OLD
ER'S
KE

2
31

LEOPOLD KRONECKER'S WERKE

LEOPOLD KRONECKER'S WERKE

HERAUSGEGEBEN AUF VERANLASSUNG

DER

PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VON

K. HENSEL

DRITTEN BANDES ZWEITER HALBBAND

1931

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

VORREDE.

Mit der Herausgabe dieses zweiten Halbbandes von Band III, der nach dem in der Vorrede zum ersten Bande veröffentlichten Plane die letzten auf die arithmetische Theorie der algebraischen Größen bezüglichen Abhandlungen enthält, ist die Herausgabe der mathematischen Werke Leopold Kronecker's beendet.

Ich möchte der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft nochmals für ihre tatkräftige Unterstützung dieses großen Werkes den wärmsten Dank aussprechen. Auch dem Verlage von B. G. Teubner gebührt besonderer Dank für die fördernde Unterstützung meiner Bemühungen bei der Herausgabe und für die schöne mustergültige Ausstattung des ganzen Werkes.

Auch bei diesem Bande konnte von der Zufügung besonderer Zusätze abgesehen werden, da es hier wie in den früheren Bänden der ersten Abteilung möglich war, die notwendigen Ergänzungen in kurzen Anmerkungen unter dem Texte zuzufügen und die wenigen rechnerischen Versehen im Texte zu verbessern.

Marburg a. L., im August 1931.

K. Hensel.

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

I. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme (1888) 1

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1888. S. 429—438, 447—465, 557—578, 595—612, 983—1016.

II. Bemerkungen über die von Gauss mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Größe x . . . . (1890) 115

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 106. S. 346—348.

III. Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen . . . . (1890) 123

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 107. S. 135—136.

IV. Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie (1890) 127

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 107. S. 254—261.

V. Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen . . . . (1890) 139

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1890. S. 1225—1237.

VI. Algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen (1890, 1891) 157

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1890. S. 1375—1388; 1891. S. 9—17, 34—44.

VII. Eine analytisch-arithmetische Formel . . . . (1891) 199

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 108. S. 348.

VIII. Darlegung arithmetischer Eigenschaften der Kugelfunktionen . (1886) 203

Tageblatt der 59. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Berlin vom 18.—24. September 1886. S. 123.

IX. Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées (Extrait d'une Lettre adressée à M. Picard) . . . . (1891) 207

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris. T. CXIII, p. 1006—1012, séance du 28 décembre 1891.

ZUR THEORIE DER ALLGEMEINEN COMPLEXEN ZAHLEN UND DER MODULSYSTEME

VON

L. KRONECKER.

Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1888. S. 429—438, 447—465, 557—578, 595—612, 983—1016.

ZUR THEORIE DER ALLGEMEINEN COMPLEXEN ZAHLEN UND DER MODULSYSTEME.

[Gelesen in der Akademie am 12. April 1888.]

Die Frage der Einführung allgemeiner complexer Grössen oder Zahlen ist von *Hankel* im § 29 seiner 1867 erschienenen „Theorie der complexen Zahlensysteme" kurz erörtert worden; sie ist eingehender von Hrn. *Weierstrass* in einer aus dem Juni 1883 datirten, an Hrn. *H. A. Schwarz* gerichteten, in den Göttinger Nachrichten am 12. November 1884 veröffentlichten Mittheilung[1]) und im Anschluss daran von Hrn. *Dedekind* in zwei ebendaselbst im März 1885 und Februar 1887 abgedruckten Aufsätzen behandelt worden, und neuerdings ist dieselbe Frage von Hrn. *Julius Petersen* in einer in Nr. 17 der Göttinger Nachrichten vom Jahre 1887 erschienenen Abhandlung wieder aufgenommen worden. Dies giebt mir Veranlassung darzulegen, dass für das Problem der Auffindung der allgemeinsten, unter Bewahrung der algebraischen Rechnungsregeln zulässigen, complexen Zahlen, welches in den erwähnten Publicationen der HH. *Weierstrass*, *Dedekind* und *Petersen* nur unter beschränkenden Voraussetzungen behandelt worden ist, die vollständige und zugleich ganz einfache Lösung fast unmittelbar aus der Entwickelung des Begriffs der Modulsysteme $n$ter Stufe von n Variabeln resultiert, welche im § 20 meiner im Anfange des Jahres 1882 erschienenen Festschrift zu Hrn. *Kummer*'s Doctorjubiläum enthalten ist.[2])

Es bedarf nämlich zur Bildung allgemeiner complexer Zahlen $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\nu i_\nu$, welche gleich den Zahlen $a_0 + a_1 i$ den gewöhnlichen Rechnungsregeln unterworfen sein sollen, offenbar nur der Einführung solcher Rechnungssymbole $i_1, i_2, \ldots i_\nu$, für welche jedes Product sich eindeutig als lineare Function derselben mit reellen oder auch, im gewöhnlichen Sinne des Wortes, com-

[1]) *Weierstrass*, Werke, Bd. II, S. 311. H

[2]) Bd. II, S. 326 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

plexen Coefficienten darstellen lässt. Da nun die lineare Darstellung jedes Products der Symbole $i_1, i_2, \dots i_\nu$ aus derjenigen der $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ Produkte:

$$i_h i_k \qquad (h \leqq k;\ h,k = 1,2,\dots\nu)$$

hervorgeht, so brauchen nur Coefficienten:

$$c_0^{(h,k)},\quad c_1^{(h,k)},\quad c_2^{(h,k)}, \dots c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leqq k;\ h,k = 1,2,\dots\nu)$$

so bestimmt zu werden, dass aus den $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ Relationen:

$$i_h i_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} i_1 - \dots - c_\nu^{(h,k)} i_\nu = 0 \qquad (h \leqq k;\ h,k = 1,2,\dots\nu)$$

die geforderte eindeutige Darstellung jedes Productes der Symbole $i_1, i_2, \dots i_\nu$ resultirt. Entkleidet man die hiermit formulirte Aufgabe von aller Symbolik, so zeigt sich unmittelbar, dass sie nur darin besteht,

> in der allgemeinsten Weise $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ ganze Functionen
>
> $$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - \dots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leqq k;\ h,k = 1,2,\dots\nu)$$
>
> von ν unbestimmten Variabeln $y_1, y_2, \dots y_\nu$ als Elemente eines Divisorensystems zu bestimmen, für welches jede ganze Function der Variabeln y einer einzigen linearen Function derselben congruent wird, für welches also die $\nu + 1$ Grössen:
>
> $$1, y_1, y_2, \dots y_\nu$$
>
> ein Fundamentalsystem bilden.

Es soll nun zuvörderst gezeigt werden, wie sich die Lösung dieser Aufgabe aus den Entwickelungen im § 20 meiner erwähnten Festschrift ergiebt[1]), und alsdann sollen die dort eingeführten Divisorensysteme eingehender behandelt werden.

I. Gemäß der a. a. O. aufgestellten Definition drückt die Congruenz:

$$G \equiv 0 \,(\text{modd. } M', M'', M''', \dots)$$

aus, dass eine Gleichung:

$$G = P'M' + P''M'' + P'''M''' + \cdots$$

besteht, in welcher $G, M', M'', M''', \dots P', P'', P''', \dots$ ganze Functionen der unbestimmten Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ bedeuten. Dabei sollen, wie a. a. O., die Coeffi-

[1]) Bd. II, S. 326 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

cienten in den Functionen G, M, P irgend welche feste oder variable, aber natürlich von $x_1, x_2, \dots x_n$ unabhängige Werthe haben und also nicht, wie im § 21 der erwähnten Festschrift[1]), auf ganzzahlige Werthe beschränkt sein.

Das Divisoren- oder Modul-System $(M', M'', M''', \dots)$ wird als ein System $n$ter Stufe (oder $n$ten Ranges) vorausgesetzt.*) Für ein solches lassen sich stets ganze Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$, und zwar in der kleinsten hinreichenden Anzahl, bestimmen, durch welche *alle* ganzen Functionen derselben n Variabeln x ganz, linear und homogen dargestellt werden können. Eine Reihe derartiger Functionen $f_0, f_1, \dots f_\nu$, von denen eine, z. B. f_0, offenbar gleich *Eins* angenommen werden kann, bildet ein System, welches im Anschluss an die im § 8[2]) der citirten Festschrift aufgestellten Definitionen als „Fundamentalsystem für das Divisorensystem $(M', M'', M''', \dots)$“ zu bezeichnen ist, während die Zahl $\nu + 1$, d. h. die nothwendige Anzahl der Elemente des Fundamentalsystems, die „Ordnungszahl“ des Divisorensystems darstellt.

Da hiernach für jede beliebige ganze Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ eine Congruenz:

$$f \equiv c_0 + c_1 f_1 + \cdots + c_\nu f_\nu \,(\text{modd. } M', M'', M''', \dots)$$

besteht, in welcher die Coefficienten c völlig bestimmte von den Variabeln x unabhängige Grössen sind, so findet dasselbe statt, wenn man für f irgend eine ganze Function der ν Functionen $f_1, f_2, \dots f_\nu$ nimmt. Demgemäss ist für irgend eine solche ganze Function F:

$$\text{(A)} \qquad F(f_1, f_2, \dots f_\nu) \equiv C_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_\nu f_\nu \,(\text{modd. } M', M'', M''', \dots),$$

wo die Coefficienten C völlig bestimmte Grössen sind, und es ist also auch speciell für das Product von je zwei Functionen f:

$$\text{(B)} \qquad f_h f_k \equiv c_0^{(h,k)} + c_1^{(h,k)} f_1 + c_2^{(h,k)} f_2 + \cdots + c_\nu^{(h,k)} f_\nu \,(\text{modd. } M', M'', M''', \dots).$$
$$(h \leqq k;\ h,k = 1,2,\dots\nu)$$

*) Da hier von den Coefficienten der verschiedenen Producte von Potenzen der n Variabeln x in $M', M'', M''', \dots$ und also auch von den etwa in den Coefficienten vorkommenden Veränderlichen gänzlich abgesehen wird, so ist n offenbar die größtmögliche Stufenzahl eines eigentlichen Divisorensystems.

[1]) Bd. II, S. 334 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. II, S. 267 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Bezeichnet man nun die verschiedenen $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ Functionen der ν Variabeln $y_1, y_2, \dots y_\nu$:

$$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu,$$

in irgend welcher Reihenfolge, mit $N', N'', N''', \dots$, so muss in Folge der Congruenz (A) auch die Congruenz:

$$\text{(C)} \qquad F(y_1, y_2, \dots y_\nu) \equiv C_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_\nu y_\nu \;(\text{modd. } N', N'', N''', \dots)$$

bestehen. Denn es ist zuvörderst klar, dass sich $F(y_1, y_2, \dots y_\nu)$ für das Modulsystem $(N', N'', N''', \dots)$ auf eine ganze lineare Function der Variabeln y reduciren lässt, dass also eine Congruenz:

$$\text{(C}'\text{)} \qquad F(y_1, y_2, \dots y_\nu) \equiv C'_0 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \cdots + C'_\nu y_\nu \;(\text{modd. } N', N'', N''', \dots)$$

stattfinden muss. Wird nun hierin:

$$y_1 = f_1, \; y_2 = f_2, \dots y_\nu = f_\nu$$

gesetzt, so geht das Modulsystem $(N', N'', N''', \dots)$ in das aus den $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ Elementen:

$$f_h f_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} f_1 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} f_\nu \qquad {\scriptstyle (h \leqq k;\; h,k = 1,2,\dots \nu)}$$

gebildete Modulsystem über, welches, wie die Congruenzen (B) zeigen, das Modulsystem $(M', M'', M''', \dots)$ enthält; aus der Congruenz (C′) geht also die folgende hervor:

$$F(f_1, f_2, \dots f_\nu) \equiv C'_0 + C'_1 f_1 + C'_2 f_2 + \cdots + C'_\nu f_\nu \;(\text{modd. } M', M'', M''', \dots),$$

aus deren Vergleichung mit der Congruenz (A) unmittelbar zu erschliessen ist, dass:

$$C'_0 = C_0, \;\; C'_1 = C_1, \;\; C'_2 = C_2, \dots C'_\nu = C_\nu$$

sein und also in der That die Congruenz (C) bestehen muss.

Für das aus $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ Functionen der ν Variabeln y bestehende Divisorensystem $(N', N'', N''' \dots)$ bilden, wie die Congruenz (C) zeigt, die Grössen:

$$1, \; y_1, \; y_2, \dots y_\nu$$

ein Fundamentalsystem, und zwar eines von möglichst wenig Elementen. Denn aus einer Congruenz:

$$C'_0 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \cdots + C'_\nu y_\nu \equiv 0 \;(\text{modd. } N', N'', N''' \dots)$$

würde gemäss der vorstehenden Entwickelung, indem darin $F = 0$ genommen wird, das Bestehen der Congruenz:

$$C'_0 + C'_1 f_1 + C'_2 f_2 + \cdots + C'_\nu f_\nu \equiv 0 \;(\text{modd. } M', M'', M''', \dots)$$

folgen, welches der Voraussetzung, dass das Modulsystem $(M', M'', M''', \dots)$ von der Ordnung $\nu + 1$ ist, widerspricht. Das Divisorensystem $(N', N'', N''', \dots)$ ist hiernach ebenfalls von der Ordnung $\nu + 1$.

Die Rang- oder Stufenzahl des Divisorensystems $(N', N'', N''', \dots)$ ist gleich ν, also gleich der Anzahl der in den Elementen $N', N'', N''', \dots$ enthaltenen Variabeln y. Denn dass die Stufenzahl nicht kleiner als ν ist, kann schon daraus erschlossen werden, dass für das Divisorensystem $(N', N'', N''', \dots)$ ein Fundamentalsystem von einer endlichen Anzahl von Elementen existirt; dass ferner die Stufenzahl nicht grösser als ν sein kann, oder dass $(N', N'', N''', \dots)$ ein *eigentliches* Divisorensystem ist, d. h. dass nicht für eine von den Variabeln y unabhängige Grösse C eine Congruenz:

$$C \equiv 0 \;(\text{modd. } N', N'', N''', \dots)$$

bestehen kann, folgt aus der Unmöglichkeit der Congruenz:

$$C'_0 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \cdots + C'_\nu y_\nu \equiv 0 \;(\text{modd. } N', N'', N''', \dots),$$

welche bereits oben dargethan worden ist.

Das Divisorensystem $(N', N'', N''', \dots)$ ist daher ebenso, wie das Divisorensystem $(M', M'', M''', \dots)$, aus dem es abgeleitet ist, ein solches, dessen Stufenzahl mit der Anzahl der Variabeln übereinstimmt.

II. Das Ergebniss der vorstehenden Entwickelungen kann folgendermaassen formulirt werden:

Sind $1, f_1, f_2, \dots f_\nu$ die Elemente eines Fundamentalsystems für irgend ein beliebiges Divisorensystem $(M', M'', M''', \dots)$, dessen Stufenzahl der Anzahl der Variabeln gleich ist, und sind:

$$c_0^{(h,k)}, \; c_1^{(h,k)}, \; c_2^{(h,k)}, \dots c_\nu^{(h,k)} \qquad {\scriptstyle (h \leqq k;\; h,k = 1,2,\dots \nu)}$$

die Coefficienten, welche in den für die Producte $f_h f_k$ stattfindenden Congruenzen:

$$f_h f_k \equiv c_0^{(h,k)} + c_1^{(h,k)} f_1 + c_2^{(h,k)} f_2 + \cdots + c_\nu^{(h,k)} f_\nu \;(\text{modd. } M', M'', M''', \dots)$$

auftreten, so ist das aus den Elementen:

$$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu$$

bestehende Divisorensystem der Variabeln y vom Range ν, also ebenfalls von einem der Variabelnzahl gleichen Range, und die Grössen:

$$1, y_1, y_2, \ldots y_\nu$$

bilden daher ein Fundamentalsystem.

Jedes beliebige Modulsystem eines der Variabelnzahl gleichen Ranges liefert also ganz unmittelbar eine Lösung der obigen Aufgabe, und seine Ordnungszahl $\nu + 1$ ist es, welche die Anzahl der in der Aufgabe vorkommenden Variabeln y bestimmt. Dass sich auf diese Weise *alle* Lösungen der Aufgabe ergeben, ist evident. Denn die in der Aufgabe geforderten Modulsysteme sind selbst von der (relativ)*) höchsten Stufe ν und von der Ordnung $\nu + 1$.

Man findet daher auf die angegebene Weise *sämmtliche* Systeme von Coefficienten:

$$c_0^{(h,k)}, c_1^{(h,k)}, c_2^{(h,k)}, \ldots c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu),$$

welche in den zur Bildung allgemeiner complexer Zahlen:

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\nu i_\nu$$

geeigneten Relationen:

$$i_h i_k = c_0^{(h,k)} + c_1^{(h,k)} i_1 + c_2^{(h,k)} i_2 + \cdots + c_\nu^{(h,k)} i_\nu \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

angewendet werden können.

III. Der Nachweis dafür, dass das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$, dessen $\frac{1}{2}\nu(\nu + 1)$ Elemente durch den Ausdruck:

$$-c_0^{(h,k)} + \sum_{g=1}^{g=\nu} \left(\delta_{gh} y_k - c_g^{(h,k)}\right) y_g$$

für $h \leq k$ und $h, k = 1, 2, \ldots \nu$ dargestellt sind, nicht von niedrigerem als νten Range sein kann, ist oben darauf gegründet worden, dass jede ganze Function von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ einer linearen Function der ν Grössen y *modulis* $N', N'', N''', \ldots$

*) Der Ausdruck „relativ" wird im art. V näher erörtert.

congruent ist, und dass also die $\nu + 1$ Grössen $1, y_1, y_2, \ldots y_\nu$ ein Fundamentalsystem *modulis* $N', N'', N''', \ldots$ bilden, während dies offenbar nicht möglich wäre, wenn das Modulsystem $(N', N'', N''', \ldots)$ einen niedrigeren als den νten Rang hätte.

Dieser indirecte Nachweis kann aber auch durch einen directen ersetzt werden, bei welchem ein das Modulsystem $(N', N'', N''', \ldots)$ enthaltendes Modulsystem aufgestellt wird, in dessen einzelnen Elementen nur je eine der Variabeln y vorkommt, und dessen Stufenzahl daher ersichtlich mindestens gleich ν sein muss. Setzt man nämlich, um ein solches Modulsystem aufzustellen, zuvörderst:

$$\delta_{h,k} = 0 \text{ für } h \gtrless k \text{ und } \delta_{hk} = 1 \text{ für } h = k,$$

ferner:

$$\Delta_k = \left|\delta_{gh} y_k - c_g^{(h,k)}\right| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots \nu),$$

und führt man endlich die Subdeterminanten Δ_{hk} mittels der Definitionsgleichungen:

$$\text{(D)} \qquad \sum_{h=1}^{h=\nu} \left(\delta_{gh} y_k - c_g^{(h,k)}\right) \Delta_{hk} = \delta_{gk} \Delta_k \qquad (g, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

ein, so wird durch den Ausdruck:

$$\sum_{h=1}^{h=\nu} \left\{ -c_0^{(h,k)} + \sum_{g=1}^{g=\nu} \left(\delta_{gh} y_k - c_g^{(h,k)}\right) y_g \right\} \Delta_{hk}$$

offenbar eine das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ enthaltende ganze Function von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ dargestellt. Dieselbe nimmt aber mit Hülfe der Gleichungen (D) die Form:

$$y_k \Delta_k - \sum_{h=1}^{h=\nu} c_0^{(h,k)} \Delta_{hk}$$

an, in welcher es sich zeigt, dass sie eine ganze Function von y_k *allein*, und zwar genau vom Grade $\nu + 1$ ist. Denn Δ_k ist eine ganze Function νten Grades von y_k, in welcher y_k^ν den Coefficienten Eins hat, und Δ_{hk} ist von niedrigerem als νten Grade. Setzt man nunmehr:

$$y_k \Delta_k - \sum_{h=1}^{h=\nu} c_0^{(h,k)} \Delta_{hk} = F^{(k)}(y_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu),$$

so besteht die Congruenz:

$$(F'(y_1), F''(y_2), \ldots F^{(\nu)}(y_\nu)) \equiv 0 \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots),$$

und das Modulsystem auf der linken Seite dieser Congruenz ist es, zu dessen Aufstellung die vorstehenden Entwickelungen führen sollten.

Setzt man:

$$y_0 = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_{\nu-1} y_{\nu-1} + u_\nu y_\nu,$$

wo $u_1, u_2, \ldots u_\nu$ „Unbestimmte" bedeuten, und führt man mittels dieser Definitionsgleichung von vorne herein die Variable y_0 an Stelle der Variabeln y_ν ein, so ergiebt sich durch die angegebene Methode eine ganze Function von y_0, welche das Modulsystem $(N', N'', N''', \ldots)$ enthält, also eine Congruenz:

$$G(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu;\ u_1, u_2, \ldots u_\nu) \equiv 0 \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots),$$

in welcher G eine ganze Function der in den Parenthesen enthaltenen Argumente bedeutet. Wird alsdann

$$u_h = \delta_{hk} \qquad (h=1,2,\ldots\nu)$$

genommen, so resultirt wieder eine Congruenz:

$$G(y_k;\ \delta_{1k}, \delta_{2k}, \ldots \delta_{\nu k}) \equiv 0 \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots),$$

deren linke Seite eine ganze Function von y_k *allein* darstellt.

IV. Da das aus den $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ Elementen:

$$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leqq k;\ h,k=1,2,\ldots\nu)$$

bestehende Divisorensystem nicht von *niedrigerem* als νtem Range sein kann, so genügt die Bedingung, dass es nicht von *höherem* Range, oder vielmehr, dass es ein *eigentliches* Divisorensystem sein soll, um die nicht geeigneten Divisorensysteme auszuschliessen. Man kann also anstatt, wie im art. II erörtert worden, von einem beliebigen Divisorensysteme relativ höchster Stufe ausgehend zur Aufstellung geeigneter Coefficienten-Systeme:

$$c_0^{(h,k)}, c_1^{(h,k)}, c_2^{(h,k)}, \ldots c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leqq k;\ h,k=1,2,\ldots\nu)$$

zu gelangen, die allgemeinsten derartigen Systeme dadurch bestimmen, dass man $\nu+1$ lineare homogene Functionen jener $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ Divisorensystem-Elemente mit unbestimmten Coefficienten $U', U'', \ldots$ bildet und deren in Beziehung auf die ν Variabeln y gebildete oder durch deren Elimination sich ergebende Resultante gleich Null setzt. Entwickelt man alsdann die Resultante nach den verschiedenen

Producten von Potenzen der Unbestimmten U, so erhält man ein System von Gleichungen für die Coefficienten c, durch welche die geeigneten Coefficienten-systeme:

$$c_0^{(h,k)}, c_1^{(h,k)}, c_2^{(h,k)}, \ldots c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leqq k;\ h,k=1,2\ldots\nu)$$

vollkommen definirt werden. Die Coefficienten c bestimmen sich hiernach rein algebraisch und zwar als algebraische Functionen von unbestimmten Variabeln, also als Grössen eines Rationalitätsbereichs, in welchem die Elemente entweder *sämmtlich* unbestimmte Variable sind oder mit Ausnahme eines einzigen, welches dann eine algebraische Function der übrigen ist.*)

Dieser Punkt ist in jenen, im Eingang erwähnten Arbeiten über allgemeine complexe Zahlen nicht berührt worden, weil dort die Coefficienten der in den complexen Zahlen vorkommenden Rechnungssymbole keinerlei Beschränkung und desshalb auch keiner Erörterung unterzogen worden sind; er muss aber hervorgehoben werden, wenn man die *vollständige* Praecisirung der zulässigen complexen Zahlen, also ausser der Bestimmung der zulässigen Coefficienten-Systeme:

$$c_0^{(h,k)}, c_1^{(h,k)}, c_2^{(h,k)}, \ldots c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leqq k;\ h,k=1,2,\ldots\nu),$$

noch diejenige der zulässigen Coefficienten a in den complexen Zahlen:

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\nu i_\nu$$

erlangen will.

Nun ist klar, dass in dem Bereich der Coefficienten a die Coefficienten c mit zugelassen werden *müssen*; offenbar genügt es aber auch, wenn man die Coefficienten a überhaupt auf einen Rationalitätsbereich beschränken will, irgend einen solchen dafür festzusetzen, welcher denjenigen der Coefficienten c enthält.

Auch die Divisorensysteme $(N', N'', N''', \ldots)$ mit den Elementen:

$$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leqq k;\ h,k=1,2,\ldots\nu)$$

sind demnach innerhalb eines bestimmten Rationalitätsbereiches $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ zu betrachten, zu welchem die Coefficienten c mit gehören. Dabei kann — wie im

*) Vergl. § 3 meiner mehrfach citirten Festschrift zu Hrn. *Kummer*'s Doctorjubiläum[1]).

[1]) Bd. II, S. 253 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

§ 8 meiner Festschrift[1]) — angenommen werden, dass alle *ganzen* Grössen des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$, auch wenn dieser ein *Gattungs*bereich ist, sich als *ganze* ganzzahlige Functionen der Elemente $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ darstellen lassen. Denn dies kann immer dadurch erreicht werden, dass man eine Anzahl ganzer Grössen des Gattungsbereichs, z. B. die sämmtlichen Elemente des Fundamentalsystems der Gattung, mit unter die Elemente $\mathfrak{R}$ aufnimmt. Ist dies geschehen, so sind die Elemente $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ durch eine Anzahl Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten:

$$\Phi'(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots) = 0, \quad \Phi''(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \cdots) = 0, \quad \Phi'''(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots) = 0, \ldots$$

mit einander verbunden, welche ausreichend sind, um die sämmtlichen zwischen den Elementen $\mathfrak{R}$ bestehenden Relationen zu definiren. Dabei braucht dies, wie ausdrücklich hervorzuheben ist, nicht grade die *kleinste* Anzahl ausreichender Relationen zu sein, und es können also von den Gleichungen $\Phi' = 0, \Phi'' = 0, \Phi''' = 0, \ldots$ einige aus den anderen folgen; aber die Gleichungen $\Phi' = 0, \Phi'' = 0, \Phi''' = 0, \ldots$ müssen so beschaffen sein, dass jede andere zwischen den Elementen $\mathfrak{R}$ bestehende ganzzahlige Gleichung $\Phi = 0$ aus den aufgestellten Gleichungen hervorgeht, d. h. dass alsdann Φ sich als ganze lineare homogene Function von $\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots$ mit Coefficienten, welche selbst ganzzahlige Functionen der Elemente $\mathfrak{R}$ sind, darstellen lässt, oder, was dasselbe ist, dass die Congruenz:

$$\Phi \equiv 0 \;(\text{modd. } \Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots)$$

stattfindet, wenn in $\Phi, \Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots$ an Stelle von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ *lauter* unabhängige Variable gesetzt werden.

V. Um die sich hieraus ergebenden Betrachtungen genauer zu entwickeln, knüpfe ich an das mit $(M', M'', M''', \ldots)$ bezeichnete Divisorensystem im art. I an. Bedeuten nämlich, wie dort, $M', M'', M''', \ldots$ ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und werden aber die Coefficienten der verschiedenen Producte von Potenzen der Variabeln x jetzt dahin beschränkt, dass dieselben dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören sollen, so kann man bei Behandlung der Divisorensysteme $(M', M'', M''', \ldots)$ die mit einander durch die algebraischen Relationen $\Phi' = 0, \Phi'' = 0, \Phi''' = 0, \ldots$ verbundenen Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ ersichtlich durch

[1]) Bd. II, S. 267 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

lauter unabhängige Variable $z_1, z_2, z_3, \ldots$ ersetzen, sobald man nur im Divisorensystem $(M', M'', M''', \ldots)$ die Functionen:

$$\Phi'(z_1, z_2, z_3, \ldots), \quad \Phi''(z_1, z_2, z_3, \ldots), \quad \Phi'''(z_1, z_2, z_3, \ldots), \ldots$$

als Elemente hinzugefügt.

Verfährt man in der angegebenen Weise, so gelangt man wieder auf den ebenen, sichern Boden der im § 21 meiner Festschrift[1]) definirten Divisorensysteme, deren Elemente ganze Grössen eines bestimmten Rationalitätsbereichs sind; und der Rationalitätsbereich ist hier ein natürlicher, nämlich der Bereich der unbestimmten Variabeln $(x_1, x_2, \ldots x_n; z_1, z_2, z_3, \ldots)$, da $M', M'', M''', \ldots$ ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, in deren Coefficienten die Grössen $\mathfrak{R}$ durch die Variabeln $z_1, z_2, z_3, \ldots$ ersetzt worden sind, während $\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots$ *nur* die Variabeln z enthalten.

Demgemäss führt die Praecisirung der bei der Bildung allgemeiner complexer Zahlen zulässigen Coefficienten c als algebraische Grössen eines bestimmten Rationalitätsbereichs auch dazu, den gesammten Inhalt der vorhergehenden Entwickelungen selbst näher zu praecisiren. Denn, versteht man nunmehr unter $G, M', M'', M''', \ldots$ ganze Grössen des natürlichen Rationalitätsbereichs $(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, z_3, \ldots)$ und unter $\Phi, \Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots$ ganze Grössen des Bereichs $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$, so ist es die Congruenz:

$$\Phi G \equiv 0 \;(\text{modd. } M', M'', M''', \ldots \Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots),$$

welche an die Stelle der im art. I erörterten Congruenz:

$$G \equiv 0 \;(\text{modd. } M'\, M''\, M''', \ldots)$$

tritt und deren Bedeutung praecisirt. Da nämlich die erstere Congruenz eine Gleichung:

$$\Phi G = P_1' M' + P_1'' M'' + P_1''' M''' + \cdots + P_2' \Phi' + P_2'' \Phi'' + P_2''' \Phi''' + \cdots$$

vertritt, in welcher die Grössen P ebenfalls ganze Grössen des Bereichs:

$$(x_1, x_2, \ldots x_n; \; z_1, z_2, z_3, \ldots)$$

sind, so reducirt sich die angegebene Gleichung, wenn darin die Variabeln z durch die Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ ersetzt, und die Relationen:

$$\Phi'(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots) = 0, \quad \Phi''(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots) = 0, \quad \Phi'''(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots) = 0 \ldots$$

[1]) Bd. II, S. 334 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

benutzt werden, auf die Gleichung:

$$G = P'M' + P''M'' + P'''M''' + \cdots.$$

Hierbei sind die Factoren P durch die Relationen:

$$P' = \frac{P_1'}{\Phi},\quad P'' = \frac{P_1''}{\Phi},\quad P''' = \frac{P_1'''}{\Phi},\ \cdots$$

bestimmt, sie sind also, wie im art. I, *ganze* Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören; und jene Gleichung $G = P'M' + P''M'' + \cdots$ war es, durch welche a. a. O. die Congruenz:

$$G \equiv 0 \text{ (modd. } M', M'', M''', \ldots)$$

definirt worden ist.

Die Stufenzahl des Divisorensystems $(M', M'', M''', \ldots)$ ist im art. I nur *relativ*, nämlich nur in Beziehung auf die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestimmt, und es ist dabei von den etwa in den Coefficienten vorkommenden Variabeln abgesehen worden. Diese „relative" Stufenzahl lässt sich aber aus der absoluten Stufenzahl des Divisorensystems:

$$(M', M'', M''', \ldots\ \ \Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots)$$

ableiten, indem man von derselben die Stufenzahl des Divisorensystems $(\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots)$, welches nur die Variabeln z enthält, subtrahirt.

VI. Die Divisorensysteme $(N', N'', N''', \ldots)$, auf welche nunmehr zurückzukommen ist, können erst nach der im art. IV erfolgten Festsetzung eines Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ in Primmodulsysteme und Nicht-Primmodulsysteme unterschieden werden.*)

Die Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ können aber gemäss den im art. V enthaltenen Ausführungen überall durch die Variabeln z ersetzt werden, wenn stets das Modulsystem $(\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots)$ hinzugenommen wird, d. h. wenn immer an Stelle der Gleichheit die Congruenz *modulis* $\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots$ und an Stelle der Congruenz für irgend ein Modulsystem die Congruenz für dasjenige gesetzt wird, welches durch Hinzufügung der Elemente $\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots$ entsteht.

*) Vergl. den Schluss des § 2 meiner Festschrift[1]), sowie die näheren Erörterungen, betreffend die Primmodulsysteme in den einleitenden Bemerkungen zu meiner Abhandlung „Über einige Anwendungen der Modulsysteme" (Bd. 99 des Journals für Mathematik S. 337 und 338).[2])

[1]) Bd. II, S. 252 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) Bd. III_1, S. 158—160 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Da nämlich in den mit $N', N'', N''', \ldots$ bezeichneten ganzen Functionen der Variabeln y:

$$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leqq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu),$$

die Coefficienten c als ganze ganzzahlige Functionen der Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$, dividirt durch eine bestimmte ganze ganzzahlige Function $\Phi(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$, vorausgesetzt sind, so hat man, wenn diese Grössen $\mathfrak{R}$ überall durch die Variabeln z ersetzt werden, bei der Behandlung des Divisorensystems $(N', N'', N''', \ldots)$ die Elemente N mit $\Phi(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ zu multiplicieren und ihnen die ferneren Elemente:

$$\Phi'(z_1, z_2, z_3, \ldots),\quad \Phi''(z_1, z_2, z_3, \ldots),\quad \Phi'''(z_1, z_2, z_3, \ldots), \ldots$$

hinzuzufügen. Ist dann ϱ die Stufenzahl des Divisorensystems $(\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots)$, so ist der absolute Rang des Divisorensystems $(\Phi N', \Phi N'', \Phi N''', \ldots \Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots)$ gleich $\nu + \varrho$, da der oben nur in Beziehung auf die Variabeln y genommene „relative" Rang des Divisorensystems $(N', N'', N''', \ldots)$ gleich ν war.

Dass ferner eine ganze Function von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören,

$$G(y_1, y_2, \ldots y_\nu;\ \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots),$$

ein aus eben solchen ganzen Functionen gebildetes Divisorensystem enthält, wird, indem die Grössen $\mathfrak{R}$ durch die Variabeln z ersetzt werden, genau durch das Bestehen einer Congruenz:

$$\Phi \cdot G(y_1, y_2, \ldots y_\nu;\ z_1, z_2, z_3, \ldots) \equiv 0 \text{ (modd. } F', F'', F''', \ldots \Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots)$$

ausgedrückt, in welcher $\Phi, \Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen der Variabeln z bedeuten, während $F', F'', F''', \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen der Variabeln y und z sind. Die Eigenschaften, welche ein System ganzer Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ — innerhalb eines Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ ihrer Coefficienten — als Primmodulsystem charakterisieren, übertragen sich also unmittelbar auf dasjenige Divisorensystem, welches entsteht, wenn man die Grössen $\mathfrak{R}$ durch die unabhängigen Variabeln z ersetzt und den Elementen des Divisorensystems die Functionen $\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots$ hinzufügt.

Doch sollen im Folgenden die Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ selbst beibehalten werden, da die vorstehenden Bemerkungen genügen, um zu zeigen, wie die zwischen den Grössen $\mathfrak{R}$ etwa bestehenden algebraischen Beziehungen durch Hinzunahme von Congruenzen ersetzt werden können.

VII. Ist das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ im Rationalitätsbereich $(y_1, y_2, \ldots y_\nu; \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ prim, so theilen sich, gemäss den a. a. O. im 99. Bande des Journals f. Math. enthaltenen Ausführungen[1]), die ganzen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ mit Coeffizienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ in zwei Gruppen, von denen die eine alle das Divisorensystem νter Stufe $(N', N'', N''' \ldots)$ enthaltenden Functionen, die andere alle übrigen umfasst. Für jede der Functionen der zweiten Gruppe, $G(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$, giebt es eine im Sinne der Congruenz *modulis* $N', N'', N''', \ldots$ reciproke Function $\overline{G}(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$ derselben Gruppe, welche also der Congruenz:

$$G(y_1, y_2, \ldots y_\nu) \cdot \overline{G}(y_1, y_2, \ldots y_\nu) \equiv 1 \pmod{N', N'', N''', \ldots}$$

genügt, und die Functionen der zweiten Gruppe sind als solche durch das Bestehen einer derartigen Congruenz vollständig charakterisirt, während für die ganzen Functionen $F(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$, welche der *ersten* Gruppe angehören und als solche durch die Congruenz:

$$F(y_1, y_2, \ldots y_\nu) \equiv 0 \pmod{N', N'', N''', \ldots}$$

definirt werden, keine reciproken Functionen existiren.

