LEOPOLD KRONECKER'S WERKE

LEOPOLD KRONECKER'S WERKE

HERAUSGEGEBEN AUF VERANLASSUNG

DER

PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VON

K. HENSEL

FÜNFTER BAND

1930

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

VORREDE.

Der fünfte Band der Werke Leopold Kronecker's, den ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, enthält nach dem im Vorwort zum ersten Bande veröffentlichten Plane die zweite Hälfte seiner Abhandlungen zur Theorie der elliptischen Funktionen, ferner die Untersuchungen zur Funktionentheorie, zur Potentialtheorie, über Fragen der mathematischen Physik, sowie einige Briefe und kleinere Abhandlungen vermischten Inhalts.

Ein vollständiges Verzeichnis aller mathematischen Abhandlungen Kronecker's, welches nach der Zeit ihrer Veröffentlichung geordnet ist, wird die Übersicht über sein Lebenswerk sehr erleichtern.

Auch bei diesem Bande wurde ich durch die Mitarbeit des Herrn Dr. A. Plessner wesentlich unterstützt. Mit ganz besonderem Danke möchte ich an dieser Stelle des außerordentlich wichtigen ausführlichen Zusatzes 34 von Herrn Professor Helmut Hasse zu dem berühmten Briefe Kronecker's an Dedekind gedenken, in dem er in abschließender Weise zu der Frage Stellung nimmt, in welchem Umfange Kronecker Einsicht in den von ihm aufgestellten Fundamentalsatz gehabt hat, daß die über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper Abel'schen Gleichungen durch Transformationsgleichungen elliptischer Funktionen mit singulären Moduln erschöpft werden.

Marburg a. L., im August 1930.

K. Hensel.

INHALTSVERZEICHNIS

ZUR THEORIE
DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin von den Jahren: 1889, S. 199—220, 256—274, 309—317; 1890, S. 99—129, 219—241, 307—318, 1025—1029.

ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.[1])

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 14. März, 28. März, 4. April des Jahres 1889, und am 30. Januar, 6. Februar, 13. März, 20. März, 31. Juli des Jahres 1890.]

XIV.

Ich habe schon am Schlusse des art. VII hervorgehoben*), dass:

$$\frac{1}{c}\left(\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{2}{3}}$$

„eine Invariante der durch die Form (a, b, c) repraesentirten Classe“ ist. Dort bedeuteten a, b, c ganze Zahlen, für welche $4ac - b^2 > 0$ ist, und es war:

$$4ac - b^2 = \Delta,\ w_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c},\ w_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c}$$

gesetzt worden. Ich habe dann im art. IX gezeigt, dass der negative Logarithmus dieser Invariante, welcher a. a. O. durch $\mathfrak{L}(w_1, w_2)$ bezeichnet ist, sich von dem im art. VI mit $L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)$ bezeichneten Grenzwerth:

$$\lim_{\varrho = 0}\left(-\frac{1}{\varrho} + \sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi(am^2 + bmn + cn^2)}\right)^{1+\varrho}\right)$$

nur durch eine Grösse unterscheidet, welche für alle quadratischen Formen (a, b, c) der Discriminante $-\Delta$ einen festen Werth hat.**) Dieser feste Werth der Differenz:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c}\right) - L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)$$

lässt sich nun in anderer Weise, als es im art. IX geschehen ist, mittels der Formel (16) des § 6 art. XIII bestimmen.

---

*) Sitzungsbericht vom 30. Juli 1885[2]).

**) Die Summationen sind hier durchweg über alle Zahlen m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken, mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = 0$, $n = 0$.

[1]) Vgl. Zusatz 1 am Ende dieses Bandes. H

[2]) Bd. IV. S. 370 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Setzt man nämlich wie im art. IX:

$$a = a_0\sqrt{\Delta},\ b = b_0\sqrt{\Delta},\ c = c_0\sqrt{\Delta},$$

und wie im art. XIII:

$$a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2 = f(m, n),$$

so ist:

$$L(a_0, c_0) = \lim_{\varrho=0}\left(-\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{(2\pi)^{1+\varrho}}\sum_{m,n}\frac{1}{(f(m,n))^{1+\varrho}}\right),$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{-b_0+i}{2c_0}, \frac{b_0+i}{2c_0}\right) = \log c_0\left(\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)\right)^{-\frac{2}{3}} + \log\sqrt{\Delta}.$$

Mit Berücksichtigung der Relation:

$$\lim_{\varrho=0}\varrho\sum_{m,n}\frac{1}{(f(m,n))^{1+\varrho}} = 2\pi,$$

folgt also, dass jene Differenz:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right) - L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)$$

durch den Ausdruck:

$$\log 2\pi\sqrt{\Delta} + \lim_{\varrho=0}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{(f(m,n))^{1+\varrho}}\right) - \log\frac{1}{c_0}\left(\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{2}{3}}$$

dargestellt wird, dessen Werth sich auf Grund der Formel (16) des art. XIII gleich:

$$\frac{1}{2}\log\Delta - \frac{1}{3}\log 2\pi + 2\Gamma'(1)$$

ergiebt.

Da die hiermit erlangte Werthbestimmung:

(1) $$\mathfrak{L}\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right) - L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right) = \frac{1}{2}\log\Delta - \frac{1}{3}\log 2\pi + 2\Gamma'(1),$$

im Falle einer Fundamental-Discriminante Δ_0, für die im art. IX mit $M(\Delta_0)$ bezeichnete Differenz:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}\right) - L\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)$$

die Gleichung:

$$M(\Delta_0) = \frac{1}{2}\log\Delta_0 - \frac{1}{3}\log 2\pi + 2\Gamma'(1)$$

liefert, so geht die im art. IX mit ($\mathfrak{T}$) bezeichnete Relation:

$$M(\Delta_0) = \mathfrak{M}(\Delta_0) - C + \log\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_0}} + \frac{\bar{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)} \qquad (-C = \Gamma'(1))$$

in folgende über:

(2) $$\mathfrak{M}(\Delta_0) + \frac{4}{3}\log 2\pi + C - \log\Delta_0 = -\frac{\bar{H}(-\Delta_0)}{H(-\Delta_0)},$$

welche eine bemerkenswerthe Beziehung zwischen den beiden im art. IX zur Bestimmung von $M(\Delta_0)$ gebrauchten Functionen der Discriminante Δ_0:

$$\mathfrak{M}(\Delta_0), \quad \bar{H}(-\Delta_0)$$

enthält. Diese Beziehung, und auch eine solche, welche nicht bloss für Fundamental-Discriminanten sondern ganz allgemein besteht, kann natürlich direct aus der Gleichung (16) des art. XIII hergeleitet werden; doch soll, ehe dies ausgeführt wird, der Ausdruck, welcher die rechte Seite dieser Gleichung bildet, oder der damit identische Ausdruck (17), auf die Function $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ zurückgeführt werden.

XV.

Aus den im art. I und im art. III aufgestellten Definitionsgleichungen:

(1) $$\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = (4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\frac{\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2)}{(\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2))^{\frac{1}{3}}},$$

(2) $$P(\sigma, \tau, w_1, w_2) = e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2),$$

folgt unmittelbar die zwischen den Functionen Λ und P bestehende Relation:

(3) $$\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{(4\pi^2)^{\frac{1}{3}}P(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{(\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2))^{\frac{1}{3}}},$$

welche schon im art. III angegeben ist. Es sind dort ferner die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\,\partial\sigma}(\sigma=0, \tau=0) = P_{11} = 2\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\,\partial\tau}(\sigma=0, \tau=0) = P_{12} = (w_1 - w_2)\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\tau\,\partial\tau}(\sigma=0, \tau=0) = P_{22} = -2w_1 w_2\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)$$

entwickelt, und hiernach wird:

$$c_0(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22}) = \vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2), \tag{4}$$

$$\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{\frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{\left(\frac{1}{4\pi^2 (\sqrt{c_0})}(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22})\right)^{\frac{1}{3}}}, \tag{5}$$

wo auf der rechten Seite im Zähler und Nenner der Function P desshalb der Factor $\frac{1}{(\sqrt{c_0})}$ angefügt worden ist, weil:

$$\frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, w_1, w_2)$$

genau dieselbe, im art. II näher dargelegte, Invarianten-Eigenschaft wie die Function $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ besitzt. Diese Eigenschaft tritt durch die Gleichung $(\mathfrak{C}_0)$ des art. III:

$$\frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \sum_{\substack{m, n \\ (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)}} (-1)^{mn+m+n} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + 2(m\sigma + n\tau)\pi i} \tag{6}$$

in Evidenz. Denn wenn an Stelle eines Systems $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ ein aequivalentes:

$$(\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$

tritt, welches durch die Relationen:

$$\begin{aligned} \sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \quad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'', \quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1, \\ a_0' = a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \\ b_0' = 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', \\ c_0' = a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2, \end{aligned} \tag{7}$$

(in denen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ganze Zahlen bedeuten), mit dem ersteren System verbunden ist, so sind je zwei Glieder der nur formal verschiedenen Reihen mit einander identisch, in denen die Summationszahlen m, n der einen Reihe aus den Summationszahlen m', n' der andern mittels der Gleichungen:

$$m = \alpha m' + \beta n', \quad n = \alpha' m' + \beta' n'$$

bestimmt werden. Dabei ist zu bemerken, dass das Bestehen der Gleichung:

$$(-1)^{mn+m+n} = (-1)^{m'n'+m'+n'}$$

oder der Congruenz:

$$mn + m + n \equiv m'n' + m' + n' \pmod{2} \tag{8}$$

am einfachsten daraus zu erkennen ist, dass sich $mn + m + n$ *modulo* 2 weder bei einer Vertauschung von m und n, noch dann ändert, wenn $n + m$ an die Stelle von n gesetzt wird. Aber man kann auch die Congruenz (8) direct begründen, indem man bemerkt, dass vermöge der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$:

$$(\alpha m' + \beta n')(\alpha' m' + \beta' n') \equiv \alpha\alpha' m' + \beta\beta' n' + m'n' \pmod{2},$$

also:

$$mn + m + n - m'n' - m' - n' \equiv (\alpha + 1)(\alpha' + 1)m' + (\beta + 1)(\beta' + 1)n' \pmod{2},$$

und:

$$(\alpha + 1)(\alpha' + 1) \equiv 0, \quad (\beta + 1)(\beta' + 1) \equiv 0 \pmod{2}$$

ist.

Hebt man auf der rechten Seite der Gleichung (6) aus je zwei Zahlen m, n den (absolut genommenen) größten gemeinsamen Theiler t heraus und setzt:

$$m = t\alpha, \quad n = t\alpha',$$

so kann dieselbe — da $t^2 \equiv t \pmod{2}$ ist — in folgender Weise dargestellt werden:

$$\frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, w_1, w_2) = 1 + \sum (-1)^{(\alpha\alpha' + \alpha + \alpha')t} e^{-(a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2)t^2\pi + 2(\alpha\sigma + \alpha'\tau)t\pi i},$$

wo die Summation sich auf alle positiven Zahlen t und auf alle Systeme solcher Zahlen α, α' bezieht, welche zueinander relativ prim sind.

Nun bilden die Grössen:

$$a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \quad \alpha\sigma + \alpha'\tau$$

die Gesammtheit aller derjenigen, welche in den dem Systeme:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

aequivalenten Systemen vermöge der Bedingungen (7) beziehungsweise an Stelle der Grössen:

$$a_0, \sigma$$

treten. Man kann hiernach einfach:

$$\frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, w_1, w_2) = 1 + \sum \sum_{t=1}^{t=\infty} \varepsilon_t e^{-a_0 t^2 \pi + 2\sigma t \pi i} \tag{9}$$

setzen, wo sich die erste Summation auf die Elemente σ, a_0 aller einander aequivalenten Systeme:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

bezieht und ε_t das zugehörige Vorzeichen $(-1)^{(\alpha\alpha'+\alpha+\alpha')t}$ bedeutet.

Die Invarianten-Eigenschaft des Nenners in der obigen Gleichung (5) tritt bei dessen Darstellung in der Form:

$$(10)\quad \frac{1}{4\pi^2(\sqrt{c_0})}(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22})$$
$$= \sum (-1)^{(m-1)(n-1)}(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\, e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi}$$

deutlich hervor, und der Summe auf der rechten Seite kann gemäss den obigen Ausführungen auch folgende einfache Gestalt gegeben werden:

$$(11)\qquad -\sum \sum_{t=1}^{t=\infty} \varepsilon_t a_0 t^2 e^{-a_0 t^2 \pi},$$

wo sich die erste Summe auf alle ersten Elemente a_0 der sämmtlichen einander im *Gauss*'schen Sinne aequivalenten Formen (a_0, b_0, c_0) bezieht und ε_t die oben angegebene Bedeutung hat.

Nun ist, wenn wie im art. XIII:

$$f(x, y) = a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2, \quad f'(x', y') = c_0 x'^2 - b_0 x'y' + a_0 y'^2$$

und:

$$(12)\qquad \frac{\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{f(\sigma, \tau)} = \Lambda'(\sigma, \tau, w_1, w_2)$$

gesetzt wird:

$$(13)\qquad \Lambda'(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{(4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}}{c_0(\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2))^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)}{\sigma + \tau w_1} \cdot \frac{\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2)}{\sigma - \tau w_2}.$$

Die Function $f(\sigma, \tau)$ ist aber eine Invariante für alle diejenigen aequivalenten Systeme:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0),$$

bei denen in den obigen Relationen (7) die Zahlen α'' und β'' gleich Null sind. Es ist also auch:

$$\Lambda'(\sigma, \tau, w_1, w_2)$$

eine solche Invariante und folglich:

$$\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$$

eine Invariante in *dem* Sinne, dass

$\Lambda'\left(0, 0, \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \frac{b_0 + i}{2c_0}\right)$ für alle Formen (a_0, b_0, c_0) ungeändert bleibt, welche durch lineare ganzzahlige Transformationen mit der Determinante *Eins* aus einander hervorgehen.

Aus der Gleichung (13) folgt:

$$(14)\qquad \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = \frac{4\pi^2}{c_0}\left(\frac{\vartheta'(0, w_1)}{2\pi} \cdot \frac{\vartheta'(0, w_2)}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}},$$

oder wenn man hier die Productentwickelung der ϑ-Reihen einsetzt:

$$(15)\qquad \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = \frac{4\pi^2}{c_0} e^{-\frac{\pi}{6c_0}} \Pi (1 - e^{2nw_1\pi i})^2 (1 - e^{2nw_2\pi i})^2.$$

Benutzt man ferner die Gleichungen (4) und (10), so resultirt die Formel:

$$(16)\qquad (\Lambda'(0, 0, w_1, w_2))^{\frac{3}{2}} = (2\pi)^3 \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n)\, e^{-\pi f(m,n)},$$

welche sich bei Anwendung der Form (11), auf welche oben die Reihe rechts gebracht worden ist, folgendermaassen darstellen lässt:

$$(17)\qquad (\Lambda'(0, 0, w_1, w_2))^{\frac{3}{2}} = -(2\pi)^3 \sum_{a_0} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n a_0 n^2 e^{-a_0 n^2 \pi}.$$

Gemäss der Formel (16) des art. XIII ist daher:

$$(18)\qquad \log \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = 2 \log 2\pi - 2\Gamma'(1) + \lim_{\varrho=0}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{(f(m,n))^{1+\varrho}}\right),$$

oder, wenn von dem Grenzwerth:

$$\lim_{\varrho=0}\left(\frac{1}{\varrho} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}}\right) = \Gamma'(1)$$

Gebrauch gemacht wird:

$$(19)\quad \log \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = 2 \log 2\pi - \Gamma'(1) + \lim_{\varrho=0}\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{(f(m,n))^{1+\varrho}}\right).$$

Bezeichnet man in üblicher Weise $-\Gamma'(1)$ durch C und hebt den grössten gemeinsamen Theiler t je zweier Zahlen m, n in der letzten Summe heraus, so geht der Ausdruck auf der rechten Seite in folgenden über:

$$2\log 2\pi + C + \lim_{\varrho=0}\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{t=1}^{t=\infty}\frac{1}{t^{2+2\varrho}}\sum_{a_0}\frac{1}{a_0^{1+\varrho}}\right),$$

wo die letzte Summation auf die ersten Coefficienten a_0 der sämmtlichen einander aequivalenten Formen (a_0, b_0, c_0) zu erstrecken ist. Substituirt man hier den aus der Gleichung:

$$\lim_{\varrho=0}\sum_{t=1}^{t=\infty}\frac{1}{t^{2+2\varrho}} = \lim_{\varrho=0}\left(\frac{\pi^2}{6} - 2\varrho\sum_{t=1}^{t=\infty}\frac{\log t}{t^2}\right)$$

resultirenden Werth und setzt zur Abkürzung:

$$C + \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\log n}{n^2} = \log\mathfrak{C},$$

so kommt:

$$\log \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = \log 4\pi^2\mathfrak{C} + \lim\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}} - \frac{\pi}{12}\sum_{a_0}\frac{1}{a_0^{1+\varrho}}\right). \tag{20}$$

Man hat hiernach die folgenden beiden Darstellungen der Invariante $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$:

$$\Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = 4\pi^2\left(\sum_{a_0}\sum_{n=1}^{n=\infty}\varepsilon_n a_0 n^2 e^{-a_0 n^2 \pi}\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{21}$$

$$\Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = 4\pi^2\mathfrak{C}\lim_{\varrho=0}\prod_{n=0}^{n=\infty}e^{n^{-1-\varrho}}\prod_{a_0}e^{-\frac{\pi}{12}a_0^{-1-\varrho}}, \tag{22}$$

welche den Invarianten-Charakter deutlich an sich tragen. Die auf a_0 bezüglichen Summationen und Multiplicationen sind, wie oben, auf alle diejenigen Grössen zu erstrecken, welche die ersten Coefficienten der einander aequivalenten Formen:

$$(a_0, b_0, c_0),\ \ (a_0', b_0', c_0'),\ \ (a_0'', b_0'', c_0''), \ldots$$

bilden, und die dadurch constituirte Formenclasse ist einzig und allein der Bedingung unterworfen, dass der reelle Theil der Form $a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2$ eine *positive* Form sein muss.

Geht man schon in der Formel (19) von den Logarithmen zu den Grössen selbst über, so resultirt die Product-Darstellung:

$$\Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = 4\pi^2 e^C \lim_{\varrho=0}\prod_{n=1}^{n=\infty}e^{n^{-1-\varrho}}\prod_{m,n}e^{-\frac{1}{2\pi}(f(m,n))^{-1-\varrho}}, \tag{23}$$

wo die Multiplication im zweiten Product auf alle ganzzahligen Systeme m, n mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = 0$, $n = 0$ zu erstrecken ist, und auch aus dieser Darstellung erhellt der Invarianten-Character der Function $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$.

Die hier unter (10), (21), (22), (23) gegebenen Darstellungen der Function $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$ zeichnen sich auch dadurch aus, dass sie deren Verhalten in der Nähe der Grenzen ihrer Existenz klar legen. Diese Grenzen sind nur durch jene Bedingung, dass der reelle Theil der Form $a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2$ positiv sein muss oder durch die gleichbedeutende Bedingung, dass die reellen Theile von $w_1 i$, $w_2 i$ negativ sein sollen, bestimmt. Dass *innerhalb* der so bestimmten Grenzen $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$ endlich und von Null verschieden ist, leuchtet ebenfalls unmittelbar aus der Productform (23) ein.

Es verdient wohl noch hervorgehoben zu werden, dass in allen obigen Formeln speciell $w_1 = w_2$ genommen werden kann. Dann wird:

$$b_0 = 0,\ \ 4a_0 c_0 = 1,\ \ w_1 = w_2 = \frac{i}{2c_0},$$

ferner bei Anwendung der *Jacobi*'schen Bezeichnungen der vollständigen elliptischen Integrale:

$$w_1 = w_2 = \frac{iK'}{K},\ \ a_0 = \frac{K'}{2K},\ \ c_0 = \frac{K}{2K'},$$

und es gehen aus den Gleichungen (14), (15), (16), (23) die folgenden vier Darstellungen von:

$$\Lambda'(0, 0, w, w)$$

hervor:

$$-2w(2\pi)^{\frac{2}{3}}i(\vartheta'(0, w))^{\frac{4}{3}},$$

$$-8w\pi^2 i e^{\frac{1}{3}w\pi i}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - e^{2nw\pi i})^4,$$

$$4\pi^2\left\{\frac{1}{2KK'}\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}(K^2m^2 + K'^2n^2)e^{-\frac{\pi}{2KK'}(K^2m^2 + K'^2n^2)}\right\}^{\frac{2}{3}},$$

$$4\pi^2 e^C \lim_{\varrho=0}\prod_{n=1}^{n=\infty}e^{n^{-1-\varrho}}\prod_{m,n}e^{-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{2K'}m^2 + \frac{K'}{2K}n^2\right)^{-1-\varrho}}.$$

Der Index von w ist hierbei, als überflüssig, weggelassen worden.

Da nun nach *Jacobi*:

$$\pi(\vartheta'(0, w))^2 = \varkappa\varkappa'(2K)^2$$

ist, wo $\varkappa, \varkappa'$ die complementären Moduln bedeuten, so resultirt aus der Gleichsetzung des ersten und dritten jener vier Ausdrücke von $\Lambda'(0, 0, w, w)$ folgende eigenartige Darstellung von $\varkappa'\varkappa$:

$$(24) \qquad \varkappa\varkappa' = \frac{\pi^3}{8\sqrt{2KK'}} \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} \left(\frac{m^2}{K'^2} + \frac{n^2}{K^2}\right) e^{-\frac{\pi}{2KK'}(K^2 m^2 + K'^2 n^2)}.$$

Ebenso liefert die Gleichsetzung des zweiten und vierten Ausdrucks die Formel:

$$(25) \qquad q^{-\frac{1}{3}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1-q^{2n})^{-4} = e^{-C\frac{2K'}{K}} \lim_{\varrho=0} \prod_{n=1}^{n=\infty} e^{-n^{-1-\varrho}} \prod_{m,n} e^{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{2K'}m^2 + \frac{K'}{2K}n^2\right)^{-1-\varrho}},$$

in welcher nach *Jacobi*'scher Weise:

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$$

gesetzt ist, da nach *Jacobi*'s Fundamenta (36, 2):[1])

$$\pi^2 q^{\frac{1}{3}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1-q^{2n})^4 = (2\varkappa\varkappa')^{\frac{2}{3}} K^2$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\pi^2 (2\varkappa\varkappa')^{-\frac{2}{3}} = e^{-C} \cdot 2KK' \lim_{\varrho=0} \prod_{n=1}^{n=\infty} e^{-n^{-1-\varrho}} \prod_{m,n} e^{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{2K'}m^2 + \frac{K'}{2K}n^2\right)^{-1-\varrho}},$$

welche eine merkwürdige Darstellung von $\varkappa\varkappa'$ als unendliches Product enthält.

Ich bemerke hierbei, dass $e^{-C} = 0.56146\ldots$, also um weniger als 0.016 von $0.57721566\ldots$ d. h. von dem Werke von C selbst verschieden ist. Der angenäherte Werth der Wurzel der Gleichung:

$$x = e^{-x}$$

ist: 0.5672, und wenn für $-x$ die *Gauss*'sche Function $\Psi(z)$, für welche $\Psi(0) = -C$ ist, substituirt wird, und also die Gleichung:

$$\Psi(z) + e^{\Psi(z)} = 0$$

zu befriedigen ist, so wird $z = 0.006\ldots$ also nahe gleich Null.

[1]) *Jacobi*, Werke, Band I, S. 146.

XVI.

Sind a, b, c ganze Zahlen, für welche $4ac - b^2$ positiv ist, und setzt man wie oben im art. XIV:

$$4ac - b^2 = \Delta,\ a = a_0\sqrt{\Delta},\ b = b_0\sqrt{\Delta},\ c = c_0\sqrt{\Delta},$$

und wie im art. XV:

$$f(m, n) = a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2,$$

also:

$$\sqrt{\Delta} f(m, n) = am^2 + bmn + cn^2,$$

so ist gemäss der Formel (18) des art. XV:

$$(1) \qquad \lim_{\varrho=0}\left(-\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{(\sqrt{\Delta})^{1+\varrho}}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\varrho}}\right) = \log 4\pi^2 + 2C - \log \Lambda'\left(0, 0, \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right),$$

und es ist hierbei unter $\sqrt{\Delta}$ stets der absolute Werth der Quadratwurzel aus Δ zu verstehen.

Wird in der Gleichung (1) für (a, b, c) ein vollständiges System unter einander nicht aequivalenter Formen gesetzt und dann summirt, so ergiebt sich, dass der Grenzwerth:

$$(2) \qquad \lim_{\varrho=0}\left(-\frac{K(D)}{\varrho} + \frac{1}{2\pi}\sum_{a,b,c}\sum_{m,n}\frac{(\sqrt{\Delta})^{1+\varrho}}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\varrho}}\right)$$

durch den Werth von:

$$(3) \qquad K(D)\log 4\pi^2 + 2CK(D) - \sum_{a,b,c}\log \Lambda'\left(0, 0, \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)$$

ausgedrückt wird. Hierbei ist, wie im art. VIII,*) mit D die Discriminante der Form (a, b, c) bezeichnet, so dass:

$$D = b^2 - 4ac = -\Delta$$

ist, und $K(D)$ bedeutet, wie a. a. O., die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen der Discriminante D.

Gemäss der Formel ($\mathfrak{M}^0$) des art. VIII ist nun:

$$(4) \qquad \sum_{a,b,c}\sum_{m,n}\frac{(\sqrt{\Delta})^{1+\varrho}}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\varrho}} = \tau(\sqrt{\Delta})^{1+\varrho}\sum_{h,k}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{1}{(hk)^{1+\varrho}},$$

*) Sitzungsbericht vom 30. Juli 1885. XXXVIII.

wenn die Summation auf alle positiven Zahlen h, k erstreckt wird, die zu Q relativ prim sind, und auf alle Zahlen m, n, für welche $am^2 + bmn + cn^2$ zu Q prim ist. Dabei ist die Zahl Q durch die Gleichung:

$$D = D_0 Q^2,$$

so wie dadurch bestimmt, dass D_0 die der Discriminante D entsprechende „Fundamental-Discriminante" sein soll. Wenn man ferner, wie im art. IX:

$$D_0 = -\varDelta_0$$

setzt, so kann die Gleichung (4) in folgender Weise dargestellt werden:

$$(5) \quad \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{am^2+bmn+cn^2}\right) \frac{(\sqrt{\varDelta})^{1+\varrho}}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\varrho}} = \tau (\sqrt{\varDelta})^{1+\varrho} \sum_{h,k} \left(\frac{Q^2}{h}\right) \left(\frac{-\varDelta}{k}\right) \frac{1}{(hk)^{1+\varrho}},$$

wo nunmehr über *alle* positiven Zahlen h, k und über *alle* Systeme von Zahlen m, n mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = 0, n = 0$ zu summiren ist.

Für den Fall $Q = 1$ kann also der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (5) unmittelbar in den Ausdruck (2) eingesetzt werden, und dieser erhält dann folgende Gestalt:

$$(6) \quad \lim_{\varrho=0} \left(-\frac{K(-\varDelta)}{\varrho} + \frac{\tau}{2\pi} (\sqrt{\varDelta})^{1+\varrho} \sum_{h,k} \left(\frac{-\varDelta}{k}\right) \frac{1}{(hk)^{1+\varrho}} \right) \qquad (h, k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nun wird, da $Q = 1$ ist, $\varDelta = \varDelta_0$, $D = D_0$; ferner ist:

$$\lim_{\varrho=0} \left(-\frac{1}{\varrho} + \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{1}{h^{1+\varrho}} \right) = C,$$

also:

$$\lim_{\varrho=0} (\sqrt{\varDelta_0})^{1+\varrho} \sum_{h,k} \left(\frac{-\varDelta_0}{k}\right) \frac{1}{(hk)^{1+\varrho}} = \lim_{\varrho=0} \sqrt{\varDelta_0}\,(1 + \varrho \log \sqrt{\varDelta_0}) \left(\frac{1}{\varrho} + C\right) \sum_{k} \left(\frac{-\varDelta_0}{k}\right) \frac{1-\varrho \log k}{k},$$

und folglich wenn, wie im art. VIII und IX:

$$\sum_{k} \left(\frac{-\varDelta_0}{k}\right) \frac{1}{k} = H(-\varDelta_0), \quad \sum_{k} \left(\frac{-\varDelta_0}{k}\right) \frac{\log k}{k} = \overline{H}(-\varDelta_0) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

gesetzt wird:

$$\lim_{\varrho=0} \left\{ (\sqrt{\varDelta_0})^{1+\varrho} \sum_{h,k} \left(\frac{-\varDelta_0}{k}\right) \frac{1}{(hk)^{1+\varrho}} - \frac{1}{\varrho} \sqrt{\varDelta_0} H(-\varDelta_0) \right\}$$
$$= (C + \log \sqrt{\varDelta_0}) \sqrt{\varDelta_0} H(-\varDelta_0) - \sqrt{\varDelta_0}\, \overline{H}(-\varDelta_0).$$

Hieraus erhellt, wenn man noch die Gleichung ($\mathfrak{N}$) im art. VIII:

$$\sqrt{\varDelta_0} H(-\varDelta_0) = \frac{2\pi}{\tau} K(-\varDelta_0)$$

in Rücksicht zieht, dass der Grenzwerth (6) gleich:

$$\frac{\tau \sqrt{\varDelta_0}}{2\pi} H(-\varDelta_0) \left\{ C + \log \sqrt{\varDelta_0} - \frac{\overline{H}(-\varDelta_0)}{H(-\varDelta_0)} \right\}$$

oder also gleich:

$$K(-\varDelta_0) \left\{ C + \log \sqrt{\varDelta_0} - \frac{\overline{H}(-\varDelta_0)}{H(-\varDelta_0)} \right\}$$

wird. Da aber derselbe Grenzwerth andererseits durch den Ausdruck (3) dargestellt wird, so resultirt die Gleichung:

$$(7) \quad \frac{\overline{H}(-\varDelta_0)}{H(-\varDelta_0)} + C + \log 4\pi^2 - \log \sqrt{\varDelta_0} = \frac{1}{K(D_0)} \sum_{a,b,c} \log \varLambda'\left(0, 0, \frac{-b + i\sqrt{\varDelta_0}}{2c}, \frac{b + i\sqrt{\varDelta_0}}{2c}\right).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite stellt

> den Mittelwerth der Logarithmen der Invariante $\varLambda'$ für alle Classen der Discriminante D_0 oder $-\varDelta_0$ dar;

der erste Term auf der linken Seite:

$$\frac{\overline{H}(-\varDelta_0)}{H(-\varDelta_0)}$$

ist nichts Anderes als

> der negative Werth des nach ϱ genommenen logarithmischen Differentialquotienten von:
>
> $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{-\varDelta_0}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$
>
> für $\varrho = 0$,

und die Gleichung (7) zeigt also, dass diese beiden Werthe sich von einander um:

$$C + \log 4\pi^2 - \log \sqrt{\varDelta_0}$$

unterscheiden.

Dies stimmt mit dem Inhalte der Gleichung (2) im art. XIV genau überein. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur für $\mathfrak{M}(\varDelta_0)$, d. h. für den Mittelwerth von:

$$\log c_0 (\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2))^{-\frac{2}{3}} + \log \sqrt{\varDelta_0}$$

denjenigen zu substituiren, welcher aus der Relation (14) im art. XV hervorgeht.

XVII.

Über die Bedeutung des im vorigen Abschnitte hergeleiteten Resultats (7) sind einige Bemerkungen hinzuzufügen.

Wenn auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\log \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{-\varDelta_0}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum_p \log \left(1 - \left(\frac{-\varDelta_0}{p}\right) \frac{1}{p^{1+\varrho}}\right)^{-1},$$

in welcher die Summation rechts über alle Primzahlen zu erstrecken ist, nach ϱ differentiirt und alsdann $\varrho = 0$ setzt, so kommt:

$$\frac{\bar{H}(-\varDelta_0)}{H(-\varDelta_0)} = \lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{-\varDelta_0}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{-\varDelta_0}{p}\right)}, \tag{8}$$

und es wird also auf Grund der Formel (7):

$$\begin{aligned} &-\lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{-\varDelta_0}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{-\varDelta_0}{p}\right)} \\ &= C + \log 4\pi^2 - \log\sqrt{\varDelta_0} - \frac{1}{K(-\varDelta_0)} \sum_{a,b,c} \log \varLambda'\left(0, 0, \frac{-b+i\sqrt{\varDelta_0}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\varDelta_0}}{2c}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Unter der Annahme, dass der Grenzwerth auf der linken Seite mit dem der Reihe[1]):

$$-\sum_p \left(\frac{-\varDelta_0}{p}\right) \frac{\log p}{p - \left(\frac{-\varDelta_0}{p}\right)}$$

übereinstimmt, wenn darin die Primzahlen p ihrer natürlichen Reihenfolge nach genommen werden, folgt, wie ich in einem in den Pariser Comptes Rendus vom 22. November 1886 veröffentlichten Aufsatze[2]) bewiesen habe, dass:

[1]) Vgl. Zusatz 2 am Ende dieses Bandes.

[2]) Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes Bd. V dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \frac{1}{n-m} \sum \left(\frac{-\varDelta_0}{p}\right) \frac{p \log p}{p - \left(\frac{-\varDelta_0}{p}\right)} = 0 \qquad (m < p \leqq n)$$

ist, wenn die Summation nur über alle Primzahlen p zwischen m und n erstreckt wird.[1]) Man kann dann also schliessen, dass in einem hinreichend grossen und aber auch hinreichend entfernten Intervalle die Summe der Logarithmen der Primzahlen, für welche $\left(\frac{-\varDelta_0}{p}\right)$ den einen oder den anderen Werth hat, annähernd gleich ist.

Aber schon in der gewöhnlichen Theorie der quadratischen Formen tritt eigentlich die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{(\sqrt{D})^{1+\varrho}}{n^{1+\varrho}}$$

auf, und in den hier dargelegten Untersuchungen ist es *diese* Reihe, welche notwendig an Stelle der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

der Betrachtung zu Grunde gelegt werden muss. Bezeichnet man nun zur Abkürzung den nach ϱ genommenen Differentialquotienten von:

$$\log \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{(\sqrt{D})^{1+\varrho}}{n^{1+\varrho}}$$

für $\varrho = 0$, mit $\mathfrak{H}(D)$, so ist:

$$\mathfrak{H}(-\varDelta_0) = -\frac{\bar{H}(-\varDelta_0)}{H(-\varDelta_0)} + \log\sqrt{\varDelta_0}. \tag{10}$$

Bei Anwendung dieser Bezeichnung nimmt die Formel (7) des vorigen Abschnittes folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{H}(-\varDelta_0) = C - \frac{1}{K(D_0)} \sum_{a,b,c} \log \frac{1}{4\pi^2} \varLambda'\left(0, 0, \frac{-b+i\sqrt{\varDelta_0}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\varDelta_0}}{2c}\right), \tag{11}$$

und man sieht daher, dass sich der Werth von $\mathfrak{H}(-\varDelta_0)$ von dem Mittelwerthe des Logarithmus der Invariante:

$$\frac{4\pi^2}{\varLambda'(0, 0, w_1, w_2)}$$

[1]) Vgl. Zusatz 3 am Ende dieses Bandes.

nur um die *Euler*'sche Constante C unterscheidet. Die Werthe, deren Mittel zu nehmen ist, sind durch irgend ein System nicht aequivalenter Formen (a, b, c) der Discriminante $-\Delta_0$ und alsdann dadurch bestimmt, dass $w_1, -w_2$ die verschiedenen Systeme von Wurzeln der Gleichungen:

$$a + bw + cw^2 = 0$$

sein sollen.

Benutzt man den im art. XV mit (15) bezeichneten Ausdruck von

$$\Lambda'(0, 0, w_1, w_2),$$

so wird:

$$\text{(12)} \qquad \frac{4\pi^2}{\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)} = c_0 e^{\frac{\pi}{6c_0}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - e^{2nw_1\pi i})^{-2} (1 - e^{2nw_2\pi i})^{-2},$$

und es zeigt sich also, dass $\mathfrak{H}(-\Delta_0) - C$ gleich dem Mittelwerth von:

$$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c} - 2\log\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - e^{2nw_1\pi i})(1 - e^{2nw_2\pi i})$$

ist. Der Werth des Products lässt sich leicht abschätzen, wenn man dafür die Reihenentwickelung einsetzt. Denn dann tritt an die Stelle von:

$$-2\log\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - e^{2nw_1\pi i})(1 - e^{2nw_2\pi i})$$

der Ausdruck:

$$\text{(14)} \quad -\frac{2}{3}\log\left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n(2n+1)e^{(n^2+n)w_1\pi i}\right)\left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n(2n+1)e^{(n^2+n)w_2\pi i}\right).$$

Nun ist:

$$\left|\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n(2n+1)e^{(n^2+n)w\pi i}\right| < \sum_{n=1}^{n=\infty}(2n+1)\left|e^{(n^2+n)w\pi i}\right|,$$

und wenn zur Abkürzung $|e^{2w\pi i}| = r$ gesetzt wird:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(2n+1)\left|e^{(n^2+n)w\pi i}\right| = 3r + 5r^3 + 7r^6 + 9r^{10} + 11r^{15} + \cdots$$

Der Werth der Reihe auf der rechten Seite ist aber kleiner als:

$$3r + \frac{5r^3 + 2r^6}{1 - r^3},$$

wenn nur $r < \frac{7}{9}$ ist, und also, wenn $r < \frac{1}{2}$ vorausgesetzt wird, kleiner als:

$$3r + 6r^3.$$

Ferner ist für jede complexe Grösse $Re^{\tau i}$, in welcher R positiv und kleiner als Eins ist:

$$\log(1 + Re^{\tau i})(1 + Re^{-\tau i}) < 2\log(1 + R) < 2R - R^2 + \frac{2}{3}R^3,$$

und der absolute Werth des Ausdrucks (14) ist daher kleiner als der Werth des Ausdrucks:

$$\text{(15)} \qquad \frac{4}{3}\left(R - \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{3}R^3\right),$$

wenn in demselben R gleich:

$$\left|\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n(2n+1)e^{(n^2+n)w_1\pi i}\right|$$

oder noch grösser angenommen wird. Man kann also z. B.:

$$R = 3r + 6r^3$$

setzen. Dann wird:

$$\frac{4}{3}\left(R - \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{3}R^3\right) = 4r + 8r^3 - 6r^2(1 + 2r^2)^2 + 12r^3(1 + 2r^2)^3,$$

und der Werth des Ausdrucks auf der rechten Seite ist kleiner als:

$$\text{(16)} \qquad 4r - 2r^2(1 + 2r^2)^2(3 - 10r(1 + 2r^2)).$$

Für $r < 0,2$ wird $3 > 10r(1 + 2r^2)$ und also der Werth des Ausdrucks (16) kleiner als $4r$. Hieraus folgt endlich, dass, für $r < 0,2$, der absolute Werth des Ausdrucks (14) kleiner als:

$$4r \text{ oder } 4\left|e^{2w_1\pi i}\right|$$

ist. Dieser absolute Werth ist aber zugleich derjenige von:

$$\text{(17)} \qquad \mathfrak{H}(-\Delta_0) - C - \frac{1}{K(-\Delta_0)}\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c}\right),$$

und der Ausdruck (17) ist daher seinem absoluten Werthe nach kleiner als:

$$\frac{4}{K(-\Delta_0)}\sum_{a,b,c}\left|e^{2w_1\pi i}\right| \quad \text{oder} \quad \frac{4}{K(-\Delta_0)}\sum_{a,b,c}e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}}.$$

d. h. kleiner als der Mittelwerth von:

$$4e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}},$$

wenn nur die Formen a, b, c sämmtlich so gewählt werden, dass $e^{\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}} < 0.2$ ist.

