SUR UNE FORMULE DE GAUSS

PAR

M. LÉOPOLD KRONECKER.

Liouville, Journal de mathématiques pures et appliquées.
Sér. II. Tome 1. p. 392—395.

SUR UNE FORMULE DE GAUSS.[1]

Si l'on désigne par n un nombre premier impair, a et b respectivement les résidus et les non résidus (pris positivement) de n, et que l'on fasse

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$$

on aura l'équation

$$\text{(I)} \qquad \sum\omega^a - \sum\omega^b = \pm\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n},$$

que l'on déduit aisément de la théorie des équations binômes. Des méthodes dont l'usage est très-fréquent dans cette théorie suffisent même pour fixer le signe du radical, ce que je vais exposer en peu de mots.

On a par considérations les plus simples

$$\text{(II)} \qquad \Pi[\omega^{2k-1} - \omega^{n-(2k-1)}] = +\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n},$$

où le signe Π s'étend à toutes les valeurs de $k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\cdot$ Donc, pour faire disparaître l'ambiguïté de l'équation (I), il faut décider si, dans l'égalité

$$\text{(III)} \qquad \sum\omega^a - \sum\omega^b = \varepsilon\,\Pi(\omega^{2k-1} - \omega^{n-2k+1})$$

la lettre ε a la valeur $+1$ ou -1.

Désignons par $F(x)$ la fonction entière de x à coefficients entiers que voici:

$$\sum x^a - \sum x^b - \varepsilon\,\Pi(x^{2k-1} - x^{n-2k+1})$$

Cela posé, il résulte de l'équation (III) que la fonction $F(x)$ s'annule pour $x = \omega$; donc elle contiendra le facteur $(x - \omega)$. Or, ce facteur étant en même temps un des facteurs linéaires de la fonction irréductible $\frac{x^n-1}{x-1}$, il faut que le polynôme $F(x)$ soit divisible par cette fonction même. Observons enfin que la fonction $F(x)$ s'annule pour $x = 1$, c'est-à-dire qu'elle doit contenir le facteur linéaire $(x - 1)$, d'où l'on

[1]) Vgl. Zusatz 37 am Ende dieses Bandes.

voit que la fonction $F(x)$ doit être divisible par $(x^n - 1)$, et le quotient sera évidemment une fonction entière de x à coefficients entiers. C'est pourquoi l'on peut poser

$$\sum x^a - \sum x^b - \varepsilon \prod (x^{2k-1} - x^{n-2k+1}) = (x^n - 1)(A + Bx + Cx^2 + \cdots + Hx^h),$$

$A, B, C, \ldots, H$ désignant des nombres entiers. En substituant e^z au lieu de x, il vient

$$\text{(IV)} \quad \sum e^{az} - \sum e^{bz} - \varepsilon \prod [e^{(2k-1)z} - e^{(n-2k+1)z}] = (e^{nz} - 1)(A + Be^z + Ce^{2z} + \cdots + He^{hz}).$$

En développant le facteur $\left[e^{(2k-1)z} - e^{(n-2k+1)z}\right]$ en série, le premier terme sera $(4k - 2 - n)z$; par suite, le premier terme dans le développement du produit Π sera

$$z^{\frac{n-1}{2}} \cdot \prod (4k - 2 - n).$$

Donc en développant toutes les parties de l'équation (IV) en séries suivant les puissances de z, et en égalant les coefficients du terme $z^{\frac{n-1}{2}}$, on aura

$$\text{(V)} \quad \frac{\sum a^{\frac{n-1}{2}} - \sum b^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n-1}{2}} - \varepsilon \prod (4k - 2 - n) = \frac{M}{N},$$

M et N designant des nombres entiers. Le numérateur M sera évidemment un multiple de n, parce que, dans le développement de $(e^{nz} - 1)$, les numérateurs des coefficients sont tous divisibles par n. Ensuite on voit aisément que le dénominateur N ne pourra contenir des facteurs premiers que ceux par lesquels le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n-1}{2}$ soit divisible. Donc, N étant premier à n, l'équation (V) fournit la congruence

$$\sum a^{\frac{n-1}{2}} - \sum b^{\frac{n-1}{2}} \equiv \varepsilon \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n-1}{2} \prod (4k - 2 - n) \pmod{n},$$

ou, en observant que l'on a

$$a^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1, \; b^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1,$$

il vient

$$n - 1 \equiv \varepsilon \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n-1}{2} \prod (4k - 2 - n) \pmod{n},$$

et comme par le théorème de *Wilson*, le produit qui est multiplié par ε, se trouve congru à -1 suivant le module n, on a enfin

$$1 \equiv \varepsilon \pmod{n},$$

d'où il résulte que la lettre ε doit être déterminée par l'égalité $\varepsilon = +1$ dans l'équation (III), et qu'il faut rejeter par suite le signe inférieur dans l'équation (I).

J'ajoute encore une remarque: Le problème en question étant résolu par des considérations plus générales dans les deux Mémoires célèbres de *Gauss* et de M. *Dirichlet*,[1]) j'ai eu en vue seulement de donner une méthode qui puisse s'expliquer facilement dans des leçons sur la théorie des équations binômes. En considérant cette méthode que je viens d'exposer, on voit que j'ai réussi à trouver la valeur exacte de ε en me bornant à déterminer la valeur à laquelle ε est congrue suivant le module n. C'est en ce point que la méthode exposée ci-dessus ressemble à celle que M. *Cauchy* a donnée dans un Mémoire publié dans le tome (V) de ce Journal (page 161 et les suivantes). Mais les moyens que j'ai employés pour obtenir le resultat

$$\varepsilon \equiv 1 \pmod{n},$$

sont tout à fait différents de ceux dont M. *Cauchy* s'est servi pour y parvenir. En effet, le moyen principal et fort ingénieux de cet illustre auteur consiste à remplacer dans l'équation (III) tous les termes ω^h par $\left(\frac{h}{n}\right)$, et à changer alors l'égalité en une congruence suivant le module n. Cela est permis, il est vrai, si préalablement on imagine que le produit du second membre de l'équation est développé suivant les puissances de ω; mais pour le démontrer, il faudrait encore quelques considérations assez simples, dont l'énonciation complète nuirait cependant à la brièveté.

[1]) *Gauss*, Summatio quarumdam serierum singularium, Werke, Bd. II, S. 9. *L.-Dirichlet*, Über eine neue Anwendung bestimmter Integrale auf die Summation endlicher oder unendlicher Reihen, Werke, Bd. I, S. 237.

H

ÜBER DIE ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN, FÜR WELCHE COMPLEXE MULTIPLICATION STATTFINDET

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1857. S. 455—460.

ÜBER DIE ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN, FÜR WELCHE COMPLEXE MULTIPLICATION STATTFINDET.[1]

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 29. October 1857.]

In einem Aufsatze *Abel*'s (Band I. p. 272)[2] der oeuvres complètes) findet sich die Bemerkung, daß die Moduln derjenigen elliptischen Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet, sämmtlich durch Wurzelzeichen darstellbar seien. Doch fehlt jede Andeutung über die Art und Weise, wie *Abel* diese merkwürdige Eigenschaft jener besonderen Gattung von elliptischen Functionen gefunden hat. Daß dies erst *nach* Abfassung des Aufsatzes „Recherches sur les fonctions elliptiques" geschehen, geht aus einer in demselben befindlichen Stelle (Band I. pag. 248 der oeuvres complètes oder Band III. pag. 182 des *Crelle*schen Journals)[3]) hervor, die noch Zweifel an der Auflösbarkeit der Gleichungen enthält, durch welche die oben erwähnten Moduln bestimmt werden. — Angeregt durch die zuerst angeführte Bemerkung *Abel*'s und in der Absicht einen Beweis dafür zu suchen beschäftigte ich mich im vergangenen Winter mit der Untersuchung derjenigen elliptischen Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet, und ich habe dabei außer dem gesuchten Beweise noch mehrere interessante Resultate gefunden, von denen ich einige hier in Kürze mittheilen will.

Bedeutet n eine positive ungrade Zahl welche größer als 3 ist, bezeichnet man ferner mit $\varkappa$ den Modul der elliptischen Functionen und mit k dessen Quadrat, so ist die Anzahl der verschiedenen Werthe von k, für welche eine Multiplication der elliptischen Functionen mit $\sqrt{-n}$ möglich ist d. h. für welche $\sin^2 am\,(\sqrt{-n}\cdot u, \varkappa)$ als rationale Function von $\sin^2 am\,(u, \varkappa)$ und $\varkappa$ dargestellt werden kann, gleich dem Sechsfachen der Anzahl der verschiedenen zur Determinante $-n$ gehörigen Classen quadratischer Formen. Alle diese Werthe von k sind explicite algebraische Func-

[1]) Vgl. Zusatz 38 am Ende dieses Bandes. H

[2]) *Abel*, Oeuvres (Nouv. Éd), T. I, p. 426. H

[3]) *Abel*, Oeuvres, T. I, p. 383. H

tionen irgend eines derselben; sie sind ferner Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung, deren Grad gleich der Anzahl jener Werthe ist und welche in so viel ganzzahlige Factoren zerlegt werden kann, wie die Anzahl der verschiedenen zur Determinante $-n$ gehörigen Ordnungen beträgt. Zu jeder dieser Ordnungen gehört ein bestimmter Factor jener Gleichung, dessen Grad gleich der sechsfachen Anzahl der in der bezüglichen Ordnung enthaltenen Classen ist. Der zu der eigentlich primitiven Ordnung gehörige Factor ist endlich in sechs Factoren von gleichem Grade zerlegbar, deren Coefficienten nur ganze Zahlen und $\sqrt{n}$ enthalten.[1]) Der Grad einer jeden dieser sechs Theilgleichungen ist also gleich der Anzahl der zur Determinante $-n$ gehörigen eigentlich primitiven Classen und eine dieser Theilgleichungen ist es, welche den Charakter der Auflösbarkeit am klarsten darlegt. Die Wurzeln derselben haben nämlich die Eigenschaft, daß sie sämmtlich als rationale (nur ganzzahlige Coefficienten enthaltende) Functionen irgend einer derselben dargestellt werden können, und daß für je zwei solche Functionen $\varphi(k)$ und $\psi(k)$ die Gleichung $\varphi(\psi(k)) = \psi(\varphi(k))$ stattfindet.[2]) Wenn n Primzahl und $-n$ als Determinante quadratischer Formen regulär[3]) ist, so ist die erwähnte Theilgleichung eine *Abel*sche Gleichung und in allen andern Fällen hängt der specielle Charakter derselben, die Anzahl der Perioden ihrer Wurzeln u. s. w. von der Anzahl der Genera und dem Exponenten der Irregularität[3]) für die Determinante $-n$ ab. Wenn endlich n eine grade Zahl ist oder die Werthe 1, 3 hat, so haben die zugehörigen Werthe von k Eigenschaften, welche den eben angeführten durchaus analog sind. Welchen Werth die Zahl n aber auch haben möge, so entsprechen stets einer und derselben Classe der zur Determinante $-n$ gehörigen quadratischen Formen bestimmte zusammengehörige Werthe von k, und zwar so, daß durch die Coefficienten irgend einer in jener Classe enthaltenen Form die Werthe des k und umgekehrt jene Coefficienten durch diese Werthe des k in transcendenter Weise ausgedrückt werden können.[4])

Die elliptischen Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet, stehen ihren wesentlichen Eigenschaften nach zwischen den Kreisfunktionen einerseits und den übrigen elliptischen Functionen andrerseits. Wie nämlich die den Kreisfunctionen entsprechenden Werthe $k = 0$ und $k = \pm 1$ als äußerste Grenz-

[1]) Vgl. Zusatz 39 am Ende dieses Bandes. H
[2]) Vgl. Zusatz 40 am Ende dieses Bandes. H
[3]) Vgl. Zusatz 41 am Ende dieses Bandes. H
[4]) Vgl. Zusatz 42 am Ende dieses Bandes. H

werthe zu betrachten sind, so werden auch die Werthe der Moduln jener besonderen Gattung von elliptischen Functionen dadurch als Grenzwerthe charakterisirt, daß nur für diese, so wie für jene speciellen Werthe 0 und ± 1, die Modulargleichungen gleiche Wurzeln enthalten. Während ferner für die Kreisfunctionen nur Multiplication, für die allgemeinen elliptischen Functionen aber Multiplication und Transformation stattfindet, verliert die Transformation bei jener besondern Gattung elliptischer Functionen zum Theil ihren eigenthümlichen Charakter und wird selbst eine Art von Multiplication, indem sie gewissermaaßen die Multiplication mit idealen Zahlen darstellt. Wie nämlich für eine Zahl p, welche sich durch die zur Determinante $-n$ gehörige Hauptform: $x^2 + ny^2$ darstellen läßt, eine der Transformationen $p$ter Ordnung die Multiplication mit $x + y\sqrt{-n}$ d. h. die Darstellung von $\sin^2 am\left(x + y\sqrt{-n}\right)u$ als rationale Function von $\sin^2 am\, u$ und $\varkappa$ gewährt, so ergiebt eine der Transformationen $q$ter Ordnung, wenn q durch eine der übrigen zur Determinante $-n$ gehörigen Formen darstellbar ist, eine transformirte Function: $\sin^2 am\,(\mu \cdot u, \lambda)$ ausgedrückt als rationale Function von $\sin^2 am\,(u, \varkappa)$ und $\varkappa$, in welcher λ einer der andern Moduln ist, für welche Multiplication mit $\sqrt{-n}$ stattfindet, in welcher ferner μ zu einem bestimmten Werthe von $\sqrt{-n}$ (mod. q) gehört und gradezu die Stelle eines idealen Factors von q vertritt. Diese Multiplicatoren: μ sind explicite algebraische Irrationalitäten und es ist in vielfacher Hinsicht bemerkenswerth, daß hier ein erstes Beispiel gegeben ist, in welchem die Analysis die Irrationalitäten zur Darstellung idealer Zahlen gewährt.

Bei dem genauen Zusammenhange, in welchem die elliptischen Functionen, für welche Multiplication mit $\sqrt{-n}$ stattfindet, zu den quadratischen Formen für die Determinante $-n$ stehen, ist es erklärlich, daß aus der Untersuchung jener besondern Gattung von elliptischen Functionen viele auf die Theorie der quadratischen Formen bezügliche Resultate hervorgehen. Unter diesen will ich hier nur gewisse höchst einfache recurrirende Formeln hervorheben, welche sich für die zu negativen Determinanten gehörigen Classenanzahlen aufstellen lassen und welche namentlich zu deren Berechnung sehr geeignet sind.[1]) Die Formeln sind aber auch von rein theoretischem Interesse, zumal einige derselben auf arithmetischem Wege schwer zu beweisen sein dürften. Ein anderer Theil der erwähnten Formeln kann zwar aus der bekannten Beziehung zwischen der Anzahl der Darstellungen einer Zahl n als

[1]) Vgl. Zusatz 43 am Ende dieses Bandes. H

Summe von drei Quadraten und der zur Determinante $-n$ gehörigen Classenanzahl hergeleitet werden; die Benutzung dieser Beziehung zur Aufstellung jener Formeln ist indessen durchaus neu, und — was viel wichtiger ist — diese Beziehung selbst kann umgekehrt vermittelst jener aus der Theorie der elliptischen Functionen resultirenden Formeln bewiesen werden. Als Beispiele der erwähnten Formeln mögen die folgenden drei dienen, von denen nur die zweite in der eben bezeichneten Weise auf arithmetischem Wege hergeleitet werden kann. Es ist nämlich

$$\text{(I)} \qquad 2F(n) + 4F(n-2^2) + 4F(n-4^2) \qquad + \cdots = \varphi(n) - \psi(n)$$

$$\text{(II)} \qquad 4F(n-1^2) + 4F(n-3^2) + 4F(n-5^2) + \cdots = \varphi(n) + \psi(n)$$

$$\text{(III)} \qquad F(n) + 2F(n-1^2) + 2F(n-2^2) \qquad + \cdots = \varphi(n)$$

wenn $n \equiv 3$ mod. 4, wenn ferner $F(m)$ die Anzahl aller zur Determinante $-m$ gehörigen eigentlich primitiven und von diesen derivirten Classen bedeutet und wenn endlich $\varphi(n)$ die Summe derjenigen Divisoren von n, welche größer als $\sqrt{n}$ sind, und $\psi(n)$ die Summe der übrigen Divisoren bezeichnet. Ich bemerke noch, daß die Reihe der Zahlen $n, n-1^2, n-2^2, \ldots$ in allen drei Formeln nur so weit fortzusetzen ist, als dieselben positiv bleiben und daß die Formel (III) eine unmittelbare Folge der Formeln (I) und (II) ist. — Bezeichnet man mit $H(m)$ die Anzahl der eigentlich primitiven Classen für die Determinante $-m$, so kann man die in den obigen Formeln enthaltenen Resultate auch in einer andern bemerkenswerthen Weise darstellen. Wenn nämlich D alle diejenigen positiven Zahlen bedeutet, für welche n durch die Form $x^2 + Dy^2$ darstellbar ist, wenn ferner die Anzahl dieser verschiedenen Darstellungen (wobei die positiven und negativen Werthe von x und y von einander zu unterscheiden sind) mit h bezeichnet wird, so enthält die Gleichung:

$$\sum h \cdot H(D) = 2\varphi(n)$$

genau das durch die Formel (III) ausgedrückte Resultat. — Die angegebenen drei Formeln gewähren überdieß noch eine sehr elegante Lösung der von Hrn. *Dirichlet* im *Crelle*schen Journal Bd. III. pag. 407[1]) gestellten Aufgabe, eine Lösung, welche wohl der von *Jacobi* im IX. Bande desselben Journals pag. 189[2]) gegebenen vorzuziehen sein dürfte. Die erwähnte Aufgabe verlangt nämlich für diejenigen Primzahlen n, welche durch 4 dividirt den Rest 3 lassen, die Bestimmung des Exponenten ν in der Congruenz:

$$1.2.3.\ldots\frac{n-1}{2} \equiv (-1)^\nu \text{ mod. } n$$

[1]) *G. L.-Dirichlet*, Werke Bd. I, S. 107—108. H

[2]) *Jacobi*, Werke, Bd. VI, S. 243. H

Die obigen Formeln ergeben nun, wenn man die berühmten von Hrn. *Dirichlet* (*Crelle*'s Journal Bd. XXI. pag. 152)[1]) gegebenen Ausdrücke der Classenanzahl für die Determinante $-n$ zu Hülfe nimmt, folgende Bestimmung der Zahl ν: „die Zahl ν ist die Anzahl aller derjenigen verschiedenen ungraden negativen Determinanten, für welche sich n durch die Hauptform darstellen läßt und welche Primzahlen oder Primzahlpotenzen sind." Diese Bestimmung kann auch so gefaßt werden „daß ν die Anzahl aller derjenigen unter den Zahlen $n-2^2, n-4^2, n-6^2, \ldots$ ist, welche — wenn p eine Primzahl und r eine nicht durch p theilbare Zahl bedeutet — von der Form: $r^2 \cdot p^{4i+1}$ sind"; und man sieht hieraus, daß die Ermittelung der Zahl ν auf die Zerlegung gewisser Zahlen in ihre Primfactoren reducirt ist, welche selbst kleiner als n sind und deren Anzahl kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ ist.

[1]) *G. L.-Dirichlet*, Werke, Bd. I, S. 492—493. H

ÜBER DIE ANZAHL DER VERSCHIEDENEN CLASSEN QUADRATISCHER FORMEN VON NEGATIVER DETERMINANTE

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathmatik.
Bd. 57, S. 248–255.

ÜBER DIE ANZAHL DER VERSCHIEDENEN CLASSEN QUADRATISCHER FORMEN VON NEGATIVER DETERMINANTE.[1]

Die Untersuchung derjenigen elliptischen Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet, hat mir höchst merkwürdige Formeln für die Anzahl der verschiedenen nicht äquivalenten Classen quadratischer Formen von negativer Determinante geliefert. Einige von diesen Formeln habe ich bereits in einer Notiz mitgetheilt, welche in dem Monatsberichte der hiesigen Akademie vom Oktober 1857 abgedruckt ist[2]; und zwar habe ich dort, da es mir nur darauf ankam, den allgemeinen Charakter der Formeln anschaulich zu machen, diejenigen ausgewählt, welche sich mit einfachen Bezeichnungen geben lassen. In dem Folgenden werde ich aber die erwähnten Formeln *sämmtlich* aufstellen und führe zu diesem Zwecke mehrere Bezeichnungen ein:

Es bedeute n eine beliebige positive ganze Zahl, m eine beliebige positive ungerade Zahl, r eine beliebige positive Zahl von der Form $8k - 1$ und s eine beliebige positive Zahl von der Form $8k + 1$.

Ferner sei:

$G(n)$ die Anzahl aller nicht äquivalenten Classen quadratischer Formen für die Determinante $-n$;

$F(n)$ die Anzahl der verschiedenen Classen *solcher* quadratischer Formen der Determinante $-n$, in welchen wenigstens einer der beiden äußeren Coefficienten ungrade ist;

$X(n)$ sei die Summe aller *ungraden* Divisoren von n;

$\Phi(n)$ die Summe *sämmtlicher* Divisoren von n;

$\Psi(n)$ der Betrag, um welchen die Summe der Divisoren von n, die größer als $\sqrt{n}$ sind, die Summe derjenigen übersteigt, die kleiner als $\sqrt{n}$ sind;

[1]) Vgl. Zusatz 44 am Ende dieses Bandes. H

[2]) Bd. IV, S. 182—183 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

$\Phi'(n)$ die Summe der Divisoren von n, die von der Form $8k \pm 1$ sind, vermindert um den Betrag der Summe derjenigen, die von der Form $8k \pm 3$ sind;

$\Psi'(n)$ die Summe der Divisoren $8k \pm 1$, die größer als $\sqrt{n}$, und der Divisoren $8k \pm 3$, die kleiner als $\sqrt{n}$ sind, vermindert um die Summe derer von der Form $8k \pm 1$, die kleiner als $\sqrt{n}$, und derer von der Form $8k \pm 3$, die größer als $\sqrt{n}$ sind;

$\varphi(n)$ der Betrag, um welchen die Anzahl der Divisoren von der Form $4k+1$ die Anzahl derjenigen von der Form $4k-1$ übersteigt;

$\psi(n)$ der Betrag, um welchen die Anzahl der Divisoren von der Form $3k+1$ die Anzahl derjenigen von der Form $3k-1$ übersteigt;

$\varphi'(n)$ die halbe Anzahl der verschiedenen Auflösungen der Gleichung $n = x^2 + 64y^2$ und

$\psi'(n)$ die halbe Anzahl der verschiedenen Auflösungen der Gleichung $n = x^2 + 3 \cdot 64 y^2$ in ganzen Zahlen, wobei aber die positiven und negativen Werthe von x und y als verschiedene und auch die Nullwerthe derselben zu berücksichtigen sind.

Nach diesen Festsetzungen lassen sich die aus der Theorie der elliptischen Funktionen resultirenden Beziehungen für die Classenanzahlen der quadratischen Formen negativer Determinante folgendermaaßen ausdrücken:[1]).

$$\text{(I)}\quad F(4n) + 2F(4n-1^2) + 2F(4n-2^2) + 2F(4n-3^2) + \cdots = 2X(n) + \Phi(n) + \Psi(n),$$

$$\text{(II)}\quad F(2m) + 2F(2m-1^2) + 2F(2m-2^2) + 2F(2m-3^2) + \cdots = 2\Phi(m) + \varphi(m),$$

$$\text{(III)}\quad F(2m) - 2F(2m-1^2) + 2F(2m-2^2) - 2F(2m-3^2) + \cdots = -\varphi(m),$$

$$\text{(IV)}^{2)}\quad 3G(m) + 6G(m-1^2) + 6G(m-2^2) + 6G(m-3^2) + \cdots$$
$$= \Psi(m) + 3\Psi(m) + 3\varphi(m) + 2\psi(m),$$

$$\text{(V)}\quad 2F(m) + 4F(m-1^2) + 4F(m-2^2) + 4F(m-3^2) + \cdots = \Phi(m) + \Psi(m) + \varphi(m),$$

$$\text{(VI)}\quad 2F(m) - 4F(m-1^2) + 4F(m-2^2) - 4F(m-3^2) + \cdots$$
$$= (-1)^{\frac{(m-1)}{2}} (\Phi(m) - \Psi(m)) + \varphi(m),$$

$$\text{(VII)}\quad 2F(r) - 4F(r-4^2) + 4F(r-8^2) - 4F(r-12^2) + \cdots$$
$$= (-1)^{\frac{1}{8}(r-7)} (\Phi'(r) - \Psi'(r)),$$

---

[1]) Vgl. Zusatz 45 am Ende dieses Bandes. H

[2]) Vgl. Zusatz 46 am Ende dieses Bandes. H

$$\text{(VIII)}\quad 4\sum (-1)^{\frac{1}{16}(s-k^2)} \left(2F\left(\frac{s-k^2}{16}\right) - 3G\left(\frac{s-k^2}{16}\right)\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(s-1)} (\Phi'(s) - \Psi'(s))$$
$$+ \varphi(s) + 4\psi(s) - 4\varphi'(s) - 8\psi'(s).$$

In den ersten sieben dieser Formeln ist die Reihe der Functionen F und G nur so weit fortzusetzen, als die dazu gehörigen Zahlen nicht negativ werden, so daß, wenn man z. B. das letzte Glied in der ersten Formel mit $F(4n-k^2)$ bezeichnet, die Zahl k durch die Bedingung $k^2 \leq 4n$ bestimmt wird. In der letzten Formel (VIII) bezieht sich das Summenzeichen auf alle diejenigen verschiedenen positiven Zahlen k, für welche $\frac{1}{16}(s-k^2)$ ganz und größer oder gleich Null ist; und in allen Formeln ist $F(0) = 0$, aber $G(0) = \frac{1}{4}$ zu setzen.

Für die zahlentheoretischen Functionen F und G bestehen außerdem folgende Fundamental-Beziehungen, welche ebenfalls aus der Theorie der elliptischen Functionen sich ergeben, aber auch mittelst einfacher arithmetischer Betrachtungen hergeleitet werden können:

$$F(4n) = 2F(n) \text{ für jede beliebige Zahl } n,$$

doch mit der Ausnahme, daß, wenn n ein ungerades Quadrat, $F(4n) = 2F(n) - 1$ ist;

$$G(4n) = F(4n) + G(n) \text{ für jede beliebige Zahl } n;$$

$$G(n) = F(n), \text{ wenn } n \text{ für den Modul 4 den Rest 1 oder 2 läßt};$$

$$G(n) = 2F(n), \text{ wenn } n \equiv 7 \pmod{8};$$

$$3G(n) = 4F(n), \text{ wenn } n \equiv 3 \pmod{8},$$

jedoch mit der Ausnahme, daß, wenn n das Dreifache eines ungraden Quadrats ist, $3G(n) = 4F(n) + 2$ wird.

Es ist ferner die Classenanzahl $F(n)$ gleich der Summe der Anzahlen der *eigentlich primitiven* Classen quadratischer Formen für alle diejenigen Determinanten $-\nu$, welche Theiler von n sind und für welche der Quotient $\frac{n}{\nu}$ ein ungerades Quadrat ist. In Folge dessen lassen sich aus den obigen acht Formeln für die Classenanzahlen F und G folgende entsprechende Formeln für die Function $f(n)$ ableiten, welche die Anzahl der eigentlich primitiven Classen quadratischer Formen der Determinante $-n$ bezeichnen soll:

$$(1)\quad u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \cdots = 4X(n) + 2\Phi(n) + 2\Psi(n),$$

wo u_k die Anzahl aller möglichen Darstellungen der Zahl $4n$ durch die Form: $x^2 + k(2y+1)^2$ bedeutet, also da $u_k = 0$ wird, wenn $k > 4n$, die Reihe auf der linken Seite abbricht. Jene Anzahl der Darstellungen wird übrigens hier, wie im Folgenden immer in dem gewöhnlichen Sinne genommen; nämlich so, daß darunter die Anzahl der verschiedenen Systeme positiver oder negativer ganzzahliger Werthe der Unbestimmten x und y verstanden wird, für welche die Darstellung möglich ist. Es ist nun

$$u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \cdots = 4\Phi(m) + \tfrac{1}{2}u_1, \tag{2}$$

$$u_1 f(1) - u_2 f(2) + u_3 f(3) - u_4 f(4) + \cdots = \tfrac{1}{2}u_1, \tag{3}$$

wenn die Anzahl der Darstellungen von $2m$ durch die Form: $x^2 + k(2y+1)^2$ mit u_k bezeichnet wird. Ferner ist:

$$3\sum u_i f(i) + \sum (2 + (-1)^i) u_{4i-1} f(4i-1) = 2\Phi(m) + 6\Psi(m) + \tfrac{1}{2}(u_0 + 3u_1), \tag{4}$$

wo sich die Summationen auf alle positiven Zahlen i erstrecken, und u_k die Anzahl derjenigen Darstellungen von m durch die Form: $x^2 + ky^2$ bedeutet, bei welchen y von Null verschieden ist. Man hat ferner:

$$u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \cdots = \Phi(m) + \Psi(m) + \tfrac{1}{2}u_1, \tag{5}$$

$$u_1 f(1) - u_2 f(2) + u_3 f(3) - u_4 f(4) + \cdots = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}(\Phi(m) - \Psi(m)) + \tfrac{1}{2}u_1, \tag{6}$$

wenn u_k die Anzahl der Darstellungen von m durch die Form: $x^2 + k(2y+1)^2$ angiebt. Ferner ist, wenn $r \equiv 7 \pmod{8}$:

$$2\sum u_{8i-1} f(8i-1) = \Psi(r) - \tfrac{1}{2}\Phi(r) + (-1)^{\frac{1}{8}(r+1)}(\Psi'(r) - \Phi'(r)), \tag{7}$$

wo sich die Summation auf alle positiven Zahlen i erstreckt, und u_k die Anzahl der Darstellungen von r durch die Form: $64x^2 + ky^2$ bedeutet. Endlich ist, wenn $s \equiv 1 \pmod{8}$:

$$\begin{aligned} &\sum (3u_i \pm v_i) f(i) + \sum (2 \pm 1)(u_{4i-1} - v_{4i-1}) f(4i-1) \\ &\quad = (-1)^{\frac{1}{8}(s+7)}(\Phi'(s) - \Psi'(s)) + \tfrac{1}{12}(u_0 + 3u_1 - v_1), \end{aligned} \tag{8}$$

wo sich die beiden Summationszeichen auf alle positiven Zahlen i beziehen und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem i gerade oder ungrade ist, wo ferner u_k die Anzahl der Darstellungen von s durch die Form: $x^2 + 64ky^2$, bei welchen y von Null verschieden ist, und v_k die Anzahl aller Darstellungen von s durch die Form: $x^2 + 16k(2y+1)^2$ bedeutet.

Die oben für die Classenanzahlen F und G gegebenen acht Formeln werden insoweit vereinfacht, daß auf der rechten Seite derselben die Ausdrücke φ, ψ, φ', ψ' überall gänzlich fortfallen, wenn man die zahlentheoretischen Functionen $F(n)$ und $G(n)$ durch andere: $\mathrm{F}(n)$ und $\mathrm{G}(n)$ ersetzt, welche für $n = 0$ respective die Werthe: 0 und $-\frac{1}{12}$ haben und für alle positiven Werthe von n durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$\mathrm{F}(4n) = F(4n)$, für jede beliebige Zahl n;

$\mathrm{F}(4n) = 2\mathrm{F}(n)$ und $\mathrm{G}(4n) = \mathrm{F}(4n) + \mathrm{G}(n)$ für jede positive Zahl n;

$\mathrm{G}(n) = \mathrm{F}(n)$, wenn $n \equiv 1$ oder $2 \pmod{4}$ und

$3\mathrm{G}(n) = \left(5 - (-1)^{\frac{1}{4}(n-3)}\right)\mathrm{F}(n)$, wenn $n \equiv 3 \pmod{4}$ ist.

Es bestehen demgemäß für die Functionen F und G *dieselben* Fundamentalbeziehungen wie für die Classenanzahlen F und G, aber ohne die Ausnahmen; und die Functionen $\mathrm{F}(n)$ und $F(n)$ stimmen überhaupt überein, sobald nicht n ein ungrades Quadrat, $\mathrm{G}(n)$ und $G(n)$ stimmen mit einander überein, sobald nicht n irgend ein vollständiges Quadrat oder das Dreifache eines solchen ist. Aber auch für diese besonderen Werthe von n haben die Functionen $\mathrm{F}(n)$ und $\mathrm{G}(n)$ ihre unmittelbare zahlentheoretische Bedeutung, deren Erörterung indessen hier zu weit führen würde.[1])

Außer den erwähnten Veränderungen, welche die obigen Formeln (I) bis (VIII) durch Einführung der zahlentheoretischen Functionen: $f(n)$, $\mathrm{F}(n)$, $\mathrm{G}(n)$ und anderer erfahren, kann man die Formeln auch dadurch in der mannigfaltigsten Weise umgestalten, daß man sie unter sich so wie mit den für die Functionen F und G bestehenden Fundamentalrelationen combinirt; und man erhält dadurch viele neue elegante Formeln. Aber keine der Gleichungen (I) bis (VIII) *selbst* läßt sich aus den übrigen durch bloße Benutzung jener Fundamental-Beziehungen ableiten, und sie bilden insofern ein System von unter einander unabhängigen Formeln. Von den durch Verbindung derselben resultirenden Gleichungen hebe ich nur die folgenden beiden hervor, indem ich dabei der größeren Einfachheit wegen die Functionen F und G benutze und $2\mathrm{F}(n) - \mathrm{G}(n) = \mathrm{E}(n)$ setze:

$$\mathrm{F}(n) + \mathrm{F}(n-2) + \mathrm{F}(n-6) + \mathrm{F}(n-12) + \mathrm{F}(n-20) + \cdots = \tfrac{1}{8}\Psi(4n+1) \tag{IX}$$

$$\mathrm{E}(n) + 2\mathrm{E}(n-1) + 2\mathrm{E}(n-4) + 2\mathrm{E}(n-9) + \cdots = \tfrac{2}{3}(2 + (-1)^n)X(n). \tag{X}$$

[1]) Vgl. Zusatz 47 am Endes dieses Bandes.

Beide Formeln gelten für jede positive Zahl n; die letztere derselben ergiebt, wie ich unten zeigen werde, die merkwürdigen Beziehungen zwischen der Anzahl der Darstellungen einer Zahl n als Summe von drei Quadraten und der zur Determinante $-n$ gehörigen Classenanzahl quadratischer Formen; die Formel (X) läßt sich auch andererseits aus diesen Beziehungen ableiten, sie enthält also bereits bekannte zahlentheoretische Sätze nur in neuer Form. Dasselbe ist bei den Formeln (II) und (III) der Fall, so wie überhaupt bei allen denjenigen Verbindungen der Formeln (I) bis (VIII), aus welchen die Functionen Ψ und Ψ' wegfallen. Die übrigen in jenen Formeln enthaltenen Resultate aber lassen sich mit den vorhandenen arithmetischen Hülfsmitteln nicht herleiten und sind also der Form wie dem Inhalt nach durchaus neu. Der wesentliche Unterschied, welcher hiernach zwischen den Functionen X, Φ, Φ' einerseits und Ψ, Ψ' andererseits begründet wird, tritt übrigens auch in der gänzlich verschiedenen Natur der Reihen hervor, welche man erhält, wenn man jene Functionen als Entwickelungscoefficienten darstellt. Es ist nämlich:

$$\sum (2 \pm 1) X(n) q^n \doteq \sum \frac{q^n}{(1 \pm q^n)^2},$$

wo sich die Summationen auf alle positiven Werthe $n = 1$ bis ∞ erstrecken und auf beiden Seiten das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n grade oder ungrade ist. Ferner:

$$\sum \Phi(n) q^n = \sum \frac{n q^n}{1 - q^n} = \sum \frac{q^n}{(1 - q^n)^2}$$

$$\sum \Psi(n) q^n = \sum \frac{q^{n^2 + n}}{(1 - q^n)^2},$$

wo sich die Summationen ebenfalls auf alle positiven Werthe von $n = 1$ bis ∞ erstrecken. Endlich ist:

$$\sum \Phi'(m) q^m = \sum (-1)^{\frac{1}{8}(m^2 - 1)} \frac{m q^m}{1 - q^{2m}}$$

$$\sum \Psi'(m) q^m = \sum (-1)^{\frac{1}{8}(m^2 + 7)} m \, \frac{q^{m^2}(1 + q^{2m}) - q^m}{1 - q^{2m}},$$

wo für m alle positiven ungraden Zahlen zu nehmen sind.

Verbindet man diese Gleichungen mit den acht Formeln für die Classenanzahlen der quadratischen Formen von negativen Determinanten, so erhält man auch diese als Entwickelungscoefficienten dargestellt. Namentlich ergeben die erste und

dritte obiger Gleichungen in Verbindung mit den Formeln (IX) und (X) die beiden folgenden Relationen:

$$\text{(XI)} \qquad \sum \mathrm{F}(n) q^n = \frac{q^{\frac{1}{4}}}{H(K)} \sum \frac{q^{n^2 + 3n + 1}}{(1 - q^{2n+1})^2},$$

$$\text{(XII)} \qquad 12 \sum \mathrm{E}(n) q^n = \frac{1}{\Theta(K)} + \frac{8}{\Theta(K)} \sum \frac{q^{n+1}}{(1 \mp q^{n+1})^2},$$

wo sich die Summationen auf alle Werthe von $n = 0$ bis ∞ beziehen und in der letzten Summe das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n grade oder ungrade ist. Die Buchstaben H, Θ, K und q haben hier die ihnen von *Jacobi* beigelegte Bedeutung; die letztere der beiden Gleichungen läßt sich deshalb durch Benutzung der Formel (8) pag. 103 von *Jacobis* „Fundamenta"[1]) in folgende verwandeln:

$$12 \sum \mathrm{E}(n) q^n = (\Theta(K))^3 = (1 + 2q + 2q^7 + 2q^9 + \cdots)^3;$$

und hieraus ergiebt sich unmittelbar, daß die Anzahl der Darstellungen einer Zahl n, als Summe von drei Quadraten, gleich $12\,\mathrm{E}(n)$ ist. Dieses aus der Theorie der elliptischen Functionen hervorgehende Resultat enthält in einfacher Zusammenfassung die schon oben erwähnten *Gauß*ischen Sätze über den Zusammenhang, welcher zwischen der Anzahl der Darstellungen einer Zahl n durch die Form: $x^2 + y^2 + z^2$ und der Anzahl der verschiedenen Classen binärer quadratischer Formen der Determinante $-n$ besteht. Auf diese Weise können also aus der Theorie der elliptischen Functionen *allein* jene schönen Sätze der höheren Arithmetik geschöpft werden, welche bisher nur durch die tief liegenden Betrachtungen in *Gauß*, Disq. arithm. begründet waren. Da der *Fermat*sche Satz über die Triagonalzahlen eine einfache Consequenz jener Sätze bildet, so ist also auch dieser aus der Theorie der elliptischen Functionen ohne alle zahlentheoretische Vorbereitung herzuleiten, und hiermit ein von *Jacobi* in seinen Vorlesungen oftmals ausgesprochener Wunsch erfüllt. — Dieser grosse Mathematiker fand nämlich, wie bekannt, in seiner bedeutendsten analytischen Schöpfung, der Theorie der elliptischen Functionen, zugleich eine reiche Quelle zahlentheoretischer Sätze, und er scheint grade diese mit Vorliebe daraus entwickelt zu haben. So wie er nun aus den Reihen für die graden Potenzen von $\Theta(K)$ die Sätze über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in 2, 4, 6 und 8 Quadrate erlangt hatte, wünschte er auch aus der Entwickelung des Cubus von $\Theta(K)$ oder ähnlicher Reihen die Sätze über die Zerfällung einer Zahl in drei Quadrate und in drei

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 160. H

Triagonalzahlen abzuleiten. Dies ist in den oben angedeuteten Untersuchungen nunmehr geschehen; freilich nicht durch directe analytische Umformung des Cubus von $\Theta(K)$, sondern mit Hülfe der speziellen Moduln, für welche complexe Multiplikation stattfindet, also doch immerhin durch Betrachtungen, welche ausschließlich dem Gebiete der elliptischen Functionen angehören.[1])

Es deutet Alles darauf hin, daß, wie die zahlentheoretischen Functionen $\mathrm{E}(n)$ und $X(n)$ mit der Anzahl der Zerfällungen von n in drei und vier Quadraten zusammenhängen, so auch den Functionen $\mathrm{F}(n)$ und $\Psi(n)$ eine ähnliche Bedeutung für die Darstellung von n durch quadratische Formen mit mehreren Variabeln zukommt. Nur aus einer solchen anderweiten zahlentheoretischen Bedeutung von $\mathrm{F}(n)$ und $\Psi(n)$ dürfte man auf rein arithmetischem Wege die gegenseitigen Beziehungen derselben herleiten können, welche in den obigen acht Formeln enthalten sind. Indessen ist zu vermuthen, daß die betreffende Eigenschaft der Classenanzahl $\mathrm{F}(n)$ und somit die Begründung jener acht Formeln auf zahlentheoretischem Wege sehr tief liegt, da selbst *Gauß* bei seiner umfassenden arithmetischen Behandlung der binären quadratischen Formen nicht auf jene einfachen Gesetze für die Klassenanzahl derselben geführt worden ist. Übrigens handelt es sich nunmehr, da die zwischen den Functionen F und Ψ bestehenden Relationen gegeben sind, nur darum, die vermuthete Eigenschaft der einen von beiden zu ermitteln, und daraus unmittelbar eine entsprechende der anderen zu erschließen. Und diese Zurückführung dürfte von Wichtigkeit sein, weil die Analogie zwischen den Functionen X und Ψ einerseits und zwischen E und F andrerseits zu der Annahme berechtigt, daß eine etwaige Bedeutung von $\Psi(n)$ für die Darstellung der Zahl n durch eine quadratische Form näher liegen wird als die entsprechende Bedeutung von $\mathrm{F}(n)$. Namentlich auf Grund dieser Betrachtungen habe ich auch die obigen Reihen aufgestellt, in denen $\mathrm{F}(n)$ und $\Psi(n)$ die Entwickelungscoefficienten bilden, aber es ist mir bisher noch nicht gelungen, befriedigende Resultate für die gesuchte weitere Bedeutung der Functionen F und Ψ daraus abzuleiten. Leichter scheint es, auf rein analytischem Wege die Eigenschaften der unendlichen Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (XI) insoweit zu ergründen und aufzustellen, daß man vermittelst derselben aus dieser Gleichung allein die obigen acht Formeln sämmtlich entwickeln kann. Hierzu bedürfte es nämlich nur gewisser Umformungen, deren jene Reihe fähig ist, wenn man

[1]) Vgl. Zusatz 48 am Ende dieses Bandes.

in derselben q mit den verschiedenen achten Wurzeln der Einheit behaftet annimmt; Umformungen, welche sich andrerseits durch Benutzung der Gleichungen (I) bis (VIII) ergeben.

Ich bemerke schließlich, daß die Formeln (V) und (VI) zur Berechnung der Classenanzahlen der quadratischen Formen negativer Determinante vorzüglich geeignet sind. Ich habe auch bereits nach einer Verbindung dieser Formeln den Werth von $F(m)$ für alle ungraden Zahlen m bis zu 10000 ausrechnen lassen, wobei die Leichtigkeit und Sicherheit der Rechnung nichts zu wünschen übrig ließ. Die Anzahl der *eigentlich primitiven* Classen der quadratischen Formen von negativer Determinante ergiebt sich aus den berechneten Werthen von $F(m)$ mit leichter Mühe.

ÜBER EINE NEUE EIGENSCHAFT DER QUADRATISCHEN FORMEN VON NEGATIVER DETERMINANTE

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1862. S. 302—311.

ÜBER EINE NEUE EIGENSCHAFT DER QUADRATISCHEN FORMEN VON NEGATIVER DETERMINANTE.[1])

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 26. Mai 1862.]

