DIE LEGENDRE'SCHE RELATION.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 2. April 1892.]

Die bilineare Gleichung, welche zwischen den vollständigen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung mit beliebigem Modul und denjenigen mit complementärem Modul besteht, wird von *Legendre* im Cap. XII p. 60 des 1825 erschienenen ersten Bandes seines Werkes *Traité des fonctions elliptiques* zuvörderst auf Grund zweier im Cap. XI p. 59 entwickelten Gleichungen für die besonderen Moduln $\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ hergeleitet und erst dann in höchst einfacher Weise auf den Fall beliebiger Moduln ausgedehnt, indem gezeigt wird, dass die Differentiation von:

$$FE' + F'E - FF'$$

nach einem der Moduln als Resultat Null ergiebt. Hieraus folgt nämlich offenbar, dass der angegebene Ausdruck, in welchem F, E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den einen Modul und F', E' diejenigen für den complementären Modul bedeuten, für *jedes* Paar zu einander complementärer Moduln eben denselben Werth $\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ hat, welcher für das specielle Paar complementärer Moduln $\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ ermittelt worden ist.

Dabei verdient hervorgehoben zu werden, dass schon in dem art. XVII, welcher den Schluss der zweiten Abhandlung *Legendre*'s „über die Integrationen durch Ellipsenbögen" bildet,*) die Anfänge der Entwickelungen erkennbar sind, welche im XI. Capitel Nr. 43 seines Werkes über die elliptischen Functionen auf die Relation:

$$FE' + F'E - FF' = \frac{1}{2}\pi$$

für das Modulpaar $\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ führen. Ich möchte deshalb glauben, dass *Legendre* schon bald nachher, also etwa vor einem Jahrhundert, die Relation gefunden hat.

*) Second Mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse et sur la comparaison de ces arcs. Par M. *Le Gendre*. Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1786 p. 679—683.

Eine Angabe über den Zeitpunkt der Auffindung hat *Legendre* weder an der citirten Stelle seines *Traité des fonctions elliptiques* noch an der entsprechenden Stelle des ersten, im Jahre 1811 erschienenen Bandes seiner *Exercices de calcul intégral* gemacht, vielleicht aber in der 1794 erschienenen Abhandlung „*Mémoire sur les transcendantes elliptiques*“, welche ich nicht habe einsehen können, da sie in den hiesigen Bibliotheken nicht vorhanden ist. In den beiden angeführten Werken *Exercices de calcul intégral* (Tome I 1811) und *Traité des fonctions elliptiques* (Tome I 1825) sind die auf die Relation bezüglichen Entwickelungen fast gleichlautend, und selbst die Seitenzahlen stimmen dabei nahezu überein. So passt z. B. die Seitenangabe (p. 61) bei *Jacobi*'s Citat der *Legendre*'schen Relation im art. 56 der Fundamenta[1]) sowohl auf den ersten, 1811 erschienenen Band der *Exercices* als auch auf den ersten, 1825 erschienenen Band des *Traité des fonctions elliptiques*.

Jacobi bezeichnet die *Legendre*'sche Relation an der angeführten Stelle im art. 56 der *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* als „theorema egregium Cl[i] *Legendre*“, an einer anderen Stelle,*) wo er angiebt, er habe dieselbe auf alle *Abel*'schen Integrale ausgedehnt, als „die berühmte, von *Legendre* entdeckte Relation zwischen den vollständigen Integralen der ersten und zweiten Gattung zweier elliptischer Integrale, deren Moduln Complemente zu einander sind“; sie ist in allen Werken und Lehrbüchern, in welchen die Theorie der elliptischen Functionen behandelt wird (in den neueren meist ohne Nennung *Legendre*'s), aufgenommen und auf mannigfache Art bewiesen worden. Auch hat *Jacobi*'s Darstellung des elliptischen Integrals zweiter Gattung durch die ϑ-Functionen, mittels deren er in seinen, im Wintersemester 1835/36 in Königsberg gehaltenen, durch *Rosenhain*'s Nachschrift bekannten Vorlesungen die *Legendre*'sche Relation begründet**), über diese wie über

*) Note von der geodaetischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution. Berichte der Akademie von 1839 S. 65 (*Crelle*'s Journal Bd. 19. S. 312, *Jacobi*'s Werke Bd. II. S. 62). Vergl. die Stelle in der *Haedenkamp*'schen Abhandlung „über die Transformation vielfacher Integrale“ (*Crelle*'s Journal Bd. 22. S. 187), welche sich auf die citirte *Jacobi*'sche Äusserung bezieht.

**) Die bezügliche Vorlesung ist als die 44ste in der *Rosenhain*'schen Ausarbeitung, deren Original in der Bibliothek der Akademie ist, bezeichnet. Ich habe diese Ausarbeitung schon in meiner Mittheilung vom 14. März 1889 auf S. 214 der Sitzungsberichte erwähnt, aber dort nicht das Semester, in welchem *Jacobi* die Vorlesungen gehalten hat, angegeben,

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 214. H

die wenigen anderen, vor *Abel* und *Jacobi* bekannten Resultate der Theorie der elliptischen Integrale ein ganz neues Licht verbreitet. Aber in vollkommen befriedigender Weise wird, wie mir scheint, der innere Grund der *Legendre*'schen Relation erst durch die Betrachtung jener Reihe aufgedeckt, welche ich in meinen Mittheilungen vom 30. Jan., 6. Febr. und 13. März 1890[1]) mit Ser (u_0, u, v, w) oder:

$$\mathrm{Ser}\,(v\sigma_0 + w\tau_0,\ v\sigma + w\tau,\ v,\ w)$$

bezeichnet und dort eingehend discutirt habe.

Die erwähnte Reihe behält nämlich ihren Werth bei, wenn man die Grössen:

$$\begin{array}{lllllll} & \sigma_0, & \tau_0, & \sigma, & \tau, & v, & w \\ \text{durch} & \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, & \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0, & \alpha\sigma + \beta\tau, & \alpha'\sigma + \beta'\tau & \beta' v - \alpha' w, & -\beta v + \alpha w \end{array}$$

ersetzt, wo $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ganze Zahlen bedeuten, für welche $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ ist. Wenn man nun den a. a. O. für die Reihe gefundenen Ausdruck:*)

$$\frac{1}{v}\, e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}}\, \frac{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0 + u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \qquad \left(\begin{matrix} u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0 \\ u = v\sigma + w\tau \end{matrix}\right),$$

welcher dort zur Charakterisirung seiner Eigenschaft als Invariante (ἄτροπος) mit:

$$\overline{\mathrm{Atr}}\,(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$

bezeichnet ist, nach steigenden Potenzen der Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ entwickelt, so hat natürlich jedes einzelne Aggregat von Gliedern einer und derselben Dimension für sich die angegebene Invarianteneigenschaft. Nun ist das Aggregat der Glieder erster Dimension:

$$(\mathfrak{A}) \qquad (v(\sigma + \varepsilon\sigma_0) + w(\tau + \varepsilon\tau_0)) \left(\frac{2\varepsilon\tau_0\pi i}{v^2\sigma_0 + vw\tau_0} + \frac{1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \right),$$

und ich füge bei dieser Gelegenheit die Notiz hinzu, dass die in der Anmerkung Nr. 60 auf S. 545 des I. Bandes von *Jacobi*'s Werken erwähnten Vorlesungen „über elliptische Transcendenten“, welche *Borchardt* gehört hat, von *Jacobi* im Wintersemester 1839/40 in Königsberg gehalten worden sind.

*) Vergl. S. 317 der Sitzungsberichte von 1889[2]).

[1]) Bd. V, S. 58—128 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) Bd. V, S. 126 dieser Ausgabe. H

wo ϑ' die erste und ϑ''' die dritte nach ζ genommene Ableitung der mit $\vartheta\left(\zeta, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$ bezeichneten Reihe:

$$\sum_\nu e^{\frac{1}{4}\left(\nu^2\frac{\varepsilon w}{v}+4\nu\zeta-2\nu\right)\pi i} \qquad (\nu=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

bedeutet, und da der erste Factor jenes Products offenbar bei der angegebenen Substitution ungeändert bleibt, so kommt auch dem zweiten Factor:

$$(\mathfrak{A}^0) \qquad \frac{2\varepsilon\tau_0\pi i}{v^2\sigma_0+vw\tau_0}+\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

für sich allein jene Invarianteneigenschaft zu. Hiermit ist aber der innere Grund der *Legendre*'schen Relation klar gelegt. Der Ausspruch,

> dass der Ausdruck $(\mathfrak{A}^0)$ oder das mit $(\mathfrak{A})$ bezeichnete Aggregat der Glieder erster Dimension die angegebene Invarianteneigenschaft hat,

besagt genau dasselbe wie die *Legendre*'sche Relation, und um dies zu erkennen, braucht man nur die in der Relation vorkommenden elliptischen Integrale, wie jetzt geschehen soll, durch die ϑ-Function auszudrücken.

I.

Bedeuten, wie in meiner Mittheilung vom 13. März 1890[1]), v und w zwei complexe Grössen, und ist ε das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theils von $\frac{w}{v}$, so kann man in den Formeln von *Jacobi*'s Fundamenta:

$$\frac{K'i}{K}=\frac{\varepsilon w}{v},\; q=e^{\frac{\varepsilon w\pi i}{v}}$$

setzen. Alsdann bestehen für die im art. 48 der Fundamenta mit A bezeichnete Grösse die Gleichungen:*)

$$(1) \qquad 12KE-4(2-\varkappa^2)K^2=\pi^2(1-24A),$$

$$(2) \qquad A=\sum_{m,n} n e^{\frac{2\varepsilon mn\pi i w}{v}} \qquad (m, n=1, 2, 3, \ldots),$$

*) Vergl. S. 136 und 137 der Originalausgabe und S. 189 und 190 des I. Bandes von *Jacobi*'s gesammelten Werken.

[1]) Bd. V, S. 91 ff. dieser Ausgabe.

wo E das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung mit dem Modul $\varkappa$ bedeutet. Es ist ferner gemäss der Formel (2) im art. 36 und der Formel (9) im art. 65 der Fundamenta:

$$\frac{\varepsilon w\pi i}{v}+12\sum_{n=1}^{n=\infty}\log\left(1-e^{\frac{2\varepsilon n w\pi i}{v}}\right)=4\log\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)-4\log 2\pi,$$

also, wenn nach w differentiirt wird:

$$1-24\sum_{m,n} n e^{\frac{2\varepsilon mn\pi i w}{v}}=-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \qquad (m, n=1, 2, 3, \ldots),$$

und hieraus folgt mit Hülfe der Gleichungen (1) und (2) das Resultat:

$$(3) \qquad 12KE-4(2-\varkappa^2)K^2=-\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

welches die Darstellung des Integrals zweiter Gattung E durch ϑ-Functionen enthält. Ersetzt man nämlich darin K und $\varkappa K$ durch ihre ϑ-Ausdrücke:

$$K=\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0)=\frac{1}{2}\pi e^{\frac{\varepsilon w\pi i}{2v}}\vartheta^2\left(\frac{\varepsilon w+v}{2v}\right),$$

$$\varkappa K=\frac{1}{2}\pi\vartheta_2^2(0)=\frac{1}{2}\pi\vartheta^2\left(\frac{1}{2}\right),$$

wobei der Einfachheit halber das zweite Argument der ϑ-Functionen $\left(\frac{\varepsilon w}{v}\right)$ überall weggelassen ist, so kommt:

$$(4) \qquad 6\pi\vartheta_3^2(0)E=2\pi^2\vartheta_3^4(0)-\pi^2\vartheta_2^4(0)-\frac{\vartheta'''(0)}{\vartheta'(0)}$$

oder:

$$3\int_0^1\sqrt{\vartheta_3^4(0)-\vartheta_2^4(0)\sin^2\frac{1}{2}z\pi}\,dz=2\vartheta_3^4(0)-\vartheta_2^4(0)-\frac{\vartheta'''(0)}{\pi^2\vartheta'(0)}.$$

Nimmt man in der Gleichung (3) an Stelle des Moduls $\varkappa$ den complementären Modul $\varkappa'$, so geht dieselbe in folgende über:

$$(5) \qquad 12K'E'-4(2-\varkappa'^2)K'^2=-\frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)},$$

wo E' das Integral zweiter Gattung für den Modul $\varkappa'$ bedeutet; denn es ist nach den oben eingeführten Bezeichnungen:

$$\frac{K'i}{K} = \frac{\varepsilon w}{v}, \quad \frac{Ki}{K'} = -\frac{\varepsilon v}{w}.$$

Wird nun die Gleichung (3) mit $-\frac{\varepsilon w i}{v}$ und die Gleichung (5) mit $\frac{\varepsilon v i}{w}$ multiplicirt, und alsdann die eine zu der andern addirt, so erhält man als Resultat:

$$12(K'E + KE' - KK') = \frac{\varepsilon w i}{v}\,\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{\varepsilon v i}{w}\,\frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)},$$

und da die *Legendre*'sche Relation in den hier gebrauchten *Jacobi*'schen Bezeichnungen folgendermaassen lautet:

$$K'E + KE' - KK' = \frac{1}{2}\pi,$$

so erscheint dieselbe bei Anwendung der ϑ-Functionen in der Gestalt:

$$(6) \qquad v^2 \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)} - w^2 \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon w}{v}\right)} = 6\varepsilon v w \pi i.$$

Man kann aber diese Gleichung auch in folgender Weise darstellen:

$$(7) \qquad \frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(\sigma v + \tau w)} + \frac{1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = \frac{-2\varepsilon\sigma\pi i}{w(\sigma v + \tau w)} + \frac{1}{3w^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)};$$

ihr Inhalt kann also dahin formulirt werden, dass der Ausdruck:

$$\frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(\sigma v + \tau w)} + \frac{1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

ungeändert bleibt, wenn man darin:

$$\sigma, \quad \tau, \quad v, \quad w$$

durch

$$-\tau, \quad \sigma, \quad -w, \quad v$$

ersetzt. Derselbe Ausdruck bleibt nun, wie die unmittelbar aus der Definition von ϑ resultirende Gleichung:

$$\vartheta\left(\zeta, \frac{\varepsilon w + v}{v}\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\vartheta\left(\zeta, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$$

zeigt, auch ungeändert, wenn man:

$$\sigma, \quad \tau, \quad v, \quad w,$$

durch

$$\sigma - \varepsilon\tau, \quad \tau, \quad v, \quad w + \varepsilon v$$

ersetzt, und mittels einer Reihe von Substitutionen der beiden angegebenen Arten gelangt man zu *jeder* Substitution:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau, & v' &= \beta' v - \alpha' w \\ \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau, & w' &= -\beta v + \alpha w \end{aligned} \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

in welcher α, α', β, β' ganze Zahlen bedeuten; es zeigt sich also, dass in der That, wie in der Einleitung angekündigt worden ist, der Inhalt der *Legendre*'schen Relation sich *vollständig* deckt mit dem Inhalte der Relation:

$$(9) \qquad \frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(\sigma v + \tau w)} + \frac{1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = \frac{2\varepsilon'\tau'\pi i}{v'(\sigma' v' + \tau' w')} + \frac{1}{3v'^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)},$$

durch welche der Ausdruck:

$$(\mathfrak{A}') \qquad \frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(\sigma v + \tau w)} + \frac{1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

als Invariante der Aequivalenz:

$$(\mathrm{A}) \qquad (\sigma, \tau, v, w) \sim (\alpha\sigma + \beta\tau, \alpha'\sigma + \beta'\tau, \beta' v - \alpha' w, -\beta v + \alpha w)$$

charakterisirt wird.

II.

Da $\sigma v + \tau w$ ebenfalls eine Invariante der Aequivalenz (A) ist, so deckt sich auch die Invarianteneigenschaft des Ausdrucks:

$$\frac{2\varepsilon\tau(\sigma v + \tau w)\pi i}{v} + \frac{(\sigma v + \tau w)^2}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

mit dem Inhalt der *Legendre*'schen Relation. Dieser Ausdruck ist aber nur von dem Verhältniss $\frac{w}{v}$ abhängig und demnach eine Invariante der Aequivalenz:

$$\left(\sigma, \tau, \frac{w}{v}\right) \sim \left(\alpha\sigma + \beta\tau, \alpha'\sigma + \beta'\tau, \frac{\alpha w - \beta v}{-\alpha' w + \beta' v}\right).$$

Man kann daher $v=1$ setzen und erhält alsdann in dem Ausdruck:

$$(\mathfrak{A}'') \qquad 2\varepsilon\tau(\sigma+\tau w)\pi i+\frac{1}{3}(\sigma+\tau w)^2\cdot\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon w)}{\vartheta'(0,\varepsilon w)}$$

eine Invariante der Aequivalenz:

$$(\mathrm{A}') \qquad (\sigma,\tau,w)\sim\left(\alpha\sigma+\beta\tau,\alpha'\sigma+\beta'\tau,\frac{\alpha w-\beta}{-\alpha' w+\beta'}\right).$$

Die zwischen den beiden Quotienten:

$$\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon w)}{\vartheta'(0,\varepsilon w)},\quad \frac{\vartheta'''(0,\varepsilon' w')}{\vartheta'(0,\varepsilon' w')} \qquad \left(w'=\frac{\alpha w-\beta}{-\alpha' w+\beta'}\right)$$

bestehende Transformationsgleichung muss sich hiernach direct dadurch ergeben, dass man den Ausdruck $(\mathfrak{A}'')$ gleich demjenigen setzt, welcher durch die Substitution von:

$$\alpha\sigma+\beta\tau,\quad \alpha'\sigma+\beta'\tau,\quad \frac{\alpha w-\beta}{-\alpha' w+\beta'}$$

an Stelle von $\qquad \sigma, \qquad \tau, \qquad w$

daraus hervorgeht. In der That erhält man dabei als Resultat die Transformationsgleichung:

$$(10) \qquad \frac{\vartheta'''(0,\varepsilon' w')}{\vartheta'(0,\varepsilon' w')}=(\alpha' w-\beta')^2\cdot\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon w)}{\vartheta'(0,\varepsilon w)}+6\alpha'(\alpha' w-\beta')\varepsilon\pi i,$$

welche offenbar eine Verallgemeinerung der obigen, die *Legendre*'sche Relation vertretenden Gleichung (6) ist und in diese übergeht, wenn:

$$\alpha=0,\ \beta=-1,\ \alpha'=1,\ \beta'=0$$

gesetzt wird.

Es muss noch hervorgehoben werden, dass die Invarianteneigenschaft des mit $(\mathfrak{A}'')$ bezeichneten Ausdrucks:

$$2\varepsilon\tau(\sigma+\tau w)\pi i+\frac{1}{3}(\sigma+\tau w)^2\cdot\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon w)}{\vartheta'(0,\varepsilon w)}$$

in Evidenz tritt, wenn man denselben, gemäss den obigen einleitenden Auseinandersetzungen, als das Aggregat der Glieder zweiter Dimension auffasst, welche bei der Entwickelung von:

$$(11) \qquad \varepsilon u \lim_{u_0=0}\left(-\frac{1}{u_0}+\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u,u_0,1,w)\right) \qquad (u=\sigma+\tau w)$$

nach steigenden Potenzen von σ und τ auftreten. Die Entwickelung von:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u,u_0,v,w)$$

ist nämlich, bis zu den Gliedern erster Dimension einschliesslich, folgende:

$$\frac{1}{u_0}+\frac{\varepsilon}{u}+\frac{\varepsilon u+u_0}{uv}\cdot 2\varepsilon\tau\pi i+\frac{\varepsilon u+u_0}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

und es kommt also bei der Entwickelung von (11), wenn dieselbe bis zu den Gliedern zweiter Dimension einschliesslich genommen wird:

$$(\mathfrak{A}_1'') \qquad 1+2\varepsilon\tau(\sigma+\tau w)\pi i+\frac{1}{3}(\sigma+\tau w)^2\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon w)}{\vartheta'(0,\varepsilon w)}.$$

Dieser Ausdruck, welcher sich von $(\mathfrak{A}'')$ nur um 1 unterscheidet, kann daher an Stelle von $(\mathfrak{A}'')$ als Invariante der Aequivalenz:

$$(\mathrm{A}') \qquad (\sigma,\tau,w)\sim\left(\alpha\sigma+\beta\tau,\alpha'\sigma+\beta'\tau,\frac{\alpha w-\beta}{-\alpha' w+\beta'}\right) \qquad (\alpha\beta'-\alpha'\beta=1)$$

genommen werden, und seine Invarianteneigenschaft tritt unmittelbar in Evidenz, wenn man ihn auf Grund der Gleichung $(\mathfrak{L})$ im § 10 meiner Mittheilung vom 13. März 1890[1]) als Aggregat der Glieder bis zur zweiten Dimension einschliesslich in der Entwickelung von:

$$(12) \qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum\frac{\sigma+\tau w}{m+nw}e^{(n\sigma-m\tau)2\varepsilon\pi i}$$

nach steigenden Potenzen von σ und τ auffasst. Dabei gelten für die Summation, wie a. a. O. dargelegt ist, die Bedingungen:

$$m=\alpha m'+\beta n',\qquad n=\alpha' m'+\beta' n',$$
$$m'=\pm1,\pm2,\ldots\pm M,\qquad n'=\pm1,\pm2,\ldots\pm N,$$

und für $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ können irgend welche, die Gleichung $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ befriedigende ganze Zahlen genommen werden.

Wendet man, wie ich es in meinen Universitätsvorlesungen zu thun pflege, den Begriff der Modulsysteme, welchen ich in der Algebra eingeführt habe, auch in der Analysis an, so ist jene Reihe (12) als „dem Ausdruck $(\mathfrak{A}_1'')$ congruent *modulis*

[1]) Bd. V, S. 126 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

$\sigma^3, \sigma^2\tau, \sigma\tau^2, \tau^3$" zu bezeichnen. Alsdann lässt sich das oben entwickelte Resultat dahin formuliren, dass die Eigenschaft der Reihe:

$$\sum_m \sum_n \frac{\sigma + \tau w}{m + n w} e^{(n\sigma - m\tau) 2 \varepsilon \pi i} \qquad (m, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

eine Invariante der Aequivalenz:

$$(\sigma, \tau, w) \sim \left(\alpha\sigma + \beta\tau, \alpha'\sigma + \beta'\tau, \frac{\alpha w - \beta}{-\alpha' w + \beta'}\right) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

im Sinne der Congruenz für das Modulsystem:

$$(\sigma^3, \sigma^2\tau, \sigma\tau^2, \tau^3)$$

zu sein, die *Legendre*'sche Relation ersetzt.

III.

Zu dem in der Gleichung (3) des art. I enthaltenen Ausdruck des vollständigen Integrals zweiter Gattung durch ϑ-Functionen gelangt man auch, indem man statt der Reihenentwickelungen der Fundamenta einige Formeln der im 36. Bande des *Crelle*'schen Journals publicirten Abhandlung *Jacobi*'s über die Differentialgleichung der ϑ-Reihen benutzt.*) Wenn man nämlich in dem Resultate der Addition der drei a. a. O. mit (4) bezeichneten Gleichungen:

$$\frac{d \log (A A_1 A_2)^2}{d \log q} = AB + A_1 B_1 - A_2 B_2$$

für A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 die dort angegebenen Werthe:**)

$$A = \frac{2}{\pi} K, \quad A_1 = \frac{2}{\pi} \varkappa K, \quad A_2 = \frac{2}{\pi} \varkappa' K,$$

$$B = \frac{2}{\pi}(E - \varkappa'^2 K), \; B_1 = \frac{2}{\varkappa\pi} E, \; B_2 = \frac{-2}{\varkappa'\pi}(E - K)$$

einsetzt, so ergiebt sich mit Berücksichtigung der schon oben benutzten Relation:

$$\pi(\vartheta'(0, w))^2 = 8\varkappa\varkappa' K^3$$

ganz unmittelbar die Gleichung:

$$-\frac{d \log \vartheta'(0, w)}{dw} \pi i = 3KE - (2 - \varkappa^2) K^2 \qquad (w\pi i = \log q),$$

*) *Crelle*'s Journal, Bd. 36, S. 101 und *Jacobi*'s Werke Bd. II, S. 178.

**) *Crelle*'s Journal, Bd. 36, S. 100 und *Jacobi*'s Werke Bd. II, S. 176.

welche mit der obigen Gleichung (3) zu identificiren ist, indem von der Relation:

$$\frac{d\vartheta'(0, w)}{dw} = \frac{1}{4\pi i} \vartheta'''(0, w)$$

Gebrauch gemacht und alsdann w durch $\frac{\varepsilon w}{v}$ ersetzt wird.

IV.

Die bilineare Function der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für zwei mit einander complementäre Moduln:

$$12(K'E + KE' - KK')$$

ist im art. I durch den ϑ-Ausdruck:

$$\frac{\varepsilon w i}{v} \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{\varepsilon v i}{w} \frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}$$

dargestellt worden. Dieser nimmt mit Hülfe der am Schlusse des art. III erwähnten Relation:

$$\frac{d\vartheta'(0, w)}{dw} = \frac{1}{4\pi i} \vartheta'''(0, w)$$

folgende Gestalt an:

$$4\pi w \left(\frac{d \log \vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{dw} - \frac{d \log \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{dw} \right),$$

und die Integration führt daher zu der Gleichung:

$$\log \vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right) = \log \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right) + \frac{3}{\pi} \int (K'E + KE' - KK') \, d \log w.$$

Macht man nun zuvörderst nur von dem einen *Legendre*'schen Resultate Gebrauch, wonach der Werth des Ausdrucks $K'E + KE' - KK'$ vom Modul $\varkappa$ und also auch von w unabhängig ist, so kommt:

$$\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right) = (c^2 w)^{\frac{3}{\pi}(K'E + KE' - KK')} \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right),$$

wo c^2 die Integrationsconstante bedeutet, und wenn man hierin nach einander $w = \varepsilon v e^{\frac{1}{2}\pi i}$ und $w = \varepsilon v e^{\frac{2}{3}\pi i}$ setzt, so erhält man wegen der evidenten Gleichungen:

$$\vartheta'\left(0, -e^{\frac{4}{3}\pi i}\right) = \vartheta'\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i} + 1\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i} \vartheta'\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)$$

die Bestimmungen:

$$K'E + KE' - KK' = \frac{1}{2}\pi,\ c^3 \varepsilon v e^{\frac{3}{4}\pi i} = 1.$$

Die auf diese Weise resultirende Gleichung:

$$\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right) = \left(\sqrt{-\frac{\varepsilon w i}{v}}\right)^3 \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right) \tag{13}$$

ist also eine einfache Folge der *Legendre*'schen Relation. Da andererseits diese in der oben (art. I) angegebenen Form:

$$v^2 \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)} - w^2 \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = 6\varepsilon v w \pi i \tag{6}$$

durch logarithmische Differentiation aus der Gleichung (13) hervorgeht, so erweist sich dieselbe als mit der *Legendre*'schen Relation aequivalent, und zwar auch dann, wenn die Relation nur in *der* Weise gefasst wird, dass der Werth von $K'E + KE' - KK'$ von $\varkappa$ unabhängig ist.

Aber die Gleichung (13) ist wiederum als vollständig aequivalent mit der allgemeineren Transformationsgleichung:

$$\vartheta\left(\frac{u}{w}, -\frac{\varepsilon v}{w}\right) = -\varepsilon i\left(\sqrt{-\frac{\varepsilon w i}{v}}\right) e^{\frac{\varepsilon u^2}{v w}\pi i}\, \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) \tag{14}$$

anzusehen. Denn einerseits geht offenbar die Gleichung (13) durch Differentiation aus der Gleichung (14) hervor; andererseits ist diese ebenso einfach aus jener zu erschliessen, da aus der Gleichung (13) in Verbindung mit der Fundamentaleigenschaft der ϑ-Reihe unmittelbar folgt, dass die Function der complexen Variabeln u, welche entsteht, wenn man die eine Seite der Gleichung (14) durch die andere dividirt, niemals unendlich wird und für $u = 0$ den Werth 1 hat.

Die Legendre'sche Relation erweist sich daher als vollständig aequivalent mit der Transformationsrelation (14), und hierin liegt wohl ihre hauptsächlichste Bedeutung.

Ich bemerke noch, dass man für den speciellen oben benutzten Werth $e^{\frac{2}{3}\pi i}$ des Quotienten $\frac{\varepsilon w}{v}$ das Quadrat des Moduls gleich $-e^{\frac{2}{3}\pi i}$ und aus der Gleichung (6)

die Werthbestimmung:

$$\frac{\vartheta'''\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)}{\vartheta'\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)} = -2\left|\sqrt{3}\right|\pi$$

erhält, wenn man die Gleichungen:

$$\vartheta'\left(0, -e^{\frac{4}{3}\pi i}\right) = \vartheta'\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i} + 1\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\, \vartheta'\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right),$$
$$\vartheta'''\left(0, -e^{\frac{4}{3}\pi i}\right) = \vartheta'''\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i} + 1\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\, \vartheta'''\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)$$

zu Hülfe nimmt. Für $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $w = \varepsilon v i$ ist:

$$\frac{\vartheta'''(0, i)}{\vartheta'(0, i)} = -3\pi,$$

wie unmittelbar aus der Gleichung (6) hervorgeht.

V.

Geht man bei der Entwickelung der Theorie der elliptischen Functionen, wie es *Jacobi* in seinen schon erwähnten Königsberger Universitätsvorlesungen gethan hat, von der ϑ-Function aus, so ist die Methode, durch Differentiation der Transformationsgleichung (14) zu der *Legendre*'schen Relation zu gelangen, die einfachste und natürlichste. Sie ist auch von Hrn. *Schellbach* in seinem 1864 erschienenen Buche „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen" im § 121 benutzt worden. Aber *Jacobi* hat dies auffallender Weise weder in den Vorlesungen von 1835/36 noch in den von 1839/40 gethan, obgleich er schon in der 11. Vorlesung von 1835/36 die Transformationsgleichung für die ϑ-Function abgeleitet, die Wichtigkeit derselben lebhaft hervorgehoben*) und dann in einer ganzen Reihe von etwa zehn Vorlesungen die Theorie der linearen Transformation der ϑ-Function eingehend behandelt hatte. Dagegen hat *Jacobi* schon im art. 56 der Fundamenta den entgegengesetzten Weg angegeben, auf welchem man von der *Legendre*'schen Rela-

*) *Jacobi* sagt a. a. O.: „Diese Transformation ist eine der wunderbarsten der ganzen Analysis, und sie giebt für specielle Werthe von q und z Gleichungen, die so auffallend sind, dass man sie ohne numerische Beispiele fast nicht glaubt."

tion ausgehend zu der Transformationsgleichung für die ϑ-Function gelangt, allerdings nur soweit, dass noch die Bestimmung eines von dem ersten Argument der ϑ-Function unabhängigen Factors erübrigt.

Um die *Jacobi*'sche Deduktion hier kurz darzulegen, stelle ich zuvörderst die Beziehungen zwischen den Functionen Z und Θ der Fundamenta und der Function ϑ durch die beiden Gleichungen dar:

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
\Theta(2Ku) &= e^{\frac{1}{4}(w+4u-2)\pi i}\,\vartheta\left(u+\frac{1}{2}w,\ w\right)\\
2KZ(2Ku) &= \pi i + \frac{\vartheta'\left(u+\frac{1}{2}w, w\right)}{\vartheta\left(u+\frac{1}{2}w, w\right)}
\end{aligned}
\qquad \left(w=\frac{K'i}{K}\right).
$$

Alsdann ist nach der Definition der Zeta-Function Z im art. 47 der Fundamenta:

$$4uK(K-E) - 4\varkappa^2K^2\int_0^u \sin^2 \operatorname{am} 2\,Ku\,du = \pi i + \frac{\vartheta'\left(u+\frac{1}{2}w, w\right)}{\vartheta\left(u+\frac{1}{2}w, w\right)}.$$

Wird diese Gleichung nach u differentiirt und dabei im Anschluss an die von *Jacobi* in seinen Vorlesungen gebrauchten Bezeichnungen*) zur Abkürzung:

$$\frac{\vartheta'(u,w)}{\vartheta(u,w)} = \chi(u,w),\quad \frac{d\chi(u,w)}{du} = \chi'(u,w)$$

gesetzt, so kommt:

$$4K(K-E) - 4\varkappa^2 K^2 \sin^2 \operatorname{am}(2Ku,\varkappa) = \chi'\left(u+\frac{1}{2}w, w\right),$$

und wenn u durch $u-\frac{1}{2}w$ ersetzt wird:

$$(16)\qquad 4K(K-E) - \frac{4K^2}{\sin^2 \operatorname{am}(2Ku,\varkappa)} = \chi'(u,w).$$

Substituirt man:

$$\varkappa',\quad K',\quad E',\quad \frac{u}{w}$$

für:

$$\varkappa,\quad K,\quad E,\quad u$$

*) In der *Borchardt*'schen Ausarbeitung, welche im I. Bande von *Jacobi*'s Werken abgedruckt ist, findet sich der Buchstabe ς an Stelle des im Vorlesungshefte gebrauchten Buchstaben χ.

und macht alsdann von der Relation:

$$\sin^2 \operatorname{am}(2Kui,\varkappa') = -\operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(2Ku,\varkappa)$$

Gebrauch, so erhält man die Gleichung:

$$(17)\qquad 4K'(K'-E') + \frac{4K'^2}{\operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(2Ku,\varkappa)} = \chi'\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right),$$

und aus der Verbindung der Gleichungen (16) und (17) geht das Resultat hervor:

$$(18)\qquad -4i(K'E+KE'-KK') = w\chi'(u,w) - \frac{1}{w}\chi'\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit du und integrirt, so kommt:

$$\frac{\vartheta'\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right)}{w\vartheta\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right)} - \frac{\vartheta'(u,w)}{\vartheta(u,w)} = \frac{4ui}{w}(K'E+KE'-KK'),$$

da die Integrationsconstante sich gleich Null erweist, wenn man u mit $-u$ vertauscht. Wird nun auf Grund der *Legendre*'schen Relation der Ausdruck auf der rechten Seite durch $\frac{2u\pi i}{w}$ ersetzt, dann auf beiden Seiten mit du multiplicirt und integrirt, so ergiebt sich die Transformationsgleichung:

$$\vartheta\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right) = Ce^{\frac{u^2\pi i}{w}}\vartheta(u,w),$$

in welcher C die Integrationsconstante bedeutet. Bestimmt man dieselbe durch den Werth $u=\frac{1}{2}w$, so erhält man die Formel:

$$(19)\qquad \frac{\vartheta\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{w}\right)} = e^{\frac{4u^2-w^2}{4w}\pi i}\,\frac{\vartheta(u,w)}{\vartheta\left(\frac{1}{2}w, w\right)},$$

welche ihrem Inhalte nach mit der Formel (5) im art. 56 der Fundamenta übereinstimmt.

VI.

In seinen grundlegenden, aber selten citirten, auf ganz originalen Ideen beruhenden „Beiträgen zur Theorie der elliptischen Functionen“, welche 1847 im 35. Bande des *Crelle*'schen Journals erschienen sind, hat *Eisenstein*, wie für die Theorie der ϑ-Function überhaupt, so insbesondere für die lineare Transformation derselben und implicite auch für die *Legendre*'sche Relation wesentlich neue Gesichtspunkte aufgestellt.

Eisenstein geht in der sechsten seiner Reihe von Abhandlungen*), anknüpfend an die Productentwickelungen der Kreisfunctionen, von dem Doppelproducte aus:

$$(20) \qquad \prod_{m,n}\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right) \qquad (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

in welchem α, β, γ, x complexe Variabeln bedeuten. Ersetzt man hierin, im Anschluss an die obigen Bezeichnungen:

α durch v, β durch w, γ durch $v\sigma+w\tau$, $\gamma-x$ durch u_0 oder $v\sigma_0+w\tau_0$,

wo $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0$ *reelle* Variabeln sind, so nimmt das *Eisenstein*'sche Doppelproduct die Gestalt an:

$$(21) \qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{n=-N}^{n=N}\prod_{m=-M}^{m=M}\frac{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w},$$

und man erhält alsdann durch Summation in Beziehung auf m und Benutzung der Formel:

$$\lim_{M=\infty}\prod_{m=-M}^{m=M}\frac{x+m}{y+m}=\frac{\sin x\pi}{\sin y\pi}$$

das einfache Product:

$$\lim_{N=\infty}\prod_{n=-N}^{n=N}\frac{\sin\left(v\sigma_0+w(\tau_0+n)\right)\frac{\pi}{v}}{\sin\left(v\sigma+w(\tau+n)\right)\frac{\pi}{v}}.$$

Der Werth desselben ist gleich:

$$\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

und es ergiebt sich also die Gleichung:

$$(21^*) \qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{m,n}\frac{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}=\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \qquad \binom{m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M}{n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N}.$$

*) *Crelle*'s Journal Bd. 35, S. 153.

Eisenstein untersucht nun a. a. O. die Werthänderung, welche das Doppelproduct (21) erfährt, wenn man darin:

$$\sigma', \tau', \sigma_0', \tau_0', v', w'$$

für:

$$\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0, v, w$$

substituirt, wobei $\sigma', \tau', \sigma_0', \tau_0', v', w'$ durch die Gleichungen:

$$(22) \qquad \begin{aligned} &\sigma'=\alpha\sigma+\beta\tau+\gamma, \quad \sigma_0'=\alpha\sigma_0+\beta\tau_0+\gamma, \quad v'=\beta'v-\alpha'w \\ &\tau'=\alpha'\sigma+\beta'\tau+\gamma', \quad \tau_0'=\alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0+\gamma', \quad w'=-\beta v+\alpha w \end{aligned}$$

definirt sind und $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ irgend welche der Bedingung $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ genügende ganze Zahlen bedeuten.

Diese Untersuchung gliedert sich in zwei deutlich unterschiedene Theile. Der erste enthält den Nachweis, dass die Differenz, welche verbleibt, wenn von dem Logarithmus des Doppelproducts (21), d. h. also von der Doppelsumme:

$$(23) \qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\log\left(1-\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}\right),$$

die zweifach unendliche Reihe:

$$(24) \qquad -\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\left\{\sum_{m,n}\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}+\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}\right)^2\right\} \qquad \binom{-M\leqq m\leqq M}{-N\leqq n\leqq N}$$

subtrahirt wird, bei der angegebenen Substitution ihren Werth behält, und im zweiten Theile wird alsdann die durch die Substitution bewirkte Werthänderung eben dieser Reihe (24) ermittelt. Dabei bleiben Glieder der Reihe, in endlicher Anzahl, ausser Betracht; der übrige Theil der Reihe tritt bei der Entwickelung der nach Potenzen von:

$$\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}$$

entwickelbaren Logarithmen der Doppelsumme (23) auf und bildet darin das Aggregat der ersten beiden Glieder.

Bedeutet $\mathrm{En}(u_0, u, v, w)$ eine Function von:

$$u_0, u, v, w \qquad \binom{u_0=v\sigma_0+w\tau_0}{u=v\sigma+w\tau},$$

deren Logarithmus jene Differenz der beiden Doppelsummen (23) und (24) ist, welche sich nach der *Eisenstein*'schen Abhandlung als eine *Invariante der Aequivalenz*:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \sim (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w')$$

in der oben bei (22) angegebenen Bedeutung von σ_0', τ_0', σ', τ', v', w' erweist, so ist auch die Function $\mathrm{En}(u_0, u, v, w)$ selbst eine solche und soll deshalb als „*Eisenstein*-*sche Invariante*" bezeichnet werden.