Nach *Lagrange**) können die Formen a, b, c als „Reducirte", d. h. so gewählt werden, dass:

$$|b| \leqq a,\ |b| \leqq c, \text{ also } b \leqq \sqrt{\frac{\Delta_0}{3}}$$

ist. Wird dann c noch so bestimmt, dass $a \geqq c$ ist, so ist:

$$c \leqq \sqrt{\frac{\Delta_0}{3}}, \text{ also } \frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c} \geqq \pi\sqrt{3}$$

und:

$$4e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}} \leqq 4e^{-\pi\sqrt{3}} < 0.01732.$$

Nun ist andererseits der kleinste Werth von $\frac{\pi}{6}x - \log x$, nämlich der für $x = \frac{6}{\pi}$, grösser als 0.35297; für jedes der Glieder unter dem Summenzeichen im Ausdruck (17) besteht daher eine Gleichung:

$$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c} = 0.35297 + \mathfrak{p},$$

*) Abhandlungen der Berliner Akademie von 1773. Oeuvres de *Lagrange*, Tome VII, 1869, p. 695. *Jacobi* hat schon vor mehr als fünfzig Jahren in Vorlesungen, welche durch Abschriften der *Rosenhain*'schen Ausarbeitung vielfach Verbreitung gefunden haben, die *Lagrange*sche Reductionsmethode dazu benutzt, um den absoluten Werth der von ihm mit q bezeichneten Grösse möglichst zu verkleinern und damit eine möglichst starke Convergenz der ϑ-Reihen zu erzielen. Die eingehende Darstellung dieser Methode, welche die 19., 20. und 21. Vorlesung ausfüllt, schließt in der *Rosenhain*'schen Ausarbeitung, deren Original sich in der Bibliothek der Akademie befindet, mit den Worten: „Hiermit ist diese wichtige Untersuchung beendigt, und wir sehen, daß diese Methode auch für die ungünstigsten Fälle eine Reihe giebt, die schneller convergirt als irgend eine andere in der Analysis und auch für den allgemeinsten Begriff unserer Transcendenten gilt. Wir haben nämlich gesehen, dass, wenn q reell ist, es durch Transformation immer kleiner werden kann als

$$e^{-\pi} = \frac{1}{23.14} = 0.0432,$$

und dass, wenn q imaginär ist, sein Modul immer kleiner gemacht werden kann als

$$e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{15.21} = 0.0657\text{"}.$$

in welcher $\mathfrak{p}$ eine positive Grösse bedeutet. Hiernach muss:

$$\mathfrak{H}(-\Delta_0) - C - 0.35297 - \mathfrak{p} > 0.01732$$

sein, und hieraus folgt endlich, da $C > 0.577215$ ist, die Ungleichheit:

(18) $$\mathfrak{H}(-\Delta_0) > 0.912865.$$

Der mit (10) bezeichneten Definitionsgleichung nach ist:

$$\sqrt{\Delta_0}H(-\Delta_0)\,\mathfrak{H}(-\Delta_0) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n},$$

also mit Berücksichtigung der Gleichung ($\mathfrak{R}$) im art. VIII:

$$\frac{2\pi}{\tau}K(-\Delta_0)\,\mathfrak{H}(-\Delta_0) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n},$$

und die Ungleichheit (18) ergiebt daher die folgende:

(19) $$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n} > \frac{9}{10}K(-\Delta_0).$$

Die Reihe auf der linken Seite ist der Coefficient von ϱ in der Entwickelung von:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\varrho}$$

nach steigenden Potenzen von ϱ. Das erste, von ϱ unabhängige Glied dieser Entwickelung bildet die Reihe:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{x=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n},$$

deren Werth nach art. VIII ($\mathfrak{R}$) gleich:

$$K(-\Delta_0)$$

ist. Dass dieser Werth, da die Classenanzahl $K(-\Delta_0) \geqq 1$ ist, stets positiv und zwar mindestens gleich 1 sein muss, ist eines der Hauptresultate der vor einem halben Jahrhundert von *Dirichlet* veröffentlichten analytisch-arithmetischen Untersuchungen. Die Theorie der elliptischen Functionen gestattete, wie sich im Vorstehenden gezeigt hat, einen zweiten Schritt in dieser Richtung zu thun, indem der Nachweis ermöglicht wurde, dass auch der zweite Coefficient der Reihe, welche aus der Entwickelung von:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\varrho}$$

nach Potenzen von ϱ entsteht, immer positiv und zwar grösser als:

$$0.912865$$

sein muss.

Aber nicht bloss in Bezug auf diese specielle aus der Gleichung (7) abgeleitete Folgerung zeigt die Bedeutung des in dieser Gleichung enthaltenen Resultats eine Analogie mit derjenigen, welche dem *Dirichlet*'schen Resultate:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n} = K(-\Delta_0) \tag{20}$$

beizulegen ist, sondern die Analogie tritt in den beiden Resultaten *selbst* ganz deutlich hervor, wenn man sie dahin zusammenfasst, dass

> die beiden ersten Coefficienten der Entwickelung von:
>
> $$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\varrho},$$
>
> nach steigenden Potenzen von ϱ, durch:
>
> $$\varrho\sum_{a,b,c}\log\frac{4\pi^2 e^{\frac{1}{\varrho}+C}}{\Delta'(0,0,w_1,w_2)}$$
>
> dargestellt werden, wenn man die Summation auf ein vollständiges System unter einander nicht aequivalenter Formen (a, b, c) der Discriminante $-\Delta_0$ erstreckt und für $w_1, -w_2$ die zusammengehörigen Wurzeln jeder der quadratischen Gleichungen:
>
> $$a + bw + cw^2 = 0$$
>
> nimmt.

Hierbei wird freilich dem in der Gleichung (20) dargestellten *Dirichlet*'schen Resultate und dem daraus unmittelbar folgenden:*)

*) Vergl. die mit ($\mathfrak{P}$) bezeichnete Formel im art. VIII, Sitzungsberichte vom 30. Juli 1885[1]).

[1]) Bd. IV, S. 375 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

$$-\frac{\tau}{2\Delta_0}\sum_{n=1}^{n=\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)n = K(-\Delta_0) \tag{21}$$

nicht die übliche Bedeutung beigelegt, dass dadurch

> die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen der Discriminante $-\Delta_0$ bestimmt werde, sondern es wird, gewissermaassen entgegengesetzter Weise, in den Gleichungen (20) und (21) vielmehr die Summirung der Reihen auf der linken Seite durch die Zahl, welche die Classenanzahl der quadratischen Formen der Discriminante $-\Delta_0$ angiebt,

gefunden; und dies geschieht offenbar insofern mit Recht, als die Anzahl der Rechnungsoperationen, welche zur Ermittelung der *reducirten* Formen (a, b, c) der Discriminante $-\Delta_0$ und also auch der Zahl $K(-\Delta_0)$ führt, nur proportional $\sqrt{\Delta_0}\log\Delta_0$ ist, während die directe Berechnung der Summe auf der linken Seite der Gleichung (21) eine der Zahl Δ_0 selbst proportionale Anzahl von Rechnungsoperationen erfordert*). Dazu kommt, dass die Aufstellung der reducirten Formen (a, b, c), wie sich oben gezeigt hat, nicht bloss den Werth des ersten schon von *Dirichlet* ermittelten, sondern auch den Werth des zweiten Coefficienten in der Entwickelung von:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\varrho}$$

liefert, und es ist dabei hervorzuheben, dass aus den obigen Formeln ein besonders einfacher *angenäherter* Werth der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}$$

*) Die beiden von 1834 und 1837 datirten, im II. Bande von *Gauss*' Werken abgedruckten Fragmente, in welchen die von *Dirichlet* in jener Zeit gefundenen und schon kurz darauf, im Mai 1838, veröffentlichten Formeln zur Bestimmung der Classenanzahl, wenigstens für negative Determinanten, hergeleitet werden sollten, sind betitelt: „De nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem". *Gauss* scheint hiernach in jenen Formeln nicht sowohl eine Bestimmung der Classenanzahl gesehen zu haben, als eben nur die Darstellung eines Zusammenhangs derselben mit den anderen, durch die Formeln gegebenen Ausdrücken.

und also auch der mit $H(-\Delta_0)$ bezeichneten Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\log n}{n}$$

hervorgeht.

Es ist nämlich oben gezeigt worden, dass $\mathfrak{H}(-\Delta_0) - C$ gleich dem Mittelwerth von:

$$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c} - 2\log\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - e^{2n w_1 \pi i})(1 - e^{2n w_2 \pi i})$$

ist, und dass der letzte Term dieses Ausdrucks seinem absoluten Werthe nach stets kleiner als:

$$4\left|e^{2 w_1 \pi i}\right|$$

bleibt. Mit Hülfe der Gleichung (10) erschliesst man hieraus, dass der Werth von:

$$-\frac{\tau\sqrt{\Delta_0}}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\log n}{n}$$

stets zwischen:

$$\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\Delta_0}{c}\right) + C\cdot K(-\Delta_0) + 4\sum_{a,b,c} e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}}$$

und:

$$\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\Delta_0}{c}\right) + C\cdot K(-\Delta_0) - 4\sum_{a,b,c} e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}}$$

liegt. Dabei ist daran zu erinnern,*) dass:

$$\tau = 6 \text{ für } \Delta_0 = -3, \quad \tau = 4 \text{ für } \Delta_0 = -4,$$

sonst aber stets:

$$\tau = 2$$

ist.

Für die ersten 5 Fundamentaldiscriminanten:

$$\Delta_0 = 3, 4, 7, 8, 11$$

existirt nur je eine reducirte Form:

$$(1, 1, 1), \ (1, 0, 1), \ (2, 1, 1), \ (2, 0, 1), \ (3, 1, 1),$$

und in allen diesen ist also $c = 1$. Ferner sind die Werthe von:

*) Vergl. art. VIII im Sitzungsbericht vom 30. Juli 1885. XXXVIII.

	$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c}$,	$\log\sqrt{\Delta_0}$,	$4e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}}$,
für $\Delta_0 = 3$:	0.357594 . . .,	0.549306 . . .,	0.01732 . . . .,
$\Delta_0 = 4$:	0.354050 . . .,	0.693147 . . .,	0.075. . . . . .,
$\Delta_0 = 7$:	0.412357 . . . .,	0.972955 . . .,	0.00098232. .,
$\Delta_0 = 8$:	0.441240 . . .,	1.03972077 .,	0.00055336. .,
$\Delta_0 = 11$:	0.537632 . . .,	1.1989476 . .,	0.00011938. .,

also die Werthe von:

$$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\Delta_0}{c} + C$$

für $\Delta_0 = 3$:	0.385503 . . .,
$\Delta_0 = 4$:	0.238118 . . .,
$\Delta_0 = 7$:	0.016617 . . .,
$\Delta_0 = 8$:	− 0.021266 . . .,
$\Delta_0 = 11$:	− 0.083629 . . . .

Hiernach ist:

$$\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-3}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -0.385503 + \varepsilon\cdot 0.01732$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -0.238118 + \varepsilon\cdot 0.075$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-7}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -0.016617 + \varepsilon\cdot 0.001$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{\log n}{n} = \quad 0.021266 + \varepsilon\cdot 0.0005534$$

$$\frac{\sqrt{11}}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-11}{n}\right)\frac{\log n}{n} = \quad 0.083629 + \varepsilon\cdot 0.00012,$$

wo ε eine zwischen -1 und $+1$ liegende Grösse bedeutet.

Um noch ein Beispiel anzuführen, in welchem die Classenanzahl grösser als *Eins* ist, wähle ich $\Delta_0 = 31$. Die drei reducirten Formen sind dann:

$$(8,1,1),\quad (4,1,2),\quad (4,-1,2),$$

und c hat also die drei Werthe $1, 2, 2$. Der mittlere Werth von:

$$\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{c}$$

wird gleich:

$$0.688620\ldots,$$

$\log\sqrt{31}$ ist gleich:

$$1.7169936\ldots,$$

und:

$$\frac{\sqrt{31}}{3\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-31}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0.4511586 + \varepsilon\cdot 0.00043,$$

wo $-1 < \varepsilon < 1$ ist.

Anstatt, wie es hier geschehen ist, für den mit (14) bezeichneten Ausdruck den einfacheren, seinem absoluten Werthe nach jedenfalls grösseren:

$$4e^{-\frac{\pi\sqrt{\Delta_0}}{c}}$$

einzuführen, kann man auch einen angenäherteren Werth jenes Ausdrucks (14) zur Ermittelung des Werthes der Reihen:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{\log n}{n}$$

benutzen. Bei der guten Convergenz der in dem Ausdruck (14) enthaltenen Reihen:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n(2n+1)\,e^{(n^2+n)w\pi i}$$

ist nur die Berechnung weniger Glieder erforderlich.

Ich habe noch zu erwähnen, dass Hr. *H. Weber*, wie ich aus einer in dem neuesten Hefte der mathematischen Annalen (Bd. XXXIII, Heft 3) erschienenen Arbeit, von welcher er mir freundlichst einen Separatabdruck geschickt hat, ersehe, den Grenzwerth von:

$$-\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\varrho},$$

für $\varrho = 0$, unter der Voraussetzung reeller Werthe von a, b, c, mittels einer von der im art. VIII dargelegten ganz verschiedenen Methode, aber auch unter Anwendung

der Γ-Functionen (nach *Dirichlet*'scher Weise), auf die im art. VII meiner Mittheilung vom 30. Juli 1885 behandelte „Invariante der durch die Form (a, b, c) repraesentirten Classe"

$$\frac{1}{c}\left(\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)\right)$$

zurückgeführt hat.

XVIII.

Während im art. XVI für Fundamental-Discriminanten $-\Delta_0$, also für $Q = 1$, der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (5) unmittelbar in den Ausdruck (2) eingesetzt und hiermit eine Darstellung des nach ϱ genommenen logarithmischen Differentialquotienten von:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

durch das arithmetische Mittel der Logarithmen der den verschiedenen Classen der Discriminante $-\Delta_0$ entsprechenden Invariante Λ' erlangt werden konnte, bedarf es für den Fall $Q > 1$ noch einiger Vorbereitungen, weil im Ausdruck (2) die Summation über *alle* ganzzahligen Werthe von m, n mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = 0$, $n = 0$, im Ausdruck (5) aber nur über diejenigen Werthsysteme m, n erstreckt wird, für welche $am^2 + bmn + cn^2$ prim zu Q ist.

§ 1.

In jeder Classe quadratischer Formen (a, b, c) giebt es solche, in welchen

$$a \text{ prim zur Discriminante } D,\ b \equiv 0 \pmod{Q},\ c \equiv 0 \pmod{Q^2}$$

ist.*)[1] Für solche Formen hat $am^2 + bmn + cn^2$ nur dann einen gemeinsamen Theiler mit Q, wenn m einen solchen hat; jene im art. VIII mit $(\mathfrak{M}')$ bezeichnete Gleichung:

$$\tau\sum_{h,k}\left(\frac{D}{h}\right)F(hk) = \sum_{a,b,c}\sum_{m,n}F(am^2 + bmn + cn^2),$$

*) Die Begründung dieser und aller anderen arithmetischen Voraussetzungen behalte ich einer besonderen, der Theorie der quadratischen Formen gewidmeten Arbeit vor.

[1]) Vgl. Zusatz 4 am Ende dieses Bandes.

in welcher die Summationen dahin beschränkt sind, dass die Argumente der Function F zu Q prim sein müssen, kann daher folgendermaassen dargestellt werden:

$$(1) \qquad \tau \sum_{h,k} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) = \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) \quad \left(\begin{smallmatrix} h,k = 1,2,3,\ldots \\ m,n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \end{smallmatrix}\right),$$

wo nunmehr bei der Summation rechts einzig und allein das System $m = 0$, $n = 0$ wegzulassen ist.

Da b durch Q und c durch Q^2 theilbar ist, so kann man setzen:

$$b = b'Q, \; c = c'Q^2,$$

wo b', c' ganze Zahlen bedeuten. Dann wird:

$$am^2 + bmn + cn^2 = am^2 + b'mnQ + c'n^2Q^2,$$

und man sieht also, dass das Quadrat des grössten gemeinsamen Theilers von m und Q den grössten gemeinsamen Theiler von

$$am^2 + bmn + cn^2 \text{ und } Q^2$$

bildet. Wird nämlich der grösste gemeinsame Theiler von m und Q mit Q_1' bezeichnet und:

$$m = m_1 Q_1', \; Q = Q_1 Q_1'$$

gesetzt, so ist:

$$am^2 + bmn + cn^2 = (am_1^2 + b'm_1nQ_1 + c'n^2Q_1^2)Q_1'^2;$$

die Zahl $am^2 + bmn + cn^2$ hat also mit Q^2, d. h. mit $Q_1^2 Q_1'^2$, den Factor $Q_1'^2$ gemein, aber auch *nur* diesen; denn:

$$am_1^2 + b'm_1nQ_1 + c'n^2Q_1^2$$

ist prim zu Q_1, weil der Voraussetzung nach Q_1' der grösste gemeinsame Theiler von m und Q, und folglich m_1 prim zu Q_1 ist.

Bedeuten $q_1, q_2, q_3, \ldots$ die verschiedenen Primfactoren von Q und setzt man:

$$(2) \qquad (1 - q_1^z)(1 - q_2^z)(1 - q_3^z) \cdots = \sum_n \varepsilon_n n^z,$$

so kann man sich die Summation rechts auf alle Divisoren von Q ausgedehnt denken, wenn man nur $\varepsilon_n = 0$ nimmt, sobald irgend ein Primfactor von n mehrfach darin enthalten ist, aber wenn dies nicht der Fall ist:

$$\varepsilon_n = 1, -1,$$

je nachdem die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von n gerade oder ungerade ist. Ich bemerke hierbei, dass sich diese Bezeichnungsweise schon im § 2 des art. XI findet, dass aber im art. X versehentlich das Product:

$$(1 - p'z)(1 - p''z)(1 - p'''z) \ldots$$

als erzeugende Function angegeben ist. Offenbar muss z nicht Factor, sondern, wie in der Gleichung (2), Exponent der verschiedenen Primzahlen sein.

Bei Anwendung der eingeführten Bezeichnungsweise wird:

$$(3) \qquad \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) = \sum_{t} \sum_{m,n} \varepsilon_{Q_t'} F(am_t^2 + bm_tn_t + cn_t^2) \quad (t = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo $Q_1', Q_2', Q_3', \ldots$ die verschiedenen Divisoren von Q bedeuten und die Summation rechts über alle Systeme von ganzen Zahlen m_t, n_t zu erstrecken ist, für welche:

$$am_t^2 + bm_tn_t + cn_t^2 \equiv 0 \pmod{Q_t'}$$

wird. Da b und c durch Q_t' theilbar, a hingegen prim zu Q_t' ist, so muss m_t^2 durch Q_t' theilbar sein. Nun kommen, da für die Divisoren Q_t', die irgend einen Primfactor mehrfach enthalten, $\varepsilon = 0$ ist, nur solche Divisoren Q_t' in Betracht, welche lauter *verschiedene* Primfactoren enthalten, und für diese hat die Congruenz:

$$m_t^2 \equiv 0 \pmod{Q_t'}$$

die speciellere:

$$m_t \equiv 0 \pmod{Q_t'}$$

als nothwendige Voraussetzung. Man kann daher in der Gleichung (3) rechts:

$$m_t = mQ_t', \; n_t = n$$

setzen und dann die Summation über *alle* Systeme ganzer Zahlen m, n, mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = 0$, $n = 0$, erstrecken. Substituirt man nun noch für b, c beziehungsweise:

$$b'Q', \; c'Q'^2,$$

so verwandelt sich die Gleichung (3) in folgende:

$$(4) \qquad \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) = \sum_{t} \sum_{m,n} \varepsilon_{Q_t'} F((am^2 + b'mnQ_t + c'n^2Q_t^2)Q_t'^2),$$

und es sind hier auf beiden Seiten die Summationen auf *alle* Systeme ganzer Zahlen m, n, mit Ausschluss des Systems $m = 0$, $n = 0$, zu erstrecken.

Setzt man in der Gleichung (4) links für (a, b, c) ein System nicht aequivalenter Formen der Discriminante D oder $D_0 Q^2$, so kommen rechts für jeden Werth von $\mathfrak{t}$ die entsprechenden Formen:

$$(a, b' Q_{\mathfrak{t}}, c' Q_{\mathfrak{t}}^2)$$

der Discriminante $D_0 Q_{\mathfrak{t}}^2$ vor, unter welchen jene „enthalten" sind. Von diesen Formen sind aber gewisse einander aequivalent, und zwar ist die Anzahl derjenigen einander aequivalenten Formen:

$$(a', b' Q_{\mathfrak{t}}, c' Q_{\mathfrak{t}}^2)$$

der Discriminante $D_0 Q_{\mathfrak{t}}^2$, unter welchen eine bestimmte Form (a, b, c) der Discriminante D enthalten ist, für jede der letzteren Formen dieselbe.*) Von den vorkommenden Formen:

$$(a', b' Q_{\mathfrak{t}}, c' Q_{\mathfrak{t}}^2)$$

gehören also je

$$\frac{K(D_0 Q^2)}{K(D_0 Q_{\mathfrak{t}}^2)} \text{ oder } \frac{K(D)}{K(D_0 Q_{\mathfrak{t}}^2)}$$

derselben Classe von Formen der Discriminante $D_0 Q_{\mathfrak{t}}^2$ an, und es besteht daher die Gleichung:[1])

$$(5) \quad \frac{1}{K(D)} \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) = \sum_{\mathfrak{t}} \sum_{a_{\mathfrak{t}}, b_{\mathfrak{t}}, c_{\mathfrak{t}}} \sum_{m,n} \varepsilon_{Q'_{\mathfrak{t}}} \frac{F((a_{\mathfrak{t}} m^2 + b_{\mathfrak{t}} mn + c_{\mathfrak{t}} n^2) Q'^2_{\mathfrak{t}})}{K(D_0 Q_{\mathfrak{t}}^2)},$$

in welcher die Summationen sich auf alle Systeme ganzer Zahlen m, n, mit alleinigem Ausschluss des Systems $m = 0$, $n = 0$, beziehen, ferner links auf ein vollständiges System nicht aequivalenter Formen (a, b, c) der Discriminante D, rechts aber für jede der in D enthaltenenen Discriminanten $D_0 Q_{\mathfrak{t}}^2$ auf ein vollständiges System nicht aequivalenter Formen:

$$(a_{\mathfrak{t}}, b_{\mathfrak{t}}, c_{\mathfrak{t}})$$

eben dieser Discriminante $D_0 Q_{\mathfrak{t}}^2$. Ersetzt man nunmehr die Summe auf der linken

*) Vergl. die Abhandlung des Hrn. *Lipschitz*: „Einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen". Journal für Mathematik, Bd. LIII.

[1]) Vgl. Zusatz 5 am Ende dieses Bandes.

Seite der Gleichung (5) durch diejenige, welche die linke Seite der obigen Formel (1) bildet, so resultirt die Gleichung:

$$(6) \quad \frac{\tau}{K(D)} \sum_{h=1}^{h=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) = \sum_{\mathfrak{t}} \sum_{a_{\mathfrak{t}}, b_{\mathfrak{t}}, c_{\mathfrak{t}}} \sum_{m,n} \varepsilon_{Q'_{\mathfrak{t}}} \frac{F((a_{\mathfrak{t}} m^2 + b_{\mathfrak{t}} mn + c_{\mathfrak{t}} n^2) Q'^2_{\mathfrak{t}})}{K(D_0 Q_{\mathfrak{t}}^2)},$$

und es zeigt sich daher, wenn $F(n) = n^{-1-\varrho}$ genommen und auf beiden Seiten der Gleichung (6) mit $|D|^{\frac{1}{2}(1+\varrho)}$ multiplicirt wird, dass der Werth von:

$$(7) \quad \frac{\tau |D|^{\frac{1}{2}(1+\varrho)}}{K(D)} \sum_{h=1}^{h=\infty} \left(\frac{D}{h}\right) h^{-1-\varrho} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right) \varrho k^{-1-\varrho}$$

mit dem Werthe von:

$$(8) \quad \varrho |D|^{\frac{1}{2}(1+\varrho)} \sum_{\mathfrak{t}} \varepsilon_{Q'_{\mathfrak{t}}} \frac{Q'^{-2-2\varrho}_{\mathfrak{t}}}{K(D_0 Q_{\mathfrak{t}}^2)} \sum_{a_{\mathfrak{t}}, b_{\mathfrak{t}}, c_{\mathfrak{t}}} \sum_{m,n} (a_{\mathfrak{t}} m^2 + b_{\mathfrak{t}} mn + c_{\mathfrak{t}} n^2)^{-1-\varrho}$$

übereinstimmt.

§ 2.

Bezeichnet man, wie im art. VIII und IX mit $H(D)$, $\overline{H}(D)$ beziehungsweise die Reihen:

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}, \quad \sum_{h=1}^{h=\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{\log h}{h}$$

und, wie im art. XVII, mit $\mathfrak{H}(D)$ den nach ϱ genommenen Differentialquotienten von:

$$\log \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \left(\frac{\sqrt{|D|}}{n}\right)^{1+\varrho},$$

für $\varrho = 0$, so ist:

$$\mathfrak{H}(D) = -\frac{\overline{H}(D)}{H(D)} + \frac{1}{2} \log |D|,$$

und es ergiebt sich, wenn man die im art. VIII mit $(\mathfrak{N})$ bezeichnete Gleichung:

$$(9) \quad \tau H(D) \sqrt{-D} = 2\pi K(D)$$

berücksichtigt, dass *modulo* ϱ^2 die Congruenz:

$$(10) \quad \frac{\tau(-D)^{\frac{1}{2}(1+\varrho)}}{K(D)} \sum_{h=1}^{h=\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h^{1+\varrho}} \equiv 2\pi(1 + \varrho \mathfrak{H}(D))$$

besteht, d. h. dass der Ausdruck auf der rechten Seite das Aggregat aller derjenigen

Glieder der Entwickelung des Ausdrucks auf der linken Seite nach steigenden Potenzen von ϱ darstellt, welche nicht ϱ^2 oder höhere Potenzen von ϱ enthalten.

Nach der oben angewendeten Methode ergiebt sich ferner, dass:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right)k^{-1-\varrho} = \sum_{\mathfrak{t}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}(kQ'_\mathfrak{t})^{-1-\varrho} = \sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{\,-1-\varrho}_\mathfrak{t}\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{-1-\varrho}$$

wird, wo die durch $\sum\limits_{\mathfrak{t}}$ angedeutete Summation auf alle Divisoren $Q'_\mathfrak{t}$ von Q zu erstrecken ist. Da *modulo* ϱ^2 die Congruenzen:

$$\varrho\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{-1-\varrho} \equiv 1+\varrho C,\quad \sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{\,-1-\varrho}_\mathfrak{t} \equiv \sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{\,-1}_\mathfrak{t} - \varrho\sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{\,-1}_\mathfrak{t}\log Q'_\mathfrak{t},$$

in dem oben dargelegten Sinne, bestehen, so resultirt, wenn zur Abkürzung:

$$\sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{\,-1}_\mathfrak{t} = S(Q),\quad \sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{\,-1}_\mathfrak{t}\log Q'_\mathfrak{t} = \overline{S}(Q) \tag{11}$$

gesetzt wird, die Congruenz:

$$\varrho\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right)k^{-1-\varrho} \equiv (1+\varrho C)S(Q) - \varrho\overline{S}(Q)\ \ (\mathrm{mod.}\,\varrho^2), \tag{12}$$

und aus den beiden Congruenzen (10) und (12) folgt endlich, dass:

$$2\pi(1+\varrho C+\varrho\mathfrak{H}(D))S(Q) - 2\pi\varrho\overline{S}(Q) \tag{13}$$

das Aggregat der beiden ersten Glieder der Entwickelung des Ausdrucks (7) nach steigenden Potenzen von ϱ darstellt, oder, was dasselbe ist,

dass die beiden Ausdrücke (7) und (13) einander *modulo* ϱ^2 congruent sind.

Um nun das Aggregat der beiden ersten Glieder in der Entwickelung des Ausdrucks (8) nach steigenden Potenzen von ϱ darzustellen, gehe ich von der im art. XV mit (18) bezeichneten Gleichung aus, indem ich dieselbe in dem obigen Sinne als Congruenz *modulo* ϱ^2 folgendermaassen fasse:

$$\varrho(4ac-b^2)^{\frac{1}{2}(1+\varrho)}\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\varrho}$$
$$\equiv 2\pi\big(1+2\varrho C+2\varrho\log 2\pi-\varrho\log\Lambda'(0,0,w_1,w_2)\big)$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man von den Relationen:

$$D_0Q_\mathfrak{t}^2 = b_\mathfrak{t}^2 - 4a_\mathfrak{t}c_\mathfrak{t},\quad D = D_0Q_\mathfrak{t}^2Q'^{2}_\mathfrak{t}$$

Gebrauch macht, die Congruenz *modulo* ϱ^2:

$$\varrho(-D)^{\frac{1}{2}(1+\varrho)}Q'^{\,-1-\varrho}_\mathfrak{t}\sum_{m,n}(a_\mathfrak{t}m^2+b_\mathfrak{t}mn+c_\mathfrak{t}n^2)^{-1-\varrho}$$
$$\equiv 2\pi\big(1+2\varrho C+2\varrho\log\pi-\varrho\log\Lambda'(0,0,w_1^{(\mathfrak{t})},w_2^{(\mathfrak{t})})\big),$$

in welcher für $w_1^{(\mathfrak{t})}, -w_2^{(\mathfrak{t})}$ die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$a_\mathfrak{t}+b_\mathfrak{t}w+c_\mathfrak{t}w^2=0$$

zu nehmen sind. Der oben mit (8) bezeichnete Ausdruck wird demnach *modulo* ϱ^2 congruent dem Ausdrucke:

$$2\pi\sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}\frac{Q'^{\,-1-\varrho}_\mathfrak{t}}{K(D_0Q_\mathfrak{t}^2)}\sum_{a_\mathfrak{t},b_\mathfrak{t},c_\mathfrak{t}}\big(1+2\varrho C+2\varrho\log 2\pi-\varrho\log\Lambda'(0,0,w_1^{(\mathfrak{t})},w_2^{(\mathfrak{t})})\big),$$

und dieser kann, da $K(D_0Q_\mathfrak{t}^2)$ die Anzahl der Formen $(a_\mathfrak{t}, b_\mathfrak{t}, c_\mathfrak{t})$ bedeutet, *so* dargestellt werden:

$$2\pi(1+2\varrho C+2\varrho\log 2\pi)\sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}Q'^{\,-1-\varrho}_\mathfrak{t} - 2\pi\varrho\sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}\frac{Q'^{\,-1-\varrho}_\mathfrak{t}}{K(D_0Q_\mathfrak{t}^2)}\sum_{a_\mathfrak{t},b_\mathfrak{t},c_\mathfrak{t}}\log\Lambda'(0,0,w_1^{(\mathfrak{t})},w_2^{(\mathfrak{t})}). \tag{14}$$

Ersetzt man hierin $Q'^{\,-1-\varrho}_\mathfrak{t}$ durch $Q'^{\,-1}_\mathfrak{t} - \varrho Q'^{\,-1}_\mathfrak{t}\log Q'_\mathfrak{t}$ und benutzt die oben unter (11) eingeführten Bezeichnungen, so zeigt sich, dass der Ausdruck (14), und also auch der Ausdruck (8), *modulo* ϱ^2 dem folgenden congruent ist:

$$2\pi(1+2\varrho C+2\varrho\log 2\pi)S(Q) - 2\pi\varrho\overline{S}(Q) \tag{15}$$
$$-2\pi\varrho\sum_{\mathfrak{t}}\varepsilon_{Q'_\mathfrak{t}}\frac{1}{Q'_\mathfrak{t}\cdot K(D_0Q_\mathfrak{t}^2)}\sum_{a_\mathfrak{t},b_\mathfrak{t},c_\mathfrak{t}}\log\Lambda'(0,0,w_1^{(\mathfrak{t})},w_2^{(\mathfrak{t})}).$$

Nun hat sich oben gezeigt, dass die Ausdrücke (7) und (13) einander *modulo* ϱ^2 congruent sind, und schon am Schlusse des § 1 hat sich ergeben, dass die Werthe der beiden Ausdrücke (7) und (8) an sich, d. h. nicht bloss *modulo* ϱ^2, mit einander übereinstimmen; es folgt demnach,

dass die beiden Ausdrücke (13) und (15) einander *modulo* ϱ^2 congruent sind, und deren Vergleichung liefert unmittelbar die gesuchte Darstellung der Function $\mathfrak{H}$ für beliebige Discriminanten D durch die Invarianten Λ':

$$(16)\qquad \mathfrak{H}(D) = C + \log 4\pi^2 - \frac{1}{S(Q)}\sum_{\mathfrak{t}} \varepsilon_{Q'_{\mathfrak{t}}} \frac{1}{Q'_{\mathfrak{t}}\cdot K(D_0 Q_{\mathfrak{t}}^{2})} \sum_{a_{\mathfrak{t}},\, b_{\mathfrak{t}},\, c_{\mathfrak{t}}} \log \Lambda'\left(0,\, 0,\, w_1^{(\mathfrak{t})},\, w_2^{(\mathfrak{t})}\right),$$

welche mit der specielleren im art. XVII (11) angegebenen für den Fall $D = D_0$, $Q = 1$ übereinkommt.

§ 3.

Die Gleichung (16) ist leicht in folgende zu transformiren:

$$(17)\qquad \mathfrak{H}(D) = C - \frac{1}{\varphi(Q)}\sum_{\mathfrak{t}} \varepsilon_{Q'_{\mathfrak{t}}} \frac{Q_{\mathfrak{t}}}{K(D_0 Q_{\mathfrak{t}}^{2})} \sum_{a_{\mathfrak{t}},\, b_{\mathfrak{t}},\, c_{\mathfrak{t}}} \log \frac{1}{4\pi^2}\Lambda'\left(0,\, 0,\, w_1^{(\mathfrak{t})},\, w_2^{(\mathfrak{t})}\right),$$

in welcher unter $\varphi(Q)$ in der üblichen *Gauss*'schen Weise der Werth von:

$$Q\prod\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

zu verstehen und die Multiplication auf alle verschiedenen, in Q enthaltenen Primzahlen zu erstrecken ist.

Die eigentliche Bedeutung dieser Relation tritt klarer hervor, wenn man den *Gauss*'schen Begriff der „Ordnung" der verschiedenen zu einer Discriminante gehörigen Formenclassen zu Hülfe nimmt. Vereinigt man nämlich alle diejenigen quadratischen Formen:

$$ax^2 - bxy + cy^2$$

in einer und derselben „Ordnung", für welche die drei Coefficienten a, b, c einen und denselben grössten gemeinsamen Theiler t haben, so bilden die Formen:

$$\left(a_{\mathfrak{t}} Q'_{\mathfrak{t}},\; b_{\mathfrak{t}} Q'_{\mathfrak{t}},\; c_{\mathfrak{t}} Q'_{\mathfrak{t}}\right) \qquad (\mathfrak{t} = 1, 2, \ldots$$

der Discriminante D ein vollständiges System nicht aequivalenter Formen der durch den Theiler $Q'_{\mathfrak{t}}$ charakterisirten „Ordnung". Hiernach stellt der Ausdruck:

$$-\frac{1}{K(D_0 Q_{\mathfrak{t}}^{2})} \sum_{a_{\mathfrak{t}},\, b_{\mathfrak{t}},\, c_{\mathfrak{t}}} \log \frac{1}{4\pi^2}\Lambda'\left(0,\, 0,\, w_1^{(\mathfrak{t})},\, w_2^{(\mathfrak{t})}\right),$$

in welchem $w_1^{(\mathfrak{t})}$, $-w_2^{(\mathfrak{t})}$ als die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$a_{\mathfrak{t}} + b_{\mathfrak{t}} w + c_{\mathfrak{t}} w^2 = 0$$

definirt sind, den Mittelwerth des Logarithmus der Invariante:

$$\frac{4\pi^2}{\Lambda'\left(0, 0, \frac{-b+\sqrt{D}}{2c}, \frac{b+\sqrt{D}}{2c}\right)}$$

für die verschiedenen Classen (a, b, c) der durch $Q'_{\mathfrak{t}}$ charakterisirten „Ordnung" der Discriminante D dar. Bezeichnet man diesen Mittelwerth zur Abkürzung mit:

$$\log \mathrm{M}\left(\sqrt{D}, Q'_{\mathfrak{t}}\right)$$

so bedeutet $\mathrm{M}(\sqrt{D}, Q'_{\mathfrak{t}})$ das *geometrische* Mittel der Invariante:

$$(18)\qquad \frac{4\pi^2}{\Lambda'\left(0, 0, \frac{-b+\sqrt{D}}{2c}, \frac{b+\sqrt{D}}{2c}\right)}$$

für die durch $Q'_{\mathfrak{t}}$ charakterisirte „Ordnung", und die Relation (17) nimmt dann folgende übersichtliche Gestalt an:

$$(19)\qquad \mathfrak{H}(D) = C + \frac{Q}{\varphi(Q)}\sum_{t} \frac{\varepsilon_t \log \mathrm{M}(\sqrt{D}, t)}{t} \qquad (D = D_0 Q^2),$$

wo die Summation auf alle Divisoren t von Q zu erstrecken ist. Dabei ist daran zu erinnern, dass $\varepsilon_t = 0$ ist, wenn t irgend einen Primfactor mehrfach enthält, dass also nur diejenigen Divisoren von Q wirklich vorkommen, welche lauter von einander verschiedene Primfactoren enthalten.

Da die Argumente:

$$\frac{-b+\sqrt{D}}{2c},\quad \frac{b+\sqrt{D}}{2c}$$

der Functionen Λ', deren Mittelwerth für die durch $Q'_{\mathfrak{t}}$ charakterisirte Ordnung mit $\mathrm{M}(\sqrt{D}, Q'_{\mathfrak{t}})$ bezeichnet worden ist, einzig und allein von den Verhältnisswerthen:

$$b : c : \sqrt{D}$$

abhängen, so bleibt der Werth von $\mathrm{M}(\sqrt{D}, Q'_{\mathfrak{t}})$ ungeändert, wenn ein gemeinsamer Theiler beider Argumente weggelassen wird, d. h. es besteht, wenn D_0 irgendeine Fundamental-Discriminante ist und P, Q, R irgend welche ganze Zahlen bedeuten, die Relation:

$$(20)\qquad \mathrm{M}\left(\sqrt{D_0 P^2 Q^2 R^2}, PQ\right) = \mathrm{M}\left(\sqrt{D_0 Q^2 R^2}, Q\right).$$

In der Gleichung (19) ist daher $\mathrm{M}(\sqrt{D}, t)$ durch $\mathrm{M}\left(\frac{1}{t}\sqrt{D}, 1\right)$ zu ersetzen, und dieselbe nimmt, wenn dies geschieht und noch mit d der zu t complementäre Divisor bezeichnet wird, die Form an:

$$(21) \qquad \varphi(Q)\left(\mathfrak{H}(D_0 Q^2) - C\right) = \sum_{d,t} \varepsilon_t \, d \log \mathrm{M}(\sqrt{D_0 d^2}, 1) \qquad (dt = Q),$$

auf welche die im art. XI, § 2 hergeleiteten, einander correspondirenden Relationen:

$$f(Q) = \sum_{d,t} \varepsilon_t h(d), \quad h(Q) = \sum_d f(d) \qquad (dt = Q)$$

unmittelbar anwendbar sind.

Demnach folgt aus der Gleichung (21), dass:

$$Q \log \mathrm{M}(\sqrt{D_0 Q^2}, 1) = \sum_d \varphi(d)\left(\mathfrak{H}(D_0 d^2) - C\right)$$

ist, wenn die Summation rechts auf alle Divisoren d von Q ausgedehnt wird, und hieraus geht, wenn von der Relation $\sum_d \varphi(d) = Q$ Gebrauch gemacht wird, die Gleichung:

$$(22) \qquad C + \log \mathrm{M}\left(\sqrt{D_0 Q^2}, 1\right) = \frac{1}{Q} \sum_d \varphi(d)\, \mathfrak{H}(D_0 d^2)$$

hervor, welche die Darstellung des Mittelwerthes der Invariante (18) für die primitive Ordnung einer beliebigen Discriminante $D_0 Q^2$ durch die den verschiedenen Theiler-Discriminanten $D_0 d^2$ entsprechenden Functionen $\mathfrak{H}$ enthält. Die Werthe dieser verschiedenen Functionen $\mathfrak{H}$ lassen sich aber, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden soll, sämmtlich auf den der Fundamental-Discriminante entsprechenden Werth $\mathfrak{H}(D_0)$ zurückführen, und es kann damit eine Darstellung von $\log \mathrm{M}\left(\sqrt{D_0 Q^2}, 1\right)$ durch $\mathfrak{H}(D_0)$ *allein* erlangt werden.

§ 4.

Zu dem angegebenen Zwecke gehe ich von der Gleichung:

$$(23) \qquad \log \sqrt{-D} - \mathfrak{H}(D) = \frac{\overline{H}(D)}{H(D)} = \lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{D}{p}\right)}$$

aus, in welcher die Summation über alle Primzahlen p zu erstrecken ist, und welche, ganz ebenso wie die speciellere im Anfange des art. XVII, durch Differentiation der Gleichung:

$$\log \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum_p \log \left(1 - \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^{1+\varrho}}\right)^{-1}$$

nach ϱ entsteht.