Die Formeln für die Anzahl der verschiedenen Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante, welche ich vor fünf Jahren gefunden und theilweise im Oktober 1857[2]) der Akademie mitgeteilt habe, gaben mir schon damals Veranlassung den inneren Grund der darin enthaltenen Relationen gewisser Determinanten zu erforschen, d. h. einen Zusammenhang der verschiedenen quadratischen Formen selbst aufzusuchen. Während ich nun sehr bald durch eine aus der analytischen Quelle jener Formeln geschöpfte Induction zur Auffindung des vermutlichen Zusammenhangs geführt wurde, ist es mir erst vor kurzem gelungen, das betreffende Resultat, welches eine Beziehung zwischen den reducirten Formen verschiedener Determinanten angiebt, und welches den Gegenstand der vorliegenden Mitteilung bildet, vollständig und zwar auf rein arithmetischem Wege zu beweisen.

Man denke sich für eine ungrade Primzahl p die sämmtlichen reducirten positiven quadratischen Formen der Determinanten: $-p$, $-(p-1^2)$, $-(p-2^2)$, $-(p-3^2)$, ... aufgestellt, bei denen wenigstens einer der äußeren Coefficienten ungrade ist; von den hierbei vorkommenden Ambigen nehme man diejenigen, bei welchen $a = -2b$ ist, so wie diejenigen, bei welchen $a = c$ und zugleich b positiv ist; endlich bilde man für alle übrig bleibenden Formen: (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), ... die Congruenzen:

$$a_1 z^2 + 2b_1 z + c_1 \equiv 0, \quad a_2 z^2 + 2b_2 z + c_2 \equiv 0, \quad \ldots \text{ mod. } p,$$

welche offenbar, je nachdem die Determinante der betreffenden Form $-p$ selbst oder eine der Zahlen: $-(p-1)$, $-(p-4)$, $-(p-9)$, ... ist, je eine oder je zwei Wurzeln haben. Alsdann ist, wenn $F(n)$ die Anzahl der verschiedenen Klassen

---

[1]) Vgl. Zusatz 49 am Ende dieses Bandes. H

[2]) Bd. IV, S. 181—182 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

quadratischer Formen für die Determinante $-n$ bedeutet, die Anzahl aller jener Congruenzwurzeln gleich:

$$F(p) + 2F(p-1^2) + 2F(p-2^2) + 2F(p-3^2) + \cdots$$

d. h. also — zufolge der von mir im Journal für Mathematik (Bd. 57, pag. 249)[1]) gegebenen Formel No. V. — gleich $(p+1)$ oder gleich p, je nachdem $p \equiv 1$ oder 3 mod. 4 ist. Wenn man nur im ersteren Falle für diejenigen ambigen Formen, in welchen $a = c < \sqrt{p}$ ist, die eine der beiden Congruenzwurzeln (und zwar diejenige, welche dem *unter* $\frac{1}{2}p$ liegenden positiven Werte von $\sqrt{b^2 - ac}$ entspricht) mit dem negativen Werte derselben vertauscht, in dem einzigen Falle aber, wo dieser Wert mit der andern Congruenzwurzel identisch, nämlich wo $b = 0$ wird, weglässt, so ist die Anzahl aller auf diese Weise aus jenen Congruenzwurzeln gebildeten Zahlen in jedem Falle gleich p. *Alle diese Zahlen sind modulo p von einander verschieden, d. h. sie bilden für eben diesen Modul ein vollständiges Restensystem.*

Aus dieser merkwürdigen Eigenschaft der quadratischen Formen von negativer Determinante geht unmittelbar folgender Satz hervor:

„Wenn $D, D', D'', \ldots$ die verschiedenen Zahlen bedeuten, für welche p durch die Formen: $x^2 + Dy^2$, $x^2 + D'y^2$, $x^2 + D''y^2, \ldots$ darstellen und y ungrade ist, wenn ferner mit (a_1, b_1, c_1), $(a_2, b_2, c_2), \ldots$ die sämtlichen eigentlich primitiven positiven reducirten Formen der Determinanten: $-D, -D', -D'', \ldots$ bezeichnet werden, so ergeben die Congruenzen:

$$a_1 z^2 + 2b_1 z + c_1 \equiv 0, \quad a_2 z^2 + 2b_2 z + c_2 \equiv 0, \quad \cdots \text{mod. } p$$

für z alle p verschiedenen Werte, und zwar jeden genau zweimal, sobald man die Wurzeln aller derjenigen Congruenzen doppelt nimmt, bei welchen der Coefficient von z^2 mit dem absoluten Werte eines der beiden andern Coefficienten nicht übereinstimmt.“

Da, wenn $p = 4n + 3$ ist, für keine der Determinanten $-D$ ambige Formen existiren, in denen $a = \pm 2b$ oder $a = c$ wäre, so läßt der erwähnte Satz in diesem Falle folgende einfachere Fassung zu:

„Wenn (a_1, b_1, c_1), $(a_2, b_2, c_2), \ldots$ die sämmtlichen eigentlich primitiven positiven reducirten Formen aller derjenigen negativen Determinanten $-D$ sind, für

[1]) Bd. IV, S. 188 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken.

welche p durch die Hauptform $x^2 + Dy^2$ darstellbar und y ungrade ist, so bilden die Wurzeln der *modulo p* genommenen Congruenzen:

$$a_1 z^2 + 2b_1 z + c_1 \equiv 0, \quad a_2 z^2 + 2b_2 z + c_2 \equiv 0, \ldots$$

für eben diesen Modul ein vollständiges Restsystem.“

Endlich kann, indem man die Wurzeln jener quadratischen Congruenzen selbst in Betracht zieht, für jede beliebige Primzahl p der Satz folgendermaßen formulirt werden:

„Wenn d irgend eine der positiven ganzen Zahlen bedeutet, welche kleiner als $\sqrt{p}$ sind, und wenn ferner mit (a_1, b_1, c_1), $(a_2, b_2, c_2), \ldots$ alle diejenigen positiven reducirten Formen der Determinanten $-(p - d^2)$ bezeichnet werden, in denen wenigstens einer der beiden äußeren Coefficienten ungrade und der mittlere Coefficient nicht negativ ist, so bilden die Ausdrücke: $\frac{\pm b \mp d}{a}$ ein vollständiges Restensystem für den Modul p, sobald man im Allgemeinen alle vier Zeichenkombinationen zuläßt, aber in den besonderen Fällen, wo $a = 2b$ ist, b nur negativ nimmt und für den Fall: $a = c$ nur das obere Zeichen der größeren von den beiden Zahlen b, d beibehält.“

Der Beweis dieses Satzes wird einerseits auf die schon oben erwähnte Formel (Journal für Mathematik, Bd. 57, pag. 249)[1]) gegründet, mit Hilfe deren sich ergibt, daß die Anzahl der Ausdrücke: $\frac{\pm b \pm d}{a}$ genau gleich p ist, und andrerseits wird gezeigt, daß je zwei von diesen Ausdrücken, *modulo p* betrachtet, von einander verschieden sind. Von den beiden Hauptteilen, in welche sonach der Beweis zerfällt, enthält der erstere eine rein arithmetische Herleitung jener Formel für die Klassenanzahlen, während im zweiten Teile die Unmöglichkeit der Congruenz:

$$a'(\pm b \pm d) + a(\mp b' \mp d') \equiv 0 \quad \text{mod. } p$$

in folgender Weise dargetan wird. Es wird zuförderst nachgewiesen, daß in der für die Congruenz zu setzenden Gleichung:

$$a'(\pm b \pm d) + a(\mp b' \mp d') = hp$$

mit Rücksicht auf die für die Zahlen a, b, d, a', b', d' bestehenden Ungleichheitsbedingungen der absolute Wert von h nur gleich Null oder Eins sein kann. Da nun,

[1]) Bd. IV, S. 188 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken.

wenn jene Gleichung stattfindet, die Zeichen auf der linken Seite so gewählt werden können, daß h positiv ist, so sind nur die beiden Fälle $h = 0$ und $h = 1$ zu betrachten, d. h. es ist nur die Unmöglichkeit der beiden Gleichungen:

$$a'(\pm b \pm d) + a(\mp b' \mp d') = 0$$
$$a'(\pm b \pm d) + a(\mp b' \mp d') = p$$

darzutun. Es wird nun angenommen, daß die Gleichungen durch gewisse Werte von a, b, d, a', b', d', erfüllt seien und daß von den beiden resp. mit a' und a multiplicirten Ausdrücken der erstere positiv sei. Wird derselbe mit s bezeichnet, so ergeben sich aus der ersteren Gleichung die Relationen:

$$a = a', \quad \pm b \pm d = \pm b' \pm d', \quad c \equiv c' \text{ mod. } s.$$

Es zeigt sich nun zuvörderst, daß $\frac{c-c'}{s}$ nur die Werte: $0, \pm 1, \pm 2$ haben könnte, daß aber im ersten Falle a, b, c, resp. mit a', b', c' identisch sind, während im zweiten Falle der aufgestellten Bedingung zuwider entweder a und c, oder a' und c' gleichzeitig gerade sein müßten. Im dritten Fall wird: $\pm 2b = \mp 2b' = \pm a = \pm a'$, und dieß widerspricht der über die Wahl des Vorzeichens von b und b' getroffenen Festsetzung. Nachdem auf diese Weise die Unmöglichkeit der Gleichung:

$$a'(\pm b \pm d) + a(\mp b' \mp d') = 0$$

nachgewiesen ist, werden aus der zweiten obigen Gleichung:

$$a'(\pm b \pm d) + a(\mp b' \mp d') = p,$$

folgende Bestimmungen für a', b', c' entwickelt:

$$\begin{aligned} a' &= na - 2b + s, \\ 2b' &= (mn - 1)a - 2mb + c + (m - n)s, \\ c' &= mc - (mn - 1)s, \end{aligned}$$

in welchen der Kürze halber b für $\pm b$, b' für $\mp b'$ gesetzt ist, und in welchen m und n nur ganzzahlige positive oder negative Werte haben oder auch gleich Null sein können. Aus diesen drei Gleichungen werden endlich sechs Relationen abgeleitet, welche nicht ohne Mühe zu erlangen waren und den Kernpunkt des Beweises bilden, insofern mit Hilfe derselben für alle verschiedenen Annahmen, welche in Bezug auf die Größen m und n gemacht werden können, die Unvereinbarkeit derselben mit den für die Zahlen a, b, c, a', b', c', geltenden Bedingungen leicht nachzuweisen ist. Die in Rede stehenden sechs Gleichungen sind folgende:

$$\begin{aligned} &(c' - a') - m(a' + 2b') + (m^2 + m)a' + (a - 2b) = (m - n + 1)a, \\ &(a - 2b') + (m - 1)a' + (c - a) = ns, \\ &m(a' - 2b') + (c' - a') + (a - 2b) + (m^2 - m)(a - 2b) + (m^2 - m)s \\ &\qquad\qquad = (m - (n - 1)(m^2 - m + 1))a, \\ &(a' - 2b') + (c - 2b - 1) + (m - 2)(a - 2b + s) + 1 = (n - 1)(s + a - ma), \\ &(a' - 2b') + ma' + (c + 2b - 1) + 1 = (n + 1)(a + s), \\ &(c' - a') + (c - 2b - 1) + n(a + ms) + 1 = (m + 1)c; \end{aligned}$$

und es sind hierin auf der linken Seite diejenigen Verbindungen der Zahlen a, b, c, a', b', c', s in Parenthesen eingeschlossen worden, welche an sich vermöge der Ungleichheitsbedingungen *nicht negative* Größen darstellen.

Der hiermit bewiesene arithmetische Satz läßt, wie leicht zu sehen ist, eine Verallgemeinerung in der Weise zu, daß statt der Primzahl p eine zusammengesetzte Zahl genommen wird. Überdieß sind daraus Andeutungen für eine neue zahlentheoretische Herleitung jener Formeln für die Klassenanzahlen zu entnehmen, und diese Andeutungen erscheinen um so wichtiger, als die arithmetische Begründung der erwähnten Formeln, welche den ersten Hauptteil des obigen Beweises bildet, auf ganz andern Betrachtungen beruht. Ich richtete nämlich mein Augenmerk auf die Art und Weise, wie *Jacobi* den durch die Reihen (Fundamenta nova etc. pag. 188)[1]) erhaltenen Ausdruck für die Anzahl der Zerfällungen in vier Quadrate im 12. Bande des Journals für Mathematik[2]) hergeleitet hat, indem er die analytische Entwicklung gewissermaßen zu einer arithmetischen umgestaltete. Im Anschluß an diese Methode habe ich die Klassenanzahlen für die quadratischen Formen negativer Determinante als Entwicklungscoefficienten dargestellt und einige Andeutungen darüber in dem oben erwähnten Aufsatze im 57. Bande des Journals für Mathematik[3]) veröffentlicht. Aber ich habe die Mitteilung der weiteren Resultate dieser Art unterlassen, weil ich damals zwar eine neue Art analytischer Verifikation der betreffenden Formeln nicht aber das eigentliche Ziel, eine arithmetische Herleitung derselben, erlangt hatte. Inzwischen hat Hr. *Hermite* in einer interessanten Notiz (Comtes rendus etc. 5 Août 1861)[4]) einige analoge Relationen publicirt, welche ich hier durch die Mit-

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 239. H
[2]) *Jacobi*, Werke, Bd. VI, S. 245. H
[3]) Bd. IV, S. 192 u. f. dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H
[4]) *Hermite*, Oeuvres T. II, P. 109. H

teilung derjenigen vervollständigen will, auf die ich, wie oben bemerkt, bei der Aufsuchung arithmetischer Beweismethoden geführt worden bin.[1])

Ich behalte zu diesem Zwecke alle Bezeichnungen und Erklärungen bei, welche ich in dem mehrerwähnten Aufsatze (Journal für Mathematik, Bd. 57, pag. 248 sqq.)[2]) gebraucht habe und beziehe mich im Folgenden überall auf die dort unter No. (I) bis (VIII) gegebenen Formeln. Ich setze aber dabei voraus, daß eben diese Formeln in der Weise, wie ich a. a. O. pag. 251[3]) ausgeführt habe, durch Benutzung der Functionen F und G umgestaltet seien. — Wenn in den Formeln (I), (II), (V) auf beiden Seiten resp. mit q^{4n}, q^{2m}, $\frac{1}{2}q^{m}$ multiplicirt wird, wenn man ferner die hierdurch entstehenden drei Gleichungen addiert und alsdann über alle Werte von n und m summiert, so erhält man mit Hilfe der auf pag. 252 sqq.[4]) für X, Φ, Ψ gegebenen Ausdrücke die Gleichung:

$$\sum \mathrm{F}(n)q^{n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2K}}\sum \frac{n}{q^{n}-q^{-n}}\left(q^{n^2+n}-2+q^{n^2-n}\right). \tag{1}$$

Ebenso ergibt sich aus den Formeln (I), (III) und (VI):

$$\sum \mathrm{F}(n)q^{n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2k'K}}\sum n(-q)^{n^2}\cdot\frac{q^{n}-q^{-n}}{q^{n}+q^{-n}}, \tag{2}$$

wo die Buchstaben q, K, k' ebenso wie die im Folgenden vorkommenden Buchstaben k, Θ, H, die Bedeutung haben, in welcher dieselben in *Jacobi*'s „Fundamenta" gebraucht werden. Die beiden angegebenen Formeln drücken nun andererseits genau die in den Formeln (I), (II), (III), (V), (VI) enthaltenen Beziehungen aus, wenn man die auf der rechten Seite stehenden Summen nach Potenzen von q entwickelt. Die Formel (IV) aber läßt sich als eine Folge der Gleichungen (1) und (2) aufzeigen, indem zuvörderst die Relationen:[5])

$$\sum \mathrm{F}(2m)q^{\frac{1}{2}m} = \frac{kK}{\pi}\sqrt{\frac{K}{2\pi}},$$

$$\sum \mathrm{F}(4n+1)q^{n} = \frac{1}{q^{\frac{1}{4}}}\frac{K}{\pi}\sqrt{\frac{kK}{2\pi}},$$

$$\sum \mathrm{F}(8n+3)q^{2n} = \frac{1}{q^{\frac{3}{4}}}\frac{kK}{2\pi}\sqrt{\frac{kK}{2\pi}}$$

---

[1]) Vgl. Zusatz 50 am Ende dieses Bandes. H

[2]) Bd. IV, S. 185 u. f. dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[3]) Bd. IV, S. 191 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[4]) Bd. IV, S. 191 u. f. dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[5]) Vgl. Zusatz 51 am Ende dieses Bandes. H

daraus abgeleitet werden. — Mit Hilfe der Entwicklung von $\sin^2 \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ nach Cosinus der Vielfachen von x (Fundamenta pag. 110)[1]) läßt sich die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (1) unmittelbar als bestimmtes Integral darstellen, und man erhält auf diese Weise, wenn die üblichen Bezeichnungen:

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \vartheta_0(x),\quad \mathrm{H}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \vartheta_1(x),\quad \vartheta_0\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_3(x),\quad \vartheta_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_2(x)$$

eingeführt werden:

$$\sum \mathrm{F}(n)q^{n} = \frac{1}{q^{\frac{1}{4}}}\frac{k^2K}{2\pi^2}\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\int_0^{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\cdot\vartheta_2(x)\cos x\,dx. \tag{3}$$

Diese Relation, welche also mit der Gleichung (1) identisch ist, kann als Erklärung für die Funktion F(n) aufgefaßt werden. Eine directe Bestimmung des Integrals ergibt auch die zahlentheoretische Bedeutung von F(n), und dies ist unter Anderem in der Weise möglich, daß man für $\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ das Quadrat der Reihenentwicklung von $\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ setzt. Diese Bestimmungsweise hat mich nach mancherlei Reduktionen zu dem oben erwähnten arithmetischen Beweise der in der Relation (3) enthaltenen Formeln (I), (II), (V) geführt. Aus der Gleichung (3) lassen sich die sämtlichen Formeln (I) bis (VIII) ableiten; so geht namentlich, wenn man unter dem Integralzeichen $\vartheta_2(x)$ durch $\frac{1}{\sqrt{k'}}\vartheta_1(x)\cot\operatorname{am}\frac{2kx}{\pi}$ ersetzt, die Formel (3) über in:

$$\sum \mathrm{F}(n)q^{n} = \frac{1}{q^{\frac{1}{4}}}\frac{k^2K}{2\pi^2}\sqrt{\frac{K}{2\pi k'}}\int_0^{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\vartheta_1(x)\cos x\,dx,$$

und hieraus resultiert die Gleichung (2), wenn man für

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

unter dem Integralzeichen die Reihenentwickelung nimmt. Ebenso erhält man, wenn in (3) für

$$\vartheta_2(x)\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

der damit identische Ausdruck:

$$\frac{1}{k^2}\vartheta_2(x) - \frac{1}{k\sqrt{k}}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\vartheta_3(x)$$

gesetzt wird:

$$\sum \mathrm{F}(n)q^{n} - \frac{kK}{2\pi}\sqrt{\frac{kK}{2\pi}} = -\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}}\frac{K}{2\pi^2}\sqrt{\frac{kK}{2\pi}}\int_0^{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\vartheta_3(x)\cos x\,dx,$$

---

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 166. H

und hieraus geht die Formel (XI) (Journal für Mathematik, Bd. 57, pag. 253)[1]) hervor, wenn man unter dem Integralzeichen die durch Differentiation der Formel 19 pag. 101[2]) in *Jacobi's* „Fundamenta" entstehende Entwicklung anwendet. Auf diese Weise wird die Vermutung bestätigt, welche ich an dem Schlusse meines mehrerwähnten Aufsatzes „Über die Anzahl der verschiedenen Klassen quadratischer Formen" ausgesprochen habe, indem die sämtlichen acht Formeln durch analytische Umformungen aus einer einzigen erlangt werden. Aber im arithmetisch-algebraischen Sinne bleiben diese Formeln (s. a. a. O. pag. 252)[3]) von einander unabhängig und enthalten in expliziter Weise alle die mannigfachen analogen Relationen, welche mir die Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen geliefert hat, und hierzu gehören auch alle diejenigen, welche von Hrn. *Hermite* in dem oben angeführten Aufsatze[4]) gegeben worden sind. Ich werde dies wie die übrigen in der vorliegenden Notiz enthaltenen Andeutungen nächstens an einem anderen Orte vollständig ausführen.[5])

---

[1]) Bd. IV, S. 193 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 157. H
[3]) Bd. IV, S. 191—192 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[4]) *Hermite*, Oeuvres, T. II, P. 109. H
[5]) Vgl. Zusatz 52 am Ende dieses Bandes. H

ÜBER DIE COMPLEXE MULTIPLICATION DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1862. S. 363—372.

ÜBER DIE COMPLEXE MULTIPLICATION DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.[1])

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 26. Juni 1862.]

Im Verlauf meiner Untersuchungen über diejenigen elliptischen Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet, bin ich durch die Sache selbst darauf hingewiesen worden, hauptsächlich die arithmetischen Eigenschaften der betreffenden Moduln zu erforschen, um in die Natur dieser merkwürdigen Zahlenirrationalitäten tiefer einzudringen. Dabei habe ich mich auf eine neue und allgemeine Theorie der zerlegbaren Formen stützen können, mit der ich mich kurz vorher in möglichst umfassender Weise beschäftigt hatte, und deren Anwendbarkeit sich bei dieser speciellen Frage vollkommen bewährte. Da ich nun schon im Juli v. J. die Ergebnisse meiner in Rede stehenden Untersuchungen angekündigt habe und doch andrerseits, durch algebraische Arbeiten in Anspruch genommen, voraussichtlich in der nächsten Zeit noch nicht in der Lage sein werde, dieselben in ihrem ganzen Umfange der Akademie vorlegen zu können, so erlaube ich mir heute einige von diesen Resultaten mitzutheilen, deren Inhalt und Bedeutung ohne weitere Auseinandersetzung verständlich zu machen ist.

Ich habe bereits im Monatsbericht vom October 1857[2]) einige Eigenschaften der Gleichung angegeben, deren Wurzeln die verschiedenen Moduln bilden, für welche eine Multiplication mit $\sqrt{-n}$ stattfindet. Es ist namentlich dort erwähnt worden, daß diese Gleichung in Faktoren zerfällt, welche den verschiedenen Ordnungen der zur Determinante $-n$ gehörigen quadratischen Formen entsprechen, und daß der zur eigentlich primitiven Ordnung gehörige Faktor wiederum in sechs Factoren von gleichem Grade zerlegbar ist, deren Coefficienten nur ganze Zahlen und $\sqrt{n}$ enthalten und deren Grad genau gleich der Anzahl der sämtlichen Klassen

[1]) Vgl. Zusatz 53 am Ende dieses Bandes. H
[2]) Bd. IV, S. 177 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

eigentlich primitiver Formen der Determinante $-n$ ist. Die speziellere Untersuchung dieser Theilgleichungen ergiebt aber noch eine weitere Zerlegung derselben in solche, welche den einzelnen *Gattungen*[1]) der quadratischen Formen entsprechen, und es erhält hierdurch die innerhalb der Zahlentheorie schon so wichtige Eintheilung der Klassen in Genera (Disqq. arithm. art. 227)[2]) noch auf einem anderen sowohl der Algebra als der Analysis angehörigen Gebiete in der überraschendsten Weise ihre Bedeutung. Den wesentlichen Charakter der erwähnten Zerlegung der Gleichungen in Kürze auseinanderzusetzen ist hauptsächlich der Zweck vorliegender Mittheilung.[3])

Wenn mit n eine positive ungrade Zahl, welche größer als 3 ist und mit N die Klassenanzahl für die eigentlich primitiven quadratischen Formen der Determinante $-n$ bezeichnet wird, wenn ferner $\varkappa$ und q die in der Theorie der elliptischen Functionen übliche Bedeutung haben und $\varkappa^2 = k$ gesetzt wird, so giebt es $6N$ verschiedene Werthe von k, für welche complexe Multiplication mit $\sqrt{-n}$ stattfindet und welche der eigentlich primitiven Ordnung der quadratischen Formen der Determinante $-n$ entsprechen. Von diesen Werthen ordnen sich je $2N$ als Wurzeln einer und derselben Gleichung mit rationalen Zahlcoefficienten einander zu, und wenn man in den bezüglichen drei Gleichungen $2N$ten Grades sämmtliche Coefficienten *ganz* macht, so ist in der einen sowohl der erste als der letzte Coefficient gleich Eins, in den andern zwei Gleichungen aber ist resp. der erste *oder* der letzte Coefficient gleich Eins und der andre eine Potenz von Zwei. Eine dieser drei Gleichungen enthält als Wurzel den bekannten Wert von k, welcher zu $q = e^{-\pi\sqrt{n}}$ gehört. Sind nun $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\nu$ die verschiedenen in der Zahl n enthaltenen Primfactoren, so zerfällt die erwähnte Gleichung $2N$ten Grades unter Adjunction von $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}, \ldots \sqrt{p_\nu}$ in 2^ν Factoren, deren jeder vom Grade $(\frac{1}{2})^{\nu-1}N$ ist. Der Grad einer jeden dieser Theilgleichungen ist also, je nachdem $n = 3$ oder $1 \bmod. 4$ ist, gleich der einfachen oder doppelten Anzahl der in einem Genus enthaltenen Klassen quadratischer Formen der Determinante $-n$. In dem letzteren Falle ist aber mit jedem Werthe von k zugleich der entsprechende Werth von: $1-k$ in derselben Gleichung enthalten, so daß alsdann Gleichungen für: $k(1-k)$ existiren, deren Grad ebenfalls gleich der einfachen Anzahl der zu einem Genus gehörigen Klassen ist.[4]) Hiernach läßt

[1]) Vgl. Zusatz 54 am Ende dieses Bandes. H
[2]) *Gauss*, Werke, Bd. I, S. 229. H
[3]) Vgl. Zusatz 55 am Ende dieses Bandes. H
[4]) Vgl. Zusatz 56 am Ende dieses Bandes. H

sich das erwähnte Resultat dahin formuliren, *daß die singulären Moduln, für welche complexe Multiplication mit $\sqrt{-n}$ stattfindet, — je nachdem $n = 3$ oder $1 \bmod. 4$ ist — durch Gleichungen für k oder $k(1-k)$ bestimmt werden, deren Coefficienten aus den Quadratwurzeln der einzelnen in n enthaltenen Primfactoren zusammengesetzt sind, und deren Grad genau gleich der Anzahl der zu einem und demselben Genus gehörigen Klassen eigentlich primitiver Formen der Determinante $-n$ ist.*[1])

Die hier angegebene weitere Zerlegung der Gleichungen, von denen jene singulären Moduln der elliptischen Functionen abhängen, ist nicht nur für die Einsicht in die Natur dieser Moduln selbst von der größten Wichtigkeit, sondern dieselbe vervollständigt auch die bereits früher erwähnten Anwendungen der Theorie der elliptischen Functionen auf die der quadratischen Formen, indem nunmehr auch die auf die Eintheilung in Genera bezüglichen arithmetischen Sätze aus der in Rede stehenden analytischen Untersuchung herzuleiten sind. Es findet nämlich ein genauerer Zusammenhang zwischen jenen Theilgleichungen und den einzelnen Gattungen quadratischer Formen in der Weise statt, daß jedem Genus eine bestimmte Theilgleichung und jeder einzelnen darin enthaltenen Klasse quadratischer Formen eine bestimmte Wurzel dieser Gleichung entspricht. Dem Hauptgenus entspricht z. B. diejenige Theilgleichung, in welcher der zu $q = e^{-\pi\sqrt{n}}$ gehörige Werth von k und resp. von $k(1-k)$ als Wurzel enthalten ist, und hieraus entstehen die den übrigen Gattungen entsprechenden Theilgleichungen, indem die Vorzeichen der in den Coefficienten vorkommenden Quadratwurzeln aus $p_1, p_2, \ldots p_\nu$ den zugehörigen Charakteren gemäß verändert werden. Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß für $n = 4m + 3$ kein Charakter mod. 4 existirt und daß also in diesem Falle *eine* Bestimmung für die Zeichenänderung fehlt. Diese wird dadurch ersetzt, daß die Verwandlung von $+\sqrt{n}$ in $-\sqrt{n}$ gleichzeitig mit der von k in: $1-k$ zu machen ist. Es gelten übrigens ganz analoge Resultate für *grade* Zahlen n und um die Zerlegung der Gleichungen für die verschiedenartigen Werte $n = 1, 2, 3 \bmod. 4$ durch einige Beispiele anschaulich zu machen, lasse ich hier die betreffenden Bestimmungen für die zur complexen Multiplication mit $\sqrt{-n}$ gehörigen Moduln folgen. Die Werthe von n sind hierbei absichtlich in der mannigfaltigsten Weise ausgewählt, so daß sich darunter sowohl Primzahlen als zusammengesetzte Zahlen finden und unter den letzteren wiederum solche, welche einen quadratischen Factor enthalten.

[1]) Vgl. Zusatz 57 am Ende dieses Bandes. H

Für $n \equiv 2 \bmod. 4$ und zwar für:

$$n = 6:\quad k = (1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2}+\sqrt{6})^2,$$
$$n = 10:\quad k = (1+\sqrt{2})^4(3+\sqrt{10})^2.$$

Für $n \equiv 3 \bmod. 4$:

$$n = 15:\quad 2^5(2k-1) = \sqrt{3}(7+\sqrt{5}),$$
$$n = 39:\quad 2^7(2k-1)^2 + 2^4\sqrt{3}(7+2\sqrt{13})(2k-1) + 21(5+3\sqrt{13}) = 0,$$
$$n = 63:\quad 2^7(2k-1)^2 + 8(7\sqrt{3}+9\sqrt{7})(2k-1) + \sqrt{3}(155\sqrt{3}+109\sqrt{7}) = 0.$$

Für $n \equiv 1 \bmod. 4$:

$$n = 5:\quad 4k(1-k) = (2+\sqrt{5})^2,$$
$$n = 13:\quad 4k(1-k) = (18+5\sqrt{13})^2,$$
$$n = 21:\quad 4k(1-k) = (8+3\sqrt{7})^2(3\sqrt{3}+2\sqrt{7})^2,$$
$$n = 37:\quad 4k(1-k) = (6+\sqrt{37})^6,$$
$$n = 49:\quad 2\varkappa\varkappa' + 4(11+4\sqrt{7})\sqrt{2\varkappa\varkappa'} + 1 = 0,$$
$$n = 105:\quad 4k(1-k) = (3\alpha-2\gamma)^4(5+9\alpha+16\beta+4\gamma+7\beta\gamma+12\alpha\beta+3\alpha\beta\gamma)^2,$$

wenn unter α, β, γ resp. die Quadratwurzeln aus den drei Primfactoren von 105, d. h. also $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ und $\sqrt{7}$ verstanden werden. Bei dem für $n = 21$ angegebenen Werthe von k entspricht der positive Werth von $\sqrt{3}$ und der negative von $\sqrt{7}$ dem Hauptgenus d. h. der Bestimmung: $a = 1$ in der Relation:

$$\frac{1}{\pi i}\lg q = \frac{b+\sqrt{-21}}{a},$$

während überhaupt für alle vier Werthe von $k(1-k)$ die Zeichenbestimmung für $\sqrt{3}$ und resp. $\sqrt{7}$ durch die *Legendre*schen Zeichen: $\left(\frac{3}{a}\right)$, $\left(\frac{7}{a}\right)$ erfolgt, sobald der positive Werth von $\sqrt{3}$ und der negative von $\sqrt{7}$ beibehalten wird. Ebenso sind bei $n = 105$ in den Ausdrücken für $k(1-k)$ die negativen Werthe von $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ für α, β, γ zu setzen, wenn derselbe dem Werthe $a = 1$ entsprechen soll. Bezeichnet man diese negativen Werthe beziehungsweise mit α', β', γ', so muß für jede beliebige Zahl a:

$$\alpha = \left(\frac{3}{a}\right)\alpha',\quad \beta = \left(\frac{5}{a}\right)\beta',\quad \gamma = \left(\frac{7}{a}\right)\gamma'$$

genommen werden.

Für die Fälle $n = 21, 37, 105$ wäre die Ausrechnung der bezüglichen Werthe der Moduln auf algebraischem Wege kaum möglich; ich habe dieselbe in ganz

andrer Weise ausgeführt, nachdem ich die Form des Resultates vorher theoretisch ergründet hatte. Die oben auseinandergesetzte Zerlegung der Gleichungen gewährt nämlich ein Mittel, die Werthe der Moduln durch ziemlich einfache Rechnung zu erhalten, namentlich wenn die Anzahl der zu einem Genus gehörigen Klassen nicht groß ist. So habe ich z. B. in dem Falle: $n = 21$ aus den a priori bekannten vier Werthen von $\frac{1}{\pi i}\lg q$ die zugehörigen Werthe von $2\varkappa\varkappa'$ auf nur wenige Decimalen genau berechnet, für dieselben die durch obige Erörterungen gegebene Form:

$$A \pm B\sqrt{3} \pm C\sqrt{7} \pm D\sqrt{21}$$

angesetzt, und die ganzzahligen Werthe von A, B, C, D daraus mit Leichtigkeit gefunden. Die hier angedeutete neue Methode zur Berechnung der Moduln, für welche complexe Multiplication stattfindet, und resp. der Coefficienten der Gleichungen, von denen dieselben abhängen, läßt sich auf noch größere Werthe als $n = 105$ praktisch anwenden, und ich werde mit Hilfe derselben ein Schema für die auf einander folgenden Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ anfertigen und so weit als möglich fortsetzen lassen.

Eine der schwierigsten Fragen, welche sich mir in Bezug auf die oben erwähnten Theilgleichungen aufdrängten, war die nach der Irreductibilität derselben. Für spezielle Werthe der Zahl n ließ sich zwar die Irreductibilität jener Gleichungen leicht feststellen, aber zu einem allgemeinen Beweise dieser Eigenschaft reichten alle bisher bekannten und gebräuchlichen Methoden nicht aus. Es liegt dieß an einem ganz eigenthümlichen Umstande, welcher bei den in Rede stehenden Gleichungen auftritt und welcher wiederum zeigt, daß — wie ich schon wiederholt ausgesprochen habe — der Fortschritt der Algebra und ihrer Methoden wesentlich durch das ihr von Außen herzugebrachte Material an Gleichungen bedingt ist oder, wenn ich mich so ausdrücken darf, durch die Mannigfaltigkeit algebraischer Phänomene, welche die Analysis in ihrer weiteren Entwickelung darbietet. — Die bisherigen Beweismethoden für die Irreductibilität von Gleichungen mit Zahlcoefficienten stützen sich fast sämmtlich auf die Natur der in der Discriminante enthaltenen wesentlichen Primfactoren. Die Discriminanten jener Theilgleichungen aber, von denen die Multiplication mit $\sqrt{-n}$ gehörigen Moduln abhängen, enthalten mit gewissen Ausnahmen gar keine Primzahlen als wesentliche Factoren, sondern nur Einheiten. Ich habe diese merkwürdige Eigenschaft jener Gleichungen zwar nur durch Induction gefunden und noch nicht allgemein beweisen können; aber auf Grund der bisher gewonnenen Erkenntniß mußte ich doch schon von der Benutzung der gebräuchlichen Methoden abstehen und durch andre Mittel den Beweis der Irreductibilität der erwähnten Gleichungen zu führen suchen. Dieß ist mir in der Tat gelungen, nachdem ich mit Hilfe der *Dirichlet*schen Principien die Klassenanzahl für die aus jenen Moduln gebildeten complexen Zahlen ermittelt habe.[1]) Hierdurch wird nämlich, was sonst am Anfange zu geschehen pflegt, erst am Schlusse der arithmetischen Theorie die Irreductibilität der zu Grunde gelegten Gleichung bewiesen, und es ergiebt sich zugleich der damit nahe verwandte Nachweis, daß durch jede eigentlich primitive quadratische Form von negativer Determinante unendlich viel Primzahlen dargestellt werden.[2])

Die hier erwähnte Theorie complexer Zahlen, deren Behandlung ich großen Theils durchgeführt habe, schließt die Theorie der quadratischen Formen mit complexen Coefficienten: $a + b\sqrt{-n}$ als speziellen Fall in sich, und es wird hierdurch unter Anderem Dasjenige erledigt, was allen Vermuthungen nach den Inhalt des nicht erschienenen zweiten Theils der die Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ betreffenden *Dirichlet*schen Abhandlung (Journal für Mathematik, Bd. 24)[3]) bilden sollte. Ferner ist in jener Theorie der complexen Zahlen als spezieller Fall auch die Theorie aller derjenigen enthalten, welche aus Quadratwurzeln ganzer Zahlen zusammengesetzt sind. Eine nähere Angabe der hierbei gewonnenen arithmetischen Resultate würde dem Zwecke dieser vorläufigen Notiz nicht entsprechen, aber ich darf eine *algebraische* Folgerung nicht übergehen, welche die obige Zerlegung der Gleichung für k und $k(1-k)$ gestattet. Der Affect der Theilgleichungen, deren Coefficienten die Quadratwurzeln der einzelnen Primfactoren von n enthalten, hat nämlich für jede beliebige Zahl n zur Regularität[4]) der betreffenden Determinante jene einfache Beziehung, welche ich in meiner Notiz vom October 1857[5]) nur für den Fall angeben konnte, wo n Primzahl ist. Die Anzahl der verschiedenen Perioden der Wurzeln ist gradezu gleich dem Exponenten der Irregularität[4]) und die Theilgleichung selbst ist für den Fall, wo die Determinante $-n$ regulär ist, eine *Abel*sche Gleichung in dem Sinne, daß die cyklischen Functionen ihrer Wurzeln rationale Functionen von $\sqrt{-1}$ und den Quadratwurzeln der einzelnen Primfactoren der Zahl n sind. Auch hierin zeigt

[1]) Vgl. Zusatz 58 am Ende dieses Bandes. H
[2]) Vgl. Zusatz 59 am Ende dieses Bandes. H
[3]) *L. Dirichlet*, Werke, Bd. I, S. 535. H
[4]) Vgl. Zusatz 41 am Ende dieses Bandes. H
[5]) Bd. IV, S. 180 dieser Ausgabe. H

sich die Bedeutung der weiteren Zerlegung der Gleichungen, durch welche ursprünglich jene singulären Moduln der elliptischen Functionen bestimmt werden, und ich will nun zum Schlusse die Methode kurz andeuten, mit Hilfe deren ich dazu gelangt bin, zumal die Auffindung derselben nicht ohne Schwierigkeiten gewesen ist.[1]) — Das dabei angewendete Princip ist dasselbe, welches mir schon die Trennung der Moduln nach verschiedenen Determinanten der zugehörigen quadratischen Formen und überhaupt die Aufstellung jener früher erwähnten Gleichungen Nten Grades ermöglicht hat, deren Coefficienten nur $\sqrt{n}$ enthalten und deren Wurzeln sämmtlich als rationale Functionen einer einzigen mit ganzzahligen Coefficienten von der Form $a + bi$ ausdrückbar sind. Ich setzte nämlich in der Gleichung: $\varphi(\mu, k) = 0$, welcher die verschiedenen Multiplicatoren der Transformation $n$ter Ordnung genügen, und deren Coefficienten ganzzahlige Functionen von $\varkappa^2$ oder k sind, für den Multiplicator μ den Werth: $\sqrt{n}$. Da nun die Modulargleichung für die Transformation $n$ter Ordnung: $\psi(\lambda^2, \varkappa^2) = 0$, wenn man in derselben $\lambda^2 = 1 - \varkappa^2$ setzt, d. h. also die Gleichung: $\psi(1-k, k) = 0$ Werthe von k ergiebt, für welche Multiplication mit $\sqrt{-n}$ stattfindet, so enthält der gemeinsame Factor von $\varphi(\sqrt{n}, k)$ und $\psi(1-k, k)$ grade nur diejenigen Werthe von k, für welche der Multiplicator gleich $\sqrt{n}$ ist. Alle diese Grössen sind also durch eine Gleichung mit einander verbunden, deren Coefficienten $\sqrt{n}$ enthalten, und es werden auf diese Weise nicht nur die zu den quadratischen Formen der Determinante $-n$ gehörigen Werthe von k isolirt, sondern auch für $n \equiv 3$ mod. 4 je zwei complementäre Moduln, für $n \equiv 1$ aber diejenigen beiden Arten von Moduln von einander getrennt, für welche sich die entsprechenden quadratischen Formen durch den auf die Zahl 4 bezüglichen Charakter unterscheiden.

Zum Zwecke der allgemeinen Trennung der Genera und also der quadratischen Formen von entgegengesetztem Charakter in Bezug auf eine in n enthaltene Primzahl p handelte es sich nun darum, eine Gleichung für k aufzustellen, welche in ihren Coefficienten die Quadratwurzel aus p enthielte, und zwar so, daß deren Vorzeichen durch den Charakter der Formen, welche den verschiedenen Werthen von k entsprechen, bestimmt sei. Zur Ermittelung einer solchen Gleichung dienen folgende Betrachtungen. Wenn p eine ungrade Primzahl und λ einen der Moduln bedeutet, welche durch eine Transformation $p$ter Ordnung aus $\varkappa$ entstehen, wenn ferner $\varkappa^2 = k$ und $\lambda^2 = l$ gesetzt wird, so besteht bekanntlich zwischen l und k eine ganz-

[1]) Vgl. Zusatz 60 am Ende dieses Bandes. H

zahlige Gleichung $(p+1)$sten Grades. Die Quadratwurzel aus der Discriminante derselben ist, wie leicht zu sehen, eine ganzzahlige Function von k multiplicirt mit $\sqrt{\pm p}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $p \equiv 1$ oder 3 mod. 4 ist. Hiernach wird für die Gleichung $p$ten Grades, deren Wurzeln p von den transformirten Moduln: $l_0, l_1, \ldots l_{p-1}$ und deren Coefficienten rationale Functionen des übrig bleibenden l' und k sind, die Quadratwurzel aus der Discriminante, abgesehen vom Factor $\sqrt{\pm p}$, eine rationale Function von k und l', so daß eine Relation von der Form:

$$\Pi(l_r - l_s) = \sqrt{\pm p} \cdot f(k, l')$$

besteht. Nimmt man k gleich einem der Werthe, für welchen complexe Multiplication mit $\sqrt{-n}$ stattfindet und $n \equiv 0$ mod. p ist, so giebt es unter den $(p+1)$ Werthen von l einen und *nur* einen, welcher ebenfalls zu jenen Werthen gehört. Bezeichnet man denselben mit l', so wird also l' als rationale Function von k und $\sqrt{n}$ darstellbar und die Gleichung für $l_0, l_1, \ldots l_{p-1}$ eine solche sein, deren Coefficienten nur k und $\sqrt{n}$ rational enthalten. Diese Gleichung ist nun in dem bezüglichen Sinne eine *Abel*sche Gleichung, wie namentlich aus dem oben Gesagten unmittelbar hervorgeht, wenn man berücksichtigt, daß die Wurzeln zugleich Werthe des Moduls für die Multiplication mit $\sqrt{-np^2}$ ergeben. Demnach ist jedes der $\frac{1}{2}(p-1)$ Producte:

$$(l_0 - l_m)(l_1 - l_{m+1}) \cdots (l_{p-1} - l_{m-1})$$

eine rationale Function von k, $\sqrt{n}$ und $\sqrt{-1}$. Hieraus resultirt also in Verbindung mit der oben angegebenen Form der Discriminante eine Gleichung für k, deren Coefficienten außer $\sqrt{n}$ und $\sqrt{-1}$ noch $\sqrt{\pm p}$ enthalten, und eine genauere Untersuchung zeigt, daß *dieselbe* Gleichung für alle zur Multiplication mit $\sqrt{-n}$ gehörigen Werthe von k bestehen bleibt, jedoch so, daß für die Hälfte derselben das Zeichen jenes Products Π also das Zeichen von $\sqrt{\pm p}$ verändert werden muß. Diese Veränderung selbst hängt von dem Charakter derjenigen Form in Beziehung auf p ab, welche dem betreffenden Modul entspricht, dergestalt, daß für Werthe von k, für welche der Charakter der zugehörigen Formen der Determinante $-n$ derselbe ist, auch das Vorzeichen $\sqrt{\pm p}$ beizubehalten, für die übrigen aber in das entgegengesetzte zu verwandeln ist. Alsdann ist nur noch durch einfache Betrachtungen zu zeigen, daß aus den Coefficienten der Gleichung für k die Quadratwurzel aus -1 verschwindet, um die oben gegebene Form jener Theilgleichungen zu erschließen, welche die ein-

zelnen Genera der quadratischen Formen repräsentiren. Die spezielle Ausführung der hier angedeuteten Methode wird nur dadurch einigermaßen weitläufig, daß bei dem Nachweis der Gültigkeit jener Gleichung für alle und resp. für die Hälfte der Werthe von k die Composition der quadratischen Formen angewendet werden muß. Doch giebt auch hierfür die Theorie der complexen Multiplication einige neue und einfache Gesichtspunkte, wie ich später bei der vollständigen Darstellung derselben zeigen werde.