Die *Eisenstein*'sche Invariante hängt nicht von ihren vier Argumenten selbst, sondern nur von deren Verhältnissen ab; ihre Beziehung zu dem ϑ-Quotienten in (21*) wird, wenn man zur Abkürzung:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{u+mv+nw}=f_1(u,v,w)$$
$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(u+mv+nw)^2}=f_2(u,v,w) \qquad \begin{pmatrix}-M\leqq m\leqq M\\ -N\leqq n\leqq N\end{pmatrix}$$

setzt, durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$e^{-(u-u_0)f_1(u,v,w)-\frac{1}{2}(u-u_0)^2 f_2(u,v,w)}\,\mathrm{En}(u_0,u,v,w)=\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}. \tag{25}$$

Der Nachweis der Invarianteneigenschaft von $\log \mathrm{En}(u_0, u, v, w)$ ist in dem ersteren der beiden oben unterschiedenen Theile der *Eisenstein*'schen Entwickelungen nach gewöhnlichen Methoden geführt, indem die absolute Convergenz der Reihe:

$$\sum_{l,m,n}\frac{c^{(l)}}{(u+mv+nw)^{l+2}} \qquad \begin{pmatrix}l=1,2,3,\ldots\\ m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung dargethan wird, dass die absoluten Werthe der Coefficienten $c^{(l)}$ unter einer bestimmten Grenze bleiben und dass, falls $u+mv+nw$ für ein Werthsystem m, n gleich Null ist, dieses bei der Summation ausgeschlossen wird. Aber die Bestimmung der Werthänderungen der hier mit $f_1(u, v, w)$, $f_2(u, v, w)$ bezeichneten Reihen bei der Substituirung von v', w' für v, w im zweiten Theile ist a. a. O. in eigenthümlicher, höchst sinnreicher Weise erfolgt; nur ist die Darstellung etwas weitläufig, und ich will deshalb hier die bezügliche *Eisenstein*'sche Deduction in wesentlich vereinfachter Form auseinandersetzen.

Gemäss der Definition von $f_1(u, v, w)$ und $f_2(u, v, w)$ ist für beide Werthe $r=1$, $r=2$:

$$f_r(u+v,v,w)-f_r(u,v,w)=0 \tag{26}$$

und:

$$f_r(u+w,v,w)-f_r(u,v,w) \tag{27}$$
$$=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\left\{\sum_{m=-M}^{m=M}(u+mv+(N+1)w)^{-r}-\sum_{m=-M}^{m=M}(u+mv-Nw)^{-r}\right\}.$$

Werden hier die Summationen ausgeführt, und zwar mittels der Formeln:

$$\lim_{M=\infty}\sum_{m=-M}^{m=M}(x+mv)^{-1}=-\frac{\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{e^{-\frac{\varepsilon x\pi i}{v}}+e^{\frac{\varepsilon x\pi i}{v}}}{e^{-\frac{\varepsilon x\pi i}{v}}-e^{\frac{\varepsilon x\pi i}{v}}},$$
$$\lim_{M=\infty}\sum_{m=-M}^{m=M}(x+mv)^{-2}=-\frac{4\pi^2}{v^2}\cdot\left(e^{\frac{\varepsilon x\pi i}{v}}-e^{-\frac{\varepsilon x\pi i}{v}}\right)^{-2},$$

wo ε das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theils von $\frac{x}{v}$ bedeutet, so ergiebt die Gleichung (27) das Resultat:

$$f_1(u+w,v,w)-f_1(u,v,w)=-\frac{2\varepsilon\pi i}{v},\quad f_2(u+w,v,w)-f_2(u,v,w)=0,$$

folglich, wegen der Gleichung (26), für zwei beliebige ganze Zahlen g, h:

$$f_r(u+gv+hw,v,w)-f_r(u,v,w)=-\frac{2\varepsilon h\pi i}{v}\text{ oder }=0, \tag{28}$$

je nachdem $r=1$ oder $r=2$ ist.

Setzt man nun:

$$gv+hw=-t,\quad g'=\alpha g+\beta h,\quad h'=\alpha' g+\beta' h$$

und wie oben:

$$v'=\beta' v-\alpha' w,\quad w'=-\beta v+\alpha w,$$

wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze der Bedingung $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ genügende Zahlen bedeuten, so ist:

$$g'v'+h'w'=gv+hw=-t,\quad hv'-h'v=\alpha' t \tag{29}$$

und gemäss der Gleichung (28):

$$f_r(u+g'v'+h'w',v',w')-f_r(u,v',w')=-\frac{2\varepsilon h'\pi i}{v'}\text{ oder }=0, \tag{28*}$$

je nachdem $r=1$ oder $r=2$ ist. Die Gleichungen (28), (28*), (29) führen also zu dem Ergebniss:

$$f_r(u-t,v',w')-f_r(u-t,v,w)-f_r(u,v',w')+f_r(u,v,w)=\frac{2\varepsilon\alpha' t\pi i}{vv'}\text{ oder }=0, \tag{30}$$

je nachdem $r=1$ oder $r=2$ ist.

In den Entwickelungen der Ausdrücke:

$$-\frac{1}{u}+f_1(u,v,w)+\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{u}{(mv+nw)^2}$$
$$-\frac{1}{u^2}+f_2(u,v,w)-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2} \qquad \left(\begin{smallmatrix} m=\pm1,\pm2,\ldots\pm M \\ n=\pm1,\pm2,\ldots\pm N\end{smallmatrix}\right)$$

nach steigenden Potenzen von u kommen nur Glieder vor, in welchen die dritte oder eine höhere Potenz von $(mv+nw)$ den Nenner bildet; beide Ausdrücke behalten also nach den oben erwähnten *Eisenstein*'schen Ausführungen ihre Werthe, wenn v' für v und w' für w substituirt wird. Aus der Gleichung (30) geht demnach für $r=1$ die folgende hervor:

$$\text{(30*)} \qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\left\{\frac{1}{(mv'+nw')^2}-\frac{1}{(mv+nw)^2}\right\}=\frac{2\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'} \qquad \left(\begin{smallmatrix} m=\pm1,\pm2,\ldots\pm M \\ n=\pm1,\pm2,\ldots\pm N\end{smallmatrix}\right),$$

und man erhält hieraus unmittelbar mit Hülfe der Gleichungen (28*) und (30) zur Bestimmung der Werthänderungen von f_1 und f_2 beim Übergange von u, v, w zu u', v', w' die Relationen:

$$\text{(31)} \qquad \begin{aligned} f_1(u',v',w')-f_1(u,v,w) &= -\frac{2\varepsilon\alpha' u\pi i}{vv'}-\frac{2\varepsilon\gamma'\pi i}{v'}, \\ f_2(u',v',w')-f_2(u,v,w) &= \frac{2\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'}, \end{aligned}$$

unter den Bedingungen:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \alpha\sigma+\beta\tau+\gamma, & v' &= \beta' v-\alpha' w, & u &= v\sigma+w\tau \\ \tau' &= \alpha'\sigma+\beta'\tau+\gamma', & w' &= -\beta v+\alpha w, & u' &= v'\sigma'+w'\tau' \end{aligned} \qquad (\alpha\beta'-\alpha'\beta=1).$$

Dabei ist $u'=u+\gamma v+\gamma' w$, und ε bedeutet das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theiles von $\frac{w}{v}$.

Der Exponent von e auf der linken Seite der Gleichung (25) war:

$$-(u-u_0)f_1(u,v,w)-\frac{1}{2}(u-u_0)^2 f_2(u,v,w) \qquad \left(\begin{smallmatrix} u_0=v\sigma_0+w\tau_0 \\ u=v\sigma+w\tau\end{smallmatrix}\right).$$

Wird hierin u_0, u, v, w durch u_0', u', v', w' ersetzt und von dem so resultirenden Ausdruck der ursprüngliche subtrahirt, so sind darauf die Relationen (31) anwendbar,

da $u-u_0=u'-u_0'$ ist, und es ergiebt sich das Resultat:

$$(u^2-u_0^2)\frac{\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'}+(u-u_0)\frac{2\varepsilon\gamma'\pi i}{v'}.$$

Aus der Gleichung (25) erhält man daher die Transformationsgleichung für die ϑ-Function:

$$\text{(32)} \qquad \frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v'},\frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)}{\vartheta\left(\frac{u'}{v'},\frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)}=\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}e^{(u^2-u_0^2)\frac{\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'}+(u-u_0)\frac{2\varepsilon\gamma'\pi i}{v'}}.$$

Setzt man hierin $\sigma=0, \tau=0, \gamma=0, \gamma'=0$, so wird $u=u'=0$, $u_0=u_0'$, und es kommt:

$$\text{(33)} \qquad v'\cdot\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v'},\frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)}=v\cdot\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}e^{\frac{-u_0^2}{vv'}\varepsilon\alpha'\pi i};$$

setzt man aber $\sigma=0$, $\tau=\frac{1}{2}$, $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\alpha'=1$, $\beta'=0$, $\gamma=0$, $\gamma'=0$, so resultirt die oben im art. III mit (20) bezeichnete Transformationsgleichung, welche *Jacobi* im art. 56 der Fundamenta mit Hülfe der *Legendre*'schen Relation abgeleitet hat.

Die hier auseinandergesetzte *Eisenstein*'sche Methode der Ableitung der Transformationsgleichung für die ϑ-Function beruht ganz wesentlich auf der Erkenntniss, dass von dem Doppelproduct (21), welches den Ausgangspunkt seiner Untersuchungen bildet und seinem Werthe nach durch einen Quotienten zweier ϑ-Functionen dargestellt wird, ein Theil $\mathrm{En}(u_0, u, v, w)$ als Factor abgesondert werden kann, welcher bei der linearen Transformation der ϑ-Functionen seinen Werth behält. Dieser Theil, welchen ich als die *Eisenstein*'sche Invariante bezeichnet habe, war durch die Gleichung (25) in folgender Weise bestimmt:

$$\mathrm{En}(u_0,u,v,w)=\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}e^{(u-u_0)f_1(u,v,w)+\frac{1}{2}(u-u_0)^2 f_2(u,v,w)}.$$

Nun erhält man für die hierbei vorkommenden Functionen f_1, f_2, wenn man in den Reihen, durch welche sie definirt sind, die Summation in Beziehung auf m ausführt, die Werthe:

$$v f_1(u, v, w) = \frac{\vartheta'\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = \chi\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$$

$$-v^2 f_2(u, v, w) = \frac{\vartheta''\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \left(\frac{\vartheta'\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\right)^2 = \chi'\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right).$$

Die *Eisenstein*'sche Invariante ist also auch einzig und allein durch ϑ-Functionen in folgender Weise darzustellen:

$$\log \mathrm{En}\,(u_0, u, v, w) = \log \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)} - \left(\frac{u_0 - u}{v}\right) \frac{\vartheta'\left(\frac{u}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)} - \frac{1}{2}\left(\frac{u_0 - u}{v}\right)^2 \left\{\frac{\vartheta''\left(\frac{u}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)} - \left(\frac{\vartheta'\left(\frac{u}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)}\right)^2\right\}, \tag{34}$$

d. h. die *Eisenstein*'sche Invariante kann dadurch definirt werden, dass ihr Logarithmus gleich demjenigen Theile der Entwickelung von

$$\log \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)}$$

nach Potenzen von $u_0 - u$ ist, welcher erst mit der dritten Potenz anfängt.

Die *Eisenstein*'sche Invariante ist eine Invariante der Aequivalenz:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \sim (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w')$$

unter den Bedingungen:

$$\begin{array}{lll} \sigma_0' = \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma, & \sigma' = \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma, & v' = \beta' v - \alpha' w, \\ \tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma', & \tau' = \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma', & w' = -\beta v + \alpha w. \end{array} \qquad {\scriptstyle (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)}$$

Werden die Bedingungen aber auf die Werthe $\gamma = \gamma' = 0$ eingeschränkt, so stellen die mit u_0, u bezeichneten Ausdrücke:

$$v\sigma_0 + w\tau_0, \quad v\sigma + w\tau$$

und daher, nach den oben citirten *Eisenstein*'schen Darlegungen, auch die Ausdrücke:

$$\begin{array}{l} f_1(u, v, w) + u \lim\limits_{N=\infty} \lim\limits_{M=\infty} \sum\limits_{m,n} (mv + nw)^{-2} \\ f_2(u, v, w) - \lim\limits_{N=\infty} \lim\limits_{M=\infty} \sum\limits_{m,n} (mv + nw)^{-2} \end{array} \qquad \left({\scriptstyle m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \atop n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N}\right)$$

Invarianten dar. Es entsteht daher in dem nunmehr beschränkteren Sinne auch eine Invariante, wenn man in der Definitionsgleichung (25) der *Eisenstein*'schen Invariante

$$f_1(u, v, w) \text{ durch } -u \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum (mv + nw)^{-2}$$

$$f_2(u, v, w) \text{ durch } \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum (mv + nw)^{-2}$$

ersetzt. Die so entstehende Invariante ist:

$$\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\frac{1}{2}(u_0^2 - u^2)\Sigma(mv + nw)^{-2}}, \tag{35}$$

und man hat hierbei unter der Summe $\sum(mv + nw)^{-2}$ im Exponenten den Grenzwerth:

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} (mv + nw)^{-2} \qquad \left({\scriptstyle m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \atop n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N}\right)$$

zu verstehen, welcher, wie unmittelbar aus der Definitionsgleichung von $f_2(u, v, w)$ hervorgeht, gleich dem folgenden ist:

$$\lim_{u=0} \left(-\frac{1}{u^2} + f_2(u, v, w)\right).$$

Benutzt man nun zur Bestimmung *dieses* Grenzwerths die obige Darstellung von f_2 durch ϑ-Functionen, so resultirt die Gleichung:

$$v^2 \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} (mv + nw)^{-2} = -\frac{1}{3} \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \qquad \left({\scriptstyle m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \atop n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N}\right), \tag{36}$$

und also für den Logarithmus der Invariante (35) die Bestimmung:

$$\log \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} + \frac{u^2 - u_0^2}{6v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}. \tag{37}$$

Auf eben dieselbe Invariante führt die Entwickelung nach steigenden Potenzen von u auf der rechten Seite der Gleichung (34). Denn diese ist bis auf Glieder, welche für $u = 0$ verschwinden:

$$-\log u + \frac{(u - u_0)(3u - u_0)}{2u^2} + \log \frac{v\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{u_0^2}{6v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

Setzt man also:

$$\log \frac{v\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{u_0^2}{6v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = \log \overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right), \tag{38}$$

so bestimmt sich die Function $\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$ als Grenzwerth der allgemeineren *Eisenstein*'schen Invariante durch die Gleichung:

$$\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{u}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) = \lim_{u=0} u \,\mathrm{En}\,(u_0, u, v, w)\, e^{\frac{-(u-u_0)(3u-u_0)}{2u^2}}; \tag{39}$$

sie ist selbst eine Invariante der beschränkteren, nur auf die Grössen v und w bezüglichen Aequivalenz:

$$(v, w) \sim (\beta' v - \alpha' w, -\beta v + \alpha w) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

und die obige Invariante (35) ist in der Form:

$$\frac{\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

als Quotient zweier Invarianten $\overline{\mathrm{En}}$ darstellbar.

VII.

Durch die unendlichen Doppelproducte und Doppelsummen, welche *Eisenstein* seiner neuen Theorie der elliptischen Functionen zu Grunde gelegt hat, werden diese so zu sagen in ihre „*Elemente*“ zerlegt. Die *Legendre*'sche Relation erscheint dabei zuerst in der allgemeinen Form:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\left\{\sum_{m,n}\frac{1}{(mv'+nw')^2} - \sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2}\right\} = \frac{2\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'}, \tag{40}$$
$$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M; \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

aus welcher dann, wenn man in den Substitutionsgleichungen:

$$v' = \beta' v - \alpha' w,\; w' = -\beta v + \alpha w \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

$\alpha = 0, \beta = -1, \alpha' = 1, \beta' = 0$ annimmt, die speciellere Relation:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\left\{\sum_{m,n}\frac{1}{(mw+nv)^2} - \sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2}\right\} = -\frac{2\varepsilon\pi i}{vw} \tag{41}$$
$$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M; \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

hervorgeht. Diese speciellere Relation (41) zeigt sich als vollkommen identisch mit der *Legendre*'schen Relation in der obigen Gestalt (6):

$$v^2 \frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)} - w^2 \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = 6\varepsilon v w \pi i,$$

wenn darin für den Quotienten $\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}$ die Werthe aus der Gleichung (36) eingesetzt werden.*)

Die allgemeinere Relation (40) entsteht einfach aus der zweiten der oben mit (31) bezeichneten Gleichungen, indem darin $\gamma' = 0$, also $u' = u$ und dann $u = 0$ gesetzt wird, und diese Gleichung ist es, auf welcher in der *Eisenstein*'schen Entwickelung die lineare Transformation der ϑ-Function beruht. Dies tritt besonders deutlich in der oben mit (38) bezeichneten Gleichung hervor. Denn da der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ungeändert bleibt, wenn die Grössen v, w durch v', w' ersetzt werden, so ergiebt sich zuvörderst bei Anwendung der ihrem Inhalte nach mit der Relation (40) gleichbedeutenden Formel:

$$\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)}{v'^2\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)} - \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{v^2\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = -\frac{6\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'} \tag{40*}$$

ganz unmittelbar das Resultat:

$$\frac{v'\vartheta\left(\frac{u_0}{v'}, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)} = \frac{v\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{-u_0^2\frac{\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'}}, \tag{42}$$

in genauer Übereinstimmung mit der obigen Gleichung (33). Ferner entsteht aus derselben Formel (40*) durch „exponentielle Integration“ — wie *Eisenstein* treffend die der logarithmischen Differentiation entgegengesetzte Operation bezeichnet**) — die Transformationsgleichung:

$$\frac{C}{v'\sqrt{v'}}\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right) = \frac{1}{v\sqrt{v}}\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right), \tag{42*}$$

---

*) Eine andere Art der Ableitung der *Legendre*'schen Relation aus den *Eisenstein*schen Entwickelungen findet sich auf S. 27—29 der Inauguraldissertation des Hrn. *Adolf Hurwitz* (Leipzig 1881).

**) *Crelle*'s Journal, Bd. 35, S. 226.

wo C die Integrationsconstante bedeutet. Der Werth derselben erweist sich sowohl für den Fall:

$$\alpha = 1\,, \beta = -1\,, \alpha' = 0\,, \beta' = 1$$

bei beliebigen Grössen v, w, als auch für den Fall:

$$\alpha = 0\,, \beta = -1\,, \alpha' = 1\,, \beta' = 0\,,$$

wenn dabei $w = \varepsilon i v$ genommen wird, als eine achte Wurzel der Einheit, und da sich aus lauter Substitutionen der beiden angegebenen Arten *jede* Substitution:

$$v' = \beta' v - \alpha' w, \quad w' = -\beta v + \alpha w$$

zusammensetzen lässt, so ist der Werth von C stets $e^{\frac{h\pi i}{4}}$, und die ganze Zahl h bestimmt sich durch die Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Mit Hülfe der Gleichung (42*) und der angegebenen Bestimmung von C geht die Transformationsgleichung (42) in folgende über:

$$\text{(43)} \qquad \sqrt{v'}\,\vartheta\left(\frac{u_0}{v'}, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right) = \sqrt{v}\,\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) e^{-u_0^2\frac{\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'} + \frac{h\pi i}{4}},$$

und da andererseits die obige Formel (40*) oder die damit gleichbedeutende Relation (40) durch Differentiation aus der Transformationsgleichung (43) hervorgeht, so erweisen sich diese beiden Gleichungen als vollständig aequivalent. Es zeigen also auch die *Eisenstein*'schen Entwickelungen, und zwar mit besonderer Deutlichkeit, die inhaltliche Übereinstimmung der *Legendre*'schen Relation mit derjenigen, welche zwischen linear transformirten ϑ-Functionen besteht.

Es verdient wohl noch hervorgehoben zu werden, dass sich gemäss der Bemerkung am Schlusse des art. IV für die dort angenommenen besonderen Werthe:

$$\varepsilon w = v e^{\frac{2}{3}\pi i}, \quad \varepsilon w = vi$$

aus der Gleichung (36) die beiden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(2m-n+ni|\sqrt{3}|)^2} = \frac{\pi}{2|\sqrt{3}|} \\ &\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(m+ni)^2} = \pi \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm M \\ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm N \end{pmatrix}$$

zur Bestimmung der *Eisenstein*'schen Doppelsummen $\sum(mv + nw)^{-2}$ ergeben.

VIII.

Die wahre Natur und Bedeutung der *Eisenstein*'schen, oben im art. VI mit $f_1(u, v, w)$ bezeichneten Doppelsumme $\sum\limits_{m,n}(u + mv + nw)^{-1}$, welche aus der logarithmischen Differentiation des *Eisenstein*'schen Doppelproductes entsteht und die logarithmische Ableitung der ϑ-Function darstellt, wird erst durch die in gewissem Sinne allgemeinere Doppelreihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ vollständig aufgeklärt. Ich werde dies in einer weiteren Mittheilung zur Theorie der elliptischen Functionen ausführlich darlegen und hier nur so weit darauf eingehen, als es für die *Legendre*'sche Relation von Wichtigkeit ist.[1])

Die Doppelreihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ ist durch die Gleichung definirt:

$$\text{(44)} \qquad \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)v + (\tau+n)w}, \qquad (u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0;\ u = v\sigma + w\tau)$$

wobei die Summation auf die ganzzahligen Werthe von m, n zu erstrecken ist, welche den Ungleichheitsbedingungen genügen:

$$|\alpha m + \beta n| \leq M, \quad |\alpha' m + \beta' n| \leq N,$$

vorausgesetzt, dass $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen sind, für die $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ ist. Der Werth der Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ wird durch die Function $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ dargestellt, welche folgendermaassen definirt ist:

$$\text{(45)} \qquad \overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \frac{1}{v}\, e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}}\, \frac{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0 + u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

oder:

$$\text{(45*)} \qquad \overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\varepsilon\pi i}\,\frac{\mathrm{Atr}'(0, v, \varepsilon w)\,\mathrm{Atr}(\varepsilon u_0 + u, v, \varepsilon w)}{\mathrm{Atr}(\varepsilon u_0, v, \varepsilon w)\,\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)},$$

wenn von den Bezeichnungen Gebrauch gemacht wird:

$$\text{(46)} \qquad \mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w) = (2\pi)^{\frac{1}{3}}\left(\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\right)^{-\frac{1}{3}}\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) e^{\frac{u\tau\varepsilon\pi i}{v}},$$

$$\text{(46*)} \qquad \mathrm{Atr}'(0, v, \varepsilon w) = \frac{1}{v}\,(2\pi)^{\frac{1}{3}}\left(\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\right)^{\frac{2}{3}},$$

---

[1]) Vgl. Zusatz 8 am Ende dieses Bandes. II

welche ich im art. XX, § 8 meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen eingeführt habe.[1])

Die complexen Grössen u_0, u sind durch die complexen Grössen v, w und durch die reellen Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ vollkommen bestimmt, nämlich in *der* Weise, dass die Gleichungen zu erfüllen sind:

$$u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0, \quad u = v\sigma + w\tau,$$

und ε ist das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theiles von $\frac{w}{v}$, also dadurch bestimmt, dass der reelle Theil von $\frac{\varepsilon w i}{v}$ negativ werden muss. Die Functionen $\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)$, $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ sind hiernach eigentlich Functionen der reellen Grössen $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0$ und der beiden complexen Grössen v, w; die letztere der beiden Functionen, sowie die 12te Potenz der ersteren, behält ihren Werth, wenn:

$$\begin{array}{lcccccc} & \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, & \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0, & \alpha\sigma + \beta\tau, & \alpha'\sigma + \beta'\tau, & \beta' v - \alpha' w, & -\beta v + \alpha w \\ \text{für:} & \sigma_0, & \tau_0, & \sigma, & \tau, & v, & w \end{array}$$

substituirt wird, vorausgesetzt, dass, wie oben, $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen sind, welche der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ genügen. Die Functionen $(\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w))^{12}$, $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, w)$ sind also Invarianten der ganzen Classe von Grössensystemen:

$$\text{(S)} \qquad (\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0,\ \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0,\ \alpha\sigma + \beta\tau,\ \alpha'\sigma + \beta'\tau,\ \beta' v - \alpha' w,\ -\beta v + \alpha w),$$

welche durch die verschiedene Wahl der Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ entstehen,*) und eben deshalb ist in der Bezeichnung Atr der griechische Ausdruck für Invariante „ἄτροπος“ angedeutet. Mit Hinsicht auf diesen Ausdruck ist wohl auch passender Weise die Invarianteneigenschaft einer Function einfach als „Atropie“ zu bezeichnen, und man kann auch sonst mit Vortheil neben den von dem treffenden *Sylvester*'schen Ausdruck „Invariante“ hergeleiteten Wortbildungen solche benutzen, die dem Griechischen entlehnt sind, zumal diese sich für unsere Sprachformen fügsamer erweisen. So ist z. B. hierdurch leicht dem in den vorliegenden Entwickelungen auftretenden Bedürfniss eines Ausdrucks zu genügen, durch welchen die gegenseitige Beziehung zweier Functionen mit invarianter oder „atroper“ Differenz gekennzeichnet wird.

---

*) Vergl. art. XX § 8 meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen (Sitzungsbericht vom 30. Januar 1890[2]).

[1]) Bd. V, S. 91 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) Bd. V, S. 91 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Um dies für den allgemeinen Fall darzulegen, knüpfe ich an meine Bemerkungen über Invarianten an, mit welchen ich die Auseinandersetzungen im art. XX meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen*) eingeleitet habe. Danach soll also für zwei Functionen von $\mathfrak{n}$ Grössen:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots \mathfrak{z}_n), \quad \mathfrak{G}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots \mathfrak{z}_n)$$

eine Gleichung bestehen:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots \mathfrak{z}_n) - \mathfrak{G}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots \mathfrak{z}_n) = \mathfrak{J}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots \mathfrak{z}_n),$$

in welcher $\mathfrak{J}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots \mathfrak{z}_n)$ eine Invariante der durch alle einander aequivalenten Systeme:

$$(\mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2', \dots \mathfrak{z}_n'), \quad (\mathfrak{z}_1'', \mathfrak{z}_2'', \dots \mathfrak{z}_n''), \quad (\mathfrak{z}_1''', \mathfrak{z}_2''', \dots \mathfrak{z}_n'''), \dots$$

gebildeten Classe bedeutet. Da hiernach die beiden Functionen $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ beim Übergang von einem Grössensystem $(\mathfrak{z}')$ zu einem aequivalenten $(\mathfrak{z}'')$ eine und dieselbe Änderung erfahren, also „gleichändrig“ sind, so können sie füglich im Anschluss an jene griechische Invariantenbezeichnung „isotrop“ genannt werden.**)

Schon oben in der Einleitung ist erwähnt worden, dass das Aggregat der Glieder erster Dimension in der Entwickelung der Function $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ nach steigenden Potenzen von $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$, nämlich:

$$(u + \varepsilon u_0)\left[\frac{2\tau_0 \varepsilon \pi i}{u_0 v} + \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{3v^2 \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\right],$$

sowie dessen erster Factor $u + \varepsilon u_0$, und also auch der in Parenthesen eingeschlossene Ausdruck, invariant oder „atrop“ ist. Nach der nunmehr eingeführten Terminologie ist daher:

$$\text{(47)} \qquad -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \text{ isotrop mit } \frac{6\tau_0 \varepsilon \pi i}{u_0 v},$$

---

*) Sitzungsbericht vom 30. Januar 1890[1]).

**) Die übliche physikalische Bedeutung des Wortes „isotrop“ bildet offenbar kein Hinderniss für die hier vorgeschlagene andere Verwendung desselben Wortes innerhalb einer ganz anderen Ideensphaere.

[1]) Bd. V, S. 58 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

und da zwischen den Grössen v, τ_0 und den transfomirten v', τ'_0 offenbar die Beziehung stattfindet:

$$\frac{\tau_0'}{v'} - \frac{\tau_0}{v} = \frac{\alpha' u_0}{v v'} \qquad \begin{pmatrix} v' = \beta' v - \alpha' w \\ \tau_0' = \alpha' \sigma_0 + \beta' \tau_0 \\ u_0 = v \sigma_0 + w \tau_0 \end{pmatrix},$$

so folgt ganz unmittelbar die oben im art. VII mit (40*) bezeichnete Gleichung:

$$(40^*) \qquad \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)}{v'^2 \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)} - \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{v^2 \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = -\frac{6 \varepsilon \alpha' \pi i}{v v'},$$

welche für $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$ die *Legendre*'sche Relation in der Gestalt ergiebt, wie sie im art. I (6) entwickelt worden ist. *Die Isotropie* (47) *repraesentirt also die Legendre'sche Relation.*

Aus derselben Isotropie folgt ferner, dass der Ausdruck:

$$\frac{1}{u^2} \log \frac{v \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{1}{6 v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

welcher gemäss der Gleichung (38) invariant ist, diese Eigenschaft behält, wenn der zweite Theil durch die damit isotrope Function $\frac{\tau_0 \varepsilon \pi i}{u_0 v}$ ersetzt wird. Der auf diese Weise entstehende Ausdruck:

$$\frac{\tau_0 \varepsilon \pi i}{u_0 v} + \frac{1}{u^2} \log \frac{v \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

ist also ebenfalls invariant, und folglich auch der Ausdruck:

$$(48) \qquad \frac{v \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\frac{u^2 \tau_0 \varepsilon \pi i}{u_0 v}} \qquad \begin{pmatrix} u = v\sigma + w\tau \\ u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0 \end{pmatrix},$$

sowie derjenige, welcher resultirt, wenn man darin τ für τ_0 und zugleich u für u_0 setzt, also:

$$(49) \qquad \frac{v \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\frac{u \tau \varepsilon \pi i}{v}} \qquad (u = v\sigma + w\tau).$$

Dieser letztere Ausdruck kann in folgender Weise dargestellt werden:

$$v (2\pi)^{-\frac{1}{3}} \left(\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w),$$

und hierbei haben die beiden Theile, nämlich die Function $\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)$ und der Factor, mit welchem sie multiplicirt ist, *für sich* die Eigenschaft, dass ihre 12te Potenz invariant ist.

Der Ausdruck (49), welcher, wenn darin $v\sigma + w\tau$ für u substituirt wird, die Form annimmt:

$$(49^*) \qquad \frac{v \vartheta\left(\sigma + \tau \frac{w}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\left(\sigma + \tau \frac{w}{v}\right) \tau \varepsilon \pi i},$$

hat genau dieselbe Invarianten-Eigenschaft wie jene im art. VI mit $\overline{\mathrm{En}}\left(\sigma + \tau \frac{w}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$ bezeichnete Function, welche sich a. a. O. aus der *Eisenstein*'schen Invariante als ein Grenzwerth derselben ergeben hat. Es zeigt sich also, dass für den Zweck, den ϑ-Ausdruck:

$$\frac{v \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

invariant zu machen, an Stelle des oben im art. VI angewendeten Factors mit dem Exponenten:

$$-\frac{u^2}{6 v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

der wesentlich einfachere Exponentialfactor:

$$e^{\left(\sigma + \tau \frac{w}{v}\right) \tau \varepsilon \pi i}$$

genügt, welcher das zweite Argument der ϑ-Function, nämlich $\frac{w}{v}$, im Exponenten nur linear enthält, während jener Exponent eine transcendete Function eben dieses Argumentes ist. Aber freilich bedurfte es, um den einfacheren Factor zu erlangen, der Zerlegung des ersten ϑ-Arguments u in seine Elemente $v\sigma$, $w\tau'$, welche sich überhaupt als naturgemäss erwiesen und namentlich den weiteren Fortschritt von den *Eisenstein*'schen Doppelsummen zu der mit $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ bezeichneten und deren Abgeleiteten ermöglicht hat.

Die Invarianten-Eigenschaft der Function (49*) wird durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(50)\qquad \frac{v\vartheta\left(\sigma+\tau\frac{w}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}e^{\left(\sigma+\tau\frac{w}{v}\right)\tau\varepsilon\pi i}=\frac{v'\vartheta\left(\sigma'+\tau'\frac{w'}{v'},\frac{\varepsilon w'}{v'}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w'}{v'}\right)}e^{\left(\sigma'+\tau'\frac{w'}{v'}\right)\tau'\varepsilon\pi i},$$

deren genaue Übereinstimmung mit der Transformationsgleichung (42) im art. VII evident wird, wenn man die Relation $v\tau'-v'\tau=\alpha'u$ in Betracht zieht.

Während also die Isotropie (47) die *Legendre*'sche Relation repraesentirt, stellt die Atropie der Function (49*) die Relation dar, welche zwischen linear transformirten ϑ-Functionen besteht, und da, wie mehrfach erwähnt worden, die erstere Relation *selbstverständlich* als eine Folge der letzteren aufgefaßt werden kann, so wird durch die vorstehende Entwickelung, in welcher sich die Atropie der Function (49*) als eine Folge der Isotropie (47) ergeben hat, wiederum den Nachweis der *Aequivalenz* der *Legendre*'schen Relation und der linearen ϑ-Transformation vervollständigt.

Die Herleitung der Atropie der Function (49*) aus der Isotropie (47) erfolgte dabei mit Hülfe der *Eisenstein*'schen Entwickelungen, aber man wird auch ganz direct auf eben diese Atropie geführt, wenn man, wie jetzt geschehen soll, von jenen Reihen ausgeht, die ich schon im art. XXII meiner Mittheilungen „zur Theorie der elliptischen Functionen" behandelt habe*), und welche in Grenzfällen auf die *Eisenstein*schen Doppelsummen führen.

IX.

Die Integration der Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ hat a. a. O. im art. XXII, § 1, (𝔈)[2]) zu der Reihe geführt:

$$(51)\qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}\log\frac{(\sigma_0'+m)v+(\tau_0'+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w},$$
$$(m=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm M;\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm N)$$

*) Sitzungsbericht vom 31. Juli 1890[1]).

[1]) Bd. V, S. 128 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) Bd. V, S. 130 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

deren Werth mit:

$$\log \mathrm{atr}\,(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$$

bezeichnet werden soll. Dabei sind $\sigma, \tau, \sigma_0', \tau_0', \sigma_0, \tau_0$ reelle Grössen; u, u_0', u_0 sind also, da das Verhältnis $v:w$ wesentlich complex ist, durch die Gleichungen:

$$u=v\sigma+w\tau,\ u_0'=v\sigma_0'+w\tau_0',\ u_0=v\sigma_0+w\tau_0$$

vollkommen bestimmt, und ε hat die hier durchweg festgehaltene Bedeutung als Vorzeichen des mit i multiplicirten Theiles von $\frac{w}{v}$. Die Reihe (51) geht, wenn $\sigma=\tau=0$ gesetzt wird, in jene über:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\log\frac{(\sigma_0'+m)v+(\tau_0'+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w}\qquad\binom{m=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm M}{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm N},$$

welche *Eisenstein*, wie oben im art. VI erwähnt worden, eingehend untersucht hat. Es kann nun, nach *Eisenstein*'s Vorgang, auch die allgemeinere Reihe (51) in folgende drei Theile zerlegt werden:

$$(52)\qquad -(u_0-u_0')\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w}\ \text{oder}\ -(u_0-u_0')\,\mathrm{Ser}\,(u, u_0, v, w),$$

$$(53)\qquad -\frac{1}{2}(u_0-u_0')^2\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}}{((\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w)^2}\ \text{oder}\ -\frac{1}{2}(u_0-u_0')^2\,\mathrm{Ser}_1(u, u_0, v, w),$$

$$(54)\qquad \sum_{m,n}e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}\left(\frac{u_0-u_0'}{u_0+mv+nw}+\frac{(u_0-u_0')^2}{2(u_0+mv+nw)^2}+\log\left(1-\frac{u_0-u_0'}{u_0+mv+nw}\right)\right).$$

Sondert man in diesem letzten Theile diejenigen Glieder ab, in denen:

$$|u_0+mv+nw|\leqq|u_0-u_0'|$$

ist, und welche offenbar nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, so kann der Überrest, mittels Entwickelung der Logarithmen nach steigenden Potenzen von:

$$\frac{u_0-u_0'}{u_0+mv+nw},$$

durch die Reihe dargestellt werden:

$$-\sum_{\varrho=2}^{\varrho=\infty}\frac{(u_0-u_0')^{1+\varrho}}{1+\varrho}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}}{((\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w)^{1+\varrho}},$$

deren absolute Convergenz *Eisenstein* im art. VI, § 2 seiner mehrfach citirten Abhandlung*) nachgewiesen hat. Da nun durch die Substitution von:

$$\begin{array}{lcccccc} & \alpha\sigma+\beta\tau+\gamma, & \alpha'\sigma+\beta'\tau+\gamma', & \alpha\sigma_0+\beta\tau_0, & \alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0, & \alpha\sigma_0'+\beta\tau_0', & \alpha'\sigma_0'+\beta'\tau_0' \\ \text{für:} & \sigma, & \tau, & \sigma_0, & \tau_0, & \sigma_0', & \tau_0' \end{array}$$

sowie von: $\beta' v-\alpha' w$ für v und $-\beta v+\alpha w$ für w $\quad (\alpha\beta'-\alpha'\beta=1)$

in der Reihe (54) nur eine Vertauschung der verschiedenen Glieder mit einander bewirkt wird, so ist der Werth dieser Reihe invariant. Eben dieselbe Eigenschaft habe ich für die Werthe der beiden Reihen $\mathrm{Ser}(u, u_0, v, w)$, $\mathrm{Ser}_1(u, u_0, v, w)$ im art. XXI meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen nachgewiesen.[1]) Hiernach ist der Gesammtwerth der drei Reihen (52), (53), (54), d. h. also der mit $\log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ bezeichnete Werth der Reihe (51) eine Invariante der ganzen Classe von Grössensystemen:

$$(\overline{\mathrm{S}}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha\sigma+\beta\tau+\gamma, & \alpha\sigma_0+\beta\tau_0, & \alpha\sigma_0'+\beta\tau_0', & \beta'v-\alpha'w \\ \alpha'\sigma+\beta'\tau+\gamma', & \alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0, & \alpha'\sigma_0'+\beta'\tau_0', & -\beta v+\alpha w \end{pmatrix},$$

welche durch die verschiedene Wahl der Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ mit der Bedingung $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ entstehen; die Function $\mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ selbst ist daher ebenfalls für alle Grössensysteme ($\overline{\mathrm{S}}$) atrop.

Setzt man $u=0$, so reducirt sich die Function $\mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, w)$ auf das Product:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{m,n}\frac{(\sigma_0'+m)v+(\tau_0'+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w} \qquad \begin{pmatrix} m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix},$$

und es ist also gemäss der Gleichung (21*) im art. VI:

$$(55) \qquad \mathrm{atr}(0, u_0', u_0, v, \varepsilon w) = \frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit u_0 und setzt dann $u_0=0$, so kommt, wenn noch der Einfachheit halber u für u_0' genommen wird:

$$(56) \qquad \lim_{u_0=0} u_0\, \mathrm{atr}(0, u, u_0, v, \varepsilon w) = \frac{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

*) *Crelle*'s Journal, Bd. 35.

[1]) Bd. V, S. 103 ff. dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

und es zeigt sich hierbei deutlich, in welcher Weise die Function $\mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ eine Verallgemeinerung der ϑ-Function enthält.

Den Differentialquotienten:

$$\frac{\partial \log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0'}$$

kann man bilden, indem man die beiden Ausdrücke (52), (53) und dann die Reihe (54) gliedweise nach u_0' differentiirt. Man erhält auf diese Weise das Resultat:

$$(57) \qquad \frac{\partial \log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0'} = \mathrm{Ser}(u, u_0', v, w) = \overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0', v, \varepsilon w)$$

und also die Reihenentwickelung:

$$(58) \qquad \log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w) = -\sum_n \mathrm{Ser}_{n-1}(u, u_0, v, w)\frac{(u_0-u_0')^n}{n!} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

oder:

$$(59) \qquad \log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w) = \sum_n \frac{\partial^{(n-1)}\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0^{n-1}}\frac{(u_0'-u_0)^n}{n!} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Um nun zum Grenzwerth für $\sigma=\tau=0$ oder $u=0$ überzugehen, ist zuvörderst der bezügliche Grenzwerth der Function:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w) \;\text{ oder }\; \frac{1}{v}\, e^{\frac{2\tau u_0 \pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\varepsilon u+u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

zu bestimmen. Derselbe wird durch die bemerkenswerthe Gleichung gegeben:

$$(60) \qquad \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\left(-\frac{1}{\varepsilon u}+\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, w)\right) = \frac{1}{v}\frac{\vartheta'\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} + 2\varepsilon\pi i \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\frac{u_0\tau}{uv},$$

welche gilt, wie man auch zu den Werthen $\sigma=0$, $\tau=0$ übergehen mag.

Setzt man $\alpha'\sigma+\beta'\tau$ für τ sowie zugleich $\beta'v-\alpha'w$ für v und $-\beta v+\alpha w$ für w, und nimmt für $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen, für welche $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ ist, so behält der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (60) seinen Werth, und es ist daher für alle verschiedenen Systeme ($\overline{\mathrm{S}}$):

$$\frac{1}{v}\frac{\vartheta'\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \;\text{ isotrop mit }\; -2\varepsilon\pi i \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\frac{u_0\tau}{uv}.$$

Dies ergiebt sich übrigens auch durch logarithmische Differentiation des obigen Ausdrucks (48), da hierbei die Atropie desselben offenbar erhalten bleibt.

