REDUCTION DER SYSTEME VON n^2 GANZZAHLIGEN ELEMENTEN

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Bd. 107. S. 135–136. (1890)

REDUCTION DER SYSTEME VON n^2 GANZZAHLIGEN ELEMENTEN.

Jedes System von n^2 ganzzahligen, in n Horizontalreihen und n Verticalreihen geordneten Elementen lässt sich durch „elementare Transformationen", d. h. Vertauschung von Horizontal- oder Vertical-Reihen mit gleichzeitiger Zeichenänderung der einen Reihe und Addition einer Horizontal- oder Vertical-Reihe zu einer anderen, auf ein solches reduciren, in welchem jedes Element ausserhalb der Diagonale gleich Null und jedes von Null verschiedene Diagonalelement positiv und Divisor des folgenden ist*).

Irgend ein gegebenes System kann nämlich zuvörderst durch Vertauschung von Reihen so eingerichtet werden, dass das *erste* Element positiv und nicht grösser als der absolute Werth irgend eines der von Null verschiedenen Elemente ist. Dieses erste Element kann aber durch elementare Transformationen noch verkleinert werden, wenn in der ersten Horizontal- oder Vertical-Reihe ein Element vorkommt, welches nicht ein ganzes Vielfaches des ersten ist. Hat man nun ein System erlangt, in welchem das erste Element positiv und Divisor aller übrigen Elemente der ersten Horizontal- und Vertical-Reihe ist, so kann man es durch elementare Transformationen so umwandeln, dass alle Elemente der ersten Horizontal- und Vertical-Reihe, mit Ausnahme des ersten, gleich Null werden. Kommt endlich in einem *solchen* Systeme irgend eine, nicht durch das erste Element theilbare Zahl vor, so kann man es dadurch, dass man die betreffende Horizontalreihe zur ersten addirt, in ein System transformiren, in welchem das erste Element positiv und *nicht* Divisor aller übrigen Elemente der ersten Horizontalreihe ist, also noch verkleinert werden kann. Man muss daher auf die angegebene Weise zu einem Systeme gelangen, in welchem das erste Element positiv und Divisor *aller* übrigen ist, und zugleich alle Elemente der ersten Horizontal- und Vertical-Reihe, mit Ausnahme des ersten, gleich Null sind.

*) Die erste Methode einer solchen Reduction ist von Herrn *Frobenius* angegeben worden (vergl. Bd. 86, S. 157 dieses Journals).

Nunmehr braucht offenbar nur die Möglichkeit der Reduction für Systeme von $(n-1)^2$ Elementen vorausgesetzt zu werden, um sie aus der vorstehenden Erörterung unmittelbar für Systeme von n^2 Elementen zu erschliessen.

Dass für jedes System nur ein einziges reducirtes existirt, ist ersichtlich. Denn ihrem absoluten Werthe nach sind die Diagonalelemente dadurch vollkommen definirt, dass (für jede Zahl m) das Product der m ersten, als grösster gemeinsamer Theiler aller Subdeterminanten $m$ter Ordnung, einen bei jeder elementaren Transformation unveränderlichen absoluten Werth hat; die Vorzeichen sind, abgesehen von dem des letzten Elements, als positiv bestimmt worden, und für dieses letzte Element bestimmt sich, falls es von Null verschieden ist, das Vorzeichen als dasjenige der Determinante des Systems.

ANWENDUNG DER MODULSYSTEME AUF FRAGEN DER DETERMINANTENTHEORIE

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Bd. 107. S. 254—261. (1890)

ANWENDUNG DER MODULSYSTEME AUF FRAGEN DER DETERMINANTENTHEORIE.*)

I. Bedeutet δ_{ik}, wie in meinen früheren Aufsätzen, Null oder Eins, je nachdem die Werthe der beiden Indices i, k von einander verschieden oder einander gleich sind, und bezeichnet man ein System von n^2 Grössen:

$$v_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

als das reciproke eines Systems von Grössen:

$$u_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

wenn zwischen den beiden Grössensystemen die Gleichungen bestehen:

$$(A) \qquad \sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh} = 0 \qquad (g, h, i, = 1, 2, \ldots n),$$

so besagt der Satz,

dass das reciproke eines reciproken Systems das ursprüngliche System ist,

nichts anderes, als dass das Gleichungssystem (A) dem Gleichungssysteme:

$$(B) \qquad \sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh} = 0 \qquad (g, h, i = 1, 2, \ldots n)$$

äquivalent ist.

Der Inhalt dieses Satzes, dessen Richtigkeit unmittelbar erhellt, wenn man die aus dem Gleichungssystem (A) resultirenden Werthe der n^2 Grössen v_{ik} in die

*) Der Hauptinhalt dieser Notiz ist aus Art. IX und X[1]) meines im Mai, Juni, Juli d. J. (1890) in den Sitzungsberichten der hiesigen Akademie veröffentlichten Aufsatzes „Über orthogonale Systeme" entnommen, aber es sind hier die dortigen Entwickelungen weiter ausgeführt.

[1]) Bd. III_1, S. 421—429 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

Gleichungen (B) einsetzt, erschöpft aber noch nicht die Beziehungen zwischen den beiden Systemen von *Functionen:*

$$(C)\qquad \sum_i u_{gi}v_{ih} - \delta_{gh},\quad \sum_i v_{gi}u_{ih} - \delta_{gh} \qquad (g,h,i=1,2,\dots n),$$

welche, gleich Null gesetzt, die beiden Gleichungssysteme (A) und (B) ergeben. Diese Beziehungen finden vielmehr ihren vollen Ausdruck in dem bemerkenswerthen Satze,

dass die beiden Systeme von je n^2 Functionen:

$$\sum_i u_{gi}v_{ih} - \delta_{gh},\quad \sum_i v_{gi}u_{ih} - \delta_{gh} \qquad (g,h,i=1,2,\dots n),$$

in welchen sowohl die n^2 Grössen u_{ik} als auch die n^2 Grössen v_{ik} unabhängige Variable bedeuten, *als Modulsysteme aufgefasst*, einander äquivalent sind, d. h. dass sich jede der Functionen des einen Systems als ganze, lineare, homogene Function der Functionen des anderen Systems und zwar *so* darstellen lässt, dass die Coefficienten ganze, ganzzahlige Functionen der $2n^2$ Variabeln u_{ik}, v_{ik} werden.

Um dies in Kürze nachzuweisen, führe ich folgende Bezeichnungen ein:

$$\sum_i u_{gi}v_{ih} - \delta_{gh} = M_{gh},\quad \sum_i v_{gi}u_{ih} - \delta_{gh} = \overline{M}_{gh} \qquad (g,h,i=1,2,\dots n),$$
$$|u_{ik}| = U,\qquad |v_{ik}| = V \qquad (i,k=1,2,\dots n),$$
$$\frac{\partial U}{\partial u_{ik}} = U_{ki},\qquad \frac{\partial V}{\partial v_{ik}} = V_{ki} \qquad (i,k=1,2,\dots n).$$

Alsdann bestehen offenbar die Congruenzen:

$$\sum_i u_{gi}v_{ih} \equiv \delta_{gh}\ (\text{modd. } M_{ik}),\quad \sum_i v_{gi}u_{ih} \equiv \delta_{gh}\ (\text{modd. } \overline{M}_{ik}) \qquad (g,h,i,k=1,2,\dots n),$$

aus welchen mit Hülfe des Multiplicationssatzes der Determinantentheorie folgt, dass für jedes der beiden Modulsysteme (M_{ik}) und ($\overline{M}_{ik}$) die Congruenz stattfindet:

$$(D)\qquad UV \equiv 1.$$

Ferner zeigen die Relationen:

$$V\sum_{g,h} U_{ig}M_{gh}u_{hk} = UV\overline{M}_{ik},\quad U\sum_{g,h} V_{ig}\overline{M}_{gh}v_{hk} = UVM_{ik} \qquad (g,h,i,k=1,2,\dots n),$$

welche sich durch Einsetzung der Werthe von $M_{gh}, \overline{M}_{gh}, M_{ik}, \overline{M}_{ik}$ unmittelbar verificiren lassen, dass die Congruenzen bestehen:

$$UV\overline{M}_{ik} \equiv 0\ (\text{modd. } M_{gh}),\quad UVM_{ik} \equiv 0\ (\text{modd. } \overline{M}_{gh}) \qquad (g,h,i,k=1,2,\dots n),$$

und diese gehen, da für beide Modulsysteme $UV \equiv 1$ ist, in folgende über:

$$(E)\qquad \overline{M}_{ik} \equiv 0\ (\text{modd. } M_{gh}),\quad M_{ik} \equiv 0\ (\text{modd. } \overline{M}_{gh}) \qquad (g,h,i,k=1,2,\dots n),$$

durch welche die nachzuweisende Aequivalenz der beiden Modulsysteme (M_{gh}), ($\overline{M}_{gh}$), d. h. also die Aequivalenz:

$$(F)\qquad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}v_{ih} - \delta_{gh}\right) \sim \left(\sum_{i=1}^{i=n} v_{gi}u_{ih} - \delta_{gh}\right) \qquad (g,h=1,2,\dots n)$$

vollständig begründet wird.

II. Das Modulsystem (M_{gh}) lässt sich, im Sinne der Aequivalenz, durch das folgende ersetzen:

$$(UV-1,\ \ v_{gh} - VU_{gh}) \qquad (g,h=1,2,\dots n).$$

Um dies darzuthun, gehe ich von der Doppelsumme aus:

$$\sum_{h,i} v_{gi}u_{ih}(VU_{hk} - v_{hk}) \qquad (g,h,i,k=1,2,\dots n),$$

welche, je nachdem man zuerst nach h und dann nach i oder in entgegengesetzter Folge summirt, die beiden Ausdrücke liefert:

$$v_{gk}(UV-1) - \sum_i v_{gi}M_{ik},\quad VU_{gk} - v_{gk} + \sum_h (VU_{hk} - v_{hk})\overline{M}_{gh}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so erschliesst man mit Hülfe der Congruenzen (D) und (E), dass für alle Werthe $g, h = 1, 2, \dots n$:

$$(G)\qquad v_{gh} - VU_{gh} \equiv 0\ \ (\text{modd. } M_{ik})\ \text{ oder }\ \left(\text{modd.} \sum_{r=1}^{r=n} u_{ir}v_{rk} - \delta_{ik}\right) \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

ist. Andererseits resultiren aus den Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}v_{ih} - \delta_{gh} = (UV-1)\delta_{gh} + \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}(v_{ih} - VU_{ih}) \qquad (g,h=1,2,\dots n)$$

die Congruenzen:

$$(H) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh} \equiv 0 \quad (\text{modd. } UV - 1,\ v_{gh} - VU_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

und die nachzuweisende Aequivalenz:

$$(K) \qquad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}\right) \sim (UV - 1,\ v_{gh} - VU_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

findet in den Congruenzen (G), (H), in Verbindung mit der Congruenz (D), ihre vollständige Begründung.

III. Um nunmehr noch das Bestehen der Aequivalenz:

$$(L) \qquad \left(\sum_{r=1}^{r=n} u_{gr} v_{rh} - \delta_{gh}\right) \sim (UV - 1,\ U_{gh} - v_{gh} U) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

nachzuweisen, sind nur die Congruenzen:

$$\begin{aligned} U_{ik} - v_{ik} U &\equiv 0 \quad \left(\text{modd.} \sum_{r=1}^{r=n} u_{gr} v_{rh} - \delta_{gh}\right) \\ \sum_{r=1}^{r=n} u_{gr} v_{rh} - \delta_{gh} &\equiv 0 \quad (\text{modd. } UV - 1,\ U_{ik} - v_{ik} U) \end{aligned} \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

zu verificiren, und dies geschieht für die ersteren durch die Identität:

$$U_{ik} - v_{ik} U = (v_{ik} U - U_{ik})(UV - 1) - UV \sum_{g=1}^{g=n} U_{ig} \left(\sum_{r=1}^{r=n} u_{gr} v_{rk} - \delta_{gk}\right)$$

in Verbindung mit der Congruenz (D):

$$UV - 1 \equiv 0 \quad \left(\text{modd.} \sum_{r=1}^{r=n} u_{gr} v_{rh} - \delta_{gh}\right) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

für die letzteren durch die Identität:

$$\sum_{r=1}^{r=n} u_{gr} v_{rh} - \delta_{gh} = \left(\delta_{gh} - \sum_{r=1}^{r=n} u_{gr} v_{rh}\right)(UV - 1) - V \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} (U_{ih} - v_{ih} U).$$

IV. Da nach Art. I das Modulsystem $\left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}\right)$ bei Vertauschung der Variabeln u und v in ein äquivalentes übergeht, so können auch auf der rechten

Seite der Aequivalenzen (K) und (L) die Variabeln u und v mit einander vertauscht werden. Man sieht daher, dass die sechs verschiedenen Modulsysteme:

$$\begin{aligned} &(M) && \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}\right), \quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh}\right) && (g, h = 1, 2, \ldots n), \\ &(M') && (UV - 1,\ v_{gh} - VU_{gh}), \quad (UV - 1,\ u_{gh} - UV_{gh}) && (g, h = 1, 2, \ldots n), \\ &(M'') && (UV - 1,\ U_{gh} - v_{gh} U), \quad (UV - 1,\ V_{gh} - u_{gh} V) && (g, h = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}$$

einander äquivalent sind. Hieraus folgt aber unmittelbar, dass für *jedes beliebige* Modulsystem die sechs verschiedenen Systeme von Congruenzen:

$$\begin{aligned} &(N) && \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} \equiv \delta_{gh}\right), \quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} v_{gi} u_{ih} \equiv \delta_{gh}\right) && (g, h = 1, 2, \ldots n), \\ &(N') && (UV \equiv 1,\ v_{gh} \equiv VU_{gh}), \quad (UV \equiv 1,\ u_{gh} \equiv UV_{gh}) && (g, h = 1, 2, \ldots n), \\ &(N'') && (UV \equiv 1,\ v_{gh} U \equiv U_{gh}), \quad (UV \equiv 1,\ u_{gh} V \equiv V_{gh}) && (g, h = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}$$

einander äquivalent sind.

Die Aequivalenz der beiden ersten Systeme von Congruenzen (N) zeigt, dass auch im Sinne der Congruenz für ein beliebiges Modulsystem das reciproke eines reciproken Systems gleich dem ursprünglichen Systeme ist. Aus der Aequivalenz der übrigen geht hervor, dass auch im Sinne der Congruenz für ein beliebiges Modulsystem das zu einem Systeme (u_{ik}) reciproke System (v_{ik}) durch jedes der vier Systeme von Congruenzen (N'), (N'') vollständig definirt ist.

V. Nimmt man in jedem der sechs Modulsysteme (M), (M'), (M'') das Element $U - \varepsilon$ hinzu, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, so kann überdies, wegen der Congruenz $UV \equiv 1$, noch das Element $V - \varepsilon$ hinzugefügt werden. Die Modulsysteme (M') und (M'') stimmen alsdann mit einander überein, und man erhält hiernach nur eine Aequivalenz von vier Modulsystemen:

$$(P) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(U - \varepsilon,\ V - \varepsilon,\ \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}\right) \sim \left(U - \varepsilon,\ V - \varepsilon,\ \sum_{i=1}^{i=n} v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh}\right)_{(g, h = 1, 2, \ldots n),} \\ &\sim (U - \varepsilon,\ V - \varepsilon,\ v_{gh} - \varepsilon U_{gh}) \sim (U - \varepsilon,\ V - \varepsilon,\ u_{gh} - \varepsilon V_{gh}) \end{aligned} \right.$$

welche zeigt, dass auch im Sinne der Congruenz für *jedes beliebige* Modulsystem das zu einem Systeme, dessen Determinante gleich ± 1 ist, *reciproke* System zugleich das mit dem Vorzeichen der Determinante genommene *adjungirte* System ist.

Setzt man ferner $v_{ih} = u_{hi}$, so geht die Aequivalenz (P) in folgende über:

$$(P') \quad \left(U - \varepsilon, \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} u_{hi} - \delta_{gh}\right) \sim \left(U - \varepsilon, \sum_{i=1}^{i=n} u_{ig} u_{ih} - \delta_{gh}\right) \sim (U - \varepsilon,\ u_{gh} - \varepsilon \operatorname{adj.} u_{gh}), \quad {\scriptstyle (g,h=1,2,\dots n)}$$

welche es in Evidenz setzt, dass — auch für *jedes beliebige* Modulsystem — durch jedes der drei Systeme von Congruenzen:

$$(Q) \quad \begin{cases} \left(U \equiv \varepsilon,\ \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} u_{hi} \equiv \delta_{gh}\right), \quad \left(U \equiv \varepsilon, \sum_{i=1}^{i=n} u_{ig} u_{ih} \equiv \delta_{gh}\right), \\ (U \equiv \varepsilon,\ u_{gh} \equiv \varepsilon \operatorname{adj.} u_{gh}) \end{cases} \quad {\scriptstyle (g,h=1,2,\dots n)}$$

das System:

$$(u_{ik}) \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,\dots n)}$$

als ein „im Sinne der Congruenz orthogonales" definirt wird.

Setzt man schon in jener fundamentalen Aequivalenz, welche im Art. I mit (F) bezeichnet ist, $v_{ih} = u_{hi}$, so geht dieselbe in folgende über:

$$(Q) \quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} u_{hi} - \delta_{gh}\right) \sim \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{ig} u_{ih} \equiv \delta_{gh}\right) \quad {\scriptstyle (g,h=1,2,\dots n)};$$

die Elemente jedes dieser beiden Modulsysteme lassen sich also als ganze lineare, homogene Functionen der Elemente des anderen so darstellen, dass die Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen der n^2 *Variabeln* u_{ik} *werden*, und hiermit ist wohl für die schon von *Euler* vollständig erkannte und nachgewiesene Aequivalenz der beiden *Gleichungssysteme:*

$$(T) \quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} u_{hi} = \delta_{gh}\right), \quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{ig} u_{ih} - \delta_{gh}\right) \quad {\scriptstyle (g,h=1,2,\dots n)}$$

diejenige befriedigendste Art der Darlegung gewonnen, welche *Euler* gewünscht zu haben scheint.

In der 1770 erschienenen, im ersten Bande der Commentationes arithmeticae collectae*) auf S. 427—443 abgedruckten Abhandlung „Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile" stellt sich nämlich *Euler* zuerst die

*) Petersburg, 1849.

Aufgabe, neun Zahlen $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ zu finden, welche den zwölf Bedingungen genügen:

$$\begin{array}{lll} A^2 + D^2 + G^2 = 1, & B^2 + E^2 + H^2 = 1, & C^2 + F^2 + J^2 = 1, \\ AB + DE + GH = 0, & AC + DF + GJ = 0, & BC + EF + HJ = 0, \\ A^2 + B^2 + C^2 = 1, & D^2 + E^2 + F^2 = 1, & G^2 + H^2 + J^2 = 1, \\ AD + BE + CF = 0, & AG + BH + CJ = 0, & DG + EH + FJ = 0, \end{array}$$

und knüpft daran folgende Bemerkung:

„Cum numerus conditionum implendarum superet numerum quantitatum determinandarum, problema hoc plus quam determinatum videtur. Utcunque enim conditiones praescriptae perpendantur, nulla alia relatio, qua aliquae in reliquis jam contineantur, in iis deprehenditur, nisi quod summa conditionum (7), (8), (9) conveniat cum summa conditionum (1), (2), (3); unde unica harum duodecim conditionum in reliquis jam contineri videtur; qua remota tamen adhuc undecim conditiones relinquuntur, quae binario numerum quantitatum incognitarum excedunt. Hic equidem tantum de ejusmodi relatione loquor, quae has conditiones consideranti occurrit, revera enim aliquot necessariae relationes inter eas intercedunt, quae autem vix ante animadvertuntur, quam problema perfecte fuerit solutum".

Hiernach ging *Euler*'s Wunsch dahin, Relationen zu erhalten, durch welche die letzten sechs Gleichungen sich ebenso direct als eine Folge der sechs ersten ergeben, wie durch die *eine*, von *Euler* angeführte Relation sich eine der zwölf Bedingungen als eine Folge der übrigen erweist. Diesem Wunsche entspricht *Lagrange*'s Methode des Beweises der Aequivalenz der Gleichungssysteme (T) nicht*), aber aus der im Art. I angegebenen allgemeineren Entwickelung resultirt, wenn dort $v_{ih} = u_{hi}$ und demnach:

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} u_{hi} - \delta_{gh} = M_{gh}, \quad \sum_{i=1}^{i=n} u_{ig} u_{ih} - \delta_{gh} = \overline{M}_{gh}$$

$$|u_{gh}| = U, \quad \frac{\partial U}{\partial u_{gh}} = U_{hg} \qquad {\scriptstyle (g,h=1,2,\dots n)}$$

*) *Jacobi* hebt in seinen Bemerkungen zur *Euler*'schen Abhandlung (S. 603 des III. Bandes der gesammelten Werke) diese Methode mit den Worten hervor: *Lagrange* hat in seiner Mécanique analytique bereits in der ersten Ausgabe gezeigt, wie die einen Bedingungen aus den anderen auf die leichteste Art und ohne alle Rechnung folgen.

gesetzt wird, für den vorliegenden Fall die (übrigens auch leicht zu verificirende) Relation:

$$(R) \qquad \overline{M}_{ik} = \overline{M}_{ik}(1 - |M_{gh} + \delta_{gh}|) + U\sum_{g,h} u_{gi} U_{kh} M_{gh} \qquad (g,h,i,k=1,2,\dots n),$$

in welcher jedes Glied auf der rechten Seite mindestens einen der Ausdrücke M_{gh} als Factor enthält, und durch welche daher, genau wie bei der einen *Euler*'schen Relation, sich das Nullwerden der $\frac{1}{2}n(n+1)$ Ausdrücke $\overline{M}_{ik}$ direct als eine Folge des Nullwerdens der $\frac{1}{2}n(n+1)$ Ausdrücke M_{ik} ergiebt.

In ähnlicher Weise werden durch die einfachere und ebenfalls leicht zu verificirende Relation:

$$(R') \qquad \overline{M}_{ik} = \varepsilon\sum_{g,h} u_{gi} U_{kh} M_{gh} + \overline{M}_{ik}(1 - \varepsilon U) \qquad (g,h,i,k=1,2,\dots n;\ \varepsilon = \pm 1)$$

die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen $\overline{M}_{ik} = 0$ als eine Folge der $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ Gleichungen:

$$U = \varepsilon, \quad M_{gh} = 0 \qquad (g,h=1,2,\dots n)$$

dargestellt; aber um die erste dieser $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ Gleichungen als eine Folge der übrigen aufzuzeigen, hat man nur die Relation:

$$(R'') \qquad (U-\varepsilon)(U+\varepsilon) = |M_{gh} + \delta_{gh}| - 1 \qquad (g,h=1,2,\dots n),$$

welche von wesentlich anderer Art ist als die Relationen (R) und (R'), da sie z. B. nicht für jedes beliebige Modulsystem, sondern im Allgemeinen nur für Primmodulsysteme, gestattet, das Bestehen der Congruenz $U \equiv \pm 1$ aus dem Bestehen der Congruenzen $M_{gh} \equiv 0$ zu erschliessen.

VI. Für den allgemeinen im Art. I behandelten Fall, wo die Bedeutung der Ausdrücke M_{gh}, $\overline{M}_{gh}$ durch die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh} = M_{gh}, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh} = \overline{M}_{gh} \qquad (g,h=1,2,\dots n)$$

gegeben ist, tritt an Stelle der Relation (R) die folgende:

$$(R^0) \qquad \overline{M}_{ik} = \overline{M}_{ik}(1 - |M_{gh} + \delta_{gh}|) + V\sum_{g,h} u_{hk} U_{ig} M_{gh} \qquad (g,h,i,k=1,2,\dots n),$$

in welcher jedes Glied auf der rechten Seite mindestens einen der Ausdrücke M_{gh} als Factor enthält, und durch welche es daher in Evidenz gesetzt wird, dass das Nullwerden der Ausdrücke $\overline{M}_{ik}$ eine Folge des Nullwerdens der Ausdrücke M_{gh} ist. Diese Relation, welche in Beziehung auf die Variabeln u_{ik}, v_{ik} von der Dimension

$2n+2$ ist, scheint aber noch einer Vereinfachung fähig zu sein; wenigstens habe ich für den Fall $n=2$ Relationen gefunden, deren Dimensionen nur gleich vier ist. Es sind dies die folgenden zwei:

$$\begin{aligned} u_{11}v_{11} + u_{21}v_{12} - 1 = (1 - u_{21}v_{12})(u_{11}v_{11} + u_{12}v_{21} - 1) &- u_{22}v_{21}(u_{11}v_{12} + u_{12}v_{22}) \\ &+ u_{11}v_{12}(u_{21}v_{11} + u_{22}v_{21}) + u_{12}v_{21}(u_{21}v_{12} + u_{22}v_{22} - 1), \\ u_{11}v_{21} + u_{21}v_{22} = -u_{21}v_{22}(u_{11}v_{11} + u_{12}v_{21} - 1) &+ u_{21}v_{21}(u_{11}v_{12} + u_{12}v_{22}) \\ &+ u_{11}v_{22}(u_{21}v_{11} + u_{22}v_{21}) - u_{11}v_{21}(u_{21}v_{12} + u_{22}v_{22} - 1), \end{aligned}$$

aus welchen die zwei anderen zur Darstellung von:

$$u_{12}v_{21} + u_{22}v_{22} - 1, \quad u_{12}v_{11} + u_{22}v_{12}$$

erforderlichen Relationen hervorgehen, wenn die Variabeln:

$$u_{11}, \quad u_{12}, \quad u_{21}, \quad u_{22}, \quad v_{11}, \quad v_{12}, \quad v_{21}, \quad v_{22}$$

durch:

$$u_{12}, \quad u_{11}, \quad u_{22}, \quad u_{21}, \quad v_{21}, \quad v_{22}, \quad v_{11}, \quad v_{12}$$

ersetzt werden.