Substituirt man auf der rechten Seite der Gleichung (22) für $\mathfrak{H}(D_0 d^2)$ gemäss (23) den Ausdruck:

$$\log \sqrt{-D_0 d^2} - \lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right)\left(\frac{d^2}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)}$$

und berücksichtigt, dass:

$$\sum_d \left(\frac{d^2}{p}\right) \varphi(d) = \frac{Q}{p^r}$$

ist, wenn die Summation auf alle Divisoren d von Q erstreckt und mit p^r die höchste in Q enthaltene Potenz von p bezeichnet wird, so kommt:

$$(24) \qquad C + \log \mathrm{M}(\sqrt{D}, 1) = \log \sqrt{-D_0} + \frac{1}{Q} \sum_d \varphi(d) \log d - \lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right) \frac{p^{-r} \log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)}.$$

Nun ist:

$$\sum_d \varphi(d) \log d = \sum_{h_1, h_2, \ldots} (h_1 \log q_1 + h_2 \log q_2 + \cdots)\, \varphi(q_1^{h_1})\, \varphi(q_2^{h_2}) \ldots,$$

wenn die Summation auf:

$$h_{\mathfrak{t}} = 1, 2, 3, \ldots r_{\mathfrak{t}} \qquad (\mathfrak{t} = 1, 2, \ldots)$$

erstreckt wird und $r_{\mathfrak{t}}$ den Exponenten der höchsten in Q enthaltenen Potenz von $q_{\mathfrak{t}}$ bezeichnet. In dieser Summe kommt $\log q_1$ mit:

$$\sum_{h_1} h_1 \varphi(q_1^{h_1}) \sum_{h_2, h_3, \ldots} \varphi(q_2^{h_2} q_3^{h_3} \ldots)$$

multiplicirt vor, und dieser Factor von $\log q_1$ ist gleich:

$$\frac{Q}{q_1^{r_1}} \sum_{h_1} h_1 \varphi(q_1^{h_1}) \quad \text{oder} \quad r_1 Q - \frac{1 - q_1^{-r_1}}{q_1 - 1} Q.$$

Es wird also:

$$\frac{1}{Q} \sum_d \varphi(d) \log d = \sum_{\mathfrak{t}} r_{\mathfrak{t}} \log q_{\mathfrak{t}} - \sum_{\mathfrak{t}} \frac{1 - q_{\mathfrak{t}}^{-r_{\mathfrak{t}}}}{q_{\mathfrak{t}} - 1} \log q_{\mathfrak{t}}$$

und folglich, da $\sum_k r_{\mathfrak{t}} \log q_{\mathfrak{t}} = \log Q$ ist, gemäss der Gleichung (24):

$$(25) \qquad C + \log \mathrm{M}(\sqrt{D}, 1) = \log \sqrt{-D} - \sum_q \frac{1 - q^{-r}}{q - 1} \log q - \lim_{\varrho=0} \sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right) \frac{p^{-r} \log p}{p^{1+\varrho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)},$$

wo sich die erstere, auf q bezügliche Summation nur auf alle in Q enthaltenen Primzahlen, die letztere, auf p bezügliche aber auf *alle* Primzahlen erstreckt. In der letzteren Summe ist $r=0$, sobald p nicht in Q enthalten und also keine der mit q bezeichneten Primzahlen ist. Man kann diese Summe daher auch *so* darstellen:

$$\lim_{\varrho=0}\sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right)\frac{\log p}{p^{1+\varrho}-\left(\frac{D_0}{p}\right)} - \sum_q \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1-q^{-r}}{q-\left(\frac{D_0}{q}\right)}\log q,$$

wo die erstere Summation auf *alle* Primzahlen, die letztere nur auf diejenigen zu erstrecken ist, welche in Q enthalten sind.

Die Gleichung (25) nimmt hiernach, wenn man zur Abkürzung:

$$\sum_q \left(1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\right)\frac{q^r-1}{q^r-q^{r-1}}\cdot\frac{\log q}{q-\left(\frac{D_0}{q}\right)} = \mathrm{Z}(D_0, Q) \tag{26}$$

setzt, folgende Gestalt an:

$$C+\log\frac{\mathrm{M}(\sqrt{D},1)}{\sqrt{-D}} + \mathrm{Z}(D_0, Q) = -\lim_{\varrho=0}\sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right)\frac{\log p}{p^{1+\varrho}-\left(\frac{D_0}{p}\right)}, \tag{27}$$

und es ist zur Erläuterung des mit $\mathrm{Z}(D_0, Q)$ bezeichneten Ausdrucks nochmals hervorzuheben, dass, wenn Q, als Product von Potenzen von Prinzahlen dargestellt, gleich:

$$q_1^{r_1} q_2^{r_2} q_3^{r_3}\cdots$$

ist, die Summation auf der linken Seite der Gleichung (26) sich auf die Werthe:

$$q = q_1, q_2, q_3, \ldots$$

und die zugehörigen Werthe:

$$r = r_1, r_2, r_3, \ldots$$

bezieht. Wird nunmehr in der Gleichung (27) die Summe auf der rechten Seite gemäss der obigen Formel (23) durch $\mathfrak{H}(D_0)$ ausgedrückt, so geht dieselbe in folgende über:

$$C+\log\frac{\mathrm{M}(\sqrt{D_0Q^2}, 1)}{Q} + \mathrm{Z}(D_0, Q) = \mathfrak{H}(D_0), \tag{28}$$

welche die oben angekündigte Darstellung von $\log \mathrm{M}(\sqrt{D_0Q^2}, 1)$ durch $\mathfrak{H}(D_0)$ *allein* enthält.

§ 5.

Für den Fall $D=D_0$, $Q=1$ wird $\mathrm{Z}(D_0, Q) = \mathrm{Z}(D_0, 1) = 0$, und die Gleichung (28) reducirt sich daher auf folgende:

$$C+\log \mathrm{M}(\sqrt{D_0}, 1) = \mathfrak{H}(D_0), \tag{28*}$$

welche mit der Formel (11) im art. XVII genau übereinstimmt.

Substituirt man nun in der Gleichung (28) für $\mathfrak{H}(D_0)$ den Ausdruck, welcher die linke Seite der Gleichung (28*) bildet, so resultirt die Formel:

$$\log\frac{\mathrm{M}(\sqrt{D},1)}{\sqrt{-D}} + \mathrm{Z}(D_0, Q) = \log\frac{\mathrm{M}(\sqrt{D_0},1)}{\sqrt{-D_0}}, \tag{29}$$

durch welche der Mittelwerth der Invariante (18) für die primitive Ordnung einer beliebigen Discriminante $D=D_0Q^2$ auf den der Fundamentaldiscriminante D_0 entsprechenden zurückgeführt wird. Zugleich zeigt die Formel (29),

dass der Ausdruck:

$$\log\frac{\mathrm{M}(\sqrt{D_0Q^2},1)}{\sqrt{-D_0Q^2}} + \mathrm{Z}(D_0, Q)$$

für alle Werthe von Q, d. h. also für alle Discriminanten $D=D_0Q^2$, welchen dieselbe Fundamentaldiscriminante D_0 entspricht, einen und denselben Werth hat.

Man kann die Formel (29) aber auch zur Vergleichung solcher Werthe von M verwenden, welche verschiedenen *Ordnungen* derselben Discriminante entsprechen.

Bedeutet nämlich, wie vorher, D_0 irgend eine Fundamentaldiscriminante, Q irgend eine ganze Zahl und sind d, t ebenso wie d_1, t_1 mit einander complementäre Divisoren von Q, so dass:

$$dt = d_1t_1 = Q$$

wird, so ist gemäß der Formel (20), wenn, wie oben, $D=D_0Q^2$ gesetzt wird:

$$\mathrm{M}(\sqrt{D}, t) = \mathrm{M}(\sqrt{D_0d^2}, 1),\quad \mathrm{M}(\sqrt{D}, t_1) = \mathrm{M}(\sqrt{D_0d_1^2}, 1)$$

und alsdann gemäß der Formel (29):

$$\log\frac{\mathrm{M}(\sqrt{D}, t)}{\sqrt{-D_0d^2}} + \mathrm{Z}(D_0, d) = \log\frac{\mathrm{M}(\sqrt{D}, t_1)}{\sqrt{-D_0d_1^2}} + \mathrm{Z}(D_0, d_1).$$

Diese Gleichung kann aber auch *so* dargestellt werden:

(30) $$\log t\,\mathrm{M}(\sqrt{D}, t) + \mathrm{Z}\left(D_0, \frac{1}{t}\sqrt{\frac{D}{D_0}}\right) = \log t_1\,\mathrm{M}(\sqrt{D}, t_1) + \mathrm{Z}\left(D_0, \frac{1}{t_1}\sqrt{\frac{D}{D_0}}\right),$$

und es zeigt sich daher,

dass der Ausdruck:

$$\log t\,\mathrm{M}(\sqrt{D}, t) + \mathrm{Z}\left(D_0, \frac{1}{t}\sqrt{\frac{D}{D_0}}\right)$$

für alle Werthe von t, d. h. also für alle verschiedenen Ordnungen der quadratischen Formen der Discriminante D einen und denselben Werth hat.

Nun ist nach der oben im § 3 aufgestellten Definition:

$$\log \mathrm{M}(\sqrt{D}, t) = -\frac{1}{K\left(\frac{D}{t^2}\right)} \sum_{a,b,c} \log \frac{1}{4\pi^2} \Lambda'\left(0, 0, \frac{-b+\sqrt{D}}{2c}, \frac{b+\sqrt{D}}{2c}\right),$$

wenn über ein System unter einander nicht aequivalenter Formen (a, b, c) der Discriminante D summirt wird, in welchen a, b, c den grössten gemeinsamen Theiler t haben, welche also die verschiedenen Classen der durch t charakterisirten Ordnung repraesentiren. Ferner ist gemäss der Formel (15) im art. XV:

$$-\log \frac{1}{4\pi^2} \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = \frac{\pi\sqrt{-D}}{6c} - \log \frac{\sqrt{-D}}{c} - 2 \log \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - e^{2nw_1\pi i})(1 - e^{2nw_2\pi i});$$
$$\left(w_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2c},\; w_2 = \frac{b+\sqrt{D}}{2c}\right)$$

das in der Gleichung (30) enthaltene Resultat ist daher, wenn man auf die Bedeutung der Bezeichnungen M, Z zurückgeht, folgendermaassen zu fassen:

Versteht man unter (a, b, c) quadratische Formen der Discriminante D, welche die sämmtlichen Classen einer bestimmten, durch den Theiler t charakterisirten Ordnung repraesentiren, unter $K(D, t)$ die Anzahl dieser Classen, unter D_0 die der Discriminante D entsprechende Fundamentaldiscriminante, unter w diejenige Wurzel der Gleichung $a + bw + cw^2 = 0$, für welche der reelle Theil von wi negativ ist, und wird durch:

(31) die ganze Zahl: $$\frac{q_1^{r_1} q_2^{r_2} q_3^{r_3} \cdots}{\sqrt{\frac{D}{D_0 t^2}}}$$

als Product von Potenzen verschiedener Primzahlen dargestellt, so hat das Aggregat:

$$\frac{1}{K(D, t)} \sum_{a,b,c} \left\{ \frac{\pi\sqrt{-D}}{6c} - \log \frac{\sqrt{-D}}{ct}\, 4 \log \prod_{n=1}^{n=\infty} \left| 1 - e^{2nw\pi i} \right| \right\}$$
$$+ \sum_{q,r} \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\right) \frac{q^r - 1}{q^r - q^{r-1}} \cdot \frac{\log q}{q - \left(\frac{D_0}{q}\right)} \qquad \left({q = q_1, q_2, \ldots \atop r = r_1, r_2, \ldots}\right)^{*)}$$

für jede der verschiedenen Ordnungen einen und denselben Werth.

In ganz analoger Weise kann der Inhalt der im art. VIII mit ($\mathfrak{D}$) bezeichneten Gleichung:

($\mathfrak{D}$) $$\frac{K(D)}{K(D_0)} = Q\left(\prod_q \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right) \frac{\log E(D_0)}{\log E(D)}\right.$$

folgendermaassen formulirt werden:

Versteht man unter $K(D, t)$ die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen der durch t charakterisirten Ordnung der Discriminante D, unter $E\left(\frac{D}{t^2}\right)$ die Fundamentaleinheit:

$$\frac{1}{r}\left(T + U\sqrt{\frac{D}{t^2}}\right), \qquad (r = 1, 2)$$

d. h. diejenige Einheit, durch deren *ganze* Potenzen sich sämmtliche Einheiten von der Form:

(32) $$\frac{1}{r}\left(T' + U'\sqrt{\frac{D}{t^2}}\right) \qquad (r = 1, 2)$$

darstellen lassen, so hat der Ausdruck:

$$tK(D, t) \prod \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)^{-1} \log E\left(\frac{D}{t^2}\right),$$

in welchem die Multiplication auf alle verschiedenen, in der ganzen Zahl $\frac{D}{t^2}$ enthaltenen Primzahlen q zu erstrecken ist, für jede der verschiedenen durch t charakterisirten Ordnungen einen und denselben Werth.

*) Bei der Summation sind, wie oben, stets nur die zusammengehörigen Werthe $q = q_\mathfrak{r}, r = r_\mathfrak{r}$ zu nehmen.

Da nun die Gleichung ($\mathfrak{O}$), und also auch die hier angegebene Formulirung ihres Inhalts, nur als eine etwas modificirte Darstellung jener *Gauss*'schen Sätze im art. 256 der *Disquisitiones arithmeticae*[1]) zu betrachten ist, welche die Vergleichung der Anzahl der in den verschiedenen Ordnungen enthaltenen Classen quadratischer Formen betreffen, so lässt die obige (mit (31) bezeichnete) Fassung des Inhalts der Gleichung (30) deutlich erkennen, dass das darin entwickelte, aus der Theorie der elliptischen Functionen geschöpfte Ergebniss, welches die Vergleichung der Mittelwerthe der Invariante Λ' für die verschiedenen Ordnungen quadratischer Formen betrifft, sich ebenso unmittelbar als ein neues Resultat jenen älteren *Gauss*'schen anreiht, wie die im art. XVI in der Gleichung (7) ausgedrückte Relation zwischen den Werthen gewisser Reihen und den Mittelwerthen der Invariante Λ' für quadratische Formen primitiver Ordnungen an die bezüglichen *Dirichlet*'schen Resultate anknüpfte.

§ 6.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dass in der Gleichung (29) wundersame Beziehungen zwischen Zahlenausdrücken enthalten sind, und dass deren Eigenart leichter erkennbar wird, wenn man die *angenäherten* Werthe von Λ' benutzt.

Wird nämlich für den letzten Theil des Ausdrucks:

$$\frac{1}{K(D)}\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{-D}}{6c}-\log\frac{\sqrt{-D}}{c}\right)-\frac{2}{K(D)}\sum_{a,b,c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\log\left(1-e^{2n w_1 \pi i}\right)\left(1-e^{2n w_2 \pi i}\right),$$

welcher den Werth von $\log \mathrm{M}(\sqrt{D},1)$ darstellt, die Reihenentwickelung substituirt, so resultirt die Gleichung:

$$K(D)\cdot\log \mathrm{M}(\sqrt{D},1)=\sum_{a,b,c}\left\{\frac{\pi\sqrt{-D}}{6c}-\log\frac{\sqrt{-D}}{c}+4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}S_d(n)\,e^{\frac{-n\pi\sqrt{-D}}{c}}\cos\frac{nb\pi}{c}\right\},$$

in welcher $S_d(n)$ die Summe der Divisoren von n bedeutet. Es stellt also, wenn zur Abkürzung:

$$\Phi(D_0Q^2)=\frac{1}{K(D_0Q^2)}\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi Q\sqrt{-D}}{6c}-\log\frac{-D}{c}\right)+\mathrm{Z}(D_0,Q)$$

$$\Psi(D_0Q^2)=\frac{4}{K(D_0Q^2)}\sum_{a,b,c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}S_d(n)\,e^{\frac{-n\pi\sqrt{-D}}{c}}\cos\frac{nb\pi}{c}$$

[1]) *Gauss*, Werke, Bd. I, S. 279.

gesetzt wird, das Aggregat:

$$\Phi(D_0Q^2)+\Psi(D_0Q^2)$$

jenen Ausdruck dar, welcher gemäss der Gleichung (29) für alle Zahlen Q einen und denselben Werth hat, und die hiernach für zwei beliebige ganze Zahlen Q, $\mathfrak{Q}$ geltende Formel:

$$\Phi(D_0Q^2)+\Psi(D_0Q^2)=\Phi(D_0\mathfrak{Q}^2)+\Psi(D_0\mathfrak{Q}^2)$$

liefert offenbar eine unendliche Reihe von Relationen zwischen Zahlenausdrücken, die aus ganz verschiedenen Elementen gebildet sind.

Um nun den Charakter dieser Relationen deutlicher hervortreten zu lassen, will ich angenäherte Werthe von $\Psi(D_0Q^2)$ entwickeln.

Zu diesem Zweck bemerke ich zuvörderst, dass:

$$S_d(n)<n^2$$

ist. Denn wenn n als Product von Primzahlpotenzen in der Form:

$$n=p_1^{h_1}p_2^{h_2}p_3^{h_3}\cdots$$

dargestellt ist, so wird:

$$S_d(n)=\prod_{p,h}\frac{p^{h+1}-1}{p-1},$$

und da:

$$p^{2h}-\frac{p^{h+1}-1}{p-1}=\frac{p^h-1}{p-1}\left(p^{h+1}-p^{h}-1\right)>0$$

ist, so zeigt sich, dass in der That:

$$S_d(n)<\prod_{p,h}p^{2h},\ \text{also}\ S_d(n)<n^2$$

sein muss. Hiernach ergiebt sich die Ungleichheit:

$$\left|\sum_{n=k}^{n=\infty}\frac{1}{n}S_d(n)\,e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}}\cos\frac{nb\pi}{c}\right|<\sum_{n=k}^{n=\infty}n\,e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}}.$$

Nun ist offenbar für einen positiven echten Bruch x:

$$\sum_{n=k}^{n=\infty}nx^n<kx^k\sum_{n=k}^{n=\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{n-k}x^{n-k}=\frac{k^2x^k}{k-(k+1)x},$$

und wenn $x < e^{-\pi\sqrt{3}} < 0.00433343$ ist:

$$\sum_{n=k}^{n=\infty} n x^n < 1.01 \cdot k x^k.$$

Es findet daher die Ungleichheit:

$$\left| \sum_{n=k}^{n=\infty} \frac{1}{n} S_d(n) e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c} \right| < 1.01 \cdot k e^{-\frac{k\pi\sqrt{-D}}{c}}$$

statt, sobald in den Ausdrücken von $\Phi(D_0Q^2)$, $\Psi(D_0Q^2)$ nur *reducirte* Formen (a, b, c) d. h. solche genommen werden, für welche:

$$|b| \leqq c \leqq a \quad \text{und folglich} \quad \frac{\pi\sqrt{-D}}{c} \geqq \pi\sqrt{3}$$

ist. Dies vorausgesetzt, wird also $\Psi(D_0Q^2)$ gleich:

$$\frac{4}{K(D_0Q^2)} \sum_{a,b,c} \sum_{n=1}^{n=k-1} \frac{1}{n} S_d(n) e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c} + \varepsilon \frac{4.04 \cdot k}{K(D_0Q^2)} \sum_{a,b,c} e^{-\frac{k\pi\sqrt{-D}}{c}},$$

wo ε zwischen ± 1 liegt, und man kann nun entweder für jeden bestimmten Werth von D die Zahl k so gross wählen, dass der mit ε multiplicirte Werth vernachlässigt werden kann, oder man kann von vorn herein k so gross annehmen, dass diese Vernachlässigung für *jeden* Werth von D bei den vorgeschriebenen Genauigkeitsgrenzen statthaft erscheint. Da nämlich für die reducirten Formen stets:

$$e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}} < e^{-\pi\sqrt{3}}$$

ist, so kann der Werth des mit ε multiplicirten Ausdrucks für $k = 3$ nur Einheiten der sechsten Decimale und für $k = 4$ sogar nur Einheiten der neunten Decimale betragen.

Wählt man $k = 3$, so wird:

$$\psi(D_0Q^2) = \frac{1}{K(D_0Q^2)} \sum_{a,b,c} \left(4e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{b\pi}{c} + 6e^{-\frac{2\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{2b\pi}{c} + \varepsilon \cdot 12.12 e^{-\frac{3\pi\sqrt{-D}}{c}}\right),$$

für $k = 2$ dagegen:

$$\psi(D_0Q^2) = \frac{1}{K(D_0Q^2)} \sum_{a,b,c} \left(4e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{b\pi}{c} + \varepsilon \cdot 8.08 e^{-\frac{2\pi\sqrt{-D}}{c}}\right),$$

und endlich für $k = 1$:

$$\psi(D_0Q^2) = \frac{\varepsilon \cdot 4.04}{K(D_0Q^2)} \sum_{a,b,c} e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}}.$$

Man kann aber hier den Factor 4.04 bei genauerer Discussion der bezüglichen Ungleichheiten noch bis auf etwa 4.026 verkleinern. Dann ist freilich der Werth dieses Factors immer noch um 0.026 grösser als der im art. XVII angewendete. Doch hat der Unterschied auf die dort entwickelten Resultate keinen anderen Einfluss, als dass die Genauigkeitsgrenzen der Zahlenangaben ein wenig modificirt werden. Auch a. a. O. würde übrigens statt des kleineren Factors 4 der Factor 4.026 ermittelt worden sein, wenn, wie es geschehen musste, für den *absoluten* Werth:

$$|\log(1 + Re^{vi})(1 + Re^{-vi})|$$

die Grenze $|2\log(1 - R)|$, die derselbe wirklich erreichen kann, berücksichtigt worden wäre.

Bei der Beschränkung auf angenäherte Werthe von $\Psi(D_0Q^2)$ lässt sich nun der Inhalt der Gleichungen (29) oder (30) dahin formuliren,

dass die zwischen den beiden Werthen des Ausdrucks:

$$\Phi(D_0Q^2) + \frac{4}{K(D_0Q^2)} \sum_{n=1}^{n=k-1} \frac{1}{n} S_d(n) e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c} \pm \frac{4.04 \cdot k}{K(D_0Q^2)} \sum_{a,b,c} e^{-\frac{k\pi\sqrt{-D}}{c}}$$

liegenden Intervalle für alle verschiedenen ganzen Zahlen Q einen gemeinschaftlichen Theil haben müssen.

§ 7.

Um die vorstehenden Ausführungen an einigen Zahlenbeispielen zu erläutern, nehme ich zuerst $D_0 = -3$. Dann ist für $Q = 1$, $Q = 2$ und $Q = 3$ nur je eine reducirte Form vorhanden:

$$(1, 1, 1), \quad (3, 0, 1), \quad (7, 1, 1),$$

und für $Q = 1$ wird:

$$\Phi(-3) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \log 3 = -0.19171229\ldots,$$

$$\Psi(-3) = -4e^{-\pi\sqrt{3}} + 6e^{-2\pi\sqrt{3}} + \cdots = -0.01722105\ldots;$$

also ist mit einer Unsicherheit von Einheiten in der sechsten Decimale:

$$\varphi(-3) + \psi(-3) \text{ annähernd } = -0.208933.$$

Für $Q = 2$ wird:

$$\Phi(-12) = \frac{\pi\sqrt{12}}{6} - \log 12 + \frac{2\log 2}{3} = -0.20900865\ldots,$$

$$\psi(-12) = 4e^{-2\pi\sqrt{3}} + \cdots = 0.000075,$$

also:

$$\varphi(-12) + \psi(-12) \text{ annähernd } = -0.208933.$$

Für $Q = 3$ wird:

$$\Phi(-27) = \frac{\pi\sqrt{27}}{6} - \log 27 + \frac{\log 3}{3} = -0.208933\ldots;$$

$\Psi(-27)$ ist auf die ersten 6 Decimalen ohne Einfluss.

Die drei ganz verschieden zusammengesetzten Ausdrücke:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \log 3 - 4e^{-\pi\sqrt{3}} + 6e^{-2\pi\sqrt{3}},$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 3 - \frac{4}{3}\log 2 + 4e^{-2\pi\sqrt{3}},$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{8}{3}\log 3,$$

haben also einen annähernd gleichen, in den ersten 5 Decimalen sicher übereinstimmenden Werth, und es lassen sich daraus offenbar auch angenäherte Gleichungen zwischen π, $e^{-\pi\sqrt{3}}$, $\log 2$, $\log 3$ ableiten. So erhält man z. B. das Resultat, dass

$$-x^2 - 2x + \frac{4}{3}\log 2 - \frac{5}{6}\log 3 \text{ annähernd } = 0,$$

nämlich positiv und kleiner als 0.0000004 ist, wenn $x = e^{-\pi\sqrt{3}}$ gesetzt wird.

Ich nehme jetzt zweitens $D_0 = -4$ und dann $Q = 1$, $Q = 5$ und $Q = 13$. Die reducirten Formen sind

für $Q = 1$, also $D = -4$: $(1, 0, 1)$,

für $Q = 5$, $D = -100$: $(25, 0, 1)$, $(13, 2, 2)$,

für $Q = 13$, $D = -4 \cdot 13^2$:

$(169, 0, 1)$, $(85, 2, 2)$, $(34, \pm 2, 5)$, $(17, \pm 2, 10)$.

Es wird demnach für $Q = 1$:

$$\Phi(-4) = \frac{\pi\sqrt{4}}{6} - \log 4 = -0.339097\ldots,$$

$$\Psi(-4) = 4e^{-2\pi} + 6e^{-4\pi} = 0.0074907,$$

also:

$$\Phi(-4) + \Psi(-4) \text{ annähernd } = -0.331606.$$

Für $Q = 5$ wird:

$$\Phi(-100) = \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2 - \log 100 = -0.33160627\ldots;$$

$\Psi(-100)$ ist auf die ersten 6 Decimalen ohne Einfluss.

Für $Q = 13$ wird:

$$\Phi(-4 \cdot 13^2) = \frac{91}{60}\pi + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{3}{2}\log 2 - 2\log 13 = -0.3319120\ldots,$$

$$\Psi(-4 \cdot 13^2) = \frac{4}{3}e^{-2,6\cdot\pi}\cos\frac{\pi}{5} + \cdots = 0.000306\ldots,$$

wobei zu bemerken ist, dass die übrigen Glieder des Ausdrucks von $\Psi(-4 \cdot 13^2)$ weggelassen sind, weil sie auf die ersten 6 Decimalen keinen Einfluss haben. Es ist daher:

$$\Phi(-4 \cdot 13^2) + \Psi(-4 \cdot 13^2) \text{ annähernd } = -0.331606,$$

und die Werthe der drei Ausdrücke:

$$\frac{\pi}{3} - 2\log 2 + 4e^{-2\pi} + 6e^{-4\pi},$$

$$\frac{5\pi}{4} - \frac{3}{2}\log 2 - 2\log 5,$$

$$\frac{91\pi}{60} - \frac{3}{2}\log 2 + \frac{2}{3}\log 5 - 2\log 13 + \frac{4}{3}e^{-2,6\cdot\pi}\cos\frac{\pi}{5},$$

stimmen also in den ersten 6 Decimalen mit einander überein.

Endlich nehme ich $D_0 = -7$ und dann $Q = 1$, $Q = 2$, $Q = 3$. Die reducirten Formen sind:

für $Q = 1$ also $D = -7$: $(2, 1, 1)$,

für $Q = 2$ also $D = -28$: $(7, 0, 1)$,

für $Q = 3$ also $D = -63$: $(16, 1, 1)$, $(8, \pm 1, 2)$, $(4, 1, 4)$.

Es wird demnach für $Q = 1$:

$$\Phi(-7) = \frac{\pi\sqrt{7}}{6} - \log 7 = -0.560598\ldots,$$

$$\Psi(-7) = -4e^{-\pi\sqrt{7}} + \ldots = -0.000982\ldots,$$

also:

$$\Phi(-7) + \Psi(-7) \ \text{annähernd} \ = -0.561580\ldots$$

Für $Q = 2$ wird:

$$\Phi(-28) = \frac{\pi\sqrt{7}}{3} - \log 28 = -0.561580\ldots;$$

und $\Psi(-28)$ ist auf die ersten 6 Decimalen ohne Einfluss.

Für $Q = 3$ wird:

$$\Phi(-63) = \frac{9\sqrt{7}}{32}\pi + \log 2 - \frac{3}{2}\log 3 - \log 7 = -0.5629679\ldots,$$

$$\Psi(-63) = e^{\frac{-3\pi\sqrt{7}}{4}} \cos\frac{1}{4}\pi = 0.0013872\ldots,$$

also:

$$\Phi(-63) + \Psi(-63) = -0.5615807\ldots,$$

und die Werthe der drei Ausdrücke:

$$\frac{\pi\sqrt{7}}{6} - \log 7 - 4e^{-\pi\sqrt{7}},$$

$$\frac{\pi\sqrt{7}}{3} - \log 7 - \log 4,$$

$$\frac{9\pi\sqrt{7}}{32} - \log 7 + \log 2 - 3\log\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-3\pi\sqrt{7}}{4}},$$

stimmen daher in den ersten 6 Decimalen mit einander überein.

Aus der näherungsweisen Übereinstimmung der beiden ersten Ausdrücke folgt, dass die Gleichung:

$$\frac{1}{24}x + e^{-x} = \log\sqrt{2}$$

näherungsweise durch den Werth $x = \pi\sqrt{7}$ befriedigt wird; aus der *absoluten* Übereinstimmung der beiden Ausdrücke:

$$\Phi(-7) + \Psi(-7), \ \Phi(-28) + \Psi(-28)$$

ergiebt sich für $x = \pi\sqrt{7}$ die Relation:

$$\frac{1}{24}x + \log\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1 - e^{-(2n+1)x}\right) = \log\sqrt{2},$$

aus welcher bei Anwendung der Formel (4) im art. 36 von *Jacobi's Fundamenta*[1]) unmittelbar hervorgeht, dass für $\frac{K'}{K} = \sqrt{7}$:

$$16\varkappa\varkappa' = 1, \ \text{also} \ \varkappa = \frac{3+\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$$

wird. Dabei ist zu bemerken, dass dieses bekannte specielle Resultat, ebenso wie das in der Gleichung (29) enthaltene allgemeine, der Theorie der Transformationen der singulären elliptischen Functionen angehört.

XIX.

Ich will hier einige Bemerkungen über die Function $\varLambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$, welche den Ausgangspunkt für alle vorhergehenden Entwickelungen gebildet hat, einschalten, um mich im Folgenden darauf beziehen zu können. Die im art. I aufgestellte Definitionsgleichung:

$$\text{(1)} \qquad \varLambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \left(4\pi^2\right)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i} \cdot \frac{\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2)}{\left(\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{1}{3}}}$$

kann mit Hülfe der im art. XV mit (14) bezeichneten Relation:

$$\varLambda'(0, 0, w_1, w_2) = \frac{4\pi^2}{c_0}\left(\frac{\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)}{4\pi^2}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (c_0(w_1 + w_2) = i)$$

in folgende transformirt werden:

$$\text{(2)} \qquad \varLambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)\sqrt{\varLambda'(0, 0, w_1\ w_2)}$$
$$= 2\pi\left(\sqrt{-(w_1 + w_2)i}\right) e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2).$$

Wird für den Ausdruck auf der rechten Seite gemäss der mit $(\mathfrak{C}_0)$ bezeichneten Gleichung im art. III die Reihenentwickelung eingesetzt, so resultiert die Formel:

$$\text{(3)} \quad \varLambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)\sqrt{\varLambda'(0, 0, w_1, w_2)} = 2\pi\sum_{m,n}(-1)^{mn+m+n} e^{-(a_0m^2 + b_0mn + c_0n^2)\pi + 2(m\sigma + n\tau)\pi i},$$

in welcher die Summation auf *alle* ganzzahligen Werthe von m und n, d. h. also für m und n von $-\infty$ bis $+\infty$, zu erstrecken ist und a_0, b_0, c_0 durch die Gleichungen:

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 146. H

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = c_0 (w - w_1)(w + w_2), \quad 4 a_0 c_0 - b_0^2 = 1$$

bestimmt sind. Nun ist gemäss der im art. XV mit (16) bezeichneten Formel:

$$(4) \quad \sqrt{\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)} = 2\pi \left[\sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} (a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2) e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi} \right]^{\frac{1}{3}},$$

und das System der beiden Formeln (3) und (4) liefert daher zugleich für beide Functionen:

$$\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2), \quad \Lambda'(0, 0, w_1, w_2),$$

Definitionen, welche den Invariantencharakter in Evidenz treten lassen.

§ 1.

Die Function Λ kann als Product zweier Factoren aufgefasst werden, welche für sich einen gewissen Invariantencharakter haben. Bezeichnet man nämlich zur Abkürzung den Ausdruck:

$$\left(\frac{2\pi}{\vartheta'(0, w)}\right)^{\frac{1}{3}} e^{(\sigma + \tau w)\tau\pi i} \vartheta(\sigma + \tau w, w),$$

in welchem:

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0}$$

ist, mit:

$$A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

und definirt hierin a_0 durch die Gleichung $4 a_0 c_0 - b_0^2 = 1$, so wird:

$$\Lambda\left(\sigma, \tau, \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \frac{b_0 + i}{2c_0}\right) = A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0,) \cdot A(\sigma, -\tau, a_0, -b_0, c_0).$$

Da die drei Argumente a_0, b_0, c_0 durch eine Gleichung mit einander verbunden sind, so ist die mit *Alpha* bezeichnete Function in Wirklichkeit nur von vier Variabeln, oder, um dies sachgemässer auszudrücken, von zwei Paaren von Variabeln abhängig. Nach den bekannten, im art. I reproducirten Formeln ist sie als Product in folgender Weise darstellbar:

$$(5) \qquad A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = e^{\left(\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) w + \sigma\tau - \sigma + \frac{1}{3}\right)\pi i} \prod_{n,\varepsilon} \left(1 - e^{2(n w + \varepsilon\sigma + \varepsilon\tau w)\pi i}\right),$$

wo die Multiplication auf $\varepsilon = +1, \varepsilon = -1$ und für $\varepsilon = +1$ auf die Werthe $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, für $\varepsilon = -1$ aber nur auf die Werthe $n = 1, 2, 3, \ldots$ zu erstrecken ist.

Mit Hülfe der für die ϑ-Function geltenden Transformationsgleichungen:

$$\vartheta(\zeta, w + 1) = e^{\frac{1}{4}\pi i} \vartheta(\zeta, w),$$

$$\vartheta\left(\zeta, \frac{-1}{w}\right) = -i\left(\sqrt{-wi}\right) e^{\zeta^2 w\pi i} \vartheta(\zeta w, w),$$

$$\vartheta'\left(0, \frac{-1}{w}\right) = \left(\sqrt{-wi}\right)^3 \vartheta'(0, w),$$

welche in eben dieser Form schon für die Function $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ benutzt worden sind, ergiebt sich unmittelbar, dass:

$$(6) \qquad \begin{aligned} A(\sigma^{(1)}, \tau^{(1)}, a_0^{(1)}, b_0^{(1)}, c_0^{(1)}) &= e^{\frac{1}{6}\pi i} A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0), \\ A(\sigma^{(2)}, \tau^{(2)}, a_0^{(2)}, b_0^{(2)}, c_0^{(2)}) &= e^{\frac{1}{2}\pi i} A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0), \end{aligned}$$

wird, wenn:

$$\sigma^{(1)} = \sigma - \tau, \quad \tau^{(1)} = \tau, \quad a_0^{(1)} = a_0 + b_0 + c_0, \quad b_0^{(1)} = b_0 + 2c_0, \quad c_0^{(1)} = c_0,$$

$$\sigma^{(2)} = -\tau, \quad \tau^{(2)} = \sigma, \quad a_0^{(2)} = c_0, \quad b_0^{(2)} = -b_0, \quad c_0^{(2)} = a_0$$

ist. Hieraus folgt aber, dass allgemein:

$$(7) \qquad A(\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0') = e^{\frac{h}{6}\pi i} A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

wird, wenn die Transformationsrelationen:

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau, \quad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau, \quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1, \\ &a_0' = a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \\ &b_0' = 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', \\ &c_0' = a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2 \end{aligned}$$

erfüllt sind, in welchen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ganze Zahlen bedeuten. Denn die beiden Gleichungen (6) entsprechen den speciellen Fällen:

$$\alpha = 1, \quad \alpha' = 1, \quad \beta = 0, \quad \beta' = 1,$$

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = -1, \quad \beta = 1, \quad \beta' = 0,$$

und aus diesen beiden „elementaren" Substitutionssystemen lassen sich alle zusammensetzen. Demnach kann der Factor auf der rechten Seite der Gleichung (7) auch nur ein Product von Factoren $e^{\frac{1}{6}\pi i}$, $e^{\frac{1}{2}\pi i}$, wie sie in den Gleichungen (6) vorkommen, d. h. also nur eine zwölfte Wurzel der Einheit sein, und es kann daher h in der Gleichung (7) nur einen der Werthe:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, 6$$

haben. Die zwölfte Potenz der Function $A(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ bleibt folglich bei jeder der bezeichneten Transformationen ungeändert.

Die Beziehung zwischen zwei durch lineare Transformation aus einander entstehenden ϑ-Reihen wird durch die in der Gleichung (7) enthaltene Invarianteneigenschaft der Function *Alpha* in der elegantesten Weise dargestellt. Diese Function genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$w^2 \frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial\sigma} - 2w \frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial\tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial\tau\partial\tau} = ((\sigma + \tau w)\pi i)^2 A,$$

und ihr Logarithmus lässt sich, wie ich in einem späteren Abschnitte näher ausführen werde, nach derselben Methode in eine doppelt unendliche Reihe entwickeln, welche ich im art. I zur Entwickelung von $\log A(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ angewendet habe.

§ 2.

Im art. III ist die oben citirte Umformung des Ausdrucks:

$$(9) \qquad \left(\sqrt{-(w_1 + w_2)i}\right) e^{\tau^2 (w_1 + w_2)\pi i} \vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1) \vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2)$$

in die doppelt unendliche Reihe:

$$(10) \qquad \sum_{m,n} (-1)^{mn} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + (m(2\sigma+1) + n(2\tau+1))\pi i} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

zu dem Zwecke vorgenommen worden, den Invariantencharakter in Evidenz treten zu lassen. Aber es ist am Schlusse des erwähnten Abschnitts auch der andere Gesichtspunkt hervorgehoben worden, nach welchem eben dieselbe Umformung als eine Reduction der *Rosenhain*'schen ϑ-Reihe (10) auf einfache (*Jacobi*'sche) ϑ-Reihen aufgefasst werden kann. Unter diesem letzteren Gesichtspunkt erscheint die Frage natürlich, ob nicht auch die *Rosenhain*'sche ϑ-Reihe, welche entsteht, wenn man in der Reihe (10) das Zeichen $(-1)^{mn}$ weglässt, auf einfache ϑ-Reihen zurückführbar ist. Es zeigt sich, dass dies in der That der Fall ist, und dass auch dieselbe Methode zum Ziele führt, welche im art. III angewendet worden ist. Nur muss, wie sich von selbst versteht, der dort eingeschlagene Weg in entgegengesetzter Richtung verfolgt werden.