ÜBER DIE AUFLÖSUNG DER PELLSCHEN GLEICHUNG MITTELS ELLIPTISCHER FUNCTIONEN

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1863. S. 44—50.

ÜBER DIE AUFLÖSUNG DER PELLSCHEN GLEICHUNG MITTELS ELLIPTISCHER FUNCTIONEN.[1])

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 22. Januar 1863.]

Über die dabei angewendeten Methoden sollen hier einige Andeutungen gegeben und zugleich diejenigen Resultate herausgehoben werden, welche sich mit einfachen Bezeichnungen darstellen lassen.

Wenn P und Q positive ungrade Zahlen ohne quadratischen Factor bedeuten, von denen die erstere größer als Eins ist, und wenn ferner den Buchstaben m und n nach einander alle positiven ganzzahligen Werthe beigelegt werden, welche beziehungsweise zu $2P$ und $2Q$ relativ prim sind, so ergiebt sich der Grenzwerth, den die beiden Reihen

$$\sum\left(\frac{P}{m}\right)\frac{1}{m^{1+\varrho}}, \quad \sum\left(\frac{-Q}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

für $\varrho = 0$ erhalten, unmittelbar aus der *Dirichlet*schen Abhandlung im 19. und 21. Bande des *Crelle*schen Journals.[2]) Hiernach wird[3]):

$$\lim_{\varrho=0}\sum\left(\frac{P}{m}\right)\frac{1}{m^{1+\varrho}}\sum\left(\frac{-Q}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{\pi}{4\sqrt{D}}H(-Q)H(P)(\log T + U\sqrt{P}),$$

wo $P \cdot Q = D$ gesetzt ist, mit: $H(-Q)$, $H(P)$ resp. die Klassenanzahlen der eigentlich primitiven quadratischen Formen der Determinanten $-Q$ und P bezeichnet sind, und wo T und U die kleinsten Zahlen bedeuten, für welche $T^2 - PU^2 = 1$ sind. Es ist aber hierbei zu bemerken, daß $H(-1) = \frac{1}{2}$ genommen werden muß.

Im Falle D ohne quadratischen Factor und von der Form $4\nu + 1$ ist, läßt sich das Product jener beiden Reihen oder, was dasselbe ist, die Doppelreihe:

$$\sum\sum\left(\frac{P}{m}\right)\left(\frac{-Q}{n}\right)\frac{1}{(mn)^{1+\varrho}}$$

in

$$\frac{1}{2^{2+\varrho}}\left(2^{1+\varrho} - \left(\frac{2}{R}\right)\right)\sum\left[\frac{a}{R}\right]\sum\sum\frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$

[1]) Vgl. Zusatz 61 am Ende dieses Bandes. H
[2]) *Lejeune-Dirichlet*, Werke, Bd. I, S. 413. H
[3]) Vgl. Zusatz 62 am Ende dieses Bandes. H

umwandeln. Hierin ist R gleich P oder Q zu setzen, je nachdem $P \equiv 1$ oder 3 mod. 4 ist, das erste Summationszeichen bezieht sich auf alle nicht äquivalenten eigentlich primitiven Formen (a, b, c) der Determinante: $-D$, das Zeichen $\left[\frac{a}{R}\right]$ bedeutet den Charakter der bezüglichen Form für alle Primfactoren von R in der Weise, daß

$$\left[\frac{a}{R}\right] = \left(\frac{a'}{R}\right),$$

wenn (a', b', c') eine mit (a, b, c) äquivalente Form ist, deren erster Coefficient a' keinen gemeinsamen Theiler mit R hat; endlich sind die beiden letzten Summationen auf alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe von x und y zu erstrecken mit alleiniger Ausnahme des Werthsystems: $x = 0$, $y = 0$. Demnach erhält man:

$$\frac{\pi}{\sqrt{D}} H(-Q) H(P) \log(T + U\sqrt{P}) = \left(2 - \left(\frac{2}{R}\right)\right) \lim_{\varrho=0} \sum\sum\sum \left[\frac{a}{R}\right] \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}.$$

Um den Grenzwert auf der rechten Seite dieser Gleichung zu bestimmen, wird

$$\lim_{\varrho=0} \sum\sum \frac{e^{2\pi i(\sigma x + \tau y)}}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$

untersucht für den Fall, daß σ, τ, a, b, c irgend welche reelle Größen bedeuten, welche indessen der Bedingung: $ac - b^2 = D > 0$ genügen. Dieser Werth findet sich in folgender Weise ausgedrückt:[1])

$$\frac{2\sigma^2\pi^2}{a} + \frac{\pi}{3\sqrt{D}} \log \frac{1}{4\pi^2} \vartheta'(0, w_1) \vartheta'(0, w_2) - \frac{\pi}{\sqrt{D}} \log \vartheta(\tau + \sigma w_1, w_1) \vartheta(\tau + \sigma w_2, w_2),$$

wo $\vartheta(z, w)$ die Reihe:

$$-i \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{(n+\frac{1}{2})^2 w\pi i + (2n+1) z\pi i},$$

ϑ' deren in Bezug auf z genommenen Differentialquotienten bedeutet, und wo der Kürze halber

$$w_1 = \frac{-b + i\sqrt{D}}{a}, \quad w_2 = \frac{+b + i\sqrt{D}}{a}$$

gesetzt ist. Mit Benutzung des eben angegebenen Ausdrucks, welcher für alle meine bezüglichen Untersuchungen die Grundlage bildet, ergiebt sich für die Differenz:

$$\sum\sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} - \sum\sum \frac{1}{(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2)^{1+\varrho}},$$

[1]) Vgl. Zusatz 63 am Ende dieses Bandes.

in welcher (a, b, c) und (a', b', c') zwei verschiedene Formen der Determinante $-D$ bedeuten, der Grenzwerth:[1])

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{D}} \log \frac{a\sqrt{a}}{a'\sqrt{a'}} \frac{\vartheta'(0, w_1')\vartheta(0, w_2')}{\vartheta'(0, w_1)\vartheta(0, w_2)},$$

wenn sich ϱ der Null nähert und wenn für w_1', w_2', die den Größen w_1, w_2 analogen aus a', b', c' gebildeten Ausdrücke gesetzt werden. Hiernach bekommt man für $D \equiv 1$ mod. 4 die Gleichung:

$$H(-Q) H(P) \log(T + U\sqrt{P}) = \frac{2}{3}\left(2 - \left(\frac{2}{R}\right)\right) \sum \left[\frac{a}{R}\right] \log \frac{a\sqrt{a}}{\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)},$$

in welcher vermöge der obigen Bestimmungen die rechte Seite gleich:

$$\frac{2}{3} \sum \left[\frac{a}{P}\right] \log \frac{a\sqrt{a}}{\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)},$$

wird, wenn $P \equiv 1$ mod. 8 ist, aber das Dreifache davon, wenn $P \equiv 5$ mod. 8, während dieselbe gleich:

$$\frac{2}{3} \sum \left[\frac{a}{Q}\right] \log \frac{a\sqrt{a}}{\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)}$$

wird, sobald $Q \equiv 7$ mod. 8 und das Dreifache davon, sobald $Q \equiv 3$ mod. 8 ist. Die Summen sind hier überall auf irgend ein System nicht äquivalenter Formen der Determinante $-D$ auszudehnen, und der Factor:

$$H(P) \log(T + U\sqrt{P})$$

auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung kann nach *Dirichlet* durch einen aus $4P$ten Wurzeln der Einheit gebildeten Ausdruck ersetzt werden.[2])

In ähnlicher Weise läßt sich mit Hilfe der obigen Formeln der Werth von:

$$H(-Q) H(P) \log(T + U\sqrt{P})$$

auch für alle anderen Zahlformen von P und Q und selbst dann, wenn dieselben einen gemeinsamen Factor haben, durch elliptische Functionen darstellen.

Berücksichtigt man, daß für *reducirte* Formen (a, b, c) bei einer gewissen Annäherung nur das erste Glied der Reihe $\vartheta'(0, w)$ genommen zu werden braucht, so sieht man leicht, daß der Werth von:

$$H(-Q) H(P) \log(T + U\sqrt{P})$$

[1]) Vgl. Zusatz 64 am Ende dieses Bandes.
[2]) Vgl. Zusatz 65 am Ende dieses Bandes.

annäherungsweise durch: $$\left(2-\left(\tfrac{2}{R}\right)\right)\sum\left[\tfrac{a}{R}\right]\left(\tfrac{\pi\sqrt{D}}{3a}+\lg a\right)$$
ausgedrückt ist, wenn die Summation auf alle Zahlen a erstreckt wird, welche die ersten Coefficienten der verschiedenen reducirten Formen bilden. Eine größere Genauigkeit kann man durch Hinzufügung weniger Glieder der Reihe ϑ' ohne Mühe erlangen, aber schon jene erste Annäherung ist besonders interessant, weil sie einerseits auf die leichteste Weise einen ungefähren Überschlag über die Größe der Zahlen T, U gestattet, und andrerseits über die Vertheilung der Zahlen a in den verschiedenen Gattungen einigen Aufschluß giebt. Um die überaus merkwürdige Beziehung jener zwei auf so ganz verschiedenen Definitionen beruhenden Zahlenausdrücke durch einige Beispiele anschaulich zu machen, wähle ich zuvörderst die Fälle:
$$P=D=5,\quad P=D=13,\quad P=D=37,$$
in denen resp. die Zahlenwerthe:
$$2+\sqrt{5},\quad 18+5\sqrt{13},\quad 882+145\sqrt{37}$$
durch den gemeinsamen Ausdruck: $$\tfrac{1}{8}e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{D}}$$
annäherungsweise dargestellt werden.[1]) Ferner wird die Fundamentalauflösung der Gleichung: $T^2-PU^2=-1$ in den Fällen $P=17$ und $P=97$ nämlich:
$$4+\sqrt{17},\quad 5604+569\sqrt{97}$$
resp. annäherungsweise durch: $$\tfrac{2}{9}e^{\frac{5}{18}\pi\sqrt{17}},\quad \tfrac{2}{49}e^{\frac{17}{42}\pi\sqrt{97}}$$
ausgedrückt, wenn man in den obigen Formeln wiederum $Q=1$ setzt. Endlich findet man für $D=85$ je nachdem $Q=1$, 5 oder 17 genommen wird, die Fundamentalauflösungen der Gleichungen:
$$T^2-85U^2=-1,\quad T^2-17U^2=-1,\quad T^2-5U^2=-1,$$
d. h. also
$$378+41\sqrt{85},\quad 4+\sqrt{17},\quad 2+\sqrt{5}$$
resp. ungefähr gleich
$$\tfrac{1}{8}e^{\frac{3}{10}\pi\sqrt{85}},\quad \tfrac{1}{\sqrt{5}}e^{\frac{1}{10}\pi\sqrt{85}},\quad e^{\frac{1}{20}\pi\sqrt{85}}.$$

[1]) Vgl. Zusatz 66 am Ende dieses Bandes. H

Die verschiedenen Formen, welche man auf diese Weise (wie in vorstehenden Beispielen für $4+\sqrt{17}$) für eine und dieselbe Auflösung der *Pell*schen Gleichung erhält, geben zu vielen interessanten Bemerkungen Anlaß; aber bei weitem wichtiger sind die theoretischen Folgerungen, welche aus den erwähnten Resultaten zu ziehen sind. Nicht allein daß in denselben ein überraschender Zusammenhang zwischen den quadratischen Formen, welche zwei entgegengesetzten Determinanten entsprechen, offenbart wird, sondern es ergiebt sich hierbei auch jene Zerlegbarkeit der Gleichungen für die singulären Moduln, welche den Hauptgegenstand meiner Mittheilung vom Juni v. J. bildet.[1]) Eben diese Zerlegbarkeit ließ zwar die Möglichkeit leicht erkennen, durch die singulären Moduln der elliptischen Functionen *gewisse* Lösungen der *Pell*schen Gleichung darzustellen; aber um die interessante Beziehung derselben zu der betreffenden Fundamentalauflösung zu ermitteln, bedurfte es jener Anwendung der *Dirichlet*schen Methoden, denen die höhere Mathematik schon so viele merkwürdige Resultate verdankt, und welche sich hier auch für die Algebra so fruchtbar erweisen. Es ist nämlich die algebraische Natur der oben eingeführten ϑ-Ausdrücke von besonderer Wichtigkeit für die Theorie der singulären Moduln der elliptischen Functionen überhaupt, wenn auch in speziellen Fällen jene Ausdrücke durch diese Moduln selbst ersetzt werden können. In dieser Hinsicht mag nur die eine für $D=8n+5$ giltige Formel erwähnt werden:
$$\prod\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{D}}{\sin\frac{\beta\pi}{D}}=\prod\sqrt[3]{4\varkappa^2\varkappa'^2},$$
in welcher α und β resp. alle Zahlen bedeuten, die kleiner als D sind, und für die $\left(\frac{\alpha}{D}\right)=+1$, $\left(\frac{\beta}{D}\right)=-1$, während das Productzeichen auf der rechten Seite über einen gewissen sechsten Teil aller derjenigen Moduln k auszudehnen ist, für welche complexe Multiplication mit $\sqrt{-D}$ stattfindet. Die eigenthümliche Verknüpfung von zwei verschiedenen algebraischen Theorieen, welche in sämmtlichen oben erwähnten Resultaten enthalten sind, tritt in dieser speciellen Formel deutlich hervor, insofern dieselbe eine unmittelbare Beziehung zwischen den Wurzeln der Einheit und den singulären Moduln der elliptischen Functionen angiebt.

[1]) Bd. IV, S. 207 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. Vgl. auch Zusatz 67 am Ende dieses Bandes. H

ÜBER DEN GEBRAUCH DER DIRICHLETSCHEN METHODEN IN DER THEORIE DER QUADRATISCHEN FORMEN

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1864. S. 285—303.

ÜBER DEN GEBRAUCH DER DIRICHLETSCHEN METHODEN IN DER THEORIE DER QUADRATISCHEN FORMEN.[1])

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 12. Mai 1864.]

Die klassische Abhandlung *Dirichlet's*, welche im 19ten und 21sten Bande des Journals für Mathematik[2]) veröffentlich ist, und in welcher seine „Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Analysis des Unendlichen auf die Zahlentheorie" ausführlich dargelegt sind, enthält die Lösung zweier Hauptprobleme aus der Theorie der quadratischen Formen, nämlich die Bestimmung der Anzahl der Klassen und der Gattungen.[3]) Die hierbei entwickelten Methoden haben seitdem ihre große Fruchtbarkeit in vielfacher Weise bewährt. Namentlich sind dieselben für analoge Fragen aus höheren Gebieten der Arithmetik mit Erfolg benutzt worden. Die Arbeiten *Dirichlet's* über quadratische Formen mit complexen Coefficienten, diejenigen des Hrn. *Kummer* über complexe Zahlen, welche aus Wurzeln der Einheit gebildet werden, so wie endlich meine eigenen Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften der singulären Moduln der elliptischen Functionen verdanken die werthvollsten und überraschendsten Resultate der Anwendung eben jener Methoden. Aber auch für die Lehre von den gewöhnlichen binären quadratischen Formen kann man noch weiteren Nutzen daraus ziehen und sogar fast diese ganze Theorie mit Hilfe analytischer Betrachtungen entwickeln, wenn nur die einfachsten arithmetischen Grundbegriffe zuvor festgestellt sind. Bei einer derartigen Behandlungsweise der quadratischen Formen ist die Eintheilung des gesammten Stoffes in zwei verschiedene Theile, wie sich dieselbe in der fünften Section der „*disquisitiones arithmeticae*" vorfindet, im Wesentlichen beizubehalten. Indessen ist in dem ersten elementaren Theile die Lehre von der Reduction der Formen gänzlich auszuschließen, weil die wichtigsten Resultate, zu deren rein arithmetischer Begründung sie dient, sich anderweit ergeben. Ferner ist die Lehre von den ambigen

[1]) Vgl. Zusatz 68 am Ende dieses Bandes. H
[2]) *G. L.-Dirichlet*, Werke, Bd. I, S. 413. H
[3]) Vgl. Zusatz 69 am Ende dieses Bandes. H

Klassen aus dem ersten Theile in den zweiten zu verweisen, welcher die tiefer liegenden Eigenschaften der quadratischen Formen behandelt, weil bei einer solchen Darstellungsweise die Theorie der Ambigen durch die der Composition begründet werden muß.

Nach diesen Vorbemerkungen will ich in kurzen Umrissen andeuten, wie sich eine systematische Entwickelung der Theorie der quadratischen Formen gestaltet, wenn man von den *Dirichlet*schen Methoden Gebrauch macht und zugleich rein arithmetische Betrachtungen so viel als möglich ausschließt. Ich werde hierbei zuvörderst Gelegenheit nehmen, einige nicht unwesentliche und in mancher Hinsicht vortheilhafte Modificationen jener Methoden anzugeben, alsdann aber zu dem Hauptzwecke der vorliegenden Mittheilung übergehend eine der wichtigsten Eigenschaften der quadratischen Formen in ganz directer Weise auf analytischem Wege herleiten.

Bedeuten (A, B, C) und (a, b, c) eigentlich primitive Formen einer Determinante D, welche nur keine positive Quadratzahl sein darf, so hat man vermöge des Begriffes der Äquivalenz die rein formale Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad \tau \cdot \sum F(A, B) = \sum F(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \;\; a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta),$$

wenn F irgend eine eindeutige Function zweier Variabeln bezeichnet, und wenn die Summation links auf alle möglichen Werthe von A und B erstreckt wird, rechts aber einerseits auf alle Zahlen a, b, c, welche einem Systeme nichtäquivalenter Formen angehören, andrerseits auf alle ganzzahligen Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für welche $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist. Mit dem Buchstaben τ ist die Anzahl der Transformationen einer Form in sich selbst bezeichnet und es ist hierbei zu erinnern, daß, wie die einfachsten arithmetischen Betrachtungen zeigen, diese Anzahl mit derjenigen der ganzzahligen Werthe von t, u übereinstimmt, für welche die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ stattfindet. Hieraus erhellt unmittelbar, daß τ den Werth 2 hat, wenn D negativ und seinem absoluten Werthe nach größer als Eins ist. Ebenso leicht ist einzusehen, daß für positive Determinanten τ entweder gleich 2 oder unendlich groß sein muß. Daß aber der letztere Fall eintritt, d. h. daß die *Pell*sche Gleichung stets unendlich viele Lösungen darbietet, soll hier nicht als bewiesen angenommen, und es soll auch die Endlichkeit der Anzahl der Formen (a, b, c) nicht vorausgesetzt werden, da sich diese beiden Eigenschaften der quadratischen Formen als Folgerungen aus der

obigen Gleichung (I) ergeben. — Wenn man in dieser Gleichung nur je eines der unendlich vielen Werthepaare für β, δ beibehält, welche zu denselben Zahlen α, γ gehören, so dürfen links für jedes bestimmte A nur solche Werthe von B genommen werden, welche für den Modul A mit einander incongruent sind. Bezeichnet man die Anzahl derselben mit $\psi(A)$, so ist alsdann, wenn die Function $F(A, B)$ von B unabhängig ist, die auf die verschiedenen Zahlen B bezügliche Summation durch Hinzufügung des Factors $\psi(A)$ zu ersetzen. Die Gleichung (I) verwandelt sich demnach, wenn z eine unbestimmte Größe bedeutet und für $F(A, B)$ die Function einer einzigen Variabeln: $f(Az)$ genommen wird, in folgende:

$$\text{(II)} \qquad \tau \sum \psi(A) \cdot f(Az) = \sum f((a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)z);$$

und man kann sich in derselben alle diejenigen Glieder weggelassen denken, in denen die unter dem Functionszeichen stehende ganze Zahl negativ ist, so wie diejenigen, in welchen sie einen gemeinsamen Factor mit irgend einer durch die Determinante theilbaren graden Zahl P hat. Alsdann sind für A sämmtliche positiven Zahlen zu setzen, welche zu P prim sind und von denen D quadratischer Rest ist. Alle diese Zahlen, welche offenbar die Eigenschaft haben, daß D auch quadratischer Rest von jedem ihrer Primfactoren ist, mögen jetzt durch μ bezeichnet werden; durch ν dagegen alle diejenigen Zahlen, von deren sämmtlichen Primfactoren D Nichtrest ist, und welche überdieß ebenfalls zu P relativ prim sind. Da nun die oben definirte Function $\psi(\mu)$ die Anzahl aller Lösungen der Congruenz: $B^2 \equiv D$ mod. μ bedeutet, oder — was dasselbe ist — die Anzahl aller Systeme relativer Primzahlen μ', μ'', für welche $\mu = \mu'\mu''$ wird, so ist

$$\psi(\mu) = \sum \left(\frac{D}{\mu'}\right)$$

und also:

$$\text{(III)} \qquad \tau \sum \left(\frac{D}{\mu'}\right) f(\mu'\mu''z) = \sum f((a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)z),$$

wo unter dem Summenzeichen links sowohl für μ' als für μ'' alle Zahlen μ zu nehmen sind, jedoch mit Ausschluß derjenigen Werthsysteme, für welche μ' und μ'' einen gemeinsamen Factor mit einander haben. Diese Einschränkung für die Werthe von μ', μ'' kann aber wegfallen, wenn man zugleich auf der rechten Seite für α, γ nicht bloß wie früher relative Primzahlen sondern auch solche ganzzahlige Werthe nimmt, deren größter gemeinsamer Factor irgend eine Zahl μ ist; denn für alle Zahlen α, γ und resp. für alle Zahlen μ', μ'', welche eine *bestimmte* Zahl μ als größten gemeinsamen Theiler haben, gilt ebenfalls die obige Gleichung (III), da dieselbe, wenn $\alpha = \alpha_1\mu$, $\gamma = \gamma_1\mu$, $\mu' = \mu_1\mu$, $\mu'' = \mu_2\mu$, $z\mu^2 = z'$ gesetzt wird, in:

$$\tau\sum\left(\frac{D}{\mu'}\right)f(\mu_1\mu_2 z') = \sum f\left((a\alpha_1^2 + 2b\alpha_1\gamma_1 + c\gamma_1^2)z'\right)$$

übergeht und hier $\mu_1, \mu_2, \alpha_1, \gamma_1$ resp. die Bedeutung haben, welche ursprünglich in der Gleichung (III) den Buchstaben $\mu', \mu'', \alpha, \gamma$ beigelegt worden ist. Berücksichtigt man endlich, daß die auf alle Divisoren ν' einer Zahl ν ausgedehnte Summe $\sum\left(\frac{D}{\nu'}\right)$ den Werth Eins oder Null hat, je nachdem ν ein vollständiges Quadrat ist oder nicht, so erhält man für eine beliebige Function φ die Gleichung:

$$\sum\left(\frac{D}{\nu'}\right)\varphi(\nu'\nu'') = \sum\varphi(\nu^2),$$

wo für ν, ν', ν'' resp. sämmtliche oben definirte Zahlen ν zu nehmen sind. Man hat demnach, wenn

$$\varphi(z) = \tau\sum\left(\frac{D}{\mu'}\right)f(\mu'\mu''z) = \sum f\left((a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)z\right)$$

gesetzt wird:

$$\tau\sum\left(\frac{D}{\mu'\nu'}\right)f(\mu'\nu'\mu''\nu'') = \sum f\left((a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)\nu^2\right)$$

oder, wenn man die Producte $\mu'\nu', \mu''\nu'', \alpha\nu, \gamma\nu$ resp. durch die Bezeichnungen n, n', x, y zusammenfaßt:

$$\text{(IV)} \qquad \tau\sum\left(\frac{D}{n}\right)f(nn') = \sum f(ax^2 + 2bxy + cy^2),$$

wo unter den Summenzeichen für a, b, c alle Coefficienten eines Systems nicht-äquivalenter Formen, für n, n' nur alle positiven, für x, y aber *alle* ganzzahligen Werthe mit alleiniger Ausnahme derjenigen zu nehmen sind, für welche die unter dem Functionszeichen stehenden Zahlen einen negativen Werth oder einen gemeinsamen Theiler mit P bekommen. Auf diese Weise ist also die fundamentale *Dirichlet*sche Gleichung, welche im 21sten Bande des Journals für Mathematik[1]) zuerst entwickelt ist, direct und mit Umgehung der unendlichen Producte herzuleiten. Ich bemerke dabei, daß eine ähnliche Herleitung sich auch in einem der verdienstvollen Supplemente[2]) findet, welche Hr. *Dedekind* seiner überaus dankenswerthen, mit geschickter und sorgsamer Hand veranstalteten Herausgabe der *Dirichlet*schen Vorlesungen über Zahlentheorie beigefügt hat.

[1]) *G. L.-Dirichlet*, Werke, Bd. I, S. 449 u. 454. H
[2]) Supplement IV. H

Um nun zuvörderst den Nachweis zu liefern, daß für positive Determinanten die Anzahl der Transformationen einer Form in sich selbst unendlich groß ist, braucht man auf der rechten Seite der Gleichung (IV) nur diejenigen Glieder zu nehmen, in denen $(a, b, c) = (1, 0, -D)$, in denen ferner sowohl x als y nicht negativ und $x \equiv 1 \bmod. 2D$, y aber grade ist. Die Summe aller dieser Glieder ist:

$$\Sigma\Sigma f((2D\xi + 1)^2 - 4D\eta^2),$$

wo die beiden Summationen auf alle diejenigen nicht negativen ganzen Zahlen ξ, η auszudehnen sind, für welche der unter dem Functionszeichen stehende Ausdruck positiv und zu P prim ist. Die letztere Bedingung ist an sich erfüllt, wenn man — wie es erlaubt ist — $P = 2D$ setzt. Bedeutet nun ϱ eine positive Größe und nimmt man $f(z) = z^{-1-\varrho}$, so ist die einfache auf ξ allein bezügliche Summe größer als:

$$\int_u^\infty f((2D\xi + 1)^2 - 4D\eta^2)d\xi,$$

wo die untere Grenze u durch die Gleichung: $2Du = 2\eta\sqrt{D} + 2D - 1$ bestimmt wird. Da dieses Integral selbst eine mit wachsendem η abnehmende Function dieser Größe ist, so folgt ferner, daß jene obige Doppelsumme größer sein muß als der Werth des Doppelintegrals:

$$\int_0^\infty d\eta\int_u^\infty f((2D\xi + 1)^2 - 4D\eta^2)d\xi$$

d. h. größer als:

$$\frac{(2D)^{-2\varrho}}{16D\sqrt{D}}\cdot\frac{1}{\varrho^2}.$$

Für positive Determinanten muß daher, wenn man sich bei der über die Function f gemachten Annahme die Gleichung (IV) erst mit ϱ multiplicirt denkt und alsdann ϱ ins Unendliche abnehmen läßt, selbst ein Theil der aus lauter positiven Gliedern bestehenden rechten Seite schon jede beliebige Größe übersteigen, während die auf der linken Seite mit dem Factor τ multiplicirte Summe auch für $\varrho = 0$ einen endlichen Werth behält. Also ist die Anzahl der Transformationen einer Form in sich selbst und ebenso die Anzahl der Auflösungen der *Pell*schen Gleichung unendlich groß. Nachdem dieser eine Fundamentalsatz des elementaren Theils der Theorie der Formen erwiesen ist, sind für den Fall positiver Determinanten die

Summationsbeschränkungen in der Gleichung (IV) wie gewöhnlich einzuführen. Die Gleichung:

$$\text{(IV)} \qquad \tau \sum \left(\frac{D}{n}\right) f(nn') = \sum f(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

ist demgemäß in folgender Weise aufzufassen:

1. Unter den Formen (a, b, c) sind nur solche zu verstehen, in denen a positiv ist.

2. Bezüglich der Werthe von n, n' bleiben die früheren Bestimmungen maßgebend. Was ferner die Summationsbuchstaben x, y anlangt, so erhalten diese für negative Determinanten alle möglichen ganzzahligen Werthe, für positive Determinanten aber nur solche, die den Ungleichheitsbedingungen:
$$ax + (b \pm \sqrt{D})y > 0,$$
$$1 \leq \frac{ax + (b + \sqrt{D})\,y}{ax + (b - \sqrt{D})\,y} < \frac{t + u\sqrt{D}}{t - u\sqrt{D}},$$
wo $\sqrt{D}$ positiv zu nehmen ist, genügen. Überdieß sind in beiden Fällen diejenigen Werthsysteme auszuschließen, für welche $ax^2 + 2bxy + cy^2$ einen Primfactor von P enthält.

3. Für negative Determinanten ist $\tau = 2$, für positive dagegen $\tau = m$ anzunehmen, vorausgesetzt daß im letzteren Falle
$$t + u\sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^m$$
ist, während T, U die kleinsten positiven der Gleichung: $T^2 - DU^2 = 1$ genügenden ganzen Zahlen bedeuten.

Die wesentlich formalen Umgestaltungen der Gleichung (I), welche zu der Gleichung (IV) geführt haben, sind in gewissem Sinne für jede beliebige Function f gestattet; aber es ist nicht nöthig hierauf näher einzugehen, da die Zulässigkeit jener Umwandlungen an sich klar ist, wenn man speziell $f(z) = q^z$ setzt, und da schon aus dem Bestehen jener Gleichung für diesen besondern Fall deren allgemeinere Gültigkeit und Bedeutung unmittelbar hervorgeht. Die aus dieser Gleichung weiter zu entwickelnden Folgerungen erlangt man auf die einfachste Weise, wenn man wie *Dirichlet* für die Function $f(z)$ eine negative Potenz von z nimmt, deren Exponent

seinem absoluten Werthe nach größer als *Eins* ist, obwohl auch andre Specialisationen von $f(z)$ — wie z. B. die Annahme: $f(z) = q^z$ — zu eben denselben Resultaten führen.

Setzt man der Kürze halber

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-1-\varrho} = \varphi(x, y),$$

so hat man, um die Endlichkeit der Klassenanzahl zu beweisen, zuvörderst den Werth jeder einzelnen auf eine bestimmte Form (a, b, c) bezüglichen Summe: $\varrho\,\Sigma\varphi(x, y)$ für $\varrho = 0$ zu ermitteln. Dieß kann, ohne den allgemeinen *Dirichlet*schen Satz (J. f. M. Bd. 19 pag. 326)[1]) zu Hilfe zu nehmen, in einfacher Weise geschehen, wenn man von der Bemerkung ausgeht, daß der Werth von:

$$\sum_{x=s}^{x=\infty} \varphi(x, y)$$

zwischen den beiden Werthen des Ausdruckes:

$$\pm\,\varphi(hy, y) + \int_{hy}^{\infty} \varphi(x, y)\,dx$$

liegt, sobald für die ganze Zahl s die Ungleichheiten: $hy < s < hy + 1$ stattfinden. Hiernach wird nämlich, wenn $ah^2 + 2bh + c$ von Null verschieden ist, der Werth der Doppelsumme:

$$\varrho \sum_{y=1}^{y=\infty} \sum_{x=s}^{x=\infty} \varphi(x, y)$$

für $\varrho = 0$ durch die einfache Summe:

$$\varrho \sum_{y=1}^{y=\infty} \int_{hy}^{\infty} \varphi(x, y)\,dx$$

dargestellt und diese reducirt sich nach Substitution von $ax + by = zy$ auf:

$$\frac{1}{2} \int_{ah+b}^{\infty} \frac{dz}{z^2 - D}.$$

Da nun $\varrho\,\Sigma\varphi(x, 0)$ gleichzeitig mit ϱ verschwindet, so wird der gesuchte Werth von $\varrho\,\Sigma\varphi(x, y)$ für positive Determinanten identisch mit dem der obigen Doppelsumme,

[1]) *G. L.-Dirichlet*, Werke, Bd. I, S. 415.

also auch mit dem dafür gefundenen Integrale, wenn darin $ah + b = \frac{t}{u}$ gesetzt wird. Man hat daher in diesem Falle für $\varrho = 0$:

$$\varrho \Sigma \varphi(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{D}} \log \frac{t + u\sqrt{D}}{t - u\sqrt{D}}.$$

Für negative Determinanten ist der gesuchte Werth identisch mit demjenigen der Doppelsumme:

$$2\varrho \sum_{y=1}^{y=\infty} \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \varphi(x, y),$$

wenn ϱ ins Unendliche abnimmt. Zerlegt man hierin die auf x bezügliche Summe in zwei Theile, von denen der eine die positiven der andre die negativen Werthe von $ax + by$ umfaßt, so ergiebt die obige Bemerkung für jede der beiden hierdurch entstehenden Doppelsummen den Werth:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z^2 - D},$$

so daß in diesem Falle für $\varrho = 0$:

$$\varrho \Sigma \varphi(x, y) = \frac{\pi}{\sqrt{-D}}$$

wird. Die beiden auf positive und negative Determinanten bezüglichen Resultate können nunmehr in folgender Weise zusammengefaßt werden:

„Es ist für $\varrho = 0$:

$$\varrho \sum_{x,y} (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-1-\varrho} = \frac{1}{2} \tau \lambda,$$

wenn mit λ der kleinste reelle positive Werth bezeichnet wird, welchen der Ausdruck:

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \log (t_1 + u_1 \sqrt{D})$$

für irgend welche der Gleichung: $t_1^2 - Du_1^2 = 1$ genügende reelle ganze Zahlen t_1, u_1 überhaupt annehmen kann."

Bei der angegebenen Bestimmung des Grenzwerthes von $\varrho \Sigma \varphi(x, y)$ sind diejenigen Zahlen x, y, für welche der Werth der quadratischen Form durch eine der verschiedenen in P enthaltenen Primzahlen p theilbar wird, noch nicht ausgeschlossen. Diese Ausschließung ist aber leicht zu bewerkstelligen, wenn man berücksichtigt, daß die obigen Ausführungen auch für nicht primitive Formen (a, b, c) ihre Geltung behalten. Man hat nämlich von dem gefundenen Gesammtwerthe von $\varrho \Sigma \varphi(x, y)$ nur den Werth derjenigen Theile abzuziehen, in welchen die Form durch eine der Primzahlen p theilbar wird, und dadurch reducirt sich derselbe auf:

$$\frac{1}{2} \tau \lambda \cdot \Pi \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{p}\right),$$

wo $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = \left(\frac{D}{p}\right)$ zu setzen ist, je nachdem p ein Primfactor von $2D$ ist oder nicht. Die obige Gleichung (IV) ergiebt daher:

$$\varrho \sum \left(\frac{D}{n}\right) (nn')^{-1-\varrho} = \frac{1}{2} \lambda H \cdot \Pi \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{p}\right)$$

für $\varrho = 0$, wenn H die Anzahl der Werthsysteme a, b, c, d. h. also die Klassenanzahl bedeutet. Die Endlichkeit dieser Anzahl erschließt man demnach ebenso wie oben die Auflösbarkeit der *Pell*schen Gleichung daraus, daß der Ausdruck auf der linken Seite einen endlichen bestimmten Werth hat; und bei dem hierfür erforderlichen Nachweise bildet bekanntlich das Reciprocitätsgesetz die zahlentheoretische Grundlage. Die Anwendung der *Dirichlet*schen Methoden zeigt daher, daß dieser Fundamentalsatz aus der Theorie der quadratischen Reste merkwürdiger Weise auch als eigentliche Quelle für jene beiden elementaren Haupteigenschaften der quadratischen Formen angesehen werden kann.

Im zweiten Theile der fünften Section der „*disquisitiones arithmeticae*" sind folgende drei Punkte als Hauptziele der Untersuchung zu betrachten:

erstens: die Bestimmung der Anzahl der Ambigen;

zweitens: der Nachweis, daß alle zum Hauptgenus gehörigen Klassen durch Duplication zu erzeugen sind, oder — was damit unmittelbar zusammenhängt — daß sämmtliche Formen des Hauptgenus quadratische Werthe annehmen können*);

drittens: die Ermittelung der Anzahl der Genera.

Durch die rein arithmetischen Methoden von *Gauß* werden diese drei Punkte in der angegebenen Reihenfolge erledigt, während dieselben bei Anwendung der analytischen Hilfsmittel in umgekehrter Ordnung erörtert werden müssen.

*) Näheres über den erwähnten Zusammenhang findet man auch in zwei Abhandlungen des Hrn. *Arndt* (J. f. M. Bd. 56).

Die Anzahl der in irgend einem Genus enthaltenen Klassen ist nach *Dirichlet*scher Weise zu bestimmen, indem die Function f in der obigen Gleichung (IV) so gewählt wird, daß

$$\sum_{x,y} f(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

für jede dem gegebenen Genus angehörige Form einen und denselben Werth hat, für jede andre Form aber verschwindet. Dieß geschieht unter Anderm, wenn man

$$f(z) = \varrho \cdot z^{-1-\varrho} \Pi(1 + \delta \cdot \chi(z)),$$

und alsdann $\varrho = 0$ setzt. Die sämmtlichen Einzelcharaktere des betreffenden Genus sind hierbei durch δ, χ bezeichnet, dergestalt, daß die Gleichungen:

$$\chi_0(a) = \delta_0, \quad \chi_1(a) = \delta_1, \quad \chi_2(a) = \delta_2, \quad \ldots,$$

in denen sämmtliche δ bestimmte Werthe ± 1 haben, das System der Charaktere bilden. Da bekanntlich alle zulässigen Charaktere einer Form (a, b, c), in welcher a keinen Theiler mit $2D$ gemein hat, durch Angabe der Werthe von

$$\left(\frac{a}{q_1}\right), \quad \left(\frac{a}{q_2}\right), \quad \left(\frac{a}{q_3}\right), \quad \cdots$$

und (in gewissen Fällen) auch von $\left(\frac{-1}{a}\right)$ bestimmt werden können, wenn je nach den verschiedenen Zahlformen von D mod. 8 unter $q_1, q_2, q_3, \ldots$ sämmtliche Primfactoren der Determinante verstanden werden oder einer derselben weggelassen wird, so hat man oben

$$\chi_1(a) = \left(\frac{a}{q_1}\right), \quad \chi_2(a) = \left(\frac{a}{q_2}\right), \quad \cdots$$

und eintretenden Falls auch

$$\chi_0(a) = \left(\frac{-1}{a}\right)$$

zu setzen. Man kann demnach den Werth der Form unter dem Functionszeichen χ durch den ersten Coefficienten a ersetzen. Alsdann tritt bei der Summation über alle Werthe von x, y der Factor:

$$\Pi(1 + \delta \cdot \chi(a))$$

heraus, und dieser hat offenbar, wenn $\varkappa$ die Anzahl aller zulässigen Einzelcharaktere bedeutet und wenn (a, b, c) eine Form aus jenem bestimmten Genus ist, den Werth $2^\varkappa$, während derselbe für alle übrigen Formen verschwindet. Da nun überdieß

$$\varrho \sum_{x,y} (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-1-\varrho}$$

für alle Formen einer und derselben Determinante einen bestimmten von dieser allein abhängigen Werth S hat, wenn $\varrho = 0$ gesetzt wird, so ist bei der obigen Bestimmung von f in der That:

$$\sum_{x,y} f(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2^\varkappa \cdot S \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem (a, b, c) zu dem gegebenen Genus gehört oder nicht. Benutzt man diese Function f in der Gleichung (IV), so erhält die linke Seite derselben den Werth: $H \cdot S$, während die rechte Seite gleich: $2^\varkappa \cdot G \cdot S$ wird, wenn G die gesuchte Anzahl der in dem gegebenen Genus enthaltenen Klassen bedeutet. Dieselbe wird demnach durch die Relation:

$$2^\varkappa \cdot G = H$$

bestimmt, aus welcher zugleich die Anzahl der Genera resultirt.

Für die Erledigung des zweiten der oben erwähnten drei Punkte sind die *Dirichlet*schen Methoden bisher noch nicht benutzt worden; sie sind aber in der That auch darauf anwendbar und ergeben in bemerkenswerther Weise eine directe Bestimmung der Anzahl aller derjenigen Klassen, durch welche Quadrate darstellbar sind, d. h. solche, die keinen Theiler mit $2D$ gemein haben. Es können nämlich alle diese Klassen offenbar durch Formen (A^2, B, C) repräsentirt werden, in denen A eine ungrade keinen Primfactor der Determinante enthaltende ganze Zahl ist. Die Anzahl aller dieser Formen sei G und das Product sämmtlicher in $2D, A, A', A'', \ldots$ enthaltenen verschiedenen Primzahlen sei gleich P. Setzt man nun fest, daß durch $[x, y]$ der Werth *Eins* oder *Null* bezeichnet werden soll, je nachdem die beiden Zahlen x, y relativ prim sind oder nicht, so kann die obige Gleichung (II) mit Beibehaltung von μ und $\psi(\mu)$ in folgender Weise dargestellt werden:

$$\tau \sum \psi(\mu) \cdot f(\mu) = \sum [x, y] f(ax^2 + 2bxy + cy^2).$$

Für die auf a, b, c, x, y bezügliche Summation gelten hierbei die auf pag. 234 angegebenen Bestimmungen, und wenn man in denselben für den Fall einer positiven Determinante

$$t + u\sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^2$$

setzt, so erhält τ sowohl für positive als auch für negative Determinanten den Werth *Zwei*. Es ist also bei diesen Festsetzungen:

$$2 \sum \psi(\mu) \cdot f(\mu) = \sum [x, y] f(ax^2 + 2bxy + cy^2), \tag{V}$$

während in der Gleichung:

$$\text{(VI)} \qquad \tau' \sum \psi(\mu) \cdot f(\mu) = \sum [\xi, \eta] f(a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2)$$

der Factor τ', je nachdem D negativ oder positiv ist, den Werth *Zwei* oder *Eins* erhalten muß, wenn man die für x, y aufgestellten Bedingungen auch für die Summationsbuchstaben ξ, η gelten läßt, jedoch mit der Maßgabe, daß darin für positive Determinanten

$$t + u\sqrt{D} = T + U\sqrt{D}$$

angenommen wird.

Man kann die Formen (a, b, c) so wählen, daß sämmtliche Formen (A^2, B, C) darunter vorkommen; ferner kann man unter $f(n)$ eine solche Function der ganzen Zahl n verstehen, die verschwindet, sobald n kein vollständiges Quadrat ist, die aber für jede Quadratzahl n den Werth: $(\sqrt{n})^{-1-\varrho}$ erhält. Alsdann bleiben auf der rechten Seite der Gleichung (V) nur diejenigen Glieder übrig, welche die Formen (A^2, B, C) enthalten, und es wird, da offenbar $\psi(\mu^2) = \psi(\mu)$ ist,

$$2 \sum \psi(\mu) \cdot \mu^{-1-\varrho} = \sum [x, y] (A^2 x^2 + 2Bxy + Cy^2)^{-\frac{1}{2}(1+\varrho)},$$

wo nunmehr zu den für x, y geltenden Bedingungen noch die hinzukommt, daß $A^2 x^2 + 2Bxy + Cy^2$ ein vollständiges Quadrat sein muß. Andrerseits ergiebt die Gleichung (VI), wenn darin $f(z) = z^{-1-\varrho}$ genommen wird:

$$\tau' \sum \psi(\mu) \cdot \mu^{-1-\varrho} = \sum [\xi, \eta] (a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2)^{-1-\varrho},$$

so daß also die Relation:

$$2 \sum [\xi, \eta] (a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2)^{-1-\varrho} = \tau' \sum [x, y] (A^2 x^2 + 2Bxy + Cy^2)^{-\frac{1}{2}(1+\varrho)}$$

stattfindet. Der Grenzwerth der in Beziehung auf ξ, η allein genommenen Summe:

$$\varrho \sum [\xi, \eta] (a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2)^{-1-\varrho},$$

für $\varrho = 0$, ist von den Coefficienten a, b, c unabhängig. Derselbe ist, wenn man ihn mit R bezeichnet, durch die Gleichung:

$$\pi^2 \cdot R = 3\tau' \lambda \cdot \Pi \left(\frac{p - \varepsilon}{p + 1}\right)$$

bestimmt, in welcher λ, p, ε die auf pag. 236—237 angegebene Bedeutung haben. Es ist daher:

$$\text{(VII)} \qquad 2RH = \tau' \varrho \sum [x, y] (A^2 x^2 + 2Bxy + Cy^2)^{-\frac{1}{2}(1+\varrho)},$$

wenn man die auf A, B, C, x, y bezügliche Summation unter den angegebenen Modalitäten ausführt und alsdann $\varrho = 0$ setzt.