Ersetzt man in der Gleichung (60) u_0 durch $u_0 - z$ und entwickelt dann auf beiden Seiten nach steigenden Potenzen von z, so erhält man die Relationen:

(61) $$\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\partial\,\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0} = \frac{\partial^2 \log\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\partial u_0^2} + 2\varepsilon\pi i \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\tau}{u v},$$

(62) $$\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\partial^{(n-1)}\,\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0^{n-1}} = \frac{\partial^{(n)} \log\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\partial u_0^{n}} \qquad (n=3,4,\ldots).$$

Benutzt man nun die Relationen (60), (61), (62) in der Gleichung (59), so geht dieselbe in folgende über:

(63) $$\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \left(\frac{\varepsilon(u_0 - u_0')}{v\sigma + w\tau} + \log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)\right) = \log\frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} + \frac{u_0'^2 - u_0^2}{v}\varepsilon\pi i \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\tau}{u};$$

man erhält also die Grenzwerthbestimmung:

(64) $$\lim e^{-\frac{\varepsilon(u_0' - u_0)}{v\sigma + w\tau}} \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w) = \frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\varepsilon\pi i \lim \frac{(u_0'^2 - u_0^2)\tau}{v(v\sigma + w\tau)}},$$

in welcher sich das Zeichen lim auf beiden Seiten auf die Werthe $\sigma = 0$, $\tau = 0$ bezieht, und die Gleichung (63) kann vermöge der Definition der Function atr auch so dargestellt werden:

(63*) $$\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\varepsilon(u_0 - u_0')}{v\sigma + w\tau} + \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i} \log\frac{(\sigma_0' + m)v + (\tau_0' + n)w}{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w}$$
$$= \log\frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} + \frac{u_0'^2 - u_0^2}{v}\varepsilon\pi i \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\tau}{u}.$$

Multiplicirt man die Gleichung (64) auf beiden Seiten mit u_0 und setzt dann $u_0 = 0$, so kommt:

(65) $$\lim_{u_0=0} \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} u_0 e^{-\frac{\varepsilon(u_0' - u_0)}{v\sigma + w\tau}} \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w) = v\frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\varepsilon\pi i \lim \frac{u_0'^2\tau}{u v}},$$

wo das Zeichen lim rechts im Exponenten sich auf die Werthe $\sigma = 0$, $\tau = 0$ bezieht. Diese Gleichung (65) ist es nun, auf deren Herleitung die vorstehende Entwickelung abzielte; denn aus derselben folgt ganz direct die Atropie des oben bei (48) angegebenen Ausdrucks:

$$\frac{v\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\frac{u^2\tau_0\varepsilon\pi i}{u_0 v}} \qquad \begin{pmatrix} u = v\sigma + w\tau \\ u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0 \end{pmatrix},$$

und dieser Ausdruck ergiebt, wenn man darin u für u_0 und τ für τ_0 setzt, jene einfache Invariante:

$$\frac{v\vartheta\left(\sigma + \tau\frac{w}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\left(\sigma + \tau\frac{w}{v}\right)\tau\varepsilon\pi i},$$

welche oben bei (49) angegeben worden ist und mit den bei (46) und (46*) definirten Invarianten $\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)$, $\mathrm{Atr}'(0, v, \varepsilon w)$ in der einfachen Beziehung steht:

$$v\cdot\frac{\vartheta\left(\sigma + \tau\frac{w}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\left(\sigma + \tau\frac{w}{v}\right)\tau\varepsilon\pi i} = \frac{\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)}{\mathrm{Atr}'(0, v, \varepsilon w)}.$$

Wie umfassend die Eigenschaften der Invariante $\mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ sind, zeigt sich unter Anderem auch darin, dass aus der Entwickelung ihres Logarithmus nach steigenden Potenzen von σ, τ, σ_0, τ_0, σ_0', τ_0' unmittelbar die *Legendre*'sche Relation hervorgeht. Das Aggregat der Glieder einer und derselben Dimension in der Entwickelung von $\log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ ist nämlich offenbar für sich invariant, und es ist das Aggregat der Glieder *zweiter* Dimension, dessen Atropie die *Legendre*sche Relation ergiebt. Dieses Aggregat wird mittels der Gleichung (59) erhalten, wenn man sich in der Entwickelung des auf der rechten Seite stehenden Ausdrucks auf die beiden ersten Glieder beschränkt, da die übrigen keinen Beitrag dazu liefern. Es ist also nur das Aggregat der Glieder zweiter Dimension in der Entwickelung des folgenden Ausdrucks zu bilden:

$$(u_0' - u_0)\,\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w) + \frac{1}{2}(u_0' - u_0)^2 \frac{\partial\,\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0}.$$

Dasselbe ist für den ersten Theil dieses Ausdrucks schon aus der Einleitung zu entnehmen, da dort bei ($\mathfrak{A}$) das Aggregat der Glieder erster Dimension für

$\overline{\mathrm{Atr}}\,(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ angegeben ist. Dieses ist nämlich:

$$(\overline{\mathfrak{A}})\qquad \frac{2\varepsilon\tau\pi i}{uv} + \frac{1}{3v^2}\,\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

Genau denselben Ausdruck findet man aber als das Aggregat der Glieder nullter Dimension von:

$$\frac{\partial\,\overline{\mathrm{Atr}}\,(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0},$$

und es bildet somit der Ausdruck:

$$(\overline{\mathfrak{A}}_1)\qquad \frac{1}{2}\left(u_0' - u_0\right)\left(2\varepsilon u + u_0' + u_0\right)\left\{\frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(v\sigma + w\tau)} + \frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\right\}$$

das gesuchte Aggregat der Glieder zweiter Dimension in der Entwickelung von $\log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ nach steigenden Potenzen von $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0, \sigma_0', \tau_0'$.

Der Schluss von der Atropie des hier erlangten Ausdrucks $(\overline{\mathfrak{A}}_1)$ auf die *Legendre*'sche Relation kann in folgender Weise formulirt werden. Die bezeichnete Atropie ist vollkommen gleichbedeutend mit der Isotropie der beiden Ausdrücke:

$$-\frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(v\sigma + w\tau)}, \qquad \frac{1}{3v^2}\,\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)};$$

dieselben gehen, wenn man:

$$\sigma, \tau, \qquad v, w$$

durch:

$$-\tau, \sigma, -w, v$$

ersetzt, über in:

$$\frac{2\varepsilon\sigma\pi i}{w(v\sigma + w\tau)}, \qquad \frac{1}{3w^2}\,\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{-\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{-\varepsilon v}{w}\right)},$$

und da beide, als „isotrop“, bei diesem Übergange *dieselbe* Änderung erfahren müssen, so muß die Gleichung bestehen:

$$\frac{1}{3w^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{-\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{-\varepsilon v}{w}\right)} - \frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = 2\varepsilon\pi i\left(\frac{\sigma}{w(v\sigma + w\tau)} - \frac{\tau}{v(v\sigma + w\tau)}\right),$$

durch welche die *Legendre*'sche Relation genau in derselben Form wie im art. I (6) dargestellt wird.

Da sich oben der Ausdruck $(\overline{\mathfrak{A}})$ für das Aggregat der Glieder nullter Dimension ergeben hat, welche in der Entwickelung von:

$$\frac{\partial\,\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0}$$

oder, was dasselbe ist, von:

$$-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i}}{(u_0 + mv + nw)^2} \qquad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix}$$

nach steigenden Potenzen von $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0$ vorkommen, so resultirt die Grenzwerthbestimmung:

$$(66)\qquad \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{\cos(n\sigma - m\tau)2\pi}{(mv + nw)^2} = -\frac{1}{3v^2}\,\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{2\varepsilon\pi i}{v}\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\frac{\tau}{v\sigma + w\tau}.$$

$$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M;\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

Vergleicht man dieselbe mit derjenigen, welche im art. VI (36) angegeben ist, nämlich:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv + nw)^2} = \frac{-1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \qquad \begin{pmatrix} m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix},$$

so gelangt man zu der Relation:

$$(67)\qquad \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{\cos(n\sigma - m\tau)2\pi}{(mv + nw)^2} = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv + nw)^2} - \frac{2\varepsilon\pi i}{v}\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\frac{\tau}{v\sigma + w\tau},$$

$$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M;\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

welche die Verschiedenheit der Resultate bei den verschiedenen Weisen des Grenzübergangs deutlich zeigt, da hiernach der Werth der Reihe:

$$\sum_{m,n}\frac{\cos(n\sigma - m\tau)2\pi}{(mv + nw)^2} \qquad \begin{pmatrix} m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix}$$

sich für die Grenzwerthfolge:

$$\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}$$

um den Betrag von:

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\frac{\tau}{v\sigma + w\tau}$$

geringer erweist, als bei der Grenzwerthfolge:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}.$$

Da ferner die Reihe auf der linken Seite der Relation (67) für die ganze Classe von Grössensystemen:

$$(\alpha\sigma+\beta\tau,\ \alpha'\sigma+\beta'\tau,\ \beta'v-\alpha'w,\ -\beta v+\alpha w) \qquad {\scriptstyle(\alpha\beta'-\alpha'\beta=1)},$$

welche durch verschiedene Wahl der ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ entstehen, invariant oder atrop ist, so wird durch eben dieselbe Relation auch die Isotropie der beiden Ausdrücke:

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{\tau}{v\sigma+w\tau},\quad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2} \qquad \begin{pmatrix} m=\pm1,\pm2,\dots\pm M\\ n=\pm1,\pm2,\dots\pm N\end{pmatrix}$$

dargelegt, und aus dieser folgt wegen der Identität:

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{\beta'v-\alpha'w}\cdot\frac{\alpha'\sigma+\beta'\tau}{v\sigma+w\tau}-\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{\tau}{v\sigma+w\tau}=\frac{2\varepsilon\alpha'\pi i}{v(\beta'v-\alpha'w)}$$

ganz unmittelbar die *Legendre*'sche Relation in jener allgemeinen Form, in welcher sie sich schon im art. VII (40) ergeben hat.

X.

Die Isotropie der beiden Ausdrücke:

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{\tau}{v\sigma+w\tau},\quad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2} \qquad \begin{pmatrix} m=\pm1,\pm2,\dots\pm M\\ n=\pm1,\pm2,\dots\pm N\end{pmatrix}$$

oder:

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{\tau}{v\sigma+w\tau},\quad -\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

aus welcher die *Legendre*'sche Relation unmittelbar hervorgeht, ist ihrerseits, wie schon in der Einleitung erwähnt worden, eine unmittelbare Consequenz der Atropie von $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)$, da der Ausdruck:

$$\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}+\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{\tau}{v\sigma+w\tau}$$

als Aggregat der Glieder nullter Dimension in der Entwickelung von:

$$\frac{\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\varepsilon u+u_0}$$

nach steigenden Potenzen von $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0$ erscheint. Nun ist zwar die Atropie der Function $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)$ oder der mit $\mathrm{Ser}(u, u_0, v, w)$ bezeichneten Reihe:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}}{u_0+mv+nw} \qquad \begin{pmatrix} m=0,\pm1,\pm2,\dots\pm M\\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\pm N\end{pmatrix}$$

im art. XXI[1]) meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen in einfacher Weise und namentlich im letzten Paragraphen (§ 10)[2]) mittels weniger übersichtlicher Schlussfolgerungen dargethan worden, aber weder in der Form der Reihe noch in der Darstellung durch ϑ-Functionen:

$$\frac{1}{v}\,e^{\frac{2\tau u_0\pi i}{v}}\,\frac{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\varepsilon u+u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

tritt die Atropie der Function $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)$ geradezu in *Evidenz*. Dies ist freilich bei jener schon oben im art. VIII (45*) erwähnten Darstellung durch die Invarianten $\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)$ der Fall, gemäss welcher $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)$ durch den Ausdruck:

$$e^{(\sigma_0\tau-\sigma\tau_0)\varepsilon\pi i}\,\frac{\mathrm{Atr}'(0, v, \varepsilon w)\,\mathrm{Atr}(\varepsilon u+u_0, v, \varepsilon w)}{\mathrm{Atr}(\varepsilon u, v, \varepsilon w)\,\mathrm{Atr}(u_0, v, \varepsilon w)}$$

dargestellt wird, jedoch nur insofern dabei die Atropie der Function $\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)$ vorausgesetzt wird; diese beruht aber wegen der Gleichung:

$$\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)=(2\pi)^{\frac{1}{3}}\left(\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)\right)^{-\frac{1}{3}}\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)e^{\frac{\tau u\varepsilon\pi i}{v}}$$

auf eben jener mit der *Legendre*'schen aequivalenten Relation, welche zwischen linear transformirten ϑ-Functionen besteht.

Dem hier hervorgehobenen Mangel wird durch jene Darstellung des absoluten Werthes von $\vartheta'(0)$ abgeholfen, welche ich schon im art. III meiner Mittheilungen „zur Theorie der elliptischen Functionen“ angegeben habe.*) Setzt man, wie dort:

$$w_1=\frac{-b_0+i}{2c_0},\quad w_2=\frac{b_0+i}{2c_0},\quad a_0=\frac{b_0^2+1}{4c_0}, \tag{68}$$

*) Sitzungsbericht vom 19. April 1883.[3])

[1]) Bd. V, S. 103 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. V, S. 123 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[3]) Bd. IV, S. 354 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

wo a_0, b_0, c_0 reelle Grössen bedeuten, so sind $w_1 i$, $w_2 i$ conjugirte complexe Grössen, und das Product $\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)$ ist also gleich dem Quadrate des absoluten Werthes jedes der beiden Factoren. Setzt man nun noch, wie a. a. O. zur Abkürzung:

$$(68^*) \qquad a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2 = f(m, n),$$

so besteht die Gleichung:

$$(69) \qquad \vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2) = 4\pi^2(\sqrt{c_0})^3 \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n)\, e^{-\pi f(m,n)},$$

in welcher die Summation rechts auf alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe von m, n auszudehnen ist. Erhebt man auf beiden Seiten zum Quadrat und ersetzt dann den reciproken Werth von c_0 durch $-i(w_1 + w_2)$, so kommt:

$$(70) \quad (iw_1 + iw_2)^3 (\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2))^2 = -16\pi^4 \Big(\sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n)\, e^{-\pi f(m,n)}\Big)^2,$$

und die in dieser Gleichung vorkommenden Grössen können in folgender Weise definirt werden. Es ist erstens:

$$f(m, n) = a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2,$$

wo a_0, b_0, c_0 irgend welche reelle, der Bedingung $4a_0 c_0 - b_0^2 = 1$ genügende Grössen bedeuten. Zweitens sind w_1 und $-w_2$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0.$$

Nimmt man nun an Stelle von a_0, b_0, c_0 beziehungsweise die drei allgemeineren Ausdrücke:

$$a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \quad 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', \quad a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2,$$

in denen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ beliebige, der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ genügende ganze Zahlen bedeuten, so behält die Reihe auf der rechten Seite von (70) offenbar ihren Werth, während w_1 und $-w_2$ die Bedeutung als Wurzeln der allgemeinen Gleichung:

$$(71) \qquad a_0 + b_0 \frac{\alpha' + \beta' w}{\alpha + \beta w} + c_0 \Big(\frac{\alpha' + \beta' w}{\alpha + \beta w}\Big)^2 = 0$$

erhalten, und es tritt also durch die Gleichung (70) die Atropie des Ausdrucks:

$$(iw_1 + iw_2)^3 (\vartheta'(0, w_1)\, \vartheta'(0, w_2))^2$$

für die Wurzeln $w_1, -w_2$ aller der verschiedenen Gleichungen (71) in Evidenz.

Aus eben dieser Atropie folgt, wenn man das eine Mal:

$$\alpha = \beta' = 1 \quad \alpha' = \beta = 0$$

das andere Mal:

$$\alpha = \beta' = 0 \quad \alpha' = 1 \quad \beta' = -1$$

nimmt, dass der absolute Werth des Ausdrucks:

$$(iw)^3 \frac{(\vartheta'(0, w))^2}{\Big(\vartheta'\big(0, -\frac{1}{w}\big)\Big)^2}$$

gleich Eins ist, und hieraus folgt ferner, dass das Quadrat des Ausdrucks selbst gleich Eins ist, d. h. dass die Gleichung besteht:

$$(72) \qquad \Big(\vartheta'\big(0, -\frac{1}{w}\big)\Big)^4 = -w^6 (\vartheta'(0, w))^4.$$

Denn wenn man eine Gleichung

$$|\Phi(x + yi)| = 1 \text{ oder } \Phi(x + yi)\,\Phi(x - yi) = 1$$

das eine Mal nach x, das andere Mal nach y logarithmisch differentiirt, so zeigt sich unmittelbar, dass $\Phi(x + yi)$ constant und also absolut genommen, gleich Eins sein muss. Dass endlich durch logarithmische Differentiation der Gleichung (72) die *Legendre*'sche Relation in der Form:

$$(73) \qquad w \frac{\vartheta''(0, w)}{\vartheta'(0, w)} - \frac{1}{w} \frac{\vartheta'''\big(0, -\frac{1}{w}\big)}{\vartheta'\big(0, -\frac{1}{w}\big)} = -6\pi i$$

entsteht, ist schon oben im art. IV bemerkt worden.

Es erscheint aber von grösserem Interesse, dass die Gleichung (73) sich in ähnlicher Weise wie die Gleichung (72), aus welcher sie hier durch logarithmische Differentiation hergeleitet worden ist, auf directem Wege ergiebt, wenn man die Differentiation an der Gleichung (70) ausführt.

Um dies näher darzulegen, gehe ich von der Gleichung aus:

$$-e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2) = |\sqrt{c_0}| \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} e^{-\pi f(m,n) + 2(m\sigma + n\tau)\pi i},$$

aus welcher in dem oben erwähnten art. III[1]) meiner Mittheilungen zur Theorie der

[1]) Bd. IV, S. 355 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

elliptischen Functionen jene Gleichung (69) hervorgegangen ist. Setzt man $\sigma = \tau = 0$, so kommt:

$$\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}e^{-\pi f(m,n)} = 0 \qquad {\scriptstyle (m,\, n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2\ldots)}, \tag{74}$$

und diese Gleichung ist nun ebenso wie die Gleichung (70) nach w_1 und w_2 zu differentiiren. Ich stelle hierfür zuvörderst einige dazu nothwendige Relationen zusammen:

$$f(m, n) = c_0(n - mw_1)(n + mw_2),$$

$$\frac{\partial f(m,n)}{\partial w_1} = \frac{if^2}{(n - mw_1)^2}, \quad \frac{\partial f(m,n)}{\partial w_2} = \frac{if^2}{(n + mw_2)^2},$$

$$c_0(w_1 + w_2) = i, \quad \frac{\partial c_0}{\partial w_1} = ic_0^2, \quad \frac{\partial^2 c_0}{\partial w_1 \partial w_2} = -2c_0^3,$$

$$\frac{\partial^2 f(m,n)}{\partial w_1 \partial w_2} = -2c_0^2 f(m, n), \quad \frac{\partial f(m,n)}{\partial w_1}\frac{\partial f(m,n)}{\partial w_2} = -c_0^2 f^2(m, n).$$

Mit Hülfe derselben erhält man als Resultat der Differentiation von (74) nach w_1 und w_2 die Gleichung:

$$\pi\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}f^2(m, n)e^{-\pi f(m,n)} = 2\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}f(m, n)e^{-\pi f(m,n)}. \tag{75}$$

Man findet ferner, wenn man die Reihe:

$$\sum(-1)^{(m-1)(n-1)}f(m, n)e^{-\pi f(m,n)}$$

nach w_1 und w_2 differentiirt, als Resultat:

$$c_0^2\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}\left(-2f(m, n) + 4\pi f^2(m, n) - \pi^2 f^3(m, n)\right)e^{-\pi f(m,n)},$$

welche mittels der Gleichung (75) sich auf folgendes reducirt:

$$c_0^2\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}\left(6f(m, n) - \pi^2 f^3(m, n)\right)e^{-\pi f(m,n)}.$$

Andererseits ergiebt die Differentiation des Ausdrucks:

$$c_0^{-\frac{3}{2}}\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)$$

nach w_1 und w_2 das Resultat:

$$-\frac{9}{16\pi^2}c_0^{-\frac{3}{2}}\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)\cdot c_0^2\left[\left(\frac{\vartheta'''(0, w_1)}{3c_0\vartheta'(0, w_1)} + 2\pi\right)\left(\frac{\vartheta'''(0, w_2)}{3c_0\vartheta'(0, w_2)} + 2\pi\right) - \frac{8}{3}\pi^2\right],$$

und die Differentiation der Gleichung (69) nach w_1 und w_2 führt also zu dem Ergebniss, dass das Product:

$$\left(\frac{\vartheta'''(0, w_1)}{3c_0\vartheta'(0, w_1)} + 2\pi\right)\left(\frac{\vartheta'''(0, w_2)}{3c_0\vartheta'(0, w_2)} + 2\pi\right) \tag{76}$$

oder, was dasselbe ist, das Quadrat des absoluten Werthes jedes der beiden Factoren in der Form:

$$-8\pi^2 + \frac{16\pi^4}{9}\frac{\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}f^3(m, n)e^{-\pi f(m,n)}}{\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}f(m, n)e^{-\pi f(m,n)}} \tag{77}$$

darstellbar ist, in welcher die Invarianteneigenschaft von:

$$\left|\frac{\vartheta'''(0, w)}{3c_0\vartheta'(0, w)} + 2\pi\right|^2 \tag{78}$$

evident wird.

Da gemäss eben dieser Invarianteneigenschaft, für den Fall $b_0 = 0$, also $w = \frac{i}{2c_0}$, die Gleichung:

$$iw\frac{\vartheta'''(0, w)}{\vartheta'(0, w)} - 3\pi = \pm\left[\frac{1}{iw}\frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{1}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{1}{w}\right)} - 3\pi\right]$$

bestehen und dabei das untere Zeichen gelten muss, weil sonst, wie die Integration ergiebt, das Product $\vartheta'(0, w)\vartheta'\left(0, -\frac{1}{w}\right)$ von w unabhängig sein müsste, so resultirt unmittelbar, zuvörderst nur für reelle Werthe von iw, die *Legendre*'sche Relation in der obigen Form (73):

$$w\frac{\vartheta'''(0, w)}{\vartheta'(0, w)} - \frac{1}{w}\frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{1}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{1}{w}\right)} = -6\pi i,$$

alsdann aber folgt in bekannter Weise, dass die Gleichung auch für complexe Werthe von iw gültig bleiben muss.

Nimmt man die Gleichung in der *Legendre*'schen Form:

$$K'E + KE' - KK' = \frac{1}{2}\pi,$$

und setzt ihre Gültigkeit nur für den Fall reeller Werthe von $\varkappa^2$ und $\varkappa'^2$ voraus, so kann man auch die Entwickelung nach steigenden Potenzen von $\varkappa^2$ benutzen, um die Gültigkeit für complexe Werthe von $\varkappa^2$ zu erschliessen. Überhaupt kann in einer nach steigenden Potenzen einer Variabeln z fortschreitenden und für alle Werthe $|z| < 1$ convergenten Reihe an Stelle von z eine ganze Function von n Variabeln $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ genommen und alsdann die Reihe im Sinne der Congruenz für ein Modulsystem $n$ter Stufe $(M', M'', M''', \dots)$ betrachtet werden, sobald der absolute Werth der Resultante der $n+1$ oder mehr Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$:

$$f, M', M'', M''', \dots,$$

der Convergenzbedingung gemäss, kleiner als Eins ist. Der bisher immer nur betrachtete Fall einer complexen Variabeln $z_1 + z_2 i$ tritt ein, wenn sich das Modulsystem auf den einen Modul $x_1^2 + 1$ reducirt und für z die lineare Function $z_1 + z_2 x_1$ genommen wird.

XI.

Im art. VI ist dargelegt worden, wie aus den Entwickelungen im Abschnitt VI, 1—3 der citirten Abhandlung *Eistenstein*'s*) die *Legendre*'sche Relation in der Gestalt hervorgeht:**)

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\left\{\sum_{m,n}\frac{1}{(mw+nv)^2}-\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2}\right\} = -\frac{2\varepsilon\pi i}{vw}, \qquad \begin{pmatrix} m=\pm1,\pm2,\dots\pm M;\ n=\pm1,\pm2,\dots\pm N \end{pmatrix} \tag{41}$$

welche, wenn man die Reihen durch ϑ-Functionen ausdrückt, sich in jene des art. I verwandelt:

$$v^2\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)} - w^2\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)} = 6\varepsilon v w \pi i. \tag{6}$$

Nunmehr soll aber gezeigt werden, wie die Hauptresultate des § 5 der *Eisenstein*-schen Abhandlung zur unmittelbaren Herleitung der Relation in der ursprünglichen *Legendre*'schen Form benutzt werden können.

Eisenstein führt a. a. O. für die Reihen:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}(u+mw+nv)^{-h}, \quad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}(mw+nv)^{-h} \qquad (h=1,2,3,\dots)$$
$$\begin{pmatrix} m=0,\pm1,\pm2,\dots\pm M \\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\pm N\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} m=\pm1,\pm2,\dots\pm M \\ n=\pm1,\pm2,\dots\pm N\end{pmatrix}$$

*) Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. *Crelle*'s Journal, Bd. XXXV.
**) Vergl. die Bemerkungen im Anfange des art. VII.

die Bezeichnungen ein:

$$(h, u), \quad (h^*, 0) \qquad (h=1,2,3\dots)$$

und untersucht deren Eigenschaften und gegenseitige Beziehungen. Den „Hauptgegenstand“ bildet dabei, wie er selbst ausdrücklich hervorhebt, die Herleitung der a. a. O. mit (5) bezeichneten Differentialgleichung, welche zeigt, dass die von ihm „durch doppelte Erzeugung aus den rationalen Functionen erlangten Functionen wirklich elliptische Functionen“ sind. Bestimmt man die dortige Constante c aus der mit (1.) bezeichneten Gleichung oder aus der Gleichung (5.) selbst, indem man die Variable x, nach Weglassung der negativen Potenzen, gleich Null setzt, und nimmt man dann u an Stelle von x, so erhält man die Gleichung in der Form:

$$(3,u)^2 = ((2,u)-(2^*,0))^3 - 15\,(4^*,0)\,((2,u)-(2^*,0)) - 35\,(6^*,0), \tag{79}$$

und wenn die elliptische Function: $(2,u)-(2^*,0)$, in Anknüpfung an den Namen *Eisenstein*'s, in dessen Abhandlung sie zuerst vorkommt, und zugleich im Anschluss an die in der Theorie der elliptischen Functionen schon üblichen Bezeichnungen sn, cn, dn mit:

$$\mathrm{en}\,(u, v, w)$$

oder noch kürzer mit $\mathrm{en}\,u$ bezeichnet, so nimmt die Gleichung (79) die Gestalt an:

$$\frac{1}{4}(\mathrm{en}'u)^2 = (\mathrm{en}\,u)^3 - 15\,(4^*,0)\,\mathrm{en}\,u - 35\,(6^*,0), \tag{80}$$

wo $\mathrm{en}'u$ die Ableitung von $\mathrm{en}\,u$ bedeutet*).

Benutzt man ferner die in art. VI eingeführten Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}(u+mv+nw)^{-1} &= f_1(u,v,w)\\ \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}(u+mv+nw)^{-2} &= f_2(u,v,w)\end{aligned}\right\} \qquad \begin{pmatrix}-M\leq m\leq M\\ -N\leq n\leq N\end{pmatrix},$$

so ist:

$$(2,u) = f_2(u,v,w), \quad (2^*,0) = \lim_{u_0=0}\left(-\frac{1}{u_0^2} + f_2(u_0,v,w)\right),$$

also:

$$\mathrm{en}\,u = \lim_{u_0=0}\left(f_2(u,v,w) - f_2(u_0,v,w) + \frac{1}{u_0^2}\right),$$

*) Die *Eisenstein*'sche elliptische Funktion $(2,u)-(2^*,0)$, welche hier mit $\mathrm{en}\,u$ bezeichnet ist, wird in der *Schwarz*'schen Formelsammlung mit $\wp u$ bezeichnet.

und setzt man noch, wie *Eisenstein*, zur Abkürzung:

$$(81)\qquad \begin{aligned} f_2\left(\frac{1}{2}v, v, w\right) &= a \\ f_2\left(\frac{1}{2}(v+w), v, w\right) &= a' \\ f_2\left(\frac{1}{2}w, v, w\right) &= a'', \end{aligned}$$

so drücken sich die weiter von *Eisenstein* entwickelten Resultate in folgender Weise aus:

$$(82)\qquad a + a' + a'' = 3\,(2^*, 0) = 3 \lim_{u_0=0}\left(-\frac{1}{u_0^2} + f_2(u_0, v, w)\right),$$

$$(83)\qquad \left(\frac{\partial f_2(u,v,w)}{\partial u}\right)^2 = 4\,(f_2(u,v,w) - a)(f_2(u,v,w) - a')(f_2(u,v,w) - a''),$$

$$(84)\qquad u - u_0 = \int\limits_{f_2(u_0,v,w)}^{f_2(u,v,w)} \frac{dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}},$$

$$(85)\qquad f_1(u_0, v, w) - f_1(u, v, w) = \int\limits_{f_2(u_0,v,w)}^{f_2(u,v,w)} \frac{y\,dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}}.$$

Mittels der Substitution:

$$y = a' \sin^2\varphi + a'' \cos^2\varphi$$

erhält man die Transformationsrelation:

$$(86)\qquad \int \frac{y\,dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}} = \frac{a}{\sqrt{a-a''}}\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \sqrt{a-a''}\int \Delta\varphi\, d\varphi,$$

wo in üblicher Weise $\Delta\varphi$ die Quadratwurzel aus:

$$1 - \frac{a'-a''}{a-a''}\sin^2\varphi$$

bedeutet. Die Gleichung (85) geht hiernach für:

$$u_0 = \frac{1}{2}w, \quad u = \frac{1}{2}(v+w)$$

in folgende über:

$$(87)\qquad f_1\left(\frac{1}{2}w, v, w\right) - f_1\left(\frac{1}{2}(v+w), v, w\right) = \frac{a}{\sqrt{a-a''}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \sqrt{a-a''}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\Delta\varphi\, d\varphi.$$

Nun ergibt aber die directe Summation der mit f_1 bezeichneten Reihen die Werthbestimmungen:

$$f_1\left(\frac{1}{2}v, v, w\right) = 0,\ f_1\left(\frac{1}{2}w, v, w\right) = -\frac{\varepsilon\pi i}{v},\ f_1\left(\frac{1}{2}(v+w), v, w\right) = -\frac{\varepsilon\pi i}{v};$$

es ist sonach der Werth des mit dem *Eisenstein*'schen elliptischen Integral zweiter Gattung:

$$\int\limits_{a''}^{a'} \frac{y\,dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}}$$

identischen Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (87) gleich Null, d. h. es wird:

$$(88)\qquad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\Delta\varphi\, d\varphi = \frac{a}{\sqrt{a-a''}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

oder nach den *Jacobi-Legendre*'schen Bezeichnungen, wenn noch:

$$\frac{a'-a''}{a-a''} = \varkappa^2$$

gesetzt wird:

$$(89)\qquad \frac{E}{K} - (1-\varkappa^2) = \frac{a'}{a-a''}.$$

Wendet man die Substitution $y = a'\sin^2\varphi + a''\cos^2\varphi$ auf die Gleichung (84) an, so kommt für $u_0 = \frac{1}{2}w$, $u = \frac{1}{2}(v+w)$:

$$v\sqrt{a-a''} = 2K, \quad w\sqrt{a-a''} = 2K'i,$$

und wenn man diese Werthe von v und w in der mit a' bezeichneten Reihe:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{4}{((2m+1)v + (2n+1)w)^2} \qquad \binom{-M \leqq m \leqq M}{-N \leqq n \leqq N}$$

einsetzt, so geht die Gleichung (89) in folgende über:

$$(90)\qquad \frac{E}{K} - (1-\varkappa^2) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{((2m+1)K + (2n+1)K'i)^2}, \quad (-M \leqq m \leqq M,\ -N \leqq n \leqq N)$$

oder nach der obigen Bezeichnungsweise:

$$(91)\qquad \frac{E}{K} - (1-\varkappa^2) = f_2(K + K'i, 2K, 2K'i).$$

Vertauscht man hierin $\varkappa^2$ mit $1-\varkappa^2$, so kommt:

$$\frac{E'}{K'} - \varkappa^2 = -f_2(K+K'i, 2K'i, 2K), \tag{92}$$

und da gemäss der zweiten von den beiden Formeln (31) in art. VI die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (91) und (92) zusammen das Resultat $\frac{\pi}{2KK'}$ ergeben, so führt die additive Verbindung eben dieser beiden Gleichungen offenbar zu der *Legendre*'schen Relation in der ursprünglichen Gestalt:

$$K'E + KE' - KK' = \frac{1}{2}\pi\ ^{1)}.$$

[1]) Vgl. Zusatz 9 am Ende dieses Bandes.

H

ÜBER DIE BEDINGUNGEN DER INTEGRABILITÄT

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Bd. 59, S. 311—312.

ÜBER DIE BEDINGUNGEN DER INTEGRABILITÄT.

I. Jeder Ausdruck: $X_0\,dx_0 + X_1\,dx_1 + \cdots X_{n-1}\,dx_{n-1}$, in welchem $X_0, X_1, \ldots$ beliebige rationale Functionen der Variabeln x sind, lässt sich, wenn für alle Werthe $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots n-1$:

$$x_\varkappa = \left(z_0 + \omega^\varkappa z_1 + \omega^{2\varkappa} z_2 + \cdots + \omega^{(n-1)\varkappa} z_{n-1}\right)^n$$

gesetzt und für ω irgendeine primitive $n$te Wurzel der Einheit genommen wird, auf folgende bemerkenswerthe Form bringen:

$$\text{(A)} \qquad \varphi(z_0, z_1, \ldots z_{n-1})dz_0 + \varphi(z_1, z_2, \ldots z_0)dz_1 \\ + \varphi(z_2, z_3, \ldots z_1)dz_2 + \cdots + \varphi(z_{n-1}, z_0 \ldots z_{n-2})dz_{n-1}.$$

Durch die angegebene Substitution gehen nämlich $X_0, X_1, \ldots$ in gewisse rationale Functionen der Variabeln z über, welche respective mit: $f_0, f_1, \ldots$ bezeichnet werden sollen, und es verwandelt sich demnach $\sum X_\varkappa\,dx_\varkappa$ in:

$$\text{(B)}\; n\cdot\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} f_\varkappa\cdot\left(z_0 + \omega^\varkappa z_1 + \omega^{2\varkappa} z_2 + \cdots \omega^{(n-1)\varkappa} z_{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(dz_0 + \omega^\varkappa dz_1 + \omega^{2\varkappa} dz_2 + \cdots \omega^{(n-1)\varkappa} dz_{n-1}\right).$$

In diesem Ausdruck ist der Factor von dz_0:

$$n\sum f_\varkappa\left(z_0 + \omega^\varkappa z_1 + \omega^{2\varkappa} z_2 + \cdots + \omega^{(n-1)\varkappa} z_{n-1}\right)^{n-1},$$

welcher mit: $\varphi(z_0, z_1, z_2, \ldots z_{n-1})$ bezeichnet werden möge. Wenn hierin die Variabeln z cyklisch permutirt werden, und zwar dergestalt, dass z_i für z_0, z_{i+1} für z_1, etc. gesetzt wird, so bleiben die Ausdrücke: $(z_0 + \omega^\varkappa z_1 + \omega^{2\varkappa} z_2 + \cdots + \omega^{(n-1)\varkappa} z_{n-1})^n$, aus denen $f_0, f_1, \ldots$ rational zusammengesetzt sind, also auch diese Functionen f selbst, ungeändert, und man erhält demnach:

$$\varphi(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots z_{i-1}) = n\sum f_\varkappa\left(z_i + \omega^\varkappa z_{i+1} + \omega^{2\varkappa} z_{i+2} + \cdots + \omega^{(n-1)\varkappa} z_{i-1}\right)^{n-1}$$

oder:

$$\varphi(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots z_{i-1}) = n\cdot\sum f_\varkappa\cdot\omega^{i\varkappa}\left(z_0 + \omega^\varkappa z_1 + \omega^{2\varkappa} z_2 + \cdots + \omega^{(n-1)\varkappa} z_{n-1}\right)^{n-1}.$$

Es ist daher $\varphi(z_i, z_{i+1}, \ldots z_{i-1})$ der Factor von: dz_i in dem Ausdrucke (B), welcher also in der That die aufgestellte Form (A) annimmt.

Wenn man die Voraussetzung, daß $X_0, X_1, \ldots$ die Variabeln x nur rational enthalten sollen, fallen lässt, so ist die Verwandlung von $\sum X_\varkappa dx_\varkappa$ in einen Ausdruck von der Form (A) zwar noch möglich, aber es sind dabei gewisse Erörterungen nöthig, die ich der Kürze halber übergehen muss.

II. Für die Form (A), auf welche sich, wie eben gezeigt worden, jeder Differentialausdruck: $\sum X_\varkappa dx_\varkappa$ bringen lässt, reduciren sich die Bedingungen der Integrabilität (je nachdem n grade oder ungrade ist) auf nur $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ Gleichungen, welche durch die folgende repräsentirt werden:

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial\varphi(z_0, z_1, \cdots z_{n-1})}{\partial z_\varkappa} = \frac{\partial\varphi(z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa-1})}{\partial z_0},$$

wenn darin $\varkappa$ die Zahlen $1, 2, 3 \ldots$ bis $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ bedeutet. Da nämlich in der allgemeinen Bedingung der Integrabilität des Ausdruckes (A):

$$\frac{\partial\varphi(z_r, z_{r+1}, \cdots z_{r-1})}{\partial z_s} = \frac{\partial\varphi(z_s, z_{s+1}, \cdots z_{s-1})}{\partial z_r}$$

angenommen werden kann, dass der kleinste positive Rest von: $(s-r)$ modulo n nicht über $\frac{1}{2}n$ liegt, so geht dieselbe aus der Gleichung (C) unmittelbar hervor, wenn darin für $\varkappa$ jener Rest von: $(s-r)$ genommen wird und $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ respective durch $z_r, z_{r+1}, \ldots z_{r-1}$ ersetzt werden.

Ich darf nicht unerwähnt lassen, dass die angegebene Reduction der Integrabilitätsbedingungen ebenso rein formaler Art ist, wie diejenige, welche *Jacobi* im 23sten Bande dieses Journals pag. 101[1]) gegeben hat. Die Bedingungen dafür, dass $\sum X_\varkappa dx_\varkappa$ integrabel, dass also die Gleichung:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r}$$

für alle Indices r und s identisch erfüllt sei, sind wesentlich Bedingungen für die in $X_0, X_1, \ldots$ enthaltenen Constanten und bleiben als solche von allen jenen Reductionen unberührt.

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. IV, S. 251 u. 252.

ZUR POTENTIALTHEORIE

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 70. S. 276—278.

ZUR POTENTIALTHEORIE.