Ein Product ganzer Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ gehört dann und nur dann zur zweiten Gruppe, wenn jeder von den Factoren dazu gehört. Denn wenn die Functionen G und G_1 zur zweiten Gruppe gehören und deren reciproke Functionen derselben Gruppe mit $\overline{G}, \overline{G}_1$ bezeichnet werden, so ist:

$$G\overline{G} \equiv 1, \quad G_1\overline{G}_1 \equiv 1, \quad \text{also} \quad G G_1 \cdot \overline{G}\,\overline{G}_1 \equiv 1 \pmod{N', N'', N''', \ldots},$$

und die letztere Congruenz charakterisiert das Product GG_1 als eine Function der zweiten Gruppe. Andererseits wird durch die aus der Congruenz $F = 0$ folgende Congruenz:

$$F(y_1, y_2, \ldots y_\nu)\, \Phi(y_1, y_2, \ldots y_\nu) \equiv 0 \pmod{N', N'', N''', \ldots}$$

[1]) Bd. III_1, S. 158 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

das Product von F mit irgend einer ganzen Function Φ als der ersten Gruppe angehörig charakterisirt.

Ein Product ganzer Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ enthält also das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ nur dann, wenn irgend einer der Factoren dasselbe enthält.

Für jede der complexen Zahlen $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\nu i_\nu$, deren Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu$ dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, und deren Coefficientensystem:

$$c_0^{(h,k)}, c_1^{(h,k)}, \ldots c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leqq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

durch die Elemente eines Primmodulsystems $(N', N'', N''', \ldots)$ bestimmt ist, giebt es daher eine solche, die ihren reciproken Werth darstellt, und es gilt für diese complexen Zahlen der Satz, dass ein Product nur dann gleich Null werden kann, wenn einer der Factoren gleich Null ist.

VIII. Gemäss den schon oben angeführten, in meiner erwähnten Abhandlung auf S. 337 des 99. Bandes des Journals f. Math.[1]) entwickelten Begriffsbestimmungen ist das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ *nicht* Primmodulsystem, wenn es andere Divisorensysteme νter Stufe $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ enthält. Es bestehen alsdann Gleichungen:

$$\text{(E)} \qquad N^{(h)} = \mathfrak{N}'\mathfrak{P}_h' + \mathfrak{N}''\mathfrak{P}_h'' + \mathfrak{N}'''\mathfrak{P}_h''' + \cdots \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

in welchen $\mathfrak{P}_h', \mathfrak{P}_h'', \mathfrak{P}_h''', \ldots$ ganze Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ bedeuten, während umgekehrt wenigstens nicht alle Functionen $\mathfrak{N}$ sich in der Form:

$$N'P' + N''P'' + N'''P''' + \cdots$$

so ausdrücken lassen, dass $P', P'', P''', \ldots$ ganze Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ werden.

Da der Voraussetzung nach das Divisorensystem $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ in dem Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ enthalten ist, so kann man dem ersteren die

[1]) Bd. III, S. 158 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

sämmtlichen Elemente des letzteren hinzufügen. Existirten nun ganze Functionen $\mathfrak{P}(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$, $P(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$, für welche:

$$\mathfrak{N}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{N}''\mathfrak{P}'' + \mathfrak{N}'''\mathfrak{P}''' + \cdots + N'P' + N''P'' + N'''P''' + \cdots = 1$$

wäre, so würde das Modulsystem $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots N', N'', N''', \ldots)$, welches mit $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ aequivalent ist, kein eigentliches Modulsystem sein. Es kann daher auch keine Congruenz:

$$\mathfrak{N}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{N}''\mathfrak{P}'' + \mathfrak{N}'''\mathfrak{P}''' + \cdots \equiv 1 \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots)$$

geben, und es existirt also für keine der das Divisorensystem $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ enthaltenden ganzen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ eine solche, die deren reciproken Werth im Sinne der Congruenz *modulis* $N', N'', N''', \ldots$ darstellte.

Unter den complexen Zahlen $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\nu i_\nu$, welche durch Nicht-Primmodulsysteme $(N', N'', N''', \ldots)$ bestimmt werden, giebt es daher stets solche, deren reciproker Werth *nicht* durch eine solche complexe Zahl dargestellt werden kann.

IX. Bildet man ν lineare homogene Verbindungen der $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ Elemente des Divisorensystems $(N', N'', N''', \ldots)$ mit unbestimmten Coefficienten $U', U'', U''', \ldots$ und nimmt zu diesen ν ganzen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ als $(\nu+1)$te Function den Ausdruck:

$$y_0 - (u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu)$$

hinzu, in welchem $u_1, u_2, \ldots u_\nu$ „Unbestimmte" bedeuten, so ist die in Beziehung auf $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ gebildete Resultante der $\nu + 1$ Functionen eine ganze Function von $y_0; u_1, u_2, \ldots u_\nu$ und den Unbestimmten U, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören. Aber vermöge der Voraussetzung, dass das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ vom νten Range ist, muss die bezeichnete Resultante einen von den Unbestimmten U unabhängigen Factor:

$$R(y_0; u_1, u_2, \ldots u_\nu)$$

mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ enthalten.

Das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ ist *prim* oder *nicht-prim*, je nachdem $R(y_0; u_1, u_2, \ldots u_\nu)$ im Rationalitätsbereich $(y_0, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ irreductibel oder reductibel ist. Die Discriminante des Systems $(N', N'', N''', \ldots)$ ist nur dann

gleich Null, wenn die Discriminante der mit $R(y_0; u_1, u_2, \ldots u_\nu)$ bezeichneten Function von y_0 gleich Null ist.

X. Um dies näher zu begründen, knüpfe ich an jene Definition an, welche ich im § 10 meiner mehrerwähnten Festschrift für die „Discriminante eines Systems von n homogenen Functionen von $n + 1$ Variabeln" gegeben habe.[1])

Bezeichnet man, wie dort, den Ausdruck:

$$\sum_{h_0, h_1, \ldots h_n} C_{h_0, h_1, \ldots h_n} x_0^{h_0} x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n} \qquad \left(\begin{smallmatrix} h_0, h_1, \ldots\ldots h_n = 0, 1, \ldots r_k \\ h_0 + h_1 + \ldots + h_n = r_k \end{smallmatrix}\right),$$

also eine „vollständige" ganze homogene Function der $n + 1$ Variabeln x von der Dimension r_k, mit:

$$F_k(x_0, x_1, \ldots x_n)$$

für $k = 1, 2, \ldots n$, und bildet man mittels Elimination von $x_0, x_1, \ldots x_n$ die Resultante desjenigen Systems von $n + 1$ homogenen Functionen der Variabeln x, welches aus den n Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ und der in Beziehung auf $x_0, x_1, \ldots x_n$ genommenen Functionaldeterminante der $n + 1$ Functionen:

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n, F_1, F_2, \ldots F_n$$

besteht, so hat diese Resultante eine ganze ganzzahlige Function der Coefficienten C als grössten von den Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots u_n$ unabhängigen Factor, und diese bis auf das Vorzeichen völlig bestimmte Function der Coefficienten C ist es, welche a. a. O. die Discriminante des Functionensystems $(F_1, F_2, \ldots F_n)$ genannt worden ist. Dieselbe Function der Coefficienten C kann aber auch in etwas modificirter Weise definirt werden. Bildet man nämlich mittels Elimination der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ aus demjenigen System von $n + 1$ Functionen, welches aus den n Functionen:

$$F_1(1, x_1, x_2, \ldots x_n), F_2(1, x_1, x_2, \ldots x_n) \ldots F_n(1, x_1, x_2, \ldots x_n)$$

und deren Functionaldeterminante besteht, die Resultante, so erhält man eine ganze ganzzahlige Function der Coefficienten C, welche die Resultante der n *homogenen* Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$F_k(0, x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

[1]) Bd. II, S. 276 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken.

als Factor enthält; und der andere Factor ist eben jene ganze Function der Coefficienten C, welche als Discriminante des Systems:

$$F_k(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

bezeichnet worden ist, und welche auch füglich als „die Discriminante des Systems der n nicht-homogenen Functionen":

$$F_k(1, x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

bezeichnet werden kann.

Für ein System von mehr als n ganzen Functionen von n Variabeln tritt an die Stelle der Discriminante selbst eine *Discriminantenform.**) Um diese für irgend ein System ganzer Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, deren Coefficienten ganze Grössen eines Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ sind, zu erhalten, hat man nur, falls eben die Anzahl der Functionen grösser als n ist, n lineare homogene Functionen derselben mit unbestimmten Coefficienten $U_1, U_2, \ldots$ zu bilden. Die Discriminante des Systems der auf diese Weise gebildeten n Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist eine ganze Function der Unbestimmten $U_1, U_2, \ldots$, welche als solche die „*Discriminantenform*" jenes Systems von mehr als n Functionen darstellt.

XI. Es seien nun $(F_1, F_2, \ldots)$, $(G_1, G_2, \ldots)$ zwei Systeme von Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, von denen das erstere in dem letzteren enthalten ist, und die Coefficienten der Multiplicatoren Φ in den Gleichungen:

$$G_h = \sum_k \Phi_{hk} F_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots),$$

welche jene Beziehung zwischen den beiden Divisorensystemen:

$$(F_1, F_2, \ldots), \quad (G_1, G_2, \ldots)$$

ausdrücken, seien ebenso wie die Coefficienten der Functionen F und G ganze Grössen des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$. Bildet man dann die je n linearen homogenen Functionen:

$$\sum_k U_{ik} F_k, \quad \sum_h V_{ih} G_h \qquad (i=1,2,\ldots n;\ h,k=1,2,\ldots)$$

*) Vergl. § 25 meiner Festschrift zu Hrn. *Kummer*'s Doctorjubiläum.[1])

[1]) Bd. II, S. 370 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

mit unbestimmten Coefficienten U, V, so gehen die ersteren in die letzteren mittels der Transformationsgleichungen:

$$U_{ik} = \sum_h V_{ih} \Phi_{hk} \qquad (i=1,2,\ldots n;\ h,k=1,2,\ldots)$$

über. Man erhält daher die Discriminantenform des Systems $(G_1, G_2, \ldots)$ mit den Unbestimmten V_{ih}, wenn man in der Discriminantenform des Systems $(F_1, F_2, \ldots)$ die Unbestimmten U_{ik} in der angegebenen Weise transformirt, und es tritt hierdurch in Evidenz, dass jeder der Coefficienten der Producte von Potenzen der Variabeln V in der Discriminantenform des Systems $(G_1, G_2, \ldots)$ sich als lineare homogene ganze Function der Coefficienten der verschiedenen Producte von Potenzen der Variabeln U in der Discriminantenform des Systems $(F_1, F_2, \ldots)$ darstellen lässt, und zwar so, dass die Coefficienten der linearen Ausdrücke ganze Grössen des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ sind. Denn diese Coefficienten ergeben sich bei jener Transformation zuvörderst als ganze ganzzahlige Functionen der Multiplicatoren Φ, welche ganze Functionen der Variabeln x mit ganzen dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehörigen Coefficienten sind, und die Variabeln x müssen bei der erwähnten Darstellung wegfallen, weil sie in keiner der beiden Discriminantenformen vorkommen.

Da hiernach das Modulsystem, dessen Elemente die verschiedenen Coefficienten der Discriminantenform von $(G_1, G_2, \ldots)$ sind, dasjenige enthält, welches aus den verschiedenen Coefficienten der Discriminantenform von $(F_1, F_2, \ldots)$ zu bilden ist, und da — wie im § 22 meiner Festschrift[1]) — das Enthaltensein von den Coefficientensystemen der Formen auf die Formen selbst übertragen werden kann, so resultirt der Satz:

> Die Discriminantenform eines Divisorensystems $(G_1, G_2, \ldots)$ enthält die Discriminantenform jedes anderen Divisorensystems $(F_1, F_2, \ldots)$, welches in dem ersteren enthalten ist;

und dieser Satz steht in der engsten Beziehung zu jenem über Discriminanten von Gattungen, welchen ich im § 9 meiner Festschrift hergeleitet habe.[2])

XII. Aus vorstehendem Satze folgt unmittelbar, dass die Discriminantenform eines Divisorensystems $(G_1, G_2, \ldots)$ gleich Null sein muss, wenn dies, wie

[1]) Bd. II, S. 343 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. II, S. 274 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

jetzt vorausgesetzt werden soll, für irgend ein darin enthaltenes Divisorensystem $(F_1, F_2, \ldots)$ der Fall ist.

Bedeutet nun, wie in den §§ 10 und 20 meiner Festschrift[1]):

$$F(u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n;\ u_1, u_2, \ldots u_n)$$

diejenige Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche, gleich Null gesetzt, die Resolvente des Gleichungssystems $F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots$ liefert, so besteht die Congruenz:

$$F(u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n;\ u_1, u_2, \ldots u_n) \equiv 0\ (\text{modd. } F_1, F_2, \ldots).$$

Es kann aber auch schon für einen Divisor der Function F eine solche Congruenz stattfinden, und es sei deshalb:

$$f(u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n;\ u_1, u_2, \ldots u_n)$$

irgend ein Theiler von F, für welchen:

$$f(u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n;\ u_1, u_2, \ldots u_n) \equiv 0\ (\text{modd. } F_2, F_2 \ldots)$$

ist. Das System von n Functionen, welches man erhält, wenn man an die Stelle der Unbestimmten u in der Function f der Reihe nach n verschiedene Systeme von Unbestimmten, also:

$$u_1 = u'_{h1},\ u_2 = u'_{h2}, \ldots u_n = u'_{hn} \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

setzt, ist demnach ein solches, welches, wie jenes Functionensystem $(G_1, G_2, \ldots)$, das Divisorensystem $(F_1, F_2, \ldots)$ enthält; seine Discriminante muss daher gleich Null sein. Diese Discriminante kann (gemäss art. X) als Product derjenigen Resultante R_f, welche durch Elimination der n Variabeln x aus den n Functionen (f) des Systems und ihrer Functionaldeterminante hervorgeht, mit der Resultante der auf die Glieder der höchsten Dimension beschränkten Functionen f dargestellt werden. Da aber diese letztere Resultante offenbar gleich Eins ist, so stimmt die Discriminante des Systems der n Functionen (f) mit jener Resultante R_f überein, und es muss daher $R_f = 0$ sein. Transformirt man das System der n Functionen (f) mittels der Substitution:

$$u'_{h1}x_1 + u'_{h2}x_2 + \cdots + u'_{hn}x_n = x'_h \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

in das System der n Functionen:

$$f(x'_h;\ u'_{h1}, u'_{h2}, \ldots u'_{hn}) \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

1) Bd. II, S. 278 und S. 330 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken.

so unterscheidet sich die Discriminante des ursprünglichen Systems nur durch eine Potenz der Substitutionsdeterminante:

$$|u'_{hk}| \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n)$$

von der Discriminante des transformirten Systems. Nun ist die Functionaldeterminante des letzteren offenbar gleich dem Product der n Functionen:

$$f'(x'_h;\ u'_{h1}, u'_{h2}, \ldots u'_{hn}) \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

wenn $f'(x; u_1, u_2, \ldots u_n)$ die nach x genommene Ableitung der Function $f(x; u_1, u_2, \ldots u_n)$ bedeutet; ferner ist die Resultante der $n + 1$ Functionen:

$$f(x_1;\ u'_{11}, u'_{12}, \ldots u'_{1n}), \ldots f(x'_n;\ u'_{n1}, u'_{n2}, \ldots u'_{nn}),\ \prod_{h=1}^{h=n} f'(x_h;\ u'_{h1}, u'_{h2}, \ldots u_{hn})$$

gleich einem Producte von Potenzen der einzelnen Resultanten, welche durch Elimination von x'_n aus den beiden Functionen:

$$f(x'_h;\ u'_{h1}, u'_{h2}, \ldots u'_{hn}),\ f'(u'_h;\ u'_{h1}, u'_{h2}, \ldots u'_{hn})$$

hervorgehen, d. h. gleich einem Product von Potenzen der einzelnen Discriminanten von:

$$f(x'_h;\ u'_{h1}, u'_{h2}, \ldots u'_{hn}) \qquad (h = 1, 2, \ldots n).$$

Dieses Product muss also gleich Null sein, und es ergiebt sich daher,

> dass die Discriminante eines jeden Divisors von:
>
> $$F(u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n),$$
>
> der — ebenso wie F selbst — das Divisorensystem $(F_1, F_2, \ldots)$ enthält, nothwendig gleich Null sein muss, wenn die Discriminante dieses Divisorensystems selbst gleich Null ist.

Nimmt man die ν Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ an Stelle der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ an Stelle des Divisorensystems $(F_1, F_2, \ldots)$, so tritt die oben im art. IX mit:

$$R(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu;\ u_1, u_2, \ldots u_\nu)$$

bezeichnete Function an Stelle von:

$$F(u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n;\ u_1, u_2, \ldots u_n),$$

und der am Schlusse des art. IX aufgestellte Satz, dass die Discriminante (oder Discriminantenform) des Systems $(N', N'', N''', \ldots)$ nur dann gleich Null sein kann, wenn die Discriminante von $R(y_0; u_1, u_2, \ldots u_\nu)$ gleich Null ist, findet also in den obigen Entwickelungen seine Begründung.

XIII. Ist $f(y_0; u_1, u_2, \ldots u_\nu)$ ein Divisor möglichst niedrigen Grades von $R(y_0; u_1, u_2, \ldots u_\nu)$, welcher — ebenso wie R selbst — das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ enthält, so muss gemäss dem im vorhergehenden Abschnitt bewiesenen Satze die Discriminante von $f(y_0; u_1, u_2, \ldots u_\nu)$ gleich Null sein, wenn die Discriminante von $(N', N'', N''', \ldots)$ gleich Null ist; die Function $f(y_0)$ muss also gleiche Factoren enthalten. Wenn nun mit $g(y_0; u_1, u_2, \ldots u_\nu)$ der grösste gemeinschaftliche Theiler der Function f und ihrer Ableitung f' und mit f_0 der Quotient der Division von f durch g bezeichnet wird, so ist $f_0(y_0; u_1, u_2, \ldots u_\nu)$ offenbar eine ganze Function von $y_0, u_1, u_2, \ldots u_\nu$, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, und welche jeden Linearfactor von $f(y_0)$ nur *ein* Mal enthält. Eine Potenz von f_0 muss also durch f theilbar sein, und wenn r den kleinsten Exponenten bedeutet, für den dies der Fall ist, so muss:

$$f_0^h(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu;\ u_1, u_2, \ldots u_\nu)$$

das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ enthalten oder nicht enthalten, je nachdem $h \geqq r$ oder $h < r$ ist.

Man sieht hieraus, dass es für Divisorensysteme $(N', N'', N''', \ldots)$, deren Discriminante Null ist, stets ganze Functionen der Variabeln y giebt, welche erst zu einer gewissen Potenz erhoben congruent Null werden. Dass dies auch für Divisorensysteme mit verschwindender Discriminante *charakteristisch* ist, soll im folgenden Abschnitte dargethan werden, in welchem die Divisorensysteme $(N', N'', N''', \ldots)$, deren Discriminante oder Discriminantenform von Null verschieden ist, näher zu betrachten sind.

XIV. Gemäss den im § 20 meiner Festschrift gegebenen Entwickelungen[1]) kann man unter der Voraussetzung, dass die Discriminante des Divisorensystems $(N', N'', N''', \ldots)$ von Null verschieden ist, für jede ganze Function von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$

[1]) Bd. II, S. 331 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

eine ihr *modulis* $N', N'', N''', \ldots$ congruente ganze Function der einen linearen Verbindung:

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu$$

aufstellen, so dass für jede ganze Function $\varphi(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$ und eine entsprechende ganze Function $\varphi_0(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu)$:

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots y_\nu) \equiv \varphi_0(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \pmod{N', N'', N''', \ldots}$$

wird. Es besteht ferner, wie a. a. O. gezeigt ist, für die oben im art. IX mit $R(y_0)$ bezeichnete Resultante die Congruenz:

$$R(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \equiv 0 \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots).$$

Nach der Bildungsweise der Resultante $R(y_0)$ ergiebt sie sich als Product aller derjenigen Ausdrücke:

$$y_0 - (u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu),$$

welche man erhält, wenn man für $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ die sämmtlichen den Gleichungen:

$$N' = 0, \quad N'' = 0, \quad N''' = 0, \ldots$$

genügenden Werthsysteme setzt. Hieraus erhellt, dass die Discriminante von R nicht Null sein kann, wenn die erwähnten Werthsysteme sämmtlich von einander verschieden sind; und dies ist der Fall, da die Discriminante des Functionensystems $(N', N'', N''', \ldots)$ als von Null verschieden vorausgesetzt worden ist.

Soll nun die Congruenz:

$$\varphi^h(y_1, y_2, \ldots y_\nu) \equiv 0 \ (\text{modd. } N', N'', N''' \ldots)$$

stattfinden, so muss:

$$\varphi_0^h(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \equiv 0 \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots)$$

sein, und es muss daher $\varphi_0^h(y_0)$ für alle diejenigen Werthe:

$$y_0 = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu$$

gleich Null werden, welche resultiren, wenn man für $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ die sämmtlichen den Gleichungen:

$$N' = 0, \ N'' = 0. \ N''' = 0, \ldots$$

genügenden Werthsysteme setzt. Es muss also auch $\varphi_0(y_0)$ selbst für alle bezeichneten Werthe von y_0 gleich Null werden und folglich:

$$\varphi_0(y_0) \equiv 0 \ (\text{mod. } R(y_0))$$

oder:

$$\varphi_0(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \equiv 0 \ (\text{mod. } R(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu))$$

sein. Da aber *modulis* $N', N'', N''', \ldots$ die Congruenzen:

$$\varphi_0(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \equiv \varphi(y_1, y_2, \ldots y_\nu), \quad R(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \equiv 0$$

bestehen, so zeigt sich, dass die Congruenz:

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots y_\nu) \equiv 0 \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots)$$

erfüllt sein muss. Diese Congruenz erweist sich demnach als eine Folge der obigen Congruenz $\varphi^\lambda \equiv 0$;

> es giebt also keine ganzen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$, die erst zu einer gewissen Potenz erhoben für das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ congruent Null werden, wenn die Discriminante desselben von Null verschieden ist.

Das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ ist, wie schon im art. IX erwähnt worden, nicht prim, wenn $R(y_0)$ im Rationalitätsbereich $(y_0, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ reductibel ist. Wird nun die Voraussetzung festgehalten, dass die Discriminantenform von $(N', N'', N''', \ldots)$ von Null verschieden ist, und bezeichnet man mit $R_1(y_0)$ und $R_2(y_0)$ zwei complementäre, dem Rationalitätsbereich $(y_0, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehörige Divisoren von $R(y_0)$, für welche also:

$$R(y_0) = R_1(y_0) R_2(y_0)$$

ist, und setzt man endlich:

$$R_1(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) = \varphi(y_1, y_2, \ldots y_\nu),$$
$$R_2(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) = \psi(y_1, y_2, \ldots y_\nu),$$

so sind $\varphi(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$ und $\psi(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$ zwei ganze Functionen der Variabeln y mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$, welche, mit einander multiplicirt, ein das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ enthaltendes Product ergeben, ohne dass doch eine der beiden Functionen φ, ψ selbst das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ enthält. Denn aus der Congruenz:

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots y_\nu) \equiv R_1(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \equiv 0 \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots)$$

würde, wie oben, folgen, dass $R_1(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu)$ für *alle* verschiedenen Werthsysteme der Variabeln y gleich Null würde, für welche die Gleichungen:

$$N' = 0, \quad N'' = 0, \quad N''' = 0, \ldots$$

erfüllt werden, d. h. also auch für alle diejenigen, für welche:

$$R_2(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) = 0$$

ist.

XV. Vergleicht man das hier entwickelte Resultat mit demjenigen, welches am Schlusse des art. XIII formulirt worden ist, so zeigt es sich als eine *charakteristische* Eigenschaft der Nicht-Primmodulsysteme $(N', N'', N''', \ldots)$, gleichviel ob ihre Discriminantenform gleich Null ist oder nicht, dass ganze Functionen des Rationalitätsbereichs $(y_0, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ existiren, deren Product das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ enthält, während keiner der Factoren selbst congruent Null ist.

Die Factoren können nur dann einander gleich sein, wenn die Discriminantenform des Divisorensystems gleich Null ist.

Der am Schlusse des art. VIII entwickelten Eigenschaft von solchen complexen Zahlen $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\nu i_\nu$, welche durch Nicht-Primmodulsysteme $(N', N'', N''', \ldots)$ bestimmt werden, kann nunmehr noch *die* hinzugefügt werden, dass es unter ihnen stets von Null verschiedene complexe Zahlen giebt, deren Product gleich Null ist, und dass — falls die Discriminantenform des Systems $(N', N'', N''', \ldots)$ gleich Null ist — sogar complexe von Null verschiedene Zahlen existiren, die, zu einer gewissen Potenz erhoben, gleich Null werden.

XVI. Im § 20 meiner mehrerwähnten Festschrift[1]) habe ich gezeigt, dass sich jede Congruenz für ein Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$, dessen Discriminante von Null verschieden ist, in eine Congruenz für den einfachen Modul $R(y_0)$ verwandeln lässt. Da nämlich unter den gemachten Voraussetzungen jede ganze Function von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$, also auch jede der Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ selbst, einer ganzen Function von $u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu$ *modulis* $N', N'', N''', \ldots$ congruent ist*), so sei:

$$y_k \equiv f_k(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots\nu)},$$

wo $f_k(y_0)$ eine ganze Function von y_0 bedeutet, deren Coefficienten dem Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören. Dann ist das Divisorensystem:

$$(R(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu), \ldots y_k - f_k(u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu), \ldots) \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots\nu)}$$

*) Vergl. den Anfang des art. XIV.

1) Bd. II, S. 326—334 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

dem Divisorensysteme $(N', N'', N''', \ldots)$ aequivalent. Einerseits finden nämlich offenbar für das letztere Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ die Congruenzen:

$$R(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \equiv 0, \ldots y_k - f_k(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \equiv 0, \ldots \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots\nu)}$$

statt; andererseits muss jede der Functionen N jenes erstere Divisorensystem enthalten. Denn jede der ν Gleichungen:

$$y_k = f_k(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots\nu)}$$

wird für alle diejenigen Werthsysteme der Variabeln y erfüllt, welche die Gleichungen:

$$N^{(h)}(y_1, y_2, \ldots y_\nu) = 0 \quad {\scriptstyle (h=1,2,3,\ldots)}$$

befriedigen, und jede der Gleichungen:

$$N^{(h)}(f_1(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu), \ldots f_\nu(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu)) = 0$$

wird daher für eben dieselben Werthsysteme der Variabeln y, d. h. für alle diejenigen Werthe von $u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots u_\nu y_\nu$ erfüllt, für welche:

$$R(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) = 0$$

ist; es muss also $N^{(h)}(f_1(y_0), \ldots f_\nu(y_0))$ durch $R(y_0)$ theilbar sein, d. h. $N^{(h)}(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$ muss in der That das Divisorensystem:

$$(R(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu), \ldots y_k - f_k(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu), \ldots) \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots\nu)}$$

enthalten.

In der vorstehenden Entwickelung kann man für die Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_\nu$ auch irgend welche bestimmte ganze Zahlen $l_1, l_2, \ldots l_\nu$ nehmen, vorausgesetzt nur, dass die Discriminante von:

$$R(l_1 y_1 + l_2 y_2 + \cdots + l_\nu y_\nu)$$

nicht verschwindet. Wird dann:

$$y_0 = l_1 y_1 + l_2 y_2 + \cdots + l_\nu y_\nu$$

gesetzt, so geht in der That jede Congruenz:

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots y_\nu) \equiv 0 \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots)$$

durch die Substitution:

$$y_k = f_k(y)$$

in eine Congruenz:

$$\varphi_0(y_0) \equiv 0 \ (\text{mod. } R(y_0))$$

über.

Die Function $R(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu)$ ist mit derjenigen offenbar identisch, welche im art. III hergeleitet und dort mit $G(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu)$ bezeichnet worden ist. $R(y_0)$ ist also, wie a. a. O. gezeigt worden, eine ganze Function $\nu + 1$ten Grades von y_0.

So wie nun die *modulis* $N', N'', N''', \ldots$ betrachteten ganzen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ in ganze Functionen von y_0 *modulo* $R(y_0)$ übergehen, so werden auch die durch das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ bestimmten complexen Zahlen:

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\nu i_\nu$$

mittels der Substitution:

$$i_k = f_k(i_0) \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots\nu)}$$

in die durch den Modul $(\nu + 1)$ten Grades $R(y_0)$ bestimmten complexen Zahlen:

$$b_0 + b_1 i_0 + b_2 i_0^2 + \cdots + b_\nu i_0^\nu$$

transformirt. Hieraus folgt,

> dass die complexen Zahlen von der Form:
>
> $$b_0 + b_1 i_0 + b_2 i_0^2 + \cdots + b_\nu i_0^\nu$$
>
> diejenigen Arten von complexen Zahlen vollständig erschöpfen, welche durch Divisorensysteme von nicht verschwindender Discriminante bestimmt werden.

Die Regeln für die Rechnung mit dem Symbol i_0 werden dabei einzig und allein durch irgend eine Gleichung $(\nu + 1)$ten Grades:

$$R(i_0) = 0$$

vorgeschrieben, deren Wahl nur der Beschränkung unterworfen ist, dass die Discriminante von Null verschieden sein muss, und dass die Coefficienten der Gleichung zu demjenigen Rationalitätsbereich gehören müssen, welchen man etwa für die Coefficienten b festgesetzt hat.

XVII. Legt man eine Gleichung $R(i_0) = 0$ zu Grunde, deren Discriminante gleich Null ist, so gehören die complexen Zahlen von der Form:

$$b_0 + b_1 i_0 + b_2 i_0^2 + \cdots + b_\nu i_0^\nu$$

natürlich zu denjenigen, welche durch Divisorensysteme von verschwindender Discriminante bestimmt werden. Aber es werden nicht *alle* Arten *solcher* complexen

Zahlen durch die Zahlen der angegebenen Form erschöpft. Denn im Allgemeinen lassen sich die Congruenzen für Modulsysteme, deren Discriminante gleich Null ist, nicht in Congruenzen für einfache Moduln verwandeln.

So bilden, um ein Beispiel anzuführen, zwei Potenzen ganzer Functionen:

$$\varphi^p(x), \quad \psi^q(y)$$

ein Divisorensystem, für welches offenbar, wenn λ den Grad von $\varphi(x)$ und μ den Grad von $\psi(y)$ bezeichnet, die $\lambda\mu pq$ Elemente:

$$x^h y^k \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, 2, \ldots \lambda p - 1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots \mu q - 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem constituiren, und die Ordnung des Divisorensystems ist daher gleich $\lambda\mu pq$. Da nun die Ordnung des Divisorensystems $(\varphi(x), \psi(y))$, für welches die Elemente:

$$x^h y^k \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, 2, \ldots \lambda - 1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots \mu - 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem bilden, gleich $\lambda\mu$ ist, so muss zwischen den ersten $\lambda\mu + 1$ Potenzen irgend einer ganzen Function $f(x, y)$ eine Congruenz:

$$\sum_{k=0}^{k=\lambda\mu} c_k f^k(x, y) \equiv 0 \;(\text{modd. } \varphi(x), \psi(y))$$

bestehen, oder also eine Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{k=\lambda\mu} c_k f^k(x, y) = \varphi(x)\eta(x, y) + \psi(y)\theta(x, y),$$

in welcher η, θ ganze Functionen von x und y bedeuten. Für den Ausdruck auf der rechten Seite findet aber die Congruenz:

$$(\varphi(x)\eta(x, y) + \psi(y)\theta(x, y))^{p+q-1} \equiv 0 \;(\text{modd. } \varphi^p(x), \psi^q(y))$$

statt, da bei der binomischen Entwickelung jedes Glied entweder durch $\varphi^p(x)$ oder durch $\psi^q(y)$ theilbar ist; jede ganze Function $f(x, y)$ genügt daher für das Modulsystem $(\varphi^p(x), \psi^q(y))$ einer Congruenz vom Grade $\lambda\mu(p + q - 1)$, also einer Congruenz von niedrigerem Grade als $\lambda\mu pq$, sobald die Zahlen p und q beide grösser als Eins sind. Die verschiedenen Potenzen einer ganzen Function von x und y können also nicht *mehr* als $\lambda\mu(p + q - 1)$ verschiedene, d. h. von einander linear unabhängige Elemente des Fundamentalsystems liefern, und sie reichen daher zur

Bildung des vollständigen Systems von $\lambda\mu pq$ Elementen nicht aus. Es ist deshalb auch unmöglich, die entsprechenden complexen Zahlen:

$$\sum_{h,k} a_{h,k} i_1^h i_2^k \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, 2, \ldots \lambda p - 1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots \mu q - 1 \end{pmatrix},$$

für welche die Rechnungsregeln durch die Bedingungen:

$$\varphi^p(i_1) = 0, \quad \psi^q(i_2) = 0$$

gegeben werden, auf complexe Zahlen der oben angegebenen Art:

$$b_0 + b_1 i_0 + b_2 i_0^2 + \cdots + b_\nu i_0^\nu$$

zurückzuführen.

XVIII. Sind $z_0, z_1, z_2, \ldots z_\nu$ unbestimmte Variable, und ist $F(z_0 + y_1 z_1 + \cdots + y_\nu z_\nu)$ eine ganze Function des in Parenthesen eingeschlossenen Arguments, so genügt dieselbe einer Congruenz:

$$F(z_0 + y_1 z_1 + \cdots + y_\nu z_\nu) \equiv \sum_{k=0}^{k=\nu} y_k f^{(k)}(z_0, z_1, \ldots z_\nu) \;(\text{modd. } N', N'', N''', \ldots),$$

wenn hier $y_0 = 1$ und das Divisorensystem $(N', N'', N''', \ldots)$ in jener schon im art. I angegebenen Bedeutung genommen wird. Dabei sind die Ausdrücke $f^{(k)}$ auf der rechten Seite ganze Functionen der Variabeln z, und die Differentiation nach z_h ergiebt, wenn man die nach z_h genommene partielle Ableitung von $f^{(k)}$ mit $f_h^{(k)}$ bezeichnet, die Congruenz:

$$\sum_{k=0}^{k=\nu} y_k f_h^{(k)} \equiv y_h \sum_{k=0}^{k=\nu} y_k f_0^{(k)} \;(\text{modd. } N', N'', N''', \ldots)$$

oder:

$$f_h^{(0)} + \sum_k y_k f_h^{(k)} - y_h f_0^{(0)} - \sum_k y_h y_k f_0^{(k)} \equiv 0 \;(\text{modd. } N', N'', N''', \ldots) \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu).$$

Der Ausdruck auf der linken Seite verwandelt sich bei Anwendung der Relationen:

$$y_h y_k \equiv c_0^{(h,k)} + \sum_{i=1}^{i=\nu} c_i^{(h,k)} y_i \;(\text{modd. } N', N'', N''', \ldots)$$

in eine lineare Function von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$, deren einzelne Coefficienten gleich Null sein müssen, und man gelangt auf diese Weise zu den Gleichungen:

$$\delta_{hi} f_0^{(0)} - \sum_{k=1}^{k=\nu} c_i^{(h,k)} f_0^{(k)} = f_h^{(i)} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots \nu \\ i = 0, 1, 2, \ldots \nu \end{pmatrix}.$$

Ist die Determinante:

$$\left| c_0^{(h,k)} \right| \qquad {\scriptstyle (h,k=1,2,\ldots\nu)}$$

nicht gleich Null, so bestimmen sich die ν Functionen $f_0^{(k)}$ als lineare homogene Ausdrücke der $\nu+1$ partiellen Ableitungen von $f^{(0)}$. Alsdann bestimmen sich alle übrigen Functionen $f_h^{(i)}$ durch die ν Functionen $f_0^{(k)}$ und durch $f_0^{(0)}$, und es lassen sich somit die je $\nu+1$ ersten Ableitungen sämmtlicher $\nu+1$ Functionen $f^{(k)}$ durch diejenigen von $f^{(0)}$ linear und homogen ausdrücken. Sind diese Ausdrücke durch die Gleichungen:

$$f_h^{(i)} = \sum_k \gamma_{ik}^{(h)} f_k^{(0)} \qquad {\scriptstyle (h,i,k=0,1,\ldots\nu)}$$

gegeben, so gehen daraus durch weitere Differentiation nach $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ die Gleichungen:

$$f_{gh}^{(i)} = \sum_k \gamma_{ik}^{(h)} f_{gk}^{(0)} \qquad {\scriptstyle (g,h,i,k=0,1,\ldots\nu)}$$

hervor, in welchen f_{gh} die zweite nach den Variabeln z_g und z_h genommene Ableitung von f bedeutet. Aus diesen Gleichungen folgen unmittelbar die Relationen:

$$\sum_k \gamma_{ik}^{(h)} f_{gk}^{(0)} = \sum_k \gamma_{ik}^{(g)} f_{hk}^{(0)} \qquad {\scriptstyle (g,h,i,k=0,1,\ldots\nu)},$$

welche zwischen den $\frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2)$ zweiten Ableitungen der einen Function $f^{(0)}$ bestehen, und daraus ergeben sich dann ähnliche Relationen, welche zwischen den $\frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2)$ zweiten Ableitungen jeder der andern Functionen $f^{(i)}$ stattfinden.