Mit Benutzung der Bezeichnungen M_{gh}, $\overline{M}_{gh}$ lauten hiernach für den Fall $n=2$ die vier Relationen:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{11} &= (1 - u_{21}v_{12})M_{11} - u_{22}v_{21}M_{12} + u_{11}v_{12}M_{21} + u_{12}v_{21}M_{22}, \\ \overline{M}_{12} &= \quad - u_{22}v_{12}M_{11} + u_{22}v_{11}M_{12} + u_{12}v_{12}M_{21} - u_{12}v_{11}M_{22}, \\ \overline{M}_{21} &= \quad - u_{21}v_{22}M_{11} + u_{21}v_{21}M_{12} + u_{11}v_{22}M_{21} - u_{11}v_{21}M_{22}, \\ \overline{M}_{22} &= (1 - u_{22}v_{22})M_{11} - u_{21}v_{11}M_{12} + u_{12}v_{22}M_{21} + u_{11}v_{11}M_{22}; \end{aligned}$$

aber für *beliebige* Zahlen n muss die Ermittelung der Relation *niedrigster* Dimension:

$$\overline{M}_{ik} = \sum_{g,h} F_{gh}^{(ik)} M_{gh} \qquad (g,h,i,k=1,2,\dots n),$$

in welchen die Multiplicatoren $F_{gk}^{(ik)}$ ganze Grössen des aus den $2n^2$ Elementen u_{ik}, v_{ik} zu bildenden natürlichen Rationalitätsbereichs sind, weiterer Untersuchung vorbehalten bleiben.

ALGEBRAISCHE REDUCTION DER SCHAAREN BILINEARER FORMEN

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
vom Jahre 1890. S. 1225—1237.

ALGEBRAISCHE REDUCTION DER SCHAAREN BILINEARER FORMEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 27. November 1890.]

Die vorliegende Arbeit schliesst sich, dem Gegenstande wie der Behandlungsweise nach, in den ersten beiden Paragraphen, welche die Reduction beliebiger Schaaren bilinearer Formen mit verschwindender Determinante enthalten, an meine im Monatsbericht vom Mai 1868 veröffentlichte Mittheilung an,[1]) und in den folgenden Paragraphen, in welchen das vollständige Invariantensystem für die allgemeinsten Schaaren bilinearer Formen — ohne jede Ausnahme — entwickelt wird, an meinen Aufsatz über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen, welcher auf S. 397—447 der Monatsberichte aus dem Jahre 1874 abgedruckt ist.[2])

Ich habe die Arbeit im November 1874, also schon vor 16 Jahren, verfasst, aber damals nicht publicirt, weil ich während der Abfassung die Mängel der dabei angewandten analytisch-algebraischen Methoden und in Folge dessen das Bedürfniss einer rein arithmetischen Behandlung des Problems lebhafter empfand. Nachdem ich aber, vor einiger Zeit, in der arithmetischen Theorie der Schaaren bilinearer Formen zu befriedigenden Resultaten, welche ich nächstens der Akademie vorlegen werde, gelangt bin, nehme ich nicht mehr Anstand, diese meine ältere Arbeit über die *algebraische* Reduction der Schaaren bilinearer Formen zu veröffentlichen, zumal dadurch auch die Vergleichung mit der neueren *arithmetischen* Reduction ermöglicht wird.

Aus der Abhandlung, welche Hr. *Weierstrass* in der Classensitzung vom 18. Mai 1868 gelesen hat,[3]) ist zu entnehmen, dass jede Schaar bilinearer Formen:

$$\sum_{i,k}(u a_{ik} + v b_{ik}) x_i y_k \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,3,\ldots r)},$$

[1]) Bd. I, S. 163 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) Bd. I, S. 421 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[3]) *Weierstrass*, Werke, Bd. II, S. 19. H

deren Determinante von Null verschieden ist, sich in eine „reducirte“ Schaar:

$$\sum_{\mu,\nu}\{(U+w^{(\nu)}V)\,\Phi_\mu^{(\nu)}+V\Psi_\mu^{(\nu)}\} \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots)$$

transformiren lässt, wobei $\Phi_\mu^{(\nu)}$, $\Psi_\mu^{(\nu)}$ durch die Gleichungen:

$$\Phi_\mu^{(\nu)}=\sum_{\varkappa,\lambda}X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}Y_{\lambda\mu}^{(\nu)} \qquad (\varkappa+\lambda=e_\mu^{(\nu)}-1,\ \varkappa=0,1,\ldots e_\mu^{(\nu)}-1),$$

$$\Psi_\mu^{(\nu)}=\sum_{\varkappa,\lambda}X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}Y_{\lambda\mu}^{(\nu)} \qquad (\varkappa+\lambda=e_\mu^{(\nu)}-2,\ \varkappa=0,1,\ldots e^{(\nu)}-2)$$

definirt sind, und $\Psi_\mu^{(\nu)}=0$ zu setzen ist, sobald $e_\mu^{(\nu)}$ den Werth Eins hat.*) Eben dieselbe Transformation besteht aber auch für Schaaren, deren Determinante gleich Null ist, nur dass alsdann für einen Werth von ν die sämmtlichen X oder die sämmtlichen Y, deren erster unterer Index gleich $e_\mu^{(\nu)}-1$ ist, so wie das zugehörige $w^{(\nu)}$ gleich Null sind. Wie dies mit Hülfe der in meinen früheren Mittheilungen enthaltenen Methoden zu erweisen und dadurch die Reduction der Schaaren bilinearer Formen von der in der *Weierstrass*'schen Abhandlung gemachten Einschränkung zu befreien ist, soll hier im Zusammenhange dargelegt werden.

I.

Wenn die Determinante der bilinearen Form:

$$w\varphi(x_1,x_2,\ldots x_r;\ y_1,y_2,\ldots y_s)-\psi(x_1,x_2,\ldots x_r;\ y_1,y_2,\ldots y_s)$$

für jeden Werth der Variabeln w verschwindet, so sind die nach den Variabeln der einen Reihe genommenen Ableitungen mindestens durch *eine* lineare Relation mit einander verbunden. Sind dies die Ableitungen nach den Variabeln x, und setzt man:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\varphi_k,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x_k}=\psi_k,\quad w\varphi-\psi=f,\quad w\varphi_k-\psi_k=f_k \qquad (k=1,2,\ldots r),$$

*) Vergl. Monatsbericht vom Mai 1868, S. 319 Formel 38[1]) und Monatsbericht vom März 1874, S. 217 Formel (F).[2]) Den Begriff der Formen-*Schaaren* habe ich in der Mittheilung eingeführt[3]), welche ich in der Classensitzung vom 18. Mai 1868 unmittelbar an den Vortrag des Hrn. *Weierstrass* geknüpft habe.

[1]) *Weierstrass*, Werke, Bd. II, S. 28. H

[2]) Bd. I, S. 394 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[3]) Bd. I, S. 163 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

so kann demnach aus den vorhandenen linearen Relationen eine Gleichung:

$$\text{(A)} \qquad \sum_h\sum_k c_{hk}w^h f_k=0 \qquad (h=0,1,\ldots m;\ k=1,2,\ldots r)$$

gebildet werden, für welche die Zahl m einen möglichst kleinen Werth hat. Dabei kann angenommen werden, dass $m\geqq 1$ ist. Denn wenn $m=0$ wäre, so würden beide Formen φ und ψ durch die Substitution:

$$x_k'=c_{0r}x_k-c_{0k}x_r \qquad (k=1,2,\ldots r-1),$$

$c_{0r}\gtrless o$ vorausgesetzt, von x_r unabhängig werden; die Anzahl der Variabeln x würde also durch lineare Transformation verringert werden können. Man kann aber offenbar die beiden Grundformen der Schaar $u\varphi+v\psi$ schon von solcher Beschaffenheit voraussetzen, dass weder die Anzahl der Variabeln x, noch die der Variabeln y durch lineare Transformation verringert werden kann.

Wendet man nun jene Schlussweise an, welche ich schon in meiner oben citirten Mittheilung vom 18. Mai 1868[1]) bei der Darstellung von Schaaren *quadratischer* Formen mit verschwindender Determinante benutzt habe, so erschliesst man, dass die $m+1$ Ausdrücke:

$$\sum_{k=1}^{k=r}c_{hk}f_k \qquad (h=0,1,\ldots m)$$

von einander linear unabhängig sein müssen, und zwar in dem Sinne, dass keine Relation:

$$\sum_h\sum_k a_h c_{hk}f_k=0 \qquad (h=0,1,\ldots m;\ k=1,2,\ldots r)$$

existiren kann, in welcher die mit a_h bezeichneten Coefficienten von w unabhängige Constanten wären. Denn wenn eine solche Relation bestände, so würde die aus (A) hervorgehende Gleichung:

$$\sum_g\sum_h\sum_k a_g c_{hk}f_k w^{m-g+h}=0 \qquad \left(\begin{matrix}g,h=0,1,\ldots m;\\ k=1,2,\ldots r\end{matrix}\right),$$

wenn zur Abkürzung:

$$\sum_{g=0}^{g=h}a_{g-h+m}c_{gk}=c_{hk}',\quad \sum_{i=h+1}^{i=h+m+1}a_{i-h-1}c_{ik}=c_{hk}'' \qquad \left(\begin{matrix}h=0,1,\ldots m-1\\ k=1,2,\ldots r\end{matrix}\right)$$

[1]) Bd. I, S. 163 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

gesetzt wird, in folgender Form dargestellt werden können:

$$\sum_{h,k} c'_{hk} f_k w^h + w^{m+1} \sum_{h,k} c''_{hk} f_k w^h = 0 \qquad \binom{h=0,1,\ldots m-1}{k=1,2,\ldots r},$$

in welcher also kein mit w^m multiplicirtes Glied vorkommt. Ersetzt man hierin f_k durch seinen Werth: $w\varphi_k - \psi_k$, so enthält die erstere Summe nur Potenzen von w, deren Exponenten kleiner oder gleich m sind, die letztere nur solche, deren Exponenten grösser als m sind. Es müsste also jede der beiden Summen für sich gleich Null sein; aber die Existenz einer Gleichung:

$$\sum_{h,k} c'_{hk} f_k w^h = 0 \qquad \binom{h=0,1,\ldots m-1}{k=1,2,\ldots r}$$

steht mit jener in Bezug auf die Gleichung (A) gemachten Voraussetzung in Widerspruch, dass die Zahl m darin einen möglichst kleinen Werth habe.

Da die $(m+1)$ Ausdrücke:

$$\sum_{k=1}^{k=r} c_{hk} f_k \qquad (h=0,1,\ldots m)$$

von einander, in dem angegebenen Sinne, linear unabhängig sind, so bilden die Coefficienten c_{hk} ein System von $(m+1)r$ Elementen, für welches nicht die sämmtlichen, aus je $m+1$ Verticalreihen zu bildenden Determinanten verschwinden, und man kann demnach irgend welche Coefficienten:

$$c_{pk} \qquad (p=m+1, m+2, \ldots r-1)$$

hinzunehmen, die so beschaffen sind, dass die Determinante:

$$|c_{ik}| \qquad \binom{i=0,1,\ldots r-1}{k=1,2,\ldots r}$$

von Null verschieden ist.

Bedeuten nun f', φ', ψ' die durch die Substitution:

$$x_k = \sum_i c_{ik} x'_i \qquad \binom{i=0,1,\ldots r-1}{k=1,2,\ldots r}$$

aus f, φ, ψ hervorgehenden Functionen der Variabeln x', y, und setzt man:

$$f'_k = \frac{\partial f'}{\partial x'_k}, \qquad \varphi'_k = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_k}, \qquad \psi'_k = \frac{\partial \psi'}{\partial x'_k},$$

so ist vermöge der Gleichung (A):

$$\sum_{h=0}^{h=m} f'_h w^h = \sum_{h=0}^{m} (w\varphi'_h - \psi'_h) w^h = 0$$

und also:

$$\psi'_0 = 0, \qquad \psi'_h = \varphi'_{h-1}, \qquad \varphi'_m = 0 \qquad (h=1,2,\ldots m).$$

Die unmittelbar hieraus folgenden Gleichungen:

$$w\psi'_1 = f'_0, \quad w\psi'_{h+1} - \psi'_h = f'_h, \quad -\psi'_m = f'_m \qquad (h=1,2,\ldots m-1)$$

zeigen, dass zwischen den m linearen Functionen der Variabeln y:

$$\psi'_1, \psi'_2, \ldots \psi'_m$$

keine lineare Relation bestehen kann; denn sonst würde eine lineare Gleichung zwischen $f'_0, f'_1, \ldots f'_{m-1}$ resultiren, deren Coefficienten ganze Functionen $(m-1)$ten Grades von w wären. Nimmt man daher an Stelle der Variabeln y ebensoviel neue Variabeln $\mathfrak{y}$, von denen die ersten m durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{y}_h = \psi'_h = \varphi'_{h-1} \qquad (h=1,2,\ldots m)$$

bestimmt sind, so wird die Schaar $u\varphi + v\psi$, oder, was dasselbe ist:

$$\sum_{k=0}^{k=r-1} (u\varphi'_k + v\psi'_k) x'_k,$$

in eine Schaar von folgender Gestalt transformirt:

$$\sum_{h=1}^{h=m} (ux'_{h-1} + vx'_h)\mathfrak{y}_h + \sum_{k=1}^{k=r} \sum_{p=m+1}^{p=r} (ua_{pk} + vb_{pk}) x'_p \mathfrak{y}_k,$$

welche endlich durch die Substitution:

$$\mathfrak{x}_0 = x'_0 + \sum_p a_{p1} x'_p, \quad \mathfrak{x}_h = x'_h + \sum_p b_{ph} x'_p, \quad \mathfrak{x}_p = x'_p$$
$$(h=1,2,\ldots m;\ p=m+1, m+2, \ldots r-1)$$

in:

$$(\mathfrak{S}) \qquad \sum_{h=1}^{h=m} (u\mathfrak{x}_{h-1} + v\mathfrak{x}_h)\mathfrak{y}_h + u\sum_{h=2}^{h=m} \mathfrak{f}_h \mathfrak{y}_h + u\Phi + v\Psi$$

übergeht, wo $\mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \dots \mathfrak{f}_m$ lineare Functionen von $\mathfrak{x}_{m+1}, \mathfrak{x}_{m+2}, \dots \mathfrak{x}_{r-1}$ und Φ, Ψ bilineare Functionen der Veränderlichen:

$$\mathfrak{x}_p,\ \mathfrak{y}_q \qquad {\scriptstyle (m<p\leqq r-1;\ m<q\leqq s)}$$

bedeuten. Denkt man sich nun von vorn herein die beiden Grundformen der Schaar so ausgewählt, dass jede der von Null verschiedenen Subdeterminanten von $u\varphi + v\psi$ auch für $v=0$ einen von Null verschiedenen Werth behält, so ist zu zeigen, dass $u\varphi + v\psi$ oder $(\mathfrak{S})$ in die Reducirte:

$$\sum_{\mu,\nu}\left\{(u + w^{(\nu)}v)\,\Phi^{(\nu)}_\mu + v\,\Psi^{(\nu)}_\mu\right\} \qquad {\scriptstyle (\mu,\nu=1,2,\dots)}$$

zu transformiren ist.

Der letzte Theil von $(\mathfrak{S})$, nämlich $u\Psi + v\Psi$, enthält nur $r-m-1$ Variabeln $\mathfrak{x}$ und nur $s-m$ Variabeln $\mathfrak{y}$; es kann daher die Möglichkeit der Reduction der Schaar $u\Phi + v\Phi$ schon vorausgesetzt werden. Bei der dazu erforderlichen Transformation gehen die Veränderlichen $\mathfrak{x}_p$ in gewisse Variable X über, und $\mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \dots \mathfrak{f}_m$ werden alsdann lineare Functionen eben dieser Variabeln X *allein*. Wenn nämlich noch irgend eine Veränderliche $\mathfrak{x}_p$ in den Functionen $\mathfrak{f}$ zurückbliebe, so würde zwischen den $m+1$ nach $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots \mathfrak{x}_m, \mathfrak{x}_p$ genommenen partiellen Ableitungen der Schaar $(\mathfrak{S})$, welche sämmtlich lineare Functionen von $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \dots \mathfrak{y}_m$ sind, durch Elimination dieser m Veränderlichen $\mathfrak{y}$ eine Gleichung entstehen, deren Coefficienten — der obigen Voraussetzung entgegen — ganze Functionen $(m-1)$ten Grades von $\frac{u}{v}$ wären.

Setzt man jetzt noch:

$$m = e-1,\quad \mathfrak{x}_0 = X_{e-1},\quad \mathfrak{x}_k = X_{e-k-1},\quad \mathfrak{y}_k = Y_{k-1} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots m)},$$

so verwandelt sich die Schaar $(\mathfrak{S})$ in:

$$\text{(S)}\qquad u\sum_{h=1}^{h=e-2} F_h Y_h + u\Phi^0 + v\Psi^0 + \sum_{\mu,\nu}\left\{(u + w^{(\nu)}v)\,\Phi^{(\nu)}_\mu + v\,\Psi^{(\nu)}_\mu\right\} \qquad {\scriptstyle (\mu,\nu=1,2,\dots)},$$

wo:

$$\Phi^0 = \sum_k X_k Y_{e-k-1},\qquad \Psi^0 = \sum_k X_{k-1} Y_{e-k-1} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots e-1)},$$

$$\Phi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} Y^{(\nu)}_{\lambda\mu},\qquad \Psi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} Y^{(\nu)}_{\lambda\mu}$$
$${\scriptstyle (\varkappa+\lambda=e^{(\nu)}_\mu-1;\ \varkappa=0,1,\dots e^{(\nu)}_\mu-1)}\quad {\scriptstyle (\varkappa+\lambda=e^{(\nu)}_\mu-2;\ \varkappa=0,1,\dots e^{(\nu)}_\mu-2)}$$

ist, und $F_1, F_2, \dots F_{e-2}$ homogene lineare Functionen der Variabeln $X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}$ bedeuten.

Für $m=r-1$, d. h. für den Fall, dass der Grad der Gleichung (A) nur um eine Einheit kleiner ist als die Anzahl der Variabeln x, fällt der erste und der letzte Theil von (S) fort, und es bleibt nur die reducirte Schaar $u\Phi^0 + v\Psi^0$. Im Allgemeinen aber unterscheidet sich die Schaar (S) von einer Reducirten noch durch den ersten Theil $u\sum F_h Y_h$, und es ist nunmehr zu zeigen, wie dieser durch weitere Transformation der Variabeln X, Y wegzuschaffen ist.

II.

Wenn F_h das Glied $S_h X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}$ enthält und $X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}$ eine derjenigen Variabeln ist, welche in dem mit u multiplicirten Theile von (S) vorkommen, so fällt bei der Substitution:

$$X_k = \mathfrak{X}_k + C_h(w^{(\nu)} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} + X^{(\nu)}_{\varkappa-1,\mu}),\quad Y^{(\nu)}_{\lambda\mu} = \mathfrak{Y}^{(\nu)}_{\lambda\mu} - C_h Y_h$$
$${\scriptstyle (k=e-h-2,\ \lambda=e^{(\nu)}_\mu-\varkappa-1)}$$

eben jenes Glied $C_h X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}$ aus F_h weg, und im Übrigen bleibt die Form der Schaar (S) erhalten, nur dass für $h < e-2$ der Ausdruck:

$$F_{h+1} + w^{(\nu)} C_h X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} + C_h X^{(\nu)}_{\varkappa-1,\mu}$$

an Stelle von F_{h+1} tritt. Auf diese Weise sind also nach einander aus $F_1, F_2, \dots F_{e-2}$ die sämmtlichen Glieder $C_h X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}$ wegzuschaffen, und es können alsdann nur solche Variabeln X darin zurückbleiben, welche ausschliesslich in dem mit v multiplizirten Theile von (S) enthalten sind, d. h. nur Variabeln $X^{(\nu)}_{0\mu}$, für welche $w^{(\nu)}$ und zugleich dasjenige Y gleich Null ist, dessen erster unterer Index $e^{(\nu)}_\mu - 1$ ist. Aber auch zur Beseitigung jeder einzelnen dieser Variabeln $X^{(\nu)}_{0\mu}$ ist eben dasselbe Transformations-Verfahren zu gebrauchen, welches oben zur Wegschaffung der Variabeln $X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}$ gedient hat. Denn wenn $X^{(\nu)}_{0\mu}$ in F_h mit dem Coefficienten C_h multiplicirt vorkommt, so wird durch die Substitution:

$$X_\varrho = \mathfrak{X}_\varrho - C_h X^{(\nu)}_{\sigma\mu},\quad Y^{(\nu)}_{\lambda\mu} = \mathfrak{Y}^{(\nu)}_{\lambda\mu} + C_h Y_{h-\varkappa} \quad {\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix}\sigma=0,1,\dots h;\ \varrho-\sigma=e-h-1\\ \varkappa=1,2,\dots h;\ \varkappa+\lambda=e^{(\nu)}_\mu-1\end{smallmatrix}\right)}$$

das Glied $C_h X^{(\nu)}_{0\mu}$ in Wegfall gebracht. Dabei dürfen natürlich die mit λ bezeichneten vorderen Indices nicht negativ werden. Nun ist $h \leqq e-2$; die Indices λ sind also grösser als die Differenz $e^{(\nu)}_\mu - e$, und dass diese nicht negativ sein kann, geht aus folgender Betrachtung hervor. Zwischen den Ableitungen der Schaar (S) besteht, wenn darin, wie jetzt vorausgesetzt worden, die linearen Functionen F_h die Variable $X^{(\nu)}_{0\mu}$ mit den Coefficienten C_h multiplicirt enthalten, und wenn:

$$v = -uw$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$\sum_h C_h \sum_k w^k \frac{\partial S}{\partial X_{m+k-h}} = \sum_\varkappa w^\varkappa \frac{\partial S}{\partial X^{(\nu)}_{k\mu}} \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots e-2 \\ k=0,1,\ldots h \\ \varkappa=0,1,\ldots e^{(\nu)}_\mu-1 \\ m=e-1 \end{pmatrix},$$

und der Grad des Ausdrucks auf der rechten Seite, in Beziehung auf w, ist gleich $e^{(\nu)}_\mu - 1$, auf der linken Seite aber kleiner als $e-1$. Es würde daher, wenn $e > e^{(\nu)}_\mu$ wäre, der Grad der ganzen Gleichung — der oben gemachten Voraussetzung zuwider — kleiner als $e-1$ oder m sein.

III.

Sind φ und ψ, wie zu Anfang von art. I, zwei ganz beliebige bilineare Functionen von r Variabeln x und s Variabeln y, und ist t irgend eine Grösse von der Beschaffenheit, dass jede der von Null verschiedenen Determinanten, welche aus den Elementen:

$$\frac{\partial^2(u\varphi + v\psi)}{\partial x_i \partial y_k} \qquad (i=1,2,\ldots r;\ k=1,2,\ldots s)$$

gebildet werden können, auch für $tu + v = 0$ einen von Null verschiedenen Werth behält, so ist nach Inhalt der vorstehenden Entwickelungen:

$$\varphi - t\psi = \sum_{\mu,\nu} \Phi^{(\nu)}_\mu, \quad \psi = \sum_{\mu,\nu} (w^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu) \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots).$$

Es gehen also die beiden mit φ, ψ bezeichneten Functionen der Variabeln x, y gleichzeitig in zwei bilineare Functionen der Variabeln X, Y über:

$$\sum_{\mu,\nu} (v^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + t\Psi^{(\nu)}_\mu),\ \sum_{\mu,\nu} (-u^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu), \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots),$$

wo:

$$\Phi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} Y^{(\nu)}_{\lambda\mu} \qquad (\varkappa+\lambda = e^{(\nu)}_\mu - 1,\ \varkappa = 0,1,\ldots e^{(\nu)}_\mu - 1),$$

$$\Psi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} Y^{(\nu)}_{\lambda\mu} \qquad (\varkappa+\lambda = e^{(\nu)}_\mu - 2,\ \varkappa = 0,1,\ldots e^{(\nu)}_\mu - 2),$$

$$u^{(\nu)} = -w^{(\nu)}, \quad v^{(\nu)} = 1 + tw^{(\nu)}, \quad tu^{(\nu)} + v^{(\nu)} = 1$$

ist. Das System der beiden Formen $[\varphi, \psi]$ oder das „Formenpaar“ $[\varphi, \psi]$ wird auf diese Weise in ein „reducirtes“ $[\Phi, \Psi]$ transformirt, welches sich als ein Aggregat von lauter „elementaren“ reducirten Formenpaaren:

$$[v^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + t\Psi^{(\nu)}_\mu,\ \ -u^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu] \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots)$$

darstellt. Diese elementaren Formenpaare sind in zwei Arten zu scheiden, je nachdem die Anzahl der Variabeln beider Reihen dieselbe ist oder nicht, und die zweite Art der Formensysteme zerfällt wiederum in zwei Abtheilungen, da bei denselben die Anzahl der Variabeln X entweder um eine Einheit grösser oder um eine Einheit kleiner als die der Variabeln Y ist. Bezeichnet man die Anzahl der X in den drei unterschiedenen Fällen bez. mit $e, e, e-1$, so wird die Anzahl der Y bez. $e, e-1, e$, und die Gesammtanzahl n der Variabeln X und Y ist für die erste Art gleich $2e$, für die zweite gleich $2e-1$. Ferner wird die Determinante der zugehörigen Schaar:

$$u(v^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + t\Psi^{(\nu)}_\mu) + v(-u^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu)$$

für die erste Art gleich der $e$ten oder $\frac{1}{2}n$ten Potenz von $uv^{(\nu)} - vu^{(\nu)}$, für die zweite aber identisch gleich Null. Für die erste Abtheilung der zweiten Art besteht zwischen den nach den verschiedenen Variabeln X genommenen Ableitungen der Schaar eine lineare Relation, deren Coefficienten ganze homogene Functionen von u, v sind, und zwar von der Dimension $(e-1)$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$. Die bezüglichen Formenpaare sind daher nach art. I durch:

$$\Big[\sum_{\varkappa,\lambda} X^0_{\varkappa\mu} Y^0_{\lambda\mu},\ \sum_{\varkappa,\lambda} X^0_{\varkappa-1,\mu} Y^0_{\lambda\mu}\Big] \qquad (0<\varkappa<e^0_\mu;\ \varkappa+\lambda = e^0_\mu - 1)$$

zu repraesentiren und die Formenpaare der zweiten Abtheilung in derselben Weise durch:

$$\Big[\sum_{\varkappa,\lambda} \bar{X}^0_{\varkappa\mu} \bar{Y}^0_{\lambda\mu},\ \sum_{\varkappa,\lambda} \bar{X}^0_{\varkappa\mu} \bar{Y}^0_{\lambda-1,\mu}\Big] \qquad (0<\varkappa<\bar{e}^0_\mu;\ \varkappa+\lambda = \bar{e}^0_\mu - 1).$$

Derlei Formenpaare sind also durch die Anzahl der darin enthaltenen Variabeln X, Y, d. h. durch die Zahlen

$$n^0_\mu \quad \text{oder} \quad 2e^0_\mu - 1 \quad \text{und bez.} \quad \bar{n}^0_\mu \quad \text{oder} \quad 2\bar{e}^0_\mu - 1$$

völlig bestimmt, während es zur Bestimmung eines elementaren reducirten Formenpaares der ersten Art, ausser der Anzahl der darin enthaltenen Variabeln $n^{(\nu)}_\mu$ oder $2e^{(\nu)}_\mu$, nur noch des Werthes von t und desjenigen des Verhältnisses $u^{(\nu)} : v^{(\nu)}$ bedarf, da

$tu^{(\nu)} + v^{(\nu)} = 1$ ist. Ein beliebiges reducirtes Formenpaar $[\Phi, \Psi]$ ist demgemäss, als Aggregat von elementaren, durch die Werthverhältnisse $u^{(\nu)} : v^{(\nu)}$ und die zugehörigen geraden Zahlen $n_\mu^{(\nu)}$ sowie durch die Reihe der ungeraden Zahlen n_μ^0 und $\bar{n}_\mu^0$ vollständig charakterisirt, wenn t als gegeben angenommen wird. Aber diese charakteristischen Grössen und Zahlen haben nicht bloss jene formale Bedeutung, welche an die äussere Gestalt der reducirten Formenpaare anknüpft, sondern sie können auch unabhängig davon in einer für alle Formenpaare gültigen Weise definirt werden und erhalten dabei eine höhere und wesentlichere Bedeutung, welche im Folgenden dargelegt werden soll.