Es seien t und θ irgendwie begrenzte Theile des Raumes, welche sich auch ganz oder theilweise decken können, und die rechtwinkligen Coordinaten im ersteren mögen mit x, y, z, die im letzteren mit ξ, η, ζ bezeichnet werden; ferner seien P und Π die beiden durch die Gleichungen:

$$P(x, y, z) = \int \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)d\theta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

$$\Pi(\xi, \eta, \zeta) = \int \frac{f(x, y, z)dt}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

definirten Potentiale und $P_1, P_2, P_3, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ die durch Differentiation daraus hergeleiteten Componenten der Attraction. Alsdann folgt unmittelbar aus den Integral-Ausdrücken für P_h, Π_h die identische Gleichung:

$$\text{(I)} \int P_h(x-a, y-b, z-c) \cdot f(x, y, z)dt + \int \Pi_h(\xi+a, \eta+b, \zeta+c) \cdot \varphi(\xi, \eta, \zeta)d\theta = 0,$$

wo $h = 1, 2, 3$ zu setzen ist, und a, b, c beliebige reelle Grössen bedeuten. Bezeichnet man der Kürze halber diese beiden Integrale, deren Summe verschwindet, mit:

$$F_h(-a, -b, -c), \quad \Phi_h(a, b, c),$$

so erhält man für $h = 1$:

$$\frac{F_1(-a, 0, 0) - F_1(0, 0, 0)}{-a} = \frac{\Phi_1(a, 0, 0) - \Phi_1(a, 0, 0)}{a}.$$

Wenn sich also der eine dieser beiden Quotienten, z. B. der auf der linken Seite, für $a = 0$ einer bestimmten Grenze: $F_{11}(0, 0, 0)$ nähert, so ist der bezügliche Werth zugleich der Grenzwerth des andern, und man erhält demgemäss die Relation:

$$F_{hh}(0, 0, 0) = \Phi_{hh}(0, 0, 0)$$

für $h = 1, 2, 3$ und folglich:

$$\text{(II)} \qquad F_{11} + F_{22} + F_{33} = \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}.$$

Setzt man die partielle Differentialgleichung also auch implicite die Existenz der zweiten Ableitungen und deren nur in Flächen unterbrochene Stetigkeit für eines der beiden Potentiale z. B. für P voraus, so kann man den Grenzwerth F_{11} bilden, indem man unter dem Integralzeichen für:

$$\lim_{a=0} \frac{P_1(x-a, y, z) - P_1(x, y, z)}{-a}$$

den Werth $\frac{\partial P_1}{\partial x}$ setzt. Hiernach wird:

$$F_{11} + F_{22} + F_{33} = \int \Delta P \cdot f(x, y, z) dt$$

oder also:

$$F_{11} + F_{22} + F_{33} = -4\pi \int f(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z) \cdot dt,$$

und folglich auch wegen der Gleichung (II):

$$\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} = +4\pi \int f(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z) \cdot dt,$$

wo die Integration über dasjenige Volumen erstreckt werden muss, welches den Räumen t und θ gemeinsam ist. Da nun die obigen Eigenschaften der zweiten Ableitungen von P ohne Weiteres vorausgesetzt werden können, wenn die Dichtigkeit φ den konstanten Werth „Eins" hat, so ist die Relation, welche sich für diesen Fall ergiebt, nämlich:

$$\text{(III)} \qquad \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} = -4\pi \int f(x, y, z) dx dy dz$$

als eine unmittelbare Consequenz der Definition von Φ_1, Φ_2, Φ_3 anzusehen, und deren Gültigkeit ist also einzig und allein an diejenigen Voraussetzungen über die Dichtigkeits-Function geknüpft, welche für die Existenz der betrachteten Ausdrücke erforderlich sind. Der Inhalt der Relation (III) kann folgendermaassen formulirt werden[1]):

> „Der Raum t sei mit Masse von beliebiger Dichtigkeit f und der Raum θ mit Masse von der Dichtigkeit „Eins" erfüllt; das Potential der beiden Massen sei Φ, und Φ_1, Φ_2, Φ_3 seien die nach den rechtwinkligen Axen genommenen Componenten der Attraction. Denkt man sich nun die Masse θ in der Richtung der x-Axe unendlich wenig verschoben und bezeichnet das Verhältniss der dadurch bewirkten Aenderung von Φ_1 zu der Grösse der Verschiebung selbst durch Φ_{11} und die analogen auf die andern beiden Axen bezüglichen Ausdrücke durch Φ_{22}, Φ_{33}, so ist die Summe $\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}$ gleich der mit -4π multiplicirten Masse desjenigen Teiles von t, welcher mit dem Raume θ zusammenfällt."

[1]) Vgl. Zusatz 10 am Endes dieses Bandes. H

Lässt man den Raum θ unendlich klein werden, und zwar so, dass derselbe die unmittelbare Umgebung eines bestimmten Punktes (ξ, η, ζ) bildet, so nähert sich das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (III), dividirt durch das betreffende Volumen, einem Werthe, welcher mit $f(\xi, \eta, \zeta)$ übereinstimmen muss, damit die Potential-Gleichung:

$$\Delta \Pi(\xi, \eta, \zeta) = -4\pi \cdot f(\xi, \eta, \zeta)$$

Geltung habe. Ferner ist, wie aus obigen Betrachtungen erhellt, leicht nachzuweisen, dass die linke Seite der Gleichung (III), dividirt durch das unendlich kleine Volumen, sich bei derselben Annahme der Grenze $\Delta \Pi(\xi, \eta, \zeta)$ nähert, wenn die Existenz von zweiten Ableitungen des Integrals Π vorausgesetzt wird. Aber ich muss es dahingestellt sein lassen, ob der Nachweis dieser Existenz zu führen ist, ohne, wie es gewöhnlich geschieht, die Differentiirbarkeit der Dichtigkeits-Function oder andere Eigenschaften derselben vorauszusetzen, die mit der Existenz des Potentials nicht nothwendig verbunden sind. Ich bemerke schliesslich, dass ich auf einem Wege, der von dem hier auseinandergesetzten nicht wesentlich verschieden ist, zu einer der Gleichung (III) entsprechenden Relation für allgemeinere Potential-Ausdrücke gelangt bin. Dieselbe findet sich am Schlusse eines Aufsatzes, welcher im Monatsberichte der hiesigen Akademie vom März d. J.[1]) abgedruckt ist. Doch glaubte ich, dass eine kurze und einfache Herleitung jener Relation für die gewöhnlichen Massen-Potentiale bei dem allgemeinen Interesse, welches sich an diese knüpft, nicht ganz überflüssig erscheinen dürfte.

[1]) Bd. I, S. 177f. (insbes. S. 210—212) dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

NOTIZ ÜBER POTENZREIHEN

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
vom Jahre 1878. S. 53—58.

NOTIZ ÜBER POTENZREIHEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 21. Januar 1878.]

I. Bedeutet z eine complexe Veränderliche $x + yi$ und wird in

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int e^{z} d \log z$$

die Integration von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ erstreckt, so resultirt der Werth Eins oder Null, je nachdem x positiv oder negativ ist. Dies ergiebt[1]) sich in üblicher Weise aus der Betrachtung, dass man bei der Integration um den Nullpunkt herum den Werth Eins erhält, während das Integral verschwindet, sobald für unendlich grosse positive oder negative Werthe von y parallel der x-Axe oder für unendlich grosse negative Werthe von x parallel der y-Axe integrirt wird. Ist nun

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{-\lambda_n \zeta}$$

für $\zeta = \xi + \eta i$ eine convergente Reihe, in welcher die Exponenten λ mit ihrem Index wachsen, so kann das Integral (A) zur Bestimmung der Coëficienten c_n benutzt werden, da

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int f(z) e^{wz} d \log z = \sum_{k=0}^{k=n} c_k$$

ist, wenn die Integration für ein festes positives x von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ erstreckt wird, und wenn der Werth von w zwischen λ_n und λ_{n+1} liegt.[2]) Hierbei ist, wie stets im Folgenden, vorausgesetzt, dass die Reihe $f(z)$ Glied für Glied integrirt werden darf, und dazu ist es nothwendig und hinreichend, dass, wie man es füglich ausdrücken kann, die Reihe „im Allgemeinen gleichmässig convergire“. Wenn nämlich, um dies näher darzulegen, eine Function reeller Grössen $\varphi(\varrho, \sigma)$ zwischen $\varrho = a$ und $\varrho = b$ ihrem absoluten Werthe nach unter einer bestimmten Grösse bleibt und für alle diese Werthe von ϱ

$$\lim_{\sigma=0} \varphi(\varrho, \sigma) = 0$$

---

[1]) Vgl. Zusatz 11 am Ende dieses Bandes. H

[2]) Vgl. Zusatz 12 am Ende dieses Bandes. H

ist, so wird auch

$$\lim_{\sigma=0} \int_a^b \varphi(\varrho, \sigma)\, d\varrho = 0,$$

falls σ so klein angenommen werden kann, dass die Gesammtgrösse der Intervalle, in denen $\varphi(\varrho, \sigma)$ *über* einer gegebenen kleinen Grösse δ liegt, kleiner als eine zweite beliebig gewählte Grösse δ' wird. Bei Erfüllung dieser Bedingung kann aber, im Anschluss an eine von Hrn. *Heine* eingeführte Ausdrucksweise*), die Annäherung der Function $\varphi(\varrho, \sigma)$ an Null für $\sigma = 0$ als eine „im Allgemeinen gleichmässige" bezeichnet werden.

Es muss hervorgehoben werden, dass das Integral in (B)

$$\int f(z)\, e^{wz}\, d \log z$$

eine Function von w darstellt, welche in den einzelnen Intervallen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Werthen von λ constant bleibt und an den Stellen $w = \lambda_n$ sich sprungweise ändert. Durch jenes Integral bestimmen sich also in der Entwickelung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

nicht bloss die Coëfficienten c sondern auch die Exponenten λ, letztere nämlich als Discontinuitätsstellen der durch das Integral dargestellten Function von w.

Multiplicirt man die Gleichung (B) mit

$$\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \Phi(w)\, dw,$$

wo Φ eine reelle Function bedeutet, und summirt alsdann von $n = 0$ bis $n = r$, so kommt, wenn

$$f(z) = zF(z)$$

gesetzt wird:

$$\text{(C)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \iint F(z)\, \Phi(w)\, e^{wz}\, dw\, dz = \sum_{n=0}^{n=r-1} c_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_r} \Phi(w)\, dw,$$

*) Cf. Hrn. *Heine*'s Abhandlung im *Borchardt*'schen Journal Bd. 71. S. 353 und 356.

wo links die Integration in Beziehung auf w von einem Werthe, der $\leqq \lambda_0$ ist, bis λ_r zu erstrecken und

$$F(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

ist. Bedeutet, wie oben, ζ die complexe Grösse $\xi + \eta i$ und ist $x < \xi$, so geht, wenn

$$\Phi(w) = \zeta e^{-w\zeta}$$

und $r = \infty$ angenommen wird, die Formel (C) in folgende über:

$$\text{(D)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \iint F(z)\, e^{w(z-\zeta)}\, dw\, dz = F(\zeta).$$

Integrirt man hierin zuerst nach w, so erhält man das von

$$z = x - i \cdot \infty \quad \text{bis} \quad z = x + i \cdot \infty$$

zu erstreckende Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(z)}{z - \zeta}\, e^{w(z-\zeta)}\, dz,$$

welches für den Endwerth $w = \infty$ verschwindet, für den Anfangswerth von w aber, der *Cauchy*'schen Formel gemäss, gleich $-F(\zeta)$ wird, da die übrigen Theile der den Punkt $z = \zeta$ umschließenden Integrationen, wenn sie in unendlicher Entfernung ausgeführt werden, wegen des dortigen Verhaltens der Function $e^{wz} F(z)$ nur unendlich kleine Werthe liefern. Während hiernach die Formel (D) einerseits, sobald man mit der Integration nach w anfängt, auf die *Cauchy*'sche Formel führt, ergiebt sie andrerseits, wenn mit der Integration nach z begonnen wird, ganz unmittelbar die Reihenentwickelung

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{-\lambda_n \zeta},$$

in welche das zweifache Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int e^{-w\zeta}\, dw \int F(z)\, e^{wz}\, dz$$

vermöge der Eigenschaft von $\int F(z)\, e^{wz}\, dz$, zwischen $w = \lambda_n$ und $w = \lambda_{n+1}$ unverändert zu bleiben, so zu sagen aus einander bricht.

II. Das Integral (A) nimmt für $x = 0$ den Werth $\frac{1}{2}$ an, so dass also

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y\, d \log y = 1$$

und folglich der Werth von

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha v \cos \beta v \, d \log v$$

gleich Eins oder Null wird, je nachdem der absolute Werth von α über oder unter demjenigen von β liegt. Ist nun

$$\varphi(v) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos \mu_n v \qquad (0 \leq \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 \ldots)$$

$$\psi(v) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \sin \nu_n v \qquad (0 < \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 \ldots),$$

so kann in analoger Weise, wie oben das Integral (A) zur Coëfficienten-Bestimmung für Potenzreihen benutzt worden ist, das Integral (E) zur Bestimmung der Coëfficienten a_n und b_n verwendet werden. Wenn nämlich die Reihen $\varphi(v)$ und $\psi(v)$ Glied für Glied integrirt werden dürfen, so kommt:

$$\text{(F)} \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) \sin vw \, d \log v = \sum_{k=0}^{k=n} a_k, \text{ wenn } \mu_n < w < \mu_{n+1} \text{ ist,}$$

und

$$\text{(F')} \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v) \cos vw \, d \log v = \sum_{k=n}^{k=\infty} b_k, \text{ wenn } \nu_{n-1} < w < \nu_n \text{ ist,}$$

und es bestimmen sich hierbei zugleich die Grössen μ_n, ν_n (ähnlich wie oben die Exponenten λ_n) als Unstetigkeitsstellen der durch die Integrale in (F) und (F') dargestellten Functionen von w. Ferner erhält man, wenn

$$\varphi(v) = v\Phi(v), \; \psi(v) = v\Psi(v)$$

gesetzt wird, analog den obigen Ausführungen:

$$\text{(G)} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_0^{\mu_r} \Phi(v) \Phi_1(w) \sin vw \, dw &= \sum_{n=0}^{n=r} a_n \int_{\mu_n}^{\mu_r} \Phi_1(w) \, dw \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_0^{\nu_r} \Psi(v) \Psi_1(w) \cos vw \, dw &= \sum_{n=0}^{n=r} b_n \int_0^{\nu_n} \Psi_1(w) \, dw, \end{aligned}$$

und speciell noch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v) \sin uw \sin vw \, dv \, dw = 2\pi \Phi(u)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(v) \cos uw \cos vw \, dv \, dw = 2\pi \Psi(u).$$

Da $\Phi(v)$ eine ungrade und $\Psi(v)$ eine grade Function von v ist, so verschwinden die Integrale links, wenn man unter den Integralzeichen die eine jener beiden Functionen mit der andern vertauscht. Die beiden Gleichungen lassen sich deshalb, wenn

$$\Phi(v) + \Psi(v) = F(v)$$

gesetzt wird, in folgender zusammenfassen:

$$\text{(H)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(v) \cos (u-v) w \, dv \, dw = 2\pi F(u),$$

welche nichts anderes als die bekannte *Fourier*'sche Formel ist. Dieselbe geht, wenn man mit der Integration in Bezug auf w beginnt, nach Hrn. *P. du Bois-Reymond*'s Bemerkung in *Borchardt*'s Journal Bd. 69 S. 66 unmittelbar aus der Entwickelung nach *sinus* und *cosinus* ganzzahliger Vielfacher des Arguments hervor; hier aber zeigt sich andrerseits, dass, falls $F(u)$ für alle reellen Werthe von u in eine Reihe:

$$\sum a_n \cos \mu_n u + \sum b_n \sin \nu_n u \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

entwickelt werden kann, das *Fourier*'sche Doppelintegral vermöge der Eigenschaft von:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(v) \cos (u-v) w \, dv,$$

innerhalb der verschiedenen durch die Grössen μ_n und ν_n begrenzten Intervalle von w unverändert zu bleiben, in jene Reihe von selbst auseinander bricht, wenn mit der Integration in Beziehung auf v der Anfang gemacht wird.

ÜBER POTENTIALE
n-FACHER MANNIGFALTIGKEITEN

VON

L. KRONECKER

Collectanea Mathematica in memoriam D. Chelini (1881).

ÜBER POTENTIALE n-FACHER MANNIGFALTIGKEITEN.

Die Uebertragung des Potentials eines nicht auf seine Hauptaxen bezogenen Ellipsoids*) auf n-fache Mannigfaltigkeiten führt zu einem Ausdruck von bemerkenswerther Einfachheit.

I.

Ist für alle Werthe $r, s = 0, 1, \ldots n$, wobei $n > 2$ vorauszusetzen ist,

$$a_{rs} = a_{sr}, \quad b_{rs} = b_{sr}$$

und $D(t)$ die Determinante der Grössen $a_{rs} + tb_{rs}$, und zwar

$$D(t) = -|a_{rs} + tb_{rs}| \qquad (r, s = 0, 1, \ldots n),$$

ist ferner $\delta_{rs} = 0$ oder 1, je nachdem die beiden Indices r, s von einander verschieden oder einander gleich sind**), so sind die durch die Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \sum_r (a_{rs} + tb_{rs}) f_{pr} = \delta_{ps} \qquad (p, r, s = 0, 1, \ldots n)$$

definirten Grössen f_{pr} die Unterdeterminanten jenes Systems, dividirt durch die Determinante. Wird nun nach t differentiirt, alsdann mit f_{qs} multiplicirt und über alle Werthe von s summirt, so kommt

$$\sum_{r,s} (a_{rs} + tb_{rs}) f'_{pr} f_{qs} = -\sum_{r,s} b_{rs} f_{pr} f_{qs} \qquad (p, q, r, s = 0, 1, \ldots n),$$

oder unter Anwendung der Relation (A)

$$\text{(B)} \qquad f'_{pq} = -\sum_{r,s} b_{rs} f_{pr} f_{qs} \qquad (p, q, r, s = 0, 1, \ldots n),$$

---

*) Vergl. *Dirichlet*'s: *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik*, § 4. *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Bd. VIII.[1])

**) Vergl. meine: *Bemerkungen zur Determinanten-Theorie*, im 72 Bande des *Borchardtschen Journals*.[2])

[1]) *Dirichlet*, Werke, Bd. II, S. 263 ff., insbes. S. 280—284. H

[2]) Bd. I, S. 237 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

wo f' die nach t genommene Ableitung von f bedeutet. Ueberdies ist die Ableitung $D'(t)$ durch die Gleichung

$$D'(t) = D(t) \sum_{r,s} b_{rs} f_{rs} \qquad (r, s = 0, 1, \ldots n)$$

bestimmt. Setzt man nunmehr

$$\text{(C)} \qquad F(t) = \sum_{r,s} f_{rs} z_r z_s, \quad F_r(t) = 2 \sum_s f_{rs} z_s, \quad F_{rs} = 2 f_{rs} \qquad (r, s = 0, 1, \ldots n),$$

so ist F_r die nach z_r genommene Ableitung von F und F_{rs} die nach z_r und z_s genommene zweite Ableitung von F, und für die nach t genommene Ableitung von F, welche mit $F'(t)$ bezeichnet werden soll, kommt

$$F'(t) = \sum_{p,q} f'_{pq} z_p z_q \qquad (p, q = 0, 1, \ldots n)$$

oder mit Benutzung der Relationen (B) und (C)

$$\text{(D)} \qquad 4F'(t) = -\sum_{r,s} b_{rs} F_r(t) F_s(t) \qquad (r, s = 0, 1, \ldots n)$$

und endlich

$$\text{(E)} \qquad 2D'(t) = D(t) \sum_{r,s} b_{rs} F_{rs} \qquad (r, s = 0, 1, \ldots n).$$

Dies vorausgeschickt, sei

$$V = \int_{t^0} F(t) \Phi(t) \, dt.$$

Die Function $\Phi(t)$ und die obere Grenze des Integrals V sei von den Variabeln z unabhängig. Alsdann ist, wenn man die nach z_r und resp. die nach z_r und z_s genommenen Ableitungen von t^0 und V mit t^0_r, t^0_{rs}, V_r, V_{rs} und den Ausdruck

$$F(t^0)[t^0_r t^0_s \Phi'(t^0) + t^0_{rs} \Phi(t^0)] + \Phi(t^0)[t^0_r t^0_s F'(t^0) + t^0_r F_s(t^0) + t^0_s F_r(t^0)]$$

mit U bezeichnet,

$$V_{rs} = -U + \int_{t^0} F_{rs}(t) \Phi(t) \, dt.$$

Setzt man nun einerseits t^0 von den Variabeln z unabhängig andrerseits aber t^0 durch die Gleichung $F(t^0) = 0$ mit den Variabeln z verbunden voraus, so wird im letzteren Falle

$$t^0_r F'(t^0) + F_r(t^0) = 0$$

und also je nach den beiden Fällen

$$U = 0 \quad \text{oder} \quad U \cdot F'(t^0) = -\Phi(t^0) F_r(t^0) F_s(t^0).$$

Hiernach erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (D) und (E) das Resultat, dass je nach den beiden über t^0 gemachten Voraussetzungen

$$\sum_{r,s} b_{rs} V_{rs} - 2 \int_{t^0} \Phi(t) \, d \log D(t) = 0 \quad \text{oder} \quad -4\Phi(t^0) \qquad (r, s = 0, 1, \ldots n)$$

wird, und hieraus folgt, dass wenn die obere Grenze des Integrals V unendlich gross und

$$\Phi(t) = c D(t)^{-\frac{1}{2}}$$

angenommen wird, je nach den beiden Voraussetzungen

$$\sum_{r,s} b_{rs} V_{rs} = 4c D(t^0)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad = 0$$

ist. Man braucht daher nur die speciellen Festsetzungen

$$b_{0s} = 0, \quad b_{ik} = \delta_{ik} \qquad (s = 0, 1, \ldots n;\ i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und

$$c = -\tfrac{1}{4} \varpi D(t^0)^{\frac{1}{2}}$$

zu treffen, damit

$$\Delta \int_{t^0}^{\infty} F(t) \Phi(t) \, dt = -\varpi \quad \text{oder} \quad = 0$$

werde, je nachdem die untere Grenze t^0 von den Variabeln z unabhängig oder durch die Gleichung $F(t^0) = 0$ bestimmt angenommen wird. Das Zeichen Δ hat hierbei die übliche Bedeutung:

$$\Delta V(z_1, z_2, \ldots z_n) = \sum_k V_{kk} \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

und ϖ soll den Inhalt der $(n-1)$fachen sphärischen Mannigfaltigkeit $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = 1$ angeben.*) Ueberdies ist noch $z_0 = 1$ zu nehmen und die Grössen a_{rs} sind als

---

*) Vergl. meinen Aufsatz: *Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln*, im *Monatsbericht der Berliner Akademie der Wissenschaften* vom März, 1869, pag. 169 und 173.[1])

[1]) Bd. I, S. 177 dieser Ausgabe, vgl. auch die Behandlung in *Kronecker's* Vorlesungen über einfache und mehrfache Integrale.

H

reell und so beschaffen vorauszusetzen, dass $F(0)$ nur für endliche Werthe der Variabeln z negativ, also $F(0) < 0$ ein endliches Gebiet von n-facher Mannigfaltigkeit ist. Soll nun ΔV für Punkte (z), die im Innern der geschlossenen $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit $F(0) = 0$, d. h. in dem Gebiete $F(0) < 0$ liegen, den Werth $-\varpi$, für äussere Punkte aber den Werth Null haben, so braucht man nur für innere Punkte t^0 constant und für äussere Punkte t^0 durch die Gleichung $F(t^0) = 0$ bestimmt anzunehmen. Da aber auf der Begrenzung $F(0) = 0$ der Werth von t^0 gleich Null ist, so muss, wenn V eine stetige Function der Punkte (z) sein soll, für die inneren Punkte $t^0 = 0$ genommen werden. Die hieraus resultirende Bestimmung von V kann folgendermaassen formulirt werden: *Es ist*

$$\text{(F)} \qquad V = -\tfrac{1}{4}\varpi D(0)^{\frac{1}{2}} \int F(t) \cdot D(t)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

wenn $F(t)$ und $D(t)$ durch die Entwickelung der Determinante

$$\begin{vmatrix} Z, & 1, & z_1, & z_2, \dots & z_n \\ 1, & a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, \dots & a_{0n} \\ z_1, & a_{10}, & a_{11} + t, & a_{12}, \dots & a_{1n} \\ z_2, & a_{20}, & a_{21}, & a_{22} + t, \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n, & a_{n0}, & a_{n1}, & a_{n2}, \dots & a_{nn} + t \end{vmatrix}$$

als lineare Function von Z in der Form

$$[F(t) - Z] D(t)$$

bestimmt sind, und wenn die Integration im Sinne wachsender Werthe von t über alle diejenigen positiven Werthe von t erstreckt wird, wofür $F(t) < 0$ ist.

Das demgemäss mit V bezeichnete Integral ist eine überall stetige Function der reellen Variabeln $z_1, z_2, \dots z_n$ oder des Punktes (z) und verschwindet für unendlich entfernte Punkte. Auch die ersten Ableitungen V_k sind durchweg stetig, die zweiten Ableitungen V_{ik} sind nur in der $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit $F(0) = 0$ unstetig. Der Werth von $\sum\limits_k V_{kk}$ oder ΔV ist in dem von dieser $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit umschlossenen *inneren* Bereiche, d. h. im Gebiete $F(0) < 0$ gleich

$-\varpi$, im *äusseren* Bereiche $F(0) > 0$ aber gleich Null. Diese Eigenschaften von V genügen für den Nachweis, dass

$$V(z_1, z_2, \dots z_n) = \int P(z, z')\, dv'$$

ist, wenn $P(z, z')$ das *elementare Potential* der Punkte (z) und (z') bedeutet, d. h. wenn

$$P(z, z') = \frac{1}{n-2}\Big[\sum_k (z_k - z'_k)^2\Big]^{-\frac{1}{2}(n-2)} \qquad {\scriptstyle (k = 1, 2, \dots n)}$$

ist, wenn ferner dv' das Inhaltselement der n-fachen Mannigfaltigkeit (z') bezeichnet, und wenn endlich die Integration über das ganze Gebiet dieser Mannigfaltigkeit erstreckt wird, in welchem die Function $F(0)$, wenn die Variabeln z darin durch die Variabeln z' ersetzt werden, einen negativen Werth hat.

II.

Um den erwähnten Nachweis zu führen, gehe ich von der Formel der partiellen Integration aus, welche ich unter No. (3) auf pag. 189 des *Monatsberichts* der *Berliner Akademie der Wissenschaften* vom März 1869 gegeben habe[1]),

$$\text{(G)} \qquad \int \sum_k P_k Q_k\, dv + \int P \sum_k Q_{kk}\, dv = \int P \frac{\partial Q}{\partial p}\, dw.$$

Die beiden Integrale links sind über eine n-fache Mannigfaltigkeit $F_0(z_1, z_2, \dots z_n) < 0$ zu erstrecken, das Integral rechts über die Begrenzungs-Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$, welche zugleich die ganze *natürliche Begrenzung* bilden muss. Vertauscht man in der Formel (G) die beiden Functionen P und Q mit einander und subtrahirt die dadurch entstehende Formel von (G), so kommt:

$$\text{(H)} \qquad -\int Q \sum_k P_{kk}\, dv = -\int P \sum_k Q_{kk}\, dv + \int \Big(P \frac{\partial Q}{\partial p} - Q \frac{\partial P}{\partial p}\Big) dw,$$

wo übrigens der nach p genommene Differentialquotient wie in meiner schon citirten Abhandlung vom März 1869 durch die Gleichung[2])

$$\Big[\sum_k F_{0k}^2\Big]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial Q}{\partial p} = \sum_k Q_k F_{0k}$$

[1]) Bd. I, S. 208 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. I, S. 189 u. S. 208 dieser Ausgabe. H

definirt wird. Nimmt man in der mit (G) bezeichneten Formel $P = 1$, so kommt

$$\int \Delta Q dv = \int \frac{\partial Q}{\partial p} dw,$$

und wenn man hierin

$$F_0 = \sum_k (z_k - z_k')^2 - R^2 \quad \text{und} \quad Q = P(z, z')$$

setzt:

$$\int \Delta P(z, z') dv = -\varpi,$$

wenn die Integration links über den Bereich $\sum_k (z_k - z_k')^2 < R^2$ erstreckt wird. Hieraus folgt aber, dass allgemein

$$\text{(J)} \qquad \int Q \Delta P(z, z') dv = -\varpi Q(z_1', z_2', \dots z_n')$$

wird, wenn über einen Bereich $F_0 < 0$ integrirt wird, in welchem Q endlich bleibt, und in welchem der Punkt (z') liegt; die Formel (H) ergiebt demgemäss unter denselben Bedingungen die Gleichung

$$\text{(K)} \qquad \varpi Q(z_1', z_2', \dots z_n') = -\int P(z, z') \Delta Q dv + \int \left(P \frac{\partial Q}{\partial p} - Q \frac{\partial P}{\partial p}\right) dw.$$

Liegt der Punkt (z') nicht in dem Bereiche $F_0 < 0$, so wird die rechte Seite der Gleichung gleich Null, da ja die Integration über ein grösseres Gebiet erstreckt und für den ganzen Bereich, wo $F_0 > 0$ ist, $Q = 0$ angenommen werden kann. Hierbei zeigt sich übrigens, dass, da

$$-\int P(z, z') \Delta Q dv + \int P(z, z') \frac{\partial Q}{\partial p} dw$$

beim Durchgang des Punktes (z') durch $F_0(z_1', z_2', \dots z_n') = 0$ stetig ist, das Integral

$$-\int Q \frac{\partial P}{\partial p} dw \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial p'} \int P(z, z') Q dw$$

sich beim Durchgang des Punktes (z') vom Bereich $F_0(z_1', z_2', \dots z_n') < 0$ nach $F_0(z_1' z_2', \dots z_n') > 0$ plötzlich um $\varpi Q(z_1^0, z_2^0, \dots z_n^0)$ ändert. Wird nunmehr in der Formel (H) $P = F_0$ gesetzt, so kommt

$$\text{(L)} \qquad \int Q \Delta F_0 dv = \int F_0 \Delta Q dv + \int Q \left[\sum_k F_{0k}^2\right]^{\frac{1}{2}} dw,$$

und wenn man hierin für die Function des Punktes (z), die mit F_0 bezeichnet ist,

$$P(z, z') - P(z, z'') \frac{P(0, z')}{P(0, z^0)}$$

setzt, wo die Punkte (z') und (z'') durch die Relationen

$$z_h'' \sum_k z_k'^2 = z_h' r_0^2 \qquad (h, k = 1, 2, \dots n)$$

mit einander verbunden sein sollen, so erfüllen die auf $F_0 = 0$ liegenden Punkte (z^0) die sphärische Mannigfaltigkeit $\sum z_k^{0^2} = r_0^2$, und jedem Punkte (z') im Innern $F_0 < 0$ entspricht ein Punkt (z'') im Äußern $F_0 > 0$. Die linke Seite der Gleichung (L) reducirt sich mit Hülfe der Gleichung (J) für jeden inneren Punkt (z') auf $-\varpi$, multiplicirt mit dem Werthe von Q, und es kommt daher, wenn zur Abkürzung $Q(z)$ für $Q(z_1, z_2, \dots z_n)$ gesetzt wird,

$$\text{(M)} \qquad -\varpi Q(z') = \int F_0 \Delta Q dv + \int G(z^0) Q(z^0) dw,$$

wo

$$F_0 = P(z, z') - P(z, z'') \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n-2}$$

$$G(z^0) = \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0} \left(r_1^2 + r_0^2 - 2 \sum_k z_k^0 z_k'\right)^{-\frac{1}{2}n}$$

$$z_h'' = z_h' \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \quad \sum_k z_k'^2 = r_1^2$$

ist, und die erste Integration rechts über die n-fache Mannigfaltigkeit $\sum_k z_k^2 < r_0^2$ die zweite über deren Begrenzung zu erstrecken ist. Die Formel (M) liefert die Bestimmung der Function Q im Inneren einer sphärischen Mannigfaltigkeit durch die Werthe von ΔQ und durch diejenigen, welche Q selbst auf der Begrenzung hat. Lässt man den Radius r_0 ins Unendliche wachsen, so reducirt sich die Gleichung (M) auf folgende:

$$\text{(N)} \qquad Q(z') = -\frac{1}{\varpi} \int P(z, z') \Delta Q dv,$$

wenn Q für unendlich entfernte Punkte verschwindet und auch ΔQ nur innerhalb eines endlichen Bereichs von Null verschieden ist. Da die obige Function V diese Eigenschaften besitzt, so ist in der Gleichung (M) der zu führende Nachweis enthalten. Uebrigens ist es (vergl. Hrn. *C. Neumann*'s bezügliche Arbeiten) für das Bestehen der Gleichung (N), wenn rechts über die gesammte n-fache Mannigfaltigkeit integrirt wird, offenbar ausreichend, dass das Integral convergent sei, dass der Mittelwerth von Q auf jeder unendlich grossen sphärischen Mannigfaltigkeit verschwinde, und dass in den bei der Herleitung gebrauchten Integralen keinerlei natürliche Begrenzung vorkomme.

Ich bemerke schließlich, dass die vorstehenden Entwickelungen vor mehr als zehn Jahren aus meinen Untersuchungen über Systeme von Functionen mehrer Variabeln hervorgegangen und bereits in der am 27. October 1870 abgehaltenen Sitzung der Akademie der Wissenschaften zu Berlin von mir vorgetragen worden sind.[1])

Berlin, Juni 1880.

---

[1]) Vgl. Zusatz 13 am Ende dieses Bandes.

BEWEIS EINER JACOBI'SCHEN INTEGRALFORMEL

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1887. S. 539—540.

BEWEIS EINER JACOBI'SCHEN INTEGRALFORMEL.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 7. Februar 1884.]

In einer im XV. Bande des *Crelle*'schen Journals abgedruckten Abhandlung, welche den Titel führt: „*Formula transformationis integralium definitorum*"[1]) entwickelt *Jacobi* eine Formel, mittels deren die Integrale, welche die Coefficienten *Fourier*'scher Reihen darstellen, in andere zur Berechnung geeignetere transformirt werden. Es ist dies die a. a. O. (*Crelle*'s Journal, Bd. XV, S. 3)[2]) mit (7) bezeichnete Formel:

$$\int_0^\pi f(\cos x)\cos nx\,dx = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n)}(\cos x)\sin^{2n}x\,dx,$$

in welcher n irgend eine positive ganze Zahl und $f^{(n)}(z)$ die $n$te Ableitung der Function $f(z)$ bedeutet.

Jacobi leitet seine Formel zuerst unter der Voraussetzung ab, dass die Function $f(z)$ durch eine nach ganzen positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe gegeben sei, und beweist nachher dieselbe Formel allgemein mit Hülfe eines auch „an sich bemerkenswerthen Lemma's". Als nun vor Kurzem von einem Mitgliede des hiesigen mathematischen Seminars in einer Versammlung, die unter meiner Leitung stattfand, ein Vortrag über die angeführte *Jacobi*'sche Abhandlung gehalten und dabei auch eine andere Herleitung der *Jacobi*'schen Formel gegeben wurde, bemerkte ich, dass die allgemeinste und zugleich einfachste Beweismethode durch einen Inductionsschluss erlangt wird.

Da nämlich für die Integrale auf der linken Seite der *Jacobi*'schen Formel die Gleichung:

$$\int_0^\pi f(\cos x)\cos(n+1)x\,dx + \int_0^\pi f(\cos x)\cos(n-1)x\,dx - 2\int_0^\pi \cos x\, f(\cos x)\cos nx\,dx = 0$$

besteht, so braucht offenbar nur gezeigt zu werden, dass auch die drei entsprechenden Ausdrücke auf der rechten Seite der Formel die entsprechende Glei-

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. VI, S. 86 ff. H

[2]) *Jacobi*, Werke, Bd. VI, S. 89. H

chung befriedigen. Werden diese drei Ausdrücke sämmtlich mit dem Product: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$ multiplicirt, so erhält man die zu beweisende Gleichung in folgender Gestalt:

$$\int_0^\pi f^{(n+1)}(\cos x) \sin^{2n+2} x\, dx + (4n^2 - 1) \int_0^\pi f^{(n-1)}(\cos x) \sin^{2n-2} x\, dx$$
$$- 2(2n+1) \int_0^\pi \varphi^{(n)}(\cos x) \sin^{2n} x\, dx = 0,$$

wobei zur Abkürzung $\varphi(\cos x) = \cos x\, f(\cos x)$ und also

$$\varphi^{(n)}(\cos x) = \cos x\, f^{(n)}(\cos x) + n f^{(n-1)}(\cos x)$$

gesetzt ist. Das Aggregat der drei Integrale auf der linken Seite ist aber nichts Anderes als $\int_0^\pi F_n'(x) dx$, wo $F_n'(x)$ die nach x genommene Ableitung von:

$$(2n+1) f^{(n-1)}(\cos x) \sin^{2n-1} x \cos x - f^{(n)}(\cos x) \sin^{2n+1} x$$

bedeutet. Wenn nun $f^{(n)}(z)$ in dem Intervalle von $z = -1$ bis $z = +1$ endlich und stetig bleibt, so bleibt offenbar $F_n(x)$ in dem Intervalle $x = 0$ bis $x = \pi$ endlich und stetig und verschwindet überdies (wegen des Factors $\sin^{2n-1} x$) an den beiden Grenzen des Intervalls. Es wird also in der That für alle ganzen positiven Zahlen n:

$$\int_0^\pi F_n'(x)\, dx = 0,$$

sobald die Function $f(z)$ nebst allen ihren Ableitungen in dem Intervalle von $z = -1$ bis $z = +1$ endlich und stetig bleibt.

Die *Jacobi*'sche Integralformel ist hiermit in dem ganzen Umfange ihrer Gültigkeit bewiesen, und aus dieser kann hinwiederum das Bestehen eben jener Differentialformel:

$$\frac{d^n \sin^{2n+1} x}{d \cos x^n} = (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) \frac{\sin(2n+1)x}{n+1}$$

erschlossen werden*), auf welche *Jacobi* den allgemeineren Beweis seiner Integralformel gründet.**)

*) Dieser Nachweis bildete einen Theil des oben erwähnten Seminarvortrages.

**) Vergl. *Liouville*'s Aufsatz: „Sur une formule de *M. Jacobi*" (*Liouville*'s Journal Bd. VI. 1841).

BEWEIS DES PUISEUX'SCHEN SATZES

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1887. S. 543—548.

BEWEIS DES PUISEUX'SCHEN SATZES.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 8. Mai 1887.]

In einem Aufsatze*) „über die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung“ hat Hr. *Minding* zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass die Entwickelung algebraischer Functionen einer Variabeln nach *fallenden* Potenzen zur Bestimmung des Grades der Endgleichung benutzt werden kann, welche aus zwei algebraischen Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ bei Elimination von y resultirt, und *Liouville* hat in einer kurz darauf publicirten grösseren Abhandlung**) jene Reihenentwickelungen algebraischer Functionen in ausgedehnterem Maasse für die Theorie der Elimination verwendet, ohne jedoch dabei auf diejenigen Fälle näher einzugehen, in denen die Entwickelungen auch gebrochene Potenzen der Variabeln enthalten. Eben dieselben Entwickelungen algebraischer Functionen einer Variabeln nach fallenden Potenzen können nun auch zur unmittelbaren Erkenntniss der Richtigkeit jenes fundamentalen Satzes benutzt werden, welchen *Puiseux* im Jahre 1851 in seinem Aufsatze***) „Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques“ aufgestellt hat. Geht man nämlich von der Voraussetzung aus, dass eine Function einer complexen Variabeln z, welche mit $f(z)$ bezeichnet werden möge, durchweg eindeutig ist und zugleich einer algebraischen Gleichung:

$$f(z)^n + \varphi_1(z) f(z)^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(z) f(z) + \varphi_n(z) = 0$$

genügt, in welcher $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z)$ ganze rationale Functionen von z bedeuten, so schliesst man, dass die Entwickelung von $f(z)$ nach fallenden Potenzen von z nicht Glieder mit positiven *gebrochenen* Exponenten enthalten kann, weil sonst beim einmaligen Umlauf auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt $z = 0$ und mit hinreichend grossem Radius der Werth von $f(z)$ eine Änderung erfahren würde. Man schliesst

---

*) *Crelle*'s Journal, Bd. XXII (1841) S. 178 und *Liouville*'s Journal Bd. VI (1841), S. 412.

**) *Liouville*'s Journal, Bd. VI (1841), S. 345.

***) *Liouville*'s Journal, Bd. XVI (1851), S. 229.

ferner, dass die Entwickelung *nur* Glieder mit *positiven* ganzen Exponenten enthalten kann, da — wenn das Aggregat dieser Glieder mit $f_0(z)$ bezeichnet wird — die Differenz $f(z) - f_0(z)$ für unendlich grosse Werthe von z verschwindet und überdies, wie nachher näher ausgeführt werden soll, sich durch das *Cauchy*'sche Integral, erstreckt über die Peripherie eines Kreises mit beliebig grossem Radius, darstellen lässt, also durchweg gleich Null sein muss.

