DIE DECOMPOSITION DER SYSTEME VON n^2 GRÖSSEN UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE THEORIE DER INVARIANTEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 6. Juni und am 20. Juni 1889.]

Im § 3 meines Aufsatzes „über symmetrische Systeme“*) habe ich die Decomposition eines beliebigen Systems von n^2 Grössen in gewisse einfache Systeme nur zu dem Zwecke auseinandergesetzt, um daran den stetigen Zusammenhang aller derjenigen Systeme, deren Determinanten dasselbe Vorzeichen haben, unmittelbar aufzeigen zu können. Ich will nun hier, wie ich es schon mehrmals in meinen algebraischen Universitäts-Vorlesungen gethan habe, näher auf jene Decomposition beliebiger Systeme von n^2 Grössen eingehen und daran auch einige Anwendungen auf die Theorie der Invarianten knüpfen.

§ 1.

In den folgenden Entwickelungen werden einige (symbolische) Compositionsgleichungen gebraucht, die hier zuvörderst für Systeme von 4 Grössen aufgestellt werden sollen:

$$(\mathfrak{A})\qquad \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & 1\end{pmatrix},$$

$$(\mathfrak{A}')\qquad \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}.$$

---

*) Sitzungsbericht vom 25. April 1889, Stück XXII.[1])

[1]) Band III S. 293—314 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

$$(\mathfrak{B})\qquad \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}1, & 0\\ 1, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}1, & 0\\ 1, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0\\ -1, & 1\end{pmatrix},$$

$$(\mathfrak{B}')\qquad \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 0\\ -1, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}1, & 0\\ -1, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0\\ 1, & 1\end{pmatrix},$$

$$(\mathfrak{C})\qquad \begin{pmatrix}1, & 0\\ 1, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 0\\ 1, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix},$$

$$(\mathfrak{C}')\qquad \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 0\\ -1, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix},$$

$$(\mathfrak{D})\qquad \begin{pmatrix}t, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}t', & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & t\\ 0, & 1\end{pmatrix} \qquad (tt'=1),$$

$$(\mathfrak{D}')\qquad \begin{pmatrix}t, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}t', & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & -t\\ 0, & 1\end{pmatrix} \qquad (tt'=1),$$

$$(\mathfrak{D}'')\qquad \begin{pmatrix}1, & 0\\ t', & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & t\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 0\\ t', & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t, & 0\\ 0, & -t'\end{pmatrix} \qquad (-tt'=1).$$

Dabei ist zu bemerken, dass:

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

ist. Bedeutet nun:

$$\left(c^{(r)}_{ik}\right) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ein System, für welches:

$$\begin{gathered} c^{(r)}_{1r} = -1, \quad c^{(r)}_{r1} = 1, \\ c^{(r)}_{kk} = 1, \qquad c^{(r)}_{ik} = 0 \\ c_{11} = c_{rr} = 0 \end{gathered} \qquad (i \gtrless k;\ i, k = 2, 3, \ldots r-1, r+1, \ldots n)$$

ist, welches also aus dem Einheitssystem (ϑ_{ik}) entsteht, indem darin die erste und die r^{te} Horizontalreihe mit einander vertauscht und zugleich das Vorzeichen der neuen ersten Horizontalreihe verändert wird, bezeichnet man ferner — ähnlich wie im Eingange meines citirten Aufsatzes „über symmetrische Systeme“ — mit:

$$\left(a^{(r)}_{ik}(t)\right), \quad \left(b^{(r)}_{ik}(t)\right)$$

zwei Systeme, in welchen:

$$a^{(r)}_{1r}(t) = t, \quad b^{(r)}_{r1}(t) = t$$

ist, während alle übrigen Elemente ausserhalb der Diagonale gleich Null und die sämmtlichen Diagonalelemente gleich Eins sind, so lassen sich folgende allgemeinere, für Systeme von n^2 Grössen geltende Compositionsgleichungen aufstellen, welche aus den entsprechenden, für Systeme von 4 Grössen stattfindenden Gleichungen unmittelbar hervorgehen:

$$(\mathrm{A})\qquad \left(c^{(r)}_{ik}\right) \left(a^{(r)}_{ik}(1)\right) \left(c^{(r)}_{ik}\right)^3 \left(a^{(r)}_{ik}(1)\right) \left(c^{(r)}_{ik}\right) = \left(a^{(r)}_{ik}(-1)\right),$$

$$(\mathrm{A}')\qquad \left(c^{(r)}_{ik}\right)^3 \left(a^{(r)}_{ik}(-1)\right) \left(c^{(r)}_{ik}\right)^3 \left(a^{(r)}_{ik}(-1)\right) \left(c^{(r)}_{ik}\right) = \left(a^{(r)}_{ik}(1)\right),$$

$$(\mathrm{B})\qquad \left(c^{(r)}_{ik}\right)^3 \left(b^{(r)}_{ik}(1)\right) \left(c^{(r)}_{ik}\right)^3 \left(b^{(r)}_{ik}(1)\right) \left(c^{(r)}_{ik}\right) = \left(b^{(r)}_{ik}(-1)\right),$$

$$(\mathrm{B}')\qquad \left(c^{(r)}_{ik}\right) \left(b^{(r)}_{ik}(-1)\right) \left(c^{(r)}_{ik}\right)^3 \left(b^{(r)}_{ik}(-1)\right) \left(c^{(r)}_{ik}\right) = \left(b^{(r)}_{ik}(1)\right),$$

$$(\mathrm{C})\qquad \left(b^{(r)}_{ik}(1)\right) \left(a^{(r)}_{ik}(-1)\right) \left(b^{(r)}_{ik}(1)\right) = \left(c^{(r)}_{ik}\right),$$

$$(\mathrm{C}')\qquad \left(a^{(r)}_{ik}(1)\right) \left(b^{(r)}_{ik}(-1)\right) \left(a^{(r)}_{ik}(1)\right) = \left(c^{(r)}_{ik}\right)^3,$$

$$(\mathrm{D})\qquad \left(\mathfrak{d}_{ik}(t)\right) \left(a^{(r)}_{ik}(1)\right) \left(\mathfrak{d}_{ik}\left(\tfrac{1}{t}\right)\right) = \left(a^{(r)}_{ik}(t)\right),$$

$$(\mathrm{D}')\qquad \left(\mathfrak{d}_{ik}(t)\right) \left(a^{(r)}_{ik}(-1)\right) \left(\mathfrak{d}_{ik}\left(\tfrac{1}{t}\right)\right) = \left(a^{(r)}_{ik}(-t)\right),$$

$$(\mathrm{D}'')\qquad \left(b^{(r)}_{ik}\left(\tfrac{-1}{t}\right)\right) \left(a^{(r)}_{ik}(t)\right) \left(b^{(r)}_{ik}\left(\tfrac{-1}{t}\right)\right) \left(c^{(r)}_{ik}\right) = \left(\partial^{(r)}_{ik}(t)\right).$$

Mit $\mathfrak{d}_{ik}(t)$ ist hier, ähnlich wie im § 3 meines Aufsatzes „über symmetrische Systeme“, ein Diagonalsystem*) bezeichnet, in welchem das erste Element gleich t, jedes folgende aber gleich Eins ist, ferner aber mit:

$$\left(\bar{\mathfrak{d}}^{(r)}_{ik}(t)\right)$$

ein solches, in welchem das erste Diagonalelement gleich t, das r^{te} gleich $\frac{1}{t}$ und jedes der übrigen Diagonalelemente gleich Eins ist.

An die vorstehenden Compositionsformeln möge noch die Bemerkung geknüpft werden, dass für ein beliebiges System (y_{ik}) die Composition:

$$(y_{ik})\ (c^{(r)}_{ik})$$

eine Vertauschung der ersten und r^{ten} Verticalreihe des Systems (y_{ik}) und zugleich die Zeichenänderung der neuen r^{ten} Verticalreihe, aber die Composition:

$$(c^{(r)}_{ik})\ (y_{ik})$$

eine Vertauschung der ersten und r^{ten} Horizontalreihe nebst einer Zeichenänderung der neuen ersten Horizontalreihe bewirkt, während von den beiden aus der Composition:

$$(y_{ik})\ \left(a^{(r)}_{ik}(t)\right), \quad \left(a^{(r)}_{ik}(t)\right)\ (y_{ik})$$

resultirenden Systemen das erstere aus dem ursprünglichen System (y_{ik}) entsteht, wenn darin die erste Verticalreihe mit t multiplicirt und alsdann zur r^{ten} Verticalreihe addirt wird, das letztere, wenn in dem ursprünglichen System (y_{ik}) die r^{te} Horizontalreihe mit t multiplicirt und zur ersten addirt wird.

---

*) Unter einem „Diagonalsystem“ ist, wie in meinem Aufsatz „über symmetrische Systeme“ ein solches zu verstehen, in welchem sämmtliche Elemente ausserhalb der Diagonale gleich Null sind.

§ 2.

Die im § 3 meines Aufsatzes über symmetrische Systeme auseinandergesetzte Methode der Reduction eines beliebigen Systems (η_{ik}), dessen Determinante von Null verschieden ist, lässt sich nunmehr, zugleich einfacher und vollständiger, in folgender Weise darlegen.

Ist η_{1r} das erste von Null verschiedene Element der ersten Horizontalreihe, so hat man durch Vertauschung der ersten und r^{ten} Verticalreihe, also durch Composition mit einem System $(c^{(r)}_{ik})$, ein neues System (η'_{ik}) zu bilden, in welchem $\eta'_{11} \gtrless 0$ ist. Alsdann hat man dieses durch Composition mit einem Systeme $\left(a^{(r)}_{ik}(t)\right)$, wenn t durch die Gleichung:

$$t\eta'_{11} + \eta'_{1r} = 0$$

bestimmt wird, in ein solches zu transformiren, in welchem das r^{te} Element der ersten Horizontalreihe gleich Null ist. Man gelangt daher durch Composition von (η_{ik}) mit einem Systeme $(c^{(r)}_{ik})$ und höchstens $n-1$, den Werthen $r = 2, 3, \ldots n$ entprechenden Systemen $\left(a^{(r)}_{ik}(t)\right)$ zu einem Systeme (η''_{ik}), in welchem:

$$\eta''_{12} = \eta''_{13} = \cdots = \eta''_{1n} = 0$$

ist. Wird nun ein System $(c^{(n)}_{ik})$ mit (η''_{ik}) zusammengesetzt, so ist die n^{te} Horizontalreihe des aus der Composition:

$$(c^{(n)}_{ik})\ (\eta''_{ik})$$

resultirenden Systems (η'''_{ik}) eben jene erste Horizontalreihe des Systems (η''_{ik}), in welcher alle Elemente ausser dem ersten gleich Null sind, und die fernere Composition:

$$\left(a^{(n)}_{ik}(t)\right)\ (\eta'''_{ik})$$

liefert also, wenn t durch die Gleichung:

$$t\eta'''_{n1} + \eta'''_{11} = 0$$

bestimmt wird, ein System $(\eta^{(IV)}_{ik})$, in welchem das erste Element der ersten Horizontalreihe, so wie sämmtliche Elemente der n^{ten} Horizontalreihe, mit Ausnahme des ersten, gleich Null sind.

Wird alsdann ein System $(c^{(2)}_{ik})$ mit $(\eta^{(IV)}_{ik})$ zusammengesetzt, und bezeichnet man das aus der Composition:

$$(c^{(2)}_{ik})\ (\eta^{(IV)}_{ik})$$

resultirende System mit $(\eta^{(V)}_{ik})$, so unterscheidet sich dieses von dem Systeme $(\eta^{(IV)}_{ik})$ nur dadurch, dass die ersten beiden Horizontalreihen mit einander vertauscht und dabei die Zeichen der einen verändert sind. In dem Systeme $(\eta^{(V)}_{ik})$ ist daher das erste Element der *zweiten* Horizontalreihe, so wie jedes Element der n^{ten} Horizontalreihe, mit Ausnahme des ersten, gleich Null. Bestimmt man nun in dem Systeme $(a^{(n)}_{ik}(t))$ die Grösse t gemäss der Bedingung:

$$t\eta^{(V)}_{n1} + \eta^{(V)}_{11} = 0,$$

so liefert die Composition:

$$(a^{(n)}_{ik}(t))\ (\eta^{(V)}_{ik})$$

ein System $(\eta^{(VI)}_{ik})$, in welchem die ersten Elemente der *beiden* ersten Horizontalreihen, so wie sämmtliche Elemente der n^{ten} Horizontalreihe, mit Ausnahme des ersten, gleich Null sind.

Durch Fortsetzung dieses Compositionsverfahrens gelangt man offenbar zu einem System, in welchem die ersten Elemente der $n-1$ ersten Horizontalreihen, sowie sämmtliche $n-1$ auf das erste Element folgenden Elemente der n^{ten} Horizontalreihe gleich Null sind, und wenn man dieses System mit einem System $(c^{(n)}_{ik})$ componirt, so wird die erste Verticalreihe mit

der letzten vertauscht, und es entsteht daher ein System (η°_{ik}), in welchem die Elemente der letzten Verticalreihe und der letzten Horizontalreihe, mit alleiniger Ausnahme des letzten Elementes η°_{nn}, sämmtlich gleich Null sind.

Das Ergebniss der bisherigen Entwickelungen kann durch die (symbolische) Compositionsgleichung:

$$(\alpha^{\circ}_{ik})\ (\eta_{ik})\ (\beta^{\circ}_{ik}) = (\eta^{\circ}_{ik}) \qquad (i,\ k = 1, 2, \dots n)$$

dargestellt werden, in welcher (α°_{ik}) und (β°_{ik}) Systeme bedeuten, welche aus der Composition von Systemen:

$$(a_{ik}) \quad \text{und} \quad (c_{ik})$$

resultiren.

. In analoger Weise, wie mit dem ursprünglichen Systeme (η_{ik}), kann nun mit dem Systeme (η°_{ik}) so verfahren werden, dass dasselbe durch Composition mit Systemen $(a^{(r)}_{ik})$ und $(c^{(r)}_{ik})$, bei denen aber der Index r nur die Werthe 1, 2, ... $n-1$ hat, auf ein System $(\eta^{\circ\circ}_{ik})$ reducirt wird, in welchem die Elemente der vorletzten Verticalreihe und der vorletzten Horizontalreihe, mit alleiniger Ausnahme von $\eta^{\circ\circ}_{n-1,\,n-1}$, sämmtlich gleich Null sind, und die letzte Horizontalreihe, sowie die letzte Verticalreihe mit derjenigen von η°_{ik} übereinstimmt. In dem Systeme $(\eta^{\circ\circ}_{ik})$ sind also die sämmtlichen Elemente der *beiden* letzten Horizontal- und Verticalreihen, mit alleiniger Ausnahme der beiden Diagonalglieder:

$$\eta^{\circ\circ}_{n-1,\,n-1}, \quad \eta^{\circ\circ}_{n,\,n},$$

gleich Null.

Bei weiterer Anwendung dieses Verfahrens gelangt man schliesslich zu einem Diagonalsystem (d_{ik}). Setzt man dann ein solches mit einem Systeme $(c^{(r)}_{ik})^2$ zusammen, so geht es in ein Diagonalsystem (d'_{ik}) über, in welchem:

$$d'_{11} = -d_{11}, \quad d'_{rr} = -d_{rr}, \quad d'_{kk} = d_{kk} \qquad (k > 1,\ k \lessgtr r)$$

ist. Setzt man ferner (d'_{ik}) mit einem Systeme $\left(c^{(s)}_{ik}\right)^2$ zusammen, so resultirt ein System (d''_{ik}), in welchem:

$$d''_{rr} = -d_{rr}, \quad d''_{ss} = -d_{ss},$$

und aber, wenn k von r und s verschieden ist:

$$d''_{kk} = d_{kk}$$

ist. Man kann also durch Composition mit Systemen (c_{ik}) bewirken, dass sämmtliche Elemente des resultirenden Diagonalsystems oder alle, mit Ausnahme des ersten, positiv werden.

Das Ergebniss der vorstehenden Auseinandersetzung lässt sich nunmehr durch die (symbolische) Compositionsgleichung:

$$\text{(E)} \qquad (\alpha_{ik})\,(\eta_{ik})\,(\beta_{ik}) = (d_{ik})$$

darstellen, in welcher (α_{ik}) und (β_{ik}) Systeme bedeuten, welche aus der Composition von Systemen:

$$(a_{ik}) \quad \text{und} \quad (c_{ik})$$

resultiren, während (d_{ik}) ein „Diagonalsystem", d. h. ein solches bedeutet, welches nur in der Diagonale von Null verschiedene Elemente enthält, und in welchem überdies die $n-1$ Elemente $d_{22}, d_{33}, \ldots d_{nn}$ sämmtlich positiv sind.

§ 3.

Da aus der Composition zweier Diagonalsysteme (d_{ik}), (d'_{ik}) das Diagonalsystem $(d_{ik}d'_{ik})$ resultirt, so lässt sich jedes Diagonalsystem (d_{ik}) als Resultat der Composition von n Diagonalsystemen auffassen, von denen das r^{te} dadurch zu charakterisiren ist, dass jedes Element der Diagonalreihe, mit Ausnahme des r^{ten} gleich Eins, dieses r^{te} Element aber gleich d_{rr} ist. Wird

das System $\left(c^{(r)}_{ik}\right)$ mit einem solchen System componirt und das resultirende System alsdann mit dem System $\left(c^{(r)}_{ik}\right)^3$ zusammengesetzt, so entsteht ein Diagonalsystem $(\mathfrak{d}_{ik})$, in welchem das erste Element $\mathfrak{d}_{11}$ gleich d_{rr}, jedes der übrigen aber gleich Eins ist. Jenes r^{te} Diagonalsystem lässt sich daher als Resultat der Composition:

$$\left(c^{(r)}_{ik}\right)^3\,(\mathfrak{d}_{ik})\,\left(c^{(r)}_{ik}\right)$$

darstellen, und *jedes* Diagonalsystem (d_{ik}), dessen Determinante positiv ist, kann demnach als Resultat der Composition von Systemen:

$$(c_{ik}) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{d}_{ik})$$

aufgefasst werden, während, wenn die Determinante negativ ist, noch ein Diagonalsystem $(\delta_{ik}(-1))$ hinzugefügt werden muss, in welchem das erste Element gleich -1, jedes der übrigen aber gleich $+1$ ist.

Aus der Compositionsgleichung (E) des § 2:

$$(\alpha_{ik})\,(\eta_{ik})\,(\beta_{ik}) = (d_{ik})$$

geht unmittelbar die folgende hervor:

$$\text{(E')} \qquad (\eta_{ik}) = (\alpha'_{ik})\,(d_{ik})\,(\beta'_{ik}),$$

wenn (α'_{ik}) das zu (α_{ik}) reciproke System und (β'_{ik}) das zu (β_{ik}) reciproke System bedeutet. Da die Systeme (α_{ik}), (β_{ik}) aus der Composition von Systemen:

$$(a_{ik}), \quad (c_{ik})$$

resultiren, und die Systeme:

$$\left(c^{(r)}_{ik}\right) \quad \text{und} \quad \left(c^{(r)}_{ik}\right)^3, \quad \text{so wie} \quad \left(a^{(r)}_{ik}(t)\right) \quad \text{und} \quad \left(a^{(r)}_{ik}(-t)\right)$$

zu einander reciprok sind, so können auch die Systeme (α'_{ik}), (β'_{ik}) als Resultate der Composition von Systemen:

$$(a_{ik}),\ (c_{ik})$$

aufgefasst werden. Nun ist die Determinante des Systems (d_{ik}) gleich der Determinante von (η_{ik}), und es ist oben gezeigt worden, dass je nachdem diese Determinante positiv oder negativ ist, sich das System (d_{ik}) als Resultat der Composition von Systemen:

$$(c_{ik}) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{d}_{ik})$$

allein oder unter Hinzufügung eines Diagonalsystems $(\vartheta_{ik}(-1))$ darstellen lässt. Es folgt daher,

(F) dass sich jedes System (η_{ik}), dessen Determinante positiv ist, als Resultat der Composition von Systemen:

$$(a^{(r)}_{ik}(t)),\ (c^{(r)}_{ik}),\ (\mathfrak{d}_{ik}) \qquad (r=2, 3, \ldots n)$$

darstellen lässt, während, wenn die Determinante negativ ist, noch am Anfange oder am Ende der Reihe der Componenten-Systeme ein System $(\vartheta_{ik}(-1))$, d. h. ein solches hinzuzufügen ist, welches aus dem Einheitssysteme entsteht, indem für das erste Element an Stelle der positiven die negative *Eins* gesetzt wird.

Dabei bedeutet:

$$(a^{(r)}_{ik}(t))$$

ein System, welches in der Diagonale lauter Elemente $+1$, ferner als r^{ten} Element der ersten Horizontalreihe die Grösse t und im Uebrigen nur Nullen enthält. Ferner bedeutet $(c^{(r)}_{ik})$ ein System, in welchem das r^{te} Element der ersten Horizontalreihe gleich -1, das erste Element der r^{ten} Horizontalreihe gleich $+1$, jedes der übrigen Elemente dieser beiden Horizontalreihen gleich

Null ist, und welches im Uebrigen nur Diagonalelemente, und zwar sämmtlich gleich $+1$, enthält. Endlich bedeutet $(\mathfrak{d}_{ik})$ ein System, in welchem $\mathfrak{d}_{11}$ positiv und:

$$\mathfrak{d}_{22} = \mathfrak{d}_{33} = \cdots = \mathfrak{d}_{nn} = 1,$$

jedes der übrigen Elemente $\mathfrak{d}_{ik}$ aber gleich Null ist.

§ 4.

Aus der Compositionsgleichung (C) des § 1 geht hervor, dass in dem oben bei (F) formulirten Satze anstatt der Systeme (c_{ik}) die Systeme $(b_{ik}(1))$ genommen werden können. Es wird hiernach ersichtlich,

dass jedes System (η_{ik}) aus der Composition von Systemen:

(G) $$(a^{(r)}_{ik}(t)),\ (b^{(r)}_{ik}(1)),\ (\mathfrak{d}_{ik}) \qquad (r=2, 3, \ldots n)$$

resultirt, denen nur, falls die Determinante von (η_{ik}) negativ ist, noch ein System $(\vartheta_{ik}(-1))$ hinzuzufügen ist,

und dies stimmt genau mit dem im § 3 meines Aufsatzes über symmetrische Systeme formulirten Ergebniss der dortigen Entwickelungen überein.

Gemäss den Gleichungen (D) des § 1 kann jedes System $(a^{(r)}_{ik}(t))$, wenn t positiv ist, als Resultat der Composition von Systemen:

$$(a^{(r)}_{ik}(1)),\ (\mathfrak{d}_{ik})$$

ausgedrückt werden, bei denen $\mathfrak{d}_{11}$, wie oben, positiv ist. Es folgt ferner aus der Gleichung (D') des § 1, in Verbindung mit der Gleichung (A), dass jedes System $(a^{(r)}_{ik}(-t))$, wo wiederum t als positiv vorausgesetzt ist, sich als Resultat der Composition von Systemen:

$$\left(a_{ik}^{(r)}(1)\right),\quad \left(c_{ik}^{(r)}\right),\quad \left(\mathfrak{d}_{ik}\right)$$

darstellen lässt. Nun geht das System $\left(a_{ik}^{(r)}(t)\right)$, falls der Index r grösser als 2 ist, in ein solches über, dessen Index r gleich 2 ist, wenn man in dem ersteren Systeme sowohl die zweite und r^{te} Verticalreihe als auch die zweite und r^{te} Horizontalreihe mit einander vertauscht und zugleich die Zeichen der neuen r^{ten} Reihen verändert. Diese Vertauschungen werden aber durch Composition des ursprünglichen Systems $\left(a_{ik}^{(r)}(t)\right)$ mit Systemen $\left(c_{ik}^{(r)}\right)$ bewirkt. Es lässt sich daher jedes System $\left(a_{ik}^{(r)}(t)\right)$, in welchem der Index r grösser als 2 ist, als Resultat der Composition eines Systems $\left(a_{ik}^{(2)}(t)\right)$ mit Systemen $\left(c_{ik}^{(r)}\right)$ auffassen. Hieraus folgt,

> dass jedes System von n^2 Grössen mit positiver Determinante sich als Resultat der Composition von Systemen:

(H) $$\left(a_{ik}^{(2)}(1)\right),\quad \left(c_{ik}^{(r)}\right),\quad \left(\mathfrak{d}_{ik}\right) \qquad (r=2,3,\ldots n)$$

> darstellen lässt, während, wenn die Determinante negativ ist, noch am Anfange oder am Ende der Reihe ein System $\left(\vartheta_{ik}(-1)\right)$ hinzuzufügen ist.

Dabei bezeichnet

$$\left(a_{ik}^{(2)}(1)\right)$$

ein System, in welchem die $n+1$ Elemente:

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \ldots\ a_{nn} \quad \text{und} \quad a_{12}$$

sämmtlich gleich *Eins*, alle übrigen aber gleich *Null* sind, während die Systeme $\left(c_{ik}^{(r)}\right)$ und $\left(\mathfrak{d}_{ik}\right)$ die obige am Schlusse des § 3 noch einmal hervorgehobene Bedeutung haben, und es ist zu bemerken, dass die Anzahl der verschiedenen Systeme $\left(c_{ik}^{(r)}\right)$ gleich $n-1$ ist, da der Index r nur die Werthe $2, 3, \ldots n$ haben kann.

Um die Decomposition eines beliebigen Systems (η_{ik}) in Systeme $\left(a_{ik}^{(2)}(1)\right)$, (c_{ik}), $(\mathfrak{d}_{ik})$ für den einfachsten Fall $n=2$ vollständig anzugeben, stelle ich hier die Reihe der 16 Systeme auf, aus deren Composition das System $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ resultirt:

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}\frac{\gamma}{\alpha}, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{\alpha\delta}{\gamma}-\beta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\beta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\beta}, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}.$$

Gemäss der Gleichung (C′) des § 1 lässt sich $(c_{ik})^3$, und also, da

$$(c_{ik})^3\,(c_{ik})^3\,(c_{ik})^3 = (c_{ik})$$

ist, auch (c_{ik}) selbst als Resultat der Composition von Systemen:

$$\left(a_{ik}(1)\right),\quad \left(b_{ik}(-1)\right)$$

darstellen. Man kann daher in dem bei (H) formulirten Satze die $n-1$ Systeme $\left(c_{ik}^{(r)}\right)$ durch die $2(n-1)$ den Indexwerthen $r=2, 3, \ldots n$ entsprechenden Systeme:

$$\left(a_{ik}^{(r)}(1)\right),\quad \left(b_{ik}^{(r)}(-1)\right)$$

ersetzen, und es zeigt sich also,

> dass jedes System von n^2 Grössen sich als Resultat der Composition von Systemen:

(J) $$\left(a_{ik}^{(r)}(1)\right),\quad \left(b_{ik}^{(r)}(-1)\right),\quad \left(\mathfrak{d}_{ik}\right) \qquad (r=2,3,\ldots n)$$

> darstellen lässt, denen nur, falls die Determinante negativ ist, noch ein System $\left(\vartheta_{ik}(-1)\right)$ hinzugefügt werden muss.

So erhält man die bezügliche Darstellung des Systems $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, wenn man in den oben angegebenen Componenten-Systemen:

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \text{ durch } \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix}^3$$

und alsdann, gemäss der Gleichung ($\mathfrak{C}'$) des § 1:

$$\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} \text{ durch } \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ -1, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

ersetzt.

§ 5.

Aus den im vorigen Paragraphen bei (H) und (J) angegebenen Darstellungen eines beliebigen Systems von n^2 Grössen η_{ik} folgt unmittelbar der Satz:

> dass eine Function der n^2 Grössen eines aus zwei oder mehreren anderen componirten Systems:
>
> $$(x_{ik})\,(y_{ik}),$$
>
> deren Werth mit derselben Function der n^2 Grössen des componirten Systems:
>
> $$(y_{ik})\,(x_{ik})$$
>
> übereinstimmt, nur eine Function der Determinante der n^2 Grössen sein kann,

d. h. also, dass der Werth einer Function der n^2 Grössen eines componirten Systems nur dann von der Reihenfolge der Systeme unabhängig ist, wenn die Function einzig und allein von der Determinante des Systems der n^2 Grössen abhängt.

