demgemäss für jedes Problem noch anderer Kegelschnitte. Aber derartige Constructionen nehmen nicht — wie es in der Preisfrage verlangt wird — die erforderlichen und ausreichenden fundamentalen Hilfsmittel in Anspruch, da nicht die als gezeichnet anzunehmenden, sondern die erst nach den Bedingungen der Aufgabe zu construirenden Hilfslinien so einfach als möglich zu wählen sind. Aus diesem Grunde kann auch von einer Beurtheilung des reichhaltigen und an sich vielfach interessanten Inhaltes der zweiten Abhandlung ganz abgesehen werden, zumal derselbe sich zum grössten Theile auf Gegenstände bezieht, welche der Preisfrage fremd sind.

Die zweite Preisschrift trägt das Motto: „Das einzige wahrhaft erhebende Moment in der Gegenwart ist die Wissenschaft überhaupt, die der Natur und ihrer Gesetze insbesondere. Sie ist mir die hehre, reine Braut, welche inmitten der Wirrsale unserer Zeit Freiheit meinem Geiste, Frieden meinem Herzen giebt und erhält“. Diese Arbeit beschäftigt sich einzig und allein mit dem in der Preisfrage gestellten Probleme, die übrigen drei gemeinsamen Punkte eines durch dreizehn Punkte gegebenen Büschels von Curven vierten Grades zu construiren. Der Verfasser behandelt dieses Problem sehr eingehend, ausführlich und mit Sachkenntniss und giebt drei verschiedene Lösungen desselben, indem er zeigt, wie Kegelschnitte gefunden werden können, die sich nur in den drei gesuchten Punkten schneiden. Aber auf die constructive Auffindung der gemeinschaftlichen Punkte von Kegelschnitten, die nur durch ihre Elemente gegeben sind, mit „den hierzu erforderlichen und ausreichenden Hilfsmitteln“, wie es die Preisfrage verlangt, ist der Verfasser nicht eingegangen.

Die dritte Bewerbungsschrift ist mit dem *Newton*'schen Motto versehen: „*Est itaque arithmetice quidem simplicius, quod per simpliciores aequationes determinatur, at geometrice simplicius est, quod per simpliciorem ductum linearum colligitur; et in geometria prius et praestantius esse debet quod est ratione geometrica simplicius.*“ In einem ersten Theile dieser Abhandlung wird die Aufgabe gelöst: „Die Durchschnittspunkte zweier durch je fünf Punkte gegebenen Kegelschnitte mit Hilfe des Lineals, des Cirkels und eines festen Kegelschnittes zu construiren“, und hierauf wird alsdann im zweiten Theile die Lösung des auf die Curven vierten Grades bezüglichen Problems der Preisfrage zurückgeführt. Der Verfasser hat also, dem Verlangen der Preisfrage entsprechend, wirklich fundamentale Hilfsmittel der Construction gewählt, er hat die hierbei zulässigen praktisch einfachsten Constructions-Methoden aufgesucht und dieselben mit allen einzelnen dazu erforderlichen Operationen vollständig auseinandergesetzt. Da hierbei eine gewisse Weitläufigkeit kaum zu vermeiden war, so hat der Verfasser sich bemüht, deren nachtheiligen Einfluss durch scharfe und bestimmte Angabe der behandelten Probleme, durch besondere Hervorhebung der Hauptresultate und durch Hinzufügung erläuternder Anmerkungen möglichst zu beseitigen. Doch fehlen in der Arbeit gerade die für Verständniss und Würdigung der Resultate wesentlichsten algebraischen Erläuterungen, deren Hinzufügung in der Preisfrage ausdrücklich gewünscht, wenn auch nicht gefordert war.

Die vierte in französischer Sprache abgefasste Preisschrift mit dem Motto: „*Haud facilem esse viam voluit*“ führt den Titel: „*Memoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques*“ und ist in drei Abschnitte eingetheilt. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Theorie des Imaginären in der Geometrie, der zweite enthält verschiedene Methoden, die gemeinsamen Punkte zweier durch ihre Elemente gegebenen Kegelschnitte mittels des Lineals, des Cirkels und eines festen Kegelschnitts zu construiren, in dem dritten Abschnitte endlich löst der Verfasser ausser einigen andern sogenannten kubischen und biquadratischen geometrischen Aufgaben namentlich das speciell in der Preisfrage hervorgehobene die Curven vierten Grades betreffende Problem. Die ganze Arbeit zeichnet sich durch übersichtliche und systematische Behandlung des Stoffes aus. Der Verfasser macht bei seinen Constructionen, wie es in der Preisfrage verlangt wird, nur von den einfachsten erforderlichen und ausreichenden Hilfsmitteln Gebrauch, aber bei den Constructions-Methoden selbst hat er mehr auf gedankliche als auf praktische Einfachheit, mehr auf die vollständige Darlegung aller Gesichtspunkte, als auf die Ausführung aller einzelnen Operationen sein Bestreben gerichtet. Dadurch ist es ihm gelungen, im zweiten Abschnitte das an sich dürftige und trockene Material in gediegener und interessanter Weise zu verarbeiten und im dritten Abschnitte die specielle dort behandelte Frage mit allgemeineren zu verknüpfen. Fast überall lässt die Arbeit zum Vortheil für ihren wissenschaftlichen Werth deutlich erkennen, dass der Verfasser zu seinen umfassenderen Untersuchungen durch algebraische Betrachtungen gelangt ist, deren genauer Zusammenhang mit dem Gegenstande der Preisfrage schon in deren Formulierung enthalten ist. Aber eine ausdrückliche Angabe der den geometrischen entsprechenden algebraischen Operationen hinzuzufügen, ist der Verfasser — wie er am Schlusse erwähnt — durch eine gewisse Eile der Redaction verhindert worden, deren Spuren sich übrigens auch sonst in der Arbeit an einigen Stellen bemerklich machen.

Hiernach hat die Akademie ihren Statuten gemäss beschlossen, dem Verfasser der erstgenannten Bewerbungsschrift mit dem Motto: „Wissenschaft ist Macht“, so wie auch dem Verfasser der zweiten mit dem Motto: „Das einzige wahrhaft erhebende Moment usw.“ den *Steiner*'schen Preis nicht zuzuerkennen, sondern denselben unter die beiden anderen Bewerber zu theilen, deren Schriften, die eine mit dem Motto: „*Est itaque arithmetice quidem simplicius etc.*“, die andere mit dem Motto: „*Haud facilem esse viam voluit*“, beide von der Akademie für preiswürdig erachtet worden sind, weil sie den gestellten Forderungen im Wesentlichen entsprechen.

Es sind nun die Zettel zu eröffnen, welche die Namen der beiden als preiswürdig anerkannten Abhandlungen enthalten.

Als Verfasser der mit dem Motto: „*Est itaque arithmetice etc.*“ bezeichneten Schrift ergiebt sich Hr. Dr. Hermann Kortum, Privatdocent zu Bonn, und als Verfasser der mit dem Motto: „*Haud facilem esse viam voluit*“ versehenen Hr. Henry John Stephen Smith, Savilian Professor of Geometry in the University of Oxford. Die zu den beiden Arbeiten, denen der Preis nicht ertheilt worden ist, gehörenden Zettel sind der Bestimmung der Statuten gemäss hier öffentlich zu verbrennen.

ERTHEILUNG DES STEINERPREISES FÜR 1882 UND AUSSCHREIBUNG EINER NEUEN PREISFRAGE FÜR DAS JAHR 1884.

In der öffentlichen Sitzung am *Leibniz*-Tage des Jahres 1880 ist in Erfüllung der Bestimmungen der *Steiner*'schen Stiftung verkündet worden, dass die Akademie, um die Geometer zu eingehenden Untersuchungen über die Theorie der höheren algebraischen Raumcurven zu veranlassen, beschlossen habe, zur Concurrenz um den *Steiner*'schen Preis jede Arbeit zuzulassen, welche irgend eine auf die genannte Theorie sich beziehende Frage von wesentlicher Bedeutung vollständig erledigen werde.

Es sind drei Bewerbungsschriften rechtzeitig, am 27. und 28. Februar d. J., eingegangen. Außerdem hat die Akademie am 28. Februar d. J. von Hrn. *H. Valentiner* in Kopenhagen eine Schrift, betitelt: „Beiträge zur Theorie der Raumcurven“ zugeschickt erhalten, welche, da sie den Namen des Verfassers enthielt, von der Concurrenz auszuschliessen und nach dem Inhalte des von Kopenhagen den 26. Februar 1882 datirten Begleitschreibens vom Verfasser selbst auch nicht zur Concurrenz um den *Steiner*'schen Preis bestimmt war. Hr. *Valentiner* erklärt in seinem an die Akademie gerichteten Briefe, dass ihm die Zeit zur Ausarbeitung einer eigentlichen Bewerbungsschrift zu kurz gewesen sei und nur dazu genügt habe, um seine bereits im December 1881 in dänischer Sprache veröffentlichte Inauguraldissertation über die Theorie der Raumcurven in's Deutsche zu übersetzen und Einiges hinzuzufügen; er wünscht durch die Einsendung seiner Arbeit nur die Priorität seiner Resultate gegenüber denjenigen festzustellen, die in anderen an die Akademie eingeschickten Abhandlungen über die Theorie der Raumcurven enthalten wären. Diesem Wunsche hat die Akademie nicht anders entsprechen können, als dass sie bei der Berathung über die Ertheilung des *Steiner*'schen Preises den Beschluss gefasst hat, Hrn. *Valentiner* seine aus äusseren Gründen zur Concurrenz nicht zuzulassende Arbeit unverzüglich zur Disposition zu stellen und ihm hierdurch die Möglichkeit zu geben, die Priorität seiner Resultate durch deren Veröffentlichung zu wahren.

Die erste der drei Bewerbungsschriften, welche den äusseren für die Zulassung zur Concurrenz gestellten Bedingungen genügen, trägt das *Steiner*'sche Motto: „Hierbei macht weder die synthetische noch die analytische Methode den Kern der Sache aus, der darin besteht, dass die Abhängigkeit der Gestalten von einander und die Art und Weise aufgedeckt wird, wie ihre Eigenschaften von den einfacheren Figuren zu den zusammengesetzteren sich fortpflanzen". Die Arbeit besteht aus zwei sowohl dem Gegenstande als der Behandlungsweise nach ganz verschiedenen Theilen. Im ersten Theile werden nach einander in vier Abschnitten die Curven behandelt, welche auf speciellen Flächen, nämlich auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung, auf der cubischen Regelfläche, auf der Fläche vierter Ordnung mit doppeltem Kegelschnitt und auf derjenigen mit einer Doppelgeraden liegen. Im zweiten Theile werden Untersuchungen über allgemeine Raumcurven, ohne vorherige Fixirung einer Fläche, auf welcher sie liegen sollen, auf die *Cayley*'sche Darstellung durch sogenannte Monoide gegründet und dabei namentlich Bestimmungen über die Zahlen erlangt, welche für die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte von Raumcurven gegebener Ordnung auftreten können. Die beiden Theile der Abhandlung sowie deren einzelne Abschnitte sind in ganz verschiedenem Maasse durchgearbeitet, relativ am meisten der erste Abschnitt, welcher sich mit den auf Flächen dritter Ordnung liegenden Raumcurven beschäftigt. Dieses grössere oder geringere Maass der Durcharbeitung entspricht aber keineswegs der grösseren oder geringeren Bedeutung der behandelten Fragen, sondern es waren dem Verfasser, wie er selbst in der Einleitung freimüthig erklärt, subjective Gründe hierfür bestimmend. So hat er sich im vergangenen December durch das Erscheinen der *Valentiner*'schen Inauguraldissertation, deren Inhalt sich, wie er sagt, „zum guten Theile mit seinen Untersuchungen im zweiten Theile seiner Abhandlung deckt und vielfach noch weiter geht", bewegen lassen, von weiterer Durcharbeitung der darin behandelten allgemeinen Theorie der Raumcurven abzustehen und die letzten zwei Monate der Frist auf die eingehendere Bearbeitung des ersten Theiles zu verwenden. Die ganze Abhandlung lässt deshalb die systematische Entwickelung und vielfach auch selbst die übersichtliche Anordnung des Stoffes, die Scheidung des Wichtigern von dem minder Wichtigen vermissen, aber sie enthält in ihrem ersten Theile und namentlich in dessen erstem Abschnitt eine gründliche und umfassende geometrische Untersuchung der auf gewissen speciellen Flächen liegenden Curven und in beiden unterschiedenen Theilen eine Anzahl von werthvollen Resultaten, die jedoch nicht als solche anerkannt werden können, welche — wie es in der Preisaufgabe heisst — „auf die Theorie der Raumcurven bezügliche Fragen von wesentlicher Bedeutung vollständig erledigen".

Die zweite Bewerbungsschrift hat das *Abel*'sche Motto: „On doit donner au problème une forme telle, qu'il soit toujours possible de le résoudre", und den Titel: „Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven". Sie ist, dem Titel entsprechend, ein Versuch gründlicher und umfassender Darstellung der Theorie der algebraischen Raumcurven, und es ist vor Allem anzuerkennen, dass darin die fundamentalen algebraischen Gesichtspunkte und zwar sowohl diejenigen, welche für die Classification der Raumcurven, d. h. für ihre Zusammenfassung in verschiedene Arten, als auch diejenigen, welche für die Entwickelung ihrer Eigenschaften maassgebend sind, mit Klarheit erfasst und mit Bestimmtheit hervorgehoben werden. Die Entwickelung der Theorie selbst ist eine durchaus systematische und durchweg wohl geordnete. Dabei hat es sich der Verfasser angelegen sein lassen, dem Leser die Übersicht und das Verständnis zu erleichtern, indem er seiner umfangreichen Arbeit ein genaues Inhaltsverzeichniss und eine Einleitung vorausschickte, in welcher er die auf den Gegenstand bezügliche Literatur sorgfältig angegeben, deren Inhalt und Ergebniss kurz dargelegt und daran eine nähere Auseinandersetzung der von ihm selbst in seiner Arbeit benutzten Methoden und der dabei erlangten Resultate geknüpft hat. Die Arbeit ist in drei Abschnitte eingetheilt und gibt im ersten Abschnitt eine Untersuchung der Raumcurven mittelst specieller Flächenschnitte, im zweiten eine solche mittelst Schnitte allgemeiner Flächen und im dritten Anwendungen auf die Raumcurven der einzelnen Ordnungen (bis zur siebzehnten Ordnung hin), denen im Schlussparagraphen noch Anwendungen auf die Geometrie specieller Flächen angeschlossen sind. Alle diese Untersuchungen sind in sorgfältiger, gediegener Weise geführt und auf tiefe algebraische Erkenntniss gegründet; einige derselben sind freilich, wie der Verfasser selbst eingesteht, noch keineswegs bis zum Abschluss geführt, und auch viele der entwickelten Resultate bedürfen noch einer weiteren Durcharbeitung. Aber diejenigen, vom Verfasser selbst als die hauptsächlichsten hervorgehobenen Untersuchungen, welche sich auf die Constantenzahl der Raumcurven beziehen, sowie die Ergebnisse dieser Untersuchungen, sind doch schon in der Form, wie sie vorliegen, von der Art, dass die Akademie darin, wenn sie dieselben im Zusammenhang der ganzen systematischen Entwickelung betrachtet, einen wesentlichen Fortschritt in der Theorie der algebraischen Raumcurven erkennen und hiervon Anlass nehmen kann, der an sich vortrefflichen Arbeit den Preis zuzuertheilen.

Die dritte Bewerbungsschrift ist mit dem *Lucrez*'schen Motto versehen: „Variam semper dant otia mentem", in französischer Sprache geschrieben und „Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques" betitelt. Die sehr umfangreiche und äusserst sorgfältige Arbeit ist durch eine übersichtliche Darlegung des gesammten Inhalts eingeleitet und in sechs Kapitel eingetheilt, welche von sehr verschiedener Ausdehnung sind. Das erste Kapitel enthält im Wesentlichen nur die Grundlagen der Entwickelung, drei kürzere Kapitel, welche zusammen noch nicht den vierten Theil der ganzen Arbeit ausmachen, nämlich das zweite, vierte und fünfte, behandeln die Curven auf den Oberflächen zweiten, dritten, vierten und fünften Grades; das letzte Kapitel gibt als Anwendung der allgemeineren Resultate eine Classification der Curven bis zum 20. Grade und eine solche der Curven 120. Grades. Das dritte Kapitel, welches allein beinahe die Hälfte des Umfanges der ganzen Arbeit hat, ist auch seinem Inhalte nach das vorzüglichste; es enthält die Darlegung eines eigenthümlichen Verfahrens, aus zwei gegebenen ganzen Functionen zweier Variabeln eine Reihe solcher Functionen herzuleiten, welches, — angewendet auf die bei der *Cayley*'schen Darstellung der Raumcurven vorkommenden Functionen — von einer Raumcurve zu einer anderen führt, die der Verfasser als die „adjungirte" bezeichnet. Die in diesem Kapitel gegebenen algebraischen Entwickelungen und die daraus erlangten geometrischen Resultate enthalten eine wesentliche Bereicherung der Theorie der Raumcurven und geben der Arbeit den Anspruch auf Ertheilung des *Steiner*'schen Preises, wenngleich dieselbe im Übrigen, bei allen ihren Vorzügen, hinsichtlich der algebraischen Principien für die Classification der Curven und auch hinsichtlich der systematischen Entwickelung der zweiten Bewerbungsschrift nachsteht.

Hiernach hat die Akademie beschlossen, dem Verfasser der erstgenannten Bewerbungsschrift mit dem *Steiner*'schen Motto: „Hierbei macht weder die synthetische noch die analytische Methode u. s. w." den *Steiner*'schen Preis nicht zuzuerkennen, dagegen einem jeden der beiden anderen Bewerber, deren Schriften, die eine mit dem *Abel*'schen Motto: „On doit donner au problème etc.", die andere mit dem *Lucrez*'schen Motto: „Variam semper dant otia mentem", beide von der Akademie für preiswürdig erachtet worden sind, den vollen ausgesetzten Preis von 1800 Mark zu ertheilen.

Indem hierauf die zu den beiden gekrönten Abhandlungen gehörigen Zettel eröffnet wurden, ergab sich als Verfasser der mit dem Motto: „On doit donner au problème etc." bezeichneten:

Dr. *Max Noether*, Professor an der Universität Erlangen,

und als Verfasser der mit dem Motto: „Variam semper dant otia mentem" bezeichneten:

Georges-Henri Halphen in Paris.