Die vorstehende Entwickelung zeigt, wie man durch Functionen von:

$$z_0 + y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + y_\nu z_\nu,$$

modulis $N', N'', N''', \ldots$ betrachtet, zu „*Systemen von Functionen*" der Variabeln $z_0, z_1, \ldots z_\nu$ geführt wird, bei denen die verschiedenen Functionen durch gewisse lineare homogene partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit einander verbunden sind, während jede einzelne Function gewissen linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung simultan genügt.

So kommt man, wenn man für das Modulsystem $(N', N'', N''', \ldots)$ den einfachen Modul $y^2 - a$ nimmt und:

$$F(z_0 + y z_1) \equiv f^{(0)}(z_0, z_1) + y f^{(1)}(z_0, z_1) \pmod{y^2 - a}$$

setzt, zu dem System von Functionen:

$$(f^{(0)}(z_0, z_1),\ f^{(1)}(z_0, z_1)),$$

für welche die partiellen Differentialgleichungen:

$$f_0^{(0)} = f_1^{(1)},\ f_1^{(0)} = a f_0^{(1)},\ a f_{00}^{(0)} = f_{11}^{(0)},\ a f_{00}^{(1)} = f_{11}^{(1)}$$

gelten. Die Function $f^{(1)}$ bestimmt sich demgemäss aus $f^{(0)}$ mittels der Formel:

$$a f^{(1)}(z_0, z_1) = a \int_{\zeta_1}^{z_1} f_0^{(0)}(z_0, z_1)\, dz_1 + \int_{\zeta_0}^{z_0} f_1^{(0)}(z_0, \zeta_1)\, dz_0,$$

in welcher ζ_0, ζ_1 beliebige Constanten bedeuten.

Nimmt man ferner für das Modulsystem $(N', N'', N''', \ldots)$ den einfachen Modul $y^3 - ay - b$ und setzt in Beziehung auf eben diesen Modul:

$$F(z_0 + y z_1 + y^2 z_2) \equiv f^{(0)}(z_0, z_1, z_2) + y f^{(1)}(z_0, z_1, z_2) + y^2 f^{(2)}(z_0, z_1, z_2),$$

so gelten für das System von Functionen:

$$(f^{(0)}(z_0, z_1, z_2),\ f^{(1)}(z_0, z_1, z_2),\ f^{(2)}(z_0, z_1, z_2))$$

die Relationen:

$$b f_0^{(1)} = f_2^{(0)},\ \ b f_1^{(1)} = a f_1^{(0)} + b f_0^{(0)},\ \ b f_2^{(1)} = a f_2^{(0)} + b f_1^{(0)},$$
$$b f_0^{(2)} = f_1^{(0)},\ \ b f_1^{(2)} = f_2^{(0)}\ \ .\ \ b f_2^{(2)} = a f_1^{(0)} + b f_0^{(0)},$$

mittels deren sich die Functionen $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ aus $f^{(0)}$ bestimmen; aus diesen ergeben sich die zwischen den zweiten Ableitungen jeder einzelnen Function bestehenden je 3 Gleichungen, von denen ich hier nur die auf $f^{(0)}$ bezüglichen anführe:

$$f_{02}^{(0)} = f_{11}^{(0)},\ \ f_{12}^{(0)} = a f_{01}^{(0)} + b f_{00}^{(0)},\ \ f_{22}^{(0)} = a f_{11}^{(0)} + b f_{01}^{(0)}.$$

Nimmt man endlich für das Modulsystem $(N', N'', N''', \ldots)$ den einfachen Modul $y^4 + 2y^2 + 1$, dessen Discriminante gleich Null ist, und setzt man in Beziehung auf eben diesen Modul:

$$F(z_0 + y z_1 + y^2 z_2 + y^3 z_3) \equiv f^{(0)} + y f^{(1)} + y^2 f^{(2)} + y^3 f^{(3)},$$

so bekommt man erstens die folgenden Relationen zwischen den verschiedenen Functionen f:

$$f_0^{(1)} = -2 f_1^{(0)} - f_3^{(0)},\ f_1^{(1)} = f_0^{(0)},\ f_2^{(1)} = f_1^{(0)},\ f_3^{(1)} = f_2^{(0)},$$
$$f_0^{(2)} = -f_2^{(0)},\ f_1^{(2)} = -f_3^{(0)},\ f_2^{(2)} = f_0^{(0)} + 2 f_2^{(0)},\ f_3^{(2)} = f_1^{(0)} + 2 f_3^{(0)},$$
$$f_0^{(3)} = -f_1^{(0)},\ f_1^{(3)} = -f_2^{(0)},\ f_2^{(3)} = -f_3^{(0)},\ f_3^{(3)} = f_0^{(0)} + 2 f_2^{(0)},$$

zweitens die folgenden Relationen zwischen den Ableitungen von $f^{(0)}$:

$$f_{11}^{(0)} = f_{02}^{(0)}, \quad f_{12}^{(0)} = f_{03}^{(0)}, \quad f_{13}^{(0)} = -f_{00}^{(0)} - 2f_{02}^{(0)}, \quad f_{22}^{(0)} = -f_{00}^{(0)} - 2f_{02}^{(0)},$$

$$f_{23}^{(0)} = -f_{01}^{(0)} - 2f_{03}^{(0)}, \quad f_{33}^{(0)} = 2f_{00}^{(0)} + 3f_{02}^{(0)}.$$

XIX. Die Systeme von Functionen mehrerer Variabeln $z_0, z_1, \dots z_\nu$, auf welche man in der angegebenen Weise geführt wird, bieten in dem Falle, wo die Discriminante des Divisorensystems $(N', N'', N''', \dots)$ nicht gleich Null ist, deshalb kein Interesse dar, weil sie durch lineare Transformation der Variabeln z in Systeme linearer Verbindungen von Functionen je einer Variabeln verwandelt werden können, welche als solche den transformirten partiellen Differentialgleichungen von selbst genügen.

Die Gleichungen $N' = 0$, $N'' = 0$, $N''' = 0, \dots$ werden nämlich unter der Voraussetzung, dass die Discriminante nicht Null ist, durch $\nu + 1$ verschiedene Werthsysteme:

$$y_1 = \eta_{h1}, \quad y_2 = \eta_{h2}, \dots y_\nu = \eta_{h\nu} \qquad (h = 0, 1, \dots \nu)$$

befriedigt, und wenn man nun an Stelle der Variabeln z die Variabeln $\mathfrak{z}$ einführt, welche mit den ersteren durch die Relationen:

$$z_0 + \eta_{h1} z_1 + \eta_{h2} z_2 + \cdots + \eta_{h\nu} z_\nu = \mathfrak{z}_h \qquad (h = 0, 1, \dots \nu)$$

verbunden sind, so führt die zu Anfang des art. XVIII aufgestellte Congruenz:

$$F(z_0 + y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + y_\nu z_\nu) \equiv \sum_{k=0}^{k=\nu} y_k f^{(k)}(z_0, z_1, \dots z_\nu) \ (\text{modd. } N', N'', N''', \dots),$$

welche den Ausgangspunkt der Entwickelungen bildete, zu den Gleichungen:

$$F(\mathfrak{z}_h) = \sum_k \eta_{hk} f^{(k)}(z_0, z_1, \dots z_\nu) \qquad (h, k = 0, 1, \dots \nu),$$

deren Auflösung nach den Functionen $f^{(k)}$:

$$f^{(k)} = \sum_h \theta_{hk} F(\mathfrak{z}_h) \qquad (h, k = 0, 1, \dots \nu),$$

die lineare Darstellung der $\nu + 1$ Functionen f durch die $\nu + 1$ Functionen $F(\mathfrak{z}_h)$ ergiebt. Dabei sind die Coefficienten θ_{hk} rationale Functionen der Grössen η_{hk}, und die Determinante:

$$|\eta_{hk}| \qquad (h, k = 0, 1, \dots \nu)$$

ist von Null verschieden, weil die Discriminante des Divisorensystems $(N', N'', N''', \dots)$ als von Null verschieden vorausgesetzt ist.

Die linearen Verbindungen:

$$\sum_h \theta_{hk} F(\mathfrak{z}_h) \qquad (h, k = 0, 1, \dots \nu)$$

genügen *an sich* den partiellen Differentialgleichungen, welche aus denen des art. XVIII durch Übergang von den Variabeln z zu den Variabeln $\mathfrak{z}$ hervorgehen. Wenn man also die Functionen $f^{(i)}$ durch die Gleichungen:

$$f^{(i)}(z_0, z_1, \dots z_\nu) = \sum_h \theta_{hi} F(z_0 + \eta_{h1} z_1 + \cdots + \eta_{h\nu} z_\nu) \qquad (h, i = 0, 1, \dots \nu)$$

definirt, in welchen $F(z)$ eine beliebige Function einer Variabeln z bedeutet, so genügen die Functionen $f^{(i)}$ *an sich* den im vorhergehenden Abschnitte hergeleiteten partiellen Differentialgleichungen:

$$f_h^{(i)} = \sum_k \gamma_{ik}^{(h)} f_k^{(0)} \qquad (h, i, k = 0, 1, \dots \nu),$$

und sie ergeben die allgemeinsten Lösungen derselben.

XX. Wenn die Discriminante des Divisorensystems $(N', N'', N''', \dots)$ gleich Null ist, so kann man durch lineare Transformation der Variabeln z gewisse Reductionen der partiellen Differentialgleichungen erlangen. Aber *solche* Reductionen, aus denen, wie im Falle des art. XIX, die vollständige Lösung unmittelbar resultirt, habe ich im Falle verschwindender Discriminanten noch nicht ermittelt.

Setzt man an Stelle des schon im art. XVIII als Beispiel angeführten Moduls $y^4 + 2y^2 + 1$ das damit übereinstimmende Modulsystem:

$$(x^2, y^2 - x + 1),$$

dessen Discriminante offenbar gleich Null ist, so wird:

$$F(z_0 + yz_1 + x(z_2 + yz_3)) \equiv F(z_0 + yz_1) + x(z_2 + yz_3) F'(z_0 + yz_1),$$

wo F' die Ableitung der Function F bedeutet. Sind also die Functionen von vier Variabeln z_0, z_1, z_2, z_3:

$$f^{(0)}(z_0, z_1, z_2, z_3), \quad f^{(1)}(z_0, z_1, z_2, z_3), \quad f^{(2)}(z_0, z_1, z_2, z_3), \quad f^{(3)}(z_0, z_1, z_2, z_3)$$

zu bestimmen, für welche:

$$F(z_0 + yz_1 + x(z_2 + yz_3)) \equiv f^{(0)} + yf^{(1)} + xf^{(2)} + xyf^{(3)} \; (\text{modd. } x^2,\; y^2 - x + 1)$$

wird, so hat man nur die Functionen von zwei Variabeln $\varphi(z_0, z_1)$ zu bestimmen, für welche:

$$F(z_0 + yz_1) \equiv \varphi^{(0)} + y\varphi^{(1)} + x\varphi^{(2)} + xy\varphi^{(3)} \; (\text{modd. } x^2, y^2 - x + 1)$$

ist. Differentirt man einerseits nach z_0, andererseits nach z_1, so erhält man die Relationen:

$$\varphi_0^{(0)} = \varphi_1^{(1)},\; \varphi_1^{(0)} = -\varphi_0^{(1)},\; \varphi_0^{(2)} = \varphi_1^{(3)},\; \varphi_1^{(2)} = -\varphi_0^{(3)} + \varphi_0^{(1)},$$

in welchen $\varphi_h^{(k)}$ die nach z_h genommene partielle Ableitung von $\varphi^{(k)}$ bedeutet. Die ersten beiden Relationen charakterisiren die Functionen $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}$ in der Weise, dass $\varphi^{(0)} + i\varphi^{(1)}$ eine Function der complexen Variabeln $z_0 + iz_1$ sein soll. Alsdann sind aber noch die Functionen $\varphi^{(2)}$ und $\varphi^{(3)}$ gemäss den anderen beiden partiellen Differentialgleichungen zu bestimmen.

XXI. Im Anschluss an das Problem der Bildung allgemeiner complexer Zahlen $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\nu i_\nu$ ist im art. I auf die Bildung von Fundamentalsystemen für irgend ein Divisorensystem $(M', M'', M''', \ldots)$ zurückgegangen worden. Solche complexe Zahlen reduciren sich für $a_1 = a_2 = \ldots = a_\nu = 0$ auf die gewöhnlichen Zahlen und schliessen diese also in sich. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine gewisse Art von complexen Zahlen die gewöhnlichen Zahlen mit umfasse, kann so formulirt werden,

> dass die Zahl *Eins* zu der Art gehöre oder durch eine der complexen Zahlen der Art darstellbar sei.

Sieht man von dieser Bedingung ab, so hat man für die complexen Zahlen die in den Rechnungssymbolen i *homogene* Form $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\nu i_\nu$ und für $i_1, i_2, \ldots i_\nu$ Relationen:

$$i_h i_k - c_1^{(h,k)} i_1 - c_2^{(h,k)} i_2 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} i_\nu = 0 \qquad (h \leqq k;\; h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

anzunehmen. Die Aufgabe, alle hierfür geeigneten Systeme von Coefficienten c zu finden, besteht nun offenbar darin,

> in der allgemeinsten Weise $\frac{1}{2}\nu(\nu + 1)$ ganze Functionen:
>
> $$y_h y_k - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leqq k;\; h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

> von ν unbestimmten Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ als Elemente eines Divisorensystems so zu bestimmen, dass jede ganze Function der ν Variabeln y, welche kein von denselben unabhängiges Glied enthält, einer einzigen linearen *homogenen* Function der ν Variabeln y congruent wird.

Die Lösung dieser Aufgabe ergiebt sich durch eine leichte Modification der im art. I enthaltenen Entwickelung, wenn man den Kreis der dort *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ betrachteten Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ in gewisser Weise beschränkt.

Um dies näher darzulegen, knüpfe ich an den im § 5 meiner Festschrift[1]) aufgestellten Begriff der „Art" oder „Species" ganzer algebraischer Grössen an. Nach der a. a. O. gegebenen Definition bildet die Gesammtheit aller ganzen ganzzahligen Functionen von:

$$\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots \mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \mathfrak{S}''', \ldots$$

eine besondere „Art" oder „Species", wenn $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ unabhängige Variable und $\mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \mathfrak{S}''', \ldots$ irgend welche ganze algebraische Functionen derselben bedeuten. Wenn nun $G', G'', G''', \ldots$ solche ganze ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots \mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \mathfrak{S}''', \ldots$ sind, dass die Gleichungen:

$$G' = 0,\quad G'' = 0,\quad G''' = 0, \ldots$$

ein irreductibles, die Grössen $\mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \mathfrak{S}''', \ldots$ vollständig definirendes Gleichungssystem bilden, so deckt sich die a. a. O. angewendete Betrachtung der Grössen $\mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \mathfrak{S}''', \ldots$ als algebraischer Functionen der Variabeln $\mathfrak{R}$ vollständig mit der hier einzuführenden, wonach die Grössen:

$$\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots \mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \mathfrak{S}''', \ldots$$

sämmtlich als unabhängige Variable aufgefasst, aber alle ganzen Functionen derselben nur *modulis* $G', G'', G''', \ldots$ betrachtet werden. Die Gesammtheit aller ganzen ganzzahligen Functionen der Variabeln $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ bilden also *modulis* $G', G'', G''', \ldots$ einen Artbereich.

Man kann nun ebenso für ein beliebiges Modulsystem $(M', M'', M''', \ldots)$, welches von $n$ter Stufe ist, und dessen Elemente ganze Functionen der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit Coefficienten irgend eines bestimmten Rationalitätsbereichs

[1]) Bd. II, S. 260 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

$(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ sind, aus dem Gesammtbereich aller ganzen Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ einen Theilbereich aussondern und zu einem besondern „Artbereich“ vereinigen. Sind nämlich:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \ldots \varphi_\mu(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

irgend welche ganze Functionen der Variabeln x, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, so bildet die Gesammtheit der ganzen Functionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\mu$, deren Coefficienten dem Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, einen solchen Theilbereich (φ), der als Artbereich bezeichnet werden kann.

Ebenso wie im Gesammtbereich*) lassen sich auch in jedem solchen Theilbereich (φ) ganze Functionen, und zwar in der kleinsten hinreichenden Anzahl, bestimmen, durch welche *alle* Functionen des Theilbereichs (φ) *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ ganz, linear und homogen mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ dargestellt werden können. Dies ist ferner auch dann möglich, wenn man sich auf diejenigen Functionen jenes Theilbereichs (φ) beschränkt, welche kein von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\mu$ unabhängiges Glied enthalten.**)

Bezeichnet man nun mit $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots \varphi_\varrho^0$ Functionen des Theilbereichs (φ) in möglichst geringer Anzahl, durch welche sich alle jene besonderen Functionen desselben Theilbereichs ganz, linear und homogen *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ darstellen lassen, so bestehen $\frac{1}{2}\varrho(\varrho+1)$ Congruenzen:

$$\varphi_h^0 \varphi_k^0 \equiv c_1^{(h,k)} \varphi_1^0 + c_2^{(h,k)} \varphi_2^0 + \cdots + c_\varrho^{(h,k)} \varphi_\varrho^0 \ (\text{modd. } M', M'', M''', \ldots) \quad {\scriptstyle (h \leqq k;\ h,k = 1,2,\ldots \varrho)},$$

in welchen die Coefficienten c dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, aber es besteht keine Congruenz:

$$C_1 \varphi_1^0 + C_2 \varphi_2^0 + \cdots + C_\varrho \varphi_\varrho^0 \equiv 0 \ (\text{modd. } M', M'', M''', \ldots),$$

in welcher die Coefficienten C von den Variabeln x unabhängig sind. Benutzt man, wie im art. I die Coefficienten $c^{(h,k)}$ zur Bildung eines aus den $\frac{1}{2}\varrho(\varrho+1)$ Elementen:

$$y_h y_k - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_\varrho^{(h,k)} y_\varrho \qquad {\scriptstyle (h \leqq k;\ h,k = 1,2,\ldots \varrho)}$$

*) Vergl. art. I.

**) Die Möglichkeit der Bildung von „Fundamentalsystemen“ auch für solche Theilbereiche soll an einer anderen Stelle (in art. XXVII und XXVIII) näher nachgewiesen werden.

bestehenden Divisorensystems $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$, so erschliesst man genau ebenso wie im art. I, dass jede ganze Function der Variabeln y, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, wenn sie kein von den Variabeln y unabhängiges Glied enthält, sich *modulis* $N_0', N_0'', N_0''', \ldots$ als ganze lineare homogene Function der ϱ Variabeln y mit *völlig bestimmten* Coefficienten des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ darstellen lässt, und dass das Divisorensystem $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ vom Range ϱ ist.

Offenbar erhält man auf die angegebene Weise *alle* Systeme von Coefficienten c, welche zur Bildung complexer Zahlen $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\varrho i_\varrho$ geeignete Relationen:

$$i_h i_k - c_1^{(h,k)} i_1 - c_2^{(h,k)} i_2 - \cdots - c_\varrho^{(h,k)} i_\varrho = 0 \qquad {\scriptstyle (h \leqq k;\ h,k = 1,2,\ldots \varrho)}$$

liefern. Man erhält diese alle sogar schon dann, wenn man für jene Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\mu$, von denen ausgegangen wurde, die n Variabeln x selbst nimmt.

XXII. Die im vorigen Abschnitte aus beliebigen Divisorensystemen $(M', M'', M''', \ldots)$ hergeleiteten Systeme von Coefficienten c und die mittels derselben gebildeten Divisorensysteme $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ sind als speciellere unter denjenigen des art. I enthalten. Diese specielleren Systeme $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ sind nämlich dadurch charakterisiert, dass alle Coefficienten $c_0^{(h,k)}$ gleich Null sind.

Hierzu möge beiläufig bemerkt werden, dass auch in den im art. I hergeleiteten *allgemeinen* Systemen von Coefficienten c mit Hülfe linearer Transformationen der Variabeln y stets gewisse von den Coefficienten $c_0^{(h,k)}$ weggeschafft werden können, nämlich alle diejenigen, bei welchen $h < k$ ist.

Denn, wenn bei festem h irgend einer der Coefficienten:

$$c_0^{(h,k)} \qquad {\scriptstyle (k = h,\ h+1,\ h+2, \ldots \nu)}$$

von Null verschieden ist, so kann man durch die Transformation $y_h' = y_h + t y_k$, bei geeigneter Bestimmung von t, bewirken, dass $c_0^{(h,h)} \gtrless 0$ wird. Alsdann aber wird offenbar durch die Transformation:

$$y_k' = c_0^{(h,h)} y_k - c_0^{(h,k)} y_h \qquad {\scriptstyle (k = h+1,\ h+2, \ldots \nu)}$$

jeder von den Coefficienten $c_0^{(h,k)}$ weggeschafft, bei welchem $h < k$ ist.

Hiernach können die *allgemeinen* Systeme:

$$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leqq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

stets *so* angenommen werden, dass darin für alle Werthepaare h, k, für welche $h < k$ ist, und ausserdem für $h = k > \lambda$:

$$c_0^{(h,k)} = 0$$

wird. Jene besonderen Systeme, für welche *alle* Coefficienten c_0 gleich Null sind, werden alsdann durch den Werth $\lambda = 0$ charakterisirt.

XXIII. Die specielleren Divisorensysteme $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ sind von der Ordnung $\varrho + 1$, da zur linearen Darstellung aller ganzen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\varrho$ die Elemente:

$$1,\ y_1,\ y_2, \ldots y_\varrho$$

nothwendig und ausreichend sind. Ersetzt man von nun ab wieder den Buchstaben ϱ durch ν, so kann ein Divisorensystem $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ als ein specialisirtes System $(N', N'', N''', \ldots)$ sowohl, wie oben, durch die Gleichungen:

$$c_0^{(h,k)} = 0 \qquad (h \leqq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

als auch durch die Congruenz:

$$(N_0', N_0'', N_0''', \ldots) \equiv 0 \ (\text{modd. } y_1, y_2, \ldots y_\nu)$$

charakterisirt werden, d. h. also dadurch, dass das Divisorensystem $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ das Divisorensystem $(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$, welches ebenfalls vom Range ν ist, *enthält*. Da der Voraussetzung nach jedes der Divisorensysteme $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ von der Ordnung $\nu + 1$ ist, so kann keines derselben mit dem Divisorensystem $(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$, dessen Ordnungszahl offenbar gleich *Eins* ist, identisch sein; keines der Divisorensysteme $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ ist also ein *Prim*modulsystem.

Diejenigen ganzen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$, bei denen kein von den Variabeln y unabhängiges Glied vorkommt, welche also das Divisorensystem $(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$ enthalten, bilden für sich eine Gruppe in dem Sinne, dass sowohl die Addition als auch die Multiplication von zwei Functionen der Gruppe wiederum eine Function der Gruppe ergiebt.*) Alle diese Functionen sind nach dem Modul-

*) Vergl. art. XXVIII.

system $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ linearen *homogenen* Functionen der ν Variabeln y congruent. Sind nun $u_1, u_2, \ldots u_\nu$ „unbestimmte“ Variable, und bildet man die ν Functionen:

$$(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_\nu y_\nu) y_k \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu),$$

so kann man an deren Stelle im Sinne der Congruenz *modulis* $N_0', N_0'', N_0''', \ldots$, die linearen homogenen Functionen:

$$\sum_{h,i} u_h c_i^{(h,k)} y_i \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

nehmen. Der Rang dieses Systems linearer Functionen ist nichts Anderes als derjenige, welcher sich ergiebt, wenn man das Functionensystem als Divisorensystem auffasst.*) Dieser Rang kann gleich ν sein, er kann aber auch kleiner als ν, ja selbst gleich Null sein. Das letztere ist der Fall, wenn sämmtliche Coefficienten $c_i^{(h,k)}$ gleich Null sind, wenn also das Divisorensystem $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ aus den $\frac{1}{2}\nu(\nu + 1)$ Elementen:

$$y_h y_k \qquad (h \leqq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

besteht.**) Der Rang des Systems der ν linearen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$:

$$\text{(F)} \qquad \sum_{h,i} u_h c_i^{(h,k)} y_i \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

hat den höchsten Werth ν, wenn die Determinante:

$$\left| \sum_{h=1}^{h=\nu} u_h c_i^{(h,k)} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

von Null verschieden ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für den höchsten Rang des Systems (F) kann aber auch dadurch ausgedrückt werden, dass ein System von ν rationalen Functionen der Coefficienten c:

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\nu$$

*) Vergl. § 5 meiner Abhandlung „Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen“ im Sitzungsbericht von 1884 S. 1192.[1])

**) Nimmt man dieses Divisorensystem im art. I an Stelle desjenigen, welches dort mit $(N', N'', N''', \ldots)$ bezeichnet ist, so erhält man die von Hrn. *Weierstrass* auf S. 413 der Göttinger Nachrichten von 1884 als Beispiel des Hrn. *Stephanos* angeführte Art complexer Zahlen.[2])

[1]) Bd. III_1, S. 67 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

[2]) *Weierstrass*, Werke, Bd. II, S. 331. H

existirt, für welches die Congruenz:

$$\text{(G)} \qquad \sum_k \gamma_k y_k \sum_k u_k y_k \equiv \sum_k u_k' y_k \ (\text{modd. } N_0', N_0'', N_0''', \ldots) \qquad (k=1,2,\ldots\nu)$$

stattfindet.

Um die Aequivalenz der beiden angegebenen Bedingungen darzuthun, bemerke ich zuvörderst, dass, unter der Voraussetzung:

$$\text{(H)} \qquad \left| \sum_{h=1}^{h=\nu} u_h c_i^{(h,k)} \right| \gtrless 0 \qquad (i,k=1,2,\ldots\nu)$$

sich die Coefficienten γ in der Congruenz (G), welche auch so dargestellt werden kann:

$$\sum_{h,i,k} \gamma_k u_h c_i^{(h,k)} y_i \equiv \sum_k u_k y_k \ (\text{modd. } N_0', N_0'', N_0''', \ldots) \qquad (h,i,k=1,2,\ldots\nu),$$

aus den ν linearen Gleichungen:

$$\sum_{h,k} \gamma_k u_h c_i^{(h,k)} = u_i \qquad (h,i,k=1,2,\ldots\nu)$$

eindeutig als rationale Functionen der Grössen u und c bestimmen. Ersetzt man hier die Unbestimmten u durch andere Unbestimmte u' und bezeichnet mit γ' die durch die linearen Gleichungen:

$$\sum_{h,k} \gamma_k' u_h' c_i^{(h,k)} = u_i \qquad (h,i,k=1,2,\ldots\nu)$$

definirten rationalen Functionen der Grössen u' und c, so genügen die Grössen γ, γ' für das Modulsystem $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ den beiden Congruenzen:

$$\text{(K)} \qquad \begin{aligned} &\Big(\sum_k \gamma_k y_k \sum_k u_k' y_k - \sum_k u_k' y_k\Big) \sum_k u_k y_k \equiv 0 \qquad (k=1,2,\ldots\nu), \\ &\Big(\sum_k \gamma_k' y_k \sum_k u_k' y_k - \sum_k u_k' y_k\Big) \sum_k u_k y_k \equiv 0 \qquad (k=1,2,\ldots\nu). \end{aligned}$$

Bestimmt man nun je ν Grössen v und v' mittels der *modulis* $N_0', N_0'', N_0''', \ldots$ zu nehmenden Congruenzen:

$$\text{(K')} \qquad \sum_k \gamma_k y_k \sum_k u_k' y_k \equiv \sum_k (u_k' + v_k) y_k, \quad \sum_k \gamma_k' y_k \sum_k u_k' y_k \equiv \sum_k (u_k' + v_k') y_k \qquad (k=1,2,\ldots\nu),$$

so muss vermöge der Congruenzen (K) für dasselbe Modulsystem $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$:

$$\sum_k u_k y_k \sum_k v_k y_k \equiv 0, \quad \sum_k u_k y_k \sum_k v_k' y_k \equiv 0 \qquad (k=1,2,\ldots\nu)$$

sein. Nun folgen aus einer für das Modulsystem $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ bestehenden Congruenz:

$$\sum_k u_k y_k \sum_k v_k y_k \equiv 0 \qquad (k=1,2,\ldots\nu),$$

oder

$$\sum_{h,i,k} u_h c_i^{(h,k)} v_k y_i \equiv 0 \qquad (h,i,k=1,2,\ldots\nu),$$

die ν Gleichungen:

$$\sum_{h,k} u_h c_i^{(h,k)} v_k = 0 \qquad (h,i,k=1,2,\ldots\nu),$$

welche wegen der Voraussetzung:

$$\left| \sum_{h=1}^{h=\nu} u_h c_i^{(h,k)} \right| \gtrless 0 \qquad (i,k=1,2,\ldots\nu)$$

erfordern, dass die sämmtlichen ν Grössen v gleich Null sein müssen. Aus den Congruenzen (K′) ergiebt sich daher die folgende:

$$\sum_k \gamma_k y_k \sum_k u_k' y_k \equiv \sum_k \gamma_k' y_k \sum_k u_k' y_k \ (\text{modd. } N_0', N_0'', N_0''', \ldots) \qquad (k=1,2,\ldots\nu),$$

und hieraus resultirt die Congruenz:

$$\sum_{h,i,k} (\gamma_k - \gamma_k') u_h' c_i^{(h,k)} y_i \equiv 0 \ (\text{modd. } N_0', N_0'', N_0''', \ldots) \qquad (h,i,k=1,2,\ldots\nu),$$

welche die ν Gleichungen:

$$\sum_{h,k} (\gamma_k - \gamma_k') u_h' c_i^{(h,k)} = 0 \qquad (h,i,k=1,2,\ldots\nu)$$

nach sich zieht. Aus diesen Gleichungen geht endlich mit Berücksichtigung der Voraussetzung (H) hervor, dass:

$$\gamma_k = \gamma_k' \qquad (k=1,2,\ldots\nu)$$

sein muss, d. h. dass die ν Grössen γ von den unbestimmten Variabeln u unabhängig, also in der That, wie bewiesen werden sollte, rationale Functionen der Grössen c allein sind.

Um nun zweitens aus dem Bestehen der Congruenz (G) die Ungleichheit:

$$\left| \sum_{h=1}^{h=\nu} u_h c_i^{(h,k)} \right| \gtrless 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

zu folgern, braucht man nur an Stelle der Unbestimmten u_h die Grössen γ_h zu setzen. Da nämlich aus der Congruenz (G) die ν Congruenzen:

$$y_k \sum_h \gamma_h y_h \equiv y_k \, (\text{modd. } N_0', N_0'', N_0''', \ldots) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots \nu),$$

oder:

$$\sum_{h,i} \gamma_h c_i^{(h,k)} y_i \equiv y_k \, (\text{modd. } N_0', N_0'', N_0''', \ldots) \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots \nu$$

hervorgehen und hieraus die Gleichungen:

$$\sum_h \gamma_h c_i^{(h,k)} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

resultiren, so zeigt sich, dass:

$$\left| \sum_{h=1}^{h=\nu} \gamma_h c_i^{(h,k)} \right| = 1 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

ist, dass also die Determinante:

$$\left| \sum_{h=1}^{h=\nu} u_h c_i^{(h,k)} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

sich für $u_1 = \gamma_1, u_2 = \gamma_2, \ldots u_\nu = \gamma_\nu$ auf den Werth *Eins* reducirt.

Da man jene lineare Function $\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_\nu y_\nu$ an Stelle einer der Variabeln y einführen kann, so ist es auf Grund der vorstehenden Entwickelungen offenbar zulässig, ein Divisorensystem $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$, bei welchem die Determinante:

$$\left| \sum_{h=1}^{h=\nu} u_h c_i^{(h,k)} \right| \gtrless 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

ist, *so* anzunehmen, dass:

$$y_h y_\nu \equiv y_h \, (\text{modd. } N_0', N_0'', N_0'', \ldots) \qquad (h = 1, 2, \ldots \nu),$$

also:

$$c_i^{(h,\nu)} = \delta_{hi} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots \nu)$$

ist. Alsdann besteht das Divisorensystem $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ aus den $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ Elementen:

$$y_h y_k - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu - 1)$$

und den ν Elementen:

$$y_h y_\nu - y_h \qquad (h = 1, 2, \ldots \nu).$$

Zieht man nun bloss diejenigen ganzen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ in den Kreis der Betrachtung, welche sich für das Divisorensystem $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ als *homogene* lineare Functionen darstellen lassen, so kann man $y_\nu = 1$ setzen und demnach die letzten ν Elemente des Divisorensystems wegfallen lassen. Es bleibt dann das aus den $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ Elementen:

$$y_h y_k - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_{\nu-1}^{(h,k)} y_{\nu-1} - c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu - 1)$$

bestehende Divisorensystem zurück, für welches *alle* ganzen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$ sich als lineare, im Allgemeinen *nicht* homogene Functionen darstellen lassen. Ein solches Divisorensystem von der Ordnung ν hat also den allgemeinen Charakter der schon im art. I eingeführten Systeme $(N', N'', N''', \ldots)$ von der Ordnung $\nu + 1$, und die zugehörigen Coefficientensysteme:

$$c_1^{(h,k)},\ c_2^{(h,k)}, \ldots c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

bestimmen die $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ Gleichungen:

$$i_h i_k = c_1^{(h,k)} i_1 + c_2^{(h,k)} i_2 + \cdots + c_{\nu-1}^{(h,k)} i_{\nu-1} + c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

für eine Art complexer Zahlen:

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_{\nu-1} i_{\nu-1} + a_\nu,$$

unter denen die gewöhnlichen Zahlen mit begriffen sind.

Da sich hiermit gezeigt hat, dass die speciellen Divisorensysteme $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$, bei denen alle Coefficienten $c_0^{(h,k)}$ gleich Null sind, ihre Besonderheit ganz verlieren, wenn deren Discussion einerseits durch Ausschließung der *nicht homogenen* linearen Functionen der Variabeln y und andererseits durch jene Voraussetzung (H) beschränkt wird, so kann man von einer in dieser Weise beschränkten Behandlung der Divisorensysteme $(N_0', N_0'', N_0''', \ldots)$ absehen. In der schon oben citirten *Weierstrass*'schen Untersuchung über allgemeine complexe Zahlen werden gleich Anfangs die hier angegebenen Beschränkungen eingeführt, indem einerseits nur *homogene* lineare Functionen der Rechnungssymbole und andererseits nur solche Systeme von Coefficienten $e_i^{(h,k)}$ zugelassen werden, bei welchen die obige Voraussetzung (H) erfüllt ist. Sie konnte deshalb sachlich nichts Anderes ergeben, als was aus der Behandlung der *allgemeinen* Divisorensysteme $(N', N'', N''', \ldots)$ für die Theorie der allgemeinen, *die gewöhnlichen Zahlen einschliessenden* complexen Zahlen in der Weise, wie es im art. I dargelegt worden ist, resultirt. In der That braucht man nur die auf S. 399 und S. 414 der Göttinger Nachrichten von 1884[1]) mit e_0 bezeichnete lineare homogene Function der Rechnungssymbole $e_1, e_2, \ldots e_n$ *) an Stelle eines derselben, z. B. an Stelle von e_n, einzuführen, um die dortigen complexen Zahlen:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

in der Form:

$$b_0 e_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_{n-1} e_{n-1}$$

zu erhalten, oder also, da $e_0 e_k = e_k$ ist, in der Form:

$$e_0(b_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_{n-1} e_{n-1}),$$

in welcher das (wegen der Bedingung $e_0^2 = e_0$) durchweg als *einfacher* Factor auftretende Rechnungssymbol e_0 offenbar weggelassen werden kann.