In der That muss bei der gemachten Voraussetzung die Function der n^2 Grössen η_{ik} ihren Werth behalten, wenn man die Reihenfolge der Componenten-

Systeme in der bei (H) angegebenen Darstellung beliebig verändert. Nimmt man nun zuerst alle Systeme $(\mathfrak{d}_{ik})$, alsdann alle Systeme $\left(a_{ik}^{(2)}(1)\right)$ und zuletzt die sämmtlichen Systeme $\left(c_{ik}^{(r)}\right)$ in irgend welcher Reihenfolge, so ergiebt sich als Resultat der Composition ein System (η'_{ik}), welches durch die (symbolische) Compositionsgleichung:

$$(\eta'_{ik}) = (\mathfrak{d}^0_{ik})\left(a_{ik}^{(2)}(p)\right)\left(c_{ik}^{(r)}\right)\left(c_{ik}^{(r')}\right)\left(c_{ik}^{(r'')}\right)\cdots$$

definirt ist. Dabei bedeutet p eine positive ganze Zahl, nämlich die Anzahl der in der Decomposition des ursprünglichen Systems (η_{ik}) vorkommenden Systeme $\left(a_{ik}^{(2)}(1)\right)$; die Zusammensetzung des Systems $\left(a_{ik}^{(2)}(p)\right)$ mit den Systemen (c_{ik}) bewirkt, gemäss der im § 1 an die Compositionsformeln geknüpften Bemerkung, nur eine Vertauschung von Verticalreihen des Systems $\left(a_{ik}^{(2)}(p)\right)$ nebst gewissen Zeichenänderungen; das Resultat der Composition:

$$\left(a_{ik}^{(2)}(p)\right)\left(c_{ik}^{(r)}\right)\left(c_{ik}^{(r')}\right)\left(c_{ik}^{(r'')}\right)\cdots$$

ist also wiederum ein System, in welchem, wie in $\left(a_{ik}^{(2)}(p)\right)$, ein Element gleich p ist, während n Elemente gleich Eins und die übrigen n^2-n-1 Elemente gleich Null sind. Da nun auch in dem Diagonalsystem $(\mathfrak{d}^0_{ik})$ alle Elemente, mit Ausnahme des ersten $\mathfrak{d}^0_{11}$, nur die Werthe Null oder Eins haben, so sind die Elemente des componirten Systems (η'_{ik}) lauter lineare ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{d}^0_{11}$, und eine Function dieser Elemente kann also nur eine Function von $\mathfrak{d}^0_{11}$ sein. Nun ist aber offenbar $\mathfrak{d}^0_{11}$ gleich der Determinante des Systems (η'_{ik}), welche mit derjenigen des ursprünglichen Systems (η_{ik}) übereinstimmt. Eine Function der n^2 Grössen η_{ik}, welche ihren Werth behält, wenn man die Reihenfolge der Componenten-Systeme in der bei (H) angegebenen Decomposition beliebig verändert, kann also in der That nur eine Function der Determinante des Systems (η_{ik}) sein.

§ 6.

Nimmt man in der Compositionsgleichung (E′) des § 3:

$$(\eta_{ik}) = (\alpha'_{ik})\,(d_{ik})\,(\beta'_{ik})$$

für das System (η_{ik}) ein solches, dessen Determinante gleich Eins ist, so ist auch die Determinante des Systems (d_{ik}) gleich Eins und also, da dieses ein Diagonalsystem ist:

$$d_{11}\,d_{22}\cdots d_{nn} = 1.$$

Dieses System (d_{ik}) kann als Resultat der Composition von $n-1$ Diagonalsystemen:

$$\left(\partial_{ik}^{(r)}\right) \qquad (r=2,3,\ldots n)$$

dargestellt werden, deren Elemente durch die Gleichungen:

$$\partial_{11}^{(r)} = \frac{1}{d_{rr}},\quad \partial_{rr}^{(r)} = d_{rr},\quad \partial_{kk}^{(r)} = 1 \qquad (k=2,3,\ldots r-1,r+1,\ldots n)$$

definirt sind, und die besonderen schon im § 1 benutzten Diagonalsysteme $\left(\partial_{ik}^{(r)}\right)$ können dadurch charakterisirt werden, dass darin das erste und r^{te} Element zu einander reciprok und alle übrigen gleich Eins sind. Für $r>2$ wird aber ein solches System $\left(\partial_{ik}^{(r)}\right)$ durch Vertauschung des zweiten und r^{ten} Elements in ein System $\left(\partial_{ik}^{(2)}\right)$ verwandelt, d. h. in ein solches, in welchem das erste und zweite Element zu einander reciprok und alle übrigen gleich Eins sind, und eine solche Vertauschung lässt sich gemäss den im § 1 an die Compositionsformeln geknüpften Bemerkungen durch Zusammensetzung mit Systemen (c_{ik}) bewirken.

Denn für *jedes* Diagonalsystem (d_{ik}) ist das Resultat der Composition:

$$\left(c_{ik}^{(2)}\right)\left(c_{ik}^{(r)}\right)\left(c_{ik}^{(2)}\right)\left(d_{ik}\right)\left(c_{ik}^{(2)}\right)^3\left(c_{ik}^{(r)}\right)^3\left(c_{ik}^{(2)}\right)^3$$

ein anderes Diagonalsystem, welches aus dem ursprünglichen durch Vertauschung der Elemente d_{22} und d_{rr} entsteht.

Berücksichtigt man nun, dass in der oben angeführten Gleichung (E′) des § 3:

$$(\eta_{ik}) = (\alpha'_{ik})\,(d_{ik})\,(\beta'_{ik})$$

die beiden Systeme (α'_{ik}), (β'_{ik}) sich in lauter Systeme:

$$\left(c_{ik}^{(r)}\right),\quad \left(a_{ik}^{(r)}(t)\right) \qquad (r=2,3,\ldots n)$$

decomponiren lassen, dass ferner, wie schon im § 4 hervorgehoben worden, jedes System $\left(a_{ik}^{(r)}(t)\right)$ in eine Reihe von Systemen:

$$\left(a_{ik}^{(2)}(t)\right),\quad \left(c_{ik}^{(r)}\right) \qquad (r=2,3,\ldots n)$$

zerlegt werden kann, so erschliesst man mit Hülfe der obigen Entwickelungen unmittelbar, dass jedes System von n^2 reellen Grössen, dessen Determinante gleich Eins ist, sich als Resultat der Composition von Systemen:

$$\left(a_{ik}^{(2)}(t)\right),\quad \left(c_{ik}^{(r)}\right),\quad \left(\partial_{ik}^{(2)}\right) \qquad (r=2,3,\ldots n)$$

darstellen lässt.

Nimmt man ferner die aus der Compositionsformel:

$$\text{(K)} \qquad \begin{pmatrix} t, & 0 \\ 0, & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & \pm 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t}, & 0 \\ 0, & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \pm t^2 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

unmittelbar folgende allgemeinere:

$$\text{(K′)} \qquad \left(\partial_{ik}^{(2)}(t)\right)\left(a_{ik}^{(2)}(\pm 1)\right)\left(\partial_{ik}^{(2)}(t')\right) = \left(a_{ik}^{(2)}(\pm t^2)\right) \qquad (tt'=1),$$

so wie jene Compositionsformel (A) des § 1:

$$(a_{ik}(-1)) = (c_{ik})\,(a_{ik}(1))\,(c_{ik})^3\,(a_{ik}(1))\,(c_{ik})$$

zu Hülfe, so erschliesst man,

> dass jedes System von n^2 reellen Grössen, dessen Determinante gleich Eins ist, als Resultat der Composition von Systemen:
>
> $$\text{(L)} \qquad \left(a_{ik}^{(2)}(1)\right),\quad \left(c_{ik}^{(r)}\right),\quad \left(\partial_{ik}^{(2)}\right) \qquad {\scriptstyle (r=2,\,3,\,\ldots\,n)}$$
>
> dargestellt werden kann, und zwar so, dass auch die Elemente der Systeme $\left(\partial_{ik}^{(2)}\right)$ reelle Werthe haben.

Hierbei bedeutet $\left(a_{ik}^{(2)}(1)\right)$ das System, welches aus dem Einheitssysteme entsteht, wenn an der zweiten Stelle der ersten Horizontalreihe die Null durch Eins ersetzt wird. Ferner ist $\left(c_{ik}^{(r)}\right)$ dasjenige System, welches aus dem Einheitssysteme hervorgeht, wenn man darin die erste und r^{te} Horizontalreihe vertauscht und dann der Eins, an der r^{ten} Stelle der ersten Horizontalreihe, das Minuszeichen vorsetzt. Endlich bezeichnet $\left(\partial_{ik}^{(2)}\right)$ ein System, welches aus dem Einheitssystem dadurch gebildet werden kann, dass man die Eins in dem ersten Diagonalelement durch irgend eine reelle Grösse t und die Eins in dem zweiten Diagonalelement durch die Grösse $\frac{1}{t}$ ersetzt.

Die bei (L) dargelegte Decomposition eines Systems von n^2 Grössen, dessen Determinante gleich Eins ist, geht für $n=2$ aus der Compositionsgleichung:

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}1, & -\frac{\gamma}{\alpha}\\ 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha, & 0\\ 0, & \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & \frac{\beta}{\alpha}\\ 0, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \frac{\beta\gamma+1}{\alpha}\end{pmatrix}$$

hervor, wenn noch zur Zerlegung des zweiten und letzten Systems auf der linken Seite von der obigen Formel (K) Gebrauch gemacht und dabei für t^2 das eine Mal der absolute Werth von $\frac{\gamma}{\alpha}$, das andere Mal derjenige von $\frac{\beta}{\alpha}$ genommen wird.

§ 7.

Benutzt man die Compositionsgleichung (D″) des § 1:

$$\left(b_{ik}^{(r)}\left(\frac{-1}{t}\right)\right)\left(a_{ik}^{(r)}(t)\right)\left(b_{ik}^{(r)}\left(\frac{-1}{t}\right)\right)\left(c_{ik}^{(r)}\right) = \left(\partial_{ik}^{(r)}(t)\right)$$

bei jener mit (L) bezeichneten Formulirung des Resultats der im vorhergehenden Paragraphen enthaltenen Entwickelungen, so ergiebt sich, dass jedes System mit der Determinante Eins sich aus Systemen:

$$\left(a_{ik}^{(2)}(t)\right),\quad \left(b_{ik}^{(2)}(t)\right),\quad \left(c_{ik}^{(r)}\right) \qquad {\scriptstyle (r=2,\,3,\,\ldots\,n)}$$

zusammensetzen lässt. Wenn ferner von der Compositionsgleichung (C) des § 1:

$$\left(c_{ik}^{(r)}\right) = \left(b_{ik}^{(r)}(1)\right)\left(a_{ik}^{(r)}(-1)\right)\left(b_{ik}^{(r)}(1)\right)$$

Gebrauch gemacht wird, so folgt zuvörderst, dass das System $\left(c_{ik}^{(2)}\right)$ weggelassen werden kann, da es sich aus den Systemen $\left(a_{ik}^{(2)}(t)\right)$, $\left(b_{ik}^{(2)}(t)\right)$ zusammensetzen lässt,

> dass also jedes System von n^2 reellen Grössen, dessen Determinante gleich Eins ist, in einfache Systeme:
>
> $$\text{(M)} \qquad \left(a_{ik}^{(2)}(t)\right),\quad \left(b_{ik}^{(2)}(t)\right),\quad \left(c_{ik}^{(r)}\right) \qquad {\scriptstyle (r=3,\,4,\,\ldots\,n)}$$
>
> mit reellen Grössen t decomponirt werden kann,

und es folgt ferner,

> dass jedes System von n^2 reellen Grössen, mit der Determinante Eins, sich als Resultat der Composition von einfachen Systemen:
>
> $$\text{(N)} \qquad \left(a_{ik}^{(r)}(t)\right),\quad \left(b_{ik}^{(r)}(t)\right) \qquad {\scriptstyle (r=2,\,3,\,\ldots\,n)}$$

darstellen lässt, und zwar so, dass die sämmtlichen in den Systemen (a_{ik}), (b_{ik}) vorkommenden Elemente t reelle Werthe haben.

Die Gesammtzahl der verschiedenen Arten von einfachen Systemen bei (M) ist gleich n, die Gesammtzahl derjenigen bei (N) ist gleich $2n-2$.

§ 8.

Ein System (η_{ik}), dessen Determinante gleich $\varDelta$ ist, lässt sich als Resultat der Composition der beiden Systeme (ζ_{ik}), $(\mathfrak{d}_{ik})$ auffassen, wenn:

$$\zeta_{i1} = \frac{\eta_{i1}}{\varDelta}, \quad \zeta_{ik} = \eta_{ik} \qquad (k=2, 3, \ldots n),$$

$$\mathfrak{d}_{11} = \varDelta, \quad \mathfrak{d}_{kk} = 1 \qquad (k=2, 3, \ldots n),$$

und jedes der übrigen Elemente $\mathfrak{d}_{ik}$ gleich Null genommen wird.

Da die Determinante des Systems (ζ_{ik}) gleich Eins ist, so lässt sich dieses auf die verschiedenen im § 6 bei (L) und im § 7 bei (M) und (N) angegebenen Arten decomponiren.

Es folgt daher,

dass sich ein beliebiges System von n^2 Grössen, dessen Determinante gleich $\varDelta$ ist, sowohl aus Systemen:

$$\left(a_{ik}^{(2)}(1)\right), \quad \left(c_{ik}^{(r)}\right), \quad \left(\partial_{ik}^{(2)}\right) \qquad (r=2, 3, \ldots n)$$

als auch aus Systemen:

$$\text{(O)} \qquad \left(a_{ik}^{(2)}(t)\right), \quad \left(b_{ik}^{(2)}(t)\right), \quad \left(c_{ik}^{(r)}\right) \qquad (r=3, 4, \ldots n)$$

und endlich auch aus Systemen:

$$\left(a_{ik}^{(r)}(t)\right), \quad \left(b_{ik}^{(r)}(t)\right) \qquad (r=2, 3, \ldots n)$$

zusammensetzen lässt, wenn nur noch am Ende der Reihe der Componenten-Systeme ein Diagonalsystem angefügt wird, in welchem das erste Element gleich $\varDelta$, jedes der übrigen Diagonalelemente aber gleich Eins ist.

Bei dieser Darstellung eines Systems (η_{ik}) als Resultat der Composition aus gewissen einfachen Systemen kann man so verfahren, dass die in den Componenten-Systemen vorkommenden Grössen sämmtlich reelle Werthe erhalten, aber sie werden nicht, wie bei den im § 4 mit (H) und (J) bezeichneten Decompositionen, lediglich durch rationale Operationen aus den Elementen η_{ik} gebildet, sondern es kommen noch Quadratwurzel-Ausziehungen hinzu.

§ 9.

Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen kann zur Vereinfachung der Bedingungen benutzt werden, denen die Invarianten eines Systems homogener Formen von n Variabeln genügen müssen. Dabei ist in der üblichen Weise unter der Invariante eines Formensystems eine Function der Coefficienten zu verstehen, welche ungeändert bleibt, wenn man dafür die Coefficienten derjenigen Formen einsetzt, welche aus den ursprünglichen durch eine lineare Substitution mit der Determinante Eins hervorgehen.

Zuvörderst zeigt sich aus der im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Decomposition eines beliebigen Systems von n^2 Grössen, dass jede Invariante, wenn man darin die Coefficienten der Formen durch die Coefficienten solcher Formen ersetzt, welche durch eine lineare Substitution mit der Determinante $\varDelta$ daraus hervorgehen, einen und denselben Werth annimmt, welche Substitution mit der Determinante $\varDelta$ man auch anwenden mag. Denn ein Substitutionssystem mit der Determinante $\varDelta$ ist nach § 8 das Resultat der Composition eines Systems (ζ_{ik}), dessen Determinante gleich Eins ist, mit einem Diagonalsystem $(\mathfrak{d}_{ik})$, in welchem:

$$\mathfrak{d}_{11} = \varDelta, \quad \mathfrak{d}_{kk} = 1 \qquad (k=2, 3, \ldots n)$$

ist, und da die Invariante bei Anwendung der Substitution (ζ_{ik}) ungeändert bleibt, so kann sie bei Anwendung irgend einer Substitution mit der Determinante $\varDelta$ nur denjenigen Werth annehmen, den sie bei Anwendung der speciellen Substitution $(\mathfrak{d}_{ik})$ erhält. Hieraus folgt von selbst, dass der Werth, welchen eine Invariante bei Anwendung irgend einer linearen Substitution annimmt, nur durch den Werth der Determinante des Substitutionssystems bedingt, im Uebrigen aber von den Substitutionscoefficienten unabhängig ist.

Dies zeigt sich auch deutlich, wenn man sich das System homogener Formen von vornherein mittels eines Substitutionssystems:

$$(u_{hk}) \qquad\qquad {\scriptstyle (h,\, k=1,\, 2,\, \dots\, n)},$$

dessen Elemente „Unbestimmte" sind, transformirt denkt, so dass die Coefficienten der transformirten Formen zugleich Functionen der ursprünglichen Coefficienten und der Unbestimmten u_{hk} werden. Die Invarianten sind dann eben solche Functionen und können einfach dadurch charakterisirt werden, dass sie ihren Werth behalten sollen, wenn man das System der Unbestimmten u_{hk} durch irgend ein transformirtes System (u'_{ik}) ersetzt, welches durch die Relationen:

$$u_{hk} = \sum_i \alpha_{hi} u'_{ik} \qquad\qquad {\scriptstyle (h,\, i,\, k=1,\, 2,\, \dots\, n)}$$

mit dem ursprünglichen System verbunden ist. Dabei ist das System der Substitutionscoefficienten (α_{hi}) einzig und allein der Bedingung unterworfen, dass dessen Determinante gleich Eins sein soll; zwischen den beiden Systemen (u_{ik}), (u'_{ik}) besteht daher nur die Beziehung, dass ihre Determinanten einander gleich sind. Man kann demnach die Invarianten des Systems homogener Formen von n Variabeln auch dadurch vollständig charakterisiren,

> dass sie für alle „aequivalenten" Systeme (u_{ik}), d. h. für alle, welche dieselbe Determinante haben, invariant sind.

Bezeichnet man die Variabeln der Formen mit:

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n,$$

so muss also z. B. jede Invariante bei zwei verschiedenen Transformationen:

$$x_1 = p_1 x'_1,\quad x_2 = p_2 x'_2,\ \cdots\ x_n = p_n x'_n,$$
$$x_1 = q_1 x'_1,\quad x_2 = q_2 x'_2,\ \cdots\ x_n = q_n x'_n,$$

für welche:

$$p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_n$$

ist, einen und denselben Werth annehmen.

§ 10.

Da jedes Substitutionssystem mit der Determinante Eins nach § 6 (L) aus Systemen:

$$\left(a^{(2)}_{ik}(1)\right),\quad \left(c^{(r)}_{ik}\right),\quad \left(\mathfrak{d}^{(2)}_{ik}\right) \qquad\qquad {\scriptstyle (r=2,\, 3,\, \dots\, n)}$$

nach § 7 (M) aus Systemen:

$$\left(a^{(2)}_{ik}(t)\right),\quad \left(b^{(2)}_{ik}(t)\right),\quad \left(c^{(r)}_{ik}\right) \qquad\qquad {\scriptstyle (r=3,\, 4,\, \dots\, n)},$$

und nach § 7 (N) aus Systemen:

$$\left(a^{(r)}_{ik}(t)\right),\quad \left(b^{(r)}_{ik}(t)\right) \qquad\qquad {\scriptstyle (r=2,\, 3,\, \dots\, n)}$$

zusammengesetzt werden kann, so *genügen* zur Charakterisirung der Invarianten sowohl die $n+1$ Bedingungen, dass sie bei jeder, mittels einer von den Substitutionen:

$$\left(a^{(2)}_{ik}(1)\right),\quad \left(c^{(r)}_{ik}\right),\quad \left(\mathfrak{d}^{(2)}_{ik}\right) \qquad\qquad {\scriptstyle (r=2,\, 3,\, \dots\, n)}$$

bewirkten Transformation ungeändert bleiben sollen, als auch die n auf die Substitutionen:

$$\left(a^{(2)}_{ik}(t)\right),\quad \left(b^{(2)}_{ik}(t)\right),\quad \left(c^{(r)}_{ik}\right) \qquad\qquad {\scriptstyle (r=3,\, 4,\, \dots\, n)}$$

bezüglichen Bedingungen, so wie endlich die $2n-2$ Bedingungen, dass die Invarianten ihren Werth behalten sollen, wenn das Formensystem mittels einer der Substitutionen:

$$\left(a_{ik}^{(r)}(t)\right), \quad \left(b_{ik}^{(r)}(t)\right) \qquad (r=2,3,\dots n)$$

transformirt wird.

Nun ist die Transformation:

$$x_i = \sum_k a_{ik}^{(r)}(t)\, x_k' \quad \text{mit:} \quad x_1 = x_1' + t x_r', \; x_h = x_h' \qquad (h>1),$$

$$x_i = \sum_k b_{ik}^{(r)}(t)\, x_k' \quad \text{mit:} \quad x_r = t x_1' + x_r', \; x_h = x_h \qquad (h \gtrless r),$$

$$x_i = \sum_k c_{ik}^{(r)} x_k' \quad \text{mit:} \quad x_1 = -x_r', \; x_r = x_1', \; x_h = x_h' \qquad (h>1,\, h \gtrless r),$$

$$x_i = \sum_k \partial_{ik}^{(2)}(t)\, x_k' \quad \text{mit:} \quad x_1 = t x_1', \; x_2 = \frac{1}{t} x_2', \; x_h = x_h' \qquad (h>2)$$

$$(i, k = 1, 2, \dots n)$$

identisch. Es genügen daher zur Charakterisirung der Invarianten eines Systems homogener Formen von $x_1, x_2, \dots x_n$ sowohl die $n+1$ Bedingungen der Unveränderlichkeit bei den Transformationen:

$$(\mathrm{L}') \quad \begin{cases} x_1 = x_1' + x_2', \; x_h = x_h' & (h>1), \\ x_1 = -x_r', \; x_r = x_1', \; x_h = x_h' & (h>1,\, h \gtrless r;\, r=2,3,\dots n), \\ x_1 = t x_1, \; x_2 = \frac{1}{t} x_2', \; x_h = x_h' & (h>2), \end{cases}$$

als auch die n Bedingungen der Unveränderlichkeit bei den Transformationen:

$$(\mathrm{M}') \quad \begin{cases} x_1 = x_1' + t x_2', \; x_h = x_h' & (h=2,3,\dots n), \\ x_2 = t x_1' + x_2', \; x_h = x_h' & (h=1,3,4,\dots n), \\ x_1 = -x_r', \; x_r = x_1', \; x_h = x_h' & (h>1,\, h \gtrless r;\, r=3,4,\dots n), \end{cases}$$

sowie endlich die $2n-2$ Bedingungen, dass bei jeder von den Transformationen:

$$(\mathrm{N}') \quad \begin{cases} x_1 = x_1' + t x_r', \; x_h = x_h' & (h>1), \\ x_r = t x_1' + x_r', \; x_h = x_h' & (h \gtrless r), \end{cases}$$

welche den Indices $r = 2, 3, \dots n$ entsprechen, die Invarianten ihren Werth behalten sollen.

§ 11.

Von den im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Bedingungen ist keine entbehrlich.

Bezeichnet man nämlich mit:

$$C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}$$

den Coefficienten von $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$ in der q^{ten} Form des Systems homogener Formen, dessen Invarianten betrachtet werden, so ist zuvörderst ersichtlich, dass den Bedingungen der Unveränderlichkeit bei den Transformationen:

$$x_1 = -x_r', \; x_r = x_1', \; x_h = x_h' \qquad (h>1,\, h \gtrless r,\, r=\alpha, \beta, \gamma, \dots)$$

durch jede Function der Quadrate der Coefficienten $C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}$ genügt wird, welche in Beziehung auf die Indices:

$$p_1, \; p_\alpha, \; p_\beta, \; p_\gamma, \; \dots$$

symmetrisch ist, d. h. welche ihren Werth behält, wenn man diese Indices in irgend einer Weise permutirt.

Lässt man nun von den Bedingungen (L′) die *erste* fort, so genügt denselben jedes Product von Quadraten aller derjenigen Coefficienten:

$$C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n},$$

die aus irgend einem durch Permutation der n Indices $p_1, p_2, \dots p_n$ hervorgehen.

Lässt man von den Bedingungen (L′) die zweite fort, welche die Unveränderlichkeit bei der Transformation:

$$x_1 = -x_2', \quad x_2 = x_1', \quad x_h = x_h' \qquad (h=3, 4, \dots n)$$

fordert, so bleiben nur diejenigen, welche sich auf die Transformationen:

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{ll} x_1 = x_1' + x_2', \quad x_h = x_h' & (h=2, 3, \dots n), \\ x_1 = -x_r', \quad x_r = x_1', \quad x_h = x_h' & (h>1, h \gtrless r;\ r=3, 4, \dots n), \\ x_1 = t x_1', \quad x_2 = \frac{1}{t} x_2', \quad x_h = x_h' & (h=3, 4, \dots n) \end{array}$$

beziehen. Da nun die besonderen Coefficienten:

$$C^{(q)}_{p_1, 0, p_3, \dots p_n}$$

von der ersten der drei Transformationen (P) unberührt bleiben, so bleibt jede Function dieser besonderen Coefficienten, welche nur bei den Transformationen:

$$\begin{array}{ll} x_1 = -x_r', \quad x_r = x_1', \quad x_h = x_h' & (h>1, h \gtrless r;\ r=3, 4, \dots n), \\ x_1 = t x_1', \quad x_h = x_h' & (h=3, 4, \dots n) \end{array}$$

ihren Werth behält, bei allen Transformationen (P) ungeändert. Eine solche Function ist z. B. jede „absolute“ Invariante*) desjenigen Formensystems, welches aus dem ursprünglichen entsteht, indem $x_2 = 0$ gesetzt wird, ferner der Quotient der Division von:

$$\left[\Pi\, C^{(q)}_{p_1, 0, p_3, \dots p_n}\right]^{\lambda} \text{ durch } \left[\Pi\, C^{(q')}_{p_1', 0, p_3', \dots p_n'}\right]^{\lambda'},$$

*) Unter einer „absoluten“ Invariante wird nach *Aronhold*'s Vorgang eine Function der Coefficienten des Formensystems verstanden, welche bei *jeder* linearen Transformation, auch wenn die Substitutions-Determinante von Eins verschieden ist, ungeändert bleibt.

wo sich das eine Productzeichen auf alle Permutationen der Indices $p_1, p_3, \dots p_n$, das andere auf sämmtliche Permutationen von $p_1', p_3', \dots p_n'$ bezieht und die als grade Zahlen vorausgesetzten Exponenten λ, λ' durch die Relation:

$$\lambda(p_1 + p_3 + \cdots + p_n) = \lambda'(p_1' + p_3' + \cdots + p_n')$$

mit einander verbunden sind. Es giebt also stets, wenigstens wenn $n > 2$ ist, Functionen, welche den Bedingungen (P), d. h. also den Bedingungen (L′), bei Weglassung der auf die Transformation:

$$x_1 = -x_2', \quad x_2 = x_1', \quad x_h = x_h' \qquad (h=3, 4, \dots n)$$

bezüglichen, genügen, ohne Invarianten des Formensystems zu sein.

Für $n = 2$ bleiben, wenn man von den Bedingungen (L′) die zweite weglässt, allein die Bedingungen der Unveränderlichkeit bei den beiden Transformationen:

$$(\mathrm{Q}) \qquad \begin{array}{l} x_1 = x_1' + x_2', \quad x_2 = x_2', \\ x_1 = t x_1', \quad x_2 = \frac{1}{t} x_2' \end{array}$$

übrig und diesen genügt freilich in dem Falle, wo das Formensystem lediglich aus der einen quadratischen Form:

$$a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$$

besteht, nur die Discriminante $4ac - b^2$; aber abgesehen von diesem einzigen Falle genügen den Bedingungen der Unveränderlichkeit bei den Transformationen (Q) noch Functionen, die *nicht* Invarianten des Formensystems sind. Wenn nämlich das System mindestens zwei Formen:

$$\sum_{p_1, p_2} C_{p_1, p_2} x_1^{p_1} x_2^{p_2}, \qquad \sum_{p_1', p_2'} C'_{p_1', p_2'} x_1^{p_1'} x_2^{p_2'},$$

$$(p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ p_1 + p_2 = \nu;\ p_1' \geqq 0,\ p_2' \geqq 0,\ p_1' + p_2' = \nu')$$

enthält, so bleibt der Quotient:

$$\frac{(C_{\nu 0})^{\nu'}}{(C'_{\nu' 0})^{\nu}}$$

bei jeder von den beiden Transformationen (Q) ungeändert. Wenn ferner auch nur eine einzige Form:

$$\sum_{p_1, p_2} C_{p_1, p_2} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \qquad (p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ p_1 + p_2 = \nu)$$

vorhanden und aber $\nu > 2$ ist, so wird, wenn zur Abkürzung $C_{\nu-k,k} = C_k$ gesetzt wird, durch:

$$\left(2\nu C_0 C_2 - (\nu - 1) C_1^2\right)^{\nu} C_0^{4-2\nu}$$

eine Function der Coefficienten C dargestellt, welche bei jeder von den beiden Transformationen (Q) ihren Werth behält. Denn bei der ersteren werden die Coefficienten C'_0, C'_1, C'_2 der transformirten Form durch die Relationen:

$$C'_0 = C_0,\quad C'_1 = \nu C_0 + C_1,\quad C'_2 = \tfrac{1}{2}\nu(\nu - 1)\, C_0 + (\nu - 1)\, C_1 + C_2,$$

bei der letzteren durch:

$$C'_0 = t^{\nu} C_0,\quad C'_1 = t^{\nu-2} C_1,\quad C'_2 = t^{\nu-4} C_2$$

bestimmt, und bei der einen wie bei der anderen Bestimmungsweise besteht die Gleichung:

$$\left(2\nu C_0 C_2 - (\nu - 1) C_1^2\right)^{\nu} C_0^{4-2\nu} = \left(2\nu C'_0 C'_2 - (\nu - 1) C_1'^2\right)^{\nu} C_0'^{4-2\nu}.$$

Lässt man von den Bedingungen (L′) eine derjenigen fort, welche die Unveränderlichkeit bei den Transformationen:

$$x_1 = -x'_r,\quad x_r = x'_1,\quad x_h = x'_h \qquad (h > 1,\ h \gtrless r)$$

für einen der Werthe $r = 3, 4, \ldots n$ betreffen, so genügt den übrig bleibenden Bedingungen eine Function der Coefficienten, sobald sie nur eine Invariante desjenigen Formensystems ist, in welches das gegebene für $x_r = 0$ übergeht. Eine solche Function kann also zugleich eine beliebige Function der Coefficienten derjenigen Glieder der Formen sein, welche x_r *allein* enthalten.