Ich gehe also von der *Rosenhain*'schen ϑ-Reihe:

$$(11) \qquad \sum_{m,n} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + 2(\sigma m + \tau n)\pi i} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

aus, setze wie in den früheren Abschnitten:

$$w_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \quad w_2 = \frac{b_0 + i}{2c_0},$$

und wende alsdann die im art. III ebenfalls benutzte Transformationsgleichung:

$$(12) \qquad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-\left(\frac{n^2}{w} - 2n\eta + n\right)\pi i} = \left(\sqrt{-wi}\right) \sum_{\nu} e^{w\pi i\left(\eta + \frac{1}{2}\nu\right)^2} \qquad (\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5$$

in *der* Weise an, dass ich darin:

$$2\eta = 2\tau + \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} m + 1 \quad \text{und} \quad w = w_1 + w_2$$

nehme. Hiernach verwandelt sich jene Reihe (11) in folgende[1]):

$$\left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}} \sum_{m,\nu} e^{\left(\frac{1}{4} w_1 (m+\nu+1)^2 + (\sigma + \tau w_1)(m+\nu+1) + \frac{1}{4} w_2 (m-\nu-1)^2 + (\sigma - \tau w_2)(m-\nu-1)\right)\pi i},$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \quad \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

in welcher an Stelle von $\nu + 1$ offenbar $2n$ gesetzt und dann auch in Beziehung auf n von $-\infty$ bis $+\infty$ summirt werden kann. Alsdann nimmt aber für jeden bestimmten Werth von $m + 2n$ die andere im Exponenten vorkommende Verbindung, $m - 2n$, genau alle diejenigen ganzzahligen Werthe an, welche dem Werthe von $m + 2n$ *modulo* 4 congruent sind. Es ergiebt sich also schließlich, dass die Reihe (11) sich in den Ausdruck:

$$(13) \qquad \left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}} \sum_{r=0}^{r=3} \sum_n e^{\left((4n+r)^2 \frac{w_1}{4} + (4n+r)(\sigma + \tau w_1)\right)\pi i} \sum_n e^{\left((4n+r)^2 \frac{w_2}{4} + (4n+r)(\sigma - \tau w_2)\right)\pi i}$$

transformiren lässt, in welchem die auf n bezüglichen Summationen auf alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $-\infty$ zu erstrecken sind. Dieser Ausdruck ist offenbar eine Summe von vier Producten je zweier einfacher (*Jacobi*'scher) ϑ-Reihen; dass derselbe bei den Transformationen, welche im § 1 mit (8) bezeichnet sind, ungeändert bleibt, tritt in seiner ursprünglichen Gestalt (11) deutlich hervor, aber es lässt sich

[1]) Vgl. Zusatz 6 am Ende dieses Bandes.

auch an der Form, in welcher er *hier* erscheint, mit Hülfe der Relation (12) darthun, wenn man die Reihe:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\left((4n+r)^2\frac{w}{4}+(4n+r)(\sigma+\tau w)\right)\pi i}$$

durch die ihrem Werthe nach damit übereinstimmende:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=3}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\left(n^2\frac{w}{4}+n(\sigma+\tau w)+\frac{1}{2}k(n-r)\right)\pi i}$$

ersetzt.

Bezeichnet man diese Reihe zur Abkürzung mit $R_r(\sigma, \tau, w)$, so ist:

$$R_0(\sigma, \tau, w) = \vartheta_3(2(\sigma+\tau w), 4w),\ R_2(\sigma, \tau, w) = \vartheta_2(2(\sigma+\tau w), 4w)$$

$$R_1(\sigma, \tau, w) = R_3(-\sigma, -\tau, w) = e^{\left(\frac{1}{4}w+\sigma+\tau w\right)\pi i}\vartheta_3(2(\sigma+\tau w)+w, 4w),$$

und durch die Formel:

$$(14)\quad \sum_{m,n} e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi+2(\sigma m+\tau n)\pi i} = \left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}}\sum_{r=0}^{r=3} R_r(\sigma, \tau, w_1)\, R_r(\sigma, -\tau, w_2)$$

wird alsdann die Zurückführung der *Rosenhain*'schen Reihe (11) auf einfache ϑ-Reihen dargelegt.

Setzt man darin $\sigma = \tau = 0$, so wird:

$$R_0(0, 0, w) = \vartheta_3(0, 4w),\quad R_2(0, 0, w) = \vartheta_2(0, 4w),$$
$$R_1(0, 0, w) = R_3(0, 0, w) = \frac{1}{2}\vartheta_2(0, w),$$

und also:

$$(15)\quad \sum_{m,n} e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi} = \left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| \Big\{\frac{1}{2}\vartheta_2(0, w_1)\vartheta_2(0, w_2) + \vartheta_2(0, 4w_1)\vartheta_2(0, 4w_2)$$
$$+ \vartheta_3(0, 4w_1)\vartheta_3(0, 4w_2)\Big\};$$

der in sehr einfacher Weise aus ϑ-Functionen gebildete Ausdruck auf der rechten Seite hat also genau dieselbe Invarianteneigenschaft wie $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$, nämlich für alle der Form (a_0, b_0, c_0) aequivalenten Formen (a_0', b_0', c_0') ungeändert zu bleiben, wenn die Werte w_1', w_2' mittels der Gleichungen:

$$w_1' = \frac{-b_0'+i}{2c_0'},\quad w_2' = \frac{b_0'+i}{2c_0'}$$

daraus entnommen werden.

Zur Vergleichung dieses Ausdrucks mit der Invariante $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$ führe ich hier die Relation:

$$(16)\quad \frac{1}{\pi}\sqrt{\Lambda'(0,0,w_1,w_2)} = \left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| \left(2\vartheta_0(0,w_1)\vartheta_0(0,w_2)\vartheta_2(0,w_1)\vartheta_2(0,w_2)\vartheta_3(0,w_1)\vartheta_3(0,w_2)\right)^{\frac{1}{3}}$$

an, welche aus den im art. XV mit (14) und (16) bezeichneten Gleichungen unter Berücksichtigung der schon in *Jacobi*'s *Fundamenta* angegebenen Beziehung*):

$$\vartheta'(0, w) = \pi\vartheta_0(0, w)\vartheta_2(0, w)\vartheta_3(0, w)$$

fliesst. Bei Anwendung der bereits im § 1 des art. XII gebrauchten *Jacobi*'schen Bezeichnungen geht aber der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (16) in folgenden über:

$$\left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right|\vartheta_3(0, w_1)\vartheta_3(0, w_2)(4\varkappa_1\varkappa_1'\varkappa_2\varkappa_2')^{\frac{1}{6}}.$$

Der aus *Rosenhain*'schen ϑ-Reihen gebildete Ausdruck:

$$(17)\quad \Big(4\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}f(m,n)e^{-\pi f(m,n)}\Big)^{-\frac{1}{3}}\sum_{m,n}e^{-\pi f(m,n)},$$
$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

in welchem, wie früher, $a_0m^2 + b_0mn + c_0n^2 = f(m, n)$ gesetzt ist, und welcher seine Invarianteneigenschaft klar zeigt, wird also gleich dem aus einfachen ϑ-Reihen gebildeten Ausdruck:

$$(18)\quad \frac{\frac{1}{2}\vartheta_2(0,w_1)\vartheta_2(0,w_2)+\vartheta_2(0,4w_1)\vartheta_2(0,4w_2)+\vartheta_3(0,4w_1)\vartheta_3(0,4w_2)}{(\varkappa_1\varkappa_1'\varkappa_2\varkappa_2')^{\frac{1}{6}}\vartheta_3(0,w_1)\vartheta_3(0,w_2)},$$

und dieser lässt sich mittels der Relationen:

$$\vartheta_0(0,w)(\vartheta_3(0,w))^{-1} = \sqrt{\varkappa'},\ \vartheta_2(0,w)(\vartheta_3(0,w))^{-1} = \sqrt{\varkappa},$$
$$2\vartheta_2(0, 4w) = \vartheta_3(0, w) - \vartheta_0(0, w),$$
$$2\vartheta_3(0, 4w) = \vartheta_3(0, w) + \vartheta_0(0, w),$$

in welchen der Einfachheit halber die Indices bei $w, \varkappa, \varkappa'$ weggelassen sind, als explicite algebraische Function von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ folgendermaassen darstellen:

$$\frac{1+\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}+\sqrt{\varkappa_1'\varkappa_2'}}{2(\varkappa_1\varkappa_1'\varkappa_2\varkappa_2')^{\frac{1}{6}}}.$$

---

*) Vergl. die Formel IV in meiner im Monatsbericht vom December 1881 abgedruckten Mittheilung[1]).

[1]) Bd. IV, S. 314 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

Die bemerkenswertheste Anwendung findet die Formel (15) bei der Summirung jener verallgemeinerten *Gauss*'schen Reihen, welche ich im art. X eingeführt habe. Wird nämlich in der dort mit (𝔚) bezeichneten Gleichung:

$$q = e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{-D}}}$$

gesetzt, so lässt sich die unendliche Reihe mittels der Formel (15) unmittelbar durch algebraische Functionen von singulären Moduln ausdrücken, und die Summation aller jener *Gauss*'schen Reihen wird demgemäss für den Fall singulärer elliptischer Functionen und solcher allgemeinerer ϑ-Quotienten, wie sie a. a. O. vorkommen, vollständig ausführbar. Ich werde dies in einer folgenden Mittheilung eingehend darlegen.

§ 3.

Die Methode, welche ich im art. III zur Umwandlung des Products:

$$e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2) \tag{1}$$

in eine *Rosenhain*'sche ϑ-Reihe benutzt und in entgegengesetzter Richtung im vorigen Paragraphen angewendet habe, führt auch zur Transformation des allgemeinen Products:

$$e^{(\tau_1^2 w_1+\tau_2^2 w_2+\sigma_1\tau_1+\sigma_2\tau_2)\pi i}\vartheta(\sigma_1+\tau_1 w_1, w_1)\vartheta(\sigma_2+\tau_2 w_2, w_2) \tag{2}$$

in eine doppelt unendliche ϑ-Reihe, welche einen analogen Charakter zeigt, wie die in der Gleichung (6) des art. XV für das Product (1) aufgestellte Reihe. Hier soll aber dieselbe Methode nur zur Transformation des specielleren Products:

$$e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\vartheta_0(\sigma-\tau w_2, w_2) \tag{3}$$

gebraucht werden.

Dieses Product lässt sich in der Form:

$$\sum_{\lambda, l} e^{\pi i\varphi(\lambda, l)} \qquad \begin{pmatrix}\lambda=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\\ l=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\end{pmatrix}$$

darstellen, wenn:

$$\varphi(\lambda, l)=\tau^2(w_1+w_2)+\frac{1}{4}\lambda^2 w_1+\lambda(\sigma+\tau w_1)-\frac{1}{2}\lambda+l^2 w_2-2l(\sigma-\tau w_2)+l$$

genommen wird. Setzt man nun:

$$\lambda=2n+1, \quad l=n+\frac{1}{2}(\mu+1),$$

$$\sigma=\frac{1}{2}(s+1), \quad \tau=\frac{1}{2}(t-1),$$

so entsteht eine zweifach unendliche Reihe, in welcher die Summationsbuchstaben n, μ die Werthe:

$$n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad \mu=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

annehmen. Transformirt man hierin die auf n bezügliche Summe mittels der Formel:

$$\sum_n e^{-n^2\frac{\pi}{c_0}+nx\pi i}=\left|\sqrt{c_0}\right|\sum_m e^{-\frac{1}{4}\pi c_0(x+2m)^2} \qquad (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots), \tag{4}$$

indem:

$$x=t(w_1+w_2)+\mu w_2$$

genommen wird, und setzt man, wie früher, zur Abkürzung:

$$a_0x^2+b_0xy+c_0y^2=f(x, y),$$

so resultirt die Reihe:

$$\left|\sqrt{c_0}\right|\sum_{\mu, m} e^{-\pi f\left(\frac{1}{2}\mu, m\right)-\frac{1}{2}(\mu m+\mu s+2mt)\pi i} \qquad \begin{pmatrix}\mu=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\\ m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\end{pmatrix}, \tag{5}$$

welche also ihrem Werthe nach mit dem Producte (3) übereinstimmt.

Nun kann andrerseits das mit:

$$e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\vartheta_0(\sigma+\tau w_1, w_1)\vartheta_0(\sigma-\tau w_2, w_2), \tag{6}$$

dem Werthe nach, übereinstimmende Product:

$$e^{\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2(w_1+w_2)\pi i}\vartheta\left(\sigma+\left(\tau+\frac{1}{2}\right)w_1, w_1\right)\vartheta\left(\sigma-\left(\tau+\frac{1}{2}\right)w_2, w_2\right)$$

gemäss der Gleichung ($\mathfrak{C}_0$) im art. III durch die Reihe:

$$(\sqrt{c_0})\sum_{m, n}(-1)^{m(n-1)}e^{-\pi f(m, n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i} \qquad (m, n=0, \pm 1 \pm 2, \dots) \tag{7}$$

dargestellt werden. Da ferner der Quotient der Division des Products (3) durch das Product (6) gleich $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w_1), \frac{1}{2}w_1\right)$ ist, so resultirt die Gleichung:

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w), \frac{1}{2}w\right)=\frac{\sum_{\nu, n}(-1)^n i^{-(n+\ )\nu}e^{-\pi f\left(\frac{1}{2}\nu, n\right)+2\left(\frac{1}{2}\nu\sigma+n\tau\right)\pi i}}{\sum_{m, n}(-1)^{m(n-1)}e^{-\pi f(m, n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}}, \tag{8}$$

in welcher die elliptische Function $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2} w\right)$ als Quotient zweier *Rosenhain*'scher ϑ-Reihen ausgedrückt erscheint. Dabei ist das Zeichen f durch die Gleichung:

$$f(x, y) = a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2 \qquad (4a_0c_0 - b_0^2 = 1),$$

ferner w als diejenige Wurzel der Gleichung $f(1, w) = 0$ bestimmt, in welcher der mit i multiplicirte Theil positiv ist, und die Summationen sind auf die Werthe:

$$\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots; \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

zu erstrecken. Nähere Ausführungen über die Bedeutung des in der Gleichung (8) enthaltenen Resultats, sowie über die daraus zu ziehenden Folgerungen, behalte ich in einer anderen Mittheilung vor.

XX.

Die Entwickelungen elliptischer Functionen, welche ich in den vorhergehenden Abschnitten gegeben habe, zeigen einen von den bisher bekannten Darstellungsverweisen durchaus verschiedenen Charakter; sie entspringen auch einer Auffassung der elliptischen Functionen, welche von der bisher üblichen wesentlich verschieden ist. Ich habe nun in den letzten Wochen durch eben diese Auffassung neue, höchst elegante Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen erlangt, welche ich heute der Classe vorlegen will, nachdem ich sie bereits gestern meinem Freunde *Kummer* in einem ihm zum achtzigsten Geburtstage gewidmeten handschriftlichen Aufsatze mitgetheilt habe. Um aber mit den erwähnten Reihenentwickelungen selbst auch die leitenden Ideen, durch welche ich dazu geführt worden bin, darlegen zu können, muss ich — unter Hinweis auf die Worte, mit denen ich in der Sitzung vom 19. April 1883 die Reihe meiner auf die Theorie der elliptischen Functionen bezüglichen Mittheilungen eingeleitet habe*) — einige Bemerkungen über allgemeine Invarianten vorausschicken.

Mit dem von Hrn. *Sylvester* glücklich gewählten, sinnentsprechenden Ausdruck „Invarianten" sind zwar ursprünglich nur rationale Functionen der Coefficienten von Formen bezeichnet worden, welche bei gewissen linearen Transformationen der Variabeln der Formen ungeändert bleiben, aber derselbe Ausdruck ist

*) Sitzungsberichte, Jahrgang 1883[1]).

[1]) Bd. IV, S. 347 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

seitdem schon auf mancherlei andere, bei Transformationen ungeändert bleibende Bildungen übertragen worden. Diese vielfache Anwendbarkeit des Invariantenbegriffs beruht darauf, dass derselbe einer weit allgemeineren abstracteren Ideensphaere angehört. In der That wird der Invariantenbegriff, wenn er von der unmittelbaren formalen Beziehung auf ein Transformationsverfahren losgelöst und vielmehr an den allgemeinen *Aequivalenz*begriff geknüpft wird, in die allgemeinste Denksphaere erhoben. Denn jede Abstraction, z. B. die von gewissen Verschiedenheiten, welche eine Anzahl von Objecten darbietet, statuirt eine Aequivalenz, und der aus der Abstraction hervorgehende Begriff, z. B. ein Gattungsbegriff, bildet die „Invariante der Aequivalenz". Jede wissenschaftliche Forderung geht darauf aus, Aequivalenzen festzustellen und deren Invarianten zu ermitteln, und für jede gilt das Dichterwort:

„der Weise"
„sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht."

Bezeichnet man, wie im art. XXX meines Aufsatzes*) „Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme" Systeme von n Grössen $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$ kurz durch $(\mathfrak{z})$, und setzt man für solche Systeme irgend welche Aequivalenzen fest, welche der dort angegebenen Voraussetzung entsprechen, dass aus dem Bestehen der Aequivalenzen:

$$(\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}'), \quad (\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}'')$$

die Aequivalenz:

$$(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}'')$$

folgt, so können alle einander aequivalenten Systeme:

$$(\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}'''), \ldots$$

zu einer und derselben „Classe" vereinigt werden. Bestehen nun für eine eindeutige Function der Systems-Elemente $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n$, welche mit $J(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$ bezeichnet werden möge, die Gleichungen:

$$J(\mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2', \ldots \mathfrak{z}_n') = J(\mathfrak{z}_1'', \mathfrak{z}_2'', \ldots \mathfrak{z}_n'') = J(\mathfrak{z}_1''', \mathfrak{z}_2''', \ldots \mathfrak{z}_n''') = \cdots,$$

so soll $J(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$ „die Invariante der Aequivalenz":

$$(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}'') \sim (\mathfrak{z}''') \sim \cdots$$

*) Sitzungsberichte, Jahrgang 1888[1]).

[1]) Bd. III, dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

oder auch „die Invariante der durch die Systeme gebildeten Classe“ heissen. Dabei soll die Invariante $J(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots \mathfrak{z}_n)$ als „rationale“, „algebraische“, „arithmetische“, „analytische“ Invariante bezeichnet werden, je nachdem sie durch rationale, algebraische, arithmetische oder analytische Operationen aus den Elementen gebildet oder abgeleitet wird, und unter analytischen Operationen werden hierbei solche verstanden, bei denen der Limesbegriff zur Anwendung kommt.

Hat man eine hinreichende Anzahl Invarianten $J_1, J_2, \dots J_\nu$, so kann man die Bedingungen für die Aequivalenz:

$$(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}'')$$

vollständig durch die ν Gleichungen:

$$J_k(\mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2', \dots \mathfrak{z}_n') = J_k(\mathfrak{z}_1'', \mathfrak{z}_2'', \dots \mathfrak{z}_n'') \qquad (k=1,2,\dots \nu)$$

ausdrücken. Es erscheint deshalb wesentlich, die Invarianten in solcher Weise als Functionen der Systems-Elemente darzustellen, dass dabei die Aequivalenz-Bedingungen in Evidenz treten. Dies geschieht namentlich, wenn die Invariante als symmetrische Function der sämmtlichen einander aequivalenten Systeme dargestellt wird. So kann man z. B. für die Aequivalenz:

$$\mathfrak{z} \sim \mathfrak{z} + 1$$

deren Invariante $\pi \cot \mathfrak{z}\pi$ durch den Grenzwerth:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \frac{1}{\mathfrak{z}+k}$$

also durch den Grenzwerth der Summe der reciproken Werthe aller einander aequivalenten Grössen $\mathfrak{z}$ ausdrücken. Wenn man ferner die Aequivalenz zweier symmetrischer Systeme:

$$(\mathfrak{z}_{ik}) \sim (\mathfrak{z}_{ik}') \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

dadurch definirt, dass die beiden quadratischen Formen:

$$\sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k, \quad \sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik}' z_i' z_k' \qquad (i,k=1,2,\dots n$$

durch irgend eine lineare Transformation mit der Substitutionsdeterminante *Eins* in einander übergehen sollen, so kann man die einzige Invariante dieser Aequivalenz, nämlich die Determinante:

$$|\mathfrak{z}_{ik}| \qquad (i,k=1,2,\dots n),$$

falls die Formen $\sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k$ negativ sind, durch den reziproken Werth des Quadrates des $n$fachen Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi \sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k} dz_1 dz_2 \dots dz_n \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

darstellen, und bei dieser Darstellung tritt der Invariantencharakter wiederum deutlich hervor. Denn einerseits ist die Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi \sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k} dz_1 dz_2 \dots dz_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi \sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik}' z_i' z_k'} dz_1' dz_2' \dots dz_n' \qquad (i,k=1,2,\dots n$$

vermöge der Bedingungen für die Aequivalenz $(\mathfrak{z}_{ik}) \sim (\mathfrak{z}_{ik}')$, wie sie oben formulirt worden sind, vollkommen evident, da hiernach:

$$\sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k = \sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik}' z_i' z_k'$$

und die Functionaldeterminante der n Grössen z' in Beziehung auf die n Grössen z gleich Eins ist; andererseits zeigt sich der Invariantencharakter jenes $n$fachen Integrals auch, wenn man dasselbe als Grenzwerth einer $n$fachen Summe auffasst und alsdann die aus den verschiedenen Werthsystemen $z_1, z_2, \dots z_n$ gebildeten Grössen $\sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k$ als die Elemente:

$$\mathfrak{z}_{11}', \mathfrak{z}_{11}'', \mathfrak{z}_{11}''', \dots$$

der verschiedenen einander aequivalenten Systeme betrachtet.

In den beiden angeführten Fällen handelte es sich darum, bekannte Invarianten als symmetrische Functionen aller aequivalenten Systeme darzustellen. Geht man andererseits von solchen Functionen aus, so kommt es darauf an, sie auf bekannte Functionen zurückzuführen oder wenigstens ihnen noch eine andere Bedeutung abzugewinnen. So war es unmittelbar klar, dass die für positive Werthe von ϱ absolut convergirende unendliche Reihe:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)^{1+\varrho}}$$

eine Invariante der ganzen Classe von Systemen $(\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$ ist, welche der durch die Bedingungen $(\mathfrak{B}_0)$ des art. II definirten Aequivalenz*):

*) Sitzungsberichte, Jahrgang 1883[1]).

[1]) Bd. IV, S. 353 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

$$(\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0') \sim (\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

genügen, aber seine besondere Bedeutung erhielt dieses Resultat erst durch den Nachweis, dass sich für den Grenzwerth $\varrho = 0$ die zweifache Summation mittels der ϑ-Functionen ausführen lässt. Indessen gewährt die Aufstellung von Invarianten in der Form unendlicher Reihen auch da, wo sich deren Summation noch nicht mittels bekannter Functionen bewirken lässt, ein gewisses Interesse; denn die Ermittelung von Eigenschaften und der gegenseitigen Beziehungen solcher Invarianten, die Heraushebung derjenigen, welche sich durch die einfachsten Eigenschaften auszeichnen, bietet der Forschung naturgemässe Probleme dar. Ich will deshalb hier noch eine Art von Invarianten angeben, zu welcher die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen führt.

Bezeichnet man, wie im § 24 meiner Festschrift[1]) zu Hrn. *Kummer*'s Doctorjubiläum, mit:

$$x', x'', x''', \ldots x^{(n)}$$

n ganze algebraische Zahlen, welche die Elemente irgend eines Fundamentalsystems des Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$ der Ordnung n bilden, so ist:

$$u'x' + u''x'' + u'''x''' + \cdots + u^{(n)}x^{(n)}$$

eine lineare Grundform des Bereichs $(\mathfrak{S})$, und man kann die sämmtlichen linearen Grundformen desselben Art-Bereichs als einander aequivalent betrachten. Ist nun:

$$\sum_k u_0^{(k)} x_0^{(k)} \qquad (k=1,2,\ldots$$

irgend eine lineare Grundform desselben Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$, so lässt sich nach § 22, X.[2]) meiner citirten Festschrift die Gleichung:

$$\sum_k u_0^{(k)} x_0^{(k)} = \sum_k u^{(k)} x^{(k)} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

dadurch erfüllen, dass man für die Unbestimmten der einen Form lineare ganzzahlige Functionen der Unbestimmten der andern substituirt. Nimmt man jetzt n Variabeln $v', v'', \ldots v^{(n)}$ hinzu, so kann das System:

$$(v_0', v_0'', \ldots v_0^{(n)};\ x_0', x_0'', \ldots x_0^{(n)})$$

[1]) Bd. II, S. 359 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) Bd. II, S. 345 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

als „aequivalent“ dem Systeme:

$$(v', v'', \ldots v^{(n)};\ x', x'', \ldots x^{(n)})$$

betrachtet werden, wenn auch der Gleichung:

$$\sum_k u_0^{(k)} v_0^{(k)} = \sum_k u^{(k)} v^{(k)} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

genügt wird, indem man für die Unbestimmten u diejenigen linearen ganzzahligen Functionen $(u_0^{(k)})$ der Unbestimmten u substituirt, für welche die Gleichung:

$$\sum_k u_0^{(k)} x_0^{(k)} = \sum_k u^{(k)} x^{(k)} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

befriedigt wird.

Bei diesen Festsetzungen können nun für die ganze „Classe“ der mit dem System:

$$(v', v'', \ldots v^{(n)};\ x', x'', \ldots x^{(n)})$$

aequivalenten Systeme Invarianten gebildet werden, indem man die quadratische Form der n Unbestimmten $u', u'', \ldots u^{(n)}$ zu Grunde legt, welche durch Summation aller conjugirten Ausdrücke:

$$\Big| \sum_k u^{(k)} x^{(k)} \Big|^2 \qquad (k=1,2,\ldots n$$

entsteht. Bezeichnet man diese offenbar positive quadratische Form mit

$$\varphi(u', u'', \ldots u^{(n)})$$

und setzt zur Abkürzung:

$$\sum_{k=1}^{k=n} u^{(k)} v^{(k)} = \psi(u', u'', \ldots u^{(n)}),$$

so sind die Reihen:

$$\sum e^{-\mathfrak{p}\varphi(m_1, m_2, \ldots m_n) + 2\pi i \psi(m_1, m_2, \ldots m_n)} \qquad (\mathfrak{p} > 0),$$

$$\sum \frac{e^{2\pi i \psi(m_1, m_2, \ldots m_n)}}{\varphi(m_1, m_2, \ldots m_n)^q} \qquad (q > \tfrac{1}{2}n)$$

Invarianten der durch das System:

$$(v', v'', \ldots v^{(n)};\ x', x'', \ldots x^{(n)})$$

repraesentirten Classe. Die Summationen sind dabei in der ersten Reihe auf alle ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken, in der zweiten mit Ausschluss solcher, für welche $\varphi(m_1, m_2, \ldots m_n)$ gleich Null wird. Die absolute Convergenz der ersten Reihe ist evident; dass auch die zweite absolut convergent ist, geht unmittelbar aus der Abhandlung hervor, welche *Eisenstein* im 35. Bande des *Crelle*schen Journals (S. 153—184) veröffentlicht hat.*)

Nimmt man in den beiden Reihen $v' = v'' = \cdots = v^{(n)} = 0$ und also $\psi = 0$, so hängen dieselben lediglich von den Coefficienten der „Fundamentalgleichung" ab, welcher die lineare Grundform des Bereichs ($\mathfrak{S}$):

$$u'x' + u''x'' + u'''x''' + \cdots + u^{(n)}x^{(n)}$$

genügt, aber nur so, dass sie ungeändert bleiben, wenn man die Coefficienten irgend einer andern Fundamentalgleichung dafür einsetzt. Die Reihen sind dann also „Invarianten des Art-Bereichs" selbst, aber zugleich so, dass sie für alle conjugirten Art-Bereiche denselben Werth behalten. Sie sind aber auch in *diesem* Sinne nicht immer „*charakteristisch*" für den Art-Bereich; denn wenn man z. B. $n = 2$, $x' = 1$, $x'' = \sqrt{\pm D}$ setzt und D positiv annimmt, so wird die quadratische Form $\varphi(u', u'')$ in beiden durch das Vorzeichen von x''^2 verschiedenen Fällen gleich:

$$2u'^2 + 2Du''^2,$$

und die Werthe der beiden den Art-Bereichen $(1, \sqrt{D})$ und $(1, \sqrt{-D})$ entsprechenden Reihen stimmen also mit einander überein.

Das ebenso einfache als nützliche Prinzip der Bildung von Invarianten mittels symmetrischer Functionen der Elemente aequivalenter Systeme, welches in den angeführten Beispielen angewendet worden ist, habe ich schon in einer am 12. October 1868 gelesenen, aber noch nicht publicirten Abhandlung aus den Betrachtungen über allgemeine Invarianten hergeleitet und seitdem oftmals in meinen Universitätsvorlesungen auseinandergesetzt. Auf eben demselben Princip beruht die Bedeutung des im art. XIX durch die Gleichung (8) ausgedrückten Resultats, welche im Folgenden näher dargelegt werden soll.

---

*) Der bezügliche Convergenzbeweis ist auf S. 157—165 gegeben.

§ 1.

Im art. II*) ist, wie schon oben angeführt wurde, die Aequivalenz zweier Systeme:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0), (\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$

durch die Bedingungsgleichungen:

$$(\mathfrak{B}_0) \qquad \begin{aligned} \sigma' &= \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \quad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'' \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1) \\ a_0' &= a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2 \\ b_0' &= 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta' \\ c_0' &= a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2 \end{aligned}$$

definirt worden, in welchen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen bedeuten. Die Elemente des Systems $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ werden dabei als reell vorausgesetzt, die drei letzten Elemente a_0, b_0, c_0, überdies so, dass $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$ wird. Zur Bestimmung des Systems genügen daher vier Elemente σ, τ, b_0, c_0 oder σ, τ, a_0, b_0, und es kann demnach auch die vierte oder die letzte der sechs Bedingungen ($\mathfrak{B}_0$) weggelassen werden.

Es soll nun im Anschluss an die Begriffsbestimmungen, welche ich in meiner Abhandlung**) „Über bilineare Formen von vier Variabeln" gegeben habe, die Aequivalenz:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \sim (\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$

als eine „*vollständige*" bezeichnet werden, wenn die beiden Zahlen α', β *gerade* sind. Alsdann bestehen, wenn, wie früher:

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \quad w' = \frac{-b_0' + i}{2c_0'}$$

gesetzt wird, die Gleichungen:

$$w' = \frac{\alpha w - \alpha'}{-\beta w + \beta'}, \quad w = \frac{\beta' w' + \alpha'}{\beta w' + \alpha},$$

$$\frac{\sigma + \tau w}{-\beta w + \beta'} = \sigma' + \tau' w' - \alpha'' - \beta'' w',$$

---

*) Sitzungsberichte, Jahrgang 1883[1]).

**) Abhandlungen der Akademie vom Jahre 1883[2]).

[1]) Bd. IV, S. 353 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) Bd. II, S. 434 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

und die Transformationsgleichung (23) im art. XI*), § 4 ergiebt, wenn man darin für:

$$w,\ \alpha,\qquad \beta,\qquad \gamma,\ \delta$$

beziehungsweise:

$$\tfrac{1}{2}w,\ \alpha,\ -\tfrac{1}{2}\alpha',\ -2\beta,\ \beta'$$

substituirt, die einfache Relation:

$$(\mathfrak{C})\qquad (-1)^{\alpha''}\,\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma'+\tau'w'),\ \tfrac{1}{2}w'\right)=i^{\frac{1}{2}\alpha\alpha'+\alpha-\alpha'-1}\,\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w),\ \tfrac{1}{2}w\right),$$

oder also:

$$(\mathfrak{C}')\qquad \mathrm{El}^4\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w),\ \tfrac{1}{2}w\right)=\mathrm{El}^4\left(\tfrac{1}{2}(\sigma'+\tau'w'),\ \tfrac{1}{2}w'\right).$$

Die vierte Potenz der elliptischen Function $\mathrm{El}(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w),\frac{1}{2}w)$ ist demnach

eine Invariante der vollständigen Aequivalenz:

$$(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)\sim(\sigma',\tau',a_0',b_0',c_0')$$

oder der Classe von Systemen, welche durch alle mit $(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)$ vollständig aequivalenten Systeme gebildet wird.

Dieses aus der Theorie der Transformation folgende Hauptresultat wird nun aber durch den Ausdruck von $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w),\frac{1}{2}w\right)$, welchen die citirte Gleichung (8) des art. XIX liefert:

$$(\mathfrak{D})\qquad \frac{\displaystyle\sum_{\mathfrak{m}=-\infty}^{\mathfrak{m}=+\infty}\sum_{\mathfrak{n}=-\infty}^{\mathfrak{n}=+\infty} i^{(2\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{n}-1)}\,e^{-\pi\left(a_0\left(\mathfrak{m}+\frac{1}{2}\right)^2+b_0\left(\mathfrak{m}+\frac{1}{2}\right)\mathfrak{n}+c_0\mathfrak{n}^2\right)+\left((2\mathfrak{m}+1)\sigma+2\mathfrak{n}\tau\right)\pi i}}{\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^{m(n-1)}\,e^{-\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}}\,.$$

in vollkommen sachgemässer Weise dadurch in Evidenz gesetzt,

dass jedes einzelne Glied der beiden Reihen im Zähler und Nenner in ein entsprechendes anderes Glied übergeht, wenn man für die Grössen σ,τ,a_0,b_0,c_0 die eines aequivalenten Systems $(\sigma',\tau',a_0',b_0',c_0')$ substituirt.

---

*) Sitzungsberichte, Jahrgang 1886[1]).

[1]) Bd. IV, S. 402 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

Wird nämlich:

$$\alpha\left(\mathfrak{m}+\tfrac{1}{2}\right)+\beta\mathfrak{n}=\mathfrak{m}'+\tfrac{1}{2},\qquad \alpha'\left(\mathfrak{m}+\tfrac{1}{2}\right)+\beta'\mathfrak{n}=\mathfrak{n}'$$

$$\alpha m+\beta n=m\qquad\qquad \alpha'm+\beta'n=n$$

gesetzt, so ist vermöge der Aequivalenzbedingungen $(\mathfrak{B}_0)$ offenbar:

$$a_0'\left(\mathfrak{m}+\tfrac{1}{2}\right)^2+b_0'\left(\mathfrak{m}+\tfrac{1}{2}\right)\mathfrak{n}+c_0'\mathfrak{n}^2=a_0\left(\mathfrak{m}'+\tfrac{1}{2}\right)^2+b_0\left(\mathfrak{m}'+\tfrac{1}{2}\right)\mathfrak{n}'+c_0\mathfrak{n}'^2,$$

$$\left(\mathfrak{m}+\tfrac{1}{2}\right)\sigma'+\mathfrak{n}\tau'=\tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{m}'+\tfrac{1}{2}\right)(\sigma+\alpha'')+\mathfrak{n}'(\tau+\beta''),$$

$$i^{(2\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{n}-1)}=i^{(2\mathfrak{m}'+1)(\mathfrak{n}'-1)}\cdot i^{\frac{1}{2}\alpha\alpha'+\alpha-\alpha'-1},$$

$$a_0'm^2+b_0'mn+c_0'n^2=a_0m'^2+b_0m'n'+c_0n'^2,$$

$$m\sigma'+n\tau'=m'(\sigma+\alpha'')+n'(\tau+\beta''),$$

$$(-1)^{m(n-1)}=(-1)^{m'(n'-1)},$$

und also:

$$i^{(2\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{n}-1)}\,e^{-\pi\left(a_0'\left(\mathfrak{m}+\frac{1}{2}\right)^2+b_0'\left(\mathfrak{m}+\frac{1}{2}\right)\mathfrak{n}+c_0'\mathfrak{n}^2\right)+\left((2\mathfrak{m}+1)\sigma'+2\mathfrak{n}\tau'\right)\pi i}$$

$$=(-1)^{\alpha''}\,i^{\frac{1}{2}\alpha\alpha'+\alpha-\alpha'-1}\cdot i^{(2\mathfrak{m}'+1)(\mathfrak{n}'-1)}\,e^{-\pi\left(a_0\left(\mathfrak{m}'+\frac{1}{2}\right)^2+b_0\left(\mathfrak{m}'+\frac{1}{2}\right)\mathfrak{n}'+c_0\mathfrak{n}'^2\right)+\left((2\mathfrak{m}'+1)\sigma+2\mathfrak{n}'\tau\right)\pi i},$$

$$(-1)^{m(n-1)}\,e^{-\pi(a_0'm^2+b_0'mn+c_0'n^2)+2(m\sigma'+n\tau')\pi i}=(-1)^{m'(n'-1)}\,e^{-\pi(a_0m'^2+b_0m'n'+c_0n'^2)+2(m'\sigma+n'\tau)\pi i}.$$

Es geht daher in der That, wenn man in den beiden Reihen im Zähler und Nenner des Ausdrucks $(\mathfrak{D})$ die Grössen:

$$\sigma,\ \tau,\ a_0,\ b_0,\ c_0$$

durch:

$$\sigma',\ \tau',\ a_0',\ b_0',\ c_0'$$

ersetzt, jedes einzelne durch die Zahlensysteme:

$$(\mathfrak{m},\mathfrak{n}),\ (m,n)$$

bestimmte Glied in ein anderes über, welches beziehungsweise durch die Systeme:

$$(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}'),\ (m',n')$$

bestimmt ist, jedoch so, dass dabei im Zähler der Factor $(-1)^{\alpha''}i^{\frac{1}{2}\alpha\alpha'+\alpha-\alpha'-1}$ hinzutritt. Hierdurch erhellt nun unmittelbar die Transformationsgleichung $(\mathfrak{C})$ und also die Invarianteneigenschaft der vierten Potenz der elliptischen Function $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w),\frac{1}{2}w\right)$.

§ 2.

Wird im Nenner des Ausdrucks ($\mathfrak{D}$) der Factor $e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}$ durch:

$$\cos 2(m\sigma + n\tau)\pi + i\sin 2(m\sigma + n\tau)\pi$$

ersetzt, so fällt bei der Summation der je zwei den Werthen (m, n) und $(-m, -n)$ entsprechenden Gliedern der mit i multiplicirte Theil fort, und es bleibt also nur die Reihe:

$$(\mathfrak{E}) \qquad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^{m(n-1)}e^{-\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)}\cos 2(m\sigma+n\tau)\pi,$$

welche mit $\mathfrak{E}_0(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ bezeichnet werden möge. Wird ferner im Zähler des Ausdrucks ($\mathfrak{D}$) der Factor $e^{((2\mathfrak{m}+1)\sigma+2\mathfrak{n}\tau)\pi i}$ durch:

$$\cos((2\mathfrak{m}+1)\sigma + 2\mathfrak{n}\tau)\pi + i\sin((2\mathfrak{m}+1)\sigma + 2\mathfrak{n}\tau)\pi$$

ersetzt, so erhält man durch Vereinigung von je zwei den Werthen $(2\mathfrak{m}+1, \mathfrak{n})$ und $(-2\mathfrak{m}-1, -\mathfrak{n})$ entsprechenden Gliedern für *gerade* Zahlen $\mathfrak{n}$:

$$2(-1)^{\frac{1}{2}\mathfrak{n}+\mathfrak{m}}\sin((2\mathfrak{m}+1)\sigma + 2\mathfrak{n}\tau)\pi$$

und für *ungerade* Zahlen $\mathfrak{n}$:

$$2(-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{n}-1)}i\sin((2\mathfrak{m}+1)\sigma + 2\mathfrak{n}\tau)\pi.$$

Da nun beide Ausdrücke ungeändert bleiben, wenn man $\mathfrak{m}$ durch $-\mathfrak{m}-1$, also $2\mathfrak{m}+1$ durch $-2\mathfrak{m}-1$ und zugleich $\mathfrak{n}$ durch $-\mathfrak{n}$ ersetzt, so kann man die Reihe im Zähler von ($\mathfrak{D}$) als Aggregat:

$$\mathfrak{E}_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) + i\mathfrak{E}_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

darstellen, wenn:

$$\mathfrak{E}_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \sum_{\substack{\mu, n \\ (\mu=\pm1,\pm3,\pm5,\ldots;\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)}}(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)+n}e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2+b_0\mu n+4c_0n^2\right)}\sin(\mu\sigma+4n\tau)\pi,$$

$$\mathfrak{E}_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \sum_{\mu, \nu}(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)}e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2+\frac{1}{2}b_0\mu\nu+c_0\nu^2\right)}\sin(\mu\sigma+2\nu\tau)\pi$$
$$(\mu, \nu = \pm1, \pm3, \pm5, \ldots)$$

gesetzt wird. Demnach wird:

$$(\mathfrak{F}) \qquad \mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w), \frac{1}{2}w\right) = \frac{\mathfrak{E}_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)}{\mathfrak{E}_0(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)} + i\,\frac{\mathfrak{E}_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)}{\mathfrak{E}_0(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)},$$

und da $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ reelle Functionen der reellen Grössen $\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0$ sind, so ist hiermit die elliptische Function $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w), \frac{1}{2}w\right)$ in ihren reellen und imaginären Theil zerlegt.