In der *Weierstrass*'schen Untersuchung werden also in Wahrheit, wie oben im art. I, complexe Zahlen, welche die gewöhnlichen Zahlen einschliessen, behandelt.**) Aber es werden von den verschiedenen Arten solcher Zahlen alle diejenigen ausgeschlossen, welche aus Divisorensystemen herzuleiten sind, deren Discriminante gleich Null ist. Diese Divisorensysteme erscheinen zwar in gewissem Sinne als „singuläre", und bei einem einfachen Modul, der also eine ganze Function einer Variabeln x ist, wird auch die Anzahl der willkürlichen Coefficienten, wenn der Grad fixirt wird, um eine Einheit verringert; aber bei anderen Betrachtungsweisen tritt das

*) Die Rechnungssymbole $e_1, e_2, \ldots$ werden von *Grassmann* in seiner Ausdehnungslehre als „Einheiten", von Hrn. *Weierstrass* a. a. O. als „Haupteinheiten" bezeichnet. Der Function e_0 entspricht in den hier gebrauchten Bezeichnungen die lineare Function $\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_\nu y_\nu$, *modulis* $N', N'', N''', \ldots$ betrachtet, oder, wenn man die obigen Rechnungssymbole $i_1, i_2, \ldots i_\nu$ benutzt, die complexe Zahl $\gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2 + \cdots + \gamma_\nu i_\nu$.

**) Vergl. die bezügliche Bemerkung des Hrn. *Petersen* S. 492 der Göttinger Nachrichten von 1887.

[1]) *Weierstrass*, Werke, Bd. II, S. 315 und S. 331.

„Singuläre" der bezeichneten Divisorensysteme zurück, und das Verhältnis ihrer Anzahl zu derjenigen der übrigen Divisorensysteme wird bei anderen Zählungsweisen vergrössert.

XXIV. Der Übergang von einem Divisorensysteme, dessen Elemente $M', M'', M''', \ldots$ ganze Functionen der Variabeln x sind, zu einem anderen, dessen Elemente $N', N'', N''', \ldots$ ganze Functionen der Variabeln y sind, ist im art. I an die Aufgabe der Bildung allgemeiner complexer Zahlen geknüpft worden. Aber dieser Übergang erweist sich auch von Bedeutung für die Theorie der Divisorensysteme *selbst*, wenn man, wie es nunmehr geschehen soll, die Transformation der Modulsysteme principiell in die Theorie derselben hineinzieht.

Es seien $M', M'', M''', \ldots$ ganze Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$; es seien ferner $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{M}''', \ldots$ ganze Functionen der Variabeln $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$, deren Coefficienten ebenfalls dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören. Alsdann sollen die beiden Divisorensysteme:

$$(M', M'', M''', \ldots), \quad (\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{M}''', \ldots)$$

als „*zu derselben Classe gehörig*" bezeichnet werden, wenn bei einer Transformation:

$$x_k = \mathfrak{F}_k(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n) \qquad (k=1,2,\ldots n),$$

bei welcher $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots \mathfrak{F}_n$ ganze Functionen der Variabeln $\mathfrak{x}$ mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ bedeuten, das erste Divisorensystem durch das zweite theilbar wird, und wenn zugleich dieses zweite Divisorensystem durch eine Substitution:

$$\mathfrak{x}_\mathfrak{k} = F_\mathfrak{k}(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (\mathfrak{k}=1,2,\ldots \mathfrak{n}),$$

bei welcher $F_1, F_2, \ldots F_\mathfrak{n}$ ganze Functionen der Variabeln x mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ sind, in ein das erste Divisorensystem $(M', M'', M''', \ldots)$ enthaltendes System von Functionen der Variabeln x übergeht.

Diese Bedingungen für die Zusammengehörigkeit in eine Classe, welche offenbar durch die beiden Congruenzen:

$$\text{(L)} \quad \begin{cases} (M', M'', M''', \ldots) \equiv 0 \ (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{M}''', \ldots x_k - \mathfrak{F}_k(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_\mathfrak{n}), \ldots) & (k=1,2,\ldots n) \\ (\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{M}''', \ldots) \equiv 0 \ (\text{modd. } M', M'', M''', \ldots \mathfrak{x}_\mathfrak{k} - F_\mathfrak{k}(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots) & (\mathfrak{k}=1,2,\ldots \mathfrak{n}) \end{cases}$$

dargestellt werden können, sollen aber hier nur für die in diesem Aufsatze ausschließlich behandelten Modulsysteme relativ höchster Stufe benutzt werden, da sie für Modulsysteme niedrigerer Stufe zu eng gefasst sind.

Die Möglichkeit der Entscheidung, ob zwei Modulsysteme in eine und dieselbe Classe gehören oder nicht, erhellt daraus, dass von den zu suchenden Functionen:

$$\mathfrak{F}_k(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_{\mathfrak{n}}), \quad F_{\mathfrak{k}}(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad \binom{k=1,2,\ldots n}{\mathfrak{k}=1,2,\ldots \mathfrak{n}}$$

die einen als lineare Functionen der Elemente des Fundamentalsystems *modulis* $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{M}''', \ldots$, die anderen als lineare Functionen der Elemente des Fundamentalsystems *modulis* $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{M}''', \ldots$ angenommen werden können, und dass deren Coefficienten sich dann als Wurzeln algebraischer Gleichungen bestimmen. Ob solche Wurzeln einem gegebenen Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, lässt sich auf verschiedene Weise ermitteln, z. B. so, wie ich es im § 4 (Absatz 3) meiner Festschrift dargelegt habe.[1])

Wendet man die hier eingeführte Classeneintheilung auf einfache Moduln $M(x), \mathfrak{M}(\mathfrak{x})$ an und setzt diese als irreductibel voraus, so ersieht man unmittelbar, dass bei zwei Functionen derselben Classe jedem Linearfactor der einen ein zu derselben *Gattung* algebraischer Grössen gehöriger Linearfactor der anderen entspricht.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Modulsysteme $(M', M'', M''', \ldots)$ und $(N', N'', N''', \ldots)$, welche im art. I behandelt worden sind, zu einer und derselben Classe gehören. In der That geht zuvörderst aus der Congruenz (B) des art. I hervor, dass die eine der Bedingungen (L) erfüllt ist, nämlich, dass jedes der mit N bezeichneten Elemente des zweiten Divisorensystems:

$$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leqq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu$$

das Divisorensystem:

$$\text{(M)} \qquad (M', M'', M''', \ldots y_1 - f_1, y_2 - f_2, \ldots y_\nu - f_\nu)$$

enthält, in welchem $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten. Da ferner $1, f_1, f_2, \ldots f_\nu$ die Elemente eines Fundamentalsystems im Sinne der Congruenz *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ bilden und also die Variabeln x selbst sich

[1]) Bd. II, S. 258 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

modulis $M', M'', M''', \ldots$ als lineare Functionen von $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ darstellen lassen, so sei:

$$\text{(M')} \qquad x_h \equiv \sum_k a_{hk} f_k \quad (\text{modd. } M', M'', M''', \ldots) \qquad \binom{h=1,2,\ldots n}{k=0,1,\ldots \nu},$$

wo $f_0 = 1$ zu setzen ist. Alsdann zeigt sich die andere der Bedingungen (L) in der Weise erfüllt, dass jede der Functionen M das Divisorensystem:

$$\text{(N)} \qquad (N', N'', N''', \ldots x_1 - \sum_k a_{1k} y_k, x_2 - \sum_k a_{2k} y_k, \ldots x_n - \sum_k a_{nk} y_k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots \nu;\ y_0 = 1)$$

enthält. Dass dies wirklich der Fall ist, kann in folgender Weise dargethan werden. Die mit M bezeichnete ganze Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist für das zuletzt angegebene Modulsystem (N) als lineare Function von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ in der Form:

$$C_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_\nu y_\nu$$

darstellbar, und es besteht also die Congruenz:

$$\text{(O)} \qquad M(x_1, x_2, \ldots x_n) \equiv C_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_\nu y_\nu \quad (\text{modd. } (N)).$$

Werden nun hierin die Elemente $N', N'', N''', \ldots$ des mit (N) bezeichneten Modulsystems durch das mit (M) bezeichnete Modulsystem ersetzt, welches, wie sich eben gezeigt hat, in jenem enthalten ist, so geht die Congruenz (O) in folgende über:

$$C_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_\nu f_\nu \equiv 0,$$

welche für das Modulsystem:

$$(M', M'', M''', \ldots;\ \ldots x_h - \sum_k a_{h,k} y_k, \ldots;\ \ldots y_k - f_k, \ldots) \quad (h = 1, 2, \ldots n;\ k = 0, 1, \ldots \nu)$$

gilt. Dieselbe Congruenz muss aber auch für das Modulsystem $(M', M'', M''', \ldots)$ allein gelten; denn von den übrigen Elementen:

$$x_h - \sum_k a_{h,k} y_k, \quad y_k - f_k \qquad \binom{h=1,2,\ldots n}{k=0,1,\ldots \nu}$$

können zuvörderst die ersteren wegen der obigen Congruenz (M') weggelassen werden und alsdann die letzteren deshalb, weil die Variabeln y in der Congruenz nicht vorkommen. Aus der Congruenz:

$$C_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_\nu f_\nu \equiv 0 \ (\text{modd. } M', M'', M''', \ldots)$$

folgt aber, dass alle Constanten C gleich Null sein müssen, da zwischen den Elementen des Fundamentalsystems keine lineare Relation *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ bestehen kann; die Congruenz (O) geht demnach in eben diejenige Congruenz:

$$M(x_1, x_2, \ldots x_n) \equiv 0 \pmod{(N)}$$

über, welche nachgewiesen werden sollte.

Die vorstehende Entwickelung, in welcher übrigens wie im art. IV vorausgesetzt ist, dass die Coefficienten der Functionen M und N einem bestimmten Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, zeigt nun,

> dass jede Classe von Divisorensystemen relativ höchster Stufe durch ein System $(N', N'', N''', \ldots)$ repraesentirt werden kann, für welches die Variabeln selbst, mit Hinzunahme der Zahl *Eins*, ein Fundamentalsystem bilden, so dass jede ganze Function der Variabeln einer *linearen* Function derselben congruent wird.

Ferner lässt sich das Resultat der im art. XVI enthaltenen Darlegung nunmehr einfach dahin formuliren:

> dass jede Classe von Divisorensystemen relativ höchster Stufe, deren Discriminante von Null verschieden ist, durch eine Function einer Variabeln, also durch einen einfachen Modul repraesentirt werden kann.

Sowohl in diesem vorliegenden Aufsatze als in früheren Arbeiten war mein Augenmerk hauptsächlich darauf gerichtet, zu zeigen, dass Congruenzen für Modulsysteme mit beliebig vielen Elementen ebenso leicht zu benutzen und ebenso einfach zu behandeln sind, wie in dem speciellen Falle, wo der Modul eine einzige Function einer Variabeln ist. Ich möchte deshalb der im art. XVI enthaltenen und hier citirten Reduction auf einen einfachen Modul, zumal sie nicht immer möglich ist, keinen besonderen Werth beimessen und im Gegentheil jene ausnahmslos zulässige Repraesentation einer Classe von Divisorensystemen durch ein System $(N', N'', N''', \ldots)$, obgleich dabei im Allgemeinen die Anzahl der Elemente vergrössert wird, als die „normale" ansehen und das System $(N', N'', N''', \ldots)$ selbst auch wohl als ein „normales" bezeichnen.

XXV. An die im vorigen Abschnitte dargelegte Eintheilung der Divisorensysteme in „Classen" schliesst sich in natürlicher Weise die Entwickelung derjenigen Beziehungen zweier Classen an, vermöge deren die eine als „unter der anderen enthalten" anzusehen ist.

Wenn nämlich nur die erstere von den beiden Congruenzen (L) stattfindet, wenn also nur das erstere Divisorensystem $(M', M'', M''', \ldots)$ mittels einer Substitution:

$$x_k = \mathfrak{F}_k(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n) \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

in ein Divisorensystem von Functionen der Variabeln $\mathfrak{x}$ transformirt werden kann, welches das Divisorensystem $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{M}''', \ldots)$ enthält, so soll die durch $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{M}''', \ldots)$ repraesentirte Classe als „unter der durch $(M', M'', M''', \ldots)$ repraesentirten Classe enthalten" bezeichnet werden.

Diese Ausdrucks- und Bezeichnungsweise ist derjenigen genau nachgebildet, welche *Gauss* in die Theorie der Formen eingeführt hat. Man kann sich auch den *Gauss*'schen Begriffsbestimmungen noch näher anschliessen, indem man den Begriff der Classe selbst, sowie denjenigen des Enthaltenseins enger fasst und durchweg — also in den Divisorensystemen, Transformationen und Congruenzen — nur solche ganze Functionen der Variabeln zulässt, bei denen die Coefficienten *ganze* Grössen des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ sind. Dabei kann, wie im § 8 meiner Festschrift[1]) und oben im art. IV, vorausgesetzt werden, dass alle ganzen Grössen des angegebenen Bereichs sich als ganze ganzzahlige Functionen der Elemente $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ darstellen lassen.

Bei dieser engeren Begriffsbestimmung ergiebt sich eine genaue Beziehung der Classeneintheilung zu der im § 5 meiner Festschrift[2]) dargelegten Eintheilung der ganzen algebraischen Grössen in verschiedene „Arten", bei der *weiteren* tritt die Classeneintheilung in Beziehung zu der im § 2 derselben Schrift[3]) enthaltenen Eintheilung in „Gattungen".

Um dies an einfachen Beispielen zu zeigen, sei zuvörderst:

$$M(x) = x^2 + 3, \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{x} + 1,$$

---

[1]) Bd. II, S. 267 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. II, S. 260 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[3]) Bd. II, S. 251 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

und also, da $x^2 + 3 = 4(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{x} + 1) + (x + 2\mathfrak{x} + 1)(x - 2\mathfrak{x} - 1)$ ist:

$$M(x) \equiv 0 \ (\text{modd. } \mathfrak{M}(\mathfrak{x}),\ x - 2\mathfrak{x} - 1).$$

Die durch $M(x)$ repraesentirte Classe enthält also diejenige, welche durch $\mathfrak{M}(\mathfrak{x})$ repraesentirt wird, und andererseits enthält die durch die Gleichung $\mathfrak{M}(\mathfrak{x}) = 0$ definirte „Hauptart" ganzer algebraischer Zahlen diejenige unter sich, welche durch die Gleichung $M(x) = 0$ bestimmt wird. Beide „Arten" von algebraischen Zahlen bilden aber dieselbe „Gattung", und bei der *weiteren* Begriffsbestimmung der „Classen" gehören auch $M(x)$ und $\mathfrak{M}(\mathfrak{x})$ in *dieselbe* Classe, weil, wenn man auch gebrochene Zahlen zulässt, die Gleichung:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{x} + 1 = \tfrac{1}{4}(x^2 + 3) + \left(\mathfrak{x} + \tfrac{1}{2}(x + 1)\right)\left(\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}(x - 1)\right)$$

als Congruenz:

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{x}) \equiv 0 \ (\text{modd. } M(x),\ \mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}(x - 1))$$

dargestellt werden kann.

Wird nun ferner:

$$M(x) = x^2 + x - 1,\ \ \mathfrak{M}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^4 + \mathfrak{x}^3 + \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{x} + 1$$

gesetzt, so kommt:

$$M(x) = (\mathfrak{x}^4 - \mathfrak{x}^3 + 2\mathfrak{x} - 1)\,\mathfrak{M}(\mathfrak{x}) + (x + \mathfrak{x}^4 + \mathfrak{x} + 1)\,(x - \mathfrak{x} - \mathfrak{x}^4).$$

Es besteht daher die Congruenz:

$$M(x) \equiv 0 \ (\text{modd. } \mathfrak{M}(\mathfrak{x}),\ x - \mathfrak{x} - \mathfrak{x}^4)$$

in der Weise, dass auch im engeren Sinne des Wortes die Classe $\mathfrak{M}(\mathfrak{x})$ unter der Classe $M(x)$ enthalten ist, während andererseits die durch die Gleichung $M(x) = 0$ definirte Gattung algebraischer Zahlen unter derjenigen enthalten ist, welche durch die Gleichung $\mathfrak{M}(\mathfrak{x}) = 0$ bestimmt wird.

Endlich möge noch in einem allgemeinen Falle die enge Beziehung dargelegt werden, welche zwischen der Eintheilung der algebraischen Functionen in Gattungen und derjenigen der Functionensysteme in Classen besteht.

Hr. *Kneser* hat im § 12 seiner Abhandlung „Arithmetische Begründung einiger algebraischen Fundamentalsätze" zum ersten Male jenen bekannten und

vielfach angewandten Satz, „dass der durch Adjunction zweier Irrationalitäten ξ und η definirte Rationalitätsbereich mit dem durch Adjunction der linearen Verbindung $u\xi + v\eta$ definirten identisch ist", arithmetisch formulirt und bewiesen.*) Er geht dabei von zwei im Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ irreductibeln ganzen Functionen $F(x), G(y)$ aus, bezeichnet mit ξ eine Wurzel von $F(x) = 0$, mit η eine Wurzel von $G(y) = 0$ und mit $G'(y, x)$ einen *modulo* $F(x)$ irreductibeln Factor von $G(y)$. Alsdann wird gezeigt, dass es ganze Functionen $F'(x, y), H(z)$ mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ giebt, für welche — nach der hier eingeführten Ausdrucksweise — die beiden einander aequivalenten Modulsysteme:

$$(F(x), G'(y, x)),\ \ (F'(x, y), G(y))$$

und der einfache Modul $H(z)$ *prim* sind und mittels der Transformationen:

$$x = F_1(z),\ \ y = G_1(z),\ \ z = ux + vy$$

in einander übergeführt werden können, also *einer und derselben Classe* angehören, während andererseits durch jedes der beiden Modulsysteme, sowie durch den einfachen Modul, wenn man die Functionen gleich Null setzt, *eine und dieselbe* durch $u\xi + v\eta$ repraesentirte *Gattung algebraischer Grössen* definirt wird.

XXVI. Es sei $M(x)$ eine irreductible ganze ganzzahlige Function $(\mathfrak{n} + 1)$ten Grades von x und der Coefficient der höchsten Potenz von x sei gleich *Eins*. Ferner sei x_0 eine der Wurzeln der Gleichung $M(x) = 0$, also eine ganze algebraische Zahl, und die Elemente irgend eines Fundamentalsystems der durch x_0 repraesentirten Gattung**) algebraischer Zahlen seien:

$$1,\ x_0',\ x_0'',\ \ldots\ x_0^{(\mathfrak{n})}.$$

Alsdann bestehen erstens $\frac{1}{2}\mathfrak{n}(\mathfrak{n} + 1)$ Gleichungen:

$$x_0^{(h)} x_0^{(k)} = c_0^{(h,k)} + c_1^{(h,k)} x_0' + \cdots + c_{\mathfrak{n}}^{(h,k)} x_0^{(\mathfrak{n})} \qquad (h \leqq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \mathfrak{n}),$$

in welchen die Coefficienten c ganze Zahlen sind, zweitens $\mathfrak{n}$ Gleichungen:

$$x_0^{(k)} = F_k(x_0), \qquad (k = 1, 2, \ldots \mathfrak{n}),$$

*) Journal für Mathematik, Bd. 102, S. 51—55.

**) Vergl. § 24 meiner Festschrift zu Hrn. *Kummer*'s Doctorjubiläum[1]).

[1]) Bd. II, S. 359 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

in welchen $F_1(x_0), F_2(x_0), \ldots$ ganze Functionen von x_0 mit rationalen Zahlcoefficienten sind, drittens existirt ein linearer Ausdruck von x_0 durch $x_0', x_0'', \ldots x_0^{(n)}$:

$$x_0 = c_0 + c_1 x_0' + \cdots + c_n x_0^{(n)},$$

in welchem $c_0, c_1, \ldots c_n$ ganze Zahlen bedeuten.

Bezeichnet man nun die $\frac{1}{2}n(n+1)$ ganzen Functionen von $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$:

$$\mathfrak{x}_h \mathfrak{x}_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} \mathfrak{x}_1 - \cdots - c_n^{(h,k)} \mathfrak{x}_n \qquad {\scriptstyle (h \leqq k;\; h,k = 1,2,\ldots n)}$$

mit $\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots$, so lässt sich offenbar für das Modulsystem $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ jede ganze ganzzahlige Function der Variabeln $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$ auf eine *lineare* Function derselben reduciren, und es müssen daher auch ganze Zahlen $C_0, C_1, \ldots C_n$ existiren, für welche die Congruenz:

$$M(c_0 + c_1 \mathfrak{x}_1 + \cdots + c_n \mathfrak{x}_n) \equiv C_0 + C_1 \mathfrak{x}_1 + \cdots + C_n \mathfrak{x}_n \;(\text{modd. } \mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$$

stattfindet. Substituirt man hierin x' für $\mathfrak{x}_1$, x'' für $\mathfrak{x}_2, \ldots x^{(n)}$ für $\mathfrak{x}_n$, so wird sowohl der Ausdruck auf der linken Seite der Congruenz als auch jede der Functionen $\mathfrak{N}$, welche das Modulsystem bilden, gleich Null, und die Congruenz geht daher in die Gleichung:

$$C_0 + C_1 x' + \cdots + C_n x^{(n)} = 0$$

über, welche zeigt, dass die Coefficienten C sämmtlich gleich Null sein müssen. Es findet daher die Congruenz:

$$(\mathrm{P}) \qquad M(x) \equiv 0 \;(\text{modd. } \mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots, x - c_0 - c_1 \mathfrak{x}_1 - \cdots - c_n \mathfrak{x}_n)$$

statt. Da ferner jede der Functionen $\mathfrak{N}$ gleich Null wird, wenn man darin:

$$\mathfrak{x}_k = F_k(x_0)$$

setzt, so besteht die Congruenz:

$$(\mathrm{P}') \qquad (\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots) \equiv 0 \;(\text{modd. } M(x), \ldots \mathfrak{x}_k - F_k(x), \ldots) \qquad {\scriptstyle (k = 1,2,\ldots n)}.$$

Diese beiden Congruenzen zeigen erstens,

> dass der einfache Modul $M(x)$ und das Modulsystem $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ derselben Classe angehören, wenn der Classenbegriff im *weiteren* Sinne genommen wird,

und zweitens,

> dass bei der *engeren* Begriffsbestimmung die durch $M(x)$ repraesentirte Classe diejenige unter sich enthält, welche durch das Modulsystem $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ repraesentirt wird.

Aber die durch eine Wurzel x_0 der Gleichung $M(x) = 0$ repraesentirte „Art" oder „Species" ganzer algebraischer Zahlen ist wiederum unter derjenigen enthalten, welche durch das den Gleichungen:

$$\mathfrak{N}'(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n) = 0, \;\; \mathfrak{N}''(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n) = 0, \ldots$$

genügende Werthsystem:

$$\mathfrak{x}_1 - x_0', \;\; \mathfrak{x}_2 = x_0'', \ldots \mathfrak{x}_n = x_0^{(n)}$$

repraesentirt wird.

Die Modulsysteme $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ sind hier von der Function $M(x)$, von der ausgegangen wurde, mit Benutzung des Begriffs der algebraischen Zahlen abgeleitet worden; unabhängig davon ist die durch $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ — im engeren Sinne — repraesentirte Classe dadurch zu charakterisiren, dass sie unter jeder Classe von Functionen $M'(x'), M''(x''), \ldots$ enthalten ist, welche im weiteren Sinne des Wortes mit $M(x)$ zu derselben Classe gehören. Wenn also eine Function $M'(x')$ mit $M(x)$ in der Beziehung steht, dass zwei Congruenzen:

$$(\mathrm{Q}) \qquad M(f'(x')) \equiv 0 \;(\text{mod. } M'(x')), \quad M'(f(x)) \equiv 0 \;(\text{mod. } M(x))$$

stattfinden, in welchen $f(x), f'(x')$ ganze Functionen der Variabeln x, x' mit rationalen Zahlcoefficienten sind, so muss für irgend ein zur Classe $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ — im engeren Sinne — gehöriges System ganzer ganzzahliger Functionen von ν Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$:

$$(N', N'', N''', \ldots)$$

eine Congruenz:

$$(\mathrm{Q}') \qquad M'(\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu)) \equiv 0 \quad (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots)$$

bestehen, in welcher Φ eine ganze *ganzzahlige* Function der Variabeln ξ bedeutet. Dabei ist jede der beiden Congruenzen (Q) nur im weiteren, aber die Congruenz (Q′) im engeren Sinne zu nehmen; d. h. nur bei der letzteren Congruenz wird gefordert, dass in der damit aequivalenten *Gleichung*:

$$M' = N'P' + N''P'' + N'''P''' + \cdots$$

die Multiplicatoren P ganze Functionen der Variabeln ξ mit *ganzzahligen* Coefficienten seien, während bei Congruenzen im weiteren Sinne auch gebrochene Zahlcoefficienten zulässig sind.

Die Congruenzen (Q), vermöge deren die Functionen $M(x)$, $M'(x')$ zu derselben Classe (im weiteren Sinne) gehören, können auch so dargestellt werden:

$$M(x) \equiv 0 \;(\text{modd. } M'(x'),\; x - f'(x')),\quad M'(x') \equiv 0 \;(\text{modd. } M(x),\; x' - f(x)),$$

und es zeigt sich also, dass $M(x)$ *modulo* $M'(x')$ durch den Linearfactor $x - f'(x')$ und ebenso $M'(x')$ *modulo* $M(x)$ durch den Linearfactor $x' - f(x)$ theilbar wird.

Die Herleitung des mit $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ bezeichneten Modulsystems aus $M(x)$ kann, genau nach der im § 24 meiner Festschrift[1]) angegebenen Weise, jedoch ohne Benutzung des Begriffs der algebraischen Zahlen, geschehen, und ich werde dies in einem anderen Aufsatze ausführlich darlegen.

Bedeutet x_0, wie oben, eine Wurzel der Gleichung $M(x) = 0$, so ist die Resolvente des Gleichungssystems $\mathfrak{N}' = 0, \mathfrak{N}'' = 0, \mathfrak{N}''' = 0, \ldots$ gemäß § 25 meiner Festschrift[2]) als die „Fundamentalgleichung“ für den durch x_0 repraesentirten Gattungsbereich zu bezeichnen.

Jede ganze ganzzahlige Function der Variabeln $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$, welche das Primmodulsystem $(\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots)$ nicht enthält, lässt sich im Sinne der Congruenz für dieses Modulsystem in eindeutig bestimmter Weise als Resultat der Composition*) von Primmodulsystemen darstellen. Diese Primmodulsysteme sind, da ihren Elementen offenbar die Elemente $\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'', \mathfrak{N}''', \ldots$ selbst hinzugefügt werden können, von $n+1$ter, also *höchster* Stufe. Auch auf solche Modulsysteme *höchster* Stufe, welche die Factoren der gewöhnlichen Zahlen bilden, lässt sich — genau in der oben angegebenen Weise — der im *engeren* Sinne zu fassende Classenbegriff anwenden, und dieser steht in ebenso unmittelbarer Beziehung zu dem von Hrn. *Hensel* mit gutem Grunde und Erfolge eingeführten „relativen“, d. h. auf

*) Vergl. § 21 meiner Festschrift.[3])

[1]) Bd. II, S. 359 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. II, S. 372 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[3]) Bd. II, S. 336 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

einen algebraischen Primdivisor bezogenen Begriff des Gattungsbereiches,*) wie der oben näher dargelegte Classenbegriff für Modulsysteme $n$ter, als „*vorhöchster*“ Stufe zu dem absoluten Begriff der Gattungen algebraischer Zahlen.

Hiernach können alle Resultate der Untersuchung „algebraischer“ oder „complexer“ ganzer Zahlen in ebenso einfacher Weise durch die Theorie der Modulsysteme erlangt werden, also ohne irgend welche Symbolik zu Hülfe zu nehmen oder irgend wie die Sphaere der „allgemeinen Arithmetik“ der ganzen ganzzahligen Functionen von Variabeln**) oder der ganzzahligen Formen***) zu verlassen, welcher die Resultate selbst angehören. Dies ist schon in der Einleitung und im Nachwort meiner Festschrift angedeutet worden; aber es näher darzulegen und mit Hülfe eingehenderen Studiums der Modulsysteme, deren Stufenzahl der Anzahl der Variabeln gleich ist, weiter auszuführen, bildete einen hauptsächlichsten Zielpunkt der vorstehenden Auseinandersetzungen.

XXVII. Gemäss den im vorigen Abschnitte enthaltenen Auseinandersetzungen ersetzt die Betrachtung der ganzen ganzzahligen Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ für ein Primmodulsystem $n$ter Stufe $(M', M'', M''', \ldots)$, dessen Elemente ganze ganzzahlige Functionen der n Variabeln x sind, vollständig die Theorie derjenigen complexen Zahlen, welche dem durch das Gleichungssystem:

$$M' = 0, \quad M'' = 0, \quad M''' = 0, \ldots$$

definirten Gattungsbereiche angehören. Aber auch in dem Falle, wo die Coefficienten der Elemente M nicht wie hier dem absoluten Rationalitätsbereiche, sondern, wie im art. XXI, irgend einem anderen dort mit $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ bezeichneten Bereiche entnommen sind, können die ganzen Functionen der Variabeln x, mit Coefficienten des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$, *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ untersucht und dadurch alle Ergebnisse erlangt werden, welche eine Theorie der entsprechenden algebraischen Grössen liefern würde.

*) Vergl. die Einleitung des *Hensel*'schen Aufsatzes „Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereiches für einen beliebigen algebraischen Primdivisor“ im Journal für Mathematik, Bd. 101, S. 99.

**) Vergl. die Einleitung meiner im 100. Bande des Journals für Mathematik abgedruckten Arbeit „Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik“.[1])

***) Vergl. § 22 meiner Festschrift.[2])

[1]) Bd. III$_1$, S. 211 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H
[2]) Bd. II, S. 342 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Die erste dabei auftretende Frage ist die, welche schon im art. XXI berührt worden ist, nämlich die Frage, ob sich aus der Gesammtheit der *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ betrachteten Functionen besondere „Arten“ oder „Species“ aussondern lassen. Eine solche Species umfasst alle die besonderen Functionen, welche sich als ganze Functionen gewisser Elemente:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n),\; \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots\; \varphi_\varrho(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

darstellen lassen; und hierbei bedeuten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\varrho$ ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit Coefficienten des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$. Da jede ganze Function von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\varrho$ *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ einer ganzen linearen Function von $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ congruent ist, wenn $f_1, f_2, \ldots f_\nu$, wie oben, die Elemente eines Fundamentalsystems bedeuten, so können höchstens $\nu + 1$ ganze Functionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\varrho$, im Sinne der Congruenz für das Modulsystem $(M', M'', M''', \ldots)$, von einander linear unabhängig sein. Sind nun genau $\mu + 1$ solche Functionen, unter denen stets eine gleich *Eins* genommen werden kann:

$$1, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots \varphi_\mu^0,$$

von einander linear unabhängig, so bilden diese offenbar ein Fundamentalsystem für die gesammte Species in dem Sinne, dass jede ganze Function der Species *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ einer linearen Function von $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots \varphi_\mu^0$ congruent wird. Dabei muss $\mu < \nu$ sein; denn denkt man sich die Functionen φ^0 als lineare Functionen von $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ dargestellt, so würden, wenn dies ν von einander linear unabhängige Functionen wären, durch dieselben auch die ν Functionen f darstellbar sein; die Species würde also die sämmtlichen ganzen Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und nicht bloss einen besonderen Theil derselben, enthalten.

Drückt man die Producte je zweier Elemente des Fundamentalsystems der Species *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ als lineare Function derselben Elemente aus, so erhält man $\frac{1}{2}\mu(\mu + 1)$ Congruenzen:

$$\varphi_h^0 \varphi_k^0 - \gamma_0^{(h,k)} - \gamma_1^{(h,k)} \varphi_1 - \cdots - \gamma_\mu^{(h,k)} \varphi_\mu \equiv 0 \;(\text{modd. } M', M'', M''', \ldots),$$

und die $\frac{1}{2}\mu(\mu + 1)$ Functionen:

$$\xi_h \xi_k - \gamma_0^{(h,k)} - \gamma_1^{(h,k)} \xi_1 - \cdots - \gamma_\mu^{(h,k)} \xi_\mu,$$

welche in irgend einer Reihenfolge mit $S', S'', S''', \ldots$ bezeichnet werden mögen, enthalten also, wenn darin:

$$\xi_h - \varphi_h^0(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots \mu)$$

gesetzt wird, das Modulsystem $(M', M'', M''', \ldots)$. Es besteht hiernach die Congruenz:

$$(S', S'', S''', \ldots) \equiv 0 \;(\text{modd. } M', M'', M''', \ldots \xi_h - \varphi_h^0(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots) \qquad (h = 1, 2, \ldots \mu),$$

auf Grund deren gemäss art. XXIV und XXV die durch das Divisorensystem $(M', M'', M''', \ldots)$ repraesentirte Classe als „unter der durch $(S', S'', S''', \ldots)$ repraesentirten enthalten“ zu bezeichnen ist, und es zeigt sich also:

> dass alle besonderen „Arten“ oder „Species“ ganzer Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche sich aus der Gesammtheit *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ herausheben lassen, durch diejenigen verschiedenen Classen von Divisorensystemen zu charakterisiren sind, unter denen die Classe des Systems $(M', M'', M''', \ldots)$ enthalten ist.

So ist, wenn man, wie im art. XXV, an Stelle des Divisorensystems $(M', M'', M''', \ldots)$ den einfachen Modul:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

nimmt, dessen Classe nur unter derjenigen von $\xi^2 + \xi - 1$ enthalten, und diese Beziehung wird durch die Congruenz:

$$\xi^2 + \xi - 1 \equiv 0 \;(\text{modd. } x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\; \xi - x - x^4)$$

begründet, während andererseits die ganzen Functionen von $x + x^4$, *modulo* $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ betrachtet, eine besondere Species bilden.

XXVIII. Noch nach einem anderen, als nach dem im vorigen Abschnitte entwickelten Principe, kann aus der Gesammtheit der *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ betrachteten ganzen Functionen der Variabeln x eine Anzahl derselben ausgesondert werden. Sind nämlich:

$$M_0', M_0'', \ldots M_0^{(\varrho)}$$

ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit Coefficienten des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$, so können alle diejenigen Functionen M_0, welche das Modulsystem:

$$(M_0', M_0'', \ldots M_0^{(\varrho)};\; M', M'', M''', \ldots)$$

enthalten, insofern zu einer besonderen Gruppe vereinigt werden, als jede additive Verbindung und überhaupt jede lineare homogene Function der Glieder der Gruppe wiederum ein Glied der Gruppe ergiebt. Die einer solchen Gruppe angehörigen

Functionen sind offenbar auch dadurch zu charakterisiren, dass sie dem besonderen, in $(M', M'', M''', \dots)$ enthaltenen Divisorensysteme:

$$(M_0', M_0'', \dots M_0^{(\varrho)};\ M', M'', M''', \dots)$$

als Elemente hinzugefügt werden können, ohne dasselbe zu verändern.

Aus der so charakterisirten Gruppe können wiederum, unter Anwendung des im vorigen Abschnitte benutzten Eintheilungsprincips, alle diejenigen Functionen herausgehoben werden, welche sich *modulis* $M', M'', M''', \dots$ als lineare Functionen der Elemente $M_0', M_0'', \dots M_0^{(\varrho)}$ so darstellen lassen, dass die Coefficienten zu einer bestimmten Species $\mathfrak{S}$ gehören. Für die zu einer solchen Theilgruppe gehörigen Functionen M_0 muss alsdann eine Congruenz:

$$M_0 \equiv M_0' P' + M_0'' P'' + \cdots + M_0^{(\varrho)} P^{(\varrho)} \ (\text{modd. } M', M'', M''', \dots)$$

bestehen, in welcher die Functionen P ausschliesslich einer bestimmten Species $\mathfrak{S}$ entnommen sind. Bilden für diese Species:

$$1, \overset{0}{\varphi}_1, \overset{0}{\varphi}_2, \dots \overset{0}{\varphi}_\mu,$$

wie im vorigen Abschnitte, die Elemente eines Fundamentalsystems, so sind alle Functionen der Theilgruppe lineare homogene Functionen der $\varrho(\mu+1)$ Elemente:

$$M_0', M_0'', \dots M_0^{(\varrho)};\ \overset{0}{\varphi}_h M_0', \overset{0}{\varphi}_h M_0'', \dots \overset{0}{\varphi}_h M_0^{(\varrho)} \qquad (h = 1, 2, \dots \mu)$$

mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots)$, und die zwischen diesen $\varrho(\mu+1)$ Elementen bestehenden linearen Relationen kann man, wie oben, ermitteln, indem man jedes Element als lineare Function von $f_1, f_2, \dots f_r$ *modulis* $M', M'', M''', \dots$ ausdrückt. Auf diese Weise gelangt man offenbar zu einem Fundamentalsystem der bezeichneten Theilgruppe:

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_\lambda,$$

welches so beschaffen ist, dass jede zur Theilgruppe gehörige Function M_0 sich *modulis* $M', M'', M''', \dots$ als ganze lineare homogene Function der λ Elemente Φ, mit Coefficienten des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots)$, darstellen lässt.