IV.

Es sei $[\varphi, \psi]$ ein beliebiges Paar bilinearer Formen von r Variabeln x und s Variabeln y, ferner sei τ die grösste Zahl, welche die Eigenschaft hat, dass nicht alle aus den Coefficienten von $u\varphi + v\psi$ zu bildenden Determinanten der Ordnung τ identisch gleich Null werden. Alsdann bestehen zwischen den r Ableitungen von $u\varphi + v\psi$ nach $x_1, x_2, \ldots x_r$ genau $r - \tau$ von einander unabhängige lineare Relationen und ebenso zwischen den s Ableitungen nach $y_1, y_2, \ldots y_s$ genau $s - \tau$ von einander unabhängige lineare Relationen, deren Coefficienten ganze homogene Functionen von u und v sind. Denkt man sich nun beide Arten von Relationen so gewählt, dass ihre Dimensionen in Beziehung auf u und v, welche bez. durch:

$$m_1\ \ m_2, \ldots m_\varrho \qquad (\varrho = r - \tau)$$

$$\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots \bar{m}_\sigma \qquad (\sigma = s - \tau)$$

bezeichnet werden sollen, möglichst klein werden, so sind diese Zahlen m und $\bar{m}$ für jedes Formenpaar $[\varphi, \psi]$ völlig bestimmt und bleiben auch bei linearer Transformation desselben ungeändert. Bedeuten endlich $u' : v', u'' : v'', \ldots$ alle diejenigen Werthverhältnisse von $u : v$, für welche die sämmtlichen aus den Coefficienten von $u\varphi + v\psi$ zu bildenden Determinanten τter Ordnung verschwinden, und geben die Zahlen:

$$l'_\mu, l''_\mu \ldots \qquad (\mu = 1, 2, \ldots \tau)$$

an, wie vielmal der bezügliche Linearfactor:

$$uv' - vu', \ \ uv'' - vu'', \ldots$$

in sämmtlichen Determinanten μter Ordnung enthalten ist, so sind auch die Verhältnisse $u^{(\nu)} : v^{(\nu)}$ und die Zahlen $l_\mu^{(\nu)}$ Invarianten des Formenpaares $[\varphi, \psi]$, und zwar

in dem Sinne, dass sie bei jeder simultanen linearen Transformation der beiden bilinearen Functionen φ, ψ ungeändert bleiben. Hiernach hat man, wenn noch:

$$2m_\varkappa + 1 = n_{\varkappa+\tau}^0, \quad 2\bar{m}_\lambda + 1 = \bar{n}_{\lambda+\tau}^0 \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq \varrho,\ 1 \leqq \lambda \leqq \sigma),$$

$$l_\mu^{(\nu)} = n_1^{(\nu)} + n_2^{(\nu)} + \cdots + n_\mu^{(\nu)} \qquad (1 \leqq \mu \leqq \tau)$$

gesetzt wird, in den Grössen $u^{(\nu)}, v^{(\nu)}$ sowie in den Zahlen n eine Reihe von Invarianten des Formenpaares $[\varphi, \psi]$, welche in folgender Weise schematisch zusammenzustellen sind:

$$(3) \qquad \begin{array}{c|l}
u : v = & \\
\hline
0 : 0 & 0, 0, \ldots 0, \ \ n_{\tau+1}^0, \ldots n_r^0 \\
0 : 0 & 0, 0, \ldots 0, \ \ \bar{n}_{\tau+1}^0, \ldots \bar{n}_s^0 \\
u' : v' & n'_1, n'_2, \ldots n'_\tau \\
u'' : v'' & n''_1, n''_2, \ldots n''_\tau \\
\vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}$$

und es ist nun mit Hülfe der reducirten Formenpaare zu zeigen, dass dieses Schema das *vollständige* Invariantensystem enthält.*)

Ist $[\Phi, \Psi]$ das reducirte Formenpaar von $[\varphi, \psi]$, und ist die Anzahl der in $[\Phi, \Psi]$ vorkommenden Variabeln X gleich r', die der Variabeln Y gleich s', also $r' \leqq r, s' \leqq s$, so kann man $[\Phi, \Psi]$ auch als ein Paar bilinearer Formen von r Variabeln X und s Variabeln Y auffassen, welches von $r - r'$ Grössen X und $s - s'$ Grössen Y unabhängig ist. Es werden daher in dem zu $[\Phi, \Psi]$ gehörigen Invariantensystem genau $r - r'$ Zahlen n^0 und $s - s'$ Zahlen $\bar{n}^0$ gleich Eins, während die übrigen Zahlen n^0 und $\bar{n}^0$ bez. mit denjenigen identisch werden, welche im art. III definirt worden sind. Ebenso stimmen die im Invariantensystem vorkommenden Werthverhältnisse $u^{(\nu)} : v^{(\nu)}$ mit denen des art. III überein, und die zugehörigen Zahlen:

$$n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \ldots n_\tau^{(\nu)}$$

*) Betreffs der Natur von derartigen Invariantensystemen verweise ich auf die Erörterungen am Schlusse meiner Arbeit „über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen“ § 3, VI. Monatsberichte vom Jahre 1874, S. 444 ff.[1])

[1]) Bd. I, S. 479 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

erhält man aus den im art. III mit $n_\mu^{(\nu)}$ bezeichneten Zahlen, wenn man diese ihrer Grösse nach geordnet im Schema $(\mathfrak{J})$ für die *letzten* Zahlen $n^{(\nu)}$ nimmt und die übrigbleibenden *ersten* Zahlen $n^{(\nu)}$ gleich Null setzt. Wird die Anzahl der Zahlen $n_\mu^{(\nu)}$ des art. III mit α bezeichnet, so ergeben diese hiernach die Werthe von:

$$n_{\tau-\alpha+1}^{(\nu)},\ n_{\tau-\alpha+2}^{(\nu)}, \ldots n_\tau^{(\nu)}$$

im Schema $(\mathfrak{J})$, und zwar so, dass stets $n_k^{(\nu)} \leqq n_{k+1}^{(\nu)}$ ist, während die Werthe von:

$$n_1^{(\nu)},\ n_2^{(\nu)}, \ldots n_{\tau-\alpha}^{(\nu)}$$

sämmtlich gleich Null sind.

Hiermit ist die anderweite, für beliebige Formenpaare $[\varphi, \psi]$ gültige Bedeutung jener Grössen und Zahlen $u^{(\nu)}$, $v^{(\nu)}$, n dargelegt, welche im art. III nur für reducirte Formenpaare definirt waren, und es hat sich dabei gezeigt, dass eben diese Grössen und Zahlen in ihrer anderen Bedeutung die Eigenschaft haben, *Invarianten* der bezüglichen Formenpaare zu sein. Es ist aber schon oben am Schlusse von art. III hervorgehoben, dass die Grössen und Zahlen $u^{(\nu)}$, $v^{(\nu)}$, n oder also, wie sie jetzt bezeichnet werden können, die im Schema $(\mathfrak{J})$ enthaltenen Invarianten, für ein *reducirtes* Formenpaar $[\Phi, \Psi]$ durchaus charakteristisch sind und dasselbe vollkommen bestimmen, wenn nur die darin vorkommende Grösse t als gegeben angenommen wird. Die Reduction zweier Formenpaare $[\varphi, \psi], [\varphi', \psi']$, denen ein und dasselbe Invariantensystem $(\mathfrak{J})$ angehört, muss also auf ein und dasselbe reducirte Formenpaar $[\Phi, \Psi]$ führen, sobald die Grösse t in beiden Fällen identisch gewählt wird; und dies ist stets möglich, da die Wahl von t nur durch ausschliessende Bedingungen eingeschränkt ist. Hieraus folgt als Endresultat, dass für die gegenseitige Transformirbarkeit zweier Formenpaare die Identität der beidenseitigen Invariantensysteme $(\mathfrak{J})$ nicht bloss eine nothwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung ist, und dass das in dem Schema $(\mathfrak{J})$ zusammengestellte Invariantensystem daher als ein *vollständiges* bezeichnet werden kann.

Die Reihenfolge der Entwickelungen, wie sie hier gegeben worden, ist gerade entgegengesetzt derjenigen des schon oben citirten *Weierstrass*'schen Aufsatzes vom Jahre 1868[1]); denn die Grössen und Zahlen $u^{(\nu)}$, $v^{(\nu)}$, $n^{(\nu)}$, welche darin

[1]) *Weierstrass*, Werke, Bd. II, S. 19. H

allein auftreten,*) werden dort *zuerst* in ihrem höheren Sinne eingeführt, und ihre formale Bedeutung für die reducirten Formenpaare wird erst *nachher* dargelegt. Dies ist, rein sachlich genommen, sicher vorzuziehen, und ich habe auch bei einer analogen Untersuchung**) eben diese natürliche Reihenfolge der Erörterungen festgehalten.

Aber die umgekehrte Schlussweise, wie sie oben und auch schon in meinem Aufsatze vom Jahre 1868 angewendet worden ist,***) gewährt den formalen Vortheil grösserer Einfachheit; denn die Herleitung der verschiedenen Eigenschaften von Paaren bilinearer oder quadratischer Formen wird wesentlich erleichtert, wenn die Entwickelung mit der Reduction beginnt und also dann gleich an die vereinfachte Gestalt der Formenpaare anknüpfen kann.†) So ergiebt sich auf dem oben eingeschlagenen Wege ganz unmittelbar, dass die Summe der Invarianten n für ein beliebiges Formenpaar $[\varphi, \psi]$ genau gleich der Gesammtanzahl der Variabeln, d. h. nach der obigen Bezeichnungsweise gleich $r+s$ ist. Denn wenn die Anzahl der in $[\Phi, \Psi]$ vorkommenden Variabeln X, Y durch die Zahlen e ausgedrückt wird, so kommt:

$$\begin{aligned} r' &= \sum_{\mu,\nu} e_\mu^{(\nu)} + \sum_\mu e_\mu^0 + \sum_\mu (\bar{e}_\mu^0 - 1) \\ s' &= \sum_{\mu,\nu} e_\mu^{(\nu)} + \sum_\mu (e_\mu^0 - 1) + \sum_\mu \bar{e}_\mu^0 \end{aligned} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots),$$

also, da:

$$2e_\mu^{(\nu)} = n_\mu^{(\nu)}, \quad 2e_\mu^0 - 1 = n_\mu^0, \quad 2\bar{e}_\mu^0 - 1 = \bar{n}_\mu^0$$

ist, und den Zahlen n^0, $\bar{n}^0$ noch $r - r'$ Zahlen $n^0 = 1$ und $s - s'$ Zahlen $\bar{n}^0 = 1$ hinzutreten:

*) Die *Weierstrass*'sche Arbeit behandelt die Transformation solcher Paare bilinearer Formen, für welche die Determinante der zugehörigen Schaar von Null verschieden ist, d. h. solche, bei denen die Zahlen n^0, $\bar{n}^0$ gänzlich fehlen.

**) Vergl. § 3 meiner Arbeit „über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen" S. 432 etc. der Monatsberichte vom Jahre 1874.[1])

***) Vergl. Monatsberichte vom Mai 1868, S. 340—343, art. I.[2])

†) Vergl. Monatsbericht vom März 1874, S. 206.[3])

[1]) Bd. I, S. 466 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. I, S. 167—170 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[3]) Bd. I, S. 382 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

$$\begin{aligned} 2r &= \sum_{\mu,\nu} n_\mu^{(\nu)} + \sum_\mu (n_\mu^0 + 1) + \sum_\mu (\bar{n}_\mu^0 - 1) \\ 2s &= \sum_{\mu,\nu} n_\mu^{(\nu)} + \sum_\mu (n_\mu^0 - 1) + \sum_\mu (\bar{n}_\mu^0 + 1) \end{aligned} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots).$$

Hieraus geht hervor, dass in der That die Summe $r + s$ gleich der Summe aller Zahlen n ist, und es folgt überdiess, dass der Überschuss der Anzahl der Variabeln x über diejenige der y mit dem Überschusse der Anzahl der Zahlen n^0 über diejenige der Zahlen $\bar{n}^0$ übereinstimmt, d. h. dass $r - s = \varrho - \sigma$ ist. — Auch die schon oben erwähnte Eigenschaft der Zahlen $n^{(\nu)}$, nämlich dass stets:

$$m_{k+1}^{(\nu)} \geqq m_k^{(\nu)}$$

ist, tritt bei den reducirten Formenpaaren in Evidenz, und es folgt daraus für die im art. IV definirten Zahlen $l_\mu^{(\nu)}$, dass keine derselben grösser sein kann, als das Mittel aus den beiden benachbarten.*)

V.

Die Invarianten einer Schaar $u\varphi + v\psi$ können unmittelbar aus denen des Formenpaars $[\varphi, \psi]$ hergeleitet werden; denn dem Begriffe der Schaar gemäss hat man nur noch von dem Unterschied zweier Formenpaare:

$$[\varphi, \psi], \; [a\varphi + b\psi, \; c\varphi + d\psi]$$

zu abstrahiren, wenn a, b, c, d irgend welche Constanten bedeuten, für die $ad - bc$ nicht verschwindet. In Folge dessen sind aus den Werthverhältnissen:

$$u' : v', \;\; u'' : v'', \;\; u''' : v''', \ldots,$$

welche die äussere Rubrik des Invariantenschemas von $[\varphi, \psi]$ enthält, die Ausdrücke:

$$(\Omega^{(\nu)}) \qquad \frac{(u'v'' - u''v')(u'''v^{(\nu)} - u^{(\nu)}v''')}{(u'v''' - u'''v')(u''v^{(\nu)} - u^{(\nu)}v'')} \qquad (\nu = 4, 5, \ldots)$$

zu bilden, und diese constituiren zusammen mit den das Innere des Invariantenschemas erfüllenden Zahlen n ein vollständiges System von Invarianten der Schaar $u\varphi + v\psi$. Ist die Anzahl der Werthverhältnisse $u' : v', u'' : v'', \ldots$ kleiner als *vier*,

*) Vergl. die Anmerkung in der mehrfach citirten *Weierstrass*'schen Abhandlung Monatsbericht vom Mai 1868, S. 330.[1])

[1]) *Weierstrass*, Werke, Bd. II, S. 36. H

so giebt es keine Grössen Ω, es fallen also diese Invarianten der ersten Art gänzlich weg, und es bleiben einzig und allein die Zahlen n als Invarianten der Schaar zurück.

Der grösste gemeinsame Theiler sämmtlicher Determinanten μter Ordnung, welche aus den Coefficienten von $u\varphi + v\psi$ gebildet werden können, ist:

$$(uv' - vu')^{l'_\mu} (uv'' - vu'')^{l''_\mu} \ldots,$$

und die Classe binärer Formen, zu welcher diese homogene Function von u, v gehört, kann durch die binäre Form von U, V:

$$(\mathrm{K}_\mu) \qquad (U - V)^{l'_\mu} V^{l''_\mu} U^{l'''_\mu} \prod_\nu (U - V\Omega^{(\nu)})^{l_\mu^{(\nu)}} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

repraesentirt werden, die aus der ersteren durch die Substitution:

$$U = \frac{uv''' - vu'''}{u'v''' - v'u'''}, \quad V = \frac{uv'' - vu''}{u'v'' - v'u''}$$

entsteht. Da überdiess $l_\mu^{(\nu)} = n_1^{(\nu)} + n_2^{(\nu)} + \cdots + n_\mu^{(\nu)}$ ist, so sind daher die Invarianten $\Omega^{(\nu)}$ und $n_\mu^{(\nu)}$ eben sowohl nothwendig als hinreichend, um die binären Formen (K_μ) zu bestimmen und die dadurch repraesentirten „determinirenden Formenclassen" zu ersetzen.*)

*) Wegen des Begriffs der determinirenden Formenclassen verweise ich auf meine Mittheilung vom 19. Januar 1874, S. 59 ff. des Monatsberichts.[1])

[1]) Bd. I, S. 351 ff. dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

ALGEBRAISCHE REDUCTION DER SCHAAREN QUADRATISCHER FORMEN

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
vom Jahre 1890. S. 1375—1388. 1891. S. 9—17, S. 34—44.

ALGEBRAISCHE REDUCTION DER SCHAAREN QUADRATISCHER FORMEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 18. Dezember (I—III) 1890, am 8. Januar (IV—V) und am 15. Januar (VI—VIII) 1891.]

Die Methode, welche ich in meinem neulich der Akademie vorgelegten Aufsatze zur algebraischen Reduction der Schaaren bilinearer Formen benutzt habe,[1]) ist auch bei Schaaren *quadratischer* Formen anwendbar. Ich will dies hier im Anschluss an die in dem erwähnten Aufsatz gegebenen Entwickelungen zeigen, aber dabei auch einige Modificationen darlegen, welche für die später auseinanderzusetzende *arithmetische* Reduction der Schaaren quadratischer Formen erforderlich sind.

I.

Bedeuten u, v, sowie $x_1, x_2, \dots x_n$ unbestimmte Variable und:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n), \quad \psi(x_1, x_2, \dots x_n)$$

zwei homogene quadratische Formen, so stellt das Aggregat $u\varphi - v\psi$ eine „*Schaar*“ quadratischer Formen dar. Es soll nun angenommen werden, dass die Determinante der Schaar gleich Null ist, d. h. also, dass, wenn zur Abkürzung:

$$u\varphi - v\psi = f,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_k, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \varphi_k, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \psi_k \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f_{ik}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = \varphi_{ik}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} = \psi_{ik}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$(\mathfrak{A}) \qquad | f_{ik} | = | u\varphi_{ik} - v\psi_{ik} | = 0 \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

besteht. Alsdann sind die n Ableitungen $f_1, f_2, \dots f_n$ mindestens durch *eine* lineare homogene Relation mit einander verbunden, deren Coefficienten ganze homogene

[1]) Bd. III$_2$ S. 139 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

Functionen von u und v sind, und es kann demnach aus den vorhandenen Relationen eine Gleichung:

$$(\mathfrak{B})\qquad \sum_{h,k} c_{hk} f_k u^h v^{m-h} = 0 \qquad \binom{h=0,1,\dots m}{k=1,2,\dots n}$$

gebildet werden, für welche die Zahl m, d. h. die Dimension in Beziehung auf u und v, einen möglichst kleinen Werth hat. Ist $m=0$, also:

$$(\mathfrak{C})\qquad \sum_k c_{0k} f_k = u\sum_k c_{0k}\varphi_k - v\sum_k c_{0k}\psi_k = 0 \qquad (k=1,2,\dots n)$$

und folglich:

$$\sum_k c_{0k}\varphi_k = 0,\quad \sum_k c_{0k}\psi_k = 0 \qquad (k=1,2,\dots n),$$

so kann einer der Coefficienten c_{0k}, z. B. c_{0n}, von Null verschieden vorausgesetzt werden, und die Schaar f geht mittels der Substitution:

$$c_{0n} x_k = x_k' + c_{0k} x_n \qquad (k=1,2,\dots n-1)$$

in eine solche der $n-1$ Variabeln $x_1', x_2', \dots x_{n-1}'$ über. Ist die Determinante der so erhaltenen Schaar quadratischer Formen von $n-1$ Variabeln wiederum gleich Null, und besteht auch zwischen den nach den $n-1$ Variabeln gebildeten partiellen Ableitungen eine lineare homogene Relation, wie $(\mathfrak{C})$, mit Coefficienten, die von den Variabeln u und v unabhängig sind, so ist die Anzahl der Variabeln auf $n-2$ zu reduciren, und durch Fortsetzung dieses Verfahrens muss man schliesslich zu einer Schaar gelangen, bei welcher die Anzahl der Variabeln sich nicht mehr verringern lässt. Man kann demnach annehmen, dass schon die oben mit f bezeichnete Schaar $u\varphi - v\psi$ eine „eigentliche" Schaar von n Variabeln sei, d. h. eine solche, welche nicht durch lineare Transformation der n Variabeln auf eine Schaar von weniger als n Variabeln reducirt werden kann.

Dies vorausgesetzt, muss die Zahl m in der Gleichung $(\mathfrak{B})$ wenigstens gleich Eins sein. Dass sie andererseits nicht grösser als die Rangzahl des Systems, also höchstens gleich $n-1$ sein kann, ist aus folgender Betrachtung zu ersehen.

Bezeichnet r den Rang des Systems der n^2 Grössen f_{ik}, und ist die Determinante $r$ter Ordnung:

$$(\mathfrak{D})\qquad |f_{ik}| \qquad \binom{i=i_1, i_2, \dots i_r}{k=k_1, k_2, \dots k_r}$$

von Null verschieden, so ist die Determinante:

$$|\, f_{i_h},\ f_{i_h,k_1},\ f_{i_h k_2}, \dots f_{i_h,k_r} \,| \qquad (h=1,2,\dots r+1)$$

gleich Null, weil alle aus dem System der n^2 Grössen f_{ik} zu bildenden Subdeterminanten $(r+1)$ter Ordnung gleich Null sind, und es besteht demgemäss zwischen den $r+1$ Ableitungen f_{i_h} eine lineare homogene Relation:

$$\sum_h \Delta_h f_{i_h} = 0 \qquad (h=1,2,\dots r+1),$$

in welcher die Coefficienten Δ_h Subdeterminanten $r$ter Ordnung des Systems (f_{ik}) oder $(u\varphi_{ik} - v\psi_{ik})$ und also homogene Functionen $r$ter Ordnung von u und v sind. Da überdies mindestens eine dieser Subdeterminanten, nämlich Δ_{r+1} oder $(\mathfrak{D})$, der Voraussetzung nach von Null verschieden ist, so existirt jedenfalls eine Relation $(\mathfrak{B})$, in welcher m nicht grösser als die Rangzahl des Systems (f_{ik}), also höchstens gleich $n-1$ ist.

Das System der $(m+1)n$ Coefficienten:

$$c_{hk} \qquad \binom{h=0,1,\dots m}{k=1,2,\dots n},$$

welche in der Gleichung $(\mathfrak{B})$ vorkommen, ist vom Range $m+1$, d. h. es können nicht alle aus den Elementen c_{hk} zu bildenden Determinanten $(m+1)$ter Ordnung gleich Null sein. Denn wenn $m+1$ Coefficienten $a_0, a_1, \dots a_m$ existirten, für welche die Gleichung:

$$\sum_{h=0}^{h=m} a_h c_{hk} = 0 \qquad (k=1,2,\dots n)$$

erfüllt wäre, so würde in der aus der Relation $(\mathfrak{B})$ hervorgehenden Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{h=0}^{h=m}\sum_{g=0}^{g=m} a_g c_{hk} f_k u^{m-g+h} v^{m+g-h} = 0$$

der Coefficient von $u^m v^m$ gleich Null sein. Es würde daher auch die Gleichung stattfinden:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{h=0}^{h=m}\sum_{g=0}^{g=h-1} a_g c_{hk} f_k u^{m-g+h} v^{m+g-h} + \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{h=0}^{h=m}\sum_{g=h+1}^{g=m} a_g c_{hk} f_k u^{m-g+h} v^{m+g-h} = 0,$$

welche, wenn:

$$\sum_{h=i}^{h=m} a_{h-i} c_{hk} = c_{ik}',\quad \sum_{h=0}^{h=i} a_{m+h-i} c_{hk} = c_{ik}''$$

gesetzt wird, in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$u^m \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=m} c'_{ik} f_k u^i v^{m-i} + v^m \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=0}^{i=m-1} c''_{ik} f_k u^i v^{m-i} = 0.$$

Ersetzt man in dem Ausdruck auf der linken Seite f_k durch $u\varphi_k - v\psi_k$, so enthält der erste Theil nur Potenzen von u, deren Exponenten grösser als m sind, der zweite nur solche, deren Exponenten *nicht* grösser als m sind. Beide Theile müssten also für sich gleich Null sein, während doch die Existenz einer Gleichung:

$$\sum_{i,k} c''_{ik} f_k u^i v^{m-i} = 0 \qquad \binom{i=0,1,\dots m-1}{k=1,2,\dots n}$$

jener Annahme widerspricht, dass die Zahl m in der Gleichung ($\mathfrak{B}$) einen möglichst kleinen Werth habe.