Die allgemeine Entwickelbarkeit algebraischer Functionen, welche der vorstehenden Deduction zu Grunde liegt, ist wohl nicht in ganz einfacher und zugleich vollständiger Weise dazulegen. In den meisten Lehrbüchern fehlt die Theorie dieser Entwickelungen überhaupt; ich finde sie nur in einem älteren Werke, dem grossen *Lacroix*'schen „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral", auf welches auch in dem *Minding*'schen Aufsatze verwiesen wird, und in dem neueren *C. Jordan*'schen Lehrbuche „Cours d'analyse de l'école polytechnique" behandelt, aber mir scheinen die bezüglichen Auseinandersetzungen nicht ganz erschöpfend zu sein. So viel ich sehe, wird in den beiden citirten Werken nur gezeigt, wie *unter der Voraussetzung der Entwickelbarkeit* die einzelnen Exponenten und Coefficienten der verschiedenen Glieder der Entwickelung bestimmt werden können. Doch ist weder nachgewiesen, dass jede aus diesen Bestimmungen hervorgehende Entwickelung wirklich die vorgelegte algebraische Gleichung befriedigt, noch dass für jede der verschiedenen Wurzeln der Gleichung eine solche Entwickelung erlangt wird. Der erstere Nachweis müsste offenbar den der Convergenz der Reihenentwickelung mit enthalten, der letztere müsste entweder auf eine Reduction des Grades der vorgelegten Gleichung mit Hülfe einer der gefundenen Reihenentwickelungen gestützt werden, oder es müsste dabei die Voraussetzung hinzugenommen werden, dass die vorgelegte Gleichung lauter verschiedene Wurzeln habe, und keine Discussion solcher Art findet sich in den angeführten Werken bei Behandlung der bezeichneten Frage. Dass Hr. *Weierstrass* schon vor langer Zeit die Theorie der Reihenentwickelungen algebraischer Functionen vollständig erledigt und in seinen Universitätsvorlesungen mehrmals vorgetragen hat, weiss ich aus seinen persönlichen Mittheilungen, und dieselbe Theorie lässt sich auch in voller Allgemeinheit, wie ich schon in der Einleitung zu meiner Abhandlung „über die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln" erwähnt habe*), mit den a. a. O. auseinandergesetzten Methoden behandeln.

*) Journal für Mathematik Bd. 91 (1881), S. 305.[1])

[1]) Bd. II, S. 201 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

Wenn hiernach die allgemeine und vollständige Theorie der Entwickelung algebraischer Functionen in Potenzreihen eben nur auf eingehendere Untersuchungen gegründet werden kann, so erscheint es von Interesse, dass die obige Deduction des *Puiseux*'schen Satzes mittels einer einfachen Transformation der unabhängigen Veränderlichen von der Voraussetzung der *allgemeinen* Entwickelbarkeit algebraischer Functionen befreit werden kann. Um dies zu zeigen, möge nunmehr vorausgesetzt werden, dass eine eindeutige Function $f(z)$ einer Gleichung:

$$\varphi_0(z) f(z)^n + \varphi_1(z) f(z)^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(z) f(z) + \varphi_n(z) = 0$$

genügt, deren Coefficienten $\varphi(z)$ ganze rationale Functionen von z sind, und deren Discriminante $\triangle(z)$ von Null verschieden ist. Es ist nachzuweisen, dass hieraus erschlossen werden kann, $f(z)$ müsse eine rationale Function von z sein. Ist nun z_0 irgend ein Werth von z, wofür weder $\varphi_0(z)$ noch die Discriminante $\triangle(z)$ verschwindet, so ergiebt die *Taylor*'sche Entwickelung für jede der n Wurzeln jener Gleichung $n$ten Grades, also auch für $f(z)$, eine nach ganzen, steigenden Potenzen von $(z - z_0)$ fortschreitende Reihe. Setzt man:

$$z = z_0 + \frac{1}{x}, \quad f\left(z_0 + \frac{1}{x}\right) = g(x),$$

so ist $g(x)$ nach ganzen fallenden Potenzen von x entwickelbar und genügt zugleich einer Gleichung $n$ten Grades:

$$\psi_0(x) g(x)^n + \psi_1(x) g(x)^{n-1} + \cdots + \psi_{n-1}(x) g(x) + \psi_n(x) = 0,$$

deren Coefficienten $\psi(x)$ ganze rationale Functionen von x sind. Es ist daher, wenn man mit $\gamma(x)$ denjenigen Theil der Entwickelung von $\psi_0(x) g(x)$, welcher die nicht negativen Potenzen von x enthält, und mit $\varrho(x)$ die Differenz $\psi_0(x) g(x) - \gamma(x)$ bezeichnet, offenbar $\varrho(x)$ eine eindeutige Function von x, welche für $x = \infty$ verschwindet und zugleich einer Gleichung:

$$\varrho(x)^n + \chi_1(x) \varrho(x)^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1}(x) \varrho(x) + \chi_n(x) = 0$$

genügt, in welcher die Coefficienten $\chi(x)$ ganze rationale Functionen von x sind. Hiernach ist:

$$\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varrho(\xi)}{\xi - x} \, d\xi,$$

wenn die Integration über irgend eine den Punkt (x) umschliessende Curve erstreckt wird; denn daraus, dass $\varrho(x)$ jener Gleichung $n$ten Grades genügt, folgt, dass $\varrho(x)$

für endliche Werthe von x endlich und im Allgemeinen, d. h. höchstens mit Ausnahme derjenigen Werthe von x, wofür die Discriminante der Gleichung verschwindet, auch stetig sein muss. Nimmt man nun für jene Integrations-Curve einen Kreis mit unendlich grossem Radius, so wird $\varrho(\xi) = 0$, und es ergiebt sich daher, dass $\varrho(x)$ für alle Werthe von x gleich Null, also $\varphi_0(x) g(x) = \gamma(x)$ und folglich $f(z)$ eine rationale Function von z sein muss.

Bei der hier dargelegten Beweismethode kann man natürlich auch die Transformation der Variabeln z in die Variable x vermeiden; man gelangt alsdann zu einer vereinfachten Darstellung des von *Puiseux* selbst a. a. O. gegebenen Beweises. Nach den obigen Bestimmungen ist nämlich, wenn

$$\varphi_0(z) y^n + \varphi_1(z) y^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(z) y + \varphi_n(z) = \Phi(y, z)$$

gesetzt und der Grad von $\Phi(y, z)$ in Beziehung auf z mit m bezeichnet wird:

$$\psi_0(x) = (z - z_0)^{-m} \varphi_0(z) \quad \text{und also:} \quad \psi_0(x) g(x) = (z - z_0)^{-m} \varphi_0(z) f(z).$$

Bedeutet nun y_k irgend einen der n Werthe von y, wofür $\Phi(y, z) = 0$ wird, und $\Theta_k(z)$ denjenigen Theil der Entwickelung von $\varphi_0(z) y_k$ nach steigenden Potenzen von $(z - z_0)$, welcher nur niedrigere als $(m + 1)$te Potenzen enthält, so ist für *einen* Werth des Index k:

$$\big(\varphi_0(z) y_k - \Theta_k(z)\big)(z - z_0)^{-m} = \varrho(x).$$

Für den Beweis des *Puiseux*'schen Satzes ist also nur erforderlich zu zeigen, dass der Ausdruck auf der linken Seite, wenn er eine *eindeutige* Function von z darstellen soll, nothwendig gleich Null sein muss. Dies erhellt aber in der That, wenn man diesen Ausdruck durch ein *Cauchy*'sches Integral darstellt. Setzt man nämlich zur Abkürzung:

$$\varphi_0(z) y_k - \Theta_k(z) = F_k(z),$$

so bleibt $(z - z_0)^{-m-1} F_k(z)$, für *jeden* Index k, bei endlichen Werthen von z, auch wenn z dem Werthe z_0 beliebig nahe genommen wird, innerhalb endlicher Grenzen, ist durchweg — höchstens mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung des Werthes $z = z_0$ und aller derjenigen Werthe, wofür die Discriminante von $\Phi(y, z)$ verschwindet — *stetig*, und nähert sich, wenn z unendlich grosse Werthe annimmt, der Grenze Null. Wenn daher für einen Werth des Index k die Function $F_k(z)$ *eindeutig* ist, so muss sie gleich:

$$\frac{(z - z_0)^{m+1}}{2\pi i} \int \frac{(\zeta - z_0)^{-m-1} F_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

sein, wo die Integration über einen Kreis mit unendlich grossem Radius erstreckt werden kann. Da aber der Werth von $(\zeta - z_0)^{-m-1} F_k(\zeta)$ auf einem Kreise mit wachsendem Radius sich durchweg der Null nähert, so muss $F_k(z) = 0$ und also y_k mit der rationalen Function $\frac{\Theta_k(z)}{\varphi_0(z)}$ identisch sein.

Bedeutet $f(z)$, wie oben, die als *eindeutige* Function von z vorausgesetzte Wurzel y_k, so ist $f(z) = \frac{\Theta_k(z)}{\varphi_0(z)}$. Wird hierin für den mit $\Theta_k(z)$ bezeichneten Theil der Entwickelung von $\varphi_0(z) f(z)$ nach Potenzen von $(z - z_0)$ dasjenige Integral substituirt, welches aus der Darstellung von $\varphi_0(z) f(z)$ durch das *Cauchy*'sche Integral resultirt, so kommt:

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi i \varphi_0(z)} \int \frac{\varphi_0(\zeta) f(\zeta)}{z - \zeta} \left(1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{m+1}\right) d\zeta,$$

wo die Integration über einen unendlich grossen Kreis zu erstrecken ist. Hier erscheint nun der von *Puiseux* selbst gegebene Beweis seines Satzes in einer einzigen Formel zusammengefasst; denn der Ausdruck auf der rechten Seite ist offenbar eine rationale Function von z, und die Richtigkeit der Formel basirt einerseits auf der Voraussetzung der Eindeutigkeit von $f(z)$ als einer Vorbedingung der Darstellung durch das *Cauchy*'sche Integral, andererseits auf der Voraussetzung, dass $f(z)$ zugleich einer algebraischen Gleichung genügt, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von z sind. Aus der letzteren Voraussetzung folgt nämlich erstens, dass $f(z)$, multiplicirt mit dem Coefficienten der höchsten Potenz, der oben mit $\varphi_0(z)$ bezeichnet worden ist, durchweg endlich und, abgesehen von der Umgebung einzelner Punkte, stetig, also durch das über einen unendlich grossen Kreis zu erstreckende Integral:

$$\frac{-1}{2\pi i} \int \frac{\varphi_0(\zeta) f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$$

darstellbar ist, und es folgt daraus zweitens, dass das über einen unendlich grossen Kreis ausgedehnte Integral:

$$\int \frac{\varphi_0(\zeta) f(\zeta)}{z - \zeta} (\zeta - z_0)^{-m-1} d\zeta$$

verschwindet, wenn die ganze Zahl m durch den Grad der ganzen rationalen Coefficienten der Gleichung, welcher $f(z)$ genügt, nicht übertroffen wird.

Der hier unter verschiedenen Formen dargestellte Beweis des *Puiseux*'schen Satzes stützt sich nur auf die zwei Elemente, welche durch den Ausspruch des Satzes selbst als wesentliche bezeichnet sind, nämlich auf die Möglichkeit der Isolirung einer der durch die vorgelegte Gleichung definirten Functionen und auf die Möglichkeit der Charakterisirung ihrer Eindeutigkeit. Die Isolirung geschieht durch die Entwickelung in eine *Taylor*'sche Reihe, aber nur bis zu einem von vornherein durch den Grad der Gleichungscoefficienten zu bestimmenden Gliede, die Charakterisirung der Eindeutigkeit geschieht dadurch, dass die Function als *Cauchy*'sches Integral dargestellt wird. Dabei erfüllt der Beweis jene strengeren Forderungen, welche ich im Anfange des § 4 meiner Festschrift zu Hrn. *Kummer*'s Doctorjubiläum angedeutet habe[1]); denn es wird in dem Beweise eine Methode angegeben, mittels deren die rationale Function von *z gefunden* werden kann, welche nach dem Ausspruche des *Puiseux*'schen Satzes einer algebraischen Gleichung $\Phi(y,z)=0$ genügen muss, wenn eine ihrer Wurzeln y eine eindeutige Function von z ist. Man braucht nämlich nur aus den Coefficienten der Gleichung $\Phi(y,z)=0$ die n ganzen Functionen $m$ten Grades zu bilden, welche oben mit:

$$\Theta_k(z) \qquad (k=1,2,\dots n)$$

bezeichnet sind, und zu versuchen, welcher der n Werthe:

$$y=\frac{\Theta_k(z)}{\varphi_0(z)} \qquad (k=1,2,\dots n)$$

der Gleichung $\Phi(y,z)=0$ genügt, da einer dieser Werthe eben genügen muss, wenn diese Gleichung überhaupt eine in z rationale Wurzel hat.

Diese Betrachtung kann auch zur Ermittelung der Factoren einer ganzen Function mehrerer Variabeln benutzt werden und führt also zu einer anderen Erledigung des im oben citirten § 4 meiner Festschrift[1]) behandelten Gegenstandes. Denn man kann offenbar in derselben Weise, wenn eine Gleichung:

$$\varphi_0 y^n + \varphi_1 y^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} y + \varphi_n = 0$$

gegeben ist, in welcher $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n$ ganze Functionen der Variabeln $z', z'', z''', \dots$ sind — durch Entwickelung von y nach ganzen steigenden Potenzen von

$$z'-z'_0,\ z''-z''_0,\ z'''-z'''_0, \dots$$

bis zu einer von vornherein zu bestimmenden Dimension — alle *rationalen* Functionen der Grössen $z', z'', z''', \dots$ aufstellen, welche überhaupt Wurzeln jener Gleichung sein können. Die Werthe $z'_0, z''_0, z'''_0, \dots$ brauchen hierbei nur so bestimmt zu sein, dass dafür die Discriminante der Gleichung in y nicht verschwindet. Die allgemeinere Frage, ob eine ganze Function $F(z, z', z'', z''', \dots)$ einen Factor hat, welcher in Beziehung auf z von einem bestimmten Grade m ist, lässt sich aber unmittelbar auf die Frage zurückführen, ob die Gleichung deren verschiedene Wurzeln die symmetrischen Functionen von je m der Wurzeln von $F(z)=0$ sind, durch eine rationale Function von $z', z'', z''', \dots$ befriedigt wird. Ich bemerke schliesslich, dass ich diese Methode zur Untersuchung der Irreductibilität ganzer Functionen schon in meinen im Winter 1872/73 gehaltenen Universitätsvorlesungen ausführlich entwickelt habe.

[1]) Bd. II, S. 256 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

BEMERKUNGEN ÜBER EIN SYSTEM VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, WELCHES IN EINER ARBEIT DES HERRN VON HELMHOLTZ BEHANDELT IST.

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Bd. 97, S. 141—145.

BEMERKUNGEN ÜBER EIN SYSTEM VON DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN, WELCHES IN EINER ARBEIT DES HERRN VON HELMHOLTZ BEHANDELT IST.

Im § 4 (S. 126 und 127) der „Principien der Statik monocyklischer Systeme"[1]) hat Herr *von Helmholtz* das System von Gleichungen:

$$\sum_{\mathfrak{b}} q_{\mathfrak{b}} \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} = 0, \quad \sum_{\mathfrak{b}} q_{\mathfrak{b}} \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial \sigma} = \lambda \qquad \binom{\mathfrak{a}=1,2,3,\ldots \mathfrak{A}}{\mathfrak{b}=1,2,3,\ldots \mathfrak{B}}$$

behandelt und die Lösung in den a. a. O. mit (6′.) und (6′.) bezeichneten Gleichungen:

$$F = \sigma, \quad q_{\mathfrak{b}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \qquad (\mathfrak{b}=1,2,3,\ldots \mathfrak{B})$$

angegeben. Setzt man:

$$\lambda = -q_0, \quad \sigma = x_0 = y_0, \quad p_{\mathfrak{a}} = x_{\mathfrak{a}}, \quad s_{\mathfrak{b}} = y_{\mathfrak{b}} \qquad \binom{\mathfrak{a}=1,2,3,\ldots \mathfrak{A}}{\mathfrak{b}=1,2,3,\ldots \mathfrak{B}},$$

so lässt sich jenes System von Differentialgleichungen in folgender Weise zusammenfassen:

$$\sum_k q_k \frac{\partial y_k}{\partial x_h} = 0 \qquad \binom{h=0,1,2,\ldots \mathfrak{A}}{k=0,1,2,\ldots \mathfrak{B}},$$

und es soll nun von der durch die Werthe $q_0 = -\lambda$, $y_0 = x_0$ bewirkten besonderen Beschaffenheit des Systems abstrahirt und überhaupt das System von Differentialgleichungen:

$$\text{(I.)} \qquad \sum_k \varphi_k \frac{\partial y_k}{\partial x_h} = 0 \qquad (h=0,1,2,\ldots m;\; k=0,1,2,\ldots n)$$

behandelt werden, in welchem die $n+1$ Coefficienten φ gegebene Functionen der $m+1$ unabhängigen Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \ldots x_m$ und der $n+1$ abhängigen Veränderlichen $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ sind. Dabei kann unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass $n \geqq m$ ist, da im Falle $n < m$ die Functionen φ, deren Index grösser als n ist, gleich Null zu setzen sind.

[1]) *Crelle*'s Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 97, S. 111—140. Vgl. besonders die Anmerkung auf S. 127.

Es seien:

$$\eta_0(x_0, x_1, \dots x_m), \quad \eta_1(x_0, x_1, \dots x_m), \quad \dots \quad \eta_n(x_0, x_1, \dots x_m)$$

irgend welche Functionen von $x_0, x_1, \dots x_m$, welche für $y_0, y_1, \dots y_n$ gesetzt den Gleichungen (I.) genügen, und es seien nur die ersten $l+1$ Functionen $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l$ von einander unabhängig. Die folgenden $n-l$ Functionen $\eta_{l+1}, \eta_{l+2}, \dots \eta_n$ sind dann als Functionen von $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l$ allein, d. h. ohne Hinzunahme der Variabeln x, in der Form:

(II.)
$$\eta_r = f_r(\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l) \qquad {\scriptstyle (r=l+1,\, l+2, \dots n)}$$

darstellbar, und gemäss den Gleichungen (I.) wird daher:

(I'.)
$$\sum_g \varphi_g \frac{\partial \eta_g}{\partial x_h} + \sum_{g,r} \varphi_r \frac{\partial f_r}{\partial \eta_g} \frac{\partial \eta_g}{\partial x_h} = 0 \qquad \begin{pmatrix} g=0,1,2,\dots l \\ h=0,1,2,\dots m \\ r=l+1,l+2,\dots n \end{pmatrix}.$$

Da $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l$ als von einander unabhängige Functionen der $m+1$ Variabeln x vorausgesetzt sind, so muss $l \leqq m$ und die Functionaldeterminante der $l+1$ Functionen η, genommen in Beziehung auf gewisse $l+1$ von den $m+1$ Variabeln x, von Null verschieden sein. Die Reihenfolge der Variabeln x kann daher so angenommen werden, dass:

(III.)
$$\left| \frac{\partial \eta_g}{\partial x_h} \right| \gtrless 0 \qquad {\scriptstyle (g,h=0,1,2,\dots l)}$$

ist. Aus den Gleichungen (I'.) folgt alsdann, dass die $l+1$ Relationen:

(IV.)
$$\varphi_g = -\sum_{r=l+1}^{r=n} \varphi_r \frac{\partial f_r}{\partial \eta_g} \qquad {\scriptstyle (g=0,1,2,\dots l)}$$

bestehen müssen.

Denkt man sich die $n+1$ Functionen φ sämmtlich mit einer und derselben beliebigen Function der Variabeln x und y, welche mit P bezeichnet werden möge, multiplicirt und alsdann in den Producten $\varphi_k P$ die ersten $l+1$ Variabeln x durch die ersten $l+1$ Functionen η ersetzt, so kommt:

(V.)
$$\varphi_k P = \psi_k(\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l;\ x_{l+1}, \dots x_m) \qquad {\scriptstyle (k=0,1,2,\dots n)};$$

und eine solche Ersetzung von $x_0, x_1, \dots x_l$ durch $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l$ muss wegen der Ungleichheit (III.) zulässig sein. Setzt man nun:

(VI.)
$$\left| \begin{aligned} &\sum_{r=l+1}^{r=n} (y_r - f_r(y_0, y_1, \dots y_l))\, \psi_r(y_0, y_1, \dots y_l;\ x_{l+1}, \dots x_m) \\ &\qquad\qquad = \Phi(y_0, y_1, \dots y_n;\ x_{l+1}, \dots x_m), \end{aligned} \right.$$

so wird:

(VII.)
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_q} &= \sum_{r=l+1}^{r=n} (y_r - f_r(y_0, y_1, \dots y_l)) \frac{\partial \psi_r}{\partial x_q} && {\scriptstyle (q=l+1,\, l+2, \dots m)}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_r} &= \psi_r(y_0, y_1, \dots y_l;\ x_{l+1}, \dots x_m) = \varphi_r P && {\scriptstyle (r=l+1,\, l+2, \dots n)}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_g} &= \sum_{r=l+1}^{r=n} (y_r - f_r(y_0, y_1, \dots y_l)) \frac{\partial \psi_r}{\partial y_g} - \sum_{r=l+1}^{r=n} \frac{\partial f_r}{\partial y_g} \psi_r && {\scriptstyle (g=0,1,2,\dots l)}. \end{aligned} \right.$$

Vermöge der Gleichungen (II.) wird hiernach:

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_q} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_g} = -\sum_{r=l+1}^{r=n} \frac{\partial f_r}{\partial y_g} \psi_r = -P \sum_{r=l+1}^{r=n} \varphi_r \frac{\partial f_r}{\partial y_g},$$

wenn in der Function Φ und deren Ableitungen die Variabeln y durch die entsprechenden Functionen η ersetzt werden. Die letzteren Ableitungen von Φ nach y_g reduciren sich aber alsdann mit Hülfe der Relationen (IV.) auf den Werth $\varphi_g P$, und da die mittlere der Gleichungen (VII.) den analogen Werth $\varphi_r P$ für die Ableitungen von Φ nach denjenigen y liefert, deren Index grösser als l ist, so folgt, dass die Gleichungen:

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_q} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = \varphi_k P \qquad \begin{pmatrix} k=0,1,2,\dots n \\ q=l+1,l+2,\dots m \end{pmatrix}$$

oder:

(VIII.)
$$\left\{ \begin{aligned} &\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_{l+1}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_{l+2}} = 0, \ \dots \ \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} = 0, \\ &\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} : \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} : \dots : \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_n \end{aligned} \right.$$

bestehen müssen, wenn in der Function Φ und deren Ableitungen an die Stelle der Variabeln y die entsprechenden Functionen η treten. Die Gleichungen (VIII.) repräsentiren daher $m-l+n+1$ Gleichungen zwischen den in der Function Φ enthaltenen $m-l+n+1$ Variabeln:

$$x_{l+1}, \quad x_{l+2}, \dots x_m; \quad y_0, \quad y_1, \quad y_2, \dots y_n,$$

welche aber in der Weise erfüllt sein müssen, dass dabei die Variabeln x unbeschränkt veränderlich bleiben. Sie können also, wenn man darin nacheinander $l = m, m-1, m-2, \dots$ nimmt, als die vollständigen Integralgleichungen für die Differentialgleichungen (I.) angesehen werden; denn es existirt, wie sich aus der vorstehenden Entwickelung ergiebt, stets eine Function $\Phi(y_0, y_1, y_2, \dots y_n;\ x_{l+1}, x_{l+2}, \dots x_m)$, wofür die Gleichungen (VIII.) erfüllt sind, wenn die Variabeln y den Differentialgleichungen (I.) genügen, und andererseits wird diesen Differentialgleichungen offenbar genügt, sobald die Gleichungen (VIII.) in der angegebenen Weise erfüllt sind, da alsdann aus der Differentiation der Gleichung $\Phi = 0$ nach den $m+1$ Variabeln x die Gleichungen (I.) hervorgehen.

Durch die Aufstellung der Gleichungen (VIII.) ist die Lösung der Differentialgleichungen (I.) auf die Auffindung einer Function Φ zurückgeführt, welche so beschaffen ist, dass sich aus den Gleichungen (VIII.) die $n+1$ Grössen y als Functionen der $m+1$ Variabeln x bestimmen, während diese Variabeln x selbst unbestimmt bleiben. Diese letztere Bedingung enthält offenbar eine besondere Schwierigkeit für die Auffindung geeigneter Functionen Φ; sie fällt aber weg, wenn man sich auf diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen (I.) beschränkt, bei denen $l = m$ ist, d. h. bei denen möglichst viele der zu bestimmenden Functionen y von einander unabhängig sind. Alsdann wird nämlich Φ eine Function von $y_0, y_1, \dots y_n$ *allein*, und die Gleichungen:

$$\text{(IX.)} \qquad \begin{cases} \Phi(y_0, y_1, \dots y_n) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_0} : \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} : \dots : \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_n \end{cases}$$

repräsentiren nur $n+1$ Gleichungen, welche — so zu sagen — *im Allgemeinen* bei Zugrundelegung irgend einer Function Φ ausreichen, die $n+1$ Variabeln y als Functionen der in $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n$ enthaltenen Variabeln $x_0, x_1, \dots x_m$ zu bestimmen, und zwar so, dass $m+1$ dieser Functionen von einander unabhängig sind.

Für den Fall $n = m$ folgt aus den Gleichungen (I.) unmittelbar, dass die Functionaldeterminante:

$$\left| \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \right| \qquad (h, k = 0, 1, 2, \dots n)$$

verschwinden und also eine Gleichung $\Phi(y_0, y_1, \dots y_n) = 0$ bestehen muss. Wenn nun möglichst viele Functionen y von einander unabhängig sein sollen, so können nicht alle Subdeterminanten der Ordnung n verschwinden, und man kann daher daraus, dass mit den Gleichungen (I.) zugleich die Gleichungen:

$$\sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} = 0 \qquad (h, k = 0, 1, 2, \dots n)$$

erfüllt sein müssen, das Bestehen der Proportionen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_0} : \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} : \dots : \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_n$$

erschliessen. Es gelten also auch in *diesem* Falle die Integralgleichungen (IX.) für diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen (I.), bei denen möglichst viele Functionen y von einander unabhängig sind.

Ebenso wie im Falle $l = m$ können auch im Falle $l < m$ die Gleichungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x_{l+1}} = 0, \dots \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} = 0$ aus den Integralgleichungen (VIII.) weggelassen und also ganz allgemein die Gleichungen (IX.) als die Integralgleichungen des Systems (I.) angesehen werden, wenn man die Beschaffenheit der Function Φ in (IX.) erstens dahin *erweitert*, dass sie ausser den $n+1$ Grössen y auch noch die Variabeln: $x_{l+1}, x_{l+2}, \dots x_m$ enthalten darf, zweitens aber in der Weise *beschränkt*, dass für die aus den Gleichungen (IX.) zu bestimmenden Functionen y jede in Beziehung auf je $l+2$ der Variabeln x genommene Functionaldeterminante von je $l+2$ Functionen y verschwinden, dagegen:

$$\text{(III}'\text{.)} \qquad \left| \frac{\partial y_g}{\partial x_h} \right| \gtrless 0 \qquad (g, h = 0, 1, 2, \dots l)$$

sein soll. Vermöge dieser Bedingungen existiren nämlich Functionen f_{rg}, für welche:

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_h} = \sum_g f_{rg} \frac{\partial y_g}{\partial x_h} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, 2, \dots l \\ h = 0, 1, 2, \dots m \\ r = l+1, l+2, \dots n \end{pmatrix}$$

wird, so dass, da die Differentiation von $\Phi = 0$ gemäss (IX.) zu den $l+1$ Gleichungen:

$$\text{(I}''\text{.)} \qquad \sum_k \varphi_k \frac{\partial y_k}{\partial x_h} = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \dots l;\ k = 0, 1, 2, \dots n)$$

führt, die Relationen:

$$\text{(I}'''\text{.)} \qquad \sum_g \varphi_g \frac{\partial y_g}{\partial x_h} + \sum_{g,r} \varphi_r f_{rg} \frac{\partial y_g}{\partial x_h} = 0 \qquad \begin{pmatrix} g, h = 0, 1, 2, \dots l \\ r = l+1, l+2, \dots n \end{pmatrix},$$

analog den oben mit (I'.) bezeichneten, resultiren. Aus diesen folgt, wie dort, wegen der Ungleichheit (III'.), dass:

$$\varphi_g + \sum_r \varphi_r f_{rg} = 0 \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, 2, \dots l \\ r = l+1, l+2, \dots n \end{pmatrix}$$

sein muss, und hieraus ergiebt sich endlich, dass die Relationen (I'''.) und also auch die Gleichungen (I''.) nicht bloss für die Werthe $h = 0, 1, 2, \dots l$, sondern auch noch für die übrigen $l - m$ Werthe $h = l + 1, l + 2, \dots m$ bestehen.

Wird die Gleichung $\Phi(y_0, y_1, \dots y_n) = 0$ dadurch erfüllt, dass darin:

$$y_0 = F(y_1, y_2, \dots y_n)$$

genommen wird, so sind die Gleichungen (IX.) durch folgende zu ersetzen:

$$y_0 = F(y_1, y_2, \dots y_n), \quad -\varphi_0 \frac{\partial F}{\partial y_k} = \varphi_k \qquad (k=1,2,\dots n),$$

und diese gehen unmittelbar in die Integralgleichungen des Herrn *von Helmholtz* über, wenn λ an die Stelle des Factors $-\varphi_0$ tritt.

ÜBER DAS DIRICHLET'SCHE INTEGRAL

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1885. S. 641–665.

ÜBER DAS DIRICHLET'SCHE INTEGRAL.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 9. Juli 1885.]

I. Bedeutet x eine reelle positive, auf das Intervall von Null bis X beschränkte, Veränderliche und $f(x)$ eine eindeutige, reelle, integrirbare, ihrem absoluten Werthe nach stets unter einer bestimmten Grösse M bleibende Function von x, welche sich für bis zu Null abnehmende Werthe von x einem bestimmten Grenzwerthe $f(0)$ nähert, so kann die allgemeine Frage nach den weiteren Bedingungen, unter welchen das *Dirichlet*'sche Integral:

$$\int_0^{x'} f(x) \sin wx\pi \, d\log x,$$

für alle in dem Intervall von Null bis X liegenden Werthe von x', sich mit wachsendem w dem Werthe $\frac{1}{2}\pi f(0)$ nähert, unmittelbar auf die speciellere zurückgeführt werden, bei welcher der Grenzwerth der Function, für $x = 0$, selbst gleich Null ist.

Setzt man nämlich $f(x) - f(0) = f_0(x)$, so ist:

$$\int_0^{x'} f(x) \sin wx\pi \, d\log x = \int_0^{x'} f_0(x) \sin wx\pi \, d\log x + f(0)\int_0^{x'} \sin wx\pi \, d\log x,$$

und dass hier der Factor von $f(0)$ sich mit wachsendem w in der That dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ nähert, geht am Einfachsten daraus hervor, dass

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x'} \sin wx\pi \, d\log x = \frac{1}{2} \lim_{w=\infty} \int_{-x'w}^{+x'w} \sin z\pi \, d\log z = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{k=+n} \int_k^{k+1} \sin z\pi \, d\log z,$$

$$\int_k^{k+1} \frac{\sin z\pi}{z} dz = \int_0^1 (-1)^k \frac{\sin z\pi}{z+k} dz \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \frac{(-1)^k}{z+k} = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$

ist.

II. Es sind hiernach nur für Functionen $f_0(x)$, die sich für $x=0$ der Null nähern, die Bedingungen zu untersuchen, unter denen der Grenzwerth des Integrals:

$$\text{(A)} \qquad \int_0^{x'} f_0(x) \sin w x \pi \, d \log x,$$

für wachsende Werthe von w, oder also der Grenzwerth des Integrals:

$$\text{(A}^0\text{)} \qquad \int_0^{x'} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma} \, d \log x$$

für bis zu Null abnehmende Werthe von σ, gleich Null wird.

Das Integral (A⁰) geht, wenn man darin σx an Stelle der Integrationsvariabeln x setzt, in das Integral:

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \int_0^{\frac{x'}{\sigma}} f_0(\sigma x) \sin x \pi \, d \log x$$

über. Da nun, auf Grund der Voraussetzung: $\lim\limits_{x=0} f_0(x) = 0$, für irgend eine gegebene, beliebig kleine, positive Grösse τ und für irgend eine gegebene positive Grösse ξ der Werth x_0 so klein angenommen werden kann, dass für alle Werthe von x, die kleiner als x_0 sind,

$$| f_0(x) | < \frac{\tau}{\pi \xi}$$

wird, und da für alle positiven Werthe von x:

$$| \sin x\pi | < x\pi$$

ist, so wird für alle positiven Werthe von x, die kleiner als ξ sind, und für alle positiven Werthe von σ, die kleiner als $\frac{x_0}{\xi}$ sind,

$$\left| f_0(\sigma x) \frac{\sin x\pi}{x} \right| < \frac{\tau}{\xi},$$

und also der absolute Werth des Integrals:

$$\text{(B)} \qquad \int_0^{\xi} f_0(\sigma x) \sin x \pi \, d \log x$$

kleiner als τ. *Der Grenzwerth des Integrals* (B) *für abnehmende Werthe von σ ist daher gleich Null*[1]), und die Gleichung:

$$\text{(B}^0\text{)} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_{\xi}^{\frac{x'}{\sigma}} f_0(\sigma x) \sin x \pi \, d \log x = \lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{x'} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma} \, d \log x = 0,$$

in welcher man für ξ irgend einen bestimmten positiven Werth, z. B. den Werth $\xi=1$ nehmen kann, stellt also eine nothwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, dass der Grenzwerth des Integrals (A′) mit abnehmendem Werthe von σ verschwinde.

III. Ebenso wie das Integral (B) nähert sich auch, für irgend welche positiven Werthe von x' und ξ', das Integral:

$$\int_{\frac{x'}{\sigma}}^{\frac{x'}{\sigma}+\xi'} f_0(\sigma x) \sin x \pi \, d \log x \qquad (\xi' > 0)$$

mit abnehmendem σ dem Werthe Null. Denn es verwandelt sich, wenn man $x = \frac{x'}{\sigma} + z$ setzt, in

$$\sigma \int_0^{\xi'} f_0(\sigma z + x') \sin\left(z + \frac{x'}{\sigma}\right) \pi \frac{dz}{\sigma z + x'},$$

und das mit σ multiplicirte Integral ist seinem absoluten Werthe nach kleiner als $\frac{\xi' M_0}{x'}$, da der absolute Werth von $f_0(x)$ (für alle Werthe von x in dem betrachteten Intervalle, d. h. für $0 < x < X$) kleiner als M_0 ist, wenn mit M_0 der Werth: $M + |f(0)|$ bezeichnet wird.

IV. Man kann hiernach in dem Integral (A′) — ohne den Werth, dem es sich für $\sigma=0$ nähert, zu ändern — die Grenzen 0 und $\frac{x'}{\sigma}$ durch die Grenzen ξ und $\frac{x'}{\sigma} + \xi'$ ersetzen, wo ξ und ξ' willkürlich anzunehmende positive Grössen bedeuten. Es wird also, wenn der Einfachheit halber:

$$f_0(x) = x\varphi(x)$$

[1]) Vgl. Zusatz 14 am Ende dieses Bandes.

gesetzt wird:

$$\text{(C)} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_0^{x'} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d \log x = \lim_{\sigma=0} \int_{\xi}^{\frac{x'}{\sigma}+\xi'} \sigma\varphi(\sigma x) \sin x\pi\, dx.$$

Wenn man nun für ξ irgend eine ungrade Zahl $2m+1$ setzt und dann ξ' so wählt, dass $\frac{x'}{\sigma} + \xi'$ der nächsten über dem Werth von $\frac{x'}{\sigma}$ liegenden graden Zahl gleich wird, so lässt sich das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (C) als Summe von Integralen:

$$\sum_h \int_h^{h+1} \sigma\varphi(\sigma x) \sin x\pi\, dx$$

darstellen, welche, wenn in jedem einzelnen Integrale $x+h$ an Stelle der Integrationsvariabeln x gesetzt wird, in:

$$\text{(C')} \qquad \int_0^1 \sigma \sum_h (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h) \sin x\pi\, dx$$

übergeht. Die Summation in Beziehung auf h ist hier durch die Bedingungen:

$$2m+1 \leqq h \leqq 2\left[\frac{x'}{2\sigma}\right] + 1$$

bestimmt, wenn nach *Gauss*'scher Weise mit $[a]$ die der Grösse a nächste, kleinere ganze Zahl bezeichnet wird.

Für abnehmende Werthe von σ verschwindet der Grenzwerth eines einzelnen $h$ten Gliedes der unter dem Integralzeichen stehenden Summe sowohl dann, wenn h eine bestimmte Zahl, und also der Grenzwerth von $\sigma(x+h)$ für $\sigma=0$ gleich Null, als auch dann, wenn dieser Grenzwerth eine bestimmte positive Grösse $\mathfrak{p}$ ist. Denn

$$\lim_{\sigma=0} \sigma\varphi(\sigma x + \sigma h) \quad \text{oder} \quad \lim_{\sigma=0} \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x+h}$$

ist in dem einen Falle gleich Null, weil $\lim\limits_{\sigma=0}(\sigma x + \sigma h) = 0$ und demnach

$$\lim_{\sigma=0} f_0(\sigma x + \sigma h) = \lim_{x=0} f_0(x) = 0$$

ist, in dem anderen Falle, weil $\lim\limits_{\sigma=0} f_0(\sigma x + \sigma h) = f_0(\mathfrak{p}) < M_0$ und

$$\lim_{\sigma=0} \frac{1}{x+h} = \lim_{\sigma=0} \frac{\sigma}{\sigma x + \sigma h} = \lim_{\sigma=0} \frac{\sigma}{\mathfrak{p}} = 0$$

ist. Man kann daher zu dem Integrale (C'), ohne seinen Grenzwerth für $\sigma = 0$ zu verändern, das Integral:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \sigma \big(\varphi(\sigma x + 2m\sigma + \sigma) + \varphi(\sigma x + 2r\sigma + \sigma)\big) \sin x\pi\, dx \qquad \left(r = \left[\frac{x'}{2\sigma}\right]\right)$$

addiren und demgemäss an Stelle des Integrals (C') das Integral:

$$\int_0^1 \sigma \overline{\sum_h} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h) \sin x\pi\, dx$$

nehmen, wenn die Summation auf die Werthe:

$$h = 2m+1,\ 2m+2,\ 2m+3, \ldots 2\left[\frac{x'}{2\sigma}\right] + 1$$

erstreckt und durch den Strich über dem Summenzeichen angedeutet wird, dass das erste und letzte Glied der Summe mit dem Factor $\frac{1}{2}$ zu versehen ist. Hiernach wird:

$$\text{(D)} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_0^{x'} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x = \lim_{\sigma=0} \int_0^1 \sigma \overline{\sum_h} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h) \sin x\pi\, dx,$$

und die Gleichung:

$$\text{(D}^0\text{)} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_0^1 \sigma \overline{\sum_h} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h)\, d\cos x\pi = 0$$

stellt also eine nothwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, dass mit abnehmenden Werthen von σ zugleich der Werth des Integrals (A') verschwinde.