Gehören die Functionen $M_0', M_0'', \dots M_0^{(\varrho)}$ selbst dem durch das Fundamentalsystem:

$$1, \overset{0}{\varphi}_1, \overset{0}{\varphi}_2, \dots \overset{0}{\varphi}_\mu$$

charakterisirten Artbereich an, so hat jene Theilgruppe ersichtlich die Eigenschaft, dass nicht nur die Summe, sondern auch das Product je zweier Functionen der Theilgruppe wiederum eine derselben angehörige Function ist. Denkt man sich andererseits aus irgend welchen ganzen Functionen der Variabeln x:

$$\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\sigma$$

alle diejenigen gebildet, welche durch Addition und Multiplication von je zweien derselben, sowie durch Multiplication mit Grössen des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots)$ entstehen, so erkennt man unmittelbar, dass die Gesammtheit dieser Functionen eine Theilgruppe von der oben bezeichneten Beschaffenheit constituirt, nämlich eine solche, welche man erhält, wenn man oben sowohl für die Functionen:

$$M_0', M_0'', \dots M_0^{(\varrho)},$$

welche das besondere Modulsystem bestimmen, als auch für die Functionen:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$$

des art. XXVII, welche die besondere Species charakterisiren, die Functionen:

$$\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\sigma$$

nimmt. Denn die Functionen der Theilgruppe können als diejenigen ganzen Functionen der Variabeln x definirt werden, welche sich *modulis* $M', M'', M''', \dots$ als ganze Functionen der σ Functionen ψ so darstellen lassen, dass die Coefficienten Grössen des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots)$ sind, und dass dabei kein von den Functionen ψ unabhängiges Glied vorkommt. Sie sind also auch dadurch vollkommen bestimmt, dass sie im Sinne der Congruenz *modulis* $M', M'', M''', \dots$ das Divisorensystem $(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\sigma)$ enthalten, und dass in der dadurch bedingten Darstellung als lineare homogene Functionen der Elemente ψ die Coefficienten dem durch das Functionensystem $(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\sigma)$ charakterisirten Artbereich angehören.

Die verschiedenen Möglichkeiten, aus der Gesammtheit der *modulis* $M', M'', M''', \dots$ betrachteten ganzen Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ einzelne *Gruppen* herauszuheben, sind hiermit erschöpft.

XXIX. Bedeutet $(M', M'', M''', \dots)$, wie im vorhergehenden und auch schon im ersten Abschnitte, irgend ein Divisorensystem $n$ter Stufe, dessen Elemente ganze Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ mit Coefficienten des Rationalitätsbereichs

$(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ sind, und bilden die ν ganzen Functionen $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ unter Hinzunahme der Zahl *Eins* ein Fundamentalsystem, so ist jedes Product von Potenzen der Variabeln x:

$$x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n} \qquad (h_1, h_2, \ldots h_n = 0, 1, 2, \ldots),$$

im Sinne der Congruenz für das Divisorensystem $(M', M'', M''', \ldots)$, als ganze lineare Function von $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ mit Coefficienten des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ darstellbar. Die sämmtlichen ganzen Functionen:

$$\sum_{h_1, h_2, \ldots h_n} Z_{h_1, h_2, \ldots h_n} x_1^{h_1} x_2^{h_2}, \ldots x_n^{h_n} \qquad \binom{h_1, h_2, \ldots h_n = 0, 1, 2, \ldots}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n \leq r},$$

deren Dimension eine beliebig angenommene Zahl r nicht übersteigt, lassen sich daher *modulis* $M', M'', M''', \ldots$ auf die Form:

$$z_0 + z_1 f_1 + z_2 f_2 + \cdots + z_\nu f_\nu$$

bringen, und es werden dabei $z_0, z_1, \ldots z_\nu$ lineare homogene Functionen der Grössen Z mit Coefficienten des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$.

Aus dem System der Coefficienten Z wird auf diese Weise ein System von $\nu + 1$ linearen homogenen Functionen derselben abgeleitet, oder es wird die Mannigfaltigkeit der Grössen Z auf die $(\nu + 1)$fache Mannigfaltigkeit der Grössen z bezogen. Für die Systeme von $\nu + 1$ Grössen z ergiebt sich ferner eine gewisse Art der „Composition", wenn man dasjenige System, welches bei der Multiplication zweier Ausdrücke:

$$z_0 + z_1 f_1 + \cdots + z_\nu f_\nu, \quad z_0' + z_1' f_1 + \cdots + z_\nu' f_\nu$$

resultirt, als das aus den Systemen (z) und (z') „componirte" bezeichnet. Eben dasselbe componirte System erhält man, wenn man an Stelle des Divisorensystems $(M', M'', M''', \ldots)$ das zu derselben Classe gehörige normale Modulsystem $(N', N'', N''', \ldots)$ einführt, dessen Elemente:

$$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

sind. Man hat dann die Variabeln y selbst an Stelle der Functionen f zu nehmen und also das componirte System:

$$(z_0'', z_1'', z_2'', \ldots z_\nu'')$$

mittels der Congruenz:

$$\sum_k y_k z_k \sum_k y_k z_k' \equiv \sum_k y_k z_k'' \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots) \qquad (k = 0, 1, \ldots \nu;\ y_0 = 1)$$

zu bestimmen, welche auch in der Form:

$$\sum_{h,i,k} c_i^{(h,k)} y_i z_h z_k' \equiv \sum_i y_i z_i'' \ (\text{modd. } N', N'', N''', \ldots) \qquad (h, i, k = 0, 1, \ldots \nu)$$

dargestellt werden kann, wenn man, wie oben, $y_0 = 1$, ferner:

$$c_i^{(0,k)} = c_i^{(k,0)} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots \nu)$$

und für alle Werthe von h, k:

$$c_i^{(h,k)} = c_i^{(k,h)}$$

setzt. Hiernach erhält man zur Bestimmung des componirten Systems die $\nu + 1$ Gleichungen:

$$z_i'' = \sum_{h,k} c_i^{(h,k)} z_h z_k' \qquad (h, i, k = 0, 1, \ldots \nu),$$

und es bilden also die schon im art. I eingeführten Grössen $c_i^{(h,k)}$ die Coefficienten der bilinearen Formen, durch welche die Elemente des componirten Systems als Functionen der Elemente der beiden Componenten ausgedrückt werden.

Bezeichnet man, wie es offenbar sachgemäss ist, auch das durch *Addition* der entsprechenden Elemente zweier Systeme entstehende System:

$$(z_0 + z_0', z_1 + z_1', \ldots z_\nu + z_\nu')$$

als ein „componirtes", so hat man zwei verschiedene Arten der Composition, von denen die eine durch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{A}) \qquad z_i'' = z_i + z_i' \qquad (i = 0, 1, \ldots \nu),$$

die andere durch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{B}) \qquad z_i'' = \sum_{h,k} c_i^{(h,k)} z_h z_k' \qquad (h, i, k = 0, 1, \ldots \nu)$$

bestimmt wird, und es ist die eigenthümliche Beschaffenheit der Coefficienten $c_i^{(h,k)}$, durch welche bewirkt wird, dass das Resultat der mit $(\mathfrak{B})$ bezeichneten Art der Composition beliebig vieler Systeme (z) bei Veränderung der Reihenfolge der Composition nicht alterirt wird. Diese Eigenschaft der Coefficienten $c_i^{(h,k)}$ deckt sich vollständig mit jener in den ersten Abschnitten dargelegten, wonach die Elemente:

$$y_h y_k \quad - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - c_2^{(h,k)} y_2 - \cdots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \nu \ldots)$$

ein eigentliches Divisorensystem (vom Range ν und von der Ordnung $\nu + 1$) constituiren, und deshalb die entsprechenden Relationen zwischen den Rechnungssymbolen $i_1, i_2, \ldots i_\nu$:

$$i_h i_k = c_0^{(h,k)} + c_1^{(h,k)} i_1 + c_2^{(h,k)} i_2 + \cdots + c_\nu^{(h,k)} i_\nu \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

zur Bildung solcher complexen Zahlen geeignet sind, für welche die gewöhnlichen algebraischen Rechnungsregeln Geltung behalten.

Bei dieser abstracten, nicht bloss von der Symbolik der complexen Zahlen, sondern auch von dem methodischen Hülfsmittel der unbestimmten Variabeln absehenden Betrachtung der „Systeme" von $\nu + 1$ Grössen z tritt das eigentliche Wesen der Sache reiner hervor, und es lassen sich deshalb die allgemeineren Fragen, auf welche noch einzugehen ist, daran besser anknüpfen.

XXX. Schon bei meinen Untersuchungen über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln, welche im Monatsbericht vom März 1869[1]) auszugsweise veröffentlicht sind, bin ich darauf geführt worden, reelle Variable:

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots \mathfrak{z}_n$$

zu einem „Systeme" begrifflich zusammenzufassen. Da ein System von drei Grössen, wenn man dieselben als Raumcoordinaten nimmt, durch einen Punkt im Raume repraesentirt werden kann, so habe ich a. a. O. auch Werthsysteme $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$ als „Punkte" und stetige Folgen derselben als „Linien" einer $n$fachen Mannigfaltigkeit bezeichnet. Die Benutzung dieser Ausdrücke für den Fall von beliebig vielen Variabeln erscheint insofern unbedenklich, als ihre ursprüngliche geometrische Bedeutung auch im gewöhnlichen Sprachgebrauch bereits vielfach abgestreift ist. Doch möchte, wo es sich nicht um Verfolgung von Analogien handelt, die uns die analytische Geometrie bietet, die begriffliche Zusammenfassung der Variabeln:

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots \mathfrak{z}_n$$

schon deshalb passender durch eine allgemeine Bezeichnung wie: „System" oder „Complex" ausgedrückt werden, weil auch vorbehalten werden soll, den Variabeln $\mathfrak{z}$ andere Werthe als die reeller Zahlen beizulegen, z. B. zuzulassen, dass dafür ganze Functionen von gewissen Unbestimmten genommen werden. Die Zusammenfassung

[1]) Bd. I, S. 175 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken.

der n Grössen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n$ soll in üblicher Weise durch Einschliessung in Parenthesen angedeutet und zuweilen kurz durch $(\mathfrak{z})$ statt durch $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$ bezeichnet werden.

Die Systeme $(\mathfrak{z})$ kann man sich auch in irgend eine Aequivalenzbeziehung gesetzt denken. Dabei können die Bedingungen in solcher Form aufgestellt werden, dass aus irgend einem Systeme $(\mathfrak{z})$ mittels eines vorgeschriebenen Verfahrens ein aequivalentes System $(\mathfrak{z}')$ abgeleitet wird; die Bedingungen müssen aber so beschaffen sein, dass aus dem Bestehen der Aequivalenzen:

$$(\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}'), \quad (\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}'')$$

die Aequivalenz:

$$(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}'')$$

folgt. Nimmt man für das System $(\mathfrak{z}'')$ das System $(\mathfrak{z}')$ selbst, so sieht man, dass bei der über die Aequivalenzbedingungen gemachten Voraussetzung jedes System sich selber aequivalent ist. Nimmt man ferner für das System $(\mathfrak{z}'')$ das System $(\mathfrak{z})$, so erweist sich die Aequivalenz:

$$(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z})$$

als eine Folge der Aequivalenzen:

$$(\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}'), \quad (\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}).$$

Von diesen ist aber, wie sich eben gezeigt hat, die letztere an sich erfüllt. Die Aequivalenzbedingungen sind also vermöge der gemachten Voraussetzung so beschaffen, dass sich auch aus dem abgeleiteten Systeme in der durch die Bedingungen vorgeschriebenen Weise wiederum das ursprüngliche System ergiebt.

Es seien nun $(\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}''), \ldots$ eine Anzahl (auch im Sinne der Aequivalenz) von einander verschiedener Systeme, und durch die Aequivalenz:

$$(\mathfrak{C}) \qquad \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')) \sim (\mathfrak{z}'')$$

werde ausgedrückt, dass das System $(\mathfrak{z}'')$ mittels eines bestimmten Verfahrens aus den beiden Systemen $(\mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{z}')$ abzuleiten oder zu „*componiren*" ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Compositions-Bedingung:

$$(\mathfrak{C}') \qquad \theta\big((\mathfrak{z}), \theta((\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}''))\big) \sim \theta\big((\mathfrak{z}'), \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}''))\big)$$

erfüllt ist, d. h. dass man zu demselben System gelangt, wenn man zuerst $(\mathfrak{z}')$ mit $(\mathfrak{z}'')$ und dann $(\mathfrak{z})$ mit dem resultirenden System componirt, als wenn man zuerst $(\mathfrak{z})$ mit $(\mathfrak{z}'')$ und dann $(\mathfrak{z}')$ mit dem resultirenden System componirt.

Giebt es nun zwei Systeme $(\mathfrak{z}^0)$, $(\mathfrak{z}')$, für welche:

$$\theta((\mathfrak{z}^0), (\mathfrak{z}')) \sim (\mathfrak{z}')$$

ist, und stehen die drei Systeme $(\mathfrak{z})$, $(\mathfrak{z}')$, $(\mathfrak{z}'')$ in der durch die Aequivalenz:

$$\theta((\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}')) \sim (\mathfrak{z})$$

ausgedrückten Beziehung zu einander, so besteht auch die Aequivalenz:

$$\theta\big((\mathfrak{z}''), \theta((\mathfrak{z}^0), (\mathfrak{z}'))\big) \sim (\mathfrak{z}).$$

Vertauscht man hierin, wie es gemäss der Compositions-Bedingung $(\mathfrak{C}')$ zulässig ist, die Systeme $(\mathfrak{z}^0)$ und $(\mathfrak{z}'')$ mit einander und ersetzt dann $\theta\big((\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}')\big)$ durch $(\mathfrak{z})$, so resultirt die Aequivalenz:

$$\theta((\mathfrak{z}^0), (\mathfrak{z})) \sim (\mathfrak{z}),$$

und es zeigt sich also,

> dass nicht nur das System $(\mathfrak{z}')$ selbst, sondern auch jedes andere, welches aus der Composition irgend eines Systems mit $(\mathfrak{z}')$ hervorgeht, ganz ungeändert bleibt, wenn jedes System $(\mathfrak{z}^0)$ mit demselben componirt wird.

Setzt man nun voraus,

> dass für je zwei vorhandene Systeme $(\mathfrak{z})$, $(\mathfrak{z}')$ auch ein System $(\mathfrak{z}'')$ vorhanden ist, aus dessen Composition mit $(\mathfrak{z}')$ das System $(\mathfrak{z})$ resultirt, so wie dass wenigstens *ein* System $(\mathfrak{z}')$ vorhanden ist, welches ungeändert bleibt, wenn $(\mathfrak{z}^0)$ damit componirt wird,

so folgt,

> dass alsdann für *jedes* der vorhandenen Systeme $(\mathfrak{z})$ die Aequivalenz:
>
> $$\theta((\mathfrak{z}^0), (\mathfrak{z})) \sim (\mathfrak{z})$$
>
> besteht, d. h. dass die Composition von $(\mathfrak{z}^0)$ mit *irgend einem* Systeme $(\mathfrak{z})$ dasselbe ungeändert lässt.

Diese allgemeinere Deduction ist geeignet, jene speciellere im art. XXIII zu ersetzen, wenn man für das System $(\mathfrak{z})$ die Systeme der ν Coefficienten der a. a. O. behandelten linearen homogenen Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ nimmt und als Bedingungen der Composition die Gleichungen:

$$\mathfrak{z}_i'' = \sum_{h,k} c_i^{(h,k)} \mathfrak{z}_h \mathfrak{z}_k' \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots \nu$$

festsetzt, für welche alle oben gemachten Voraussetzungen erfüllt sind. Denn wenn gemäss der a. a. O. mit (H) bezeichneten Voraussetzung $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_\nu$ solche Werthe sind, dass die Determinante:

$$\left| \sum_{h=1}^{h=\nu} \mathfrak{z}_h c_i^{(h,k)} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu$$

von Null verschieden ist, so giebt es offenbar ein System $(\mathfrak{z}^0)$, wofür die Gleichungen:

$$\mathfrak{z}_i = \sum_{h,k} c_i^{(h,k)} \mathfrak{z}_h \mathfrak{z}_k^0 \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

bestehen, und dieselben behalten gemäss der obigen Deduction ihre Geltung, wenn das System $(\mathfrak{z})$ durch irgend ein anderes ersetzt wird.

XXXI. Die Composition der Systeme $(\mathfrak{z})$:

$$(\mathfrak{C}) \qquad \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')) \sim (\mathfrak{z}'')$$

ist schon im vorigen Abschnitte der Compositionsbedingung:

$$(\mathfrak{C}') \qquad \theta\big((\mathfrak{z}), \theta((\mathfrak{z})', (\mathfrak{z}''))\big) \sim \theta\big((\mathfrak{z}'), \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}''))\big)$$

unterworfen worden; zu dieser möge nunmehr noch die folgende hinzugenommen werden:

$$(\mathfrak{C}'') \qquad \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')) \sim \theta((\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z})).$$

Componirt man nun der Reihe nach die Systeme:

$$(\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}'''), \ldots,$$

d. h. erst $(\mathfrak{z})$ mit $(\mathfrak{z}')$, dann das resultirende System mit $(\mathfrak{z}'')$, das bei dieser weiteren Composition sich ergebende System mit $(\mathfrak{z}''')$ u. s. f., so entsteht ein bestimmtes componirtes System, und auf Grund der beiden Compositionsbedingungen $(\mathfrak{C}')$ und $(\mathfrak{C}'')$ muss *dasselbe* componirte System resultiren, wenn man in jener Reihe der Systeme, welche die Componenten bilden, irgend zwei benachbarte mit einander vertauscht. Hieraus folgt aber unmittelbar,

> dass überhaupt das Resultat der Composition beliebig vieler Systeme von der Reihenfolge, in welcher die Composition erfolgt, unabhängig ist.

Geht man von irgend einem Systeme $(\mathfrak{z}^{(1)})$ aus und bezeichnet:

$$\theta((\mathfrak{z}^{(1)}), (\mathfrak{z}^{(1)}))$$

mit $\mathfrak{z}^{(2)}$, ferner:

$$\theta((\mathfrak{z}^{(1)}), (\mathfrak{z}^{(2)}))$$

mit $\mathfrak{z}^{(3)}$ u. s. f., und setzt dann allgemein für eine beliebige Zahl m:

$$\theta((\mathfrak{z}^{(1)}), (\mathfrak{z}^{(m)})) = (\mathfrak{z}^{(m+1)}),$$

so ist offenbar für irgend zwei ganze Zahlen m und n:

$$\theta((\mathfrak{z}^{(m)}), (\mathfrak{z}^{(n)})) = (\mathfrak{z}^{(m+n)});$$

der Index des componirten Systems ist also gleich der Summe der Indices der Componenten. Dies bleibt bestehen, wenn man auch Brüche als Indices einführt und mit:

$$\left(\mathfrak{z}^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)$$

ein System bezeichnet, welches so beschaffen ist, dass aus der Composition von n Systemen, die mit demselben identisch oder auch nur aequivalent sind, das System $(\mathfrak{z}^{(m)})$ resultirt.

Werden die vorhandenen Systeme durch solche, welche mit $\left(\mathfrak{z}^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)$ zu bezeichnen sind, nicht erschöpft, und ist dann $(\bar{\mathfrak{z}})$ irgend ein anderes System, so kann man in analoger Art eine Reihe von Systemen mit $\left(\bar{\mathfrak{z}}^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)$ bezeichnen, und demgemäss jedes aus:

$$\left(\mathfrak{z}^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right) \quad \text{und} \quad \left(\bar{\mathfrak{z}}^{\left(\frac{m'}{n'}\right)}\right)$$

componirte System durch das *System der Indices* $\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}\right)$ charakterisiren. Wenn man in der angegebenen Weise fortfährt, so gelangt man zu einer Bezeichnung aller vorhandenen Systeme durch „*Indexsysteme*":

$$(z_1, z_2, z_3, \ldots),$$

deren Elemente $z_1, z_2, z_3, \ldots$ rationale Zahlen sind, und diese Bezeichnungsweise ist jener Composition der Systeme $(\mathfrak{z})$ genau angepasst, indem dasjenige System, welches durch Composition der mit:

$$(z_1, z_2, z_3, \ldots), \quad (z_1', z_2', z_3', \ldots)$$

bezeichneten Systeme entsteht, mit:

$$(z_1 + z_1', \; z_2 + z_2', \; z_3 + z_3', \ldots)$$

bezeichnet ist.

Das Ergebnis der vorstehenden Entwickelung kann so formulirt werden:

(R) Giebt es für eine Anzahl von Grössensystemen ein den Bedingungen $(\mathfrak{C}')$ und $(\mathfrak{C}'')$ entsprechendes Compositions-Verfahren, dessen Resultat vermöge jener Voraussetzungen von der bei dem Verfahren beobachteten Reihenfolge unabhängig ist, so kann man für die Grössensysteme stets eine solche Bezeichnung durch Systeme reeller Zahlen:

$$(z_1, z_2, z_3, \ldots)$$

wählen, dass jene Composition durch Addition der gleichnamigen System-Elemente ausgedrückt wird.

Dies soll zuvörderst an einigen Beispielen erläutert werden.

XXXII. Nimmt man an Stelle der oben mit $(\mathfrak{z})$ bezeichneten Systeme die sämmtlichen positiven ganzen Zahlen bis zu irgend einer Zahl M und an Stelle der Composition je zweier Systeme die Multiplication je zweier Zahlen, so wird gemäss der obigen Auseinandersetzung jede ganze Zahl n durch ein System:

$$(z_1, z_2, z_3, \ldots)$$

bezeichnet, für welches:

$$n = p_1^{z_1} p_2^{z_2} p_3^{z_3} \cdots$$

ist. Dabei bedeuten $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die sämmtlichen Primzahlen, die kleiner als M sind, und die Exponenten z können die Werthe $0, 1, 2, \ldots$ annehmen, jedoch nur mit den durch die Bedingung $n \leq M$ gebotenen Beschränkungen.

Nimmt man ferner für die Systeme $(\mathfrak{z})$ die sämmtlichen positiven Grössen von 0 bis ∞ und wieder, wie im vorigen Beispiel, die Multiplication für die Composition, so tritt an die Stelle jenes im art. XXX mit $(\mathfrak{z}^0)$ bezeichneten Systems die Zahl *Eins*, und die Bezeichnung, welche für die positiven Grössen resultirt, ist die durch ihren Logarithmus, bei beliebig angenommener Basis. Die genauere Bedeutung, in welcher dieses Resultat aus dem allgemeineren (R) des art. XXXI hervorgeht, bedarf jedoch einer näheren Erörterung, da dort Reihen *discreter* Systeme $(\mathfrak{z})$ zu Grunde gelegt und *rationale* Zahlen als deren Indices hergeleitet worden sind, während hier von der *stetigen* Folge aller positiven Grössen ausgegangen wird und ihre *Logarithmen* als Indices erscheinen.

Bedeuten $p_1, p_2, p_3 \ldots p_\nu$ die ersten ν Primzahlen und $h_1, h_2, h_3, \ldots h_\nu$ ganzzahlige (positive und negative) in gewissen Grenzen eingeschlossene Werthe, so wird durch den Ausdruck:

$$p_1^{h_1} p_2^{h_2} p_3^{h_3} \cdots p_\nu^{h_\nu} \qquad \begin{pmatrix} -m_\alpha < h_\alpha < n_\alpha \\ \alpha = 1, 2, 3, \ldots \nu \end{pmatrix},$$

wobei die mit m_α und n_α bezeichneten positiven ganzen Zahlen beliebig gross angenommen werden können, eine Reihe rationaler Zahlen:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

dargestellt, welche man durch die Indexsysteme:

$$(h_1, h_2, h_3, \ldots h_\nu)$$

bezeichnen kann. Aber man kann auch irgend eine dieser rationalen Zahlen r, welche mit b bezeichnet werden möge, als Basis nehmen und alle Zahlen r als Potenzen von b annäherungsweise so darstellen, dass man sich dabei, der Entwickelung im vorigen Abschnitte entsprechend, auf rationale Exponenten beschränkt. Denn durch diese Exponenten soll ja nur eine eindeutige Bezeichnung gewährt werden, welche so beschaffen ist, dass, wenn $r', r'', r''', \ldots$ eine Anzahl (gleicher oder verschiedener) rationaler Zahlen:

$$p_1^{h_1} p_2^{h_2} p_3^{h_3} \cdots p_\nu^{h_\nu} \qquad \begin{pmatrix} -m_\alpha < h_\alpha < n_\alpha \\ \alpha = 1, 2, 3, \ldots \nu \end{pmatrix}$$

sind, deren Product sich ebenfalls unter diesen rationalen Zahlen findet, der Werth des Products $r' r'' r''' \ldots$ eindeutig durch die Summe der einzelnen zu $r', r'', r''', \ldots$ gehörigen Exponenten bestimmt wird. Dass dies wirklich — auch bei Beschränkung auf rationale Exponenten — der Fall ist, soll nunmehr dargethan werden.

Bezeichnet man mit R den Werth des Products $r' r'' r''' \ldots$, mit $l - 3$ die Anzahl der Factoren $r', r'', r''', \ldots$ und mit L den Werth von:

$$p_1^{n_1+m_1} p_2^{n_2+m_2} p_3^{n_3+m_3} \cdots p_\nu^{n_\nu+m_\nu},$$

so braucht man nur Brüche mit einem Nenner μ zu nehmen, welcher den absoluten Werth von $L \log b$ übersteigt, für welchen also, wenn $b > 1$ gewählt wird:

$$\mu > lL \log b$$

ist, um der obigen Forderung zu entsprechen. Nimmt man nämlich für μ irgend eine der angegebenen Grössenbedingung entsprechende ganze Zahl und bestimmt dann

für jeden der Factoren r eine ganze Zahl λ gemäss den Ungleichheitsbedingungen:

$$r^{2\mu} < b^{2\lambda+1} \leqq b^2 r^{2\mu},$$

so ist λ die dem Werthe $\mu \frac{\log r}{\log b}$ zunächst liegende positive oder negative ganze Zahl*), und die Summe:

$$\frac{\lambda'}{\mu} + \frac{\lambda''}{\mu} + \frac{\lambda'''}{\mu} + \cdots$$

unterscheidet sich also von $\log r' r'' r''' \ldots$ oder $\log R$ nur um eine Grösse, deren absoluter Werth die Anzahl der Factoren r, dividirt durch 2μ, also die Grösse $\frac{l-3}{2\mu}$ nicht übersteigt. Bedeutet Λ in analoger Weise die dem Werthe $\mu \frac{\log R}{\log b}$ zunächst liegende positive oder negative ganze Zahl, so unterscheidet sich $\frac{\log R}{\log b}$ von $\frac{\Lambda}{\mu}$ um nicht mehr als $\frac{1}{2\mu}$; die Brüche:

$$\frac{\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots}{\mu} \quad \text{und} \quad \frac{\Lambda}{\mu}$$

unterscheiden sich also von einander um nicht mehr als $\frac{l-2}{2\mu}$, d. h.

> der mit $\frac{\Lambda}{\mu}$ bezeichnete Index des Products $r' r'' r''' \ldots$ unterscheidet sich von der Summe der Indices der Factoren um einen Betrag, der $\frac{l-2}{2\mu}$ nicht übersteigt.

Die bis auf einen Betrag von höchstens $\frac{l-2}{2\mu}$ angenäherte Bestimmung des Index genügt aber zur *vollständigen* Bestimmung der durch den Index bezeichneten rationalen Zahl:

$$p_1^{h_1} p_2^{h_2} p_3^{h_3} \cdots p_\nu^{h_\nu} \qquad \begin{pmatrix} -m_\alpha < h_\alpha < n_\alpha \\ \alpha = 1, 2, 3, \ldots \nu \end{pmatrix}.$$

Denn je zwei dieser Zahlen liegen um mehr als $\frac{1}{P}$ aus einander, wobei P die durch die Gleichung:

$$P = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_\nu^{m_\nu}$$

*) Wenn zwei ganze Zahlen gleich nahe liegen, muss die nächst *grössere* genommen werden, so dass, wie in meinem Aufsatze: „Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen“ die einer Grösse a zunächst liegende positive oder negative ganze Zahl durch die Differenz $a - R(a)$ dargestellt und $R(a)$ dabei durch die Ungleichheit $-\frac{1}{2} \leq R(a) < \frac{1}{2}$ bestimmt wird (vergl. den Sitzungsbericht vom 30. April 1885).[1])

[1]) Bd. III_1, S. 111 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

angegebene Bedeutung hat. Wenn ferner für irgend eine der Zahlen r, wie oben, λ die dem Werthe $\mu\frac{\log r}{\log b}$ zunächst liegende ganze Zahl, also:

$$\lambda = \mu\frac{\log r}{\log b} - \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (-1 \leqq \varepsilon < +1)$$

ist, und ebenso für eine andere Zahl r°, welche kleiner als r vorausgesetzt werden kann:

$$\lambda^\circ = \mu\frac{\log r^\circ}{\log b} - \frac{1}{2}\varepsilon^\circ \qquad (-1 \leqq \varepsilon^\circ < +1),$$

so ist die Differenz der beiden zu r und r° gehörigen Indices, nämlich $\frac{\lambda - \lambda^\circ}{\mu}$, grösser als:

$$\frac{\log r - \log r^\circ}{\log b} - \frac{1}{\mu}.$$

Es finden daher die Ungleichheiten statt:

$$\frac{\lambda - \lambda^\circ + 1}{\mu} > \frac{\log r - \log r^\circ}{\log b},$$

$$\log r - \log r^\circ > \log\left(r^\circ + \frac{1}{P}\right) - \log r^\circ = \log\left(1 + \frac{1}{r^\circ P}\right),$$

und da:

$$\log\frac{1}{1-x} > x \qquad (x<1),$$

also, wenn $x = \frac{1}{r^\circ P + 1}$ gesetzt wird:

$$\log r - \log r^\circ > \frac{1}{r^\circ P + 1}$$

ist, so folgt:

$$\frac{\lambda - \lambda^\circ}{\mu} > \frac{1}{(r^\circ P + 1)\log b} - \frac{1}{\mu}.$$

Da aber

$$1 + r^\circ P = 1 + p_1^{h_1 + m_1} p_2^{h_2 + m_2} \cdots p_\nu^{h_\nu + m_\nu} \qquad (h_1 < n_1,\ h_2 < n_2, \ldots h_\nu < n_\nu),$$

also:

$$1 + r^\circ P < p_1^{m_1 + n_1} p_2^{m_2 + n_2} \cdot\cdot\, p_\nu^{m_\nu + n_\nu} = L$$

ist, so muss:

$$\frac{\lambda - \lambda^\circ}{\mu} > \frac{1}{L\log b} - \frac{1}{\mu}$$

sein, und da μ so gewählt worden ist, dass

$$\frac{1}{L\log b} > \frac{l}{\mu}$$

wird, so resultirt endlich die Ungleichheit:

$$\frac{\lambda - \lambda^\circ}{2\mu} > \frac{l}{2\mu} - \frac{1}{\mu},$$

welche zeigt, dass in der That die Indices von je zwei Zahlen:

$$p_1^{h_1} p_2^{h_2} p_3^{h_3} \cdots p_\nu^{h_\nu} \qquad \left(\begin{smallmatrix} -m_\alpha < h_\alpha < n_\alpha \\ \alpha = 1, 2, 3, \ldots n \end{smallmatrix}\right)$$

um mehr als $\frac{l-2}{\mu}$ auseinanderliegen, dass also die bis auf einen Betrag von $\frac{l-2}{2\mu}$ *angenäherte* Bestimmung des Index einer Zahl r zu deren *vollständiger* Bestimmung ausreicht.

XXXIII. Das Wesentliche der im vorigen Abschnitte enthaltenen Deduction tritt klarer hervor, wenn man von jeder besonderen Bildungsweise der Zahlen r absieht und vielmehr irgend eine Reihe rationaler Zahlen:

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$$

zu Grunde legt, in welcher die erste Zahl r_0 gleich *Eins* und jede folgende grösser als die vorhergehende ist.

Es sei nun t eine ganze Zahl, für welche der Werth $\frac{1}{t-1}$ kleiner als der kleinste Abstand je zweier Zahlen r ist; ferner sei b irgend eine rationale Zahl, die grösser als *Eins* ist und μ eine ganze Zahl, welche nur für die folgenden Entwickelungen entsprechend gross zu wählen ist. Alsdann bestimme man, wie im vorigen Abschnitte, für jede Zahl r_h eine ganze Zahl λ_h gemäss den Ungleichheitsbedingungen:

$$r_h^{2\mu} < b^{2\lambda_h + 1} \leqq b^2 r_h^{2\mu}$$

und betrachte alle diejenigen Grössen als „mit r_h aequivalent", welche in dem durch die beiden Grössen:

$$b^{\frac{\lambda_{h-1} + \lambda_h}{2\mu} + \tau_h}, \quad b^{\frac{\lambda_h + \lambda_{h+1}}{2\mu} - \tau_{h+1}}$$

eingeschlossenen Intervalle liegen. Wird dabei:

$$\tau_h = \frac{(2\lambda_h + 1)t\log b}{4\mu^2}$$

und μ hinreichend gross genommen*), so liegt offenbar r_h selbst in dem bezeichneten Intervalle.

*) Für $\log b$ kann ein hinreichend angenäherter rationaler Werth genommen werden.

Sind $r', r'', r''', \ldots$ irgend welche unter einander gleiche oder verschiedene der Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_n$, und ist das Product $r'r''r''' \ldots$ einer Zahl r_h aequivalent, so bestimmt sich die zu r_h gehörige Zahl λ_h vollständig durch die zu den Factoren $r', r'', r''', \ldots$ gehörigen Zahlen $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$,

> indem für λ_h diejenige unter den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ zu nehmen ist, welche der Summe $\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots$ zunächst liegt.

Ist nämlich $r'r''r''' \ldots \sim r_h$, so bestehen die Ungleichheiten:

$$b^{\frac{\lambda_{h-1}+\lambda_h}{2\mu}+\tau_h} < r'r'r''' \ldots < b^{\frac{\lambda_h+\lambda_{h+1}}{2\mu}-\tau_{h+1}},$$

aus denen, da für jede der Zahlen r:

$$b^{\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\mu}} \leqq r < b^{\frac{\lambda+\frac{1}{2}}{\mu}}$$

ist, die folgenden hervorgehen:

$$\lambda_{h-1} + \lambda_h - m + 2\mu\tau_h < 2(\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots) < \lambda_h + \lambda_{h+1} + m - 2\mu\tau_{h-1}.$$

Mit m ist hierin die Anzahl der Factoren $r', r'', r''', \ldots$ bezeichnet, und diese genügt offenbar der Ungleichheitsbedingung:

$$r_1^m < r_h,$$

wenn $r'r''r''' \ldots < r_h$ ist, während, wenn $r_h < r'r''r''' \ldots < r_{h+1}$ ist, wenigstens die Ungleichheit:

$$r_1^m < r_{h+1}$$

besteht. Nun ist:

$$1 + \frac{1}{t+1} < r_1, \quad \frac{1}{t} < \log\left(1 + \frac{1}{t-1}\right) < \log r_1$$

$$\log r_h < \frac{2\lambda_h + 1}{2\mu} \log b, \quad \log r_{h+1} < \frac{2\lambda_{h+1}+1}{2\mu} \log b,$$

also:

$$\frac{m}{t} < \frac{2\lambda_h + 1}{2\mu} \log b = \frac{2\mu\tau_h}{t} \qquad (r'r''r''' \ldots < r_h)$$

$$\frac{m}{t} < \frac{2\lambda_{h+1}+1}{2\mu} \log b = \frac{2\mu\tau_{h+1}}{t} \qquad (r_h < r'r''r''' \ldots < r_{h+1}),$$

d. h. es ist je nach den beiden unterschiedenen Fällen:

$$m < 2\mu\tau_h, \quad m < 2\mu\tau_{h+1},$$

und für die Summe $\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots$ resultiren daher die Ungleichheiten:

$$\frac{1}{2}(\lambda_{h-1} + \lambda_h) < \lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots < \frac{1}{2}(\lambda_h + \lambda_{h+1}),$$

welche zeigen, dass in der That λ_h diejenige von den Zahlen λ ist, welche der Summe $\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots$ zunächst liegt.