Lässt man endlich von den Bedingungen (L′) die letzte auf die Transformation:

$$x_1 = t x'_1,\quad x_2 = \frac{1}{t} x'_2,\quad x_h = x'_h \qquad (h = 3, 4, \ldots n)$$

bezügliche weg, so genügen den übrig bleibenden Bedingungen transcendente Functionen der Coefficienten der Formen, welche die weggelassene Bedingung nicht erfüllen und also nicht Invarianten — in dem oben bezeichneten üblichen Sinne — sind.

So stellt z. B. für eine positive quadratische Form:

$$\sum_{i,k} C_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

die Reihe:

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots m_n} e^{-\sum\limits_{i,k} C_{ik} m_i m_k}$$

wenn die Summation auf *alle* ganzzahligen (positiven und negativen) Werthe von $m_1, m_2, \ldots m_n$ erstreckt wird, eine transcendente Function der Coefficienten C_{ik} dar, welche bei den Transformationen (L′) der ersten beiden Kategorien, aber auch nur bei diesen, unverändert bleibt.

Hiermit ist nachgewiesen, dass, abgesehen von dem besonderen Falle, wo das Formensystem nur aus einer einzigen quadratischen Form von 2 Variabeln besteht, die Unveränderlichkeit bei allen $n + 1$ Transformationen (L′) ein *nothwendiges* Erforderniss für die Invarianten des Formensystems bildet.

§ 12.

Lässt man von den Bedingungen (M') im § 10 die erste weg, so bleiben nur die $(n-1)$ Bedingungen der Unveränderlichkeit bei den Transformationen:

$$x_2 = tx_1' + x_2', \quad x_h = x_h' \qquad {\scriptstyle (h=1,\,3,\,4,\,\dots\,n)},$$
$$x_1 = -x_r', \quad x_r = x_1', \quad x_h = x_h' \qquad {\scriptstyle (h>1,\ h \gtrless r;\ r=3,\,4,\,\dots\,n)}.$$

Nun bleibt bei allen diesen Transformationen in jeder Form der Coefficient desjenigen Gliedes, welches x_2 allein enthält, ungeändert; jeder dieser Coefficienten selbst genügt also den $n-1$ angegebenen Bedingungen.

Lässt man ferner von den Bedingungen (M') die zweite fort, so bleiben diejenigen übrig, welche sich auf die $n-1$ Transformationen:

$$x_1 = x_1' + tx_2', \quad x_h = x_h' \qquad {\scriptstyle (h=2,\,3,\,\dots\,n)},$$
$$x_1 = -x_r', \quad x_r = x_1', \quad x_h = x_h' \qquad {\scriptstyle (h>1,\ h \gtrless r;\ r=3,\,4,\,\dots\,n)}$$

beziehen. Bei der ersteren bleiben sämmtliche Coefficienten:

$$C_{p_1,\,0,\,p_3,\,\dots\,p_n},$$

d. h. alle Coefficienten derjenigen Glieder, welche x_2 nicht enthalten, für sich ungeändert, und jede symmetrische Function der Quadrate aller derjenigen Coefficienten, welche aus $C_{p_1,\,0,\,p_3,\,\dots\,p_n}$ durch Permutation der Indices $p_1, p_3, \dots p_n$ entstehen, behält offenbar auch bei jeder von den $n-2$ Transformationen:

$$x_1 = -x_r', \quad x_r = x_1', \quad x_h = x_h' \qquad {\scriptstyle (h>1,\ h \gtrless r;\ r=3,\,4,\,\dots\,n)}$$

ihren Werth bei.

Lässt man endlich von den Bedingungen (M') eine der letzten fort, z. B. die für $r = n$, so bleiben nur die Bedingungen:

$$x_1 = x_1' + tx_2', \quad x_h = x_h' \qquad {\scriptstyle (h=2,\,3,\,\dots\,n)},$$
$$x_2 = tx_1' + x_2', \quad x_h = x_h' \qquad {\scriptstyle (h=1,\,3,\,4,\,\dots\,n)},$$
$$x_1 = -x_r', \quad x_r = x_1', \quad x_h = x_h' \qquad {\scriptstyle (h>1,\ h \gtrless r;\ r=3,\,4,\,\dots\,n-1)}$$

übrig, und diesen genügt offenbar jede Invariante desjenigen Formensystems, welches aus dem der Betrachtung zu Grunde gelegten hervorgeht, wenn man darin $x_n = 0$ setzt.

Auch die Unveränderlichkeit bei allen n Transformationen (M') bildet daher ein nothwendiges Erforderniss für die Invarianten des Formensystems.

Um endlich dasselbe für die $2n-2$ Transformationen (N') zu zeigen, genügt es offenbar nachzuweisen, dass für irgend einen Werth des Index r, z. B. für $r = n$, weder die Transformation:

$$x_1 = x_1' + tx_n', \quad x_h = x_h' \qquad {\scriptstyle (h=2,\,3,\,\dots\,n)}$$

noch die Transformation:

$$x_n = tx_1' + x_n', \quad x_h = x_h \qquad {\scriptstyle (h=1,\,2,\,\dots\,n-1)}$$

ausser Acht gelassen werden darf.

Sieht man zuvörderst von der ersteren Transformation ab, so bleiben nur die Bedingungen der Unveränderlichkeit bei den $2n-4$ Transformationen:

$$\text{(R)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1' + tx_r', \quad x_h = x_h' && {\scriptstyle (h>1)} \\ x_r &= tx_1' + x_r', \quad x_h = x_h' && {\scriptstyle (h \gtrless r)} \end{aligned}$$

für $r = 2, 3, \dots n-1$ und bei der Transformation:

$$x_n = tx_1' + x_n', \quad x_h = x_h' \qquad {\scriptstyle (h=1,\,2,\,\dots\,n-1)}.$$

Bei allen diesen $2n-3$ Transformationen bleiben die Coefficienten derjenigen Glieder der Formen, welche x_n allein enthalten, d. h. also die Coefficienten:

$$C_{0,0,\ldots 0,p_n}$$

ungeändert, und jeder dieser Coefficienten genügt daher den angegebenen Bedingungen.

Sieht man ferner von der letzteren Transformation ab, so bleiben nur die Bedingungen der Unveränderlichkeit bei den $2n-4$ Transformationen (R) für $r=2, 3, \ldots n-1$ und bei der Transformation:

$$x_1 = x_1' + t x_n', \quad x_h = x_h' \qquad (h=2, 3, \ldots n).$$

Bei dieser letzteren Transformation bleiben die Coefficienten derjenigen Glieder der Formen, welche x_n nicht enthalten, d. h. also die Coefficienten:

$$C_{p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, 0}$$

ungeändert, und eine Function dieser Coefficienten genügt offenbar den Bedingungen der Unveränderlichkeit bei den Transformationen (R), sobald sie eine Invariante desjenigen Formensystems ist, welches aus dem ursprünglichen entsteht, wenn man darin $x_n = 0$ setzt.

§ 13.

Zur Charakterisirung *rationaler* Functionen der Coefficienten:

$$C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n} \qquad \begin{pmatrix} p_1, p_2, \ldots p_n = 0, 1, 2, \ldots; \\ p_1+p_2+\ldots+p_n = \nu_q; \\ q = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

eines Systems homogener Formen der Dimensionen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$:

$$\sum_{p_1, p_2, \ldots p_n} C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \qquad \begin{pmatrix} p_1, p_2, \ldots p_n = 0, 1, 2, \ldots; \\ p_1+p_2+\ldots+p_n = \nu_q; \\ q = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

als dessen Invarianten bedarf es nur der Bedingung der Unveränderlichkeit bei den Transformationen:

$$(\mathrm{L}'') \quad \begin{aligned} & x_1 = x_1' + x_2', \quad x_h = x_h' && (h=2, 3, \ldots n), \\ & x_1 = -x_r', \quad x_r = x_1, \quad x_h = x_h' && \begin{pmatrix} h=2, 3, \ldots r-1, r+1, \ldots n; \\ r=2, 3, \ldots n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um dies zu zeigen, bemerke ich zuvörderst, dass die Reihe der Transformationen:

$$\begin{aligned} & x_1 = x_1' + x_2', \quad x_2 = x_2', \quad x_h = x_h' \\ & x_1' = -x_2'', \quad x_2' = x_1'', \quad x_h' = x_h'' && (h=3, 4, \ldots n) \\ & x_1'' = x_1''' + x_2''', \quad x_2'' = x_2''', \quad x_h'' = x_h''' \end{aligned}$$

zu folgender führt:

$$x_1 = x_1''', \quad x_2 = x_1''' + x_2''', \quad x_h = x_h''' \qquad (h=3, 4, \ldots n),$$

welche daher den Transformationen (L'') hinzugefügt werden kann. Wenn ferner sowohl diese Transformation als auch die erste der Transformationen (L'') μmal angewendet wird, so entstehen die Transformationen:

$$(\mathrm{L}''') \quad \begin{aligned} & x_1 = x_1' + \mu x_2', \quad x_2 = x_2', \quad x_h = x_h' \\ & x_2 = \mu x_1' + x_2', \quad x_1 = x_1', \quad x_h = x_h' \end{aligned} \qquad (h=3, 4, \ldots n),$$

bei denen also die Invarianten ungeändert bleiben müssen. In den auf diese Weise transformirten Formen sind die Coefficienten ganze Functionen von μ, und eine rationale Function derselben kann also nur dann für alle ganzzahligen Werthe von μ einen und denselben Werth haben, wenn sie von μ unabhängig ist. Jede bei den Transformationen (L'') ungeändert bleibende *rationale* Function der Coefficienten der Formen behält demnach auch dann ihren Werth bei, wenn anstatt μ eine unbestimmte Variable t genommen und eine der n Transformationen:

$$x_1 = x_1' + tx_2',\ x_2 = x_2',\ x_h = x_h' \qquad (h=3, 4, \ldots n),$$
$$\left.\begin{array}{l} x_2 = tx_1' + x_2',\ x_1 = x_1',\ x_h = x_h' \\ x_1 = -x_r',\ x_r = x_1',\ x_h = x_h' \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{l} h>1,\ h \gtrless r; \\ r=3, 4, \ldots n \end{array}\right)$$

angewendet wird. Dies sind aber genau die im § 10 mit (M′) bezeichneten n Transformationen, und es ist a. a. O. gezeigt worden, dass die Bedingung der Unveränderlichkeit bei diesen n Transformationen zur Charakterisirung der Invarianten eines Systems homogener Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ vollständig genügt.

Aus der vorstehenden Auseinandersetzung folgt zugleich, dass sowohl die Unveränderlichkeit bei den n Transformationen:

$$x_1 = x_1' + x_2',\ x_2 = x_2',\ x_h = x_h' \qquad (h=3, 4, \ldots n),$$
$$(\mathrm{M}'')\qquad \left.\begin{array}{l} x_2 = x_1' + x_2',\ x_1 = x_1',\ x_h = x_h' \\ x_1 = -x_r',\ x_r = x_1',\ x_h = x_h' \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{l} h>1,\ h \gtrless r; \\ r=3, 4, \ldots n \end{array}\right)$$

als auch die Unveränderlichkeit bei den $2n-2$ Transformationen:

$$(\mathrm{N}'')\qquad \begin{array}{l} x_1 = x_1' + x_r',\ x_r = x_r',\ x_h = x_h' \\ x_r = x_1' + x_r',\ x_1 = x_1',\ x_h = x_h' \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} h>1,\ h \gtrless r; \\ r=2, 3, \ldots n \end{array}\right)$$

zur Charakterisirung *rationaler* Invarianten ausreicht. Denn die μ mal wiederholte Anwendung solcher Transformationen führt zu den folgenden:

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1' + \mu x_r',\ x_r = x_r',\ x_h = x_h' \\ x_r = \mu x_1' + x_r',\ x_1 = x_1',\ x_h = x_h' \end{array} \qquad (h>1,\ h \gtrless r;\ r=2, 3, \ldots n),$$

und eine *rationale* Function der Coefficienten ist, wie oben näher dargelegt worden, nur dann bei solchen Transformationen invariant, wenn sie zugleich — für unbestimmte Variable t — bei den Transformationen:

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1' + tx_r',\ x_r = x_r',\ x_h = x_h' \\ x_r = tx_1' + x_r',\ x_1 = x_1',\ x_h = x_h' \end{array} \qquad (h>1,\ h \gtrless r;\ r=2, 3, \ldots n)$$

ihren Werth beibehält. Die nach § 10 zur Charakterisirung der Invarianten ausreichende Unveränderlichkeit einer Function der Coefficienten der Formen bei den Transformationen (M′) oder (N′) ist also eine nothwendige Folge der Unveränderlichkeit bei den Transformationen (M″) oder (N″), sobald noch die Bedingung der Rationalität hinzutritt.

Man kann dieses Resultat auch dahin formuliren,

> dass für *rationale* Invarianten die Bedingung der Unveränderlichkeit bei denjenigen Transformationen genügt, welche aus den Transformationen (L′), (M′), (N′) entstehen, wenn man darin $t=1$ setzt.

Die Transformationen (L′) reduciren sich, da die letzte derselben für $t=1$ wegfällt, genau auf diejenigen, aus denen sich, wie ich schon in meiner Mittheilung vom 15. October 1866*) angegeben habe, jede Transformation mit ganzzahligen Substitutionscoefficienten, deren Determinante gleich Eins ist, zusammensetzen lässt. Die successive Anwendung der dabei auftretenden $n-1$ Transformationen:

$$x_1 = -x_r',\ x_r = x_1',\ x_h = x_h' \qquad \left(\begin{array}{l} h=2, 3, \ldots r-1, r+1, \ldots n; \\ r=2, 3, \ldots n \end{array}\right)$$

führt zu allen Permutationen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, verbunden mit gewissen Zeichenänderungen. Da man andererseits mit Hülfe von je zwei Substitutionen — falls sie nicht so besonders ausgewählt sind, dass sie zu einer „besonderen“ Gruppe gehören**) — durch deren wiederholte Anwendung zu jeder Permutation gelangt, so kann man jene $n-1$ Transformationen auf die mannigfachste Weise durch *zwei* Transformationen ersetzen. Ich habe dies aber in meiner Mittheilung vom 15. October 1866 und auch in dieser

*) Monatsberichte der Akademie vom October 1866.[1])

**) d. h. zu einer Gruppe, welche nicht alle $n!$ Substitutionen enthält.

[1]) Ueber bilineare Formen; Bd. I S. 143—162 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

Arbeit deshalb nicht gethan, weil es bei der Decomposition beliebiger Systeme von n^2 Grössen in gewisse einfache nicht auf die Anzahl der Arten von Decomponenten-Systemen, sondern lediglich auf deren Beschaffenheit ankommt. Diesen Gesichtspunkt habe ich schon in meiner erwähnten früheren Mittheilung dadurch hervorgehoben, dass ich die dort benutzten einfachen Decomponenten-Systeme als „elementare" bezeichnet habe. Dass eben dieser Gesichtspunkt bei der Auswahl der Decomponenten-Systeme maassgebend sein muss, zeigt sich auch ganz deutlich bei den Anwendungen, welche ich von der Decomposition in meinem vorhergehenden Aufsatz „über symmetrische Systeme" und in der vorliegenden Arbeit gemacht habe. So müssen die $n+1$ einfachen Systeme (L) des § 6 durch die $2n-2$ Systeme (N) des § 7 ersetzt werden, wenn man die Decomposition der Systeme zum unmittelbaren Nachweis des stetigen Zusammenhangs derjenigen, deren Determinante dasselbe Vorzeichen hat, benutzen will. So ist ferner dieselbe Art der Decomposition zur Herleitung der partiellen Differentialgleichungen erforderlich, welchen die Invarianten von Formensystemen genügen.

Wenn nun auch, wie sich an den angeführten Beispielen zeigt, die Wahl der „einfachen" Systeme, aus denen jedes System zusammenzusetzen ist, durch die specielle Anwendung, welche davon zu machen ist, bedingt sein kann, so gilt doch stets für die „Einfachheit" der Decomponenten-Systeme das Princip, dass jede einzelne, durch das einfache Substitutionssystem bewirkte Transformation sich auf möglichst wenig Variabeln zu erstrecken hat. Diesem Principe gemäss sind alle Decomponenten-Systeme in den obigen Entwickelungen so gewählt worden, dass die bezüglichen Transformationen sich nur auf zwei Variabeln erstrecken, und es ist klar, dass bei Festhaltung dieses Princips die Anzahl der Decomponenten-Systeme nicht kleiner als die der Variabeln sein kann. Die Anzahl der nach dem angegebenen Princip in meiner Mittheilung vom 15. October 1866 aufgestellten *„elementaren"* Systeme lässt sich also nicht verringern; dass sie aber auf 3 reducirt werden kann, wenn man — wie es Hr. *Krazer**) gethan hat — von

*) Ueber die Zusammensetzung ganzzahliger linearer Substitutionen von der Determinante Eins aus einer geringsten Anzahl fundamentaler Substitutionen. (Annali di matematica pura ed applicata, Ser. II. Tomo XII.)

dem bei meiner Aufstellung der elementaren Systeme leitenden Princip absieht, ist selbstverständlich, da sich, wie schon oben erwähnt worden, aus je zwei nicht zu einer besonderen Gruppe gehörigen Substitutionen alle zusammensetzen lassen.*) Die von Hrn. *Krazer* gewählten Transformationen sind:

$$x_1 = x_1' + x_2', \quad x_h = x_h' \qquad (h=2,3,\dots n),$$

$$x_1 = -x_2', \quad x_2 = x_1', \quad x_h = x_h' \qquad (h=3,4,\dots n),$$

$$x_1 = (-1)^{n-1} x_n', \quad x_2 = x_1', \quad x_3 = x_2', \cdots x_n = x_{n-1}';$$

diese letzte Transformation erstreckt sich, im Gegensatz zu dem erwähnten Princip, auf *alle* Variabeln und muss also, bei Festhaltung des Princips, in $n-1$ Transformationen, welche sich nur auf je zwei Variabeln erstrecken, zerlegt werden.

§ 14.

Die im § 10 bei (N') angegebenen und im § 12 als nothwendig erwiesenen Bedingungen, dass bei jeder von den Transformationen:

$$(\mathrm{N}') \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1' + t x_r', \quad x_h = x_h' && (h > 1), \\ x_r &= t x_1' + x_r', \quad x_h = x_h' && (h \gtrless r), \end{aligned}$$

welche den Indices $r = 2, 3, \dots n$ entsprechen, die Invarianten ihren Werth behalten sollen, können auch dahin formulirt werden,

> dass die Invarianten, als Functionen der Coefficienten derjenigen Formen, welche bei einer von jenen $2n-2$ Transformationen (N') entstehen, für jeden Werth von t denselben Werth haben müssen, wie für $t=0$, d. h. also, dass sie von t unabhängig sein müssen.

*) Im § 69 von Hrn. *Netto's* Substitutionentheorie wird mit Recht hervorgehoben, dass zwei beliebig gewählte Substitutionen in der Regel nicht zu einer anderen als der symmetrischen Gruppe gehören.

Wird nun, wie im vorigen Paragraphen, das System homogener Formen der Dimensionen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$:

$$\text{(S)} \qquad \sum_{p_1, p_2, \ldots p_n} C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \qquad \begin{pmatrix} p_1, p_2, \ldots p_n = 0, 1, 2, \ldots; \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \nu_q; \\ q = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

zu Grunde gelegt, und bezeichnet man diese Formen mit:

$$F^{(q)}(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (q = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist:

$$C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n} = \frac{1}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!} \frac{\partial^{(\nu_q)} F^{(q)}(x_1, x_2, \ldots x_n)}{dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \ldots dx_n^{p_n}} \qquad \begin{pmatrix} p_1, p_2, \ldots p_n = 0, 1, 2, \ldots; \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \nu_q; \\ q = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}.$$

Eine Function der Coefficienten $C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}$:

$$\text{Inv.}\left(\ldots C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}, \ldots\right)$$

wird demnach als Invariante des Formensystems (S) vollständig durch die Bedingung charakterisirt, dass jede der $2n-2$ Functionen:

$$\text{(T)} \qquad \begin{aligned} &\text{Inv.}\left(\ldots \frac{\partial^{(\nu_q)} F^{(q)}(x_1 + tx_r, x_2, \ldots x_n)}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!\, dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \ldots dx_n^{p_n}}, \ldots\right) \\ &\text{Inv.}\left(\ldots \frac{\partial^{(\nu_q)} F^{(q)}(x_1, x_2, \ldots x_{r-1}, tx_1 + x_r, x_{r+1}, \ldots x_n)}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!\, dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \ldots dx_n^{p_n}}, \ldots\right) \end{aligned}$$

$$(r = 2, 3, \ldots n)$$

von t unabhängig sein muss. Differentiirt man also diese $2n-2$ Functionen nach t und setzt das Resultat gleich Null, so sind die so entstehenden $2n-2$ Differentialrelationen charakteristisch für die Invarianteneigenschaft der Function:

$$\text{Inv.}\left(\ldots C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}, \ldots\right).$$

Bei der Aufstellung der bezeichneten Differentialrelationen ist von folgender Formel Gebrauch zu machen:

$$\text{(U)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^{(\lambda)} F^{(q)}(x_1 + tx_2, x_2, \ldots x_n)}{dt\, dx_1^{h_1} dx_2^{h_2} dx_3^{h_3} \ldots dx_n^{h_n}} \\ &= h_2 \cdot \frac{\partial^{(\lambda-1)} F^{(q)}(x_1 + tx_2, x_2, \ldots, x_n)}{dx_1^{h_1+1} dx_2^{h_2-1} dx_3^{h_3} \ldots dx_n^{h_n}} + x_2 \cdot \frac{\partial^{(\lambda)} F^{(q)}(x_1 + tx_2, x_2, \ldots x_n)}{dx_1^{h_1+1} dx_2^{h_2} \ldots dx_n^{h_n}} \end{aligned}$$

$$(h_1, h_2, \ldots h_n = 0, 1, 2, \ldots;\ h_1 + h_2 + \ldots + h_n + 1 = \lambda).$$

Diese Formel gilt offenbar für $h_2 = 0$, und wenn ihre Gültigkeit für irgend einen der Werthe $h_2 = 0, 1, 2, \ldots$ vorausgesetzt wird, so zeigt die Differentiation nach x_2, dass sie auch für den um Eins grösseren Werth von h_2 gültig bleibt.

Nimmt man in der Formel (U) die Zahl λ gleich $\nu_q + 1$, so wird das zweite Glied auf der rechten Seite gleich Null, und es kommt:

$$\text{(U}'\text{)} \qquad \frac{\partial^{(\nu_q+1)} F^{(q)}(x_1 + tx_2, x_2, \ldots x_n)}{dt\, dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} dx_3^{p_3} \ldots dx_n^{p_n}} = p_2 \cdot \frac{\partial^{(\nu_q)} F^{(q)}(x_1 + tx_2, x_2, \ldots x_n)}{dx_1^{p_1+1} dx_2^{p_2-1} dx_3^{p_3} \ldots dx_n^{p_n}}.$$

Nun ist das Resultat der Differentiation von:

$$\text{(T}_1\text{)} \qquad \text{Inv.}\left(\ldots \frac{\partial^{(\nu_q)} F^{(q)}(x_1 + tx_2, x_2, \ldots x_n)}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!\, dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \ldots dx_n^{p_n}}, \ldots\right)$$

nach t ein Aggregat von Producten je zweier Factoren, deren einer die partielle Ableitung der mit (T_1) bezeichneten Function nach je einem ihrer Argumente:

$$\frac{\partial^{(\nu_q)} F^{(q)}(x_1 + tx_2, x_2, \ldots x_n)}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!\, dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \ldots dx_n^{p_n}}$$

ist, während der andere Factor durch die nach t genommene Ableitung dieses Arguments oder also, vermöge der Formel (U′) durch:

$$(p_1+1)\cdot\frac{\partial^{(\nu_q)}F^{(q)}(x_1+tx_2,\,x_2,\,\ldots x_n)}{(p_1+1)!\,(p_2-1)!\,p_3!\ldots p_n!\,dx_1^{p_1+1}\,dx_2^{p_2-1}\,dx_3^{p_3}\ldots dx_n^{p_n}}$$

gebildet wird. Das Resultat der Differentiation lässt sich also in folgender Weise darstellen:

$$\sum_{p_1,\,p_2,\ldots p_n,\,q}(p_1+1)\,\overline{C}^{(q)}_{p_1+1,\,p_2-1,\,p_3,\ldots p_n}\,\frac{\partial\,\mathrm{Inv.}\left(\ldots\overline{C}^{(q)}_{p_1,\,p_2,\ldots p_n},\ldots\right)}{\partial\,\overline{C}^{(q)}_{p_1,\,p_2,\ldots p_n}}$$

$$(p_1,\,p_3,\ldots p_n=0,1,2,\ldots;\ p_2=1,2,\ldots;\ p_1+p_2+\cdots+p_n=\nu_q;\ q=1,2,3,\ldots),$$

wenn man unter den Coefficienten $\overline{C}$ diejenigen versteht, welche durch die Gleichungen:

$$F^{(q)}(x_1+tx_2,\ x_2,\ldots x_n)=\sum_{p_1,\,p_2,\ldots p_n}\overline{C}^{(q)}_{p_1,\,p_2,\ldots p_n}\,x_1^{p_1}\,x_2^{p_2},\ldots x_n^{p_n}$$

$$(p_1,\,p_2,\ldots p_n=0,1,2,\ldots;\ p_1+p_2+\cdots+p_n=\nu_q;\ q=1,2,3,\ldots)$$

definirt werden. Die Bedingung dafür, dass die mit (T_1) bezeichnete Function von t unabhängig sei, wird hiernach durch die partielle Differentialgleichung:

$$(\mathrm{U}'')\qquad\sum_{p_1,\,p_2,\ldots p_n,\,q}(p_1+1)\,\overline{C}^{(q)}_{p_1+1,\,p_2-1,\,p_3,\ldots p_n}\,\frac{\partial\,\mathrm{Inv.}\left(\ldots\overline{C}^{(q)}_{p_1,\,p_2,\ldots p_n},\ldots\right)}{\partial\,\overline{C}^{(q)}_{p_1,\,p_2,\ldots p_n}}=0,$$

$$(p_1,\,p_3,\ldots p_n=0,1,2,\ldots;\ p_2=1,2,\ldots;\ p_1+p_2+\cdots+p_n=\nu_q;\ q=1,2,3,\ldots)$$

ausgedrückt, und diese ist vollkommen gleichbedeutend mit derjenigen, welche man erhält, wenn man darin für die Coefficienten $\overline{C}^{(q)}$ der Formen:

$$F^{(q)}(x_1+tx_2,\ x_2,\ldots x_n)$$

die Coefficienten $C^{(q)}$ der Formen $F^{(q)}(x_1,\,x_2,\ldots x_n)$ einsetzt.

Gemäss der vorstehenden Entwickelung lässt sich jene für die Invarianteneigenschaft der Function:

$$\mathrm{Inv.}\left(\ldots C^{(q)}_{p_1,\,p_2,\ldots p_n},\ldots\right)$$

charakteristische Bedingung, dass jede der $2n-2$ Functionen (T) von t unabhängig sein muss, vollständig durch ein System von $2n-2$ partiellen Differentialgleichungen ausdrücken, welche aus (U″) hervorgehen, indem erst:

$$p_r \qquad (r=2,3,\ldots n)$$

an Stelle von p_2 gesetzt und alsdann in jeder von den so entstehenden $n-1$ Differentialgleichungen p_1 mit p_r vertauscht wird. Die auf die angegebene Weise zu bildenden Gleichungen können in folgender Weise dargestellt werden:

$$(\mathrm{V})\quad\sum_{p_1,\,p_2,\ldots p_n,\,q}((1+\varepsilon)p_1+(1-\varepsilon)p_r+2)\,C^{(q)}_{p_1+\varepsilon,\ldots p_{r-1},\,p_r-\varepsilon,\,p_{r+1},\ldots p_n}\,\frac{\partial\,\mathrm{Inv.}\left(\ldots C^{(q)}_{p_1,\,p_2,\ldots p_n},\ldots\right)}{\partial\,C^{(q)}_{p_1,\,p_2,\ldots p_n}}=0.$$

Hierin ist sowohl $\varepsilon=+1$ als auch $\varepsilon=-1$ zu setzen, und für r sind die Zahlen $2,3,\ldots n$ zu nehmen, so dass die Formel (V) genau $2n-2$ partielle Differentialgleichungen repräsentirt. Die Summation ist auf alle diejenigen Werthe:

$$p_1,\ p_2,\ldots p_n=0,\,1,\,2,\ldots$$

zu erstrecken, für welche zugleich:

$$p_1+\varepsilon\geqq 0,\quad p_r-\varepsilon\geqq 0,\quad p_1+p_2+\cdots+p_n=\nu_q$$

ist, und überdies auf die Werthe $q=1,2,3,\ldots$, welche den verschiedenen Formen des betrachteten Systems:

$$F^{(q)}(x_1,\ x_2,\ldots x_n)$$

entsprechen.