V. Bedeutet x^0 irgend eine positive Grösse, die kleiner als x' ist, so verschwindet offenbar der Grenzwerth:

$$\lim_{\sigma=0} \sigma \overline{\sum_h} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h) \qquad {\scriptstyle (0 \leqq x \leqq 1)},$$

wenn die Summation nur auf alle diejenigen Zahlen h erstreckt wird, für welche

$$h > 2\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]$$

ist. Denn, da für alle diese Zahlen h die Werthe von $\varphi(\sigma x + \sigma h)$, für beliebig kleine Werthe von σ, unter einer bestimmten Grenze bleiben, indem

$$|\varphi(\sigma x + \sigma h)| = \left|\frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{\sigma x + \sigma h}\right| < \frac{M_0}{x^0}$$

ist, so nähert sich

$$\sigma \sum_k \varphi(2\sigma\delta + 2\sigma k) \qquad \left(\left[\frac{x_0}{2\sigma}\right] < k \leqq \left[\frac{x'}{2\sigma}\right]\right).$$

für jeden beliebigen zwischen Null und Eins liegenden Werth von δ, mit abnehmendem σ einem und demselben festen durch das Integral $\int_{x^0}^{x'} \varphi(z)\,dz$ bezeichneten Grenzwerth. Das Aggregat der positiven Glieder in der obigen Summe:

$$\overline{\sum_h} (-1)^h \sigma\varphi(\sigma x + \sigma h)$$

erreicht also bei abnehmendem σ denselben Werth wie das der negativen, d. h. es ist:

$$\lim_{\sigma=0} \sigma \overline{\sum_h} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h)$$

und also auch:

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^1 \sigma \overline{\sum_h} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h)\, d \cos x\pi$$

gleich Null, wenn die Summation auf alle in dem Intervalle von $\frac{x^0}{\sigma}$ bis $\frac{x'}{\sigma}$ enthaltenen ganzen Zahlen h erstreckt wird. Es besteht demnach für je zwei beliebige (in dem betrachteten Intervalle von 0 bis X liegende) Grössen x^0, x' die Gleichung:

$$\text{(E)} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_{\frac{x^0}{\sigma}}^{\frac{x'}{\sigma}} \sigma\, \varphi(\sigma x) \sin x\pi\, dx = \lim_{\sigma=0} \int_{x^0}^{x'} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d \log x = 0,$$

und die Gleichung (B^0) muss daher für jede beliebige positive Grösse x' gelten, sobald sie nur für irgend eine bestimmte Grösse x^0 besteht.

Das Resultat der bisherigen Entwickelungen lässt sich demgemäss in folgender Weise formuliren:

Um erschliessen zu können, dass der Grenzwerth des über *jeden beliebigen* Theil des Intervalles $(0, X)$ ausgedehnten Integrals:

$$\int f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d \log x$$

für $\sigma = 0$ verschwinde, genügt der Nachweis, dass dies für irgend ein bestimmtes Theilintervall $(\xi\sigma, x^0)$ der Fall ist, d. h. dass

$$\text{(F)} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{x^0} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d \log x = 0$$

wird, wenn für ξ und x^0 irgend zwei bestimmte positive Grössen genommen werden.

Es genügt also z. B. der Nachweis, dass die Gleichung (F) für $\xi = x^0 = 1$ besteht, d. h. also, dass

$$\text{(F')} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_{\sigma}^{1} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d \log x = 0$$

ist.

Die Gleichung (F) kann durch die oben mit (D^0) bezeichnete Gleichung ersetzt werden. Es genügt also der Nachweis, dass für irgend eine ganze Zahl m und für irgend eine Grösse x^0:

$$\text{(F}^0\text{)} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_0^1 \sigma \overline{\sum_h} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h)\, d \cos \pi x = 0 \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

wird.

VI. Die Gleichung (F') kann durch die Gleichung:

$$\text{(G)} \qquad \lim_{x^0=0} \lim_{\xi=\infty} \lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{x^0} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d \log x = 0$$

ersetzt werden. Denn einerseits folgt offenbar die Gleichung (G) aus der Gleichung (F'), da für jeden Werth von x^0, das Integrationsgebiet $(\xi\sigma, x^0)$ ein Theil des Intervalles $(0, X)$ ist; andererseits lässt sich aber auch die Gleichung (F') aus der Gleichung (G) erschliessen. Wenn nämlich für jede gegebene, positive, beliebig kleine Grösse τ eine (wenn auch noch so kleine) Grösse x^0 und eine (wenn auch noch so grosse) Zahl ξ bezeichnet werden kann, für die sich nachweisen lässt, dass der absolute Werth von:

$$\lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{x^0} f_0(x) \sin \frac{x\pi}{\sigma}\, d \log x$$

kleiner als τ ist, so folgt mit Hülfe der Gleichungen:

$$\lim_{\sigma=0} \int_{\xi\sigma}^{\sigma} f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma} d \log x = 0, \quad \lim_{\sigma=0} \int_{x^0}^{1} f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma} d \log x = 0,$$

dass auch der absolute Werth von:

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^1 f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma} d \log x$$

kleiner als jene gegebene, beliebig kleine Grösse τ sein muss.

Es kann nun ebenso die Gleichung (F^0) durch die Gleichung:

$$(G^0) \qquad \lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \int_0^1 \sigma \overline{\sum_h} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h) d \cos x\pi = 0 \quad \left(m \leq \tfrac{1}{2}(h-1) \leq \left[\tfrac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

ersetzt werden; denn für $\sigma = 0$ verschwindet, wie schon oben gezeigt worden ist, der Werth von:

$$\sigma \overline{\sum_h} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h),$$

sobald die Summation auf die Zahlen von 1 bis m und auf alle in irgend einem Intervalle von $\frac{x^0}{\sigma}$ bis $\frac{x'}{\sigma}$ enthaltenen ganzen Zahlen ausgedehnt wird.

Um das Bestehen der Gleichung (G^0) erschliessen zu können, bedarf es nur des Nachweises, dass für jede gegebene positive Grösse τ eine (wenn auch noch so kleine) Grösse x^0 und eine (wenn auch noch so grosse) Zahl m bezeichnet werden kann, für die der absolute Werth des Integrals:

$$\int_0^1 \sigma \overline{\sum_h} (-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h) d \cos x\pi \qquad \left(m \leq \tfrac{1}{2}(h-1) < \tfrac{x^0}{2\sigma}\right),$$

bei hinreichend kleinen Werthen von σ, kleiner als τ bleibt.

VII. Die Gleichung (G) ist offenbar erfüllt, wenn das Integral:

$$\int_0^x f_0(x) d \log x$$

absolut convergent ist, da alsdann:

$$\lim_{x^0=0} \int_0^{x^0} |f_0(x)| \, d \log x = 0$$

und demnach auch für jeden Werth von σ:

$$\lim_{x^0=0} \int_0^{x^0} f_0(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma} d \log x = 0$$

wird.*) Da ferner die Gleichung (G), wenn man darin $\xi = 0$ setzt, mittels partieller Integration in folgende übergeht:

$$\lim_{x^0=0} \lim_{\sigma=0} \int_0^{x^0} \left(\sin\frac{x\pi}{\sigma} - \int_0^x \sin\frac{x\pi}{\sigma} d \log x\right) d\psi(x) = 0,$$

---

*) Vergl. Hrn. *P. du Bois-Reymond*'s Note: „Sur les formules de représentations de fonctions" in den Comptes Rendus von 1881. Bd. 92. S. 915 und 962. Hier ist ferner folgende Äußerung *Dirichlet*'s zu citiren, welche sich in einem von ihm an *Gauss* gerichteten Briefe vom 20. Februar 1853 findet:

„Ist $f(\beta)$ so beschaffen, dass die Differenz $f(\beta) - f(0)$ sich als ein Product darstellen lässt, dessen erster Factor $\varphi(\beta)$ für ein unendlich kleines β endlich bleibt, während der zweite, den ich positiv voraussetze und $\psi(\beta)$ nennen will, die Eigenschaft besitzt, dass das Integral $\int_0^\delta \psi(\beta)\frac{d\beta}{\beta}$, wie es z. B. für jede positive Potenz β^p der Fall ist, für ein unendlich kleines δ selbst unendlich klein wird, so darf man $\int_0^\delta f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta$ nur in die beiden Bestandteile

$$f(0)\int_0^\delta \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta + \int_0^\delta \varphi(\beta) \sin k\beta \frac{\psi(\beta)}{\sin\beta} d\beta$$

zerlegen, von denen der erste für ein unveränderliches δ durch Wachsen von k in $\frac{\pi}{2} f(0)$ übergeht, während der zweite für ein gehörig klein gewähltes δ immer kleiner bleibt als eine beliebig kleine Grösse."

Unser Correspondent Hr. *E. Schering* hat die Freundlichkeit gehabt, mir die von *Dirichlet* an *Gauss* gerichteten Briefe zu übersenden, um davon Abschrift zu nehmen und sie für die Herausgabe der *Dirichlet*'schen Werke zu benutzen.

wo $\psi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_0(x)\,dx$ ist, so resultirt hier auch die Bedingung:

$$\lim_{x^0=0}\int_0^{x^0} |\psi'(x)|\,dx = 0,$$

welche sich ebenfalls schon in der angeführten Note des Hrn. *P. du Bois-Reymond* findet.

VIII. Um die Bedeutung der mit (G^0) bezeichneten Bedingungsgleichung darzulegen, bemerke ich zuvörderst, dass die Summe:

$$\overline{\sum_h}(-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h) \qquad {\scriptstyle (h=2m+1,\,2m+2,\dots 2r+1)}$$

in der Form:

$$\frac{1}{2}\sum_h (-1)^h\big(\varphi(\sigma x + \sigma h) - \varphi(\sigma x + \sigma h + \sigma)\big) \qquad {\scriptstyle (h=2m+1,\,2m+2,\dots 2r)}$$

dargestellt werden kann.

Setzt man nun voraus, dass die Gleichung $y = \varphi(x)$ in rechtwinkligen Coordinaten x, y eine Curve $\mathfrak{C}$ repräsentirt, so kann man sich dazu für jeden bestimmten Werth von σ eine zweite Curve $\mathfrak{C}_\sigma$ construiren, welche durch die Gleichung:

$$y = \varphi(x) + \big(\varphi(x) - \varphi(x+\sigma)\big)\sin\frac{x\pi}{\sigma}$$

für die Werthe von $x = (2m+1)\sigma$ bis $x = x^0$ dargestellt wird. Jede solche Curve $\mathfrak{C}_\sigma$, deren Ordinaten für einen zwischen σh und $\sigma(h+1)$ gelegenen Abscissenwerth $\sigma x + \sigma h$ auch durch:

$$\varphi(\sigma x + \sigma h) + (-1)^h\big(\varphi(\sigma x + \sigma h) - \varphi(\sigma x + \sigma h + \sigma)\big)\sin x\pi \qquad {\scriptstyle (0 \leqq x \leqq 1)}$$

ausgedrückt werden, schneidet die ursprüngliche Curve $\mathfrak{C}$ in den Punkten, deren Abscissen ganze Vielfache von σ sind. Denkt man sich in diesen Schnittpunkten die Curve $\mathfrak{C}_\sigma$ abwechselnd über und unter der Curve $\mathfrak{C}$ verlaufend, so „umschlingt" sie die Curve $\mathfrak{C}$ desto enger, je kleiner σ wird. Das Integral in (G^0):

$$\int_0^1 \sigma \overline{\sum_h}(-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h)\, d\cos x\pi$$

drückt aber offenbar den von den beiden Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_\sigma$ umschlossenen (in üblicher Weise positiv oder negativ zu rechnenden) Flächenraum aus, und es lässt sich daher die Bedeutung der Bedingungsgleichung (G^0) dahin formuliren:

> Es soll die Umschlingung der Curve $\mathfrak{C}_\sigma$ um die Curve $\mathfrak{C}$ mit abnehmendem σ eine immer engere werden, und zwar in der Weise, dass dabei der Gesammt-Zwischenraum beliebig verkleinert wird.

IX. Die Gleichung (G^0) wird offenbar erfüllt, wenn der Ausdruck selbst, der dort unter dem Integralzeichen mit $d\cos x\pi$ multiplicirt ist, den Grenzwerth Null hat, und die Gleichung:

$$\text{(H)} \qquad \lim_{x^0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0} \sigma \overline{\sum_h}(-1)^h \varphi(\sigma x + \sigma h) = 0 \quad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\tfrac{x^0}{2\sigma}\right];\ (0 \leqq x \leqq 1)\right)$$

enthält daher eine *hinreichende* Bedingung für das Verschwinden des Grenzwerthes:

$$\lim_{\sigma=0}\int_0^{x'} \varphi(x)\sin\frac{x\pi}{\sigma}\,dx$$

bei beliebigem Werthe von x'.

Um die Bedeutung der Bedingung (H) darzulegen, sei zuvörderst bemerkt, dass:

$$\sigma\overline{\sum_h}(-1)^h\varphi(\sigma x + \sigma h) \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\tfrac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

sich als eine Summe von zweiten Differenzen:

$$\sum_k \sigma\Big(-\frac{1}{2}\varphi(\sigma x + 2\sigma k - \sigma) + \varphi(\sigma x + 2\sigma k) - \frac{1}{2}\varphi(\sigma x + 2\sigma k + \sigma)\Big)$$
$$\left(k = m+1,\, m+2, \dots \left[\tfrac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

darstellen lässt. Jede dieser zweiten Differenzen giebt den (in üblicher Weise positiv oder negativ genommenen) Werth des Flächeninhalts eines Dreiecks an, dessen Eckpunkte durch die Abscissen:

$$\sigma x + 2\sigma k - \sigma, \quad \sigma x + 2\sigma k, \quad \sigma x + 2\sigma k + \sigma$$

und die zugehörigen Ordinaten:

$$\varphi(\sigma x + 2\sigma k - \sigma), \quad \varphi(\sigma x + 2\sigma k), \quad \varphi(\sigma x + 2\sigma k + \sigma)$$

bestimmt sind. Die Bedingung (H) verlangt daher, dass die algebraische Summe der Inhalte aller dieser Dreiecke, für

$$k = m+1,\ m+2,\ \ldots \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right],$$

mit abnehmendem σ sich der Null nähere.

Jene Summe $\sigma\overline{\sum}(-1)^h\varphi(\sigma x + \sigma h)$ ist ferner als der Zuwachs aufzufassen, den die Summe:

$$(\mathrm{J}_{2\sigma}) \qquad \overline{\sum_k} 2\sigma\varphi(\sigma x + \sigma + 2\sigma k) \qquad \left(k = m, m+1, m+2, \ldots \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

erhält, wenn man zur Summe:

$$(\mathrm{J}_{\sigma}) \qquad \overline{\sum_h} \sigma\varphi(\sigma x + \sigma h) \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

übergeht. Für *solche* Functionen φ, für die sich diese Summe mit abnehmendem σ einem bestimmten Grenzwerthe, also dem Werthe des Integrals:

$$\int_0^{x^0} \varphi(z)\,dz$$

nähert, ist daher $\sigma\overline{\sum}(-1)^h\varphi(\sigma x + \sigma h)$ der Zuwachs, welchen der durch die Summe $(\mathrm{J}_{2\sigma})$ dargestellte „angenäherte" Integralwerth erhält, wenn man in der Mitte zwischen je zwei Ordinaten noch eine neue einschaltet.

Die Bedingung (H) kann aber, wie das Beispiel:

$$\varphi(z) = \frac{1}{z \log z}$$

zeigt, auch erfüllt sein, wenn $\int \varphi(z)dz$, von Null an genommen, keinen endlichen Werth hat.

Behufs Orientirung über das Maass der Anforderung, welche durch die Bedingung (H) an die Natur der Function φ gestellt wird, kann man den Fall in's Auge fassen, in welchem die Function φ Differentialquotienten φ', φ'' hat, und in welchem:

$$\sum_k \sigma\left(-\tfrac{1}{2}\varphi(\sigma x + 2\sigma k - \sigma) + \varphi(\sigma x + 2\sigma k) - \tfrac{1}{2}\varphi(\sigma x + 2\sigma k + \sigma)\right)$$

mit hinreichender Annäherung durch:

$$-\tfrac{1}{2}\sigma^3 \sum_k \varphi''(\sigma x + 2\sigma k)$$

oder auch durch:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2\left(\varphi'(0) - \varphi'(x^0)\right)$$

dargestellt wird. In diesem Falle wird — bei *endlichen* Werthen der Ableitungen $\varphi'(x)$ — die linke Seite der Gleichung (H) mit abnehmenden σ unendlich klein wie σ^2.

X. Die Gleichung (H) geht, wenn man darin die Function $\frac{f_0(x)}{x}$ an Stelle von $\varphi(x)$ einführt, in folgende über:

$$(\mathrm{H}^0) \qquad \lim_{x^0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0} \overline{\sum_h}(-1)^h \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x+h} = 0 \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right],\ 0 \leqq x \leqq 1\right).$$

Falls nun nachgewiesen werden kann, dass der absolute Werth jeder von $h = 2m+1$ bis zu irgend einem der folgenden Werthe von h erstreckten Summe:

$$\sum_h (-1)^h f_0(\sigma x + \sigma h) \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

für hinreichend kleine Werthe von σ, kleiner als eine bestimmte Zahl N_0 ist, so lässt sich daraus nach jener bekannten *Abel*'schen Methode*) erschliessen, dass der absolute Werth der Summe:

$$\sum_h (-1)^h \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x+h} \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right],\ 0 \leqq x \leqq 1\right),$$

für hinreichend kleine Werthe von σ, kleiner als $\frac{N_0}{2m+1}$ und also:

$$\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0} \overline{\sum_h}(-1)^h \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x+h} = 0 \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right],\ 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

sein muss. Da ferner:

$$f(0)\sum_h(-1)^h + \sum_h(-1)^h f_0(\sigma x + \sigma h) = \sum_h(-1)^h f(\sigma x + \sigma h)$$

ist, und also die Voraussetzung, dass die Summe rechts, für hinreichend kleine Werthe von σ, ihrem absoluten Werthe nach kleiner als eine bestimme Zahl N_1 bleibt, mit der oben bezüglich der Summe $\sum(-1)^h f_0(\sigma x + \sigma h)$ gemachten Voraussetzung zusammenfällt, sobald $N_1 > N_0 + |f(0)|$ angenommen wird, so ergiebt sich das Resultat:

*) *Crelle*'s Journal, Bd. I, S. 314 und *Abel*, Oeuvres complètes, Nouvelle édition 1881, Tome I, p. 222.

Um erschliessen zu können, dass für beliebige Werthe von x', die kleiner als X sind,

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x'} f(x) \sin w x \pi d \log x = \frac{1}{2} \pi f(0)$$

ist, *reicht es hin*, eine positive Zahl N und irgend welche (beliebig kleine) Grössen σ^0, x^0 so bestimmen zu können, dass der absolute Werth der Reihe:

$$\text{(K)} \qquad \overline{\sum_h} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h) \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots 2r+1;\ 0 \leq x \leq 1)}$$

oder:

$$-\frac{1}{2} f(\sigma x + \sigma) + f(\sigma x + 2\sigma) - f(\sigma x + 3\sigma) + \cdots + f(\sigma x + 2r\sigma) \\ - \frac{1}{2} f(\sigma x + 2r\sigma + \sigma) \qquad {\scriptstyle (0 \leq x \leq 1)}$$

für alle Werthe von σ, die kleiner als σ^0 sind, und für alle Werthe von r, die kleiner als $\frac{x^0}{2\sigma}$ sind, stets kleiner als N bleibt.

Denn, wenn jede der beiden Summen:

$$\overline{\sum_{h=1}^{h=2m+1}} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h), \qquad \overline{\sum_{h=1}^{h=2r+1}} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h)$$

ihrem absoluten Werthe nach kleiner als N ist, so ist ihre Differenz, absolut genommen, kleiner als $2N$.

Um die Bedeutung der Bedingung (K) darzulegen, erinnere ich zuvörderst daran, dass durch:

$$\sigma \overline{\sum_h} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h) \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots 2r+1)}$$

oder:

$$\sum_{k=1}^{k=r} \sigma \Big(-\frac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma) + f(\sigma x + 2\sigma k) - \frac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k + \sigma) \Big)$$

die algebraische Summe der Inhalte aller derjenigen Dreiecke dargestellt wird, deren Eckpunkte durch die Abscissen:

$$\sigma x + 2\sigma k - \sigma, \quad \sigma x + 2\sigma k, \quad \sigma x + 2\sigma k + \sigma$$

und die Ordinaten:

$$f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma), \quad f(\sigma x + 2\sigma k), \quad f(\sigma x + 2\sigma k + \sigma)$$

bestimmt sind. Die Bedingung (K) verlangt daher, dass der (algebraische) Gesammtinhalt dieser Dreiecke, dividirt durch 2σ — d. h. durch den Werth der Projection jedes einzelnen Dreiecks, auf die Abscissenachse — bei beliebig abnehmendem σ, stets unter einer festen endlichen Grenze bleibe.

Ich erinnere ferner daran, dass durch jene Summe

$$\sigma \overline{\sum} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h)$$

der Zuwachs dargestellt wird, den die Summe:

$$\overline{\sum_k} 2\sigma f(\sigma x - \sigma + 2\sigma k) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots r+1)}$$

erhält, wenn man zur Summe:

$$\overline{\sum_h} \sigma f(\sigma x + \sigma h) \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots 2r+1)}$$

übergeht, d. h. also der Zuwachs, den der durch die Summe:

$$\overline{\sum_k} 2\sigma f(\sigma x - \sigma + 2\sigma k) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots r+1)}$$

(für hinreichend kleine Werthe von σ) dargestellte „angenäherte" Integralwerth:

$$\int_0^{2\sigma r} f(z) dz$$

erhält, wenn man in der Mitte zwischen je zwei Ordinaten noch eine neue einschaltet.

Endlich sei bemerkt, dass unter der Voraussetzung der Existenz von Ableitungen $f'(z)$, $f''(z)$ der Werth von:

$$\overline{\sum_h} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h) \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots 2r+1)},$$

für hinreichend kleine Werthe von σ, annäherungsweise durch:

$$\frac{1}{2} \sigma \big(f'(0) - f'(2r\sigma) \big)$$

ausgedrückt werden kann und sich also — vorausgesetzt, dass die Differentialquotienten von $f(z)$ endlich sind — nicht nur als unter einer festen endlichen Grenze bleibend, sondern sogar als mit abnehmendem σ von derselben Ordnung unendlich klein werdend erweist.

XI. Sowohl dann, wenn für alle Werthe $x' < x'' \leqq x^0$

$$f(x') > f(x'')$$

ist, als auch dann, wenn durchweg die Ungleichheit:

$$f(x') < f(x'')$$

stattfindet, liegt der Werth der Reihe:

$$\overline{\sum_h}(-1)^h f(\sigma x + \sigma h) \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots)}$$

zwischen dem Werthe des ersten und dem des letzten Gliedes. Die obige Bedingung (K), und daher auch die Bedingung (H), aus der sie abgeleitet ist, *umfasst* also jene, welche *Dirichlet* in seiner ersten (im IV. Bande des *Crelle*'schen Journals) über diesen Gegenstand veröffentlichten Abhandlung als bestehend vorausgesetzt hat.

XII. Wenn die Differenz:

$$\text{(L)} \qquad \int_0^{x^0} f(x)\,dx - \sigma \overline{\sum_h} f(\sigma\delta + \sigma h) \qquad \left({0<h<\frac{x^0}{\sigma} \atop 0\leqq\delta\leqq 1}\right),$$

dividirt durch σ, bei beliebig abnehmendem σ stets unter einer festen endlichen Grenze N' bleibt, so ist der absolute Werth der Differenz:

$$2\sigma \overline{\sum_k} f(\sigma\delta - \sigma + 2\sigma k) - \sigma \overline{\sum_h} f(\sigma\delta + \sigma h) \qquad \left({0<k<\frac{x^0}{2\sigma} \atop 0<h<\frac{x^0}{\sigma}}\right),$$

dividirt durch σ, d. h. also der absolute Werth von:

$$\overline{\sum_h}(-1)^h f(\sigma\delta + \sigma h) \qquad \left(0<h<\frac{x^0}{\sigma}\right),$$

bei beliebig abnehmendem σ stets kleiner als $2N'$, und die Bedingung (K) ist daher erfüllt. Da nun die Differenz (L) sich von der über alle Werthe von h erstreckten Summe der Differenzen:

$$\text{(L')} \qquad \int_{\sigma\delta+\sigma h}^{\sigma\delta+\sigma h+\sigma} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\sigma\big(f(\sigma\delta+\sigma h) + f(\sigma\delta+\sigma h+\sigma)\big)$$

nur um die Werthe von:

$$\int_0^{\sigma\delta+\sigma} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{x^0}^{\sigma\delta+\sigma\left[\frac{x^0}{\sigma}\right]} f(x)\,dx$$

d. h. nur um solche Werthe unterscheidet, welche, wenn sie durch σ dividirt werden, bei beliebig abnehmendem σ endlich bleiben, so kann an Stelle von (L) eben jene Summe der Differenzen (L') genommen werden. Jede dieser Differenzen stellt aber den Flächeninhalt des Segments dar, welcher einerseits von der Curve $y = f(x)$ und andererseits von der durch die beiden Punkte:

$$\big(x = \sigma\delta + \sigma h,\ y = f(\sigma\delta + \sigma h)\big), \quad \big(x = \sigma\delta + \sigma h + \sigma,\ y = f(\sigma\delta + \sigma h + \sigma)\big)$$

gehenden Graden begrenzt wird. Die Summe der Differenzen (L') stellt daher die algebraische Summe der Flächeninhalte aller Segmente dar, welche durch die verschiedenen, je zwei aufeinanderfolgende von den Punkten:

$$(x = \sigma\delta + \sigma h,\ y = f(\sigma\delta + \sigma h)) \qquad \left(0<h<\frac{x^0}{\sigma}\right)$$

mit einander verbindenden Graden von der Curve C abgeschnitten werden. Es genügt also, dass diese algebraische Summe der Segmentflächen, dividirt durch σ (d. h. durch den Werth ihrer Projection auf die Abscissenachse), bei beliebig abnehmendem σ, unter einer festen endlichen Grenze bleibe, um das Bestehen der Gleichung:

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x_1} f(x) \sin w x \pi \, d\log x = \frac{1}{2}\pi f(0)$$

erschliessen zu können. Die Bedingung (K) und jene ursprüngliche Bedingung (H) umfasst demnach sowohl die von Hrn. *Weierstrass* aufgestellte, als auch die daraus von Hrn. *Hölder* entwickelte weitere Bedingung,*) und folglich auch diejenige, welche von Hrn. *Camille Jordan* angegeben worden ist.**)

XIII. Der Inhalt der Bedingungsgleichung (H^0) kann dahin formulirt werden, dass der Werth der Reihe:

$$\text{(R)} \qquad \sum_n \frac{\overline{\sum_h}(-1)^h f(\sigma x + \sigma h + \sigma)}{(x+2n)(x+2n+2)} \qquad \left(0\leqq x\leqq 1;\ 2m\leqq h\leqq 2n;\ m+1\leqq n\leqq\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

beliebig klein werden soll, wenn man für m eine beliebig grosse Zahl, für x^0 eine beliebig kleine Grösse und alsdann den Werth von σ hinreichend klein annimmt. Man

*) Sitzungsbericht vom 7. Mai d. J., S. 419.[1])

**) Comptes Rendus von 1881. Bd. 92. S. 228.

[1]) *Hölder*, Über eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function durch die *Fourier*'sche Reihe, Sitzungsberichte aus dem Jahre 1885.

kann nämlich, da $f(0)\overline{\sum_h}(-1)^h = 0$ ist, in der Reihe (R), ohne ihren Werth zu ändern, $f_0(\sigma x + \sigma h + \sigma)$, d. h. $f(\sigma x + \sigma h + \sigma) - f(0)$ an die Stelle von $f(\sigma x + \sigma h + \sigma)$ setzen und sie dann als Summe der vier Ausdrücke:

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{2}\overline{\sum_h}(-1)^h \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x+h}$$

$$(h = 2m+1,\ 2m+2, \ldots 2r+1)$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{2(x+2r+2)\sigma}\overline{\sum_h}\sigma(-1)^h f_0(\sigma x + \sigma h)$$

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{4}\overline{\sum_{k=m+1}^{k=r}}\left(\frac{-1}{x+2k} + \frac{2}{x+2k+1} - \frac{1}{x+2k+2}\right) f_0(\sigma x + 2\sigma k + \sigma)$$

$$\text{(d)} \qquad \frac{1}{4}\left(\frac{f_0(\sigma x + 2\sigma r + \sigma)}{x+2r+2} - \frac{f_0(\sigma x + 2\sigma m + \sigma)}{x+2m+2}\right)$$

darstellen, wenn darin $r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]$ genommen wird. Der erste dieser vier Ausdrücke ist, abgesehen vom Factor $\frac{1}{2}$, genau derjenige, welcher auf der linken Seite der Gleichung (H^0) steht, und jeder der drei anderen verschwindet mit zunehmendem m und abnehmendem σ. Denn in dem Ausdrucke (b) hat der Factor vor dem Summenzeichen einen positiven Werth, der kleiner als $\frac{1}{2x^0}$ ist, und die Summe:

$$\overline{\sum_h}\sigma(-1)^h f_0(\sigma x + \sigma h)$$

verschwindet für abnehmende σ, weil das Aggregat der positiven Glieder und das der negativen sich einem und demselben, durch das Integral $\int_0^{x^0} f(z)\,dz$ bezeichneten Grenzwerthe nähert. Im Ausdrucke (c) ist der Factor von f_0, unter dem Summenzeichen, gleich:

$$\frac{-2}{(x+2k)(x+2k+1)(x+2k+2)},$$

also seinem absoluten Werthe nach kleiner als $\frac{1}{4k^3}$. Da nun $|f_0(\sigma x + 2\sigma k + \sigma)| < M_0$ ist, so ist der absolute Werth des Ausdrucks (c) kleiner als:

$$\frac{1}{16}M_0\sum_k \frac{1}{k^3} \qquad (k = m+1,\ m+2, \ldots r)$$

und wird also bei wachsendem m beliebig klein. Endlich werden offenbar die beiden

Theile im Ausdruck (d) mit abnehmendem σ, bei irgend welchen Werthen von m, beliebig klein, da einerseits:

$$\frac{|f_0(\sigma x + 2\sigma r + \sigma)|}{x+2r+2} < \frac{\sigma M_0}{x^0}$$

und andererseits für jeden endlichen Werth von m:

$$\lim_{\sigma=0} f_0(\sigma x + 2\sigma m + \sigma) = 0$$

ist.

Es lässt sich hiernach die mit (H^0) bezeichnete Bedingungsgleichung in die ihr aequivalente:

$$(\overline{H}) \qquad \lim_{x^0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0}\sum_n \frac{\overline{\sum_h}(-1)^h f(\sigma x + \sigma h + \sigma)}{(x+2n)(x+2n+2)} = 0,$$

$$\left(0 \leqq x \leqq 1;\ 2m \leqq h \leqq 2n;\ m+1 \leqq n \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

transformiren, aus welcher das oben bei (K) angegebene Resultat ganz unmittelbar gefolgert werden kann. Die Gleichung ($\overline{H}$) geht wiederum, wenn zur Abkürzung:

$$\frac{1}{n-m}\overline{\sum_h}(-1)^h f(\sigma x + \sigma h + \sigma) = \Delta_m^n f(\sigma x + 2\sigma k) \qquad (2m \leqq h \leqq 2n)$$

gesetzt wird, in folgende über:

$$(\overline{\overline{H}}) \qquad \lim_{x^0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0}\sum_n \frac{(n-m)\Delta_m^n f(\sigma x + 2\sigma k)}{(x+2n)(x+2n+2)} = 0$$

$$\left(0 \leqq x \leqq 1;\ m+1 \leqq n \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right).$$

Um deren Bedeutung darzulegen, bemerke ich, dass $\Delta_m^n f(\sigma x + 2\sigma k)$ der „mittlere Werth" der $n-m$ aufeinanderfolgenden zweiten Differenzen:

$$-\frac{1}{2}f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma) + f(\sigma x + 2\sigma k) - \frac{1}{2}f(\sigma x + 2\sigma k + \sigma) \qquad (m \leqq k \leqq n)$$

ist.

Substituirt man in der Summe auf der linken Seite der Gleichung ($\overline{\overline{H}}$) für jene mittleren Werthe ihre absoluten Beträge und nimmt dann an Stelle des positiven Factors:

$$\frac{n-m}{(x+2n)(x+2n+2)}$$

den grösseren Factor $\frac{1}{n}$, so verwandelt sie sich in folgende:

$$\sum_n \frac{1}{n} \left| \Delta_m^n f(\sigma x + 2\sigma k) \right| \qquad \left(n = m+1,\, m+2, \dots \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right).$$

Wenn diese Summe für $\sigma = 0$, $m = \infty$, $x^0 = 0$ verschwindet, so ist offenbar die Gleichung $(\overline{\mathrm{H}})$ erfüllt, und es ergiebt sich daher das Resultat:

Um erschliessen zu können, dass für beliebige Werthe von x', die kleiner als X sind,

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x'} f(x) \sin w x \pi d \log x = \frac{1}{2} \pi f(0)$$

(K) ist, *reicht es hin,* für irgend eine gegebene, noch so kleine Grösse τ eine Zahl m und eine Grösse x^0, und alsdann eine beliebig kleine Grösse σ^0 so bestimmen zu können, dass der Werth der Reihe:

$$\sum_n \frac{1}{n} \left| \Delta_m^n f(\sigma x + 2\sigma k) \right| \qquad (m < n \leqq r)$$

stets kleiner als τ bleibt, wenn $0 \leqq x \leqq 1$, $\sigma < \sigma^0$ und $2r\sigma < x^0$ ist.

Um die Bedeutung der hier auftretenden Bedingungsgleichung:

$$(\overline{\mathrm{K}}) \qquad \lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \sum_n \frac{1}{n} \left| \Delta_m^n f(\sigma x + 2\sigma k) \right| = 0 \qquad \left(m < n \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

darzulegen, bemerke ich zuvörderst, dass sie offenbar erfüllt ist, wenn $\sum \frac{1}{n}$, multiplicirt mit dem grössten Werthe von $|\Delta_m^n|$, bei abnehmendem σ beliebig klein wird. Da nun der Werth von $\sum \frac{1}{n}$ annäherungsweise durch $\log \frac{x^0}{2\sigma m}$ ausgedrückt wird, so genügt es,

dass jeder der mittleren Werthe der aufeinander folgenden zweiten Differenzen:

$$(\overline{\mathrm{L}}) \qquad -\frac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma) + f(\sigma x + 2\sigma k) - \frac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k + \sigma),$$

multiplicirt mit $\log \frac{1}{\sigma}$, bei abnehmendem σ sich der Null nähere,

und es zeigt sich also, dass die Bedingung (H) auch diejenige umfasst, welche Hr. *Lipschitz* in seiner im 63. Bande des Journals für Mathematik (S. 296ff.) veröffentlichten Abhandlung entwickelt hat.

Man kann aber noch *weitere* Bedingungen aus der Gleichung $(\overline{\overline{\mathrm{K}}})$ ableiten, indem man wiederum von den absoluten Beträgen jener mittleren Werthe zu den mittleren Werthen eben dieser absoluten Beträge übergeht, d. h. also indem man die Summenausdrücke:

$$\frac{1}{p-m} \sum_n \left| \Delta_m^n f(\sigma x + 2\sigma k) \right| \qquad (m < n \leqq p-1)$$

einführt. Bezeichnet man einen solchen „mittleren absoluten Betrag" der mittleren Werthe auf einander folgender zweiter Differenzen:

$$-\frac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k - \sigma) + f(\sigma x + 2\sigma k) - \frac{1}{2} f(\sigma x + 2\sigma k + \sigma) \qquad (m \leqq k \leqq n)$$

mit θ_p, so tritt an die Stelle der Summe in $(\overline{\mathrm{K}})$ das Aggregat:

$$\sum_k \frac{k\theta_{m+k}}{(m+k)(m+k+1)} + \frac{r-m+1}{r} \theta_{r+1} + \frac{1}{r} \left| \Delta_m^r \right| \qquad (k = 1, 2, \dots r-m+1),$$

wenn, wie oben $r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]$ gesetzt wird. Der Grenzwerth, welchem sich dieser Ausdruck für $\sigma = 0$ nähert, verschwindet offenbar, sobald

$$\lim_{\sigma=0} \sum_{k=1}^{k=r-m} \frac{\theta_{m+k}}{m+k} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\sigma=0} \theta_{r+1} = 0$$

ist, und man schliesst daher in derselben Weise, wie oben, dass es schon genügt,

wenn jeder der mit θ bezeichneten „mittleren absoluten Beträge" der mittleren Werthe jener zweiten Differenzen, mit $\log \frac{1}{\sigma}$ multiplicirt, bei abnehmendem σ sich der Null nähert.

XIV. Substituirt man in der oben mit (H^0) bezeichneten Gleichung:

$$\lim_{x^0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \sum_h (-1)^h \frac{f_0(\sigma x + \sigma h)}{x+h} = 0 \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];\ 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

für $f_0(\sigma x + \sigma h)$ seinen Werth:

$$f(\sigma x + \sigma h) - f(0),$$

so wird der Factor von $f(0)$, nämlich der Grenzwerth der Summe:

$$\sum_h \frac{(-1)^h}{x+h} \qquad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right),$$

für wachsende m, offenbar gleich Null. Man kann also in der Gleichung (H^0) die Function f_0 durch die ursprüngliche Function f ersetzen. Man kann ferner darin den Strich über dem Summenzeichen und zugleich das letzte Glied der Summe weglassen, d. h. nämlich die Glieder:

$$-\frac{f(\sigma x + 2\sigma m + \sigma)}{2(x + 2m + 1)} + \frac{f(\sigma x + 2\sigma r + \sigma)}{2(x + 2r + 1)} \qquad \left(r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

hinzufügen, da ja deren Grenzwerth für wachsende Zahlen m und r sich der Null nähert. An die Stelle der Reihe in der Gleichung (H^0) tritt alsdann die Reihe:

$$\sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x + h} \qquad \left(2m < h \leqq 2\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];\ 0 \leqq x \leqq 1\right),$$

und es ergiebt sich das Resultat:

Um erschliessen zu können, dass für beliebige Werthe von x', die kleiner als X sind,

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x'} f(x) \sin w x\pi\, d\log x = \frac{1}{2}\pi f(0)$$

(K_1) ist, genügt es nachzuweisen, dass der Grenzwerth:

$$\lim_{\sigma=0} \sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x + h} \qquad \left(2m < h \leqq 2\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];\ 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

sich mit wachsendem m und mit abnehmendem x^0 der Null nähere.

Die hierin enthaltene Forderung lässt sich auch *so* formuliren:

Für eine gegebene positive, beliebig kleine Grösse τ soll zuerst eine Zahl m_1, und eine Grösse x_1^0, und alsdann für jede Zahl m, die grösser als m_1 ist, und für jede Grösse x^0, die kleiner als x_1^0 ist, eine Grösse σ^0 so bestimmt

(K_2) werden können, dass der absolute Werth der Reihe:

$$\sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x + h} \qquad \left(2m < h \leqq 2\left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];\ 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

stets kleiner als τ bleibt, sobald $\sigma < \sigma^0$ ist.

Dieses, wie mir scheint, bemerkenswerthe Resultat, welches sich aus den obigen Entwickelungen ergeben hat, soll nunmehr noch direct verificirt werden.

Zu diesem Zwecke ist das *Dirichlet*'sche Integral:

$$\int_0^{\frac{x'}{\sigma}} f(\sigma x) \sin x\pi\, d\log x$$

als Aggregat von sieben Integralen:

$$J_0 + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6$$

darzustellen, welche folgendermaassen definirt sind:

$$J_0 = f(0)\int_0^{\infty} \sin x\pi\, d\log x, \quad J_1 = f(0)\int_{\infty}^{2m+1} \sin x\pi\, d\log x$$

$$J_2 = \int_{2m+1}^{2r+1} f(\sigma x) \sin x\pi\, d\log x = \int_0^1 \sum_{h=2m+1}^{h=2r} (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x + h} \sin x\pi\, dx$$

$$J_3 = \int_1^{2m+1} \big(f(\sigma x) - f(0)\big) \sin x\pi\, d\log x$$

$$J_4 = \int_0^1 \big(f(\sigma x) - f(0)\big) \frac{\sin x\pi}{x}\, dx$$

$$J_5 = \int_{2r+1}^{\frac{x^0}{\sigma}} f(\sigma x) \sin x\pi\, d\log x, \quad J_6 = \int_{\frac{x^0}{\sigma}}^{\frac{x'}{\sigma}} f(\sigma x) \sin x\pi\, d\log x,$$

und es ist nun zu zeigen, dass — wenn die bei (K_2) formulirte Forderung erfüllt ist — die Zahlen m, r und die Grössen σ, x^0 stets so gewählt werden können, dass der absolute Werth des Aggregats:

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6$$

kleiner als irgend eine gegebene, beliebig kleine Grösse τ wird, d. h. also, dass sich alsdann der Werth jenes *Dirichlet*'schen Integrals von dem Werthe von J_0 um weniger als τ unterscheidet.