Andererseits folgt, wenn man von der Voraussetzung ausgeht, dass λ_h der Summe $\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots$ zunächst liegt, aus den Ungleichheiten:

$$\frac{1}{2}(\lambda_{h-1} + \lambda_h) < \lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots < \frac{1}{2}(\lambda_h + \lambda_{h+1}),$$

dass auch:

$$b^{\frac{\lambda_{h-1}+\lambda_h}{2\mu}} < b^{\frac{\lambda'+\lambda''+\lambda'''+\cdots}{\mu}} < b^{\frac{\lambda_h+\lambda_{h+1}}{2\mu}}$$

sein muss, und hieraus ergiebt sich, wenn man die Ungleichheiten:

$$r b^{-\frac{1}{2\mu}} < b^{\frac{\lambda}{\mu}} \leqq r b^{\frac{1}{2\mu}}$$

$$m < 2\mu\tau_h, \quad m < 2\mu\tau_{h+1}$$

anwendet, dass das Product $r'r''r''' \ldots$ in dem durch die beiden Grössen:

$$b^{\frac{\lambda_{h-1}+\lambda_h}{2\mu}-\tau_h}, \quad b^{\frac{\lambda_h+\lambda_{h+1}}{2\mu}+\tau_{h+1}}$$

begrenzten Intervalle liegt. Da es aber überdies in einem durch zwei Grössen:

$$b^{\frac{\lambda_{k-1}+\lambda_k}{2\mu}+\tau_k}, \quad b^{\frac{\lambda_k+\lambda_{k+1}}{2\mu}-\tau_{k+1}}$$

eingeschlossenen Intervalle liegen muss, so folgt, dass $k = h$ sein muss, und dass demnach die Ungleichheiten:

$$b^{\frac{\lambda_{h-1}+\lambda_h}{2\mu}+\tau_h} < r'r''r''' \ldots < b^{\frac{\lambda_h+\lambda_{h+1}}{2\mu}-\tau_{h+1}}$$

bestehen, durch welche die zu beweisende Aequivalenz $r'r''r''' \ldots \sim r_h$ definirt wird.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Aequivalenz $r'r''r''' \ldots \sim r_h$ kann daher in der That dadurch ausgedrückt werden, dass die der Zahl r_h entsprechende Zahl λ_h unter allen Zahlen λ diejenige sein muss, welche der Summe der den Factoren $r', r'', r''', \ldots$ entsprechenden Zahlen $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ am nächsten liegt.

Nimmt man nun in den Entwickelungen des art. XXXI jene Zahlen $r_0, r_1, r_2, \ldots r_n$ an Stelle der Systeme $(\mathfrak{z})$ und die Multiplication der Zahlen r an Stelle der Composition der Systeme $(\mathfrak{z})$, so wird man dazu geführt, die Zahlen r_h durch die entsprechenden Brüche $\left(\frac{\lambda_h}{\mu}\right)$ zu bezeichnen, und bei Anwendung dieser Bezeichnung bestimmt sich das Product von Zahlen r durch die Summe der entsprechenden Brüche.

Der Quotient der beiden Grössen, welche die Intervalle einschliessen, innerhalb deren die Grössen als aequivalent betrachtet werden, ist gleich:

$$\frac{r_{h+1}}{r_{h-1}} b^{\tau_h + \tau_{h+1} + \frac{\varepsilon}{2\mu}} \qquad (-1 \leqq \varepsilon < 1);$$

die Intervalle können also beliebig klein gemacht werden. Denn, wenn man zuerst die auf einander folgenden Grössen r einander beliebig nähert und alsdann, nachdem dadurch der Werth von t in:

$$\tau_h + \tau_{h+1} = \frac{\lambda_h + \lambda_{h+1} + 1}{2\mu^2} t \log b$$

vergrössert worden ist, die Zahl μ hinreichend gross wählt, so wird zuerst $\frac{r_{h+1}}{r_{h-1}}$ und alsdann $b^{\tau_h + \tau_{h+1} + \frac{\varepsilon}{2\mu}}$ beliebig nahe an Eins gebracht.

Für Producte $r'r''r'''\ldots$, deren Werth innerhalb einer der die Aequivalenz-Intervalle von einander trennenden, durch die Grenzen:

$$b^{\frac{\lambda_{h-1}+\lambda_h}{2\mu} - \tau_h}, \quad b^{\frac{\lambda_{h-1}+\lambda_h}{2\mu} + \tau_h}$$

bezeichneten Lücken fällt, würde das Resultat der Addition der einzelnen Brüche $\frac{\lambda'}{\mu}, \frac{\lambda''}{\mu}, \frac{\lambda'''}{\mu}, \ldots$ unentschieden lassen, ob der Exponent derjenigen Potenz von b, welche dem Werth von $r'r''r''' \ldots$ gleich ist, näher an den zu r_h oder zu r_{h-1} gehörigen Exponenten liegt. Aber diese Lücken können offenbar durch Wahl einer hinreichend grossen Zahl μ beliebig klein gemacht werden.

XXXIV. In der vorstehenden Auseinandersetzung wird eigentlich nicht von den Grössen $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ selbst, sondern nur von Intervallen:

$$\left(b^{\frac{2\lambda-1}{2\mu}}, \quad b^{\frac{2\lambda+1}{2\mu}}\right),$$

in denen sie liegen, Gebrauch gemacht, und es können daher alle in einem solchen Intervalle liegenden rationalen Zahlen als „in einem engeren Sinne aequivalent" betrachtet werden. Zahlen, welche in diesem engeren Sinne aequivalent sind, können auch bei der Multiplication als Factoren für einander eintreten, nicht aber Zahlen, welche nur in jenem weiteren Sinne aequivalent sind, in welchem der Aequivalenz-Begriff für die Multiplications-*Producte* eingeführt worden ist. Dies verhält sich genau ebenso, wie bei der praktischen Rechnung mit Logarithmen, von welcher überhaupt die ganze obige theoretische Deduction abstrahirt ist. Wie nämlich die Summe von m Logarithmen, deren Werthe nur bis auf $\frac{1}{\mu}$ genau gegeben sind, mit einer Genauigkeit von höchstens $\frac{m}{\mu}$ bestimmt ist, so mussten oben die Aequivalenz-Intervalle für die Producte von Zahlen r, deren Logarithmen nur durch Intervalle von $\frac{1}{\mu}$ Grösse bestimmt waren, hinreichend gross gewählt werden, damit für jede Zahl m, d. h. für jede vorkommende Anzahl von Factoren, der Betrag von $\frac{m}{\mu}$ die Grösse jener Aequivalenz-Intervalle nicht überstiege. Diese oben mit $2\tau_h$ bezeichnete Intervallgrösse wurde deshalb in der That der Ungleichheit:

$$2\tau_h > \frac{m}{\mu}$$

entsprechend gewählt. Es war dabei wesentlich, dass die Zahl μ, und damit die Grösse des engeren Aequivalenz-Intervalles, unbestimmt gelassen, also deren zweckgemässe Bestimmung vorbehalten werden konnte. Dass die Möglichkeit, eine solche Bestimmung vorbehalten zu können, überall da vorhanden sein *muss*, wo bei theoretischen Deductionen angenäherte Werthe, also Aequivalenz-Intervalle, an Stelle der Zahlen selbst benutzt werden*), zeigt sich schon in den einfachsten Fällen.

Bedeuten z. B. a und b zwei positive ganze Zahlen und x, y, z unbestimmte Variable, so tritt durch die Gleichung:

$$x^2y^2 - z^2 = y^2(x^2 - a) + a(y^2 - b) + ab - z^2,$$

oder durch die Congruenz:

$$x^2y^2 - z^2 \equiv 0 \; (\text{modd. } x^2 - a, \;\; y^2 - b, \;\; z^2 - ab),$$

in Evidenz, dass:

$$xy = z, \quad \text{oder} \quad xy = -z$$

*) Dies geschieht z. B. bei Anwendung des Grenzbegriffs.

ist, wenn x, y, z durch die Gleichungen:

$$x^2 = a, \quad y^2 = b, \quad z^2 = ab$$

definirt werden. Betrachtet man nun zwei rationale Zahlen als aequivalent, wenn sie, bei fixirtem Werth von δ, für irgend einen ganzzahligen Werth h zwischen $2(h-\delta)\tau$ und $2(h+1-\delta)\tau$, also innerhalb eines Intervalles von der Grösse 2τ liegen, so genügen drei positive rationale Zahlen r_1, r_2, r_3 den Aequivalenzen:

$$r_1^2 \sim a, \quad r_2^2 \sim b, \quad r_3^2 \sim ab,$$

sobald in den Gleichungen:

$$r_1^2 - a = \sigma_1\tau, \quad r_2^2 - b = \sigma_2\tau, \quad r_3^2 - ab = \sigma_3\tau$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ absolut kleiner als *Eins* sind. Dann ist aber:

$$r_1 r_2 - r_3 = \frac{a\sigma_2 + b\sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\tau}{r_1 r_2 + r_3}\tau,$$

und man hat also, um sich der Aequivalenz:

$$r_1 r_2 \sim r_3$$

in dem bezeichneten Sinne zu versichern, die Aequivalenzen:

$$r_1^2 \sim a, \quad r_2^2 \sim b, \quad r_3^2 \sim ab$$

in einem engeren Sinne, z. B. *so* zu befriedigen, dass jede der Grössen σ absolut kleiner als $\frac{1}{a+b+2}$ wird.

Um ein zweites Beispiel zu geben, knüpfe ich an die Entwickelungen an, welche ich im III. Abschnitte meines Aufsatzes „Über den Zahlbegriff" gegeben habe.*) Dort ist:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

gesetzt, wo $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ ganze Zahlen bedeuten, und alsdann gezeigt, wie man eine ganze Zahl s bestimmen kann, welche so beschaffen ist, dass $f(x)$ in jedem Intervalle von der Grösse $\frac{1}{s}$ entweder nur ein Mal oder gar nicht ihr Zeichen wechselt. Ist nun k eine Zahl, für welche die Werthe von:

$$f\left(\frac{k-1}{s}\right), \quad f\left(\frac{k}{s}\right)$$

*) Journal für Mathematik, Bd. 101, S. 347.[1])

[1]) Bd. III_1, S. 262f. dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

entgegengesetzte Vorzeichen haben, so lässt sich, wie a. a. O. gezeigt ist, auch eine Zahl h bestimmen, für welche $f(x)$ im Intervalle:

$$\left(\frac{k}{s} - \frac{h}{rsD}, \quad \frac{k}{s} - \frac{h-1}{rsD}\right)$$

das Vorzeichen wechselt und absolut durchweg kleiner als $\frac{1}{r}$ bleibt. Dabei bedeutet D den absoluten Werth der Discriminante von $f(x)$ und r eine beliebige positive ganze Zahl.

Ebenso wie oben der Aequivalenz $r_1^2 \sim a$ die Ungleichheitsbedingung $r_1 > 0$ hinzugefügt werden musste, um r_1, oder vielmehr das Aequivalenz-Intervall von r_1, zu definiren, so sind hier die *beiden* Bestimmungen:

$$f(\varrho) \sim 0, \; \frac{k-1}{s} < \varrho < \frac{k}{s}$$

zur vollständigen Definition eines Aequivalenz-Intervalles für ϱ erforderlich. Die Natur der Aufgabe selbst, nämlich die sogenannte Berechnung der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, verlangt daher schon eine gewisse Kleinheit des Aequivalenz-Intervalls und damit auch eine gewisse Grösse der Genauigkeit für die Berechnung. Man *darf* eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, wenn deren eindeutige Bestimmung erfordert wird, nicht mit so geringer Genauigkeit berechnen, dass zwei Wurzeln dabei confundirt werden können, und das Aequivalenz-Intervall muss demnach kleiner als der kleinste Abstand zweier Wurzeln gewählt werden.

Sowie ferner oben für die rationalen Zahlen ϱ, welche der Aequivalenz $\varrho^2 \sim a$ in dem Sinne:

$$a - \tau < \varrho^2 < a + \tau$$

genügen, ein kleineres Aequivalenz-Intervall τ', wofür:

$$\tau' < \frac{\tau}{2\sqrt{a}}$$

ist, gewählt werden muss, so hat man hier für die Zahlen ϱ, welche der Aequivalenz $f(\varrho) \sim 0$ in dem Sinne:

$$|f(\varrho)| < \frac{1}{r}$$

genügen, ein Aequivalenz-Intervall von der Grösse:

$$\frac{1}{rsD}$$

festzusetzen; und es ist wohl zu beachten, dass auch bei der Bestimmung dieser Intervallgrösse die Zahl s gebraucht wird.

XXXV. Die im art. XXXI auseinandergesetzte Methode der Bezeichnung lässt sich nicht bloss auf Zahlen und Systeme von Zahlen, sondern auch auf andere Objecte anwenden. Wird die Composition einer Linien- oder Zeit-Länge, eines Körper-Volumens oder -Gewichts aus zwei anderen irgendwie den Compositionsbedingungen $(\mathfrak{C}')$, $(\mathfrak{C}'')$ gemäss definirt, so kann jedes Object der bestimmten Art durch einen Index so bezeichnet werden, dass der Composition die Addition der Indices entspricht. Beim Messen und Wägen wird nun in der That ein Verfahren der Längen-Volumen- und Gewichts-Composition angewendet, welches jenen beiden Bedingungen genügt, und es rechtfertigt sich damit jene Bezeichnungsweise durch Maass- und Gewichts-Zahlen, bei welcher die dem Resultate der Composition zukommende Zahl durch Addition derjenigen gebildet wird, welche zur Bezeichnung der einzelnen mit einander componirten Objecte dienen.

Dies ist in der Abhandlung des Hrn. *von Helmholtz*, welche unter dem Titel „Zählen und Messen" in den „Philosophischen Aufsätzen" erschienen ist*), näher auseinandergesetzt.

Die a. a. O. in dem Commutationsgesetz und Associationsgesetz enthaltenen Bedingungen sind mit den Bedingungen $(\mathfrak{C}'')$ und $(\mathfrak{C}')$ gleichbedeutend. Denn während diese in den Aequivalenzen:

$$(\mathfrak{C}'') \qquad \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')) \sim \theta((\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}))$$

$$(\mathfrak{C}') \qquad \theta((\mathfrak{z}), \theta((\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}''))) \sim \theta((\mathfrak{z}'), \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}'')))$$

bestehen, lassen sich jene durch die Aequivalenzen:

$$(\mathfrak{C}'') \qquad \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')) \sim \theta((\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}))$$

$$(\mathfrak{C}''') \qquad \theta((\mathfrak{z}), \theta((\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}''))) \sim \theta(\theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')), (\mathfrak{z}''))$$

darstellen. Nun ist vermöge der Bedingung $(\mathfrak{C}'')$:

$$(\mathfrak{C}_1) \qquad \theta((\mathfrak{z}), \theta((\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}''))) \sim \theta((\mathfrak{z}), \theta((\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}'))),$$

*) Philosophische Aufsätze. *Eduard Zeller* zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet. Leipzig 1887.

ferner vermöge der Bedingung $(\mathfrak{C}')$:

$$(\mathfrak{C}_2) \qquad \theta((\mathfrak{z}), \theta((\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}'))) \sim \theta((\mathfrak{z}''), \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}'))),$$

endlich vermöge der Bedingung $(\mathfrak{C}'')$:

$$(\mathfrak{C}_3) \qquad \theta((\mathfrak{z}''), \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}'))) \sim \theta(\theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')), (\mathfrak{z}'')),$$

und aus der Verbindung dieser drei Aequivalenzen $(\mathfrak{C}_1)$, $(\mathfrak{C}_2)$, $(\mathfrak{C}_3)$ resultirt unmittelbar die Aequivalenz $(\mathfrak{C}''')$, welche sich demnach als eine Folge der Aequivalenzen $(\mathfrak{C}')$, $(\mathfrak{C}'')$ erweist. Andererseits ist vermöge der Bedingung $(\mathfrak{C}''')$:

$$(\mathfrak{C}_4) \qquad \theta((\mathfrak{z}), \theta((\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}'))) \sim \theta(\theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}'')), (\mathfrak{z}')),$$

und vermöge der Bedingung $(\mathfrak{C}'')$

$$(\mathfrak{C}_5) \qquad \theta(\theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}'')), (\mathfrak{z}')) \sim \theta((\mathfrak{z}'), \theta((\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}''))).$$

Die Verbindung der drei Aequivalenzen $(\mathfrak{C}_1)$, $(\mathfrak{C}_4)$, $(\mathfrak{C}_5)$ führt aber ganz unmittelbar zu der Aequivalenz $(\mathfrak{C}')$, und diese kann daher als eine Consequenz der beiden Aequivalenzen $(\mathfrak{C}'')$, $(\mathfrak{C}''')$ oder der Geltung des Commutations- und Associations-Gesetzes angesehen werden.

Hr. *von Helmholtz* geht a. a. O. vom Begriffe der „physischen Gleichheit" aus und formulirt das Ergebnis folgendermaassen: „Eine physische Verknüpfungsweise von Grössen gleicher Art kann als Addition angesehen werden, wenn das Ergebnis der Verknüpfung, als Grösse derselben Art verglichen, nicht geändert wird, weder durch Vertauschung der einzelnen Elemente unter sich, noch durch Vertauschung von Gliedern der Verknüpfung mit gleichen Grössen gleicher Art."

Substituirt man für den Begriff der „physischen Gleichheit" gemäss den Darlegungen im art. XXXI den der „Aequivalenz von Objecten in Beziehung auf das Compositionsverfahren", und für den Begriff der „physischen Verknüpfung" den allgemeineren der „Composition", welcher von *Gauss*, eigenthümlich und zugleich für andere Anwendungen vorbildlich specialisirt, in die reine Mathematik eingeführt und dadurch classisch geworden ist*), so deckt sich mit dem citirten

*) Vergl. die Eingangsworte im art. 234 von *Gauss* Disqu. arithm.[1],) welche so lauten: Postquam haec de formis in classes genera et ordines distribuendis praemisimus, proprietatesque generales quae ex his distinctionibus statim defluunt explicavimus, ad aliud argumentum gravissimum transimus a nemine hucusque attactum, de formarum *compositione*.

[1]) *Gauss*, Werke, Bd. I, S. 239.

Ergebniss der Sache nach dasjenige vollkommen, welches hier aus der allgemeineren, im art. XXXI entwickelten Deduction abgeleitet worden ist. Nur ein formaler Unterschied besteht darin, dass nach Hrn. *von Helmholtz* die Composition selbst „als Addition angesehen werden kann", während in den obigen Ausführungen der Begriff der Addition ausschliesslich in dem engeren, auf die Rechnung mit Zahlen beschränkten Sinne angewendet ist.

Auf die specielleren von Hrn. *von Helmholtz* behandelten Arten der Composition konnte freilich in ebenso natürlicher als sachgemässer Weise die Bezeichnung „Addition" übertragen werden, zumal beim Messen und Wägen wirkliches Addiren, in der ursprünglichen weiteren (nicht technischen) Bedeutung des Wortes stattfindet. Aber die *allgemeine* Composition der Systeme von Grössen oder Objecten, wie sie im art. XXXI durch die Bedingungen $(\mathfrak{E}')$ und $(\mathfrak{E}'')$ charakterisirt ist, kann nicht füglich als „additiv" bezeichnet werden; denn bei vielen darunter fallenden speciellen Arten der Composition würde es durchaus unpassend sein, die Addition der Elemente der *Bezeichnungen**) auf die Objecte oder die Grössen selbst zu übertragen. So wäre es offenbar unstatthaft, die Multiplication zweier ganzer Zahlen, die ja immer in der Form:

$$p_1^{h_1} p_2^{h_2} p_3^{h_3} \ldots, \quad p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots$$

dargestellt werden können**), deshalb als „Addition" zu bezeichnen, weil das Product der beiden durch die Indexsysteme:

$$(h_1, h_2, h_3, \ldots), \quad (k_1, k_2, k_3, \ldots)$$

charakterisirten Zahlen durch das Indexsystem:

$$(h_1 + k_1,\ h_2 + k_2,\ h_3 + k_3, \ldots)$$

charakterisirt wird, dessen Elemente durch Addition der Elemente der beiden Factoren gebildet werden. Auch wäre es wohl kaum statthaft, die Composition der Classen quadratischer Form geradezu als „additiv" zu bezeichnen***), obwohl

*) Vergl. den mit (R) bezeichneten Schlusssatz im art. XXXI.

**) Vergl. den Anfang des art. XXXII.

***) Dass die Composition der Classen quadratischer Formen vielmehr den Charakter einer Multiplication an sich trägt, zeigt sich bei der Zerlegung der Formen in ihre Linearfactoren und bei Benutzung der Modulsysteme (vergl. § 21, V meiner Festschrift zu Hrn. *Kummer*'s Doctorjubiläum).[1])

[1]) Bd. II, S. 336 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Gauss nicht nur allgemein das Zeichen der Addition als Symbol der Composition angewendet, sondern auch für den speciellen Fall der Composition von Classen mit sich selbst die Ausdrücke „Duplication, Triplication" der Classen eingeführt hat.*)

Erscheint es nun einerseits als ein Nachteil, dass bei den allgemeineren Arten der Composition die Bezeichnung „additiv" entbehrt werden muss, so liegt doch andererseits darin, dass der technische Ausdruck „Addition" auf seine specielle Bedeutung für die Zahlen beschränkt bleibt, ein gewisser Vortheil. Denn die Übertragung der bei der Rechnung mit Zahlen gebräuchlichen Ausdrücke auf analoge Begriffe giebt leicht zu irrthümlicher Übertragung auch solcher Eigenschaften Veranlassung, welche sich bei den anderen Begriffen nicht mehr vorfinden**), und durch Erweiterung der Bedeutung technischer Ausdrücke wird die Praecision der Darstellung wesentlich erschwert. Der wissenschaftliche Gewinn, welchen unstreitig die Erkenntnis von Analogien bringt, darf nicht durch den Verlust an Kenntnis der Unterschiede beeinträchtigt werden, welcher in der Regel mit der Identificirung der Wortbezeichnung verbunden ist.

XXXVI. Denkt man sich an Stelle der Reihe $(\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}'''), \ldots$ des art. XXXI eine Reihe physisch gegebener Objecte $O, O', O'', O''', \ldots,$ welche in der dort characterisirten Weise mit einander componirt werden können, z. B. eine Reihe Volumina, von denen je zwei mit einander vereinigt und dann mit einem dritten verglichen werden können, so kann man gemäss den Ausführungen a. a. O., von irgend einem der Objecte $O^{(1)}$ ausgehend, alle diejenigen durch ganze oder gebrochene Indices bezeichnen, welche — in der gewöhnlichen Ausdrucksweise — mit $O^{(1)}$ selbst commensurabel sind. Der Index $\left(\frac{m}{n}\right)$ wird dann einem Objecte $\bar{O}$ beigelegt, wenn die Composition von n mit $\bar{O}$ aequivalenten Objecten und diejenige von m mit $O^{(1)}$ aequivalenten Objecten Resultate ergeben, welche im Sinne der Aequivalenz mit einander übereinstimmen. Es braucht also nicht die Möglichkeit der Decomposition***), sondern nur die der Composition vorausgesetzt zu werden, und die Möglichkeit der „Vergleichung" nur in *dem* Sinne, dass entschieden werden kann, ob zwei Objecte einander aequivalent sind oder nicht.

*) Disquisitiones arithmeticae, art. 249.[1])

**) Dasselbe gilt für die Übertragung von Begriffen vom Endlichen auf Unendliches.

***) z. B. nicht die Theilbarkeit der Maasse.

[1]) *Gauss*, Werke, Bd. I, S. 272. H

Dabei ist hervorzuheben, dass eine und dieselbe Reihe von Objecten je nach den verschiedenen Arten der Composition, welche statthaft sind, verschiedene Zahlbezeichnungen bekommen kann. So hat sich im art. XXXII gezeigt, dass die positiven ganzen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots M$, bei *multiplicativer* Composition, als Zahlbezeichnungen die Indexsysteme $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ bekommen, deren Elemente durch die Exponenten der verschiedenen Primzahlpotenzen in dem Ausdruck:

$$n = p_1^{z_1} p_2^{z_2} p_3^{z_3} \cdots$$

gebildet werden.

Ordnet man die Objecte nach der Reihenfolge ihrer Indices, d. h. dergestalt, dass, wenn $mn' < m'n$ ist, das Object mit dem Index $\left(\frac{m}{n}\right)$ demjenigen mit dem Index $\left(\frac{m'}{n'}\right)$ vorangeht, so gehört in den Fällen, wo die Indices Maass- und Gewichts-Zahlen repraesentiren, der kleinere Index einem physisch kleineren Objecte an. Die Vergleichung verschiedener Objecte in Beziehung auf ihre physische Grösse lässt sich also *theoretisch* auf die Vergleichung ihrer Indices zurückführen, wenn auch *praktisch* schon bei der Bestimmung dieser Indices, nämlich bei der dazu erforderlichen Entscheidung über die Aequivalenz, Methoden verwendet werden, welche entscheiden lassen, ob das eine der zu vergleichenden Objecte grösser oder kleiner ist als das andere.

Wenn andrerseits die allgemeine Möglichkeit der Vergleichung je zweier Objecte in Beziehung auf ihre physische Grösse gegeben und also direct zu entscheiden ist, sowohl ob eines der Objecte dem andern gleich, als auch ob das eine grösser ist als das andere; so ist die nothwendige Bedingung für die Anwendbarkeit der im V. Buche von *Euklid*'s Elementen unter Nr. 5 aufgestellten Definition*) erfüllt. Dieser Definition gemäss heissen nämlich — bei Benutzung der obigen Bezeichnungen — O_1 und O_2 „in demselben Verhältnisse zu einander stehend“ wie O_3 und O_4, wenn für alle Zahlenpaare:

$$(m, n), \quad (\mu, \nu), \quad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}),$$

wofür:

$$O_1^{(m)} \text{ gleich } O_2^{(n)}, \quad O_1^{(\mu)} \text{ größer als } O_2^{(\nu)}, \quad O_1^{(\mathfrak{m})} \text{ kleiner als } O_2^{(\mathfrak{n})}$$

ist, zugleich:

$$O_3^{(m)} \text{ gleich } O_4^{(n)}, \quad O_3^{(\mu)} \text{ größer als } O_4^{(\nu)}, \quad O_3^{(\mathfrak{m})} \text{ kleiner als } O_4^{(\mathfrak{n})}$$

*) Vergl. S. 2 des zweiten Bandes der *Heiberg*'schen Ausgabe (Leipzig 1884).

wird. Dabei ist nur nöthig, dass sowohl jedes der beiden Objecte O_1, O_2 als auch jedes der beiden Objecte O_3, O_4 mit sich selbst und mit dem andern componirt werden kann. Aber die Möglichkeit der Composition eines der ersten beiden Objecte mit einem der letzteren ist nicht erforderlich.

Die *Euklidi*'sche Definition jener als „Proportion“ (*ἀναλογία*) bezeichneten, symbolisch durch:

$$O_1 : O_2 = O_3 : O_4$$

dargestellten Beziehung zwischen O_1, O_2, O_3, O_4 bezweckt und ermöglicht auch für *incommensurable* Grössen die Aufstellung von Proportionen, z. B. derjenigen, wonach die Peripherien verschiedener Kreise in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie ihre Durchmesser, und auch der folgenden:

Kreisperipherie : Durchmesser = Kreisfläche : Halbmesserquadrat.

Doch wird eben *nur* der Begriff der Proportion, nicht der Begriff des Verhältnisses, bei *Euklid* mathematisch fixirt*), und es ist auch nichts anderes erforderlich, als die in der Proportion enthaltene Beziehung zweier Grössen zu zwei anderen zu praecisiren.

In der That braucht man nur gemäss den im art. XXX enthaltenen Entwickelungen das System zweier Grössen $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ *selbst*, nicht irgend ein „Verhältnis“ oder eine Beziehung von $\mathfrak{z}_1$ zu $\mathfrak{z}_2$, der Betrachtung zu Grunde zu legen und den Begriff der Aequivalenz zweier Systeme:

$$(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \sim (\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4)$$

so zu fixiren, dass deren Bestehen an das der Proportion:

$$\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_3 : \mathfrak{z}_4$$

gebunden ist. Alsdann sind alle diejenigen Systeme:

$$(c\mathfrak{z}_1, \; c\mathfrak{z}_2),$$

welche man erhält, indem man c einen beliebigen Werth beilegt, einander aequivalent, und es ist auch andrerseits jedes dem Systeme $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ aequivalente System unter den Systemen $(c\mathfrak{z}_1, c\mathfrak{z}_2)$ enthalten. Der Quotient $\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2}$, oder irgend eine ganze

*) Vergl. *Hankel*'s Ausführungen auf S. 389 bis S. 398 seines Werkes: „Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter.“

oder gebrochene lineare Function desselben, ist die einzige „Invariante“ jener Aequivalenz, und diese ist es, durch welche der „Werth des Verhältnisses“ $\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2$ dargestellt wird.

Fasst man x, y als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes in der Ebene auf, so wird jedes System (x, y) durch einen Punkt repraesentirt; die mit $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ aequivalenten Punkte (x, y) sind also alle diejenigen, welche die Gerade $x\mathfrak{z}_2 = y\mathfrak{z}_1$ erfüllen.

Nimmt man an Stelle der beiden Grössen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ zwei Objecte O_1, O_2, so hat man als Bedingungen für die Aequivalenz der beiden Systeme:

$$(O_1, O_2) \sim (O_3, O_4)$$

jene einzuführen, welche oben gemäss den *Euklidi*'schen Festsetzungen für das Bestehen der Proportion:

$$O_1 : O_2 = O_3 : O_4$$

angegeben worden sind. Tritt nun der erste jener Fälle ein, giebt es also zwei ganze Zahlen m, n, wofür $O_1^{(m)}$ gleich $O_2^{(n)}$ ist, so werden alle mit (O_1, O_2) aequivalenten Systeme $(\bar{O}_1, \bar{O}_2)$ durch die Proportion:

$$\bar{O}_2 : \bar{O}_1 = m : n$$

sowie dadurch charakterisirt, dass $\bar{O}_1^{(m)}$ gleich $\bar{O}_2^{(n)}$ und dass also, gemäss den obigen Ausführungen, $\bar{O}_2$ durch $\bar{O}_1^{\left(\frac{m}{n}\right)}$ zu bezeichnen ist. Der Bruch $\frac{m}{n}$ bildet also hier wiederum die Invariante der Aequivalenz und stellt den Werth des „Verhältnisses“ $O_1 : O_2$ in praecisem mathematischen Sinne dar. Führt man aber auch in dem Falle, wo kein Zahlenpaar (m, n) von der angegebenen Beschaffenheit und also kein Bruch existirt, durch den eine Invariante der Aequivalenz dargestellt werden könnte, ein Rechnungssymbol $\mathfrak{Z}$ dafür ein, so müssen gemäss den obigen Aequivalenzbedingungen die Ungleichheiten:

$$\frac{m}{n} < \mathfrak{Z} < \frac{\mu}{\nu}$$

bestehen, in welchen die beiden Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ sich einander beliebig nähern lassen. In diesem Falle giebt es also nur ein „Intervall“ von beliebig kleiner Grösse, welches für alle einander aequivalenten Systeme $(\bar{O}_1, \bar{O}_2)$ invariant ist und an Stelle jenes „Verhältnisswerthes“ $O_1 : O_2$ tritt.

Wenn, wie bei *Euklid*, vom Gebrauch der Brüche abgesehen wird, so existirt auch für aequivalente Systeme *ganzer Zahlen*:

$$(m, n), \quad (m', n'), \quad (m'', n''), \ldots,$$

deren Aequivalenzbeziehung:

$$(m, n) \sim (m', n') \sim (m'', n'') \sim \cdots$$

durch die Proportion:

$$m : n = m' : n' = m'' : n'' = \cdots$$

definirt wird, keine Invariante, also kein „*Werth* des Verhältnisses $m : n$“; d. h. es existirt dann keine Function der zwei Elemente m, n, welche für alle aequivalenten Systeme denselben Werth hat. Aber da für das Modulsystem:

$$(n x_n - 1, \; n' x_{n'} - 1, \; n'' x_{n''} - 1, \ldots)$$

die Congruenzen:

$$m x_n \equiv m' x_{n'} \equiv m'' x_{n''} \equiv \cdots$$

bestehen, so bleibt der Werth des Products $m x_n$, wenn darin die Zahlen m, n durch die eines aequivalenten Systems ersetzt werden, im Sinne der Congruenz für jenes Modulsystem ungeändert, und $m x_n$ stellt also in diesem Sinne eine Invariante jener Aequivalenzen:

$$(m, n) \sim (m', n') \sim (m'', n'') \sim \cdots$$

dar. Hierbei ist, wie im § 5, II meiner Abhandlung über den Zahlbegriff*), der Bruch $\frac{m}{n}$ durch den *modulo* $n x_n - 1$ genommenen Werth $m x_n$ ersetzt worden. Aber man kann auch von den *Gauss*'schen Begriffsbestimmungen bezüglich der Aequivalenz der quadratischen Formen Gebrauch machen, um ohne Anwendung von Brüchen den gedanklichen Inhalt jener Ausdrucksweisen klar zu legen, bei denen vom „Verhältniss zweier Grössen“ die Rede ist.

Gauss knüpft im art. 223[1]) der Disquisitiones arithmeticae an den Begriff der Aequivalenz quadratischer Formen (a, b, c) deren Eintheilung in „Classen“ an und erwähnt dann, dass jede Classe durch irgend eine beliebige derselben angehörige

*) Journal für Mathematik, Bd. 101, S. 345.[2])

[1]) *Gauss*, Werke, Bd. I, S. 222. H
[2]) Bd. III_1, S. 261 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

Form „repraesentirt“ werden könne, dass man aber vorzugsweise eine solche wählen werde, die sich durch Einfachheit vor den übrigen auszeichnet. Die Theorie der quadratischen Formen (a, b, c) kann nun offenbar als diejenige besondere Theorie der „Systeme von drei ganzen Zahlen“ (a, b, c) betrachtet werden, welche auf die aus der Aequivalenz zweier Formen:

$$ax^2 + bxy + cy^2, \quad a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$$

hervorgehende Aequivalenzbeziehung der beiden Systeme:

$$(a, b, c) \sim (a', b', c')$$

gegründet ist. Im Anschluss an diese *Gauss*'schen Festsetzungen kann man die sämmtlichen, im oben bezeichneten Sinne, einander aequivalenten Systeme zweier Grössen:

$$(c\mathfrak{z}_1, c\mathfrak{z}_2),$$

welche den verschiedenen Werthen von c entsprechen, in eine Classe vereinigen und irgend eines dieser Systeme, d. h. also eines, welches einem bestimmten Werthe von c entspricht, als Repraesentanten der Classe ansehen. Aber noch allgemeiner kann man, von der in oben angegebener Weise durch die Proportion:

$$O_1 : O_2 = \bar{O}_1 : \bar{O}_2$$

definirten Aequivalenzbeziehung:

$$(O_1, O_2) \sim (\bar{O}_1, \bar{O}_2)$$

ausgehend, alle unter einander und mit (O_1, O_2) aequivalenten Systeme von zwei *Objecten* $(\bar{O}_1, \bar{O}_2)$ in eine Classe vereinigen und irgend eines dieser Systeme, z. B. (O_1, O_2), als Repraesentanten der Classe wählen. Diese Betrachtung ist es, welche der Aufstellung des Verhältnisses $O_1 : O_2$ zu Grunde liegt. Nicht eine Beziehung von O_1 zu O_2 wird durch $O_1 : O_2$ dargestellt, sondern es ist darunter nichts Anderes zu verstehen, als „das *System* (O_1, O_2), aufgefasst als Repraesentant der ganzen Classe von Systemen $(\bar{O}_1, \bar{O}_2)$, welche durch die Proportion:

$$O_1 : O_2 = \bar{O}_1 : \bar{O}_2$$

bestimmt werden.

Die in der angegebenen Weise zu bildenden Classen von Systemen $(\bar{O}_1, \bar{O}_2)$ sondern sich in zwei verschiedene Arten. Die Classen der einen Art enthalten Systeme von zwei (ganzen) *Zahlen* (m, n) und sind also durch ein solches System, bei welchem

übrigens m und n zu einander prim angenommen werden können, zu repraesentiren. Bei den Classen der anderen Art ist dies nicht der Fall. Nur die Systeme $(\bar{O}_1, \bar{O}_2)$ der ersteren Art sind es, bei denen — wie man sich ausdrückt — $\bar{O}_1$ und $\bar{O}_2$ in rationalem Verhältniss zu einander stehen, und es ist demnach die hier bezeichnete Sonderung der Classen in zwei Arten, welche für die Unterscheidung der sogenannten Verhältnisse in rationale und irrationale den praecisen mathematischen Ausdruck giebt.