Da das System der $(m+1)n$ Coefficienten, wie jetzt bewiesen worden, vom Range $m+1$ ist, so kann man irgend welche Coefficienten

$$c_{pk} \qquad \binom{p=m+1,\ m+2,\dots n-1}{k=1,2,\dots n}$$

hinzunehmen, die so beschaffen sind, dass die Determinante:

$$| c_{i-1,k} | \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

von Null verschieden wird.

Bedeuten nun f', φ', ψ' die durch die Substitution:

$$x_k = \sum_i c_{i-1,k} x'_{i-1} \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

aus f, φ, ψ hervorgehenden Functionen der Variabeln x', und setzt man:

$$f'_k = \frac{\partial f'}{\partial x'_k}, \quad \varphi'_k = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_k}, \quad \psi'_k = \frac{\partial \psi'}{\partial x'_k} \qquad (k=0,1,\dots n-1),$$

so wird:

$$\sum_{k=1}^{k=n} c_{hk} f_k = f'_h \qquad (h=0,1,\dots n-1),$$

und die Gleichung ($\mathfrak{B}$) geht daher in die folgende über:

$$(\mathfrak{C}) \qquad \sum_{h=0}^{h=m} f'_h u^h v^{m-h} = \sum_{h=0}^{h=m} (u\varphi'_h - v\psi'_h) u^h v^{m-h} = 0,$$

welche auch *so* dargestellt werden kann:

$$v^{m+1}\psi'_0 + \sum_{h=1}^{h=m} (\varphi'_{h-1} - \psi'_h) u^h v^{m-h+1} + u^{m+1}\varphi'_m = 0.$$

Es bestehen hiernach die Relationen:

$$(\mathfrak{F}) \qquad \psi'_0 = 0, \quad \varphi'_{h-1} = \psi'_h, \quad \varphi'_m = 0. \qquad (h=1,2,\dots m),$$

und die Functionen f' bestimmen sich demgemäss in folgender Weise:

$$(\mathfrak{F}') \qquad f'_0 = u\psi'_1, \quad u\psi'_{h+1} - v\psi'_h = f'_h, \quad -v\psi'_m = f'_m \qquad (h=1,2,\dots m-1).$$

Hieraus ersieht man zuvörderst, dass zwischen den m linearen Functionen der n Variabeln x':

$$\psi'_1, \psi'_2, \dots \psi'_m$$

keine lineare homogene Relation bestehen kann; denn aus einer solchen würde eine lineare homogene Gleichung zwischen den m Ausdrücken:

$$f'_0, f'_1, \dots f'_{m-1}$$

folgen, deren Coefficienten ganze homogene Functionen $(m-1)$ter Dimension von u, v wären.

Es ist nun ferner zu zeigen, dass die m linearen Functionen ψ' von den $m+1$ Variabeln $x'_0, x'_1, \dots x'_m$ unabhängig sind. In der That ergeben sich aus den Relationen ($\mathfrak{F}$) für die zweiten Ableitungen der Functionen φ' und ψ' die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'_{h+1} \partial x'_k} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'_h \partial x'_k} = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'_h \partial x'_{k+1}} \qquad (h,k=0,1,\dots m-1),$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'_{h+1} \partial x'_m} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'_h \partial x'_m} = 0 \qquad (h=0,1,\dots m-1),$$

und da $\psi'_0 = 0$ ist, so erschliesst man hieraus, indem man der Reihe nach $h = 0, 1, \dots m-1$ setzt, dass die zweiten Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'_h \partial x'_k} \qquad (h,k=0,1,\dots m)$$

sämmtlich gleich Null sind.

Nunmehr erhellt, dass der Ausdruck:

$$u\varphi' - v\psi' - \sum_{k=1}^{k=m} (u x'_{k-1} - v x'_k)\psi'_k$$

von den Variabeln $x'_0, x'_1, \ldots x'_m$ unabhängig ist; denn das Resultat der Differentiation nach einer dieser Variabeln, die mit x'_h bezeichnet werden möge, wird, da die Functionen ψ'_k von x'_h unabhängig sind:

$$u\varphi'_h - v\psi'_h - (u\psi'_{h+1} - v\psi'_h),$$

also, vermöge der Relationen $(\mathfrak{F})$, gleich Null. Es ist daher:

$$u\varphi' - v\psi' = \sum_{k=1}^{k=m} (u x'_{k-1} - v x'_k)\psi'_k + u\Phi' + v\Psi',$$

wo Φ', Ψ' quadratische Formen der $n - m - 1$ Variabeln:

$$x'_{m+1}, x'_{m+2}, \ldots x'_{n-1}$$

bedeuten, und da die m linearen Functionen derselben:

$$\psi'_1, \psi'_2, \ldots \psi'_m$$

sich als von einander unabhängig erwiesen haben, so können sie als neue Variable an Stelle von m der $n - m - 1$ Variabeln:

$$x'_{m+1}, x'_{m+2}, \ldots x'_{n-1}$$

eingeführt werden. Man kann also das Ergebniss der vorstehenden Entwickelungen dahin formulieren:

Jede Schaar quadratischer Formen:

$$u\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) + v\psi(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

deren Determinante gleich Null ist, lässt sich auf die Gestalt bringen:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_{h} (u\mathfrak{x}_{h-1} + v\mathfrak{x}_h)\mathfrak{x}_{m+h} + \sum_{i,k} (u\mathfrak{a}_{ik} + v\mathfrak{b}_{ik})\mathfrak{x}_{m+i}\mathfrak{x}_{m+k},$$
$$(h = 1, 2, \ldots m) \qquad (i \leqq k;\ i, k = 1, 2, 3, \ldots)$$

wo $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ von einander unabhängige, homogene, lineare Functionen der Variabeln x bedeuten, deren Coefficienten, ebenso wie die Coefficienten $\mathfrak{a}_{ik}, \mathfrak{b}_{ik}$, dem Rationalitätsbereich der Coefficienten der quadratischen Formen φ, ψ angehören, und jede Schaar von solcher Gestalt $(\mathfrak{G})$ hat die Eigenschaft, dass ihre Determinante gleich Null ist.

Dieses Ergebniss findet sich schon in meiner Mittheilung vom 18. Mai 1868,*) und es ist dort auch in ähnlicher Weise hergeleitet worden. Aber um das Verständniss des vorliegenden Aufsatzes zu erleichtern, habe ich geglaubt, die erwähnte Deduction hier mit aufnehmen und in manchen Punkten mehr ausführen zu sollen.

II.

Ist irgend eine Schaar quadratischer Formen:

$$u\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) + v\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

gegeben, deren Determinante gleich Null ist, so kann man dazu, wie jetzt gezeigt werden soll, stets eine Schaar oder mehrere Schaaren von der Art, wie der erste Theil von $(\mathfrak{G})$, nämlich:

$$(\mathfrak{G}_1) \qquad \sum_{h=1}^{h=m} (u\mathfrak{x}_{h-1} + v\mathfrak{x}_h)\mathfrak{x}_{m+h}$$

finden, nach deren Subtraction von $u\varphi + v\psi$ entweder gar keine Schaar mehr übrig bleibt, oder doch keine solche, deren Determinante gleich Null wäre.

Hierbei kann offenbar, wie im art. I, angenommen werden, dass unter den zwischen den ersten Ableitungen von $u\varphi + v\psi$ bestehenden homogenen, linearen Relationen mindestens eine sei, in welcher die Coefficienten in Beziehung auf u und v von der Dimension m sind, aber keine solche, in welcher die Dimension kleiner als m wäre, und in dieser Voraussetzung ist schon die enthalten, dass die Schaar $u\varphi + v\psi$ eine eigentliche Schaar von n Variabeln, also nicht in eine Schaar von weniger Variabeln transformirbar sein soll. Ferner können die mit φ, ψ bezeichneten Grundformen der Schaar als so gewählt vorausgesetzt werden, dass für $u = 0$ nur diejenigen Subdeterminanten des Systems der Coefficienten von $u\varphi + v\psi$ verschwinden, welche für *alle* Werthe von u gleich Null sind.

---

*) Monatsbericht vom Mai 1868, S. 339—346.[1])

[1]) Bd. I, S. 163—174 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken.

Um nun die Schaaren von der mit $(\mathfrak{G}_1)$ bezeichneten Art zu finden, hat man zuvörderst $u\varphi + v\psi$ nach der im art. I angegebenen Methode auf die Gestalt $(\mathfrak{G})$ zu bringen und den zweiten Theil wiederum in zwei Theile zu sondern:

$$(\mathfrak{G}_2) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=i}^{k=n-m-1} (u\mathfrak{a}_{ik} + v\mathfrak{b}_{ik})\mathfrak{x}_{m+i}\mathfrak{x}_{m+k},$$

$$(\mathfrak{G}_3) \qquad \sum_{i=m+1}^{i=n-m-1} \sum_{k=i}^{k=n-m-1} (u\mathfrak{a}_{ik} + v\mathfrak{b}_{ik})\mathfrak{x}_{m+i}\mathfrak{x}_{m+k},$$

von denen der letztere eine Schaar quadratischer Formen von nur $n-2m-1$ Variabeln $\mathfrak{x}_{2m+1}, \mathfrak{x}_{2m+2}, \dots \mathfrak{x}_{n-1}$ repraesentirt.

Alsdann hat man die Substitution:

$$\mathfrak{x}'_{i-1} = \mathfrak{x}_{i-1} + \sum_k \mathfrak{a}_{ik}\mathfrak{x}_{m+k} \qquad \binom{i=1,2,\dots m}{k=i,\ i+1,\dots n-m-1}$$

$$\mathfrak{x}'_m = \mathfrak{x}_m + \sum_i (\mathfrak{b}_{im} - \mathfrak{a}_{i+1,m})\mathfrak{x}_{m+i} + \sum_k \mathfrak{b}_{mk}\mathfrak{x}_{m+k} \qquad \binom{i=1,2,\dots m-1}{k=m,\ m+1,\dots n-m-1}$$

anzuwenden, durch welche die Schaar $(\mathfrak{G}_1)$ in eine Schaar von derselben Gestalt:

$$(\mathfrak{G}_1') \qquad \sum_{h=1}^{h=m} (u\mathfrak{x}'_{h-1} + v\mathfrak{x}'_h)\mathfrak{x}'_{m+h}$$

transformirt und zugleich aus der Schaar $(\mathfrak{G}_2)$ sowohl der ganze mit u multiplicirte Theil weggeschafft wird, als auch derjenige, welcher mit $v\mathfrak{x}_{2m}$ multiplicirt ist. Diese Schaar $(\mathfrak{G}_2)$ ist demnach durch die angegebene Substitution auf das Aggregat der beiden quadratischen Formen:

$$(\mathfrak{G}_{2,1}) \qquad v\sum_{i=1}^{i=m-1} \sum_{k=i}^{k=m-1} \mathfrak{b}'_{ik}\mathfrak{x}_{m+i}\mathfrak{x}_{m+k},$$

$$(\mathfrak{G}_{2,2}) \qquad v\sum_{i=1}^{i=m-1} \sum_{k=m+1}^{k=n-m-1} \mathfrak{b}'_{ik}\mathfrak{x}_{m+i}\mathfrak{x}_{m+k}$$

reducirt, in welchen die Coefficienten $\mathfrak{b}'_{ik}$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{b}'_{ii} = \mathfrak{b}_{ii}, \quad \mathfrak{b}'_{ik} = \mathfrak{b}_{ik} - \mathfrak{a}_{i+1,k} \qquad (i<k;\ i=1,2,\dots m-1)$$

definirt sind.

In dem einfachsten Falle, wo $n = 2m+1$, also jeder Coefficient $\mathfrak{a}_{ik}$ und $\mathfrak{b}_{ik}$, dessen zweiter Index k grösser als $2m$ ist, gleich Null wird und demnach die mit $(\mathfrak{G}_{2,2})$ und $(\mathfrak{G}_3)$ bezeichneten Formen gar nicht vorhanden sind, hat man nur die Form $(\mathfrak{G}_{2,1})$ wegzuschaffen. Dies geschieht für jedes einzelne Glied:

$$\mathfrak{b}'_{ik}\mathfrak{x}_{m+i}\mathfrak{x}_{m+k} \qquad (i \leq k)$$

durch die Substitution:

$$\mathfrak{x}'_g = \bar{\mathfrak{x}}_g + \mathfrak{b}_{ik}\mathfrak{x}_{m-g+i+k}, \quad \mathfrak{x}'_h = \bar{\mathfrak{x}}_h - \mathfrak{b}_{ik}\mathfrak{x}_{m-h+i+k},$$

wobei im Falle $i+k \leq m$:

$$g = 0, 1, \dots i-1 \ \text{ und } \ h = k,\ k+1, \dots k+i-1,$$

aber im Falle $i+k > m$:

$$g = i+k-m,\ i+k-m+1, \dots i-1 \ \text{ und } \ h = k, k+1, \dots m$$

zu nehmen ist. Hiermit ist also schon nachgewiesen, dass man jeder Schaar quadratischer Formen von $2m+1$ Variabeln:

$$u\varphi + v\psi$$

die mit $(\mathfrak{G}_1)$ bezeichnete Gestalt geben kann:

$$\sum_{h=1}^{h=m} (u\mathfrak{x}_{h-1} + v\mathfrak{x}_h)\mathfrak{x}_{m+h},$$

wenn zwischen den ersten Ableitungen von $u\varphi + v\psi$ eine lineare homogene Relation besteht, in welcher die Coefficienten von der $m$ten Dimension in Beziehung auf u und v sind, aber keine solche Relation, deren Dimension in Beziehung auf u und v kleiner als m wäre.

An die hier zur leichteren Übersicht vorangeschickte Behandlung des einfachsten Falles lässt sich eine wesentliche Bemerkung anknüpfen. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} u &= \alpha u^0 + \gamma v^0, \quad & v &= \beta u^0 + \delta v^0 \\ \varphi^0 &= \alpha\varphi + \beta\psi, \quad & \psi^0 &= \gamma\varphi + \delta\psi \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0),$$

so ist die Schaar $u^0\varphi^0 + v^0\psi^0$ mit $u\varphi + v\psi$ identisch, und da man nun $u^0\varphi^0 + v^0\psi^0$ auf die Gestalt:

$$\sum_{h=1}^{h=m} (u^0\mathfrak{x}^0_{h-1} + v^0\mathfrak{x}^0_h)\mathfrak{x}^0_{m+h}$$

bringen kann, so sieht man, dass zwei beliebig gewählte Grundformen einer Schaar von der angegebenen Beschaffenheit, d. h. also je zwei von einander *wesentlich* (nicht bloss durch einen constanten Factor) verschiedene Formen einer solchen Schaar, mittels einer und derselben linearen Substitution in die beiden Formen:

$$\sum_{h=1}^{h=m} \xi_{h-1}\xi_{m+h}, \quad \sum_{h=1}^{h=m} \xi_h \xi_{m+h}$$

transformirt werden können.

Da in dem jetzt zu behandelnden Falle, wo $n > 2m + 1$ ist, die oben mit $(\mathfrak{G}_3)$ bezeichnete Schaar quadratischer Formen nur $n - 2m - 1$ Variable enthält, so kann angenommen werden, dass hierfür schon Schaaren von der Gestalt $(\mathfrak{G}_1)$ gefunden seien, nach deren Subtraction von $(\mathfrak{G}_3)$ keine Schaar mehr übrig bleibt, oder nur eine solche $u\Phi + v\Psi$, deren Determinante von Null verschieden ist. Alsdann muss auch die Determinante der quadratischen Form Ψ von Null verschieden sein. Denn das Aggregat von $(\mathfrak{G}_1)$ und $(\mathfrak{G}_2)$ ist eine lineare homogene Function der m Variabeln $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots \xi_{2m}$ und also eine quadratische Form von eigentlich nur $2m$ Variabeln. Ebenso lässt sich in jeder der Schaaren von der Art $(\mathfrak{G}_1)$ die Anzahl der Variabeln um eine Einheit vermindern, wenn man lineare Transformationen mit Coefficienten, die von u und v abhängig sind, anwendet. Durch solche Transformationen ist hiernach, wenn l die Anzahl der von $(\mathfrak{G}_3)$ zu subtrahirenden Schaaren der mit $(\mathfrak{G}_1)$ bezeichneten Art bedeutet, die Gesammtzahl der Variabeln der Schaar $u\varphi + v\psi$ von n auf $n - l - 1$ zu reduciren, und es sind also die sämmtlichen Subdeterminanten $(n - l)$ter Ordnung des Systems der Coefficienten von $u\varphi + v\psi$ gleich Null, nicht aber diejenigen der $(n - l - 1)$ten Ordnung. Dagegen würden, wenn die Determinante jener quadratischen Form Ψ gleich Null wäre, auch *alle* Subdeterminanten $(n - l - 1)$ter Ordnung des Systems der Coefficienten von ψ verschwinden, während oben ausdrücklich vorausgesetzt worden ist, dass für $u = 0$ nur solche Subdeterminanten des Systems der Coefficienten von $u\varphi + v\psi$ verschwinden, welche für *alle* Werthe von u gleich Null sind.

Da die Determinante der quadratischen Form Ψ von Null verschieden ist, so kann man sich die Schaar $u\Psi + v\Phi$ auf die Form gebracht denken:

$$(\mathfrak{H}) \qquad u\sum_{i,k} A_{ik}\Xi_i\Xi_k + v\sum_k B_k\Xi_k^2 \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,\ldots\nu)},$$

wo $\Xi_1, \Xi_2, \ldots \Xi_\nu$ lineare homogene Functionen der Variabeln $\xi_{2m+1}, \xi_{2m+2}, \ldots \xi_{n-1}$ mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs der Schaar $(\mathfrak{G}_3)$ bedeuten.*) Ferner kann man als die vorerwähnten Schaaren von der Gestalt $(\mathfrak{G}_1)$ die folgenden annehmen:

$$(\mathfrak{K}) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu'} (u\xi'_{\varkappa-1} + v\xi'_\varkappa)\xi'_{\mu'+\varkappa}, \quad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu''} (u\xi''_{\varkappa-1} + v\xi''_\varkappa)\xi''_{\mu''+\varkappa}, \ldots,$$

in denen $\xi', \xi'', \ldots$ lineare homogene Functionen der Variabeln $\xi_{m+1}, \xi_{2m+2}, \ldots \xi_{n-1}$ mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs der Schaar $(\mathfrak{G}_3)$ sind. Hiernach kann die gegebene Schaar $u\varphi + v\psi$ durch ein Aggregat von Ausdrücken:

$$(\mathfrak{G}_1'), \quad (\mathfrak{G}_{2,1}), \quad (\mathfrak{G}_{2,2}), \quad (\mathfrak{H}), \quad (\mathfrak{K})$$

dargestellt werden, und da die Schaaren $(\mathfrak{K})$ sämmtlich von der Gestalt $(\mathfrak{G}_1)$ sind, so ist nur noch zu zeigen, dass die mit $(\mathfrak{G}_{2,1})$, $(\mathfrak{G}_{2,2})$ bezeichneten Theile weggeschafft werden können.

Der mit $(\mathfrak{G}_{2,2})$ bezeichnete Theil sondert sich, wenn die Variabeln $\Xi, \xi', \xi'' \ldots$ an Stelle der Variabeln:

$$\xi_{m+k} \qquad {\scriptstyle (k=m+1,\, m+2, \ldots n-m-1)}$$

eingeführt werden, in drei Theile, je nachdem die Variabeln Ξ oder ξ darin vorkommen, oder irgend welche von den Variabeln:

$$\xi_{m+k} \qquad {\scriptstyle (k=m+1,\, m+2, \ldots n-m-1)},$$

---

*) Die Möglichkeit der Transformation einer beliebigen quadratischen Form $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in ein Aggregat von Quadraten linearer Functionen der Variabeln x mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs der Form F folgt wohl am einfachsten daraus, dass zwischen den ersten Ableitungen der durch die Gleichung:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{1}{F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2 + f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

definirten quadratischen Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ die Relation besteht:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0,$$

dass also eben diese Form f in eine quadratische Form von $n - 1$ Variabeln transformirbar ist. Dabei ist die Wahl der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ nur der Beschränkung unterworfen, dass $F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ nicht gleich Null sein darf.

die etwa nach Einführung der Variabeln Ξ, ξ noch zurückgeblieben sind. Bezeichnet man diese drei Theile bez. mit $(\mathfrak{G}'_{2,2})$, $(\mathfrak{G}''_{2,2})$, $(\mathfrak{G}'''_{2,2})$, so enthält:

$$(\mathfrak{G}'_{2,2}) \quad \text{lauter Glieder } vC_{i\varkappa}\mathfrak{x}_{m+i}\Xi_\varkappa \qquad \binom{i=1,2,\ldots m-1}{k=1,2,\ldots \nu},$$

$$(\mathfrak{G}''_{2,2}) \quad \text{lauter Glieder } vc_{i\varkappa}\mathfrak{x}_{m+i}\xi_\varkappa \qquad \binom{i=1,2,\ldots m-1}{\varkappa=0,1,2,\ldots \mu},$$

$$\text{oder } vc'_{i\varkappa}\mathfrak{x}_{m+i}\xi_{\mu+\varkappa} \qquad \binom{i=1,2,\ldots m-1}{\varkappa=1,2,\ldots \mu},$$

$$(\mathfrak{G}'''_{2,2}) \quad \text{lauter Glieder } v\mathfrak{c}_{ip}\mathfrak{x}_{m+i}\mathfrak{x}_p \qquad \binom{i=1,2,\ldots m-1}{p>2m}.$$

Aber Glieder der letzteren Art können nicht wirklich vorkommen. Denn da, der Voraussetzung nach, die Variabeln $\mathfrak{x}_p$ einzig und allein in dem mit $(\mathfrak{G}'''_{2,2})$ bezeichneten Theile der Schaar $u\varphi + v\psi$ enthalten sein sollen, so würde die nach $\mathfrak{x}_p$ genommene partielle Ableitung der Schaar durch die Gleichung:

$$\frac{\partial(u\varphi + v\psi)}{\partial \mathfrak{x}_p} = v\sum_{i=1}^{i=m-1} \mathfrak{c}_{ip}\mathfrak{x}_{m+i}$$

gegeben sein. Vermöge der Relation:

$$v^m \mathfrak{x}_{m+i} = \sum_{h=0}^{h=m-i} (-1)^h v^{m-h-1} u^h \frac{\partial(u\varphi + v\psi)}{\partial \mathfrak{x}_{h+i}} \qquad (i=1,2,\ldots m-1)$$

würde also die Gleichung bestehen:

$$v^{m-1}\frac{\partial(u\varphi + v\psi)}{\partial \mathfrak{x}_p} = \sum_{i=1}^{i=m-1}\sum_{h=0}^{h=m-i}(-1)^h v^{m-h-1}u^h \mathfrak{c}_{ip}\frac{\partial(u\varphi + v\psi)}{\partial \mathfrak{x}_{h+i}},$$

d. h. es würde zwischen den ersten Ableitungen der Schaar $u\varphi + v\psi$ eine lineare homogene Relation existiren, deren Coefficienten ganze homogene Functionen $(m-1)$ter Dimension von u und v wären. Dies widerspricht aber der gleich im Anfange dieses art. II gemachten Voraussetzung, dass zwischen den ersten Ableitungen der Schaar $u\varphi + v\psi$ keine Relation bestehe, deren Coefficienten in Beziehung auf u und v von niedrigerer als der $m$ten Dimension wären.

Bei der oben angegebenen Darstellungsweise der Schaar $u\varphi + v\psi$ können hiernach nur sechs von den sieben unterschiedenen Theilen vorkommen, nämlich:

$$(\mathfrak{G}'_1) \qquad \sum_{h=1}^{h=m}(u\mathfrak{x}'_{h-1} + v\mathfrak{x}'_h)\mathfrak{x}_{m+h},$$

$$(\mathfrak{G}_{2,1}) \qquad v\sum_{i=1}^{i=m-1}\sum_{k=i}^{k=m-1}\mathfrak{b}'_{ik}\mathfrak{x}_{m+i}\mathfrak{x}_{m+k},$$

und die oben mit $(\mathfrak{G}'_{2,2})$, $(\mathfrak{G}''_{2,2})$, $(\mathfrak{H})$, $(\mathfrak{K})$ bezeichneten Theile, und es soll nunmehr in dem folgenden Abschnitte gezeigt werden, wie man durch lineare Transformation der Reihe nach $(\mathfrak{G}'_{2,2})$, $(\mathfrak{G}''_{2,2})$, $(\mathfrak{G}_{2,1})$ wegschaffen kann.

III.