Zum Zwecke der erwähnten Summation sind vor Allem die Bedingungen zu ermitteln, unter denen der Werth der Form ein vollständiges Quadrat, also

$$A^2 x^2 + 2Bxy + Cy^2 = \mu^2$$

wird. Da zugleich weder $A\mu$ und $2D$ noch auch A und μ einen gemeinsamen Theiler haben sollen, so folgt aus der Gleichung:

$$(A^2 x + By + A\mu)(A^2 x + By - A\mu) = Dy^2,$$

daß die beiden Factoren auf der linken Seite resp. gleich:

$$\frac{2}{r} d \cdot \theta^2, \quad \frac{2}{r} \delta \cdot \eta^2$$

sein müssen, wo η, θ, d, δ ganze Zahlen bedeuten, für deren letztere $d \cdot \delta = D$ ist, und wo $r = 1$ oder 2 genommen werden muß, je nachdem y grade oder ungrade ist. Die Zahlen η, θ, A, μ können als positiv vorausgesetzt werden, während die Vorzeichen von d und δ nur durch die Gleichung: $d \cdot \delta = D$ zu beschränken sind. Da nun:

$$rA^2 x = d\theta^2 - 2B\theta\eta + \delta\eta^2, \quad ry = 2\theta\eta$$

wird, so folgt: $d\theta \equiv B\eta \bmod. A$, und also, wenn man B ungrade voraussetzt und mit ε eine durch die Congruenz $d\varepsilon \equiv 1 \bmod. A$ definirte ungrade Zahl bezeichnet:

$$\theta = B\eta\varepsilon + Ar\xi.$$

In den hier aufgestellten Gleichungen für x, y, θ sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür enthalten, daß der Werth des Ausdrucks: $A^2 x^2 + 2Bxy + Cy^2$ ein vollständiges Quadrat werde; nämlich wenn für d, δ irgend welche der Gleichung: $d\delta = D$ genügende Zahlen und für ξ, η irgend welche beliebige ganze Zahlen gesetzt und alsdann x und y in der angegebenen Weise bestimmt werden, so ist:

$$A^2 x^2 + 2Bxy + Cy^2 = (l\xi^2 + 2m\xi\eta + n\eta^2)^2,$$

wo der Kürze halber die drei ganzen Zahlen:

$$drA, \; d\varepsilon B, \; \frac{d\varepsilon^2 B^2 - d}{rA}$$

beziehungsweise durch l, m, n bezeichnet sind. Demgemäß handelt es sich nur noch darum, diejenigen Bestimmungen für r, d, δ, ξ, η zu ermitteln, welche bewirken, daß

x und y auch die übrigen oben für die Summation aufgestellten Bedingungen erfüllen.

Was zuvörderst den Werth von r anlangt, so sieht man leicht, daß derselbe sowohl *Eins* als *Zwei* sein kann, wenn D durch 8 theilbar oder von der Form $4n + 3$ ist. In allen andern Fällen kann für r nur der Werth *Eins* angenommen werden. Was ferner die Wahl der beiden Divisoren der Determinante d und δ betrifft, so ergiebt eine einfache Diskussion der bei den Zahlen x, y, A, μ vorausgesetzten Eigenschaften hierfür die folgenden Bedingungen: erstens müssen d und δ den größten gemeinsamen Factor *Zwei* haben, wenn D grade ist und $r = 2$ angenommen wird; zweitens dürfen in allen übrigen Fällen d und δ gar keinen Theiler mit einander gemein haben; drittens sind d und δ dem Zeichen nach so zu bestimmen, daß d stets positiv ist. Endlich resultiren in ähnlicher Weise für ξ und η die einschränkenden Bestimmungen, daß sie relative Primzahlen sein und für den Fall positiver Determinanten den Ungleichheitsbedingungen:

$$l\xi + (m \pm \sqrt{D})\eta > 0,$$

$$1 \leqq \frac{l\xi + (m + \sqrt{D})\eta}{l\xi + (m - \sqrt{D})\eta} < \frac{T + U\sqrt{D}}{T - U\sqrt{D}}$$

genügen müssen, so wie daß der Werth von $l\xi^2 + 2m\xi\eta + n\eta^2$ keinen Primfactor von P enthalten darf.

Giebt man den Größen r, d, δ, ξ, η alle hiernach zulässigen Werthe, so erhält man alle durch die obigen Bedingungen gestatteten Systeme von Zahlen x, y und keine andern; und zwar erhält man jedes dieser Systeme sovielmal als der Werth von τ' angiebt d. h. einmal oder zweimal, je nachdem die Determinante positiv oder negativ ist. Denn die Zahlen d, δ, θ, η sind in dem ersteren Falle durch x, y eindeutig bestimmt, im zweiten aber so, daß für ein und dasselbe System d, δ die Zahlen θ, η und $-\theta, -\eta$ genommen werden können.

Aus vorstehenden Erörterungen folgt unmittelbar die Gleichung:

$$\tau' \sum [x, y](A^2x^2 + 2Bxy + Cy^2)^{-\frac{1}{2}(1+\varrho)} = \sum [\xi, \eta](l\xi^2 + 2m\xi\eta + n\eta^2)^{-1-\varrho},$$

wenn die Summation links über alle gestatteten Werthe von x, y ausgedehnt wird, rechts aber einerseits über alle zulässigen Werthe der in den Ausdrücken von l, m, n enthaltenen Zahlen r und d, andrerseits über alle den obigen Bedingungen

genügenden Zahlen ξ, η. Die in dieser Weise in Beziehung auf ξ, η allein genommene Summe:

$$\varrho \sum [\xi, \eta](l\xi^2 + 2m\xi\eta + n\eta^2)^{-1-\varrho}$$

hat aber für $\varrho = 0$ den oben definirten Werth R, da $m^2 - ln = D$ ist und die so eben für ξ, η aufgestellten Summationsbedingungen mit denjenigen genau übereinstimmen, welche auf pag. 240 für ξ, η festgesetzt worden sind. Hiernach wird für $\varrho = 0$, wenn die Anzahl der für r, d zu wählenden Werthsysteme mit N bezeichnet wird:

$$\tau'\varrho \sum [x, y](A^2x^2 + 2Bxy + Cy^2)^{-\frac{1}{2}(1+\varrho)} = N \cdot R,$$

und die rechte Seite dieser Gleichung ist noch mit G d. h. mit der Anzahl der Formen (A^2, B, C) zu multipliciren, wenn die Summation links nicht bloß über alle Werthe von x, y sondern auch über alle diejenigen von A, B, C ausgedehnt wird. Vergleicht man dieses Resultat mit demjenigen, welches durch die Gleichung (VII) ausgedrückt ist, so erhält man zur Bestimmung der gesuchten Zahl G die Relation:

$$NG = 2H,$$

in welcher nur noch der Werth von N näher zu untersuchen ist. — Zu diesem Zwecke bemerke man, daß die Anzahl der vermöge der obigen Bedingungen gestatteten Werthsysteme von d, δ gleich 2^{ϖ} ist, wenn durch ϖ die Anzahl der verschiedenen in der Determinante enthaltenen Primfactoren bezeichnet wird. Die Anzahl der zulässigen Werthe von r ist aber, wie schon oben erwähnt worden, gleich *Eins*, wenn $D \equiv 1, 2, 4, 5 \text{ mod. } 8$, und gleich *Zwei*, wenn $D \equiv 0, 3, 7 \text{ mod. } 8$ vorausgesetzt wird. Hiernach ist je nach den beiden unterschiedenen Fällen:

$$N = 2^{\varpi} \text{ oder } N = 2^{\varpi+1},$$

d. h. es wird, wenn die Zahl $\varkappa$ in dem auf pag. 238 definirten Sinne genommen wird, in jedem Falle $N = 2^{\varkappa+1}$. Die Zahl G wird somit durch die Gleichung:

$$2^{\varkappa} \cdot G = H$$

bestimmt und ist also identisch mit der oben gefundenen Anzahl der in jedem einzelnen Genus enthaltenen Klassen, welche dort ebenfalls mit G bezeichnet wurde. Die Anzahl aller derjenigen unter einander nicht äquivalenten Formen, welche die Eigenschaft haben, daß ungrade, keinen Factor der Determinante enthaltende Quadratzahlen durch dieselben dargestellt werden können, ist also gleich der Anzahl aller verschiedenen zum Hauptgenus gehörigen Formen; und da es einleuchtend ist, daß nur solche Formen die erwähnte Eigenschaft haben *können*, so folgt daß alle diese Formen auch eben jene Eigenschaft haben *müssen*.

Nachdem hiermit auch das zweite der drei oben angeführten Haupttheoreme mit Benutzung analytischer Methoden bewiesen worden, läßt sich das erste derselben, welches die Anzahl der ambigen Klassen bestimmt, mit Hilfe der Theorie der Composition leicht ableiten. Man bedarf hierzu nämlich bloß des Begriffes der Composition von *Klassen*, welcher sich sehr einfach auseinandersetzen läßt, wenn man aus den zu componirenden Klassen solche Formen auswählt, deren mittlerer Coefficient identisch ist. Werden alsdann die ambigen Klassen als solche definirt, die mit sich selbst zusammengesetzt die Hauptklasse ergeben, so kann man sich im Wesentlichen der bei *Gauß* vorkommenden rein arithmetischen Schlüsse bedienen, um die Identität der Anzahl der Ambigen und der Genera nachzuweisen.

ÜBER QUADRATISCHE FORMEN VON NEGATIVER DETERMINANTE

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1875. S. 223—236.

ÜBER QUADRATISCHE FORMEN VON NEGATIVER DETERMINANTE.[1])

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 19. April 1875.]

Es sei wie in meinem Aufsatze in *Borchardt*'s Journal, Bd. 57. pag. 248[2]):

$G(n)$ die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen für die Determinante $-n$,

$F(n)$ die Anzahl der verschiedenen Classen *solcher* quadratischen Formen der Determinante $-n$, in welchen wenigstens einer der beiden äusseren Coefficienten ungrade ist,

$\Phi(n)$ die Summe der Divisoren von n,

$\Psi(n)$ der Betrag, um welchen die Summe der Divisoren von n, die grösser als $\sqrt{n}$ sind, die Summe derjenigen übersteigt, die kleiner als $\sqrt{n}$ sind,

und es seien ferner die Functionen E, F, G folgendermassen definirt:

$$\mathrm{F}(4n) = F(4n),\ \mathrm{F}(n) = \tfrac{1}{2}F(4n)$$

$$\mathrm{G}(4n) = \mathrm{F}(4n) + \mathrm{G}(n)$$

$$\mathrm{G}(4n+1) = \mathrm{F}(4n+1), \quad \mathrm{G}(4n+2) = \mathrm{F}(4n+2)$$

$$3\,\mathrm{G}(8n+3) = 4\mathrm{F}(8n+3), \quad \mathrm{G}(8n+7) = 2\mathrm{F}(8n+7)$$

$$\mathrm{E}(n) = 2\mathrm{F}(n) - \mathrm{G}(n).$$

Alsdann ergeben die a. a. O. mit (II), (III), (V), (VI) bezeichneten Formeln den Werth der Summe

$$\sum_h \varepsilon^h \mathrm{F}(n-h^2) \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

---

[1]) Vgl. Zusatz 70 am Ende dieses Bandes. H

[2]) Bd. IV S. 187 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

erstreckt über alle Zahlen $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, deren Quadrat kleiner als die positive Zahl n ist, gleich

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}(n-1)}\{\Phi(n) + \varepsilon\Psi(n)\} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{3}(1+\varepsilon)\Phi(n),$$

je nachdem n ungrade oder das Doppelte einer ungraden Zahl ist. Aber der Werth der Summe

$$\sum_h (-1)^h \mathrm{F}(n - 4h^2),$$

erstreckt über alle Zahlen $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, deren Quadrat kleiner als $\frac{1}{4}n$ ist, geht aus den a. a. O. aufgestellten Formeln nur für den Fall hervor, wo $n \equiv 3$ mod. 4 ist, und zwar ist dieser Werth dann, wie sich durch Combination der Formeln (IV), (V) und (VI) ergiebt, gleich

$$\frac{1}{2}(-1)^{\frac{1}{4}(n-3)}\{\Phi(n) - \Psi(n)\}.$$

Es ist mir nun gelungen, die Lücke, welche sich hier zeigt, auszufüllen, und den Werth jener Summe auch für die Fälle $n \equiv 1$ und $n \equiv 2$ mod. 4 zu ermitteln.

Bezeichnet man mit m eine positive ungrade Zahl, so hat man gemäss den Formeln (II) und (III) meines oben citirten Aufsatzes

$$\sum_h \mathrm{F}(2m - 4h^2) = \sum_h \mathrm{F}(2m - (2h+1)^2) = \Phi(m),$$

wo die Summationen über alle Zahlen $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ auszudehnen sind, wofür die Argumente der Function F positiv sind. Multiplicirt man diese Gleichungen mit $q^{\frac{1}{2}m}$ und summirt alsdann über alle positiven ungraden Zahlen m, so erhält man vermöge der Formel 39. pag. 106 von *Jacobi*'s *Fundamenta nova theoriae Functionum Ellipticarum*[1]):

$$\sum_m \sum_h \mathrm{F}(2m - 4h^2)q^{\frac{1}{2}m} = \sum_m \sum_h \mathrm{F}(2m - (2h+1)^2)q^{\frac{1}{2}m} = \frac{kK^2}{\pi^2}$$

und hieraus, wie ich bereits im Monatsberichte vom Mai 1862 pag. 309[2]) angegeben habe,

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{F}(4n+2)q^n = q^{-\frac{1}{2}}\frac{kK}{\pi}\sqrt{\frac{K}{2\pi}},$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{F}(4n+1)q^n = q^{-\frac{1}{4}}\frac{K}{\pi}\sqrt{\frac{kK}{2\pi}}.$$

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 162. H

[2]) Bd. IV, S. 204 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Werden nun diese beiden Gleichungen mit $\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$ multiplicirt und alsdann die Formeln 6, 7, 8, 9 pag. 184[1]) von *Jacobi*'s *Fundamenta* benutzt, so kommt

$$\sum_n \sum_{n_1} (-1)^{n_1}\mathrm{F}(4n+2)q^{n_1^2+n+\frac{1}{2}} = \sum_m \sum_{m_1} (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} m q^{\frac{1}{4}(m^2+m_1^2)}$$

$$2\sum_n \sum_{n_1} (-1)^{n_1}\mathrm{F}(4n+1)q^{n_1^2+n+\frac{1}{4}} = \sum_m \sum_{n_1} (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} m q^{\frac{1}{4}(m^2+n_1^2)},$$

$$(m, m_1 = 1, 3, 5, 7, \ldots;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots;\ n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

und aus der Vergleichung der Coefficienten der einzelnen Potenzen von q folgt für jede positive ganze Zahl n, welche $\equiv 1$ oder 2 mod 4 ist, die Relation:

$$\text{(A)} \qquad 2\sum_h (-1)^h \mathrm{F}(n - 4h^2) = \sum_m m.$$

Die Summe links ist hier auf alle Zahlen $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ zu erstrecken, für welche $h^2 < \frac{1}{4}n$ ist, rechts dagegen nur auf alle diejenigen positiven oder negativen Zahlen m, welche durch 4 dividirt den Rest 1 lassen, und wofür $n = l^2 + m^2$ ist; dabei ist die Zahl m sovielmal zu nehmen, als es zugehörige Werthe von l giebt, d. h. also nur einmal, wenn $l = 0$ ist, aber zweimal, sobald l von Null verschieden ist. Bezeichnet man die zahlentheoretische Function von n, welche auf der rechten Seite der Gleichung (A) steht, mit $\Omega(n)$, so findet sich der Werth der Summe

$$2\sum_h (-1)^h \mathrm{F}(n - 4h^2)$$

durch

$$\Omega(n) \quad \text{oder} \quad (-1)^{\frac{1}{4}(n-3)}(\Phi(n) - \Psi(n))$$

ausgedrückt, je nachdem n durch 4 dividirt die Reste 1, 2 oder den Rest 3 lässt, und es ist auch überhaupt, wenn ω irgend eine achte Wurzel der Einheit bedeutet, die Summe

$$\sum_h \omega^{h^2}\mathrm{F}(n - h^2) \qquad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ h^2 < n)$$

durch die arithmetischen Functionen $\Omega(n), \Phi(n), \Psi(n)$ darstellbar.

Der zahlentheoretische Character der Function $\Omega(n)$ unterscheidet sich zwar wesentlich von dem der Functionen $\Phi(n), \Psi(n)$, aber es ist doch auch eine

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 235—236. H

gewisse Analogie zwischen diesen beiden Arten von Functionen zu bemerken. Da nämlich

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\Omega(4n+1)q^n = 2\sqrt{\frac{kk'}{\sqrt{q}}}\cdot\frac{K^2}{\pi^2}$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\Omega(4n+2)q^n = 2\sqrt{\frac{k'}{q}}\cdot\frac{kK^2}{\pi^2}$$

ist, so kommt, wenn man die erste Gleichung mit $\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$ und die zweite mit $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ multiplicirt:

$$\sum_{n,n_1}\Omega(4n+1)q^{n+n_1+n_1^2} = \sum_{n,n_1}\Omega(4n+2)q^{n+n_1^2} \qquad (n, n_1 = 0, 1, 2, \ldots),$$

und beide Doppelsummen sind mit Hilfe der Formel (13) p. 104[1]) der *Fundamenta* durch

$$2\sum_{n,n_1}(-1)^n\frac{(2n_1+1)\,q^{n^2+n_1}}{1-q^{2n_1+1}} \qquad (n, n_1 = 0, 1, 2, \ldots)$$

oder

$$2\sum_{n,n_1}(-1)^n\Phi(2n_1+1)q^{n^2+n_1} \qquad (n, n_1 = 0, 1, 2, \ldots)$$

darzustellen. Hieraus resultiren die Gleichungen

$$\sum_g\Omega(4n+2-g^2) = \sum_u\Omega(4n+2-u^2) = 2\sum_h(-1)^h\Phi(2n+1-2h^2)$$

$$(g = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots;\ u = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots;\ h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

und es folgt die Recursionsformel

$$3\sum_h\Omega(4n+2-4h^2) = 2\sum_h(-1)^h\Phi(4n+2-4h^2), \qquad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ 4n+2 > 4h^2)$$

in welcher sich offenbar eine gewisse Analogie zwischen den Functionen Ω und Φ zu erkennen giebt.*) Eine formale Analogie zwischen den Functionen Ω und Ψ zeigt sich aber auch darin, dass für $\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ in den drei Fällen $n \equiv 1, 2, 3 \bmod. 4$ resp.

$$\sum\varepsilon^{\frac{1}{2}(m-1)}m = \Omega(n),\quad \Omega(n),\quad \Psi(n)$$

*) In der einfacheren Gestalt, welche der obigen Recursionsformel auf der übernächsten Seite gegeben wird, tritt die Analogie zwischen den Funktionen Ω und Φ noch deutlicher hervor.

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 160.

wird, wenn man die Summation links auf alle positiven ungraden Zahlen m erstreckt, für welche $n + \varepsilon m^2$ ein vollständiges Quadrat ist, und dabei jede Zahl m, für welche $n + \varepsilon m^2 > 0$ ist, zweimal nimmt.

Da die Functionen $\Omega(4n+1)$, $\Omega(4n+2)$ als Entwickelungscoefficienten auftreten, wenn die Quadrate der Ausdrücke

$$\sum_n q^{2n^2+n}\sum_n(-1)^n q^{2n^2},\quad \sum_n q^{4n^2+2n}\sum_n(-1)^n q^{2n^2} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

nach Potenzen von q entwickelt werden, so erhält man mit Hilfe der Formeln (5) (6) pag. 103[1]) der *Fundamenta* für die beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\Omega(4n+1)q^{4n+1},\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}\Omega(4n+2)q^{2n+1}$$

resp. die beiden Ausdrücke

$$\left\{1 - 4\sum_m\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}q^{8m}}{1+q^{8m}}\right\}\sum_m\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}q^m}{1-q^{2m}}$$

$$\left\{1 - 4\sum_m\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}q^{4m}}{1+q^{4m}}\right\}\sum_m\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}q^m}{1-q^{2m}} \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots)$$

und hieraus die für jede positive, nicht durch 4 theilbare Zahl n geltende Relation:

$$\Omega(n) = 2(3 + (-1)^n)\sum_h(-1)^h\varphi(h)\varphi(n-8h) \qquad \left(0 \leq h < \tfrac{n}{8}\right),$$

wenn, wie in meinem oben citirten Aufsatze in *Borchardt*'s Journal, $\varphi(n)$ der Betrag ist, um welchen die Anzahl der Divisoren von der Form $4k+1$ die Anzahl derjenigen von der Form $4k-1$ übersteigt und $\varphi(0) = \frac{1}{4}$ gesetzt wird, so dass überhaupt $4\varphi(n)$ die Gesammtanzahl der Darstellungen von n als Summe zweier Quadrate bedeutet.

Da jeder Darstellung einer ungraden Zahl n als Summe zweier Quadrate $n = l^2 + m^2$ eine Darstellung von $2n$, nämlich $2n = (l+m)^2 + (l-m)^2$ entspricht, so lässt sich die Function $\Omega(2n)$ unmittelbar auf $\Omega(n)$ reduciren, und zwar wird

$$(-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}\Omega(2n) = 2\Omega(n).$$

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 159.

Bemerkt man überdies, dass $\Omega(2n)$ und $\Omega(n)$ gleich Null sind, sobald $n \equiv 3 \bmod 4$ ist, so lässt sich die oben aufgestellte Recursionsformel auf die einfachere Gestalt bringen:

$$\pm \sum_h (-1)^h \Omega(m - 2h^2) = \sum_h (-1)^h \Phi(m - 2h^2) \qquad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

wo links für $m \equiv \pm 1 \bmod 8$ das obere, für $m \equiv \pm 3 \bmod 8$ aber das untere Zeichen zu nehmen ist. — Die Function $\Omega(n)$, welche nunmehr nur für ungrade Zahlen n zu betrachten ist, kann auch in einfacher Weise durch die in der Zahl n enthaltenen complexen Primfactoren von der Form $a + bi$ dargestellt werden. Ist nämlich

$$n = r^2 (a_1 + b_1 i)^{\lambda_1 - 1} (a_2 + b_2 i)^{\lambda_2 - 1} \ldots,$$

wo r nur reelle Primzahlen von der Form $4k - 1$ enthält und $a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \ldots$ lauter complexe Primzahlen in der primären Form bedeuten, d. h. lauter solche, für welche $a \equiv 1 \bmod 4$ ist,*) so wird

$$\Omega(n) = (-1)^{\frac{1}{2}(r-1)} r \prod_k \frac{(a_k + b_k i)^{\lambda_k} - (a_k - b_k i)^{\lambda_k}}{2 b_k i} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

oder, wenn $\frac{a_k + b_k i}{a_k - b_k i} = e^{v_k i}$ gesetzt wird,

$$\Omega(n) = \sqrt{n} \prod_k \frac{\sin \lambda_k v_k}{\sin v_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

die Quadratwurzel positiv oder negativ genommen, je nachdem $r \equiv +1$ oder $-1 \bmod 4$ ist. Falls auch nur für *einen* Primfactor von der Form $4k - 1$ die höchste in n enthaltene Potenz ungrade ist, hat $\Omega(n)$ den Werth Null.

Aus der Addition der Formeln (V) und (VI) meines mehrfach citirten Aufsatzes in *Borchardt*'s Journal (Bd. 57) resultirt unmittelbar die bereits im Monatsberichte von 1862 pag. 309[1]) aufgestellte Gleichung**):

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{F}(8n + 3) q^{2n} = \left(\frac{kK}{2\pi\sqrt{q}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

*) Der Ausdruck „primär“ ist hier im *Dirichlet*schen Sinne genommen (cf. *Crelle*'s Journal Bd. 24, pag. 301[2])).

**) Die Gleichung kommt schon in dem *Hermite*schen Aufsatze vor, welcher in den Comptes Rendus vom 5. August 1861 abgedruckt ist (Bd. 53, pag. 226).

[1]) Bd. IV, S. 204 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) *Dirichlet*, Werke, Bd. I, S. 545. H

Es ist daher, wenn in üblicher Weise

$$\vartheta_0(q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2}, \quad \vartheta_3(q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2}$$

$$\vartheta_2(q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sum_0^{\infty} q^{n^2+n}, \quad \vartheta_1'(q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sum_0^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{n^2+n}$$

gesetzt wird:[1])

$$(\mathfrak{A}) \qquad 4 \sum_0^{\infty} \mathrm{F}(4n + 2) q^{n + \frac{1}{2}} = \vartheta_2^2(q) \vartheta_3(q)$$

$$(\mathfrak{B}) \qquad 4 \sum_0^{\infty} \mathrm{F}(4n + 1) q^{n + \frac{1}{4}} = \vartheta_2(q) \vartheta_3^2(q)$$

$$(\mathfrak{C}) \qquad 8 \sum_0^{\infty} \mathrm{F}(8n + 3) q^{2n + \frac{3}{4}} = \vartheta_2^3(q).$$

Wird die Gleichung ($\mathfrak{C}$) mit $\vartheta_0(q^2)$ multiplicirt, so kommt, da

$$\vartheta_2^2(q) = 2\vartheta_2(q^2)\vartheta_3(q^2) \quad \text{und} \quad \vartheta_1'(q^2) = \vartheta_0(q^2)\vartheta_2(q^2)\vartheta_3(q^2)$$

ist:

$$4\vartheta_0(q^2) \sum_0^{\infty} \mathrm{F}(8n + 3) q^{2n + \frac{3}{4}} = \vartheta_2(q) \vartheta_1'(q^2),$$

und wenn hierin die Reihen für $\vartheta_0(q^2), \vartheta_2(q), \vartheta_1'(q^2)$ eingesetzt werden, so resultirt die für $n = 8k + 3$ geltende Formel:

$$(\mathrm{B}) \qquad \Sigma(-1)^h \mathrm{F}(n - 8h^2) = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} m,$$

wo die Summe links auf alle Zahlen $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ zu erstrecken ist, für welche $8h^2 < n$ ist, rechts aber auf alle diejenigen positiven Zahlen m, für welche $n - 2m^2$ ein vollständiges Quadrat, also

$$n = l^2 + 2m^2$$

ist. — Combinirt man die Gleichung*)

$$12 \sum_0^{\infty} \mathrm{E}(n) q^n = \vartheta_3^3(q)$$

*) cf. *Borchardt*'s Journal Bd. 57 pag. 253.[2])

[1]) Vgl. Zusatz 71 am Ende dieses Bandes. H
[2]) Bd. IV, S. 193 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

mit der obigen Formel (𝔄), so kommt:

$$12\sum_0^\infty \mathrm{E}(n)q^n - 4\sum_0^\infty \mathrm{F}(4n+2)q^{n+\frac{1}{2}} = \vartheta_0\left(q^{\frac{1}{4}}\right)\vartheta_3\left(q^{\frac{1}{4}}\right)\vartheta_3(q),$$

und wenn diese Gleichung mit $\vartheta_2\left(q^{\frac{1}{4}}\right)$ multiplicirt und dann q^4 statt q gesetzt wird,

$$12\vartheta_2(q)\sum_0^\infty \mathrm{E}(n)q^{4n} - 4\vartheta_2(q)\sum_0^\infty \mathrm{F}(4n+2)q^{4n+2} = \vartheta_3(q^4)\vartheta_1'(q).$$

Vergleicht man hierin die Coefficienten der einzelnen Potenzen von q und benutzt alsdann die Formel

$$4\sum_h \mathrm{F}(m-h^2) = \Psi(m) \qquad {\scriptstyle (h=1,3,5,\ldots)},$$

welche für $m \equiv 1 \bmod 4$ aus den Formeln (V) und (VI) meines Aufsatzes hervorgeht, so erhält man die für jede Zahl $s = 8k+1$ geltende Relation:

$$\text{(C)} \qquad \sum_h \left\{8\mathrm{F}\left(\frac{s-h^2}{16}\right) - 3\mathrm{G}\left(\frac{s-h^2}{16}\right)\right\} = \frac{1}{8}\Psi(s) + \frac{1}{4}\Omega(s),$$

in welcher ganz ebenso wie in der Formel (VIII) meines mehrerwähnten Aufsatzes für h alle positiven ganzen Zahlen zu nehmen sind, für die das Argument der Functionen F und G ganz und nicht negativ wird, und welche auch im Übrigen eine gewisse Analogie mit der angeführten älteren Formel darbietet.

Durch Subtraction der Gleichung (ℭ) von (𝔅) erhält man, wenn q^4 an Stelle von q genommen wird:

$$4\sum_0^\infty c_n \mathrm{F}(2n+1)q^{2n+1} = \vartheta_0(q)\vartheta_3(q)\vartheta_2(q^4)$$

und also

$$4\vartheta_2(q)\sum_0^\infty c_n \mathrm{F}(2n+1)q^{2n+1} = \vartheta_1'(q)\vartheta_2(q^4),$$

wo für

$$n \equiv -1,\ +1,\ 0,\ 2 \bmod 4$$

resp.

$$c_n = 0,\ -2,\ 1,\ 1$$

zu nehmen ist. Vergleicht man hierin die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von q mit einander und benutzt alsdann die Relation

$$12\sum_h \mathrm{E}\left(\frac{s'-h^2}{4}\right) = \Phi(s') \qquad {\scriptstyle (h=1,3,5,\ldots)},$$

so gelangt man zu der für jede Zahl $s' = 8k+5$ geltenden Formel:

$$\text{(D)} \qquad 32\sum_h \mathrm{F}\left(\frac{s'-h^2}{4}\right) = \Phi(s') - 3\,\Omega(s'),$$

in welcher die Summation nur auf diejenigen ungraden Zahlen h zu erstrecken ist, für welche das Argument der Function F durch 8 dividirt den Rest 3 lässt. Für $s' = 325$ ist z. B. nur $h = 5$ und $h = 11$ zu nehmen und die zugehörigen Werthe sind

$$\mathrm{F}(75) = 7, \quad \mathrm{F}(51) = 6,$$

während aus den Darstellungen

$$325 = 1^2 + 18^2 = 15^2 + 10^2 = 17^2 + 6^2$$

$$\Omega(325) = 2(1 - 15 + 17)$$

resultirt und $\Phi(325) = 434$ wird.

Um die durch Einführung der Function Ω ermöglichte Vervollständigung meiner älteren Formeln genauer darlegen zu können, muss ich zuvörderst einige Verbindungen aus jenen Relationen (I) bis (VIII) herleiten, welche ich in meinem Aufsatze im 57. Bande von *Borchardt*'s Journal[1]) angegeben habe. Wird aus den Formeln (IV), (V), (VI) die durch

$$\frac{1}{6}\text{(IV)} - \frac{5}{16}\text{(V)} + \frac{1}{16}\text{(VI)}$$

angedeutete Verbindung gebildet, so kommt für $s \equiv 1 \bmod 8$:

$$\text{(Q)} \qquad \sum_h \mathrm{G}\left(\frac{s-h^2}{16}\right) = -\frac{1}{12}\Phi(s) + \frac{1}{8}\Psi(s),$$

und hieraus folgt mit Hilfe der obigen Gleichung (C) die correspondirende Formel:

$$\text{(P)} \qquad \sum_h \mathrm{F}\left(\frac{s-h^2}{16}\right) = -\frac{1}{32}\Phi(s) + \frac{1}{16}\Psi(s) + \frac{1}{32}\Omega(s),$$

wo die Summationen stets, wie überall im Folgenden, nur auf alle diejenigen positiven Zahlen h zu erstrecken sind, wofür die Argumente $\frac{1}{16}(s-h^2)$ ganz werden. Die Verbindung der beiden Formeln (P) und (Q) ergiebt:

$$\sum_h \mathrm{E}\left(\frac{s-h^2}{16}\right) = \frac{1}{48}\Phi(s) + \frac{1}{16}\Omega(s),$$

[1]) Bd. IV, S. 188 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

also eine Relation, welche, da $\mathrm{E}(4n) = \mathrm{E}(n)$ ist, einer auf der vorhergehenden Seite für $s' \equiv 5 \bmod 8$ angegebenen entspricht. — Führt man nunmehr zur Abkürzung die durch die Gleichung

$$\mathrm{G}(n) - \mathrm{F}(n) = \mathrm{H}(n)$$

definirte Function H ein, welche offenbar auch an sich eine Bedeutung als Classenanzahl quadratischer Formen hat, so ist:

$$\mathrm{H}(0) = -\tfrac{1}{12}$$

$$\mathrm{H}(4n) = \mathrm{G}(n) \text{ für jede beliebige Zahl } n,$$

ferner $\quad \mathrm{H}(n) = 0, \quad 3\mathrm{H}(n) = \mathrm{F}(n), \quad \mathrm{H}(n) = \mathrm{F}(n),$

je nachdem $\quad n \equiv 1, 2 \bmod 4, \quad n \equiv 3 \bmod 8, \quad n \equiv 7 \bmod 8$

ist, und die Formel (VIII) nimmt die Gestalt an:

$$\text{(R)} \qquad 3\Sigma\mathrm{H}(l) - 3\Sigma\mathrm{H}(m) + \Sigma\mathrm{F}(l) - \Sigma\mathrm{F}(m) = -\tfrac{1}{2}\Sigma d_0 + \tfrac{1}{2}\Sigma d_1,$$

wenn mit l alle positiven graden und mit m alle positiven ungraden Zahlen bezeichnet werden, wofür $s - 16l$ oder $s - 16m$ ein vollständiges Quadrat, also

$$16l + h^2 = s, \quad 16m + h^2 = s \qquad (s \equiv 1 \bmod 8)$$

wird, und wenn d_0 und d_1 die sämmtlichen positiven Divisoren von s bedeuten, die kleiner als $\sqrt{s}$ sind, und zwar d_0 nur alle diejenigen, wofür d_0 seinem complementären Divisor $\frac{d_0}{s}$ mod 16 congruent ist. Dabei muss jedoch, falls s ein vollständiges Quadrat ist, der Werth $d_0 = \frac{1}{2}\sqrt{s}$ hinzugenommen werden. Hiernach ergeben sich unmittelbar aus den durch

$$-(P) + \tfrac{2}{3}(Q) \pm \tfrac{1}{2}(R), \quad -2(P) + \tfrac{3}{2}(Q) \pm \tfrac{1}{2}(R)$$

angedeuteten Formel-Verbindungen die vier einfachen Relationen:

$$\text{(S)} \qquad \begin{aligned} 3\Sigma\mathrm{H}(l) + \Sigma\mathrm{F}(l) &= -\tfrac{1}{2}\Sigma d_0 + \tfrac{1}{32}(\Phi(s) - \Omega(s)), \\ 3\Sigma\mathrm{H}(m) + \Sigma\mathrm{F}(m) &= -\tfrac{1}{2}\Sigma d_1 + \tfrac{1}{32}(\Phi(s) - \Omega(s)), \\ 3\Sigma\mathrm{H}(l) - \Sigma\mathrm{F}(m) &= -\tfrac{3}{8}\Sigma d_0 + \tfrac{1}{8}\Sigma d_1 - \tfrac{1}{16}\Omega(s), \\ 3\Sigma\mathrm{H}(m) - \Sigma\mathrm{F}(l) &= -\tfrac{3}{8}\Sigma d_1 + \tfrac{1}{8}\Sigma d_0 - \tfrac{1}{16}\Omega(s), \end{aligned}$$

durch welche auf der linken Seite von (R) einzelne Theile gesondert bestimmt werden, und welche daher eine wesentliche Vervollständigung der früheren Formeln enthalten.

Vermöge der für die Function $\mathrm{H}(n)$ bestehenden fundamentalen Relationen reducirt sich die Summe $\Sigma H(l)$ auf

$$\sum_k \mathrm{G}\left(\frac{s-k^2}{16}\right),$$

wo die Summation auf alle diejenigen positiven Zahlen k zu erstrecken ist, für welche das Argument von G ganz und nicht negativ wird. Durch Addition der Gleichung (P) und der ersten von den vier Gleichungen (S) resultirt demgemäss die Formel:

$$\sum_h \mathrm{F}\left(\frac{s-h^2}{16}\right) + \sum_i \mathrm{F}\left(\frac{s-i^2}{4}\right) + 3\sum_k \mathrm{G}\left(\frac{s-k^2}{64}\right) = \tfrac{1}{16}\Psi(s) - \tfrac{1}{2}\Sigma d_0,$$

in welcher die Summationen auf alle positiven Zahlen h, i, k zu erstrecken sind, die kleiner als $\sqrt{s}$ sind und für welche

$$s \equiv h^2 + 16 \bmod 32, \quad s \equiv i^2 \bmod 32, \quad s \equiv k^2 \bmod 64$$

wird; da aber für den Fall, dass s ein vollständiges Quadrat ist, durch die beschränkende Summations-Bedingung $k < \sqrt{s}$ das Glied $3\mathrm{G}(0)$ ausgeschlossen wird, so muss in dem erwähnten besondern Falle auf der rechten Seite der Werth $\frac{1}{4}$ hinzugefügt werden. Die angegebene Formel ist nichts Anderes als eine durch

$$\tfrac{1}{4}(\mathrm{IV}) - \tfrac{15}{32}(\mathrm{V}) + \tfrac{3}{32}(\mathrm{VI}) - \tfrac{1}{8}(\mathrm{VIII})$$

angedeutete Combination meiner älteren Formeln, und sie geht für den speciellen Fall, wo $s = n^2$ und n Primzahl ist, in eine *Hermite*'sche Formel über, welche von Hrn. *Stephen Smith* in einem seiner trefflichen, mit vorzüglicher Sachkenntniss abgefassten Berichte besonders hervorgehoben worden ist.*) Die drei Summen auf der linken Seite der Formel sind für $s = n^2$ der Reihe nach identisch mit denjenigen, welche Hr. *Stephen Smith* durch

$$\Sigma_1 \mathrm{F}(\Delta), \quad \Sigma_2 \mathrm{F}(\Delta), \quad \Sigma_3 \mathrm{G}(\Delta)$$

bezeichnet, und auf der rechten Seite kommt, da

$$\Psi(n^2) = n^2 - 1, \quad \sum d_0 = \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}\left(1 + (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}\right),$$

*) Report of the thirty-fifth meeting of the British Association for the advancement of science. London 1866. Report on the Theory of Numbers. p. 365.

wird, der Ausdruck: $$\frac{1}{16}(n^2-1)-\frac{1}{4}\left(n+\left(\frac{2}{n}\right)\right),$$

übereinstimmend mit demjenigen, welchen Hr. *Hermite* angegeben und Hr. *Stephen Smith* in dem erwähnten Berichte aufgenommen hat.

Da ich wusste, dass die *Hermite*'sche Formel aus derselben Quelle gewonnen war, wie die sämmtlichen acht Formeln für die Classenanzahlen quadratischer Formen von negativer Determinante, welche ich im 57. Bande von *Borchardt*'s Journal[1]) aufgestellt habe, so war ich gewiss, dass jene Formel durch eine Combination dieser darzustellen sein musste, wie sehr auch dem äusseren Anscheine nach der Charakter jener Formel sich von dem der meinigen abweichend zeigte.*) Die Aufsuchung einer die *Hermite*'sche Formel ergebenden Combination der meinigen wurde mir aber wesentlich erleichtert durch die Erkenntniss, dass Hr. *Hermite* bei seinen bezüglichen Betrachtungen nur zu solchen Formeln gelangen konnte, für welche die Ausgangszahl n der verschiedenen Determinanten

$$-n, \quad -(n-1^2), \quad -(n-2^2), \quad -(n-3^2), \quad \ldots$$

ein vollständiges Quadrat ist. Übrigens habe ich schon in meiner Notiz im Monatsberichte vom Mai 1862[2]) ausdrücklich hervorgehoben, dass in den mehrerwähnten acht Formeln alle diejenigen explicite enthalten sind, welche aus der Theorie der singulären Moduln der elliptischen Functionen hergeleitet werden können, nämlich dadurch, dass man in irgend welchen Modulargleichungen die beiden Moduln einander gleich setzt. *Diese* Quelle arithmetischer Relationen für die Classenanzahlen quadratischer Formen war also mit jenen acht Formeln erschöpft, aber andre Quellen liefern doch, wie ich in den vorstehenden Entwickelungen gezeigt habe, noch neue ähnliche Relationen, die freilich — wie bemerkt werden muss — zur Summation der Reihen von Classenanzahlen höhere arithmetische Functionen erfordern als jene elementaren Divisorensummen, welche ausschliesslich in meinen älteren Formeln auftreten. In allen diesen Relationen wird nämlich ein Aggregat von Classenanzahlen quadratischer Formen von negativen Determinanten, die eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, unmittelbar durch eine zahlentheoretische Function des Anfangsgliedes ausgedrückt, und die Natur dieser Functionen ist bei den neueren Formeln eine wesentlich andere und complicirtere als bei den älteren. Es bleibt daher immer noch *möglich*, dass ausser jenen acht Formeln überhaupt keine andern existiren, in denen nur die einfacheren, aus den Divisoren zusammengesetzten zahlentheoretischen Functionen zur Summation von Classenanzahlen gebraucht werden, dass also jene Formeln nicht bloss in Bezug auf die Methode, mittels deren sie ursprünglich hergeleitet sind, sondern auch an und für sich ihrem Inhalte nach ein abgeschlossenes System von Relationen bilden. Bis jetzt wenigstens hat der Weg, welchen Hr. *Hermite* in seinen beiden Artikeln in den Comptes Rendus vom August 1861[1]) und Juli 1862[2]) eingeschlagen, sowie der im Wesentlichen damit übereinstimmende Entwickelungsgang, welchen ich damals zu einer neuen Verification meiner Formeln benutzt und im Monatsbericht vom Mai 1862 veröffentlicht habe[3]), zu keinem Resultate geführt, welches jener Möglichkeit widerspräche. Ob aber derartige Resultate etwa schon implicite in den zahlentheoretischen Aufsätzen des Hrn. *Liouville* enthalten sind, muss ich dahingestellt sein lassen; denn ausdrücklich ist darin nur an einzelnen Stellen von Classenanzahlen quadratischer Formen die Rede, und ich vermag nicht zu übersehen, ob irgend welche der sonst darin vorkommenden interessanten Resultate auch für diese Classenanzahlen eine Bedeutung gewinnen können.

*) Hr. *Stephen Smith* sagt a. a. O. p. 364 mit Recht: And it is certain that the system of the eight formulae does, in this sense, explicitly contain all the relations of similar form, which have been subsequently given by MM. Hermite and Joubert. Ferner aber pag. 365 in Bezug auf die im Text erwähnte *Hermite*'sche Formel: One formula, however, has been obtained by Mr. Hermite from his investigation of the discriminant of the modular equation, which is entirely distinct in form, and as it would seem in substance, from those of M. Kronecker.

[1]) Bd. IV, S. 188 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. IV, S. 206 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[1]) *Hermite*, Oeuvres T. II, P. 109. H
[2]) *Hermite*, Oeuvres T. II, P. 241. H
[3]) Bd. IV, S. 197 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

ÜBER DIE ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN, VON DENEN DIE THEILUNG DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN ABHÄNGT

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
vom Jahre 1875. S. 498—507 und 1876. S. 242.

ÜBER DIE ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN, VON DENEN DIE THEILUNG DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN ABHÄNGT.[1])

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 19. Juli 1875.]