Der dritte Zettel mit Motto: „Hierbei macht weder u. s. w." wurde sogleich uneröffnet verbrannt.

Die den Statuten der Stiftung gemäss jetzt zu stellende neue Preisfrage betreffend wurde Folgendes verkündet:

Die bis jetzt zur Begründung einer rein geometrischen Theorie der Curven und Flächen höherer Ordnung gemachten Versuche sind hauptsächlich deswegen wenig befriedigend, weil man sich dabei — ausdrücklich oder stillschweigend — auf Sätze gestützt hat, die der analytischen Geometrie entlehnt sind und grösstentheils allgemeine Gültigkeit nur bei Annahme imaginärer Elemente geometrischer Gebilde besitzen. Diesem Übelstande abzuhelfen giebt es, wie es scheint, nur *ein Mittel: es muss der Begriff der einem geometrischen Gebilde angehörigen Elemente dergestalt erweitert werden, dass an die Stelle der im Sinne der analytischen Geometrie einem Gebilde associirten imaginären Punkte, Geraden, Ebenen wirklich existirende Elemente treten, und dass dann die gedachten Sätze, insbesondere die auf die Anzahl der gemeinschaftlichen Elemente mehrerer Gebilde sich beziehenden, unbedingte Geltung gewinnen und geometrisch bewiesen werden können.*

Für die Curven und Flächen zweiter Ordnung hat dies *v. Staudt* in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage" mit vollständigem Erfolge ausgeführt. Die Akademie wünscht, dass in ähnlicher Weise auch das im Vorstehenden ausgesprochene allgemeine Problem in Angriff genommen werde, und fordert die Geometer auf, Arbeiten, welche dieses Problem zum Gegenstande haben und zur Erledigung desselben Beiträge von wesentlicher Bedeutung bringen, zur Bewerbung um den im Jahre 1884 zu ertheilenden *Steiner*'schen Preis einzureichen. Selbstverständlich muss in diesen Arbeiten die Untersuchung rein geometrisch durchgeführt werden;

es ist jedoch nicht nur zulässig, sondern wird auch ausdrücklich gewünscht, dass die erhaltenen Resultate auf analytisch-geometrischem Wege erläutert und bestätigt werden.

Die ausschliessende Frist für die Einsendung der Bewerbungsschriften, welche in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache verfasst sein können, ist der 1. März 1884. Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen und dieses auf dem Äussern des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen. Die Ertheilung des Preises von 1800 Mark erfolgt in der öffentlichen Sitzung am *Leibniz*-Tage im Juli 1884.

ÜBER ZELLER'S BEWEIS DES QUADRATISCHEN RECIPROCITÄTSGESETZES

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 16. Dezember 1872. S. 846—847.

ÜBER ZELLER'S BEWEIS DES QUADRATISCHEN RECIPROCITÄTSGESETZES.[1]

Mit Hülfe des *Gauss*'schen Lemma ist das Reciprocitätsgesetz bekanntlich darauf zurückzuführen, dass die Anzahl der absolut kleinsten negativen Reste von

$$q,\, 2q,\, 3q,\, \ldots\, \tfrac{1}{2}(p-1)q \quad \mathrm{mod}\, p$$

und von

$$p,\, 2p,\, 3p,\, \ldots\, \tfrac{1}{2}(q-1)p \quad \mathrm{mod}\, q$$

nur dann ungrade ist, wenn beide Primzahlen p und q von der Form $4n+3$ sind. Hr. *Zeller* stützt den bezüglichen Nachweis auf folgende Betrachtungen:

Wird $p < q$ vorausgesetzt, so kommen die sämmtlichen unter $\frac{1}{2}p$ liegenden Zahlen als Reste entweder in der ersten oder in der zweiten Reihe negativ vor. Ist nämlich der absolut kleinste Rest r eines Gliedes hq der ersten Reihe positiv, also $hq - kp = r$, so ist die ganze Zahl k positiv und kleiner als $\frac{1}{2}q$, und es ist daher $-r$ der absolut kleinste Rest des Gliedes kp der zweiten Reihe.

Die übrigen nur in der zweiten Reihe vorkommenden negativen Reste, deren absoluter Werth zwischen $\frac{1}{2}p$ und $\frac{1}{2}q$ liegt, lassen sich paarweise einander zuordnen mit alleiniger Ausnahme des im Falle $q = 1$ mod 4 vorkommenden Restes von $\frac{1}{4}(q-1)p$, welcher gleich $\frac{1}{4}(-p \pm q)$ also nur für $p = 3$ mod 4 negativ ist. In der That wird, wenn $k < \frac{1}{2}(q-1)$ und

$$kp \equiv -r \ \mathrm{mod}\, q \ \text{ und } \ \tfrac{1}{2}p < r < \tfrac{1}{2}q$$

ist, gleichzeitig

$$k'p \equiv -r' \,\mathrm{mod}\, q \ \text{ und } \ \tfrac{1}{2}p < r' < \tfrac{1}{2}q,$$

---

1) Vgl. Zusatz 34 am Ende dieses Bandes.

sobald man

$$k' = \frac{1}{2}(q-1) - k, \quad r' = \frac{1}{2}(p+q) - r$$

setzt; der hierbei ausgeschlossene Werth $k = \frac{1}{2}(q-1)$ liefert aber stets den positiven Rest $\frac{1}{2}(q-p)$.

Es ist hiernach erstens die Anzahl der zwischen 0 und $-\frac{1}{2}p$ liegenden Reste in den obigen beiden Reihen zusammen gleich $\frac{1}{2}(p-1)$, und es ist zweitens die Anzahl der in dem Intervalle von $-\frac{1}{2}p$ bis $-\frac{1}{2}q$ enthaltenen Reste eine *grade* Zahl, falls nicht $-p \equiv q \equiv 1 \bmod 4$ ist. Beide Zahlen sind daher für den Fall $p \equiv 1 \bmod 4$ grade und für den Fall $p \equiv 3$, $q \equiv 1 \bmod 4$ ungrade, während für den noch übrig bleibenden Fall $p \equiv q \equiv 3 \bmod 4$ die erste Zahl ungrade und die zweite grade, also nur in diesem Falle die Gesammtzahl der zwischen 0 und $-\frac{1}{2}q$ liegenden Reste ungrade wird.

BEMERKUNGEN ZU REUSCHLE'S TAFELN COMPLEXER PRIMZAHLEN

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1875. S. 236—238.

BEMERKUNGEN ZU REUSCHLE'S TAFELN COMPLEXER PRIMZAHLEN.

Das Werk, dessen vollständiger Titel also lautet:

„Tafeln complexer Primzahlen, welche aus Wurzeln der Einheit gebildet sind; auf dem Grunde der *Kummer*'schen Theorie der complexen Zahlen berechnet von Dr. *C. G. Reuschle*, Professor in Stuttgart“ *)

enthält in möglichster Vollständigkeit und in wohlgeordneter Folge die hauptsächlichsten Ergebnisse von etwa zwölfjährigen umfangreichen und mühsamen Rechnungen, welche der Verfasser angestellt hatte, um die Zerlegung der Primzahlen des ersten Tausend in complexe, aus Wurzeln der Einheit gebildete Factoren zu ergründen. Das gesammte Material ist in sachgemäßer Weise nach dem Grade der Einheitswurzeln in fünf verschiedene Abtheilungen gesondert; die erste derselben bezieht sich auf alle diejenigen Gradzahlen des ersten Hunderts, welche Primzahlen sind, die zweite auf die Primzahlpotenzen 9, 25, 27, 49, 81, und die dritte auf alle andern zusammengesetzten ungraden Zahlen bis 105; die vierte Abtheilung enthält die Gradzahlen 4, 8, 16, 32, 64, 128 und endlich die fünfte alle übrigen durch 4 theilbaren Zahlen bis 100. Für eine grosse Anzahl realer Primzahlen des ersten Tausend finden sich die complexen Primfactoren selbst, sofern sie wirklich sind, in den Tafeln vor, und in den einfacheren Fällen sind auch die niedrigsten wirklichen Potenzen *idealer* Primfactoren darin aufgenommen. In allen andern Fällen sind zusammengesetzte, complexe Zahlen in grösserer oder kleinerer Anzahl aufgeführt, deren Normen die zu zerlegenden Primzahlen enthalten. Es sind ferner auch für jede Art der Einheitswurzeln die Perioden nebst deren Relationen und endlich auch die Congruenzwurzeln angegeben, welche den Wurzeln der Einheit, resp. deren Perioden entsprechen, sofern die einzelnen Primzahlen der hierher gehörigen Gruppe als Moduln angenommen werden. Das ganze Werk des Hrn. *Reuschle* charakterisirt

*) Berlin 1875. In Commission bei Dümmler's Verlags-Buchhandlung (Harrwitz und Gossmann). 84 Bogen in Quart.

sich demgemäss als eine werthvolle Sammlung von Rechnungsresultaten, welche für die Erforschung der Theorie der complexen Zahlen von Wichtigkeit sein können, und es ist auch sowohl bei der Publication des Werkes überhaupt als auch bei der Aufnahme mancher Einzelheiten zumeist die Absicht massgebend gewesen, theoretischen Untersuchungen damit nützliche Anhaltspunkte zu gewähren. Wie sehr ein reiches, durch Rechnungen erlangtes Beobachtungsmaterial geeignet ist, zur Auffindung von Zahlen-Eigenschaften und arithmetischen Gesetzen zu führen, hat die Geschichte der Wissenschaft vielfach gezeigt, und es darf in dieser Hinsicht nur an die zahlreichen und wichtigen Entdeckungen erinnert werden, welche *Fermat*, *Euler*, *Legendre* zuerst auf dem Wege der Induction gemacht haben. Dabei haben diese Entdeckungen zum Theil noch eine besondere Bedeutung dadurch gewonnen, dass die Bemühungen, die Beobachtungsresultate zu beweisen, eine mächtige Anregung zur Fortentwicklung der Wissenschaft gegeben und mehrmals ganze Gebiete derselben neu erschlossen haben. So führte das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste schon zur weiteren Ausbildung der Theorie der Kreistheilung, und der berühmte *Fermat*'sche Satz gab Hrn. *Kummer* vor etwa dreissig Jahren die hauptsächlichste Anregung zu jenen von so glücklichem Erfolge gekrönten Untersuchungen, auf denen das *Reuschle*'sche Werk basirt und deren Weiterförderung es zugleich gewidmet ist. In diesem Gebiete der complexen Zahlentheorie werden nämlich die Rechnungen so ungemein schwierig und weitläufig, dass es dem einzelnen Forscher kaum möglich ist, sich für eine specielle Frage das nöthige Beobachtungsmaterial in bestimmten Zahlenbeispielen zu beschaffen, um daran einen Anhalt für die theoretische Untersuchung zu gewinnen. Desshalb dürften sich die Rechnungen des Hrn. *Reuschle* häufig genug als werthvolle Vorarbeiten erweisen und, wenn sie auf diese Weise der Wissenschaft selber zu Statten kommen, die Ausdauer und Hingebung lohnen, die derselbe viele Jahre hindurch an seine Arbeit gewendet hat.*)

*) Leider ist inzwischen vor dem Abdruck der obigen Bemerkungen Hr. *Reuschle* von einem Unfalle betroffen worden, der seinem in mannigfacher Beziehung wirkungsreichen und verdienstvollen Leben ein vorzeitiges Ende bereitet hat. Er starb in Stuttgart am 22. Mai d. J. in seinem 63sten Lebensjahre.

AUSZUG AUS EINEM BRIEFE VON L. KRONECKER AN R. DEDEKIND VOM 15. MÄRZ 1880

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1895. S. 115—117.

AUSZUG AUS EINEM BRIEFE VON L. KRONECKER AN R. DEDEKIND.[1]

Berlin 15. März 1880.

Meinen besten Dank für Ihre freundlichen Zeilen vom 12. c.! Ich glaube darin einen willkommenen Anlass finden zu sollen, Ihnen mitzutheilen, dass ich heute die letzte von vielen Schwierigkeiten besiegt zu haben glaube, die dem Abschlusse einer Untersuchung, mit der ich mich in den letzten Monaten wieder eingehender beschäftigt habe, noch entgegenstanden. Es handelt sich um meinen liebsten Jugendtraum, nämlich um den Nachweis, dass die *Abel*'schen Gleichungen mit Quadratwurzeln rationaler Zahlen durch die Transformations-Gleichungen elliptischer Functionen mit singulären Moduln grade so erschöpft werden, wie die ganzzahligen *Abel*'schen Gleichungen durch die Kreistheilungsgleichungen. Dieser Nachweis ist mir, wie ich glaube, nun vollständig gelungen, und ich hoffe, dass sich bei der Ausarbeitung, auf die ich nun allen Fleiss verwenden will, keine neuen Schwierigkeiten zeigen werden. Aber nicht bloss das — wie mich dünkt — werthvolle Resultat, auch die Einsicht die mir auf dem Wege geworden ist, hat mir mannigfache Befriedigung meiner mathematischen Neugierde gewährt, und ich habe auch die Freude gehabt, mit meinen bezüglichen Mittheilungen das mathematische Herz meines Freundes *Kummer* vielfach zu erfreuen, da auch Aussichten für Erledigung seiner Lieblingsfragen sich zeigen. — Ich hatte schon vor 4 Wochen in der Akademie eine Abhandlung gelesen, von der ein Auszug gedruckt wird, in der ich die arithmetischen Eigenschaften der Wurzeln jener Gleichungen entwickle, die ich ja der Hauptsache nach schon seit fast 20 Jahren kenne. Aber ich hatte neuerdings eine gewisse Erleichterung durch die allgemeine Betrachtung gewonnen, dass die Coefficienten der Transformation, wenn man die *Jacobi*'schen Bezeichnungen im IV. Bande des *Crelle*'schen Journ. pag. 185[2]) nimmt, aber den Coefficienten von x^n gleich Eins setzt, sämmtlich (für n Primzahl) ganze algebraische Vielfache des letzten Coefficienten sind. Da man nun

---

[1]) Vgl. Zusatz 35 am Ende dieses Bandes. H

[2]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 266. H

einerseits alle oben erwähnten Gleichungen als Transformationsgleichungen auffassen, andrerseits als Potenzen von Multiplicationsgleichungen darstellen kann, wie ich es im Monatsbericht vom Dec. 1877[1]) näher dargelegt habe, so zeigt sich unmittelbar, dass diese Gleichungen die Eigenschaften haben, die bei den Kreistheilungsgleichungen darauf beruhen, dass alle Coefficienten durch die betreffende Primzahl theilbar sind, und deren Analoga ich sonst in der von *Eisenstein* bei den Lemniscatischen Functionen angewendeten Weise bewiesen hatte. Die Indices der verschiedenen Primzahlen ergeben sich natürlich auch für jene Transformations-Gleichungen ohne alle Schwierigkeit, denn es ergiebt sich ja genau so wie bei den Kreisfunctionen, zu welchen Exponenten die Primzahlen resp. ihre complexen Factoren gehören. So weit es sich um die singulären Moduln selber handelt, die auch als Perioden der Wurzeln solcher Transformationsgleichungen aufgefasst werden können, ist — wie ich schon vor langer Zeit ermittelt hatte, als ich die Classenzahl dafür berechnete (conf. Monatsber. v. Juni 1862)[2]) der Index der Composition entscheidend für die Indices der Primfactoren. Ich verstehe unter *diesen* Indices nämlich die verschiedenen Grade der irreductibeln Factoren, in welche die betreffende Gleichung für den bezüglichen Modul zerfällt. Wenn diese Indices gefunden sind, so bedarf es nur der Anwendung der allgemeinen Formel, die ich im Monatsbericht vom Jan. 1863[3]) publicirt habe, um die Classenanzahl ohne Weiteres aufzufinden. Die Formel ist — wie ich schon dort bemerkt habe — eine Art Universalmittel für die bezüglichen Untersuchungen. Nur habe ich jetzt immer — wie schon seit lange in meinen Universitätsvorlesungen — die 2 beim mittleren Coefficienten der quadratischen Formen weggelassen. Habe ich so die arithmetischen Eigenschaften jener von der Analysis gelieferten Gleichungen, die Classenzahl der entsprechenden Formen etc. schon vor vier Wochen (am 2. Febr.) in der Akademie vorgetragen, so war mir doch zum Beweise jenes Satzes, den ich so lange geahnt und gesucht habe, noch eine ganz andre — ich möchte sagen — philosophische Einsicht in die Natur jener merkwürdigen Gleichungen für die singulären Moduln nöthig, vermöge deren es klar gelegt werden musste, *warum* diese die grade hinreichenden Irrationalitäten geben, welche — nach *Kummer*'s Ausdrucksweise die ich auch im J. 1857 in der Mittheilung[4]) gebraucht habe — die idealen Zahlen für $a+b\sqrt{-D}$ wirklich darstellen. Diese

---

[1]) Bd. IV, S. 63 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) Bd. IV, S. 207 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[3]) Bd. IV, S. 219 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[4]) Bd. IV, S. 177 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Einsicht habe ich nun erlangt. Sie beruht auf zwei merkwürdigen Betrachtungen. *Erstens*: die *Abel*'schen Gleichungen $p$ten Grades (wobei der Einfachheit halber p Primzahl sei) stehen auf ganz andrer Stufe als andre z. B. die *reinen* Gleichungen $p$ten Grades, d. h. die Wurzeln der *Abel*'schen Gleichungen sind dem Rationalen so nahe als möglich, weil die darin vorkommenden Wurzelgrössen in Wahrheit nicht den Exponenten p selbst, sondern nur einen einfachen (aus $(p-1)$ten Wurzeln der Einheit gebildeten) *Primfactor* von p (in dem Sinne wie in meiner Dissertation) als Exponenten der Wurzel haben. *Zweitens*: die Gleichungen für die singulären Moduln ergeben eine *geringste* Irrationalität von allen jenen dem Rationalen schon möglichst nahen Irrationalitäten. Nämlich die Grösse, aus der die Wurzel mit jenem complexen Exponenten zu ziehen ist, ist im *arithmetischen* Sinne eine $p$te Potenz, denn sie ist eine aus $p$ten Wurzeln der Einheit und $\sqrt{-D}$ gebildete Zahl, deren zugehörige Zahl $a+b\sqrt{-D}$ eben (nach *Kummer*'s Ausdrucksweise) die $p$te Potenz einer idealen Zahl ist.