1. Die einzelnen Theile von $(\mathfrak{G}'_{2,2})$:

$$v\mathfrak{x}_{m+i}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} C_{i\varkappa}\Xi_\varkappa$$

werden der Reihe nach für $i = m-1, m-2, \ldots . 1$ weggeschafft, wenn man die Substitution:

$$\Xi_\varkappa = \mathfrak{X}_\varkappa - \frac{C_{i\varkappa}}{2\mathfrak{B}_\varkappa}\mathfrak{x}_{m+i} \qquad (\varkappa=1,2,\ldots n),$$

$$\mathfrak{x}_{i-1} = \mathfrak{x}'_{i-1} + \sum_{\gamma,\varkappa}\frac{A_{\gamma\varkappa}C_{i\gamma}}{\mathfrak{B}_\gamma\mathfrak{B}_\varkappa}\left(\mathfrak{B}_\varkappa\Xi_\varkappa + \frac{1}{4}C_{i\varkappa}\mathfrak{x}_{m+i}\right) \qquad (\gamma,\varkappa=1,2,\ldots\nu)$$

der Reihe nach für $i = m-1, m-2, \ldots . 1$ anwendet. Denn wenn nur noch Theile von $(\mathfrak{G}'_{2,2})$ vorhanden sind, welche die Variabeln $\mathfrak{x}_{m+1}, \mathfrak{x}_{m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{m+i}$ enthalten, so fallen bei der angegebenen Substitution alle mit $\mathfrak{x}_{m+i}$ multiplizirten Glieder weg, während im Übrigen die Form der Ausdrücke:

$$(\mathfrak{G}'_1), \quad (\mathfrak{G}_{2,1}), \quad (\mathfrak{G}_{2,2}), \quad (\mathfrak{H}), \quad (\mathfrak{K}),$$

durch deren Aggregat die Schaar $u\varphi + v\psi$ dargestellt ist, vollkommen erhalten bleibt.

2. Die einzelnen Glieder der *zweiten* Art von $(\mathfrak{G}''_{2,2})$, nämlich:

$$vc'_{i\varkappa}\mathfrak{x}_{m+i}\,\xi_{\mu+\varkappa} \qquad \binom{i=1,2,\ldots m-1}{\varkappa=1,2,\ldots\mu},$$

werden durch folgende Substitution weggeschafft:

$$\mathfrak{x}'_h = \bar{\mathfrak{x}}_h + c'\xi_{\varkappa+\mu+i-h}, \quad \xi_\gamma = \bar{\xi}_\gamma - c'\mathfrak{x}_{m+i+\varkappa-\gamma},$$

wenn hierbei im Falle $i + \varkappa \leq \mu$:

$$h = 0, 1, \ldots i-1; \quad \gamma = \varkappa, \varkappa+1, \ldots \varkappa+i-1,$$

und im Falle $i + \varkappa > \mu$:

$$h = i - \mu + \varkappa,\ i - \mu + \varkappa + 1, \ldots i - 1; \quad \gamma = \varkappa, \varkappa + 1, \ldots \mu$$

genommen wird.

Zur Wegschaffung derjenigen einzelnen Glieder *erster* Art von $(\mathfrak{G}''_{2,2})$, nämlich:

$$v c_{i\varkappa} \mathfrak{x}_{m+i} \xi_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots m-1),$$

in welchen $\varkappa$ nicht gleich Null ist, also nur einen der μ Werthe $1, 2, 3, \ldots \mu$ hat, dient die Substitution:

$$\mathfrak{x}'_h = \bar{\mathfrak{x}}_h + c_{i\varkappa} \xi_{\varkappa+h-i}, \quad \xi_{\mu+\gamma} = \bar{\xi}_{\mu+\gamma} - c_{i\varkappa} \mathfrak{x}_{m+i+\gamma-\varkappa},$$

wenn hierbei im Falle $i \leqq \varkappa$:

$$h = 0, 1, \ldots i - 1; \quad \gamma = \varkappa - i + 1,\ \varkappa - i + 2, \ldots \varkappa,$$

und im Falle $i > \varkappa$:

$$h = i - \varkappa,\ i - \varkappa + 1, \ldots i - 1; \quad \gamma = 1, 2, 3, \ldots \varkappa$$

genommen wird. In diesem letzteren Falle tritt aber an Stelle des weggeschafften Gliedes:

$$v c_{i\varkappa} \mathfrak{x}_{m+i} \xi_\varkappa$$

das Glied hinzu:

$$v c_{i\varkappa} \mathfrak{x}_{m+i-\varkappa} \xi_0,$$

und es ist nun eben noch zu zeigen, wie eines derjenigen Glieder erster Art von $(\mathfrak{G}''_{2,2})$, in welchen $\varkappa = 0$ ist, also ein Glied:

$$v c_{i0} \mathfrak{x}_{m+i} \xi_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m-1)$$

wegzuschaffen ist.

Dies geschieht in der That durch die Substitution:

$$\mathfrak{x}'_h = \bar{\mathfrak{x}}_h - c_{i0} \xi_{h-i}, \quad \xi_{\mu+\gamma} = \bar{\xi}_{\mu+\gamma} + c_{i0} \mathfrak{x}_{m+i+\gamma},$$

wenn:

$$h = i,\ i + 1, \ldots m; \quad \gamma = 1, 2, \ldots m - i$$

genommen wird. Damit hierbei die als Indices von ξ vorkommenden Zahlen:

$$0, 1, 2, \ldots m - i \quad \text{und} \quad \mu + 1, \mu + 2, \ldots \mu + m - i$$

nur beziehungsweise Werthe aus den Zahlenreihen:

$$0, 1, 2, \ldots \mu \quad \text{und} \quad \mu + 1, \mu + 2, \ldots 2\mu$$

bekommen, ist die Bedingung $m - i \leqq \mu$ nothwendig und ausreichend, und diese ist erfüllt, da i nicht kleiner als 1 und μ sogar nicht kleiner als m sein kann. Denn wegen jenes Theiles der Schaar $u\varphi + v\psi$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} (u \xi_{\varkappa-1} + v \xi_\varkappa) \xi_{\mu+\varkappa},$$

in welchem allein die $2\mu + 1$ Variabeln $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{2\mu}$ vorkommen, findet zwischen den Ableitungen von $u\varphi + v\psi$ die Relation statt:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\mu} (-u)^\varkappa v^{\mu-\varkappa} \frac{\partial (u\varphi + v\psi)}{\partial \xi_\varkappa} = 0,$$

und da vorausgesetzt worden ist, dass keine solche Relation existire, welche in Beziehung auf u und v von niedrigerer als $m$ter Dimension wäre, so kann μ nicht kleiner als m sein.

3. Um endlich die einzelnen Glieder:

$$v \mathfrak{b}'_{ik} \mathfrak{x}_{m+i} \mathfrak{x}_{m+k}$$

des mit $(\mathfrak{G}_{21})$ bezeichneten Theiles wegzuschaffen, hat man die schon oben im art. II bei der Behandlung des einfachsten Falles angegebene Substitution:

$$\mathfrak{x}_g' = \bar{\mathfrak{x}}_g + \mathfrak{b}'_{ik} \mathfrak{x}_{m-g+i+k}, \quad \mathfrak{x}_h' = \bar{\mathfrak{x}}_h - \mathfrak{b}'_{ik} \mathfrak{x}_{m-h+i+k}$$

für alle den Ungleichheitsbedingungen:

$$g < i, \quad g \geqq 0, \quad g \geqq i + k - m,$$
$$h \geqq k, \quad h < i + k, \quad h \leqq m$$

genügenden Indices g, h anzuwenden.

Hiermit ist die im Anfange des art. II aufgestellte Behauptung vollständig erwiesen, und das erlangte Resultat kann auch in folgender Weise formulirt werden:

Jede Schaar quadratischer Formen:

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik}) x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

lässt sich als ein Aggregat von Schaaren:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \underset{(g, h = 1, 2, \ldots M)}{\sum_{g,h} (uA_{gh} + vB_{gh}) X_g X_h} + \underset{(p = 1, 2, \ldots M_q;\ q = 1, 2, \ldots L)}{\sum_q \sum_p (uX^{(q)}_{p-1} + vX^{(q)}_p) X_{p+M_q}}$$

so darstellen, dass die Determinante:

$$| uA_{gh} + vB_{gh} | \qquad (g, h = 1, 2, \ldots M)$$

von Null verschieden ist, und dass sowohl die Coefficienten der mit X bezeichneten linearen homogenen Functionen der n Variabeln x als auch die Coefficienten A_{gh}, B_{gh} demselben Rationalitätsbereich angehören wie die Coefficienten a_{ik}, b_{ik}.

Aus dieser mit ($\mathfrak{L}$) bezeichneten Darstellung ist unmittelbar ersichtlich, dass zwischen den verschiedenen partiellen ersten, nach den n Variabeln x genommenen Ableitungen der Schaar:

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik}) x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

genau L von einander linear unabhängige Relationen bestehen, deren Coefficienten die Variabeln u, v beziehungsweise in den Dimensionen $M_1, M_2, \ldots M_L$ enthalten. Bedeutet nun l die Anzahl solcher Relationen, deren Coefficienten von u, v unabhängig sind, und r den Rang des Systems der Coefficienten:

$$ua_{ik} + vb_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

so bestehen die Gleichungen:

$$r + l + L = n, \quad l + M + M_1 + M_2 + \cdots + M_L = n,$$

und die Zahlen $r, L, M, M_1, M_2, \ldots M_L$ sind also durch die Relation:

$$r + L = M + M_1 + M_2 + \cdots + M_L$$

mit einander verbunden.

IV.

Die Substitutionen, welche im vorigen Abschnitt zur Transformation der Schaar ($\mathfrak{G}$) in ($\mathfrak{L}$) geführt haben, sind mit Hülfe der Methode ermittelt, welche ich im art. IV meines im Monatsbericht vom Februar 1874 abgedruckten Aufsatzes angegeben habe.[1]) Um dies darzulegen, will ich hier die erwähnte Methode selbst sowie die Art ihrer Anwendung nochmals, und zwar in verbesserter Weise, auseinandersetzen.

Wenn man in der am Schlusse des art. I mit ($\mathfrak{G}$) bezeichneten Schaar:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \underset{(h = 1, 2, \ldots m)}{\sum_h (u\mathfrak{x}_{h-1} + v\mathfrak{x}_h)\, \mathfrak{x}_{m+h}} + \underset{(i \leqq k;\ k = 1, 2, 3, \ldots m+n)}{\sum_{i,k} (u\mathfrak{a}_{ik} + v\mathfrak{b}_{ik})\, \mathfrak{x}_{m+i} \mathfrak{x}_{m+k}}$$

an Stelle jeder von den m Variabeln:

$$\mathfrak{x}_{h-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots m)$$

eine durch die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 (\mathfrak{G})}{\partial u\, \partial \mathfrak{x}_{m+h}} = \mathfrak{x}'_{h-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots m)$$

definirte neue Variable $\mathfrak{x}'_{h-1}$, dann an Stelle von $\mathfrak{x}_m$ die mit $v\mathfrak{x}_{2m}$ multiplicirte lineare Function als neue Variable $\mathfrak{x}'_m$ einführt, und endlich die $\mathfrak{n}$ Variabeln:

$$\mathfrak{x}_{2m+1}, \mathfrak{x}_{2m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{2m+\mathfrak{n}}$$

durch irgend welche homogene lineare Functionen derselben:

$$\mathfrak{x}'_{2m+1}, \mathfrak{x}'_{2m+2}, \ldots \mathfrak{x}'_{2m+\mathfrak{n}}$$

ersetzt, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich von ($\mathfrak{G}$) angehören, so resultirt ein Ausdruck:

$$(\mathfrak{G}') \qquad \sum_{h=1}^{h=m} (u\mathfrak{x}'_{h-1} + v\mathfrak{x}'_h)\, \mathfrak{x}_{m+h} + u\mathfrak{Q}^0 + v\mathfrak{Q}' + v\sum_{g=1}^{g=m-1} \mathfrak{L}^0_g \mathfrak{x}_{m+g} + v\sum_{g=1}^{g=m-1} \mathfrak{L}'_g \mathfrak{x}_{m+g},$$

in welchem $\mathfrak{Q}^0$ und $\mathfrak{Q}'$ quadratische Formen der $\mathfrak{n}$ Variabeln:

$$\mathfrak{x}'_{2m+1}, \mathfrak{x}'_{2m+2}, \ldots \mathfrak{x}'_{2m+\mathfrak{n}}$$

[1]) Bd. I, S. 376 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

und $\mathfrak{L}_g^0, \mathfrak{L}_g'$ homogene lineare Functionen derselben n Variabeln und der m Variabeln:

$$\mathfrak{x}_{m+1}, \mathfrak{x}_{m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{2m}$$

bedeuten. Dabei sollen die Functionen $\mathfrak{L}_g^0$ aus der Gesammtheit der mit $\mathfrak{x}_{m+g}$ multiplicirten linearen Functionen so ausgesondert sein, dass sie nur Variable $\mathfrak{x}'$ enthalten, welche ausschliesslich in der quadratischen Form $\mathfrak{Q}^0$ vorkommen.*) Alsdann können die linearen Functionen $\mathfrak{L}_g'$ nur die Variabeln $\mathfrak{x}_{m+1}, \mathfrak{x}_{m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{2m}$ und solche Variabeln $\mathfrak{x}'$ enthalten, die in $\mathfrak{Q}'$ vorkommen. Denn wenn eine in $\mathfrak{L}_g'$ enthaltene Variable $\mathfrak{x}'$, z. B. $\mathfrak{x}_p'$, nicht in $\mathfrak{Q}'$ vorkäme, so würde zwischen den Ableitungen von $(\mathfrak{G}')$ die lineare homogene Relation bestehen:

$$v^{m-1} \frac{\partial (\mathfrak{G}')}{\partial \mathfrak{x}_p'} = \sum_{h=0}^{h=m-1} (-u)^h v^{m-h-1} \sum_{g=1}^{g=m-h} \frac{\partial \mathfrak{L}_g'}{\partial \mathfrak{x}_p'} \frac{\partial (\mathfrak{G}')}{\partial \mathfrak{x}_{g+h}'},$$

deren Coefficienten in Beziehung auf u und v, im Widerspruch mit der im art. I gemachten Voraussetzung, nur von der Dimension $m-1$ wären.

Die homogenen linearen Functionen von $\mathfrak{x}_{2m+1}, \mathfrak{x}_{2m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{2m+n}$, welche mit:

$$\mathfrak{x}_{2m+1}', \mathfrak{x}_{2m+2}', \ldots \mathfrak{x}_{2m+n}'$$

bezeichnet worden sind, können als so gewählt vorausgesetzt werden, dass die quadratische Form $\mathfrak{Q}'$ jede dieser Variabeln $\mathfrak{x}'$ nur entweder mit sich selbst oder mit einer einzigen anderen Variabeln $\mathfrak{x}'$ multiplicirt enthält.**) Alsdann lässt sich,

*) In der hier bezeichneten Aussonderung der Functionen $\mathfrak{L}^0$ besteht die einzige *sachliche* Verbesserung jener Entwickelungen im art. IV meines citirten Aufsatzes vom Februar 1874.[1]) Diese Aussonderung findet sich dort nicht; sie wird aber durch die weiterhin angegebene Voraussetzung über die Wahl der quadratischen Form $\mathfrak{Q}'$ nothwendig bedingt, sobald die Determinante der Schaar $u\mathfrak{Q}^0 + v\mathfrak{Q}'$ identisch gleich Null ist. Denn in diesem Falle trifft die a. a. O. aufgestellte Behauptung, dass sich das Vorkommen von Functionen $\mathfrak{L}^0$ vermeiden lasse, nicht zu, wenn zugleich die zur Anwendung der Transformationsmethode erforderliche Eigenschaft der quadratischen Form $\mathfrak{Q}'$ festzuhalten ist.

**) Man erlangt eine solche quadratische Form $\mathfrak{Q}'$ stets, wenn man nach einer ganz beliebigen Transformation der ursprünglichen Variabeln $\mathfrak{x}_{2m+1}, \mathfrak{x}_{2m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{2m+n}$ diejenige anwendet, welche ich als „*Jacobi*'sche Transformation" bezeichnet und im § 1 meiner im Monatsbericht vom April 1874 veröffentlichten Abhandlung „Über die congruenten Trans-

[1]) Bd. I, S. 376 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

wie jetzt gezeigt werden soll, der letzte Theil des Ausdrucks $(\mathfrak{G}')$ durch lineare Transformation der Variabeln $\mathfrak{x}'$ beseitigen. Nimmt man nämlich an, dass dieser letzte Theil schon bis auf die nur bis zu $g = l < m$ erstreckte Summe:

$$v \sum_{g=1}^{g=l} \mathfrak{L}_g' \mathfrak{x}_{m+g}$$

reducirt sei, so kann jedes einzelne der Glieder von $\mathfrak{L}_l'$:

$$\mathfrak{c}_{lp} \mathfrak{x}_p' \qquad (p>m)$$

dadurch weggeschafft werden, dass man erst, je nachdem in $\mathfrak{Q}'$ das Glied:

$$\mathfrak{a} \mathfrak{x}_p' \mathfrak{x}_p' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} \mathfrak{x}_p' \mathfrak{x}_q' \qquad (p \gtrless q)$$

vorkommt, an Stelle von $\mathfrak{x}_p'$ oder $\mathfrak{x}_q'$ eine neue Variable $\mathfrak{x}_p''$ oder $\mathfrak{x}_q''$ mittels einer der Substitutionen:

$$(\mathfrak{M}) \qquad 2\mathfrak{a}\mathfrak{x}_p'' = 2\mathfrak{a}\mathfrak{x}_p' + \mathfrak{c}_{lp}\mathfrak{x}_{m+l} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b}\mathfrak{x}_q'' = \mathfrak{b}\mathfrak{x}_q' + \mathfrak{c}_{lp}\mathfrak{x}_{m+l}$$

einführt und dann an Stelle von $\mathfrak{x}_{l-1}'$ eine neue Variable $\mathfrak{x}_{l-1}''$, welche gleich der gesammten mit $u\mathfrak{x}_{m+l}$ multiplicirten linearen Function der Variabeln $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ zu nehmen ist. Vermöge der Substitution $(\mathfrak{M})$ fällt nämlich offenbar das Glied $v\mathfrak{c}_{lp}\mathfrak{x}_p'$ weg, und da der Voraussetzung nach die quadratische Form $\mathfrak{Q}'$ die von der Substitution afficirten Variabeln $\mathfrak{x}_p'$ oder $\mathfrak{x}_q'$ *nur* in dem einen Gliede enthält, so erleidet sie keine Veränderung als die, dass darin die Variable $\mathfrak{x}_p'$ oder $\mathfrak{x}_q'$ durch $\mathfrak{x}_p''$ oder $\mathfrak{x}_q''$ ersetzt wird. Aber der linearen Function $\mathfrak{L}_l'$ tritt bei der ersteren der beiden Substitutionen $(\mathfrak{M})$ ein Glied $\mathfrak{c}\mathfrak{x}_{m+l}$ hinzu, und bei beiden Substitutionen treten der quadratischen Form $\mathfrak{Q}^0$ Glieder hinzu, welche den Factor $\mathfrak{x}_{m+l}$ haben. Alle diese Glieder werden jedoch durch die Einführung der Variabeln $\mathfrak{x}_{l-1}''$ an Stelle von $\mathfrak{x}_{l-1}'$ wieder beseitigt, und es tritt nur, wenn das Glied $v\mathfrak{x}_{l-1}'\mathfrak{x}_{m+l-1}$ in dem ersten Theile von $(\mathfrak{G}')$, um dessen Form zu erhalten, durch $v\mathfrak{x}_{l-1}''\mathfrak{x}_{m+l-1}$ ersetzt wird, den mit $\mathfrak{L}_{l-1}^0, \mathfrak{L}_{l-1}'$ bezeichneten linearen Functionen der Ausdruck $\mathfrak{x}_{l-1}' - \mathfrak{x}_{l-1}''$ hinzu, welcher eine lineare Function von $\mathfrak{x}_{m+l}$ und den in $\mathfrak{Q}^0$ vorkommenden Variabeln $\mathfrak{x}'$ ist.

formationen der bilinearen Formen" genau auseinandergesetzt habe.[1]) Man kann auch speciell die Variabeln $\mathfrak{x}'$ so wählen, dass $\mathfrak{Q}'$ gleich einem Aggregat von Quadraten derselben wird, und die Möglichkeit einer solchen *speciellen* Wahl ist schon oben in der Anmerkung zu art. II kurz dargelegt.

[1]) Bd. I, S. 425 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Nachdem auf die angegebene Weise die sämmtlichen Glieder von $\mathfrak{L}'_l$, welche die Variabeln $\mathfrak{x}'$ enthalten, beseitigt sind, können mittels genau desselben Verfahrens die etwa darin vorkommenden Glieder:

$$\mathfrak{c}_{lh}\mathfrak{x}_{m+h} \qquad (h=1,2,\ldots m)$$

weggeschafft werden*), indem zuerst an Stelle der im ersten Theile von $(\mathfrak{G}')$ mit $v\mathfrak{x}_{m+h}$ multiplicirten Variabeln $\mathfrak{x}'_h$ eine neue Variable $\mathfrak{x}''_h$ mittels der Substitution:

$$\mathfrak{x}''_h = \mathfrak{x}'_h + \mathfrak{c}_{lh}\mathfrak{x}_{m+l},$$

und alsdann an Stelle von $\mathfrak{x}'_{l-1}$ eine neue Variable $\mathfrak{x}''_{l-1}$ mittels der Substitution:

$$\mathfrak{x}''_{l-1} = \mathfrak{x}'_{l-1} - \mathfrak{c}_{lh}\mathfrak{x}_{m+h+1}$$

eingeführt wird.

Der obige Ausdruck $(\mathfrak{G}')$ ist hiermit auf einen solchen reducirt, in welchem der letzte Theil fehlt, also auf einen Ausdruck:

$$(\overline{\mathfrak{G}}) \qquad \sum_{h=1}^{h=m}(u\overline{\mathfrak{x}}_{h-1} + v\overline{\mathfrak{x}}_h)\mathfrak{x}_{m+h} + u\overline{\mathfrak{Q}}^0 + v\overline{\mathfrak{Q}}' + v\sum_{g=1}^{g=m-1}\mathfrak{L}_g\mathfrak{x}_{m+g},$$

in welchem $\overline{\mathfrak{Q}}^0$ und $\overline{\mathfrak{Q}}'$ quadratische Formen von n Variabeln:

$$\overline{\mathfrak{x}}_{2m+1},\ \overline{\mathfrak{x}}_{2m+2},\ \ldots\ \overline{\mathfrak{x}}_{2m+n}$$

und $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots \mathfrak{L}_{m-1}$ *lineare* homogene Functionen von denjenigen dieser n Variabeln bedeuten, welche ausschliesslich in der quadratischen Form $\overline{\mathfrak{Q}}^0$ vorkommen.

Um nunmehr zu ersehen, in welcher Weise noch der letzte Theil des Ausdrucks $(\overline{\mathfrak{G}})$ weggeschafft werden kann, braucht man nur zu berücksichtigen, dass bei Vertauschung von:

$$\begin{matrix} u, & \overline{\mathfrak{x}}_k, & \mathfrak{x}_{m+h} \\ v, & \overline{\mathfrak{x}}_{m-k}, & \mathfrak{x}_{2m-h+1} \end{matrix} \qquad \binom{h=1,2,\ldots m}{k=0,1,2,\ldots m}$$

mit:

der erste Theil, nämlich:

$$\sum_{h=1}^{h=m}(u\overline{\mathfrak{x}}_{h-1} + v\overline{\mathfrak{x}}_h)\mathfrak{x}_{m+h}$$

*) Dabei ist $h \geqq l$ anzunehmen, da für $h < l$ das Glied dem Theile $\mathfrak{L}'_h\mathfrak{x}_{m+l}$ hinzugefügt werden kann.

ungeändert bleibt, und dass in dem auf diese Weise resultirenden Ausdruck:

$$(\overline{\mathfrak{G}}_1) \qquad \sum_{h=1}^{h=m}(u\overline{\mathfrak{x}}_{h-1} + v\overline{\mathfrak{x}}_h)\mathfrak{x}_{m+h} + u\overline{\mathfrak{Q}}' + v\overline{\mathfrak{Q}}^0 + u\sum_{g=1}^{g=m-1}\mathfrak{L}_{m-g+1}\mathfrak{x}_{m+g}$$

an Stelle des letzten Theils mit dem Factor u ein solcher mit dem Factor v tritt, sobald man, genau so wie im Anfange dieses art. IV, an Stelle jeder von den $m-1$ Variabeln:

$$\overline{\mathfrak{x}}_{h-1} \qquad (h=1,2,\ldots m-1)$$

eine durch die Gleichung:

$$\mathfrak{x}^0_{h-1} = \frac{\partial^2(\overline{\mathfrak{G}}_1)}{\partial u\,\partial\mathfrak{x}_{m+h}} = \overline{\mathfrak{x}}_{h-1} + \mathfrak{L}_{m-h+1} \qquad (h=1,2,\ldots m-1)$$

definirte neue Variable $\mathfrak{x}^0_{h-1}$ einführt. Der Ausdruck $(\overline{\mathfrak{G}}_1)$ geht bei der angegebenen Substitution in folgenden über:

$$(\mathfrak{G}^0) \qquad \sum_{h=1}^{h=m}(u\mathfrak{x}^0_{h-1} + v\mathfrak{x}^0_h)\mathfrak{x}_{m+h} + u\overline{\mathfrak{Q}}' + v\overline{\mathfrak{Q}}^0 - v\sum_{g=1}^{g=m-2}\mathfrak{L}_{m-g}\mathfrak{x}_{m+g},$$

welcher nun in derselben Weise wie der oben mit $(\mathfrak{G}')$ bezeichnete Ausdruck zu behandeln ist, wenn die Voraussetzungen für das dort angegebene Verfahren auch hier erfüllt sind. Es muss also die quadratische Form $\overline{\mathfrak{Q}}^0$ oder wenigstens derjenige Theil derselben, welcher die Variabeln der zuerst in $(\mathfrak{G}^0)$ vorhandenen, sowie der durch die Operationen hinzutretenden linearen Functionen $\mathfrak{L}$ enthält, so beschaffen sein, dass jede dieser Variabeln überhaupt darin vorkommt, und zwar nur in einem einzigen Gliede, d. h. entweder mit sich selbst oder mit einer einzigen anderen Variabeln multiplicirt.

Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn die $m-2$ in dem letzten Theile von $(\mathfrak{G}^0)$ vorkommenden linearen Functionen $\mathfrak{L}_{m-g}$ nur Variabeln ξ_μ von reducirten Schaaren:*)

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu}(u\xi_{\varkappa-1} + v\xi_\varkappa)\xi_{\mu+\varkappa}$$

enthält, und wenn μ nicht kleiner als m ist. Denn die oben auseinandergesetzte Methode führt alsdann behufs Wegschaffung eines Gliedes:

$$c\,\xi_\mu\mathfrak{x}_{m+l}$$

*) Vergl. art. II ($\mathfrak{K}$).

zu der Substitution:

$$\xi'_{2\mu} = \xi_{2\mu} + c\mathfrak{x}_{m+l}, \quad \mathfrak{x}'_{l-1} = \mathfrak{x}^0_{l-1} - c\xi_{\mu-1},$$

und hierbei tritt dem linearen Factor $\mathfrak{L}_{m-l+1}$ das Glied $-c\xi_{\mu-1}$ hinzu. Ebenso bringt das weitere Verfahren nach jener Methode an Stelle des Gliedes $-c\xi_{\mu-1}$ in $\mathfrak{L}_{m-l+1}$ das Glied $c\xi_{\mu-2}$ in $\mathfrak{L}_{m-l+2}$ hinzu u. s. f. und es schliesst, wenn $\mu \geqq l$ ist, mit der Wegschaffung von $\xi_{\mu-l+1}$ aus $\mathfrak{L}_{m-1}$ vollständig ab. Die Ungleichheit $\mu \geqq l$ ist aber, da $m - 2 \geqq l$ ist, eine Folge der obigen Annahme, daß μ nicht kleiner als m sei.

Genau nach der hier auseinandergesetzten Methode habe ich die im art. III unter No. 1, 2, 3 angegebenen Substitutionen erlangt und gemäss den dazu erforderlichen Voraussetzungen die vorbereitenden Entwickelungen im art. II ausgeführt.

V.

Nach dem am Schlusse des art. III entwickelten Resultat lässt sich jede beliebige Schaar quadratischer Formen:

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik})x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

in folgende transformiren:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \sum_{g,h} (uA_{gh} + vB_{gh})X_g X_h + \sum_q \sum_p (uX^{(q)}_{p-1} + vX^{(q)}_p) X^{(q)}_{p+M_q},$$
$$(g, h = 1, 2, \dots M) \qquad (p = 1, 2, \dots M_q;\ q = 1, 2, \dots L)$$

wobei die Determinante:

$$|\, uA_{gh} + vB_{gh} \,| \qquad (g, h = 1, 2, \dots M)$$

einen von Null verschiedenen Werth hat. Wählt man nun irgend eine ganze Zahl t, für welche die Determinante:

$$|\, A_{gh} - tB_{gh} \,| \qquad (g, h = 1, 2, \dots M)$$

von Null verschieden ist, so kann man nach § 5 der *Weierstrass*'schen Abhandlung vom 18. Mai 1868*) den Ausdruck:

$$(\mathfrak{R}) \qquad w\sum_{g,h} (A_{gh} - tB_{gh})X_g X_h - \sum_{g,h} B_{gh}X_g X_h \qquad (g, h = 1, 2, \dots M),$$

*) Monatsbericht vom Mai 1868.[1])

[1]) *Weierstrass*, Werke, Bd. II, S. 31.

in welchem w eine Variable bedeutet, und durch welchen daher eine Schaar quadratischer Formen repraesentirt wird, in folgenden transformiren:

$$(\overline{\mathfrak{R}}) \qquad \sum_{\mu,\nu} \left\{ (w - w^{(\nu)})\, \Phi^{(\nu)}_\mu - \Psi^{(\nu)}_\mu \right\} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots),$$

wobei $\Phi^{(\nu)}_\mu$, $\Psi^{(\nu)}_\mu$ durch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{P}^{(\nu)}) \qquad \begin{aligned} \Phi^{(\nu)}_\mu &= \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} X^{(\nu)}_{\lambda\mu} \qquad (\varkappa + \lambda = n^{(\nu)} - 1;\ \varkappa = 0, 1, \dots n^{(\nu)} - 1), \\ \Psi^{(\nu)}_\mu &= \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} X^{(\nu)}_{\lambda\mu} \qquad (\varkappa + \lambda = n^{(\nu)} - 2;\ \varkappa = 0, 1, \dots n^{(\nu)} - 2) \end{aligned}$$

definirt sind.*) Setzt man also in dem obigen Ausdruck $(\mathfrak{L})$:

$$u = w, \quad v = -wt - 1,$$

so verwandelt sich derselbe in folgenden:

$$(\overline{\mathfrak{L}}) \qquad \sum_{\mu,\nu} \left\{ (w - w^{(\nu)})\Phi^{(\nu)}_\mu - \Psi^{(\nu)}_\mu \right\} + \sum_q \sum_p \left(w(X^{(q)}_{p-1} - tX^{(q)}_p) - X^{(q)}_p\right) X^{(q)}_{p+M_q}.$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, \dots) \qquad (p = 1, 2, \dots M_q;\ q = 1, 2, \dots L)$$

Nach der Bemerkung, welche ich im art. II an die Behandlung des einfachsten Falles geknüpft habe, lassen sich die beiden Formen:

$$\sum_{p=1}^{p=M} (X_{p-1} - tX_p)X_{p+M}, \quad \sum_{p=1}^{p=M} (-w^0 X_{p-1} + (1 + w^0 t)X_p)X_{p+M},$$

welche für eine unbestimmte Variable w^0 als Grundformen der Schaar:

$$\sum_{p=1}^{p=M} (w(X_{p-1} - tX_p) - X_p)X_{p+M}$$

betrachtet werden können, mittels einer und derselben linearen Substitution in die beiden Formen:

$$\sum_{p=1}^{p=M} \bar{X}_{p-1}\bar{X}_{p+M}, \quad \sum_{p=1}^{p=M} \bar{X}_p \bar{X}_{p+M}$$

*) Im Falle $n^{(\nu)} = 1$ fallen natürlich die Summen weg, bei denen der Summationsbuchstabe $\varkappa$ nur die Werthe $0, 1, \dots n^{(\nu)} - 2$ annehmen darf.

transformiren. Jede einzelne der L Schaaren, deren Aggregat den zweiten Theil des obigen Ausdrucks $(\bar{\mathfrak{L}})$ bildet, nimmt hiernach die Gestalt an:

$$\sum_p ((w - w^0)\bar{X}^{(q)}_{p-1} - \bar{X}^{(q)}_p)\bar{X}^{(q)}_{p+M_q} \qquad (p = 1, 2, \ldots M_q)$$

und verwandelt sich also, wenn:

$$M_q, \quad \bar{X}^{(q)}_{p-1} \quad , \quad \bar{X}^{(q)}_{p+M_q}$$

durch:

$$m^0_\mu, \quad X^0_{2m^0_\mu - p + 1, \mu}, \quad 2X^0_{p-1,\mu}$$

und dann der Summationsbuchstabe p durch $\varkappa + 1$ ersetzt wird, in die Schaar:

$$2\sum_\varkappa ((w - w^0)X^0_{2m^0_\mu - \varkappa, \mu} - X^0_{2m^0_\mu - \varkappa - 1, \mu})X^0_{\varkappa, \mu} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots m^0_\mu - 1)$$

oder:

$$(w - w^0)\Phi^0_\mu - \Psi^0_\mu,$$

wenn Φ^0_μ, Ψ^0_μ durch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{P}^0) \qquad \begin{aligned} \Phi^0_\mu &= \sum_{\varkappa,\lambda} X^0_{\varkappa\mu}X^0_{\lambda\mu} - (X^0_{m^0_\mu, \mu})^2 && (\varkappa + \lambda = 2m^0_\mu;\ \varkappa = 0, 1, \ldots 2m^0_\mu), \\ \Psi^0_\mu &= \sum_{\varkappa,\lambda} X^0_{\varkappa\mu}X^0_{\lambda\mu} && (\varkappa + \lambda = 2m^0_\mu - 1;\ \varkappa = 0, 1, \ldots 2m^0_\mu - 1) \end{aligned}$$

definirt sind.

Die beiden mit $(\mathfrak{P}^{(\nu)})$ und $(\mathfrak{P}^0)$ bezeichneten Definitionsgleichungen können in folgender Weise zusammengefasst werden:

$$(\mathfrak{P}) \qquad \underset{(\varkappa + \lambda = n^{(\nu)}_\mu - 1;\ 0 \leqq \varkappa < n^{(\nu)}_\mu;\ \gamma = \frac{1}{2}(n^{(\nu)}_\mu - 1))}{\Phi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}X^{(\nu)}_{\lambda\mu} - \delta_{0\nu}(X^{(\nu)}_{\gamma\mu})^2}, \quad \underset{(\varkappa + \lambda = n^{(\nu)}_\mu - 2;\ 0 \leqq \varkappa < n^{(\nu)}_\mu - 1)}{\Psi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}X^{(\nu)}_{\lambda\mu}} \qquad \binom{\mu = 1, 2, \ldots}{\nu = 0, 1, 2, \ldots},$$

wenn mit $\delta_{0\nu}$ in üblicher Weise Null oder Eins bezeichnet wird, je nachdem $\nu > 0$ oder $\nu = 0$ ist, und wenn für n^0_μ nur *ungerade* Zahlen genommen werden.

Bei der so erweiterten Bedeutung von $\Phi^{(\nu)}_\mu$, $\Psi^{(\nu)}_\mu$ lässt sich der ganze Ausdruck $(\bar{\mathfrak{L}})$ einfach in der Form:

$$(\mathfrak{Q}) \qquad \sum_{\mu,\nu} \left\{(w - w^{(\nu)})\Phi^{(\nu)}_\mu - \Psi^{(\nu)}_\mu\right\} \qquad \binom{\mu = 1, 2, \ldots}{\nu = 0, 1, 2, \ldots}$$

darstellen. Da nun eben dieser Ausdruck durch Transformation aus $(\mathfrak{L})$ und dieser wiederum durch Transformation aus einer beliebigen Schaar:

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik})x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

bei Festsetzung der Gleichungen:

$$u = w, \quad v = -wt - 1,$$

hervorgegangen ist, so zeigt sich als Hauptresultat der vorstehenden Entwickelungen,

dass sich eine beliebige Schaar quadratischer Formen:

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik})x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

stets in eine Schaar:

$$(\mathfrak{R}) \qquad \sum_\nu \sum_\mu \left\{(U + Vw^{(\nu)})\Phi^{(\nu)}_\mu + V\Psi^{(\nu)}_\mu\right\} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

transformiren lässt, in welcher die auf ν bezügliche Summation von $\nu = 0$ oder von $\nu = 1$ anfängt, je nachdem die Determinante der Schaar gleich Null oder von Null verschieden ist, und welche füglich als eine „*reducirte Schaar*“ bezeichnet werden kann.

Nun ist:

$$U = u, \quad V = tu + v;$$

es, zeigt sich also ferner,

dass sich ein beliebiges Paar quadratischer Formen:

$$\left[\sum_{i,k} a_{ik}x_i x_k, \ \sum_{i,k} b_{ik}x_i x_k\right] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

stets durch lineare Transformation der Variabeln in ein „*reducirtes*“ Paar:

$$(\mathfrak{R}') \qquad \left[\sum_{\mu,\nu}((tw^{(\nu)} + 1)\Phi^{(\nu)}_\mu + t\Psi^{(\nu)}_\mu), \ \sum_{\mu,\nu}(w^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu)\right]$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

verwandeln lässt, in welchem aber nur dann die Summation auch auf $\nu = 0$ zu erstrecken ist, wenn die Determinante der aus den beiden Formen zu bildenden Schaar identisch gleich Null ist.

Hierbei sind $\Phi_\mu^{(\nu)}, \Psi_\mu^{(\nu)}$ gemäss der oben bei (𝔓) festgesetzten Bedeutung, gewisse einfache quadratische Formen der mit:

$$X_\mu^{(\nu)} \qquad\qquad (\mu=1,2,\ldots;\ \nu=0,1,2,\ldots)$$

bezeichneten homogenen linearen Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und die Coefficienten derselben gehören dem Rationalitätsbereich der Grössen:

$$a_{ik},\ \ b_{ik},\ \ w^{(\nu)} \qquad\qquad (i,k=1,2,\ldots n;\ \nu=0,1,2,\ldots)$$

an. Ferner ist t irgend eine ganze Zahl, deren Wahl nur insoweit beschränkt ist, dass der Rang des Systems:

$$(a_{ik} - t b_{ik}) \qquad\qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

nicht kleiner sein darf, als der Rang des Systems:

$$(u a_{ik} + v b_{ik}) \qquad\qquad (i,k=1,2,\ldots n).$$

Endlich ist w^0 eine unbestimmte Variable, und $w', w'', w''', \ldots$ sind die verschiedenen Nullwerthe der Determinante oder der verschiedenen Systeme von Subdeterminanten derselben Ordnung, welche aus dem System:

$$(w a_{ik} - (wt+1) b_{ik})$$

gebildet werden können. Da w^0 nur vorkommt, wenn die Determinante:

$$| u a_{ik} + v b_{ik} | \qquad\qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

und also auch:

$$| w^0 a_{ik} - (w^0 t + 1) b_{ik} | \qquad\qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

gleich Null ist, so hat auch w^0, als unbestimmte Variable, die Bedeutung eines Nullwerthes der Determinante:

$$| w a_{ik} - (wt+1) b_{ik} | \qquad\qquad (i,k=1,2,\ldots n),$$

und es sind daher *alle* Grössen:

$$w^0, w', w'', w''', \ldots$$

als Nullwerthe der Determinante oder der verschiedenen Systeme von Subdeterminanten des Systems:

$$| w a_{ik} - (wt+1) b_{ik} | \qquad\qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

zu charakterisieren.

VI.

Es ist oben im art. I und auch schon in der dort citirten Mittheilung vom 18. Mai 1868[1]) gezeigt worden, wie jede Schaar quadratischer Formen:

$$u\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) + v\psi(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

deren Determinante gleich Null ist, in folgende transformirt werden kann:

$$(𝔊) \qquad \sum_h (u\mathfrak{x}_{h-1} + v\mathfrak{x}_h)\mathfrak{x}_{m+h} + \sum_{i,k} (u\mathfrak{a}_{ik} + v\mathfrak{b}_{ik})\mathfrak{x}_{m+i}\mathfrak{x}_{m+k}.$$
$$(h=1,2,\ldots m) \qquad (i \leqq k;\ i,k=1,2,3,\ldots)$$

Hier soll nun ferner gezeigt werden, wie man von dieser Schaar (𝔊) unmittelbar und in höchst einfacher Weise zu derjenigen übergehen kann, welche im art. V als „Reducirte“ bezeichnet worden ist.

Fasst man nämlich Alles, was mit $v\mathfrak{x}_{m+h}$ multiplicirt ist, zu einer neuen Variabeln $X^0_{2m-h,0}$ zusammen und ersetzt dann $\mathfrak{x}_{m+h}$ durch $2X^0_{h-1,0}$, so nimmt (𝔊) folgende Gestalt an:

$$(𝔖) \qquad u\Phi_0^0 + v\Psi_0^0 + u\sum_{h=0}^{h=m-1} f_h X^0_{h0} + u\Phi + v\Psi.$$

Dabei sind Φ_0^0, Ψ_0^0 durch die Gleichung:

$$u\Phi_0^0 + v\Psi_0^0 = 2\sum_h (uX^0_{2m-h,0} + vX^0_{2m-h-1,0})X^0_{h0} \qquad\qquad (h=0,1,\ldots m-1)$$

definirt, also auch, übereinstimmend mit der Definition bei (𝔓) im art. V, durch die beiden Gleichungen:

$$\Phi_0^0 = \sum_h X^0_{h0} X^0_{2m-h,0} \qquad\qquad (h=0,1,\ldots m-1,\ m+1,\ m+2,\ldots 2m),$$

$$\Psi_0^0 = \sum_h X^0_{h0} X^0_{2m-h-1,0} \qquad\qquad (h=0,1,2,\ldots 2m-1).$$

Ferner sind $f_0, f_1, \ldots f_{m-1}$ homogene lineare Functionen der Variabeln:

$$X^0_{00},\ X^0_{10}, \ldots X^0_{m-1,0};\ \ \mathfrak{x}_{2m+1},\ \mathfrak{x}_{2m+2}, \ldots,$$

und Φ, Ψ sind quadratische Formen der Variabeln $\mathfrak{x}_{2m+1}, \mathfrak{x}_{2m+2}, \ldots$ Da die „Schaar“ $u\Phi + v\Psi$ weniger als n Variable enthält, so kann sie bereits als „reducirt“ d. h.

[1]) Bd. I, S. 163 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

also in der im art. V mit ($\mathfrak{R}$) bezeichneten Gestalt angenommen werden. Wenn man nun überdies der Einfachheit halber, wie es offenbar zulässig ist, die beiden Grundformen der Schaar $u\varphi + v\psi$ von vornherein als so gewählt voraussetzt, dass für die beiden Systeme:

$$\left(\frac{\partial^2 (u\varphi + v\psi)}{\partial x_i \partial x_k}\right), \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\right) \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

die Rangzahl dieselbe ist, so kann die im art. V a. a. O. mit t bezeichnete Zahl gleich Null und also $U = u$, $V = v$ angenommen werden. Man kann also oben in ($\mathfrak{S}$) die Schaar $u\Phi + v\Psi$ durch eine Reducirte:

$$(\mathfrak{R}^0) \qquad \sum_{\mu,\nu} \left\{ (u + vw^{(\nu)})\, \Phi_\mu^{(\nu)} + v\Psi_\mu^{(\nu)} \right\} \qquad \binom{\mu = 1, 2, \dots}{\nu = 0, 1, 2, \dots}$$

mit den Variabeln:

$$X_{\varkappa,\mu}^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1, \dots n^{(\nu)} - 1 \\ \mu = 1, 2, \dots \\ \nu = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$$

ersetzen und eben diese Variabeln auch an Stelle der Variabeln $\mathfrak{x}_{2m+1}, \mathfrak{x}_{2m+2}, \dots$ in den mit:

$$\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \dots \mathfrak{f}_{m-1}$$

bezeichneten linearen Functionen einführen, so dass dieselben in lineare Functionen der Variabeln $X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$ und jener m Variabeln $X_{00}^0, X_{10}^0, \dots X_{m-1,0}^0$ übergehen, welche entsprechend mit:

$$F_0, F_1, \dots F_{m-1}$$

bezeichnet werden sollen. Wenn dies geschieht und endlich noch die im art. V mit w^0 bezeichnete unbestimmte Variable gleich Null gesetzt wird, so geht die Schaar ($\mathfrak{S}$) in folgende über:

$$(\mathfrak{S}') \qquad \sum_{\mu,\nu} \left\{ (u + vw^{(\nu)})\, \Phi_\mu^{(\nu)} + v\Psi_\mu^{(\nu)} \right\} + u \sum_{k=0}^{k=m-1} F_k X_{k0}^0 \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots),$$

wobei Φ_0^0, Ψ_0^0 dieselbe Bedeutung haben, wie oben, so dass, wenn dort die Zahl m durch m_0 ersetzt wird, die Functionen $\Phi_\mu^{(\nu)}$, $\Psi_\mu^{(\nu)}$ überhaupt für den Fall $\nu = 0$ durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_\mu^0 &= \sum_{g,h} X_{g\mu}^0 X_{h\mu}^0 \\ \Psi_\mu^0 &= \sum_{i,k} X_{i\mu}^0 X_{k\mu}^0 \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} g + h = 2m_\mu = n_\mu^0 - 1,\ i + k = 2m_\mu - 1 = n_\mu^0 - 2 \\ g, h = 0, 1, \dots m_\mu - 1,\ m_\mu + 1, \dots 2m_\mu \\ i, k = 0, 1, \dots 2m_\mu - 1 \end{pmatrix}$$

definirt werden, aber für $\nu > 0$, übereinstimmend mit der Definition ($\mathfrak{P}$) im art. V, durch die Gleichungen:

$$\Phi_\mu^{(\nu)} = \sum_{\varkappa,\lambda} X_{\varkappa\mu}^{(\nu)} X_{\lambda\mu}^{(\nu)} \qquad (\varkappa + \lambda = n_\mu^{(\nu)} - 1;\ 0 \leqq \varkappa < n_\mu^{(\nu)}),$$

$$\Psi_\mu^{(\nu)} = \sum_{\varkappa,\lambda} X_{\varkappa\mu}^{(\nu)} X_{\lambda\mu}^{(\nu)} \qquad (\varkappa + \lambda = n_\mu^{(\nu)} - 2;\ 0 \leqq \varkappa < n_\mu^{(\nu)} - 1).$$

Um nun die Schaar ($\mathfrak{S}'$) in eine Reducirte zu verwandeln, braucht man nur durch geeignete Transformation der Variabeln den letzten Theil $\sum F_k X_{k0}^0$ zu beseitigen.

Zu diesem Zwecke hat man zuerst der Reihe nach aus:

$$F_0, F_1, F_2, \dots F_{m-1}$$

alle diejenigen Variabeln wegzuschaffen, welche in den quadratischen Formen $\Phi_\mu^{(\nu)}$ vorkommen. Nimmt man dies als bereits für $F_0, F_1, \dots F_{k-1}$ geschehen an, so wird irgend ein Glied von F_k:

$$2C X_{k0}^0 X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$$

nach der im art. IV auseinandergesetzten Methode dadurch beseitigt, dass mittels der Gleichung:

$$X_{\lambda\mu}^{(\nu)} + C X_{k0}^0 = \mathfrak{X}_{\lambda\mu}^{(\nu)} \qquad (\lambda = n_\mu^{(\nu)} - \varkappa - 1)$$

für $X_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ die Variable $\mathfrak{X}_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ substituirt und dann die mit $2vX_{k0}^0$ multiplicirte lineare Function der Variabeln X als eine neue Variable an Stelle von:

$$X_{2m_0 - k - 1, 0}^0 \qquad (2m_0 = n_0^0 - 1)$$

eingeführt wird. Dabei tritt nur in dem Falle $\varkappa = \lambda$ zu der linearen Function F_k selbst noch ein Glied $-C^2 X_{k0}^0$ hinzu, welches man jedoch wiederum in der angegebenen Weise, indem man dabei X_{k0}^0 für $X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$ nimmt, beseitigen kann. Es treten ferner zu der linearen Function F_{k+1} stets neue Glieder hinzu, sobald $k < m - 1$ ist. Wenn aber $k = m - 1$ ist, so schliesst das angegebene Verfahren zur Wegschaffung der in den linearen Functionen F und zugleich in den quadratischen Formen $\Phi_\mu^{(\nu)}$ vorkommenden Variabeln vollständig ab. Alsdann enthalten daher die Functionen F nur noch diejenigen Variabeln, welche ausschliesslich in den quadratischen Formen Ψ_μ^0 vorkommen, und dies sind einzig und allein die Variabeln $X_{m_\mu,\mu}^0$, bei denen $\mu > 0$ ist.

Um nunmehr auch jedes einzelne der in dem letzten Theile des Ausdrucks $(\mathfrak{S}')$ etwa vorkommenden Glieder:

$$2uCX^0_{k0}X^0_{m_\mu,\mu}$$

wegzuschaffen, hat man nach der im art. IV entwickelten Methode folgende Substitution anzuwenden:

$$\mathfrak{X}^0_{2m_0-h,0} = X^0_{2m_0-h,0} + CX^0_{m_\mu+k-h,\mu} \qquad (h=0,1,2,\dots k),$$

$$\mathfrak{X}^0_{m_\mu-i,\mu} = X^0_{m_\mu-i,\mu} - CX^0_{k-i,0} \qquad (i=1,2,\dots k).$$

Dabei ist nöthig, dass $k < m_\mu$ sei; dies ist aber in der That der Fall, wenn, wie im art. I, vorausgesetzt wird, dass unter den zwischen den Ableitungen der Schaar $u\varphi + v\psi$ bestehenden homogenen linearen Relationen keine von geringerer als $m_0$ter Dimension in u, v sei. Dann ist nämlich $m_0 \leqq m_\mu$, und da k nur die Werthe $0, 1, 2, \dots m_0 - 1$ haben kann, so ist $k < m_0 \leqq m_\mu$.

Die im art. IV auseinandergesetzte Transformationsmethode hat hier, und zwar in höchst einfacher Weise, zum Ziele geführt. Die Möglichkeit ihrer Anwendung war dadurch gegeben, dass die dort vorausgesetzten Eigenschaften der beiden Grundformen der Schaar $u\mathfrak{Q}^0 + v\mathfrak{Q}'$ den beiden Grundformen der reducirten Schaar $(\mathfrak{R}^0)$, welche an Stelle der Schaar $u\Phi + v\Psi$ in $(\mathfrak{S})$ genommen worden ist, in der That zukommen. Die eine Grundform $\sum\limits_{\mu,\nu}\Phi^{(\nu)}_\mu$ hat nämlich offenbar die Eigenschaft, dass sie jede ihrer Variabeln nur entweder mit sich selbst oder mit einer einzigen andern Variabeln multiplicirt enthält; eben dieselbe Eigenschaft kommt aber auch dem Aggregat der Formen Ψ^0_μ zu, und dieses Aggregat bildet, wenn man, wie es zulässig ist, $w^0 = 0$ setzt, denjenigen Theil der andern Grundform der reducirten Schaar $(\mathfrak{R}^0)$, welcher allein die nicht in den Functionen Φ vorkommenden Variabeln enthält.