Der Affect derjenigen Gleichungen vom Grade $\frac{1}{2}(n^2-1)$, deren Wurzeln in der *Jacobi*'schen Bezeichnungsweise die Quadrate von

$$\sin \operatorname{am} \frac{2mK+2m'K'i}{n} \qquad \begin{pmatrix} m=0,1,\ldots n-1;\; m'=1,\ldots \frac{1}{2}(n-1) \\ m=1,\ldots \frac{1}{2}(n-1);\; m'=0 \end{pmatrix}$$

sind, ist meines Wissens bisher noch nicht bestimmt worden, obgleich diese Bestimmung oder, wie es in der *Galois*'schen Ausdrucksweise heissen würde, die Ermittelung der Gruppe der Gleichung offenbar eine ganz fundamentale Bedeutung für den algebraischen Theil der Theorie der elliptischen Functionen hat.*) Freilich würde die bezügliche Untersuchung auch ganz besondere Schwierigkeiten darbieten, wenn keinerlei Anhaltspunkte dafür vorhanden wären; aber das Endresultat lässt sich fast unmittelbar aus zwei werthvollen Notizen ableiten, die beinahe seit einem halben Jahrhundert in einem *Abel*'schen und einem *Jacobi*'schen Aufsatze gedruckt vorliegen, und die Kenntniss des Zieles erleichterte mir wesentlich die Auffindung des Weges.

Versteht man unter g alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, unter h die sämmtlichen positiven und negativen *ungraden* Zahlen und setzt nach *Jacobi* (Fundamenta pag. 85)

$$e^{\frac{-\pi K'}{K}} = q,$$

ferner

$$\sqrt{\varkappa} = \frac{\Sigma q^{\frac{1}{4}h^2}}{\Sigma q^{g^2}}, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\Sigma q^{\frac{1}{4}nh^2}}{\Sigma q^{ng^2}},$$

---

*) Hr. *C. Jordan* hat in seinem Traité des Substitutions pag. 343 die bezeichnete Frage zwar erwähnt, ist aber nicht näher darauf eingegangen.

[1]) Vgl. Zusatz 72 am Ende dieses Bandes.

die Summationen resp. auf alle Zahlen g und h bezogen, so sind $\varkappa$ und λ zwei Moduln elliptischer Functionen und der eine der transformirte des andern. Die Zahl n, welche die Ordnung der Transformation angiebt, sei ungrade, ferner sei q_0 irgend ein bestimmter Werth von $q^{\frac{1}{n}}$, $i = \sqrt{-1}$ und

$$e^{\frac{2\pi i}{n}} = \omega, \quad q_r = \omega^r q_0.$$

Alsdann sind auch n von den transformirten Moduln durch die Gleichung

$$\sqrt{\lambda_r} = \frac{\Sigma q_r^{\frac{1}{4}h^2}}{\Sigma q_r^{g^2}} \qquad (r = 0, 1, \ldots n-1)$$

bestimmt. Setzt man noch $\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ und

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{\varepsilon n} \cdot \frac{\Sigma q^{n g^2}}{\Sigma q^{g^2}}, \quad \sqrt{\mu_r} = \frac{\Sigma q_r^{g^2}}{\Sigma q^{g^2}} \qquad (r = 0, 1, \ldots n-1),$$

so sind die Grössen μ die Multiplicatoren bei der Transformation der elliptischen Functionen und stimmen mit denjenigen überein, welche *Jacobi* im III. Bande von *Crelle*'s Journal pag. 308[1]) mit M sonst aber und namentlich in den Formeln der Fundamenta überall mit $\frac{1}{M}$ bezeichnet hat. Dies vorausgeschickt geht der Quotient

$$\frac{\sum\limits_r \omega^{-4rs^2} \sqrt{\lambda_{4r} \mu_{4r}}}{\sum\limits_r \omega^{-4rs^2} \sqrt{\lambda \mu_{4r}}} \qquad (r = 0, 1 \ldots n-1)$$

bei Ausführung der Summationen im Zähler und Nenner in

$$\frac{\sum\limits_h q^{\frac{1}{4}nh^2 + sh}}{\sum\limits_g q^{ng^2 + 2sg}}$$

über*), und es resultirt bei Anwendung der Bezeichnungen der Fundamenta die Formel

$$(\mathfrak{A}) \qquad \frac{\sum\limits_r \omega^{-4rs^2} \sqrt{\lambda_{4_r} \mu_{4_r}}}{\sum\limits_r \omega^{-4rs^2} \sqrt{\lambda \mu_{4_r}}} = \sin \operatorname{coam}\left(\frac{2s\Lambda' i}{n}, \lambda\right) \qquad (r = 0, 1, \ldots n-1).$$

*) Die Ausdrücke $\sum q^{ng^2 + 2sg}$ sind für $s = 0, 1 \cdots \frac{1}{2}(n-1)$ den $\frac{1}{2}(n+1)$ Größen Δ proportional, welche bei *Jacobi* a. a. O. (*Crelle*'s Journal III pag. 308)[1]) vorkommen.

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 261.

H

Gemäss den Formeln 15 und 21 pag. 101 der Fundamenta[1]) ist nun:

$$\frac{\varepsilon \lambda \Lambda}{\pi} \sin \operatorname{coam}\left(\frac{2s\Lambda' i}{n}, \lambda\right) = \sum_h \sum_{h'} (-1)^{\frac{1}{2}(h-1)} q^{\frac{1}{2}nhh'} (q^{hs} + q^{-hs}),$$

$$\frac{\varkappa K}{\pi} \cos \operatorname{am} \frac{4rK}{n} = 2 \sum_h \sum_{h''} (-1)^{\frac{1}{2}(h-1)} q^{\frac{1}{2}hh''} \cos \frac{2rh''\pi}{n},$$

wo die auf h, h', h'' bezüglichen Summationen auf alle *positiven* ungraden Zahlen zu erstrecken sind, und also

$$\varepsilon \varkappa K \sum_{r=0}^{r=n-1} \cos \frac{4rs\pi}{n} \cos \operatorname{am} \frac{4rK}{n} = n \lambda \Lambda \sin \operatorname{coam}\left(\frac{2s\Lambda' i}{n}, \lambda\right),$$

da bei der Summation in Beziehung auf die n Werthe von r alle diejenigen Theile

$$2 \sum_r \cos \frac{4rs\pi}{n} \cos \frac{2rh''\pi}{n}$$

oder

$$\sum_r \cos \frac{2r(h''+s)\pi}{n} + \sum_r \cos \frac{2r(h''-s)\pi}{n}$$

wegfallen, in denen $h'' + s$ oder $h'' - s$ nicht durch n theilbar ist, so dass, wenn die ganze Zahl $s < \frac{1}{2} n$ vorausgesetzt wird, nur diejenigen Werthe von h'' beizubehalten sind, für welche resp.

$$h'' = nh' - 2s, \quad h'' = nh' + 2s$$

und h' irgend eine positive ungrade Zahl ist. Es ist hier im Anschluss an die Bezeichnungen der Fundamenta

$$\Lambda = \frac{\mu K}{n}, \quad \Lambda' = \mu K'$$

gesetzt. Die entwickelte Formel und die ganz ebenso abzuleitende für *sin am* kann man auch folgendermaassen darstellen:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} \sum_{r=0}^{r=n-1} \sin \frac{4rs\pi}{n} \sin \operatorname{am} \frac{4rK}{n} &= \frac{i\lambda\mu}{\varkappa} \sin \operatorname{am}\left(\frac{2s\Lambda' i}{n}, \lambda\right) \\ \sum_{r=0}^{r=n-1} \cos \frac{4rs\pi}{n} \cos \operatorname{am} \frac{4rK}{n} &= \frac{\varepsilon\lambda\mu}{\varkappa} \sin \operatorname{coam}\left(\frac{2s\Lambda' i}{n}, \lambda\right), \end{aligned}$$

und diese Formeln gelten für jede beliebige ganze Zahl s, auch für $s = 0$. Sie ver-

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 157.

H

wandeln sich bei Anwendung der Transformations-Gleichungen No. 16 sqq. p. 48 der Fundamenta[1]) in folgende:

$$\text{(Ia)}\qquad \begin{aligned} \sum_{r=0}^{r=n-1} \sin\frac{4rs\pi}{n}\sin\operatorname{am}\frac{4rK}{n} &= i\sum_{r=0}^{r=n-1}\sin\operatorname{am}\frac{4rK+2sK'i}{n} \\ \sum_{r=0}^{r=n-1} \cos\frac{4rs\pi}{n}\cos\operatorname{am}\frac{4rK}{n} &= \varepsilon\sum_{r=0}^{r=n-1}\sin\operatorname{coam}\frac{4rK+2sK'i}{n}, \end{aligned}$$

welche auch direct auf dem angegebenen Wege mit Hilfe der Entwickelungen No. 15, 19 und 21 pag. 101 der Fundamenta[2]) verificirt werden können. Endlich führt dieselbe Methode zu der Gleichung

$$\text{(II)}\qquad \Sigma\omega^{4rs}\sin\operatorname{am}\frac{4rK+4sK'i}{n}=0,$$

in welcher die Summation entweder auf die n Werthe $r = 0, 1, \ldots n-1$ oder auf die n Werthe $s = 0, 1, \ldots n-1$ zu erstrecken ist. Die Gleichung (II) kommt schon bei *Abel* in *Crelle*'s Journal Bd. IV p. 241[3]) (Oeuvres complètes I p. 331) vor, nur dass a. a. O. die mit sin am multiplicirten $n$ten Wurzeln der Einheit nicht näher bestimmt sind. Die Gleichung repräsentirt, wenn in Beziehung auf r summirt wird, $(n-1)$ Gleichungen für die $(n-1)$ Werthe $s = 1, 2, \ldots n-1$ und ergiebt also die $n$ten Wurzeln der Einheit rational (als Quotienten von Determinanten) dargestellt durch die Wurzeln der betreffenden Theilungsgleichung der elliptischen Functionen. — Die Formeln (I) und (II) lassen sich auch aus der *Jacobi*'schen Formel No. 1 im 4. Bande des *Crelle*'schen Journals pag. 190[4]) ableiten oder auch aus derjenigen, welche Hr. *Hermite* im 32. Bande desselben Journals p. 287[5]) angegeben hat, und welche zu jener *Jacobi*'schen Formel führt.

Die oben zuerst entwickelte Formel ($\mathfrak{A}$) geht mit Benutzung der letzteren von den beiden Formeln I in folgende über:

$$\frac{\varepsilon\lambda\mu}{\varkappa}\cdot\frac{\sum\limits_r\omega^{-4rs^2}\sqrt{\lambda_{4r}\mu_{4r}}}{\sum\limits_r\omega^{-4rs^2}\sqrt{\lambda\mu_{4r}}}=\sum_r\cos\frac{4rs\pi}{n}\cos\operatorname{am}\frac{4rK}{n},$$

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 99. H
[2]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 157. H
[3]) *Abel*, Oeuvres T. I, p. 523. H
[4]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 272. H
[5]) *Hermite*, Oeuvres T. I, p. 18 et seq. H

und hieraus folgt eine bemerkenswerthe Darstellung von Wurzeln der Theilungsgleichung durch die der Modulargleichung:

$$\text{(III)}\qquad \cos\operatorname{am}\frac{4tK}{n}=\frac{\varepsilon\lambda\mu}{\varkappa n}\sum_s\cos\frac{4st\pi}{n}\cdot\frac{\sum\limits_r\omega^{-4rs^2}\sqrt{\lambda_{4r}\mu_{4r}}}{\sum\limits_r\omega^{-4rs^2}\sqrt{\lambda\mu_{4r}}}\qquad (r, s=0, 1, \ldots n-1).$$

Aus der identischen Gleichung am Ende von pag. 47[1]) der Fundamenta folgt mit Hilfe der ersten der beiden Formeln (I), dass der Ausdruck

$$\text{(IV)}\qquad z\prod_r\left(z^2-\sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n}\right)+2i\sum_t\sin\frac{4st\pi}{n}\sin\operatorname{am}\frac{4tK}{n}\cdot\prod_r\left(z^2-\frac{1}{\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n}}\right)$$
$$\left(r, t=1, 2, \cdots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

mit dem Producte

$$\prod_r\left(z-\sin\operatorname{am}\frac{4rK+2sK'i}{n}\right)\qquad (r=0, 1, \ldots n-1)$$

vollständig übereinstimmt. Jener Ausdruck (IV) verschwindet also für $z=\sin\operatorname{am}\frac{2sK'i}{n}$ und *es ist daher* $\sin\operatorname{am}\frac{2sK'i}{n}$ *Wurzel einer Gleichung* n*ten Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von*

$$e^{\frac{2\pi i}{n}},\ \varkappa^2\ \text{ und }\ \sin\operatorname{am}\frac{2K}{n}$$

sind. Die Gleichung ist eine *Abel*'sche und es geht unmittelbar aus derselben hervor, dass für jede beliebige Zahl r und s

$$\sin\operatorname{am}\frac{4rsK+2sK'i}{n}$$

sich als das Product zweier Factoren darstellen lässt, von denen der eine

$$\sum_{t=1}^{t=n-1}\omega^{2st}\sin\operatorname{am}\frac{4tK}{n},$$

der andere eine rationale Function der Grössen

$$\varkappa^2,\ \lambda^2,\ \sin^2\operatorname{am}\frac{4rsK+2sK'i}{n}$$

ist. Daraus folgt, dass das Verhältniss der beiden Producte

$$\prod_s\sin\operatorname{am}\frac{4rsK+2sK'i}{n},\quad \prod\sin\operatorname{am}\frac{2sK}{n}\qquad \left(s=1, 2, \cdots \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 98. H

und also auch jeder Quotient

$$\sqrt{\frac{\mu_{4r}}{\mu}},\ \sqrt{\frac{\lambda_{4r}\mu_{4r}}{\lambda\mu}} \qquad (r=0,1,\ldots n-1)$$

sich als rationale Function der Grössen

$$\varkappa^2,\ \lambda^2,\ \lambda^2_{4r}$$

ausdrücken lässt. Die Formel (III) ergiebt hiernach $\sin^2 \operatorname{am} \frac{2K}{n}$ als rationale Function von

$$e^{\frac{2\pi i}{n}},\ \varkappa^2,\ \lambda^2,\ \lambda^2_0,\ \lambda^2_1,\ \ldots\ \lambda^2_{n-1}$$

dargestellt, und zwar ist dieselbe in Bezug auf die letzten n Grössen λ^2 cyklisch, wie aus den algebraischen Eigenschaften der Modulargleichung vorauszusehen war. Dass eine solche Darstellung möglich ist, hat schon *Jacobi* im *Crelle*'schen Journal Bd. 4 pag. 193[1]) Art. VI erwähnt und in einem seiner Briefe an *Legendre*[2]) (*Borchardt*'s Journal Bd. 80 pag. 257) als bemerkenswerth hervorgehoben, ohne jedoch irgend eine Andeutung über die Herleitungsweise beizufügen. Dass an beiden citirten Orten sin am selbst steht, muss auf einem Versehen beruhen; denn es ist klar, dass nur das *Quadrat* von sin am als rationale Function der Moduln ausdrückbar ist, da der Affect der Modulargleichung bekanntlich für eine Primzahl n von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ ist, und also die Ordnung jeder algebraischen Function von $\varkappa$, die eine rationale Function der $(n+1)$ Moduln λ ist, nur ein Theiler von $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ sein kann.

Die Existenz einer *Abel*'schen Gleichung $n$ten Grades für $\sin \operatorname{am} \frac{2K'i}{n}$, deren Coëfficienten rationale Functionen von ω, $\varkappa^2$ und $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{n}$ sind, führt unmittelbar zum Affect der Theilungsgleichung oder des primitiven Factors derselben, welcher nur alle diejenigen Wurzeln

$$\sin \operatorname{am} \frac{4rK+2sK'i}{n}$$

enthält, bei denen nicht alle drei Zahlen n, r, s einen gemeinsamen Theiler haben. Die Anzahl dieser Wurzeln ist nämlich, wenn sämmtliche Primfactoren von n mit p bezeichnet werden,

$$n^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

---

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 275. H

[2]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 436. H

und es ist daher bei Adjunction der $n$ten Wurzel der Einheit ω die Ordnung des Affects oder der Grad des irreductibeln Theils des Gleichungssystems

$$y = \sin \operatorname{am} \frac{2K}{n},\ z = \sin \operatorname{am} \frac{2K'i}{n}$$

höchstens gleich dem $n$fachen jener Zahl d. h. höchstens gleich

$$n^3\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

Nun ist aber die Anzahl der verschiedenen Lösungen der Congruenz

$$ad - bc \equiv 1 \bmod n$$

genau gleich eben jener Zahl

$$n^3\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right);$$

denn für $n = p^\alpha$ giebt es $p^{3\alpha-1}(p-1)$ Lösungen, bei denen a prim zu p ist und b, c beliebig sind und noch $p^{3\alpha-2}(p-1)$ Lösungen, bei denen a durch p theilbar, b prim zu p und d beliebig ist, und aus je zwei Lösungen zweier Congruenzen

$$a_1d_1 - b_1c_1 \equiv 1 \bmod n_1,\ a_2d_2 - b_2c_2 \equiv 1 \bmod n_2$$

lässt sich, falls n_1 und n_2 relativ prim sind, eine Lösung der Congruenz

$$ad - bc \equiv 1 \bmod n_1n_2$$

zusammensetzen. Da ferner der irreductible Theil jenes Gleichungssystems in der That für alle Werthsysteme

$$(\mathfrak{B}) \qquad y = \sin \operatorname{am} \frac{2aK+2bK'i}{n},\ z = \sin \operatorname{am} \frac{2cK+2dK'i}{n}$$

erfüllt sein muss, bei denen $ad - bc \equiv 1 \bmod n$ ist, also der Grad desselben oder die Ordnung des Affects *mindestens* gleich

$$n^3\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$$

sein muss, so giebt diese Zahl genau die Ordnung des Affects an. Wenn daher $F(y^2, \varkappa^2) = 0$ den primitiven Factor der Theilungsgleichung und $\Phi(y, z, \varkappa^2, \omega)$ den Ausdruck IV bedeutet, sofern man sich darin $\sin \operatorname{am} \frac{2rK}{n}$ und $\sin \operatorname{am} \frac{4tK}{n}$ als rationale Functionen von $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{n}$ und $\varkappa^2$ ausgedrückt und alsdann $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{n}$ durch y ersetzt denkt, so genügen dem Gleichungssystem

$$F(y^2, \varkappa^2) = 0,\quad \Phi(y, z, \varkappa^2, \omega) = 0$$

jene

$$n^3 \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Werthe ($\mathfrak{B}$) und keine andern, und es ist dabei in dem Sinne irreductibel, dass kein System von Gleichungen in y, z, deren Coefficienten rational in $\varkappa$ sind, durch die Werthe

$$y = \sin \operatorname{am} \frac{2K}{n}, \quad z = \sin \operatorname{am} \frac{2K'i}{n}$$

befriedigt werden kann, ohne zugleich die sämmtlichen Werthsysteme ($\mathfrak{B}$) zu enthalten. — Ist n Primzahl und also $F(y^2, \varkappa^2)$ in Beziehung auf y vom Grade $(n^2 - 1)$, so zerfällt F bei Adjunction von $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{n}$ in $(n-1)$ lineare Factoren und in $(n-1)$ Factoren vom Grade n; die letzteren unterscheiden sich untereinander nur durch die $(n-1)$ verschiedenen $n$ten Wurzeln der Einheit, und jeder derselben ist durch den Ausdruck IV gegeben, wenn darin die Variable z durch y ersetzt wird.

Die Gleichung $F(x, \varkappa^2) = 0$, deren Wurzeln $x = \sin^2 \operatorname{am} \frac{2K}{n}$ etc. sind, ist vom Grade

$$\frac{1}{2} n^2 \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

hat also einen Affect von der Ordnung

$$\frac{1}{2} n^3 \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

und da sich, wie schon *Jacobi* ausgesprochen hat, die Wurzeln x durch die Wurzeln der Modulargleichung rational ausdrücken lassen, so muss der Affect der Gleichung $F(x, \varkappa^2) = 0$ mit demjenigen des primitiven Factors der Modulargleichung übereinstimmen. Diese primitive Gleichung ist vom Grade

$$n \prod_p \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

und da die Ermittelung ihres Affects keine Schwierigkeiten bietet, so konnte aus dem *Jacobi*'schen Ausspruche, wie oben in den einleitenden Worten erwähnt worden ist, auf den Affect der Theilungsgleichung geschlossen werden. Ebenso konnte aus den schon bei *Abel* vorkommenden Gleichungen (II) a priori die Existenz einer Gleichung

$$\Phi\left(\sin \operatorname{am} \frac{2K}{n}, \sin \operatorname{am} \frac{2K'i}{n}, \varkappa^2, \omega\right) = 0$$

erschlossen werden; denn setzt man in (II) die Zahl $s = \frac{1}{2}(n+1)$, und denkt man sich alsdann die sin am darin als rationale Functionen von

$$\sin \operatorname{am} \frac{2K}{n}, \sin \operatorname{am} \frac{2K'i}{n}, \varkappa^2$$

ausgedrückt, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\Psi\left(\sin \operatorname{am} \frac{2K}{n}, \sin \operatorname{am} \frac{2K'i}{n}, \varkappa^2, \omega\right) = 0,$$

und man ersieht unmittelbar, dass die beiden Gleichungen

$$F(z^2, \varkappa^2) = 0, \quad \Psi\left(\sin \operatorname{am} \frac{2K}{n}, z, \varkappa^2, \omega\right) = 0$$

nur die n Wurzeln

$$z = \sin \operatorname{am} \frac{4rK + 2K'i}{n} \qquad (r = 0, 1, \ldots n-1)$$

gemein haben können, dass also wirklich eine Gleichung

$$\Phi\left(\sin \operatorname{am} \frac{2K}{n}, z, \varkappa^2, \omega\right) = 0$$

existiren muss, welche in Beziehung auf z vom Grade n ist.

Die fundamentale Natur der Theilungsgleichung zeigt sich vor Allem darin, dass ihre Discriminante nur wesentliche Factoren oder nur Factoren der Discriminante der Gattung enthält, diesen Ausdruck in dem Sinne genommen wie im Monatsbericht von 1874 pag. 447.[1]) Geht man nämlich von den zwei Hauptformeln für die Θ-Function aus, welche in *Jacobi*'s Fundamenta auf pag. 145 mit No. 2[2]) und auf pag. 152 mit No. 3[3]) bezeichnet sind, so gelangt man unmittelbar zu der Gleichung[4])

$$\prod_{m, m'} \left(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} \frac{4mK + 4m'K'i}{n}\right) = \Theta(0)^{n^2-1} \cdot \frac{\Theta(nu)}{\Theta(u)^{n^2}},$$
$$\left(1 \leqq m < \tfrac{1}{2}n,\ 0 \leqq m' < n \text{ und } m = 0,\ 1 \leqq m' < \tfrac{1}{2}n\right)$$

und hieraus folgt mittels der Additionsformel

$$\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am} v = \sin \operatorname{am}(u+v) \sin \operatorname{am}(u-v)(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v),$$

[1]) Bd. I, S. 483 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 198. H

[3]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 204. H

[4]) Vgl. Zusatz 73 am Ende dieses Bandes. H

dass das Product der sämmtlichen $\frac{1}{4}(n^2-1)(n^2-3)$ Differenzen der $\frac{1}{2}(n^2-1)$ Grössen

$$\varkappa \sin^2 \mathrm{am} \frac{2mK + 2m'K'i}{n} \qquad \left(\begin{matrix} m=0;\ m'=1,2,\ldots \frac{1}{2}(n-1) \\ 0<m<\frac{1}{2}n;\ 0 \leqq m' < n \end{matrix}\right)$$

gleich[1])

$$(\varepsilon n)^{\frac{1}{2}(n^2-3)} \left(4\varkappa - \frac{4}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{12}(n^2-1)(n^2-3)}$$

ist. Die Discriminante der Theilungsgleichung ergiebt daher nur die wirklich kritischen Werthe $\varkappa = \infty, 0, \pm 1$, während die Discriminanten abgeleiteter Gleichungen wie z. B. die der Modular- und Multiplicator-Gleichungen noch ausserwesentliche Factoren enthalten, die als solche für die Gattung algebraischer Functionen von $\varkappa$, welche durch die Gleichung definirt werden, ohne alle Bedeutung sind. Das angedeutete Verhältniss ist ganz ähnlich, wie das der Gleichung $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1 = 0$ (p Primzahl) zu den daraus abgeleiteten Gleichungen für die *Gauss*'schen Perioden. Wenn bei den Modulargleichungen grade auch die ausserwesentlichen Factoren der Discriminante insofern eine Bedeutung haben, als sie für die singulären Werthe des Moduls verschwinden, so liegt dies nur darin, dass zwei verschiedene transformirte Moduln für die Ordnung n aus einander durch eine Transformation der Ordnung n^2 entstehen, und dass überhaupt die Gleichsetzung eines Moduls mit einem transformirten zu jenen Moduln führt, welche ich singuläre genannt habe. Aber die Beschränkung auf eine *quadratische* Ordnungszahl ist hierbei ganz unwesentlich und in Beziehung auf tiefere algebraische und arithmetische Untersuchungen sogar nachtheilig.

NACHTRÄGLICHE NOTIZ VOM 10. APRIL 1876.

In einem aus Christiania vom 4. April d. J. datirten Briefe macht Hr. *Sylow* mich darauf aufmerksam, dass er bereits vor einigen Jahren die Frage behandelt habe, welche in meiner Mittheilung vom 19. Juli v. J. den Ausgangspunkt bildet. Hr. *Sylow* hat die Güte gehabt, mir gleichzeitig einen Separatabdruck seiner mir bis dahin unbekannt gebliebenen Notiz (*Om den Gruppe af Substitutioner, der tilhorer Ligningen for Division af Perioderne ved de elliptiske Funktioner. Af L. Sylow. Saerskilt aftrykt af Vidensk.-Selsk. Förhandlinger for 1871.*) zu übersenden und eine deutsch geschriebene Erläuterung beizufügen. Daraus ersehe ich, dass die *Sylow*'sche Deduction ganz auf den in meiner Abhandlung (Monatsbericht 1875. S. 501)[2]) mit

[1]) Vgl. Zusatz 74 am Ende dieses Bandes. H
[2]) Bd. IV, S. 266 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

(II) bezeichneten *Abel*schen Formeln beruht und ihrem eigentlichen Inhalte nach mit der Betrachtung übereinstimmt, welche ich dort in der Einleitung angedeutet und auf S. 506[1]) (Zeile 9 bis 21) vollständig ausgeführt habe. Diese Deduction führt allerdings zur Bestimmung des Affects der Theilungsgleichung, denn sie zeigt, wie aus jenen *Abel*schen Formeln a priori die Existenz einer Gleichung zu erschliessen ist, deren Wurzeln die n Grössen

$$\sin \mathrm{am} \frac{4rK + 2K'i}{n} \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1)$$

und deren Coëfficienten rationale Functionen von $\sin \mathrm{am} \frac{2K}{n}$, $\varkappa^2$ und ω sind, aber für die wirkliche Aufstellung dieser Gleichung, für die Ermittelung ihrer Eigenschaften und für die Wiederauffindung jener damit zusammenhängenden (schon von *Jacobi* angegebenen) Eigenschaften der Modulargleichung bedurfte es anderweiter Hülfsmittel der Untersuchung.

[1]) Bd. IV, S. 271 (Zeile 1 bis 12) dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

ÜBER DEN VIERTEN GAUSS'SCHEN BEWEIS DES RECIPROCITÄTSGESETZES FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1880. S. 686—698 und S. 854—860.

ÜBER DEN VIERTEN GAUSS'SCHEN BEWEIS DES RECIPROCITÄTS-GESETZES FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 29. Juli und 28. Oktober 1880].

Gauß hat im Art. 33 seiner Abhandlung *Summatio quarumdam serierum singularium*[1]) (19. September 1808) das Reciprocitätsgesetz für die quadratischen Reste als eine Folge der in den vorhergehenden Artikeln erlangten vollständigen Werthbestimmung jener Reihen, die jetzt als *Gauß*sche bezeichnet werden, aufgezeigt, ohne aber die eigentliche Quelle der algebraischen Identitäten anzugeben, welche den Ausgangspunkt der ganzen Entwickelungen bilden. Als nun im Jahre 1837 *Dirichlet* im 17. Bd. des *Crelle*schen Journals[2]) die *Gauß*schen Reihen mittels bestimmter Integrale summirte und im letzten Paragraphen seines Aufsatzes die *Gauß*sche Ableitung des Reciprocitätsgesetzes reproducirte, konnte man wohl in den *Dirichlet*schen Integral-Betrachtungen eine neue Beweismethode für dieses Fundamentaltheorem der Theorie der quadratischen Reste sehen. Wenige Jahre nach *Dirichlet*, im Jahre 1840, hat aber *Cauchy* im V. Bande des *Liouville*schen Journals pag. 154 sqq. einen Aufsatz veröffentlicht, in welchem er die vollständige Bestimmung der *Gauß*schen Reihen aus einer von ihm früher publicirten Formel herleitete und eine werthvolle Bemerkung über einen daraus hervorgehenden Beweis des Reciprocitätsgesetzes daran knüpfte. *Cauchy* sagt in der Einleitung von jener Bestimmung: „. . . et cette détermination, comme l'ont observé MM. *Gauß* et *Dirichlet*, est un problème, qui présente de grandes difficultés. Les méthodes à l'aide desquelles on est parvenu jusqu'ici à surmonter cet obstacle, sont celles que M. *Gauß* a developpées dans son beau Mémoire, qui a pour titre: "summatio serierum quarundam singularium" et celle que M. *Dirichlet* a déduite de la considération des intégrales définies. En réfléchissant sur cette matière j'ai été assez heureux pour trouver d'autres moyens de parvenir au même but; et d'abord il est assez remarquable, que la formule de

---

[1]) *Gauß*, Werke, Bd. II, S. 11. H
[2]) *Dirichlet*, Werke, Bd. I, S. 259. H

Gauß, qui détermine complètement les sommes alternées avec leur signe, se trouve comprise comme cas particulier dans une autre formule que j'ai donnée en 1817 dans le Bulletin de la Société Philomatique. Cette dernière formule, qui parut digne d'attention à l'auteur de la Mécanique céleste, sert à la transformation d'une somme d'exponentielles dont les exposants croissent comme les carrés des nombres naturels; et lorsqu'on attribue à ces exposants des valeurs imaginaires, on retrouve avec la formule de M. *Gauß* la loi de réciprocité, qui existe entre deux nombres premiers." Dieser *Cauchy*sche Weg zur Bestimmung der *Gauß*schen Reihen führt auf die eigentliche Quelle der *Dirichlet*schen Methode; denn die Transformation der θ-Reihen, auf welche sich die *Cauchy*sche Entwickelung gründet, wird von *Jacobi* mittels derselben Methode hergeleitet, welche *Dirichlet* auf die Summation der Reihen

$$\sum_{i=0}^{i=q-1} \sin \frac{2i^2\pi}{q}, \qquad \sum_{i=0}^{i=q-1} \cos \frac{2i^2\pi}{q}$$

anwendet. Da nun bei *Cauchy* die θ-Reihen an der Grenze der Convergenz benutzt werden, so beschränkt sich der Unterschied zwischen der *Cauchy*schen und der *Dirichlet*schen Methode nur darauf, daß in der einen der Grenzübergang nach Herleitung der Transformationsformel, in der andern vorher gemacht wird. Aber die von *Cauchy* zuerst bemerkte Beziehung zwischen der linearen Transformation der θ-Reihen und der Werthbestimmung der *Gauß*schen Reihen ist noch enger, als wohl *Cauchy* vermuthet hat. Beides ist mit einander vollkommen äquivalent; denn es läßt sich nicht nur, wie bei *Cauchy*, die Werthbestimmung der *Gauß*schen Reihe aus der θ-Transformation sondern auch umgekehrt diese aus jener ableiten, und wenn dabei wiederum jene andern Entwickelungen *Cauchy*s zur Verwendung kommen, welche die Grundlagen der Functionentheorie bilden, so ist dies wohl geeignet, die Bedeutung *Cauchy*scher Forschungen für den Fortschritt der mathemetischen Erkenntniß in ein helles Licht zu setzen. Das Merkwürdige der erwähnten Beziehung zwischen der θ-Transformation und der Werthbestimmung der *Gauß*schen Reihen tritt aber noch mehr hervor, wenn man die nahe Beziehung der letzteren zum Reciprocitätsgesetz ins Auge faßt und darnach erkennt, daß durch die *Gauß*schen Reihen ein Zusammenhang zwischen der Transformationsgleichung der θ-Reihen und der Reciprocitätsgleichung für die quadratischen Reste vermittelt wird, der die beiden auf so ganz verschiedenen Gebieten liegenden Resultate als gewissermaaßen äquivalent zu bezeichnen gestattet.

Um den Zusammenhang klar zu legen, werde ich den bekannten *Cauchy*schen Satz in Kurzem entwickeln und alsdann auch die θ-Transformation unmittelbar darauf gründen.

Ist $f(x, y)$ eine eindeutige Function, deren erste und zweite Ableitungen in einem von einer geschlossenen Curve umgrenzten Gebiete durchweg endlich sind, so ist das über diese Curve erstreckte Integral $\int df(x, y)$ gleich Null.[1]) Wenn nämlich in einem Theilgebiete die Coordinaten x, y eindeutig als Functionen von r und s

$$x = \varphi(r, s), \quad y = \psi(r, s)$$

ausgedrückt werden, und zwar so, daß das Gebiet durch eine Schaar geschlossener Curven erfüllt ist, von denen jede dadurch charakterisirt ist, daß r fest bleibt und s von 0 bis 1 variirt, während die Schaar entlang r von 0 bis 1 geht, so sind die Punkte $x = \varphi(r, 0)$, $y = \psi(r, 0)$ durchweg mit den Punkten $x = \varphi(r, 1)$, $y = \psi(r, 1)$ identisch und die Begrenzung des Gebiets wird durch die beiden Curven

$$x = \varphi(0, s), \quad y = \psi(0, s)$$
$$x = \varphi(1, s), \quad y = \psi(1, s)$$

gebildet. Das über jenes Theilgebiet erstreckte Integral

$$\iint \frac{\partial^2 f(\varphi, \psi)}{\partial r\, \partial s}\, dr\, ds$$

wird daher, je nachdem mit der einen oder der andern Integration begonnen wird,

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{r=0}^{r=1} ds \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{s=0}^{s=1} dr,$$

und da der Werth von $\frac{\partial f}{\partial r}$ für $s = 0$ und $s = 1$ derselbe ist, so folgt, daß der Werth des Integrals

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{r=0}^{r=1} ds \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)_{r=0}^{r=1} ds$$

oder also des über die ganze Begrenzung des Theilgebietes erstreckten Integrals

$$\int df(x, y)$$

in der That verschwindet. Das ursprünglich gegebene Gesammtgebiet kann nun in lauter solche Theilgebiete zerlegt werden; es kann ferner angenommen werden, daß

[1]) Vgl. Zusatz 75 am Ende dieses Bandes.

die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ außerhalb des Gebietes überall den Werth Null haben. In Folge dessen kann jenes Resultat dahin formulirt werden, daß

$$\text{(I)} \qquad \int d f(x, y) = 0$$

wird, wenn die Integration über die gesammte „natürliche Begrenzung" erstreckt wird, d. h. über eine Linie, die alle Flächentheile aus- oder abschließt und alle Linien und Punkte umschließt, in denen die ersten und zweiten Ableitungen von f jene Bedingung, endliche Werthe zu haben, nicht erfüllen. Man sieht aber zugleich, daß unbeschadet des Resultats Theile der natürlichen Begrenzung weggelassen werden können, welche einzelne Punkte umschließen, in denen die ersten Ableitungen von f unstetig aber zugleich endlich sind, und solche, die ganze Linien von endlicher Länge umschließen, in denen die Bedingung der Endlichkeit der zweiten Ableitungen nicht mehr erfüllt ist, während die Stetigkeit der ersten Ableitungen bestehen bleibt. Für die nachher zu machende Anwendung ist aber noch hervorzuheben, daß für ein Gebiet, in welchem die Punkte durch

$$x = \varphi(r, s), \quad y = \psi(r, s); \qquad {\scriptstyle r=0 \text{ bis } 1,\ s=0 \text{ bis } 1,}$$

dargestellt sind, das Resultat

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{r=0}^{r=1} ds = 0$$

sich, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s} = \chi(r, s)$$

gesetzt wird, explicite folgendermaaßen darstellt:

$$\text{(II)} \qquad \lim_{n=\infty} \cdot \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{h=n-1} \lim_{r=1} \cdot \chi\left(r, \frac{h}{n}\right) - \lim_{n=\infty} \cdot \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{h=n-1} \lim_{r=0} \cdot \chi\left(r, \frac{h}{n}\right) = 0,$$

wobei die Reihenfolge der Grenzoperationen besonders zu beachten ist.

Schließlich ist daran zu erinnern, daß die *Cauchy*sche Darstellung der Function einer complexen Veränderlichen z:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

nur ein Corollar der vorstehenden Entwickelung ist, und daß hieraus wiederum ganz unmittelbar die Sätze folgen, daß wenn $F(z)$ auf der ganzen Begrenzung constant oder wenn es auch im Unendlichen durchweg endlich bleibt, es nothwendig überall constant sein muß.

Dies vorausgeschickt soll nunmehr die lineare Transformation der θ-Reihen mit Hülfe der *Cauchy*schen Betrachtungen entwickelt werden.[1])

Bedeutet u eine Größe, deren absoluter Betrag größer als Eins ist, so ist die auf alle unendlich vielen Werthe von $\log z$ bezügliche Summe

$$\sum u^{(\log z)^2}$$

eine eindeutige Function von z. Bezeichnet man dieselbe mit $F(z)$, so ist

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wenn die Integration im gewöhnlichen Sinne über einen Kreis mit dem Radius r und im entgegengesetzten Sinne über einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{r}$ erstreckt wird, vorausgesetzt, daß der absolute Betrag von z zwischen r und $\frac{1}{r}$ liegt, und daß $r > 1$ ist. Die Entwickelung nach Potenzen von z ergiebt hiernach als Coefficienten sowohl für z^n als für z^{-n} für jede nicht negative ganze Zahl n:

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(\zeta) \cdot \zeta^{-n} d\log\zeta,$$

wenn die Integration über den Kreis mit dem Radius r oder also auch über irgend eine den Punkt $\zeta = 0$ umschließende Curve erstreckt wird. Setzt man

$$-\frac{n}{2\log u} = \log\sigma,$$

so ist

$$\zeta^{-n} F(\zeta) = u^{-(\log\sigma)^2} \sum u^{(\log\sigma\zeta)^2} = e^{-\frac{n^2}{4\log u}} \cdot F(\sigma\zeta),$$

und da

$$\int F(\zeta)\, d\log\zeta$$

ungeändert bleibt, wenn $\sigma\zeta$ statt ζ gesetzt, d. h. über eine andere ebenfalls den Punkt $\zeta = 0$ umschließende Curve integrirt wird, so erhält man als Coefficienten von z^n und z^{-n} den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i} v^{-n^2\pi} \int F(\zeta)\, d\log\zeta,$$

wo v mit u durch die Relation $4\pi \log u \cdot \log v = 1$ verbunden ist. Integrirt man in Bezug auf ζ über den Kreis mit dem Radius 1, so geht dieser Ausdruck unmittelbar in folgenden über:

$$v^{-n^2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u^{-4\pi^2 w^2} dw$$

[1]) Vgl. Zusatz 76 am Ende dieses Bandes.

oder in

$$\frac{v^{-n^2\pi}}{\varphi+\psi i}\int e^{-\pi z^2}\,dz,$$

wenn die Quadratwurzel der complexen Größe $4\pi\log u$ mit $\varphi+\psi i$ bezeichnet, dabei φ positiv genommen und die Integration über die grade Linie $z = w(\varphi+\psi i)$ d. h. über die Linie $x\psi = y\varphi$ erstreckt wird. Der Winkel, den diese Linie mit der x-Achse bildet, ist unter 45°, da der reelle Theil von $\log u$ d. h. also $\varphi^2-\psi^2$ positiv sein muß. Die Integration kann daher, ohne den Integralwerth zu alteriren, über die x-Achse selbst erstreckt werden, da das Resultat der Integration von $y=0$ bis $y=x$ bei festem x für wachsende Werthe von x sich der Null nähert. Hiernach führt die Entwickelung von $F(z)$ nach Potenzen von z zu der Gleichung

$$\sum u^{(\log z)^2} = (\sqrt{\log v})\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v^{-n^2\pi} z^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dx,$$

aus welcher sich, wenn man $v=e$, $z=1$ setzt, der Werth des Integrals rechts gleich Eins ergiebt. Setzt man $x=u^{-4\pi}$, $y=v^{-1}$, so geht die Gleichung in folgende über:

$$\text{(III)}\qquad \left(\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right)\frac{\sum x^{-\frac{1}{4\pi}(\log z+2n\pi i)^2}}{\sum y^{n^2\pi} z^n} = 1,$$

wo die Summationen auf alle Zahlen von $n=-\infty$ bis $n=+\infty$ zu erstrecken sind und für $\log z$ irgend ein bestimmter Werth des Logarithmus zu nehmen ist. Ferner ist hierbei

$$\log x\cdot\log y = 1,$$

der absolute Betrag von x so wie der von y ist kleiner als Eins, und die eingeklammerte Quadratwurzel aus einer complexen Größe $\left(\sqrt{re^{2vi}}\right)$ soll den absoluten Werth von $\sqrt{r}$ multiplicirt mit demjenigen Werthe von e^{vi} bedeuten, bei welchem $-\pi < 2v \leqq \pi$ ist. Für $z=1$ reducirt sich die Gleichung (III) auf folgende

$$\text{(IV)}\qquad \left(\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right)\frac{\sum x^{n^2\pi}}{\sum y^{n^2\pi}} = 1.$$

Ist nun der imaginäre Theil von $\log x$ rational, also

$$-\log x = w^2 + \frac{\lambda i}{\mu},$$

wo λ und μ ganze Zahlen bedeuten, und läßt man die reelle positive Größe w sich der Null nähern, so wird

$$\lim_{w=0}(\mu w)\sum x^{n^2\pi} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{-k^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2\pi}\,dx$$

oder also, wenn die über ein vollständiges Restensystem k mod. 2μ erstreckte Summe

$$\sum e^{-k^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}}$$

mit

$$2G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right)$$

bezeichnet wird:

$$\text{(V)}\qquad \lim_{w=0}(\mu w)\sum x^{n^2\pi} = G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right),$$

da $\int e^{-x^2\pi}dx = 1$ gefunden worden ist. Unter (μw) ist hierbei der absolute Werth von μw zu verstehen. Da nun ferner

$$-\left(1+\frac{\mu^2 w^4}{\lambda^2}\right)\log y = \frac{\mu^2 w^2}{\lambda^2} + \frac{\mu}{\lambda i}$$

ist, so wird

$$\text{(Va)}\qquad \lim_{w=0}(\mu w)\sum y^{n^2\pi} = G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right)$$

und also vermöge der Gleichung (IV)

$$\left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right)G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right),$$

d. h. es gilt für jeden rationalen, rein imaginären Werth von ϱ die Relation

$$\text{(VI)}\qquad (\sqrt{\varrho})\frac{G(\varrho)}{G\left(\frac{1}{\varrho}\right)} = 1,$$

welche als Grenzausdruck der Gleichung (IV) angesehen werden kann und welche direkt resultirt, wenn die von *Dirichlet* zur Summation der Reihe $G\left(\frac{2i}{\mu}\right)$ benutzte Methode auf die allgemeinere Reihe $G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right)$ angewendet wird. — Für die Ermittelung des Grenzwerthes von $\sum y^{n^2\pi}$ ist nur noch zu bemerken, daß sich zuvörderst nur $G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right)$ als Grenzwerth von $\mu w\sum(\eta y)^{n^2\pi}$ ergiebt, wenn

$$-\log\eta y = \frac{\mu^2 w^2}{\lambda^2} + \frac{\mu}{\lambda i}$$

gesetzt wird, so daß $\log\eta$ von der Ordnung w^4 ist. Alsdann aber läßt sich zeigen, daß durch geeignete Wahl von k die Werthe von jeder der drei Reihen, welche die rechte Seite der Gleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(\eta y)^{n^2\pi} - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} y^{n^2\pi} = \sum_{n=-k}^{n=+\infty}(\eta^{n^2\pi}-1)\,y^{n^2\pi} + 2\sum_{n=k+1}^{n=\infty}(\eta y)^{n^2\pi} - 2\sum_{n=k+1}^{n=\infty} y^{n^2\pi}$$

bilden, beliebig klein gemacht werden können.