Für $\sigma = \frac{1}{2}$, $\tau = 0$ kommt:

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right) = \frac{\mathfrak{E}_1\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)}{\mathfrak{E}_0\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)} + i\,\frac{\mathfrak{E}_2\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)}{\mathfrak{E}_0\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)},$$

und dabei sind die Functionen $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ in folgender einfachen Weise durch Reihen ausgedrückt:

$$\mathfrak{E}_0\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right) = \sum_{m, n}(-1)^{mn}e^{-\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)},$$

$$\mathfrak{E}_1\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right) = \sum_{\mu, n}(-1)^{n}e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2+b_0\mu n+4c_0n^2\right)},$$

$$\mathfrak{E}_2\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right) = \sum_{\mu, \nu}(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-\nu)}e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2+\frac{1}{2}b_0\mu\nu+c_0\nu^2\right)},$$

in welchen den Summationsbuchstaben m, n alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, den Summationsbuchstaben μ, ν aber nur alle positiven und negativen *ungeraden* ganzzahligen Werthe beizulegen sind.

§ 3.

Für $\sigma = \frac{1}{2}$, $\tau = 0$ wird:

$$\sigma' = \frac{1}{2}\alpha + \alpha'', \quad \tau' = \frac{1}{2}\beta + \beta''$$

und also:

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma'+\tau'w'), \frac{1}{2}w'\right) = \mathrm{El}\left(\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta w' + \frac{1}{2}\beta''w', \frac{1}{2}w'\right).$$

Da nun für ganze Zahlen m, n die Relation besteht:

$$\mathrm{El}\left(\zeta + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}nw, \frac{1}{2}w\right) = (-1)^m\,\mathrm{El}\left(\zeta, \frac{1}{2}w\right).$$

so erhält man, wenn man berücksichtigt, das β eine *gerade* Zahl ist, für die obigen Werthe von σ', τ' die Formel:

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma'+\tau'w), \frac{1}{2}w'\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)+\alpha''}\,\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right),$$

durch welche die Gleichung ($\mathfrak{G}$) des § 1 in folgende übergeht:

$$(\mathfrak{G}^0) \qquad \mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w'\right) = (-1)^{\frac{1}{2}\alpha'}i^{\frac{1}{2}\alpha\alpha'}\,\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w'\right).$$

Die vierte Potenz von:

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right)$$

ist daher eine Invariante der Classe von Systemen (a_0, b_0, c_0), welche diesem *vollständig* aequivalent sind, d. h. also der Gesammtheit der Systeme:

$$(a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2),$$

für welche α, β' ungerade Zahlen und α', β gerade Zahlen sind, die der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ genügen. Dass aber diese Invariante für die bezügliche Classe auch *charakteristisch* ist, d. h. dass aus der Existenz einer Gleichung:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right) = \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{-\mathfrak{b}_0+i}{4\mathfrak{c}_0}\right)$$

das Bestehen der Aequivalenz:

$$(a_0, b_0, c_0) \sim (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0), \qquad {\scriptstyle (4a_0c_0 - b_0^2 = 4\mathfrak{a}_0\mathfrak{c}_0 - \mathfrak{b}_0^2 = 1)}$$

und zwar als einer vollständigen, gefolgert werden kann, geht schon aus den allgemeineren Ausführungen im § 15 des art. XI hervor.*) Aber ich will dies hier nochmals in der für den vorliegenden Zweck geeigneten Weise ausführlich begründen.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{-b_0+i}{2c_0} = w, \quad \frac{-\mathfrak{b}_0+i}{2\mathfrak{c}_0} = \mathfrak{w}.$$

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right) = \varkappa,$$

so ist:

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\mathfrak{w}\right) = \pm\varkappa,$$

und es wird der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \varkappa(1 - x^4) - (1 + \varkappa^2)x^2$$

*) Sitzungsberichte, Jahrgang 1886[1]. Vergl. auch die Abhandlung des Hrn. *Fuchs* „Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces“ im 83. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik.

[1]) Bd. IV, S. 442 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken.

nebst der Bedingung $x = 0$ für $u = 0$, gemäss der im art. XI, § 4 gegebenen Definition der elliptischen Function $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}w\right)$ als Quotient zweier ϑ-Functionen*), sowohl durch:

$$x = \mathrm{El}\left(\frac{u}{2\pi}(\vartheta_3(0, w))^{-2}, \frac{1}{2}w\right)$$

als auch durch:

$$x = i^h \cdot \mathrm{El}\left(\frac{u}{2\pi}(\vartheta_3(0, \mathfrak{w}))^{-2}, \frac{1}{2}\mathfrak{w}\right),$$

für einen bestimmten Werth von h, genügt. Demnach ist:

$$(\mathfrak{H}) \qquad \mathrm{El}\left(\frac{u}{2\pi}(\vartheta_3(0, w))^{-2}, \frac{1}{2}w\right) = i^h\,\mathrm{El}\left(\frac{u}{2\pi}(\vartheta_3(0, \mathfrak{w}))^{-2}, \frac{1}{2}\mathfrak{w}\right).$$

Aus der angeführten Definition der elliptischen Function $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}w\right)$ folgt ferner deren Productdarstellung:

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}w\right) = 2e^{\frac{1}{4}w\pi i}\sin\zeta\pi\,\frac{\prod(1 - e^{(2nw+2\varepsilon\zeta)\pi i})}{\prod(1 - e^{(\nu w+2\varepsilon\zeta)\pi i})} \qquad \left({\scriptstyle \varepsilon=\pm1,\ n=1,2,3,\dots \atop \nu=1,3,5,7,\dots}\right),$$

aus welcher sich unmittelbar ergiebt, dass $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}w\right)$ nur für die Werthe:

$$\zeta = m + nw \qquad {\scriptstyle (m,\,n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots)}$$

gleich Null wird. Da hiernach die elliptische Function auf der linken Seite der Gleichung $(\mathfrak{H})$ nur für:

$$u = (m + nw)\pi(\vartheta_3(0, w))^2 \qquad {\scriptstyle (m,\,n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots)},$$

die auf der rechten Seite aber nur für:

$$u = (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}\mathfrak{w})\pi(\vartheta_3(0, \mathfrak{w}))^2 \qquad {\scriptstyle (\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots)}$$

gleich Null wird, so muß es für jedes System von Zahlen (m, n) ein System $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ und ebenso für jedes System $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ ein System (m, n) geben, für welches:

$$(m + nw)(\vartheta_3(0, w))^2 = (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}\mathfrak{w})(\vartheta_3(0, \mathfrak{w}))^2$$

wird. Es sei demgemäss, wenn für (m, n) die Systeme $(0, 1)$ und $(1, 0)$ genommen werden:

$$(\mathfrak{K}) \qquad w(\vartheta_3(0, w))^2 = (\alpha + \beta\mathfrak{w})t(\vartheta_3(0, \mathfrak{w}))^2, \quad (\vartheta_3(0, w))^2 = (\alpha' + \beta'\mathfrak{w})t(\vartheta_3(0, \mathfrak{w}))^2,$$

*) Sitzungsberichte, Jahrgang 1886[1].

[1]) Bd. IV, S. 401 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken.

wo die *positive* Zahl t den grössten gemeinsame Theiler der vier Zahlen

$$\alpha t,\ \beta t,\ \alpha' t,\ \beta' t$$

bedeutet; ferner sei in analoger Weise, wenn für $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ die Systeme $(0, 1)$ und $(1, 0)$ genommen werden:

$$(\mathfrak{K}') \quad \mathfrak{w}(\vartheta_3(0, \mathfrak{w}))^2 = (\alpha_1 + \beta_1 w)\, t_1 (\vartheta_3(0, w))^2, \quad (\vartheta_3(0, \mathfrak{w}))^2 = (\alpha_1' + \beta_1' w)\, t_1 (\vartheta_3(0, w))^2.$$

Aus diesen vier Gleichungen $(\mathfrak{K})$, $(\mathfrak{K}')$ ergeben sich durch Elimination der Grösse $\mathfrak{w}$ und des Quotienten $\frac{\vartheta_3(0, w)}{\vartheta_3(0, \mathfrak{w})}$ die zwei Gleichungen:

$$w(1 - tt_1(\alpha\beta_1' + \beta\beta_1)) = tt_1(\alpha\alpha_1' + \beta\alpha_1),$$
$$1 - tt_1(\alpha'\alpha_1' + \beta'\alpha_1) = tt_1(\alpha'\beta_1' + \beta'\beta_1)w,$$

und aus diesen folgt, da w eine complexe Grösse ist:

$$(\mathfrak{K}'') \quad \begin{aligned} &tt_1(\alpha\beta_1' + \beta\beta_1) = 1, \quad \alpha\alpha_1' + \beta\alpha_1 = 0 \\ &tt_1(\alpha'\alpha_1' + \beta'\alpha_1) = 1, \quad \alpha'\beta_1' + \beta'\beta_1 = 0. \end{aligned}$$

Nach der ersten und dritten Gleichung kann

weder α mit β, noch α' mit β', noch α_1 mit α_1', noch β_1 mit β_1'

einen gemeinsamen Theiler haben; aus der zweiten und vierten Gleichung folgen demnach die Relationen:

$$\alpha = -\varepsilon\alpha_1, \quad \beta = \varepsilon\alpha_1' \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

mittels deren die erste Gleichung in folgende übergeht:

$$\varepsilon tt_1(\alpha_1'\beta_1 - \alpha_1\beta_2') = 1.$$

Beide positive Zahlen t und t_1 müssen also gleich *Eins* sein. Es muss aber auch $\varepsilon = +1$ sein; den gemäss den Gleichungen $(\mathfrak{K}')$ ist:

$$\mathfrak{w} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 w}{\alpha_1' + \beta_1' w},$$

und der reelle Theil von $\mathfrak{w}i$ muss ebenso wie der von wi negativ sein.

Hiermit ist nachgewiesen, dass aus der Gleichung:

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\mathfrak{w}\right)$$

mit Nothwendigkeit die Relationen:

$$\mathfrak{w} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 w}{\alpha_1' + \beta_1' w}, \quad \alpha_1'\beta_1 - \alpha_1\beta_1' = 1$$

folgen, in welchen $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1', \beta_1'$ ganze Zahlen sind. Dabei müssen aber die beiden Zahlen α_1 und β_1' *gerade* sein, denn wenn man auf die Function $\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right)$, d. h. auf den Quotienten:

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}, w\right)}{\vartheta_0\left(\frac{1}{2}, w\right)},$$

die bekannten Transformations-Relationen anwendet, so sieht man, dass die Gleichung:

$$\mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_1 + \beta_1 w}{\alpha_1' + \beta_1' w}\right)$$

nur dann besteht, wenn α_1 und β_1' gerade sind.

Setzt man:

$$\alpha_1 = -\alpha', \quad \alpha_1' = \beta', \quad \beta_1 = \alpha, \quad \beta_1' = -\beta$$

und substituirt für $\mathfrak{w}$ und w in der Gleichung:

$$\mathfrak{w} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 w}{\alpha_1' + \beta_1' w} = \frac{\alpha w - \alpha'}{-\beta w + \beta'}$$

die Werthe:

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \quad \mathfrak{w} = \frac{-\mathfrak{b}_0 + i}{2\mathfrak{c}_0},$$

so ergeben sich die Relationen:

$$\mathfrak{a}_0 = a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2,$$
$$\mathfrak{b}_0 = 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta',$$
$$\mathfrak{c}_0 = a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2,$$

und da hierbei $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ und sowohl α' als auch β *gerade* ist, so sind die beiden Systeme:

$$(a_0, b_0, c_0), \quad (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0)$$

einander vollständig aequivalent. Diese Aequivalenz hat sich also in der That als eine notwendige Folge der Gleichung:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0 + i}{4c_0}\right) = \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{-\mathfrak{b}_0 + i}{4\mathfrak{c}_0}\right)$$

erwiesen.

Sind die zwei Systeme (a_0, b_0, c_0), $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0)$ in der speciellen Weise einander vollständig aequivalent, dass der mit α' bezeichnete Coefficient der Substitution nicht bloss durch 2 sondern auch durch 4 theilbar ist, so besteht die Gleichung:

$$(\mathfrak{G}') \qquad \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-\mathfrak{b}_0+i}{4\mathfrak{c}_0}\right),$$

und nach vorstehenden Ausführungen ist auch umgekehrt aus dem Bestehen der Gleichung $(\mathfrak{G}')$ zu erschliessen, dass die beiden Systeme:

$$(a_0, b_0, c_0), \quad (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0)$$

in jener speciellen Weise einander vollständig aequivalent sein müssen. Denn gemäss der Gleichung $(\mathfrak{C}^0)$ im § 3 wird:

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}\alpha'} \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-\mathfrak{b}_0+i}{4\mathfrak{c}_0}\right),$$

und die Gleichung $(\mathfrak{G}')$ würde daher nicht erfüllt sein können, wenn α' nicht durch 4 theilbar wäre. Es zeigt sich also, dass:

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right)$$

eine *charakteristische* Invariante derjenigen speciellen Classe von Systemen (a_0, b_0, c_0) ist, welche in der bezeichneten Weise einander vollständig aequivalent sind.

Da die Systeme (a_0, b_0, c_0) zwei wesentliche Elemente enthalten, so sind auch zwei Invarianten zur Charakterisirung der Classe erforderlich. Diese erhält man, indem man die angegebene charakteristische Invariante, welche eine complexe Function von b_0, c_0 ist, in ihre beiden Theile zerlegt.

§ 4.

Bestehen zwischen zwei Systemen von Grössen:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0), \quad (\sigma_1, \tau_1, a_0', b_0', c_0')$$

die beiden Gleichungen:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w'\right)$$

$$(\mathfrak{L}') \qquad \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma_1 + \tau_1 w'), \frac{1}{2}w'\right),$$

in welchen:

$$w = \frac{-b_0+i}{2c_0}, \quad w' = \frac{-b_0'+i}{2c_0'}$$

ist, so müssen zuvörderst wegen der Gleichung $(\mathfrak{L})$, gemäss dem im vorigen Paragraphen gegebenen Nachweis, die beiden Systeme:

$$(a_0, b_0, c_0), \quad (a_0', b_0', c_0')$$

einander vollständig aequivalent sein, und zwar so, dass in der zwischen w und w' bestehenden linearen Gleichung:

$$w' = \frac{\alpha w - \alpha'}{-\beta w + \beta'}$$

der Coefficient α' durch 4 theilbar ist. Nach der Transformationsgleichung $(\mathfrak{C})$ im § 1 wird nun aber:

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma' + \tau' w'), \frac{1}{2}w'\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2}w\right),$$

wo σ', τ' durch die Gleichungen:

$$\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \quad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta''$$

bestimmt sind. Die Gleichung $(\mathfrak{L}')$ geht hiernach in folgende über:

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma' + \tau' w'), \frac{1}{2}w'\right) = \pm\, \mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma_1 + \tau_1 w'), \frac{1}{2}w'\right),$$

aus welcher mittels des Additionstheorems in der bekannten Weise zu schliessen ist, dass die Grössen σ_1, τ_1 und σ', τ' mit einander durch eine Relation:

$$\sigma_1 + \tau_1 w' = \varepsilon(\sigma' + \tau' w') + m + nw'$$

verbunden sein müssen, in welcher m und n ganze Zahlen bedeuten und $\varepsilon = \pm 1$ ist. Es wird hiernach:

$$\sigma_1 = \varepsilon\sigma' + m, \quad \tau_1 = \varepsilon\tau' + n$$

und also:

$$\sigma_1 = \varepsilon\alpha\sigma + \varepsilon\alpha'\tau + \varepsilon\alpha'' + m, \quad \tau' = \varepsilon\beta\sigma + \varepsilon\beta'\tau + \varepsilon\beta'' + n.$$

Setzt man nun:

$$\varepsilon\alpha = \alpha_1, \quad \varepsilon\alpha' = \alpha_1', \quad \varepsilon\alpha'' + m = \alpha_1'',$$
$$\varepsilon\beta = \beta_1, \quad \varepsilon\beta' = \beta_1', \quad \varepsilon\beta'' + n = \beta_1'',$$

so sind die Systeme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$, $(\sigma_1, \tau_1, a_0', b_0', c_0')$ mit einander durch die Transformationsgleichungen verbunden:

$$(\mathfrak{M}) \qquad \begin{aligned} &\sigma_1 = \alpha_1\sigma + \alpha_1'\tau + \alpha_1'', \quad \tau_1 = \beta_1\sigma + \beta_1'\tau + \beta_1'', \\ &a_0' = a_0\alpha_1^2 + b_0\alpha_1\alpha_1' + c_0\alpha_1'^2, \\ &b_0' = 2a_0\alpha_1\beta_1 + b_0(\alpha_1\beta_1' + \alpha_1'\beta_1) + 2c_0\alpha_1'\beta_1', \\ &c_0' = a_0\beta_1^2 + b_0\beta_1\beta_1' + c_0\beta_1'^2, \end{aligned}$$

in denen:

$$\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1 = 1,\quad \alpha_1' \equiv 0 \ (\text{mod.}\ 4),\quad \beta_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ 2)$$

ist. Es zeigt sich also, dass aus dem Bestehen der Gleichungen ($\mathfrak{L}$) und ($\mathfrak{L}'$) das Bestehen der Transformationsgleichungen ($\mathfrak{M}$) zu erschliessen ist, welche jene specielle Art vollständiger Aequivalenz der beiden Systeme:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0), \quad (\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$

constituiren, und dieses Hauptresultat kann offenbar dahin formulirt werden, dass die specielle Classe von Systemen $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$, welchen die Invarianten:

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2}w\right), \quad \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right)$$

angehören, durch das „*System* dieser beiden Invarianten" vollständig charakterisirt wird.

Die Systeme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ sind durch vier reelle Elemente σ, τ, b_0, c_0 bestimmt, und es bedarf daher auch eines Systems von vier reellen Invarianten zur Charakterisirung einer Classe. Nun ist bei Benutzung der im § 2 eingeführten Bezeichnungen:

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2}w\right) = \frac{\mathfrak{E}_1^2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) - \mathfrak{E}_2^2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) + 2i\,\mathfrak{E}_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)\,\mathfrak{E}_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)}{\mathfrak{E}_0^2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)}$$

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right) = \frac{\mathfrak{E}_1^2\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right) - \mathfrak{E}_2^2\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right) + 2i\,\mathfrak{E}_1\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)\mathfrak{E}_2\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)}{\mathfrak{E}_0^2\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)}.$$

Man kann also ein charakteristisches System von Invarianten einer durch $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ repraesentirten speciellen Classe durch folgende vier reelle Functionen von $\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0$ bilden:

$$\frac{\mathfrak{E}_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)}{\mathfrak{E}_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)} - \frac{\mathfrak{E}_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)}{\mathfrak{E}_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)}, \quad \frac{\mathfrak{E}_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)\,\mathfrak{E}_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)}{\mathfrak{E}_0^2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)}$$

$$\frac{\mathfrak{E}_1\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)}{\mathfrak{E}_2\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)} - \frac{\mathfrak{E}_2\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)}{\mathfrak{E}_1\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)}, \quad \frac{\mathfrak{E}_1\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)\mathfrak{E}_2\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)}{\mathfrak{E}_0^2\left(\frac{1}{2}, 0, a_0, b_0, c_0\right)}.$$

§ 5.

Die vorstehenden Entwickelungen reichen dazu aus, nachzuweisen, dass die beiden Functionen:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right), \quad \frac{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2}w\right)}{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right)},$$

in welchen, wie oben:

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0}$$

ist, ein System charakteristischer Invarianten für die Classe *aller* einander vollständig aequivalenter Grössensysteme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ bilden.

Bestehen nämlich für zwei Systeme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$, $(\sigma_1, \tau_1, a_0', b_0', c_0')$ die Gleichungen:

$$\mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w'\right),$$

$$(\mathfrak{N}') \qquad \frac{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2}w\right)}{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right)} = \frac{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma_1 + \tau_1 w'), \frac{1}{2}w'\right)}{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w'\right)},$$

in welchen:

$$w' = \frac{-b_0' + i}{2c_0'}$$

ist, so muss entweder:

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w'\right) \text{ oder } -\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w'\right)$$

sein. Im ersten Falle sind die Gleichungen ($\mathfrak{L}$), ($\mathfrak{L}'$) des vorigen Paragraphen erfüllt, aus welchen, wie schon dort dargethan worden, das Bestehen der Transformationsgleichungen ($\mathfrak{M}$) erschlossen werden kann. Im zweiten Falle ergeben sich mittels der Relationen:

$$-\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}(w + 2)\right),$$

$$-\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2}(w + 2)\right)$$

aus den Gleichungen ($\mathfrak{N}'$) die folgenden:

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}(w + 2)\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w'\right),$$

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma - 2\tau + \tau(w + 2)), \frac{1}{2}(w + 2)\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma_1 + \tau_1 w'), \frac{1}{2}w'\right),$$

welche, wenn man $w+2$ durch w und zugleich $\sigma-2\tau$ durch σ ersetzt, mit den Bedingungen $(\mathfrak{L})$, $(\mathfrak{L}')$ identisch werden. Auch in diesem Falle zeigt sich also das Bestehen der Transformationsgleichungen $(\mathfrak{M})$ als eine Folge des Bestehens der Gleichungen $(\mathfrak{N}')$, und es ist hiermit nachgewiesen, dass durch die Werthe der beiden Functionen der vier Grössen σ, τ, b_0, c_0:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right), \quad \frac{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w), \frac{1}{2}w\right)}{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right)} \qquad \left(w=\frac{-b_0+i}{2c_0}\right)$$

die *Classe* der dem Systeme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ vollständig aequivalenten Systeme eindeutig bestimmt ist.

Beide Functionen $(\mathfrak{N})$ haben complexe Werthe, und es sind eigentlich die Werthe der beiden reellen und der beiden mit i multiplicirten Theile dieser Functionen, welche das charakteristische System der vier Invarianten der bezeichneten Classe bilden. Benutzt man die oben eingeführten Bezeichnungen $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ und lässt dabei der Einfachheit halber die Grössen a_0, b_0, c_0 innerhalb der Parenthesen weg, so dass man $\mathfrak{E}(\sigma, \tau)$ an Stelle von $\mathfrak{E}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ setzt, so sind die vier Invarianten:

$$\frac{\left(\mathfrak{E}_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)-\mathfrak{E}_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)^2-4\mathfrak{E}_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\mathfrak{E}_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{\mathfrak{E}_0^4\left(\frac{1}{2}, 0\right)},$$

$$\frac{\mathfrak{E}_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)\mathfrak{E}_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\left(\mathfrak{E}_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)-\mathfrak{E}_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)}{\mathfrak{E}_0^4\left(\frac{1}{2}, 0\right)},$$

$$\frac{(\mathfrak{E}_1^2(\sigma, \tau)-\mathfrak{E}_2^2(\sigma, \tau))\left(\mathfrak{E}_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)-\mathfrak{E}_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)+4\mathfrak{E}_1(\sigma, \tau)\mathfrak{E}_2(\sigma, \tau)\mathfrak{E}_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)\mathfrak{E}_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{\left(\mathfrak{E}_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)+\mathfrak{E}_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)^2},$$

$$\frac{-(\mathfrak{E}_1^2(\sigma, \tau)-\mathfrak{E}_2^2(\sigma, \tau))\mathfrak{E}_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)\mathfrak{E}_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)+\left(\mathfrak{E}_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)-\mathfrak{E}_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)\mathfrak{E}_1(\sigma, \tau)\mathfrak{E}_2(\sigma, \tau)}{\left(\mathfrak{E}_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)+\mathfrak{E}_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)^2}.$$

Wenn man endlich die *Jacobi*'schen Bezeichnungen anwendet, so ist:

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right)=\sqrt{\varkappa}, \quad \pi(\vartheta_3(0, w))^2=2K, \quad w=\frac{K'i}{K},$$

$$\frac{\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w), \frac{1}{2}w\right)}{\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w\right)}=\sin\mathrm{am}(2\sigma K+2\tau K'i, \varkappa).$$

Das System der vier Invarianten der bezeichneten Classe von Systemen $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ wird also einfach

aus den je zwei Theilen der beiden complexen Grössen

$$\varkappa^2, \quad \sin^2\mathrm{am}(2\sigma K+2\tau K'i, \varkappa)$$

gebildet,

vorausgesetzt, dass darin $\varkappa, K, K'$ als Functionen von a_0, b_0, c_0 durch die Gleichungen definirt werden:

$$\varkappa=\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right), \quad 2K=\pi\vartheta_3^2\left(0, \frac{-b_0+i}{2c_0}\right), \quad 2K'=\pi\vartheta_3^2\left(0, \frac{b_0+i}{2a_0}\right),$$

oder, was dasselbe ist, durch die Gleichungen:

$$\sqrt{\varkappa}=e^{-\frac{\pi(1+b_0 i)}{8c_0}} \cdot \frac{\sum_n e^{-\pi n(n+1)\frac{1+b_0 i}{2c_0}}}{\sum_n e^{-\pi n^2\frac{1+b_0 i}{2c_0}}},$$

$$\sqrt{2K}=\sqrt{\pi}\sum_n e^{-\pi n^2\frac{1+b_0 i}{2c_0}}, \quad \sqrt{2K'}=\sqrt{\pi}\sum_n e^{-\pi n^2\frac{1-b_0 i}{2a_0}},$$

wenn die Summationen auf alle ganzen Zahlen n von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden. Dabei ist noch zu bemerken, dass zwischen den beiden letzten Summen die Gleichung:

$$(1+b_0 i)\sum_n e^{-\pi n^2\frac{1+b_0 i}{2c_0}}=2c_0\sum_n e^{-\pi n^2\frac{1-b_0 i}{2a_0}}$$

besteht, welche aus der Theorie der Transformation der ϑ-Reihen folgt.

§ 6.

Schon in meinen ersten Untersuchungen über die elliptischen Functionen mit jenen besonderen Moduln, welche ich als singuläre bezeichnet habe, bin ich auf eine analytische Invariante derjenigen arithmetischen Aequivalenz:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \backsim (\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$

geführt worden, welche durch das Bestehen der oben im § 1 mit $(\mathfrak{B}_0)$ bezeichneten Gleichungen begründet wird. Diese Invariante findet sich in dem in den Monatsberichten abgedruckten Auszuge aus meiner am 22. Januar 1863 gelesenen Abhandlung über die Auflösung der *Pell*'schen Gleichung mittels elliptischer Functionen[1]), und sie ist im Sitzungsberichte vom 19. April 1883 im art. I dieser Reihe von Mittheilungen „zur Theorie der elliptischen Functionen"[2]) mit:

$$\Lambda\left(\sigma,\, \tau,\, \frac{-b_0+i}{2c_0},\; \frac{b_0+i}{2c_0}\right)$$

bezeichnet. Vor dieser Invariante Λ haben die im vorigen Paragraphen angegebenen Invarianten $\varkappa^2$ und $\sin^2 \operatorname{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa)$ zuvörderst das voraus, dass sie für die Classe *vollständig* aequivalenter Systeme charakteristisch sind, während die Invariante Λ für je sechs Classen, deren Unterscheidung sich nach arithmetischen Gesichtspunkten als nothwendig erweist,*) einen und denselben Werth behält. Ausserdem aber haben die Functionen $\varkappa^2$ und $\sin^2 \operatorname{am}(2\sigma K + 2\tau K i, \varkappa)$, deren reelle und imaginäre Theile die vier erforderlichen Invarianten repraesentiren, noch den Vorzug, dass sie diese vier Invarianten in elegantester Weise zu zwei Functionen zweier complexer Variabeln zusammenfassen. Aber in der ihrer Invarianteneigenschaft und dadurch ihrer eigentlichen Natur entsprechenden Darstellung dieser Functionen durch den Ausdruck ($\mathfrak{D}$) erscheinen die je zwei Theile der beiden complexen Variabeln wieder getrennt. Dieser Umstand hat mich auf den Gedanken gebracht, dass sich noch andere naturgemässe Entwickelungen der elliptischen Functionen finden lassen möchten, wenn man eine Trennung der beiden Theile der complexen Variabeln zulässt, und es lag hierbei offenbar am nächsten, die Entwickelung von $\sin \operatorname{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa)$ in eine zweifache nach sinus und cosinus der Vielfachen von σ und τ fortschreitende Doppelreihe zu versuchen. Dies hat nun in der That zu überraschend einfachen und eleganten Formeln geführt, und es hat sich dadurch gezeigt, dass man sich nicht, wie bisher, auf solche Entwickelungen von Functionen einer complexen Variabeln $x + yi$ beschränken darf, welche die Variabeln x und y nur in ihrer formalen Verbindung zu $x + yi$ enthalten.

---

*) Vergl. die Ausführungen im § 1 meiner schon oben citirten akademischen Abhandlung „Über bilineare Formen mit vier Variabelen[3])".

[1]) Bd. IV, S. 219 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. IV, S. 347 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[3]) Bd. II, S. 429 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Die Entwickelung von $\sin \operatorname{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa)$ in eine *Fourier*'sche Doppelreihe ergiebt folgendes Resultat:

$$(\mathfrak{P}) \qquad \varkappa \sin \operatorname{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa) = \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^n e^{(\nu\sigma + 2n\tau)\pi i}}{\nu K'i - 2nK}.$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;\ \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

Sondert man nämlich die Summe auf der rechten Seite in die beiden Theile, welche positiven und negativen Werthen von ν entsprechen, so wird dieselbe gleich dem Aggregat:

$$\frac{1}{2K} \sum_{\nu, n} \frac{e^{(\nu\sigma + n(2\tau+1))\pi i}}{\frac{1}{2}\nu w - n} + \frac{1}{2K} \sum_{\nu, n} \frac{e^{(-\nu\sigma + n(2\tau+1))\pi i}}{-\frac{1}{2}\nu w - n}.$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;\ \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots)$$

Führt man nun die Summationen in Beziehung auf n mit Hülfe der schon im art. I benutzten Formel aus:

$$(\mathfrak{Q}) \qquad \sum_n \frac{e^{nv\pi i}}{w - n} = \frac{2\pi i e^{vw\pi i}}{e^{2w\pi i} - 1} \qquad \left(\begin{matrix} 0 < v < 2, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots \end{matrix}\right),$$

indem man hierin $v = 2\tau + 1$ und für w das eine Mal $\frac{1}{2}\nu w$, das andere Mal $-\frac{1}{2}\nu w$ setzt, so kommt:

$$\frac{\pi i}{K} \sum_\nu \frac{e^{\left(\sigma + \tau w + \frac{1}{2} w\right)\nu\pi i}}{e^{\nu w\pi i} - 1} + \frac{\pi i}{K} \sum_\nu \frac{e^{-\left(\sigma + \tau w + \frac{1}{2} w\right)\nu\pi i}}{e^{-\nu w\pi i} - 1}$$

oder also:

$$-\frac{2\pi}{K} \sum_\nu \frac{\sin \nu(\sigma + \tau w)\pi}{e^{\frac{1}{2}\nu w\pi i} - e^{-\frac{1}{2}\nu w\pi i}} \qquad (\nu = 1, 3, 5, \ldots).$$

Setzt man in diesem Ausdruck:

$$e^{w\pi i} = q, \quad (\sigma + \tau w)\pi = x,$$

so erhält man denjenigen, welcher in der Formel (19) im art. 39 von *Jacobi*'s „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" auf der rechten Seite steht[1]), multiplicirt mit $\frac{\pi}{2K}$; sein Werth ist demgemäss:

$$\varkappa \sin \operatorname{am} 2K(\sigma + \tau w)$$

oder also in der That gleich:

$$\varkappa \sin \operatorname{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa).$$

---

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 157. H

Die Formel ($\mathfrak{P}$) kann auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$(\mathfrak{P}') \qquad \varkappa \sin\operatorname{am}(2\sigma K + 2\tau K' i, \varkappa) = \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^n \sin(\nu\sigma + 2n\tau)\pi}{\nu K' + 2nKi}.$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;\ \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

Nimmt man in derselben $\sigma = \frac{1}{2}$, $\tau = 0$, so resultirt die folgende Reihenentwickelung des Moduls:

$$(\mathfrak{P}'') \qquad \varkappa = \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(2n+\nu-1)}}{\nu K' + 2nKi},$$

und wenn $\sigma = \frac{1}{2}$ gesetzt und dann zum Werthe $\tau = \frac{1}{2}$ übergegangen wird, so kommt:

$$1 = \lim_{\tau = \frac{1}{2}} \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(2n+\nu-1)} \cos 2n\tau\pi}{\nu K' + 2nKi},$$

oder:

$$(\mathfrak{R}) \qquad 1 = \lim_{\tau = 0} \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)} \cos 2n\tau\pi}{\nu K' + 2nKi}.$$

Die Summation ist oben erst in Beziehung auf n und dann in Beziehung auf ν ausgeführt worden. Es kann aber auch in der entgegengesetzten Reihenfolge summirt werden. Um dies näher zu erörtern gehe ich von folgender allgemeineren Reihe aus:

$$\sum_{m, n} \frac{e^{2(m\xi + n\eta)\pi i}}{u + mv + nw} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

welche mit:

$$\operatorname{Ser}(\xi, \eta, u, v, w)$$

bezeichnet werden möge, und in welcher ξ, η als reell, u, v, w aber als complex vorausgesetzt werden, die letzteren beiden Grössen v, w überdies so, dass deren Verhältniss nicht reell ist. Führt man mittels der schon oben benutzten Formel ($\mathfrak{Q}$) die Summation in Beziehung auf m aus, so resultirt unter der dabei nöthigen Voraussetzung:

$$-1 < \xi < 0$$

die Gleichung:

$$(\mathfrak{S}) \qquad \operatorname{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \frac{-2\pi i}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{2n(\eta v - \xi w)\frac{\pi i}{v}}}{1 - e^{2(u+nw)\frac{\pi i}{v}}}.$$

Die beiden Reihen, in welche man die Reihe auf der rechten Seite je nach den beiden Vorzeichen der Werthe von n zerlegen kann, sind convergent. Denn wenn der reelle Theil von $\frac{2w\pi i}{v}$ mit n gleiches Zeichen hat, so ist für hinreichend grosse Werthe von n der absolute Werth des Quotienten der Division des $(n+1)$ten Gliedes durch das $n$te Glied kleiner als *Eins*, weil $1 + \xi$ positiv ist, und wenn das Vorzeichen des reellen Theiles von $\frac{2w\pi i}{v}$ demjenigen von n entgegengesetzt ist, so ist eben derselbe Quotient für hinreichend grosse Werthe von n deshalb kleiner als *Eins*, weil ξ negativ ist.

§ 7.

Die Gleichung ($\mathfrak{S}$) ist im vorigen Paragraphen dadurch erlangt worden, dass in der mit $\operatorname{Ser}(\xi, \eta, u, v, w)$ bezeichneten Reihe die Summation in Beziehung auf m ausgeführt worden ist. Das durch die Gleichung ($\mathfrak{S}$) dargestellte Resultat besteht also eigentlich darin, dass der Grenzwerth:

$$(\mathfrak{S}') \qquad \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m, n} \frac{e^{2(m\xi + n\eta)\pi i}}{u + mv + nw} \qquad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix},$$

wenn man, wie es die Reihenfolge $\lim\limits_{N=\infty} \lim\limits_{M=\infty}$ andeutet, zuerst M und dann N in's Unendliche wachsen lässt, mit dem Grenzwerth:

$$(\mathfrak{S}'') \qquad \frac{-2\pi i}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \lim_{N=\infty} \sum_{n} \frac{e^{2n(\eta v - \xi w)\frac{\pi i}{v}}}{1 - e^{2(u+nw)\frac{\pi i}{v}}} \qquad \begin{pmatrix} n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N; \\ -1 < \xi < 0 \end{pmatrix}$$

übereinstimmt. In der Gleichung:

$$(\mathfrak{S}) \qquad \operatorname{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \frac{-2\pi i}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \lim_{N=\infty} \sum_{n} \frac{e^{2n(\eta v - \xi w)\frac{\pi i}{v}}}{1 - e^{2(u+nw)\frac{\pi i}{v}}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

hat daher $\operatorname{Ser}(\xi, \eta, u, v, w)$ die durch:

$$(\mathfrak{S}^0) \qquad \operatorname{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m, n} \frac{e^{2(m\xi + n\eta)\pi i}}{u + mv + nw} \qquad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N; \\ -1 < \xi < 0 \end{pmatrix}$$

ausgedrückte Bedeutung.

Substituirt man hierin $-\eta$ für η und $-w$ für w und ersetzt dann den Summationsbuchstaben n auf der rechten Seite durch $-n$, so sieht man, dass die Relation besteht:

$$\operatorname{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \operatorname{Ser}(\xi, -\eta, u, v, -w);$$

man kann daher unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass in dem Quotienten $\frac{wi}{v}$ der reelle Theil negativ ist. Da ferner u um ein ganzes Vielfaches von w vermehrt oder vermindert werden kann, so kann man noch voraussetzen, dass der reelle Theil von $\frac{ui}{v}$ zwischen demjenigen von $\frac{wi}{v}$ und Null liege.

Nun kann der Ausdruck $(\mathfrak{S}'')$, welcher auf der rechten Seite der Gleichung $(\mathfrak{S})$ steht, in folgender Weise dargestellt werden:

$$-\frac{2\pi i}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \lim_{N=\infty} \sum_{\varepsilon, n} \frac{e^{2\varepsilon n(\eta v-\xi w)\frac{\pi i}{v}}}{1-e^{2(u+\varepsilon n w)\frac{\pi i}{v}}} \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=+1,\, n=0,1,2,\dots N\\ \varepsilon=-1,\, n=1,2,3,\dots N\end{smallmatrix}\right),$$

und es kann hierbei von den beiden, den Werthen $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ entsprechenden, durch die Gleichung:

$$\frac{1}{1-e^{2(u+\varepsilon n w)\frac{\pi i}{v}}} = \varepsilon \sum_{m} e^{2\varepsilon m(u+\varepsilon n w)\frac{\pi i}{v}} \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=+1,\, m=0,1,2,\dots\\ \varepsilon=-1,\, m=1,2,3,\dots\end{smallmatrix}\right)$$

gegebenen Reihenentwickelungen Gebrauch gemacht werden, da dieselben offenbar gemäss der über $\frac{wi}{v}$ und $\frac{ui}{v}$ gemachten Voraussetzung convergiren. Der Ausdruck $(\mathfrak{S}'')$ geht alsdann in folgenden über:

$$(\mathfrak{S}''') \qquad -\frac{2\pi i}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \sum_{\varepsilon, m, n} \varepsilon e^{(mnw+\varepsilon m u+\varepsilon n(\eta v-\xi w))\frac{2\pi i}{v}} \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=+1;\, m,n=0,1,2,\dots\\ \varepsilon=-1;\, m,n=1,2,3,\dots\end{smallmatrix}\right),$$

in welchem sich die Reihe, wie nun gezeigt werden soll, mittels der ϑ-Functionen summiren lässt.

Um dies darzuthun, gehe ich von jener Function zweier complexer Variabeln ξ, η aus:

$$\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\vartheta_0(\eta)},$$

welche ich in meiner Notiz vom 22. December 1881 eingeführt*) und dann mehrfach, z. B. im art. X dieser Mittheilungen über die elliptischen Functionen,**) behandelt

*) Monatsberichte vom December 1881 [1]).

**) Sitzungsberichte, Jahrgang 1885 [2]).

[1]) Bd. IV, S. 309 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) Bd. IV, S. 379 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

habe. In der erwähnten Notiz habe ich für jene Function die a. a. O. mit (I′) bezeichnete elegante Reihenentwickelung hergeleitet:

$$(\mathfrak{T}) \qquad \frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\vartheta_0(\eta)} = 4\pi \sum_{\mu,\nu} q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \sin(\mu\xi+\nu\eta)\pi \qquad (\mu, \nu = 1, 3, 5, \dots$$

unter den Bedingungen:

$$\left|q\right| < 1, \quad \left|q^{\frac{1}{2}}\right| < \left|e^{\xi\pi i}\right| < \left|q^{-\frac{1}{2}}\right|, \quad \left|q^{\frac{1}{2}}\right| < \left|e^{\eta\pi i}\right| < \left|q^{-\frac{1}{2}}\right|.$$

Hierbei ist, wie gewöhnlich*), wenn $q = e^{w\pi i}$ gesetzt wird:

$$\vartheta_0(\zeta, w) = \sum_n (-q)^{n^2} \cos 2n\zeta\pi, \quad \vartheta_1(\zeta, w) = q^{\frac{1}{4}} \sum_n (-1)^n q^{n^2+n} \sin(2n+1)\zeta\pi,$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

und es ist nur, der Einfachheit halber, das zweite Argument w, welches oben überall dasselbe ist, weggelassen worden.