§ 15.

Für *absolute* Invarianten:

$$\text{abs. Inv.}\left(\ldots C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}, \ldots\right)$$

tritt noch gemäss § 8 (O) die Bedingung hinzu, dass sie bei der Transformation:

$$x_1 = \varDelta x_1', \quad x_h = x_h' \qquad (h=2, 3, \ldots n)$$

ihren Werth behalten sollen. Hierfür ist nothwendig und hinreichend, dass der Werth der Function:

$$\text{abs. Inv.}\left(\ldots \varDelta^{p_1} C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}, \ldots\right)$$

von $\varDelta$ unabhängig, also ihr nach $\varDelta$ genommener Differentialquotient gleich Null sei. Diese Bedingung lässt sich, wenn man:

$$\varDelta^{p_1} C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n} = \overline{C}^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}$$

setzt, durch die partielle Differentialgleichung:

$$\sum_{p_1, p_2, \ldots p_n, q} p_1 \overline{C}^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n} \frac{\partial\, \text{abs. Inv.}\left(\ldots \overline{C}^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}, \ldots\right)}{\partial\, \overline{C}^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}} = 0$$

darstellen, in welcher aber auch — wie oben — die Coefficienten $\overline{C}^{(q)}$ der Formen:

$$F^{(q)}(\varDelta x_1, x_2, \ldots x_n)$$

durch die Coefficienten $C^{(q)}$ der Formen $F^{(q)}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ersetzt werden können. Für *absolute* Invarianten ist demnach den $2n-2$ partiellen Differentialgleichungen (V) noch die folgende:

$$(\text{V}') \qquad \sum_{p_1, p_2, \ldots p_n, q} p_1 C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n} \frac{\partial\, \text{abs. Inv.}\left(\ldots C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}, \ldots\right)}{\partial\, C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}} = 0$$

$$(p_1, p_2, \ldots p_n = 0, 1, 2, \ldots;\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \nu_q;\ q = 1, 2, 3, \ldots)$$

hinzuzufügen, welche ausdrückt, dass die Dimension der durch

$$\text{abs. Inv.}\left(\ldots C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}, \ldots\right)$$

bezeichneten Function der Coefficienten $C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}$ gleich Null sein muss, wenn man die Dimension jedes dieser Coefficienten gleich dem ersten Index p_1 annimmt.

Das für absolute Invarianten charakteristische System der $2n-1$ partiellen Differentialgleichungen (V), (V'), welches, wie wohl hervorgehoben zu werden verdient, hier ohne Anwendung irgend welcher Symbolik erlangt worden ist, ersetzt vollständig jenes System der n^2 partiellen Differentialgleichungen, welches *Aronhold* in seiner Abhandlung*) „Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie" hergeleitet hat. Es zeichnet sich vor dem citirten System aber nicht nur durch die wesentlich geringere Anzahl der Gleichungen, sondern auch dadurch aus, dass jede einzelne Gleichung für sich eine Bedeutung hat, indem sie die Eigenschaft der Invariante ausdrückt, bei einer bestimmten „einfachen" Transformation des Formensystems ihren Werth beizubehalten. Auch giebt die hiermit erfolgte Reduction jenes Systems von n^2 partiellen Differentialgleichungen auf ein solches, welches aus nur $2n-1$ Differentialgleichungen besteht, vollständigen Aufschluss über die zwischen den n^2 Gleichungen bestehenden Beziehungen, durch welche die a. a. O. von *Aronhold* als bemerkenswerth hervorgehobene Coexistenz derselben bedingt ist. Endlich ist noch darauf aufmerksam zu machen, dass — wie aus § 12 hervorgeht — bei der Charakterisirung der Invarianten keine einzige der $2n-2$ partiellen Differentialgleichungen (V), und, falls es sich um *absolute* Invarianten handelt, auch nicht die Differentialgleichung (V'), entbehrt werden kann.

---

*) *Crelle*'s Journal für Mathematik Bd. 62, S. 293 und 309.

§ 16.

Im § 14 bildete es einen wesentlichen Punkt in der Herleitung der partiellen Differentialgleichungen (V), dass die Differentiation der Functionen (T) nach t zu Ausdrücken führte, in welchen nur die Coefficienten $\overline{C}^{(q)}$ vorkommen. Der Nachweis hierfür wurde mittels der Formel (U) erbracht. Der bezeichnete Umstand wird aber ohne Weiteres evident, wenn man die Invarianten nicht als Functionen der Coefficienten $C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}$ der Formen:

$$F^{(q)}(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

sondern als Functionen einer Anzahl von Ausdrücken:

$$F^{(q)}(u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk}) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots \mu_q;\ q=1, 2, 3, \ldots)$$

betrachtet, in denen $u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk}$ unbestimmte Variabeln bedeuten. Die Zahl μ_q ist dabei gleich der Anzahl der Coefficienten $C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}$ zu wählen und die Ausdrücke $F^{(q)}(u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk})$ sind dann offenbar lineare homogene Functionen der Coefficienten $C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}$.

Soll nun:

$$\text{Inv.}\left(\ldots F^{(q)}(u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk}), \ldots\right)$$

eine Invariante des Formensystems $F^{(q)}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sein, so muss z. B.:

$$\text{Inv.}\left(\ldots F^{(q)}(u_{1k} + tu_{2k}, u_{2k}, \ldots u_{nk}), \ldots\right)$$

von t unabhängig, also der nach t genommene Differentialquotient gleich Null sein. Wenn man daher zur Abkürzung die nach dem Argument:

$$F^{(q)}(u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk})$$

genommene partielle Ableitung der Function Inv. mit:

$$\text{Inv.}_{k,q}$$

bezeichnet und:

$$\frac{\partial F^{(q)}(u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk})}{\partial u_{1k}} = F_1^{(q)}(u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk})$$

setzt, so kommt:

$$\sum_{k,q} u_{2k} F_1^{(q)}(u_{1k} + tu_{2k}, u_{2k}, \ldots u_{nk})\, \text{Inv.}_{k,q}\left(\ldots F^{(q)}(u_{1k} + tu_{2k}, u_{2k}, \ldots u_{nk}), \ldots\right) = 0$$
$$(k=1, 2, 3, \ldots \mu_q;\ q=1, 2, 3, \ldots).$$

Ersetzt man endlich in dieser Gleichung $u_{1k} + tu_{2k}$ durch u_{1k}, so resultirt die partielle Differentialgleichung:

$$\sum_{k,q} u_{2k} F_1^{(q)}(u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk})\, \text{Inv.}_{k,q}\left(\ldots F^{(q)}(u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk}), \ldots\right) = 0,$$

welche die angekündigte Form hat, da die Coefficienten:

$$F_1^{(q)}(u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk})$$

der partiellen Ableitungen der Invariante offenbar lineare homogene Functionen der Coefficienten $C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}$ oder auch der an deren Stelle eingeführten Ausdrücke:

$$F^{(q)}(u_{1k}, u_{2k}, \ldots u_{nk})$$

sind.

§ 17.

Eine Function der n^2 Coefficienten eines Systems von n *linearen* Formen:

$$\sum_k C_{ik} x_k \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

kann nur dann eine Invariante sein, wenn sie eine Function der Determinante:

$$|C_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

ist, und eine solche ist daher gemäss § 10 (L') dadurch charakterisirt, dass sie ungeändert bleibt,

> erstens, wenn $C_{i1} + C_{i2}$ an die Stelle von C_{i2} gesetzt wird,
> zweitens, wenn C_{ir} für C_{i1} und zugleich $-C_{i1}$ für C_{ir} gesetzt wird,
> drittens, wenn tC_{i1} für C_{i1} und zugleich $\frac{1}{t}C_{i2}$ für C_{i2} gesetzt wird.

Denkt man sich in der üblichen Weise die Coefficienten C_{ik} in n Verticalreihen von je n Gliedern so geordnet, dass diejenigen, welche denselben zweiten Index haben, derselben Verticalreihe angehören, so kann man das angegebene Resultat *so* formuliren:

> Eine Function der n^2 Grössen C_{ik}, welche ungeändert bleibt, wenn die erste Verticalreihe zur zweiten addirt wird, ferner auch wenn für die erste Verticalreihe irgend eine der folgenden und zugleich für diese die negativ genommene erste Verticalreihe gesetzt wird, endlich auch wenn die erste Verticalreihe mit t multiplicirt und zugleich die zweite durch t dividirt wird, kann nur eine Function der Determinante sein.

Ebenso folgt aus § 10 (N'),

> dass eine Function der n^2 Grössen C_{ik}, welche ungeändert bleibt, wenn die erste Verticalreihe, mit t multiplicirt, zu irgend einer der folgenden addirt wird, und auch dann, wenn zur ersten Verticalreihe irgend eine der folgenden, mit t multiplicirt, hinzugefügt wird, nothwendig eine Function der Determinante sein muss.

Hiermit völlig gleichbedeutend ist es, dass gemäss § 14 (V) eine Function der n^2 Grössen C_{ik}:

$$\Phi(C_{11}, C_{12}, \dots C_{nn})$$

durch die $2n-2$ partiellen Differentialgleichungen:

$$\sum_i C_{i1} \frac{\partial \Phi}{\partial C_{ik}} = 0, \quad \sum_i C_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial C_{i1}} = 0, \qquad \binom{i=1, 2, 3, \dots n,}{k= \quad 2, 3, \dots n}$$

als eine Function der Determinante charakterisirt wird.

Für eine *rationale* Function der n^2 Grössen C_{ik} kann nach § 13 ihre Eigenschaft, eine Function der Determinante zu sein, schon daraus erschlossen werden, dass sie sowohl dann, wenn die erste Verticalreihe zur zweiten addirt wird, als auch dann, wenn die erste Verticalreihe nach Aenderung ihres Vorzeichens mit einer der folgenden vertauscht wird, ihren Werth beibehält. Setzt man aber noch die Function als ganz, linear und homogen in den Elementen der ersten Verticalreihe voraus, so kann die erstere von jenen Bedingungen der Unveränderlichkeit, weil sie dann eine Folge der letzteren ist, weggelassen werden. Um dies näher darzulegen, sei eine Function der n^2 Grössen C_{ik}:

$$\Phi(C_{11}, C_{12}, \dots C_{nn})$$

> als eine ganze, lineare, homogene Function der n Grössen der ersten Verticalreihe definirt, welche bei Vertauschung dieser Verticalreihe mit irgend einer der folgenden den entgegengesetzten Werth annimmt, und welche den Werth Eins erhält, wenn das System C_{ik} das Einheitssystem ist.

Alsdann ist offenbar Φ eine ganze, lineare, homogene Function der Elemente *jeder* Verticalreihe; es wird also:

$$\Phi(C_{i1}, C_{i1} + C_{i2}, C_{i3}, \cdots C_{in}) \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

gleich der Summe:

$$\Phi(C_{i1}, C_{i1}, C_{i3}, \cdots C_{in}) + \Phi(C_{i1}, C_{i2}, C_{i3}, \cdots C_{in}) \qquad (i=1, 2, \dots n),$$

und die erstere dieser beiden Functionen, in deren Argumenten die beiden ersten Verticalreihen identisch sind,' muss gleich Null sein, weil sie bei Vertauschung der beiden ersten Verticalreihen den entgegengesetzten Werth annehmen soll. Die Function Φ bleibt also in der That ungeändert, wenn die erste Verticalreihe zur zweiten addirt wird; es ist daher

$\Phi(C_{11}, C_{12}, \ldots C_{nn})$ durch jene Bestimmungen als eine Invariante des Formensystems:

$$\sum_k C_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

vollkommen charakterisirt,

und zwar als die Determinante selbst.

Dass für die so definirte Function Φ der Productsatz besteht, ist evident. Denn wenn:

$$\sum_i A_{hi} C_{ik} = C'_{hk} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

gesetzt wird, so hat der Quotient:

$$\frac{\Phi(C'_{11}, C'_{12}, \ldots C'_{nn})}{\Phi(A_{11}, A_{12}, \ldots A_{nn})}$$

alle diejenigen Eigenschaften, welche für die Function:

$$\Phi(C_{11}, C_{12}, \ldots C_{nn})$$

als bestimmend angegeben worden sind. Auch wird die Function Φ auf Grund ihrer Definition unmittelbar als n-fache Summe:

$$\text{(W)} \qquad \sum_{i_1, i_2, \ldots i_n} \varepsilon_{i_1, i_2, \ldots i_n} C_{i_1, 1} C_{i_2, 2} \ldots C_{i_n, n} \qquad (i_1, i_2, \ldots i_n = 1, 2, \ldots n)$$

dargestellt, in welcher:

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots i_n} = 0$$

ist, wenn zwei der Indices gleiche Werthe haben, ferner aber, wenn die Indices sämmtlich unter einander verschieden sind:

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots i_n} = +1, \ -1,$$

je nachdem die Permutation $i_1, i_2, \ldots i_n$ aus $1, 2, \ldots n$ durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Indices entsteht.

Das Zeichen $\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ kann daher auch durch die Gleichung:

$$\Phi(A_{h, i_1}, A_{h, i_2}, \cdots A_{h, i_n}) = \varepsilon_{i_1, i_2 \ldots i_n} \ \Phi(A_{h1}, A_{h2}, \cdots A_{hn}) \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

definirt werden, welche in folgender einfachen Weise darzustellen ist:

$$\text{(W')} \qquad \underset{(h=1, 2, \ldots n;\ i=i_1, i_2, \ldots i_n)}{|A_{hi}|} = \varepsilon_{i_1, i_2, \ldots i_n} \underset{(h, k=1, 2, \ldots n)}{|A_{hk}|},$$

wenn man von der abgekürzten Determinantenbezeichnung:

$$\underset{(h, k=1, 2, \ldots n)}{|A_{hk}|} = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Gebrauch macht, welche ich in meiner Abhandlung „über bilineare Formen“ eingeführt habe.*) Ersetzt man das Zeichen $\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ in dem obigen Ausdruck (W) durch den Determinanten-Quotienten, welcher sich dafür aus der Gleichung (W') ergiebt, so kommt:

$$\text{(X)} \qquad \underset{(h, k=1, 2, \ldots n)}{|A_{hk}| \cdot |C_{hk}|} = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_n} \underset{(h=1, 2, \ldots n;\ i=i_1, i_2, \ldots i_n)}{|A_{hi}|} C_{i_1, 1} C_{i_2, 2} \ldots C_{i_n, n} \qquad (i_1, i_2, \ldots i_n = 1, 2, \ldots n),$$

*) Monatsbericht vom October 1866.[1])

[1]) Band I S. 143—162 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.

und es zeigt sich also, dass mit Hülfe *irgend einer* Determinante *jede* als n-fache Summe dargestellt werden kann.

Nimmt man für die Determinante $|A_{hi}|$ diejenige, von welcher *Cauchy* bei seinen bezüglichen Entwickelungen ausgeht, nämlich:

$$|x_i^{h-1}| \qquad (h, i=1, 2, \dots n),$$

wo x eine unbestimmte Variable bedeutet, so geht die Gleichung (X) in folgende über:

$$\text{(X')} \qquad \underset{(h,\,k=1,\,2,\,\dots\,n)}{|x_k^{h-1}| \cdot |C_{hk}|} = \underset{(h=1,\,2,\,\dots\,n;\; i=i_1,\,i_2,\,\dots\,i_n),}{\sum_{i_1, i_2, \dots i_n} |x_i^{h-1}|\, C_{i_1,1} C_{i_2,2}, \dots C_{i_n,n}} \qquad (i_1, i_2, \dots i_n = 1, 2, \dots n)$$

welche offenbar auch *so* dargestellt werden kann:

$$\text{(X'')} \qquad \underset{\binom{h,\,k=1,\,2,\,\dots\,n;}{r,\,s=1,\,2,\,\dots\,n;\; r<s}}{|C_{hk}| \prod_{r,s} (x_s - x_r)} = \underset{(r,\,s,\,t=1,\,2,\,\dots\,n;\; r<s).}{\sum_{i_1, i_2, \dots i_n} \prod_{r,s} (x_{i_s} - x_{i_r}) \prod_t C_{i_t, t}} \qquad (i_1, i_2, \dots i_n = 1, 2, \dots n)$$

Die in dieser Gleichung (X'') enthaltene Darstellung einer Determinante als n-fache Summe, in welcher den Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ beliebige unter einander verschiedene Werthe beigelegt werden können, habe ich zuerst im Wintersemester 1874/1875 und seitdem oftmals in meinen algebraischen Universitätsvorlesungen den determinantentheoretischen Entwickelungen zu Grunde gelegt*), aber bisher noch nicht durch den Druck veröffentlicht. Herr *E Schering* ist seinerseits, von anderen Gesichtspunkten ausgehend, zu einer solchen Darstellung gelangt und hat dieselbe schon im Jahre 1877 in seiner Abhandlung „Analytische Theorie der Determinanten" publicirt.**) Es ist auch dort gezeigt, dass sich die Eigenschaften der Determinanten mit

*) Es befanden sich unter meinen Zuhörern im Wintersemester 1874/1875 die Herren *Caspary, Gegenbauer, Hettner, Schoenflies.*

**) Bd. XII der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Leichtigkeit aus einer solchen Darstellung ergeben, aber der allgemeinere Ausdruck (X) der Determinante $|C_{ik}|$ erscheint hierfür noch etwas besser geeignet als der speciellere, welchen Herr *Schering* benutzt.

§ 18.

Ich bemerke schliesslich, dass die eigentliche Quelle der Decomposition von Systemen von n^2 Grössen in jener alten, einfachen Methode der Auflösung linearer Gleichungen zu finden ist, deren man sich bedient hat, bevor man an das Studium der algebraischen Ausdrücke gegangen ist, welche sich bei der literalen Auflösung zeigen, d. h. bevor man die Aufgabe im Sinne der „allgemeinen Arithmetik"*) behandelt und also die Auflösung linearer Gleichungen mit „unbestimmten" Coefficienten entwickelt hat.

In der That werden nach jener Methode n lineare Gleichungen:

$$F_i(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_i C_{ik} x_k = C_{i0} \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

zuerst durch Combination von je zweien, nämlich durch Bildung von Gleichungen:

$$t_r F_1 + F_r = C_r \qquad (r=2, 3, \dots n)$$

so umgeformt, dass die $n-1$ neu gebildeten Gleichungen eine Unbekannte weniger enthalten. Alsdann wird in derselben Weise fortgefahren, bis man zu einem System von n Gleichungen gelangt, von denen eine nur eine einzige Unbekannte, eine zweite höchstens zwei Unbekannte u. s. f. enthält, während in der n^{ten} alle n Unbekannte vorkommen können. Hierauf wird weiter aus der zweiten Gleichung, durch deren Combination mit der ersten, die in dieser

*) Es ist „die arithmetische Theorie ganzer Grössen eines beliebigen natürlichen Rationalitätsbereichs" also die arithmetische Theorie ganzer ganzzahliger Functionen von unbestimmten Variabeln, welche ich in meinem am Schlusse des 100. Bandes des Journals für Mathematik veröffentlichen Aufsatze[1]) mit dem Ausdruck „allgemeine Arithmetik" bezeichnet habe.

[1]) Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. Bd. III S. 209—240 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

vorkommende einzige Unbekannte entfernt; dann ebenso aus der dritten Gleichung, durch Combination mit der ersten und zweiten, jede der beiden Unbekannten, welche in diesen beiden Gleichungen vorkommen, und indem man so fortfährt, gelangt man schliesslich zu n Gleichungen, von denen jede nur je eine der n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ enthält. Das ursprüngliche Gleichungssystem, dessen Coefficienten irgend ein System von n^2 Grössen C_{ik} bilden, wird auf diese Weise durch eine Folge von Operationen, bei denen eine Gleichung mit einem Factor multiplicirt und zu einer anderen addirt wird, in ein solches transformirt, dessen Coefficienten nur ein „Diagonalsystem" bilden, und das dabei angewendete Verfahren kommt im Wesentlichen mit demjenigen überein, welches im § 2 zur Reduction eines beliebigen Systems von n^2 Grössen auf ein Diagonalsystem gedient hat.

Der Nutzen, welchen gemäss den vorstehenden Auseinandersetzungen die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen gewährt, ist also eigentlich jener alten Auflösungsweise linearer Gleichungen zu verdanken, und es zeigt sich hierbei — wie in vielen anderen Fällen — dass es auch in der weiteren Entwickelung einer Wissenschaft gar wohl vortheilhaft sein kann, auf die einfacheren, in früheren Stadien gebräuchlichen Methoden zurückzugreifen.

ÜBER ORTHOGONALE SYSTEME.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1890. S. 525—541, 601—607, 691—699, 873—885, 1063—1080.

ÜBER ORTHOGONALE SYSTEME.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 22. Mai 1890.]

Herr *Lipschitz* hat im art. 3 der ersten Abtheilung seines vorstehend abgedruckten Aufsatzes[1]) das interessante Problem der Aufstellung aller orthogonalen *symmetrischen* Systeme mit Hülfe der Grundsätze, welche in seiner Schrift „Untersuchungen über die Summen von Quadraten[2])" entwickelt sind, und mit Benutzung der darin eingeführten „Primitivzeichen" vollständig gelöst. Ich will nun hier, mit Hülfe von einigen in meinen früheren akademischen Mittheilungen enthaltenen Sätzen über die Transformation quadratischer Formen, eine zweite elegante Lösung des bezeichneten Problems ableiten und daran einige Bemerkungen über die Darstellung allgemeiner orthogonaler Systeme knüpfen.

I.

Formulirt man die zu lösende Aufgabe dahin,

> dass alle *symmetrischen* Systeme bestimmt werden sollen, welche zugleich orthogonal sind,

so liegt es nahe, die Elemente der symmetrischen Systeme in jener Darstellungsweise der Untersuchung zu Grunde zu legen, in welcher sie selbst durch die Elemente orthogonaler Systeme ausgedrückt erscheinen.

Beschränkt man sich zuvörderst auf symmetrische Systeme mit *reellen* Elementen:

---

[1]) *R. Lipschitz*, Beiträge zu der Theorie der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen oder bilinearen Formen. Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin v. J. 1890, S. 485—523. H.

[2]) *R. Lipschitz*, Untersuchungen über die Summen von Quadraten; Bonn 1886. H.

$$a_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

so ergiebt sich schon unmittelbar aus den höchst einfachen, in meiner Mittheilung vom 18. Mai 1868 enthaltenen Entwickelungen*), dass solche Grössen a_{ik} stets in folgender Form dargestellt werden können:

$$(1) \qquad a_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} p_h c_{hi} c_{hk} \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

wo die Grössen p_h und c_{hi} reell und die letzteren die Elemente eines orthogonalen Systems sind.

Bedeuten nämlich $u, v, x_1, x_2, \dots x_n$ unbestimmte Variable, so repräsentirt der Ausdruck:

$$u \sum_k x_k^2 + v \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

nach der a. a. O. eingeführten Bezeichnungsweise eine „Schaar von quadratischen Formen", und zwar eine der „ersten Art", da die *„forma definita"* $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ unter den Formen der Schaar vorkommt. Eine solche Schaar lässt sich, wie dort gezeigt ist, immer auf die Gestalt bringen**):

$$\sum_h (uv_h - vu_h)\, z_h^2 \qquad (h=1, 2, \dots n),$$

in welcher u_h, v_h reelle Grössen und $z_1, z_2, \dots z_n$ homogene lineare reelle Functionen der n Variabeln x bedeuten. Die Grössen v_h sind dabei nothwendig positiv, da dies durch die Transformationsgleichung:

$$(2) \qquad u \sum_k x_k^2 + v \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = \sum_h (uv_h - vu_h)\, z_h^2 \qquad (h, i, k=1, 2, \dots n),$$

und zwar speciell durch die daraus hervorgehende Gleichung:

*) Monatsbericht vom Mai 1868. S. 339—342.[1])

**) A. a. O. S. 342.[2])

[1]) Ueber Schaaren quadratischer Formen. Band I S. 163—174 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

[2]) Bd. I S. 169 dieser Ausgabe. H.

$$\sum_h x_h^2 = \sum_h v_h z_h^2 \qquad (h=1, 2, \dots n)$$

erfordert wird. Es werden daher, wenn:

$$\sqrt{v_h}\, z_h = \sum_i c_{hi} x_i \qquad (h, i=1, 2, \dots n)$$

gesetzt wird, die Coefficienten c_{hi} die reellen Elemente eines orthogonalen Systems. Substituirt man nun in der aus der Transformationsgleichung (2) hervorgehenden Gleichung:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = -\sum_h u_h z_h^2 \qquad (h, i, k=1, 2, \dots n)$$

für die Variabeln z die angegebenen linearen Functionen der Variabeln x und setzt:

$$-u_h = p_h v_h \qquad (h=1, 2, \dots n),$$

so resultiren für die Grössen a_{ik} jene Gleichungen (1):

$$a_{ik} = \sum_h p_h c_{hi} c_{hk} \qquad (h, i, k=1, 2, \dots n),$$

deren Existenz nachgewiesen werden sollte.

Soll das symmetrische System (a_{ik}) zugleich orthogonal sein, so müssen die Relationen bestehen:

$$(3) \qquad \sum_i a_{ir} a_{is} = \delta_{rs} \qquad (i, r, s=1, 2, \dots n),$$

wo δ_{rs} gleich Eins oder gleich Null ist, je nachdem $r = s$ oder $r \gtrless s$ ist. Substituirt man hierin für a_{ir} und a_{is} die Werthe aus den Gleichungen (1), so gehen die Relationen (3) in folgende über:

$$\sum_{g,h,i} p_g p_h c_{gr} c_{hs} c_{gi} c_{hi} = \delta_{rs} \qquad (g, h, i, r, s=1, 2, \dots n),$$

und diese nehmen, wenn man von den Gleichungen:

$$\sum_i c_{gi} c_{hi} = \delta_{gh} \qquad (g, h, i = 1, 2, \dots n) \tag{4}$$

Gebrauch macht, welche die Grössen c als Elemente eines orthogonalen Systems charakterisiren, die einfachere Gestalt an:

$$\sum_h p_h^2 c_{hr} c_{hs} = \delta_{rs} \qquad (h, r, s = 1, 2, \dots n). \tag{5}$$

Multiplicirt man nun mit $c_{kr} c_{ks}$ und summirt über alle Werthe:

$$r, s = 1, 2, \dots n,$$

so kommt:

$$\sum_{h, r, s} p_h^2 c_{hr} c_{kr} c_{hs} c_{ks} = \sum_r c_{kr}^2 \qquad (h, k, r, s = 1, 2, \dots n),$$

und hieraus folgt unmittelbar, bei Anwendung der gemäss den Gleichungen (4) bestehenden Relationen:

$$\sum_s c_{hs} c_{ks} = \delta_{hk}, \qquad \sum_r c_{kr}^2 = 1 \qquad (h, k, r, s = 1, 2, \dots n),$$

dass die Grössen p_k^2 sämmtlich gleich Eins sein müssen. Die Relationen (3) können also nur dann erfüllt sein, wenn man in den Gleichungen (1) die sämmtlichen Grössen p_h gleich ± 1 annimmt. Alsdann sind sie aber, wie aus den Gleichungen (5) folgt, in der That erfüllt, und es zeigt sich daher,

> dass man alle orthogonalen symmetrischen Systeme mit reellen Elementen a_{ik} (ausser dem Einheitssystem) erhält, wenn man:
>
> $$a_{ik} = \sum_{g=1}^{g=m} c_{gi} c_{gk} - \sum_{h=m+1}^{h=n} c_{hi} c_{hk} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n) \tag{6}$$
>
> setzt, dabei für m eine der Zahlen $1, 2, \dots n-1$ und für die n^2 Grössen c die reellen Elemente irgend eines orthogonalen Systems nimmt.

Da die n^2 Grössen c die Relationen erfüllen:

$$\sum_{g=1}^{g=m} c_{gi} c_{gk} + \sum_{h=m+1}^{h=n} c_{hi} c_{hk} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

so können die Gleichungen (6) durch folgende ersetzt werden:

$$a_{ik} = -\delta_{ik} + 2 \sum_{g=1}^{g=m} c_{gi} c_{gk} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n). \tag{6'}$$

Fasst man, wie oben, die so bestimmten Grössen a_{ik} als die Coefficienten einer quadratischen Form auf und bildet alsdann die Schaar quadratischer Formen:

$$u \sum_k x_k^2 + v \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

welche auch in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$\sum_{i,k} (u \delta_{ik} + v a_{ik}) x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n), \tag{7}$$

so ersieht man aus den Gleichungen (6), dass diese Schaar (7) durch die Substitution:

$$y_i = \sum_k c_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

aus der Schaar:

$$(u + v) \sum_{g=1}^{g=m} y_g^2 + (u - v) \sum_{h=m+1}^{h=n} y_h^2 \tag{8}$$

hervorgeht, und die reellen Elemente a_{ik} eines orthogonalen symmetrischen Systems können offenbar auch dadurch *charakterisirt* werden, dass die Grössen:

$$u \delta_{ik} + v a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

die Coefficienten einer Transformirten der Schaar (8) sind, oder auch dadurch,

> dass sie die Coefficienten einer durch irgend welche orthogonale Transformation aus:

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - y_{m+2}^2 - \cdots - y_n^2$$

entstehenden quadratischen Form sind.