Wenn λ und μ beide ungrade sind, so ist $G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = 0$; es sind deshalb nur solche Werthe von ϱ in Betracht zu ziehen, bei denen in der reducirten Form der Zähler oder der Nenner grade ist. Ferner läßt sich der Bruch ϱ stets auf die Form bringen, daß die durch Addition von Zähler und Nenner entstehende ganze complexe Zahl im *Dirichlet*schen Sinne primär ist, d. h. daß der reelle Theil den Rest 1 mod. 4 läßt und der imaginäre Theil grade ist. Man hat also nur Summen

$$G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right),\quad G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right)$$

zu betrachten, in denen $\mu \equiv 1$ mod. 4 ist. Setzt man nun

$$\text{(VII)}\qquad \frac{G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right)}{(\sqrt{\mu})} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right),\quad \frac{G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right)}{(\sqrt{2\lambda i})} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

wo in Folge der obigen Festsetzung unter $(\sqrt{\mu})$, je nachdem μ positiv oder negativ ist, die positiv genommene Quadratwurzel aus dem absoluten Werthe von μ oder dieselbe mit i multiplicirt zu verstehen ist, so sind die Werthe von $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ und $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ stets gleich ± 1, es ist ferner

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(-1)^{\frac{1}{4}(\gamma-1)(\delta-1)},$$

wenn γ, δ die Vorzeichen von λ, μ bedeuten; endlich stimmt der Werth von $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ und für den Fall, daß λ ungrade ist, auch der von $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ mit dem des verallgemeinerten *Legendre*schen Zeichens überein. Alles dies ist unmittelbar aus den folgenden Haupteigenschaften der *Gauß*schen Reihen G herzuleiten:

$G(\varrho + 2hi) = G(\varrho)$, wenn h eine ganze Zahl ist,

$G(2\lambda i) = 1$, $G\left(\frac{\mu}{2i}\right) = 1 + i$, wenn λ und μ ganz und $\mu \equiv 1$ mod. 4 ist,

$G\left(\frac{\lambda i}{\mu\nu}\right) = G\left(\frac{\lambda\nu i}{\mu}\right) G\left(\frac{\lambda\mu i}{\nu}\right)$, wenn λ, μ, ν zu einander prim sind,

$(\sqrt{\varrho})G(\varrho) = G\left(\frac{1}{\varrho}\right)$

$G(\varrho n^2) = G(\varrho) = \frac{1}{m} G\left(\frac{\varrho}{m^2}\right)$, wenn m zum Zähler von ϱ und n zum Nenner von ϱ prim ist.

So folgt aus der zuletzt erwähnten Eigenschaft von G, daß

$$G\left(\frac{2a\lambda i}{\mu}\right) = G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right)$$

ist, wenn μ Primzahl und a quadratischer Rest von μ ist, und da überdies

$$\sum G\left(\frac{2h\lambda i}{\mu}\right) = 0$$

wird, wenn man die Summation auf alle Werthe $h = 1, 2, \ldots \mu - 1$ erstreckt, so muß für jeden quadratischen Nichtrest b offenbar

$$G\left(\frac{2b\lambda i}{\mu}\right) = -G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right),$$

also allgemein

$$G\left(\frac{2r\lambda i}{\mu}\right) = \left(\frac{r}{\mu}\right) G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right)$$

werden, wo unter $\left(\frac{r}{\mu}\right)$ das *Legendre*sche Zeichen zu verstehen ist. Da also

$$G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) G\left(\frac{2i}{\mu}\right),$$

und

$$G\left(\frac{2i}{\mu}\right) = \left(\sqrt{\frac{\mu}{2i}}\right) G\left(\frac{\mu}{2i}\right) = (\sqrt{\mu})$$

ist, so folgt in der That, daß für eine Primzahl μ der Quotient

$$\frac{G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right)}{(\sqrt{\mu})}$$

mit dem *Legendre*schen Zeichen $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ übereinstimmt. Ferner folgt aus der dritten Eigenschaft von G, wenn λ ungrade ist,

$$G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right) = G\left(\frac{-2\mu i}{\lambda}\right) G\left(\frac{\lambda\mu}{2i}\right),$$

und hieraus ergiebt sich, daß auch der Quotient

$$\frac{G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right)}{(\sqrt{2\lambda i})}$$

für Primzahlen λ mit dem *Legendre*schen Zeichen $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ identisch wird. Endlich führt eben diese dritte Eigenschaft von G zur *Jacobi*schen Verallgemeinerung des *Legendre*schen Zeichens.

In den vorstehenden Entwickelungen hat sich als Grenzwerth von

$$\left(\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right)\frac{\sum x^{n^2\pi}}{\sum y^{n^2\pi}}$$

für den Fall, daß der reelle Theil von $\log x$ verschwindet, während der imaginäre einen rationalen Werth ϱ hat, der Ausdruck

$$(\sqrt{\varrho})\frac{G(\varrho)}{G\left(\frac{1}{\varrho}\right)}$$

oder, wenn $\varrho = \frac{2\lambda i}{\mu}$ ist, der Ausdruck

$$\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}(-1)^{\frac{1}{4}(\gamma-1)(\delta-1)}$$

ergeben, und es hat sich gezeigt, daß die Zeichen $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ mit den verallgemeinerten *Legendre*schen Zeichen übereinstimmen. Die Transformationsgleichung (IV), welche als Werth dieser Ausdrücke die positive Einheit ergiebt, führt also in der That mittels der *Cauchy*schen Grenzbetrachtung sowohl zu der in der Gleichung (VI) enthaltenen Werthbestimmung der *Gauß*schen Reihen G als auch zum Reciprocitätsgesetz für die quadratischen Reste. Aber es läßt sich auch umgekehrt aus der Gleichung (VI) die Gleichung (IV) erschließen. Denn die auf der linken Seite der Gleichung (IV) stehende Function von x, welche der Kürze halber mit $\Phi(x)$ bezeichnet werden möge, ist ebenso wie jede ihrer Ableitungen im Innern des Kreises mit dem Radius 1 mit Ausschluß des Nullpunkts überall endlich, da die den Nenner bildende Reihe $\sum y^{n^2\pi}$, wie z. B. die ebenfalls mit den *Cauchy*schen Principien herzuleitende *Productentwickelung*[1]) zeigt, in dem angegebenen Gebiete nirgends verschwindet. Für den Nullpunkt selbst nähert sich $\Phi(x)$ dem reciproken Werthe des von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckten Integrals $\int e^{-u^2\pi}du$, so daß bei dem *Cauchy*schen Integral nur die Peripherie des Kreises mit dem Radius 1 als natürliche Begrenzung anzusehen ist. Setzt man nun $x = re^{2si\pi}$, so daß auf der Begrenzung s von 0 bis 1 geht, und nimmt alsdann in der obigen Gleichung (II) für die Function $\chi(r, s)$

$$\frac{\Phi(x)-1}{x-\xi} \quad \text{oder} \quad \frac{\Phi(re^{2s\pi i})-1}{re^{2s\pi i}-\xi},$$

so wird für einen beliebigen Punkt (ξ) im Innern des Kreises[2])

$$\Phi(\xi)-1 = \lim_{\mu=\infty}\cdot\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu-1}\lim_{r=1}\cdot\chi\left(r, \frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot re^{2\pi\frac{\lambda}{\mu}i}$$

[1]) Vgl. Zusatz 77 am Ende dieses Bandes.
[2]) Vgl. Zusatz 78 am Ende dieses Bandes.

und es ist auf Grund der in der Gleichung VI gegebenen Voraussetzung grade der Grenzwerth

$$\lim_{r=1}\cdot\chi\left(r, \frac{\lambda}{\mu}\right),$$

der für jede ungrade Zahl μ gleich Null wird. Hiernach wird also für jeden Punkt ξ im Innern des Kreises $\Phi(\xi) = 1$, d. h. die Gleichung (IV) findet für alle Werthe von x im Innern des Kreises statt, und es ergiebt sich dadurch auch wiederum der Werth des für $\Phi(0)$ gefundenen Integrals $\int e^{-u^2\pi}du$ *gleich Eins*. Ferner zeigt sich mit Hülfe derselben *Cauchy*schen Principien die Transformationsgleichung (III) als eine Folge der specielleren Gleichung (IV), da die auf der linken Seite der Gleichung (III) stehende Function von z, wie leicht zu sehen ist, für alle und zwar auch für die im Unendlichen liegenden Werthe dieser Variabeln stets endlich bleibt und daher überall einen constanten, durch die speciellere Gleichung (III) zu bestimmenden Werth haben muß. Endlich ist daran zu erinnern, daß die allgemeinste lineare Transformation der θ-Reihen durch wiederholte Anwendung der Gleichung (III) und aber auch direkt wie eben diese Gleichung abgeleitet werden kann. Wird in üblicher Weise die auf alle ungraden (positiven und negativen) Zahlen ν erstreckte Summe

$$\sum e^{\frac{1}{4}\pi i(\nu^2\tau+4\nu\zeta-2\nu)}$$

mit $\vartheta(\zeta, \tau)$ bezeichnet, so kommt:

$$\text{(VIII)} \qquad \vartheta\left(\frac{\zeta}{\gamma\tau+\delta}, \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = C(\sqrt{\gamma\tau+\delta})e^{\frac{\gamma\zeta^2}{\gamma\tau+\delta}\pi i}\vartheta(\zeta, \tau),$$

wo die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, und der von ζ wie von τ unabhängige constante Factor C bestimmt sich unmittelbar, wenn

$$\zeta = \frac{1}{2}(\alpha\tau + \beta + \gamma\tau + \delta)$$

gesetzt, alsdann, je nachdem $\beta + \delta$ ungrade oder grade ist,

$$\tau = iw^2 \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{i}{w^2}$$

genommen und schließlich zum Grenzwerth $w = 0$ übergegangen wird. Bei dieser Methode findet sich C je nach den beiden Fällen durch die *Gauß*schen Reihen

$$G\left(\frac{\beta i}{\delta}\right), \; G\left(\frac{\alpha i}{\gamma}\right)$$

ausgedrückt, deren Werth ja sich oben durch die Transformationsgleichung selbst bestimmt hat, so daß alles für die lineare Transformation Erforderliche aus einer und derselben Quelle herzuleiten ist. — Bei wiederholter Anwendung der Gleichung (III) gelangt man zur Gleichung (VIII) und dabei auch zur Bestimmung von C durch einen Algorithmus, welcher auch von den Hauptgleichungen für die *Gauß*schen Reihen

$$G(\varrho + 2hi) = G(\varrho), \quad (\sqrt{\varrho})\, G(\varrho) = G\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

zu deren Werthbestimmung und damit auch zur Bestimmung des *Legendre*schen Zeichens führt. Setzt man

$$\varrho = \frac{n_1 i}{n},$$

so hat man ganze Zahlen $n_2, n_3, \ldots h_1, h_2, \ldots$ so zu bestimmen, daß

$$n + 2h_1 n_1 + n_2 = 0, \quad n_1 + 2h_2 n_2 + n_3 = 0, \ldots$$

also

$$\frac{n_1}{n} = \cfrac{-1}{2h_1 - \cfrac{1}{2h_2 - \cdots - \cfrac{1}{2h_\nu}}}$$

wird. Die Zahlen n sind positiv oder negativ, aber ihrem absoluten Werthe nach mit wachsendem Index abnehmend, und das Vorzeichen von h_k ist dem des Products $n_{k-1} \cdot n_k$ entgegengesetzt. Der Wert von $G(\varrho)$ bestimmt sich hiernach gleich der Quadratwurzel aus dem absoluten Werthe von n multiplicirt mit $e^{\frac{1}{4} r\pi i}$, wo für r die algebraische Summe der Vorzeichen der Zahlen $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ zu nehmen ist.

Die *Cauchy*sche Auffassung der *Gauß*schen Reihen als Grenzwerthe der θ-Reihen zeigt sich als naturgemäß und bedeutungsvoll namentlich darin, daß sich hierbei grade jene wichtige Vorzeichenbestimmung, bei welcher *Gauß* „auf ganz unerwartete Schwierigkeiten traf" (vgl. *Gauß*' Werke Bd. II, p. 156), ganz unmittelbar ergiebt, ja — so zu sagen — in Evidenz tritt. Setzt man nämlich den absoluten Werth der Summen der *Gauß*schen Reihen als bekannt voraus, so gilt für jeden rationalen, rein imaginären Werth von ϱ die Relation

$$\text{(VIa)} \qquad \varrho \cdot \left\{ \frac{G(\varrho)}{G\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \right\}^2 = 1,$$

welche nichts Anderes ist als die quadrirte Relation (VI). Hieraus folgt nun das Bestehen der quadrirten Gleichung (IV), nämlich

$$\text{(IVa)} \qquad \log\frac{1}{x} \cdot \left\{ \frac{\sum x^{n^2\pi}}{\sum y^{n^2\pi}} \right\}^2 = 1,$$

auf Grund eben jener Betrachtungen, welche die Gleichung (IV) selbst als eine Folge der Gleichung (VI) erkennen ließen, und welche nur noch durch die Bemerkung vervollständigt werden mögen, daß aus dem Verhalten der Function $\Phi(x)$ in der Nähe von $x = 0$ auch deren Eindeutigkeit hervorgeht; denn die verschiedenen Werthe von $\log x$ können keine Werthänderung der Function $\Phi(x)$ zur Folge haben, da $\Phi(x)$ bei jeder beliebigen Art der Annäherung an $x = 0$ gegen einen und denselben festen Werth convergirt. Es ist ferner hervorzuheben, daß die eingeklammerte Quadratwurzel eindeutig bestimmt ist und auch in eindeutiger Form dargestellt werden kann, indem offenbar

$$(\sqrt{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{a}\pi}\, du$$

ist, wenn a eine complexe Größe bedeutet, deren reeller Theil positiv ist. — Die eindeutige Function von x, welche die linke Seite der Gleichung (IVa) bildet, ist das Quadrat von $\Phi(x)$; die Function $\Phi(x)$ selbst kann daher nur den Werth $+1$ oder -1 haben, und von diesen beiden Alternativen wird die letztere dadurch ausgeschlossen, dass $\Phi(x)$ für $x = 0$ sich dem reciproken Werthe des von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckten Integrals $\int e^{-u^2\pi} du$, also einer offenbar positiven Größe nähert. Hieraus folgt aber, daß auch der Grenzwerth, dem sich $\Phi(e^{-w^2-\varrho})$ für $w = 0$ nähert, d. h. der Werth von

$$(\sqrt{\varrho}) \frac{G(\varrho)}{G\left(\frac{1}{\varrho}\right)}$$

gleich $+1$ ist, daß also die mit (VI) bezeichnete Gleichung besteht, welche die vollständige Werthbestimmung der *Gauß*schen Reihen in sich schließt. Diese Deduction führt also, nur von dem absoluten Werthe der Summen der *Gauß*schen Reihen ausgehend, zur Transformation der θ-Reihen und mit Hülfe derselben alsdann auch zur Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel, welche bei der Summation der *Gauß*schen Reihen erscheint. Die dabei benutzte Schlußweise läßt sich ganz übersichtlich darstellen, wenn man, wie oben, den Ausdruck

$$\left(\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right) \frac{\sum x^{n^2\pi}}{\sum y^{n^2\pi}},$$

in welchem $\log x \cdot \log y = 1$ ist, mit $\Phi(x)$ bezeichnet, so daß

$$\lim_{w=0} \cdot \Phi(e^{-w^2-\varrho}) = (\sqrt{\varrho}) \frac{G(\varrho)}{G\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \qquad \left(\varrho = \frac{\lambda i}{\mu}\right)$$

wird. Dann ist nämlich die Voraussetzung, von welcher ausgegangen wird, in der Gleichung

$$\lim_{w=0} \cdot \Phi(e^{-w^2-\varrho}) = \pm 1$$

enthalten, und aus dieser folgt mit Hülfe der *Cauchy*schen Principien, daß

$$(\Phi(x))^2 = 1, \quad \text{also} \quad \Phi(x) = +1 \quad \text{oder} \quad \Phi(x) = -1$$

sein muß. Da aber $\lim_{x=0} \cdot \Phi(x) > 0$ ist, so resultirt die Gleichung

$$\Phi(x) = 1,$$

welche die Transformation der θ-Reihen enthält, und hieraus ergiebt sich schließlich die Vorzeichenbestimmung in der Gleichung, welche den Ausgangspunkt bildete, nämlich

$$\lim_{w=0} \cdot \Phi(e^{-w^2-\varrho}) = +1,$$

und eben damit auch die Vorzeichenbestimmung für die Werthe der *Gauß*schen Reihen.[1])

Der absolute Werth der *Gauß*schen Reihen, welcher bei vorstehender Deduction zu Grunde gelegt worden, läßt sich ermitteln, ohne die Existenz der primitiven Congruenzwurzeln zu Hülfe zu nehmen, also ohne über die Sphäre der quadratischen Reste hinauszugehen. Zuvörderst sind nämlich mittels der Gleichung (vgl. S. 284)

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu\nu}\right) = G\left(\frac{\lambda\nu i}{\mu}\right) G\left(\frac{\lambda\mu i}{\nu}\right),$$

in welcher λ, μ, ν als zu einander prim vorausgesetzt sind, alle *Gauß*schen Reihen auf diejenigen zurückzuführen, in welchen der Nenner eine Primzahlpotenz p^α ist. Wenn nun ferner $\mu = p^\alpha$ und in der *Gauß*schen Reihe

$$\sum_k e^{-k^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}}$$

$k = mp^{\alpha-1} + n$ genommen wird, so wird hierdurch der Werth der *Gauß*schen Reihe für $\mu = p^\alpha$ ganz unmittelbar auf den Werth der *Gauß*schen Reihe für $\mu = p^{\alpha-2}$ zurückgeführt. Ist endlich μ eine ungrade Primzahl p, und bezeichnet man mit a die quadratischen Reste von p und mit b die Nichtreste, so ist

$$G\left(\frac{r\lambda i}{p}\right) = \sum_{k=0}^{k=p-1} e^{-k^2\frac{r\lambda\pi i}{p}} = 1 + 2\sum_a e^{-\frac{ar\lambda\pi i}{p}}$$

[1]) Vgl. Zusatz 79 am Ende des Bandes.

und

$$1 + 2\sum_a e^{-\frac{ar\lambda\pi i}{p}} + 1 + 2\sum_b e^{-\frac{br\lambda\pi i}{p}} = 0,$$

also

$$G\left(\frac{r\lambda i}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) G\left(\frac{\lambda i}{p}\right),$$

wo $\left(\frac{r}{p}\right)$ das *Legendre*sche Zeichen d. h. gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem r zu den Zahlen a oder b gehört. Da nun ferner

$$G\left(\frac{\lambda i}{p}\right) G\left(\frac{-\lambda i}{p}\right) = \sum_h \sum_k e^{(h^2-k^2)\frac{\lambda\pi i}{p}} = \sum_r \sum_s e^{rs\frac{\lambda\pi i}{p}}$$

ist, wo für die Summationsbuchstaben h, k, r, s alle Werthe von 0 bis $p-1$ zu nehmen sind, so resultirt die Gleichung

$$\left(\frac{-1}{p}\right)\left(G\left(\frac{\lambda i}{p}\right)\right)^2 = p,$$

mit Hülfe deren die Bestimmung des absoluten Werthes der *Gauß*schen Reihen vollendet wird.

Die Herleitung der Productentwickelung der θ-Reihen, welche oben S. 286 erwähnt worden ist, geschieht durch den Nachweis, daß der Quotient jener für

$$q = e^{\tau\pi i}, \quad z = e^{\zeta\pi i}$$

mit $\vartheta(\zeta, \tau)$ übereinstimmenden Reihe

$$\sum_\nu q^{\frac{1}{4}\nu^2}(-iz)^\nu$$

und des Products

$$-iq^{\frac{1}{4}}(z - z^{-1})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^{2n})(1 - q^{2n}z^2)(1 - q^{2n}z^{-2}),$$

gleich *Eins* ist. Es ist nämlich zuvörderst klar, daß dieser Quotient für alle, auch für unendlich große Werthe von z stets endlich bleibt und also von z unabhängig sein muß. Es ist ferner zu sehen, daß dieser Quotient ungeändert bleibt, wenn q^4 für q gesetzt wird, indem sowohl für die Reihe als auch für das Product die Relation

$$\text{(IX)} \qquad \vartheta\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = 2e^{\frac{1}{4}\tau\pi i}\vartheta\left(\frac{1}{2} - \tau, 4\tau\right)$$

fast unmittelbar erhellt. Der Quotient hat also für jedes q denjenigen Werth, welchen er für unendlich kleine Größen q erhält, d. h. eben den Werth *Eins*. — Ganz ebenso ist auch die auf S. 282 mit (III) bezeichnete Transformationsgleichung zu verificiren. Denn die auf der linken Seite stehende Function von x und z muß — wie schon oben S. 287 ausgeführt ist — von z unabhängig sein, oder, was damit übereinkommt, es muß der Quotient

$$-i(\sqrt{-\tau i})e^{\zeta^2\tau\pi i}\cdot\frac{\vartheta(\zeta\tau,\tau)}{\vartheta\left(\zeta,-\frac{1}{\tau}\right)}$$

von ζ unabhängig sein. Setzt man hierin

erstens $\zeta = \frac{1}{2\tau}$,

zweitens 4τ an Stelle von τ und dann $\zeta = -\frac{1}{4}+\frac{1}{8\tau}$,

so ist leicht zu zeigen, daß die beiden resultirenden Werthe jenes Quotienten mit einander übereinstimmen. In der That bedarf es dazu außer der Gleichung (IX) nur noch der ebenso unmittelbar sowohl aus der Reihenform als auch aus der Productentwickelung von ϑ hervorgehenden Relation

$$\text{(X)} \qquad e^{\frac{1}{4}(3\tau-1)\pi i}\vartheta(2\tau,4\tau) = \vartheta\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\tau,\tau\right),$$

welche gewissermaßen die „transformirte" der Relation (IX) ist. Da nun jener Quotient seinen Werth nicht ändert, wenn τ in 4τ verwandelt wird, so ist der Werth constant, nämlich derjenige, der für $\tau=\infty$ oder $q=0$ eintritt, und dieser constante Werth ergiebt sich unmittelbar gleich *Eins*, wenn $\tau = i$ und $\zeta = \frac{1}{2}(1+i)$ genommen wird.

Ich bemerke noch, daß ebenso wie die Gleichung (IX) auch andere Transformations-Relationen der θ-Reihen benutzt werden können, und daß Hr. *Rausenberger* in einer mir neulich als Beitrag zum Journal für Mathematik eingesandten Arbeit[1]), von den Productentwickelungen ausgehend, eine Herleitung der einfachen linearen Transformation mittels Functional-Gleichungen, die der Transformation 2ter und 3ter Ordnung entstammen, gegeben hat.

IV. Die allgemeinste lineare Transformation der θ-Reihen kann, wie schon auf S. 287 angedeutet worden, genau in derselben Weise wie die speciellere, die durch die Gleichung (III) ausgedrückt ist, oder auch mit Hülfe dieser Gleichung aus der Entwickelung von

$$e^{-\gamma\zeta\zeta'\pi i}\vartheta(\zeta',\tau')$$

[1]) Journal f. Mathematik, Bd. 91, S. 335.

nach Potenzen von $e^{\zeta\pi i}$ hergeleitet werden. Die Transformationsgleichung erscheint alsdann in folgender Gestalt:

$$\text{(XI)} \qquad \vartheta(\zeta',\tau') = \left(\sqrt{\frac{\gamma\tau+\delta}{\gamma i}}\right)e^{(\gamma\zeta\zeta'+\varphi)\pi i}G_{\eta,0}\left(\frac{\alpha}{\gamma i}\right)\vartheta(\zeta,\tau),$$

und es bedeuten hier $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige ganze Zahlen, welche die Bedingung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ erfüllen, es ist ferner

$$\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{\gamma\tau+\delta}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(\alpha\delta-\gamma)(1-\delta)+\frac{1}{4}\beta\delta+\frac{1}{4}\alpha\gamma(1-\delta)^2$$

und

$$G_{\eta,0}\left(\frac{\alpha}{\gamma i}\right) = \sum_{n=1}^{n=\gamma}(-1)^{\eta n}e^{n^2\frac{\alpha\pi i}{\gamma}}, \quad \eta = \alpha(\beta+\delta).$$

Die Constante C in der Gleichung (VII) bestimmt sich demgemäß durch die Bedingung

$$C(\sqrt{\gamma i}) = e^{\varphi\pi i}G_{\eta,0}\left(\frac{\alpha}{\gamma i}\right).$$

Geht man zu einem rationalen Grenzwerthe von τ über, so nimmt auch τ' einen rationalen Grenzwerth an, und wenn der erstere in reducirter Form mit $-\frac{\lambda}{\mu}$, der letztere mit $-\frac{\lambda'}{\mu'}$ bezeichnet wird, so ist

$$\lambda' = \alpha\lambda-\beta\mu, \quad \mu' = -\gamma\lambda+\delta\mu.$$

Es ist nun in diesem Falle auch für 2ζ ein rationaler Bruch mit dem Nenner μ zu nehmen, weil für alle andern Werthe von 2ζ der Grenzwerth von

$$w\cdot\vartheta\left(\zeta, w^2 i-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

für $w=0$ verschwindet. Demgemäß seien p, q beliebige ganze Zahlen, und es sei

$$2\zeta = p+1+(q+1)\frac{\lambda}{\mu}, \quad 2\zeta' = p'+1+(q'+1)\frac{\lambda'}{\mu'}$$

$$p'+1 = \alpha(p+1)+\beta(q+1), \quad q'+1 = \gamma(p+1)+\delta(q+1);$$

es bedeute ferner $G_{p,q}\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right)$ den Ausdruck

$$\frac{1}{2}i^{-pq(q+1)}\sum_{n=1}^{n=2\mu}(-1)^{np}e^{-(n-\frac{1}{2}q)^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}}.$$

Alsdann geht die Transformationsformel (XI) in folgende über:

$$\text{(XII)} \qquad \frac{e^{t'\pi i}G_{p',q'}\left(\frac{\lambda' i}{\mu'}\right)}{e^{t\pi i}G_{p,q}\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right)} = \left(\sqrt{\frac{\mu'}{\mu\gamma i}}\right)e^{\varphi\pi i}G_{\eta,0}\left(\frac{\alpha}{\gamma i}\right),$$

wo η, φ die oben angegebene Bedeutung haben, während t und t' der Abkürzung halber für die Größen

$$\frac{1}{2}pq^2 + \frac{1}{4}(p-1)(q+1), \quad \frac{1}{2}p'q'^2 + \frac{1}{4}(p'-1)(q'+1)$$

gesetzt sind. Für ungrade Werthe von p und q wird $G_{p,q}$ gleich Null und für beliebige ganze Zahlen h, k wird

$$G_{p+2h,\, q+2k} = G_{p,q},$$

so daß in Wahrheit nur die drei verschiedenen Reihen

$$G_{00},\ G_{01},\ G_{10}$$

zu betrachten sind, von denen die erste mit derjenigen übereinstimmt, welche oben mit G ohne Indices bezeichnet worden ist. Die Formel (XII) liefert die Werthe der Reihen G sowie die allgemeinste Reciprocitäts-Beziehung zwischen *Legendre*schen Zeichen $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ und $\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)$, von denen das eine durch lineare Transformation aus dem andern entstanden ist. Für den speciellen Fall $\alpha = \delta = 0$ und $\beta = -\gamma = 1$ kommt analog der obigen Gleichung (VI)

$$(\sqrt{\varrho})G_{p,q}(\varrho) = G_{q,p}\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

wenn $\varrho = \frac{\lambda i}{\mu}$ ist, und auch aus dieser specielleren Gleichung allein folgen schon die Werthe der Reihen G.

Ich bemerke schließlich, daß ich die auf S. 281 bis 285 gegebene Ausführung *Cauchy*scher Betrachtungen bereits im Februar 1868 in der Akademie, und schon im December 1867 sowie von da ab regelmäßig in meinen Universitäts-Vorlesungen vorgetragen habe. Die weitere auf S. 286 und 287 angeschlossene Entwickelung habe ich zuerst im Februar d. J. in meinen Universitäts-Vorlesungen mitgetheilt.

SUMMIRUNG DER GAUSS'SCHEN REIHEN $\sum\limits_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 105. S. 267—268.

SUMMIRUNG DER GAUSS'SCHEN REIHEN $\sum\limits_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$ [1]).

Das *Cauchy*sche Theorem, wonach $\int f(x+yi)d(x+yi) = 0$ wird, wenn man die Integration über die Umgrenzung eines Gebiets erstreckt, innerhalb dessen die Function f und ihre erste Ableitung eindeutig und endlich ist, führt auf überraschend einfache Weise zur Lösung jenes berühmten Problems der Werthbestimmung der *Gauß*schen Reihen, und dies ist deshalb von besonderem Interesse, weil bisher eigentlich nur *zwei* verschiedene directe Methoden zur Summirung dieser Reihen für beliebige Zahlen n existirten, die *Gauß*sche*) und die *Dirichlet*sche**). Allerdings hat *Cauchy* noch zwei Methoden angegeben***); aber zwischen der ersten von diesen beiden und der *Dirichlet*schen findet, wie ich in meinem im Monatsbericht der Berliner Akademie vom Juli 1880 abgedruckten Aufsatze[2]) dargelegt habe, eine innere Uebereinstimmung statt, und die zweite *Cauchy*sche Methode führt ebenso wie diejenige, welche ich in meiner Notiz†) „Sur une formule de *Gauss*"

*) „Summatio quarumdam serierum singularium." Commentationes soc. reg. scientiarum Gottingensis rec. Vol. I, 1811. *Gauß'* Werke, Bd. II, S. 9. Vgl. auch *Gauß'* Werke, Bd. II, S. 155.

**) „Ueber eine neue Anwendung bestimmter Integrale auf die Summation endlicher oder unendlicher Reihen" (Abhandlungen der Berliner Akademie von 1835, S. 391, und *G. Lejeune-Dirichlet*'s Werke Bd. I, S. 237) ferner „Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies" (dieses Journal Bd. XVII, S. 57, und *G. Lejeune-Dirichlet*'s Werke, Bd. I, S. 257), sowie § 9 der Abhandlung: „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres" (dieses Journal Bd. XXI, S. 134, und *G. Lejeune-Dirichlet*'s Werke, Bd. I, S. 473).

***) „Méthode simple et nouvelle pour la détermination des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binômes." (Comptes Rendus T. X, p. 560; *Liouville*'s Journal, Jahrgang 1840, Bd. V, S. 154, Oeuvres complètes, Ire Série, T. V, p. 152.)

†) *Liouville*'s Journal, Jahrgang 1856, Sér. II, Bd. I, S. 392.[3])

[1]) Vgl. Zusatz 80 am Ende dieses Bandes. H

[2]) Bd. IV, S. 275 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[3]) Bd. IV, S. 171 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

entwickelt habe, *direct* nur zur Werthbestimmung der *Gauß*schen Reihen für den Fall, wo n Primzahl ist, zur *allgemeinen* also nur mittels des Reciprocitätsgesetzes, während dieses bekanntlich aus der allgemeinen Werthbestimmung folgt.

Gemäß dem *Cauchy*schen Theorem ist:

$$\text{(I)} \qquad \int \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x+yi)^2}}{1-e^{2\pi i(x+yi)}}\, d(x+yi) = 0,$$

wenn vom Punkte $(0, -y_1)$ nach $(0, -y_0)$ in gerader Linie integrirt wird, alsdann um $(0, 0)$ als Mittelpunkt im Halbkreise, dessen Inneres links lassend, nach $(0, y_0)$, dann in gerader Linie von $(0, y_0)$ nach $(0, y_1)$, von da nach $\left(\frac{1}{2}n, y_1\right)$ und von da nach $\left(\frac{1}{2}n, y_0\right)$, alsdann um $\left(\frac{1}{2}n, 0\right)$ als Mittelpunkt im Halbkreise, dessen Inneres links lassend, nach $\left(\frac{1}{2}n, -y_0\right)$, ferner in gerader Linie von $\left(\frac{1}{2}n, -y_0\right)$ nach $\left(\frac{1}{2}n, -y_1\right)$ und von da nach $(0, -y_1)$, endlich um jeden der in der x-Achse liegenden Punkte $(k, 0)$, für welche k eine positive ganze Zahl und kleiner als $\frac{1}{2}n$ ist, in einem Kreise mit dem Radius y_0, das Innere zur Linken lassend. Dabei wird y_0 und y_1 als positiv vorausgesetzt und $y_0 < \frac{1}{4}$. Läßt man nun y_0 zu Null hin abnehmen, so geht die Gleichung (I) in folgende über:

$$\text{(II)} \qquad \lim_{y_0=0} i \sum_{\alpha,\varepsilon} (-1)^\alpha \varepsilon \int_{\varepsilon y_0}^{\varepsilon y_1} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x_\alpha+yi)^2}\, dy}{1-e^{2\pi i(x_\alpha+yi)}} + \sum_\varepsilon \varepsilon \int^{\frac{1}{2}n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x+\varepsilon y_1 i)^2}\, dx}{1-e^{2\pi i(x+\varepsilon y_1 i)}} - \frac{1}{2}\sum_h e^{\frac{2h^2\pi i}{n}} = 0,$$

$$\left(\alpha = 0, 1;\ x_0 = 0,\ x_1 = \tfrac{1}{2}n;\ \varepsilon = +1\ -1;\ h = 0, 1, 2, \ldots n-1\right)$$

und zwar ist der letzte der drei Theile auf der linken Seite gleich dem Gesammtresultat der Integration über die beiden Halbkreise und über die Kreise, da das Resultat der Integration um den ersten Halbkreis gleich $-\frac{1}{2}$ wird, um den zweiten aber gleich $-\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i}{n}\left(\frac{n}{2}\right)^2}$ oder gleich Null, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und um einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(k, 0)$ gleich $-e^{\frac{2k^2\pi i}{n}}$, also um sämmtliche Kreise gleich:

$$-\sum_k e^{\frac{2k^2\pi i}{n}} \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{2}\sum_k e^{\frac{2k^2\pi i}{n}} - \frac{1}{2}\sum_k e^{\frac{2(n-k)^2\pi i}{n}} \qquad \left(0<k<\tfrac{1}{2}n\right).$$

Wird in dem ersten Theile auf der linken Seite der Gleichung (II) an Stelle der Integrationsvariabeln y eine neue Variable u mittelst der Substitution $y = \varepsilon u\left|\sqrt{n}\right|$ eingeführt, und im zweiten Theile, für den Fall $\varepsilon = -1$, die Integrationsvariable x mit $\frac{1}{2}n - x$ vertauscht, so resultirt die Gleichung:

$$\text{(III)} \qquad \lim_{y_0=0} \left|\sqrt{n}\right|(i + i^{1-n}) \int_{\frac{y_0}{|\sqrt{n}|}}^{\frac{y_1}{|\sqrt{n}|}} e^{-2u^2\pi i}\, du + \sum_\alpha i^{\alpha n} \int_0^{\frac{1}{2}n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x+y_1 i)^2}\, dx}{(-1)^{\alpha n} - e^{2\pi i(x+y_1 i)}} = \frac{1}{2}\sum_h e^{\frac{2h^2\pi i}{n}},$$

$$(\alpha = 0, 1) \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

in welcher $\left|\sqrt{n}\right|$ nach *Weierstraß*scher Weise den absoluten Werth von $\sqrt{n}$ bezeichnet. Läßt man nunmehr y_1 ins Unendliche wachsen, so wird der zweite Theil des Ausdrucks auf der linken Seite gleich Null; denn der absolute Werth jedes der beiden Integrale, aus welchen dieser zweite Theil besteht, ist kleiner als

$$(1 + 2e^{-2\pi y_1}) \int_0^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{4\pi}{n}x y_1}\, dx,$$

sobald nur $2e^{-2\pi y_1} < 1$ ist. Die Gleichung (III) geht daher in folgende über:

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}} = 2\left|\sqrt{n}\right|(i + i^{1-n}) \int_0^\infty e^{-2u^2\pi i}\, du,$$

aus welcher, indem darin $n = 3$ oder $n = 4$ genommen wird, der Werth des Integrals auf der rechten Seite und sonach die Finalgleichung:

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}} = \frac{i + i^{1-n}}{i+1}\left|\sqrt{n}\right|$$

hervorgeht, welche die vollständige Summirung der *Gauß*schen Reihen enthält.

Da die Gleichung (II) leicht aus der Formel (A) in der schon aus dem Jahre 1814 stammenden *Cauchy*schen Abhandlung „Mémoire sur les intégrales définies" (Oeuvres complètes, I^re Série, T. I, p. 338) abgeleitet werden kann und ganz unmittelbar aus der Formel (11), p. 98 der „Exercices de Mathématiques" vom Jahre 1826 (Oeuvres complètes, II^e Série, p. 128) hervorgeht, wenn darin für $f(x+yi)$ die in der obigen Gleichung (I) unter dem Integralzeichen stehende Function von $x + yi$ genommen wird, so erscheint es auffallend — namentlich mit Rücksicht auf die Bemerkungen in der Einleitung zu der angeführten Abhandlung „Méthode simple et nouvelle etc." —, daß *Cauchy* darin nicht von seinen erwähnten Formeln Gebrauch gemacht hat. Aber auch *Gauß*, der doch wenigstens gegen Ende des Jahres, in welchem die Abhandlung „Summatio quarumdam serierum singularium" erschienen ist, das Theorem schon kannte*), mittels dessen oben die Summirung der Reihen ausgeführt worden ist, hat dasselbe, soviel ich weiß, niemals dazu benutzt.

*) „Briefwechsel zwischen *Gauß* und *Bessel*", S. 157.

ÜBER DIE DIRICHLETSCHE METHODE DER WERTBESTIMMUNG DER GAUSS'SCHEN REIHEN

VON

L. KRONECKER.

Festschrift der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg
aus dem Jahre 1890. S. 32—36.

ÜBER DIE DIRICHLETSCHE METHODE DER WERTBESTIMMUNG DER GAUSS'SCHEN REIHEN.

I. In der *Dirichlet*schen Summenformel:

$$\frac{1}{2} f(0) + f(1) + \cdots + f(r-1) + \frac{1}{2} f(r) = \lim_{s=\infty} \int_0^r f(x) \sum_{n=-s}^{n=+s} \cos 2n x \pi dx,$$

welche unmittelbar aus der *Fourier*schen Reihenentwickelung von $f(x)$ hervorgeht, kann der Ausdruck auf der rechten Seite durch:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{s=\infty} \int_0^r f(x) \sum_n e^{2n x \pi i} dx \qquad (-s-p \leqq n \leqq s+q)$$

ersetzt werden, wo p, q beliebige positive ganze Zahlen bedeuten. Denn hierbei ist nur das Aggregat:

$$i \int_0^r f(x) \sum_{n=-s}^{n=+s} \sin 2n x \pi dx + \int_0^r f(x) \sum_m \cos 2m x \pi dx + i \int_0^r f(x) \sum_m \sin 2m x \pi dx$$
$$(-s-p \leqq m < -s,\ s < m \leqq s+q)$$

hinzugefügt, dessen erster Teil an sich gleich Null ist, während jedes der Integrale:

$$\int_0^r f(x) \cos 2(s+h) x \pi dx, \quad \int_0^r f(x') \sin 2(s+h) x' \pi dx',$$

welche den zweiten und dritten Teil bilden, für wachsende Werte von s gleich Null wird. Führt man nämlich neue Integrationsvariabeln z, z' mittels der Substitutionen:

$$x = 3rz - \frac{1}{4(s+h)}, \quad x' = 3rz'$$

ein und setzt zur Abkürzung $6r(s+h) = w$, so verwandeln sich die beiden Integrale in folgende:

$$\text{(B)} \qquad 3r \int_{\frac{1}{2w}}^{\frac{1}{2w}+\frac{1}{3}} f\left(3rz - \frac{3r}{2w}\right) \sin wz\pi dz, \quad 3r \int_0^{\frac{1}{3}} f(3rz') \sin wz'\pi dz'.$$

Nun ist aber nach jener berühmten *Dirichlet*schen Abhandlung über die Konvergenz der trigonometrischen Reihen*):

$$\lim_{w=\infty}\int_0^{\zeta} F(z)\sin wz\pi\,dz = \frac{1}{2}\lim_{v=0}\sin v\pi F(v),$$

wenn $\zeta \leqq \frac{1}{2}$ ist, die Variable v sich von der *positiven* Seite her der Null nähert, und $\sin v\pi F(v)$ die a. a. O. von *Dirichlet* angegebenen Bedingungen erfüllt. Jene beiden Integrale (B) nähern sich daher mit wachsendem Werte von w der *Null*, wenn — wie hier vorausgesetzt werden soll — $f(x)$ für endliche Werte von x endlich bleibt und in jedem endlichen Intervalle nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima hat.

II. Nimmt man oben in (A) $p = 0, q = 2\lambda - 1, s = 2t\lambda$, wo λ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und setzt dann $n = 2k\lambda + h$, so erhält man den Ausdruck (A) in folgender Form:

$$\lim_{t=\infty}\int_0^r f(x)\sum_{h,k} e^{2(2k\lambda+h)x\pi i}dx \qquad \left(\begin{smallmatrix}h=0,1,2,\ldots 2\lambda-1\\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm t\end{smallmatrix}\right),$$

und wenn endlich hierin $x - kr$ für x gesetzt wird, so nimmt die *Dirichlet*sche Summenformel die Gestalt an:

$$\text{(C)}\qquad \frac{1}{2}f(0) + f(1) + \cdots + f(r-1) + \frac{1}{2}f(r) = \lim_{t=\infty}\sum_{h,k}\int_{kr}^{(k+1)r} f(x-kr)e^{2(2k\lambda+h)x\pi i}dx,$$
$$(h=0,1,2,\ldots 2\lambda-1;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm t)$$

in welcher sie sich am besten zur Benutzung bei Summirung der *Gauß*schen Reihen eignet.

III. Wird für r eine *gerade* Zahl 2μ genommen, ferner jene Funktion $f(x)$ durch $e^{\frac{x^2\lambda\pi i}{\mu}}f(x)$ ersetzt und hierbei $f(x)$ als periodisch mit der Periode 2μ angenommen, so resultiert unmittelbar aus der Gleichung (C) die Formel:

$$\text{(D)}\qquad \sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{k^2\lambda\pi i}{\mu}}f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2\lambda\pi i}{\mu}}f(x)\sum_{h=0}^{h=2\lambda-1}e^{2hx\pi i}dx,$$

und man erhält also für ganz beliebige Werte von $f(0), f(1), f(2), \ldots f(2\mu-1)$ die Summe:

$$\sum_k e^{\frac{k^2\lambda\pi i}{\mu}}f(k) \qquad (k=0,1,2,\ldots 2\mu-1)$$

*) *Crelle*'s Journal Bd. 4, S. 157 und *G. Lejeune-Dirichlet*'s Werke, Bd. I, S. 117.

durch das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2\lambda\pi i}{\mu}+(2\lambda-1)x\pi i}\cdot\frac{\sin 2\lambda x\pi}{\sin x\pi}f(x)\,dx$$

ausgedrückt, wenn nur die Funktion $f(x)$ außerhalb des Intervalles $(0, 2\mu)$ gemäß der Periodicitätsgleichung $f(x) = f(x + 2\mu)$ bestimmt wird.