Man nehme nun zuerst eine Zahl m^0 so an, dass $2m^0 + 1 > \frac{12}{\pi\tau}$ wird. Dann ist für jede Zahl m, die grösser als m^0 ist:

$$|J_1| < \frac{2}{\pi(2m+1)} < \frac{1}{6}\tau.$$

Man wähle ferner, gemäss der als erfüllbar vorausgesetzten Forderung (K_2), eine Zahl m, die grösser als m_1 ist, sowie eine Grösse x^0, die kleiner als x_1^0 ist, und bestimme darnach eine Grösse σ^0 so, dass der absolute Werth der Summe:

$$\sum_{h=2m+1}^{h=2r} (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x+h} \qquad \left(0 \leq x \leq 1;\ r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]\right)$$

kleiner als $\frac{1}{6}\tau$ wird, sobald σ kleiner als σ^0 ist. Alsdann ist für jeden solchen Werth von σ:

$$|J_2| < \frac{1}{6}\tau.$$

Nunmehr bestimme man eine Grösse ξ so, dass der absolute Werth der Differenz $f(x) - f(0)$ für alle Werthe von x, die kleiner als ξ sind, kleiner als:

$$\frac{\tau}{6 \log(2m+1)}$$

bleibt, und setze dann $\sigma' = \frac{\xi}{2m+1}$. Dann ist für jede Grösse σ, die kleiner als σ' ist, der absolute Werth der Differenz $f(\sigma x) - f(0)$ kleiner als $\frac{\tau}{6 \log(2m+1)}$, so lange $x < 2m + 1$ bleibt. Es ist also für jeden solchen Werth von σ:

$$|J_3| < \frac{1}{6}\tau,$$

zugleich aber auch, da $\frac{\sin x\pi}{x}$ kleiner als π ist;

$$|J_4| < \frac{\tau\pi}{6 \log(2m+1)} < \frac{1}{6}\tau.$$

Das Intervall zwischen $2r + 1$ und $\frac{x^0}{\sigma}$, über welches sich die Integration in J_5 erstreckt, ist höchstens gleich Eins, da $r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right]$ angenommen worden ist. Der absolute Werth von J_5 ist also kleiner als:

$$M \left| \log\left(1 - \frac{\sigma}{x^0}\right) \right|,$$

wenn M, wie oben, eine Grösse bedeutet, welche von keinem Functionswerthe $f(x)$ übertroffen wird. Man kann hiernach σ'' hinreichend klein wählen, damit für jeden Werth von σ, der kleiner als σ'' ist:

$$|J_5| < \frac{1}{6}\tau$$

wird. Dass endlich eine hinreichend kleine Grösse σ''' so bestimmt werden kann, dass für alle Werthe von σ, die kleiner als σ''' sind, der absolute Werth von J_6 beliebig klein gemacht, also die Ungleichheitsbedingung:

$$|J_6| < \frac{1}{6}\tau$$

erfüllt werden kann, ist bereits oben in art. V ausführlich dargelegt worden.

Man braucht also nur σ kleiner als die kleinste der vorstehend definirten Grössen $\sigma^0, \sigma', \sigma'', \sigma'''$ anzunehmen, um sicher zu sein, dass der absolute Werth jedes der sechs Integrale $J_1, J_2, \ldots J_6$ kleiner als $\frac{1}{6}\tau$, dass also:

$$|J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6|$$

kleiner als τ, d. h. kleiner als eine gegebene, beliebig kleine Grösse wird.

XV. Die hiermit verificirte Bedingung für die Gültigkeit der Gleichung:

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x'} f(x) \sin wx\pi d \log x = \frac{1}{2}\pi f(0)$$

ist eine „*weitere*“, d. h. sie enthält *weniger* Beschränkungen für die Function $f(x)$ und lässt also deren Bereich *weiter*, als die bisher bekannten Bedingungen*); sie *umfasst* namentlich wie oben gezeigt worden ist, sowohl die *Dirichlet*'schen als auch diejenigen Bedingungen, welche oben aus den Arbeiten der HH. *Lipschitz*, *P. du Bois-Reymond*, *C. Jordan* und *Hölder* citirt sind; und sie steht dabei in Bezug auf die Einfachheit und Durchsichtigkeit ihrer Bedeutung hinter den früher angegebenen Bedingungen kaum zurück. Die Möglichkeit ihrer Aufstellung beruht wesentlich auf jener gleich Anfangs (art. II [B]) entwickelten Gleichung:

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^{\xi} f_0(\sigma x) \sin x\pi d \log x = 0,$$

welche meines Wissens bisher nicht hervorgehoben oder wenigstens nicht vollständig für die Bedingungen der Gültigkeit der *Dirichlet*'schen Integralgleichung benutzt worden ist.

*) Die verschiedenen Bedingungen, welche in dem 1880 erschienenen Werke des Hrn. *Ulisse Dini* vorkommen, habe ich noch nicht sämmtlich, in Bezug auf ihren Umfang, mit der obigen Bedingung verglichen.

Aber man kann noch eine weitere Anwendung von dem Principe machen, welches der erwähnten Gleichung und also auch der obigen Zerlegung des *Dirichlet*schen Integrals in sieben Integrale zu Grunde liegt, indem man irgend eine Beziehung zwischen der Zahl $2m+1$ und der Grösse σ sucht, für welche die Grenzwerthe der beiden Integrale J_2 und J_3 bei abnehmendem σ verschwinden. Setzt man nämlich, um eine solche Beziehung anzudeuten:

$$\text{(S)} \qquad 2m = \frac{\theta(\sigma)}{\sigma},$$

so ist die mit $\theta(\sigma)$ bezeichnete Function von σ so zu bestimmen, dass zu gleicher Zeit:

$$\text{(S}^0\text{)} \qquad \lim_{\sigma=0} \frac{\sigma}{\theta(\sigma)} = 0,$$

$$\text{(S}'\text{)} \qquad \lim_{\sigma=0} \int_{\sigma}^{\sigma+\theta(\sigma)} \big(f(x)-f(0)\big) \sin\frac{x\pi}{\sigma}\, d\log x = 0,$$

$$\text{(G}_1^0\text{)} \qquad \lim_{x^0=0}\lim_{\sigma=0} \int_0^1 \sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x+\sigma h)}{x+h} \sin x\pi dx = 0$$
$$\left(\frac{\theta(\sigma)}{2\sigma} \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) \leqq \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right], 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

wird, und man kann demnach den oben mit (G^0), (H^0), $(\overline{\mathrm{H}})$, $(\overline{\overline{\mathrm{H}}})$ bezeichneten Bedingungsgleichungen eine *allgemeinere* Bedeutung beilegen, indem man, statt, wie es dort geschehen ist, die Zahl m unabhängig von σ wachsen zu lassen, zwischen m und σ irgend eine durch die Gleichung (S) angedeutete Beziehung zulässt, für welche die beiden Gleichungen (S^0) und (S') befriedigt werden. Die hier mit (G_1^0) bezeichnete Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung (G^0) des Art. VI eben nur dadurch, dass in den Summationsbedingungen die Zahl m durch ihren aus der Gleichung (S) entnommenen Werth ersetzt und mit Rücksicht auf die Gleichung (S^0) die dadurch unnötig gewordene Bestimmung: *limes* $m=\infty$ weggelassen worden ist.

Nimmt man für die bei (K_1) formulirte Bedingung:

$$\lim_{x^0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0} \sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x+\sigma h)}{x+h} = 0 \quad \left(m \leqq \tfrac{1}{2}(h-1) < r;\ r = \left[\frac{x^0}{2\sigma}\right];\ 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

die ihr aequivalente:

$$\lim_{x^0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0} \sum_k \frac{f(\sigma x+2\sigma k)-f(\sigma x+2\sigma k-\sigma)}{x+2k} = 0 \qquad (m<k \leqq r;\ 0 \leqq x \leqq 1),$$

so sieht man, dass es genügt, wenn:

$$\big(f(x+\sigma)-f(x)\big)\sum_{k=m+1}^{k=r}\frac{1}{k},$$

mit abnehmendem σ, für jeden Werth von x, der kleiner als x^0 ist, verschwindet. Da hier die Summe der reciproken Zahlen von $m+1$ bis r durch $\log\frac{r}{m}$, oder also auch durch $\log\frac{x^0}{\theta(\sigma)}$ ersetzt werden kann, so folgt, dass man an Stelle jener Gleichung (G_1^0) die Gleichung:

$$\lim_{x^0=0}\lim_{\sigma=0}\big(f(x+\sigma)-f(x)\big)\log\frac{x^0}{\theta(\sigma)} = 0 \qquad (0 \leqq x < x^0),$$

oder auch, da wegen der Stetigkeit der Function $f(x)$ der Grenzwerth von $(f(x+\sigma)-f(x))\log x^0$ für $\sigma=0$ verschwindet, die Gleichung:

$$\text{(S}_1'\text{)} \qquad \lim_{\sigma=0}\big(f(x+\sigma)-f(x)\big)\log\frac{1}{\theta(\sigma)} = 0 \qquad (0 \leqq x < x^0)$$

als eine (freilich nur) *hinreichende* Bedingung für das Bestehen der *Dirichlet*'schen Integralgleichung nehmen kann, wenn dabei die Function $\theta(\sigma)$ so gewählt wird, dass sie die beiden Gleichungen (S^0) und (S') befriedigt.

Der Werth des Integrals in der Gleichung (S') kann durch den Ausdruck:

$$\varepsilon\big(f(\sigma+\delta\theta(\sigma))-f(0)\big)\log\left(1+\frac{\theta(\sigma)}{\sigma}\right)$$

dargestellt werden, in welchem $-1 \leqq \varepsilon \leqq +1$ und $0 \leqq \delta \leqq 1$ ist, und an die Stelle der Gleichung (S') selbst kann daher die Gleichung:

$$\text{(S}_2'\text{)} \qquad \lim_{\sigma=0}\big(f(\sigma+\delta\theta(\sigma))-f(0)\big)\log\frac{\theta(\sigma)}{\sigma} = 0$$

treten.

Bezeichnet man mit $\varDelta\sigma$ den grössten Werth der Differenzen $f(x+\sigma)-f(x)$ für die verschiedenen Werthe von x, die kleiner als x^0 sind, so ist $\varDelta\sigma$ um so kleiner, je stetiger die Function $f(x)$ in dem Intervalle von 0 bis x^0 ist, und man kann sich nunmehr die Function $\theta(\sigma)$ gemäss der aus (S_1') hervorgehenden Gleichung:

$$\text{(T)} \qquad \lim_{\sigma=0}\varDelta\sigma\log\frac{1}{\theta(\sigma)} = 0$$

definirt denken, so dass also nur irgend eine mit σ selbst verschwindende Function $\psi(\sigma)$ anzunehmen und alsdann:

$$\theta(\sigma) = e^{-\frac{\psi(\sigma)}{\Delta\sigma}}$$

zu setzen ist. Die Gleichung (S_2') liefert hiernach, da sich die Differenz:

$f(\sigma + \delta\theta(\sigma)) - f(0)$ aus den Differenzen $f(\sigma + \delta\theta(\sigma)) - f(\sigma),\ f(\sigma) - f(0)$

zusammensetzen lässt, die Relation:

$$\lim_{\sigma=0} \Delta\sigma \log \frac{\theta(\sigma)}{\sigma} = 0,$$

und aus dieser geht endlich in Verbindung mit jener Gleichung (T) die Relation:

$$(T^0) \qquad \lim_{\sigma=0} \Delta\sigma \log \frac{1}{\sigma} = 0$$

hervor. Es ergiebt sich also hierbei nur jenes Resultat, welches schon in dem oben mit $(\overline{L})$ bezeichneten enthalten ist, nämlich:

> wenn die Function $f(x)$ in hinreichender Nähe von $x = 0$ einen solchen Grad von Stetigkeit hat, dass jede Differenz $f(x+\sigma) - f(x)$, multiplicirt mit $\log\frac{1}{\sigma}$, für abnehmende Werthe von σ verschwindet, so ist der Grenzwerth des Integrals:
>
> $$\int_0^{x'} f(x) \sin\frac{x\pi}{\sigma} d\log x,$$
>
> für abnehmende Werthe von σ, gleich $\frac{1}{2}\pi f(0)$.

Diese Bedingung selbst schliesst sich unmittelbar an jene *Lipschitz*'sche an, welche schon oben citirt worden ist, aber die bei der Herleitung angewendete Methode steht in naher Beziehung zu jener, deren sich Hr. *P. du Bois-Reymond* im I. Capitel seiner „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der *Fourier*schen Darstellungsformeln" bedient hat, um Bedingungen der Gültigkeit der *Dirichlet*schen Integralformel für dort besonders charakterisirte Functionen $f(x)$ herzuleiten.*) Ob auch diese speciellen, auf besondere Functionen $f(x)$ bezüglichen, *du Bois-*

*) Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften. II. Cl. XII. Bd. II. Abth. München 1876.

Reymond'schen Bedingungen in jener Bedingungsgleichung (H) — wenn sie in der oben bei (G_1^0) charakterisirten *allgemeineren* Bedeutung genommen wird — enthalten ist, habe ich noch nicht ergründet.

Dass alle solche Bedingungen, — also auch diejenigen, welche in dem vorliegenden Aufsatze hergeleitet worden sind, — in Bedingungen für die Entwickelbarkeit von Functionen in *Fourier*'sche Reihen umgesetzt werden können, ist an sich klar.

ÜBER EINE BEI ANWENDUNG DER PARTIELLEN INTEGRATION NÜTZLICHE FORMEL

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1885. S. 841—862.

ÜBER EINE BEI ANWENDUNG DER PARTIELLEN INTEGRATION NÜTZLICHE FORMEL.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 16. Juli 1885.]

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ eindeutige Functionen der reellen Variabeln x und $f^{(h)}(x)$, $g^{(h)}(x)$ ihre $h$ten Ableitungen bedeuten, so ist:

$$f^{(h)}(x)\,g^{(n-h)}(-x) - f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h+1)}(-x) = \frac{d\left(f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)\right)}{dx}.$$

Nimmt man hierin $h = 1, 2, \ldots n$ und summirt, so resultirt die Differentialformel:

$$(\mathfrak{D}) \qquad f^{(n)}(x)\,g(-x) - f(x)\,g^{(n)}(-x) = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{d\left(f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)\right)}{dx}$$

und also auch die Integralformel:

$$(\mathfrak{J}) \qquad \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx = \sum_{h=1}^{h=n} \int_{x_0}^{x} d\left(f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)\right),$$

durch welche die verschiedenen Anwendungen der partiellen Integration schematisirt werden.

I. Die Formel $(\mathfrak{J})$ geht unmittelbar in die *Taylor*'sche über, wenn man die Integrationsvariable z an Stelle von x nimmt und dann:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz, \quad g(z) = \frac{(x+z)^n}{n!}$$

setzt. Denn das erste Integral auf der linken Seite von $(\mathfrak{J})$ wird alsdann das „Restintegral“ der *Taylor*'schen Formel:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^n F^{(n+1)}(z)\,dz,$$

das zweite, nämlich:

$$-\int_{x_0}^{x} f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx \quad \text{wird gleich} \quad -F(x) + F(x_0).$$

und endlich wird, wenn $f^{(h-1)}(x)$ in dem Intervalle (x_0, x) stetig ist:

$$\int_{x_0}^{x} d\left(f^{(h-1)}(x)g^{(n-h)}(-x)\right) = -F^{(h)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^h}{h!},$$

so dass in der That die *Taylor*'sche Formel:

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(x-x_0)^h}{h!} F^{(h)}(x_0) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^n F^{(n+1)}(z)\,dz \tag{1}$$

resultirt.

II. Unter Festhaltung der Voraussetzung der Stetigkeit von $f'(x), f''(x), \dots f^{(n-1)}(x)$ und bei Annahme von:

$$g(x) = e^{ux}$$

resultirt ferner aus der Formel $(\mathfrak{J})$ die Gleichung:

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x)e^{-ux}\,dx - u^n \int_{x_0}^{x} f(x)e^{-ux}\,dx = \sum_{h=1}^{h=n} u^{n-h}\left(f^{(h-1)}(x)e^{-ux} - f^{(h-1)}(x_0)e^{-ux_0}\right). \tag{2}$$

III. Nimmt man in der Formel $(\mathfrak{J})$:

$$g(x) = [(x+x_0)(x+x_1)]^n$$

und erstreckt die Integration von x_0 bis x_1, so verschwinden, unter Voraussetzung der Stetigkeit von $f'(x), f''(x), \dots f^{(n-1)}(x)$, die sämmtlichen Integrale auf der rechten Seite. Man erhält demnach die Formel:

$$\int_{x_0}^{x_1} f^{(n)}(x)[(x-x_0)(x-x_1)]^n\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\frac{d^n[(x-x_0)(x-x_1)]^n}{dx^n}\,dx, \tag{3}$$

welche die charakteristische Eigenschaft dieser Function $g^{(n)}(-x)$, dass der Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_1} f(x)g^{(n)}(-x)\,dx$, für irgend welche ganze Functionen $(n-1)$ten Grades $f(x)$, verschwindet, in Evidenz setzt. Dies ist aber jene Eigenschaft, auf welcher *Jacobi* in seiner Abhandlung: „Über *Gauss*' neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden“ die Bestimmung der hier mit $g^{(n)}(-x)$ bezeichneten Function:

$$\frac{d^n[(x-x_0)(x-x_1)]^n}{dx^n}$$

basirt, und er gebraucht dazu a. a. O. im § 4 auch eine Formel für die Darstellung von $\int uv\,dx$, welche von der Gleichung $(\mathfrak{J})$ nur formal verschieden ist und aus ihr hervorgeht, wenn $u = f(x)$ und $v = g^{(n)}(-x)$ gesetzt wird.

IV. Nicht bloss in dem hier behandelten speciellen Falle, sondern überhaupt, wenn die Functionen:

$$f^{(h-1)}(x)g^{(n-h)}(-x) \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots n)}$$

stetig sind und an beiden Integrationsgrenzen einerlei Werth haben, verschwindet der Ausdruck auf der rechten Seite der Formel $(\mathfrak{J})$ und es kommt:

$$\int_{x_0}^{x_1} f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx. \tag{4}$$

Die angegebenen Voraussetzungen sind erfüllt, wenn die Integration in der Formel $(\mathfrak{J})$ von 0 bis 1 erstreckt, ferner:

$$g(x) = \cos 2k(x+y)\pi$$

gesetzt und für k irgend eine ganze Zahl, für $f(x)$ aber irgend eine Function genommen wird, die ebenso wie jede ihrer $n-1$ Ableitungen:

$$f'(x), f''(x), \dots f^{(n-1)}(x)$$

von $x=0$ bis $x=1$ stetig ist und an den beiden Grenzen des Intervalls $x=0$ und $x=1$ denselben Werth hat. Die Gleichung (4) geht alsdann, da:

$$g^{(n)}(x) = (2k\pi)^n \cos\left(2kx + 2ky + \tfrac{1}{2}n\right)\pi$$

wird, in folgende über:

$$\int_0^1 f^{(n)}(x)\cos 2k(y-x)\pi\,dx = (2k\pi)^n \int_0^1 f(x)\cos\left(2ky - 2kx + \tfrac{1}{2}n\right)\pi\,dx, \tag{5}$$

in welcher y eine Variable bedeutet. Bestimmt man nun c_k, $c_k^{(n)}$, v_k, $v_k^{(n)}$ gemäss den Bedingungen:

$$\int_0^1 f(x)\cos 2k(y-x)\pi\,dx = c_k \cos(2ky - v_k)\pi$$

$$\int_0^1 f^{(n)}(x)\cos 2k(y-x)\pi\,dx = c_k^{(n)} \cos(2ky - v_k^{(n)})\pi,$$

so gelten — unter der einzigen Voraussetzung, dass die Function $f^{(n)}(x)$ überhaupt durch eine *Fourier*'sche Reihe darstellbar ist — die Reihenentwickelungen:

$$f(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} c_k \cos(2kx - v_k)\pi, \quad f^{(n)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} c_k^{(n)} \cos(2kx - v_k^{(n)})\pi \qquad (0<x<1).$$

Aus der Gleichung (5) folgt aber, dass:

$$c_k^{(n)} \cos(2ky - v_k^{(n)})\pi = \frac{d^n c_k \cos(2ky - v_k)\pi}{dy^n},$$

also

$$c_k^{(n)} = (2k\pi)^n c_k, \quad v_k^{(n)} = v_k - \frac{1}{2}n$$

ist, und die Entwickelung von $f^{(n)}(x)$ wird daher folgende:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} (2k\pi)^n c_k \cos\left(2kx - v_k + \frac{1}{2}n\right)\pi \qquad (0<x<1),$$

d. h. sie geht durch $n$malige *gliedweise* Differentiation aus der Entwickelung von $f(x)$ hervor.*)

In jeder der Entwickelungen:

$$f^{(h)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} (2k\pi)^h c_k \cos\left(2kx - v_k + \frac{1}{2}h\right)\pi \qquad (h=1,2,\ldots n;\ 0<x<1)$$

fehlt das von x unabhängige, dem Werthe $k=0$ entsprechende Glied. Denkt man sich dieses Glied der *Fourier*'schen Reihe für $f^{(h)}(x)$ durch das Integral: $\int_0^1 f^{(h)}(x)\,dx$ dargestellt, so kommt:

$$\int_0^1 f^{(h)}(x)\,dx = f^{(h-1)}(1) - f^{(h-1)}(0) = 0.$$

Man kann also, von irgend einer, in eine *Fourier*'sche Reihe entwickelbaren, im Intervalle von $x=0$ bis $x=1$ durchweg endlich bleibenden Function $\psi(x)$ ausgehend, zuerst die Function $f^{(n)}(x)$ durch die Gleichung:

$$f^{(n)}(x) = \psi(x) - \int_0^1 \psi(x)\,dx,$$

*) Vergl. Hrn. *P. du Bois-Reymond*'s Aufsatz „Über die Integration der trigonometrischen Reihe". Math. Annalen Bd. XXII. S. 260.

hiernächst die Function $f^{(n-1)}(x)$ durch die beiden Relationen:

$$f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}, \quad \int_0^1 f^{(n-1)}(x)\,dx = 0$$

definiren, ferner ebenso die Function $f^{(n-2)}(x)$ gemäss den Bedingungen:

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{df^{(n-2)}(x)}{dx}, \quad \int_0^1 f^{(n-2)}(x)\,dx = 0$$

und endlich in analoger Weise nach einander die übrigen Functionen:

$$f^{(n-3)}(x),\ f^{(n-4)}(x),\ \ldots f'(x),\ f(x)$$

bestimmen.

Für die so bestimmten $n+1$ Functionen $f^{(h)}(x)$ gelten dann die Reihenentwickelungen:

$$f^{(h)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\infty} (2k\pi)^h c_k \cos\left(2kx - v_k + \frac{1}{2}h\right)\pi \quad \left({h=1,2,\ldots n-1;\ 0\leqq x\leqq 1 \atop h=n;\ 0<x<1}\right);$$

und die Werthe der darin vorkommenden Grössen c_k, v_k können aus der Entwickelung irgend einer dieser $n+1$ Functionen $f^{(h)}(x)$ entnommen werden.

V. Nimmt man in der Formel $(\mathfrak{J})$ für $f(x)$ eine Function, welche nebst ihren Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ in dem ganzen Intervalle von x_0 bis x_r endlich und stetig ist, für $g(x)$ aber eine solche, deren $(n-1)$te Ableitung an einzelnen durch die Werthe:

$$-x = x_1,\ x_2,\ \ldots x_{r-1} \qquad (x_0<x_1<x_2\cdots<x_{r-1}<x_r)$$

bezeichneten Stellen des Intervalls (x_0, x_r) unstetig, dabei jedoch durchweg endlich ist,*) so verwandelt sich die Gleichung $(\mathfrak{J})$ in eine *ganz allgemeine Summenformel*, und hierin besteht wohl die merkwürdigste Anwendung, welche man von jener Integralformel $(\mathfrak{J})$ machen kann.

Unter der angegebenen Voraussetzung wird nämlich das erste, dem Werthe $h=1$ entsprechende Integral auf der rechten Seite von $(\mathfrak{J})$:

$$\int_{x_0}^{x_r} d\left(f(x) g^{(n-1)}(-x)\right)$$

*) Die Functionen $g(x), g'(x), \ldots g^{(n-2)}(x)$ sind alsdann offenbar endlich und *stetig*.

gleich der Summe:

$$(\mathfrak{S}^0)\qquad -f(x_0)g^{(n-1)}(-x_0)+\sum_{k=1}^{k=r-1}f(x_k)\lim_{\varepsilon=0}\left[g^{(n-1)}(\varepsilon^2-x_k)-g^{(n-1)}(-\varepsilon^2-x_k)\right] \\ +f(x_r)g^{(n-1)}(-x_r),$$

und diese wird daher gemäss der Integralformel ($\mathfrak{J}$) durch den Ausdruck:

$$(\mathfrak{J}^0)\qquad \int_{x_0}^{x_r}f^{(n)}(x)g(-x)\,dx-\int_{x_0}^{x_r}f(x)g^{(n)}(-x)\,dx \\ +\sum_{h=2}^{h=n}f^{(h-1)}(x_0)g^{(n-h)}(-x_0)-\sum_{h=2}^{h=n}f^{(h-1)}(x_r)g^{(n-h)}(-x_r)$$

dargestellt, wenn die Function $g^{(n-1)}(x)$ innerhalb jedes einzelnen Intervalles (x_k, x_{k+1}), in welchem sie stetig ist, zugleich Ableitungen $g^{(n)}(-x)$ mit endlichen Werthen besitzt.

Man kann also irgend welche r stetige, differentiirbare Functionen:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ \varphi_r(x)$$

annehmen und alsdann die Function $g^{(n-1)}(x)$ durch die Bedingung:

$$g^{(n-1)}(-x)=\varphi_k(x)\ \text{für}\ x_{k-1}<x<x_k \qquad (k=1,2,\ldots r),$$

d. h. also dadurch definiren, dass sie in jedem der r Intervalle:

$$x_{k-1}<x<x_k \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

mit der bezüglichen Function $\varphi_k(x)$ übereinstimmen soll.

Es ist dann auch:

$$-g^{(n)}(-x)=\varphi_k'(x)\ \text{für}\ x_{k-1}<x<x_k \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

zu setzen, wo $\varphi_k'(x)$ die erste Ableitung von $\varphi_k(x)$ bedeutet, und die Functionen $g^{(n-2)}(x), g^{(n-3)}(x), \ldots g(x)$ sind durch die Gleichung:

$$\int_{u_h}^{x}g^{(h)}(x)\,dx=g^{(h-1)}(x)$$

zu bestimmen, wenn man darin der Reihe nach $h=n-1, n-2, \ldots 1$ und die unteren Grenzen $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots u_1$ ganz beliebig annimmt.

Da nun bei den angegebenen Bestimmungen:

$$\lim_{\varepsilon=0}g^{(n-1)}(\varepsilon^2-x_k)=\varphi_k(x_k),\ \lim_{\varepsilon=0}g^{(n-1)}(-\varepsilon^2-x_k)=\varphi_{k+1}(x_k) \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

wird, so erhält man die ganz allgemeine Summenformel:

$$(\mathfrak{S})\quad \sum_{k=0}^{k=r}[\varphi_k(x_k)-\varphi_{k+1}(x_k)]f(x_k)=\int_{x_0}^{x_r}f(x)\varphi'(x)\,dx+\int_{x_0}^{x_r}f^{(n)}(x)g(-x)\,dx \\ +\sum_{h=2}^{h=n}f^{(h-1)}(x_0)g^{(n-h)}(-x_0)-\sum_{h=2}^{h=n}f^{(h-1)}(x_r)g^{(n-h)}(-x_r),$$

in welcher:

$$\varphi_0(x_0)=0,\ \ \varphi_{r+1}(x_r)=0$$

und für $x_{k-1}<x<x_k$:

$$\varphi'(x)=\varphi_k'(x) \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

zu setzen ist. Nimmt man speciell:

$$u_1=u_2=\cdots=u_{n-1}=x_0,$$

so wird $g(x_0)=g'(x_0)=g''(x_0)=\cdots=g^{(n-2)}(x_0)=0$, und der Ausdruck:

$$\sum_{h=2}^{h=n}f^{(h-1)}(x_0)g^{(n-h)}(-x_0)$$

auf der rechten Seite der Formel ($\mathfrak{S}$) fällt alsdann weg.

VI. Setzt man:

$$\varphi_k(x)=x-x_{k-1} \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

und wählt dabei die Grössen x' so, dass:

$$x_{k-1}\leqq x_{k-1}'\leqq x_k \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

wird, so ist $\varphi'(x)=1$, und die Formel ($\mathfrak{S}$) ergiebt alsdann (bei Festhaltung jener über die Grössen u getroffenen Bestimmung: $u_1=u_2=\cdots=u_{n-1}=x_0$) den Ausdruck:

$$(\mathrm{A})\qquad \int_{x_0}^{x_r}f(x)\,dx-\sum_{h=1}^{h=n-1}f^{(h)}(x_r)g^{(n-h-1)}(-x_r)+\int_{x_0}^{x_r}f^{(n)}(x)g(-x)\,dx$$

als den Werth der Summe:

$$(x_0'-x_0)f(x_0)+(x_1'-x_0')f(x_1)+(x_2'-x_1')f(x_2)+\cdots+(x_r-x_{r-1}')f(x_r).$$

Diese Summe, in welcher je ein Functionswerth $f(x_k)$ mit dem absoluten Werthe eines das Argument enthaltenden Intervalls (x'_{k-1}, x'_k) multiplicirt ist, stellt in allgemeinster Weise einen Näherungswerth jenes Integrals:

$$\int_{x_0}^{x_r} f(x)\,dx$$

dar, welches den ersten Theil des Ausdrucks (A) bildet. Der Unterschied zwischen dem Näherungswerthe und dem Integralwerthe selbst wird daher durch den übrigen Theil des Ausdrucks, nämlich durch:

$$-\sum_{h=1}^{h=n-1} f^{(h)}(x_r)\,g^{(n-h-1)}(-x_r) + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx$$

dargestellt. Dabei ist

$$g^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x} g^{(n-1)}(x)\,dx,$$

also, wenn x zwischen x_{k-1} und x_k liegt:

$$g^{(n-2)}(x) = -\sum_{h=1}^{h=k-1} \int_{x_{h-1}}^{x_h} (x + x'_{h-1})\,dx - \int_{x_{k-1}}^{x} (x + x'_{k-1})\,dx$$

oder:

$$-g^{(n-2)}(x) = \frac{1}{2}x^2 + x'_{k-1}x - \frac{1}{2}x_0^2 - x_{k-1}x'_{k-1} + \sum_{h=1}^{h=k-1} x'_{h-1}(x_h - x_{h-1}),$$

und die Functionen $g^{(n-3)}(x), g^{(n-4)}(x), \ldots$ sind durch weitere Integrationen zu bilden.

VII. Bedeutet $\varphi(x)$ *irgend eine*, für alle Werthe von $x=0$ bis $x=1$ endliche, stetige und differentiirbare Function, deren Werthe für die beiden Intervallgrenzen von einander verschieden sind, und setzt man:

$$\varphi(x) - \int_0^1 \varphi(x)\,dx = g^{(n-1)}(-x),$$

so kann $g^{(n-1)}(-x)$ durch eine *Fourier*'sche Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos\left(2kx + v_k + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (0<x<1)$$

dargestellt werden, in welcher die Summation deshalb nur von $k=1$ an zu erstrecken ist, weil nach der über $g^{(n-1)}(-x)$ getroffenen Festsetzung:

$$\int_0^1 g^{(n-1)}(-x)\,dx = 0$$

wird. Man kann nun von der Function $g^{(n-1)}(-x)$ ausgehend — gemäss den Darlegungen am Schlusse des art. IV — durch successive Integration zu $n-1$ Functionen:

$$g^{(n-2)}(-x),\ g^{(n-3)}(-x), \ldots g'(-x),\ g(-x)$$

gelangen, für welche die Relationen:

$$g^{(h)}(x) = \frac{dg^{(h-1)}(x)}{dx},\ \int_0^1 g^{(h)}(-x)\,dx = g^{(h-1)}(0) - g^{(h-1)}(-1) = 0 \qquad (h=1,2,\ldots n-1)$$

und die Reihenentwickelungen:

$$g^{(n-h)}(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^h} \cos\left(2kx + v_k + \frac{1}{2}h\right)\pi \qquad (h=1,2,\ldots n)$$

gelten.

Hierbei sind also:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots;\ v_1, v_2, v_3, \ldots$$

beliebige Grössen, welche nur die Bedingung erfüllen müssen, dass die Reihe:

$$(A_1) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos\left(2kx + v_k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

für alle Werthe von x convergire und eine *innerhalb* des Intervalles von $x=0$ bis $x=1$ durchweg endliche, stetige, differentiirbare, aber bei $x=0$ und $x=1$ unstetige Function darstelle, welche, wenn man einerseits x bis zu Null abnehmen, andererseits bis zu Eins zunehmen lässt, sich zwei *verschiedenen* Grenzwerthen nähert. Die übrigen $n-1$, durch die Reihen:

$$(A_h) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^h} \cos\left(2kx + v_k + \frac{1}{2}h\right)\pi$$

für $h = 2, 3, \ldots n$ dargestellten Functionen sind dann

durchweg endliche, stetige, differentiirbare, periodische Functionen, von denen eine jede die Ableitung der folgenden, negativ genommen, ist, und für welche also, wenn sie beziehungsweise mit:

$$g^{(n-2)}(-x),\ g^{(n-3)}(-x),\ \dots g'(-x),\ g(-x)$$

bezeichnet werden:

$$g^{(h)}(x) = \frac{dg^{(h-1)}(x)}{dx} \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots n-2)}$$

ist. Diese Relation gilt ferner auch für $h = n-1$, wenn man $g^{(n-1)}(-x)$ als den Werth der Reihe (A_h) für $h=1$ definirt. Wenn man endlich den — der Voraussetzung nach existirenden — Differentialquotienten von $g^{(n-1)}(x)$ mit $g^{(n)}(x)$ bezeichnet, so sind die $n+1$ den Werthen $h = 0, 1, \dots n$ entsprechenden Functionen $g^{(h)}(-x)$ durch die Gleichungen:

$$g^{(h)}(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^{n-h}} \cos\left(2kx + v_k + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}h\right)\pi \qquad {\scriptstyle (h=0,1,\dots n-1)}$$

$$g^{(n)}(-x) = -\frac{dg^{(n-1)}(-x)}{dx}, \quad g^{(n)}(x) = g^{(n)}(x+1)$$

für *alle* reellen Werthe von x definirt.

Setzt man nun diese Functionen $g^{(h)}(-x)$ in die Integralformel $(\mathfrak{J})$ ein, nimmt man ferner für $f(x)$ eine nebst ihren ersten $n-1$ Ableitungen stetige Function und integrirt von Null bis zu einer ganzen Zahl r, so resultirt die Gleichung*):

$$(6) \quad \int_0^r f^{(n)}(x) g(-x)\,dx - \int_0^r f(x) g^{(n)}(-x)\,dx$$
$$= -\gamma_0 \sum_{k=0}^{k=r-1} f(k) + \gamma_1 \sum_{k=1}^{k=r} f(k) + \sum_{h=2}^{h=n} g^{(n-h)}(0)\left(f^{(h-1)}(r) - f^{(h-1)}(0)\right),$$

in welcher γ_0, γ_1 folgendermaassen bestimmt sind:

$$\gamma_0 = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos\left(2k\varepsilon^2 + v_k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \gamma_1 = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos\left(2k\varepsilon^2 - v_k - \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Bezeichnet man die Differenz $\gamma_0 - \gamma_1$ durch δ, so dass:

$$\delta = -2 \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \sin 2k\varepsilon^2\pi \cos v_k\pi$$

*) Vergl. die Ausdrücke $(\mathfrak{S}^0)$ und $(\mathfrak{J}^0)$ im art. V.

wird, und setzt man der Gleichförmigkeit halber:

$$\gamma_h = g^{(n-h)}(0),$$

so kann die obige Gleichung (6) in folgender Weise als eine

„*allgemeine Summenformel*“

dargestellt werden:

$$(\mathfrak{S}') \quad \delta \sum_{k=0}^{k=r-1} f(k) = \int_0^r f(x) g^{(n)}(-x)\,dx + \sum_{h=0}^{h=n-1} \gamma_{h+1}\left(f^{(h)}(r) - f^{(h)}(0)\right) - \int_0^r f^{(n)}(x) g(-x)\,dx,$$

in welcher:

$$g(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^n} \cos\left(2kx + v_k + \frac{1}{2}n\right)\pi, \quad g^{(n)}(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n},$$

$$\gamma_h = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^h} \cos\left(2k\varepsilon^2 - v_k - \frac{1}{2}h\right)\pi \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots n)},$$

$$\delta = -2 \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \sin 2k\varepsilon^2\pi \cos v_k\pi$$

ist.

VIII. Nimmt man in der Formel $(\mathfrak{S}')$:

$$n = 2m, \quad a_k = -2, \quad v_k = 0,$$

so wird:

$$g(-x) = (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2}{(2k\pi)^{2m}} \cos 2kx\pi,$$

$$g^{(n-1)}(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2kx\pi}{k\pi} = \frac{1}{2} - x, \quad \text{also} \quad g^{(n)}(-x) = 1,$$

$$\gamma_{2h} = (-1)^{h+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2}{(2k\pi)^{2h}} \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots m)},$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_3 = \gamma_5 = \dots = \gamma_{2m-1} = 0, \quad \delta = 1,$$

und die obige allgemeine Summenformel $(\mathfrak{S}')$ geht alsdann in die folgende specielle über:

$$(\mathfrak{S}'') \quad \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(r-1) + \frac{1}{2}f(r)$$
$$= \int_0^r f(x)\,dx + \sum_{h=1}^{h=m} \left(f^{(2h-1)}(0) - f^{(2h-1)}(r)\right) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^h 2}{(2k\pi)^{2h}} + (-1)^m \int_0^r f^{(2m)}(x) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}\,dx,$$

welche zuerst von *Poisson* in seiner, am 11. December 1826 in der Pariser Akademie gelesenen, Abhandlung: „Sur le calcul numérique des Integrales définies“ entwickelt worden ist.*)

Eben dieselbe Formel hat *Jacobi* auf einem von dem *Poisson*'schen verschiedenen Wege in der vom 2. Juni 1834 datirten, im XII. Bande des *Crelle*'schen Journals abgedruckten Abhandlung: „*De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae*“ hergeleitet.[1]) Sie findet sich a. a. O. auf S. 265 unter Nr. 10 und wird dort als „*formula memorabilis*“ bezeichnet. *Nur äusserlich* unterscheidet sich diese *Jacobi*-sche Formel von der *Poisson*'schen dadurch, dass die oben in der Gleichung $(\mathfrak{S}'')$ auf der rechten Seite unter dem Restintegrale (ebenso wie bei *Poisson*) vorkommende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}$$

bei *Jacobi* durch eine sogenannte *Bernoulli*'sche Function, d. h. durch diejenige ganze Function von x ersetzt ist, welche den Werth der Reihe für alle zwischen Null und Eins liegenden Werthe von x darstellt. Da die Übereinstimmung dieser Reihe mit der von *Jacobi* benutzten ganzen Function von x (im Intervalle $0 < x < 1$) bekannt und übrigens auch aus der citirten *Poisson*'schen Abhandlung selbst — nämlich aus den dort mit (13) und (14) bezeichneten Gleichungen — zu entnehmen war, so erscheinen mir die Worte**) nicht gerechtfertigt, mit denen *Jacobi* nur ganz kurz auf die *Poisson*'sche Formel hinweist, welche doch das Hauptresultat der *Jacobi*-schen Abhandlung schon vollständig enthält.

IX. Im Anfange des vorhergehenden Artikels (VIII) ist:

$$g^{(n-1)}(-x) = \frac{1}{2} - x$$

gesetzt worden. Hiermit sind aber auch, gemäss den in art. IV und art. VII ent-

*) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France. Tome VI, 1827, p. 571.

**) Der Schluss der citirten *Jacobi*'schen Abhandlung lautet folgendermaassen: *Residui seriei summatoriae Maclaurinianae expressionem a nostra diversam dedit ill. Poisson in commentatione egregia. „Sur le calcul numérique des Intégrales définies“*. (Acad. des Sciences. Vol. VI. p. 571 sqq.)