Bei dieser Charakterisirung orthogonaler symmetrischer Systeme (a_{ik}) tritt es deutlich hervor, dass sie — wie Herr *Lipschitz* nachgewiesen hat — eine $m(n-m)$ fache Mannigfaltigkeit bilden. Denn erstens bildet die Gesammtheit der orthogonalen Transformationen, welche auf die Form:

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - y_{m+2}^2 - \cdots - y_n^2$$

anzuwenden sind, eine $\frac{1}{2}n(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit. Zweitens muss jede orthogonale Transformation dieser Form in sich selbst auch die oben mit (8) bezeichnete Schaar quadratischer Formen, also sowohl die mit $u+v$ als auch die mit $u-v$ multiplicirte Summe von Quadraten in sich selbst übergehen lassen; es sind dies also nur diejenigen Transformationen, bei welchen sowohl die Summe der m positiven Quadrate als auch die Summe der $n-m$ negativen Quadrate in sich selbst transformirt wird. Diese bilden aber eine $\frac{1}{2}(m(m-1)+(n-m)(n-m-1))$ fache Mannigfaltigkeit, und die Differenz:

$$\tfrac{1}{2}n(n-1) - \tfrac{1}{2}(m(m-1)+(n-m)(n-m-1)),$$

welche gleich $m(n-m)$ ist, giebt also die Zahl für die wirkliche Mannigfaltigkeit der durch orthogonale Transformationen aus der Form:

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - y_{m+2}^2 - \cdots - y_n^2$$

entstehenden quadratischen Formen an.

II.

Dass eine orthogonale Transformation, bei welcher die Summe der m positiven Quadrate oder die Summe der $n-m$ negativen Quadrate der Form:

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - y_{m+2}^2 - \cdots - y_n^2$$

in sich selbst transformirt wird, keine neuen Systeme (a_{ik}) liefert, ist an sich klar, da bei zwei mittels der Substitutionssysteme:

$$(\mathfrak{c}_{ik}),\quad (c_{ik}) \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

nach einander ausgeführten orthogonalen Transformationen, von denen die erstere z. B. nur die Quadratsumme:

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2$$

in eine ebensolche Quadratsumme überführt, offenbar eine quadratische Form mit denselben Coefficienten a_{ik} resultirt, wie wenn nur die eine Transformation mittels des Substitutionssystem (c_{ik}) angewendet wird. Um dies aber auch an den oben angegebenen Ausdrücken der Elemente a_{ik} nachzuweisen, sei:

$$(c'_{ik}) \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

das aus der Composition der Systeme $(\mathfrak{c}_{ik})$ und (c_{ik}) hervorgehende orthogonale System und also:

$$\sum_h \mathfrak{c}_{gh} c_{hi} = c'_{gi} \qquad (g, h, i=1, 2, \ldots n).$$

Gemäss der Gleichung (6) ist nun:

$$(9 \qquad a_{pq} = \sum_{g=1}^{g=m} c'_{gp} c'_{gq} - \sum_{r=m+1}^{r=n} c'_{rp} c'_{rq} \qquad (p, q=1, 2, \ldots n)$$

und daher:

$$(10) \qquad a_{pq} = \sum_{g,i,k} \mathfrak{c}_{gi} \mathfrak{c}_{gk} c_{ip} c_{kq} - \sum_{r,i,k} \mathfrak{c}_{ri} \mathfrak{c}_{rk} c_{ip} c_{kq}$$

$$(g=1, 2, \ldots m;\ r=m+1, m+2, \ldots n;\ i, k, p, q=1, 2, \ldots n).$$

Da das System $(\mathfrak{c}_{ik})$ die Transformation von $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2$ in eine Summe von m Quadraten bewirkt, die übrigen y aber ungeändert lässt, so erfüllen die Elemente $\mathfrak{c}_{ik}$ die Bedingungen:

$$(11) \qquad \mathfrak{c}_{rq} = \delta_{rq}, \quad \sum_{g=1}^{g=m} \mathfrak{c}_{gh} \mathfrak{c}_{gi} = \delta_{hi}, \quad \sum_{g=1}^{g=m} \mathfrak{c}_{gq} \mathfrak{c}_{gr} = 0$$

$$(h, i = 1, 2, \dots m;\ q = 1, 2, \dots m, m+1, \dots n;\ r = m+1, m+2, \dots n),$$

und vermöge derselben geht die Gleichung (10) in folgende über:

$$a_{pq} = \sum_{g=1}^{g=m} c_{gp} c_{gq} - \sum_{r=m+1}^{r=n} c_{rp} c_{rq} \qquad (p, q = 1, 2, \dots n)$$

welche in Verbindung mit der Gleichung (9) zeigt, dass die beiden orthogonalen Systeme (c_{ik}), (c'_{ik}) ein und dasselbe orthogonale symmetrische System (a_{ik}) liefern.

In noch einfacherer Weise zeigt sich dies bei dem Ausdruck:

$$(6') \qquad a_{ik} = -\delta_{ik} + 2 \sum_{g=1}^{g=m} c_{gi} c_{gk} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n).$$

Denn es ist:

$$\sum_g c'_{gi} c'_{gk} = \sum_{p,q} c_{pi} c_{qk} \sum_g \mathfrak{c}_{gp} \mathfrak{c}_{gq} \qquad \left({}_{i,\,k,\,p,\,q=1,\,2,\,\dots\,n}^{g=1,\,2,\,\dots\,m;}\right),$$

und es ergiebt sich also bei Anwendung der Relationen (11) in der That die Gleichung:

$$\sum_g c'_{gi} c'_{gk} = \sum_g c_{gi} c_{gk} \qquad (g = 1, 2, \dots m),$$

welche zeigt, dass die beiden aus den orthogonalen Systemen (c_{ik}), (c_{ik}) mittels der Gleichungen (6′) hervorgehenden orthogonalen symmetrischen Systeme (a_{ik}) mit einander identisch sind.

Das System der mn Grössen:

$$c_{gi} \qquad \left({}_{i=1,\,2,\,\dots\,n}^{g=1,\,2,\,\dots\,m}\right),$$

welche allein bei der mit (6′) bezeichneten Darstellung der Systeme (a_{ik}) vorkommen, ist nur den $\frac{1}{2} m (m+1)$ Bedingungen unterworfen:

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} c_{gi} c_{hi} = \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \quad m)$$

Diese Bedingungen bleiben erfüllt, wenn man die n durch die Indexwerthe $i = 1, 2, \dots n$ charakterisirten Grössen c_{gi} durch:

$$\frac{\alpha c_{gi} + \beta c_{hi}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

aber auch zugleich die n Grössen c_{hi} durch:

$$\frac{-\beta c_{gi} + \alpha c_{hi}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad (i = 1, 2, \dots n$$

ersetzt, und das so veränderte System der Grössen c liefert, wenn es in den Gleichungen (6′) verwendet wird, *dasselbe* System der Grössen a_{ik} wie das ursprüngliche System der Grössen c. Nimmt man hierbei:

$$\alpha = c_{g1}, \quad \beta = c_{h1},$$

so tritt $\sqrt{c_{g1}^2 + c_{h1}^2}$ an Stelle von c_{g1} und *Null* an Stelle von c_{h1}. In dem neuen Syteme der mn Grössen c ist also das erste Element der h^{ten} Horizontalreihe gleich Null. Das angegebene Verfahren kann nun offenbar dazu angewendet werden, um zuvörderst die ersten Elemente der sämmtlichen auf die erste folgenden Horizontalreihen, alsdann die sämmtlichen zweiten Elemente der auf die zweite folgenden Horizontalreihen u. s. f. gleich Null zu machen, und man kann auf diese Weise zu einem Systeme von mn Grössen c_{gi} gelangen, in welchem alle Elemente, deren erster Index grösser als der zweite ist, gleich Null sind, und welche immer noch die Bedingungen (12) erfüllen.*) Es genügt also, *solche* Systeme (c_{gi}) in den Gleichungen (6') zur Bildung orthogonaler symmetrischer Systeme (a_{ik}) zu verwenden.

Die Systeme (c_{gi}) von der angegebenen Beschaffenheit bestehen nur noch aus den $\frac{1}{2}m(m+1)$ Elementen:

$$c_{gk} \qquad \begin{pmatrix} g=1, 2, \dots m; \\ k=g, g+1, \dots m \end{pmatrix}$$

und aus den $m(n-m)$ Elementen:

$$c_{gr} \qquad \begin{pmatrix} g=1, 2, \dots m; \\ r=m+1, m+2, \dots n \end{pmatrix}.$$

Man kann sich dabei die letzteren $m(n-m)$ Elemente c_{gr}, d. h. die Elemente der $n-m$ letzten Verticalreihen, als unbestimmte Variable und die ersteren $\frac{1}{2}m(m+1)$ Elemente c_{gk}, welche in den ersten m Verticalreihen vorkommen, als Functionen derselben denken. Denn wenn man die Gleichungen:

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} c_{gi} c_{hi} = \delta_{gh} \qquad (g, h=1, 2, \dots m)$$

nach einander für:

$$g=m,\ h=m;\ \ g=m-1,\ h=m;\ \ g=m-1,\ h=m-1;$$
$$g=m-2,\ h=m;\ \ g=m-2,\ h=m-1;\ \ g=m-2,\ h=m-2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

*) Die obige Reduction eines nur durch die Bedingungen (12) beschränkten Systems variabler Grössen c_{gi} auf ein solches, in welchem für $g>i$ die Elemente sämmtlich gleich Null sind, bleibt auch auf alle *speciellen* Systeme reeller Grössen c_{gi} ohne Ausnahme anwendbar. Aber bei *speciellen complexen* Grössen kann der Nenner $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ gleich Null werden, und es bedarf dann einer anderen Art der Reduction. Statt, wie hier, elementare orthogonale Transformationen, d. h. solche zu benutzen, welche die Summe zweier Quadrate in eine eben solche transformiren, hat man alsdann von den elementaren Transformationen Gebrauch zu machen, bei welchen eine Summe von zwei Producten je zweier Variabeln, also eine Form $z_1z_2+z_3z_4$, in sich selbst übergeht, sowie von denjenigen, bei welchen eine Form $z_1^2+z_2z_3$ in sich selbst transformirt wird.

benutzt, so bestimmen sich der Reihe nach die Elemente:

$$c_{m,m},\ c_{m-1,m},\ c_{m-1,m-1},\ c_{m-2,m},\ c_{m-2,m-1},\ c_{m-2,m-2},\ \dots,$$

nämlich $c_{m,m}$ durch die Gleichung:

$$c_{m,m}^2 + c_{m,m+1}^2 + \dots + c_{m,n}^2 = 1,$$

ferner $c_{m-1,m}$ durch die Gleichung:

$$c_{m-1,m}c_{m,m} + c_{m-1,m+1}c_{m,m+1} + \dots + c_{m-1,n}c_{m,n} = 0,$$

dann $c_{m-1,m-1}$ durch die Gleichung:

$$c_{m-1,m-1}^2 + c_{m-1,m}^2 + \dots + c_{m-1,n}^2 = 1$$

u. s. f., und man sieht, dass hierbei nur die *Vorzeichen* der ersten m Verticalreihen unbestimmt bleiben, dass also jeder dieser Verticalreihen ein beliebiges Vorzeichen gegeben werden kann.

Dass die Mannigfaltigkeit der orthogonalen symmetrischen Systeme (a_{ik}) eine $m(n-m)$fache ist, tritt bei der angegebenen Bildungsweise in Evidenz, da die hierbei verwendeten Systeme (c_{gk}) genau $m(n-m)$ unbestimmte Elemente enthalten.

III.

Bezeichnet man mit:

$$w_{gp} \qquad \begin{pmatrix} g=1, 2, \dots m \\ p=1, 2, \dots n \end{pmatrix}$$

unbestimmte Variable, bildet daraus ein Modulsystem mit den $\frac{1}{2}m(m+1)$ Elementen:

$$(\mathfrak{M}) \qquad -\delta_{gh} + \sum_p w_{gp} w_{hp} \qquad \begin{pmatrix} g, h=1, 2, \dots m;\ g \leq h \\ p=1, 2, \dots n \end{pmatrix}$$

und setzt dann:

$$u_{pq} = -\delta_{pq} + 2\sum_g w_{gp} w_{gq} \qquad \left({g=1,2,\ldots m \atop p,\,q=1,2,\ldots n}\right), \tag{13}$$

so besteht die Congruenz:

$$\sum_p u_{pq} u_{pr} \equiv \delta_{qr} \ \left(\text{modd.} -\delta_{gh} + \sum_p w_{gp} w_{hp}\right) \qquad \left({g,\,h=1,2,\ldots m \atop p,\,q,\,r=1,2,\ldots n}\right). \tag{14}$$

Denn es wird zuvörderst:

$$\sum_p u_{pq} u_{pr} = \sum_p \left(2\sum_g w_{gp} w_{gq} - \delta_{pq}\right)\left(2\sum_h w_{hp} w_{hr} - \delta_{pr}\right)$$
$$(g,\,h=1,2,\ldots m;\ p,\,q,\,r=1,2,\ldots n),$$

und wenn man den Ausdruck auf der rechten Seite entwickelt, so kommt:

$$4\sum_{g,h} w_{gq} w_{hr} \sum_p w_{gp} w_{hp} - 4\sum_g w_{gq} w_{gr} + \delta_{qr} \tag{15}$$
$$(g,\,h=1,2,\ldots m;\ p,\,q,\,r=1,2,\ldots n).$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks reducirt sich aber mittels der Congruenz:

$$\sum_p w_{gp} w_{hp} \equiv \delta_{gh} \qquad \left({g,\,h=1,2,\ldots m \atop p=1,2,\ldots n}\right)$$

für das Modulsystem ($\mathfrak{M}$) auf die Summe:

$$4\sum_g w_{gq} w_{gr} \qquad \left({g=1,2,\ldots m \atop q,\,r=1,2,\ldots n}\right),$$

es bleibt also in dem Ausdruck (15), wenn derselbe im Sinne der Congruenz für das Modulsystem ($\mathfrak{M}$) betrachtet wird, nur der letzte Theil δ_{qr} übrig, und die Richtigkeit der Congruenz (14) ist hiermit dargethan.

Nimmt man für die Grössen w_{gp} ganze Functionen irgend eines Bereichs ($\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots$), so ersieht man aus der Congruenz (14),

dass die mittels der Gleichungen (13) definirten Grössen u_{pq}, im Sinne der Congruenz für das Modulsystem ($\mathfrak{M}$) oder für irgend ein darin enthaltenes Modulsystem, ein *orthogonales symmetrisches* System bilden.

Es tritt hierdurch in Evidenz, dass die Gleichungen (6′), welche aus den Gleichungen (13) hervorgehen, indem man die Grössen u durch die Grössen a und die Grössen w durch die Grössen c ersetzt, orthogonale symmetrische Systeme mit *complexen* Elementen a_{ik} liefern, sobald man für die Grössen c complexe Grössen setzt, welche die Gleichungen (12) befriedigen; denn die sämmtlichen Elemente des Modulsystems ($\mathfrak{M}$) werden alsdann gleich Null, und die Congruenz (14) geht in die Gleichung (3) über, durch welche das System (a_{ik}) als ein orthogonales charakterisirt wird. Aber es bedarf noch des Nachweises, dass *alle* orthogonalen symmetrischen Systeme mit complexen Elementen auf die angegebene Weise erhalten werden, und hierfür ist nur nöthig zu zeigen, dass auch *complexe* Elemente a_{ik} in der im art. I mit (1) bezeichneten Form:

$$a_{ik} = \sum_h p_h c_{hi} c_{hk} \qquad (h,\,i,\,k=1,2,\ldots n) \tag{1}$$

angenommen werden können.

Während im art. I einfach davon ausgegangen worden ist, dass die reellen Elemente a_{ik} *jedes symmetrischen* Systems sich in der angegebenen Form darstellen lassen, muss für den Fall complexer Elemente a_{ik}, wo dies nicht mehr allgemein stattfindet, der Nachweis einer solchen Darstellbarkeit zugleich auf die Eigenschaft der *Orthogonalität* des Systems (a_{ik}) gegründet werden. Wegen dieser Eigenschaft müssen die Grössen a_{ik} die Relationen erfüllen:

$$\sum_k a_{hk} a_{ik} = \delta_{hi} \qquad (h,\,i,\,k=1,2,\ldots n), \tag{16}$$

und es besteht hiernach die Gleichung:

$$\sum_k (u\delta_{hk} - va_{hk})(u\delta_{ik} + va_{ik}) = (u^2 - v^2)\,\delta_{hi} \qquad (h,\,i,\,k=1,2,\ldots n), \tag{17}$$

in welcher u, v unbestimmte Variable bedeuten. Die beiden Systeme:

$$u\delta_{ik} + va_{ik}, \qquad \frac{u\delta_{ik} - va_{ik}}{u^2 - v^2} \qquad {\scriptstyle (i,\, k=1,\, 2, \dots n)},$$

sowie die beiden quadratischen Formen:

$$u\sum_k x_k^2 + v\sum_{i,k} a_{ik}x_i x_k, \quad \frac{u}{u^2-v^2}\sum_k X_k^2 - \frac{v}{u^2-v^2}\sum_{i,k} a_{ik} X_i X_k$$
$${\scriptstyle (i,\, k=1,\, 2, \dots n)}$$

sind also zu einander reciprok. Die erstere dieser beiden Formen repräsentirt eine „Schaar“ quadratischer Formen, und *jede* Schaar, welche, wenn φ und ψ quadratische Formen mit den Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ bedeuten, durch den Ausdruck:

$$u\varphi + v\psi$$

gegeben ist, lässt sich als ein Aggregat „elementarer Schaaren“:

$$u_g\varphi_g + v_g\psi_g \qquad {\scriptstyle (g=1,\, 2,\, 3, \dots)}$$

darstellen. Dabei bedeuten u_g, v_g lineare homogene Functionen von u, v, und φ_g, ψ_g quadratische Formen von $x_1, x_2, \dots x_n$, und diese lassen sich durch lineare Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$, welche mit:

$$y_g,\ y_{g1},\ y_{g2},\ y_{g3}, \cdots$$

bezeichnet werden mögen, in einer der folgenden Weisen ausdrücken:

$$(18)\qquad \begin{array}{ll}
\varphi_g = y_g^2, & \psi_g = 0 \\
\varphi_g = 2y_{g1}y_{g2}, & \psi_g = y_{g2}^2 \\
\varphi_g = 2y_{g1}y_{g2} + y_{g3}^2, & \psi_g = 2y_{g2}y_{g3} \\
\varphi_g = 2y_{g1}y_{g2} + 2y_{g3}y_{g4}, & \psi_g = 2y_{g2}y_{g3} + y_{g4}^2 \\
\varphi_g = 2y_{g1}y_{g2} + 2y_{g3}y_{g4} + y_{g5}^2, & \psi_g = 2y_{g2}y_{g3} + 2y_{g4}y_{g5}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

wenn die Determinante der Schaar $u\varphi + v\psi$ nicht gleich Null ist.*)

*) Vgl. meine Mittheilung im Monatsbericht vom Januar 1874.[1])

[1]) Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen, Band I S. 349—372 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.

Die den ersten drei Fällen entsprechenden elementaren Schaaren $u_g\varphi_g + v_g\psi_g$, nebst ihren reciproken, sind:

$$(19)\qquad \begin{array}{ll}
u_g y_g^2, & \frac{1}{u_g} Y_g^2, \\
2u_g y_{g1} y_{g2} + v_g y_{g2}^2, & \frac{1}{u_g^2}(v_g Y_{g1}^2 - 2u_g Y_{g1} Y_{g2}), \\
2u_g y_{g1} y_{g2} + 2v_g y_{g2} y_{g3} + u_g y_{g3}^2, & \frac{1}{u_g^3}\left((v_g Y_{g1} - u_g Y_{g3})^2 + 2u_g^2 Y_{g1} Y_{g2}\right),
\end{array}$$

aber in dem ersten Falle, wo sich $u_g\varphi_g + v_g\psi_g$ auf $u_g y_g^2$ reducirt, ist dies keine eigentliche Schaar. Nun gilt der bemerkenswerthe, vielfach mit Vortheil zu benutzende Satz:

(20) die reciproke eines Aggregats von quadratischen Formen, welche keine Variabeln mit einander gemein haben, ist gleich dem Aggregat der reciproken der einzelnen Formen.*)

Die reciproke von $u\varphi + v\psi$ ist daher gleich der Summe der reciproken derjenigen Formen:

$$u_g y_g^2,\ 2u_g y_{g1} y_{g2} + v_g y_{g2}^2,\ 2u_g y_{g1} y_{g2} + 2v_g y_{g2} y_{g3} + u_g y_{g3}^2, \cdots,$$

als deren Aggregat $u\varphi + v\psi$ dargestellt ist, und da die reciproke jeder von diesen Formen, mit alleiniger Ausnahme der ersten, im Nenner die zweite oder eine höhere Potenz einer linearen Function von u und v enthält, so ergiebt sich das Resultat:

eine Schaar $u\varphi + v\psi$ kann dann, und nur dann, in eine Summe:

$$\sum_{g=1}^{g=n} u_g y_g^2$$

*) Der Satz gilt ebenso für bilineare Formen. Ich habe ihn in meinen algebraischen Universitätsvorlesungen sehr häufig angewendet. Seine Richtigkeit ergiebt sich unmittelbar aus der Bildungsweise reciproker Formen.

(21) transformirt werden, in welcher $u_1, u_2, \ldots u_n$ lineare homogene Functionen von u, v und $y_1, y_2, \ldots y_n$ lineare homogene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, wenn die reciproke der quadratischen Form:

$$u\varphi(x_1, x_2, \cdots x_n) + v\psi(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

so dargestellt werden kann, dass der Nenner, welcher eine homogene Function von u, v ist, keine gleichen Factoren enthält.

Eben dieselbe Bedingung ist offenbar nothwendig und hinreichend für die Möglichkeit der simultanen Transformation der beiden quadratischen Formen:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

in Summen von Quadraten, da eine solche Transformation vollkommen identisch mit jener Transformation der Schaar $u\varphi + v\psi$ in eine Summe:

$$u_1 y_1^2 + u_2 y_2^2 + \cdots + u_n y_n^2$$

ist, in welcher $u_1, u_2, \ldots u_n$ lineare homogene Functionen von u, v und $y_1, y_2, \ldots y_n$ lineare homogene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten.

Nimmt man:

$$u\varphi + v\psi = u\sum_k x_k^2 + v\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und wendet das angegebene Resultat (21) auf diese besondere Schaar $u\varphi + v\psi$ an, deren reciproke durch den obigen Ausdruck:

$$\frac{u}{u^2 - v^2}\sum_k X_k^2 - \frac{v}{u^2 - v^2}\sum_{i,k} a_{ik} X_i X_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

so dargestellt ist, dass der Nenner $u^2 - v^2$ keine gleichen Factoren enthält, so erschliesst man hieraus unmittelbar die Transformirbarkeit der Form:

$$u\sum_k x_k^2 + v\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

in eine Summe:

$$\sum_k (uq_k + vp_k) y_k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

in welcher p_k, q_k complexe Grössen und $y_1, y_2, \ldots y_n$ lineare homogene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit complexen Coefficienten bedeuten. Setzt man demgemäss:

$$\sqrt{q_k}\, y_k = \sum_i c_{ki} x_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so erhält man die Transformationsgleichungen:

$$\sum_h c_{hi} c_{hk} = \delta_{ik}, \quad \sum_h p_h c_{hi} c_{hk} = a_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

aus denen erstens hervorgeht, dass die Coefficienten c_{hi} ein orthogonales System mit complexen Elementen bilden, und zweitens dass, wie nachgewiesen werden sollte, die complexen Grössen a_{ik}, weil sie als die Elemente eines zugleich orthogonalen und symmetrischen Systems vorausgesetzt worden sind, sich in derselben (im art. I mit (1) bezeichneten) Form darstellen lassen, wie *jedes* symmetrische System mit *reellen* Elementen.

IV.

In den vorstehenden Entwickelungen ist nachgewiesen worden, dass die Elemente jedes orthogonalen symmetrischen Systems (a_{ik}) sich durch Gleichungen:

(6) $$a_{ik} = \sum_{g=1}^{g=m} c_{gi} c_{gk} - \sum_{h=m+1}^{h=n} c_{hi} c_{hk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und zwar so darstellen lassen, dass die Grössen c die Elemente eines orthogonalen Systems sind, aber die zu einer solchen Darstellung erforderlichen Grössen c sind nicht *rational* durch die Grössen a_{ik} bestimmt. Wird also das Problem der Aufstellung aller orthogonalen symmetrischen Systeme dahin praecisirt, dass alle derartigen, *einem gegebenen Rationalitätsbereich* $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ *angehörigen* Systeme (a_{ik}) aufgestellt werden sollen,

so bedarf die oben angegebene Lösung noch einer wesentlichen Modification.

Um diese darzulegen, knüpfe ich an das im vorigen Abschnitt entwickelte Resultat an, dass für die Elemente eines orthogonalen symmetrischen Systems (a_{ik}) stets eine Transformationsgleichung besteht:

$$u \sum_k x_k^2 + v \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = \sum_h (u q_h + v p_h) y_h^2 \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

in welcher $y_1, y_2, \ldots y_n$ lineare homogene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind. Benutzt man nun zur wirklichen Herleitung dieser Transformationsgleichung, und also zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten sowie der Coefficienten p_h, q_h, das Reductionsverfahren, welches ich für Schaaren quadratischer Formen in meiner im Monatsbericht vom Januar 1874 abgedruckten Mittheilung[1]) auseinandergesetzt habe, so ergeben sich diese Coefficienten sämmtlich als Grössen desjenigen Rationalitätsbereichs, welchem die Coefficienten der Schaar, also hier die Grössen a_{ik}, und die verschiedenen Werthe des Verhältnisses $u:v$ angehören, für welche die Determinante der Schaar verschwindet. Diese Werthe sind aber im vorliegenden Falle nur ± 1, da aus der oben im art. III mit (17) bezeichneten Gleichung unmittelbar erhellt, dass die Determinante der Schaar:

$$u \sum_k x_k^2 + v \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

keine anderen Linearfactoren als $u + v$ und $u - v$ enthält. Sollen also die Coefficienten a_{ik} dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehören, so müssen, wenn die obige Transformationsgleichung durch die Substitution:

$$y_h = \sum_i b_{hi} x_i \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n)$$

befriedigt wird, die Coefficienten:

[1]) Band I S. 349—372 dieser Ausgabe. H.

$$b_{hi},\ p_h,\ q_h \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n)$$

sämmtlich Grössen des gegebenen Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ sein.

Aus derselben Transformationsgleichung folgen für die Coefficienten b, p, q die Relationen:

$$(22) \qquad \sum_h p_h b_{hi} b_{hk} = a_{ik},$$

$$(23) \qquad \sum_h q_h b_{hi} b_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und aus den letzteren ergeben sich ferner die Relationen:

$$(24) \qquad q_k \sum_h b_{ih} b_{kh} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Denn vermöge jener Relationen (23) ist:

$$(25) \qquad \sum_{g,i} b_{fg} q_i b_{ig} \left(q_k \sum_h b_{ih} b_{kh} - \delta_{ik} \right) = 0 \qquad (f, g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und der Werth der Determinante:

$$\left| \sum_{g=1}^{g=n} b_{fg} q_i b_{ig} \right| \qquad (f, i = 1, 2, \ldots n)$$

gleich *Eins*. Die Gleichungen (25) können demnach nur dann bestehen, wenn die Grössen b, q den Relationen (24) genügen.*)

Wegen der vorausgesetzten Orthogonalität des Systems (a_{ik}) müssen die Bedingungsgleichungen:

*) Die vollständige Aequivalenz der Relationen (23) und (24) erhellt unmittelbar aus den Gleichungen (39) im art. V, wenn man darin:

$$w_{hi} = u \sqrt{q_h}\, b_{hi} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n)$$

setzt.

$$\sum_i a_{ir} a_{is} = \delta_{rs} \qquad (i, r, s = 1, 2, \ldots n)$$

erfüllt sein. Setzt man hierin die aus den Relationen (22) hervorgehenden Werthe der Elemente a_{ir}, a_{is} ein, so kommt:

$$\sum_{g,h} p_g p_h b_{gr} b_{hs} \sum_i b_{gi} b_{hi} = \delta_{rs} \qquad (g, h, i, r, s = 1, 2, \ldots n),$$

und da gemäss den Relationen (24) die auf i bezügliche Summe den Werth $\frac{\delta_{gh}}{q_h}$ hat, so resultirt die Gleichung:

$$\sum_h \frac{p_h^2}{q_h} b_{hi} b_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

aus deren Verbindung mit den Relationen (23) folgt, dass:

$$\sum_h \left(\frac{p_h^2}{q_h} - q_h\right) b_{hi} b_{hk} = 0 \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und also:

(26) $$p_h^2 = q_h^2 \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

sein muss.