Wenn man blos die *algebraische* Reduction der Schaaren quadratischer Formen im Auge hat, so genügt die in diesem art. VI dargelegte höchst einfache Weise des unmittelbaren Übergangs von einer Schaar $(\mathfrak{G})$ zu einer Reducirten $(\mathfrak{R})$, und ich habe mich auch in meinem vorigen Aufsatz bei den Schaaren bilinearer Formen[1]),

[1]) Bd. III_1, S. 139 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H

sowie im art. IV meines mehrfach citirten Aufsatzes*) vom Februar 1874 auf die Darlegung eines solchen Transformationsverfahrens beschränkt. Aber die später auseinander zu setzende *arithmetische* Reduction der Schaaren quadratischer Formen erfordert jene andere in den artt. II und III angegebene Behandlungsweise, und diese erscheint nur deshalb etwas umständlicher, weil dabei die Theilschaaren, deren Determinante gleich Null ist, in einer andern Gestalt auftreten und also auch ein anderes Transformationsverfahren nöthig machen als die Restschaar, deren Determinante von Null verschieden ist, während hier in der reducirten Form alle Schaaren einen gemeinsamen Typus haben, welcher die Anwendung eines und desselben Transformationsverfahrens gestattet.

VII.

Um in voller Allgemeinheit für ein beliebiges Paar quadratischer Formen:

$$[\varphi, \psi] \text{ oder } \Big[\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k, \sum_{i,k} b_{ik}x_ix_k\Big] \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

das System der Invarianten aufstellen zu können, ist zuvörderst die Rangzahl des Systems:

$$(ua_{ik} + vb_{ik}) \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

zu ermitteln. Bezeichnet man dieselbe mit ϱ, so bestehen zwischen den n partiellen Ableitungen von $u\varphi + v\psi$ genau $n - \varrho$ von einander linear unabhängige homogene lineare Relationen, und diese kann man sich so aufgestellt denken, dass ihre Coefficienten, als ganze homogene Functionen von u und v, von möglichst niedriger Dimension werden. Ist für genau $n - r$ von den $n - \varrho$ Relationen die Dimension gleich Null, so lassen sich beide Formen, φ und ψ, als quadratische Formen von nur r homogenen linearen Functionen der n Variabeln x darstellen, und man kann deshalb die Zahl r füglich als den „*Rang des Formenpaares* $[\varphi, \psi]$“ bezeichnen. Nun seien für die übrigen $r - \varrho$ Relationen die Dimensionszahlen, ihrer Grösse nach geordnet:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_{\varrho+1} - 1),\ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_{\varrho+2} - 1),\ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_{\varrho+3} - 1), \dots \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_r - 1),$$

*) Der dortigen Entwickelung liegt ebenfalls die natürliche, nicht besonders erwähnte Voraussetzung zu Grunde, dass die a. a. O. mit $u\Phi' + v\Psi'$ bezeichnete Schaar eine „Reducirte“ sei. Den Ausdruck „reducirte Schaaren“ hatte ich damals noch nicht adoptirt.[1])

[1]) Bd. I, S. 376 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H

so dass:

$$1 < \mathfrak{n}^0_{\varrho+1} \leqq \mathfrak{n}^0_{\varrho+2} \leqq \mathfrak{n}^0_{\varrho+3} \leqq \cdots \leqq \mathfrak{n}^0_r$$

ist. Ferner sei w eine unbestimmte Variable und t irgend eine ganze Zahl, für welche der Rang des Systems:

$$(w a_{ik} - (tw+1) b_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nicht kleiner als ϱ und also gleich ϱ ist. Alsdann gehen jene linearen Relationen in solche zwischen den verschiedenen partiellen Ableitungen von $w\varphi - (tw+1)\psi$ über, deren Coefficienten ganze Functionen von w von den Graden:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_{\varrho+1} - 1), \ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_{\varrho+2} - 1), \cdots \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_r - 1)$$

sind. Endlich sei für irgend eine Zahl $\varkappa \leqq \varrho$ der grösste gemeinsame Theiler aller Subdeterminanten $\varkappa$ter Ordnung, welche aus dem System der Coefficienten von $w\varphi - (tw+1)\psi$ gebildet werden können, das Product:

$$\prod_{\nu} (w - \mathfrak{w}^{(\nu)})^{\mathfrak{l}^{(\nu)}_{\varkappa}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

und aus den Zahlen $\mathfrak{l}$ seien die Zahlen $\mathfrak{n}$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{l}^{(\nu)}_1 = \mathfrak{n}^{(\nu)}_1, \ \mathfrak{l}^{(\nu)}_2 - \mathfrak{l}^{(\nu)}_1 = \mathfrak{n}^{(\nu)}_2, \ \mathfrak{l}^{(\nu)}_3 - \mathfrak{l}^{(\nu)}_2 = \mathfrak{n}^{(\nu)}_3, \ldots$$

bestimmt.

Alsdann ist das System der Invarianten des Formenpaares $[\varphi, \psi]$ in folgendem Schema enthalten:

$$(\mathfrak{S}^0) \qquad \begin{array}{c|l} w = & \\ \hline \mathfrak{w}^0 & 0, \ 0, \ldots 0, \mathfrak{n}^0_{\varrho+1}, \ \mathfrak{n}^0_{\varrho+2}, \ldots \mathfrak{n}^0_r \\ \mathfrak{w}' & \mathfrak{n}'_1, \ \mathfrak{n}'_2, \ldots \mathfrak{n}'_\varrho, \\ \mathfrak{w}'' & \mathfrak{n}''_1, \ \mathfrak{n}''_2, \ldots \mathfrak{n}''_\varrho, \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \end{array}$$

wo w^0, wie oben im art. V, eine Unbestimmte bedeutet.

Dass zuvörderst die Grössen $\mathfrak{w}$ und die Zahlen $\mathfrak{n}$ für jedes durch lineare Transformation aus $[\varphi, \psi]$ entstehende Formenpaar dieselben sind, geht aus deren

Definition mit Evidenz hervor. Dass sie aber auch ein *vollständiges* Invariantensystem bilden, lässt sich daraus entnehmen, dass sie das zu $[\varphi, \psi]$ oder

$$\Big[\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \ \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k\Big] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

gehörige, im art. V mit $(\mathfrak{R}')$ bezeichnete, *reducirte* Formenpaar:

$$(\mathfrak{R}') \qquad \Big[\sum_{\mu,\nu} ((tw^{(\nu)} + 1)\Phi^{(\nu)}_\mu + t\Psi^{(\nu)}_\mu), \ \sum_{\mu,\nu} (w^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu)\Big] \qquad (\mu = 1, 2, \ldots; \ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

vollständig bestimmen.

Die Functionen $\Phi^{(\nu)}_\mu$, $\Psi^{(\nu)}_\mu$ sind nämlich durch die Gleichungen $(\mathfrak{P})$ im art. V folgendermaassen definirt:

$$(\mathfrak{P}) \qquad \Phi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} X^{(\nu)}_{\lambda\mu} - \delta_{0\nu} (X^{(\nu)}_{\gamma\mu})^2, \quad \Psi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} X^{(\nu)}_{\lambda\mu} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$
$$(\varkappa + \lambda = n^{(\nu)}_\mu - 1; \ 0 \leqq \varkappa < n^{(\nu)}_\mu; \ \gamma = \tfrac{1}{2}(n^{(\nu)}_\mu - 1)) \qquad (\varkappa + \lambda = n^{(\nu)}_\mu - 2, \ 0 \leqq \varkappa < n^{(\nu)}_\mu - 1)$$

wo die Zahlen n mit dem oberen Index Null sämmtlich ungerade sind, und $\delta_{0\nu} = 0$ oder $\delta_{0\nu} = 1$ genommen werden muss, je nachdem $\nu > 0$ oder $\nu = 0$ ist. Es ist also jedes einzelne Formenpaar $[\Phi^{(\nu)}_\mu, \Psi^{(\nu)}_\mu]$ durch die zugehörige ganze Zahl $n^{(\nu)}_\mu$ und folglich jedes einzelne der Paare:

$$[(tw^{(\nu)} + 1)\Phi^{(\nu)}_\mu + t\Psi^{(\nu)}_\mu, \ \ w^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu],$$

aus denen das reducirte Paar $(\mathfrak{R}')$ besteht, durch die Zahl $n^{(\nu)}_\mu$ und die Grösse $w^{(\nu)}$ vollkommen bestimmt. Der Nachweis für die obige Behauptung, dass das reducirte Paar $(\mathfrak{R}')$ durch das Invariantensystem $(\mathfrak{S}^0)$ vollkommen bestimmt sei, wird also erbracht, wenn gezeigt wird, dass die Grössen $w^{(\nu)}$ in dem reducirten Paar $(\mathfrak{R}')$ mit den Grössen $\mathfrak{w}^{(\nu)}$ im Schema $(\mathfrak{S}^0)$ übereinstimmen*) und dass ferner die zu den Formenpaaren $[\Phi^{(\nu)}_\mu, \Psi^{(\nu)}_\mu]$ gehörigen Zahlen $n^{(\nu)}_\mu$ durch die in dem Schema $(\mathfrak{S}^0)$ enthaltenen Zahlen $\mathfrak{n}^{(\nu)}_\mu$ gegeben sind.

Um dies zu zeigen, bilde ich entsprechend der Schaar:

$$w\varphi - (tw+1)\psi$$

---

*) Für die Übereinstimmung von w^0 und $\mathfrak{w}^0$ bedarf es keines Nachweises, da beide als unbestimmte Variable einander gleich *gesetzt* werden können.

die aus dem reducirten Formenpaar ($\mathfrak{R}'$) gebildete Schaar:

$$\sum_{\mu,\nu}\left\{w\left((tw^{(\nu)}+1)\Phi_\mu^{(\nu)}+t\Psi_\mu^{(\nu)}\right)-(tw+1)\left(w^{(\nu)}\Phi_\mu^{(\nu)}+\Psi_\mu^{(\nu)}\right)\right\}$$
$$(\mu=1,2,\ldots;\ \nu=0,1,2,\ldots)$$

oder in einfacherer Gestalt:

$$(\mathfrak{T})\qquad \sum_{\mu,\nu}\left\{(w-w^{(\nu)})\Phi_\mu^{(\nu)}-\Psi_\mu^{(\nu)}\right\}\qquad \left(\begin{smallmatrix}\mu=1,2,\ldots\\ \nu=0,1,2,\ldots\end{smallmatrix}\right),$$

und denke mir dabei die Bezeichnung $\mu=1,2,\ldots$ so gewählt, dass für jeden festen Werth von ν die Ungleichheitsbedingungen:

$$(\mathfrak{U})\qquad n_1^{(\nu)}\leqq n_2^{(\nu)}\leqq n_3^{(\nu)}\leqq\ldots\qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

erfüllt sind.

Bezeichnet man nun zur Abkürzung den Ausdruck ($\mathfrak{T}$) mit F und seine nach einer Variabeln $X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$ genommene partielle Ableitung mit $F_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$, so lassen sich alle zwischen denselben bestehenden homogenen linearen Relationen als homogene lineare Verbindungen der folgenden Relationen darstellen:

$$(\mathfrak{B}^0)\qquad \sum_{\varkappa,\lambda}(w-w^0)^\varkappa F_{\lambda\mu}^0=0\qquad \left(\varkappa+\lambda=n_\mu^0-1;\ \varkappa=0,1,\cdots\tfrac{1}{2}(n_\mu^0-1)\right),$$

und zwar so, dass die Coefficienten ganze Functionen von $(w-w^0)$ sind. Denn da $F_{\lambda\mu}^0$ durch die Gleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}F_{\lambda\mu}^0 &= (w-w^0)X_{\varkappa\mu}^0-X_{\varkappa-1,\mu}^0 &&\left(\tfrac{1}{2}(n_\mu^0-1)<\lambda<n_\mu^0-1\right),\\
\tfrac{1}{2}F_{\lambda\mu}^0 &= (w-w^0)X_{\varkappa\mu}^0 &&\left(\lambda=n_\mu^0-1\right),\\
\tfrac{1}{2}F_{\lambda\mu}^0 &= -X_{\varkappa-1,\mu}^0 &&\left(\lambda=\tfrac{1}{2}(n_\mu^0-1)\right),
\end{aligned}$$

so muss jede zwischen den Ableitungen $F_{\lambda\mu}^0$ bestehende lineare Relation *identisch* erfüllt sein, wenn darin $F_{n_\mu^0-1,\mu}^0$ durch den Ausdruck:

$$-\sum_{\varkappa,\lambda}(w-w^0)^\varkappa F_{\lambda\mu}^0\qquad \left(\varkappa+\lambda=n_\mu^0-1;\ \varkappa=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n_\mu^0-1)\right)$$

ersetzt wird. Es können also in der That *alle* zwischen den Ableitungen $F_{\lambda\mu}^0$ bestehenden linearen Relationen in der Form:

$$(\mathfrak{B}')\qquad \sum_\mu G_\mu\sum_{\varkappa,\lambda}(w-w^0)^\varkappa F_{\lambda\mu}^0=0\qquad \left(\begin{smallmatrix}\mu=1,2,\ldots\\ \varkappa+\lambda=n_\mu^0-1;\ \varkappa=0,1,\ldots\frac{1}{2}(n_\mu^0-1)\end{smallmatrix}\right)$$

dargestellt werden, wo G_μ ganze Functionen von $(w-w_0)$ bedeuten.

Hieraus lässt sich nachweisen, dass die Relationen ($\mathfrak{B}^0$) ein System solcher $r-\varrho$ Relationen bilden, welche von möglichst kleinem Grade in w sind. Denn da gemäss den Ungleichheiten ($\mathfrak{U}$):

$$n_1^0\leqq n_2^0\leqq n_3^0\leqq\cdots$$

ist, so muss diejenige Relation von der Form ($\mathfrak{B}'$), welche von möglichst kleinem Grade in w ist, mindestens vom Grade $\frac{1}{2}(n_1^0-1)$ sein, und da sie auch von nicht höherem Grade sein darf, so kann sie nur ein Aggregat derjenigen Gleichungen ($\mathfrak{B}^0$) sein, für welche $n_\mu^0=n_1^0$ ist. Da nun über die Reihenfolge derjenigen Relationen, welche von demselben Grade in w sind, nichts festgesetzt worden ist, so kann angenommen werden, dass jenes Aggregat die dem Werthe $\mu=1$ entsprechende Relation ($\mathfrak{B}^0$) enthält. Alsdann kann aber diese Relation selbst an Stelle jenes Aggregates genommen werden, ohne die festgesetzten Eigenschaften des Systems der $r-\varrho$ Relationen zu ändern. In der zweiten Relation von der Form ($\mathfrak{B}'$) muss nunmehr mindestens eine der Functionen $G_2, G_3, \ldots$ von Null verschieden sein, und der Grad in w ist demnach nicht kleiner als $\frac{1}{2}(n_2^0-1)$. Da der Grad aber auch nicht grösser sein darf, so kann die Relation nur aus solchen Relationen ($\mathfrak{B}^0$) zusammengesetzt sein, bei welchen $n_\mu^0\leqq n_2^0$ ist, und es kann angenommen werden, dass die dem Werthe $\mu=2$ entsprechende Relation ($\mathfrak{B}^0$) wirklich dabei vorkommt. Alsdann kann aber wiederum diese Relation selbst an Stelle jener zusammengesetzten genommen werden, ohne die Eigenschaften des Systems der Relationen zu ändern. Schliesst man so weiter, so gelangt man zu dem nachzuweisenden Resultat, dass die Relationen ($\mathfrak{B}^0$) ein System von $r-\varrho$ Relationen möglichst niedrigen Grades bilden.

Die Gradzahlen eines solchen Systems sind oben mit:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}_{\varrho+\varkappa}^0-1)\qquad (\varkappa=1,2,\ldots r-\varrho)$$

bezeichnet, in den Relationen ($\mathfrak{B}^0$) sind sie durch:

$$\tfrac{1}{2}(n_\mu^0-1)\qquad (\mu=1,2,\ldots)$$

gegeben; die Zahlen n_μ^0 und $\mathfrak{n}_{\varrho+\varkappa}^0$ müssen also mit einander übereinstimmen, und da beide Zahlenreihen ihrer Grösse nach geordnet sind, so muss für jeden der Indices $\varkappa=1,2,\ldots r-\varrho$:

$$\mathfrak{n}_{\varrho+\varkappa}^0=n_\varkappa^0$$

sein.

Da ferner die Zahlen $n^{(\nu)}$, für welche $\nu > 0$ ist, für jeden bestimmten Werth von ν ebenfalls ihrer Grösse nach geordnet angenommen worden sind, so ist der grösste gemeinsame Theiler aller Subdeterminanten $\varkappa$ter Ordnung, welche aus dem System der Coefficienten der mit $(\mathfrak{T})$ bezeichneten quadratischen Form der Variabeln $X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$ gebildet werden können, gleich:

$$\prod_{\nu} (w - w^{(\nu)})^{n_1^{(\nu)} + n_2^{(\nu)} + \cdots + n_\varkappa^{(\nu)}}.$$

Da andererseits derselbe grösste gemeinsame Theiler oben in der Form:

$$\prod_{\nu} (w - \mathfrak{w}^{(\nu)})^{\mathfrak{l}_\varkappa^{(\nu)}} \qquad (\mathfrak{l}_\varkappa^{(\nu)} = \mathfrak{n}_1^{(\nu)} + \mathfrak{n}_2^{(\nu)} + \cdots + \mathfrak{n}_\varkappa^{(\nu)})$$

dargestellt worden ist, so ergiebt sich, dass für jedes Paar von Werthen $\varkappa$, ν:

$$w^{(\nu)} = \mathfrak{w}^{(\nu)} \text{ und } n_1^{(\nu)} + n_2^{(\nu)} + \cdots + n_\varkappa^{(\nu)} = \mathfrak{n}_1^{(\nu)} + \mathfrak{n}_2^{(\nu)} + \cdots + \mathfrak{n}_\varkappa^{(\nu)},$$

also in der That stets:

$$w^{(\nu)} = \mathfrak{w}^{(\nu)}, \quad n_\varkappa^{(\nu)} = \mathfrak{n}_\varkappa^{(\nu)} \qquad \binom{\nu = 1, 2, \ldots}{\varkappa = 1, 2, \ldots \varrho}$$

sein muss.

Hiermit ist die Vollständigkeit des Invariantensystems $(\mathfrak{S}^0)$ dargethan. Die Übereinstimmung der Zahlen $\mathfrak{n}$ und n, auf welche der Beweis gegründet worden ist, setzt zugleich zwei wesentliche Eigenschaften der Invarianten-Zahlen $\mathfrak{n}$ in Evidenz, nämlich *erstens*,

> dass die Summe aller Invarianten-Zahlen $\mathfrak{n}$ gleich der Rangzahl r des Formenpaars $[\varphi, \psi]$ ist,

da die damit übereinstimmende Summe aller Zahlen $n_\mu^{(\nu)}$ die Gesammtanzahl aller in den verschiedenen quadratischen Formen $\Phi_\mu^{(\nu)}$, $\Psi_\mu^{(\nu)}$ enthaltenen Variabeln angiebt und daher mit der Rangzahl des reducirten Formenpaars $(\mathfrak{R}')$ also auch mit der des Formenpaars $[\varphi, \psi]$ identisch ist, zweitens,

> dass, wie die Ungleichheiten $(\mathfrak{U})$ unter Berücksichtigung der nachgewiesenen Übereinstimmung von $\mathfrak{n}_\varkappa^{(\nu)}$ und $n_\varkappa^{(\nu)}$ zeigen, die in je einer Horizontalreihe stehenden Invariantenzahlen:
>
> $$\mathfrak{n}_1^{(\nu)}, \ \mathfrak{n}_2^{(\nu)}, \ \mathfrak{n}_3^{(\nu)}, \ldots \mathfrak{n}_\varrho^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

> ihrer Grösse nach auf einander folgen, d. h. dass:
>
> $$0 \leqq \mathfrak{n}_1^{(\nu)} \leqq \mathfrak{n}_2^{(\nu)} \leqq \cdots \leqq \mathfrak{n}_\varrho^{(\nu)}$$
>
> und folglich für die oben definirten Exponenten $\mathfrak{l}_\varkappa^{(\nu)}$ die Grössenbedingung:
>
> $$\mathfrak{l}_{\varkappa-1} + \mathfrak{l}_{\varkappa+1} \geqq \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}_\varkappa$$
>
> erfüllt ist.

Es ist schliesslich noch als ein wichtiger Punkt hervorzuheben, dass die zwischen den partiellen Ableitungen der quadratischen Form:

$$u\varphi + v\psi \text{ oder } \sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik}) x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bestehenden linearen Relationen nicht blos in den Zahlen, welche ihre Dimension in Beziehung auf u und v angeben, sondern auch in ihren Coefficienten selbst Elemente zur Bildung von Invarianten für die lineare Transformation des Formenpaars:

$$[\varphi, \psi] \text{ oder } \left[\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \ \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k\right] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

liefern. Dies soll im folgenden Abschnitt näher dargelegt werden.

VIII.

Bezeichnet man, wie im art. I, zur Abkürzung $u\varphi - v\psi$ durch f und die nach x_k genommenen partiellen Ableitungen von f, φ, ψ durch f_k, φ_k, ψ_k, so wird:

$$f_k = u\varphi_k - v\psi_k = 2\sum_{i=1}^{i=n} (ua_{ik} - vb_{ik}) x_i \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Ist nun ferner eine der zwischen den verschiedenen Ableitungen f_k bestehenden linearen Relationen, wie im art. I $(\mathfrak{B})$:

$$\sum_{h,k} c_{hk} f_k u^h v^{m-h} = 0 \qquad \binom{h = 0, 1, \ldots m}{k = 1, 2, \ldots n},$$

und wird, wie a. a. O., ψ' als die aus ψ durch die Substitution:

$$x_k = \sum_{h=0}^{h=n-1} c_{hk} x_h' \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

hervorgehende quadratische Form:

$$\sum_{g,h}\sum_{i,k} b_{ik} c_{gi} c_{hk} x'_g x'_h \qquad \begin{pmatrix} g,h=0,1,\dots n-1 \\ i,k=1,2,\dots n \end{pmatrix}$$

definirt, so ist:

$$\varphi'_h = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_h} = 2\sum_g \sum_{i,k} b_{ik} c_{gi} c_{hk} x'_g \qquad \begin{pmatrix} g=0,1,\dots n-1 \\ i,k=1,2,\dots n \end{pmatrix}$$

und also, wenn hier an Stelle der Variabeln x' wieder die ursprünglichen Variabeln x eingeführt werden:

$$\varphi'_h = 2\sum_{i,k} b_{ik} c_{hk} x_i \qquad (i,k=1,2,\dots n).$$

Es sind nun diese homogenen linearen Functionen der n Variabeln x, welche für $h=1,2,\dots m$ in dem mit (𝔖) bezeichneten Schlussresultate des art. I als neue Variable $\mathfrak{x}_{m+h}$ eingeführt und im Anfange des art. VI durch $2X^0_{h-1,0}$ ersetzt worden sind. Demnach ist:

$$X^0_{h-1,0} = \sum_{i,k} b_{ik} c_{hk} x_i \qquad (i,k=1,2,\dots n),$$

und ebenso hat man für jede der verschiedenen $r-\varrho$ von einander unabhängigen linearen Relationen:

$$\sum_{h,k} c^{(\mu)}_{hk} f_k u^h v^{m_\mu - h} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h=0,1,\dots m_\mu \\ k=1,2,\dots n \\ \mu=1,2,\dots r-\varrho \end{pmatrix},$$

welche zwischen den Ableitungen von $u\varphi - v\psi$ bestehen, und deren Coefficienten von höherer als *null*ter Dimension sind, die Gleichung:

$$(\mathfrak{W}) \qquad X^0_{h-1,\mu} = \sum_{i,k} b_{ik} c^{(\mu)}_{hk} x_i \qquad \begin{pmatrix} i,k=1,2,\dots n \\ h=1,2,\dots m_\mu \\ \mu=1,2,\dots r-\varrho \\ m_\mu = \frac{1}{2}(n^0_\mu - 1) \end{pmatrix}.$$

Diese Variabeln $X^0_{h-1,\mu}$ bleiben, wie ich schon im Monatsbericht vom Februar 1874 hervorgehoben habe[1]), bei allen jenen Substitutionen unberührt, welche im art. VI angewendet worden sind, um aus dem mit (𝔖′) bezeichneten Ausdruck den letzten Theil wegzuschaffen und damit zu der reducirten Schaar zu gelangen. Es zeigt sich also,

dass in dem am Ende des art. V mit (ℜ′) bezeichneten, zu irgend einem Formenpaare:

[1]) Bd. I, S. 380 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

$$\left[\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k,\ \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k\right] \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

gehörigen reducirten Paar:

$$(\mathfrak{R}') \qquad \left[\sum_{\mu,\nu}\big((tw^{(\nu)}+1)\Phi^{(\nu)}_\mu + t\Psi^{(\nu)}_\mu\big),\ \sum_{\mu,\nu}\big(w^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu\big)\right]$$
$$(\mu=1,2,\dots;\ \nu=0,1,2,\dots)$$

die in Φ^0_μ, Ψ^0_μ enthaltenen Variabeln $X^0_{h-1,\mu}$ durch die obige Gleichung (𝔚):

$$X^0_{h-1,\mu} = \sum_{i,k} b_{ik} c^{(\mu)}_{hk} x_i \qquad \begin{pmatrix} i,k=1,2,\dots n \\ h=1,2,\dots m_\mu \end{pmatrix}$$

definirt sind.

Berücksichtigt man nun, dass die quadratischen Formen Φ^0_μ, Ψ^0_μ, wie im art. VI, durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Phi^0_\mu &= \sum_{g,h} X^0_{g\mu} X^0_{h\mu} \\ \Psi^0_\mu &= \sum_{i,k} X^0_{i\mu} X^0_{k\mu} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g+h=2m_\mu=n^0_\mu-1,\ i+k=2m_\mu-1=n^0_\mu-2 \\ g,h=0,1,\dots m_\mu-1,\ m_\mu+1,\dots 2m_\mu \\ i,k=0,1,\dots 2m_\mu-1 \end{pmatrix}$$

bestimmt sind, so sieht man,

dass $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=r-\varrho} m_\mu$ von den $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=r-\varrho}(2m_\mu+1)$ Variabeln X^0 des reducirten Formenpaars *unmittelbar* durch die Coefficienten $c^{(\mu)}_{hk}$ jener linearen Relationen gegeben sind.