Ich gebe mich der Hoffnung hin, dass auch Sie, hochgeehrter Herr College, an dieser Einsicht in die Natur der Gleichungen Interesse nehmen, wenn Ihnen die Darlegung auch einstweilen etwas befremdlich erscheinen sollte. Die Hoffnung grade den Kernpunkt, für die allgemeinen complexen Zahlen das Analogon der singulären Moduln zu finden, auch noch abzumachen, muss ich wohl etwas vertagen, wenn ich jetzt an das Klären und Aufzeichnen des bisher Erlangten gehen soll ....

ADRESSE DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN ZU E. E. KUMMER'S FÜNFZIGJÄHRIGEM DOCTORJUBILÄUM AM 10. SEPTEMBER 1881

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1881. S. 895—898.

ADRESSE DER AKADEMIE ZU E. E. KUMMER'S FÜNFZIGJÄHRIGEM DOCTORJUBILÄUM.

Einer schönen deutschen Gelehrtensitte folgend, bringt die unterzeichnete Akademie der Wissenschaften zur Jubelfeier des Tages, an welchem Ihnen dereinst in Halle die Doctorwürde verliehen worden ist, ihre aufrichtigsten und wärmsten Glückwünsche dar. Sie begrüsst den Gedenktag mit besonderer Freude an der Rüstigkeit und geistigen Vollkraft, in der Sie ihn begehen, mit besonderem Stolze auf die Verbindung, welche die Akademie in die Ferne, schon einige Jahre nach dem Ursprung dieser Feier, mit Ihnen angeknüpft und seit Ihrer Übersiedelung nach Berlin immer enger und bedeutsamer gestaltet hat.

Die Zeit, da Sie sich in Halle vom Studium der Theologie ab dem Studium der Mathematik zuwandten, fällt nahe mit jener Epoche zusammen, welche das Wiedereintreten Deutschlands in den Kreis der mathematischen Nationen bezeichnet. Wohl hatte *Gauss*, thronend auf einsamer Höhe, während rings um ihn im Vaterlande die mathematische Öde fortdauerte, schon ein Menschenalter hindurch unsterbliche Werke geschaffen und die rückhaltlose Bewunderung des Auslandes gefunden; aber erst im Lustrum vorher hatten, an Alter ebensoviel Ihnen voranstehend, die beiden Heroen *Jacobi* und *Dirichlet* die Aera allgemeiner Blüthe deutscher Mathematik eröffnet, an deren Erhaltung und Entwickelung Sie bald so ruhmvoll mitwirken sollten.

Es ist bezeichnend für die auf wirkliche Erkenntniss gerichtete Weise Ihrer wissenschaftlichen Thätigkeit, dass sich vor dem rückschauendem Auge Ihr fünfzigjähriges Arbeitsleben ganz ungezwungen in drei grosse, deutlich geschiedene Perioden aus einander legt. Je eine ganze Reihe von Jahren hindurch vereinigen Sie Ihre Denk- und Arbeitskraft auf eine Klasse von zusammenhängenden Untersuchungen.

Nicht die geschickte Erledigung vereinzelter Probleme befriedigt Ihren Geist — im wissenschaftlichen Grossbetriebe, in der umfassenden Behandlung und vollständigen Durchforschung ganzer Gebiete bewähren Sie den Blick, die Macht, den Fleiss des Genies. Niemals an dem, was schon flache und flüchtige Bearbeitung hervorbringt, sich genügen lassend, wenden Sie stets Ihre grosse und geübte Kraft mit der auch für Sie noch erforderlichen Anstrengung an jene Tiefkultur des mathematischen Bodens, welche allein die ausgiebige Fruchtbarkeit zu sichern vermag. Und nicht jede eben gewonnene Frucht vereinzelt oder gar unreif mitzutheilen ist Ihre Art — in mühsamer, sorgfältiger Ausarbeitung zeitigen, sammeln und ordnen Sie die ausgezeichneten Ergebnisse Ihrer Forschungen.

Das erste Jahrzehnt Ihres wissenschaftlichen Schaffens gehört der Analysis. Die von der Halleschen philosophischen Fakultät gekrönte Arbeit, Ihre Doctordissertation, ward das erste Glied einer Kette von scharfsinnigen Untersuchungen über die Theorie der Reihen und der Integrale, deren glänzenden Mittelpunkt — auch zeitlich — Ihre berühmte Abhandlung über die hypergeometrische Reihe bildet; eine würdige Ergänzung jener fundamentalen, nur in ihrem ersten Theile erschienenen *Gauss*'schen Arbeit, gegründet auf tiefstes, in einem Liegnitzer Gymnasialprogramme zuerst dargelegtes Erkennen der für die Vergleichung von Transcendenten massgebenden Principien und durchgeführt in solcher Vollständigkeit, dass bei viel später mit ganz neuen Mitteln von *Riemann* aufgenommenen Untersuchungen sich nur eine kleine Nachlese an Resultaten ergeben hat.

Die Schrift über die kubischen Reste, mit welcher Sie in Breslau Ihren Platz als akademischer Lehrer einnehmen, leitet die Periode Ihrer grundlegenden und bahnbrechenden zahlentheoretischen Untersuchungen ein, welche die zwei folgenden Jahrzehnte erfüllen. Was Sie bei einer ersten Beschäftigung mit den complexen Zahlen als Mangel der Theorie empfinden und beklagen, wird Ihrem ächt speculativen Sinne Anlass zur Schöpfung und Ausbildung des Begriffes der idealen Zahl, welcher mit der Vervollkommnung der Einsicht zugleich eine solche Vereinfachung der Methoden bewirkt, dass nunmehr *Gauss*' Theorie der quadratischen Formen verhältnissmässig leicht auf allgemeinere übertragen werden kann. Bald fliesst aus diesen Untersuchungen Ihr Beweis des berühmten *Fermat*'schen Satzes, grosses und gerechtes Aufsehen erregend, weil ungeachtet so vieler Bestrebungen bedeutendster Forscher bis dahin der Beweis nur in einigen wenigen Fällen gelungen war. Bald auch finden Sie mit scharfem Blicke auf dem Wege der Induction

die höheren Reciprocitätsgesetze; aber erst nachdem Sie mit bewundernswürdiger Beharrlichkeit Jahre hindurch Ihre Bemühungen auf dieses Ziel gerichtet und mit frischem Arbeitsmuth weitere und umfassendere Forschungen zu diesem Zwecke unternommen haben, gelingt Ihnen der theoretische Beweis, der ersehnte werthvollste Preis Ihrer abstractesten Untersuchungen.

Concretere Studien, durch Mittel der Anschauung, einige selbst durch Experimente unterstützt, bilden den reichen Inhalt der dritten, wesentlich geometrischen Periode Ihrer Arbeitszeit. Anknüpfend an die Untersuchungen *Hamilton's*, den, einst mit Ihnen zugleich — ein Vorzeichen dieser geistigen Verbindung — die Akademie zum Correspondenten gewählt hatte, eröffnen Sie vor nun etwa zwanzig Jahren mit Ihrer Theorie der allgemeinen Strahlensysteme ein außerordentlich fruchtbares Feld analytisch-geometrischer Forschung. Sie entwickeln darin eine Anzahl neuer naturgemässer Begriffe, welche von einem höheren Standpunkte aus über die analogen, in der Theorie der krummen Oberflächen, wie Ihr Dichtigkeitsmaass über das *Gauss*'sche Krümmungsmaass, helles Licht verbreiten. Sie wenden sich dann in Ihren folgenden Arbeiten zur Behandlung von speciellen algebraischen Strahlensystemen und deren Brennflächen, welche bis in die jüngste Zeit fortgesetzt eine Reihe der wichtigsten und interessantesten Erscheinungen algebraischer Flächen zu Tage gefördert hat — auch jene merkwürdige Fläche, die Ihren Namen trägt. Und es ist wohl diese ganze Kategorie Ihrer Arbeiten und Resultate, welche am meisten zur Popularisirung Ihres Namens in dem ausgedehnteren Kreise der Mathematiker beigetragen hat.

Der Tag, an dem Sie vor fünfzig Jahren die erste akademische Würde erlangt haben, beschliesst ein halbes Jahrhundert ganz dem Dienste der Wissenschaft in Forschung und Lehre gewidmeten, reich mit Erfolgen der Arbeit gesegneten, von Anfang an durch die Anerkennung der Kenner geehrten, nach und nach mit den höchsten wissenschaftlichen Auszeichnungen geschmückten, recht eigentlich akademischen Lebens. Vor zweiundvierzig Jahren zum correspondirenden Mitgliede, vor sechsundzwanzig Jahren bei Ihrer Berufung an die hiesige Universität zum ordentlichen Mitgliede ernannt und vor achtzehn Jahren von der physikalisch-mathematischen Klasse zum Secretär erwählt, haben Sie die verschiedenen Beziehungen zur Akademie mit Liebe und Eifer gepflegt, die akademischen Pflichten mit gewissenhafter Strenge geübt, Ihres Secretar-Amtes fast fünfzehn Jahre hindurch mit Treue und

Hingebung gewaltet und in allen Verhältnissen zum Ruhm und zur Ehre der Akademie gewirkt. Sie spricht in feierlicher Form an diesem Gedenktage ihren Dank dafür aus, sie flicht den Wunsch darein, dass es Ihnen beschieden sein möge, auch unter dem Titel eines Veteranen, den Sie seit Kurzem angenommen haben, noch lange Ihre akademische Thätigkeit fortzusetzen, auch in diesem freieren Verhältnisse noch lange die alte und innige Verbindung zu unterhalten, welche die Akademie mit Freude und Genugthuung, welche sie mit Stolz erfüllt.

ANMERKUNG
ZU E. DU BOIS-REYMOND'S „UNTERSUCHUNGEN ÜBER TIERISCHE ELECTRICITÄT"

E. du Bois-Reymond, Untersuchungen über tierische Electricität, II. Band, II. Abtheilung, S. 489—490 (Anmerkung) 1884.

ANMERKUNG ZU E. DU BOIS-REYMOND'S „UNTERSUCHUNGEN ÜBER TIERISCHE ELECTRICITÄT".[1])

Mein Freund Herr *Leopold Kronecker* hatte jetzt (1883) die Gefälligkeit, auf rein analytischem Wege den Beweis zu entwickeln, dass der Ausdruck (3) ein Maximum, oder der (4) ein Minimum für s habe, und dass der Werth von s, für welchen das Minimum eintrifft, mit σ wachse. Er verfährt folgendermassen.

Die vier Wurzeln der Gleichung $s^2 P(s) = 0$, negativ genommen, nämlich

$$+\frac{1}{2}(ar + a + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(ar + a - c)^2 + 4acr},$$

$$+\frac{1}{2}(br + b + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(br + b - c)^2 + 4bcr},$$

sollen in der Reihe, wie sie dastehen, t, u, v, w heissen. Diese vier Werthe sind reell und überdies positiv; denn die Summen $t + u = ar + a + c$, $v + w = br + b + c$ und ebenso die Producte $tu = ac$, $vw = bc$ sind positiv.

Nun wird

$$P(s) = \frac{1}{s^2}(s + t)(s + u)(s + v)(s + w),$$

und hiervon ist das Minimum zu suchen. Man hat

$$\frac{d\log P(s)}{ds} = \frac{d\log s^{-2}}{ds} + \frac{d\log(s + t)}{ds} + \frac{d\log(s + u)}{ds} + \frac{d\log(s + v)}{ds} + \frac{d\log(s + w)}{ds},$$

und wenn

$$\frac{dP(s)}{ds} = P'(s) \quad \text{ist,} \quad \frac{d\log P(s)}{ds} = \frac{P'(s)}{P(s)}.$$

Also kommt

$$\frac{P'(s)}{P(s)} = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s+t} + \frac{1}{s+u} + \frac{1}{s+v} + \frac{1}{s+w},$$

1) Vgl. den Zusatz 36 am Ende des Bandes.

oder

$$\frac{sP'(s)}{P(s)} = -2 + \frac{s}{s+t} + \frac{s}{s+u} + \frac{s}{s+v} + \frac{s}{s+w}.$$

Dies sei $Q(s)$. Dann ist

$$\frac{dQ(s)}{ds} = Q'(\mathfrak{s}) = \frac{t}{(s+t)^2} + \frac{u}{(s+u)^2} + \frac{v}{(s+v)^2} + \frac{w}{(s+w)^2} \qquad (*)$$

also *positiv*. Für kleine, nahe der Null liegende, *positive* Werthe von s ist $\frac{s}{P(s)}$ positiv, aber $Q(s)$ nahe $= -2$; also ist $P'(0)$ *negativ*. Für $s = +\infty$ wird $Q(s) = +2$, also giebt es einen positiven Werth $\mathfrak{s}$, für welchen $P'(s) = 0$ ist.

Wenn $sP'(s) = P(s)Q(s)$ differentiirt wird, ist allgemein

$$P'(s) + sP''(s) = P'(s)Q(s) + P(s)Q'(s),$$

wo $P''(s)$ die zweite Ableitung von $P(s)$ bedeutet.

Da $P'(s) = 0$ für $s = \mathfrak{s}$, so haben wir:

$$\mathfrak{s}P''(\mathfrak{s}) = P(\mathfrak{s})Q'(\mathfrak{s}),$$

und da $\mathfrak{s}$, $P(\mathfrak{s})$, $Q'(\mathfrak{s})$ positiv sind, ist es auch $P''(\mathfrak{s})$. Es ist also $P(\mathfrak{s})$ in der That ein Minimum, da die erste Ableitung gleich Null und die zweite positiv ist. Hieraus geht auch hervor, dass es nur *einen* Werth $\mathfrak{s}$ giebt. Denn $Q(s)$ wird für positive s nicht unendlich, und es müsste also, wenn es noch einen Werth $\mathfrak{s}$ gäbe, dabei $P'(s)$ aus dem Positiven in's Negative übergehen, also $P''(s)$ negativ sein.

Jetzt handelt es sich darum, zu beweisen, dass $\mathfrak{s}$ mit σ *wächst*. Da $\mathfrak{s}$ Wurzel der Gleichung $Q(s) = 0$ ist, haben wir

$$Q(\mathfrak{s}) = -2 + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}+t} + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}+u} + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}+v} + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}+w} = 0;$$

dabei ist $\mathfrak{s}$ *positiv*. Die Grössen t, u, v, w hängen von c ab, welches σ proportional ist. Wir schreiben deshalb: $Q(\mathfrak{s}, c)$, und dann ist das vollständige Differential:

$$\frac{\partial Q(\mathfrak{s}, c)}{\partial \mathfrak{s}} d\mathfrak{s} + \frac{\partial Q(\mathfrak{s}, c)}{\partial c} dc = 0,$$

also:

$$\frac{\lambda}{\delta} \cdot \frac{d\mathfrak{s}}{d\sigma} = \frac{d\mathfrak{s}}{dc} = \frac{-\frac{\partial Q(\mathfrak{s}, c)}{\partial c}}{\frac{\partial Q(\mathfrak{s}, c)}{\partial \mathfrak{s}}}.$$

Um nun zu beweisen, dass $\frac{d\mathfrak{s}}{d\sigma}$ positiv ist, braucht nur gezeigt zu werden, dass der Zähler:

$$-\frac{\partial Q(\mathfrak{s}, c)}{\partial c}$$

positiv ist; denn dass der Nenner

$$\frac{\partial Q(\mathfrak{s}, c)}{\partial \mathfrak{s}}$$

oder $Q'(\mathfrak{s})$ positiv ist, sahen wir schon oben ein (Gleichung *).

Da t, u, v, w implicite σ enthalten, so ist:

$$-\frac{\partial Q(\mathfrak{s}, c)}{\partial c} = \frac{\mathfrak{s}}{(\mathfrak{s}+t)^2} \cdot \frac{dt}{dc} + \frac{\mathfrak{s}}{(\mathfrak{s}+u)^2} \cdot \frac{du}{dc} + \frac{\mathfrak{s}}{(\mathfrak{s}+v)^2} \cdot \frac{dv}{dc} + \frac{\mathfrak{s}}{(\mathfrak{s}+w)^2} \cdot \frac{dw}{dc}.$$

Die rechte Seite ist also offenbar positiv, wenn $\frac{dt}{dc}, \frac{du}{dc}, \ldots$ positiv sind. Es ist nun, wenn die durch t, u, v, w dargestellten Wurzelausdrücke nach c differentiirt werden,

$$\frac{2dt}{dc} \text{ und } \frac{2du}{dc} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+g}},$$

$$\frac{2dv}{dc} \text{ und } \frac{2dw}{dc} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+h}},$$

wenn

$$g = \frac{4a^2r}{(ar-a+c)^2}, \quad h = \frac{4b^2r}{(br-b+c)^2}$$

ist. Die vier Differentialquotienten $\frac{dt}{dc}, \frac{du}{dc}, \ldots$ sind also in der That *positiv*, da die absoluten Werthe von

$$\frac{1}{\sqrt{1+g}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+h}}$$

kleiner als Eins sind.

BEMERKUNGEN ÜBER DIRICHLET'S LETZTE ARBEITEN

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1888. S. 439—442.

BEMERKUNGEN ÜBER DIRICHLET'S LETZTE ARBEITEN.

In Hrn. *Kummer*'s Gedächtnissrede*) finden sich folgende Angaben über die „Resultate, welche *Dirichlet* in den letzten Jahren seines Lebens erarbeitet hat".

„Aus dem, was er einzelnen Freunden über die Gegenstände seiner Forschungen gelegentlich mitgetheilt hat, geht hervor, dass er unter Andern eine vollständige Theorie der ternären, unbestimmten Formen zweiten Grades in seinem Kopfe fertig ausgeführt hatte, ferner dass es ihm gelungen war, die Annäherung der asymptotischen Gesetze für eine Art zahlentheoretischer Functionen, von welchen die Bestimmung der Häufigkeit der Primzahlen abhängt, um einen ganzen Grad weiter zu treiben, und dass er einen mathematisch vollkommen strengen Beweis der Stabilität des Weltsystems gefunden hatte. Von einer grossen und besonders werthvollen Entdeckung aus der letzten Zeit seines Lebens, nämlich einer ganz neuen, allgemeinen Methode der Behandlung und Auflösung der Probleme der Mechanik, hat er nur gegen einen seiner Freunde, Hrn. *Kronecker*, mit dem er in dem intimsten wissenschaftlichen und freundschaftlichen Verkehr stand, einmal im Sommer 1858 gesprochen. Er hatte selbst auf diese Entdeckung ein ganz besonderes Gewicht gelegt und Hrn. *Kronecker* gebeten, vorläufig gegen Niemand davon zu sprechen. Dieser hat darum erst nach *Dirichlet*'s Tode seinen Freunden das mitgetheilt, was er von ihm darüber erfahren hatte, namentlich dass diese Methode nicht darauf hinausgehe, die Integrationen der betreffenden Differenzialgleichungen auf Quadraturen zurückzuführen, weil dieses Mittel, durch welches *Jacobi* versucht hat die Lösung der mechanischen Probleme zu gewinnen, zu beschränkt sei, dass sein Verfahren vielmehr in einer stufenweisen Annäherung bestehe, bei welcher jeder neue Schritt zugleich eine vollständigere und genauere Einsicht in die Natur der durch die Bedingungen der Aufgabe bestimmten Bewegungen gewähre, endlich dass die Theorie der kleinen Schwingungen zur Auffindung dieser Methode einen gewissen Anhalt biete."