Die Formel $(\mathfrak{T})$ kann offenbar, da $q = e^{w\pi i}$ gesetzt worden ist, auch *so* dargestellt werden:

$$(\mathfrak{T}_0) \qquad -\frac{1}{2\pi i} \frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\vartheta_0(\eta)} = \sum_{\varepsilon,\mu,\nu} \varepsilon e^{(\frac{1}{2}\mu\nu w+\varepsilon\mu\xi+\varepsilon\nu\eta)\pi i} \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=+1,-1;\\ \mu,\nu=1,3,5,\dots\end{smallmatrix}\right),$$

und für die Reihe auf der rechten Seite erhält man, wenn man an Stelle der Summationsbuchstaben μ, ν die durch die Gleichungen:

$$\mu = 2m+\varepsilon, \quad \nu = 2n+\varepsilon$$

definirten Summationsbuchstaben m, n einführt, folgenden Ausdruck:

$$e^{(\xi+\eta+\frac{1}{2}w)\pi i} \sum_{\varepsilon, m, n} \varepsilon e^{(2mnw+\varepsilon m(2\xi+w)+\varepsilon n(2\eta+w))\pi i} \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=+1;\, m,n=0,1,2,\dots\\ \varepsilon=-1;\, m,n=1,2,3,\dots\end{smallmatrix}\right).$$

Wenn man ferner von den Relationen Gebrauch macht:

$$\vartheta_0(\xi) = -ie^{(\frac{1}{4}w+\xi)\pi i}\vartheta_1\left(\xi+\frac{1}{2}w\right), \quad \vartheta_0(\eta) = -ie^{(\frac{1}{4}w+\eta)\pi i}\vartheta_1\left(\eta+\frac{1}{2}w\right),$$
$$\vartheta_1(\xi+\eta) = -e^{(w+2\xi+2\eta)\pi i}\vartheta_1(\xi+\eta+w),$$

*) Vergl. art. XI, § 1 (Sitzungsberichte, Jahrgang 1886) [1]).

[1]) Bd. IV, S. 390 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

und $\xi + \frac{1}{2}w = \xi'$, $\eta + \frac{1}{2}w = \eta'$, $w = w'$ setzt, so erhält man die Formel:

$$(\mathfrak{T}_1) \qquad \frac{\vartheta_1'(0,w')\,\vartheta_1(\xi'+\eta',w')}{\vartheta_1(\xi',w')\,\vartheta_1(\eta',w')} = -2\pi i \sum_{\varepsilon,m,n} \varepsilon\, e^{(mnw' + \varepsilon m\xi' + \varepsilon n\eta')2\pi i},$$

$$(\varepsilon = +1;\ m,n = 0,1,2,\ldots;\ \varepsilon = -1;\ m,n = 1,2,3,\ldots)$$

unter der aus den obigen Bedingungen für ($\mathfrak{T}$) resultirenden Bedingung,

> dass die mit i multiplicirten Theile von w', ξ', η' positiv, und die letzteren beiden kleiner als der erste sein müssen.

Die Reihe auf der rechten Seite von ($\mathfrak{T}_1$) wird mit derjenigen, welche in dem Ausdruck ($\mathfrak{S}'''$) vorkommt, identisch, wenn man:

$$w' = \frac{w}{v},\quad \xi' = \frac{u}{v},\quad \eta' = \frac{\eta v - \xi w}{v}$$

setzt, und es stimmen dabei die obigen Bedingungen für $\frac{w}{v}$ und $\frac{u}{v}$ mit denen für w', ξ', η' überein, da η reell und $0 < -\xi < 1$ ist. Es resultirt demnach die Gleichung:

$$(\mathfrak{U}^0) \qquad \mathrm{Ser}(\xi,\eta,u,v,w) = \frac{1}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u+\eta v-\xi w}{v},\frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\eta v-\xi w}{v},\frac{w}{v}\right)} \qquad (-1<\xi<0),$$

in welcher nur die eine, oben mit ϑ_1 bezeichnete ϑ-Function vorkommt und deshalb, wie üblich, der Index 1 bei ϑ weggelassen ist. Setzt man nun:

$$\xi = -\tau',\quad \eta = \sigma',\quad u' = \eta' v = v\sigma' + w\tau',$$

und bestimmt zwei reelle Grössen σ, τ so, dass:

$$u = v\sigma + w\tau$$

wird, so geht die Gleichung ($\mathfrak{U}^0$) in folgende über:

$$(\mathfrak{U}) \qquad \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma' - m\tau')2\pi i}}{(\sigma+m)v + (\tau+n)w} = \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau' u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u+u'}{v},\frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u'}{v},\frac{w}{v}\right)},$$

in welcher die Summation auf alle ganzen Zahlen m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken ist. Die Gültigkeitsbedingungen, an welche die Herleitung dieser Gleichung geknüpft ist, sind *erstens* gemäss den oben für die Formel ($\mathfrak{T}_1$) angegebenen Bedingungen, dass die mit i multiplicirten Theile von $\frac{w}{v}$, $\frac{u}{v}$ und $\frac{u'}{v}$ positiv und die letzteren beiden kleiner als der erste sein müssen, *zweitens* gemäss der Bedingung $-1 < \xi < 0$, dass $0 < \tau' < 1$ sein muss.

Die Bedingung, dass der mit i multiplicirte Theil von $\frac{w}{v}$ positiv sei, ist gemäss der oben schon über $\frac{w}{v}$ gemachten Voraussetzung erfüllt. Da ferner:

$$\frac{u}{v} = \sigma + \tau\frac{w}{v},\quad \frac{u'}{v} = \sigma' + \tau'\frac{w}{v}$$

und sowohl σ als σ' reell ist, so sind die übrigen Bedingungen dann und nur dann erfüllt, wenn die reellen Grössen τ, τ' den Ungleichheiten:

$$0 < \tau < 1,\quad 0 < \tau' < 1$$

genügen. Aber es soll jetzt gezeigt werden, dass diese beiden Bedingungen, wenn auch die *Herleitung* der Gleichung ($\mathfrak{U}$) an dieselbe geknüpft war, doch nicht nothwendige sind, und dass die Gleichung ihre Gültigkeit für Werthe von τ und τ' behält, die in irgend einem von zwei benachbarten ganzen Zahlen eingeschlossenen Intervalle liegen. Hierfür ist offenbar nur erforderlich nachzuweisen, dass die Gleichung ($\mathfrak{U}$) bestehen bleibt, wenn $\tau + 1$ an Stelle von τ gesetzt wird, und auch, wenn $\tau' + 1$ für τ' substituirt wird.

Wird nun zuvörderst $\tau + 1$ an die Stelle von τ und demgemäss $u + w$ für u gesetzt, so tritt auf der linken Seite der Gleichung ($\mathfrak{U}$) der Factor $e^{-2\sigma'\pi i}$ hinzu. Dies erhellt unmittelbar, wenn der Summationsbuchstabe n durch $n-1$ ersetzt wird. Auf der rechten Seite tritt, wenn von der Relation:

$$\frac{\vartheta(\xi+w,w)}{\vartheta(\eta+w,w)} = e^{(\eta-\xi)2\pi i}\frac{\vartheta(\xi,w)}{\vartheta(\eta,w)}$$

Gebrauch gemacht wird, der folgende Factor hinzu:

$$e^{(w\tau' - u')\frac{2\pi i}{v}}.$$

Dessen Werth stimmt aber mit dem von $e^{-2\sigma'\pi i}$ überein, da $u' = v\sigma' + w\tau'$ ist. Die Gleichung ($\mathfrak{U}$) bleibt also bestehen, wenn $\tau + 1$ an die Stelle von τ gesetzt wird.

Wenn man nunmehr $\tau' + 1$ für τ' substituirt, so wird der Werth der Reihe auf der linken Seite der Gleichung ($\mathfrak{U}$) offenbar nicht alterirt. Auf der rechten Seite tritt bei dem Exponentialfactor $e^{\frac{2\tau' u\pi i}{v}}$ der Factor $e^{\frac{2u\pi i}{v}}$ hinzu; zugleich tritt aber bei dem Quotienten der ϑ-Functionen, wenn wieder von der eben benutzten Relation:

$$\frac{\vartheta(\xi+w,w)}{\vartheta(\eta+w,w)} = e^{(\eta-\xi)2\pi i}\frac{\vartheta(\xi,w)}{\vartheta(\eta,w)}$$

Gebrauch gemacht wird, der Factor $e^{-\frac{2u\pi i}{v}}$ hinzu. Die Gleichung (𝔘) bleibt also auch bestehen, wenn $\tau'+1$ für τ' substituirt wird, und sie gilt demnach

> für beliebige reelle Grössen σ, σ' und für alle reellen Werthe von τ und τ' mit alleinigem Ausschluss der ganzzahligen.

Die Gleichung (𝔘) ist zwar nur unter der Voraussetzung hergeleitet worden, dass für die Reihe auf der linken Seite der Grenzwerth:

$$(\mathfrak{S}') \qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma'-m\tau')2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w} \qquad \begin{pmatrix} m=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm M \\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm N \end{pmatrix}$$

genommen werde, aber sie behält ihre Gültigkeit, wenn man unter der Reihe auf der linken Seite den allgemeineren Grenzwerth versteht:

$$(\mathfrak{S}_0) \qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m',n'}\frac{e^{(n'\sigma'-m'\tau')2\pi i}}{(\sigma+m')v+(\tau+n')w},$$
$$(m'=\alpha m+\beta n,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm M;\ n'=\alpha' m+\beta' n,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm N)$$

wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ irgend welche ganze Zahlen bedeuten, für die $\alpha\beta'-\beta\alpha'=1$ und weder $\alpha\tau-\alpha'\sigma$ noch $\alpha\tau'-\alpha'\sigma'$ eine ganze Zahl ist.

Um dies darzuthun, braucht nur gezeigt zu werden, dass die Gleichung (𝔘) gültig bleibt, sowohl dann wenn:

$$m'=m+n, \quad n'=n,$$

als auch dann wenn:

$$m'=-n, \qquad n'=m$$

gesetzt wird, da aus diesen zwei Transformationen der Summationsbuchstaben m, n sich jede der Transformationen:

$$m'=\alpha m+\beta n, \quad n'=\alpha' m+\beta' n \qquad (\alpha\beta'-\alpha'\beta=1)$$

zusammensetzen lässt*).

---

*) Vergl. die Ausführungen in meinem im Monatsbericht vom October 1866 abgedruckten Aufsatz: „Über bilineare Formen"[1]).

[1]) Bd. I, S. 159 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

Nun kann die Verwandlung von m in $m+n$ in der Reihe auf der linken Seite der Gleichung (𝔘) durch eine gleichzeitige Verwandlung von:

$$\sigma \text{ in } \sigma-\tau, \quad \sigma' \text{ in } \sigma'-\tau', \quad w \text{ in } w+v$$

ersetzt werden, und hierbei bleibt u, u', τ und überhaupt der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (𝔘) ungeändert, da jede der ϑ-Functionen im Zähler und Nenner bei der Verwandlung von w in $w+v$ gemäss der Relation:

$$\vartheta\left(\zeta, \frac{w}{v}+1\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\vartheta\left(\zeta, \frac{w}{v}\right)$$

einen und denselben Factor bekommt.

Ferner kann die Verwandlung von m in $-n$ und von n in m auf der linken Seite der Gleichung (𝔘) durch den Übergang von:

$$v,\ w,\quad \sigma,\ \tau,\quad \sigma',\ \tau$$

in

$$-w,\ v,\quad -\tau,\ \sigma,\quad -\tau',\ \sigma'$$

ersetzt werden, und bei diesem Übergang wird der Werth des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (𝔘) nicht alterirt, denn es bleiben hierbei u und u' ungeändert, und die nachzuweisende Gleichung:

$$\frac{1}{v}e^{\frac{2\tau' u\pi i}{v}}\frac{\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u+u'}{v},\frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u'}{v},\frac{w}{v}\right)} = \frac{1}{w}e^{\frac{-2\sigma' u\pi i}{w}}\frac{\vartheta'\left(0,\frac{-v}{w}\right)\vartheta\left(\frac{u+u'}{w},\frac{-v}{w}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{w},\frac{-v}{w}\right)\vartheta\left(\frac{u'}{w},\frac{-v}{w}\right)}$$

wird verificirt, wenn man die ϑ-Functionen auf der rechten Seite gemäss den Relationen:

$$\vartheta\left(\zeta,\frac{-v}{w}\right) = -i\left(\sqrt{\frac{-wi}{v}}\right)e^{\frac{\zeta^2 w\pi i}{v}}\vartheta\left(\frac{\zeta w}{v},\frac{w}{v}\right),$$

$$\vartheta'\left(0,\frac{-v}{w}\right) = \left(\sqrt{\frac{-wi}{v}}\right)^3\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)$$

transformirt.

Da der mit $(\mathfrak{S}_0)$ bezeichnete Grenzwerth in den vorhergehenden, mit $(\mathfrak{S}')$ bezeichneten, übergeht, wenn

$$\alpha\sigma+\beta\tau,\quad \alpha\sigma'+\beta\tau',\quad \alpha'\sigma+\beta'\tau,\quad \alpha'\sigma'+\beta'\tau',\quad v,\quad w$$

für

$$\sigma,\quad \sigma',\quad \tau,\quad \tau',\quad \alpha v+\alpha' w,\quad \beta v+\beta' w$$

gesetzt wird, so sind die Systeme $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ auszuschliessen, für welche $\alpha\tau - \alpha'\sigma$ oder $\alpha\tau' - \alpha'\sigma'$ eine ganze Zahl wird.

Durch die complexen Werthe von u und u' sind die reellen Werthe von $\sigma, \tau, \sigma', \tau'$, für welche:

$$u = v\sigma + w\tau, \quad u' = v\sigma' + w\tau'$$

ist, vollständig bestimmt. Der obige Grenzwerth $(\mathfrak{S}_0)$ ist daher durch die complexen Argumente:

$$u', u, v, w$$

genau definirt und soll deshalb, obgleich er keineswegs im gewöhnlichen Sinne eine „Function der complexen Variabeln" u' ist, mit:

$$\mathrm{Ser}(u', u, v, w)$$

bezeichnet werden. Alsdann besteht den vorstehenden Entwickelungen gemäss die Hauptgleichung:

$$(\mathfrak{U}_1) \qquad \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u_0+u}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)},$$

und es sind hierbei u_0, u, v, w complexe Grössen, welche nur der Bedingung genügen müssen, dass der mit i multiplicirte Theil von $\frac{w}{v}$ positiv ist. Der für $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ zu nehmende Grenzwerth $(\mathfrak{S}_0)$ ist nur insoweit beschränkt, dass für die durch die Gleichungen:

$$u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0, \quad u = v\sigma + w\tau$$

bestimmten reellen Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$, weder $\alpha\tau - \alpha'\sigma$ noch $\alpha\tau_0 - \alpha'\sigma_0$ einen ganzzahligen Werth erhalten darf; aber auch diese Beschränkung fällt weg, wenn man den Grenzwerth $(\mathfrak{S}_0)$ erst für benachbarte Werthe von u und u_0 bestimmt und dann zu u und u_0 übergeht. So kann man, um die im vorigen Paragraphen mit $(\mathfrak{P})$ bezeichnete Entwickelung von $\varkappa \sin\mathrm{am}(2\sigma_0 K + 2\tau_0 K'i, \varkappa)$ zu erhalten, in der Formel $(\mathfrak{U}_1)$:

$$u = \sigma + \tfrac{1}{2}K'i, \quad v = K, \quad w = K'i$$

setzen und an Stelle der Reihe in $(\mathfrak{P})$ selbst den *Grenzwerth* nehmen, welchem sich die Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ für $\sigma = 0$ nähert, damit die Summation nicht bloss in der dort benutzten Reihenfolge ausgeführt werden kann.

Die Gleichung $(\mathfrak{U}_1)$ giebt für den Ausdruck auf der rechten Seite, wenn derselbe nur als Function des complexen Arguments u aufgefasst wird, die Zerlegung in Partialbrüche, und zugleich, wenn er als Function der durch das complexe Argument u_0 bestimmten reellen Variabeln σ_0, τ_0 aufgefasst wird, die *Fourier*'sche Reihenentwickelung nach sinus und cosinus ganzer Vielfacher von $\sigma_0\pi$ und $\tau_0\pi$.

§ 8.

Der Ausdruck:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u_0+u}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)} \qquad \binom{u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w}{u = \sigma v + \tau w},$$

auf welchen die Summation der Reihe:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + nw} \qquad \binom{m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm M}{n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N}$$

geführt hat, ist eine Function der sechs Grössen:

$$\sigma_0, \ \tau_0, \ \sigma, \ \tau, \ v, \ w,$$

welche ihren Werth nicht ändert, wenn:

$$\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, \ \ \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0, \ \ \alpha\sigma + \beta\tau, \ \ \alpha'\sigma + \beta'\tau, \ \ \beta'v - \alpha'w, \ \ -\beta v + \alpha w$$

für: $\sigma_0, \quad \tau_0, \quad \sigma, \quad \tau, \quad v, \quad w$

substituirt wird, vorausgesetzt, dass $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen sind, welche der Bedingung:

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$$

genügen. Setzt man also:

$$(\mathfrak{B}') \qquad \begin{aligned} \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, & \tau_0' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0, \\ \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau, & \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau, \\ v' &= \beta'v - \alpha'w, & w' &= -\beta v + \alpha w, \end{aligned}$$

und bezeichnet alsdann die Systeme:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w), \quad (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w')$$

als einander aequivalent, so stellt jener Ausdruck $(\mathfrak{B})$ eine Invariante der Aequivalenz:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \sim (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w')$$

dar.

Man kann den Ausdruck $(\mathfrak{B})$ auch als eine Function der vier complexen Grössen:

$$u_0, u, v, w$$

auffassen, da die reellen Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ durch u_0, u, v, w vollkommen definirt sind. Es sind nämlich τ_0, τ als diejenigen reellen Grössen bestimmt, für welche die aus den Gleichungen:

$$\sigma_0 = \frac{u_0 - \tau_0 w}{v}, \quad \sigma = \frac{u - \tau w}{v}$$

hervorgehenden Grössen σ_0 und σ reell werden. Dabei ist zu bemerken, dass die Grössen u_0 und u selbst Invarianten jener Aequivalenz $(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \sim (\sigma'_0, \tau'_0, \sigma', \tau', v', w')$ sind.

Die Invarianteneigenschaft der durch $(\mathfrak{B})$ dargestellten Function von u_0, u, v, w tritt klar hervor, wenn man darin die ϑ-Functionen durch jene Function *Alpha* ausdrückt, welche ich im § 1 des art. XIX eingeführt habe.*) Es ist a. a. O. mit $\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ der Ausdruck:

$$\left(\frac{2\pi}{\vartheta'(0, w)}\right)^{\frac{1}{3}} e^{(\sigma + \tau w)\tau\pi i}\, \vartheta(\sigma + \tau w, w)$$

oder der, seinem Werthe nach, damit übereinstimmende Ausdruck:

$$e^{\left(\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)w + \sigma\tau - \sigma + \frac{1}{2}\right)\pi i} \prod_{\varepsilon, n} \left(1 - e^{(nw + \varepsilon\sigma + \varepsilon\tau w)2\pi i}\right)$$
$$(\varepsilon = +1;\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ \varepsilon = -1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bezeichnet worden, und die reellen Grössen a_0, b_0, c_0 waren dabei durch die Gleichungen:

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \quad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1$$

bestimmt. Die Bezeichnung *Alpha* hatte ich als den Anfangsbuchstaben des Wortes *ἄτροπος* gewählt, welches wohl als der griechische Ausdruck für Invariante gelten kann. Da aber für den vorliegenden Zweck an Stelle der Grössen $\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0$ die Grössen u, v, w eingeführt werden müssen, welche mit jenen durch die Gleichungen:

$$u = \sigma v + \tau w, \quad (b_0 - i)v + 2c_0 w = 0$$

*) Sitzungsbericht vom 4. April 1889[1]).

[1]) Bd. V, S. 50 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

H

verbunden sind, so soll nunmehr:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \mathrm{Atr}(u, v, w)$$

gesetzt werden. Die Function $\mathrm{Atr}(u, v, w)$ kann demnach durch die Gleichung definirt werden:

$$(\mathfrak{B}^0) \qquad \mathrm{Atr}(u, v, w) = 2e^{\left(\tau u + \frac{1}{6}w\right)\frac{\pi i}{v}} \sin\frac{u\pi}{v} \prod_{\varepsilon, n}\left(1 - e^{(nw + \varepsilon u)\frac{2\pi i}{v}}\right),$$
$$(\varepsilon = +1, -1;\ n = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.})$$

und τ ist hierbei als diejenige reelle Grösse bestimmt, für welche die Grösse:

$$\frac{u - \tau w}{v}$$

reell wird.

Es ist klar, dass der Werth von $\mathrm{Atr}(u, v, w)$ nur von den Verhältnissen $u : v : w$ abhängt, aber der Grenzwerth:

$$\lim_{\sigma = 0, \tau = 0} \frac{\mathrm{Atr}(\sigma v + \tau w, v, w)}{\sigma v + \tau w},$$

welcher mit $\mathrm{Atr}'(0, v, w)$ bezeichnet werden möge, ist nicht bloss von dem Verhältnisse $v : w$ abhängig. Bedeutet $\mathrm{A}'(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ die nach σ genommene Ableitung der Function $\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$, so ist gemäss der Gleichung $(\mathfrak{B})$:

$$\mathrm{A}'(0, 0, a_0, b_0, c_0) = v\,\mathrm{Atr}'(0, v, w),$$

und es finden zwischen den Functionen ϑ und Atr folgende Relationen statt:

$$(\mathfrak{B}') \qquad \begin{aligned} 2\pi\left(\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)\right)^2 &= v e^{-\frac{2\tau u\pi i}{v}} \mathrm{Atr}'(0, v, w)\,(\mathrm{Atr}(u, v, w))^2, \\ 2\pi\left(\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right)\right)^2 &= (v\,\mathrm{Atr}'(0, v, w))^3. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun, wie oben, zwei Systeme (u, v, w), (u', v', w') als aequivalent, wenn zwischen denselben die Beziehungen bestehen:

$$u = u', v = \alpha v' + \alpha' w', w = \beta v' + \beta' w' \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

so sind die zwölften Potenzen der Functionen $\mathrm{Atr}(u, v, w)$ und $\mathrm{Atr}'(0, v, w)$ Invarianten dieser Aequivalenz:

$$(u, v, w) \sim (u', v', w');$$

denn mit Hülfe der für die ϑ-Function geltenden Transformationsgleichungen:

$$\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w+v}{v}\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right),$$

$$\vartheta\left(\frac{u}{w}, \frac{-v}{w}\right) = -i\left(\sqrt{\frac{-wi}{v}}\right)e^{\frac{u^2 w\pi i}{v}}\,\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$$

erschliesst man aus den Relationen $(\mathfrak{W}')$, dass für ganze Zahlen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, welche die Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ erfüllen, die Gleichung besteht:

$$(\mathfrak{W}'') \qquad \mathrm{Atr}(u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) = e^{\frac{h\pi i}{6}}\,\mathrm{Atr}(u, v, w),$$

in welcher h einen ganzzahligen Werth hat, und es findet demgemäss auch für $\mathrm{Atr}'(0, v, w)$ die Transformationsrelation statt:

$$(\mathfrak{W}''') \qquad \mathrm{Atr}'(0, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) = e^{\frac{h\pi i}{6}}\,\mathrm{Atr}'(0, v, w).$$

Der Ausdruck $(\mathfrak{B})$ geht, wenn man darin gemäss den Gleichungen $(\mathfrak{W}')$ die Invarianten $\mathrm{Atr}(u, v, w)$, $\mathrm{Atr}'(0, v, w)$ für die ϑ-Functionen einsetzt, in folgenden über:

$$(\mathfrak{B}^0) \qquad e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i}\,\frac{\mathrm{Atr}'(0, v, w)\,\mathrm{Atr}(u_0 + u, v, w)}{\mathrm{Atr}(u_0, v, w)\,\mathrm{Atr}(u, v, w)},$$

und dessen Invarianteneigenschaft für die Aequivalenz:

$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

leuchtet unmittelbar ein, da erstens der mit $e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i}$ multiplicirte Ausdruck, vermöge der Gleichungen $(\mathfrak{W}'')$ und $(\mathfrak{W}''')$, beim Übergange von v, w in $\alpha v + \alpha' w$, $\beta v + \beta' w$ ungeändert bleibt, und da zweitens, weil hierbei zugleich die Grössen

$$\begin{array}{lcccc} & \sigma, & \tau, & \sigma_0, & \tau_0 \\ \text{in} & \beta'\sigma - \beta\tau, & -\alpha'\sigma + \alpha\tau, & \beta'\sigma_0 - \beta\tau_0, & -\alpha'\sigma_0 + \alpha\tau_0 \end{array}$$

übergehen, auch der Factor $e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i}$ seinen Werth nicht ändert.

Durch den Ausdruck $(\mathfrak{B}^0)$ wird es also in Evidenz gesetzt, dass derselbe eine Function der sechs Grössen:

$$\sigma_0,\ \tau_0,\ \sigma,\ \tau,\ v,\ w,$$

oder der vier Grössen:

$$u_0,\ u,\ v,\ w,$$

darstellt, welche eine Invariante der Aequivalenzen:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \sim (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w'),$$
$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, v', w')$$

ist, wenn die Beziehung der beiden aequivalenten Grössensysteme durch die Relationen:

$$(\mathfrak{B}') \qquad \begin{aligned} \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, & \tau_0' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0, \\ \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau, & \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau, \\ v' &= \beta' v - \alpha' w, & w' &= -\beta v + \alpha w, \\ u_0 &= \sigma_0 v - \tau_0 w = \sigma_0' v' + \tau_0' w', \\ u &= \sigma v + \tau w = \sigma' v' + \tau' w' \end{aligned} \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

definirt wird.

Bezeichnet man zur Abkürzung die durch den Ausdruck $(\mathfrak{B}^0)$ dargestellte Function mit $\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$, so bestehen die beiden Gleichungen:

$$(\mathfrak{X}) \qquad \begin{aligned} \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) &= e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i}\,\frac{\mathrm{Atr}'(0, v, w)\,\mathrm{Atr}(u_0 + u, v, w)}{\mathrm{Atr}(u_0, v, w)\,\mathrm{Atr}(u, v, w)}, \\ \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) &= \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1), \end{aligned}$$

von denen die erstere die Definition der Function $\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$ enthält, und die letztere ihre Invarianteneigenschaft darlegt.

§ 9.

Bei Anwendung der für zwei beliebige ganze Zahlen s, t bestehenden Relation:

$$\vartheta\left(\frac{u + sv + tw}{v}, \frac{w}{v}\right) = e^{-(t^2 w + 2tu + sv + tv)\frac{\pi i}{v}}\,\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$$

ergiebt sich aus der Definition von $\mathrm{Atr}(u, v, w)$, welche in der ersten von den Gleichungen $(\mathfrak{W}')$ enthalten ist, die Relation:

$$\mathrm{Atr}(u + sv + tw, v, w) = (-1)^{(st+s+t)}e^{(s\tau - t\sigma)\pi i}\,\mathrm{Atr}(u, v, w),$$

aus welcher für die Function $\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$ die Gleichung folgt:

$$(\overline{\mathfrak{X}}) \qquad \overline{\mathrm{Atr}}(u_0 + s_0 v + t_0 w, u + sv + tw, v, w) = e^{(s\tau_0 - t\sigma_0)2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w).$$

Nun ist:

$$u_0 + s_0 v + t_0 w = (\sigma_0 + s_0) v + (\tau_0 + t_0) w, \quad u + sv + tw = (\sigma + s) v + (\tau + t) w;$$

setzt man also:

$$(\mathfrak{B}'') \qquad \begin{aligned} \sigma_0'' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma_0, & \tau_0'' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma_0', \\ \sigma'' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma, & \tau'' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma', \\ v'' &= \beta' v - \alpha' w, & w' &= -\beta v + \alpha w, \\ u_0'' &= \sigma_0'' v'' + \tau_0'' w'' = u + \gamma_0 v'' + \gamma_0' w'', \\ u'' &= \sigma'' v'' + \tau'' w'' = u + \gamma v'' + \gamma' w'', \end{aligned}$$

wo $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \gamma_0, \gamma_0'$ ganze Zahlen bedeuten, für welche

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$$

ist, so kommt:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0'', u'', v'', w'') = e^{(\gamma\tau_0'' - \gamma'\sigma_0'')2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\mathfrak{X}') \qquad \overline{\mathrm{Atr}}(u_0'', u'', v'', w'') = e^{((\alpha'\gamma - \alpha\gamma')\sigma_0 + (\beta'\gamma - \beta\gamma')\tau_0)2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w).$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$e^{(\sigma_0\tau - \sigma\tau_0)2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w) = \overline{\mathrm{Atr}_1}\,(u_0, u, v, w),$$

so ergiebt sich aus der Gleichung $(\mathfrak{X}')$ die folgende:

$$\overline{\mathrm{Atr}_1}\,(u_0'', u'', v''\, w'') = e^{(\gamma_0\tau'' - \gamma_0'\sigma'')2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}_1}\,(u_0, u, v, w),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\mathfrak{X}'') \qquad \overline{\mathrm{Atr}_1}\,(u_0'', u'', v''\, w'') = e^{((\alpha'\gamma_0 - \alpha\gamma_0')\sigma + (\beta'\gamma_0 - \beta\gamma_0')\tau)2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}_1}\,(u_0, u, v, w).$$

Nimmt man $\gamma = \gamma' = 0$, so ist:

$$\overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0'', u'', v'', w'') = \overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w),$$

und es zeigt sich also, dass $\overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w)$ nicht bloss, wie im vorigen Paragraphen dargethan ist, eine Invariante der Aequivalenz:

$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

sondern auch eine Invariante der weiteren Aequivalenz:

$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0, + \gamma_0 v + \gamma_0' w, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w)$$

ist, in welcher $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma_0, \gamma_0'$ beliebige, nur der Bedingung:

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$$

unterworfene, ganze Zahlen bedeuten.

Nimmt man aber $\gamma_0 = \gamma_0' = 0$, so ist:

$$\overline{\mathrm{Atr}_1}\,(u_0'', u'', v'', w'') = \overline{\mathrm{Atr}_1}\,(u_0, u, v, w),$$

und es zeigt sich also, dass die Function $\overline{\mathrm{Atr}_1}\,(u_0, u, v, w)$ eine Invariante der Aequivalenz:

$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u + \gamma v + \gamma' w, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w)$$

ist, in welcher $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ ganze Zahlen sind, welche nur die Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ erfüllen müssen.

§ 10.

Sind $\sigma_0'', \tau_0'', \sigma'', \tau''$ irgend welche reelle Grössen und $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ irgend welche der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ genügende ganze Zahlen, so lassen sich offenbar die ganzen Zahlen:

$$s_0, \; t_0, \; s, \; t$$

so bestimmen, dass die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sigma_0'' &= \alpha(\sigma_0 + s_0) + \beta(\tau_0 + t_0), & \tau_0'' &= \alpha'(\sigma_0 + s_0) + \beta'(\tau_0 + t_0), \\ \sigma'' &= \alpha(\sigma + s) + \beta(\tau + t), & \tau'' &= \alpha'(\sigma + s) + \beta'(\tau + t) \end{aligned}$$

definirten Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ nicht negativ und kleiner als Eins werden. Nimmt man alsdann in den Gleichungen $(\mathfrak{B}'')$ des vorigen Paragraphen:

$$\gamma_0 = \alpha s_0 + \beta t_0, \quad \gamma_0' = \alpha' s_0 + \beta' t_0, \quad \gamma = \alpha s + \beta t, \quad \gamma' = \alpha' s + \beta' t,$$

so geht die Gleichung $(\mathfrak{X}')$ in folgende über:

$$(\mathfrak{X}^0) \qquad \overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0'', u'', v'', w'') = e^{(s\tau_0 - t\sigma_0)2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w),$$

mittels deren sich die mit $\overline{\mathrm{Atr}}$ bezeichnete Function irgend welcher Argumente u_0'', u'', v'', w'' auf eine solche zurückführen lässt, bei welcher die Argumente v, w durch Transformationsgleichungen:

$$v = \alpha v'' + \alpha' w'', \quad w = \beta v'' + \beta' w'' \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

mit gegebenen Coefficienten $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, aus den Argumenten v'', w'' hervorgehen, während die durch die Gleichungen:

$$u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w, \quad u = \sigma v + \tau w$$

bestimmten reellen Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ sämmtlich innerhalb des Intervalls $(0, 1)$ oder an seiner unteren Grenze liegen. Dabei ist zu bemerken, dass die Function $\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$, wie aus der am Schlusse des § 8 gegebenen Definition $(\mathfrak{X})$ hervorgeht, dann und nur dann keinen endlichen Werth hat, wenn u_0 oder u gleich Null wird, d. h. also, wenn die beiden Argumente σ_0 und τ_0 oder die beiden Argumente σ und τ gleichzeitig Null werden.

Für die Function $\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$, in welcher:

$$u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w, \quad u = \sigma v + \tau w \qquad (0<\tau_0<1,\ 0<\tau<1)$$

ist, gilt gemäss der im § 7 hergeleiteten Gleichung $(\mathfrak{X}_1)$ die Reihenentwickelung:

$$(\mathfrak{Y}) \qquad \overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w) = -\frac{2\pi i}{v} e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{\varepsilon, m, n} \varepsilon e^{(\varepsilon m(\varepsilon n w + u) + \varepsilon n u_0)\frac{2\pi i}{v}}.$$

$$\left(\begin{matrix} \varepsilon=+1; & m=0,1,2,\dots M; & n=0,1,2,\dots N \\ \varepsilon=-1; & m=\ \ 1,2,\dots M; & n=\ \ 1,2,\dots N \end{matrix}\right)$$

Ferner geht aus der bereits im § 6 angewendeten, dort mit $(\mathfrak{Q})$ bezeichneten Formel:

$$(\mathfrak{Z}^0) \qquad \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=+M} \frac{e^{-2m\zeta\pi i}}{z+m} = \frac{2\pi i e^{2\zeta z\pi i}}{e^{2z\pi i}-1}$$

die für jeden positiven Bruch ζ und für jede beliebige complexe (nicht reelle) Grösse z gültige Gleichung hervor:

$$(\mathfrak{Z}) \qquad \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=+M} \frac{e^{-2\zeta(m+z)\pi i}}{m+z} = -2\varepsilon\pi i \lim_{M=\infty} \sum_m e^{2\varepsilon m z\pi i},$$

in welcher ε das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theils der complexen Grösse z bedeutet, und die Summation rechts für $\varepsilon = +1$ auf die Werthe:

$$m = 0, 1, 2, \dots M,$$

für $\varepsilon = -1$ aber nur auf die Werthe:

$$m = 1, 2 \dots M$$

zu erstrecken ist.

Nimmt man in der Gleichung $(\mathfrak{Z})$:

$$\zeta = \tau_0, \quad z = \frac{\varepsilon n w + u}{v} = \sigma + (\varepsilon n + \tau)\frac{w}{v},$$

so kann dieselbe auf die in $(\mathfrak{Y})$ vorkommende Summation:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{\varepsilon, m} \varepsilon e^{\varepsilon m(\varepsilon n w + u)\frac{2\pi i}{v}} \qquad \left(\begin{matrix} \varepsilon=+1; & m=0,1,2,\dots M \\ \varepsilon=-1, & m=\ \ 1,2,\dots M \end{matrix}\right)$$

angewendet werden, weil dort die Zahl n für $\varepsilon = +1$ die Werthe:

$$0, 1, 2, \dots N,$$

für $\varepsilon = -1$ aber nur die Werthe:

$$1, 2, \dots N$$

annimmt und also auf Grund der Voraussetzungen, dass $0 < \tau < 1$ und der mit i multiplicirte Theil von $\frac{w}{v}$ positiv sei, ε stets das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theils der complexen Grösse:

$$\sigma + (\varepsilon n + \tau)\frac{w}{v} \quad \text{oder} \quad \varepsilon n w + u$$

ist. Benutzt man demnach die in der angegebenen Weise aus $(\mathfrak{Z})$ resultirende, sowohl für $\varepsilon = +1$ als auch für $\varepsilon = -1$ geltende Gleichung:

$$-\frac{2\varepsilon\pi i}{v} \lim_{M=\infty} \sum_m e^{\varepsilon m(\varepsilon n w + u)\frac{2\pi i}{v}} = \lim_{M=\infty} \sum_m \frac{e^{-\tau_0(u + mv + \varepsilon n w)\frac{2\pi i}{v}}}{u + mv + \varepsilon n w} \qquad \left(\begin{matrix} \varepsilon=+1, & m=0,1,2,\dots M \\ \varepsilon=-1, & m=\ \ 1,2,\dots M \end{matrix}\right) \ (m=0,\pm1,\pm2,\dots\pm M)$$

für die Ausführung der auf m bezüglichen Summation auf der rechten Seite der Gleichung $(\mathfrak{Y})$, so kommt:

$$\overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{\varepsilon, m, n} \frac{e^{(\varepsilon n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + \varepsilon n w},$$

$$(m=0,\pm1,\pm2,\dots\pm M;\ \varepsilon=+1;\ n=0,1,2,\dots,N;\ \varepsilon=-1;\ n=1,2,\dots N)$$

oder also:

$$(\mathfrak{Z}') \qquad \overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m, n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + mw}.$$

$$(m=0,\pm1,\pm2,\dots\pm M;\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\pm N)$$

Von den bei der Herleitung dieser Gleichung gebrauchten Bedingungen:

$$0 < \tau_0 < 1, \quad 0 < \tau < 1$$

kann nunmehr abgesehen werden. Denn die Gleichung $(\mathfrak{Z}')$ behält ihre Gültigkeit, wenn man darin $\tau_0 + t_0$ für τ_0 und $\tau + t$ für τ substituirt, vorausgesetzt dass t_0 und t

irgend welche ganze Zahlen bedeuten. Bei dieser Substitution geht nämlich die Gleichung $(\mathfrak{Z}')$ in folgende über:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0 + t_0 w, u + tw, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + (n+t)w},$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm M;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N)$$

welche vermöge der Relation $(\mathfrak{X})$ im § 9 *so* dargestellt werden kann:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{((n+t)\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + (n+t)w},$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm M;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N)$$

und es ist also nur zu zeigen, dass der Werth der Summe auf der rechten Seite sich von demjenigen der Summe auf der rechten Seite von $(\mathfrak{Z}')$ nicht unterscheidet. Nun ist die Differenz dieser beiden Summen gleich:

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{\varepsilon, h} \sum_{m=-M}^{m=+M} \varepsilon \frac{e^{((\varepsilon N + h)\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv(\varepsilon N + h)w} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1;\ h = 1, 2, \dots t \\ \varepsilon = -1;\ h = 0, 1, \dots t-1 \end{pmatrix},$$

und wenn man hierin die Summation in Beziehung auf m gemäss der Formel $(\mathfrak{Z}^0)$ ausführt, indem man darin:

$$\zeta = \tau_0, \quad z = \frac{u + (\varepsilon N + h)w}{v}$$

setzt, so kommt:

$$\frac{e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}}}{v} \lim_{N=\infty} \sum_{\varepsilon, h} \varepsilon \frac{e^{(\varepsilon N + h)(\sigma_0 v + \tau_0 w)\frac{2\pi i}{v}}}{e^{(u + (\varepsilon N + h)w)\frac{2\pi i}{v}} - 1} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1;\ h = 1, 2, \dots t \\ \varepsilon = -1;\ h = 0, 1, \dots t-1 \end{pmatrix}.$$

Jedes der $2t$ Glieder, aus denen diese Summe besteht, verschwindet aber für $N = \infty$, da für $\varepsilon = +1$ der Grenzwerth gleich demjenigen von:

$$e^{\tau_0 (N+h)\frac{2w\pi i}{v}},$$

für $\varepsilon = -1$ gleich demjenigen von:

$$e^{(1-\tau_0)(N-h)\frac{2w\pi i}{v}}$$

wird, und da sowohl τ_0 als auch $1 - \tau_0$ positiv, also der reelle Theil beider Exponenten von e negativ ist. Die Gültigkeit der Gleichung $(\mathfrak{Z}')$ ist hiernach nur noch an die Bedingung geknüpft, dass weder τ noch τ_0 einen ganzzahligen Werth habe, und dass der mit i multiplicirte Theil von $\frac{w}{v}$ positiv sei.

§ 11.