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. VI, S. 64 ff., vgl. besonders S. 67.

haltenen Darlegungen, die übrigen Functionen $g(x)$ völlig bestimmt; sie gehen nämlich mit Hülfe der Relationen:

$$g^{(h)}(x) = \frac{dg^{(h-1)}(x)}{dx}, \quad \int_0^1 g^{(h)}(-x)\,dx = 0 \qquad (h=1,2,\ldots n-1)$$

der Reihe nach durch Integration aus einander hervor. Es ergeben sich also auf diese Weise nach einander jene ganzen Functionen, welche die Werthe der Reihen:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}} \qquad (0<x<1)$$

für $m = 1, 2, 3, \ldots$ darstellen. Aber man gelangt dazu auch ganz direct, wenn man die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\text{(7)} \qquad \frac{we^{2wx\pi i}}{1-e^{2w\pi i}} = \frac{w}{2\pi i} \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} \frac{e^{2kx\pi i}}{k-w}$$

nach steigenden Potenzen von w entwickelt; denn der Coefficient von w^n wird dann auf der rechten Seite die Reihe:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^n} \left(e^{2kx\pi i} + (-1)^n e^{-2kx\pi i}\right),$$

und auf der linken Seite eine ganze Function von x, deren Coefficienten die Entwickelungscoefficienten von:

$$\frac{1}{1-e^{2w\pi i}}$$

und also die *Bernoulli*'schen Zahlen enthalten.

Wenn man in der Formel $(\mathfrak{S}'')$ an Stelle der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}$$

— wie es bei *Jacobi* und seitdem in fast allen Arbeiten über diesen Gegenstand geschehen ist — ihre Summe als ganze Function von x einführt, so verliert die Formel wesentlich an Eleganz. Denn dieser Summenausdruck ist für die verschiedenen Intervalle $0<x<1, 1<x<2, 2<x<3, \ldots r-1<x<r$ verschieden, und das von 0 bis r erstreckte Integral muss deshalb in r Integrale getheilt werden, deren jedes sich nur über eines der r Intervalle erstreckt. Wenn man alsdann die Integrations-

variabeln so ändert, dass sich alle Integrationen von Null bis Eins erstrecken, so erscheint an Stelle der Function $f^{(2m)}(x)$ unter dem letzten Integralzeichen in der Formel ($\mathfrak{S}''$) eine Summe solcher Functionen, wie sie sich in der That in der citirten *Jacobi*'schen Formel findet.

X. Die oben benutzte Gleichung (7) habe ich schon in meiner Mittheilung vom April 1883*) angegeben. Sie gilt für reelle, nicht negative Werthe von x, die kleiner als Eins sind, und aber für ganz beliebige (auch complexe) Werthe von w. Sie lässt sich übrigens noch in folgender eleganten Weise darstellen:

$$(8)\qquad (e^{2w\pi i}-1)\lim_{\nu=\infty}\sum_{k=-\nu}^{k=+\nu}\frac{e^{-2(w+k)x\pi i}}{2(w+k)\pi i}=1,$$

und, indem $e^{2w\pi i}=u$ gesetzt wird, auch *so*:

$$(9)\qquad (u-1)\lim_{\mu=\infty}\sum\frac{e^{-x\log u}}{\log u}=1 \qquad (0\leqq x<1),$$

wenn unter u eine beliebige *complexe* Grösse verstanden und die Summation auf alle Werthe von $\log u$ ausgedehnt wird, deren absoluter Werth kleiner als μ ist. Aus der Gleichung (9) ergiebt sich endlich die für jede reelle Grösse x geltende bemerkenswerthe Relation:

$$(10)\qquad \lim_{\mu=\infty}\sum\frac{e^{-x\log u}}{\log u}=\frac{1}{u^{[x+1]}-u^{[x]}},$$

in welcher mit $[x]$ nach *Gauss*'scher Weise die durch die Ungleichheits-Bedingungen:

$$[x]\leqq x<[x]+1$$

bestimmte ganze Zahl bezeichnet ist.

Die Gleichung (7) lässt sich aus den schon oben citirten, in der *Poisson*'schen Abhandlung mit (13) und (14) bezeichneten, Formeln erschliessen; sie geht aber in ganz directer Weise aus der Entwickelung von:

$$\cos 2wx\pi+i\sin 2wx\pi$$

in eine nach cosinus und sinus der Vielfachen von $2x\pi$ fortschreitende Reihe hervor.

*) Zur Theorie der elliptischen Functionen[1]).

[1]) Bd. IV, S. 347 ff. dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken, vgl. besonders S. 350.

In ähnlicher Weise gelangt man dazu, wenn man die $w$te Potenz einer complexen Variabeln ζ durch das *Cauchy*'sche Integral darstellt. Offenbar ist nämlich:

$$2\pi i\zeta^{w}=\int\frac{z^{w}}{z-\zeta}\,dz,$$

wenn man die Integration von einem Punkte $z=Re^{vi}$ an, bei festem R, bis zum Punkte $z=Re^{(v+2\pi-\varepsilon)i}$ erstreckt, dann bei Festhaltung des Bogenwerthes $v+2\pi-\varepsilon$ und abnehmendem Radius vector bis zum Punkte $z=re^{(v+2\pi-\varepsilon)i}$, ferner bei festem r und abnehmenden Bogenwerthen bis zum Punkte $z=re^{vi}$ und endlich von da bei Festhaltung des Bogenwerthes v und wachsendem Radius vector zurück zum Ausgangspunkt $z=Re^{vi}$. Hierbei ist angenommen, dass:

$$r<|\zeta|<R$$

sei, oder also, wenn $\zeta=\varrho e^{\sigma i}$ gesetzt wird:

$$r<\varrho<R.$$

Es ist ferner angenommen, dass der Werth von ε positiv aber beliebig klein sei, und dass der Bogenwerth σ jedenfalls zwischen v und $v+2\pi-\varepsilon$ liege. Alsdann umschliesst der angegebene Integrationsweg den Punkt ζ, und die Function z^{w} ist für alle Werthe von z in dem umschlossenen Gebiete *eindeutig*.

Von den vier Integralen, welche auf die angegebene Weise resultiren, lassen sich die beiden, bei denen der Radius vector fest bleibt, beziehungsweise nach positiven Potenzen von:

$$\frac{\zeta}{R}\quad\text{und}\quad\frac{r}{\zeta}$$

entwickeln, und die anderen beiden Integrale können in eines vereinigt werden. Man erhält hiernach die folgende Darstellung von ζ^{w} für alle Werthe von ζ, deren absoluter Betrag zwischen r und R liegt:

$$(11)\quad \frac{2\pi i\zeta^{w}}{e^{vwi}(e^{2w\pi i}-1)}=\frac{R^{w}}{w}+\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\frac{R^{w}}{w-k}\,(R^{-1}e^{-vi}\zeta)^{k}+\frac{r^{w}}{w+k}\,(r^{-1}e^{-vi}\zeta)^{-k}\right\}-\int_{r}^{R}\frac{t^{w}\,dt}{t-\zeta e^{-vi}}.$$

Setzt man hierin $\zeta=\varrho e^{\sigma i}$, $\sigma=v+2x\pi$, $\varrho=\delta R$, $r=\delta\varrho$, so resultirt die für alle zwischen Null und Eins liegenden Werthe von x und δ gültige Formel:

$$(12)\qquad \frac{2\pi i e^{2wx\pi i}}{1-e^{2w\pi i}}=\lim_{\nu=\infty}\sum_{k=-\nu}^{k=+\nu}\frac{\delta^{\varepsilon(k-w)}e^{2kx\pi i}}{k-w}+\int_{\delta}^{\frac{1}{\delta}}\frac{t^{w}\,dt}{t-e^{2x\pi i}} \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=1 \text{ für } k\geqq 0;\\ \varepsilon=-1 \text{ für } k<0\end{smallmatrix}\right),$$

welche in die oben mit (7) bezeichnete Formel übergeht, wenn sich δ dem Grenzwerthe $\delta = 1$ nähert.

Die Gleichung (12) kann noch, wenn man, wie oben, $e^{w\pi i} = u$ setzt, in folgende transformirt werden:

$$\int_{\delta}^{\frac{1}{\delta}} \frac{z^w dz}{z-1} = \frac{2\pi i}{u^{[x]} - u^{[x+1]}} + \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} \frac{(\delta^{-\nu} z_0)^{w-k}}{w-k}. \tag{13}$$

Die Integration ist hier in Beziehung auf die complexe Variable z, bei Festhaltung des Bogenwerthes, von demjenigen Werthe an, bei dem $|z| = \delta$ ist, bis zu dem, bei welchem $|z| = \frac{1}{\delta}$ ist, zu erstrecken, und der Werth des Integrals wird alsdann durch den Ausdruck auf der rechten Seite dargestellt, wenn darin z_0 dem bei der Integration fest bleibenden Werthe: $\frac{z}{|z|}$ gleich genommen, und dann $\log z_0 = -2x\pi i$ gesetzt wird.

XI. Dass das Restintegral der *Euler*'schen oder *Maclaurin*'schen Reihe*) bei *Poisson* in eleganterer Form erscheint als bei *Jacobi*, ist schon oben, am Schlusse des art. IX, bemerkt worden. Aber ein noch grösserer Vorzug der *Poisson*'schen Form des Restintegrals ist *darin* zu finden, dass bei Anwendung der Cosinus-Reihe der typische Charakter der *allgemeinen* Formel ($\mathfrak{S}'$) des art. VII besser erhalten bleibt und also auch besser zu erkennen ist, als bei Einführung jener *Bernoulli*'schen Function, welche die Summe der Cosinus-Reihe für ein bestimmtes Intervall des Arguments darstellt.

Dabei ist hervorzuheben, dass die Verallgemeinerung der *Poisson*'schen Summenformel, welche in der mit ($\mathfrak{S}'$) bezeichneten Gleichung gegeben ist, nicht etwa eine bloss formale, sondern vielmehr eine wichtige sachliche Bedeutung hat. Soll nämlich, wie in jener *Poisson*'schen Formel ($\mathfrak{S}''$), eine Summe:

$$\frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(r-1) + \frac{1}{2} f(r)$$

*) Man vergleiche die historischen Notizen, welche unser Ehrenmitglied, Hr. *Malmsten*, über die erwähnte Reihe in der Einleitung seiner im 35. Bande des *Crelle*'schen Journals abgedruckten Abhandlung gegeben, sowie auch die Abänderungen, welche er bei dem Wiederabdruck im 5. Bande der Acta Mathematica angebracht hat.

durch einen Ausdruck mit dem „*Haupttheile*":

$$\int_0^r f(x)\, dx$$

dargestellt werden, so enthält diese Aufgabe insofern eine wesentliche Unbestimmtheit, als bei der Summe $\frac{1}{2} f(0) + f(1) + \cdots$ nur die Werthe der Function $f(x)$ für $x = 0, 1, \ldots r$, bei dem Integrale $\int_0^r f(x)\,dx$ aber die Werthe für *alle* Argumente zwischen $x = 0$ und $x = r$ in Anwendung kommen.

Diesem Umstande, welcher offenbar bei jener Frage der Darstellung von Summen:

$$\frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(r-1) + \frac{1}{2} f(r)$$

eine besondere Beachtung verdient, wird in der *allgemeinen* Summenformel ($\mathfrak{S}'$) bis zu einem gewissen Grade dadurch Rechnung getragen, dass in dem „Haupttheile" des Ausdrucks auf der rechten Seite:

$$\int_0^r f(x)\, g^{(n)}(-x)\, dx$$

die Function $f(x)$ mit einer Function $g^{(n)}(-x)$ multiplicirt ist, welche in dem ersten Intervalle von $x = 0$ bis $x = 1$ ganz willkürlich angenommen werden kann, deren übrige Werthe aber alsdann durch die Periodicitätsgleichung:

$$g^{(n)}(-x) = g^{(n)}(-x-1)$$

zu bestimmen sind.

Um die hier betonte Willkürlichkeit der Function $g^{(n)}(-x)$ genauer darzulegen, erinnere ich daran, dass den Entwickelungen im art. VII *irgend eine* für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ endliche, stetige und differentiirbare, der Ungleichheitsbedingung $\psi(0) \gtrless \psi(1)$ genügende Function $\psi(x)$ zu Grunde gelegt und dann:

$$\psi(x) - \int_0^1 \psi(x)\, dx = g^{(n-1)}(-x)$$

$$g^{(n)}(-x) = -\frac{dg^{(n-1)}(-x)}{dx}$$

gesetzt worden ist. Geht man nun von irgend einer endlichen, integrirbaren Function $g^{(n)}(-x)$ aus, deren Wahl einzig und allein durch die Bedingung: $\int_0^1 g^{(n)}(-x)\,dx \gtrless 0$ beschränkt wird, so hat man — um eine für die weitere Deduction geeignete Function $g^{(n-1)}(-x)$ daraus abzuleiten — nur $g^{(n-1)}(-x)$ durch die Differentialgleichung:

$$g^{(n)}(-x) = -\frac{d g^{(n-1)}(-x)}{dx}$$

und die Constante der Integration so zu bestimmen, dass:

$$\int_0^1 g^{(n-1)}(-x)\,dx = 0$$

wird.

XII. Für die Abschätzung des Werthes des Restintegrals:

$$\int_0^r f^{(n)}(x)\, g(-x)\,dx$$

in der Summenformel $(\mathfrak{S}')$ ist man bei der Allgemeinheit der Function $g(-x)$ auch nur auf die allgemeine Untersuchung von Integralen angewiesen, deren Integrand das Product zweier Functionen ist.

Sind nun $\varphi(x)$, $\psi(x)$ eindeutige Functionen, $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ ihre Ableitungen und $\xi_2, \xi_4, \ldots \xi_{2\nu-2}$ die sämmtlichen zwischen ξ_0 und $\xi_{2\nu}$ liegenden, ihrer Grösse nach geordneten Werthe von x, wofür $\varphi'(x)$ verschwindet, so lassen sich Werthe $\xi_1, \xi_3, \ldots \xi_{2\nu-1}$ so bestimmen, dass:

$$\text{(J)} \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \varphi'(x)\,\psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{k=\nu} \left(\varphi(\xi_{2k}) - \varphi(\xi_{2k-2})\right) \psi(\xi_{2k-1})$$
$$(\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \ldots < \xi_{2\nu-2} < \xi_{2\nu-1} < \xi_{2\nu})$$

wird. Dies erhellt unmittelbar, wenn das Integrations-Intervall $(\xi_0, \xi_{2\nu})$ in die Theilintervalle $(\xi_0, \xi_2), (\xi_2, \xi_4), \ldots$ zerlegt wird, innerhalb deren $\varphi'(x)$ sein Vorzeichen bewahrt.

Ersetzt man das Integral auf der linken Seite der Gleichung (J) durch:

$$\varphi(\xi_{2\nu})\,\psi(\xi_{2\nu}) - \varphi(\xi_0)\,\psi(\xi_0) - \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx$$

und ordnet alsdann die Glieder auf der rechten Seite nach den einzelnen Functionen φ, so ergiebt sich die Formel:

$$\text{(J')} \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx = \sum_{k=0}^{k=\nu} \left(\psi(\xi_{2k+1}) - \psi(\xi_{2k-1})\right) \varphi(\xi_{2k}),$$

in welcher:

$$\xi_{-1} = \xi_0, \quad \xi_{2\nu+1} = \xi_{2\nu}$$

zu nehmen ist, und in welcher die Argumente der Functionen φ auf der rechten Seite deren Minimal- oder Maximalstellen bezeichnen. Man kann daher die beiden Formeln (J), (J′) auch in folgender Weise darstellen:

$$(\mathrm{J}_0) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \varphi'(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \varphi'(x)\,\overline{\psi}(x)\,dx$$

$$(\mathrm{J}_0') \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \overline{\varphi}(x)\,\psi'(x)\,dx,$$

wo erstens

> $\overline{\varphi}(x)$ durch die Bedingung:
>
> $$\overline{\varphi}(x) = \varphi(\xi_{2k}) \quad \text{im Intervalle} \quad \xi_{2k-1} < x < \xi_{2k+1}$$
>
> für $k = 0, 1, 2, \ldots \nu$ bestimmt ist, also eine Function bedeutet, welche in gewissen, je eine der Minimal- oder Maximalstellen einschliessenden Intervallen den festen Minimal- oder Maximalwerth beibehält,

und wo zweitens

> $\overline{\psi}(x)$ durch die Bedingung:
>
> $$\overline{\psi}(x) = \psi(\xi_{2k-1}) \quad \text{im Intervalle} \quad \xi_{2k-2} < x < \xi_{2k}$$
>
> für $k = 1, 2, 3, \ldots \nu$ definirt ist, also eine Function bedeutet, welche in den verschiedenen Intervallen, in denen $\varphi'(x)$ sein Vorzeichen nicht ändert, einen festen (Mittel-)Werth beibehält.

Die zweite Formel (J′) braucht nicht — wie hier geschehen ist — aus der ersten Formel (J) abgeleitet zu werden. Sie resultirt vielmehr direct, und unabhängig von der Voraussetzung der Existenz einer Derivirten $\varphi'(x)$, wenn das Integrations-

Intervall in Theilintervalle $(\xi_0, \xi_4), (\xi_4, \xi_8), \ldots$ zerlegt wird, innerhalb deren nur *ein* Maximum oder Minimum von $\varphi(x)$ liegt. Denn wenn das Integral:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_4} \big(\varphi(x) - \varphi(\xi_2)\big)\, \psi'(x)\, dx$$

als Grenzwerth der Summe:

$$\sum_k (x_{2k} - x_{2k-2}) \big(\varphi(x_{2k-1}) - \varphi(\xi_2)\big) \psi'(x_{2k-1}) \qquad (k=1, \ldots m, m+1, \ldots n),$$

bei wachsendem m und n und bei Festhaltung der Werthe:

$$x_0 = \xi_0,\ x_{2m} = \xi_2,\ x_{2n} = \xi_4$$

aufgefasst und die auf die Werthe $k = 1, 2, \ldots m$ bezügliche Theilsumme mittels der abkürzenden Bezeichnungen:

$$\varphi(x_{2k-1}) - \varphi(\xi_2) = a_k,\ (x_{2k} - x_{2k-2})\psi'(x_{2k-1}) = b_k \qquad (k=1, 2, \ldots m)$$

in der Form:

$$\sum_k a_k b_k \qquad (k=1, 2, \ldots m)$$

dargestellt wird, so ist für den Fall, dass die Function $\varphi(x)$ bei $x = \xi_2$ ein Minimum hat:

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_m > 0.$$

Nun liegt der Werth von:

$$\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{k=m} a_k b_k,$$

wie bei jener *Abel*'schen Schlussweise erhellt, zwischen dem grössten und dem kleinsten der verschiedenen Werthe, welchen die Summe:

$$\sum_{k=1}^{k=\nu} b_k$$

für $\nu = 1, 2, \ldots m$ annimmt. Für zwei von diesen m Summen:

$$\sum_{h=1}^{h=\lambda} b_h,\quad \sum_{h=1}^{h=\mu} b_h,$$

die der Grösse ihres Werthes nach unmittelbar auf einander folgen, muss demnach eine Ungleichheit:

$$a_0 \sum_{h=1}^{h=\lambda} b_h < \sum_{h=1}^{h=m} a_h b_h < a_0 \sum_{h=1}^{h=\mu} b_h$$

bestehen, und aus dieser resultirt, wenn man zur Grenze übergeht, eine Gleichung:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_2} \big(\varphi(x) - \varphi(\xi_2)\big)\, \psi'(x)\, dx = \varphi(\xi_0) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi'(x)\, dx,$$

in welcher ξ_1 einen zwischen ξ_0 und ξ_2 liegenden Werth von x bedeutet. Ganz ebenso resultirt eine Gleichung:

$$\int_{\xi_2}^{\xi_4} \big(\varphi(x) - \varphi(\xi_2)\big)\, \psi'(x)\, dx = \varphi(\xi_4) \int_{\xi_3}^{\xi_4} \psi'(x)\, dx,$$

in welcher ξ_3 ein zwischen ξ_2 und ξ_4 liegender Werth von x ist, und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_4} \varphi(x)\psi'(x)\, dx = \varphi(\xi_0) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi'(x)\, dx + \varphi(\xi_2) \int_{\xi_1}^{\xi_3} \psi'(x)\, dx + \varphi(\xi_4) \int_{\xi_3}^{\xi_4} \psi'(x)\, dx,$$

so dass in der That:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_4} \varphi(x)\psi'(x)\, dx = \int_{\xi_0}^{\xi_4} \bar{\varphi}(x)\psi'(x)\, dx$$

wird.

Die Formel (J') geht, wenn die Integration nur von ξ_0 bis ξ_2 erstreckt wird, in jene über, welche Hr. *P. du Bois-Reymond* in seiner im LXIX. Bande des Journals für Mathematik abgedruckten Abhandlung*) entwickelt und dort als „Mittelwerthsatz" bezeichnet hat; doch tritt ihre eigentliche Bedeutung bei dieser Beschränkung des Integrationsgebietes weniger hervor.

Die Formel (J') lässt sich andererseits auch aus der specielleren *P. du Bois-Reymond*'schen Gleichung ableiten, wenn man das Integral auf der linken Seite von (J') in ν Theilintegrale mit den Grenzen $(\xi_0, \xi_2), (\xi_2, \xi_4), \ldots (\xi_{2\nu-2}, \xi_{2\nu})$ zerlegt.

*) A. a. O. S. 82, Gleichung (9).

Für die Abschätzung des Restintegral-Werthes in der allgemeinen Summenformel ($\mathfrak{S}'$) braucht man nur *eine* der beiden Formeln (J), (J′) zu benutzen. Denn wenn man:

$$\varphi(x) = f^{(n-1)}(x), \quad \psi(x) = g(-x)$$

nimmt, so erhält man durch die Formel (J) einen Ausdruck für das Restintegral:

$$\int_0^r f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx,$$

aus welchem derjenige unmittelbar hervorgeht, welchen die Formel (J′) für das Integral:

$$\int_0^r f^{(n-1)}(x)\, g'(-x)\, dx,$$

also für ein Restintegral liefert, in dem die Zahl n durch die Zahl $n-1$ ersetzt ist.

Aber man hat, um das Restintegral $\int f^{(n)}(x) g(-x)\,dx$ mit dem Integral der Formel (J) zu identificiren, nicht nur, wie eben angenommen wurde:

$$\varphi'(x) = f^{(n)}(x), \quad \psi(x) = g(-x),$$

sondern auch andererseits:

$$\varphi'(x) = g(-x), \quad \psi(x) = f^{(n)}(x)$$

zu setzen. Doch kann statt dessen, wenn das Integral:

$$\int_0^r f^{(n-1)}(x)\, g'(-x)\, dx$$

als Restintegral betrachtet wird:

$$\varphi'(x) = g'(-x), \quad \psi(x) = f^{(n-1)}(x)$$

gesetzt werden. Man erhält hiernach mittels der Formel (J) *zur Abschätzung des Restintegral-Werthes* die beiden Gleichungen:

$$(\mathrm{K}_1) \qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx = \sum_{k=1}^{k=\nu} \left(f^{(n-1)}(\xi_{2k}) - f^{(n-1)}(\xi_{2k-2})\right) g(-\xi_{2k-1}),$$

$$(\mathrm{K}_2) \qquad \int_0^r f^{(n-1)}(x)\, g'(-x)\, dx = \sum_{k=1}^{k=\nu'} \left(g(-\xi'_{2k}) - g(-\xi'_{2k-2})\right) f^{(n-1)}(\xi'_{2k-1}),$$

in denen

$$\xi_2, \xi_4, \ldots \xi_{2\nu-2} \qquad (\xi_2 < \xi_4 < \cdots < \xi_{2\nu-2})$$

$$\xi'_2, \xi'_4, \ldots \xi'_{2\nu'-2} \qquad (\xi'_2 < \xi'_4 < \cdots < \xi'_{2\nu'-2})$$

alle diejenigen Argumentwerthe zwischen 0 und r bedeuten, für welche einerseits die Functionswerthe:

$$f^{(n-1)}(\xi_2),\ f^{(n-1)}(\xi_4),\ \ldots\ f^{(n-1)}(\xi_{2\nu-2})$$

und andererseits die Functionswerthe:

$$g(-\xi'_2),\ g(-\xi'_4),\ \ldots\ g(-\xi'_{2\nu-2})$$

abwechselnd die Maxima und Minima sind.

Wenn nun die Summe der absoluten Werthe:

$$\left| f^{(n-1)}(\xi_{2k}) - f^{(n-1)}(\xi_{2k-2}) \right| \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu)$$

mit $V(f^{(n-1)}(x))$ und in analoger Weise die Summe der absoluten Werthe:

$$\left| g(-\xi'_{2k}) - g(-\xi'_{2k-2}) \right| \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu')$$

mit $V(g(-x))$ bezeichnet wird, wenn ferner $M(f^{(n-1)}(x))$, $M(g(-x))$ Grössen bedeuten, für welche in dem ganzen Intervalle $0 < x < r$:

$$\left| f^{(n-1)}(x) \right| \leqq M\left(f^{(n-1)}(x)\right),\ g(-x) \leqq M\left(g(-x)\right)$$

bleibt, so ist gemäss der Gleichung (K_1):

$$(\mathrm{M}) \qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx \leqq M\left(g(-x)\right) V\left(f^{(n-1)}(x)\right),$$

und gemäss der Gleichung (K_2):

$$\int_0^r f^{(n-1)}(x)\, g'(-x)\, dx \leqq M\left(f^{(n-1)}(x)\right) V\left(g(-x)\right).$$

Setzt man in dieser letzteren Ungleichheit $f^{(n)}(x)$ an die Stelle von $f^{(n-1)}(x)$ und $g(-x)$ an die Stelle von $g'(-x)$, so kommt:

$$(\mathrm{M}') \qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx \leqq M\left(f^{(n)}(x)\right) V\left(\int g(-x)\, dx\right).$$

Die hier mit (M), (M′) bezeichneten Ungleichheiten werden unmittelbar evident, wenn man berücksichtigt, dass:

$$V\left(f^{(n-1)}(x)\right) = \int_0^r \left|f^{(n)}(x)\right| dx, \quad V\left(\int g(-x)\,dx\right) = \int_0^r \left|g(-x)\right| dx$$

ist; ihre eigentliche Bedeutung aber tritt erst dann hervor, wenn man die Bedeutung der mit V bezeichneten Grössen näher in's Auge fasst.

Man kann nämlich $V(f^{(n-1)}(x))$ als *den Gesammtbetrag der Veränderungen* charakterisiren, welche die Function $f^{(n-1)}(x)$ in dem Intervalle von $x=0$ bis $x=r$ erfährt, und die Ungleichheit (M) zeigt hiermit die wahre Bedeutung der allgemeinen Summenformel ($\mathfrak{S}'$) darin, dass der Ausdruck rechts *ohne das Restintegral* den Werth der Summe mit wachsendem n immer genauer darstellt, sobald nur einerseits die mit g bezeichneten Functionen ihrem Werthe nach stets in gewissen Grenzen eingeschlossen bleiben, und andererseits die durch weitere Differentiation entstehenden Functionen f — wenigstens innerhalb des Summations-Intervalls — immer mehr an Veränderlichkeit verlieren und sich also immer näher an eine Constante anschliessen. Wenn zugleich die durch weitere Integration aus einander entstehenden Functionen $g(-x)$ immer kleinere Werthe erhalten, so wächst auch *hiermit* die Genauigkeit jener Darstellung.

Die Ungleichheit (M′) zeigt, dass die Werthverminderung des Restintegrals der Summenformel ($\mathfrak{S}'$) mit wachsendem n auch durch die Verminderung der Werthe der Ableitungen $f^{(n)}(x)$ selbst bewirkt wird, vorausgesetzt, dass dabei die Veränderlichkeit der Functionen $g(-x)$ sich ebenfalls vermindert oder wenigstens nicht vergrössert.

Nimmt man in der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^n} \cos\left(2kx + v_k + \frac{1}{2}n\right)\pi,$$

welche die Function $g(-x)$ darstellt, $n=2m$ und die Grössen v sämmtlich gleich Null, so ist die Anzahl der Maxima und Minima, durch welche die Anzahl der Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (K_2) bestimmt wird, für jede der Functionen:

$$g(x),\; g''(x),\; g^{(4)}(x), \ldots g^{(2m-2)}(x),$$

d. h. also für jede der Reihen:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^{2h}} \cos 2kx\pi \qquad (h=1, 2, \ldots m)$$

nicht grösser als für die vorhergehende. Dies ist für den Fall der *Poisson*'schen Formel, d. h. für den Fall, dass sämmtliche Grössen a_k einander gleich sind, zuerst von Hrn. *Malmsten* in seiner oben citirten Abhandlung entwickelt worden, und es ist auch für den allgemeineren Fall in derselben Weise, wie dort, zu erschliessen.

Wenn nämlich $g^{(2h)}(x)$ *innerhalb* des Intervalls von $x=0$ bis $x=1$ genau μ Maxima und Minima hat, so hat $g^{(2h-1)}(x)$ in eben diesem Intervalle genau μ Nullstellen. Die Function $g^{(2h-1)}(x)$ hat also, da sie auch an den beiden Grenzen des Intervalls verschwindet, innerhalb dieses Intervalls mindestens $\mu+1$ Maxima oder Minima. Die Derivirte $g^{(2h-2)}(x)$ hat demzufolge eine gleiche Anzahl Nullstellen und daher wiederum mindestens μ Maxima und Minima, d. h. also mindestens ebenso viele als für die Function $g^{(2h)}(x)$ vorausgesetzt worden sind.

XIII. Von besonderem Interesse ist auch der specielle Fall, wo ausser den Grössen v_k noch eine Anzahl von den ersten Grössen a, z. B. $a_1, a_2, \ldots a_{s-1}$ gleich Null sind, die folgenden Grössen a aber sämmtlich einen und denselben von Null verschiedenen Werth haben.

Nimmt man nämlich in der mit ($\mathfrak{S}'$) bezeichneten allgemeinen Summenformel des art. VII:

$$n=2m,\; v_1=v_2=\cdots=0,$$

$$a_1=a_2=\cdots=a_{s-1}=0,$$

$$a_s=a_{s+1}=a_{s+2}=\cdots=-2,$$

so wird:

$$g(-x)=(-1)^{m+1}\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}$$

$$g^{(2m-1)}(-x)=\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{\sin 2kx\pi}{k\pi}=\frac{1}{2}-x-\sum_{k=1}^{k=s-1}\frac{\sin 2kx\pi}{k\pi}$$

$$g^{(2m)}(-x)=\sum_{k=-s+1}^{k=s-1}\cos 2kx\pi=\frac{\sin(2s-1)x\pi}{\sin x\pi}$$

$$\gamma_{2h} = (-1)^{h+1} \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{2}{(2k\pi)^{2h}} \qquad (h=1,2,\dots m)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2},\ \gamma_3 = \gamma_5 = \cdots = \gamma_{2m-1} = 0,\ \delta = 1,$$

und es resultirt die speciellere Summenformel:

$$(\mathfrak{S}_0') \quad \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(r-1) + \frac{1}{2}f(r) = \int_0^r f(x) \frac{\sin(2s-1)x\pi}{\sin x\pi} dx +$$

$$+ \sum_{h=1}^{h=m} \left(f^{(2h-1)}(0) - f^{(2h-1)}(r)\right) \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{(-1)^h 2}{(2k\pi)^{2h}} + (-1)^m \int_0^r f^{(2m)}(x) \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^m} dx.$$

Hier wird nicht nur das Restintegral, sondern auch jedes der übrigen Glieder auf der rechten Seite, mit Ausnahme des ersten, um so kleiner, je mehr man s wachsen lässt; und die Formel liefert daher auch eine immer bessere Reihe für den Werth der Summe:

$$\frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(r-1) + \frac{1}{2}f(r),$$

je grösser man die Zahl s annimmt. Vor Allem aber erscheint die Formel $(\mathfrak{S}_0')$ wohl dadurch bemerkenswerth, dass sie eine Verbindung zwischen der *Poisson*'schen (oder *Euler-Maclaurin*'schen) Summenformel und zwischen derjenigen herstellt, welche *Dirichlet* in seiner Abhandlung[1]): „*Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies*" im XVII. Bande des *Crelle*'schen Journals (S. 60) angegeben, und von welcher er dort so interessante Anwendungen gemacht hat. Während nämlich die Formel $(\mathfrak{S}_0')$ einerseits für $s = 1$ mit der im art. VIII $(\mathfrak{S}'')$ angeführten *Poisson*'schen Formel identisch wird, geht sie andererseits für den Grenzwerth $s = \infty$, für welchen sich der Ausdruck auf der rechten Seite auf

$$\lim_{s=\infty} \int_0^r f(x) \frac{\sin(2s-1)x\pi}{\sin x\pi} dx$$

reducirt, in die erwähnte *Dirichlet*'sche Summenformel über.[2])

[1]) *Dirichlet*, Werke, Bd. I, S. 257 ff., vgl. besonders S. 262. H

[2]) Vgl. Zusatz 16 am Ende dieses Bandes. H

ÜBER DEN CAUCHY'SCHEN SATZ

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1885. S. 785—787.

ÜBER DEN CAUCHY'SCHEN SATZ.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 30. Juli 1885.]

In meiner Mittheilung vom 29. Juli 1880[1]) habe ich den *Cauchy*'schen Satz, wonach das über eine geschlossene Curve erstreckte Integral $\int df(x, y)$ unter gewissen in Beziehung auf die Function $f(x, y)$ zu machenden Voraussetzungen gleich Null ist, mittels einer Transformation der Variabeln x, y bewiesen, bei welcher die Umgrenzungs-Curve durch die Constanz der einen von den beiden neuen Variabeln charakterisirt ist. Wie einfach und naturgemäss auch diese Beweismethode ist, so scheint mir doch — wenigstens in pädagogischer Hinsicht — die folgende vorzuziehen, welche ich neulich in meinen Universitäts-Vorlesungen entwickelt habe.[2])

Ich formulire zunächst den zu beweisenden Satz folgendermaassen:

„Wenn von einer Function $f(x, y)$ vorausgesetzt wird, dass ihre ersten und zweiten Ableitungen in einem von einer geschlossenen Curve umgrenzten Gebiete durchweg endlich und eindeutig sind, so lässt sich erschliessen, dass das über diese Curve erstreckte Integral $\int df(x, y)$ gleich Null, und dass also die Function $f(x, y)$ in dem bezeichneten Gebiete eindeutig ist.“

Ich bemerke dabei, dass diese Eindeutigkeit von $f(x, y)$ selbst in meiner erwähnten Mittheilung vom Juli 1880[1]) durch ein Versehen an Stelle der Eindeutigkeit der Ableitungen unter die Voraussetzungen aufgenommen ist. Doch ist natürlich beim Beweise kein Gebrauch davon gemacht worden.

Da die zweiten Ableitungen von $f(x, y)$ in dem betrachteten Gebiete als endlich vorausgesetzt sind, so nähern sich die Werthe der beiden nach x und y genommenen *ersten* Ableitungen von $f(x, y)$ in gleichmässiger Weise vom Innern her denjenigen Werthen, die sie auf der Begrenzung erhalten. An Stelle der Begrenzungscurve kann daher ein derselben eingeschriebenes gradliniges Polynom genommen

[1]) Bd. IV, S. 275 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Vgl. Zusatz 17 am Ende dieses Bandes. H

werden, welches sich der Curve hinreichend nahe anschliesst, und da sich ein Polynom in lauter rechtwinklige Dreiecke zerlegen lässt, deren Katheten den beiden Coordinatenaxen parallel sind, so genügt es, den zu beweisenden Satz für die Umgrenzung eines solchen Dreiecks zu entwickeln.

Zu diesem Behufe braucht man aber nur den Werth des über die Fläche des Dreiecks zu erstreckenden Integrals:

$$\iint \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy$$

in den beiden möglichen Integrations-Folgen wirklich darzustellen und die beiden Resultate zu identificiren.

Setzt man:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_2(x, y)$$

und bezeichnet mit $(\xi, \eta), (\xi', \eta), (\xi', \eta')$ die drei Eckpunkte des rechtwinkligen Dreiecks, so kann die Hypotenuse durch die Gleichung:

$$x = \xi' + t(\xi - \xi'), \quad y = \eta' + t(\eta - \eta') \qquad (0 < t < 1)$$

dargestellt werden. Wenn nun zuerst in Beziehung auf y von η bis $\eta' + t(\eta - \eta')$ bei dem durch die Gleichung:

$$t = \frac{x - \xi'}{\xi - \xi'}$$

bestimmten Werthe von t und dann in Beziehung auf x von ξ bis ξ' integrirt wird, so erhält man den Ausdruck:

$$-\int_{\xi}^{\xi'} f_1(x, \eta)\, dx + \int_{\xi}^{\xi'} f_1\big(x, \eta' + t(\eta - \eta')\big)\, dx.$$

Wenn aber zuerst in Beziehung auf x von $\xi' + t(\xi - \xi')$ bis $x = \xi'$ und dann in Beziehung auf y von η bis η' integrirt wird, so kommt:

$$\int_{\eta}^{\eta'} f_2(\xi', y)\, dy - \int_{\eta}^{\eta'} f_2\big(\xi' + t(\xi - \xi'), y\big)\, dy.$$

Subtrahirt man diesen Ausdruck von dem vorhergehenden, so resultirt die Gleichung:

$$\int_{\xi}^{\xi'} f_1(x, \eta)\, dx + \int_{\eta}^{\eta'} f_2(\xi', y)\, dy + \int_{\xi'}^{\xi} f_1\big(x, \eta' + t(\eta - \eta')\big)\, dx + \int_{\eta'}^{\eta} f_2\big(\xi' + t(\xi - \xi'), y\big)\, dy = 0.$$

Diese Gleichung kann auch in folgender Form dargestellt werden:

$$\underset{(y=\eta)}{\int_{\xi}^{\xi'} df(x, y)} + \underset{x=\xi'}{\int_{\eta}^{\eta'} df(x, y)} + \int_{t=0}^{t=1} df(x, y) = 0 \qquad \begin{pmatrix} x = \xi' + t(\xi - \xi') \\ y = \eta' + t(\eta - \eta') \end{pmatrix},$$

in welcher sich unmittelbar zeigt, dass das über die drei Seiten des Dreiecks erstreckte Integral $\int df(x, y)$ gleich Null ist.

Der Zerlegung des Polygons in lauter rechtwinklige Dreiecke ist eine solche in Rechtecke, deren Seiten den Coordinatenaxen parallel sind, insofern vorzuziehen, als der zu beweisende Satz für die Umgrenzung eines solchen Rechtecks noch unmittelbarer erhellt als für die eines rechtwinkligen Dreiecks. Denn der Werth jenes über die Fläche eines Rechtecks mit den Endpunkten $(\xi, \eta), (\xi', \eta), (\xi', \eta'), (\xi, \eta')$ erstreckten Integrals:

$$\iint \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy$$

wird sowohl durch:

$$\int_{\xi}^{\xi'} \big(f_1(x, y)\big)_{y=\eta}^{y=\eta'} dx \quad \text{als durch} \quad \int_{\eta}^{\eta'} \big(f_2(x, y)\big)_{x=\xi}^{x=\xi'} dy$$

ausgedrückt, und die Differenz der beiden Integrale ist nichts Anderes als das Integral:

$$\int \big(f_1(x, y)\, dx + f_2(x, y)\, dy\big),$$

erstreckt über die Umgrenzung des Rechtecks. — Aber man muss dann noch hinzufügen, dass das Resultat der Integration über die den Coordinatenaxen parallelen Katheten der rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenusen die Polygonseiten sind, sich beliebig wenig von dem Resultate der Integration über die Polygonseiten selbst unterscheidet, wenn diese hinreichend klein angenommen werden.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass das *Cauchy*'sche Theorem bezüglich der Integrale complexer Variabeln ein einfaches Corollar des hier bewiesenen Satzes ist. Denn auf Grund dieses Satzes ist sowohl der reelle als der imgaginäre Theil des über eine geschlossene Curve erstreckten Integrals $\int dF(x + yi)$ gleich Null, wenn die erste und die zweite Ableitung von $F(x + yi)$ in dem umgrenzten Gebiete durchweg endlich und eindeutig ist.