*) Abhandlungen der Akademie 1860, S. 35.

Nun heisst es unter Hinweis auf die angeführten Stellen der *Kummer*'schen Gedächtnissrede in einer im 7. Bande der Acta Mathematica (S. II) enthaltenen Publication nach Formulirung der Aufgabe:

> „Es sollen für ein beliebiges System materieller Punkte, die einander nach dem *Newton*'schen Gesetze anziehen, unter der Annahme, dass niemals ein Zusammentreffen zweier Punkte stattfinde, die Coordinaten jedes einzelnen Punktes in unendliche, aus bekannten Functionen der Zeit zusammengesetzte und für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichmässig convergirende Reihen entwickelt werden."

„Dass die Lösung dieser Aufgabe, durch deren Erledigung unsere Einsicht in den Bau des Weltsystems auf das Wesentlichste würde gefördert werden, nicht nur möglich, sondern auch mit den gegenwärtig uns zu Gebote stehenden analytischen Hülfsmitteln erreichbar sei, dafür spricht die Versicherung *Lejeune-Dirichlet*'s, der kurz vor seinem Tode einem befreundeten Mathematiker mitgetheilt hat, dass er eine allgemeine Methode zur Integration der Differentialgleichungen der Mechanik entdeckt habe, sowie auch, dass es ihm durch Anwendung dieser Methode gelungen sei, die Stabilität unseres Planetensystems in vollkommen strenger Weise festzustellen. Leider ist uns von diesen Untersuchungen *Dirichlet*'s, ausser der Andeutung, dass zur Auffindung seiner Methode die Theorie der kleinen Schwankungen*) einen gewissen Anhalt biete, nichts erhalten worden; . . ."

Die Quelle für die aus der *Kummer*'schen Gedächtnissrede citirten Angaben über *Dirichlet*'s letzte Arbeiten bilden die Mittheilungen, welche ich zur Zeit meinem Freunde *Kummer* gemacht habe, und die Wortfassung ist auch unter meiner Zuziehung erfolgt. Da aber dem Sinne, welcher damit ausgedrückt werden sollte, die Auffassung, welche sich in jener Publication der Acta Mathematica kundgiebt, keineswegs entspricht, so glaube ich einige Erläuterungen hinzufügen zu müssen.

Es war während eines mehrtägigen Aufenthalts in Göttingen im Sommer 1858**), als mir *Dirichlet* sowohl die eine als auch die andere der beiden Mittheilungen machte, auf welche sich die Publication der Acta Mathematica beruft. Aber die Verbindung, in welche dort die beiden Mittheilungen gebracht werden, entspricht

*) „Schwingungen" s. o. in der *Kummer*'schen Gedächtnissrede.
**) Ungefähr zehn Monate vor *Dirichlet*'s Tode.

nicht dem wirklichen Sachverhalt. Die Mittheilungen erfolgten vielmehr an zwei verschiedenen Tagen, in ganz verschiedener Weise, und ohne dass bei der einen irgend wie auf die andere Bezug genommen wurde.

Die der Zeitfolge nach erste Mittheilung *Dirichlet*'s betraf seinen Beweis für die Stabilität des Weltsystems. Sie war, bei aller Betonung der Wichtigkeit der Sache, gewissermaassen anspruchslos gehalten, und ich hatte den Eindruck, dass *Dirichlet* durch Aufsuchung der eigentlichen Quellen der Erkenntniss, ähnlich wie in seinem klassischen Aufsatze über die Stabilität des Gleichgewichts, den Beweis in grossartiger Einfachheit und Übersichtlichkeit erlangt und im Kopfe fertig hatte, und dass er ihn bald zu veröffentlichen gedachte.

Die Mittheilung, betreffend die Entdeckung einer neuen allgemeinen Methode der Behandlung und Auflösung der Probleme der Mechanik, erfolgte an einem anderen Tage auf einem Spaziergange, fast in der Form einer feierlichen Eröffnung. *Dirichlet* begann damit, mir vorläufig Stillschweigen über das, was er mir nun mittheilen würde, aufzuerlegen, und am Schlusse schien es mir, als ob er die Veröffentlichung dieser seiner Entdeckung, welche wohl auch noch grossen Aufwand an Zeit erfordert hätte, nicht unmittelbar in Aussicht nähme. In seinen Aeusserungen über die von ihm angewendete Methode betonte er wiederholt, dass sie nicht durch Quadraturen, nicht durch Reihen ein fertiges Resultat liefere, sondern dass sie in einem „*Verfahren*" bestehe, mittels dessen man eine stufenweise Annäherung an das gesuchte Resultat erlange.

Ich habe mich bemüht, in dem knappen für die *Kummer*'sche Gedächtnissrede verfassten Berichte den grossen Unterschied in Form und Inhalt der beiden Mittheilungen kenntlich zu machen; sie erscheinen dort auch dadurch gänzlich von einander abgetrennt, dass mein Name bloss bei der zweiten Mittheilung angeführt ist, während die Auffindung eines Beweises der Stabilität des Weltsystems zusammen mit der von zwei Ergebnissen*) arithmetischer Untersuchungen in unbestimmter Weise als „einzelnen Freunden" mitgetheilt erwähnt wird. Hierdurch glaubte ich

*) Das zweite bezieht sich auf die zahlentheoretische Function $\sum_{s=1}^{s=n}\left[\frac{n}{s}\right]$ und ist in dem von *Dirichlet* an mich gerichteten Briefe vom 23. Juli 1858 erwähnt (vergl. die Göttinger Nachrichten vom 16. December 1885, S. 381).[1])

[1]) Bd. V S. 428 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

der Annahme einer Verbindung der beiden Mittheilungen, wie sie in der Publication der Acta Mathematica enthalten ist, vorzubeugen.

Die Äusserungen, welche *Dirichlet* mir gegenüber gethan hat, können auch nicht, wie es in der erwähnten Publication geschieht, als Beleg für diejenige Art der Lösbarkeit der Aufgabe geltend gemacht werden, welche dort eben auf Grund der *Dirichlet*'schen Mittheilungen als möglich und jetzt erreichbar bezeichnet wird. Denn *Dirichlet* hat mir ausdrücklich erklärt, dass er die Lösung nicht in der Form von Reihen erhalten habe. Dabei hat er wohl, indem er sein „Verfahren" und die Entwickelung in Reihen in Gegensatz stellte, den Ausdruck „Reihe" nur im gewöhnlichen Sinne einer nach bekannten Functionen fortschreitenden Reihe genommen. Denn als „Reihe" im allgemeineren Sinne lässt sich auch das Resultat jedes „Verfahrens" auffassen.

Dirichlet hatte unmittelbar, ehe er mir die Eröffnung bezüglich seiner neuen Methode der Behandlung von Problemen der Mechanik machte, über seine vielfache Beschäftigung mit der Potentialtheorie gesprochen, und ich habe den Eindruck bekommen, als ob auch ein innerer Zusammenhang zwischen seinen Untersuchungen über diese Theorie und jenen Gedanken über die Behandlung mechanischer Probleme bestände.

In *Dirichlet*'s Papieren habe ich keine Andeutung über seine letzten Entdeckungen gefunden. Er pflegte eben fast keine schriftlichen Aufzeichnungen zu machen, ehe er an die für den Druck bestimmte Ausarbeitung ging.*) Ob etwa die auf ein weisses Löschblatt geschriebenen Worte:**) „Exposition d'une nouvelle methode de calculer les perturbations planetaires" als Entwurf eines Titels zu einer für die Mittheilung jener Entdeckungen bestimmten Abhandlung zu deuten sind, muss ich dahingestellt sein lassen.

---

*) „Die Klarheit und Bestimmtheit seines Denkens" — heißt es in der *Kummer*'schen Gedächtnissrede — „und die ungewöhnliche Kraft seines Gedächtnisses, vermöge deren er das einmal Gedachte und Erforschte zu jeder Zeit vollkommen gegenwärtig behielt, machten ihm den Gebrauch der Feder beim Arbeiten fast ganz entbehrlich."

**) Sie sind hier genau copirt; die Accente fehlen auch in der Urschrift.

PAUL DU BOIS-REYMOND

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 104, S. 352—354 (1889).

PAUL DU BOIS-REYMOND.

(Geboren in Berlin am 2. December 1831, promovirt an der Berliner Universität am 26. März 1859, Privatdocent in Heidelberg 1865—1868, ausserordentlicher Professor daselbst 1868—1870, ordentlicher Professor in Freiburg in Baden vom 28. Februar 1870 bis zum 15. März 1874, von da ab bis zum Herbst 1884 an der Universität zu Tübingen und seitdem an der Technischen Hochschule in Charlottenburg.)

Nur wenige Tage, nachdem der Druck der Abhandlung „Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ (S. 271 bis 301 dieses Bandes)[1]) vollendet war, hat den Verfasser der Tod ereilt. Er starb, auf der Durchreise nach Neuchâtel, in Freiburg in Baden am 7. April. Dass er in den letzten Monaten, wo die Krankheit, welcher er erlag, wohl schon weit vorgeschritten war, noch die geistige Spannkraft zur Veröffentlichung der umfangreichen Arbeit sich bewahrt hat, ist bewundernswerth. Es zeigte sich noch bei seiner letzten Publication, dass ihm die mathematischen Fragen stets Lebensfragen gewesen sind.

Er knüpft in dieser Abhandlung, wie er gleich im Anfange bemerkt, an die um ein Vierteljahrhundert zurückliegenden Untersuchungen an, welche er im Jahre 1864 unter dem Titel „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln (erstes Heft; die Theorie der Charakteristiken)“ als besonderes Werk herausgegeben hat. Schon kurze Zeit nach der Veröffentlichung dieses Werkes scheint *P. du Bois-Reymond* sich der andern Kategorie von Untersuchungen zugewandt zu haben, welcher der grösste Teil seiner nun folgenden Publicationen gewidmet ist. Denn die erste dieser Abhandlungen, zugleich eine seiner bedeutendsten, ist vom Februar 1868 datirt; sie ist im 69-sten Bande dieses Journals abgedruckt und hat den Titel „Über die allgemeinen Eigenschaften der Klasse von Doppelintegralen, zu welcher das *Fourier*'sche Doppelintegral gehört.“ Während er hierin zeigt, dass es ihm gelungen ist, den Kreis der seit *Fourier* und *Dirichlet* be-

1) *Crelle*, Journal f. d. r. u. angew. Math. Bd. 104, S. 271—301 (1889).

kannten Darstellungsformeln wesentlich zu erweitern, bringt eine zweite aus jener Reihe hervorzuhebende Abhandlung*) als Erfolg seiner darauf gerichteten Bestrebungen den Nachweis, dass die Anwendbarkeit solcher Darstellungsformeln nicht unbeschränkt ist. *P. du Bois Reymond* selbst bezeichnet auf S. IX der Einleitung zu dieser Abhandlung die dabei „gewonnene Einsicht“ nur als „vor der Hand wohl befriedigend“, und es wird hierdurch erklärlich, dass ihn die „dunkeln Fragen“, zu deren Aufhellung er eben beigetragen hatte, und die ihrer Natur nach wohl nicht eigentlich abgeschlossen werden können, noch lange beschäftigten, ja mit unwiderstehlicher Gewalt fesselten. Dass er aber gern davon loskommen wollte und sich danach sehnte, wieder in seine früheren Forschungsbahnen einzulenken, bezeugen seine Aeusserungen in einem an mich nach Florenz gerichteten Briefe vom 22. April 1886. Er schickte mir damit einen Separatabdruck seiner in den Sitzungsberichten der hiesigen Akademie (1886, XVIII) veröffentlichten Notiz „Ueber die Integration der Reihen“ und schrieb mit Bezug darauf: „Ihr Kriterium für $\lim\limits_{\varepsilon=0}\int\varphi(x,\varepsilon)dx=0$ habe ich nur angeführt, ohne es näher zu discutiren, wozu Zeit und Raum fehlte, werde dies aber in der ausführlicheren Mittheilung nachholen. Dann werde ich dieser Art Mathematik übrigens den Rücken kehren. Es stehen die Ergebnisse in zu ungünstigem Verhältnisse zur Anstrengung, und ausserdem regen sie nicht zu weiterem Forschen an; im Gegentheil, ihre Hauptwirkung ist, der Forschung in einer gewissen Richtung Einhalt zu thun, und das heisst, sehr brav gegen seinen Nächsten, aber zu uneigennützig gegen sich selbst handeln . . . Ich schreibe jetzt an meinem letzten Aufsatz in dieser Materie, den ich Sie ersuchen werde, im Jubelbande unterzubringen. Es handelt sich darin um den Stetigkeitsgrad und den Convergenzgrad in genauerer Durchführung und damit Zusammenhängendes, und dann geht es wieder mit Hurrah! an die partiellen Differentialgleichungen.“

Es ist darum als eine glückliche Fügung zu betrachten, dass die schon seit einiger Zeit von *P. du Bois-Reymond* gehegte Absicht, seine zum Theil aus älterer Zeit stammenden Aufzeichnungen über lineare partielle Differentialgleichungen zu einem druckfertigen Manuscript zu gestalten, im vorigen Jahre zur Ausführung gekommen, und dass es ihm noch vergönnt gewesen ist, die Reihe wertvoller Beiträge,

*) Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der *Fourier*schen Darstellungsformeln. Aus den Abhandlungen der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften II. Cl. XII. Bd. II. Abth. München 1876.

welche er diesem Journal zugewandt hat, mit einer wenigstens übersichtlichen Darstellung dessen, was das zweite Heft seiner „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen“ enthalten sollte, und damit auch in gewisser Weise dieses Werk selbst abzuschliessen.

In einem von Tübingen am 3. November 1881 an mich gerichteten Briefe findet sich folgende Stelle: „Nun ist Heine doch seiner hoffnungslosen Erkrankung erlegen. Ich bedaure ungemein, ihn nicht mehr unter den Lebenden zu wissen, und bewahre treu das Bild des freundlichen, wohlwollenden, bedeutenden Mannes. Er war einer von denen, für die man publicirt; denn es sind doch nur Wenige, an die man als an Leser von Urtheil und Nachsicht beim Niederschreiben seiner Geistesproducte denkt. Ein Glück ist es, dass sein Geschick ihm Zeit liess, die zweite Auflage seines Buches zu vollenden.“ Diese Worte sind ein schönes Zeugnis für die edle Gesinnung und die warme Empfindung des nunmehr auch Dahingeschiedenen beim Tode eines Fachgenossen; sie drücken auch am besten aus, was jetzt bei seinem Tode die überlebenden Fachgenossen bewegt.

SOPHIE VON KOWALEVSKY

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik,
Band 108, S. 88 (1891).

SOPHIE VON KOWALEVSKY.

Ich erfülle die traurige Pflicht, den Lesern dieses Journals von dem Hinscheiden der Frau *Sophie von Kowalevsky*, geb. *Corvin-Krukowskoy*, Kunde zu geben.

Sie wurde am 15. Januar 1851 zu Moskau geboren, verheirathete sich im Jahre 1868, erhielt 1874 in Göttingen, nachdem sie ein Jahr (1869/70) in Heidelberg und dann vier Jahre mit kurzen Unterbrechungen hier in Berlin, vornehmlich unter Herrn *Weierstrass'* Leitung, mathematischen Studien obgelegen hatte, auf Grund einer im 80. Bande dieses Journals abgedruckten Dissertation die Doctorwürde und im Jahre 1884 an der Universität Stockholm eine Professur.

Die letzte Ferienzeit im December vorigen und Januar dieses Jahres brachte Frau *von Kowalevsky* bei Verwandten in der Nähe von Nizza zu, hielt sich dann auf der Rückkehr einige Tage in Paris und in Berlin auf und reiste am Montag den 2. Februar von hier nach Stockholm ab. Dort erkrankte sie bald nach ihrer Ankunft an einer Pleuropneumonitis und erlag derselben am Dienstag den 10. Februar Morgens 4 Uhr. So ward sie schon im Alter von 40 Jahren viel zu früh der von ihr mit ausgezeichnetem Erfolge gepflegten Wissenschaft und dem grossen, ihr in Liebe und Verehrung zugethanen Freundeskreise entrissen.

Sophie von Kowalevsky (nach ihren letzten Visitenkarten „*Sonja Kovalevsky*"), verband mit einem ausserordentlichen Talent sowohl für allgemeine mathematische Speculation als auch für die bei der Ausführung specieller Untersuchungen nothwendige Technik gewissenhaften, unermüdlichen Fleiss, hielt bei intensivster Fachthätigkeit stets ihren Sinn für andere geistige Interessen offen, bewahrte dabei immer ihre Weiblichkeit und erwarb und erhielt sich darum im Verkehr auch die Sympathie derjenigen, die ausserhalb ihres fachwissenschaftlichen Kreises standen. Die Geschichte der Mathematik wird von ihr als einer der merkwürdigsten Erscheinungen unter den überhaupt äusserst seltenen Forscherinnen zu berichten haben. Ihr Gedächtniss wird durch die zwar nicht zahlreichen aber werthvollen Arbeiten, welche sie veröffentlicht hat, in der ganzen mathematischen Welt fortdauern, die Erinnerung an ihre bedeutende und dabei anmuthvolle Persönlichkeit wird in den Herzen aller derer fortleben, welche das Glück hatten, sie zu kennen.

* * *

Die Titel der sechs von Frau *von Kowalevsky* publicirten Abhandlungen lauten buchstäblich:

1. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen Facultät zu Göttingen von *Sophie v. Kowalevsky*, geb. *v. Corvin-Krukowskoy*. Berlin 1874 bei Georg Reimer. Abgedruckt im 80. Bande dieses Journals, S. 1—32.

2. Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse *Abel*scher Integrale 3ten Ranges auf elliptische Integrale, von *Sophie Kowalevski* in Stockholm. Acta Mathematica Bd. 4, S. 393—414. 1884.

3. Ueber die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln, von *Sophie Kowalevski* in Stockholm. Acta Mathematica Bd. 6, S. 249—304. 1885. Die Widmung eines Exemplars dieser Abhandlung, welches ich von der Verfasserin erhalten habe, trägt die Unterschrift „*Sophie v. Kowalevski*“.

4. Zusätze und Bemerkungen zu *Laplace*'s Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe. Von Frau *Sophie Kowalevski* in Stockholm. Astronomische Nachrichten Bd. 111, Nr. 2643, S. 37—48. 1885. Der Redaction überreicht von *Hugo Gyldén*.

5. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, par *Sophie Kowalevski* à Stockholm. Acta Mathematica Bd. 12, S. 177—232. 1889. (Auf S. 177 findet sich die Anmerkung: „Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24. décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.“)

6. Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, par *Sophie Kowalevski* à Stockholm. Acta Mathematica Bd. 14, S. 81—93. 1889.

VERZEICHNISS DER VON JACOBI GEHALTENEN VORLESUNGEN

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 108, S. 331—334.

VERZEICHNISS DER VON JACOBI GEHALTENEN VORLESUNGEN.

Um das Verzeichniss der von *Jacobi* gehaltenen Vorlesungen zu vervollständigen, habe ich mir noch das nöthige Material aus den Akten der *hiesigen* Universität verschafft, und da ein solches Verzeichniss unstreitig von hohem Interesse für die Geschichte der Mathematik ist, so lasse ich es hier folgen.

Jacobi's Vorlesungen in Berlin.

Wintersemester 1825/26.	Privatim: Ueber die Anwendung der höheren Analysis auf die Theorie der Oberflächen und Curven doppelter Krümmung.
Sommersemester 1826.	Publice: Die allgemeine Theorie der Gleichungen. Privatim: Reine Analysis.

In den Verzeichnissen der angekündigten und gehaltenen Vorlesungen, welche in der Universitäts-Registratur aufbewahrt sind, ist die Colonne, welche die Anzahl der Zuhörer enthalten soll, bei allen diesen *Jacobi*'schen Vorlesungen nicht ausgefüllt. Daneben findet sich — und zwar auch schon in dem Verzeichnisse von 1825/6 — der Vermerk, dass *Jacobi* nach Königsberg versetzt sei. Die Akten der Quästur reichen nur bis 1829 zurück. Es hat sich daher nicht aktenmässig feststellen lassen, ob *Jacobi* die Vorlesung im Winter 1825/6, welche in der *Dirichlet*schen Gedächtnissrede ausdrücklich als wirklich gehalten erwähnt wird, zu Ende geführt und ob er im Sommersemester 1826 überhaupt irgend eine Vorlesung gehalten hat.

Jacobi's Vorlesungen in Königsberg.

Wintersemester 1826/27.	Publice: Analytische Uebungen. Privatim: 1. Trigonometrie. 2. Analytische Geometrie.
Sommersemester 1827.	Publice: 1. Variationsrechnung. 2. Theorie der krummen Oberflächen. 3. Elementargeometrie.
Wintersemester 1827/28.	Publice: Kegelschnitte. Privatim: Elementargeometrie.

Sommersemester	1828.	Publice: Arithmetik.
Wintersemester	1828/29.	Publice: Theorie der Kegelschnitte.
Sommersemester	1829.	Nicht gelesen.
Wintersemester	1829/30.	Publice: Anfangsgründe der Theorie der elliptischen Transcendenten. Privatim: Theorie der Oberflächen der zweiten Ordnung.
Sommersemester	1830.	Publice: Allgemeine Theorie der Oberflächen und Curven.
Wintersemester	1830/31.	Publice: Kegelschnitte. Privatim: Höhere Arithmetik.
Sommersemester	1831.	Publice: Elliptische Transcendenten, achtstündig.
Wintersemester	1831/32.	Publice: Auserlesene Kapitel des höheren Calculs. Privatim: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung.
Sommersemester	1832.	Publice: Oberflächen zweiter Ordnung. Privatim: Allgemeine Theorie der Curven und Flächen.
Wintersemester	1832/33.	Publice: Allgemeine Theorie der Oberflächen (Fortsetzung). Privatim: Elliptische Transcendenten.
Sommersemester	1833.	Publice: Variationsrechnung. Privatim: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung.
Wintersemester	1833/34.	Privatim: Theorie der Zahlen.
Sommersemester	1834.	Privatim: Analytische Theorie der Wahrscheinlichkeit.
Wintersemester	1834/35.	Publice: 1. Theorie der partiellen Differentialgleichungen. 2. Wöchentliche Aufgaben im mathematischen Seminar. Privatim: Theorie der Oberflächen und Linien doppelter Krümmung.
Sommersemester	1835.	Publice: 1. Variationsrechnung. 2. Mathematisch-physikalisches Seminar*). Privatim: Oberflächen zweiter Ordnung*.

*) Die mit * bezeichneten Vorlesungen hat *Rosenhain* gehört.

Wintersemester	1835/36.	Publice: Uebungen des Seminars in der Mechanik*. Privatim: 1. Integralrechnung. 2. Vorlesungen über die elliptischen Transcendenten*. Hierbei findet sich der Vermerk: „Da die zehnstündigen Vorlesungen über die elliptischen Transcendenten die Kräfte der Zuhörer in hohem Grade in Anspruch nahmen, so hielt ich es für zweckmässig, die Uebungen des Seminars bereits Neujahr einzustellen. *C. G. J. Jacobi.*“
Sommersemester	1836.	Publice: Mathematisches Seminar*. Privatim: Allgemeine Theorie der Oberflächen*.
Wintersemester	1836/37.	Privatim: Zahlentheorie*.
Sommersemester	1837.	Publice: Mathematisches Seminar*. Hierbei findet sich der Vermerk: „Meine achtstündigen Privatvorlesungen über Variationsrechnung sind nicht zu Stande gekommen. *C. G. J. Jacobi.*“
Wintersemester	1837/38.	Publice: Seminar*. Privatim: 1. Variationsrechnung*. 2. Mechanik*.
Sommersemester	1838.	Publice: Mathematisches Seminar. Privatim: Anfangsgründe der analytischen Geometrie.
Wintersemester	1838/39.	Privatim: 1. Theorie der Oberflächen. 2. Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der Reihen.
Sommersemester	1839.	Hier ist vermerkt: „Hat nicht gelesen, weil er verreist war.“
Wintersemester	1839/40.	Privatim: Elliptische Transcendenten.[1])
Sommersemester	1840.	Publice: Mathematisches Seminar. Privatim: Allgemeine Theorie der Oberflächen und doppelt gekrümmter Linien.
Wintersemester	1840/41.	Publice: Mathematisches Seminar. Privatim: Höhere Mathematik.

1) Dies ist die einzige *Jacobi*'sche Vorlesung, welche *Borchardt* während seiner Studienzeit an der Königsberger Universität (26. April 1839 bis 6. Juni 1840), nach Ausweis seines Abgangszeugnisses, gehört hat. Er hat außerdem noch am mathematischen Seminar, wohl nur im Anfange des Sommersemesters 1840, theilgenommen.

Sommersemester 1841. Publice: Mathematisches Seminar.
Privatim: Variationsrechnung.

Wintersemester 1841/42. Publice: 1. Theorie der Differentialgleichungen. 2. Mathematisches Seminar.
Privatim: Theorie der Oberflächen und Curven.

Sommersemester 1842. Publice: 1. Differentialgleichungen. 2. Seminar.

Wintersemester 1842/43. Publice: Mathematisches Seminar.
Privatim: Analytische Mechanik[1]).

(In die Zeit vom Sommer 1843 bis zum Winter 1844/5 fällt *Jacobi*'s Reise nach Italien.)

Jacobi's Vorlesungen in Berlin.

Sommersemester 1845. Privatim: 1. Die Fundamente der Theorie der elliptischen Functionen, 28. April bis 15. August; 14 Zuhörer. 2. Algebra und Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 3. Mai bis 14. August; 25 Zuhörer.

Wintersemester 1845/46. Privatim: Differential- und Integralrechnung, 30. October bis 16. März; 23 Zuhörer.

Sommersemester 1846. Privatim: Die allgemeine Theorie der Oberflächen und Linien doppelter Krümmung, 4. Mai bis 24. Juli; 12 Zuhörer.

Wintersemester 1846/47. Privatim: Die Theorie der Zahlen.
Hierbei findet sich der Vermerk: „Ich habe meiner Gesundheit wegen die Vorlesung nicht gehalten. *Jacobi*."

Sommersemester 1847. *Jacobi* hat keine Vorlesung angekündigt und, nach den Akten der Quästur, auch keine Vorlesung gehalten.

Wintersemester 1847/48. *Jacobi* hat keine Vorlesung angekündigt aber, nach den Akten der Quästur, eine solche über analytische Mechanik vor 17 Zuhörern gehalten.

Sommersemester 1848. Privatim: Höhere Algebra, 10. Mai bis 11. August; 13 Zuhörer.

1) Diese Vorlesung hat, soviel ich glaube, ebenfalls *Borchardt* gehört. Er hatte sich zum Zwecke seiner Promotion nochmals nach Königsberg begeben.

Wintersemester 1848/49. Privatim: Differentialrechnung mit verschiedenen Anwendungen, vom 30. October an; 7 Zuhörer.
Hierbei findet sich der Vermerk: „Ich habe statt der angezeigten Vorlesung eine andere über elliptische Functionen gehalten." *Jacobi*.

Sommersemester 1849. Privatim: Variationsrechnung nebst Anwendung auf isoperimetrische Aufgaben, vom 30. April bis 8. August; 11 Zuhörer.

Wintersemester 1849/50. Privatim: Die allgemeine Theorie der Flächen und Curven doppelter Krümmung, 29. October bis 13. März; 11 Zuhörer.

Sommersemester 1850. Privatim: Zahlentheorie und ihre Anwendung auf die Kreistheilung, 30. April bis 14. August; 12 Zuhörer.

Wintersemester 1850/51. Keine Vorlesung angekündigt.

Jacobi starb am 18. Februar 1851.

AUSZUG AUS EINEM BRIEFE VON L. KRONECKER AN G. CANTOR VOM 18. SEPTEMBER 1891

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, I, S. 23—25 (1891).

AUSZUG AUS EINEM BRIEFE VON L. KRONECKER AN G. CANTOR.

Geehrtester Freund und College!

Gleich nach dem schweren, schweren Schlage, der das Glück meines Lebens zerstört hat, habe ich Ihnen geschrieben, dass ich nun natürlich nicht im Stande bin, am 21. d. M. den übernommenen Eröffnungsvortrag in der Abtheilung für Mathematik und Astronomie zu halten. Aber ich will Ihnen heute doch noch ein Paar Worte über dasjenige Thema sagen, was ich in dem Vortrage zu behandeln gedachte.

Einleiten wollte ich den Vortrag mit einigen Bemerkungen über das, was meiner Meinung nach von der „Vereinigung deutscher Mathematiker" erwartet werden kann. Denn, nachdem ich den ehrenvollen Antrag, den Sie mir gestellt haben, angenommen habe, glaubte ich, dem reinen Fachvortrage die Darlegung meiner Ansichten über Mathematiker-Vereinigungen gerade deshalb vorausschicken zu sollen, weil *deren* Bedeutung nothwendig eine ganz andere sein muss, als die der Vereinigungen anderer Fachgenossen. Während andere Disciplinen mancherlei Arbeiten erfordern, die den Bearbeitern „aufgegeben" werden können, und auch solche, die geradezu von vereinten Kräften geleistet werden müssen (die Astronomie bietet ja hierfür viele Beispiele), während es also in fast allen anderen naturwissenschaftlichen Disciplinen vorkommt, dass, „wenn die Könige bauen, die Kärrner zu thun haben", muss bei uns jeder Forscher König und Kärrner zugleich sein. Darum geben wir Mathematiker eigentlich das Beispiel einer echten Gelehrtenrepublik, in welcher jeder einzelne seine volle Forscherselbständigkeit bewahrt. Ich mag auch deshalb bei uns nicht den Ausdruck „Schüler" gern; wir wollen und brauchen keine Schule, sondern wir gehen nur in den Wegen fort, die uns ein Lehrer oder Vorgänger geebnet und gewiesen hat, wenn wir meinen, auf diesen Wegen weitere Ziele erreichen zu können. „Wir wollen und brauchen keine Schule", weil in unserer absolut klaren Wissenschaft jede neue Entdeckung die bisherige Schulweisheit wertlos machen kann. Das hat uns ja die Geschichte unserer Wissenschaft oft genug gezeigt. Wir können deshalb aber auch durchaus nichts Förderliches von einer in *der* Weise „gemeinsamen Arbeit" erwarten, die — wie die andern Disciplinen — sich mit speciellen Thematen beschäftigt. Im Gegenteil, solcherlei Arbeit kann nur den Fortschritt der Mathematik *hindern*. Der Mathematiker muss frei von jeglichem Vorurtheil sich gedanklich in seiner Forschungssphäre heimisch machen, darin frei Umschau halten und Entdeckungen nachgehen; — eine Gesellschaft, etwa gar geführt von einem noch so trefflichen Lehrer, wird niemals im Stande sein, das Gebiet unserer Kenntniss merklich zu erweitern. So sehr ich hiernach „Vereinigung von Mathematikern" zu *speziellen* Arbeitszwecken perhorresciren möchte, so sehr möchte ich einer allgemein freien Vereinigung das Wort reden. *Deren* Erfolg kann freilich nicht genau präcisirt werden, und auch an der Wortfassung der „Zwecke" in Ihrer Publication vom December 1890 würde ich manches modificirt wünschen. Aber es kommt wenig darauf an. Die Hauptsache ist die Gelegenheit zur Einleitung persönlicher Verbindungen, zur mündlichen Discussion, zum lebendigen Austausch der in der Forschung gemachten Erfahrungen, zur gegenseitigen Mittheilung der auf Grund von Untersuchungen erlangten Ansichten. Niemand wird ja Wert und Bedeutung der mündlichen Vorträge in der Mathematik auf den Hochschulen unterschätzen, wie sehr auch die Studirenden daneben auf das Studium der Lehrbücher, Originalwerke und Abhandlungen zu verweisen sind; denn in diesen fehlt es z. B. stets an den Angaben, welche Irrwege und „Holzwege" zu vermeiden sind. Nun hört ja der Mathematiker nicht zu studiren auf, wenn seine Studentenzeit abgelaufen ist; aber er ist dann ausschliesslich auf die litterarische Belehrung angewiesen, falls ihm nicht besonders glückliche Umstände noch die Fortsetzung mündlicher Belehrung durch persönlichen wissenschaftlichen Verkehr gestatten. Das Glück eines solchen habe ich in reichlichem Masse genossen und weiss es also aus Erfahrung zu schätzen; die etwa 20 Jahre von 1856 bis nahe 1876, in denen wir drei, *Kummer*, *Weierstrass* und ich, des engsten und lebhaftesten wissenschaftlichen Verkehrs uns erfreuten, haben nicht bloss uns selbst, sondern auch vielen andern, die ab und zu an unserem Verkehr teilnahmen, reiche Früchte und den Segen wahrer geistiger Erbauung gebracht. Ich sehe den Hauptzweck der „Vereinigung deutscher Mathematiker" darin, dass sie nach solchem Muster persönlichen wissenschaftlichen Verkehr ermöglicht. Wie verschieden wir drei Berliner Mathematiker auch in unseren Arbeitsrichtungen, ja selbst zum Theil in unseren Ansichten über Begründung und Zielpunkte gewesen und geblieben sind, der gegenseitige Einfluss war stets heilsam und wohlthuend.

Doch genug davon! Sie ersehen ja aus Vorstehendem den ungefähren Inhalt der einleitenden Bemerkungen, die ich meinem Eröffnungsvortrage vorausschicken wollte. Der Vortrag selbst sollte kurzweg den Titel haben „Über Eisenstein" oder auch „Zum Gedächtniss von Eisenstein". Ich wollte darin nur ganz kurz über die Zeit berichten, in der ich mit ihm persönlich bekannt war, auch einige Briefe wissenschaftlichen Inhalts, die ich von ihm besitze, mitteilen und danach — wie etwa in einer Gedenkrede — über seine Arbeiten sprechen. Dabei müssten dann ausser den rein arithmetischen und analytisch-arithmetischen noch ganz besonders seine rein analytischen Untersuchungen über elliptische Functionen hervorgehoben werden, welche dem Bewusstsein der Jetztzeit ganz abhanden gekommen sind, auf welche ich aber bei *meinen* neuesten Arbeiten habe zurückkommen müssen. Jetzt in diesen meinen Arbeiten haben sich die eigentlichen Ursachen der „Unebenheiten" gefunden, welche Eisenstein in seiner Theorie — wie sich deutlich erkennen lässt — unangenehm aufgefallen sind. Auch *hierauf* wollte ich näher eingehen. Ich hoffe, die Ausarbeitung des ganzen Vortrags, für den ich bis jetzt nur einige vorläufige Aufzeichnungen gemacht habe, noch durchführen zu können. Falls dies geschieht, kann der Vortrag vielleicht, wenn es Ihnen und der mathematischen Abtheilung, welcher Sie präsidiren, angemessen erscheint, mit den wirklich gehaltenen Vorträgen (unter Hinzufügung einer geeigneten Vorbemerkung) gedruckt werden. Auch stelle ich Ihnen anheim, aus diesem Briefe, soviel Sie davon für geeignet halten, der mathematischen Abtheilung auszugsweise mitzutheilen. Jedenfalls bitte ich, meine collegialischen Grüsse in einer der Verhandlungen auszurichten und dabei meinem tiefen Bedauern Ausdruck zu geben, dass ich durch mein Unglück am persönlichen Erscheinen verhindert bin.

SUR LES UNITÉS COMPLEXES

PAR

M. J. MOLK.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques 2e série, t. VII; 1883. p. 133—136.

SUR LES UNITÉS COMPLEXES.[1]

M. Kronecker vient de communiquer à l'Académie des Sciences un Mémoire *Sur les unités complexes (Comptes rendus, 8, 15, 22 janvier 1883)*. Les recherches de Lejeune-Dirichlet y sont développées et présentées sous un jour tout mouveau. Mais *M. Kronecker* ne se contente pas de démontrer le théorème énoncé par Lejeune-Dirichlet, en 1846; il approfondit les recherches auxiliaires faites par le grand géomètre en 1842, et parvient ainsi à la notion importante de réduction approximative des équations algébriques.