Setzt man, wie in den Substitutionsgleichungen $(\mathfrak{W}')$ des § 8:

$$\sigma_0' = \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, \quad \tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0,$$
$$v' = \beta' v - \alpha' w, \quad w' = -\beta v + \alpha w, \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$$

und führt die hierdurch bestimmten Grössen $v', w', \sigma_0', \tau_0'$ in der Gleichung $(\mathfrak{Z}')$ des vorigen Paragraphen ein, so kommt:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v', w') = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0' - m\tau_0')2\pi i}}{u + mv' + nw'} \qquad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm M \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N \end{pmatrix}$$

Da nun gemäss der zweiten von den Gleichungen $(\mathfrak{X})$ im § 8:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v', w') = \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$$

ist, so resultirt, wenn noch:

$$m' = m\beta' - n\beta, \quad n' = -m\alpha' + n\alpha$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$(\mathfrak{Z}'') \qquad \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m', n'} \frac{e^{(n'\sigma_0 - m'\tau_0)2\pi i}}{u + m'v + n'w},$$
$$(m' = m\beta' - n\beta,\ n' = -m\alpha' + n\alpha;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm M;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N)$$

welche die Gleichung $(\mathfrak{Z}')$ als speciellere mit umfasst.

Die Gleichung $(\mathfrak{Z}'')$ kann auch *so* dargestellt werden:

$$(\mathfrak{Z}''') \qquad \overline{\mathrm{Atr}}(\sigma_0 v + \tau_0 w, \sigma v + \tau w, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w}.$$
$$(\alpha m + \beta n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm M,\ \alpha' m + \beta' n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N)$$

Hier bedeuten $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ irgend welche ganze Zahlen, für die $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ ist, v, w irgend welche complexe Grössen, für die $\frac{wi}{v}$ einen negativen reellen Theil hat, und die reellen Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ sind einzig und allein der Beschränkung unterworfen, dass weder τ_0' noch τ', d. h. also

$$\text{weder } \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 \quad \text{noch} \quad \alpha'\sigma + \beta'\tau$$

einen ganzzahligen Werth haben darf.

Wenn man die Function von u_0, u, v, w auf der linken Seite der Gleichung $(\mathfrak{Z}'')$ oder $(\mathfrak{Z}''')$, mit Hülfe der Gleichungen $(\mathfrak{X})$ und $(\mathfrak{W}')$, im § 8 durch ϑ-Functionen ausdrückt, so gelangt man zu jener am Schlusse des § 7 aufgestellten „Hauptgleichung“ $(\mathfrak{U}_1)$. Das in derselben enthaltene Resultat ist also hiermit nochmals begründet, und zwar insofern auf entgegengesetztem Wege, als dort im § 7 von der Reihe auf der rechten Seite der Gleichung $(\mathfrak{Z}'')$ oder $(\mathfrak{Z}''')$ ausgegangen und deren Summation mittels ϑ-Functionen bewirkt worden ist, während hier in den §§ 8—11 der aus ϑ-Functionen zusammengesetzte Ausdruck $(\mathfrak{B})$ zum Ausgangspunkt genommen und nach Darlegung seiner Invarianteneigenschaft in jene zweifach unendliche Reihe entwickelt worden ist, welche die rechte Seite der Gleichung $(\mathfrak{Z}''')$ bildet, und welche in der citirten Hauptgleichung $(\mathfrak{U}_1)$ mit $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ bezeichnet ist. Darauf, dass bei dieser letzteren Methode die Darlegung der charakteristischen Eigenschaften des ϑ-Ausdrucks, auf welchen die Summation der Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ führt, der weiteren Untersuchung vorangeschickt worden ist, beruht ihre grössere Durchsichtigkeit.

§ 12.

Die Gleichung $(\mathfrak{Z}''')$ im vorigen Paragraphen ergiebt für die Function $\overline{\mathrm{Atr}}_1(u_0, u, v, w)$, gemäss deren Definition im § 9, die Reihenentwickelung:

$$(\mathfrak{Z}^{\mathrm{IV}})\qquad \overline{\mathrm{Atr}}_1(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{((\tau+n)\sigma_0-(\sigma+m)\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w},$$
$$(\alpha m+\beta n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm M;\ \alpha' m+\beta' n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm N)$$

und aus dieser erhellt unmittelbar, dass ihr Werth ungeändert bleibt, wenn man σ oder τ um eine ganze Zahl vermehrt oder vermindert.

Aus der am Schlusse des § 8 gegebenen Definition der Function $\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) = e^{(\sigma\tau_0-\sigma_0\tau)\pi i}\frac{\mathrm{Atr}'(0, v, w)\,\mathrm{Atr}(u_0+u, v, w)}{\mathrm{Atr}(u_0, v, w)\,\mathrm{Atr}(u, v, w)}$$

ergiebt sich ferner, dass der Werth der Function:

$$e^{(\sigma_0\tau-\sigma\tau_0)\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)\quad\text{oder}\quad e^{(\sigma_0\tau-\sigma\tau_0)\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(\sigma_0 v+\tau_0 w, \sigma v+\tau w, v, w)$$

ungeändert bleibt, wenn man u mit u_0, oder also zu gleicher Zeit σ mit σ_0 und τ mit τ_0 vertauscht. Es ist demnach:

$$e^{(\sigma_0\tau-\sigma\tau_0)\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(\sigma_0 v+\tau_0 w, \sigma v+\tau w, v, w) = e^{(\sigma\tau_0-\sigma_0\tau)\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(\sigma v+\tau w, \sigma_0 v+\tau_0 w, v, w),$$

und man gelangt daher mittels der Gleichung $(\mathfrak{Z}''')$ zu der merkwürdigen Reihenrelation:

$$(\mathfrak{Z}^{\mathrm{V}})\ e^{(\sigma_0\tau-\sigma\tau_0)\pi i}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w} = e^{(\sigma\tau_0-\sigma_0\tau)\pi i}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w},$$
$$(\alpha m+\beta n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm M;\ \alpha' m+\beta' n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm N)$$

immer vorausgesetzt, dass $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen sind, welche der Bedingung $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ genügen, und dass weder $\alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0$ noch $\alpha'\sigma+\beta'\tau$ einen ganzzahligen Werth hat.

XXI.

Die im § 7 des vorigen Abschnitts entwickelte Hauptgleichung $(\mathfrak{U}_1)$, ebenso wie die damit übereinstimmende Gleichung $(\mathfrak{Z}''')$ im § 11, legt dar, dass die Reihe:

$$\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w},$$

wenn man die Summation auf alle den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\alpha m+\beta n|\leqq M,\quad |\alpha' m+\beta' n|\leqq N$$

genügenden ganzen Zahlen erstreckt und alsdann M und N ins Unendliche wachsen lässt, stets einerlei Werth erhält, wie man auch die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, der Bedingung $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ gemäss, wählen mag. Dieses Resultat zeigt sich an den bezeichneten Stellen als eine Folge der Invarianteneigenschaften des durch ϑ-Functionen ausgedrückten Werthes der Reihe, Eigenschaften, die nur mit Hülfe der linearen Transformation der ϑ-Functionen erschlossen werden können. Desshalb ist es aber von besonderem Interesse, das erwähnte Resultat direct aus der Natur der Reihe herzuleiten, zumal alsdann umgekehrt ein Theil der Theorie der linearen Transformation der ϑ-Funktionen daraus hervorgeht. Es ist nämlich in der Reihe:

$$\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{u+mv+nw}$$

überhaupt ein neues Fundament für die Theorie der elliptischen und ϑ-Functionen gewonnen, auf welchem sich wenigstens gewisse Theile dieser Theorie in höchst einfacher Weise aufbauen. Auch der Fortschritt von den Kreisfunctionen zu den Quotienten von ϑ-Functionen wird dabei durch den Übergang von der einfachen Reihe:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{e^{2m\tau\pi i}}{u+mw}$$

zu jener Doppelreihe deutlich illustrirt; denn die genaue Analogie der beiden Formeln:

$$\lim_{M=\infty}\sum_{m=-M}^{m=+M}\frac{(-1)^m e^{-(u+m)2\tau\pi i}}{u+m}=\frac{\pi}{\sin u\pi}\qquad(-\tfrac{1}{2}<\tau<\tfrac{1}{2}),$$

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{(-1)^m e^{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma_0-(u+m)\tau_0\right)2\pi i}}{u+m+\left(n+\frac{1}{2}\right)w}=\frac{\vartheta'(0,w)\,\vartheta(u_0+u,w)}{\vartheta_0(u_0,w)\,\vartheta_0(u,w)}$$

$$(m=0,\pm1,\pm2,\dots\pm M;\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\pm N)$$

zeigt, dass man den schon in meiner Notiz vom 22. December 1881 eingeführten ϑ-Quotienten*), welcher auf der rechten Seite der letzteren Formel steht, als die, dem reciproken Sinus oder der Cosecante entsprechende, nächst höhere Function betrachten kann.

Ich bemerke noch, dass die letztere Formel aus der Gleichung $(\mathfrak{U}_1)$ im § 7 hervorgeht, wenn man darin für:

$$\tau_0,\qquad u_0,\qquad u,\qquad v$$

beziehungsweise:

$$\tau_0+\frac{1}{2},\quad n_0+\frac{1}{2}w,\quad u+\frac{1}{2}w,\quad 1$$

setzt.

§ 1.

Den Ausgangspunkt der folgenden Entwickelungen bildet die endliche Reihe:

$$\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}}\qquad(m,n=0,\pm1,\pm2,\dots\pm M).$$

Hierbei bedeutet M eine positive und ϱ eine nicht negative ganze Zahl; σ_0 und τ_0 sind beliebige reelle und u, v, w beliebige complexe Grössen, die nur insoweit beschränkt sind,

> dass weder σ_0 noch τ_0 eine ganze Zahl sein darf, dass ferner das Verhältniss $v:w$ nicht reell, und dass $u+mv+nw$ für kein Werthsystem (m,n) gleich Null sein darf.

*) Monatsbericht vom December 1881, S. 1168 (I')[1]).

[1]) Bd. IV, S. 315 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

Der eigentliche Zweck der Untersuchung besteht darin, das Verhalten der Reihe zu ermitteln, wenn die Summation über alle Zahlen m, n von $-\infty$ bis $+\infty$, und zwar in gewissen verschiedenen Reihenfolgen, erstreckt wird. Es würde demgemäss, da die Reihe für $\varrho>1$ absolut convergirt, genügen, $\varrho=0$ und $\varrho=1$ zu nehmen, aber die Entwickelung wird durch eine solche Beschränkung nicht vereinfacht.

Die Reihe kann auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$\sum_{\varepsilon_0,\varepsilon_1,m,n}\frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0-\varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u+\varepsilon_0 mv+\varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}}\qquad\begin{pmatrix}\varepsilon_0=+1;\ m=0,1,\dots M,\\ \varepsilon_0=-1;\ m=1,2,\dots M,\\ \varepsilon_1=+1;\ n=0,1,\dots M,\\ \varepsilon_1=-1;\ n=1,2,\dots M\end{pmatrix}.$$

Ist nun:

$$w=v(\varepsilon\varphi+\varepsilon'\psi i),$$

wo φ und ψ reelle *positive* Grössen und $\varepsilon, \varepsilon'$ positive oder negative Einheiten bedeuten, und bestimmt man die Grössen a, b, c so, dass die Gleichung:

$$(u+\varepsilon_0 mv+\varepsilon_1 nw)(2\varepsilon_0\psi+(2\varepsilon\varepsilon_0-\varepsilon_1)\varepsilon'\varphi i)=(am+bn+c)v$$

für *unbestimmte* Werthe von m und n erfüllt wird, so sind a und b complexe Grössen mit *positiven* reellen Theilen. Denn der reelle Theil von a ist 2ψ, und derjenige von b ist $\varphi\psi$. Der reelle Theil von $am+bn+c$ wird demnach positiv sein, wenn der Zahlenwerth von m und n eine gewisse Grösse übersteigt. Erfüllt m_0 oder n_0 diese Bedingung, so kann bei der Summation:

$$(\mathfrak{A})\qquad\sum_{m,n}\frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0-\varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u+\varepsilon_0 mv+\varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}}\qquad\begin{pmatrix}m=m_0,m_0+1,m_0+2,\dots m_0+h-1\\ n=n_0,n_0+1,n_0+2,\dots n_0+k-1\end{pmatrix},$$

bei welcher h, k beliebige positive Zahlen bedeuten, der Factor:

$$\frac{1}{(u+\varepsilon_0 mv+\varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}},$$

welcher gleich:

$$\frac{(2\varepsilon_0\psi+(2\varepsilon_0\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon'\varphi i)^{1+\varrho}}{v^{1+\varrho}(am+bn+c)^{1+\varrho}}$$

ist, nach *Dirichlet*'s Vorgang durch den Ausdruck:

$$(\mathfrak{A}')\qquad\frac{(2\varepsilon_0\psi+(2\varepsilon_0\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon'\varphi i)^{1+\varrho}}{v^{1+\varrho}\Gamma(1+\varrho)}\int_0^\infty e^{-(am+bn+c)z}z^{\varrho}dz$$

ersetzt werden, da der reelle Theil von $am + bn + c$ für die bei der Summation in ($\mathfrak{A}$) vorkommenden Werthe von m und n positiv ist. Bezeichnet man den Factor des Integrals in ($\mathfrak{A}'$) zur Abkürzung mit A und setzt:

$$x = 2\varepsilon_0 \tau_0 \pi, \quad y = -2\varepsilon_1 \sigma_0 \pi,$$

so resultirt für die mit ($\mathfrak{A}$) bezeichnete Summe der Ausdruck:

$$(\mathfrak{A}^0) \qquad A e^{-(m_0 x + n_0 y) i} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-h(az+xi)})(1 - e^{-k(bz+yi)})}{(1 - e^{-(az+xi)})(1 - e^{-(bz+yi)})} e^{-(am_0 + bn_0 + c) z} z^\varrho dz.$$

Der absolute Werth des Ausdrucks, welcher unter dem Integralzeichen mit:

$$e^{-(am_0 + bn_0 + c) z} z^\varrho dz$$

multiplicirt ist, bleibt innerhalb der Integrationsgrenzen stets unter einer gewissen Grösse G^2. Denn erstens ist der absolute Werth jedes der beiden Factoren im Zähler:

$$1 - e^{-h(az+xi)}, \quad 1 - e^{-k(bz+yi)}$$

kleiner als 2. Zweitens wird wegen der Voraussetzungen, dass die reellen Theile von a und b positiv sind, dass ferner weder σ_0 noch τ_0 eine ganze Zahl und also weder x noch y ein gerades Vielfaches von π ist, keiner der beiden Factoren im Nenner:

$$1 - e^{-(az+xi)}, \quad 1 - e^{-(bz+yi)}$$

für irgend einen Werth von z gleich Null, und es ist daher eine Grösse $\frac{1}{2} G$ so zu bestimmen, dass für alle nicht negativen Werthe von z sowohl der reciproke Werth von $|1 - e^{-(az+xi)}|$ als auch derjenige von $|1 - e^{-(bz+yi)}|$ kleiner als $\frac{1}{2} G$ bleibt. Diese Bestimmung soll nun im folgenden Paragraphen in der That gegeben werden.

§ 2.

Setzt man $a = a_0 + a_1 i$, so ist a_0 positiv, und das Quadrat des absoluten Werthes von $1 - e^{-(az+xi)}$ ist gleich:

$$1 - 2e^{-a_0 z} \cos(x + a_1 z) + e^{-2a_0 z} \quad \text{oder} \quad (e^{-a_0 z} - \cos(x + a_1 z))^2 + \sin^2(x + a_1 z).$$

Der absolute Werth von $1 - e^{-(az+xi)}$ ist daher stets grösser als jede der beiden Grössen:

$$|\sin(x + a_1 z)|, \quad 1 - e^{-a_0 z}.$$

Die Grösse x kann in dem Intervalle $(-\pi, +\pi)$ liegend angenommen werden, und da der Wert $x = 0$ durch die obige Voraussetzung, dass τ_0 keinen ganzzahligen Werth haben soll, ausgeschlossen ist, so hat man $0 < |x| \leqq \pi$. Setzt man also zur Vereinfachung:

$$|x| = \xi, \quad |a_1| = \alpha,$$

so ist:

$$0 < \xi \leqq \pi, \quad |\sin(x + a_1 z)| = |\sin(\xi \pm \alpha z)|,$$

und es gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem a_1 und x gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Wenn nun erstens $\alpha = 0$ ist, so hat man für den absoluten Werth von $1 - e^{-(az+xi)}$ die Ungleichheit:

$$|1 - e^{-(az+xi)}| \geqq \sin \xi,$$

und falls $\xi = \pi$ ist:

$$|1 - e^{-(az+xi)}| = 1 + e^{-az} \geqq 1.$$

Wenn zweitens $0 < \xi \leqq \frac{1}{2}\pi$ ist, so nimmt $|\sin(\xi + \alpha z)|$ von $z = 0$ bis $z = \frac{\pi - 2\xi}{2\alpha}$ zu, und $|\sin(\xi - \alpha z)|$ nimmt von $z = 0$ bis $z = \frac{\xi}{\alpha}$ ab.

Wenn drittens $\frac{1}{2}\pi \leqq \xi \leqq \pi$ ist, so nimmt $|\sin(\xi + \alpha z)|$ von $z = 0$ bis $z = \frac{\pi - \xi}{\alpha}$ ab, und $|\sin(\xi - \alpha z)|$ nimmt von $z = 0$ bis $z = \frac{2\xi - \pi}{2\alpha}$ zu.

Der absolute Werth von $1 - e^{-(az+xi)}$ ist daher

nicht kleiner als $\sin\xi$, wenn $0 < \xi < \frac{1}{2}\pi$, $0 < a_1 x$, $z < \frac{\pi - 2\xi}{2\alpha}$ ist,

nicht kleiner als $\sin\frac{1}{2}\xi$, wenn $0 < \xi \leqq \frac{1}{2}\pi$, $0 > a_1 x$, $z < \frac{\xi}{2\alpha}$ ist,

nicht kleiner als $\sin\frac{1}{2}(\pi + \xi)$, wenn $\frac{1}{2}\pi \leqq \xi < \pi$, $0 < a_1 x$, $z < \frac{\pi - \xi}{2\alpha}$ ist,

nicht kleiner als $\sin\xi$, wenn $\frac{1}{2}\pi < \xi \leqq \pi$, $0 > a_1 x$, $z < \frac{2\xi - \pi}{2\alpha}$ ist.

Da nun überdies der absolute Werth von $1 - e^{-(az+xi)}$ nicht kleiner als der Werth des Ausdrucks:

$$1 - e^{-a_0 z}$$

ist, und da dieser Werth mit wachsendem z zunimmt, so findet die Ungleichheit statt:

$$\left|1-e^{-(az+xi)}\right|>\mu,$$

wenn man μ gleich der kleineren von den beiden Grössen nimmt:

$$\begin{array}{lll}
\sin\xi, & 1-e^{-(\pi-2\xi)\frac{a_0}{2a}} & \text{im Falle } 0<\xi<\frac{1}{2}\pi,\ 0<a_1x, \\
\sin\frac{1}{2}\xi, & 1-e^{-\xi\frac{a_0}{2a}} & \text{im Falle } 0<\xi\leqq\frac{1}{2}\pi,\ 0>a_1x, \\
\cos\frac{1}{2}\xi, & 1-e^{-(\pi-\xi)\frac{a_0}{2a}} & \text{im Falle } \frac{1}{2}\pi\leqq\xi<\pi,\ 0<a_1x, \\
\sin\xi, & 1-e^{-(2\xi-\pi)\frac{a_0}{2a}} & \text{im Falle } \frac{1}{2}\pi<\xi<\pi,\ 0>a_1x.
\end{array}$$

Für den hierin nicht enthaltenen Fall $\xi=\pi$ wird das Quadrat des absoluten Werthes von $1-e^{-(az+xi)}$ durch den Ausdruck gegeben:

$$1+2e^{-a_0z}\cos az+e^{-2a_0z},$$

dessen Werth von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}\pi$ abnimmt und überdies stets grösser ist als das Quadrat von:

$$1-e^{-a_0z}.$$

Es findet daher für den Fall $|x|=\pi$ die Ungleichheit statt:

$$\left|1-e^{-(az+xi)}\right|>\mu,$$

wenn:

$$\mu=1-e^{-\frac{1}{2}a_0\pi}$$

genommen wird. Endlich ist, wie schon oben gezeigt worden, für $a_1=0$:

$$\left|1-e^{-(az+xi)}\right|\geqq\mu,$$

wenn:

$$\mu=\sin\xi \quad \text{oder} \quad \mu=1$$

genommen wird, je nachdem $\xi<\pi$ oder $\xi=\pi$ ist.

Wird nun in derselben Weise eine Grösse ν bestimmt, welche für jeden nicht negativen Werth von z der Ungleichheitsbedingung:

$$\left|1-e^{-(bz+yi)}\right|\geqq\nu$$

genügt, so braucht man nur die Grösse G, deren Bestimmung den Zielpunkt der vorstehenden Entwickelung bildet, so zu wählen, dass sowohl $\frac{1}{2}G\mu$ als auch $\frac{1}{2}G\nu$ grösser als Eins wird. Denn es ist dann:

$$\left|1-e^{-(az+xi)}\right|>\frac{2}{G}, \quad \left|1-e^{-(bz+yi)}\right|>\frac{2}{G},$$

und es findet also in der That, wie schon am Schlusse des § 1 behauptet worden ist, die Ungleichheit statt:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \left|\frac{\left(1-e^{-h(az+xi)}\right)\left(1-e^{-k(bz+yi)}\right)}{\left(1-e^{-(az+xi)}\right)\left(1-e^{-(bz+yi)}\right)}\right|<G^2.$$

Hiernach liegt sowohl der reelle als auch der mit i multiplicirte Theil des Integralwerthes:

$$(\mathfrak{B}^0) \qquad \int_0^\infty\frac{\left(1-e^{-h(az+xi)}\right)\left(1-e^{-k(bz+yi)}\right)}{\left(1-e^{-(az+xi)}\right)\left(1-e^{-(bz+yi)}\right)}e^{-(am_0+bn_0+c)z}z^\varrho dz$$

innerhalb des durch die beiden Werthe:

$$\pm G^2\int_0^\infty e^{-(a_0m_0+b_0n_0+c_0)z}z^\varrho dz \quad \text{oder} \quad \pm\frac{G^2\Gamma(1+\varrho)}{(a_0m_0+b_0n_0+c_0)^{1+\varrho}}$$

eingeschlossenen Intervalls, wo a_0, b_0, c_0 die reellen Theile von a, b, c bezeichnen. Dabei ist daran zu erinnern, dass der Voraussetzung nach a_0 und b_0 positiv ist, und dass die Werthe von m_0 und n_0 so gewählt worden sind, dass $a_0m_0+b_0n_0+c_0$ positiv wird.

§ 3.

Im § 1 ist gezeigt worden, dass der Werth der mit $(\mathfrak{A})$ bezeichneten Summe durch den Ausdruck $(\mathfrak{A}^0)$, d. h. also durch das aus der Multiplication von $Ae^{-(m_0x+n_0y)i}$ mit dem Integral $(\mathfrak{B}^0)$ entstehende Product dargestellt werden kann. Da nun der reelle und der imaginäre Theil des Werthes dieses Integrals, wie sich im § 2 ergeben hat, absolut kleiner als:

$$\frac{G^2\Gamma(1+\varrho)}{(a_0m_0+b_0n_0+c_0)^{1+\varrho}}$$

und $1+\varrho$ positiv ist, so wird der Grenzwerth der mit $(\mathfrak{A})$ bezeichneten Summe gleich Null, sobald nur m_0 oder n_0 ins Unendliche wächst, d. h. es finden die Gleichungen statt:

$$(\mathfrak{C})\qquad \begin{aligned} &\lim_{m_0=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0-\varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u+\varepsilon_0 mv+\varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}}=0\\ &\lim_{n_0=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0-\varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u+\varepsilon_0 mv+\varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}}=0 \end{aligned}\qquad \begin{pmatrix} m=m_0,m_0+1,\dots m_0+h-1\\ n=n_0,n_0+1,\dots n_0+k-1\end{pmatrix},$$

in welchen $\varepsilon_0=\pm 1$, $\varepsilon_1=\pm 1$, $1+\varrho>0$ ist und aber weder σ_0 noch τ_0 einen ganzzahligen Werth haben darf.

Diese Gleichungen gelten nicht nur für ganzzahlige sondern auch für beliebige positive Werthe von $1+\varrho$; doch sind dabei die Werthe der mehrdeutigen $(1+\varrho)$ten Potenz in der besonderen Weise bestimmt, in welcher sie bei der Darstellung durch den Integralausdruck $(\mathfrak{A}')$ im § 1 fixirt werden.

Aus den Gleichungen $(\mathfrak{C})$ folgt unmittelbar, dass der Werth der Summe:

$$\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}}$$

sowohl dann, wenn die Summation auf:

$$m=0,\pm 1,\pm 2,\dots\pm M;\quad n=\pm(M+1),\pm(M+2),\dots\pm(M+r)$$

erstreckt wird, sich mit wachsendem M der Null nähert, als auch dann, wenn über die Werthe:

$$m=\pm(M+1),\pm(M+2),\dots\pm(M+r);\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\dots\pm M$$

summirt wird, und endlich auch, wenn die Summation auf:

$$m,n=\pm(M+1),\pm(M+2),\dots\pm(M+r)$$

ausgedehnt wird. Es ist aber offenbar das Aggregat dieser drei Summen, wodurch sich die über die Werthe:

$$m,n=0,\pm 1,\pm 2,\dots\pm(M+r)\qquad (r>0)$$

erstreckte Summe von derjenigen unterscheidet, welche man erhält, wenn nur über die Werthe:

$$m,n=0,\pm 1,\pm 2,\dots\pm M$$

summirt wird, und hiermit ist nachgewiesen, dass die Summe:

$$\sum_{m=-M}^{m=+M}\sum_{n=-M}^{n=+M}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}},$$

wenn sie als Function von M mit $F(M)$ bezeichnet wird, die durch die Gleichung:

$$\lim_{M=\infty}(F(M+r)-F(M))=0\qquad (r>0)$$

charakterisirte Eigenschaft hat, welche — nach der üblichen Ausdrucksweise — die Existenz eines Grenzwerthes:

$$\lim_{M=\infty}F(M)$$

begründet. Durch diesen Grenzwert soll nunmehr $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0,u,v,w)$ definirt werden, d. h. also durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{D})\qquad \mathrm{Ser}_\varrho(\sigma_0 v+\tau_0 w,u,v,w)=\lim_{M=\infty}\sum_{m=-M}^{m=+M}\sum_{n=-M}^{n=+M}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}},$$

und es soll nur, wie oben, für den Fall $\varrho=0$ der Index 0 bei $\mathrm{Ser}(u_0,u,v,w)$ weggelassen werden.

§ 4.

Aus der am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellten Definitionsgleichung $(\mathfrak{D})$ folgt unmittelbar die erste Eigenschaft der Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0,u,v,w)$:

$$(\mathfrak{E}_1)\qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0,u,v,w)=\mathrm{Ser}_\varrho(u_0,u,-w,v),$$

denn der Ausdruck auf der rechten Seite jener Gleichung $(\mathfrak{D})$, und auch u_0, bleibt ungeändert, wenn gleichzeitig:

$$m,\ n,\quad \sigma_0,\ \tau_0,\quad v,\ w$$

in

$$-n,\ m,\quad -\tau_0,\ \sigma_0,\quad -w,\ v$$

verwandelt wird.

Die zweite Eigenschaft

$$(\mathfrak{E}_2)\qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0,u,v,w)=\mathrm{Ser}_\varrho(u_0,u,v,w+gv),$$

wo g eine ganze Zahl bedeutet, wird ebenfalls ersichtlich, wenn man die Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0,u,v,w+gv)$, in welcher u_0 den Werth:

$$(\sigma_0-g\tau_0)v_0+\tau_0(w+gv)$$

hat, und welche also gemäss der Definition $(\mathfrak{D})$ durch:

$$\lim_{M=\infty}\sum_{m=-M}^{m=+M}\sum_{n=-M}^{n=+M}\frac{e^{(n(\sigma_0-g\tau_0)-m\tau_0)2\pi i}}{(u+(m+gn)v+nw)^{1+\varrho}}$$

darzustellen ist, auf folgende Form bringt:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{n=-M}^{n=+M} \sum_{m=-M+gn}^{m=+M+gn} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}}.$$

Denn der formale Unterschied, welcher zwischen dieser Reihe und der Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, wie sie in der Gleichung $(\mathfrak{D})$ definirt ist, in Beziehung auf die Summationsgrenzen besteht, begründet keinen Werthunterschied der beiden Reihen.

Um dies darzuthun, bemerke ich zuvörderst, dass die Differenz der beiden Reihen durch das Aggregat von vier Reihen dargestellt werden kann:

$$\sum_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, m, n} \frac{\varepsilon_0 e^{\varepsilon_1(n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u+\varepsilon_0\varepsilon_1 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}},$$

in welchen die Summation für $\varepsilon_0 = +1$, $\varepsilon_1 = +1$ auf:

$$m = M+1, M+2, \ldots M+gn;\ n = 0, 1, 2, \ldots M$$

zu erstrecken ist, für $\varepsilon_0 = +1$, $\varepsilon_1 = -1$ auf:

$$m = M+1, M+2, \ldots M+gn;\ n = 1, 2, \ldots M,$$

für $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1 = +1$ auf:

$$m = M-gn+1, M-gn+2, \ldots M;\ n = 0, 1, 2, \ldots M,$$

und für $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1 = -1$ auf:

$$m = M-gn+1, M-gn+2, \ldots M;\ n = 1, 2, \ldots M,$$

und deren Grenzwerth dann für $M = \infty$ zu nehmen ist. Indem man nun jede der vier Reihen, wie oben, durch den Integralausdruck:

$$(\bar{\mathfrak{A}}) \qquad A\int_0^\infty \sum_{n,m} e^{-(am+bn+c)z-(mx+ny)i} z^\varrho dz \qquad (x = 2\varepsilon_0\varepsilon_1\tau_0\pi,\ y = -2\varepsilon_1\sigma_0\pi)$$

ersetzt, überzeugt man sich leicht davon, dass ihr Werth sich mit wachsendem M der Null nähert.

Bei Ausführung der Summation in Beziehung auf m geht nämlich der Ausdruck unter dem Integralzeichen in folgenden über:

$$\frac{\varepsilon_0 e^{-(M+1)(az+xi)}}{1-e^{-(az+xi)}} \sum_n e^{-n(\varepsilon_0 g(az+xi)+bz+yi)},$$

in welchem die Summation, je nach den beiden oben durch $\varepsilon_1 = +1$ und $\varepsilon_1 = -1$ unterschiedenen Fällen, auf $n = 0, 1, 2, \ldots M$ oder $n = 1, 2, \ldots M$ zu erstrecken ist. Es kommt also:

$$\varepsilon_0 \frac{e^{-(M+1)(az+xi)-\varphi(z)} - e^{-(M+1)((1+\varepsilon_0 g)(az+xi)+bz+yi)}}{\left(1-e^{-(az+xi)}\right)\left(1-e^{-(\varepsilon_0 g(az+xi)+bz+yi)}\right)},$$

wo $\varphi(z)$, je nach den beiden Summationsbestimmungen für n, gleich Null oder gleich:

$$\varepsilon_0 g(az+xi) + bz + yi$$

zu nehmen ist.

Da $\varepsilon_0 gx + y = 2\varepsilon_1(g\tau_0 - \sigma_0)\pi$ ist, so bleibt gemäss den im § 2 enthaltenen Darlegungen der absolute Werth des Nenners stets über einer angebbaren Grösse μ, wenn, wie es durch die Definition der Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w+gv)$ auf der rechten Seite der Gleichung $(\mathfrak{E}_2)$ erfordert wird, die Differenz $\sigma_0 - g\tau_0$ keinen ganzzahligen Werth hat.

Der Zähler hat die Form:

$$e^{-(M+1)a_0 z}\Phi(z) + e^{-(M+1)b_0 z}\Psi(z),$$

wobei a_0 und b_0, wie oben, die positiven reellen Theile von a und b bedeuten, während $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ Functionen von z sind, deren absolute Werthe unter einer angebbaren Grösse $G^2\mu$ bleiben.

Hiernach kann das Intervall, in welchem sowohl der reelle als auch der mit i multiplicirte Theil des obigen Integralausdrucks $(\bar{\mathfrak{A}})$ liegt, durch den positiven und negativen Werth von:

$$\frac{AG^2\Gamma(1+\varrho)}{(M+1)^{1+\varrho}}\left(\frac{1}{a_0^{1+\varrho}} + \frac{1}{b_0^{1+\varrho}}\right)$$

begrenzt werden; der Werth jeder von den vier durch den Integralausdruck $(\bar{\mathfrak{A}})$ dargestellten Reihen nähert sich also in der That mit wachsendem M der Null.

§ 5.

Die im § 1 angegebene Darstellung der mit $(\mathfrak{A})$ bezeichneten Summe durch den Integralausdruck $(\mathfrak{A}^0)$ kann benutzt werden, um nachzuweisen, dass die Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, unter den bei deren Definition über u_0, u, v, w gemachten Voraussetzungen, eine stetige Function der beiden reellen Variabeln σ_0, τ_0 ist.

Die Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ lässt sich nämlich, gemäss der Definitionsgleichung ($\mathfrak{D}$) im § 3, als Aggregat von vier Reihen:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(\varepsilon_1 n \sigma_0 - \varepsilon_0 m \tau_0) 2\pi i}}{(u + \varepsilon_0 m v + \varepsilon_1 n w)^{1+\varrho}} \qquad \binom{m = f, f+1, \dots M}{n = g, g+1, \dots M}$$

darstellen, welche den Werthsystemen:

$$\varepsilon_0 = +1,\ \varepsilon_1 = +1;\ \varepsilon_0 = +1,\ \varepsilon_1 = -1;\ \varepsilon_0 = -1,\ \varepsilon_1 = +1;\ \varepsilon_0 = -1,\ \varepsilon_1 = -1$$

entsprechen, und in denen je nach diesen verschiedenen Fällen:

$$f = 0,\ g = 0;\quad f = 0,\ g = 1;\quad f = 1,\ g = 0;\quad f = 1,\ g = 1$$

zu nehmen ist. Setzt man nun, wie im § 1, $w = v(\varepsilon\varphi + \varepsilon'\psi i)$ und bestimmt, wie dort, für jede dieser vier Reihen die Grössen a, b, c so, dass die Gleichung:

$$(u + \varepsilon_0 m v + \varepsilon_1 n w)(2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\varepsilon'\varphi i) = (am + bn + c)v$$

für *unbestimmte* Werthe von m und n erfüllt wird, so sind a und b complexe Grössen mit positiven reellen Theilen, und es giebt unter den Werthsystemen (m, n):

$$m = f, f+1, \dots M;\quad n = g, g+1, \dots M,$$

über welche sich die Summation zu erstrecken hat, nur eine endliche Anzahl, bei denen der reelle Theil der complexen Grösse $am + bn + c$ nicht positiv ist. Schliesst man diese aus, deren Aggregat offenbar eine stetige Function von σ_0 und τ_0 ist, so lässt sich der übrige Theil jeder von den vier Reihen als ein Aggregat von Reihen darstellen:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(\varepsilon_1 n \sigma_0 - \varepsilon_0 m \tau_0) 2\pi i}}{(u + \varepsilon_0 m v + \varepsilon_1 n w)^{1+\varrho}} \qquad \binom{m = m_0, m_0+1, \dots m_0+h-1}{n = n_0, n_0+1, \dots n_0+k-1},$$

bei welchen entweder einer der beiden Endwerthe $m_0 + h - 1$, $n_0 + k - 1$, oder jeder von beiden, gleich M zu setzen ist, und welche die bei der Summe ($\mathfrak{A}$) im § 1 vorausgesetzte Eigenschaft haben, dass der reelle Theil der aus $u + \varepsilon_0 m v + \varepsilon_1 n w$ zu bestimmenden complexen Grösse $am + bn + c$ für alle bei der Summation vorkommenden Zahlensysteme (m, n) einen positiven Werth bekommt. Jede der Reihen wird hiernach, wenn wie dort:

$$x = 2\varepsilon_0\tau_0\pi,\quad y = -2\varepsilon_1\sigma_0\pi$$

gesetzt wird, durch den Grenzwerth dargestellt, welchen der Ausdruck:

$$A e^{-(m_0 x + n_0 y)i} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-h(az + xi)})(1 - e^{-k(bz + yi)})}{(1 - e^{-(az + xi)})(1 - e^{-(bz + yi)})} e^{-(am_0 + bn_0 + c)z} z^\varrho dz$$

für wachsende M annimmt. Nun fällt in diesem Ausdruck, wenn sein Grenzwerth für $M = m_0 + h - 1 = \infty$ genommen wird, gemäss den in den §§ 1 und 2 enthaltenen Darlegungen, derjenige Theil unter dem Integralzeichen fort, welcher mit $e^{-h(az + xi)}$ multiplicirt ist, ebenso bei dem Grenzwerth für $M = m_0 + k - 1 = \infty$ derjenige, welcher $e^{-k(bz + yi)}$ als Factor enthält. Es bleibt also nur ein Ausdruck:

$$(\mathfrak{A}_1) \qquad A e^{-(m_0 x + n_0 y)i} \int_0^\infty \frac{e^{-(am_0 + bn_0 + c)z} f(x, y, z)}{(1 - e^{-(az + xi)})(1 - e^{-(bz + yi)})} z^\varrho dz,$$

in welchem $f(x, y, z)$ einen der Werthe:

$$1,\ 1 - e^{-h(az + xi)},\quad 1 - e^{-k(bz + yi)}$$

hat, und wo h und k ganze, unter einer gewissen Grenze liegende Zahlen sind. Dieser Ausdruck stellt aber in der That eine *stetige* Function von x und y dar. Denn wenn die Differenz:

$$\frac{e^{-m_0(x+\xi)i} f(x+\xi, y, z)}{1 - e^{-(az + (x+\xi)i)}} - \frac{e^{-m_0 x i} f(x, y, z)}{1 - e^{-(az + xi)}}$$

gleich $\xi\varphi(x, \xi, y, z)$ gesetzt wird, so ist $\varphi(x, \xi, y, z)$ eine Function, welche für alle nicht negativen Werthe von z, falls nur weder x noch $x + \xi$ ein gerades Vielfaches von π ist, unter einer nach § 2 zu bestimmenden Grösse liegt. Die Differenz zweier den Werthen $x + \xi$ und x entsprechenden Ausdrücke ($\mathfrak{A}_1$) nähert sich also mit abnehmendem ξ der Null, sobald x, wie vorausgesetzt worden, kein Vielfaches von 2π ist, und es zeigt sich ganz ebenso, dass der Ausdruck ($\mathfrak{A}_1$) eine stetige Function von y darstellt.

§ 6.

Da sich jede ganzzahlige Transformation von

$$\begin{array}{lccr} & v\ , & w & \\ \text{in} & \beta' v - \alpha' w, & -\beta v + \alpha w & \scriptstyle(\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1) \end{array}$$

aus Transformationen:

$$\begin{pmatrix} v, w \\ -w, v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v, w \\ v, w + gv \end{pmatrix}$$

zusammensetzen lässt, so folgt aus den Gleichungen ($\mathfrak{E}_1$) und ($\mathfrak{E}_2$) des § 4:

$$(\mathfrak{E}_1) \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, -w, v),$$

$$(\mathfrak{E}_2) \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w + gv)$$

die allgemeinere Relation:

$$(\mathfrak{E}') \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, \beta' v - \alpha' w, -\beta v + \alpha w),$$

welche auch in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$(\mathfrak{E}'') \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(\sigma_0 v + \tau_0 w, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(\sigma_0' v' + \tau_0' w', u, v', w'),$$
$$(\sigma_0' = \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0,\ \tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0,\ v' = \beta' v - \alpha' w,\ w' = -\beta v + \alpha w)$$

und welche die beiden Relationen $(\mathfrak{E}_1)$, $(\mathfrak{E}_2)$ als speciellere enthält.