IV. Nimmt man in der Formel (D) $f(k) = 1$ und führt auf der rechten Seite eine neue Integrationsvariable mittels der Substitution:

$$x = y\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} - h\,\frac{\mu}{\lambda}$$

ein, wobei $\frac{\mu}{\lambda}$ und $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ als positiv anzunehmen sind, so erhält man die fundamentale Relation:

$$\text{(E)}\qquad \sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi} = \left|\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right|\sum_{h=0}^{h=2\lambda-1} e^{\frac{\mu}{\lambda i}h^2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{y^2\pi i}dy,$$

welche eine Reciprocitätsbeziehung zwischen den zwei *Gauß*schen Reihen:

$$\sum_{h=0}^{h=2\lambda-1} e^{\frac{\mu}{\lambda i}h^2\pi},\quad \sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi}$$

darstellt. Diese Relation hat *Dirichlet* nur für den besonderen Fall $\lambda = 2$ aus seiner Summenformel abgeleitet, und dies genügt auch zur Wertbestimmung der *Gauß*schen Reihen $\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{2k^2\pi i}{\mu}}$. Aber die *allgemeinere* Relation (E) geht, wie sich hier gezeigt hat, ebenso einfach aus der *Dirichlet*schen Summenformel hervor, wie die speciellere für $\lambda = 2$, und sie gewährt überdies den Vorteil, ganz unmittelbar zur Wertbestimmung der *allgemeinen Gauß*schen Reihen $\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi}$ zu führen.

V. Um dies näher darzulegen, bezeichne ich, wie in meinem Aufsatze „Über den vierten *Gauß*schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste"*), mit $(\sqrt{re^{2\varphi i}})$ den durch die Gleichung:

$$(\sqrt{re^{2\varphi i}}) = |\sqrt{r}|\,e^{\varphi i} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\pi < \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

*) Monatsbericht der Berliner Akademie vom Juli 1880.[1])

[1]) Bd. IV, S. 275 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

definierten Wert der Quadratwurzel aus einer komplexen Größe $re^{2\varphi i}$ und mit $G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right)$ die durch die Gleichung:

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{-\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi}$$

definierte *Gauß*sche Reihe. Alsdann stellt sich die Relation (E), wenn darin $-i$ für i gesetzt wird, in folgender Weise dar:

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = \left|\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right| G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2\pi i}\,dy,$$

und da sich hieraus der Wert des Integrals, indem man $\lambda = 2, \mu = 1$ setzt, gleich $\frac{|\sqrt{2}|}{1+i}$ bestimmt, so resultiert die Hauptgleichung:

$$\text{(F)} \qquad \left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right).$$

Diese Gleichung ist allerdings nur unter der Voraussetzung, daß $\frac{\lambda}{\mu}$ positiv sei, abgeleitet worden, aber sie gilt offenbar auch für den Fall, daß $\frac{\lambda}{\mu}$ negativ ist; denn, um dies einzusehen, braucht man nur i in $-i$ zu verwandeln.

Da $G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = 0$ ist, wenn λ und μ beide ungerade sind, so bedarf es allein der Betrachtung der *Gauß*schen Reihen:

$$G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right), \quad G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right),$$

und hierbei kann noch angenommen werden, daß $\mu \equiv 1 \pmod 4$ ist, da ja gleichzeitig das Vorzeichen von λ und μ verändert werden kann, ohne den Wert des Arguments von G zu verändern. Setzt man nun:

$$\text{(G)} \qquad G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right) = (\sqrt{\mu})\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \quad G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right) = (\sqrt{2\lambda i})\left(\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

so stimmen die Zeichen $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ mit den *Legendre-Jacobi*schen Zeichen überein, welche sich auf diese Weise analytisch dargestellt finden.

Der Beweis dieser Übereinstimmung läßt sich genau so, wie ich es in dem erwähnten Aufsatze ausgeführt habe, aus den folgenden, fast evidenten Grundeigenschaften der *Gauß*schen Reihen G:

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu} + 2i\right) = G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) \qquad (\lambda, \mu \text{ beliebige ganze Zahlen}),$$

$$G(2\lambda i) = 1, \quad G\left(\frac{\mu}{2i}\right) = 1 + i \qquad (\lambda, \mu \text{ ganze Zahlen und } \mu \equiv 1 \ (\text{mod. } 4)),$$

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu\nu}\right) = G\left(\frac{\lambda\nu i}{\mu}\right) G\left(\frac{\lambda\mu i}{\nu}\right) \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ ganze Zahlen und zu einander prim}),$$

in Verbindung mit jener durch die Gleichung (F) dargestellten Haupteigenschaft derselben herleiten, und diese Gleichung (F) liefert alsdann direkt die Reciprocitätsbeziehung für das allgemeinere *Legendre-Jacobi*sche Zeichen in der bemerkenswerten Form:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{(\sqrt{\mu})}{(\sqrt{2\lambda i})}\left(\sqrt{\frac{2\lambda i}{\mu}}\right),$$

oder:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(1-\text{sgn.}\,\lambda)(1-\text{sgn.}\,\mu)},$$

wenn, wie vorausgesetzt worden, $\mu \equiv 1$ (mod. 4) ist.

ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
vom Jahre 1881. S. 1165—1172.

ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.[1]

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 22. Dezember 1881.]

Die Formeln, welche *Jacobi* in der Einleitung zu seiner Abhandlung „sur la rotation d'un corps“[2]) gegeben hat, lassen sich in einer einzigen Formel von bemerkenswerther Eleganz zusammenfassen. Bedeuten nämlich μ, ν alle positiven ungraden Zahlen, m und n aber *alle* ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, so ist der Quotient von ϑ-Reihen

$$\frac{\Sigma(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\mu q^{\frac{1}{4}\mu^2}\cdot\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}q^{\frac{1}{4}\nu^2}(x^\nu y^\nu - x^{-\nu}y^{-\nu})}{\Sigma(-q)^{m^2}x^{2m}\cdot\Sigma(-q)^{n^2}y^{2n}}$$

eine Function $F(q, x, y)$, deren Entwickelung nach ganzen Potenzen der Variabeln x und y die Gleichung

$$\text{(I)}\qquad F(q, x, y) = \sum_\mu \sum_\nu q^{\frac{1}{2}\mu\nu}(x^\mu y^\nu - x^{-\mu}y^{-\nu})$$

ergiebt. Bezeichnet man mit r den absoluten Betrag von q, so muß $r < 1$ sein, und die Gleichung (I) gilt für alle Werthe von x und y, deren absoluter Betrag zwischen $r^{\frac{1}{2}}$ und $r^{-\frac{1}{2}}$ liegt. Ich habe die Gleichung (I) bereits im Juli 1876 der Akademie mitgetheilt, aber seither noch nicht durch den Druck, sondern nur in meinen Universitätsvorlesungen veröffentlicht.

Setzt man in der Gleichung (I) $xy = z$, differentiirt nach z und nimmt alsdann $z = 1$, so resultirt die Formel

$$\text{(II)}\qquad \left\{\frac{\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu q^{\frac{1}{4}\nu^2}}{\Sigma(-q)^{n^2}x^{2n}}\right\}^2 = \frac{1}{2}\sum_\mu \sum_\nu \mu q^{\frac{1}{2}\mu\nu}(x^{\mu-\nu} + x^{-\mu+\nu}),$$

---

[1]) Vgl. Zusatz 81 am Ende des Bandes. H

[2]) *Jacobi*, Werke, Bd. II, S. 291. H

und wenn $x = e^{\xi\pi i}$, $y = e^{\eta\pi i}$ gesetzt wird, gehen die beiden Formeln (I) und (II) in folgende über:

$$(\mathrm{I}^0)\qquad \frac{\Sigma(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\mu q^{\frac{1}{4}\mu^2}\cdot\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}q^{\frac{1}{4}\nu^2}\sin(\xi+\eta)\nu\pi}{\Sigma(-q)^{m^2}\cos 2m\xi\pi\,\Sigma(-q)^{n^2}\cos 2n\eta\pi} = \sum_\mu\sum_\nu q^{\frac{1}{2}\mu\nu}\sin(\mu\xi+\nu\eta)\pi$$

$$(\mathrm{II}^0)\qquad \left\{\frac{\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu q^{\frac{1}{4}\nu^2}}{\Sigma(-q)^{n^2}\cos 2n\xi\pi}\right\}^2 = \sum_\mu\sum_\nu \mu q^{\frac{1}{2}\mu\nu}\cos(\mu-\nu)\xi\pi,$$

in welchen der absolute Betrag des imaginären Theiles von $2\pi\xi$ und $2\pi\eta$ kleiner sein muß als $\log r$.

Für die Function $F(q, x, y)$ besteht die Fundamental-Relation

$$(\mathrm{III})\qquad F(q, x, y) = q^{2mn}x^{2n}y^{2m}F(q, xq^m, yq^n).$$

mittels deren die sämmtlichen Functionswerthe von F auf solche reduciert werden, für welche die Werthe von x und y innerhalb des durch die Kreise mit den Radien $r^{\frac{1}{2}}$ und $r^{-\frac{1}{2}}$ begrenzten Ringes liegen.

Die Formel (I) kann unmittelbar aus dem *Cauchy*schen Integralausdrucke hergeleitet werden, welchen man für die Function $F(q, x, y)$ erhält, wenn man dieselbe nur als Function von y betrachtet. Denkt man sich nämlich in

$$\int\frac{F(q, x, z)}{z-y}\cdot\frac{dz}{2\pi i}$$

die Integration erst über einen den Punkt y umschließenden Kreis erstreckt, dessen Radius kleiner als $r^{-\frac{1}{2}}$ ist, alsdann über einen den Punkt y ausschließenden Kreis, dessen Radius größer als $r^{\frac{1}{2}}$ ist, so ist das Resultat der ersten Integration vermindert um das der zweiten gleich $F(q, x, y)$. Ersetzt man nun den ersten Kreis durch einen beliebig großen, den zweiten durch einen beliebig kleinen, so treten nach dem *Cauchy*schen Satze die Werthe von

$$-\frac{F(q, x, z)}{z-y}(z-\zeta)$$

an den Unstetigkeitspunkten ζ hinzu, d. h. lauter Glieder

$$-\frac{1}{2}\,\frac{q^{\frac{1}{2}\varepsilon\nu}x^{-\varepsilon\nu}}{\pm q^{\frac{1}{2}\varepsilon\nu}-y},$$

in denen ε die beiden Werthe $+1$ und -1 hat, und bei hinreichender Vergrößerung des einen und Verkleinerung des anderen Kreises werden, wie sogleich gezeigt werden soll, die Integrationsresultate unendlich klein. Auf diese Weise erhält man für $F(q, x, y)$ die Entwickelung

$$\sum_\varepsilon\sum_\nu\frac{x^{\varepsilon\nu}}{yq^{\frac{1}{2}\varepsilon\nu}-y^{-1}q^{-\frac{1}{2}\varepsilon\nu}}\qquad(\varepsilon=+1,-1),$$

welche unmittelbar zu der Gleichung (I) führt.

Jenes *Cauchy*sche Integral

$$(\mathrm{J})\qquad \int\frac{F(q, x, z)}{z-y}\,dz$$

kann auch als Summe von zwei Integralen

$$\int F(q, x, z)\,d\log z + \int\frac{F(q, x, z)}{z^{-1}-y^{-1}}\,dz^{-1}$$

dargestellt werden. Das erstere dieser beiden Integrale verschwindet, wenn die Integration über einen Kreis mit *beliebigem* Radius erstreckt wird, weil $F(q, x, z)$ eine ungrade Function von z, d. h. weil

$$F(q, x, z) = -F(q, x, -z)$$

ist; das letztere der beiden Integrale aber geht vermöge der Relation

$$F(q, x, z) = -F(q, x^{-1}, z^{-1})$$

in das Integral

$$-\int\frac{F(q, x^{-1}, z^{-1})}{z^{-1}-y^{-1}}\,dz^{-1}$$

über, und dieses — integrirt über einen Kreis mit dem Radius R — ist nichts Anderes als das Integral (J), integrirt über einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{R}$, wenn dabei x^{-1} für x und y^{-1} für y substituirt wird. Es ist also nur zu zeigen, daß das Integral (J) verschwindet, wenn die Integration über einen Kreis mit unendlich kleinem Radius erstreckt wird, und zwar auch dann, wenn x^{-1} an Stelle von x gesetzt wird. — Wird nun das Integral (J) über einen Kreis mit dem Radius $r^n\varrho$ genommen, so geht es, wenn $q = re^{\omega i}$ gesetzt und die Relation (III) angewendet wird, in

$$(rx^{-2})^n\int_0^{2\pi}\frac{F(q, x, \varrho e^{(v-n\omega)i})}{r^n-y\varrho^{-1}e^{-vi}}\,i\,dv$$

über, und der Factor $(rx^{-2})^n$ — sowie auch $(rx^2)^n$, welcher daraus entsteht, wenn man x^{-1} statt x setzt — wird mit wachsendem n unendlich klein, weil der absolute Betrag von x zwischen $r^{\frac{1}{2}}$ und $r^{-\frac{1}{2}}$ liegt; aber das mit dem Factor $(rx^{-2})^n$ multiplicirte Integral behält offenbar auch für unendlich große Zahlen n einen endlichen Werth, und es ist hiermit der oben vorbehaltene Nachweis vollständig geführt.

Setzt man $q = e^{\tau\pi i}$, $z = e^{\zeta\pi i}$ und alsdann (wie in den Monatsberichten vom Juli 1880 S. 697[1]) und vom October 1880 S. 857[2]):

$$\text{(IV)}\quad \begin{aligned} &\sum_\nu (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{1}{4}\nu^2}(z^\nu - z^{-\nu}) = i\vartheta(\zeta, \tau), \\ &\sum_\nu (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \nu q^{\frac{1}{4}\nu^2}(z^\nu + z^{-\nu}) = \frac{1}{\pi}\vartheta'(\zeta, \tau), \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 3, 5, \ldots)$$

so ist, wenn zur Vereinfachung das zweite Argument in $\vartheta(\zeta, \tau)$ weggelassen und also $\vartheta(\zeta)$ an Stelle von $\vartheta(\zeta, \tau)$ genommen wird,

$$\sum_\nu q^{\frac{1}{4}\nu^2}(z^\nu + z^{-\nu}) = \vartheta\left(\zeta + \frac{1}{2}\right), \qquad (\nu = 1, 3, 5, \ldots)$$

$$\text{(IV')}\quad \begin{aligned} &\sum_n q^{n^2} z^{2n} = q^{\frac{1}{4}} z\vartheta\left(\zeta + \frac{1+\tau}{2}\right), \\ &\sum_n (-q)^{n^2} z^{2n} = -iq^{\frac{1}{4}} z\vartheta\left(\zeta + \frac{\tau}{2}\right). \end{aligned} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

Wenn nun in üblicher Weise*) $\vartheta(\zeta)$ mit dem Index 1 versehen wird und die drei ϑ-Functionen mit den Indices 0, 2, 3 durch die Gleichungen

$$\text{(V)}\quad \vartheta_0(\zeta) = -iq^{\frac{1}{4}} z\vartheta_1\left(\zeta + \frac{\tau}{2}\right),\quad \vartheta_2(\zeta) = \vartheta_1\left(\zeta + \frac{1}{2}\right),\quad \vartheta_3(\zeta) = q^{\frac{1}{4}} z\vartheta_1\left(\zeta + \frac{1+\tau}{2}\right)$$

*) Vergl. *Königsberger*, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, S. 324 sqq.

[1]) Bd. IV, S. 287 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. IV, S. 291 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

definirt werden, so ist bei Festhaltung der übrigen Bezeichnungen

$$2\pi i x y \sqrt{q} F(q, x, y) = \frac{\vartheta'(0)\vartheta(\xi + \eta)}{\vartheta\left(\xi + \frac{\tau}{2}\right)\vartheta\left(\eta + \frac{\tau}{2}\right)}$$

oder

$$-2\pi i F(q, x, y) = \frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(\xi + \eta)}{\vartheta_0(\xi)\vartheta_0(\eta)},$$

also gemäß der Formel (I)

$$\text{(I')}\quad \frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(\xi + \eta)}{\vartheta_0(\xi)\vartheta_0(\eta)} = 4\pi \sum_\mu \sum_\nu q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \sin(\mu\xi + \nu\eta)\pi$$

und gemäß der Formel (II)

$$\text{(II')}\quad \left(\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta_0(\xi)}\right)^2 = 4\pi^2 \sum_\mu \sum_\nu \mu q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \cos(\mu - \nu)\xi\pi$$

oder auch

$$\left(\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta_0(\xi)}\right)^2 = 2\pi^2 \sum_\mu \sum_\nu (\mu + \nu) q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \cos(\mu - \nu)\xi\pi.$$

Nimmt man endlich die aus der Productentwickelung von $\vartheta(\zeta)$ unmittelbar hervorgehende Relation

$$\text{(VI)}\quad \vartheta_1'(0) = \pi\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)$$

hinzu, so resultiren die beiden Formeln

$$\text{(I'')}\quad \vartheta_2(0)\vartheta_3(0) \cdot \frac{\vartheta_0(0)\vartheta_1(\xi + \eta)}{\vartheta_0(\xi)\vartheta_0(\eta)} = 4 \sum_\mu \sum_\nu q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \sin(\mu\xi + \nu\eta)\pi,$$

$$\text{(II'')}\quad \frac{\vartheta_0(0)^2\vartheta_2(0)^2\vartheta_3(0)^2}{\vartheta_0(\xi)^2} = 2 \sum_\mu \sum_\nu (\mu + \nu) q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \cos(\mu - \nu)\xi\pi,$$

von denen die erstere, wenn man nach einander $\eta = 0, \frac{1}{2}, \frac{1+\tau}{2}$ setzt, die Reihenentwickelungen für die Quotienten

$$\frac{\vartheta_1(\xi)}{\vartheta_0(\xi)},\quad \frac{\vartheta_2(\xi)}{\vartheta_0(\xi)},\quad \frac{\vartheta_3(\xi)}{\vartheta_0(\xi)}$$

und also die im § 39 von *Jacobi*'s Fundamenta[1]) enthaltenen Reihen für die elliptischen Functionen ergiebt. — Bei der oben angegebenen Herleitung dieser beiden Formeln mittels des *Cauchy*schen Integralausdrucks für $F(q, x, y)$ bedurfte es nur der Kenntniß der Unendlichkeits-Werthe von $F(q, x, y)$ d. h. also der Nullwerthe von $\vartheta_0(\eta)$. Da diese nun aus der Productentwickelung der ϑ-Functionen resul-

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 155. H

tiren, welche selbst ebenfalls aus dem *Cauchy*schen Integralsatze herzuleiten ist*), so erweist sich dieser als die alleinige Quelle der obigen Deduction. Aber anstatt, wie es bei dieser Deduction geschehen ist, die functionentheoretischen Eigenschaften von $F(q, x, y)$ zu Grunde zu legen, kann man auch — wie jetzt gezeigt werden soll — von der formalen Zusammensetzung des mit $F(q, x, y)$ bezeichneten Ausdrucks ausgehend zu einer directen Verification der Formel (I) gelangen.

Bedeuten v und w zwei complexe Größen, für welche der absolute Werth des reellen Theiles von $2v \cdot \log q$ und $2w \cdot \log q$ kleiner ist als der absolute Werth des reellen Theiles von $\log q$ selbst, so liegt der absolute Betrag von q^v und q^w zwischen $r^{\frac{1}{2}}$ und $r^{-\frac{1}{2}}$, und es gilt daher gemäß der Formel (I) die Entwickelung:

$$\text{(VII)} \qquad q^{2vw} F(q, q^v, q^w) = \sum_{\varepsilon, \mu, \nu} \varepsilon q^{\frac{1}{2}(2v+\varepsilon\mu)(2w+\varepsilon\nu)},$$

wo sich die Summation auf die beiden Werthe $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ und auf alle positiven ungraden Zahlen μ, ν bezieht. Ferner ist gemäß der Definition der Function $F(q, x, y)$:

$$\text{(VIII)} \qquad 2q^{2vw} F(q, q^v, q^w) = \frac{\sum (-1)^n (2n+1) q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sum (-1)^n q^{\left(v+w+n+\frac{1}{2}\right)^2}}{\sum (-1)^n q^{(v+n)^2} \cdot \sum (-1)^n q^{(w+n)^2}},$$

wo sich die vier Summationen auf alle ganzen Zahlen n von $-\infty$ bis $+\infty$ beziehen. Zur Verification der Reihenentwickelung (VII) bedarf es also nur des Nachweises, daß das Reihen-Product

$$2 \sum_{\varepsilon, \mu, \nu} \varepsilon q^{\frac{1}{2}(2v+\varepsilon\mu)(2w+\varepsilon\nu)} \cdot \sum_n (-1)^n q^{(v+n)^2} \cdot \sum_n (-1)^n q^{(w+n)^2}$$

oder die hiermit identische Reihe

$$\text{(IX)} \qquad 2 \sum_{\varepsilon, \mu, \nu, m, n} (-1)^{m+n} \varepsilon q^{\frac{1}{2}(2v+\varepsilon\mu)(2w+\varepsilon\nu)+(v+m)^2+(w+n)^2} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1, -1 \\ \mu, \nu = 1, 3, 5, \ldots \\ m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{pmatrix}$$

mit dem Zähler auf der rechten Seite der Gleichung (VIII), d. h. also mit dem Reihen-Producte

$$\text{(X)} \qquad \sum_\varkappa (-1)^{\frac{\varkappa-1}{2}} \varkappa q^{\frac{1}{4}\varkappa^2} \cdot \sum_\lambda (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} q^{\left(v+w+\frac{1}{2}\lambda\right)^2} \qquad (\varkappa, \lambda = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

*) Vergl. meine beiden Mittheilungen in den Monatsberichten vom Juli und October 1880, S. 696 und S. 857.[1])

[1]) Bd. IV, S. 286 und 291 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

übereinstimmt. Setzt man in dem Ausdruck (IX)

$$\lambda = m + n + \tfrac{1}{2}\varepsilon(\mu+\nu), \quad \varrho = -m + n + \tfrac{1}{2}\varepsilon(\mu-\nu), \quad \sigma = \tfrac{1}{2}(\mu+\nu),$$

so verwandelt sich derselbe in folgenden:

$$\text{(IX')} \qquad 2 \sum_{\lambda, \varrho} (-1)^\lambda q^{(v+w)(v+w+\lambda)-\varrho(v-w)+\frac{1}{2}(\lambda^2+\varrho^2)} \sum_{\varepsilon, \sigma} (-1)^\sigma \varepsilon q^{\sigma(\sigma-\varepsilon\lambda+\varepsilon\varrho)} \sum_\mu q^{-\varepsilon\mu\varrho},$$

in welchem die letzte Summation sich auf die Werthe $\mu = 1, 3, 5, \ldots 2\sigma - 1$ erstreckt. Bei Ausführung dieser Summation wird für $\varrho \lessgtr 0$:

$$\sum_{\varepsilon, \sigma} (-1)^\sigma \varepsilon q^{\sigma(\sigma-\varepsilon\lambda+\varepsilon\varrho)} \sum_\mu q^{-\varepsilon\mu\varrho} = \sum_{\varepsilon, \sigma} (-1)^\sigma \frac{q^{\sigma(\sigma+\varepsilon\lambda-\varepsilon\varrho)} - q^{\sigma(\sigma+\varepsilon\lambda+\varepsilon\varrho)}}{q^\varrho - q^{-\varrho}},$$

und die Summation auf der rechten Seite ist auf $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ sowie auf alle ganzen *positiven* Zahlen σ zu erstrecken, da $\sigma = \frac{1}{2}(\mu + \nu)$ und sowohl μ als ν positiv ist. Setzt man aber $\sigma = \varepsilon n$, so wird der Ausdruck rechts gleich der Differenz der beiden Summen

$$\sum_n (-1)^n q^{n(n+\lambda-\varrho)}, \quad \sum_n (-1)^n q^{n(n+\lambda+\varrho)} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

dividirt durch $(q^\varrho - q^{-\varrho})$, und jede dieser beiden Summen ist gleich Null, da, wenn man $-m = n + \lambda \pm \varrho$ setzt,

$$\sum_n (-1)^n q^{n(n+\lambda\pm\varrho)} = \sum_m (-1)^{m+\lambda\pm\varrho} q^{m(m+\lambda\pm\varrho)} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

wird, und $\lambda \pm \varrho$ ungrade ist. Es ist also in dem Ausdruck (IX') nur noch $\varrho = 0$ zu nehmen, und derselbe reducirt sich daher, da alsdann $\sum_\mu q^{-\varepsilon\mu\varrho} = \sigma$ wird, auf die Reihe:

$$2 \sum_{\varepsilon, \lambda, \sigma} (-1)^{\lambda+\sigma} \varepsilon\sigma q^{\left(v+w+\frac{1}{2}\lambda\right)^2 + \left(\varepsilon\sigma - \frac{1}{2}\lambda\right)^2},$$

welche, wenn $2\varepsilon\sigma - \lambda = \varkappa$ gesetzt wird, in die Doppelreihe

$$\text{(X')} \qquad \sum_{\varkappa, \lambda} (-1)^{\frac{1}{2}(\varkappa-\lambda)} (\varkappa + \lambda) q^{\left(v+w+\frac{1}{2}\lambda\right)^2 + \frac{1}{4}\varkappa^2}$$

übergeht. In dieser verschwindet offenbar der mit λ multiplicirte Theil, weil für zwei entgegengesetzte Werthe von $\varkappa$ das Vorzeichen $(-1)^{\frac{1}{2}(\varkappa-\lambda)}$ auch entgegengesetzte Werthe hat; der übrige mit $\varkappa$ multiplicirte Theil aber verwandelt sich unmittelbar in das Reihen-Product (X), wenn an Stelle des Vorzeichens $(-1)^{\frac{1}{2}(\varkappa-\lambda)}$ das Product $(-1)^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}$ genommen wird.

Der Werth von $2q^{2vw}F(q, q^v, q^w)$ bleibt, wie aus dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (VIII) ersichtlich ist, ungeändert, wenn v oder w um eine Einheit vermehrt oder vermindert wird; aber die Reihenentwickelung (VII) muß alsdann modificirt werden. Indessen läßt sich auch die für *beliebige* Werthe von v und w geltende Reihenentwickelung in ganz einfacher Weise darstellen, wenn man mit $\varepsilon(h)$ das Vorzeichen des reellen Theiles von $h \cdot \log \frac{1}{q}$ bezeichnet; alsdann ist nämlich

$$2q^{2vw}F(q, q^v, q^w) = \sum_{m,n}\left(\varepsilon\left(v+m+\tfrac{1}{2}\right)+\varepsilon\left(w+n+\tfrac{1}{2}\right)\right)q^{2\left(v+m+\frac{1}{2}\right)\left(w+n+\frac{1}{2}\right)},$$

wenn die Summation auf alle ganzen Zahlen m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt wird. Die Doppelreihe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist eine Reihe von Potenzen einer beliebigen Variabeln, deren Exponenten die Producte von Gliedern zweier arithmetischen Reihen, und deren Coëfficienten in gewisser Weise als ± 1 oder 0 bestimmt sind; die Gleichung zeigt also, daß eine solche Doppelreihe sich als Quotient von ϑ-Reihen (VIII) ausdrücken läßt.

Nimmt man in der Formel (I′) $\xi = \frac{1}{2}, \eta = 0$, so kommt

$$\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_2(0)}{\vartheta_0(0)\vartheta_0\left(\frac{1}{2}\right)} = 4\pi\sum_{\mu,\nu}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}q^{\frac{1}{2}\mu\nu},$$

und daß der Ausdruck auf der rechten Seite gleich $\pi\vartheta_2(0)^2$ wird, kann auf *arithmetischem* Wege daraus gefolgert werden, daß die Anzahl der Darstellungen einer ungraden Zahl als Summe von zwei Quadraten sich durch den Überschuß der Divisoren von der Form $4n+1$ über diejenigen von der Form $4n+3$ ausdrückt. Es ergiebt sich daher auf diese Weise die obige Gleichung (VI) und mit Hülfe derselben resultirt aus der Gleichung (II′) für $\xi = 0$ die Formel

$$\vartheta_2(0)^2\vartheta_3(0)^2 = 4\sum_{\mu,\nu}\mu q^{\frac{1}{2}\mu\nu},$$

welche den von *Jacobi* am Schlusse der Fundamenta entwickelten *Fermat*schen Satz über die Darstellung der Zahlen als Summen von vier Quadraten enthält. Diese Formel erscheint aber hier auf wesentlich *arithmetischem* Wege hergeleitet, da bei der zuletzt angegebenen Verifications-Methode für die Gleichung (VII) nur arithmetische Mittel zur Anwendung gekommen sind.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE MULTIPLICATION DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1883. S. 717—729.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE MULTIPLICATION DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 7. Juni 1883].

I.

In seinem ersten, die Theorie der elliptischen Functionen behandelnden Aufsatz*) leitet *Abel* die Multiplicationsformeln aus dem Additionstheorem in einer Weise her, welche sich bei Anwendung der *Jacobi*'schen Bezeichnungen folgendermaassen darstellen lässt.

Die aus dem Additionstheorem:

$$\text{(A)} \qquad \sin\operatorname{am}(a+b) = \frac{\sin\operatorname{am}a \cos\operatorname{am}b\,\Delta\operatorname{am}b + \sin\operatorname{am}b\cos\operatorname{am}a\,\Delta\operatorname{am}a}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}b}$$

hervorgehenden Formeln:

$$\sin\operatorname{am}(a+b) - \sin\operatorname{am}(a-b) = \frac{2\sin\operatorname{am}b\cos\operatorname{am}a\,\Delta\operatorname{am}a}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}b}$$

$$\text{(A')} \qquad \cos\operatorname{am}(a+b) + \cos\operatorname{am}(a-b) = \frac{2\cos\operatorname{am}a\cos\operatorname{am}b}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}b}$$

$$\Delta\operatorname{am}(a+b) + \Delta\operatorname{am}(a-b) = \frac{2\,\Delta\operatorname{am}a\,\Delta\operatorname{am}b}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}b}$$

zeigen unmittelbar, indem man darin der Reihe nach $b = a, 2a, 3a, \ldots$ setzt, dass sich für jede *grade* Zahl n:

$$\text{(B)} \qquad \frac{\sin\operatorname{am}na}{\sin\operatorname{am}a}\cos\operatorname{am}a\,\Delta\operatorname{am}a, \quad \cos\operatorname{am}na, \quad \Delta\operatorname{am}na$$

und für jede *ungrade* Zahl n:

$$\text{(B')} \qquad \frac{\sin\operatorname{am}na}{\sin\operatorname{am}a}, \quad \frac{\cos\operatorname{am}na}{\cos\operatorname{am}a}, \quad \frac{\Delta\operatorname{am}na}{\Delta\operatorname{am}a}$$

---

*) Recherches sur les fonctions elliptiques. Journal für Mathematik Bd. II, S. 101 und Oeuvres complètes de *Niels Henrik Abel*, nouvelle édition, 1881, tome I, p. 263.

als rationale gebrochene Functionen von $\sin^2 \operatorname{am} a$ darstellen lassen.*) Diese erscheinen aber dabei nicht in reducirter Form, sondern Zähler und Nenner der Multiplicationsformeln erhalten bei dieser inductiven Herleitung aus dem Additionstheorem gemeinschaftliche Factoren und werden demgemäss von zu hohem Grade. Dass aber der Grad von Zähler und Nenner der *reducirten* gebrochenen Functionen von $\sin^2 \operatorname{am} a$ in den drei mit (B) bezeichneten Ausdrücken genau gleich $\frac{1}{2} n^2$ und in den drei mit (B′) bezeichneten Ausdrücken genau gleich $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$ ist, kann im Anschluss an die Deduction *Abel*'s in einer Weise dargethan werden, welche der Kürze halber hier nur für die beiden auf $\sin \operatorname{am} n a$ bezüglichen Ausdrücke entwickelt werden soll.

Gemäss der inductiven Herleitung der Multiplicationsformeln aus dem Additionstheorem, kann für *grade* Zahlen n:

$$\sin \operatorname{am} n a \cdot G(\sin^2 \operatorname{am} a) = \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a \cdot F(\sin^2 \operatorname{am} a)$$

und für *ungrade* Zahlen n:

$$\sin \operatorname{am} n a \cdot G_1(\sin^2 \operatorname{am} a) = \sin \operatorname{am} a \cdot F_1(\sin^2 \operatorname{am} a)$$

gesetzt werden, wo $F(x)$, $F_1(x)$, $G(x)$, $G_1(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, deren Coefficienten rationale Functionen von k sind. Dabei kann angenommen werden, dass weder $F(x)$ und $G(x)$ noch $x(1-x)(1-k^2 x)$ und $G(x)$ noch auch $xF_1(x)$ und $G_1(x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Alsdann sind offenbar, wenn x und y unbestimmte oder variable Grössen bedeuten, die beiden ganzen Functionen von x, y:

$$x(1-x)(1-k^2 x)F^2(x) - yG^2(x), \quad xF_1^2(x) - yG_1^2(x)$$

irreductibel, in dem Sinne, dass sie keine Factoren haben können, welche ganze rationale Functionen von x und y wären, auch wenn in deren Coefficienten Irrationalitäten zugelassen würden. Denn beide Functionen sind in Beziehung auf y nur linear, und einen von y unabhängigen Theiler können sie nicht haben, da der Voraussetzung nach weder $x(1-x)(1-k^2 x)F^2(x)$ und $G^2(x)$, noch $xF_1^2(x)$ und $G_1^2(x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben können. Die beiden Gleichungen

$$x(1-x)(1-k^2 x)F^2(x) = yG^2(x), \quad xF_1^2(x) = yG_1^2(x)$$

können nun, da sie irreductibel sind, nicht gleiche Wurzeln x haben, und ihr Grad ist daher gleich der Anzahl der *verschiedenen* Werthe von x, welche einem und dem-

*) *Anmerkung.* Der Zähler der rationalen Function, welche den ersten der drei Ausdrücke (B) darstellt, enthält den Ausdruck $(1 - \sin^2 \operatorname{am} a)(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a)$ als Factor.

selben Werthe von y entsprechen, d. h. gleich der Anzahl derjenigen Werthe a', a'', …, wofür

$$\sin^2 \operatorname{am} n a, \quad \sin^2 \operatorname{am} n a', \quad \sin^2 \operatorname{am} n a'',$$

einander gleich und

$$\sin^2 \operatorname{am} a, \quad \sin^2 \operatorname{am} a', \quad \sin^2 \operatorname{am} a'', \ldots$$

unter einander verschieden sind. Hieraus ergiebt sich, dass der Grad beider Gleichungen in x gleich n^2 ist, und dass also die Grade von

$$F(x), \quad G(x), \quad F_1(x), \quad G_1(x)$$

beziehungsweise:

$$\frac{1}{2}n^2 - 2, \quad \frac{1}{2}n^2, \quad \frac{1}{2}(n^2 - 1), \quad \frac{1}{2}(n^2 - 1)$$

sein müssen.

Die hier entwickelte Bestimmung des Grades von Zähler und Nenner der Multiplicationsformeln beruht recht eigentlich, wie auch bei *Abel* deutlich hervortritt, auf der Ermittelung der sämmtlichen Wurzeln der transcendenten Gleichung $\sin \operatorname{am} u = 0$, d. h. also auf dem Nachweise, dass erstens für alle ganzen Zahlen m, m':

$$\sin \operatorname{am}(2mK + 2m'K'i) = 0$$

wird, und dass zweitens $\sin \operatorname{am} u$ *nur* für die Werthe:

$$u = 2mK + 2m'K'i$$

verschwindet. Das Letztere folgt, wie *Abel* zeigt, mit Hülfe des Additionstheorems unmittelbar aus dem Ersteren, wenn der Modul k reell und kleiner als Eins vorausgesetzt wird. Diese Voraussetzung thut aber der Allgemeinheit jener Gradbestimmung von Zähler und Nenner der Multiplicationsformeln keinen Eintrag, da der Grad, auf welchen Zähler und Nenner der reducirten Multiplicationsformeln für jene beschränkten Werthe von k steigt, offenbar für *jeden* Werth von k derselbe bleiben muss. Es zeigt sich daher, dass die *Abel*'sche Deduction überhaupt nur die unmittelbar aus der Definition:

$$a = \int_0^{\sin \operatorname{am} a} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

hervorgehenden Eigenschaften von $\sin \operatorname{am} a$ zu Hülfe nimmt, um die *reducirte Form* der rein algebraisch durch wiederholte Anwendung des Additionstheorems entstehenden Multiplicationsformeln zu ermitteln.

Als ich dies neulich in meinen Universitäts-Vorlesungen auseinandersetzte, fügte ich hinzu, dass es wohl wünschenswerth erscheine, die Herleitung der reducirten Multiplicationsformeln aus dem Additionstheorem von *jeder* Zuhülfenahme der analytischen Eigenschaften der elliptischen Functionen frei zu machen. Einer meiner Zuhörer, Hr. Dr. *C. Runge*, fand sich dadurch angeregt, sich mit dem Gegenstande zu beschäftigen, und theilte mir schon nach einigen Tagen als Resultat seiner Bemühungen eine rein algebraische Herleitung der reducirten Multiplicationsformel für cos am mit, welche nächstens in dem von Hrn. *Weierstrass* und mir redigirten Journal für Mathematik abgedruckt werden wird.[1]) Um mir nun die Ursache des Erfolges der von Hrn. *Runge* angewendeten Methode völlig klar zu machen, suchte ich den eigentlichen Grund der Schwierigkeit zu erforschen, welcher bei *Abel* der rein algebraischen Durchführung seiner Herleitung der Multiplication aus dem Additionstheorem, d. h. der rein algebraischen Herleitung der *reducirten* Multiplicationsformel, entgegensteht. Ich fand diesen Grund, indem ich auf die in meiner „*arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*“*) entwickelten Principien zurückging, sehr bald darin, dass *im Additionstheorem selbst* Zähler und Nenner des Ausdrucks für $\sin\operatorname{am}(a+b)$, wenn man dieselben als *ganze* Grössen des aus den Elementen:

$$\sin\operatorname{am}a, \quad \cos\operatorname{am}a\cdot\varDelta\operatorname{am}a, \quad \sin\operatorname{am}b, \quad \cos\operatorname{am}b\cdot\varDelta\operatorname{am}b$$

gebildeten Rationalitäts-Bereichs auffasst, einen gemeinschaftlichen Theiler, in dem a. a. O. dargelegten Sinne, haben. Dieser Theiler lässt sich durch die jenem Gattungs-Bereich *associirten Formen***) wirklich darstellen, *und es bewährt sich also hier die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen und namentlich die darin entwickelte Association algebraischer Formen, indem dadurch das Additionstheorem der elliptischen Functionen rein algebraisch in reducirter Form dargestellt und damit eine neue Einsicht in die Natur des so vielfach behandelten Theorems erlangt wird.* Nimmt man diese *reducirte* Form des Ausdrucks für $\sin\operatorname{am}(a+b)$ zum Ausgangspunkt, so gelangt man, indem man der Reihe nach $b = a, 2a, 3a, \ldots$ annimmt, unmittelbar und in rein algebraischer Weise zu der *reducirten* Form des Ausdrucks für $\sin\operatorname{am} na$, d. h. zu der reducirten Multiplicationsformel.

---

*) Journal für Mathematik, Bd. 92, S. 1 (Festschrift zu Hrn. *Kummer*'s Doctor-Jubiläum).[2])

**) A. a. O. § 22. S. 84 und 93.[3])

[1]) *Runge*, Journal für Mathematik, Bd. 94, S. 349—351. H

[2]) Bd. II, S. 237 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[3]) Bd. II, S. 342—343 u. S. 353—354 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

II.

Es soll nun zuvörderst der gemeinsame Theiler ermittelt werden, mit welchem Zähler und Nenner der Multiplicationsformel bei der *Abel*'schen Herleitung behaftet sind.

Bezeichnet man die Ableitung von $\sin\operatorname{am}a$ mit $\sin'\operatorname{am}a$, so dass

$$\sin'\operatorname{am}a = \cos\operatorname{am}a\cdot\varDelta\operatorname{am}a$$

ist, so erhält das Additionstheorem die Form:

$$(\mathrm{A}^0)\qquad \sin\operatorname{am}(a+b) = \frac{\sin\operatorname{am}a\,\sin'\operatorname{am}b + \sin\operatorname{am}b\,\sin'\operatorname{am}a}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\,\sin^2\operatorname{am}b}$$

und geht mit Benutzung der Relation:

$$k\sin\operatorname{am}b\,\sin\operatorname{am}(b+K'i) = 1$$

über in:

$$(\mathrm{A}'')\qquad k\sin\operatorname{am}(a+b) = \frac{\sin\operatorname{am}a\,\sin'\operatorname{am}(b+K'i) - \sin'\operatorname{am}a\,\sin\operatorname{am}(b+K'i)}{\sin^2\operatorname{am}a - \sin^2\operatorname{am}(b+K'i)}.$$

In dieser Form wird es evident, dass Zähler und Nenner des Ausdrucks für $\sin\operatorname{am}(a+b)$ verschwinden, wenn $\sin\operatorname{am}a = \sin\operatorname{am}(b+K'i)$ ist, dass also, wenn man $a = rv$, $b = sv$ und für r, s ganze Zahlen nimmt, der aus (A^0) hervorgehende Ausdruck für $\sin\operatorname{am}(r+s)v$ im Zähler und Nenner alle verschiedenen Factoren

$$\sin\operatorname{am}v - \sin\operatorname{am}v_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

enthalten muss, welche durch die Gleichung:

$$\sin\operatorname{am}rv_\lambda = \sin\operatorname{am}(sv_\lambda + K'i)$$

definirt werden.

Um nun zu zeigen, dass die rationalen Functionen von $\sin^2\operatorname{am}v$, durch welche sich, je nachdem n grade oder ungrade ist, die oben unter (B) und (B′) aufgestellten Ausdrücke:

$$(\mathrm{B}'')\qquad \frac{\sin\operatorname{am}nv\cdot\sin'\operatorname{am}v}{\sin\operatorname{am}v}, \quad \frac{\sin\operatorname{am}nv}{\sin\operatorname{am}v}$$

darstellen lassen, in ihrer reducirten Form im Zähler und Nenner von den Graden

$$\frac{1}{2}n^2, \quad \frac{1}{2}(n^2-1)$$

sind, braucht man dies nur für alle Zahlen vorauszusetzen, die kleiner als eine gegebene Zahl n sind. Nimmt man alsdann für r und s irgend zwei positive Zahlen, deren Summe gleich n ist, und denkt man sich die Ausdrücke (B″) erst mittels des Additionstheorems (A^0) durch $\sin \operatorname{am} rv$, $\sin' \operatorname{am} rv$, $\sin \operatorname{am} sv$, $\sin' \operatorname{am} sv$, diese aber alsdann durch die der Voraussetzung nach schon reducirten Ausdrücke in $\sin \operatorname{am} v$, $\sin' \operatorname{am} v$ dargestellt, so erhält man rationale gebrochene Functionen von $\sin^2 \operatorname{am} v$, deren Zähler und Nenner, je nachdem $r + s$ grade oder ungrade ist, von den Graden:

$$r^2 + s^2 \text{ oder } r^2 + s^2 - 1$$

sind. Die Anzahl der verschiedenen Werthe von $\sin^2 \operatorname{am} v_h$, wofür:

$$\sin \operatorname{am} r v_h = \sin \operatorname{am} (s v_h + K'i)$$

wird, ist aber je nachdem $r + s$ grade oder ungrade ist, gleich:

$$\frac{1}{2}(r - s)^2 \text{ oder } \frac{1}{2}((r - s)^2 - 1);$$

der Grad im Zähler und Nenner der rationalen Functionen für die Ausdrücke (B″) muss sich also mindestens auf:

$$r^2 + s^2 - \frac{1}{2}(r - s)^2 \text{ oder } r^2 + s^2 - 1 - \frac{1}{2}((r - s)^2 - 1),$$

d. h. also, je nachdem $r + s$ grade oder ungrade ist, auf

$$\frac{1}{2}(r + s)^2 \text{ oder } \frac{1}{2}((r + s)^2 - 1)$$

reduciren. Dass aber keine weitere Reduction des Grades stattfinden kann, wird nunmehr in ähnlicher Weise wie bei *Abel* daraus erschlossen, dass z. B. für ungrade Zahlen n die Anzahl der verschiedenen Werthe von $\sin^2 \operatorname{am} v$, wofür:

$$\frac{\sin \operatorname{am} nv}{\sin \operatorname{am} v}$$

gleich Null wird, genau gleich $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$ ist.