On peut, cependant se proposer d'obtenir directement les résultats concernant les unités complexes seulement. Ils se déduisent d'un théorème fondamental énoncé à la fin du nº 9 du Mémoire cité; il suffit donc de démontrer ce théorème. En se plaçant à ce point de vue les recherches se simplifient beaucoup. On abandonne, il est vrai, le point de vue général auquel *M. Kronecker* s'est placé et l'on perd ainsi l'uniformité des développements qui fait ressortir l'esprit même des méthodes employées; mais le mécanisme des formules est par contre moins compliqué.

Je me propose d'exposer le plus simplement possible la démonstration abrégée de *M. Kronecker*.

Soient

$$z_\alpha = x_\alpha + y_\alpha i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

les n racines d'une équation irréductible, à coefficients réels et entiers;

$$z', z'', \ldots, z^{(n)}$$

un système fondamental d'une *espèce* de nombres algébriques entiers du genre z, par exemple $z^{n-1}, z^{n-2}, \ldots, z, 1$; et

$$u_\alpha + v_\alpha i = (w, z_\alpha) = w' z'_\alpha + w'' z''_\alpha + \cdots + w^{(n)} z^{(n)}_\alpha$$

une fonction linéaire et homogène à coefficients entiers de $z'_\alpha, z''_\alpha, \ldots, z^{(n)}_\alpha$. Supposons que l'équation ait $2\varkappa$ racines imaginaires et posons $h = n - \varkappa$.

[1]) Vgl. Zusatz 37 am Ende dieses Bandes.

Il peut se présenter trois cas. L'équation peut n'avoir aucune racine réelle, ou une seule, ou au moins deux.

Dans ce dernier cas, z_{n-1} et z_n étant deux racines réelles, on peut exprimer les nombres $w^{(k)}$ en fonctions linéaires et homogènes de deux d'entre eux et des $u_\alpha, v_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n-2)$, les coefficients étant des fonctions rationelles réelles des x_α et $y_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n-2)$.

Nous pouvons donc écrire

$$w^{(k)} = \xi_1^{(k)} w' + \xi_2^{(k)} w'' + \varrho^{(k)} \qquad (k=3, 4, \ldots, n$$

en désignant par $\varrho^{(k)}$ des fonctions linéaires et homogènes des $(n-2)$ quantités u_α et v_α, dont les coefficients sont fonctions rationnelles réelles des x_α et y_α. Mais, quelles que soient les valeurs que nous donnions à w' et w'', nous pourrons toujours prendre pour $w^{(k)}$ le nombre entier le plus rapproché de $\xi_1^{(k)} w' + \xi_2^{(k)} w''$; nous pouvons donc supposer que chaque $\varrho^{(k)}$ est en valeur absolue au plus égal à $\frac{1}{2}$. D'ailleurs, en remplaçant $w^{(k)}$ par l'expression précédente, nous obtenons

$$(w, z_n) = w' z_n' + w'' z_n'' + \sum_{k=3}^{n} (\xi_1^{(k)} w' + \xi_2^{(k)} w'' + \varrho^{(k)}) z^{(k)}.$$

Si nous supposons que w' et w'' prennent toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, t$, nous obtenons $(t+1)^2$ expressions (w, z_n), toutes plus petites, en valeur absolue, que $At + B$, où

$$A = \left| z_n' + \sum_{k=3}^{n} \xi_1^{(k)} z_n^{(k)} \right| + \left| z_n'' + \sum_{k=3}^{n} \xi_2^{(k)} z_n^{(k)} \right|, \text{ et } B = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n} \left| z_n^{(k)} \right|.$$

Nous partageons l'intervalle compris entre $-(At+B)$ et $At+B$ en t^2 parties égales. Il y aura alors nécessairement une de ces parties contenant les valeurs de deux au moins des expressions (w, z_n); désignons ces dernières par (w_0, z_n) et (w_1, z_n) et formons leur différence,

$$(b, z_n) = b' z_n' + b'' z_n'' + \cdots + b^{(n)} z_n^{(n)};$$

$|(b, z_n)|$ est plus petit que $\frac{2(At+B)}{t^2}$;

$$b^{(k)} = w_0^{(k)} - w_1^{(k)} = \xi_1^{(k)} b' + \xi_2^{(k)} b'' + \sigma^{(k)};$$

$|b'|$ et $|b''|$ ne dépassent pas $2t$ et $\sigma^{(k)}$ étant la différence de deux $\varrho^{(k)}$ ne dépasse pas l'unité.

Mais $|(b, z_{n-1})|$ est plus petit que $2(A't + B')$, où A' et B' sont formés à l'aide de z_{n-1} de la même manière que A et B à l'aide de z_n. Nous obtenons donc l'inégalité

$$|(b, z_{n-1})(b, z_n)| < \frac{4(At+B)(A't+B')}{t^2} < 4AA' + 1$$

pour des t suffisamment grands.

D'autre part, les quantités $\sigma', \sigma'', \ldots, \sigma^{(n-2)}$ étant comprises entre (-1) et $(+1)$, nous savons que les valeurs de $(n-2)$ fonctions linéaires et homogènes des $(n-2)$ parties réelles et imaginaires de $(b, z_1), (b, z_2), \ldots, (b, z_{n-2})$, sont comprises entre des limites finies, indépendantes de t; il en résulte que les valeurs de $(b, z_1), (b, z_2), \ldots, (b, z_{n-2})$ sont elles-mêmes comprises entre des limites finies. Comme nous avons déjà démontré que le produit $|(b, z_{n-1})(b, z_n)|$ est plus petit que $4AA' + 1$, nous voyons donc que la norme de (b, z) est également plus petite qu'un nombre indépendant de t.

Remarquons que, parmi les $(n-2)$ expressions $(b, z_1), (b, z_2), \ldots, (b, z_{n-2})$, $(h-2)$ seulement sont différentes en valeur absolue.

Après avoir trouvé un système $b_1', b_1'', \ldots, b_1^{(n)}$, pour lequel $|(b_1, z_n)| < \frac{2(At_1+B)}{t_1^2}$, nous pouvons en former un second $b_2', b_2'', \ldots, b_2^{(n)}$, pour lequel $|(b_2, z_n)|$ est plus petit que $\frac{2(At_2+B)}{t_2^2}$; en choisissant t_2 assez grand $|(b_2, z_n)|$ sera plus petit que $|(b_1, z_n)|$, et par suite les deux systèmes $b_1', b_1'', \ldots, b_1^{(n)}$ et $b_2', b_2'', \ldots, b_2^{(n)}$ seront différents.

Il existe donc une infinité de nombres complexes (b, z) dont la norme et $(h-2)$ conjugués en valeur absolue sont compris entre des limites finies.

Dans les deux premiers cas il suffit de modifier légèrement la démonstration pour parvenir au même résultat. Si l'équation n'a qu'*une* racine réelle z_n, et si z_{n-1} et z_{n-2} sont imaginaires conjuguées, nous prendrons, dans les formules précédentes, α égal à $1, 2, \ldots, (n-3)$; nous exprimerons ensuite les $w^{(k)}$ en fonction de *trois* d'entre eux, et nous obtiendrons ainsi une expression (b, z_n) ne depassant pas, en valeur absolue, $\frac{2(At+B)}{t^3}$, tandis que le produit $(b, z_{n-1})(b, z_{n-2})$ est proportionnel à t^2. Si enfin toutes les racines de l'équation sont imaginaires et si z_n, z_{n-1} sont conjuguées, ainsi que z_{n-2}, z_{n-3}, nous prendrons, dans les formules précédentes, α egal à $1, 2, \ldots, n-4$, nous exprimerons les $w^{(i)}$ en fonction de *quatre* d'entre eux, et nous obtiendrons ainsi $\left|(b, z_n)(b, z_{n-1})\right| < \frac{4(At+B)^2}{t^4}$ et $(b, z_{n-2})(b, z_{n-3})$ proportionnel à t^2. Dans ces deux cas, nous voyons donc que $|(b, z_n)(b, z_{n-1})|$ et les $h-2$ premières expressions différentes $|(b, z_\alpha)|$ sont comprises entre des limites finies.

Le théorème précédent est ainsi complètement démontré. On en déduit immédiatement qu'il existe une infinité de nombres complexes ayant même norme et congrus entre eux suivant cette norme; en formant le quotient de deux de ces nombres, nous obtenons des unités complexes dont $(h-2)$ conjuguées en valeur absolue sont comprises entre des limites déterminées par celles des (b, z_n).

Il existe donc dans chaque espèce de nombres algébriques un nombre infini d'unités ayant chacune en valeur absolue toutes ses conjuguées, à l'exception de deux, comprises entre des limites finies.

ZUSÄTZE ZUM FÜNFTEN BANDE.

1. S. 3. Diese Abhandlung bildet die unmittelbare Fortsetzung der am Ende des vierten Bandes dieser Ausgabe abgedruckten Abhandlung über elliptische Funktionen.

2. S. 16. Die Richtigkeit der hier gemachten Annahme (vgl. auch diesen Band, S. 303—309) über die Konvergenz der Reihe $\sum \frac{\log p}{p - \left(\frac{-\Delta_0}{p}\right)}$ ist erst später durch die Untersuchungen von *Hadamard, de la Vallée Poussin* und *Landau* erwiesen worden, vgl. *Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. I, S. 469.

3. S. 17. Über die Abhängigkeit zwischen m und n in dieser Grenzformel vgl. diesen Band S. 305.

4. S. 27. Die hier in Aussicht gestellte Bearbeitung der Theorie der quadratischen Formen in der von *Kronecker* eingeführten Bezeichnungsweise ist weder erschienen, noch befindet sie sich in *Kronecker*'s Nachlaß. Eine Darstellung findet man bei *Seguier* „*Formes quadratiques et multiplication complexe*" S. 33 f. und *Weber*, Algebra III, S. 376 f. Für die hier aufgestellte Behauptung vgl. besonders *Seguier* loc. cit. S. 53.

5. S. 30. Für die Ableitung der Gleichung (5) vgl. auch *Seguier* loc. cit. S. 119—121.

6. S. 53. Da c_0 hier reell ist, so hat man $(\sqrt{c_0}) = \left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right|$ (vgl. Bd. IV, S. 352 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken).

7. S. 132.

8. S. 161.

9. S. 184.

Die großen Abhandlungen „Zur Theorie der elliptischen Funktionen" und „Die *Legendre*'sche Relation" brechen beide ab mit der Bemerkung „Fortsetzung folgt", die erste am 31. Juli 1890, die zweite am 30. Juli 1891. Die geplante Fortführung beider Arbeiten und ihr Abschluß wurde durch die schwere Erkrankung *Kronecker*'s und durch seinen Tod (am 29. Dezember 1891) verhindert. Leider findet sich auch in seinem Nachlasse kein Material, durch das Fortsetzung und Schluß dieser Abhandlungen festgestellt werden konnte. Das gleiche gilt auch für die auf S. 161 in Aussicht gestellte weitere Mitteilung zur Theorie der elliptischen Funktionen.

10. S. 192. Für den hier bewiesenen Satz vgl. auch *Henrik Petrini*, Acta Math. Bd. 31, S. 181—188.

11. S. 197. Vgl. die Darstellung in *Kronecker's Vorlesungen über einfache und mehrfache Integrale*, S. 219 f.

12. S. 197. Der Beweis der Formel (B), die sich für den Fall der Zetafunktion schon bei *Riemann* findet, ist auch hier mehr formaler Natur, da keine Bedingungen für die Reihe $f(z)$ angegeben sind, die die gliedweise Integration rechtfertigen würden. Auch die folgenden allgemeinen Ausführungen, die sich übrigens wesentlich auf den Fall eines endlichen Integrationsintervalles beziehen, bringen keine Abhilfe.

Eine befriedigende Begründung der Formel (B) gibt *Perron*, *Journal f. d. r. u. angew. Mathematik*, Bd. 134, S. 95f. bes. § 4; vgl. auch *Hadamard*, *Rendic. Palermo*, Bd. 25, S. 326 f. Auch die folgenden Betrachtungen haben mehr formalen Charakter, da keine Gültigkeitsbedingungen für die aufgestellten Formeln angegeben sind.

13. S. 212. Man vergleiche für die ganze Abhandlung auch die Darstellung in den im Zusatz 11 zitierten Vorlesungen *Kronecker*'s.

14. S. 239. Die einfache Bemerkung über das Verschwinden des Integrals (B) für $\sigma \to 0$ unter der Voraussetzung $\lim\limits_{x \to 0} f_0(x) = 0$ und ihre Nutzbarmachung für die Untersuchung des Integrals (A) scheint hier zum ersten Male in der Literatur vorzukommen. Sie wurde später insbesondere von *Lebesgue* zum Teil unter allgemeineren Bedingungen, mit Erfolg beim Beweise zahlreicher Sätze benutzt.

15. S. 241. Im wesentlichen dieselbe Tranformation zu (C') oder (D) (deren Grundgedanken auf *Lipschitz* zurückgeht) führt auch *Lebesgue*, *Math. Ann.* 61, S. 260 oder Leçons sur les series trigonometriques durch zur Ableitung des nach ihm benannten Konvergenzkriteriums für die *Fourier*'sche Reihe, so daß die Entwicklungen bei *Lebesgue* (abgesehen von der allgemeineren Fassung des Integralbegriffs und der verallgemeinerten Bedingung $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_0^h |f_0(x)|\, dx = 0$ statt der im Text vorausgesetzten $\lim\limits_{x \to 0} f_0(x) = 0$) sich nur in einer mehr formalen Wendung von denen *Kronecker*'s unterscheiden. — Zu der Abhandlung von *Kronecker* vgl. auch *Broden*, Math. Ann. 52, S. 177.

16. S. 294. Die Fortsetzung dieser Arbeit bildet die Abhandlung „*Über eine summatorische Funktion*". Dieser Band, S. 343—359.

17. S. 297. Vgl. zu dieser Abhandlung die im Zusatz 11 zitierten Vorlesungen von *Kronecker* S. 37—51, insbesondere § 7 der 3. Vorlesung. Allerdings sind hier die Voraussetzungen über die Funktion $f(x, y)$ nicht mit der wünschenswerten Präzision hervorgehoben.

18. S. 307. Die Aussage „et même pour $\varrho = 0$" ist hier so zu verstehen, daß nicht die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k}$ gemeint ist, sondern die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{\varrho \to 0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^{1+\varrho}}$.

19. S. 307. Die Bedingung (A) ist mit der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k}$ gleichbedeutend.

20. S. 308. Die Bedingung (A) läßt sich in dem hier angeführten Fall auf die Form bringen: $\lim\limits_{x \to \infty} \left\{ \sum\limits_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} - \lg x \right\}$ existiert und ist also im wesentlichen mit dem Primzahlsatz äquivalent; vgl. *Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. I, S. 197.

21. S. 308. Für die Abhängigkeit zwischen m und n vgl. die vorhergehenden Ausführungen auf S. 305.

22. S. 323. Vgl. hierzu auch die Ausführungen *Kronecker*'s dieser Band, S. 364f. und 369.

23. S. 331. Für die Formel (B') vgl. die im Zusatz 11 zitierten Vorlesungen von *Kronecker* S. 161—162.

24. S. 340. Zu den literarischen Notizen vgl. die Ausführungen von *E. Lindelöf* in „Sur le calcul des residus et ses applications à la théorie des fonctions", insbesondere die Angaben über die Arbeiten von *Cauchy*, *Schaar* und *Genochhi*.

25. S. 370. Diese Vorlesung ist in dem Sitzungsberichte (vgl. Zusatz 26) nicht angeführt.

26. S. 370. Diese Abhandlung ist nach ihrer Veröffentlichung in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie nochmals im Journal für Mathematik Bd. 108, S. 325—334 abgedruckt worden, und zwar mit einem Zusatz, der genaue Angaben über *alle* von *Jacobi* gehaltenen Vorlesungen enthält. Dieser Zusatz befindet sich im vorliegenden Bande auf S. 487—493.

27. S. 375. Vgl. auch *L. Kronecker*, Einfache und vielfache Integrale, 16. Vorlesung S. 267 f.

28. S. 401. In der Note von *A. H. Anglin*, Edinburgh, wird der Divisionsrest von x^{m+p} durch eine ganze Funktion $m$ten Grades $\mathfrak{F}(x)$ durch gewisse symmetrische Funktionen der Wurzeln von $\mathfrak{F}(x) = 0$ dargestellt.

29. S. 401. Ist:

$$\mathfrak{F}(x) = \prod_{i=1}^{i=m} (x - x_i) = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \mathfrak{f}_k x^{m-k} \qquad (\mathfrak{f}_0 = 1),$$

und ist allgemein:

$$\mathfrak{S}_{n-m} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{x_i^{n-1}}{\mathfrak{F}'(x_i)},$$

so folgen unmittelbar aus der *Lagrange*'schen Interpolationsformel die Rekursionsgleichungen

$$\text{(A)} \qquad \sum_k (-1)^k \mathfrak{f}_k \mathfrak{S}_{n-k} = \delta_{0r} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots m, \text{ jedoch mit der Bedingung} \\ k \leqq r;\ \delta_{00} = 1,\ \delta_{0r} = 0, \text{ falls } r > 0 \text{ ist.} \end{pmatrix}$$

30. S. 405. Diese von *Kronecker* in der Römischen Akademie vorgetragene Abhandlung ist nicht gedruckt worden. In *Kronecker*'s Nachlaß hat sich kein Entwurf zu derselben und keine auf sie bezügliche Notiz vorgefunden.

31. S. 413. Diese Abhandlungen wurden im *Journal de Mathématiques pures et appliquées, Sér. II, t. I, p. 385—400 (1856)* unter den folgenden Titeln veröffentlicht:

1. Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de *Bernoulli* (Bd. IV, S. 17—24 dieser Ausgabe von *Kronecker*'s Werken).
2. Sur une formule de *Gauss* (Bd. IV, S. 171—176).
3. Démonstration de l'irréductibilité de l'équation $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ où n dénote un nombre premier (Bd. I, S. 99—102).
4. Démonstration d'un théorème de *M. Kummer* (Bd. I, S. 93—99).