Die hier angegebene Ableitung der Relation $(\mathfrak{E}')$ erfordert freilich, dass bei keiner von den Zwischentransformationen die Variabeln v und w Werthe erhalten, für welche auch nur eine der Grössen σ_0, τ_0 gleich einer ganzen Zahl würde; aber die Gültigkeit des Endresultats ist doch nur an die Bedingung geknüpft, dass weder eine der Grössen σ_0, τ_0 auf der linken Seite der Gleichung $(\mathfrak{E}'')$ noch eine der Grössen σ_0', τ_0' auf der rechten Seite, d. h. also $\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0$, $\alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0$, einen ganzzahligen Werth habe. Denn wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann man offenbar an Stelle von σ_0, τ_0 benachbarte Grössen:

$$\sigma_0 + \delta, \quad \tau_0 + \delta$$

so wählen, dass auch bei allen Zwischentransformationen, durch welche man von (σ_0, τ_0) zu $(\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0)$ gelangt ist, und also auch

von $(\sigma_0 + \delta,\ \tau_0 + \delta)$ zu $(\alpha(\sigma_0 + \delta) + \beta(\tau_0 + \delta),\ \alpha'(\sigma_0 + \delta) + \beta'(\tau_0 + \delta))$

gelangt, niemals ganzzahlige Werthe vorkommen, und man erhält alsdann die Gleichung:

$$(\mathfrak{E}''') \quad \lim_{\delta=0} \mathrm{Ser}_\varrho((\sigma_0 + \delta)v + (\tau_0 + \delta)w, u, v, w) = \lim_{\delta=0} \mathrm{Ser}_\varrho((\sigma_0' + \delta_1')v' + (\tau_0' + \delta_2')w', u, v', w').$$
$$(\delta_1' = (\alpha + \beta)\delta,\ \delta_2' = (\alpha' + \beta')\delta)$$

Da nun im vorigen Paragraphen nachgewiesen worden ist, dass $\mathrm{Ser}_\varrho(\sigma_0 v + \tau_0 w, u, v, w)$ als Function der reellen Variabeln σ_0 und τ_0 stetig ist, so ist aus der Gleichung $(\mathfrak{E}''')$ das Bestehen der obigen Gleichungen $(\mathfrak{E}'')$ und $(\mathfrak{E}')$ zu erschliessen, und diese sind also in der That nur an diejenigen Bedingungen geknüpft, deren Erfüllung schon bei der Definition der in den Gleichungen vorkommenden beiden Functionen $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v', w')$ vorausgesetzt worden ist.

§ 7.

Das Product:

$$e^{-2\tau_0\pi i}\,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u + v, v, w)$$

kann, gemäss der Definitionsgleichung $(\mathfrak{D})$ im § 3, durch den Grenzwerth:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}}$$

dargestellt werden, wenn die Summation in Beziehung auf m von $-M + 1$ bis $M + 1$ und in Beziehung auf n von $-M$ bis M erstreckt wird. Der Unterschied zwischen diesem Grenzwerth und jenem, der durch $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ bezeichnet worden ist, wird also durch die Differenz der beiden Grenzwerthe:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - (M+1)\tau_0)2\pi i}}{(u + (M+1)v + nw)^{1+\varrho}}, \quad \lim_{M=\infty} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 + M\tau_0)2\pi i}}{(u - Mv + nw)^{1+\varrho}},$$

gegeben, welche gemäss der ersten von den beiden Gleichungen $(\mathfrak{C})$ im § 3 gleich Null sind. Es findet demnach die Relation statt:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = e^{-2\tau_0\pi i}\,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u + v, v, w),$$

aus welcher durch Anwendung der Gleichung $(\mathfrak{E}_1)$ die fernere Relation folgt:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = e^{2\sigma_0\pi i}\,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u + w, v, w),$$

und aus diesen beiden geht die allgemeinere, für beliebige ganze Zahlen s, t gültige Relation hervor:

$$(\mathfrak{E}_3) \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = e^{2(t\sigma_0 - s\tau_0)}\,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u + sv + tw, v, w).$$

Endlich sind noch die beiden, durch die im § 3 $(\mathfrak{D})$ gegebene Definition evidenten Relationen anzuführen:

$$(\mathfrak{E}_4) \qquad \begin{aligned} \mathrm{Ser}_\varrho(v\sigma_0 + w\tau_0, u, v, w) &= \mathrm{Ser}_\varrho(v\sigma_0 - w\tau_0, u, -v, w), \\ \mathrm{Ser}_\varrho(v\sigma_0 + w\tau_0, u, v, w) &= \mathrm{Ser}_\varrho(-v\sigma_0 + w\tau_0, u, v, -w). \end{aligned}$$

Setzt man nunmehr wie im § 9 des art. XX:

$$\begin{aligned}
\sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma_0, \quad \tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma_0', \\
\sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma, \quad \tau' = \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma', \\
v' &= \beta' v - \alpha' w, \quad w' = -\beta v + \alpha w, \\
u_0' &= \sigma_0' v' + \tau_0' w' = u_0 + \gamma_0 v' + \gamma_0' w', \\
u' &= \sigma' v' + \tau' w' = u + \gamma v' + \gamma' w',
\end{aligned}$$

wo $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \gamma_0, \gamma'_0$ irgend welche ganze, nur der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ unterworfene Zahlen bedeuten, so kann man die allgemeine Relation aufstellen:

$$(\mathfrak{E}) \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = e^{((\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)\sigma_0 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)\tau_0)2\pi i}\, \mathrm{Ser}_\varrho(u'_0, u', v', w'),$$

welche unmittelbar aus den Relationen $(\mathfrak{E}_1)$, $(\mathfrak{E}_2)$, $(\mathfrak{E}_3)$ oder $(\mathfrak{E}')$, $(\mathfrak{E}'')$, $(\mathfrak{E}_3)$ folgt und aber auch diese sämmtlich in sich begreift.

Nimmt man $\gamma = \gamma' = 0$, so geht die Relation $(\mathfrak{E})$ in folgende über:

$$(\mathfrak{E}_0) \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u'_0, u', v', w'),$$

durch welche ausgesagt wird, dass $\mathrm{Ser}_\varrho(\sigma_0 v + \tau_0 w, \sigma v + \tau w, v, w)$ eine Invariante der Aequivalenz:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \sim (\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma_0, \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma'_0,$$
$$\alpha\sigma + \beta\tau,\ \alpha'\sigma + \beta'\tau,\ \beta'v - \alpha'w,\ -\beta v + \alpha w)$$

ist, sobald nur für die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma_0, \alpha', \beta', \gamma'_0$ die Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ erfüllt ist. Aber es ist noch hinzuzufügen, dass hierbei, wie es die Gleichung $(\mathfrak{E}_0)$ erfordert, nur solche Systeme:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w), \quad (\sigma'_0, \tau'_0, \sigma', \tau', v', w')$$

genommen werden dürfen, für welche die Functionen Ser_ϱ im § 3 $(\mathfrak{D})$ definirt sind, dass also alle diejenigen Systeme ausgeschlossen werden müssen, bei welchen auch nur eine der Grössen σ_0, τ_0 oder σ'_0, τ'_0 einen ganzzahligen Werth hat.

§ 8.

Die Summe:

$$\sum_{m=-M-h}^{m=+M+h'} \sum_{n=-N-k}^{n=+N+k'} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}},$$

in welcher h, h', k, k', M, N positive Zahlen bedeuten und $N \geqq M$ vorausgesetzt wird, unterscheidet sich von der Summe:

$$\sum_{m=-M}^{m=+M} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}}$$

durch das Aggregat von acht Summen:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}}$$

mit den Summationsbestimmungen:

$$-m = M+1, M+2, \ldots M+h; \quad -n = 1, 2, \ldots M \quad \text{und} \quad n = 0, 1, 2, \ldots M,$$
$$m = M+1, M+2, \ldots M+h'; \quad -n = 1, 2, \ldots M \quad \text{und} \quad n = 0, 1, 2, \ldots M,$$
$$-n = M+1, M+2, \ldots N+k; \quad -m = 1, 2, \ldots M+h \quad \text{und} \quad m = 0, 1, 2, \ldots M+h',$$
$$n = M+1, M+2, \ldots N+k'; \quad -m = 1, 2, \ldots M+h \quad \text{und} \quad m = 0, 1, 2, \ldots M+h'.$$

Der Werth jeder von diesen acht Summen nähert sich, wie aus den Gleichungen $(\mathfrak{C})$ im § 3 hervorgeht, mit wachsendem M der Null, und es findet daher die Gleichung statt:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=+M} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}} = \lim \sum_{m=-M-h}^{m=+M+h'} \sum_{n=-N-k}^{n=+N+k'} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}}.$$

Da hierbei die Zahl N nur der Bedingung unterworfen ist, dass sie nicht kleiner als M sein soll, so kann man auf der rechten Seite sowohl $N = M$ nehmen als auch zuerst N und dann M unendlich groß werden lassen. Es resultiren demnach, bei Anwendung der am Schlusse des § 3 gegebenen Definition von $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, die beiden Gleichungen:

$$(\mathfrak{F}_0) \qquad \begin{aligned} \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) &= \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}} && \binom{-M-h \leqq m \leqq M+h'}{-M-k \leqq n \leqq M+k'}, \\ \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) &= \lim_{M=\infty} \lim_{N=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}} && \binom{-M-h \leqq m \leqq M+h'}{-N-k \leqq n \leqq N+k'}. \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin die Grössen:

$$\sigma_0, \qquad \tau_0, \qquad v, \qquad w, \qquad m, \qquad n$$

durch: $\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0,\ \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0,\ \beta'v - \alpha'w,\ -\beta v + \alpha w,\ \alpha m + \beta n,\ \alpha'm + \beta'n,$

wo $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ganze Zahlen bedeuten, für welche $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ ist, so behält gemäss der Gleichung $(\mathfrak{E}')$ im § 6 die Function $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ auf der linken Seite ihren Werth bei, und der Ausdruck unter dem Summenzeichen auf der rechten Seite bleibt *formal* ungeändert, während die Summation nunmehr in der ersteren von den beiden Gleichungen $(\mathfrak{F}_0)$ auf alle diejenigen Systeme ganzer Zahlen (m, n) zu erstrecken ist, für welche die beiden Ungleichheitsbedingungen:

$$-M - h \leqq \alpha m + \beta n \leqq M + h', \quad -M - k \leqq \alpha'm + \beta'n \leqq M + k'$$

erfüllt sind, in der zweiten Gleichung $(\mathfrak{F}_0)$ aber auf alle diejenigen Systeme (m, n), für welche:

$$-M - h \leqq \alpha m + \beta n \leqq M + h', \quad -N - k \leqq \alpha'm + \beta'n \leqq N + k'$$

ist. Man kann dieses Resultat also durch die beiden allgemeineren Gleichungen darstellen:

$$(\mathfrak{F})\qquad \begin{aligned} \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) &= \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} -M-h \leqq \alpha m + \beta n \leqq M+h' \\ -M-k \leqq \alpha' m + \beta' n \leqq M+k' \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1 \end{pmatrix}, \\ \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) &= \lim_{M=\infty} \lim_{N=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} -M-h \leqq \alpha m + \beta n \leqq M+h' \\ -N-k \leqq \alpha' m + \beta' n \leqq N+k' \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

welche die Gleichungen $(\mathfrak{F}_0)$ als speciellere (für $\alpha = \beta' = 1, \alpha' = \beta = 0$) mit umfassen und eine Haupteigenschaft der Function $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ ausdrücken.

Da $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, gemäss der im § 3 $(\mathfrak{D})$ gegebenen Definition, den Grenzwerth:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \qquad (m, n = -M, -M+1, \ldots +M)$$

bedeutet, so kann das in den Gleichungen $(\mathfrak{F})$ enthaltene Resultat in folgender Weise formulirt werden:

I. Für alle verschiedenen ganzzahligen Systeme $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$, für welche weder $\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0$ noch $\alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0$ einen ganzzahligen Werth hat, nähert sich die Summe:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} -M-h \leqq \alpha m + \beta n \leqq M+h' \\ -M-k \leqq \alpha' m + \beta' n \leqq M+k' \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1 \end{pmatrix}$$

mit wachsendem M einem und demselben Werth.

II. Für alle bezeichneten Systeme $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ nähert sich die Summe:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} -M-h \leqq \alpha m + \beta n \leqq M+h' \\ -N-k \leqq \alpha' m + \beta' n \leqq N+k' \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1 \end{pmatrix},$$

wenn man zuerst N und alsdann M ins Unendliche wachsen lässt, einem und demselben Werth.

III. Beide Grenzwerthe sind mit einander identisch.

Denkt man sich die Systeme (m, n) durch Punkte in der Ebene repraesentirt, deren rechtwinklige Coordinaten die Zahlen m und n sind, so hat man im Falle I die Summation über alle innerhalb eines Parallelogrammes liegenden Punkte zu erstrecken, welches man beliebig annehmen kann, dessen Umfang man aber alsdann

dergestalt ins Unendliche ausdehnen muss, dass dabei der Mittelpunkt fest bleibt und das Verhältnis der Seiten sich einer festen endlichen Grenze nähert. Im Falle II muss man dagegen das Parallelogramm, unter Festhaltung des Mittelpunktes, erst nach der einen und alsdann nach der anderen Dimension ins Unendliche ausdehnen.

§ 9.

Im § 4 ist die Herleitung der beiden Transformationsrelationen $(\mathfrak{E}_1)$, $(\mathfrak{E}_2)$, aus welchen die allgemeinere Relation $(\mathfrak{E}')$ im § 6 unmittelbar hervorging, in verschiedenartiger Weise erfolgt. Während die erstere Relation $(\mathfrak{E}_1)$ sich als eine einfache Consequenz der Definitionsgleichung ergab, musste bei der Herleitung der Relation $(\mathfrak{E}_2)$ nochmals auf den Integralausdruck, welcher der Entwickelung im § 1 zu Grunde liegt, zurückgegangen werden. Man kann aber zu *beiden* Relationen $(\mathfrak{E}_1)$ und $(\mathfrak{E}_2)$ auf *dieselbe* einfache Weise gelangen, wenn man die im vorigen Paragraphen mit $(\mathfrak{F}_0)$ bezeichneten, aus den Gleichungen $(\mathfrak{E})$ im § 3 resultirenden Gleichungen voranschickt.

Wie nämlich aus der ersteren der beiden Gleichungen $(\mathfrak{F}_0)$:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M-h}^{m=+M+h'} \sum_{n=-M-k}^{n=+M+k'} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}}$$

unmittelbar die Gleichung $(\mathfrak{E}_1)$:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, -w, v)$$

folgt, wenn man in jener Gleichung:

$$\begin{array}{lllll} & h, h', k, k', & m, n, & \sigma_0, \tau_0, & v, w \\ \text{in} & k, k', h', h, & -n, m, & -\tau_0, \sigma_0, & -w, v \end{array}$$

verwandelt, so geht aus der zweiten der beiden Gleichungen $(\mathfrak{F}_0)$ zuvörderst, wenn man darin, wie es — da N *zuerst* ins Unendliche wächst — gestattet ist:

$$k = k_1 - gm, \quad k' = k_1' + gm$$

setzt, die Gleichung hervor:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \lim_{M=\infty} \lim_{N=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} -M-h \leqq m \leqq M+h' \\ -N-k_1 \leqq n \leqq N+k_1' \end{pmatrix},$$

und diese geht ferner, wenn

$$n + gm,\quad \tau_0 + g\sigma_0,\quad v - gw,$$

für

$$n,\quad \tau_0,\quad v$$

substituirt wird, in folgende über:

$$(\mathfrak{E}_2') \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v - gw, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w);$$

denn u_0 bleibt ungeändert, da:

$$u_0 = \sigma_0(v - gw) + (\tau_0 + g\sigma_0)w = \sigma_0 v + \tau_0 w$$

ist. Die Gleichung $(\mathfrak{E}_2')$ führt nun ebenso unmittelbar, wie die Gleichung $(\mathfrak{E}_2)$, zu der allgemeinen Transformationsrelation $(\mathfrak{E}')$ im § 6; sie selbst geht in $(\mathfrak{E}_2)$ über, wenn zuerst v in $-w$ und w in v verwandelt und alsdann, gemäss der Gleichung $(\mathfrak{E}_1)$

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, -w - gv, v) \quad \text{durch} \quad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w + gv)$$

und

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, -w, v) \quad \text{durch} \quad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$$

ersetzt wird.

Für $\varrho = 0$ stimmt der in der zweiten Gleichung $(\mathfrak{F})$ enthaltene Grenzwerth mit demjenigen überein, durch welchen im § 7 des art. XX die Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ definirt, und welcher a. a. O. mit $(\mathfrak{S}_0)$ bezeichnet worden ist.*)

§ 10.

Im § 2 ist gezeigt worden, dass sowohl der reelle als auch der mit i multiplicirte Theil des Werthes der Summe:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \sum_{m,n} \frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} m = m_0, m_0+1, \dots m_0+h-1 \\ n = n_0, n_0+1, \dots n_0+k-1 \end{pmatrix}$$

absolut kleiner ist als:

$$\frac{G^2\Gamma(1+\varrho)}{(a_0 m_0 + b_0 n_0 + c_0)^{1+\varrho}}.$$

Dabei waren die reellen positiven Grössen G, a_0, b_0 nur durch die Werthe von σ_0, τ_0, v, w bestimmt, und einzig und allein bei der Bestimmung der reellen (positiven oder negativen) Grösse c_0 kam der Werth von u in Betracht.

*) S. 77 dieses Sonderabdrucks[1]).

[1]) Bd. V, S. 88 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

Setzt man $u = (u_0 + u_1 i)v$, so ist gemäss den im § 1 gegebenen Bestimmungen:

$$c_0 + c_1 i = (u_0 + u_1 i)\,(2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\varepsilon'\varphi i),$$

also:

$$c_0 = 2\varepsilon_0 u_0\psi - (2\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\varepsilon' u_1\varphi.$$

Man kann daher, wenn der Werth der complexen Variabeln u innerhalb eines bestimmten endlichen Gebiets $\mathfrak{G}$ bleibt, stets eine Grösse $-\mathfrak{p}$ finden, unter welche der Werth von c_0 nicht sinkt, und der Werth der Summe $(\mathfrak{A})$ ist dann für alle innerhalb jenes Gebiets bleibenden Werthe von u absolut kleiner als:

$$\frac{G^2\Gamma(1+\varrho)}{(a_0 m_0 + b_0 n_0 - \mathfrak{p})^{1+\varrho}}.$$

Dabei müssen m_0, n_0 so gross sein, dass $a_0 m_0 + b_0 n_0 - \mathfrak{p}$ positiv wird.

Bezeichnet man nun zur Abkürzung die Reihe:

$$\sum_{m=-M}^{m=+M}\sum_{n=-M}^{m=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}},$$

als Function von M und u, mit $F(M, u)$, so kann man, gemäss der obigen Auseinandersetzung, M so gross wählen, dass für alle innerhalb eines gegebenen Gebiets $\mathfrak{G}$ liegenden Werthe der complexen Variabeln u der Werth der Differenz:

$$F(M + r, u) - F(M, u)$$

für jede, noch so grosse, Zahl r unter einer vorgeschriebenen festen Grenze bleibt, sobald nur das Gebiet $\mathfrak{G}$ keinen der von vorn herein ausgeschlossenen Werthe enthält, für welche einer der Nenner $u + mv + nw$ gleich Null wird. Die Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, wie sie durch die Gleichung $(\mathfrak{D})$ im § 3 definirt ist, convergirt hiernach für alle innerhalb $\mathfrak{G}$ liegenden Werthe von u *gleichmässig*.

Nach diesen Vorbemerkungen erhellt unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung:

$$(\mathfrak{G}) \qquad (1+\varrho)\int_u^{u_1} \mathrm{Ser}_{1+\varrho}(u_0, u, v, w)\,du = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) - \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u_1, v, w),$$

da man hierin überall für die unendlichen Reihen $\mathrm{Ser}_{1+\varrho}$, Ser_ϱ die endlichen, durch die Summationsbedingungen:

$$-M \leqq m \leqq M, \quad -M \leqq n \leqq M$$

begrenzten Reihen nehmen und dabei M so gross wählen kann, dass für alle auf dem Integrationswege liegenden Werthe von u der Unterschied zwischen den endlichen und unendlichen Reihen, sowohl für ϱ als auch für $1+\varrho$, unter einer vorgeschriebenen festen Grenze bleibt.

Lässt man in der Gleichung ($\mathfrak{G}$) die Integrationsgrenzen an einander rücken, so resultirt die Gleichung:

$$(\mathfrak{G}') \qquad \frac{\partial \,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)}{\partial u} = -(1+\varrho)\,\mathrm{Ser}_{1+\varrho}(u_0, u, v, w);$$

die Function $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ hat also, als Function der complexen Variabeln u betrachtet, Differentialquotienten aller Ordnungen, und diese haben endliche Werthe, sobald nur nicht beide durch die Gleichung $u = \sigma v + \tau w$ definirten reellen Grössen σ, τ ganzzahlige Werthe haben.

Es ist hiernach $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, für $\varrho = 0$ und für jede positive ganze Zahl ϱ, eine Function von u mit folgenden Eigenschaften:

> sie selbst und ihre Differentialquotienten sind für alle Werthe von u, mit alleiniger Ausnahme derjenigen, für welche die Gleichung $u + mv + nw = 0$ in ganzen Zahlen m, n erfüllbar ist, eindeutig und endlich, und der Grenzwerth, welchem sich das Product:
>
> $$(u + mv + nw)^{1+\varrho}\,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$$
>
> nähert, wenn man $u + mv + nw$ gleich Null werden lässt, ist gleich $e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}$.

Weiss man nun von einer Function $F(u)$, dass ihr eben dieselben Eigenschaften zukommen, und zwar in der Weise, dass die Differenz $F(u) - \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ für alle Werthe der Variabeln u unter einer bestimmten Grösse bleibt, so erschliesst man unmittelbar aus dem *Cauchy*'schen Theorem, dass $F(u)$ mit $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ identisch ist.

Um hiervon eine Anwendung zu machen, nehme ich zuvörderst für $F(u)$:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v', w') \qquad (v' = \beta' v - \alpha' w,\ w' = -\beta v + \alpha w),$$

oder also:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m', n'} \frac{e^{(n'\sigma_0 - m'\tau_0)2\pi i}}{(u + m'v + n'w)^{1+\varrho}} \qquad \binom{m' = \beta' m - \beta n,\ n' = -\alpha' m + \alpha n,}{m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M}.$$

Da mittels der Relation ($\mathfrak{E}_3$) im § 7 sowohl $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ als auch $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v', w')$ auf solche Functionen Ser_ϱ reducirt werden können, in welchen das Argument u, wenn es auf die Form $\sigma v + \tau w$ gebracht ist, nur Grössen σ, τ enthält, die absolut kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, und da für solche Werthe von u der absolute Werth jeder der beiden Reihen:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w), \quad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v', w'),$$

nach Abtrennung des in beiden vorkommenden Gliedes $\frac{1}{u^{1+\varrho}}$, unter einer nach § 1 und § 2 zu bestimmenden Grenze bleibt, so ist dies auch für die Differenz der beiden Reihen der Fall, und man erschliesst also hieraus unmittelbar die allgemeine Transformationsformel ($\mathfrak{E}'$):

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v', w'),$$

welche im § 6 auf andere Weise hergeleitet worden ist.

Ich nehme zweitens $\varrho = 0$ und für $F(u)$ die im § 8 des art. XX mit $\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$ bezeichnete Function, welche im Anfange des citirten Paragraphen durch den Ausdruck dargestellt ist:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{1}{v}\, e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u_0 + u}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)},$$

wo, wie dort, der mit i multiplicirte Theil von $\frac{w}{v}$ positiv vorausgesetzt wird.

Aus der für zwei beliebige ganze Zahlen s, t bestehenden Relation:

$$(\mathfrak{H}) \qquad \vartheta\left(\frac{u + sv + tw}{v}, \frac{w}{v}\right) = e^{-(t^2 w + 2tu + sv + tv)\frac{\pi i}{v}}\, \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$$

ist schon im § 9 des art. XX die Gleichung hergeleitet worden:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u + sv + tw, v, w) = e^{(s\tau_0 - t\sigma_0)2\pi i}\, \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w),$$

und es findet ebenso, gemäss der Relation ($\mathfrak{E}$) im § 7 dieses art. XXI, für die Function $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ die Gleichung statt:

$$\overline{\mathrm{Ser}}(u_0, u + sv + tw, v, w) = e^{(s\tau_0 - t\sigma_0)2\pi i}\, \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w).$$

Man braucht daher, um die Endlichkeit der Differenz:

$$(\mathfrak{K}) \qquad \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) - \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$$

für beliebige Werthe des Arguments u nachzuweisen, nur darzuthun, dass diese Differenz, ihrem absoluten Werthe nach, stets unter einer zu bestimmenden festen Grenze bleibt, wenn man sich auf solche Werthe von u beschränkt, bei welchen die beiden durch die Gleichung:

$$u = \sigma v + \tau w$$

bestimmten reellen Grössen σ, τ absolut kleiner als $\frac{1}{2}$ sind. Für solche Werthe von u bleibt aber, wie aus der Productentwickelung der im Nenner des Ausdrucks $(\mathfrak{B})$ enthaltenen ϑ-Function $\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$ erhellt, die Differenz:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) - \frac{1}{u},$$

ihrem absoluten Werthe nach, stets unter einer zu bestimmenden festen Grenze. Eben dasselbe findet, wie schon oben ausgeführt worden ist, für die Differenz:

$$\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) - \frac{1}{u}$$

statt. Da hiernach auch der absolute Werth der Differenz $(\mathfrak{K})$ unter einer zu bestimmenden festen Grenze bleibt, so erschliesst man nunmehr mittels des *Cauchy*'schen Theorems jene Hauptgleichung:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$$

oder:

$$(\mathfrak{L}') \qquad \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 u \pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u_0 + u}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)},$$

welche schon im art. XX auf zwei verschiedene Arten hergeleitet worden ist.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass, bei der vorstehenden höchst einfachen Verification der Gleichung $(\mathfrak{L}')$, von den Eigenschaften der ϑ-Function nur ihre Productentwickelung und die oben mit $(\mathfrak{H})$ bezeichnete Relation, von den Eigenschaften der Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ nur ihre Convergenz und die im § 7 mit $(\mathfrak{E})$ bezeichnete Relation gebraucht worden ist.

Die Formeln $(\mathfrak{L})$ und $(\mathfrak{L}')$ können, wenn man von der oben über das Vorzeichen von $\frac{wi}{v}$ gemachten Voraussetzung abstrahirt, mit Hülfe der zweiten von den Gleichungen $(\mathfrak{E}_4)$ im § 7, in folgender Weise dargestellt werden:

$$\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w),$$

$$(\mathfrak{M}) \qquad \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 u \pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0 + u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

wobei ε das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theils von $\frac{w}{v}$ bedeutet, und es erhellt aus der obigen Formel $(\mathfrak{G}')$, dass der Werth der Reihe:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$$

für beliebige positive ganzzahlige Werthe von ϱ durch den Coefficienten von z^ϱ in der Entwickelung des Ausdrucks:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u - z, v, \varepsilon w),$$

oder:

$$\frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 (u - z)\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0 + u - z}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u - z}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

nach steigenden Potenzen von z dargestellt wird.

Hierbei kann auch von der Beschränkung der Grössen σ_0, τ_0 auf nichtganzzahlige Werthe abgesehen werden, wenn man unter

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$$

für ganzzahlige Werthe von σ_0 den Grenzwerth:

$$\lim_{\delta = 0} \mathrm{Ser}_\varrho(u_0 + \delta v, u, v, w),$$

für ganzzahlige Werthe von τ_0 den Grenzwerth:

$$\lim_{\delta = 0} \mathrm{Ser}_\varrho(u_0 + \delta w, u, v, w)$$

versteht.*) Die complexen Grössen u_0, u, v, w sind demgemäss nur der Beschränkung unterworfen, dass die beiden ϑ-Functionen:

$$\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right), \quad \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$$

von Null verschieden, also die beiden Gleichungen:

$$u_0 + mv + nw = 0, \quad u + mv + nw = 0 \qquad (u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w)$$

nicht in ganzen Zahlen m, n erfüllbar seien.

XXII.

§ 1.

Die schon im Anfange des Art. XXI hervorgehobene fundamentale Bedeutung der mit $\operatorname{Ser}(u_0, u, v, w)$ bezeichneten Reihe zeigt sich noch besonders darin, dass man durch deren Integration zu einer neuen merkwürdigen Verallgemeinerung der *Jacobi*'schen Θ-Function gelangt.

Setzt man nämlich, wie in den vorhergehenden Abschnitten:

$$u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w, \quad u = \sigma v + \tau w,$$

so ist:

$$\operatorname{Ser}(u_0, u, v, w) = \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w},$$

und zwar unter den im art. XXI angegebenen Summationsbedingungen. Nun besteht offenbar, gemäss der zweiten von den am Schlusse des art. XXI hergeleiteten, a. a. O. mit ($\mathfrak{M}$) bezeichneten Gleichungen, die Reihenrelation**):

$$\varepsilon e^{(\sigma_0\tau - \sigma\tau_0)\pi i} \operatorname{Ser}(u_0, u, v, w) = e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i} \operatorname{Ser}(u, u_0, v, w),$$

oder also:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \varepsilon \sum_{m,n} \frac{e^{((\tau+n)\sigma_0 - (\sigma+m)\tau_0)2\pi i}}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w} = \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i}}{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w},$$

und wenn man auf beiden Seiten das eine Mal in Beziehung auf σ_0 von σ_0 bis σ_0', das andere Mal in Beziehung auf τ_0 von τ_0 bis τ_0' integrirt, so kommt:

*) Vergl. die Ausführungen in § 5 und § 6.

**) In der schon am Schlusse von Art. XX hergeleiteten a. a. O. mit ($\mathfrak{Z}^{\mathrm{V}}$) bezeichneten Reihenrelation ist der Werth von w so vorausgesetzt worden, dass $\varepsilon = 1$ wird.

$$(\mathfrak{B}) \qquad \begin{aligned} v \sum_{m,n} &\frac{e^{-\tau_0(\sigma+m)2\pi i}\left(e^{\sigma_0'(\tau+n)2\pi i} - e^{\sigma_0(\tau+n)2\pi i}\right)}{(\tau+n)((\sigma+m)v + (\tau+n)w)} \\ &= 2\varepsilon\pi i \sum_{m,n} e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i} \cdot \log \frac{(\sigma_0' + m)v + (\tau_0 + n)w}{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w}, \\ w \sum_{m,n} &\frac{e^{\sigma_0(\tau+n)2\pi i}\left(e^{-\tau_0(\sigma+m)2\pi i} - e^{-\tau_0'(\sigma+m)2\pi i}\right)}{(\sigma+m)((\sigma+m)v + (\tau+n)w)} \\ &= 2\varepsilon\pi i \sum_{m,n} e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i} \cdot \log \frac{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0' + n)w}{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w}, \end{aligned}$$

Damit die zu integrirenden Ausdrücke in dem Integrationsintervalle durchweg endlich bleiben, wird vorausgesetzt, dass weder zwischen σ_0 und σ_0' noch zwischen τ_0 und τ_0' eine ganze Zahl liegt. Die Frage der Convergenz der Reihen auf der rechten Seite der beiden Gleichungen ($\mathfrak{B}$) wird auf die in den vorhergehenden Abschnitten erledigte Frage der Convergenz der Reihe $\operatorname{Ser}_\varrho(u, u_0, v, w)$ für die Fälle $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$ zurückgeführt, wenn man den Logarithmus:

$$\log \frac{(\sigma_0' + m)v + (\tau_0 + n)w}{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w} \quad \text{oder} \quad \log\left(1 - \frac{(\sigma_0 - \sigma_0')v}{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w}\right)$$

auf der rechten Seite der ersteren Gleichung ($\mathfrak{B}$) durch die Reihe:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\infty} \frac{(\sigma_0 - \sigma_0')^{1+\varrho} v^{1+\varrho}}{(1+\varrho)((\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w)^{1+\varrho}}$$

ersetzt. Denn der alsdann resultirende Ausdruck kann in die drei Theile zerlegt werden:

$$v(\sigma_0 - \sigma_0') \operatorname{Ser}_0(u, u_0, v, w),$$

$$\tfrac{1}{2} v^2 (\sigma_0 - \sigma_0')^2 \operatorname{Ser}_1(u, u_0, v, w),$$

$$\sum_{\varrho=2}^{\varrho=\infty} \sum_{m,n} \frac{(v(\sigma_0 - \sigma_0'))^{1+\varrho}}{1+\varrho} \cdot \frac{e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i}}{((\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w)^{1+\varrho}},$$

und dass die Reihe:

$$\sum_{\varrho=2}^{\varrho=\infty} \sum_{m,n} \frac{1}{|(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w|^{1+\varrho}},$$

also auch die Reihe, welche den letzten jener drei Theile bildet, convergirt, ist bereits von *Eisenstein* nachgewiesen worden.*)

*) Vergl. § 2 der Abhandlung „Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind". *Crelle*'s Journal, Bd. 35, S. 166.

Wenn man in der ersteren der Gleichungen ($\mathfrak{B}$) τ_0' für τ_0 substituirt und alsdann beide Gleichungen addirt, so resultirt auf der rechten Seite der Reihe:

$$(\mathfrak{C}) \qquad 2\varepsilon\pi i \sum_{m,n} e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i} \log \frac{(\sigma_0' + m)v + (\tau_0' + n)w}{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w},$$

während der Ausdruck auf der linken Seite sich zuvörderst als ein Aggregat von Reihen in folgender Weise darstellt:

$$v\sum_{m,n}\frac{e^{((\tau+n)\sigma_0' - (\sigma+m)\tau_0')2\pi i}}{(\tau+n)((\sigma+m)v+(\tau+n)w)} - v\sum_{m,n}\frac{e^{((\tau+n)\sigma_0 - (\sigma+m)\tau_0')2\pi i}}{(\tau+n)((\sigma+m)v+(\tau+n)w)}$$
$$+ w\sum_{m,n}\frac{e^{((\tau+n)\sigma_0 - (\sigma+m)\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)((\sigma+m)v+(\tau+n)w)} - w\sum_{m,n}\frac{e^{((\tau+n)\sigma_0 - (\sigma+m)\tau_0')2\pi i}}{(\sigma+m)((\sigma+m)v+(\tau+n)w)}.$$

Nun erhält man durch Vereinigung der mit dem Minuszeichen versehenen zweiten und vierten dieser vier Reihen das Reihenproduct:

$$-\sum_m \frac{e^{2\tau_0'(\sigma+m)\pi i}}{\sigma+m} \sum_n \frac{e^{2\sigma_0(\tau+n)\pi i}}{\tau+n},$$

und die einzelnen Werthe dieser beiden Reihen sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$\sum_m \frac{e^{-2\tau_0'(\sigma+m)\pi i}}{\sigma+m} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-2\sigma[\tau_0']\pi i}}{e^{2\sigma\pi i} - 1},$$

$$\sum_n \frac{e^{2\sigma_0(\tau+n)\pi i}}{\tau+n} = 2\pi i \cdot \frac{e^{2\tau[\sigma_0]\pi i}}{1 - e^{-2\tau\pi i}}.$$

Man kann daher, wenn man berücksichtigt, dass der Voraussetzung nach $[\tau_0'] = [\tau_0]$ ist, den ganzen Ausdruck auf folgende Form bringen:

$$(\mathfrak{D}) \qquad v\sum_{m,n}\frac{e^{((\tau+n)\sigma_0' - (\sigma+m)\tau_0')2\pi i}}{(\tau+n)((\sigma+m)v+(\tau+n)w)} + w\sum_{m,n}\frac{e^{((\tau+n)\sigma_0 - (\sigma+m)\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)((\sigma+m)v+(\tau+n)w)}$$
$$- \frac{\pi}{\sin\sigma\pi} \cdot \frac{\pi}{\sin\tau\pi} \cdot e^{(-\sigma+\tau-2\sigma[\tau_0]+2\tau[\sigma_0])\pi i}.$$

Da der Werth dieses Ausdrucks ($\mathfrak{D}$) mit dem von ($\mathfrak{C}$) übereinstimmt, so muss man dafür den entgegengesetzten Werth erhalten, wenn σ_0 mit σ_0' und zugleich τ_0 mit τ_0' vertauscht wird. Dies kann an dem Ausdruck ($\mathfrak{D}$) selbst nachgewiesen werden, indem man zeigt, dass die Summe des Ausdrucks ($\mathfrak{D}$) und desjenigen ($\mathfrak{D}'$), welcher durch die angegebene Vertauschung entsteht, gleich Null wird. Nun ist diese Summe gleich der Differenz von:

$$(\mathfrak{E}) \qquad \sum_{m,n} \frac{e^{((\tau+n)\sigma_0 - (\sigma+m)\tau_0)} + e^{((\tau+n)\sigma_0' - (\sigma+m)\tau_0')2\pi i}}{(\sigma+m)(\tau+n)}$$

und:

$$(\mathfrak{E}') \qquad 2\frac{\pi}{\sin\sigma\pi} \cdot \frac{\pi}{\sin\tau\pi} e^{(-\sigma+\tau-2\sigma[\tau_0]+2\tau[\sigma_0])\pi i}.$$

Bringt man den ersteren Ausdruck ($\mathfrak{E}$) auf die Form:

$$\sum_m \frac{e^{-2\tau_0(\sigma+m)\pi i}}{\sigma+m} \cdot \sum_n \frac{e^{2\sigma_0(\tau+n)\pi i}}{\tau+n} + \sum_m \frac{e^{-2\tau_0'(\sigma+m)\pi i}}{\sigma+m} \cdot \sum_n \frac{e^{2\sigma_0'(\tau+n)\pi i}}{\tau+n}$$

und summirt die einzelnen Reihen in der oben angegebenen Weise, so erhält man dafür den Werth:

$$\frac{e^{(-\sigma+\tau)\pi i}}{\sin\sigma\pi\sin\tau\pi} \cdot \left(e^{(\tau[\sigma_0] - \sigma[\tau_0])2\pi i} + e^{(\tau[\sigma_0'] - \sigma[\tau_0'])2\pi i}\right),$$

welcher in der That mit dem Ausdruck ($\mathfrak{E}'$) übereinstimmt, da der Voraussetzung nach:

$$[\sigma_0] = [\sigma_0'], \quad [\tau_0] = [\tau_0']$$

ist.

Bildet man jetzt die halbe Differenz der beiden mit ($\mathfrak{D}$) und ($\mathfrak{D}'$) bezeichneten Ausdrücke, welche ihrem Werthe nach mit ($\mathfrak{D}$) übereinstimmt, so fällt der letzte der drei Theile in dem obigen Ausdruck von ($\mathfrak{D}$) fort, und es resultirt die doppelt unendliche Reihe:

$$(\mathfrak{F}) \qquad \sum_{m,n} \frac{(\sigma+m)v - (\tau+n)w}{(\sigma+m)v + (\tau+n)w} \; \frac{e^{((\tau+n)\sigma_0' - (\sigma+m)\tau_0')2\pi i} - e^{((\tau+n)\sigma_0 - (\sigma+m)\tau_0)2\pi i}}{2(\sigma+m)(\tau+n)}.$$

Deren Werth hat sich also durch die vorstehende Entwickelung, als übereinstimmend mit demjenigen der obigen Reihe:

$$(\mathfrak{C}) \qquad 2\varepsilon\pi i \sum_{m,n} e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i} \log \frac{(\sigma_0' + m)v + (\tau_0' + n)w}{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w}$$

erwiesen, sowie mit demjenigen des Ausdrucks:

$$2\varepsilon v\pi i \int_{\sigma_0}^{\sigma_0'} \mathrm{Ser}\,(\sigma v + \tau w, \sigma_0 v + \tau_0 w, v, w)\, d\sigma_0 + 2\varepsilon w\pi i \int_{\tau_0}^{\tau_0'} \mathrm{Ser}\,(\sigma v + \tau w, \sigma_0 v + \tau_0 w, v, w)\, d\tau_0,$$

in welchem die Reihen unter dem Integralzeichen in der bei ($\mathfrak{M}$) im vorigen Abschnitte angegebenen Weise durch ϑ-Functionen dargestellt werden können.

Es ist noch hervorzuheben, dass der Werth der Reihe $(\mathfrak{F})$, wenn man unter dem Summenzeichen den Factor $\frac{(\sigma+m)v-(\tau+n)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}$ weglässt, gleich Null wird, und dass demnach die Werthe der beiden Reihen:

$$(\mathfrak{F}') \qquad v\sum_{m,n}\frac{e^{((\tau+n)\sigma_0'-(\sigma+m)\tau_0')2\pi i}-e^{((\tau+n)\sigma_0-(\sigma+m)\tau_0)2\pi i}}{(\tau+n)((\sigma+m)v+(\tau+n)w)},$$

$$(\mathfrak{F}'') \qquad -w\sum_{m,n}\frac{e^{((\tau+n)\sigma_0'-(\sigma+m)\tau_0')2\pi i}-e^{((\tau+n)\sigma_0-(\sigma+m)\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)((\sigma+m)v+(\tau+n)w)}$$

mit demjenigen der Reihe $(\mathfrak{F})$ übereinstimmen[1]).

---

[1]) Vgl. Zusatz 7 am Ende dieses Bandes.

DIE LEGENDRE'SCHE RELATION

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1891. S. 323—332, S. 343—358, S. 447—465, S. 905—908.