Die vorstehende Deduction zeigt, *dass der überflüssige gemeinschaftliche Factor, welcher bei der auf das Additionstheorem* (A^0) *gegründeten Bildung von* $\sin \operatorname{am}(r + s)v$ *aus* $\sin \operatorname{am} rv$ und $\sin \operatorname{am} sv$ *im Zähler und Nenner erscheint, nichts Anderes ist, als der Nenner in dem Ausdrucke für* $\sin \operatorname{am}(r - s)v$, d. h. der Nenner der rationalen Function von $\sin^2 \operatorname{am} v$, in ihrer reducirten Form, durch welche, je nachdem $r - s$ grade oder ungrade ist,

$$\frac{\sin \operatorname{am}(r - s)v}{\sin \operatorname{am} v} \sin' \operatorname{am} v \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \operatorname{am}(r - s)v}{\sin \operatorname{am} v}$$

dargestellt wird. Dieser Nenner ist gleich Eins, wenn $r = s$ oder $r = s + 1$ ist, und die Bildung von $\sin \operatorname{am} nv$ aus $\sin \operatorname{am} rv$ und $\sin \operatorname{am} sv$ führt also, wenn $n = r + s$ und, je nachdem n grade oder ungrade ist, $r = s$ oder $r = s + 1$ angenommen wird, unmittelbar zur *reducirten* Multiplicationsformel. Eine solche Bildungsweise findet sich in Hrn. *Königsberger*'s „*Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen*“ (Theil II, S. 194); doch bedarf es zur Vervollständigung der dortigen Deduction, ebenso wie oben, des Nachweises, dass die aus derselben hervorgehende Multiplicationsformel wirklich in der reducirten Form ist, d. h. dass Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Theiler haben. Dieser Nachweis ist oben auf die Kenntniss der Wurzeln der Gleichung $\sin \operatorname{am} v = 0$ gegründet worden; derselbe kann für *grade* Zahlen n, also für $r = s$ rein algebraisch geführt werden, indem man die reducirte Form des Ausdrucks für $\sin \operatorname{am} \frac{1}{2} nv$ voraussetzt; ob aber für *ungrade* Zahlen n der Nachweis in ähnlicher Weise geführt werden kann, muss ich dahin gestellt sein lassen.

III.

Ebenso wie es *Jacobi* in einem seiner Aufsätze*) bei Aufstellung der Transformations- und Multiplications-Formeln gethan hat, will ich auch bei Aufstellung der reducirten Form des Additionstheorems die Grösse $k + \frac{1}{k}$ an Stelle des Moduls k einführen. Wird demgemäss:

$$k + \frac{1}{k} = 4\mathfrak{M} - 2$$

gesetzt, so ist der reciproke Werth von $\sqrt{\mathfrak{M}}$, nämlich $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, nichts Anderes als derjenige Werth des Moduls k, welcher bei einer Transformation zweiter Ordnung, und zwar bei der Verwandlung der *Jacobi*'schen Grösse q in $\sqrt{q}$ resultirt.**) Die hier mit $\mathfrak{M}$ bezeichnete Grösse ist demnach selbst das Quadrat eines durch eine Transformation zweiter Ordnung aus k hervorgehenden Moduls, und deren Einführung erweist sich dadurch als naturgemäss.

Setzt man in der bei *Jacobi* üblichen Weise:

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$$

*) „Suite des notices sur les fonctions elliptiques.“ Journal für Mathematik, Bd. IV, S. 185 und *Jacobi*'s gesammelte Werke, Bd. I, S. 266.

**) *Jacobi*'s Fundamenta S. 92 und *Jacobi*'s gesammelte Werke, Bd. I, S. 149.

und bezeichnet das unendliche Product:

$$(1+qz)(1+q^3z^{-1})(1+q^5z)(1+q^7z^{-1})(1+q^9z)(1+q^{11}z^{-1})\ldots$$

mit $P(z,q)$, so ist:*)

$$\mathfrak{M} = \frac{P^{16}(1,\sqrt{q})\,P^8(-1,\sqrt{q})}{16\sqrt{q}},$$

also, wenn man die Function $Q(z,q)$ durch die Gleichung:

$$2^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{24}}z^{\frac{1}{4}}Q(z,q) = P(z,q)$$

definirt:

$$\mathfrak{M} = Q^{16}(1,\sqrt{q})Q^8(-1,\sqrt{q}).$$

Dabei ist:

$$\mathfrak{M}-1 = Q^8(1,\sqrt{q})Q^{16}(-1,\sqrt{q})$$

und für $z = e^{\pi\zeta i}$:

$$\sqrt{k}\sin\operatorname{am}\left(\zeta K + K + \tfrac{1}{2}iK'\right) = \frac{Q(z,\sqrt{q})}{Q(z^{-1},\sqrt{q})}.$$

Da es aber für die Aufstellung der reducirten Form des Additionstheorems wesentliche Vortheile bietet, die elliptische Function sin am, mit dem Factor $\frac{k\sqrt{k}}{4k'^2}$ versehen, einzuführen, so setze ich:

$$f(a) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} + \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}-1}}\right)\sin\operatorname{am} a,$$

und diese Function $f(a)$ ist, wenn man in den obigen Formeln überall q an Stelle von $\sqrt{q}$ setzt, vollständig durch die Function $P(z,q)$ zu definiren. Wenn nämlich mit $P'(z,q)$ die nach z genommene Ableitung von $P(z,q)$ bezeichnet wird, so ist die Gleichung:

$$16\,Q^{12}(1,q)Q^{12}(-1,q)f(a) = \frac{Q(z,q)}{Q(z^{-1},q)}$$

durch den Werth:

$$a = \frac{1}{2iq}P'(-q^{-1},q)\,P^4(i,q)\,P^4(-i,q)\log(-qz)$$

erfüllt. Dann ist zugleich:

$$16 f(a) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} + \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}-1}}\right)\sin\operatorname{am}(a,k),$$

wenn die hier vorkommenden Grössen $\mathfrak{M}$ und k durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{M} = Q^{16}(1,q)Q^8(-1,q),\quad \mathfrak{M}-1 = Q^8(1,q)Q^{16}(-1,q)$$

$$k - \frac{1}{k} = -4Q^{12}(1,q)Q^{12}(-1,q)$$

*) *Jacobi*'s Fundamenta S. 89 und *Jacobi*'s gesammelte Werke, Bd. I, S. 146.

bestimmt werden. Diese Bestimmung von k resultirt unmittelbar aus der Formel No. 1 des § 36 von *Jacobi's Fundamenta*, wenn darin q^2 für q gesetzt wird. Ich bemerke noch, dass

$$P'(-q^{-1},q) = q\prod_n(1-q^{4n})^2 \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

ist, und dass daher die Zurückführung des Products $P(z,q)$ auf Θ-Reihen durch die Formel:

$$\frac{P(z,q)}{P'(-q^{-1},q)} = \frac{\sum_n q^{2n^2-n}z^n}{\sum_n(-1)^{n-1}nq^{2n^2-2n+1}} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

gegeben wird.

Es sei nun:

$$f(a) = \mathfrak{A},\quad f(b) = \mathfrak{B},$$

$$1 - 2^9\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)(2\mathfrak{M}-1)\mathfrak{A}^2 + 2^{16}\mathfrak{M}^2(\mathfrak{M}-1)^2\mathfrak{A}^4 = \mathfrak{A}'^2,$$

$$1 - 2^9\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)(2\mathfrak{M}-1)\mathfrak{B}^2 + 2^{16}\mathfrak{M}^2(\mathfrak{M}-1)^2\mathfrak{B}^4 = \mathfrak{B}'^2,$$

$$1 - 2^{16}\mathfrak{M}^2(\mathfrak{M}-1)^2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 = F(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),\ \mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2 = G(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}'+\mathfrak{A}'\mathfrak{B} = \Phi(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}'-\mathfrak{A}'\mathfrak{B} = \Psi(\mathfrak{A},\mathfrak{B}).$$

Dann wird das Additionstheorem durch die Gleichung:

$$\text{(C)}\qquad f(a+b) = \frac{\Phi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}{F(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$$

dargestellt, in welcher Φ und F „*ganze*" algebraische Grössen des aus den Elementen $\mathfrak{A},\mathfrak{A}',\mathfrak{B},\mathfrak{B}',\mathfrak{M}$ gebildeten Gattungs-Bereichs $[\mathfrak{A},\mathfrak{A}',\mathfrak{B},\mathfrak{B}',\mathfrak{M}]$ sind. Der gemeinsame Theiler dieser beiden Grössen Φ und F wird nach dem im § 14[1]) meiner Festschrift*) dargelegten Princip durch den Bruch:

$$\frac{F+u\Phi}{\mathrm{Fm}(F+u\Phi)}$$

dargestellt, wo u eine Unbestimmte bedeutet und der Kürze halber F,Φ für $F(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),\Phi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ gesetzt ist. Da nun die Fundamental-Relation:

$$\text{(D)}\qquad F(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\,G(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = \Phi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\,\Psi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$$

besteht und $\mathrm{Nm}(F+u\Phi)$ das Product:

$$(F+u\Phi)(F+u\Psi)(F-u\Phi)(F-u\Psi)$$

*) Vgl. das Citat am Schlusse von Art. I.

[1]) Bd. II, S. 297 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

bedeutet, so kommt:

$$\mathrm{Nm}(F + u\Phi) = F^2 \cdot (F + u\Phi + u\Psi + u^2 G)(F - u\Phi - u\Psi + u^2 G).$$

Die Norm von $F + u\Phi$ hat daher den von u unabhängigen Theiler F^2, und es ist also nach der *Definition* von $\mathrm{Fm}(F + u\Phi)$:

$$\mathrm{Nm}(F + u\Phi) = F^2 \cdot \mathrm{Fm}(F + u\Phi),$$

wenn F^2 der *grösste* von u unabhängige Theiler der Norm und demgemäss $\mathrm{Fm}(F + u\Phi)$ eine *primitive* Form der Unbestimmten u ist. Dass dies aber wirklich der Fall ist, leuchtet schon daraus ein, dass die beiden Functionen $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ keinen gemeinsamen Theiler (erster Stufe) haben, und dass demnach, wenn

$$\mathrm{Fm}(F + u\Phi) = (F + u\Phi + u\Psi + u^2 G)(F - u\Phi - u\Psi - u^2 G)$$

genommen wird, $\mathrm{Fm}(F + u\Phi)$ in der That eine (eigentlich oder uneigentlich) *primitive* Form wird. Dividirt man nun sowohl Φ als auch F durch ihren gemeinsamen Theiler:

$$\frac{F + u\Phi}{\mathrm{Fm}(F + u\Phi)},$$

so werden die beiden Quotienten der Division beziehungsweise:

$$(\Phi + uG)(F - u\Phi - u\Psi + u^2 G), \quad (F + u\Psi)(F - u\Phi - u\Psi + u^2 G),$$

und man erhält sonach für den Bruch $\frac{\Phi}{F}$ den Ausdruck:

$$(\mathrm{C}^0) \qquad \frac{\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + uG(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + u\Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})},$$

welcher gemäss der Gleichung (C) den Wert von $f(a + b)$, und zwar in *reducirter Form*, darstellt.

Dass der Ausdruck (C^0), zu welchem die allgemeine Theorie der algebraischen Divisoren geführt hat, seinem Werthe nach mit dem Bruche $\frac{\Phi}{F}$ übereinstimmt, lässt sich unmittelbar mittels der Gleichung (D) verificiren. Dass ferner der Ausdruck (C^0) in der That ein *reducirter* Bruch ist, geht aus der Gleichung:

$$F_1 F + G_1 G + \Phi_1 \Phi + \Psi_1 \Psi = 1$$

hervor, in welcher F_1, G_1, Φ_1, Ψ_1 die Werthe:

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1 + 2^4(2\mathfrak{M} - 1)(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) - 2^{11}\mathfrak{M}(\mathfrak{M} - 1)(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)^2 \\
G_1 &= 2^{12}\mathfrak{M}(\mathfrak{M} - 1)(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2) \\
\Phi_1 &= 2^3(1 - 2\mathfrak{M} - 2^7\mathfrak{M}(\mathfrak{M} - 1)(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2))\Phi \\
\Psi_1 &= 2^3(1 - 2\mathfrak{M} - 2^7\mathfrak{M}(\mathfrak{M} - 1)(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2))\Psi
\end{aligned}$$

haben und also „*ganze*“ Grössen des Bereichs $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}]$ sind. Denn die angegebene Gleichung zeigt, dass das Modulsystem (F, G, Φ, Ψ) äquivalent Eins ist, und dies ist nach § 22[1]) meiner oben citirten Festschrift die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Form mit den Unbestimmten U, U', U'', U''':

$$FU + GU' + \Phi U'' + \Psi U'''$$

„*eigentlich*“ primitiv sei. Die Grössen F, G, Φ, Ψ haben daher überhaupt keinen Divisor irgend welcher Stufe mit einander gemein.

Durch die Relation $FG = \Phi\Psi$ lassen sich die Gleichungen:

$$(\mathrm{D}') \qquad \begin{aligned} (\Phi + u'F)(\Phi + uG) &= E\Phi, \\ (\Phi + u'F)(F + u\Psi) &= EF, \end{aligned}$$

in denen E die eigentlich primitive Form:

$$u'F + uG + \Phi + uu'\Psi$$

bedeutet, unmittelbar verificiren. Diese Gleichungen (D′) ergeben eine Zerlegung von Zähler und Nenner des Bruches $\frac{\Phi}{F}$, welcher $f(a + b)$ darstellt, in je zwei Factoren, und zwar im *strengsten* Sinne der absoluten Äquivalenz, d. h. hier, da der Gattungs-Bereich $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}]$ genau drei unabhängige Elemente $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}$ enthält, im Sinne einer Äquivalenz *vierter* Stufe (vgl. meine Festschrift S. 91).[2]) Die Factoren:

$$\Phi + u'F, \quad \Phi + uG, \quad F + u\Psi$$

sind ganze algebraische, dem Gattungs-Bereich $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}]$ „*associirte*“ Formen, und die erste dieser drei Formen stellt den grössten gemeinsamen Theiler von Φ und F dar. Diese drei Formen sind nicht irreductibel; jede derselben lässt sich vielmehr noch weiter in je zwei Factoren zerlegen.

IV.

Bezeichnet man zur Abkürzung die durch den Bruch $\frac{\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}$ dargestellte algebraische Function der Grössen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ durch $\mathrm{H}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und fixirt die darin vorkommenden Quadratwurzeln $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ so, dass dieselben für $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$ der positiven Einheit gleich werden, so genügt die Function $\mathrm{H}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ den Relationen:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}(x, 0) = x, \quad \mathrm{H}(x, y) = \mathrm{H}(y, x) = -\mathrm{H}(-x, -y), \\
&\mathrm{H}(\mathrm{H}(x, y), z) = \mathrm{H}(\mathrm{H}(x, z), y) = \mathrm{H}(\mathrm{H}(y, z), x),
\end{aligned}$$

---

[1]) Bd. II, S. 343 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. II, S. 351 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

welche durch Rechnung verificirt werden können. Aus diesen Relationen folgt nicht nur, dass $\mathrm{H}(\mathrm{H}(x, y), z)$ eine symmetrische Function von x, y, z ist, sondern auch, dass ebenso:

$$\mathrm{H}\big(\mathrm{H}(\mathrm{H}(x, y), z), t\big)$$

eine symmetrische Function von x, y, z, t und mit:

$$\mathrm{H}\big(\mathrm{H}(x, y),\ \mathrm{H}(z, t)\big)$$

übereinstimmend wird. Es ist demnach allgemein, wenn die auf diese Weise aus r Grössen $z_1, z_2, \ldots z_r$ gebildete Function mit H_r bezeichnet wird:

$$\mathrm{H}_{r+s}(z_1, z_2, \ldots z_{r+s}) = \mathrm{H}\big(\mathrm{H}_r(z_1, z_2, \ldots z_r),\ \mathrm{H}_s(z_1, z_2, \ldots z_s)\big).$$

Setzt man endlich der Einfachheit halber für den Fall *gleicher* Elemente z:

$$\mathrm{H}_n(z, z, \ldots z) = \mathrm{H}_n(z)$$

und

$$\mathrm{H}_0(z) = 0,\quad \mathrm{H}_1(z) = z,\quad \mathrm{H}_{-1}(z) = -z,$$

so ist allgemein für positive und negative Zahlen r, s:

$$\mathrm{H}_{r+s}(z) = \mathrm{H}(\mathrm{H}_r(z), \mathrm{H}_s(z)).$$

Dies vorausgeschickt, lässt sich die Aufgabe der algebraischen Herleitung der Multiplicationsformeln aus dem Additionstheorem in folgender Weise präcisiren: es soll gezeigt werden, dass, wenn H'_n ebenso aus H_n gebildet wird wie $\mathfrak{A}'$ aus $\mathfrak{A}$, die algebraischen Functionen $\mathrm{H}_n(z)$, $\mathrm{H}'_n(z)$ sich in der Form:

$$\mathrm{H}_n(z) = z \cdot z^{(n)} \frac{P_n(z^2)}{Q_n(z^2)},\quad \mathrm{H}'_n(z) = z^{(n-1)} \frac{R_n(z^2)}{Q_n^2(z^2)}$$

darstellen lassen, wo, je nachdem n grade oder ungrade ist,

$$z^{(n)} = z' \text{ oder } z^{(n)} = 1$$

genommen werden muss, und wo P_n, Q_n, R_n ganze rationale Functionen von z^2 bedeuten, die so beschaffen sind, dass Zähler und Nenner in den Ausdrücken von $\mathrm{H}_n(z)$ und $\mathrm{H}'_n(z)$ für keinen Werth von z gleichzeitig verschwinden, und dass alsdann die Grade von:

die Grade von:	P_n,	Q_n,	R_n
für *grade* n:	$\frac{1}{2}n^2 - 2$,	$\frac{1}{2}n^2$,	n^2,
für *ungrade* n:	$\frac{1}{2}(n^2-1)$,	$\frac{1}{2}(n^2-1)$,	$n^2 - 1$

in Beziehung auf z^2 werden.

Die hier bezeichnete Aufgabe wird unmittelbar gelöst, wenn man bei der Bildung von H_{r+s} aus H_r und H_s die Function H in der reducirten Form (C^0) zu Grunde legt. Setzt man nämlich H_r, H_s in der nachzuweisenden Form voraus, so resultirt eine Gleichung:

$$\mathrm{H}_{r+s}(z) = \frac{\Phi_0 + uG_0}{F_0 + u\Psi_0},$$

wenn darin

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= z\big(z^{(r)} z^{(s-1)} P_r Q_r R_s + z^{(r-1)} z^{(s)} P_s Q_s R_r\big)\\
\Psi_0 &= z\big(z^{(r)} z^{(s-1)} P_r Q_r R_s - z^{(r-1)} z^{(s)} P_s Q_s R_r\big)\\
F_0 &= Q_r^2 Q_s^2 - z^4 z^{(r)} z^{(r)} z^{(s)} z^{(s)} P_r^2 P_s^2\\
G_0 &= z^2\big(z^{(r)} z^{(r)} P_r^2 Q_s^2 - z^{(s)} z^{(s)} P_s^2 Q_r^2\big)
\end{aligned}$$

genommen wird. Die Functionen Φ_0, Ψ_0, F_0, G_0 entstehen beziehungsweise aus $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $\Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn in diesen

$$\mathfrak{A} = \mathrm{H}_r(z),\quad \mathfrak{B} = \mathrm{H}_s(z)$$

gesetzt und alsdann mit $Q_r^2 Q_s^2$ multiplicirt wird. Da nun oben gezeigt worden ist, dass das Modulsystem (Φ, Ψ, F, G) äquivalent Eins ist, so folgt, dass:

$$Q_r^2 Q_s^2 \equiv 0 \ (\text{modd. } \Phi_0, \Psi_0, F_0, G_0)$$

sein muss. Gäbe es nun irgend einen Werth von z, für welchen gleichzeitig:

$$\Phi_0 = \Psi_0 = F_0 = G_0 = 0$$

wäre, so müsste auch Q_r oder Q_s gleich Null sein. Auf Grund der Gleichungen $F_0 = 0, G_0 = 0$ würde aber für $Q_r = 0$ auch:

$$zz^{(r)} z^{(s)} P_r P_s = 0,\quad zz^{(r)} P_r Q_s = 0$$

sein müssen, während der Voraussetzung nach weder $zz^{(r)}P_r$ und Q_r noch $zz^{(s)}P_s$ und Q_s gleichzeitig verschwinden. Der Ausdruck für $zz^{(r+s)}\mathrm{H}_{r+s}(z)$, nämlich:

$$zz^{(r+s)} \frac{\Phi_0 + uG_0}{F_0 + u\Psi_0} \quad \text{oder} \quad zz^{(r+s)} \frac{\Phi_0 + u^0 zz^{(r+s)} G_0}{F_0 + u^0 zz^{(r+s)} \Psi_0},$$

ist hiernach ein reducirter Bruch, in dem Sinne, dass Zähler und Nenner nur eine *primitive* Linearform von u als gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn:

$$\frac{1}{zz^{(r+s)}}\Phi_0,\ G_0,\ F_0,\ zz^{(r+s)}\Psi_0$$

sind ganze Grössen des *natürlichen* Rationalitäts-Bereichs $[z^2, \mathfrak{M}]$; sowohl der in den zwei ersten als auch der in den zwei letzten dieser vier Grössen enthaltene gemeinsame Theiler erster Stufe lässt sich daher ebenfalls als eine *Grösse* des Bereichs $[z^2, \mathfrak{M}]$, also ohne Zuhülfenahme von *Formen*, vollständig darstellen.

Die Gradbestimmungen der von u unabhängigen Factoren in $\Phi_0 + uG_0$ und $F_0 + u\Psi_0$ kann auf die Gleichungen (D′) gegründet werden, aus denen analoge Gleichungen:

$$(\mathrm{D}^0) \qquad \begin{aligned} (\Phi_0 + u'F_0)(\Phi_0 + uG_0) &= E_0\Phi_0, \\ (\Phi_0 + u'F_0)(F_0 + u\Psi_0) &= E_0F_0, \end{aligned}$$

hervorgehen. Dabei ist E_0 eine primitive Form von u, u', und $\Phi_0 + u'F_0$ ist der Nenner des Ausdrucks für $\mathrm{H}_{r-s}(z)$. Wird also der Grad des von u' unabhängigen Factors in $\Phi_0 + u'F$ als bekannt angenommen, so bestimmen sich daraus die Grade der von u unabhängigen Factoren von $\Phi_0 + uG_0$ und $F_0 + u\Phi_0$, und zwar genau in derselben Weise wie es in Art. II ausgeführt ist.

Nachdem auf die angegebene Weise der Grad von Zähler und Nenner des Ausdrucks für $\mathrm{H}_{r+s}(z)$, d. h. also der Grad von $P_{r+s}(z^2)$ und $Q_{r+s}(z^2)$, bestimmt worden, ergiebt sich der Grad des Zählers von $\mathrm{H}'_{r+s}(z)$, d. h. also der Grad von $R_{r+s}(z^2)$, einfach aus der Definition von H'. Denn diese ist durch eine Gleichung:

$$1 - c\mathrm{H}^2 + c'\mathrm{H}^4 = \mathrm{H}'^2$$

gegeben, in welcher die Coefficienten c, c' nur von $\mathfrak{M}$ abhängig sind, und eben diese Definition zeigt auch, dass Zähler und Nenner des daraus resultirenden Ausdrucks von H' für keinen Werth von z gleichzeitig verschwinden.

WEITERE BEMERKUNGEN ÜBER DIE MULTIPLICATION DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1883. S. 949—956.

WEITERE BEMERKUNGEN ÜBER DIE MULTIPLICATION DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 26. Juli 1883.]

In meiner vorigen Mittheilung[1]) habe ich gezeigt, wie mit Hülfe der associirten Formen das Additionstheorem der elliptischen Functionen in reducirter Form dargestellt werden kann, und wie daraus die Formeln für die Multiplication unmittelbar in ihrer reducirten Form hervorgehen. Man kann aber bei dieser *Anwendung* des Additionstheorems die Einführung der associirten Formen, gemäss den allgemeinen, in meiner Festschrift[2]) gegebenen Entwickelungen, auf zwei verschiedene Weisen umgehen, und man gelangt dabei zu zwei verschiedenen Methoden der Herleitung der Multiplications-Formeln, welche ich im Anschluss an meine vorige Mittheilung und unter Beibehaltung der darin angenommenen Bezeichnungen hier auseinandersetzen will.

I.

Nach den mit (C) und (D) bezeichneten beiden Gleichungen kann das Additionstheorem in den zwei verschiedenen Weisen:

$$(C') \qquad \begin{aligned} f(a+b)\cdot F(f(a), f(b)) &= \Phi(f(a), f(b)) \\ f(a+b)\cdot \Psi(f(a), f(b)) &= G(f(a), f(b)) \end{aligned}$$

dargestellt werden, deren Zusammenfassung in der Gleichung:

$$f(a+b)[F(f(a), f(b)) + u\Psi(f(a), f(b))] = \Phi(f(a), f(b)) + uG(f(a), f(b))$$

durch die Theorie der associirten Formen ermöglicht wird und zu dem mit (C^0) bezeichneten Ausdrucke für $f(a+b)$ führt. Hierbei ist:

$$f(a) = \frac{k\sqrt{k}}{4(k^2-1)} \sin \operatorname{am}(a, k), \quad f(b) = \frac{k\sqrt{k}}{4(k^2-1)} \sin \operatorname{am}(b, k),$$

[1]) Bd. IV, S. 319 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. II, S. 237 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

und wenn:

$$f(c) = z, \quad f(nc) = \mathrm{H}_n(z)$$

gesetzt wird, so geht aus dem Gleichungssystem (C′), welches die Darstellung des Additionstheorems in reducirter Form vertritt, das System der beiden Gleichungen:

$$\text{(E)} \qquad F_0 \mathrm{H}_{r+s}(z) = \Phi_0, \quad \Psi_0 \mathrm{H}_{r+s}(z) = G_0$$

hervor, welches die Darstellung der Multiplications-Formeln in ihrer reducirten Form enthält. Denn nach den in meiner vorigen Mittheilung eingeführten Bezeichnungen sind

$$F_0, \quad G_0, \quad \frac{\Phi_0}{z^{(r+s)}}, \quad \frac{\Psi_0}{z^{(r+s)}}$$

ganze rationale Functionen von z, und $z^{(r+s)}$ ist für ungrade Werthe von $r+s$ gleich Eins, für grade Werthe aber gleich z', d. h. gleich der Quadratwurzel aus:

$$1 - \left(k + \frac{1}{k}\right)\left(4k - \frac{4}{k}\right)^2 z^2 + \left(4k - \frac{4}{k}\right) z^4;$$

der grösste gemeinsame Theiler von F_0 und $\frac{\Psi_0}{z^{(r+s)}}$ kann daher auch als grösster gemeinsamer Divisor von F_0 und Ψ_0 selbst bezeichnet werden, und wenn:

$$\mathrm{Dv}(F_0, \Psi_0)$$

eben diesen Divisor bedeutet, so folgt unmittelbar aus den Gleichungen (E), dass:

$$\text{(E′)} \qquad \mathrm{H}_{r+s}(z) = \frac{\mathrm{Dv}(G_0, \Phi_0)}{\mathrm{Dv}(F_0, \Psi_0)}$$

sein muss. Diese Gleichung, welche dasselbe besagt, wie die Gleichung:

$$\mathrm{H}_{r+s}(z) = \frac{\Phi_0 + uG_0}{F_0 + u\Psi_0}$$

in meiner vorigen Mittheilung (vergl. S. 333), ergiebt $\mathrm{H}_{r+s}(z)$ in der reducirten Form, da die vier Functionen F_0, G_0, Φ_0, Ψ_0, wie in meiner vorigen Mittheilung nachgewiesen ist, für keinen Werth von z gleichzeitig verschwinden und also der grösste gemeinsame Theiler von G_0 und Φ_0 mit demjenigen von F_0 und Ψ_0 keinen Factor gemein haben kann.

Die Darstellung der Multiplications-Formeln in ihrer reducirten Form ist zwar in der Gleichung (E′) gegeben, aber zur Bestimmung des Grades von Zähler und Nenner muss man noch die analoge Gleichung:

$$\text{(E″)} \qquad \mathrm{H}_{r-s}(z) = \frac{\mathrm{Dv}(G_0, \Psi_0)}{\mathrm{Dv}(F_0, \Phi_0)}$$

zu Hülfe nehmen, welche aus den beiden Gleichungen:

$$\text{(E}^0\text{)} \qquad \mathrm{H}_{r-s}(z) = \frac{\Psi_0}{F_0} = \frac{G_0}{\Phi_0}$$

resultirt.

Da gemäss den Gleichungen (E), (E⁰), (E′), (E″):

$$\frac{\Phi_0}{F_0} = \frac{G_0}{\Psi_0} = \frac{\mathrm{Dv}(G_0, \Phi_0)}{\mathrm{Dv}(F_0, \Psi_0)}, \quad \frac{\Psi_0}{F_0} = \frac{G_0}{\Phi_0} = \frac{\mathrm{Dv}(G_0, \Psi_0)}{\mathrm{Dv}(F_0, \Phi_0)}$$

ist, so muss:

$$\text{(F)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{Dv}(F_0, \Phi_0) \cdot \mathrm{Dv}(F_0, \Psi_0) = F_0, \quad \mathrm{Dv}(G_0, \Phi_0) \cdot \mathrm{Dv}(G_0, \Psi_0) = G_0 \\ &\mathrm{Dv}(F_0, \Phi_0) \cdot \mathrm{Dv}(G_0, \Phi_0) = \Phi_0, \quad \mathrm{Dv}(F_0, \Psi_0) \cdot \mathrm{Dv}(G_0, \Psi_0) = \Psi_0 \end{aligned}$$

sein. Denn die erste und dritte dieser vier Gleichungen geht daraus hervor, dass der Bruch $\frac{\Phi_0}{F_0}$, wenn er auf die reducirte Form gebracht wird,

$$\frac{\Phi_0}{\mathrm{Dv}(F_0, \Phi_0)} \text{ als Zähler und } \frac{F_0}{\mathrm{Dv}(F_0, \Phi_0)} \text{ als Nenner}$$

haben muss, während andererseits derselbe Bruch $\frac{\Phi_0}{F_0}$ in seiner reducirten Form durch den Ausdruck:

$$\frac{\mathrm{Dv}(G_0, \Phi_0)}{\mathrm{Dv}(F_0, \Psi_0)}$$

dargestellt ist. In ähnlicher Weise ergeben sich aus der reducirten Form des Bruches $\frac{\Psi_0}{G_0}$ die zweite und vierte von jenen vier Gleichungen (F).

Die in meiner vorigen Mittheilung angegebene Bildungsweise der Functionen F_0 und G_0 zeigt, dass die Grade von:

	F_0,	G_0
für *grade* Werthe von $r+s$:	$2(r^2+s^2)$,	$2(r^2+s^2-1)$
für *ungrade* Werthe:	$2(r^2+s^2-1)$,	$2(r^2+s^2)$

in Beziehung auf z werden. Setzt man also voraus, dass die Grade von Zähler und Nenner des reducirten Ausdrucks (E″) für $\mathrm{H}_{r-s}(z)$, d. h. die Grade von:

	$\mathrm{Dv}(F_0, \Phi_0)$,	$\mathrm{Dv}(G_0, \Psi_0)$
für *grade* Werthe von $r \pm s$:	$(r-s)^2$	$(r-s)^2 - 1$
für *ungrade* Werthe:	$(r-s)^2 - 1$	$(r-s)^2$

sind, so folgt aus den beiden ersten der vier Gleichungen (F), dass die Grade von:

	$\mathrm{Dv}(F_0, \Psi_0)$,	$\mathrm{Dv}(G_0, \Phi_0)$
für *grade* Werthe von $r + s$:	$(r + s)^2$,	$(r + s)^2 - 1$
für *ungrade* Werthe:	$(r + s)^2 - 1$,	$(r + s)^2$

sein müssen, und hiermit ist die Gradbestimmung für Zähler und Nenner des reducirten Ausdrucks (E′) von $\mathrm{H}_{r+s}(z)$ vollständig geliefert.

Abel hat ausser der ersten, im Eingang meiner vorigen Mittheilung erwähnten, eine zweite Methode der Herleitung der Multiplications-Formeln gegeben*), in welcher er die analytischen Eigenschaften der elliptischen Functionen nicht zu Hülfe nimmt, sondern nur algebraische Betrachtungen anwendet. Diese zweite *Abel*'sche Entwickelung der Multiplications-Formeln aus dem Additionstheorem, auf welche ich neuerdings durch meinen Freund *Weierstrass* aufmerksam gemacht worden bin, lässt sich unter Benutzung der obigen Bezeichnungen folgendermaassen darstellen.

Aus den Additionsformeln:

$$f(a+b) = \frac{\Phi(f(a), f(b))}{F(f(a), f(b))}, \quad f(a-b) = \frac{\Psi(f(a), f(b))}{F(f(a), f(b))}$$

folgt, unter Anwendung der Relation $FG = \Phi\Psi$, die Gleichung:

$$f(a+b) f(a-b) = \frac{G(f(a), f(b))}{F(f(a), f(b))},$$

und hieraus geht für die Multiplication der elliptischen Functionen die Formel:

$$\text{(G)} \qquad \mathrm{H}_{r+s}(z) \cdot \mathrm{H}_{r-s}(z) = \frac{G_0}{F_0}$$

hervor, welche — übereinstimmend mit der Formel (44′) bei *Abel* — den Ausgangspunkt der dortigen und auch der schon in meiner vorigen Mittheilung (S. 327) citirten *Königsberger*'schen Entwickelung für den (allein in Betracht kommenden) Fall der Multiplication mit *ungraden* Zahlen bildet. Setzt man $r = s + 1$, so wird $\mathrm{H}_{r-s}(z) = z$, und es resultirt die Gleichung:

$$\text{(H)} \qquad \mathrm{H}_{2r+1}(z) = \frac{\frac{1}{z} G_0}{F_0},$$

*) Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. Journal für Mathematik. Bd. IV, S. 258 und Oeuvres complètes de *Niels Henrik Abel*, nouvelle édition, 1881. tome I, p. 543.

durch welche $\mathrm{H}_{2r+1}(z)$ in *reducirter* Form dargestellt wird. Der Nachweis, dass dies wirklich der Fall ist, lässt sich direct aus den obigen Gleichungen (E′), (E″), (F) entnehmen, welche für $r = s + 1$ ergeben, dass gemäss (E″):

$$\text{(J)} \qquad \mathrm{Dv}(G_0, \Psi_0) = z, \quad \mathrm{Dv}(F_0, \Phi_0) = 1,$$

folglich G_0 durch z theilbar und nun gemäss (F):

$$\text{(K)} \qquad \mathrm{Dv}(G_0, \Phi_0) = \frac{1}{z} G_0, \quad \mathrm{Dv}(F_0, \Psi_0) = F_0$$

also endlich gemäss (E′) der Bruch auf der rechten Seite von (H) ein reducirter sein muss. Derselbe Nachweis ist auch schon von *Abel* a. a. O. vollständig geführt, und es ist dabei ebenfalls — wie besonders hervorgehoben werden muss — das Additionstheorem in den *beiden* Ausdrucksweisen (C′):

$$\text{(C}'\text{)} \qquad f(a+b) = \frac{\Phi(f(a), f(b))}{F(f(a), f(b))} = \frac{G(f(a), f(b))}{\Psi(f(a), f(b))}$$

benutzt worden, deren Zusammenfassung mittels der Theorie der associirten Formen das Additionstheorem *in reducirter Form* ergiebt. Dies scheint daher den am Schlusse des Art. II meiner vorigen Mittheilung ausgesprochenen Zweifel noch zu bestätigen, nämlich den Zweifel daran, dass der Nachweis der reducirten Form des Bruches für $\mathrm{H}_{2r+1}(z)$ in (H) in ähnlicher Weise wie für $\mathrm{H}_{2r}(z)$ geführt werden kann, ohne wie in jenem Art. II die analytischen Eigenschaften der elliptischen Functionen oder wie in jenem Art. IV die reducirte Form des Additionstheorems zu Hülfe zu nehmen.

In der angeführten *Abel*'schen Deduction erscheint auf den ersten Blick die Gleichung (G), sowie die Annahme $r = s + 1$, welche den Ausgangspunkt bilden, als die Hauptsache und das spätere Zurückgehen auf die Additionsformeln (C′) als etwas nur Beiläufiges. Die obige Entwickelung zeigt dagegen, dass es sich gerade umgekehrt verhält. Sobald man überhaupt von den Gleichungen (C′) Gebrauch machen muss, bedarf es weder der beschränkenden Annahme $r = s + 1$ noch der Benutzung der zusammengesetzten Additionsformel (G) an Stelle der einfachen (E):

$$\mathrm{H}_{r+s}(z) = \frac{\Phi_0}{F_0} = \frac{G_0}{\Psi_0};$$

grade *diese* Gleichungen führen vielmehr ganz direct und ganz allgemein in der Gleichung (E′) zum reducirten Ausdruck für $\mathrm{H}_{r+s}(z)$. Freilich vereinfacht sich derselbe formal für den Fall $r = s + 1$ insofern, als dann gemäss (K) der Zähler gleich $\frac{1}{z} G_0$ und der Nenner gleich F_0 wird; aber für den bezüglichen Nachweis muss man doch ebenso den Ausdruck für $H_{r-s}(z)$ zu Hülfe nehmen, wie für die obige Gradbestimmung von Zähler und Nenner des reducirten Ausdrucks von $H_{r+s}(z)$ bei *beliebigen* Werthen von r und s.

II.

Der eine wie der andere der durch die Gleichung (C′) gegebenen Ausdrücke von $f(a+b)$ genügt der Gleichung:

$$F^2Z^4 - (\Phi^2 + \Psi^2)Z^2 + G^2 = 0, \tag{L}$$

wenn der Kürze halber

$$F, \Phi, \Psi, G$$

an Stelle von

$$F(f(a), f(b)), \quad \Phi(f(a), f(b)), \quad \Psi(f(a), f(b)), \quad G(f(a), f(b))$$

gesetzt wird. Diese Gleichung definirt gewissermaassen den algebraischen Ausdruck von $f(a+b)$ *in der reducirten Form*, nämlich in derselben Weise, wie jede *ganze* algebraische Grösse eines Gattungs-Bereichs, als solche, durch eine Gleichung charakterisirt wird, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz der Unbekannten gleich Eins ist, während die übrigen Coëfficienten *ganze* Grössen des natürlichen Rationalitäts-Bereichs sind, dem der Gattungs-Bereich entstammt. Die vier Wurzeln der Gleichung (L) sind:

$$Z = \pm f(a+b), \quad \pm f(a-b).$$

und das aus den drei Coëfficienten der Gleichung gebildete Modulsystem:

$$(F^2, \Phi^2 + \Psi^2, G^2)$$

ist *aequivalent Eins*, da nach Art. III. meiner vorigen Mittheilung eine Gleichung:

$$F_1 F + G_1 G + V(\Phi^2 + \Psi^2) = 1 \tag{M}$$

besteht, in welcher F_1, G_1, V „*ganze*" Grössen des Bereichs $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}]$ sind. Hierbei ist V durch die Gleichung $V\Phi = \Phi_1$ bestimmt und also:

$$V = 2^3(1 - 2\mathfrak{M} - 2^7\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)).$$

Es ist daher:

$$F_0^2 Z^4 - (\Phi_0^2 + \Psi_0^2)Z^2 + G_0^2 \tag{N}$$

eine ganze Grösse des natürlichen Rationalitäts-Bereichs $(\mathfrak{M}, Z, z^2)$, welche für keinen von Z unabhängigen Werth von z, aber für die vier Werthe von Z:

$$Z = \pm H_{r+s}(z), \quad \pm H_{r-s}(z)$$

verschwindet und also in vier Factoren zerlegbar ist, die, je nachdem $r + s$ grade oder ungrade ist, dem Rationalitäts-Bereich:

$$[\mathfrak{M}, Z, z, z'] \text{ oder } [\mathfrak{M}, Z, z]$$

angehören. *Diese Zerlegung des Ausdrucks* (N) *liefert unmittelbar die reducirten Brüche für $H_{r+s}(z)$ und $H_{r-s}(z)$.* Denn, wenn

$$F_0^2 Z^4 - (\Phi_0^2 + \Psi_0^2)Z^2 + G_0^2 = (Q^2Z^2 - P^2)(S^2Z^2 - R^2)$$

ist, so sind die Werthe von $H_{r+s}^2(z)$, $H_{r+s}^2(z)$ durch die Brüche:

$$\frac{P^2}{Q^2}, \quad \frac{R^2}{S^2}$$

gegeben, und diese sind in reducirter Form, weil die drei ganzen Functionen von z:

$$F_0^2, \; \Phi_0^2 + \Psi_0^2, \; G_0^2$$

keinen Theiler mit einander gemein haben. Da die Grade von:

	F_0^2,	G_0^2
für *grade* Werthe von $r+s$:	$2(r^2+s^2)$,	$2(r^2+s^2-1)$
für *ungrade* Werthe aber:	$2(r^2+s^2-1)$,	$2(r^2+s^2)$

in Beziehung auf z^2 sind, da ferner die Grade von:

	R^2,	S^2
für *grade* Werthe von $r+s$ gleich:	$(r-s)^2-1$,	$(r-s)^2$
für *ungrade* Werthe aber gleich:	$(r-s)^2$,	$(r-s)^2-1$

vorausgesetzt werden können, so ergeben sich aus den Relationen:

$$F_0^2 = Q^2S^2, \quad G_0^2 = P^2R^2$$

die Grade von:

	P^2,	Q^2
für *grade* Werthe von $r+s$ gleich:	$(r+s)^2-1$,	$(r+s)^2$
für *ungrade* Werthe aber gleich:	$(r+s)^2$,	$(r+s)^2-1$.

Die *beiden* hier dargelegten Methoden führen, wie man sieht, zu zwei verschiedenen rein algebraischen Bestimmungen der Zähler und Nenner der Multiplications-Formeln und ihres Grades; die erstere schliesst sich derjenigen an, welche *Abel* in seinem *Précis d'une théorie des Fonctions elliptiques* angewendet hat, die letztere stimmt fast vollständig mit der Herleitungsweise überein, welche Hr. *Runge* neuerdings für die Multiplication von cos am u gegeben hat.*) Der Vereinigungspunkt der beiden Methoden und der eigentliche Grund ihres Erfolges liegt darin, dass das Additionstheorem in reducirter Form benutzt wird, freilich nur *implicite*, und also nicht deutlich hervortretend; denn bei der wirklichen Aufstellung der reducirten Form des Additionstheorems kann nicht füglich — wie es hier bei dessen Anwendung auf die Herleitung der Multiplications-Formeln geschehen ist — die Theorie der associirten Formen umgangen werden. Wohl lässt sich auch aus jener Hauptformel (III) des § 54[1]) von *Jacobi's Fundamenta* ersehen, dass Zähler und Nenner der Additionsformel (A^0) für sin am a = sin am $(b + K'i)$**), gleichzeitig mit $\Theta(a-b)$, verschwinden; aber die Division durch $\Theta(a-b)$ führt doch nicht allgemein zu einer „reducirten Form" des Additionstheorems, da z. B., wenn für sin am a, sin am b und k ganze Zahlen genommen werden, der gemeinsame Theiler von Zähler und Nenner nicht durch $\Theta(a-b)$ dargestellt wird.

*) Journal für Mathematik, Bd. 94, S. 349.
**) Vergl. Art. II meiner vorigen Mittheilung, S. 325.

[1]) *Jacobi*, Werke, Bd. I, S. 207. H

ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von den Jahren: 1883, S. 497—506, 525—530; 1885, S. 761—784; 1886, S. 701—780 und 1889, S. 53—63, 123—135.