32. S. 435. Die Preisfragen für den *Steiner*-Preis der Jahre 1868, 1882 und 1884 sind von *Kronecker* gestellt worden und die Beurteilung der für die beiden ersten Jahre eingereichten Arbeiten rührt von ihm her.

33. S. 445. Dieser Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste rührt von Herrn *Zeller*, Bezirksschulinspektor und Pfarrer zu *Weiler* bei *Schorndorf* in Württemberg her; er wurde durch *G. Reuschle* in Stuttgart der Berliner Akademie eingesandt und ihr von *Kronecker* in der hier gegebenen vereinfachten Darstellung am 16. Dezember 1872 vorgelegt.

34. S. 453. Dieser Brief wurde drei Jahre nach dem Tode *Kronecker*'s durch *Frobenius* am 14. Februar 1895 der Berliner Akademie vorgelegt.

Er ist ein wichtiges Dokument für die Frage, in welchem Umfang Kronecker Einsicht in diejenige Tatsache gehabt hat, die man heute — eben nach den Anfangszeilen dieses Briefes — den „Kronecker'schen Jugendtraum" nennt. Es ist das der Satz, daß die über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper Abel'schen Gleichungen **durch die Transformationsgleichungen elliptischer Funktionen mit singulären Moduln** ebenso erschöpft werden, wie die über dem rationalen Zahlkörper Abel'schen Gleichungen durch die Kreisteilungsgleichungen. Die gesperrt gedruckten Worte, deren Kronecker sich in dem hier besprochenen Brief (nachstehend kurz als „Brief" zitiert) bedient, lassen nämlich drei Auslegungen zu:

(a.) Es sind **nur** die Gleichungen für die Transformation der **elliptischen Modulfunktionen** im singulären Falle, d. h. für imaginär-quadratisches Periodenverhältnis gemeint. — Dazu sind dann noch die, gewissermaßen auf niederer Stufe stehenden, Kreisteilungsgleichungen hinzuzunehmen.

(b.) Es sind **außerdem** auch die Gleichungen für die Transformation der **elliptischen Funktionen selbst** im singulären Falle gemeint. — Die Kreisteilungsgleichungen sind dann überflüssig.

(c). Es sind **nur** die Gleichungen für die Transformation der **elliptischen Funktionen selbst** gemeint.

Die in Rede stehende Tatsache ist, wie man heute weiß, **nicht allgemein richtig** bei der Auslegung **(a.)**, **allgemein richtig** bei der Auslegung **(b.)**, und bis heute unentschieden bei der Auslegung **(c.)**.

Als weitere Stellen in Kronecker's Schriften, an denen er auf das Jugendtraum-Theorem zu sprechen kommt, seien angeführt:

1. Berliner Monatsberichte 1853 = Werke **4**, S. 11. — Hier wird das Theorem zum erstenmal angedeutet, im Anschluß an die Aufstellung des entsprechenden einfacheren Theorems über die Kreisteilungsgleichungen. Die Formulierung gibt keinerlei Handhabe zur Entscheidung zwischen den Auslegungen **(a.)**, **(b.)**, **(c)**.

2. Berliner Monatsberichte 1877 = Werke **4**, S. 70, XI. — Diese Stelle wird für die Auslegung entscheidend heranzuziehen sein (nachstehend mit „A" zitiert).

Daß die Auslegung **(c.)** gewiß nicht in Frage kommt, dürfte über jedem Zweifel erhaben sein, und es hat auch bisher niemand diese Auslegung für Kronecker in Anspruch genommen. Ist doch sowohl im weiteren Verlaufe des „Briefes" als auch im Anschluß an die Aufstellung des Jugendtraum-Theorems in „A" ganz eindeutig unter anderem auch die Rede von den **singulären Moduln**, also von den Wurzeln der in **(a.)** genannten Gleichungen. Es bleiben demnach die beiden Auslegungen **(a.)** und **(b.)** gegeneinander abzuwägen, eine Frage, deren Entscheidung aus historischer Gerechtigkeit ganz besonders angelegentlich deshalb anzustreben ist, weil wie gesagt Kronecker bei der Auslegung **(a.)** ein **unrichtiges**, bei der Auslegung **(b.)** aber ein **richtiges** Theorem ausgesprochen hätte.

Die Auslegung **(a.)** findet sich zuerst bei *Hilbert* [Über die Theorie der relativ quadratischen Zahlkörper, Jahresbericht der D. M.-V. 6 (1899), S. 94] ausgesprochen, allerdings nicht mit besonderer Betonung der Auslegung **(b.)** gegenübergestellt. An einer späteren Stelle [Mathematische Probleme (Pariser Vortrag 1900), Göttinger Nachrichten 1900, S. 277] führt dann Hilbert das Jugendtraum-Theorem genau mit dem eingangs gesperrt wiedergegebenen Wortlaut aus dem „Brief" an, gibt aber durch den nachfolgenden Singular **die elliptische Funktion** wiederum zu erkennen, daß er die Auslegung **(a.)** im Auge hat; denn bei der Auslegung **(b.)** handelt es sich um zwei verschiedene elliptische Funktionen, **die elliptische Modulfunktion und die eigentliche elliptische Funktion**. (Diese Stelle kann man nicht etwa geltend machen, um Hilbert die Auslegung **(c.)** zuzuschreiben; denn daß man die elliptische Modulfunktion gelegentlich auch einfach als elliptische Funktion bezeichnet, ist ein zwar mißverständlicher aber nachweisbarer und an dieser Stelle dem Zusammenhang nach zweifellos vorliegender Sprachgebrauch —, der übrigens in dieser Auseinandersetzung aus Gründen der Klarheit sorgsam vermieden wird.)

Im Anschluß an Hilbert hat dann *Fueter* [Die Theorie der Zahlstrahlen I und II, Journal für Mathematik **130** (1905) und **132** (1907)] Kronecker die Auslegung **(a.)** zugeschrieben [I, S. 197] und einen Beweis für das — bei dieser Auslegung nicht allgemein richtige — Jugendtraum-Theorem gegeben, von dessen Nichtstichhaltigkeit im Falle geraden Relativgrades er sich dann später [Abel'sche Gleichungen in quadratisch-imaginären Zahlkörpern, Mathematische Annalen **75** (1914)] überzeugen mußte.

Unter dem Einfluß der Auslegungen Hilbert's und Fueter's wurde die Auslegung **(a.)** dann auch von *Hasse* [Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der D. M.-V. **35** (1926), S. 41 und 43] betont ausgesprochen, ohne sich dabei allerdings durch Einsichtnahme in die Kronecker'schen Originalstellen orientiert zu haben.

In der richtigen, der Auslegung **(b.)** entsprechenden Form wurde das Jugendtraum-Theorem bewiesen von *Takagi* [Über eine Theorie des relativ-Abel'schen Zahlkörpers, Journal of the College of Science, Tokyo **41** (1920)], *Hasse* [Neue Begründung der komplexen Multiplikation, Journal für Mathematik **157** (1926)] und *Fueter* [Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen II (1927)].

Die Entscheidung zwischen den Auslegungen **(a.)** und **(b.)** ist deshalb so schwierig, weil sich einerseits die Transformation der elliptischen Modulfunktionen auch auf dem Umwege über die Transformation der eigentlichen elliptischen Funktionen herleiten läßt, während andrerseits auch die völlig eindeutig zur Auslegung **(b.)** gehörigen Multiplikationsgleichungen der elliptischen Funktionen (insbesondere die Gleichungen der komplexen Multiplikation!) als Transformationsgleichungen auffaßbar sind. Beide Umstände waren Kronecker nicht nur geläufig, sondern bildeten geradezu Kernpunkte seiner Untersuchungen, wie aus „A", S. 71 und der Stelle S. 456 oben im Brief zu entnehmen ist, und wie es Kronecker an einer weiteren wichtigen Stelle [Berliner Monatsberichte 1886, Mitteilung XI, § 14 = Werke **4**, S. 440] mit aller Klarheit ausspricht. Man kann also aus der Anwendung des Wortes Transformationsgleichungen, selbst wenn der elliptischen Funktionen dabeisteht, nicht entscheiden, ob die heute gewöhnlich so genannten Transformationsgleichungen der elliptischen Modulfunktionen gemeint sind (Auslegung **(a.)**) oder die mit den Multiplikationsgleichungen der eigentlichen elliptischen Funktionen identischen Transformationsgleichungen (Auslegung **(b.)**).

Es bieten sich nun aber sowohl im „Brief" als auch an weiteren Stellen andere Anhaltspunkte für die zu treffende Entscheidung.

Gegen die Auslegung **(a.)** spricht zunächst, daß Kronecker an keiner Stelle auch nur andeutet, daß außerdem die Kreisteilungsgleichungen in Betracht zu ziehen sind. Ohne dies

wäre aber das Jugendtraum-Theorem so grob falsch, wie man es Kronecker einfach nicht zutrauen kann. Bei der Auslegung **(b.)** fällt diese Schwierigkeit ganz weg, weil ja da die Kreisteilungsgleichungen nicht nötig sind.

Im „Brief" ferner geht Kronecker nach Ausspruch des Jugendtraum-Theorems zunächst des weiteren auf die vorbereitenden Grundlagen für dessen Beweis ein. Es handelt sich dabei um die arithmetischen Eigenschaften der Wurzeln der fraglichen Gleichungen. Der Verweis auf Jacobi, der ausgesprochene Satz über die Koeffizienten der Transformationsgleichungen, der Verweis auf „A" lassen keinen Zweifel, daß es sich hier um diejenige fundamentale Relation handelt, die Kronecker dann einige Jahre später in seiner großen Mitteilungsserie zur Theorie der elliptischen Funktionen in aller Ausführlichkeit entwickelt hat [Berliner Monatsberichte 1886, Mitteilung XI, § 14 = Werke **4**, S. 439, (63) und (64)] und die er dort gleich anschließend als den Hauptzielpunkt seiner vorstehenden Entwicklungen bezeichnet. Es ist das jene Kongruenz, die sich aus der Betrachtung der Transformation der elliptischen Funktion „sin am" ergibt, die in höchst origineller Weise die Grundtatsache für die Anwendung der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen auf die Arithmetik schon für variables Periodenverhältnis, also ohne erst zum singulären Fall überzugehen, zum Ausdruck bringt — insofern ist Fueter's Bemerkung im Vorwort S. IV oben zu Band I (1924) des oben zitierten Buches richtig zu stellen, wo behauptet wird, Kronecker habe in seiner Mitteilungsserie zur Theorie der elliptischen Funktionen nur den Fall reeller Multiplikatoren behandelt —, es ist das also jene Kongruenz, in der dann die Herleitung des Zerlegungsgesetzes für die Primideale und der Irreduzibilitätsbeweis, zwei der hauptsächlichsten arithmetischen Anwendungen der Theorie, wurzeln. Auf diese Anwendungen jener Kongruenz weist dann Kronecker im „Brief" ausdrücklich, und andeutungsweise auch bei der späteren ausführlichen Darstellung hin.

Wenn er dann im Brief fortfährt: Soweit es sich um die singulären Moduln selber handelt, die auch als Perioden der Wurzeln solcher Transformationsgleichungen aufgefaßt werden können ... (Perioden ist offenbar eine ungenaue Abkürzung für mit den Perioden in umkehrbarem Zusammenhang stehende Größen), so läßt die Einleitung dieses Satzes klar erkennen, daß Kronecker neben den singulären Moduln noch andere Wurzeln von Transformationsgleichungen im Auge hatte.

Das geht auch mit nicht zu überbietender Deutlichkeit aus der Formulierung des Jugendtraum-Theorems in „A" hervor. Dort stellt Kronecker zunächst fest, daß die Gleichungen, deren Wurzeln singuläre Moduln von elliptischen Funktionen oder elliptische Funktionen selbst sind, deren Moduln singulär und deren Argumente in rationalem Verhältnis zu den Perioden stehen —, daß also diese Gleichungen Abel'sche Gleichungen in einem imaginär-quadratischen Zahlkörper sind. Unmittelbar anschließend spricht er dann die Jugendtraum-Vermutung dahingehend aus, daß die Gesamtheit solcher Gleichungen durch jene, die aus der Theorie der elliptischen Funktionen hervorgehen, erschöpft wird.

Wenn dann Kronecker im „Brief" sowohl als auch in „A" im Anschluß an die eben hervorgehobenen Stellen zum Schluß wieder unzweideutig auf den Fall der singulären Moduln allein zu sprechen kommt, so handelt es sich dabei in beiden Fällen nicht mehr direkt um das Jugendtraum-Theorem. Im „Brief“ führt er noch aus, daß er zum Beweis dieses Theorems außer den bisher angeführten Hilfsmitteln noch eine Einsicht in den tieferen Grund nötig gehabt hätte, warum gerade durch Adjunktion der singulären Moduln alle Ideale des imaginär-quadratischen Grundkörpers zu Hauptidealen werden. Daß hier nur von den singulären Moduln die Rede ist, liegt in der Natur der Sache; denn für die singulären Werte elliptischer Funktionen stimmt jene Hauptidealtatsache so ohne weiteres gar nicht. Aber es ist hieraus nicht einzusehen, wieso auch das Jugendtraum-Theorem auf die singulären Moduln beschränkt gemeint sein soll; denn es kann doch sehr gut die Theorie der singulären Moduln, insbesondere deren Hauptidealeigenschaft, grundlegend für den Beweis dieses Theorems sein, und dennoch dieser Beweis etwas über eine übergeordnete Theorie, die der singulären elliptischen Funktionswerte, aussagen —, wie es ja nach dem heutigen Stande der Erkenntnis auch tatsächlich der Fall ist. Und in „A“ deutet Kronecker zum Schluß noch den Beweis eines Teiles des vorher ausgesprochenen Satzes an, nämlich dafür, daß die singulären Moduln Abel'schen Gleichungen in imaginär-quadratischen Körpern genügen. Auch daraus kann unmöglich geschlossen werden, daß Kronecker für die Umkehrung jenes Satzes, das Jugendtraum-Theorem, nur die singulären Moduln im Auge hatte, zumal da er ja vorher jenen Satz selbst ausdrücklich auch für die singulären elliptischen Funktionswerte ausgesprochen hat.

Wenn auch natürlich in keiner Weise behauptet werden kann und soll, daß Kronecker bis zur Einsicht in den Grund für die Unrichtigkeit des Jugendtraum-Theorems bei der Auslegung **(a.)** vorgedrungen ist, so ist doch — entgegen Fueter (siehe oben) — gewiß, daß er neben den singulären Moduln auch die singulären elliptischen Funktionswerte so weitgehend auf ihre arithmetischen Eigenschaften untersucht hat, daß ihm ein Beweis dieses Theorems in seinen Hauptlinien vor Augen stand. Man darf auch den Umstand ins Gewicht werfen, daß der „Brief“ ein Dokument gerade aus der Zeit dieser Entdeckungen und nicht aus der um zwanzig Jahre zurückliegenden Zeit der Beschäftigung mit den singulären Moduln ist. Augenscheinlich ist die einige Jahre später einsetzende große Mitteilungsserie zur Theorie der elliptischen Funktionen die Erfüllung der im letzten abgedruckten Satz des „Briefes“ gegebenen Ankündigung, und gewiß sollte in dieser Mitteilungsserie, die der Tod im Jahre 1891 abbrach, auch noch der Beweis des Jugendtraum-Theorems folgen, den uns Kronecker schuldig geblieben ist. Darf man aber die Mitteilungsserie in dieser Weise auffassen, also als eines ihrer Endziele den Beweis des Jugendtraum-Theorems ansehen, so liegt auf der Hand, daß dieses Theorem, so wie es Kronecker meinte, in der Hauptsache die eigentlichen elliptischen Funktionen betroffen haben muß; denn von den elliptischen Modulfunktionen ist in jener Mitteilungsserie immer nur soweit die Rede, als sie für den Aufbau der Theorie der elliptischen Funktionen gebraucht werden, und niemals um ihrer selbst willen.

Zusammenfassend kann man demnach sagen, daß an den maßgebenden Stellen einerseits kein zwingender Grund für die Beschränkung auf die Auslegung **(a.)** besteht, während andrerseits die Auslegung **(b.)** durchaus gut möglich, durch schwerwiegende Gründe gestützt und in hohem Grade wahrscheinlich ist. Wenn Kronecker überhaupt eine präzise

Formulierung des Jugendtraum-Theorems im Auge gehabt hat, kann dies nur die der Auslegung **(b.)** entsprechende gewesen sein. Die Möglichkeit, daß er keine präzise, oder keine sich gleichbleibende Formulierung des Theorems vor Augen hatte, muß natürlich offen bleiben. Aber auch dann ist es sicher ein historisches Unrecht, ihm die Auslegung **(a.)** und damit eine unrichtige Formulierung des Jugendtraum-Theorems zuzuschreiben. Hasse.

35. S. 465. Für die zugehörige Untersuchung von *E. du Bois-Reymond* vergleiche man die ausführliche Darstellung a. a. O. S. 481—488. Es handelt sich im wesentlichen um einen von einem Stromzweige erzeugten Polarisationsstrom, dessen Stärke in seiner Abhängigkeit vom spezifischen Widerstande s des Elektrolyten in der Form

$$J = \frac{\mathfrak{E}}{P(s)} \tag{3}$$

dargestellt werden kann, wo

$$P(s) = \left(s + \frac{ac}{s} + ar + a + c\right)\left(s + \frac{bc}{s} + br + b + c\right) \tag{4}$$

ist. Hier ist allein c proportional dem spezifischen Widerstande σ der eingeschalteten Zwischenplatte, während die übrigen Größen von σ unabhängig und positiv sind.

36. S. 501. Diese Arbeit hängt eng zusammen mit der Abhandlung „sur les unités complexes“. Comptes rendus XCVI (1883) Bd. III_1, S. 1—20 dieser Ausgabe und rührt inhaltlich zum Teil von *Kronecker* her.

DIE MATHEMATISCHEN ABHANDLUNGEN LEOPOLD KRONECKER'S NACH DER ZEIT IHRER VERÖFFENTLICHUNG GEORDNET.