Eben dieselbe Folgerung ergiebt sich in übersichtlicher Weise, wenn man von den (symbolischen) Compositionsgleichungen Gebrauch macht:

(27) $$(\bar{b})(p)(b) = (a), \quad (\bar{b})(q)(b) = (1),$$

durch welche die Relationen (22) und (23) dargestellt werden können. Dabei bedeutet

(1) das Einheitssystem (δ_{ik}),
(b) das System (b_{ik}),
($\bar{b}$) das transponirte System derselben Grössen b_{ik},

(p) das System, welches in der Diagonale die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_n$, im Uebrigen aber nur Nullen enthält,
(q) das ebenso aus den Grössen $q_1, q_2, \ldots q_n$ gebildete System.

Bezeichnet man ferner mit (b') das reciproke System von (b) und mit $(\bar{b}')$ das reciproke von $(\bar{b})$, so kann die zweite der Compositionsgleichungen (27) durch die folgende ersetzt werden:

$$(b')\left(\frac{1}{q}\right)(\bar{b}') = (1),$$

also die erste durch:

$$(b')\left(\frac{1}{q}\right)(\bar{b}')(\bar{b})(p)(b) = (a);$$

und diese Compositionsgleichung reducirt sich mit Hülfe der Relationen:

$$(\bar{b}')(\bar{b}) = (1), \quad \left(\frac{1}{q}\right)(p) = \left(\frac{p}{q}\right)$$

auf folgende:

(28) $$(b')\left(\frac{p}{q}\right)(b) = (a).$$

Da endlich das System (a), als orthogonales symmetrisches System, das reciproke seiner selbst, d. h. da $(a)(a) = (1)$ und folglich:

$$(b)(a)(a)(b') = (b)(b') = (1)$$

ist, so erhält man, wenn man hier die Systeme (a) durch den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (28) ersetzt, die Relation:

$$(b)(b')\left(\frac{p}{q}\right)(b)(b')\left(\frac{p}{q}\right)(b)(b') = (1)$$

und daher, mit Benutzung der Gleichungen:

$$(b)(b') = (1), \quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p^2}{q^2}\right)$$

das Endresultat:

$$\left(\frac{p^2}{q^2}\right) = (1),$$

d. h. wie oben:

(26) $$p_h^2 = q_h^2 \qquad {\scriptstyle (h=1,\,2,\,\dots\,n)}.$$

Es sei demgemäss:

$$p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ \cdots\ p_m = q_m,$$

$$p_{m+1} = -q_{m+1},\ p_{m+2} = -q_{m+2},\ \cdots\ p_n = -q_n,$$

so dass die Gleichungen (22) in folgende übergehen:

(29) $$a_{ik} = \sum_{g=1}^{g=m} q_g b_{gi} b_{gk} - \sum_{h=m+1}^{h=n} q_h b_{hi} b_{hk} \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\dots\,n)},$$

oder, bei Anwendung der Gleichungen (23):

(30) $$a_{ik} = -\delta_{ik} + 2\sum_{g=1}^{g=m} q_g b_{gi} b_{gk} \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\dots\,n)}.$$

Die dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehörigen Elemente a_{ik} eines orthogonalen symmetrischen Systems lassen sich also stets auf die hier angegebene Weise durch Grössen:

$$q_h,\ b_{hi} \qquad {\scriptstyle (h,\,i=1,\,2,\,\dots\,n)}$$

ausdrücken, welche selbst dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehören und dabei den obigen Relationen (24) genügen. Es ist aber auch andererseits zu zeigen, dass, wie immer Grössen q, b_{hi} gemäss den Bedingungsgleichungen (24) aus dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ entnommen werden mögen, die daraus mittels der Gleichungen (29) oder (30) bestimmten Grössen a_{ik} stets ein orthogonales symmetrisches System bilden.

Zu dem angegebenen Zweck ist nur nachzuweisen, dass die mittels der Gleichungen (30) bestimmten Grössen a_{ik}, welche offenbar die Symmetriebedingungen:

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\dots\,n)}$$

erfüllen, auch den Orthogonalitätsbedingungen genügen:

$$\sum_i a_{ir} a_{is} = \delta_{rs} \qquad {\scriptstyle (i,\,r,\,s=1,\,2,\,\dots\,n)};$$

es ist also die Richtigkeit der folgenden Gleichung darzuthun:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(2\sum_{g=1}^{g=m} q_g b_{gi} b_{gr} - \delta_{ir}\right)\left(2\sum_{h=1}^{h=m} q_h b_{hi} b_{hs} - \delta_{is}\right) = \delta_{rs} \qquad {\scriptstyle (r,\,s=1,\,2,\,\dots\,n)}.$$

Entwickelt man nun den Ausdruck auf der linken Seite, so kommt:

$$4\sum_{g,h} q_g b_{gr} b_{hs} q_h \sum_{i=1}^{i=n} b_{gi} b_{hi} - 4\sum_g q_g b_{gr} b_{gs} + \delta_{rs} \qquad \left({\scriptstyle g,\,h=1,\,2,\,\dots\,m \atop r,\,s=1,\,2,\,\dots\,n}\right),$$

und der Werth dieses Ausdrucks reducirt sich mit Hülfe der Gleichung (24) in der That auf δ_{rs}. Dabei werden von den Gleichungen (24) nur die folgenden verwendet:

(31) $$q_h \sum_{i=1}^{i=n} b_{gi} b_{hi} = \delta_{gh} \qquad {\scriptstyle (g,\,h=1,\,2,\,\dots\,m)},$$

in welchen der vordere Index der Grössen b nicht grösser als m ist. Das hiermit erlangte Resultat kann daher folgendermaassen formulirt werden:

Man erhält alle orthogonalen symmetrischen Systeme, deren Elemente a_{ik} einem gegebenen Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$

angehören, wenn man diesem Bereich irgend welche, den $\frac{1}{2}m(m-1)$ Bedingungen:

(32) $$\sum_{i=1}^{i=n} b_{gi} b_{hi} = 0 \qquad (g,\, h = 1, 2, \ldots m;\ g < h)$$

genügende mn Grössen b_{gi} entnimmt und daraus die n^2 Elemente a_{ik} mittels der Gleichungen:

(33) $$a_{ik} = -\delta_{ik} + 2 \sum_{g=1}^{g=m} \frac{b_{gi} b_{gk}}{b_{g1}^2 + b_{g2}^2 + \cdots + b_{gn}^2} \qquad (i,\ = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt.

Hierbei können die sämmtlichen $mn - \frac{1}{2}m(m-1)$ Grössen b_{gi}, bei welchen $g \leq i$ ist, beliebig angenommen und die $\frac{1}{2}m(m-1)$ Gleichungen (32) zur Bestimmung der übrigen $\frac{1}{2}m(m-1)$ Grössen b_{gi} verwendet werden, in Beziehung auf welche sie *linear* sind.

Von den beliebig*) anzunehmenden $mn - \frac{1}{2}m(m-1)$ Grössen b_{gi} können, unbeschadet der Allgemeinheit der resultirenden Systeme (a_{ik}), noch $\frac{1}{2}m(m+1)$ Grössen specialisirt werden, so dass alsdann nur $m(n-m)$, d. h. genau so viele beliebig bleiben, als die $m(n-m)$ fache Mannigfaltigkeit der orthogonalen symmetrischen Systeme (a_{ik}) erfordert. Man erhält nämlich auch dann noch alle orthogonalen symmetrischen Systeme des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$, wenn man die $\frac{1}{2}m(m-1)$ Grössen b_{gi}, bei welchen $g < i \leq m$ ist, gleich Null, die m Grössen $b_{11}, b_{22}, \ldots b_{mm}$ aber gleich Eins setzt, und nur die $m(n-m)$ Grössen b_{gi}, bei welchen $g \geqq m$ ist, beliebig lässt.

*) Die Wahl der Grössen b_{gi} ist natürlich insoweit beschränkt, dass der Rang des Systems der mn Grössen b_{gi} gleich m, d. h. dass mindestens eine der daraus zu bildenden Determinanten m^{ter} Ordnung von Null verschieden sein muss (vergl. § 5 meines Aufsatzes „Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen[1])“ im Sitzungsbericht vom December 1884).

[1]) Band III S. 67—69 dieser Ausgabe H.

Um dies zu zeigen, bemerke ich zuvörderst, dass eine Veränderung der Verticalreihen oder der zweiten Indices der Grössen b keine eigentliche Veränderung des Systems (a_{ik}), sondern nur eine solche der *Reihenfolge* der Elemente a_{ik} hervorbringt. Man kann daher die Verticalreihen der Grössen b so geordnet annehmen, dass die aus den ersten m^2 Elementen gebildete Determinante:

$$|b_{gh}| \qquad (g,\, h = 1, 2, \ldots m)$$

einen von Null verschiedenen Werth hat. Ich bemerke ferner, dass das aus den Gleichungen (33) resultirende System (a_{ik}) ungeändert bleibt, wenn man für zwei beliebig gewählte Indices g', g'' die Grössen:

$$b_{g'i}, \qquad b_{g''i}$$

durch:

$$b_{g'i} + tq_{g''} b_{g''i}, \quad b_{g''i} - tq_{g'} b_{g'i},$$

und zugleich die Grössen:

$$q_{g'}, \qquad q_{g''}$$

durch:

$$\frac{q_{g'}}{1 + q_{g'} q_{g''} t^2}, \qquad \frac{q_{g''}}{1 + q_{g'} q_{g''} t^2}$$

ersetzt. Denn bei einer solchen Substitution wird nur in der Transformationsgleichung:

$$\sum_{i,k} (a_{ik} + \delta_{ik}) x_i x_k = 2 \sum_g q_g \Big(\sum_i b_{gi} x_i\Big)^2 \qquad \left(\begin{smallmatrix} g=1, 2, \ldots m \\ i, k=1, 2, \ldots n \end{smallmatrix}\right),$$

in welcher die Gleichungen (33) zusammengefasst erscheinen, auf der rechten Seite das Aggregat von zwei Quadraten:

$$q_{g'} \Big(\sum_i b_{g'i} x_i\Big)^2 + q_{g''} \Big(\sum_i b_{g''i} x_i\Big)^2$$

durch ein Aggregat von zwei anderen Quadraten ersetzt.

Man kann nun die Grösse t so wählen, dass $b_{g'i} + t q_{g''} b_{g''i}$ für einen Werth des Index i gleich Null wird, und also, nach der schon auf S. 127 des Monatsberichts vom Februar 1873 entwickelten Methode*), erst die $m-1$ Grössen b_{gi}, bei welchen $g < m$ und $i = m$ ist, alsdann die $m-2$ Grössen b_{gi}, bei welchen $g < m-1$ und $i = m-1$ ist, u. s. f. zum Verschwinden bringen. Wenn hiernach die sämmtlichen Grössen b_{gi}, bei welchen $g < i \leqq m$ ist, auf Null reducirt sind, müssen die Grössen $b_{11}, b_{22}, \ldots b_{mm}$ sämmtlich von Null verschieden sein; denn deren Product ist gleich der Determinante der ersten m^2 Elemente b_{gi} und also auch gleich der von Null verschieden vorausgesetzten Determinante der ersten m^2 Elemente desjenigen Systems (b_{gi}), von welchem ausgegangen worden ist. Da nun der Werth des Ausdrucks auf der linken Seite der Gleichung (32) sowie der Werth des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (33) ungeändert bleibt, wenn die sämmtlichen Grössen einer Horizontalreihe:

$$b_{g1},\; b_{g2},\; \ldots\; b_{gn}$$

durch b_{gg} dividirt werden, so kann man in der That, wie gezeigt werden sollte, die $m(n-m)$ Grössen b_{gi}, bei welchen $g > m$ ist, ganz beliebig, ferner aber:

$$b_{gi} = 0 \quad {\scriptstyle (g<i\leqq m)}, \qquad b_{gg} = 1 \quad {\scriptstyle (g=1,\,2,\,\ldots\, m)}$$

annehmen und die übrigen $\frac{1}{2}m(m-1)$ Grössen b_{gi}, bei welchen $g > i$ ist, mittels der Gleichungen (32) bestimmen. Die in den Gleichungen (33) enthaltene Darstellung orthogonaler symmetrischer Systeme (a_{ik}) ist alsdann so beschaffen, dass die Grössen b durch die Grössen a eindeutig bestimmt sind, dass also jedes System (a_{ik}) nur *ein*mal dargestellt wird.

*) „Ueber die verschiedenen *Sturm*'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen"[1]). Die Methode ist a. a. O. benutzt, um zu zeigen, dass sich jede Transformation eines Aggregats von Quadraten in ein anderes aus gewissen „elementaren Transformationen" zusammensetzen lässt. Sie ist, da für reelle Grössen b die Grössen q sämmtlich positiv sind, auch auf alle *speciellen* Systeme reeller Grössen b anwendbar, während bei *speciellen complexen* Grössen b, wo der Nenner der für die Grössen q zu substituirenden Ausdrücke gleich Null werden kann, wie oben im art. II, andere elementare Transformationen erforderlich sind.

[1]) Band I S. 303—348 dieser Ausgabe; s. S. 317. H.

V.

Herr *Cayley* hat bekanntlich in seinem Aufsatze im 32. Bande des *Crelle*'schen Journals*) zuerst jene berühmten Formeln entwickelt, in welchen die Elemente orthogonaler Systeme n^{ter} Ordnung durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ unabhängige Variable rational ausgedrückt werden. Es erscheint demnach von besonderem Interesse, zu untersuchen, wie aus dieser allgemeinen Darstellung eine solche von *symmetrischen* orthogonalen Systemen hervorgeht. Zu diesem Zwecke muss von Neuem auf die Herleitung der *Cayley*'schen Formeln eingegangen werden, da a. a. O. zwar gezeigt ist, dass bei der angegebenen Darstellung der Elemente eines orthogonalen Systems die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungsgleichungen der Orthogonalität erfüllt sind, nicht aber, dass eine solche Darstellung für alle orthogonalen Systeme möglich ist.

Bei dieser erneuten Behandlung der allgemeinen orthogonalen Systeme werde ich, da die Auseinandersetzung dadurch wesentlich an Durchsichtigkeit gewinnt, von den Methoden Gebrauch machen, welche sich in meinem Aufsatze**) „Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen", sowie in neueren Arbeiten***) des Herrn *Netto* bei der Behandlung mehrerer algebraischer Probleme als nützlich erwiesen haben.

Bei einer solchen Behandlungsweise hat man anstatt der Eigenschaften von Grössen c_{ik}, welche, wie oben im art. I, durch die für ein orthogonales System (c_{ik}) charakteristischen Relationen:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} c_{gi} c_{hi} = \delta_{gh} \qquad {\scriptstyle (g,\,h=1,\,2,\,\ldots\, n)}$$

*) S. 119—123.

**) Journal für Mathematik, Bd. 99, S. 329—371[1]).

***) „Anwendung der Modulsysteme auf eine elementare algebraische Frage" im Journal für Mathematik, Bd. 104, S. 321—340. „Ueber den grössten gemeinsamen Theiler zweier ganzer Functionen" in der Festschrift der mathematischen Gesellschaft in Hamburg (1890). „Ueber den gemeinsamen Theiler zweier ganzer Functionen einer Veränderlichen" im Journal für Mathematik, Bd. 106, S. 81—88.

[1]) Band III S. 145—208 dieser Ausgabe. H.

mit einander verbunden sind, die Eigenschaften zu untersuchen, welche einem Systeme von n^2 unbestimmten Variabeln:

$$w_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

im Sinne der Congruenz für das aus den $\frac{1}{2} n(n+1)$ Elementen:

$$\delta_{gh} - \sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} \qquad (g, h = 1, 2, \dots n;\ g \lesseqgtr h)$$

gebildete Modulsystem zukommen.

Demgemäss seien u und w_{ik} (für $i, k = 1, 2, \dots n$) unbestimmte Variable, (w'_{ik}) sei das zu (w_{ik}) reciproke System, und die n^2 Variable u_{ik} seien durch die Gleichungen:

$$u_{ik} = w_{ik} + u\delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

definirt. Ferner sei U die Determinante des Systems (u_{ik}), und (u'_{ik}) sei das zu (u_{ik}) reciproke System. Endlich sei zur Abkürzung für alle Werthe der Indices $i, k = 1, 2, \dots n$:

$$\text{(34)} \qquad \varphi_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} w_{ih} w_{kh} - \delta_{ik} u^2 = \sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} - u(u_{ik} + u_{ki}),$$

$$\text{(35)} \qquad \bar{\varphi}_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} w_{hi} w_{hk} - \delta_{ik} u^2 = \sum_{h=1}^{h=n} u_{hi} u_{hk} - u(u_{ik} + u_{ki}),$$

$$\text{(36)} \qquad \psi_{ik} = \delta_{ik} - u(u'_{ik} + u'_{ki}).$$

Alsdann bestehen die bemerkenswerthen Relationen:

$$\text{(37)} \qquad \varphi_{gh} = \sum_{i,k} u_{gi} u_{hk} \psi_{ik}, \qquad \psi_{gh} = \sum_{i,k} u'_{gi} u'_{hk} \varphi_{ik},$$

$$\text{(38)} \qquad \bar{\varphi}_{gh} = \sum_{i,k} u_{ig} u_{kh} \psi_{ik}, \qquad \psi_{gh} = \sum_{i,k} u'_{ig} u'_{kh} \bar{\varphi}_{ik},$$

$$\text{(39)} \qquad \varphi_{gh} = \sum_{i,k} w_{hk} w'_{ig} \bar{\varphi}_{ik}, \qquad \bar{\varphi}_{gh} = \sum_{i,k} w_{kh} w'_{gi} \varphi_{ik},$$

in welchen die Summationen auf die Werthe $i, k = 1, 2, \dots n$ zu erstrecken sind und den Indices g, h alle Werthe von 1 bis n beigelegt werden können. Von der Richtigkeit dieser Relationen überzeugt man sich unmittelbar, wenn man darin für $\varphi_{gh}, \bar{\varphi}_{gh}, \psi_{gh}, \varphi_{ik}, \bar{\varphi}_{ik}, \psi_{ik}$ die aus den Gleichungen (34), (35) und (36) zu entnehmenden Ausdrücke substituirt und die Gleichungen:

$$\text{(40)} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} w_{hi} w'_{ik} = \sum_{i=1}^{i=n} w'_{hi} w_{ik} = \delta_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \dots n),$$

$$\text{(41)} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} u_{hi} u'_{ik} = \sum_{i=1}^{i=n} u'_{hi} u_{ik} = \delta_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \dots n)$$

benutzt, durch welche die Systeme (w_{ik}), (w'_{ik}) und (u_{ik}), (u'_{ik}) als zu einander reciprok definirt werden.

Man kann den Inhalt der Relationen (37), (38), (39) auch in übersichtlicher Weise so ausdrücken, dass die Transformationen quadratischer und bilinearer Formen, welche in folgenden drei Gleichungen dargestellt sind:

$$\text{(37')} \qquad \sum_{i,k} \varphi_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k} \psi_{ik} y_i y_k$$

$$\text{(38')} \qquad \sum_{i,k} \bar{\varphi}_{ik} \bar{x}_i \bar{x}_k = \sum_{i,k} \psi_{ik} y_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

$$\text{(39')} \qquad \sum_{i,k} \varphi_{ik} \bar{x}_i x_k = \sum_{i,k} \bar{\varphi}_{ik} (y_i - ux_i)(y_k - ux_k)$$

durch die Substitutionen:

$$y_i = \sum_k u_{ik} \bar{x}_k = \sum_k u_{ki} x_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

bewirkt werden.

Zwischen den Variabeln x und $\bar{x}$ bestehen in Folge der angegebenen Substitutionen die directen Beziehungen:

$$x_h = \sum_{i,k} u_{ik} u'_{ih} \bar{x}_k, \qquad \bar{x}_h = \sum_{k,i} u_{ki} u'_{hi} x_k \qquad (h, i, k = 1, 2, \dots n),$$

und mit deren Hülfe erhält man aus der Gleichung:

$$\sum_{i,k} \varphi_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k} \overline{\varphi}_{ik} \overline{x}_i \overline{x}_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

welche durch Verbindung der beiden Gleichungen (37′) und (38′) entsteht, die Relationen:

$$(42) \qquad \begin{aligned} \overline{\varphi}_{gh} &= \sum_{i,k,r,s} u_{rg} u_{sh} u'_{ri} u'_{sk} \varphi_{ik}, \\ \varphi_{gh} &= \sum_{i,k,r,s} u_{gr} u_{hs} u'_{ir} u'_{ks} \overline{\varphi}_{ik}, \end{aligned}$$

in welchen die Summationen auf:

$$i, k, r, s = 1, 2, \ldots n$$

zu erstrecken und den Indices g, h alle Werthe von 1 bis n beizulegen sind.

Die obigen Identitäten (37) bis (42) enthalten die Eigenschaften orthogonaler Systeme in entwickelter Form, und die beiden mit (37) bezeichneten Identitäten *allein* genügen zur Vereinfachung und Vervollständigung der *Cayley*'schen Deduction. Denn durch die Gleichungen:

$$(43) \qquad \varphi_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} w_{ih} w_{kh} - \delta_{ik} u^2 = \sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} - u(u_{ik} + u_{ki}) = 0$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots n)$$

wird das System der n^2 Grössen:

$$\frac{w_{ik}}{u} \quad \text{oder} \quad \frac{u_{ik}}{u} - \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

als ein orthogonales charakterisirt, und da, unter der Voraussetzung, dass ein zu (u_{ik}) reciprokes System (u'_{ik}) existirt, d. h. also unter der Voraussetzung, dass die Determinante U von Null verschieden ist, das System der Gleichungen:

$$(44) \qquad \psi_{ik} = \psi_{ki} = \delta_{ik} - u(u'_{ik} + u'_{ki}) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

auf Grund jener beiden Formeln (37) dem Gleichungssysteme (43) vollständig aequivalent ist, so sind auch die Gleichungen (44) charakteristisch für die Orthogonalität des Systems der Grössen:

$$\frac{w_{ik}}{u} \quad \text{oder} \quad \frac{u_{ik}}{u} - \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Diese Gleichungen (44) sind aber dann und nur dann erfüllt, wenn nach Annahme von $\frac{1}{2} n(n-1)$ beliebigen Grössen:

$$t_{ik} \qquad (i < k;\ i, k = 1, 2, \ldots n),$$

den Variabeln u' folgende Werthe beigelegt werden:

$$uu'_{ii} = \frac{1}{2}, \quad uu'_{ik} = t_{ik}, \quad uu'_{ki} = -t_{ik} \qquad (i < k;\ i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Bildet man also aus dem zu *diesem* Systeme (u'_{ik}) reciproken Systeme (u_{ik}) das System der n^2 Grössen:

$$\frac{u_{ik}}{u} - \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so erhält man das allgemeinste orthogonale System von der Beschaffenheit, dass die Determinante von (u_{ik}) nicht gleich Null ist.

Aus den Gleichungen (37) folgt ebenso unmittelbar:

dass man alle einem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehörigen orthogonalen Systeme (c_{ik}), für welche die Determinante:

$$|c_{ik} + \delta_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

von Null verschieden ist, und *nur* solche Systeme erhält, wenn man aus demselben Rationalitätsbereich Systeme (t_{ik}) entnimmt, für welche:

$$t_{ii} = \frac{1}{2}, \quad t_{ik} = -t_{ki} \qquad (i < k;\ i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ist, dazu das reciproke System (t'_{ik}) bildet und alsdann die Elemente des orthogonalen Systems (c_{ik}) gemäss den Gleichungen:

$$c_{ik} = t'_{ik} - \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt.

Von den orthogonalen Systemen (c_{ik}), für welche die Determinante:

$$|c_{ik} + \delta_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

von Null verschieden ist, kann keines — ausser dem Einheitssystem (δ_{ik}) — symmetrisch sein. Denn für ein symmetrisches System (c_{ik}) ist auch das System $(c_{ik} + \delta_{ik})$ und also auch dessen reciprokes (t_{ik}) symmetrisch; es ist also dann:

$$t_{ii} = \frac{1}{2}, \quad t_{ik} = t_{ki} = -t_{ki} = 0 \qquad (i < k;\ i, k = 1, 2, \ldots n)$$

folglich:

$$t_{ik} = 2\delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und daher in der That:

$$c_{ik} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Die in dem *Lipschitz*'schen und auch in diesem Aufsatze behandelten orthogonalen *symmetrischen* Systeme gehören also zu denen, welche sich der von Herrn *Cayley* angegebenen Darstellung entziehen. Aber es ist gerade deshalb von besonderem Interesse, zu untersuchen, in welcher Weise man sich bei der *Cayley*'schen Darstellung orthogonaler Systeme denjenigen, welche zugleich symmetrisch sind, *nähern* kann.

VI.

Die Behandlung von Systemen (τ_{ik}), welche so beschaffen sind, dass $\tau_{ik} = -\tau_{ki}$ ist, kann dadurch ersetzt werden, dass man ein System von unbestimmten Variabeln v_{ik} im Sinne der Congruenz für das Modulsystem mit den $\frac{1}{2}n(n+1)$ Elementen:

$$(\mathrm{M}_v) \qquad v_{ii}, \quad v_{ik} + v_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n;\ i < k)$$

behandelt.

Da die Determinante des Systems (v_{ik}), welche mit V bezeichnet werden möge, ungeändert bleibt, wenn man in jeder der Variabeln v_{ik} die beiden Indices mit einander vertauscht, so erhält sie den Factor $(-1)^n$, wenn man $-v_{ki}$ für v_{ik} setzt. Für das Modulsystem (M_v) ist daher $V \equiv (-1)^n V$, also:

$$(45) \qquad V \equiv 0,$$

wenn n ungerade ist. Es sei nun (V_{ik}) das zu (v_{ik}) adjungirte System, so dass die Gleichungen bestehen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_{hi} V_{ik} = \sum_{i=1}^{i=n} v_{ih} V_{ki} = \delta_{hk} V \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n).$$

Die mit V_{ki} bezeichnete Function der Variabeln v entsteht aus V_{ik}, indem man in jeder der Variabeln v_{ik} die beiden Indices mit einander vertauscht, d. h. also indem man v_{ik} durch v_{ki} ersetzt. Substituirt man aber $-v_{ki}$ für v_{ik}, so geht V_{ki} in $(-1)^{n-1} V_{ik}$ über. Es besteht daher für das Modulsystem (M_v) die Congruenz:

$$V_{ki} \equiv (-1)^{n-1} V_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

oder:

$$(45') \qquad \frac{\partial V}{\partial v_{ki}} \equiv (-1)^{n-1} \frac{\partial V}{\partial v_{ik}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und folglich für *gerade* Zahlen n:

$$V_{ii} = \frac{\partial V}{\partial v_{ii}} \equiv 0 \qquad (i=1, 2, \dots n). \tag{46}$$

Wird in der Gleichung (45') die Determinante n^{ter} Ordnung V durch die Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{\partial V}{\partial v_{hh}}$ ersetzt, so resultirt die Congruenz:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ik}} \equiv (-1)^n \frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ki}} \qquad (h, i, k=1, 2, \dots n). \tag{47}$$

Nimmt man nun n als *gerade* an, so erschliesst man mit Benutzung der Congruenzen (46) und (47) aus der Determinantenrelation:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ii}} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{kk}} - \frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ik}} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ki}} = \frac{\partial V}{\partial v_{hh}} \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ii}\,\partial v_{kk}}$$

$$(h, i, k=1, 2, \dots n;\ h \gtrless i,\ h \gtrless k)$$

die Congruenz:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ii}} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{kk}} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ik}}\right)^2 \qquad \left(\begin{smallmatrix} h, i, k=1, 2, \dots n \\ h \gtrless i,\ h \gtrless k \end{smallmatrix}\right). \tag{48}$$

Setzt man ferner voraus, dass die Determinanten $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ii}} \qquad (h, i=1, 2, \dots n;\ h \gtrless i) \tag{49}$$

Quadraten congruent sind, und bezeichnet man diese mit $\mathfrak{B}_{hi}^2$, so nimmt die Congruenz (48) die Gestalt an:

$$\mathfrak{B}_{hi}^2\,\mathfrak{B}_{hk}^2 \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ik}}\right)^2 \qquad \left(\begin{smallmatrix} h, i, k=1, 2, \dots n \\ h \gtrless i,\ h \gtrless k \end{smallmatrix}\right),$$

und da (M_v) ein *Prim*modulsystem ist, so muss bei geeigneter Bestimmung der Vorzeichen von $\mathfrak{B}_{hi}$, $\mathfrak{B}_{hk}$ die Congruenz stattfinden:

$$\mathfrak{B}_{hi}\,\mathfrak{B}_{hk} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ik}} \qquad \left(\begin{smallmatrix} h, i, k=1, 2, \dots n \\ h \gtrless i,\ h \gtrless k \end{smallmatrix}\right).$$

Macht man hiervon, sowie von den Congruenzen:

$$v_{hh} \equiv 0, \quad v_{ih} \equiv -v_{hi} \qquad (h, i=1, 2, \dots n;\ h \gtrless i)$$

in der Darstellung der Determinante V:

$$V = \frac{\partial V}{\partial v_{hh}} v_{hh} - \sum_{i,k} \frac{\partial^2 V}{\partial v_{hh}\,\partial v_{ik}} v_{ih}\, v_{hk} \qquad \left(\begin{smallmatrix} h, i, k=1, 2, \dots n \\ h \gtrless i,\ h \gtrless k \end{smallmatrix}\right)$$

Gebrauch, so erhält man die Congruenz:

$$V \equiv \sum_{i,k} \mathfrak{B}_{hi}\,\mathfrak{B}_{hk}\, v_{hi}\, v_{hk} \qquad \left(\begin{smallmatrix} h, i, k=1, 2, \dots n \\ h \gtrless i,\ h \gtrless k \end{smallmatrix}\right),$$

welche, wenn zur Abkürzung:

$$\sum_i \mathfrak{B}_{hi}\, v_{hi} = \mathfrak{B} \qquad (h, i=1, 2, \dots n;\ h \gtrless i)$$

gesetzt wird, in folgende übergeht:

$$V \equiv \mathfrak{B}^2 \;(\text{modd. } v_{ii},\ v_{ik} + v_{ki}) \qquad (i, k=1, 2, \dots n). \tag{50}$$

Auf diese Weise folgt aus der Voraussetzung, dass die Determinanten $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung (49) Quadraten congruent sind, eben dieselbe Eigenschaft für die Determinante n^{ter} Ordnung V, und da diese Eigenschaft den Determinanten zweiter Ordnung offenbar zukommt, so ist sie für Determinanten jeder geraden Ordnung erwiesen.