Nimmt man ferner an Stelle des Formenpaares:

$$\left[\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k,\ \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k\right] \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

das zugehörige reducirte Paar, so reducirt sich die mit (𝔚) bezeichnete lineare Function auf die eine Variable $X^0_{h-1,\mu}$ des reducirten Paares, und es zeigt sich also,

dass die linearen Functionen (𝔚):

$$\sum_{i,k} b_{ik} c^{(\mu)}_{hk} x_i \qquad \begin{pmatrix} i,k=1,2,\dots n \\ h=1,2,\dots m_\mu \\ \mu=1,2,\dots r-\varrho \end{pmatrix},$$

deren Anzahl gleich $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=r-\varrho} m_\mu$ ist, sämmtlich Covarianten für jede lineare Transformation des Formenpaares:

$$\left[\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k\right] \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

sind, oder, was dasselbe ist, Invarianten der Aequivalenz:

$$(\ldots a_{ik}, \ldots b_{ik}, \ldots x_i, \ldots) \sim (\ldots a'_{ik}, \ldots b'_{ik}, \ldots x'_i, \ldots), \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

vorausgesetzt, dass man zwei solche Systeme als aequivalent betrachtet, wenn das eine aus dem anderen durch lineare Transformation des Formenpaares:

$$\left[\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \ \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k\right] \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

in:

$$\left[\sum_{i,k} a'_{ik} x'_i x'_k, \sum_{i,k} b'_{ik} x'_i x'_k\right] \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

hervorgeht.

Die linearen Relationen, welche zwischen den Ableitungen einer Schaar quadratischer Formen, deren Determinante gleich Null ist, bestehen, bilden die Grundlage meiner ersten im Monatsbericht vom Mai 1868 veröffentlichten Untersuchungen[1]) über die vorher noch niemals behandelten Schaaren der bezeichneten Art. Darin, dass mit Hülfe der $r-\varrho$ linearen Relationen (von höherer als *null*ter Dimension) unmittelbar $\sum m_\mu$ von den $\sum(2m_\mu+1)$ mit X^0 bezeichneten Variabeln des reducirten Formenpaares gegeben sind, ist der Grund zu finden, warum die Reduction derjenigen Schaaren quadratischer Formen, deren Determinante gleich Null ist, aus jenen meinen Untersuchungen vom Jahre 1868[1]) in so einfacher Weise, wie oben im art. VI, zu entnehmen ist, während die Reduction, ohne Benutzung der linearen Relationen, bei der Transformation der Variabeln eine Sonderung derselben in gewisse Gruppen und damit ein ganz neues Prinzip erforderte, dessen Nothwendigkeit und Bedeutung ich im Monatsbericht vom März 1874[2]) eingehend erörtert habe.

[1]) Bd. I, S. 163 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) Bd. I, S. 382 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

EINE ANALYTISCH-ARITHMETISCHE FORMEL

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 108. S. 348. (1891)

EINE ANALYTISCH-ARITHMETISCHE FORMEL.

Bezeichnet man mit ϱ_n alle positiven echten Brüche, welche in ihrer reducirten Form den Nenner n haben und nicht grösser als $\frac{1}{2}$ sind, so ist der Werth des über alle solche Brüche ϱ_n erstreckten Products $\Pi\, 2 \sin \varrho_n \pi$, wenn die Zahl n *verschiedene* Primfactoren enthält, gleich 1, aber wenn n die Potenz einer Primzahl p ist, gleich dem absoluten Werthe von $\sqrt{p}$. Hieraus folgt unmittelbar die Formel:

$$\prod_{\varrho} (2 \sin \varrho \pi)^2 = \prod_{h} p_h^{\lambda_h} \qquad (h=1,2,3,\ldots),$$

wobei die Multiplication links auf *alle* reducirten positiven echten Brüche ϱ zu erstrecken ist, die selbst nicht grösser als $\frac{1}{2}$ sind, und deren Nenner nicht grösser als N ist, während die Multiplication rechts sich auf *alle* Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ bezieht und die ganzen Zahlen λ_h durch die Ungleichheitsbedingung $p_h^{\lambda_h} \leqq N < p_h^{\lambda_h+1}$ oder $\lambda_h \log p_h \leqq \log N < (\lambda_h + 1) \log p_h$ bestimmt werden. Nach der *Gauss*'schen Bezeichnungsweise der grössten Ganzen ist daher:

$$\lambda_h = \left[\frac{\log N}{\log p_h}\right],$$

und die obige Formel kann hiernach in folgender Weise dargestellt werden:

$$\prod_{\varrho} (2 \sin \varrho \pi)^2 = \prod_{p} p^{\left[\frac{\log N}{\log p}\right]},$$

oder auch *so*:

$$\prod_{\varrho} (2 \sin \varrho \pi)^2 = \prod_{m} (p_{m1}\, p_{m2} \ldots)^m \qquad (m=1,2,3,\ldots),$$

wenn $p_{m1}, p_{m2}, \ldots$ alle Primzahlen sind, die zwischen der $(m+1)$ten und der $m$ten Wurzel aus N liegen, und zwar die obere Grenze eingeschlossen.

Geht man endlich zu den Logarithmen über, so erhält man die merkwürdige Formel:

$$\frac{2}{\log N}\sum_{\varrho}\log 2\sin\varrho\pi = \sum_{p}\left[\frac{\log N}{\log p}\right]\frac{\log p}{\log N},$$

in welcher die Summation rechts auf *alle* Primzahlen (p), links auf alle reducirten positiven echten Brüche (ϱ) zu erstrecken ist, welche keinen grösseren Nenner als N haben und deren Werth nicht $\frac{1}{2}$ übersteigt.

DARLEGUNG ARITHMETISCHER EIGENSCHAFTEN DER KUGELFUNKTIONEN

VON

L. KRONECKER.

Tageblatt der 59. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Berlin vom 18.—24. September 1886. S. 123.

DARLEGUNG ARITHMETISCHER EIGENSCHAFTEN DER KUGELFUNKTIONEN.

[Vortrag am Dienstag, dem 21. September 1886, in der ersten Sektion für Mathematik und Astronomie der Deutschen Naturforscherversammlung zu Berlin.]

Herr Kronecker überreichte als Gastgeschenk eine Anzahl Exemplare seines neuesten Aufsatzes „Zur Theorie der elliptischen Functionen“ und knüpfte daran eine Darlegung „arithmetischer Eigenschaften der Kugelfunctionen“, welche diesen merkwürdigen, der Astronomie ihre Entstehung verdankenden Functionen nun auch in der reinen Arithmetik eine bedeutende Rolle anweisen. Die Eigenschaften bestehen darin, dass die Kugelfunctionen gewisse Divisorensysteme zweiter Stufe enthalten, deren Elemente aus der Theorie der elliptischen Functionen entnommen werden.

SUR LE NOMBRE DES RACINES COMMUNES À PLUSIEURS ÉQUATIONS SIMULTANÉES

PAR

L. KRONECKER.

(EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE À M. PICARD.)

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. CXIII, p. 1006—1012, séance du 28 décembre 1891.

SUR LE NOMBRE DES RACINES COMMUNES À PLUSIEURS ÉQUATIONS SIMULTANÉES.[1])

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Picard.)

Dans votre première Communication sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées (p. 356 des Comptes rendus), vous avez fait mention de mes recherches sur les systèmes de fonctions de plusieurs variables en des termes qui peut-être ne font pas voir assez clairement que ces recherches m'ont conduit à déterminer complètement le dit nombre. Je crois donc devoir rappeler les résultats qui s'y rapportent.

Soient, comme dans mes Mémoires du 4 mars 1869 et du 21 février 1878[2]), $F_{00}, F_{10}, \ldots, F_{n0}$ des fonctions réelles et monotropes des variables réelles $z_1, z_2, \ldots z_n$, admettant des valeurs positives et négatives en nombre infini. Je suppose, en outre, que les domaines $F_{g0} < 0$ représentent des variétés $n^{\text{ièmes}}$ qui ne contiennent que des systèmes de valeurs finies des variables z; de plus, qu'en général les dérivées partielles

$$F_{hk} = \frac{\partial F_{h0}}{\partial z_k} \qquad \begin{pmatrix} h=0,1,\ldots n \\ k=1,2,\ldots n \end{pmatrix}$$

ont des valeurs finies et qu'aucun des $(n+1)$ déterminants fonctionnels

$$|F_{gk}| \qquad \begin{pmatrix} g=0,1,\ldots n, \text{ excepté } g=m \\ k=1,2,\ldots n \end{pmatrix}$$

ne s'annule en même temps que les n fonctions F_{g0}.

Cela posé, en désignant par

$$\chi(F_{00}, F_{10}, \ldots F_{n0})$$

[1]) In dem Original findet sich der Zusatz: L'Académie décide que cette Communication, bien que dépassant les limites réglementaires, sera insérée en entier. H

[2]) Bd. I, S. 175 und Bd. II, S. 71 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

la caractéristique du système des fonctions $F_{00}, F_{10}, \ldots F_{n0}$, et en faisant usage de la notation très commode

$$\operatorname{sgn} a = +1,\ 0,\ -1$$

selon qu'on a

$$a > 0,\quad a = 0,\quad a < 0$$

χ est défini par l'égalité

$$\text{(I)} \qquad \chi(F_{00}, F_{10}, \ldots F_{n0}) = -\tfrac{1}{2}\sum \operatorname{sgn} |F_{gh}| \qquad (g, h = 0, 1, \ldots n),$$

où la sommation doit être étendue à tous les systèmes de valeurs des n variables z qui satisfont aux n équations:

$$F_{g0} = 0 \qquad (g = 0, 1, \ldots n,\ \text{excepté } g = m).$$

Il est à remarquer que la somme, dans l'égalité (I), prend la même valeur pour tous les $n+1$ nombres $m = 0, 1, \ldots n$, et qu'on peut remplacer l'équation (I) par celle-ci:

$$\text{(II)} \qquad \chi(F_{00}, F_{10}, \ldots F_{n0}) = \sum \operatorname{sgn} |F_{gk}| \qquad \left(\begin{matrix} g = 0, 1, \ldots n,\ \text{excepté } g = m \\ k = 1, 2, \ldots n \end{matrix}\right),$$

où la sommation doit s'étendre à tous les points $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ déterminés par les conditions:

$$F_{m0} < 0,\quad F_{g0} = 0 \qquad (g = 0, 1, \ldots n,\ \text{excepté } g = m).$$

Je rappelle encore que la caractéristique peut être représentée par une intégrale:

$$\text{(III)} \qquad \chi(F_{00}, F_{10}, \ldots F_{n0}) = \frac{1}{\varpi_n}\int |F_{gh}| \frac{dw}{\varphi^n \gamma} \qquad (g, h = 0, 1, \ldots n),$$

où l'intégration s'étend à tous les points $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ de la variété $(n-1)^{\text{ième}}$

$$F_{m0} = 0.$$

Les quantités, essentiellement positives, φ et γ sont données par les égalités:

$$\varphi^2 = \sum_{g=0}^{g=n} F_{g0}^2, \quad \gamma^2 = \sum_{k=1}^{k=n} F_{mk}^2,$$

et l'élément dw par celle-ci:

$$|F_{mk}|\, dw = \gamma\, dz_1 \ldots dz_{k-1} dz_{k+1} \ldots dz_n;$$

la quantité ϖ_n désigne la valeur connue $\dfrac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ de l'intégrale $\int dw$ étendue sur tous

les points de la variété $(n-1)^{\text{ième}}$:

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = 1.$$

Maintenant, pour exprimer le nombre N de systèmes de valeurs satisfaisant aux conditions:

$$\text{(IV)} \qquad G < 0,\ F_{10} = 0,\ F_{20} = 0, \ldots F_{n0} = 0,$$

par des caractéristiques, on peut prendre, comme je l'ai fait dans mon Mémoire du 4 mars 1869 (art. III)[1]):

$$1^0 \quad F_{00} = G\Delta_0,$$

$$2^0 \quad F_{00} = \Delta_0,$$

où Δ_0 désigne le déterminant fonctionnel:

$$|F_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Alors le nombre N est donné par l'équation:

$$\text{(V)} \qquad N = \chi(G\Delta_0, F_{10}, \ldots F_{n0}) - \chi(\Delta_0, F_{10}, F_{20}, \ldots F_{n0});$$

donc, en employant les expressions intégrales (III) de ces caractéristiques et en y prenant $m = 0$, on obtient la formule:

$$\text{(VI)} \qquad \varpi_n N = 2\int\limits_{(\Delta_0 = 0,\ G < 0)} \frac{\Sigma \Delta_{0k}\Delta_{k0}}{|\sqrt{\Sigma \Delta_{0k}^2}|} \frac{dw}{|\sqrt{\Sigma F_{k0}^2}|^n} - \int\limits_{(G = 0)} \operatorname{sgn} \Delta_0 \frac{\Sigma G_k \Delta_{k0}}{|\sqrt{\Sigma G_k^2}|} \frac{dw}{\varphi^n}.$$

Ici les sommations doivent être étendues à $k = 1, 2, \ldots n$, tandis que les quantités Δ_{k0}, Δ_{0k} sont définies par les équations:

$$\sum_{h=0}^{k=n} F_{0h}\Delta_{h0} = |F_{gh}|,\quad \Delta_{0k} = \frac{\partial \Delta_0}{\partial z_k} \qquad \left(\begin{matrix} g, h = 0, 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots n \end{matrix}\right).$$

En prenant $m > 0$ dans l'équation (III), on obtient le nombre N représenté par la différence de deux intégrales étendues à tous les systèmes de valeurs $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ qui satisfont à l'équation:

$$F_{m0} = 0.$$

Dans l'une de ces intégrales, F_{n0} doit être remplacé par $G\Delta_0$, dans l'autre par Δ_0. La manière de déterminer le nombre N, proposée dans votre Communication

[1]) Bd. I, S. 182 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

du 16 novembre, donne ce nombre représenté par une caractéristique d'un système de fonctions de $n+1$ variables:

$$\text{(VII)} \qquad N = \chi[(a-z_0)(b+z_0)G,\, z_0\varDelta_0,\, F_{10},\, F_{20},\, \ldots F_{n0}],$$

où a et b sont supposés positifs. Dans cette équation, qui se déduit immédiatement de la relation (II), en y prenant $m=0$, j'ai ajouté le facteur $(a-z_0)(b+z_0)$ à la fonction G pour limiter la variété $G(z_1, z_2, \ldots z_n) < 0$, évidemment infinie cylindrique dans la variété $n+1^{\text{ième}}$ $(z_0, \ldots z_n)$.

Si maintenant on remplace χ par l'expression intégrale, donnée par l'équation (III) on obtient le résultat:

$$\text{(VIII)} \qquad \varpi_{n+1} N = -J_0 + J_a - J_b,$$

où

$$J_0 = \int\limits_{(G=0)} \frac{\Sigma G_k \varDelta_{k0}}{\left|\sqrt{\Sigma G_k^2}\right|}\, dw \int\limits_{-a}^{b} \frac{\varDelta_0\, dz_0}{\left|\sqrt{z_0^2\varDelta_0^2 + \varphi^2}\right|^{n+1}},$$

$$J_a = \int\limits_{(G<0)} \frac{\Sigma \varDelta_{0k}\varDelta_{k0}}{\left|\sqrt{a^2\varDelta_0^2 + \Sigma F_{k0}^2}\right|^{n+1}}\, a\, dv, \quad J_b = \int\limits_{(G<0)} \frac{\Sigma \varDelta_{0k}\varDelta_{k0}}{\left|\sqrt{b^2\varDelta_0^2 + \Sigma F_{k0}^2}\right|^{n+1}}\, b\, dv.$$

Les sommations doivent être étendues à $k = 1, 2, \ldots n$, et dv désigne comme dans mon Mémoire du 4 mars 1869 (art. VI[1])), l'élément de volume:

$$dz_1 \cdot dz_2 \cdots dz_n.$$

Il convient de remarquer qu'à l'aide de la substitution:

$$z_0 = \frac{\varphi}{|\varDelta_0|} \operatorname{tang} \Theta$$

la première des trois intégrales prend la forme plus simple:

$$J_0 = \int\limits_{(G=0)} \operatorname{sgn} \varDelta_0 \frac{\Sigma G_k \varDelta_{k0}}{\left|\sqrt{\Sigma G_k^2}\right|} \frac{dw}{\varphi^n} \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta_1} (\cos \Theta)^{n-1} d\Theta,$$

où les deux limites Θ_0, Θ_1 se déterminent par les relations:

$$\operatorname{tang} \Theta_0 = -\frac{b\varDelta_0}{\varphi}, \quad \operatorname{tang} \Theta_1 = \frac{a\varDelta_0}{\varphi}.$$

---

[1]) Bd. I, S. 190 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Considérons maintenant, en vous suivant, les deux cas limites $a = b = 0$ et $a = b = \infty$. Dans le premier de ces deux cas, l'intégrale J_0 tend vers zéro, et il vient alors, en prenant $a = b$:

$$\text{(IX)} \qquad \frac{1}{2}\varpi_{n+1} N = \lim_{a=0} \int\limits_{(G<0)} \frac{\Sigma \varDelta_{0k}\varDelta_{k0}}{\left|\sqrt{a^2\varDelta_0^2 + \Sigma F_{k0}^2}\right|^{n+1}}\, a\, dv.$$

Si nous faisons augmenter a et b indéfiniment, les deux arcs Θ_0 et Θ_1 deviennent $-\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi$; donc, comme on a:

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} (\cos \Theta)^{n-1} d\Theta = \frac{\pi \Gamma(n)}{2^{n-1}\left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)^2} = \frac{\pi_{n+1}}{\pi_n}\,{}^{1)},$$

il résulte:

$$\text{(X)} \qquad \lim_{a=b=\infty} J_0 = \frac{\pi_{n+1}}{\pi_n} \int\limits_{(G=0)} \operatorname{sgn} \varDelta_0 \frac{\Sigma G_k \varDelta_{k0}}{\left|\sqrt{\Sigma G_k^2}\right|} \frac{dw}{\varphi^n}.$$

Pour déterminer la limite vers laquelle tend la valeur de l'intégrale J_a, partageons d'abord le domaine $G < 0$ en deux parties $G_0 < 0, G_1 < 0$, dont la première embrasse un domaine assez petit autour de la variété $(n-1)^{\text{ième}}$ $\varDelta_0 = 0$. Comme l'intégrale étendue à $G_1 < 0$ s'évanouit pour $a = \infty$, il ne s'agit que de déterminer la limite de l'intégrale:

$$J_a = \int\limits_{(G_0<0)} \frac{\Sigma \varDelta_{0k}\varDelta_{k0}}{\left|\sqrt{a^2\varDelta_0^2 + \Sigma F_{k0}^2}\right|^{n+1}}\, a\, dv,$$

pour $a = \infty$. Faisons usage pour cela de la transformation indiquée dans l'Article V de mon Mémoire, cité déjà plusieurs fois, de 1869.[2]) Soient $(z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0)$ les points situés sur la variété $\varDelta_0 = 0$, et posons pour $k = 1, 2, \ldots n$:

$$z_k = z_k^0 + p \frac{\varDelta_{0k}}{\left|\sqrt{\Sigma \varDelta_{0k}^2}\right|}.$$

---

[1]) Die Formel gilt für ungerades n, für gerades n ist

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \Theta)^{n-1} d\Theta = 2^{n-1} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(n)}. \qquad \text{H}$$

[2]) Bd. I, S. 189 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

L'intégrale J_a prend alors cette forme:

$$\int\limits_{(\Delta_0=0)} \frac{\Sigma \Delta_{0k}\Delta_{k0}}{|\sqrt{\Sigma \Delta_{0k}^2}|}\, dw \int \frac{a\,|\sqrt{\Sigma \Delta_{0k}^2}\,|\, dp}{|\sqrt{a^2 p^2 \Sigma \Delta_{0k}^2 + \Sigma F_{k0}^2}\,|^{n+1}}.$$

Déterminons maintenant le domaine $G_0 < 0$ tel qu'il embrasse tous les points $(z_1, z_2, \ldots z_n)$, pour lesquels p prend les valeurs de $-\varrho$ à $+\varrho$, où il faut choisir ϱ assez petit. Les limites de l'intégration relative à dp seront donc $-\varrho$ et $+\varrho$, et on pourra remplacer dans l'expression $\sum F_{k0}^2$, les valeurs des variables:

$$z_k^0 + p \frac{\Delta_{0k}}{|\sqrt{\Sigma \Delta_{0k}^2}|} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots n)}$$

par celles-ci:

$$z_k^0 + \frac{\varrho \Delta_{0k}\varepsilon_k}{|\sqrt{\Sigma \Delta_{0k}^2}|} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots n)},$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ étant des quantités entre -1 et $+1$.

En posant alors:

$$a\,|\sqrt{\sum \Delta_{0k}^2}\,|\, p = |\sqrt{\sum F_{k0}^2}\,| \operatorname{tang} \Theta,$$

l'intégration relative à dp donne le résultat:

$$\frac{1}{|\sqrt{\Sigma F_{k0}^2}\,|^n} \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta_1} (\cos \Theta)^{n-1} d\Theta,$$

où les limites Θ_0, Θ_1 sont déterminées par les relations:

$$|\sqrt{\sum F_{k0}^2}\,| \operatorname{tang} \Theta_0 = -\varrho a\, |\sqrt{\sum \Delta_{0k}^2}\,|, \quad |\sqrt{\sum F_{k0}^2}\,| \operatorname{tang} \Theta_1 = \varrho a\, |\sqrt{\sum \Delta_{0k}^2}\,|.$$

Ces limites seront donc $-\infty$ et $+\infty$ si l'on augmente indéfiniment la valeur de a, et il en suit:

$$\lim_{a=\infty} J_a = \lim_{a=\infty} \overline{J}_a = \frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} \int\limits_{(\Delta_0=0)} \frac{\Sigma \Delta_{0k}\Delta_{k0}}{|\sqrt{\Sigma \Delta_{0k}^2}|} \frac{dw}{|\sqrt{\Sigma F_{k0}^2}\,|^n},$$

où les variables $z_1, z_2, \ldots z_n$ contenues dans les fonctions F_{k0}, ont les valeurs:

$$z_k = z_k^0 + \frac{\varrho \Delta_{0k}\varepsilon_k}{|\sqrt{\Sigma \Delta_{0k}^2}|}.$$

Mais, en passant à la limite $\varrho = 0$, ces valeurs seront remplacées par z_k^0, c'est à dire par celles qui seront déterminées par l'équation $\Delta_0 = 0$. Puisque la valeur de $-J_b$ tend évidemment vers la même limite que J_a, pour $a = b = \infty$, on a:

$$\text{(XI)} \qquad \lim_{a=\infty} J_a - \lim_{b=\infty} J_b = 2\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} \int\limits_{(\Delta_0=0)} \frac{\Sigma \Delta_{k0}\Delta_{0k}}{|\sqrt{\Sigma \Delta_{0k}^2}|} \frac{dw}{|\sqrt{\Sigma F_{0k}^2}\,|^n}.$$

Les valeurs limites des intégrales J_0, J_a, J_b se trouvent donc déterminées complètement par les égalités (X) et (XI). En les appliquant à l'équation (VIII), celle-ci se change, comme vous voyez, après toutes ces transformations, pour $a = b = \infty$, en celle (VI) que j'ai déduite directement de mon Mémoire; la manière de déterminer le nombre N que vous avez proposée ne fournit donc pas dans ce cas limite un résultat nouveau. Il reste à rechercher si, aussi pour l'autre cas limite $a = b = 0$, on sera conduit au même résultat, si l'on réussit à déterminer la valeur de l'intégrale, qui exprime le nombre N dans l'équation (IX).

Permettez-moi d'ajouter encore une remarque. Dans mes recherches sur les systèmes de fonctions de plusieurs variables, j'ai été forcé de distinguer les systèmes de valeurs réelles communes à n équations selon leurs *caractéristiques*. Cette distinction entre, il est vrai, dans toutes les formules que j'ai développées dans mes divers Mémoires publiés sur ce sujet, principalement dans la Note sur le théorème de Sturm que j'ai presentée moi-même à l'Académie le 6 mai 1869 (voir t. LXVIII).[1]) Mais cette distinction, bien loin d'être regrettable, me semble plutôt révéler la vraie nature des choses, cachée jusque-là, parce qu'on s'est borné à considérer cette espèce particulière de fonctions de variables complexes, pour laquelle la caractéristique conserve toujours la même valeur. Rien peut-être, ne montre plus clairement la portée de la distinction que j'ai introduite que la comparaison de la formule (VI) pour le cas $n = 2$ avec celle que vous avez citée dans votre Article du 16 novembre. Au lieu de la restriction, nécessaire pour celle-ci, au cas particulier où Δ_0 ne s'annule pas dans le domaine $G < 0$, ma formule (VI) donne un résultat général, mais en ajoutant une intégrale étendue sur le domaine $(\Delta_0 = 0, G < 0)$, qui n'existe pas dans le cas particulier.

[1]) Bd. I, S. 227 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken.

DRUCKFEHLERVERZEICHNIS ZUM ZWEITEN HALBBAND DES DRITTEN BANDES.

S. 44, Z. 7 v. o. statt „$(h, i, k = 1, 2, \ldots \nu$“ lies „$(h, i, k = 1, 2, \ldots \nu)$“.
S. 63, Z. 1 v. u. statt „$h, k = 1, 2, \nu \ldots)$“ lies „$h, k = 1, 2, \ldots \nu)$“.
S. 142, Z. 5 v. o. statt „$e^{(\nu)}$“ lies „$e^{(\nu)}_{\mu}$“.
S. 169, Z. 4 v. o. statt „$\mu',$“ lies „μ''“.

ZUM DRUCKFEHLERVERZEICHNIS FÜR DEN FÜNFTEN BAND.

S. 525, Z. 16 v. o. statt „III^2 213—216“ lies „III^2 203—205“.
S. 527, Z. 9 v. u. statt „III^2 203—212“ lies „III^2 207—215“.