	Band	Seite
1845		
1. Beweis, daß für jede Primzahl p die Gleichung $1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1} = 0$ irreductibel ist . . . . J. f. Math. 29. S. 280.	I	1—4
2. De unitatibus complexis. Dissertatio inauguralis §§ 1—16. Berolini 35. S. Vollständig veröffentlicht mit §§ 17—20. J. f. Math. 93. S. 1—52. 1882.	I	5—74
1853		
3. Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen (I. Abhandlung) . . . . . Monatsber. 365—374. Übersetzt in Serret, Cours d'Algèbre supérieure, I. Aufl. Note XIII 560—569: Sur les équations résolubles algébriquement (1854), in den späteren Auflagen ebenfalls abgedruckt.	IV	1—12
1854		
4. Mémoire sur les facteurs irréductibles de l'expression $(x^n - 1)$ . . . . . Journ. de Math. (1) XIX 175—192.	I	75—92
5. Note sur les fonctions semblables des racines d'une équation . . . . . . Journ. de Math. (1) XIX 279—280.	IV	13—16
1856		
6. Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli. . Journ. de Math. (2) I 385—391.	IV	17—24
7. Sur une formule de Gauß . . . . Journ. de Math. (2) I 392—395.	IV	171—176
8. Démonstration d'un théorème de M. Kummer . . . . Journ. de Math. (2) I. 396—398	I	93—98
9. Démonstration de l'irréductibilité de l'équation $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ où n dénote un nombre premier . . . . Journ. de Math. (2) I. 399—400.	I	99—102
10. Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen (II. Abhandlung) . . . . . Monatsber. 203—215.	IV	25—38

Band Seite

1868

29. Bemerkungen zu Weierstraß' Abhandlung: Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen . . . . I 163—174
Monatsber. 339—346.

1869

30. Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln. (Erste und zweite Abhandlung) . . . . I 175—212
Monatsber. 159—193 und 688—698. 213—226,
31. Sur le théorème de Sturm . . . . I 227—234
Comptes Rendus LXVIII 1078—1082.
32. Zur Potentialtheorie. . . . . V 189—193
J. f. Math. 70. S. 246—248.
33. Bemerkungen zur Determinantentheorie . . . . I 235—270
J. f. Math. 72. S. 152—175.

1870

34. Bemerkungen zu E. du Bois-Reymond's Arbeit: Die aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete. Zweite Abhandlung . . . . V 395—398
Monatsber. 569—570.
35. Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Classenanzahl idealer komplexer Zahlen . . . . I 271—282
Monatsber. 881—889.

1872

36. Zur algebraischen Theorie der quadratischen Formen . . . . I 283—302
Monatsber. 490—504.
Übersetzt in Darboux Bull. IV 256—271: Sur la théorie algébrique des formes quadratiques (1873). Darstellung dieser Untersuchungen nach einer Bearbeitung derselben von Kronecker: Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. V. Aufl. S. 271—278.
37. Zeller's Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. . V 445—448
Monatsber. 846—847.

1873

38. Über die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen . . . . I 303—348
Monatsber. 117—154.

1874

39. Über Schaaren von quadratischen Formen . . . . I 349—372
Monatsber. 59—76.
40. Nachtrag zu diesem Aufsatze . . . . I 373—381
Monatsber. 149—156.

Band Seite

41. Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen . . . . I 382—414
Monatsber. 206—232.
42. Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires . . . . I 415—420
Comptes Rendus LXXVIII (1) 1181—1182.
43. Über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen . . . . . I 421—483
Monatsber. 397—447.

1875

44. Über quadratische Formen von negativer Determinante . . . . IV 245—260
Monatsber. 223—236.
45. Bemerkungen über Reuschle's Tafeln complexer Primzahlen . . . . V 449—452
Monatsber. 236—238.
46. Zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes. . . . . II 1—10
Monatsber. 267—274.
Italienische Übersetzung von A. Sparagna in Boncompagni Bull. XVIII. 244—249: Intorno alla storia della legge di reciprocità, osservazioni del prof. Leopoldo Kronecker (1885).
47. Über die algebraischen Gleichungen, von denen die Teilung der elliptischen Functionen abhängt. . . . . IV 261—273
Monatsber. 498—507.

1876

48. Bemerkung zu der Abhandlung Nr. 47 mit Bezug auf eine Notiz von Herrn Sylow . . . . IV 274
Monatsber. 242.
49. Über das Reciprocitätsgesetz . . . . II 11—24
Monatsber. 331—341.
49a. Sur la loi de réciprocité (französische Übersetzung der vorigen Abhandlung) . . . . II 25—36
Darboux Bull. (2) IV 182—192.

1877

50. Über Abel'sche Gleichungen. . . . . IV 63—72
Monatsber. 845—851.

1878

51. Notiz über Potenzreihen . . . . V 195—201
Monatsber. 53—58.
52. Über Sturm'sche Funktionen . . . . II 37—70
Monatsber. 95—121.
53. Über die Charakteristik von Functionen-Systemen . . . . II 71—82
Monatsber. 145—152.

Band Seite

1879

54. Einige Entwicklungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen . . IV 73—96
Monatsber. 205—229.

1880

55. Über die Irreductibilität von Gleichungen . . . . II 83—94
Monatsber. 155—162.
56. Über die Potenzreste gewisser complexer Zahlen . . . . II 95—102
Monatsber. 404—407.
57. Über den vierten Gauß'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste . . . . IV 275—294
Monatsber. 686—698, 854—860.
58. Über die symmetrischen Functionen . . . . IV 97—112
Monatsber. 936—948.

1881

59. Über einreihige Determinanten . . . . II 103—112
Göttinger Nachr. 271—279.
60. Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen . . . . II 113—192
Monatsber. 535—600.
61. Adresse der Akademie zu E. E. Kummer's Doctorjubiläum . . . . . . V 445—450
Monatsber. 895—898.
62. Zur Theorie der elliptischen Functionen . . . . IV 309—318
Monatsber. 1165—1172.
63. Über die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen . . . . II 193—236
J. f. Math. 91. 301—334.
64. Über Potentiale n-facher Mannigfaltigkeiten . . . . V 203—212
Coll. Math. in mem. D. Chelini 224—231.

1882

65. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. . . . II 237—388
J. f. Math. 92. S. 1—122.
Gesondert erschienen als „Festschrift zu Herrn Ernst Eduard Kummer's fünfzigjährigem Doctorjubiläum", 10. September 1881. Berlin, G. Reimer. (Enthaltend Widmung, Nr. 65 und Nr. 2.)
Darstellung des Inhaltes durch J. Molk in Darboux Bull. (2) VIII 145—154.
66. Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme . . . . II 389—396
Sitzungsber. Berl. 821—824.
67. Die Composition Abel'scher Gleichungen . . . . IV 118—122
Sitzungsber. Berl. 1059—1064.

Band Seite

68. Die cubischen Abel'schen Gleichungen des Bereiches $\sqrt{-31}$ . . . . . IV 123—130
Sitzungsber. Berl. 1151—1154.
69. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen . . . . IV 131—162
J. f. Math. 93. S. 338—364.
70. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen . . . . II 397—402
J. f. Math. 93. S. 365—366.
71. Beurtheilung der für den Steinerpreis der Jahre 1868 und 1882 eingereichten Arbeiten . . . . V 433—444
Sitzungsber. Berl. 1868. S. 417—421 und 1882. S. 731—736.

1883

72. Sur les unités complexes . . . . III[1] 1—20
Comptes Rendus XCVI 93—98, 148—151, 216—221.
73. Sur les unités complexes par M. J. Molk. . . . . V 501—506
Darboux Bull. (2) VII 133—136.
Diese Arbeit hängt eng mit Nr. 72 zusammen und rührt inhaltlich zum Theil von Kronecker her.
74. Über die Bernoulli'schen Zahlen . . . . II 403—408
J. f. Math. 94. S. 268—269.
75. Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitäts-Bereiches in ihre irreductiblen Factoren . . . . II 409—416
J. f. Math. 94. S. 344—348.
76. Zur Theorie der elliptischen Functionen, I—V . . . . IV 345—363
Sitzungsber. Berl. 497—506, 525—530.
77. Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen . . . . IV 319—334
Sitzungsber. Berl. 717—729.
78. Weitere Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. . . . . IV 335—344
Sitzungsber. Berl. 949—956.
79. Zur Theorie der Formen höherer Stufen . . . . II 417—424
Sitzungsber. Berl. 957—960.

1884

80. Über bilineare Formen mit vier Variablen . . . . II 425—496
Abhandl. Berl. Ak. II (1883), 1—60.
81. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste . . . . . II 497—522
Sitzungsber. Berl. 519—537.
82. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste (veränderte Darstellung von Nr. II der vorigen Arbeit) . . . . II 523—526
J. f. Math. 96. S. 348.
83. Beweis einer Jacobi'schen Integralformel . . . . V 213—216
Sitzungsber. Berl. 539—540.

Band Seite

84. Beweis des Puiseux'schen Satzes . . . . V 217—225
Sitzungsber. Berl. 543—548.
85. Über den dritten Gauß'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste . . . . II 527—532
Sitzungsber. Berl. 645—647.
86. Der dritte Gauß'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste, in vereinfachter Darstellung . . . . II 533—536
J. f. Math. 97. S. 93—94.
87. Bemerkungen über ein System von Differentialgleichungen, welches in einer Arbeit des Herrn von Helmholtz behandelt ist . . . . V 227—234
J. f. Math. 97. S. 141—145.
88. Additions au mémoire sur les unités complexes . . . . III^1 21—30
Comptes Rendus XCIX 765—771.
89. Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln . . . . III^1 31—46
Sitzungsber. Berl. 1071—1080.
90. Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen . . . . . . III^1 47—110
Sitzungsber. Berl. 1179—1193, 1271—1299.
91. E. du Bois-Reymond, Untersuchungen über tierische Elektricität. II. Band II. Abt. S. 489—490. (Anmerkung.) . . . . V 465—470

1885

92. Sulle superficie algebriche irreduttibili aventi infinite molte sezioni piane che si spezzano in due curve . . . . V 403—405
(Abdruck einer Notiz über eine nicht veröffentlichte Abhandlung.)
Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 323—324.
93. Bemerkungen zu Herrn Ernst Schering's Mittheilung (über das Reciprocitätsgesetz) . . . . II 537—540
Sitzungsber. Berl. 117—118.
94. Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen . . . . III^1 111—136
Sitzungsber. Berl. 383—396, 1045—1049.
95. Bemerkung zur Note des Herrn A. H. Anglin: „Zur Theorie der symmetrischen Functionen" . . . . V 399—401
J. f. Math. 98. 176.
96. Über das Dirichlet'sche Integral . . . . V 235—265
Sitzungsber. Berl. 641—665.
97. Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel. . V 267—294
Sitzungsber. Berl. 841—862.
98. Zur Theorie der elliptischen Functionen VI—X . . . . IV 363—389
Sitzungsber. Berl. 761—784.
99. Über den Cauchy'schen Satz . . . . V 295—299
Sitzungsber. Berl. 785—787.

Band Seite

100. Briefwechsel zwischen Gustav Lejeune-Dirichlet und Herrn Leopold Kronecker, herausgegeben von Ernst Schering . . . . V 407—431
Göttinger Nachr. 361—382.

1886

101. Über einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen . . . . III^1 145—208
J. f. Math. 99. S. 329—371.
102. Ein Satz über Discriminanten-Formen . . . . III^1 241—248
J. f. Math. 100. S. 79—82.
103. Zur Theorie der Gattungen rationaler Functionen von mehreren Variablen III^1 275—280
Sitzungsber. Berl. 251—253.
104. Zur Theorie der elliptischen Functionen XI . . . . IV 389—471
Sitzungsber. Berl. 701—780.
105. Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes . . . . . V 301—309
Comptes Rendus CIII 980—987.
106. Darlegung arithmetischer Eigenschaften der Kugelfunctionen . . . . . III^2 213—216
Tageblatt der Naturforsch.-Vers. LIX. 123.

1887

107. Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik . . . . III^1 209—240
J. f. Math. 100. S. 490—510.
108. Über den Zahlbegriff . . . . III^1 249—274
Philos. Aufs. Ed. Zeller z. Doctorjubiläum gewdt. Leipzig 1887. VIII. S. 261—274.
J. f. Math. 101, S. 337—355.
109. Bemerkungen über die Jacobi'schen Thetaformeln . . . . V 311—325
J. f. Math. 102. S. 260—272.

1888

110. Über die arithmetischen Sätze, welche Lejeune-Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat . . . . III^1 281—292
Sitzungsber. Berl. 417—423.
111. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme . III^2 1—114
Sitzungsber. Berl. 429—438, 447—465, 557—578, 595—612, 983—1016.
112. Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten. . . . . V 471—476
Sitzungsber. Berl. 439—442.

1889

113. Zur Theorie der elliptischen Functionen XII—XIII . . . . IV 471—496
Zur Theorie der elliptischen Functionen XIV—XIX . . . . V 1—58
Sitzungsber. Berl. 53—63, 123—135, 199—220, 256—274, 309—317.

	Band	Seite
114. Über symmetrische Systeme Sitzungsber. Berl. 349—362.	III^1	293—314
115. Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten Sitzungsber. Berl. 479—505, 603—614.	III^1	315—368
116. Über eine summatorische Function Sitzungsber. Berl. 867—881.	V	343—359
117. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste (Auszug aus Nr. 94_2) J. f. Math. 104. S. 348—351.	III^1	137—144
118. Paul du Bois-Reymond J. f. Math. 104. S. 352—354.	V	477—482
119. Bemerkungen über die Darstellung der Reihen durch Integrale J. f. Math. 105. S. 157—159, 345—354.	V	327—342
120. Summirung der Gauß'schen Reihen $\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$ J. f. Math. 105. S. 267—268.	IV	295—300

1890

	Band	Seite
121. Über die Dirichlet'sche Methode der Werthbestimmung der Gauß'schen Reihen Festschr. d. Math. Gesellschaft in Hamburg 32—36.	IV	301—308
122. Zur Theorie der elliptischen Functionen XX—XXII Sitzungsber. Berl. 99—120, 123—130, 219—241, 307—318, 1025—1029.	V	58—132
123. Über orthogonale Systeme Sitzungsber. Berl. 525—541, 601—607, 691—699, 873—885, 1063—1080.	III^1	369—460
124. Über die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst Sitzungsber. Berl. 1081—1088.	III^1	461—473
125. Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen Sitzungsber. Berl. 1225—1237.	III^2	139—155
126. Algebraische Reduktion der Schaaren quadratischer Formen I—III Sitzungsber. Berl. 1375—1383.	III^2	157—174
127. Bemerkungen über die von Gauß mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Größe x J. f. Math. 106. S. 346—348.	III^2	115—121
128. Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen J. f. Math. 107. S. 135—136.	III^2	123—126
129. Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie J. f. Math. 107. S. 254—261.	III^2	127—137

	Band	Seite
130. Über eine Stelle in Jacobi's Aufsatz „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes" J. f. Math. 107. S. 349—352.	IV	163—170

1891

	Band	Seite
131. Algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen IV—VIII Sitzungsber. Berl. 9—17, 33—44.	III^2	175—198
132. Die Legendre'sche Relation Sitzungsber. Berl. 323—332, 343—358, 447—465, 905—908.	V	133—184
133. Die Clausius'schen Coordinaten Sitzungsber. Berl. 881—890.	V	371—383
134. Sophie von Kowalevsky J. f. Math. 108. S. 88.	V	463—466
135. Eine analytisch-arithmetische Formel J. f. Math. 108. S. 348.	III^2	199—202
136. Über die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobi'schen Thetaformeln Sitzungsber. Berl. 653—659.	V	361—370
J. f. Math. 108. S. 325—334 (Abdruck nebst einem Verzeichniss der von C. G. J. Jacobi gehaltenen Vorlesungen)	V	487 493
137. Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées Comptes Rendus CXIII 1006—1012.	III^2	203—212

1892

	Band	Seite
138. Auszug aus einem Briefe von L. Kronecker an Herrn Prof. G. Cantor Jahresber. der Deutsch. Math. Ver. I. 23—25.	V	495—500

1895

	Band	Seite
139. Auszug aus einem Briefe von L. Kronecker an R. Dedekind vom 15. März 1880 Sitzungsber. Berl. 115—117.	V	453—458

DRUCKFEHLERVERZEICHNIS ZUM FÜNFTEN BANDE.

S. 1, Z. 2 v. u. statt S. 99—129 lies S. 99—120.
S. 1, Z. 2 v. u. hinter S. 99—120, einzuschieben 123—130.
S. 53, Z. 6 v. o. statt ($\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5$ lies ($\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$).
S. 63, Z. 15. v. o. statt ($k = 1, 2, \ldots n$ lies ($k = 1, 2, \ldots n$).
S. 85, Z. 3 v. o. statt ($\mu, \nu = 1, 3, 5, \ldots$ lies ($\mu, \nu = 1, 3, 5, \ldots$).
S. 101, Z. 3 v. o. statt ($\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ lies ($\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$).
S. 161. Formel (46) statt $e^{\frac{u\tau s\pi_i}{s}}$ lies $e^{\frac{u\tau s\pi i}{s}}$.
S. 165, Z. 6. v. u. statt transcendete lies transcendente.
S. 166, Z. 12 v. o. statt den lies der.
S. 185, Z. 1 v. u. hinter Bd. 59 zu setzen (1861).
S. 189, Z. 1 v. u. hinter Bd. 70 zu setzen (1869).
S. 189, Z. 1 v. u. statt 276—278 lies 246—248.
S. 203, Z. 1 v. u. hinter (1881) zu setzen p. 224—231.
S. 212, Z. 1 v. u. statt 1887 lies 1884.
S. 217, Z. 1 v. u. statt 1887 lies 1884.
S. 218, Z. 2 v. o. statt 1887 lies 1884.
S. 227, Z. 1 v. u. hinter Bd. 97 zu setzen (1884).
S. 241, Z. 9 v. u. statt verschwinde lies verschwinde [1]).
S. 241, letzte Zeile [1]) Vgl. Zusatz 15 am Ende dieses Bandes. H
S. 311, letzte Zeile hinter Bd. 102 zu setzen (1887).
S. 327, letzte Zeile hinter Bd. 105 zu setzen (1889).
S. 358, Formel (26) statt $\int_{z^{(0)}}^{z}$ lies $\int_{z_0}^{z}$.
S. 397, Z. 2 v. o. ist [1]) sowie die letzte Zeile zu streichen.
S. 399, Z. 1 v. u. ist hinter Bd. 98 zuzufügen (1885).
S. 504, Z. 8 v. o. statt ($k = 3, 4, \ldots, n$ lies ($k = 3, 4, \ldots, n$).
S. 504, Z. 15 v. o. statt $z^{(k)}$ lies $z_n^{(k)}$.
S. 509. Die Nummern der letzten Zusätze sind von Nr. 28 ab um 1 zu vergrößern.