Die Congruenz (50) drückt aus, dass eine Gleichung besteht:

$$V = \mathfrak{B}^2 + \sum_i v_{ii}\, \Phi_{ii} + \sum_{i,k} (v_{ik} + v_{ki})\, \Phi_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \dots n;\ i < k),$$

in welcher Φ_{ii}, Φ_{ik} ganze Grössen des aus den n^2 Elementen:

$$v_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

gebildeten Rationalitätsbereichs bedeuten. Differentiirt man diese Gleichung nach einem Element v_{gh}, bei welchem $g<h$ ist, so kommt:

$$\frac{\partial V}{\partial v_{gh}} = 2\mathfrak{B}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial v_{gh}} + \sum_i v_{ii}\frac{\partial \Phi_{ii}}{\partial v_{gh}} + \sum_{i,k}(v_{ik}+v_{ki})\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial v_{gh}} + \Phi_{gh}$$

$$(i, k=1, 2, \dots n;\ i<k),$$

und die Differentiation nach v_{hg} ergiebt das Resultat:

$$\frac{\partial V}{\partial v_{hg}} = 2\mathfrak{B}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial v_{hg}} + \sum_i v_{ii}\frac{\partial \Phi_{ii}}{\partial v_{hg}} + \sum_{i,k}(v_{ik}+v_{ki})\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial v_{hg}} + \Phi_{gh}$$

$$(i, k=1, 2, \dots n;\ i<k).$$

Aus der Vergleichung der beiden Differentiationsresultate folgt also die Congruenz:

$$\frac{\partial V}{\partial v_{gh}} \equiv \frac{\partial V}{\partial v_{hg}} \ (\text{modd.}\ \mathfrak{B},\ v_{ii},\ v_{ik}+v_{ki}) \qquad (i, k=1, 2, \dots n);$$

da aber andererseits vermöge der Congruenz (45′), und weil n eine gerade Zahl ist:

$$\frac{\partial V}{\partial v_{gh}} \equiv -\frac{\partial V}{\partial v_{hg}} \ (\text{modd.}\ v_{ii},\ v_{ik}+v_{ki}) \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

sein muss, so resultirt die Congruenz:

$$\text{(51)} \qquad \frac{\partial V}{\partial v_{gh}} \equiv 0 \ (\text{modd.}\ \mathfrak{B},\ v_{ii},\ v_{ik}+v_{ki}) \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

in welcher n eine gerade Zahl und $\mathfrak{B}$ eine durch die Congruenz (50) definirte Grösse des Bereichs der Elemente v_{ik} bedeutet. Die Bedingung $g \gtrless h$, welche

in Folge der Herleitung hinzugefügt werden müsste, kann mit Rücksicht auf die schon oben abgeleitete Congruenz (46) weggelassen werden.

Es sei nunmehr n *ungerade.* Alsdann muss gemäss der Congruenz (50), da $n-1$ grade ist, die Hauptsubdeterminante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{\partial V}{\partial v_{ll}}$ für das Modulsystem (M_ν) einem Quadrate $\mathfrak{B}_{ll}^2$ congruent sein. Es muss ferner, gemäss der Congruenz (51), wenn darin V durch $\frac{\partial V}{\partial v_{ll}}$ und $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{B}_{ll}$ ersetzt wird, die Congruenz stattfinden:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_{ll}\partial v_{gh}} \equiv 0 \ (\text{modd.}\ \mathfrak{B}_{ll},\ v_{ii},\ v_{ik}+v_{ki}) \qquad \left({i, k=1, 2, \dots n \atop g \gtrless h}\right).$$

Wird hiervon in der Identität:

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial^2 V}{\partial v_{ll}\partial v_{gh}}\, v_{lh} = -\frac{\partial V}{\partial v_{gl}} \qquad (g \gtrless l)$$

Gebrauch gemacht, so resultirt die Congruenz:

$$\text{(52)} \qquad \frac{\partial V}{\partial v_{gh}} \equiv 0 \ (\text{modd.}\ \mathfrak{B}_{hh},\ v_{ii},\ v_{ik}+v_{ki}) \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

in welcher n eine ungerade Zahl und sowohl g als auch h irgend eine beliebige der Zahlen $1, 2, \dots n$ bedeutet.

Bezeichnet man jetzt (für eine beliebige, gerade oder ungerade Zahl n) die durch Differentiation von V nach m Grössen v_{ii} entstehenden Subdeterminanten $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung in irgend einer Reihenfolge mit:

$$V_\varkappa^{(m)} \qquad (\varkappa=1, 2, \dots \nu_m),$$

ferner mit v eine unbestimmte Variable und mit $V(v)$ die Determinante:

$$|v_{ik}+v\delta_{ik}| \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

so wird:

$$(53)\qquad \begin{aligned} V(v) &= \sum_l v^l \sum_\varkappa V_\varkappa^{(l)} \\ \frac{\partial V(v)}{\partial v_{gh}} &= \sum_l v^l \sum_\varkappa \frac{\partial V_\varkappa^{(l)}}{\partial v_{gh}} \end{aligned} \qquad \left(\begin{smallmatrix} \varkappa=1,\,2,\,\ldots\,\ldots\,\nu_l \\ l=0,\,1,\,2,\,\ldots\,n \\ g,\,h=1,\,2,\,\ldots\ldots\,n \end{smallmatrix}\right).$$

Nun bestehen, gemäss den Congruenzen (45) und (50) die Relationen:

$$V_\varkappa^{(l)} \equiv 0 \quad \text{oder} \quad V_\varkappa^{(l)} \equiv (\mathfrak{B}_\varkappa^{(l)})^2 \;\; (\text{modd.}\; v_{ii},\; v_{ik}+v_{ki}) \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)},$$

je nachdem $n-l$ ungerade oder gerade ist, und es bedeuten dabei $\mathfrak{B}_\varkappa^{(l)}$ ganze Grössen des Bereichs der Elemente v_{ik}. Es ist ferner gemäss der Congruenz (51) für *gerade* Zahlen $n-l$:

$$\frac{\partial V_\varkappa^{(l)}}{\partial v_{gh}} \equiv 0 \;\; (\text{modd.}\; \mathfrak{B}_\varkappa^{(l)},\; v_{ii},\; v_{ik}+v_{ki}) \qquad \left(\begin{smallmatrix} g,\,h,\,i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n \\ \varkappa=1,\,2,\,\ldots\,\nu_l \end{smallmatrix}\right)$$

und gemäss der Congruenz (52) für *ungerade* Zahlen $n-l$:

$$\frac{\partial V_\varkappa^{(l)}}{\partial v_{gh}} \equiv 0 \;\; (\text{modd.}\; \mathfrak{B}_\lambda^{(l+1)},\; v_{ii},\; v_{ik}+v_{ki}) \qquad \left(\begin{smallmatrix} g,\,h,\,i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n \\ \varkappa=1,\,2,\,\ldots\,\nu_l \\ \lambda=1,\,2,\,\ldots\,\nu_{l+1} \end{smallmatrix}\right).$$

Setzt man also für ungerade Werthe von $n-l$:

$$\mathfrak{B}^{(l)} = 0,$$

so können die vorstehenden Congruenzen in folgende vereinigt werden:

$$(54)\qquad \begin{aligned} V_\varkappa^{(l)} &\equiv (\mathfrak{B}_\varkappa^{(l)})^2 \;\; (\text{modd.}\; v_{ii},\; v_{ik}+v_{ki}) \\ \frac{\partial V_\varkappa^{(l)}}{\partial v_{gh}} &\equiv 0 \;\; (\text{modd.}\; \mathfrak{B}_\varkappa^{(l)},\; \mathfrak{B}_\lambda^{(l+1)},\; v_{ii},\; v_{ik}+v_{ki}) \end{aligned} \qquad \left(\begin{smallmatrix} g,\,h,\,i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n \\ \varkappa=1,\,2,\,\ldots\,\nu_l \\ \lambda=1,\,2,\,\ldots\,\nu_{l+1} \end{smallmatrix}\right).$$

Für das aus den Elementen des Modulsystems (M_ν) und aus allen denjenigen

Grössen $\mathfrak{B}^{(l)}$ gebildete Modulsystem, bei welchen $l<m$ ist, finden daher, wenn $n-m$ eine *gerade* Zahl ist, die Congruenzen statt:

$$(55)\qquad \begin{aligned} V(v) &\equiv \sum_l v^l \sum_\varkappa (\mathfrak{B}_\varkappa^{(l)})^2 \\ \frac{\partial V(v)}{\partial v_{gh}} &\equiv \sum_l v^{l-1} \sum_\varkappa \frac{\partial V_\varkappa^{(l-1)}}{\partial v_{gh}} \end{aligned} \qquad \left(\begin{smallmatrix} \varkappa=1,\,2,\,\ldots\ldots\,\nu_l \\ l=m,\,m+1,\,\ldots\,n \end{smallmatrix}\right).$$

Da die Grössen $\mathfrak{B}^{(l)}$, für welche $n-l$ ungerade ist, gleich Null sind, so besteht das angegebene Modulsystem, welches mit $(M_\nu^{(m)})$ bezeichnet werden möge, in Wahrheit nur aus den Elementen:

$$\mathfrak{B}^{(m-2)},\; \mathfrak{B}^{(m-4)},\; \mathfrak{B}^{(m-6)},\; \ldots$$

und aus den $\frac{1}{2}n(n+1)$ Elementen:

$$v_{ii},\; v_{ik}+v_{ki} \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n;\; i<k)}.$$

Das in den Congruenzen (55) enthaltene Resultat kann hiernach, wenn $n-m=2\mathfrak{m}$ gesetzt wird, in folgender Weise formulirt werden:

> Im Sinne der Congruenz für das Modulsystem $(M_\nu^{(n-2\mathfrak{m})})$ beginnt die Entwickelung der Determinante:
>
> $$|v_{ik}+v\delta_{ik}| \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$
>
> nach steigenden Potenzen von v mit $v^{n-2\mathfrak{m}}$, und die Entwickelung jeder ihrer ersten Subdeterminanten mit $v^{n-2\mathfrak{m}-1}$ oder einer höheren Potenz von v.

Nun ist die bilineare Form:

$$\frac{v}{V(v)} \sum_{i,k} \frac{\partial V(v)}{\partial v_{ik}}\, x_i'\, y_k' \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$

die reciproke der bilinearen Form:

$$\frac{1}{v}\sum_{i,k} v_{ik}x_i y_k + \sum_k x_k y_k \quad \text{oder} \quad \sum_{i,k}\left(\frac{v_{ik}}{v}+\delta_{ik}\right)x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n);$$

das vorstehende Resultat kann demnach auch, wenn man die Reciproke einer Form f zur Abkürzung mit Rec. (f) bezeichnet, durch die Congruenz dargestellt werden:

$$\text{Rec.}\left(\sum_{i,k}\left(\frac{v_{ik}}{v}+\delta_{ik}\right)x_i y_k\right)\cdot\sum_l v^l \sum_\varkappa (\mathfrak{B}_\varkappa^{(l)})^2 \equiv \sum_{i,k}\sum_l v^l \sum_\varkappa \frac{\partial V_\varkappa^{(l-1)}}{\partial v_{ik}} x_i' y_k' \quad (\text{modd.}\,(M_v^{(n-2m)}))$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots n;\ \varkappa = 1, 2, \ldots \nu_l;\ l = n-2m, n-2m+1, \ldots n),$$

und hieraus folgt, dass, wenn man zu den Elementen des mit $(M_v^{(n-2m)})$ bezeichneten Modulsystems noch das Element v hinzunimmt, die Congruenz besteht:

$$(56) \qquad \text{Rec.}\left(\sum_{i,k}\left(\frac{v_{ik}}{v}+\delta_{ik}\right)x_i y_k\right)\cdot\sum_\varkappa (\mathfrak{B}_\varkappa^{(m)})^2 \equiv \sum_{i,k}\sum_\varkappa \frac{\partial V_\varkappa^{(m-1)}}{\partial v_{ik}} x_i' y_k$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots n;\ \varkappa = 1, 2, \ldots \nu_m;\ m = n-2m).$$

Setzt man für die n^2 Variabeln v_{ik} ganze Grössen eines Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$, und entnimmt man aus demselben Bereich ein Modulsystem $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots)$, welches in allen Elementen des Modulsystems $(M_v^{(m)})$, also sowohl in jeder der $\frac{1}{2}n(n+1)$ Grössen:

$$v_{ii},\ v_{ik}+v_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n;\ i < k)$$

als auch in jeder der Grössen:

$$\mathfrak{B}^{(n-2m-2)},\ \mathfrak{B}^{(n-2m-4)},\ \mathfrak{B}^{(n-2m-6)}, \ldots$$

enthalten ist, für welches aber die Grösse:

$$\sum_\varkappa (\mathfrak{B}_\varkappa^{(n-2m)})^2$$

nicht congruent Null ist, so erhält man die Congruenz:

$$(56') \qquad \text{Rec.}\left(\sum_{i,k}\left(\frac{v_{ik}}{v}+\delta_{ik}\right)x_i y_k\right)\cdot\sum_\varkappa (\mathfrak{B}_\varkappa^{(m)})^2 \equiv \sum_{i,k}\sum_\varkappa \frac{\partial V_\varkappa^{(m-1)}}{\partial v_{ik}} x_i' y_k' \quad (\text{modd.}\ v, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots)$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots n;\ \varkappa = 1, 2, \ldots \nu_m;\ m = n-2m).$$

Die Coefficienten der bilinearen Form auf der rechten Seite sind Subdeterminanten $(n-m)^{\text{ter}}$, d. h. also $2m^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Subdeterminanten *gerader* Ordnung bleiben aber, wie schon oben dargelegt ist, im Sinne der Congruenz für das Modulsystem (M_v), also auch für das darin enthaltene Modulsystem $(v, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots)$, ungeändert, wenn man die Horizontalreihen und Verticalreihen ihrer Elemente mit einander vertauscht. Die bilineare Form auf der rechten Seite der Congruenz (56′) ist daher *symmetrisch.*

VII.

Legt man den n^2 Variabeln v_{ik} reelle Werthe τ_{ik} bei, welche den Bedingungen:

$$\tau_{ii} = 0,\ \ \tau_{ik}+\tau_{ki} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

genügen, also die Coefficienten einer alternirenden bilinearen Form bilden, und welche überdies so beschaffen sind, dass die Entwickelung der Determinante:

$$|\tau_{ik} + v\delta_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nach steigenden Potenzen von v genau mit v^m beginnt, so müssen die m Gleichungen bestehen:

$$\sum_\varkappa (\mathfrak{B}_\varkappa^{(l)})^2 = 0 \qquad \begin{pmatrix}\varkappa = 1, 2, \ldots \nu_l \\ l = 0, 1, \ldots m-1\end{pmatrix},$$

in welchen $\mathfrak{B}_\varkappa^{(l)}$ ganze ganzzahlige Functionen der reellen Grössen τ_{ik} sind, und es müssen daher die sämmtlichen Grössen:

$$\mathfrak{B}_\varkappa^{(l)} \qquad \begin{pmatrix}\varkappa = 1, 2, \ldots \nu_l \\ l = 0, 1, \ldots m-1\end{pmatrix}$$

selbst gleich Null sein. Es sind also dann die sämmtlichen Elemente des oben mit $(M_v^{(m)})$ bezeichneten Modulsystems gleich Null, und die Entwickelung jeder der ersten Subdeterminanten von:

$$|\tau_{ik} + v\delta_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

fängt daher mit v^{m-1} oder einer höheren Potenz von v an.

Nimmt man für die oben mit $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$ bezeichneten Modulsystem-Elemente die folgenden:

$$v_{ii}, \; v_{ik} + v_{ki}, \; \mathfrak{V}^{(n-2m-2)}, \; \mathfrak{V}^{(n-2m-4)}, \; \mathfrak{V}^{(n-2m-6)}, \ldots,$$

welche, sobald man die Variabeln v_{ik} durch die Grössen τ_{ik} ersetzt, sämmtlich gleich Null werden, so reducirt sich das Modulsystem in der Congruenz (56') auf den einfachen Modul v. Nimmt man endlich auch $v = 0$, so geht die Congruenz (56') in die Gleichung über:

$$\lim_{v=0} \text{Rec.}\left(\sum_{i,k}\left(\frac{\tau_{ik}}{v} + \delta_{ik}\right) x_i y_k\right) = \frac{1}{\sum_{\varkappa} (\mathfrak{V}_{\varkappa}^{(m)})^2} \sum_{i,k} \sum_{\varkappa} \frac{\partial V_{\varkappa}^{(m-1)}}{\partial v_{ik}} x_i' y_k', \tag{57}$$

vorausgesetzt, dass auf der rechten Seite in den mit $\mathfrak{V}_{\varkappa}^{(m)}$ und $\frac{\partial V_{\varkappa}^{(m-1)}}{\partial v_{ik}}$ bezeichneten ganzen Functionen der n^2 Grössen v_{ik}, für diese die entsprechenden reellen Grössen τ_{ik} substituirt werden.

Die bilineare Form auf der rechten Seite der Gleichung (57) ist, wie schon am Schlusse des vorigen Abschnittes erwähnt worden, symmetrisch; es gilt daher der bemerkenswerthe Satz:

Die Reciproke der bilinearen Form:

$$\frac{1}{v} \sum_{i,k} \tau_{ik} x_i y_k + \sum_k x_k y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

(58) d. h. also des Aggregats einer bilinearen alternirenden Form mit

reellen Coefficienten, dividirt durch v, und der symmetrischen Form $\sum x_k y_k$, nähert sich, wenn man v bis zu Null abnehmen lässt, einer symmetrischen bilinearen Form, deren Coefficienten reelle (endliche) Werthe haben.

Dieser Satz lässt sich noch allgemeiner in folgender Weise formuliren:

Wenn f und f' zwei conjugirte bilineare Formen mit reellen Coefficienten:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \quad \sum_{i,k} a_{ik} y_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bedeuten, und die Determinante der symmetrischen Form $f + f'$ nicht gleich Null ist, so nähert sich die Reciproke der bilinearen Form:

$$\frac{wf + f'}{w + 1},$$

welche eine Schaar mit conjugirten Grundformen darstellt, für $w + 1 = 0$, einer symmetrischen Form mit reellen (endlichen) Coefficienten.

Setzt man nämlich:

$$w = \frac{v + 1}{v - 1},$$

so geht $\frac{wf + f'}{w + 1}$ über in:

$$\frac{1}{2v}(f - f') + \frac{1}{2}(f + f'),$$

und wenn nunmehr die symmetrische Form $\frac{1}{2}(f + f')$ durch congruente Transformation in die Form:

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k y_k$$

verwandelt wird, bleibt die Form $\frac{1}{2}(f-f')$ alternirend, und $\frac{wf+f'}{w+1}$ erhält also in der That die obige Gestalt:

$$\frac{1}{v}\sum_{i,k}\tau_{ik}x_i y_k + \sum_k x_k y_k \qquad (i, k=1, 2, \ldots n),$$

in welcher die Coefficienten τ_{ik} die Bedingungen:

$$\tau_{ii}=0, \quad \tau_{ik}+\tau_{ki}=0 \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

erfüllen.

Die vorstehenden Sätze haben übrigens nur eine Bedeutung, wenn die Determinanten der alternirenden bilinearen Formen:

$$\sum_{i,k}\tau_{ik}x_i y_k, \quad \frac{1}{2}(f-f') \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

gleich Null sind; denn anderenfalls werden, für $v=0$ oder $w+1=0$, in den Reciproken der bilinearen Formen:

$$\frac{1}{v}\sum_{i,k}\tau_{ik}x_i y_k + \sum_k x_k y_k, \quad \frac{wf+f'}{w+1} \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

die Coefficienten sämmtlich gleich Null.

In dem obigen mit (58) bezeichneten Satze findet die am Schlusse des art. V erwähnte Frage ihre Erledigung, nämlich die Frage, wie man sich bei der *Cayley*'schen Darstellung orthogonaler Systeme (c_{ik}) denjenigen, welche zugleich symmetrisch sind, nähern kann. Denn bei dieser Darstellung wird das System der Elemente:

$$\frac{1}{2}c_{ik}+\frac{1}{2}\delta_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

als das reciproke eines Systems von Elementen $2t_{ik}$ charakterisirt, welche den Gleichungen:

$$t_{ik}+t_{ki}=\delta_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

genügen, oder also auch als das reciproke eines Systems von Elementen:

$$\frac{\tau_{ik}}{v}+\delta_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \ldots n),$$

welche die Bedingungen erfüllen:

$$\tau_{ii}=0, \quad \tau_{ik}+\tau_{ki}=0 \qquad (i, k=1, 2, \ldots n).$$

Nun können die Elemente eines reciproken Systems, als die nach den einzelnen Elementen des ursprünglichen Systems genommenen partiellen logarithmischen Differentialquotienten der Determinante, wenn diese gleich Null wird, nicht sämmtlich endliche Werthe behalten. Bei Annäherung an Systeme $\left(\frac{1}{2}c_{ik}+\frac{1}{2}\delta_{ik}\right)$, deren Determinante gleich Null ist, muss daher wenigstens eine der n^2 Grössen $\frac{\tau_{ik}}{v}$ über jede Grenze hinaus wachsen. Erfolgt nun die Annäherung in der Weise, dass man für die n^2 Grössen τ_{ik} irgend welche endliche Werthe, wofür die Determinante $|\tau_{ik}|$ gleich Null ist, festhält und v bis zur Null hin abnehmen lässt, so nähert man sich, wie der obige Satz (58) zeigt, stets einem zu dem Systeme $\left(\frac{\tau_{ik}}{v}+\delta_{ik}\right)$ reciproken *symmetrischen* Systeme $\left(\frac{1}{2}c_{ik}+\frac{1}{2}\delta_{ik}\right)$, dessen Elemente endliche Werthe haben, und dessen Determinante gleich Null ist. Das auf diese Weise aus dem Systeme $\left(\frac{\tau_{ik}}{v}+\delta_{ik}\right)$ resultirende System der n^2 Elemente c_{ik} ist daher zugleich orthogonal und symmetrisch.

VIII.

Bedeuten $z_{11}, z_{12}, \ldots z_{n,n-1}, z_{nn}$ reelle Variabeln und $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \ldots \zeta_{n,n-1}, \zeta_{nn}$ solche Werthe derselben, die den $\frac{1}{2}n(n+1)$ Bedingungsgleichungen genügen:

(59) $$\sum_{i=1}^{i=n}\zeta_{gi}\zeta_{hi}=\delta_{gh} \qquad (g, h=1, 2, \ldots n;\ g\leq h),$$

so bilden die Systeme (ζ_{ik}) eine aus der gesammten n^2 fachen Mannigfaltigkeit der Systeme (z_{ik}) ausgesonderte $\frac{1}{2}n(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit, welche aus den sämmtlichen *orthogonalen* Systemen mit n^2 reellen Elementen besteht. Diese $\frac{1}{2}n(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit hat zwei getrennte Theile, von denen der eine die orthogonalen Systeme mit der Determinante $+1$, der andere diejenigen mit der Determinante -1 enthält. Bezeichnet man die einen mit $(\zeta_{ik}^{(+)})$, die anderen mit $(\zeta_{ik}^{(-)})$, so sind die charakteristischen Bedingungsgleichungen:

$$\sum_i \zeta_{gi}^{(+)} \zeta_{hi}^{(+)} = \delta_{gh}, \quad \left|\zeta_{ik}^{(+)}\right| = 1 \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

$$\sum_i \zeta_{gi}^{(-)} \zeta_{hi}^{(-)} = \delta_{gh}, \quad \left|\zeta_{ik}^{(-)}\right| = -1 \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Nun entstehen sämmtliche Systeme $(\zeta_{ik}^{(-)})$ aus den Systemen $(\zeta_{ik}^{(+)})$ durch die Substitution:

$$\zeta_{1k}^{(-)} = -\zeta_{1k}^{(+)} \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

und es können daher auf diese Weise die beiden $\frac{1}{2}n(n-1)$ fachen Mannigfaltigkeiten orthogonaler Systeme:

$$(\zeta_{ik}^{(+)}), \quad (\zeta_{ik}^{(-)})$$

auf einander eindeutig bezogen werden.

Aus den Gleichungen:

$$\sum_h (\zeta_{hi} + \delta_{hi} z)\, \zeta_{hk} = \delta_{ik} + \zeta_{ik} z \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

folgt die Determinantenrelation:

$$|\zeta_{ik} + \delta_{ik} z|\,|\zeta_{ik}| = |\delta_{ik} + \zeta_{ik} z| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Nimmt man hierin für (ζ_{ik}) ein System mit der Determinante -1 und setzt dann $z = 1$, so resultirt die Gleichung:

$$\left|\zeta_{ik}^{(-)} + \delta_{ik}\right| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Die $\frac{1}{2}n(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit $(\zeta_{ik}^{(-)})$ besteht also aus lauter orthogonalen Systemen, welche sich der am Schluss des art. V entwickelten *Cayley*'schen Darstellung entziehen. Aber von orthogonalen Systemen $(\zeta_{ik}^{(+)})$ giebt es, wie nun gezeigt werden soll, keine $\frac{1}{2}n(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit, für welche die Bedingung:

$$\left|\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}\right| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

erfüllt wäre.

Gäbe es nämlich eine solche $\frac{1}{2}n(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit, so müssten $\frac{1}{2}n(n-1)$ von den Grössen $\zeta_{ik}^{(+)}$ beliebig bestimmt und dabei die Gleichungen:

$$\sum_i \zeta_{gi}^{(+)} \zeta_{hi}^{(+)} = \delta_{gh}, \quad \left|\zeta_{ik}^{(+)}\right| = 1, \quad \left|\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}\right| = 0 \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

durch reelle oder complexe, endliche oder unendliche Werthe der übrigen Grössen $\zeta_{ik}^{(+)}$ befriedigt werden können. Es müsste also, wenn:

$$\zeta_{ik}^{(+)} = \frac{z_{ik}}{z} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

gesetzt wird, bei beliebiger Annahme von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Grössen z_{ik}, den homogenen Gleichungen:

$$\text{(60)} \qquad \sum_i z_{gi} z_{hi} = \delta_{gh} z^2, \quad |z_{ik}| = z^n, \quad |z_{ik} + \delta_{ik} z| = 0 \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

so genügt werden können, dass eine der $n^2 + 1$ Variabeln z unbestimmt bleibt. Wählt man nun für die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Grössen z_{ik}, bei welchen jeder der beiden Indices kleiner als n und der erste nicht kleiner als der zweite ist, die Werthe:

$$z_{hh} = z, \quad z_{ik} = 0 \qquad (h, i, k = 1, 2, \dots n-1;\ i > k),$$

so bestimmen sich die Werthe der übrigen Grössen z_{ik} mittels der Gleichungen:

$$\sum_i z_{gi} z_{hi} = \delta_{gh} z^2 \qquad (g, h, i = 1, 2, \dots n)$$

in folgender Weise:

$$z_{ik} = 0, \quad z_{hn} = 0, \quad z_{nh} = 0 \qquad (h, i, k = 1, 2, \dots n-1;\ i < k)$$

$$z_{nn} = \pm z.$$

Da ferner durch die Bedingung:

$$|z_{ik}| = z^n \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

der Werth $z_{nn} = -z$ ausgeschlossen wird, so ergeben sich auf Grund der gemachten Annahme und in Folge der ersten beiden von den Gleichungen (60) für die n^2 Grössen z_{ik} die Werthe:

$$z_{ik} = \delta_{ik} z \qquad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

und die letzte von den Gleichungen (60) erfordert alsdann, dass $z = 0$ wird. Bei der obigen Bestimmungsweise von $\frac{1}{2} n(n-1)$ Grössen z_{ik} kann also den Gleichungen (60) nicht anders als durch Nullwerthe sämmtlicher n^2+1 Grössen z genügt werden, und es ist somit der Nachweis geführt, dass es keine $\frac{1}{2} n(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit von Grössen $\zeta_{ik}^{(+)}$ giebt, für welche die Determinante:

$$\left|\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}\right| \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

gleich Null ist.