Denkt man sich, um die vorstehenden Erörterungen zu specialisiren und zugleich weiterzuführen, an Stelle der Systeme $(\mathfrak{z}')$, $(\mathfrak{z}'')$, $(\mathfrak{z}''')$, ..., wie oben, eine Reihe Volumina v', v'', v''', ... und an Stelle der Composition $\theta((\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}''))$ die „Vereinigung zweier Volumina v', v''“, d. h. diejenige Composition, welche bei der Maassbestimmung angewandt wird, so erhält man nach art. XXXI eine Bezeichnung durch Indexsysteme:

$$(z_1, z_2, z_3, \ldots),$$

deren Elemente rationale Zahlen sind. Dabei ist die Anzahl der Elemente gleich der Anzahl derjenigen Volumina v, welche in Bezug auf ihre Maassgrösse mit einander incommensurabel sind.

So braucht man z. B., wenn eine Reihe von Volumina aus der Vereinigung von Würfel- und Kugel-Inhalten gebildet wird, zu deren Bezeichnung Systeme von zwei Indices, sobald die Würfelkanten und Kugelradien sämmtlich mit einander commensurabel sind. Ist nämlich $v^{(1)}$ irgend eines der Würfelvolumina und $v_0^{(1)}$ das Volumen einer Kugel, deren Radius gleich der Kante des Würfels $v^{(1)}$ ist, so sind es nur Volumina $v^{(z)}$, $v_0^{(z_0)}$ mit rationalen Indices z, z_0, aus deren Vereinigung alle einzelnen Volumina jener Reihe gebildet werden können. Jedes dieser Volumina wird also durch einen „*Zahlencomplex*“ (z, z_0) bezeichnet, und es ist die entsprechende „*complexe Zahl*“ $z + \frac{4}{3} z_0 \pi$, welche — bei der üblichen Ausdrucksweise — das „Verhältniss“ jenes Volumens zu dem Volumen $v^{(1)}$ angiebt. Doch ist dabei π, wie oben dargelegt, als Invariante der für beliebige Werthe von z einander aequivalenten Systeme $(v^{(z)}, v_0^{(z)})$, nur durch ein Intervall von beliebig kleiner Grösse bestimmt.

Liegt ein Körper mit dem Volumen $v^{(\frac{m}{n})}$ ganz innerhalb der Kugel mit dem Volumen $v_0^{(1)}$ und diese wieder ganz innerhalb eines Körpers mit dem Volumen $v^{(\frac{m'}{n'})}$, so ist das Volumen $v^{(\frac{m'}{n'})}$, physisch kleiner als $v_0^{(1)}$ und dieses wiederum physisch kleiner als $v^{(\frac{m}{n})}$; es muss deshalb, wie schon oben bemerkt worden, $mn' < m'n$ sein. Die ganzen Zahlen m, n, m', n' können nun so bestimmt werden, dass für irgend eine gegebene beliebig kleine Grösse τ die Ungleichheit:

$$m'n - mn' < 2\tau nn$$

besteht, und man kann daher auf Körper-Volumina in ähnlicher Weise, wie es oben in den Abschnitten XXXIII und XXXIV für rationale Zahlen geschehen ist, den Aequivalenzbegriff anwenden. Liegt nämlich sowohl die Begrenzung eines Körpers K' als die eines Körpers K'' zwischen den Begrenzungen zweier Körper, deren Volumina die rationalen Zahlen r' und r'' als Indices haben, und sind r' und r'' in dem oben näher bezeichneten Sinne mit einander aequivalent, so dass beide Zahlen in einem und demselben Aequivalenz-Intervalle von der Grösse 2τ enthalten sind, so können auch die Volumina der beiden Körper K' und K'' als „physisch aequivalent" bezeichnet werden, insofern die Begrenzungen beider Körper in einem Intervalle mit dem Volumen $v^{(2\tau)}$, d. h. also in einem Raume liegen, dessen Volumen einen gegebenen beliebig kleinen Index hat. Dabei ist es, eben so wie bei der Entwickelung im art. XXXIV, für die theoretische Deduction durchaus wesentlich, dass die Grösse des Aequivalenz-Intervalles 2τ *unbestimmt* gelassen und deren zweckgemässe Bestimmung für den einzelnen Fall der Anwendung vorbehalten wird. Der so fixirte Begriff der physischen Aequivalenz, mit Unbestimmtheit des Aequivalenz-Intervalles 2τ, ersetzt im Falle der Incommensurabilität den Begriff der physischen Gleichheit und praecisirt zugleich die Bedeutung aller jener Ausdrücke, welche der Behandlung der commensurablen Grössen entnommen und auf den Fall der Incommensurabilität übertragen werden.

XXXVII. Um dies näher darzulegen, knüpfe ich an das durch das Kugelvolumen $v_0^{(1)}$ gegebene Beispiel an.

Es seien x, y, z rechtwinklige Coordinaten, und man denke sich in der bei der Cubatur üblichen Weise den kugelförmigen Raum:

$$x^2 + y^2 + z^2 < r^2$$

durch Ebenen getheilt, die den drei Coordinatenebenen parallel sind. Dabei sollen die zwei einer Coordinatenebene nächsten parallelen Ebenen im Abstand $\frac{1}{2}$ von derselben liegend angenommen werden, und der Abstand je zweier benachbarten parallelen Ebenen soll gleich *Eins* sein. Von den auf diese Weise entstehenden

Würfeln liegen alle diejenigen innerhalb der Kugel, deren Mittelpunkt um mindestens $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ von der Kugeloberfläche abstehen, also sicher alle diejenigen, deren Mittelpunktscoordinaten:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

der Ungleichheit:

$$a^2 + b^2 + c^2 < (r-1)^2$$

genügen. Die Anzahl dieser Systeme ganzzahliger Werthe (a, b, c) möge mit $\varpi_3(r-1)$ bezeichnet werden.

Nun erhellt, dass man (für eine beliebige positive ganze Zahl n) aus $\varpi_3(n-1)$ Würfeln, deren jedes ein Volumen mit dem Index $\frac{1}{n^3}$ hat, einen ganz innerhalb der Kugel mit dem Volumen $v_0^{(1)}$ liegenden Körper K' bilden kann, dessen Volumen den Index $\frac{\varpi_3(n-1)}{n^3}$ hat. Man kann aber auch einen Körper K'' bilden, *innerhalb dessen* die Kugel liegt, und dessen Volumen den Index $\frac{\varpi_3(n+1)}{n^3}$ hat. Hierbei giebt $\varpi_3(n-1)$ die Anzahl der Systeme ganzzahliger Werthe (a, b, c) an, für welche:

$$a^2 + b^2 + c^2 < (n-1)^2$$

ist, und $\varpi_3(n+1)$ die Anzahl derjenigen, für welche:

$$a^2 + b^2 + c^2 < (n+1)^2$$

ist. Die Differenz $\varpi_3(n+1) - \varpi_3(n-1)$ wird aber, wie sich leicht zeigen lässt, mit wachsendem n proportional n^2, und es kann daher n so gross angenommen werden, dass:

$$\frac{\varpi_3(n+1) - \varpi_3(n-1)}{n^3},$$

d. h. die Differenz der Indices der beiden Volumina von K'' und K', kleiner als eine beliebig gegebene Grösse 2τ wird. Es bedarf also nur noch einer Praecisirung des Sinnes, in welchem zwei rationale Zahlen:

$$\frac{\varpi_3(m)}{m^3}, \quad \frac{\varpi_3(n)}{n^3}$$

als aequivalent zu betrachten sind, um darnach den Sinn der entsprechenden physischen Aequivalenz der Körper-Volumina zu fixiren. Zu diesem Zwecke soll nun aber überhaupt die Bedeutung näher erörtert werden, welche der Rechnung mit den sogenannten „irrationalen Zahlen" und der Aufstellung von Beziehungen zwischen denselben beizulegen ist.

XXXVIII. Es seien $\varphi(k)$, $\psi(k)$ ganze Zahlen, welche durch ein bestimmtes arithmetisches Verfahren aus jeder der Zahlen $k = 1, 2, 3, \ldots$ zu bilden sind, so dass:

$$(\varphi(1), \psi(1)), \quad (\varphi(2), \psi(2)), \quad (\varphi(3), \psi(3)), \ldots$$

eindeutig bestimmte Systeme von Functionen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ repraesentiren. Lässt das zu deren Bildung dienende Verfahren erkennen, dass, wenn eine positive beliebig kleine rationale Zahl τ gegeben ist, der Ungleichheitsbedingung:

$$(\mathfrak{C}_0) \qquad |\varphi(m)\psi(n) - \varphi(n)\psi(m)| < \tau\,|\psi(m)\psi(n)|$$

für jede Zahl n, die grösser als m ist, durch geeignete Bestimmung der Zahl m genügt werden kann, so construiren die bis zu einem beliebig grossen Werthe $k = n$ gebildeten Brüche:

$$\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}, \frac{\varphi(2)}{\psi(2)}, \ldots \frac{\varphi(k)}{\psi(k)}, \ldots \frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$$

„*eine Reihe von rationalen Zahlen, die mit wachsendem k gegen einander convergiren*“, und die Ungleichheit $(\mathfrak{C}_0)$, welche in der üblichen Bezeichnungsweise *so* dargestellt werden kann:

$$(\overline{\mathfrak{C}}_0) \qquad \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} \left(\frac{\varphi(m)}{\psi(m)} - \frac{\varphi(n)}{\psi(n)}\right) = 0,$$

enthält die erforderliche „Convergenzbedingung“.

Bedeuten nun $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \ldots \mathfrak{r}_{2n+1}$ rationale Zahlen, welche theils negativ theils positiv sein können, und für welche stets:

$$\mathfrak{r}_1 < \mathfrak{r}_2 < \mathfrak{r}_3 < \cdots < \mathfrak{r}_{2n} < \mathfrak{r}_{2n+1}$$

ist, so kann man, ähnlich wie im art. XXXIII, alle diejenigen rationalen Zahlen r als „mit $\mathfrak{r}_{2h}$ aequivalent“ bezeichnen, welche der Ungleichheit:

$$\mathfrak{r}_{2h-1} \leqq r < \mathfrak{r}_{2h+1}$$

genügen, also mit $\mathfrak{r}_{2h}$ zugleich in dem Aequivalenz-Intervalle $(\mathfrak{r}_{2h-1}, \mathfrak{r}_{2h+1})$ liegen. Findet sich dann, dass jene rationalen Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ für $k \geqq m$ sämmtlich in einem und demselben Aequivalenz-Intervalle bleiben, so kann die Reihe der gegen einander convergirenden Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$, im Sinne der Aequivalenz, bei $k = m$ abgebrochen werden.

Wählt man τ beliebig klein, und zwar klein im Verhältnis zur Grösse der Aequivalenz-Intervalle, und alsdann m gemäss der Convergenzbedingung $(\mathfrak{C}_0)$ so, dass für jede Zahl n, die grösser als m ist:

$$(\mathfrak{C}_0) \qquad \frac{\varphi(m)}{\psi(m)} - \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = \varepsilon\tau \qquad (-1 < \varepsilon < 1)$$

wird, so genügt die Bestimmung des Intervalls $(\mathfrak{r}_{2h-1}, \mathfrak{r}_{2h+1})$ mittels der Ungleichheit:

$$(\mathfrak{C}_1) \qquad \mathfrak{r}_{2h-1} < \frac{\varphi(m)}{\psi(m)} < \mathfrak{r}_{2h+1}$$

dann und nur dann für alle Brüche $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$, wenn zugleich:

$$(\mathfrak{C}_2) \qquad \mathfrak{r}_{2h-1} + \tau < \frac{\varphi(m)}{\psi(m)} < \mathfrak{r}_{2h+1} - \tau$$

ist. In diesem Falle wird nämlich bei Benutzung der Gleichung $(\mathfrak{C}_0)$:

$$\mathfrak{r}_{2h-1} < \mathfrak{r}_{2h-1} + (1-\varepsilon)\tau < \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} < \mathfrak{r}_{2h+1} - (1+\varepsilon)\tau < \mathfrak{r}_{2h+1},$$

und es zeigt sich also, dass für jede Zahl n, die grösser als m ist, der Werth von $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$ in demjenigen Intervalle bleibt, in welchem $\frac{\varphi(m)}{\psi(m)}$ liegt.

Zieht man daher nur solche Reihen gegen einander convergirender Brüche $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ und überhaupt, wie im art. XXXIII, nur diejenigen Grössen in den Kreis der Betrachtung, welche in einem der Aequivalenz-Intervalle:

$$(\mathfrak{r}_{2h-1} + \tau, \quad \mathfrak{r}_{2h+1} - \tau) \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

liegen, so werden die Relationen zwischen verschiedenen Reihen:

$$\frac{\varphi'(k)}{\psi'(k)}, \quad \frac{\varphi''(k)}{\psi''(k)}, \quad \frac{\varphi'''(k)}{\psi'''(k)}, \ldots$$

durch Aequivalenz-Beziehungen zwischen den entsprechenden rationalen, die Aequivalenz-Intervalle der verschiedenen Reihen charakterisirenden Zahlen:

$$\mathfrak{r}_{2h'}, \quad \mathfrak{r}_{2h''}, \quad \mathfrak{r}_{2h'''}, \ldots$$

ausgedrückt.

Die Bestimmung der Zahl τ, welche die Grösse der Lücke zu beiden Seiten jeder Intervallgrenze angiebt, war nur insoweit beschränkt, dass τ im Verhältniss zur Grösse der Intervalle klein angenommen werden sollte. Ist nun τ irgend eine geeignete Zahl, so kann man auch jede Zahl:

$$\delta\tau \qquad (0<\delta<1)$$

für τ nehmen und also $\delta\tau$ als eine Variable auffassen, deren (positiver rationaler) Werth stets kleiner als τ bleibt. Alsdann ist die kleinste Zahl m, für welche die Bedingung $(\mathfrak{C}_0)$ erfüllt ist, da sie durch den Werth von $\delta\tau$ bestimmt wird, mit $m_{\delta\tau}$ zu bezeichnen, und es besteht daher für jede Zahl n, die grösser als $m_{\delta\tau}$ ist, die Ungleichheit:

$$\left| \frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})} - \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} \right| < \delta\tau.$$

Ist nun für den Werth $\delta = 1$ die Bedingung $(\mathfrak{C}_1)$:

$$\mathfrak{r}_{2h-1} < \frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)} < \mathfrak{r}_{2r+1},$$

aber nicht die Bedingung $(\mathfrak{C}_2)$:

$$\mathfrak{r}_{2h-1} + \tau < \frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)} < \mathfrak{r}_{2h+1} - \tau$$

erfüllt, so muss für einen der beiden Werthe $\mathfrak{r}_{2h-1}$ oder $\mathfrak{r}_{2h+1}$:

$$\left| \mathfrak{r}_{2h\pm1} - \frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)} \right| \leqq \tau$$

sein. Zeigt sich aus dem Verfahren zur Bildung der Zahlen $\varphi(k)$, $\psi(k)$, dass auch für die Variable $\delta\tau$, d. h. für den angenommenen Werth von τ und für jeden positiven echten Bruch δ, dieselbe Ungleichheit:

$$(\mathfrak{C}_3) \qquad \left| \mathfrak{r}_{2h\pm1} - \frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})} \right| \leqq \delta\tau$$

stattfindet, so hat man die rationale Zahl $\mathfrak{r}_{2h\pm1}$ als den „Grenzwerth" der Brüche $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ anzusehen, und in diesem Falle

> convergiren also die Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ mit wachsendem k nicht nur gegen einander sondern zugleich gegen eine der Grenzen der Aequivalenz-Intervalle.

Wenn sich dagegen zeigt, dass für irgend einen Werth von δ, der mit δ_0 bezeichnet werden möge, die Bedingung:

$$(\mathfrak{C}_2^0) \qquad \mathfrak{r}_{2h-1} + \delta_0\tau < \frac{\varphi(m_{\delta_0\tau})}{\psi(m_{\delta_0\tau})} < \mathfrak{r}_{2h+1} - \delta_0\tau$$

erfüllt ist, so bestimmt sich damit das Aequivalenz-Intervall, in welchem alle Werthe von $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$ (für $n > m$) liegen.

Die Reihen gegen einander convergirender Zahlen, deren Bildungsgesetz erkennen lässt, welche der beiden Ungleichheiten $(\mathfrak{C}_3)$, $(\mathfrak{C}_2^0)$ stattfindet, scheiden sich hiernach, mit Bezug auf die angenommene Eintheilung in Aequivalenz-Intervalle, in zwei Arten; bei der einen convergiren die Zahlen gegen eine der Grenzen der Aequivalenz-Intervalle, bei der anderen convergiren sie in eines der Aequivalenz-Intervalle hinein. Wenn nun die Zahlen einer Reihe der letzteren Art gegen eine rationale Zahl r convergiren, die zwischen $\mathfrak{r}_{2h-1}$ und $\mathfrak{r}_{2h+1}$ liegt, so braucht man nur die Zahl r als neuen Theilpunkt einzuschalten und also das Aequivalenz-Intervall $(\mathfrak{r}_{2h-1}, \mathfrak{r}_{2h+1})$ in die beiden Intervalle $(\mathfrak{r}_{2h-1}, r)$ und $(r, \mathfrak{r}_{2h+1})$ zu theilen, um die Reihe nunmehr als eine der ersten Art zu charakterisiren. Bei unbestimmter oder beliebig vorbehaltener Eintheilung in Aequivalenz-Intervalle tritt also an die Stelle jener *relativen*

> die folgende *absolute* Scheidung der Reihen gegen einander convergirender Zahlen in zwei verschiedene Arten; bei der einen convergiren die Zahlen gegen eine bestimmte rationale Zahl, bei der anderen convergiren sie, wie auch die Eintheilung der Aequivalenz-Intervalle angenommen werden möge, in eines der Aequivalenz-Intervalle hinein.

So wie aber für jene relative Scheidung der Reihen in zwei Arten die Entscheidung darüber erforderlich war, welche der beiden Ungleichheitsbedingungen $(\mathfrak{C}_3)$, $(\mathfrak{C}_2^0)$ erfüllt ist, so ist für diese absolute Scheidung nothwendig, dass das Bildungsgesetz der Reihe erkennen lasse, ob *irgend eine* rationale Zahl r der Convergenzbedingung:

$$(\mathfrak{C}_3) \qquad \left| \mathfrak{r} - \frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})} \right| \leqq \delta\tau$$

für jeden positiven echten Bruch δ genügt, oder ob für *jede* rationale Zahl r die aus $(\mathfrak{C}_2^0)$ hervorgehende Ungleichheitsbedingung:

$$\left| r - \frac{\varphi(m_{\delta_0\tau})}{\psi(m_{\delta_0\tau})} \right| > \delta_0\tau$$

durch geeignete Wahl des positiven echten Bruches δ_0 befriedigt werden kann. Im letzteren Falle gewährt die Bestimmung von δ_0 auch erst das Mittel zur Auffindung des Aequivalenz-Intervalles der Reihe.

In der That genügt zur Bestimmung des Aequivalenz-Intervalles, in welches die Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ einer Reihe der zweiten Art convergiren, nicht die Kenntnis der bezüglichen Convergenzbedingung, d. h. es genügt nicht zu wissen, wie gross man bei gegebenem τ die Zahl m_τ zu wählen hat, damit die Convergenzbedingung:

$$(\mathfrak{C}_0) \qquad |\,\varphi(m_\tau)\psi(n) - \varphi(n)\psi(m_\tau)\,| < \tau\,|\,\psi(m_\tau)\psi(n)\,|$$

für alle Zahlen n, die grösser als m_τ sind, erfüllt sei, sondern es bedarf dazu noch der Kenntnis einer *Divergenz*bedingung. Man muss nämlich auch wissen, wie klein man, wenn eine rationale Zahl r gegeben ist, $\delta\tau$ zu wählen hat, damit die Ungleichheit:

$$(\mathfrak{D}) \qquad |\,r\psi(m_{\delta\tau}) - \varphi(m_{\delta\tau})\,| > \delta\tau\,|\,\psi(m_{\delta\tau})\,|$$

neben jener:

$$(\mathfrak{C}_0) \qquad |\,\varphi(m_{\delta\tau})\psi(n) - \varphi(n)\psi(m_{\delta\tau})\,| < \delta\tau\,|\,\psi(m_{\delta\tau})\psi(n)\,| \qquad (n>m),$$

welche die Zahlen $m_{\delta\tau}$ charakterisirt, bestehe. Denn, wenn irgend eine Zahl m, die grösser als $m\tau$ ist, gewählt und alsdann das Intervall $(\mathfrak{r}_{2h-1}, \mathfrak{r}_{2h+1})$, in welchem $\frac{\varphi(m)}{\psi(m)}$ liegt, bestimmt wird, so genügt diese Bestimmung nur dann, wenn zugleich jene Ungleichheitsbedingung $(\mathfrak{C}_2)$ erfüllt, d. h. wenn keine der beiden Differenzen:

$$\frac{\varphi(m)}{\psi(m)} - \mathfrak{r}_{2h-1}, \quad \mathfrak{r}_{2h+1} - \frac{\varphi(m)}{\psi(m)}$$

kleiner als τ ist. Man muss also, falls für eine der beiden Zahlen $\mathfrak{r}_{2h-1}$ oder $\mathfrak{r}_{2h+1}$:

$$\left|\,\mathfrak{r}_{2h\pm1} - \frac{\varphi(m)}{\psi(m)}\,\right| < \tau$$

ist, an Stelle von τ eine Grösse $\delta\tau$ suchen, für welche die *beiden* Bedingungen:

$$\left|\,\frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})} - \frac{\varphi(n)}{\psi(n)}\,\right| < \delta\tau < \left|\,\mathfrak{r}_{2h\pm1} - \frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\,\right|$$

zugleich erfüllt sind, da erst das Intervall, in welchem der Werth von $\frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}$ liegt, sich als dasjenige Aequivalenz-Intervall sicher bestimmt, in welches die Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ convergiren. In der That bestehen alsdann die Ungleichheiten:

$$\mathfrak{r}_{2h-1} < \mathfrak{r}_{2h-1} + (1-\varepsilon)\delta\tau < \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} < \mathfrak{r}_{2h+1} - (1+\varepsilon)\delta\tau < \mathfrak{r}_{2h+1}$$

für jede Zahl n, die grösser als $m_{\delta\tau}$ ist, und ε wird dabei durch die Gleichung:

$$\frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})} - \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = \varepsilon\delta\tau$$

definirt, ist also, vermöge der ersteren jener beiden Bedingungen, ein positiver oder negativer echter Bruch.

Das Bestehen der Divergenzbedingung $(\mathfrak{D})$ enthält folgende charakteristische Eigenschaft der Reihen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ der zweiten Art, d. h. derjenigen, bei welchen kein rationaler Grenzwerth $\lim\limits_{k=\infty} \frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ existirt:

> Welche rationale Zahl r auch gegeben sein möge, so lässt sich das Intervall, in welches hinein die rationalen Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ mit wachsendem k convergiren, stets auf eines von so kleiner Grösse $\delta\tau$ einschränken, dass r ausserhalb des Intervalles bleibt.

Während also die Convergenzbedingung $(\mathfrak{C}_0)$ ausdrückt, dass die rationalen Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\varphi(k)}$ mit wachsendem Werthe von k gegen einander convergiren, zeigt die Divergenzbedingung $(\mathfrak{D})$, dass eben diese Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ mit wachsendem k immer weiter von r divergiren.

XXXIX. Dass nicht für jede Reihe gegen einander convergirender Zahlen die Möglichkeit der Ermittlung einer der Divergenzbedingung $(\mathfrak{D})$ genügenden Grösse $\delta\tau$ gegeben ist, tritt schon bei *Dirichlet* im § 4 seiner Abhandlung über die arithmetische Progression deutlich hervor.[1])

Es soll a. a. O. dargethan werden, dass die Reihe $\sum\limits_n \frac{\omega^{\gamma_n}}{n}$ von Null verschieden ist. Hierbei ist ω irgend eine Wurzel der Gleichung:

$$\omega^{p-1} - 1 = 0,$$

wo p eine Primzahl bedeutet, und γ_n wird durch die Congruenz:

$$c^{\gamma_n} \equiv n \pmod{p}$$

definirt, in welcher unter c eine primitive Wurzel von p zu verstehen ist. *Dirichlet* zeigt nun, dass der Grenzwerth der auf alle nicht durch p theilbaren Zahlen n erstreckten Summe:

$$\sum_n \frac{\omega^{\gamma_n}}{n}$$

[1]) *Dirichlet*, Werke, Bd. I, S. 324.

durch den Ausdruck:

$$-\frac{1}{p}\sum_{g=1}^{g=p-1}\omega^{\gamma_g} e^{\frac{2g\pi}{p}i}\sum_{m=1}^{m=p-1}\omega^{-\gamma_m}\left(\log 2\sin\frac{m\pi}{p}+\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{p}\right)\pi i\right)$$

gegeben wird, und sagt dann:

> „Obgleich dieser Ausdruck für $\sum_n \frac{\omega^{\gamma_n}}{n}$ sehr einfach ist, so kann man doch im Allgemeinen nicht daraus schliessen, dass $\sum_n \frac{\omega^{\gamma_n}}{n}$ einen von Null verschiedenen Werth hat.*) Es fehlt noch an gehörigen Principien zur Feststellung der Bedingungen, unter denen transcendente Verbindungen, welche unbestimmte ganze Zahlen enthalten, verschwinden können. Die verlangte Nachweisung gelingt jedoch für den besonderen Fall, wo $\omega = -1$. Für die imaginären Werthe von ω werden wir im folgenden Paragraphen ein anderes Verfahren angeben, welches aber auf den genannten besonderen Fall nicht anwendbar ist."

Für $\omega = -1$ wird:

$$\sum_n \frac{\omega^{\gamma_n}}{n} = \sum_n \left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n},$$

wo $\left(\frac{n}{p}\right)$ des *Legendre*'sche Zeichen ist, und wenn zur Abkürzung:

$$\sqrt{p}\sum_n \left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} = f(p)$$

gesetzt wird, so zeigt sich, dass

> für $p \equiv 1 \pmod 4$ das Quadrat von $e^{f(p)} - e^{-f(p)}$,
>
> für $p \equiv 3 \pmod 4$ aber $f(p)$, dividirt durch π,

eine von Null verschiedene ganze Zahl ist. Hierauf beruht das Gelingen des *Dirichlet*'schen Nachweises.

---

*) Darauf, dass die bezeichnete Reihe einen von Null verschiedenen Werth hat, gründet sich im § 9 meiner Doctordissertation „De unitatibus complexis"[1]) der wichtige Nachweis, dass die Kreistheilung ein System unabhängiger Einheiten liefert.

[1]) Bd. I, S. 41 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

Für imaginäre Werthe von ω zeigt *Dirichlet* nur, dass die Voraussetzung:

$$\sum_n \frac{\omega^{\gamma_n}}{n} = 0$$

zu einem Widerspruch führt. Es lässt sich aber auch in diesem Falle, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde, aus den *Dirichlet*'schen Entwickelungen ein positiver Nachweis herleiten, indem sich eine rationale Zahl r bestimmen lässt, für welche die Ungleichheit:

$$\left|\sum_n \frac{\omega^{\gamma_n}}{n}\right| > r$$

besteht.

XL. Bilden die Brüche $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ eine Reihe gegen einander convergirender Zahlen der zweiten Art, für welche sich, wie immer r gegeben sein mag, eine der Divergenzbedingung ($\mathfrak{D}$) genügende Grösse $\delta\tau$ finden lässt, so kann für jede gegebene ganze Zahl ν das Aequivalenz-Intervall:

$$\left(\frac{h}{\nu},\ \frac{h+1}{\nu}\right) \qquad (h=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

bestimmt werden, in welches die Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ convergiren.

Man wähle nämlich zuvörderst für τ irgend eine Zahl, die kleiner als $\frac{1}{4\nu}$ ist, und bestimme eine Zahl m_τ, welche der Convergenzbedingung:

$$(\mathfrak{C}_0) \qquad |\varphi(m_\tau)\psi(n) - \varphi(n)\psi(m_\tau)| < \tau\,|\psi(m_\tau)\psi(n)|$$

für jede Zahl n, die grösser als m_τ ist, genügt. Alsdann bestimme man die grösste ganze Zahl, welche kleiner als der Bruch:

$$\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}$$

ist, und welche nach *Gauss*' Vorgang durch:

$$\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right]$$

bezeichnet werden soll.

Falls nun der Werth von $\frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}$ um mehr als τ von jeder der beiden Grenzen des Intervalls:

$$\left(\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right],\ \frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right]\right)$$

absteht, so ist es dieses Intervall selbst, in welches die Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ mit wachsendem k convergiren. Wenn aber die angegebene Bedingung nicht erfüllt ist, und vielmehr $\frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}$ von einer der beiden Grenzen des Intervalls um weniger als τ absteht, so hat man an Stelle von τ eine Zahl $\delta\tau$ zu wählen, welche der Divergenzbedingung $(\mathfrak{D})$ genügt, wenn man darin r gleich:

$$\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right] \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right]$$

nimmt. Das Aequivalenz-Intervall:

$$\left(\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\right],\ \frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\right]\right)$$

ist dann dasjenige, in welches die Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ mit wachsendem k convergiren.

Denn wenn zur Abkürzung mit σ der Werth 0 oder 1, je nach den beiden für r zu nehmenden Werthen, bezeichnet wird, so ist auf Grund der Divergenzbedingung $(\mathfrak{D})$:

$$\left|\frac{\sigma}{\nu}+\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right]-\frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\right|>\delta\tau,$$

ferner auf Grund der Convergenzbedingung $(\mathfrak{C}^0)$:

$$\left|\frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}-\frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\right|<\tau,$$

und endlich auf Grund der Voraussetzung, dass $\frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}$ von der einen Intervallgrenze um weniger als τ absteht:

$$\left|\frac{\sigma}{\nu}+\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right]-\frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right|<\tau.$$

Es besteht daher die Ungleichheit:

$$\nu\delta\tau<\left|\frac{\nu\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}-\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right]-\sigma\right|<2\nu\tau<\frac{1}{2},$$

aus welcher nicht nur hervorgeht, dass:

$$\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right]+\sigma$$

die dem Bruche:

$$\frac{\nu\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}$$

zunächst benachbarte ganze Zahl ist, sondern auch dass deren Abstand von diesem Bruche grösser als $\nu\delta\tau$ ist. Dieser Bruch differirt also von jeder der beiden ganzen Zahlen, zwischen denen er liegt, um mehr als $\nu\delta\tau$. Der Abstand des Bruches $\frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}$ von jeder der beiden Grenzen des Intervalls:

$$\left(\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\right],\ \frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\right]\right),$$

in welchem er liegt, ist demnach grösser als $\delta\tau$, d. h. grösser als sein Abstand von irgend einem der folgenden Brüche:

$$\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} \qquad (n>m_{\delta\tau}),$$

und es zeigt sich also, dass die Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ in der That mit wachsendem k in dasjenige Intervall von der Grösse $\frac{1}{\nu}$ convergiren, dessen Anfangspunkt durch:

$$\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\right]$$

bezeichnet ist. Dieser Anfangspunkt kann folglich auch durch:

$$\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(n)}{\psi(n)}\right]$$

dargestellt werden, wenn die Zahl n grösser als $m_{\delta\tau}$ oder überhaupt hinreichend gross gewählt wird, damit $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$ in demjenigen Aequivalenz-Intervalle liegt, in welches die Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ convergiren. Die ganze Zahl:

$$\left[\frac{\nu\varphi(n)}{\psi(n)}\right]$$

ist demgemäss durch die Zahl ν *allein* bestimmt und soll mit $\chi(\nu)$ bezeichnet werden. Alsdann repraesentirt der Bruch:

$$\frac{\chi(\nu)}{\nu}$$

den Anfangspunkt desjenigen Aequivalenz-Intervalles von der Grösse $\frac{1}{\nu}$, in welches die Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ convergiren, und ist damit vollständig charakterisirt.

Ist μ irgend eine von ν verschiedene ganze Zahl, so kann die Zahl n so gross gewählt werden, dass sowohl: $\frac{1}{\mu}\left[\frac{\mu\varphi(n)}{\psi(n)}\right]$ den Anfangspunkt des Intervalles von der Grösse $\frac{1}{\mu}$ als auch $\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(n)}{\psi(n)}\right]$ den Anfangspunkt des Intervalles von der Grösse $\frac{1}{\nu}$ angiebt, in welches die Zahlen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ convergiren. Alsdann bestimmen sich die Zahlen $\chi(\mu)$ und $\chi(\nu)$ durch die Gleichungen:

$$\chi(\mu) = \left[\frac{\mu\varphi(n)}{\psi(n)}\right], \quad \chi(\nu) = \left[\frac{\nu\varphi(n)}{\psi(n)}\right];$$

es ist daher:

$$\frac{\chi(\mu)}{\mu} = \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} - \frac{\delta'}{\mu}, \quad \frac{\chi(\nu)}{\nu} = \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} - \frac{\delta''}{\nu},$$

wo δ', δ'' positive echte Brüche bedeuten, und also:

$$-\frac{1}{\mu} < \frac{\chi(\mu)}{\mu} - \frac{\chi(\nu)}{\nu} < \frac{1}{\nu}.$$

Hierdurch zeigt sich, dass die Brüche:

$$\frac{\chi(k)}{k} \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

eine Reihe von Zahlen bilden, welche mit wachsendem k gegen einander convergiren.

Da sich $\frac{\chi(\nu)}{\nu}$ von $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$ um höchstens $\frac{1}{\nu}$ unterscheidet, so stehen die zwei Reihen:

$$\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}, \quad \frac{\chi(k)}{k} \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

in *der* Beziehung zu einander, dass die Zahlen beider Reihen — wie immer die Aequivalenz-Intervalle gewählt werden mögen — in ein und dasselbe Aequivalenz-Intervall convergiren, und für beliebig gewählte Aequivalenz-Intervalle:

$$(\tau_{2h-1}, \quad \tau_{2h+1}) \qquad (h=1,2,3,\ldots)$$

lässt sich daher stets die Zahl n so gross wählen, dass die Aequivalenz:

$$\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} \sim \frac{\chi(n)}{n}$$

besteht. Es ist demnach die bei der üblichen Bezeichnungsweise durch die Gleichung:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} - \frac{\chi(n)}{n}\right) = 0$$

ausgedrückte Beziehung der beiden Reihen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$, $\frac{\chi(k)}{k}$, welche hier durch die für jede beliebige Festsetzung von Aequivalenz-Intervallen geltende Aequivalenz:

$$\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} \sim \frac{\chi(n)}{n}$$

dargestellt wird.

Die Reihe der Brüche $\frac{\chi(k)}{k}$, welche im Sinne der Aequivalenz die Reihe der Brüche $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ vollständig ersetzt, hat insofern einen besonderen Typus, als *erstens* die Nenner der Brüche nicht irgend welche durch den Stellenzeiger k bestimmte Zahlen $\psi(k)$ sondern eben diese Zahlen $k = 1, 2, 3, \ldots$ selbst sind und *zweitens* die Convergenzbedingung $(\mathfrak{C}_0)$ des art. XXXVIII:

$$\frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)} - \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = \varepsilon\tau \qquad (m_\tau < n;\ -1 < \varepsilon < 1)$$

in folgende übergeht:

$$(\mathfrak{C}_0) \qquad \frac{\chi(m)}{m} - \frac{\chi(n)}{n} = \frac{\varepsilon}{m} \qquad (m < n;\ -1 < \varepsilon < 1),$$

so dass hier die durch den Werth von τ bestimmte, oben mit m_τ bezeichnete Zahl, für $\tau = \frac{1}{m}$, gleich m selbst, also:

$$m_{\frac{1}{m}} = m$$

ist.

Die mit $\chi(k)$ bezeichnete Function von k, welche für die Reihe der Brüche $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ offenbar „charakteristisch" ist, bildet die Grundlage der *Christoffel*'schen Untersuchungen*) über „Irrationalzahlen", und es ist die Reihe der Differenzen:

$$\chi(k) - \chi(k-1) \qquad (k=1,2,3,\ldots),$$

welche Hr. *Christoffel* als „Charakteristik" eingeführt hat.

Die Differenz zweier beliebiger Grössen weicht von der Differenz ihrer nächsten ganzen Zahlen höchstens um einen echten Bruch ab; es ist daher:

$$\left[\frac{\nu\varphi(n)}{\psi(n)}\right] - \left[\frac{\mu\varphi(n)}{\psi(n)}\right] = (\nu - \mu)\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} + \varepsilon \qquad (-1 < \varepsilon < +1)$$

---

*) Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen. (Annali di Matematica pura ed applicata.)[1])

[1]) *Christoffel*, Werke, Bd. II, S. 216.

und folglich:

$$\chi(\nu) - \chi(\mu) = (\nu - \mu)\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} + \varepsilon \qquad (-1 < \varepsilon < +1).$$

Hieraus geht hervor, dass, wenn:

$$\chi(\nu) - \chi(\mu) - \left[(\nu - \mu)\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}\right] = \sigma_{\mu,\nu}$$

gesetzt wird, die Grösse $\sigma_{\mu,\nu}$ nur den Werth 0 oder 1 haben kann, und die Gleichung:

$(\overline{\mathfrak{D}})$
$$\chi(\nu) - \chi(\mu) = \chi(\nu - \mu) + \sigma_{\mu,\nu} \qquad (\sigma_{\mu,\nu} = 0 \text{ oder } \sigma_{\mu,\nu} = 1)$$

drückt also eine zwischen irgend drei Werthen $\chi(\mu)$, $\chi(\nu)$, $\chi(\nu - \mu)$ nothwendig bestehende Relation aus.*)

Setzt man $\mu = \nu - 1$, so sieht man, dass eine der beiden Gleichungen:

$$\chi(\nu) - \chi(\nu - 1) = \left[\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}\right], \quad \chi(\nu) - \chi(\nu - 1) = \left[\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}\right] + 1$$

stattfinden muss. Ist nun $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$ ein *echter* Bruch, also $\left[\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}\right] = 0$, so schreiten die Zahlen $\chi(k)$ beim Übergang von einem Argument zum nächstgrösseren höchstens um eine Einheit fort, und darum sind die einzelnen Elemente der *Christoffel*'schen „Charakteristiken“ nur 0 oder 1.

Setzt man in der obigen Formel $(\overline{\mathfrak{D}})$:

$$\nu = h\mu \qquad (h = 2, 3, \ldots \lambda)$$

und summirt über alle angegebenen Werthe von h, so kommt:

$$\chi(\lambda\mu) = \nu\chi(\mu) + \sum_h \sigma_{\mu,h\mu} \qquad (h = 2, 3, \ldots \lambda)$$

und, da jedes σ nur den Werth 0 oder 1 hat:

$$0 \leqq \chi(\lambda\mu) - \lambda\chi(\mu) < \lambda.$$

Es ergiebt sich also, dass für beliebige ganze Zahlen λ, μ die Relation:

$$\chi(\mu) \leqq \frac{1}{\lambda}\chi(\lambda\mu) < 1 + \chi(\mu)$$

oder:

$(\mathfrak{E})$
$$\chi(\mu) = \left[\frac{\chi(\lambda\mu)}{\lambda}\right]$$

---

*) Vergl. die citirte Abhandlung des Hrn. *Christoffel*.

besteht. Eben diese Relation lässt sich direct, d. h. ohne auf die Formel $(\overline{\mathfrak{D}})$ zurückzugehen, in folgender Weise herleiten.

Für die grössten Ganzen von Brüchen findet bekanntlich die Gleichung:

$$\left[\frac{t}{rs}\right] = \left[\frac{1}{r}\left[\frac{t}{s}\right]\right]$$

statt, in welcher r, s, t beliebige positive ganze Zahlen bedeuten. Wird hierin:

$$r = d, \quad s = \psi(n), \quad t = k\varphi(n)$$

gesetzt und für d ein Divisor von k genommen, so ergiebt sich ganz unmittelbar für zwei Functionen $\chi(d)$, $\chi(k)$ die Relation:

$(\mathfrak{E})$
$$\chi\left(\frac{k}{d}\right) = \left[\frac{\chi(k)}{d}\right],$$

welche mit der oben aus der Formel $(\overline{\mathfrak{D}})$ hergeleiteten übereinstimmt und welche zeigt, dass sich aus $\chi(k)$ jede Function χ, deren Argument ein Divisor von k ist, bestimmen lässt. Die Relation $(\mathfrak{E})$ zeigt ferner, dass die Ungleichheit:

$(\mathfrak{E}')$
$$0 \leqq \chi(k) - d\chi\left(\frac{k}{d}\right) < d$$

besteht, und dass folglich das Intervall von der Grösse $\left(\frac{1}{k}\right)$:

$$\left(\frac{1}{k}\chi(k), \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\chi(k)\right)$$

ganz innerhalb des Intervalls von der Grösse $\frac{d}{k}$:

$$\left(\frac{d}{k}\chi\left(\frac{k}{d}\right), \quad \frac{d}{k} + \frac{d}{k}\chi\left(\frac{k}{d}\right)\right)$$

liegt. Denn dies geht aus den Beziehungen:

$$\frac{d}{k}\chi\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{d}{k}\left[\frac{\chi(k)}{d}\right] \leqq \frac{1}{k}\chi(k),$$

$$\frac{d}{k} + \frac{d}{k}\chi\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{d}{k} + \frac{d}{k}\left[\frac{\chi(k)}{d}\right] \geqq \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\chi(k)$$

hervor, welche offenbar zwischen den Grenzen jener beiden Intervalle bestehen.

Hieraus folgt, dass, wenn λ, μ, ν beliebige ganze Zahlen bedeuten, der gemeinsame Theil der beiden Intervalle:

$$\left(\frac{1}{\lambda\mu}\chi(\lambda\mu), \frac{1}{\lambda\mu} + \frac{1}{\lambda\mu}\chi(\lambda\mu)\right), \quad \left(\frac{1}{\lambda\nu}\chi(\lambda\nu), \frac{1}{\lambda\nu} + \frac{1}{\lambda\nu}\chi(\lambda\nu)\right)$$

durch das Intervall:

$$\left(\frac{1}{\lambda\mu\nu}\chi(\lambda\mu\nu),\ \frac{1}{\lambda\mu\nu}+\frac{1}{\lambda\mu\nu}\chi(\lambda\mu\nu)\right)$$

gebildet wird.

XLI. Die Aufgabe der *Bildung* aller Reihen von Zahlen:

$$\frac{\chi(k)}{k} \qquad (k=1,2,3,\ldots),$$

welche mit wachsendem k gegen einander convergiren, findet in den vorstehenden Auseinandersetzungen ihre Lösung. Da nämlich für:

$$\chi(1),\ \chi(2),\ \chi(3),\ \ldots\ \chi(\nu)$$

solche ganze Zahlen genommen werden müssen, dass die Relation ($\mathfrak{E}$) besteht, wenn man darin für $\frac{k}{d}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$ und für k das kleinste Vielfache aller dieser Zahlen $2, 3, \ldots \nu$ setzt, so genügt es, den Werth von χ für diese eine Zahl zu bestimmen.

Es sei nun ω_ν die kleinste Zahl, welche durch alle Zahlen $2, 3, \ldots \nu$ theilbar ist. Alsdann ist ω_ν durch $\omega_{\nu-1}$ theilbar, und es ist gemäss den Ungleichheiten ($\mathfrak{E}'$):

$$(\mathfrak{E}'') \qquad 0 \leqq \chi(\omega_\nu) - \frac{\omega_\nu}{\omega_{\nu-1}}\chi(\omega_{\nu-1}) < \frac{\omega_\nu}{\omega_{\nu-1}}.$$

Setzt man also für alle Zahlen $k = 2, 3, 4, \ldots \nu$:

$$(\mathfrak{E}''') \qquad \chi(\omega_k) - \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}\chi(\omega_{k-1}) = \zeta_k,$$

so müssen die ganzen Zahlen ζ_k die Bedingungen:

$$0 \leqq \zeta_k < \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}$$

erfüllen. Summirt man nunmehr in der aus ($\mathfrak{E}'''$) hervorgehenden Formel:

$$\frac{\chi(\omega_k)}{\omega_k} = \frac{\zeta_k}{\omega_k} + \frac{\chi(\omega_{k-1})}{\omega_{k-1}} \qquad (k=2,3,\ldots\nu)$$

über alle Werthe $k = 2, 3, \ldots \nu$, so resultirt, wenn man berücksichtigt, dass $\omega_1 = 1$ ist, die Formel:

$$(\mathfrak{F}) \qquad \frac{\chi(\omega_\nu)}{\omega_\nu} = \chi(1) + \sum_{k=2}^{k=\nu}\frac{\zeta_k}{\omega_k} \qquad \left(0 \leqq \zeta_k < \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}\right),$$

welche die Bestimmung der Zahlen $\chi(\omega_\nu)$ aus den Zahlen ζ enthält.

Nimmt man in dieser Formel ($\mathfrak{F}$) die ganze Zahl $\chi(1)$ ganz beliebig und die Zahlen ζ_k irgend wie gemäss der Ungleichheitsbedingung:

$$0 \leqq \zeta_k < \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}$$

an, so genügen die Zahlen $\frac{\chi(k)}{k}$, welche sich daraus mittels der Gleichung:

$$\chi(k) = \left[\frac{k}{\omega_k}\chi(\omega_k)\right] = k\chi(1) + \left[\sum_h \frac{k\zeta_h}{\omega_h}\right] \qquad (h=2,3,\ldots k)$$

bestimmen, der Convergenzbedingung:

$$\left|\frac{\chi(h)}{h} - \frac{\chi(k)}{k}\right| < \frac{1}{h} \qquad (h<k)$$

und convergiren also stets mit wachsendem k gegen einander; die Divergenzbedingung ($\mathfrak{D}$) beschränkt aber noch in gewisser Weise die Wahl der Zahlen ζ_k.

Gemäss der erwähnten Bedingung soll nämlich für jede rationale Zahl r eine Zahl m so bestimmt werden können, dass:

$$\left|r - \frac{\chi(m)}{m}\right| > \frac{1}{m}$$

wird. Ist nun ω_μ die kleinste der Zahlen ω, welche den Nenner von r als Theiler enthält, so kann man:

$$r = \frac{g}{\omega_\mu}$$

setzen, wo g eine ganze Zahl bedeutet. Alsdann kann für m eine Zahl ω_ν und dabei $\nu > \mu$ genommen werden. Damit nun:

$$\left|r - \frac{\chi(m)}{m}\right| = \left|\frac{g}{\omega_\mu} - \frac{\chi(\omega_\nu)}{\omega_\nu}\right| > \frac{1}{\omega_\nu}$$

werde, braucht nur die Ungleichheitsbedingung:

$$\frac{1}{\omega_\nu} < \frac{\chi(\omega_\nu)}{\omega_\nu} - \frac{\chi(\omega_\mu)}{\omega_\mu} < \frac{1}{\omega_\mu} - \frac{1}{\omega_\nu}$$

erfüllt zu sein, da alsdann für $g \leqq \chi(\omega_\mu)$:

$$\frac{\chi(\omega_\nu)}{\omega_\nu} - \frac{g}{\omega_\mu} = \frac{\chi(\omega_\nu)}{\omega_\nu} - \frac{\chi(\omega_\mu)}{\omega_\mu} + \frac{\chi(\omega_\mu) - g}{\omega_\mu} > \frac{1}{\omega_\nu}$$

und für $g > \chi(\omega_\mu)$, d. h. also für $g - \chi(\omega_\mu) \geqq 1$:

$$\frac{g}{\omega_\mu} - \frac{\chi(\omega_\nu)}{\omega_\nu} = \frac{g - \chi(\omega_\mu)}{\omega_\mu} + \frac{\chi(\omega_\mu)}{\omega_\mu} - \frac{\chi(\omega_\nu)}{\omega_\nu} > \frac{1}{\omega_\nu}$$

ist. Führt man in jener Ungleichheitsbedingung an Stelle der Zahlen χ die Zahlen ζ ein, so geht dieselbe in folgende über:

$$\frac{1}{\omega_\nu} < \sum_{k=\mu+1}^{k=\nu} \frac{\zeta_k}{\omega_k} < \frac{1}{\omega_\mu} - \frac{1}{\omega_\nu},$$

und diese ist offenbar stets erfüllt, wenn nicht alle Zahlen:

$$\zeta_{\mu+1}, \zeta_{\mu+2}, \dots \zeta_{\nu-1}$$

gleichzeitig den kleinsten oder den grössten Werth haben, welchen sie vermöge der Bedingungen:

$$0 \leqq \zeta_k < \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}$$

überhaupt annehmen können. Sobald also nur nicht alle Zahlen ζ_k, von einem gewissen Werthe $k = \mu$ an, gleichzeitig ihren kleinsten oder ihren grössten Werth haben, kann die Zahl ν stets so gewählt werden, dass die Ungleichheitsbedingung:

$$\frac{1}{\omega_\nu} < \frac{\chi(\omega_\nu)}{\omega_\nu} - \frac{\chi(\omega_\mu)}{\omega_\mu} < \frac{1}{\omega_\mu} - \frac{1}{\omega_\nu}$$

und demnach auch die Divergenzbedingung:

$$\left| r - \frac{\chi(\omega_\nu)}{\omega_\nu} \right| > \frac{1}{\omega_\nu}$$

besteht. Durch die Divergenzbedingung ($\mathfrak{D}$) wird also die Wahl von $\zeta_2, \zeta_3, \dots$, welche an die Bedingung:

$$0 \leqq \zeta_k < \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}$$

geknüpft war, nur noch dahin beschränkt,

> dass nicht *allen* auf irgend eine Zahl ζ_μ folgenden Zahlen $\zeta_{\mu+1}, \zeta_{\mu+2}, \dots$ gleichzeitig der kleinste oder der grösste Werth beigelegt werden darf.

Die hiermit angegebenen Bestimmungen für die Wahl der Zahlen ζ_k sind nothwendig und hinreichend dafür,

> dass die aus der Formel ($\mathfrak{F}$) hervorgehenden Zahlen $\frac{\chi(k)}{k}$ gegen einander, und *nicht* gegen irgend eine rationale Zahl convergiren.

Alle Gesetze der Zahlen $\chi(k)$ müssen sich also aus deren Darstellung in der Form:

$$(\mathfrak{F}^0) \qquad k\chi(1) + \left[\sum_h \frac{k\zeta_h}{\omega_h}\right] \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\dots k)}$$

ergeben, wo die Zahlen ζ_h irgend welche der Bedingung:

$$0 \leqq \zeta_h < \frac{\omega_h}{\omega_{h-1}}$$

genügende Zahlen bedeuten, mit einzigem Ausschluss solcher, für die, wenn μ irgend eine ganze Zahl bedeutet:

$$\zeta_h = 0 \qquad {\scriptstyle (h>\mu)}$$

oder:

$$\zeta_h = \frac{\omega_h}{\omega_{h-1}} - 1 \qquad {\scriptstyle (h>\mu)}$$

ist.

Die obige in der Gleichung ($\mathfrak{F}$) enthaltene Bestimmung der Zahlen $\chi(k)$ ist nicht die einzig mögliche, sondern nur die möglichst einfache. Die allgemeinste vollständige Bestimmung der Zahlen $\chi(k)$ ergiebt sich, wenn man in der obigen Entwickelung an Stelle jener Zahlen $1, \omega_2, \omega_3, \dots$ irgend welche Zahlen $1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ nimmt, welche die Eigenschaft haben:

> dass erstens jede durch die vorhergehende theilbar ist, und dass zweitens *alle* ganzen Zahlen Divisoren von Zahlen Ω sind.

Bezeichnet man die verschiedenen Divisoren von Ω_ν, die nicht zugleich Divisoren von $\Omega_{\nu-1}$, sind, mit:

$$\mathfrak{n}_{\nu 1}, \mathfrak{n}_{\nu 2}, \mathfrak{n}_{\nu 3}, \dots,$$

so kann man sich, da gemäss der zweiten Voraussetzung unter den Zahlen $\mathfrak{n}$ *alle* ganzen Zahlen vorkommen, diese in der Reihenfolge:

$$\mathfrak{n}_{21}, \mathfrak{n}_{22}, \dots \mathfrak{n}_{2a}; \mathfrak{n}_{31}, \mathfrak{n}_{32}, \dots \mathfrak{n}_{3b}; \mathfrak{n}_{41}, \mathfrak{n}_{42}, \dots \mathfrak{n}_{4c}; \dots$$

denken, und die Zahl Ω_ν ist dann als das kleinste Vielfache aller derjenigen Zahlen $\mathfrak{n}$ zu definiren, deren erster Index eine der Zahlen $2, 3, \dots \nu$ ist. Wenn man andrerseits die sämmtlichen positiven ganzen Zahlen $2, 3, 4, \dots$ nach irgend einem Gesetze ordnet und alsdann für Ω_2 das kleinste Vielfache der a ersten Zahlen, für Ω_3 das kleinste Vielfache der $a+b$ ersten Zahlen, für Ω_4 das kleinste Vielfache der $a+b+c$ ersten Zahlen usf. nimmt, so erhält man stets Zahlen Ω von der oben angegebenen Beschaffenheit.

Ersetzt man in der obigen Entwickelung die Zahlen ω durch irgend welche der allgemeinen Zahlen Ω, so resultirt unmittelbar die Formel:

$$(\mathfrak{F}) \qquad \frac{\chi(\Omega_\nu)}{\Omega_\nu} = \chi(1) + \sum_{k=2}^{k=\nu} \frac{Z_k}{\Omega_k},$$

welche die obige ihr vollständig analoge Formel $(\mathfrak{F})$ als speziellen Fall enthält. Die Wahl der Coefficienten Z_k ist hierbei nur durch die Ungleichheitsbedingung:

$$0 \leqq Z_k < \frac{\Omega_k}{\Omega_{k-1}}$$

und ausserdem dadurch beschränkt, dass nicht die sämmtlichen auf irgend ein Z_μ folgenden Zahlen Z_k ihren kleinsten oder ihren grössten Werth haben dürfen.

Die hieraus sich ergebenden Zahlen $\frac{\chi(k)}{k}$ werden durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{F}^0) \qquad \chi(k) = k\chi(1) + \Big[\sum_h \frac{kZ_h}{\Omega_h}\Big] \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\dots k)}$$

definirt, in welcher die Summation nur bis zu einem Werthe von h zu erstrecken ist, für welchen Ω_h durch k theilbar wird. Auch die so bestimmten Zahlen $\frac{\chi(k)}{k}$ konvergiren stets mit wachsendem k gegen einander und niemals gegen eine rationale Zahl.

Den für die Zahlen Ω_ν aufgestellten Bedingungen wird offenbar entsprochen, wenn:

$$\Omega_\nu = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \nu$$

genommen wird, und man kann daher die Zahlen $\chi(k)$ durch die Gleichung:

$$\chi(k) = k\chi(1) + \Big[\sum_h \frac{km_h}{h!}\Big] \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\dots k)}$$

bestimmen, wenn man die Zahlen m_h irgendwie gemäss der Ungleichheitsbedingung:

$$0 \leqq m_h < h$$

wählt, mit alleinigem Ausschluss von Werthen:

$$m_{\mu+1} = 0, \quad m_{\mu+2} = 0, \qquad m_{\mu+3} = 0, \dots$$
$$m_{\mu+1} = \mu, \quad m_{\mu+2} = \mu + 1, \quad m_{\mu+3} = \mu + 2, \dots,$$

da bei einer solchen Bestimmung der Zahlen m die Zahlen $\frac{\chi(k)}{k}$ gegen einen rationalen Werth konvergiren würden.

Hält man nur die erste der beiden für die Zahlen Ω angenommenen Eigenschaften fest und wählt also irgend welche Zahlen w_ν mit der einzigen Maassgabe, dass $w_1 = 1$ und für jede Zahl ν:

$$w_\nu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ w_{\nu-1})$$

sein soll, so muss auch dann gemäss der Ungleichheit $(\mathfrak{E}')$:

$$0 \leqq \chi(w_\nu) - \frac{w_\nu}{w_{\nu-1}} \chi(w_{\nu-1}) < \frac{w_\nu}{w_{\nu-1}}$$

sein. Setzt man also:

$$\chi(w_\nu) - \frac{w_\nu}{w_{\nu-1}} \chi(w_{\nu-1}) = s_\nu,$$

so wird:

$$0 \leqq s_\nu < \frac{w_\nu}{w_{\nu-1}}$$

und:

$$(\mathfrak{H}) \qquad \frac{\chi(w_\nu)}{w_\nu} = \chi(1) + \sum_{k=2}^{k=\nu} \frac{s_k}{w_k} \qquad \Big(0 \leqq s_k < \frac{w_k}{w_{k-1}}\Big).$$

Dieser Ausdruck genügt aber auch, wenn man für $s_2, s_3, \dots s_\nu$ irgend welche die Ungleichheiten:

$$0 \leqq s_k < \frac{w_k}{w_{k-1}} \qquad {\scriptstyle (k=2,3,\dots \nu)}$$

befriedigende Zahlen nimmt, zur allgemeinsten Bestimmung der Zahlen $\chi(w_\nu)$, d. h. derjenigen Werthe der Function χ, deren Argumente eben jene besonderen Zahlen $w_2, w_3, w_4, \dots$ sind. Jedoch sind damit nicht in so einfacher und vollständiger Weise, wie bei jener Bestimmung durch die Gleichung $(\mathfrak{F})$, die Werthe der Function χ für *beliebige* Argumente k gegeben.

Der hier hervortretende Unterschied zwischen den angegebenen Bestimmungsweisen der Function χ ist in den Beziehungen begründet, welche zwischen den Zahlenwerthen:

$$\chi(1), \chi(2), \chi(3), \dots \chi(k), \dots$$

bestehen müssen, sofern:

$$\chi(1), \frac{\chi(2)}{2}, \frac{\chi(3)}{3}, \dots \frac{\chi(k)}{k}, \dots$$

eine Reihe gegen einander convergirender Zahlen bilden sollen. Dass solche Beziehungen überhaupt bestehen müssen, dass also nicht etwa die Werthe von

$\chi(1), \chi(2), \chi(3), \ldots$ sämmtlich willkürlich angenommen werden können, zeigt sich in der oben abgeleiteten Gleichung:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \chi(\nu) = \chi(\mu) + \chi(\nu - \mu) + \sigma_{\mu,\nu} \qquad (\sigma_{\mu,\nu} = 0 \text{ oder } \sigma_{\mu,\nu} = 1)$$

Dies kann auch in der Form:

$$0 \leqq \chi(\nu) - \chi(\mu) - \chi(\nu - \mu) \leqq 1$$

als Ungleichheitsbedingung dargestellt werden und erscheint so als eine Norm, an welche die Wahl von Werthen für:

$$\chi(1), \chi(2)\ \chi(3), \ldots$$

gebunden ist.

Es ist nun schon oben gezeigt worden, dass aus dieser Ungleichheitsbedingung die folgende:

$$0 \leqq \frac{\chi(k)}{d} - \chi\left(\frac{k}{d}\right) < 1 \qquad (k \equiv 0 \pmod{d})$$

hervorgeht, so dass diese als eine speciellere, in jener allgemeineren enthaltene Bedingung zu betrachten ist. Auch ist in derselben offenbar als eine speciellere Bedingung die folgende:

$$0 \leqq \chi(k) - \chi(k-1) - \chi(1) \leqq 1$$

enthalten. Aber diese beiden specielleren Bedingungen sind zur Bestimmung der Werthe $\chi(k)$ nicht in gleicher Weise geeignet. Wählt man nämlich die Werthe von χ für auf einander folgende Argumente gemäss den Bedingungen:

$$0 \leqq \chi(k) - \chi(k-1) - \chi(1) \leqq 1,$$

so sind damit keineswegs immer für je zwei Zahlen μ, ν die allgemeineren Ungleichheiten:

$$0 \leqq \chi(\nu) - \chi(\mu) - \chi(\nu - \mu) \leqq 1$$

erfüllt. Wenn aber die Werthe von χ für eine Reihe von Argumenten $w_1, w_2, w_3, \ldots$ von denen jedes ein Vielfaches des vorhergehenden ist, irgend wie gemäss den aus:

$$0 \leqq \frac{\chi(k)}{d} - \chi\left(\frac{k}{d}\right) < 1 \qquad (k \equiv 0 \pmod{d})$$

für $k = w_\nu$, $d = \frac{w_\nu}{w_{\nu-1}}$ hervorgehenden Bedingungen:

$$0 \leqq \frac{w_{\nu-1}}{w_\nu}\chi(w_\nu) - \chi(w_{\nu-1}) < 1 \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots)$$

gewählt werden, so genügen die Werthe:

$$\chi(w_1), \chi(w_2), \chi(w_3), \ldots$$

eben nur denjenigen Bedingungen:

$$0 \leqq \frac{\chi(k)}{d} - \chi\left(\frac{k}{d}\right) < 1,$$

bei denen die Zahlen k und d sich unter den Zahlen $w_1, w_2, w_3, \ldots$ finden. Es handelt sich also noch darum, auch die Werthe von χ für alle nicht unter den Zahlen w vorkommenden Argumente den Bedingungen gemäss zu bestimmen. Dies geschieht, wie oben, mittels der Gleichung:

$$\chi(n) = \left[\frac{n\chi(w_\nu)}{w_\nu}\right],$$

sobald unter den Zahlen $w_1, w_2, w_3, \ldots$ eine Zahl w_ν vorkommt, welche n als Divisor enthält. Wenn dies aber nicht der Fall ist, so kann $\chi(n)$ nicht immer aus den Zahlen $\chi(w)$ bestimmt werden, d. h. es lässt sich dann nicht immer eine Zahl w von der Beschaffenheit finden, dass $\chi(k)$ durch $\chi(w_\nu)$ eindeutig bestimmt wäre. Denn wenn eine Reihe von Zahlen:

$$\frac{\chi(w_1)}{w_1}, \frac{\chi(w_2)}{w_2}, \frac{\chi(w_3)}{w_3}, \ldots$$

genommen wird, welche gegen einen (reducirten) Bruch m convergiren, so wird $\chi(w_k)$ durch die Gleichung:

$$\chi(w_k) = \left[\frac{w_k l}{m}\right]$$

bestimmt, und es lässt sich dann keine noch so grosse Zahl w_ν finden, für welche — wenn n ein Vielfaches von m ist — $\chi(n)$ durch jene Gleichung:

$$\chi(n) = \left[\frac{n\chi(w_\nu)}{w_\nu}\right]$$

richtig bestimmt wird. Der richtige Werth von $\chi(n)$ ist nämlich, gemäss der Definition der Function χ, durch die Gleichung:

$$\chi(n) = \left[n \cdot \frac{l}{m}\right] = \frac{ln}{m}$$

gegeben, während offenbar:

$$\left[\frac{n\chi(w_\nu)}{w_\nu}\right] = \left[\frac{n}{w_\nu}\left[\frac{w_\nu l}{m}\right]\right] < \frac{ln}{m}$$

wird, sobald w_ν kein Vielfaches von m ist.

Darum eben sind oben die Zahlen Ω, welche an Stelle der Zahlen w zu nehmen sind, noch der Bedingung unterworfen worden, dass *alle* ganzen Zahlen n in Zahlen Ω als Divisoren enthalten seien; und die Besonderheit der Reihen

$$\sum_k \frac{Z_k}{\Omega_k} \qquad \left(0 \leqq Z_k < \frac{\Omega_k}{\Omega_{k-1}};\ k=2,3,4,\ldots\right)$$

macht sich vor allem darin geltend, dass diejenigen, welche sich mit wachsender Gliederzahl keinem rationalen Werthe nähern, sich in der oben angegebenen, einfachen Weise von den anderen scheiden lassen. Schliesst man nämlich, wie es offenbar zulässig ist, überhaupt die Reihen, in denen die Zahlen Z_k von $k = \mu + 1$ ab durchweg den grössten Werth haben, aus, so sind es nur die bei irgend einem Werth $k = \nu$ *abbrechenden* Reihen:

$$\sum_k \frac{Z_k}{\Omega_k} \qquad \left(0 \leqq Z_k < \frac{\Omega_k}{\Omega_{k-1}};\ k=2,3,4,\ldots\right),$$

durch welche rationale Werthe dargestellt werden können.[1])

[1]) Am Schlusse dieser Arbeit steht der Vermerk „Fortsetzung folgt". Eine Fortsetzung ist aber nicht erschienen und im Nachlasse *Kronecker*'s hat sich auch kein Entwurf für eine Weiterführung dieser Untersuchungen gefunden. H

BEMERKUNGEN ÜBER DIE VON GAUSS MIT $[x]$ BEZEICHNETE ARITHMETISCHE FUNCTION EINER REELLEN GRÖSSE x

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 106. S. 346—348. (1890)

BEMERKUNGEN ÜBER DIE VON GAUSS MIT $[x]$ BEZEICHNETE ARITHMETISCHE FUNCTION EINER REELLEN GRÖSSE x.

Bedeutet x eine reelle positive Grösse und r irgend eine ganze Zahl, die grösser als x ist, so drückt die Summe:

$$\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=r-1}(1+\operatorname{sgn.}(x-h)),$$

falls x keine ganze Zahl ist, offenbar die Anzahl derjenigen positiven ganzen Zahlen aus, die kleiner als x sind, während sie für eine ganze Zahl x den Werth $x-\frac{1}{2}$ hat. Hieraus resultirt unmittelbar unter der Voraussetzung, dass x keinen ganzzahligen Werth hat, für die von *Legendre* mit $E(x)$, von *Gauss* mit $[x]$ bezeichnete zahlentheoretische Function von x die Darstellung:

$$(A) \qquad E(x)=[x]=\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=r-1}(1+\operatorname{sgn.}(x-h)),$$

welche ich in meinen Universitätsvorlesungen so wie in früheren Aufsätzen vielfach angewandt habe*), und welche auch bei der Herleitung der in dem vorhergehenden Aufsatz des Herrn *Stern*[1]) vorkommenden Formeln mit Vortheil benutzt werden kann.

Um dies an einigen dieser Formeln zu zeigen, wähle ich zuvörderst die erste, und nehme als Ausgangspunkt die Gleichung:

$$(B) \qquad \left[\frac{km}{n}\right]=\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=m-1}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right)\right) \qquad (k=1,2,\ldots n-1),$$

*) z. B. S. 348 des 104. Bandes dieses Journals.[2])

[1]) *Stern, M. A.*, Zur Theorie der Function $E(x)$. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 106, S. 337—345. H

[2]) Bd. III$_1$, S. 137 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H

in welcher, wie überall im Folgenden, m und n ungerade Zahlen bedeuten. Hiernach wird:

$$\sum_{k}\left[\frac{km}{n}\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1) + \frac{1}{2}\sum_{h,k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right) \qquad \binom{h=1,2,\ldots m-1}{k=1,2,\ldots n-1},$$

oder, wenn man in der Summe auf der rechten Seite die Summationsbuchstaben h, k beziehungsweise durch $m-h$, $n-k$ ersetzt:

$$\sum_{k}\left[\frac{km}{n}\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1) - \frac{1}{2}\sum\operatorname{sgn.}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right),$$

und es resultirt daher die Formel:

$$(C) \qquad \sum_{k=1}^{k=n-1}\left[\frac{km}{n}\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1).$$

Wenn ferner k und k' irgend zwei positive Zahlen bedeuten, deren Summe gleich $\frac{1}{2}(n+1)$ ist, so ist gemäss der Gleichung (A):

$$(D) \qquad \left[\frac{k'm}{n}-\frac{m}{2n}\right] = \left[\frac{m}{2}-\frac{km}{n}\right] = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}\left(1-\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$\left[\frac{km}{n}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{km}{n}+\frac{1}{2}-h\right)\right),$$

und wenn in dieser letzteren Gleichung der Summationsbuchstabe h durch $\frac{1}{2}(m+1)-h$ ersetzt wird:

$$(E) \qquad \left[\frac{km}{n}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Die von Herrn *Stern* auf S. 343 aus Herrn *Busche*'s Dissertation angeführte Relation:

$$(F) \qquad \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}\left[\frac{hn}{m}+\frac{1}{2}\right] = \sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{km}{n}+\frac{1}{2}\right]$$

tritt durch diese Gleichung (E) in Evidenz, ebenso durch die Verbindung der Gleichungen (D) und (E) die Relation:

$$\left[\frac{m}{2}-\frac{km}{n}\right] + \left[\frac{km}{n}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}(m-1),$$

und also auch die von Herrn *Stern* mit (17) bezeichnete Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{m}{2}-\frac{km}{n}\right] + \sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{km}{n}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}(m-1)(n-1).$$

Bezeichnet man mit $N(x)$ die der reellen Grösse x *nächste* ganze Zahl, so ist, falls $x+\frac{1}{2}$ keinen ganzzahligen Werth hat:

$$N(x) = [x+\tfrac{1}{2}],$$

und die Relationen (E) und (F) können daher in folgender Weise dargestellt werden:

$$(E') \qquad N\left(\frac{km}{n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$(F') \qquad \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)} N\left(\frac{hn}{m}\right) = \sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} N\left(\frac{km}{n}\right).$$

Dass nun, wie Herr *Stern* in der Anmerkung auf S. 342 anführt, die Summe auf jeder der beiden Seiten der Formel (F') gleich einer *geraden* Zahl ist, erkennt man daraus, dass vermöge der Definition von $N\left(\frac{km}{n}\right)$ die Differenz:

$$mk - nN\left(\frac{km}{n}\right)$$

absolut kleiner als $\frac{1}{2}n$ ist. Bezeichnet man nämlich diese Differenz, welche also eine der Zahlen $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm \frac{1}{2}(n-1)$ ist, mit k^0, so ist:

$$mk - nN\left(\frac{km}{n}\right) = k^0, \quad \text{also} \quad N\left(\frac{km}{n}\right) \equiv k - k^0 \pmod{2}$$

und folglich:

$$(G) \qquad \sum_{k} N\left(\frac{km}{n}\right) \equiv \sum_{k} k - \sum_{k^0} k^0 \equiv 0 \pmod{2} \qquad (k, k^0 = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

oder auch wegen der Formel (E'):

$$(G') \qquad \sum_{h,k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \equiv \frac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod{4} \quad \binom{h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1)}{k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)}.$$

Der hier gegebene Nachweis findet sich bereits im Art. III meines im Sitzungsbericht der Berliner Akademie vom 1. Mai 1884 abgedruckten Aufsatzes[1]); die Relation (G') selbst geht schon aus den Entwickelungen hervor, welche ich in

[1]) Bd. II, S. 504 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

meiner im Monatsbericht der Berliner Akademie vom Juni 1876 abgedruckten Mittheilung gegeben habe.[1]) Denn die aus den Gleichungen:

$$\left(\frac{m}{n}\right)=\prod_k \frac{\sin\frac{2mk\pi}{n}}{\sin\frac{2k\pi}{n}}=\prod_k \frac{\sin\frac{mk\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}} \qquad \left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

hervorgehende Formel:

$$\prod_{h,k} 2\sin\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}\right)2\pi \prod_{h,k} 2\sin\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)2\pi=\prod_{h,k} 2\sin\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}\right)\pi\cdot\prod_{h,k} 2\sin\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\pi$$
$$\left(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\quad k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

zeigt unmittelbar, dass das erste Product auf der linken Seite positiv und dass also die Anzahl der Zahlenpaare h, k, wofür:

$$\frac{h}{m}+\frac{k}{n}>\frac{1}{2}$$

ist, *gerade* sein muss. Bezeichnet man diese Anzahl mit $2l$, so besteht offenbar die Gleichung:

$$\sum_{h,k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{4}(m-1)(n-1)-4l \qquad \binom{h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1)}{k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)},$$

welche dasselbe besagt, wie die oben mit (G') bezeichnete Congruenz. Dass in eben dieser Congruenz (G') die in dem *Stern*'schen Aufsatze (S. 342) hergeleitete Relation:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}\right]\equiv\frac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod{2}$$

enthalten ist, wird ersichtlich, wenn der Werth der Summe auf der linken Seite gemäss der obigen Gleichung (D) auf die Form:

$$\frac{1}{8}(m-1)(n-1)+\frac{1}{2}\sum_{h,k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \qquad \binom{h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1)}{k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)}$$

gebracht wird.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die in dem *Stern*'schen Aufsatze mit (9) bezeichnete Formel:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{2km}{n}\right]+\sum_{h=1}^{h=m-1}\left[\frac{hn}{2m}\right]=\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

[1]) Bd. II, S. 11 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken.

bei jener durch die Gleichung (A) gegebenen Darstellung der Function $[x]$ in vollkommene Evidenz tritt, da alsdann die erstere Summe auf der linken Seite durch:

$$\frac{1}{2}\sum_{h,k}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{2km}{n}-h\right)\right) \text{ oder } \frac{1}{2}\sum_{h,k}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{2m}\right)\right) \quad \binom{h=1,2\ldots m-1}{k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)},$$

die zweite durch:

$$\frac{1}{2}\sum_{h,k}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{hn}{2m}-k\right)\right) \text{ oder } \frac{1}{2}\sum_{h,k}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{2m}-\frac{k}{n}\right)\right) \quad \binom{h=1,2,\ldots m-1}{k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)}$$

zu ersetzen ist.