Da diejenigen Systeme der $\frac{1}{2} n(n-1)$ fachen Mannigfaltigkeit $(\zeta_{ik}^{(+)})$, für welche die Determinante:

$$\left|\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}\right| \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

gleich Null ist, nur eine besondere, minder ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden, so lassen sich die sämmtlichen Systeme der $\frac{1}{2} n(n-1)$ fachen Mannigfaltigkeit $(\zeta_{ik}^{(+)})$, abgesehen von einer darauf befindlichen besonderen Mannigfaltigkeit geringerer Ausdehnung, in der *Cayley*'schen Form darstellen. Bezeichnet man demnach mit τ_{ik} für solche Werthe der Indices, bei denen $1 \leqq i < k \leqq n$ ist, $\frac{1}{2} n(n-1)$ reelle unabhängige Variable und setzt für alle diese Werthe von i und k:

$$\tau_{ki} = -\tau_{ik}$$

und überdies:

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \dots = \tau_{nn} = 0,$$

so werden, gemäss der oben entwickelten *Cayley*'schen Darstellung orthogonaler Systeme, die beiden $\frac{1}{2} n(n-1)$ fachen Mannigfaltigkeiten $(\zeta_{ik}^{(+)})$ und (τ_{ik}) auf einander eindeutig bezogen, indem man je zwei Systeme $(\zeta_{ik}^{(+)})$, (τ_{ik}) als einander entsprechend auffasst, für welche die Systeme:

$$\left(\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}\right), \quad \left(\tfrac{1}{2}\tau_{ik} + \tfrac{1}{2}\delta_{ik}\right) \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

zu einander reciprok sind.

Die Systeme (τ_{ik}) bilden eine *ebene* $\frac{1}{2} n(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit; die darauf eindeutig bezogene Mannigfaltigkeit der Systeme $(\zeta_{ik}^{(+)})$ ist daher irreductibel, und da die Systeme $(\zeta_{ik}^{(-)})$ und $(\zeta_{ik}^{(+)})$ einander eindeutig zugeordnet sind, so ergiebt sich als Resultat der vorstehenden Entwickelung,

> dass die gesammte Mannigfaltigkeit der orthogonalen Systeme (ζ_{ik}) aus zwei irreductibeln $\frac{1}{2} n(n-1)$ fachen Mannigfaltigkeiten besteht, von denen die eine die orthogonalen Systeme mit der Determinante $+1$, die andere diejenigen mit der Determinante -1 enthält.

Dem Nullpunkt der $\frac{1}{2}n(n-1)$ fachen Mannigfaltigkeit τ_{ik}, d. h. dem Systeme:

$$\tau_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

entspricht in der Mannigfaltigkeit $(\zeta_{ik}^{(+)})$ der Punkt:

$$\zeta_{ik}^{(+)} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

also das *Einheitssystem* $(\zeta_{ik}^{(+)})$. Für solche Punkte der Mannigfaltigkeit $(\zeta_{ik}^{(+)})$, für welche die Determinante des Systems $(\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik})$ gleich Null ist, giebt es in der ebenen Mannigfaltigkeit (τ_{ik}) keine entsprechenden Punkte in endlicher Entfernung vom Nullpunkte, d. h. keine solchen, für welche jede der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Grössen τ_{ik} und also die Quadratsumme:

$$\sum_{i,k} \tau_{ik}^2 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

einen endlichen Werth hätte. Bezeichnet man diese Quadratsumme mit ϱ^2 und setzt:

$$\tau_{ik} = \varrho \bar{\tau}_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n;\ \varrho > 0),$$

so erfüllen die Systeme $(\bar{\tau}_{ik})$, da die Summe der n^2 Grössen $\bar{\tau}_{ik}$ gleich Eins ist, eine „einheitssphaerische" Mannigfaltigkeit.

Nach diesen Vorbemerkungen kann das im art. VII erlangte Resultat folgendermaassen formulirt werden:

> Wenn n ungerade ist, nähert sich die der gesammten sphaerischen $\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)$ fachen Mannigfaltigkeit $(\varrho\bar{\tau}_{ik})$ entsprechende Punktmannigfaltigkeit $(\zeta_{ik}^{(+)})$ mit wachsendem ϱ derjenigen, welche von den orthogonalen *symmetrischen* Systemen $(\zeta_{ik}^{(+)})$ gebildet wird; wenn aber n gerade ist, so tritt dies nur für diejenige Punktmannigfaltigkeit $(\zeta_{ik}^{(+)})$ ein, welche der besonderen durch die Bedingung:

$$|\bar{\tau}_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

> charakterisirten $\left(\frac{1}{2}n(n-1)-2\right)$ fachen Mannigfaltigkeit $(\varrho\bar{\tau}_{ik})$ entspricht.

Es ist also für *ungerade* Zahlen n die unendliche sphaerische $\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)$ fache Mannigfaltigkeit (τ_{ik}), für *gerade* Zahlen n die unendliche sphaerische $\left(\frac{1}{2}n(n-1)-2\right)$ fache Mannigfaltigkeit (τ_{ik}) mit verschwindender Determinante, welche der Mannigfaltigkeit der orthogonalen *symmetrischen* Systeme $(\zeta_{ik}^{(+)})$ entspricht. Aber da die Mannigfaltigkeit der letzteren, wie schon Hr. *Lipschitz* gezeigt hat*), eine geringere ist, so treten sie bei der angegebenen Beziehung zur Mannigfaltigkeit (τ_{ik}) mehrfach auf.

IX.

Nunmehr sollen, gemäss der Ankündigung im Eingang des art. V, die Eigenschaften des aus den $\frac{1}{2}n(n+1)$ Elementen:

$$\delta_{gh} - \sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n \quad g \leq h)$$

bestehenden *Modulsystems* untersucht werden, weil dadurch eine vollständigere Einsicht gewonnen wird als durch die Untersuchung des für orthogonale Systeme (ζ_{ik}) charakteristischen *Gleichungssystems*:

$$\delta_{gh} - \sum_{i=1}^{i=n} \zeta_{gi}\zeta_{hi} = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n;\ g \leq h).$$

Denn es können überhaupt zwischen zwei Systemen ganzer Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$:

$$(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{M}''', \ldots), \quad (M', M'', M''', \ldots)$$

*) Vergl. den Schluss des art. II.

Relationen ganz verschiedener Art bestehen, welche die unbedingte Aequivalenz der beiden Gleichungssysteme:

$$(\mathfrak{M}' = 0,\ \mathfrak{M}'' = 0,\ \mathfrak{M}''' = 0, \ldots),\quad (M' = 0,\ M'' = 0,\ M''' = 0, \ldots)$$

begründen; die Untersuchung der zwischen zwei Modulsystemen:

$$(\mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}'',\ \mathfrak{M}''', \ldots),\quad (M',\ M'',\ M''', \ldots)$$

obwaltenden Beziehungen führt daher zu einer vollständigeren Erkenntniss, als die Erforschung der gegenseitigen Abhängigkeit der beiden Gleichungssysteme:

$$(\mathfrak{M}' = 0,\ \mathfrak{M}'' = 0,\ \mathfrak{M}''' = 0, \ldots),\quad (M' = 0,\ M'' = 0,\ M''' = 0, \ldots)$$

gewähren kann.

Im Sinne der Congruenz für das aus $\frac{1}{2}n(n+1)$ Elementen bestehende Modulsystem:

$$(61) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} - \delta_{gh} \qquad {\scriptstyle (g,\, h = 1,\, 2, \ldots n;\; g \leqq h)}$$

ist das System der n^2 unbestimmten Variabeln:

$$w_{ik} \qquad {\scriptstyle (i,\, k = 1,\, 2, \ldots n)}$$

ein „orthogonales". Dieses Modulsystem (61) ist ein reines Modulsystem der durch die Anzahl seiner Elemente bezeichneten Stufe. Denn wenn es irgend ein Primmodulsystem einer geringeren $\left(\frac{1}{2}n(n+1) - \nu\right)^{\text{ten}}$ Stufe enthielte, so müsste den $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} = \delta_{gh} w^2 \qquad {\scriptstyle (g,\, h = 1,\, 2, \ldots n;\; g \leqq h)}$$

durch eine $\left(\frac{1}{2}n(n-1) + \nu + 1\right)$ fache Mannigfaltigkeit von Werthen der

$n^2 + 1$ Variabeln w, also bei beliebiger Wahl von $\frac{1}{2}n(n-1)$ derselben, noch durch eine $(\nu + 1)$ fache Mannigfaltigkeit genügt werden können, während doch, wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt worden ist, bei Festsetzung der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bestimmungsgleichungen:

$$w_{hh} = w,\ w_{ik} = 0 \qquad {\scriptstyle (h,\, i,\, k = 1,\, 2, \ldots n-1;\; i > k)},$$

sich die Werthe der übrigen Variabeln w in folgender Weise bestimmen:

$$w_{nn} = \pm w,\ w_{hn} = 0,\ w_{nh} = 0,\ w_{ik} = 0 \qquad {\scriptstyle (h,\, i,\, k = 1,\, 2, \ldots n-1;\; i < k)}.$$

Es bleibt also nur eine *einfache* Mannigfaltigkeit der $n^2 + 1$ Grössen w, und es ist somit, wie gezeigt werden sollte, in der That $\nu = 0$.

Das Modulsystem:

$$(61) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} - \delta_{gh} \qquad {\scriptstyle (g,\, h = 1,\, 2, \ldots n;\; g \leqq h)}$$

ist dem Modulsysteme:

$$(62) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} w_{ig} w_{ih} - \delta_{gh} \qquad {\scriptstyle (g,\, h = 1,\, 2, \ldots n;\; g \leqq h)}$$

vollkommen aequivalent. Denn, setzt man zur Abkürzung:

$$(63) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} - \delta_{gh} = \varphi_{gh}, \quad \sum_{i=1}^{i=n} w_{ig} w_{ih} - \delta_{gh} = \bar{\varphi}_{gh} \qquad {\scriptstyle (g,\, h = 1,\, 2, \ldots n;\; g \leqq h)},$$

so bestehen, gemäss den Formeln (39) im art. V, die Relationen:

$$\varphi_{gh} = \sum_{i,k} w_{hk} w'_{ig} \bar{\varphi}_{ik}, \quad \bar{\varphi}_{gh} = \sum_{i,k} w_{kh} w'_{gi} \varphi_{ik} \qquad {\scriptstyle (g,\, h,\, i,\, k = 1,\, 2, \ldots n)}.$$

Da nun das Product jedes Elements des zu (w_{ik}) reciproken Systems (w'_{ik}) mit der Determinante W des Systems (w_{ik}) eine ganze Grösse des Bereichs der n^2 Grössen w_{ik} ist, so erhält man durch Multiplication mit W die Congruenzen:

(64) $$W\varphi_{gh} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \overline{\varphi}_{ik}), \qquad W\overline{\varphi}_{gh} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \varphi_{ik}) \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Aus den Congruenzen

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} \equiv \delta_{gh} \quad (\text{modd. } \varphi_{ik}), \qquad \sum_{i=1}^{i=n} w_{ig} w_{ih} \equiv \delta_{gh} \quad (\text{modd. } \overline{\varphi}_{ik})$$
$$(g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

folgt aber, dass für beide Modulsysteme (φ_{ik}) und $(\overline{\varphi}_{ik})$ die Congruenz:

$$W^2 \equiv 1$$

stattfindet, und man gelangt daher, wenn man die Congruenzen (64) mit W multiplicirt, zu den beiden Congruenzen:

$$\varphi_{gh} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \overline{\varphi}_{ik}), \qquad \overline{\varphi}_{gh} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \varphi_{ik}) \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

durch welche die nachzuweisende Aequivalenz der beiden Modulsysteme (61) und (62) begründet wird.

Da für das Modulsystem (61) die Congruenz $W^2 \equiv 1$ besteht, so muss für jedes darin enthaltene Primmodulsystem die Determinante W entweder congruent $+1$ oder congruent -1 sein. Jedes in dem Modulsystem (61) enthaltene Primmodulsystem muss daher in dem einen oder dem andern der beiden Modulsysteme:

(65) $$\left(\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} - \delta_{gh},\ W - 1\right), \quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} - \delta_{gh},\ W + 1\right) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

enthalten sein. Diese beiden Modulsysteme sind aber selbst prim; denn, wenn eines derselben ein Modulsystem $\frac{1}{2}n(n+1)^{\text{ter}}$ Stufe:

$$(M', M'', M''', \ldots)$$

enthielte, so würde die durch die Gleichungen $M' = 0$, $M'' = 0$, $M''' = 0, \cdots$ repraesentirte $\frac{1}{2}n(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit einen Theil derjenigen bilden, welche durch die Gleichungen:

(66) $$\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} = \delta_{gh}, \quad W = \varepsilon \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n;\ g \leqq h)$$

für $\varepsilon = +1$ oder für $\varepsilon = -1$ dargestellt wird. Es ist aber im vorhergehenden Abschnitte nachgewiesen worden, dass diese Mannigfaltigkeiten irreductibel sind, und es zeigt sich also,

> dass das Modulsystem (61), sowie das damit vollkommen aequivalente Modulsystem (62) keine anderen Primmodulsysteme enthält als die beiden, welche oben mit (65) bezeichnet worden sind.

Dabei möge noch hervorgehoben werden, dass das Modulsystem, welches aus der Composition der beiden Modulsysteme (65) entsteht, in folgendem enthalten ist:

$$\left(2\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} - 2\delta_{gh}\right) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

da bei der bezeichneten Composition die Elemente:

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} - \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

sowohl mit $W + 1$ als auch mit $W - 1$ multiplicirt vorkommen und also die Differenz von je zwei solchen Producten dem aus der Composition entstehenden Modulsystem als Element hinzugefügt werden kann.

X.

Die Aequivalenzeigenschaft, welche im vorhergehenden Abschnitte für die beiden Modulsysteme (61) und (62) dargelegt worden ist, kommt auch den beiden allgemeineren Modulsystemen zu:

$$(67)\qquad \Big(\sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}\Big)$$

$$(g,\ h,\ i=1,2,\dots n),$$

$$(68)\qquad \Big(\sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh}\Big)$$

in welchen die Grössen:

$$u_{ik},\ v_{ik} \qquad (i,\ k=1,2,\dots n)$$

je n^2 unbestimmte Variable bedeuten.

Um dies nachzuweisen, setze ich zur Abkürzung:

$$M_{gh} = \sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh},\quad \overline{M}_{gh} = \sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh} \qquad (g,\ h,\ i=1,2,\dots n),$$

$$|u_{ik}| = U,\quad |v_{ik}| = V \qquad (i,\ k=1,2,\dots n).$$

Alsdann bestehen die Relationen:

$$\sum_{g,h} u_{hk} \frac{\partial U}{\partial u_{gi}} M_{gh} = U\overline{M}_{ik}$$

$$(g,\ h,\ i,\ k=1,2,\dots n),$$

$$\sum_{g,h} v_{hk} \frac{\partial V}{\partial v_{gi}} \overline{M}_{gh} = VM_{ik}$$

und also die Congruenzen:

$$(69)\qquad U\overline{M}_{ik} \equiv 0 \pmod{M_{ik}},\quad VM_{ik} \equiv 0 \pmod{\overline{M}_{ik}} \qquad (i,\ k=1,2,\dots n).$$

Ferner ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen von M_{gh} und $\overline{M}_{gh}$ die Congruenzen:

$$(70)\qquad \sum_i u_{gi} v_{ih} \equiv \delta_{gh} \pmod{M_{ik}},\ \sum_i v_{gi} u_{ih} \equiv \delta_{gh} \pmod{\overline{M}_{ik}}$$

$$(g,\ h,\ i,\ k=1,2,\dots n),$$

und hieraus folgt, dass für jedes der beiden Modulsysteme (M_{ik}) und $\overline{M}_{ik})$ die Congruenz:

$$UV \equiv 1$$

stattfindet. Multiplicirt man nun die erstere der beiden Congruenzen (69) mit V, die letztere mit U, so resultiren die beiden Congruenzen:

$$\overline{M}_{ik} \equiv 0 \pmod{M_{ik}},\quad M_{ik} \equiv 0 \pmod{\overline{M}_{ik}} \qquad (i,\ k=1,2,\dots n),$$

durch welche die nachzuweisende Aequivalenz der beiden oben mit (67) und (68) bezeichneten Modulsysteme (M_{ik}) und $(\overline{M}_{ik})$ begründet wird.

Die ersteren der Congruenzen (70) definiren das System (v_{ik}) als „das zu (u_{ik}), im Sinne der Congruenz für das Modulsystem (M_{ik}), reciproke"; ebenso definiren die letzteren der Congruenzen (70) das System (u_{ik}) als „das zu (v_{ik}), im Sinne der Congruenz für das Modulsystem $(\overline{M}_{ik})$, reciproke". Da sich nun die beiden Modulsysteme (M_{ik}) und $(\overline{M}_{ik})$ als einander vollkommen aequivalent erwiesen haben, so erweisen sich auch die beiden Definitionen als aequivalent. Der ebenso einfache als wichtige Satz,

> dass das reciproke eines reciproken Systems das ursprüngliche System ist,

behält daher im Sinne der Congruenz für *jedes beliebige* Modulsystem seine Gültigkeit. Denn wenn die n^2 Congruenzen:

$$\sum_i u_{gi} v_{ih} \equiv \delta_{gh} \quad \text{oder also} \quad M_{gh} \equiv 0 \qquad (g,\ h,\ i=1,2,\dots n)$$

für irgend ein Modulsystem $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots)$ des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots)$ bestehen, sobald für u_{ik}, v_{ik} gewisse ganze Grössen $\mathfrak{U}_{ik}$, $\mathfrak{B}_{ik}$ desselben Bereichs gesetzt werden, d. h. also, wenn das System $(\mathfrak{B}_{ik})$, im Sinne der Congruenz modd. $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots$, zu $(\mathfrak{U}_{ik})$ reciprok ist, so ist das Modulsystem $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots)$ in dem Modulsystem (M_{ik}) und also auch in dem aequivalenten Modulsystem $(\overline{M}_{ik})$ enthalten, d. h. es bestehen auch die n^2 Congruenzen:

$$\overline{M}_{gh} \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \sum_i v_{gi} u_{ih} \equiv \delta_{gh} \pmod{\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots} \qquad (g,\ h,\ i=1,2,\dots n),$$

sobald darin $\mathfrak{V}_{gi}$ für v_{gi} und $\mathfrak{U}_{ih}$ für u_{ih} substituirt wird, und es ist daher auch, im Sinne der Congruenz modd. $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$, das System $(\mathfrak{U}_{ik})$ reciprok zu $(\mathfrak{V}_{ik})$.

Bezeichnet man mit U_{ik} die Elemente des zu (u_{ik}) adjungirten Systemes, setzt man also $U_{hk} = \frac{\partial U}{\partial u_{kh}}$, so erhält man für die Doppelsumme:

$$\sum_{h,\,i} v_{gi} u_{ih} (V U_{hk} - v_{hk}) \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

je nachdem man zuerst nach h und dann nach i oder in entgegengesetzter Folge summirt, die beiden Ausdrücke:

$$v_{gk}(UV - 1) - \sum_i v_{gi} M_{ik}, \quad V U_{gk} - v_{gk} + \sum_h (V U_{hk} - u_{hk}) M_{gh}$$

$$(g, h, i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Hieraus erschliesst man, da $UV \equiv 1$ (modd. M_{ik}) ist, die Congruenzen:

$$v_{ik} - V U_{ik} \equiv 0 \quad (\text{modd. } M_{gh}) \quad \text{oder} \quad \left(\text{modd. } \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}\right)$$

$$(g, h, i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Andererseits resultiren aus den Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh} = (UV - 1)\delta_{gh} + \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}(v_{ih} - V U_{ih}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

die Congruenzen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh} \equiv 0 \quad (\text{modd. } UV - 1,\ v_{ik} - V U_{ik}) \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Es besteht daher die Aequivalenz:

$$(71) \qquad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}\right) \sim (UV - 1,\ v_{gh} - V U_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

welche bei Vertauschung der Grössen u und v in folgende übergeht:

$$(72) \qquad \left(\sum_{i=1}^{i=n} v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh}\right) \sim (UV - 1,\ u_{gh} - U V_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n).$$

Da nun, wie oben gezeigt worden ist, die beiden ersteren Modulsysteme in den Aequivalenzen (71) und (72) einander aequivalent sind, so sind auch die beiden Modulsysteme:

$$(UV - 1,\ u_{gh} - U V_{gh}),\ (UV - 1,\ v_{gh} - V U_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

einander aequivalent.

XI.

Setzt man:

$$u_{ik} = w_{ik} + \delta_{ik}, \quad |u_{ik}| = U \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so gehen die obigen Gleichungen (63), sowie die im art. V angegebenen Formeln (34) für $u = 1$, in folgende über:

$$\varphi_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} - u_{ik} - u_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und das System $(u_{ik} - \delta_{ik})$ ist für das Modulsystem (φ_{ik}) sowie für das aequivalente System $(\overline{\varphi}_{ik})$ ein orthogonales.

Setzt man ferner:

$$\psi_{ik} = \delta_{ik} - v_{ik} - v_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so hat man, entsprechend den Relationen (37) im art. V, die Congruenzen:

$$\varphi_{gh} \equiv \sum_{i,\,k} u_{gi} u_{hk} \psi_{ik}, \quad \psi_{gh} \equiv \sum_{i,\,k} v_{gi} v_{hk} \varphi_{ik} \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

für das im vorhergehenden Abschnitte mit (M_{gh}) bezeichnete, aus den n^2 Elementen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh} \qquad (g, h=1, 2, \dots n)$$

bestehende Modulsystem. Es ist daher:

$$\varphi_{ik} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \psi_{ik},\ M_{ik}), \quad \psi_{ik} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \varphi_{ik},\ M_{ik}) \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

d. h. die beiden aus je $2n^2$ Elementen bestehenden Modulsysteme:

$$(\varphi_{ik},\ M_{ik}), \quad (\psi_{ik},\ M_{ik}) \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

sind einander vollkommen aequivalent. Indem man nun für die Elemente φ_{ik}, ψ_{ik}, M_{ik} ihre Werthe substituirt, erhält man die fundamentale Aequivalenz:

$$(73) \qquad \Big(\sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} - u_{ik} - u_{ki},\ \sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} v_{hk} - \delta_{ik}\Big) \sim \Big(\delta_{ik} - v_{ik} - v_{ki},\ \sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} v_{hk} - \delta_{ik}\Big) \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

und also unter Benutzung der im vorhergehenden Abschnitte hergeleiteten Aequivalenzen (71), (72) noch die beiden folgenden:

$$(74) \qquad \Big(\sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} - u_{ik} - u_{ki},\ v_{ik} - VU_{ik}\Big) \sim (\delta_{ik} - v_{ik} - v_{ki},\ v_{ik} - VU_{ik},\ UV - 1),$$

$$(75) \qquad \Big(\sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} - u_{ik} - u_{ki},\ u_{ik} - UV_{ik}\Big) \sim (\delta_{ik} - v_{ik} - v_{ki},\ u_{ik} - UV_{ik},\ UV - 1) \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

welche die Ausdehnung der *Cayley*'schen Darstellungsweise orthogonaler Systeme auf solche Systeme enthalten, denen die Eigenschaft der Orthogonalität nur für ein gewisses Modulsystem zukommt.

Um dies näher darzulegen, seien:

$$\mathfrak{u}_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

solche ganze Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots)$, dass das System:

$$(\mathfrak{u}_{ik} - \delta_{ik}) \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

im Sinne der Congruenz für ein demselben Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots)$ angehöriges Modulsystem $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots)$, ein „orthogonales" wird. Die hierfür charakteristischen Congruenzen sind sowohl:

$$(76) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{u}_{ih} \mathfrak{u}_{kh} - \mathfrak{u}_{ik} - \mathfrak{u}_{ki} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}'', \dots) \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

als auch:

$$(76') \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{u}_{hi} \mathfrak{u}_{hk} - \mathfrak{u}_{ik} - \mathfrak{u}_{ki} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}'', \dots) \qquad (i, k=1, 2, \dots n).$$

Falls nun das System $(\mathfrak{u}_{ik})$ überdies die Eigenschaft hat, dass die Determinante $\mathfrak{U}$, im Sinne der Congruenz modd. $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots$, ein Divisor von 1 ist, d. h. dass es eine ganze Grösse $\mathfrak{V}$ des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots)$ giebt, welche mit $\mathfrak{U}$ multiplicirt der Einheit congruent ist, so resultiren aus der Aequivalenz (74), wenn darin:

$$v_{ik} = VU_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

gesetzt wird, die Congruenzen:

$$(77) \qquad \delta_{ik} - \mathfrak{V}\mathfrak{U}_{ik} - \mathfrak{V}\mathfrak{U}_{ki} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}'', \dots) \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

in welchen $\mathfrak{V}$ durch die Congruenz bestimmt ist:

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V} \equiv 1 \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}'', \dots),$$

und $\mathfrak{U}_{ik}$ die Elemente des zu $(\mathfrak{u}_{ik})$ adjungirten Systems bedeuten.

Wenn andererseits die Elemente eines dem Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehörigen Systems:

$$\mathfrak{v}_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

den Congruenzen genügen:

$$\delta_{ik} - \mathfrak{v}_{ik} - \mathfrak{v}_{ki} \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und überdies die Eigenschaft haben, dass die Determinante des Systems $(\mathfrak{v}_{ik})$, welche mit $\mathfrak{V}$ bezeichnet werden möge, im Sinne der Congruenz modd. $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$, ein Divisor von 1 ist, d. h. dass es eine ganze Grösse $\mathfrak{U}$ des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ giebt, welche mit $\mathfrak{V}$ multiplicirt der Einheit congruent ist, so resultiren aus der Aequivalenz (75), wenn darin:

$$u_{ik} = VU_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

gesetzt wird, die Congruenzen:

$$(78) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{U}\mathfrak{V}_{ih}\,\mathfrak{U}\mathfrak{V}_{kh} - \mathfrak{U}\mathfrak{V}_{ik} - \mathfrak{U}\mathfrak{V}_{ki} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

in welchen $\mathfrak{U}$ durch die Congruenz bestimmt ist:

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V} \equiv 1 \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots),$$

und $\mathfrak{V}_{ik}$ die Elemente des zu $(\mathfrak{v}_{ik})$ adjungirten Systems bedeuten.

Man erhält somit *alle*, im Sinne der Congruenz modd. $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$, orthogonalen Systeme:

$$(\mathfrak{u}_{ik} - \delta_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

für welche die Determinante:

$$|\mathfrak{u}_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

im Sinne der bezeichneten Congruenz, ein Divisor von 1 ist, wenn man aus allen Systemen $(\mathfrak{v}_{ik})$, deren Determinante $\mathfrak{V}$ in eben demselben Sinne ein Divisor von 1 ist, also einer Congruenz:

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V} \equiv 1 \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots)$$

genügt, und für welche überdies die Congruenzen:

$$\delta_{ik} - \mathfrak{v}_{ik} - \mathfrak{v}_{ki} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots)$$

erfüllt sind, Systeme $(\mathfrak{u}_{ik})$ mittels der Gleichungen:

$$\mathfrak{u}_{ik} = \mathfrak{U}\mathfrak{V}_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bildet. Denn dass diese Systeme orthogonale (im Sinne der Congruenz modd. $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$) sind, geht aus den Congruenzen (78) hervor, und dass es keine anderen giebt, wird durch die Congruenzen (77) dargelegt.

XII.

Für den Bereich $(\mathfrak{R} = 1)$, d. h. für den absoluten Rationalitätsbereich der rationalen Zahlen, für welchen sich das Modulsystem $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots)$ auf einen einfachen ganzzahligen Modul $\mathfrak{M}$ reducirt, sind nach der vorstehenden Entwickelung alle diejenigen, aber auch *nur* diejenigen orthogonalen Systeme ganzer Zahlen $(\mathfrak{w}_{ik})$ durch die *Cayley*'sche Form darstellbar, für welche die Determinante:

$$|\mathfrak{w}_{ik} + \delta_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

modulo $\mathfrak{M}$, ein Divisor von 1 ist; d. h. das Problem der Auffindung ganzzahliger Systeme $(\mathfrak{w}_{ik})$, welche den Congruenzen genügen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{w}_{gi}\,\mathfrak{w}_{hi} \equiv \delta_{gh} \quad (\text{mod. } \mathfrak{M}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

lässt sich dann und nur dann in der *Cayley*'schen Weise lösen, wenn die Determinante $|\mathfrak{w}_{ik} + \delta_{ik}|$ relativ prim zu $\mathfrak{M}$ ist. In diesem speciellen Falle ganzzahliger Moduln, und überhaupt für jedes Modulsystem höchster Stufe, steht hiernach die Anzahl der in der *Cayley*'schen Form nicht darstellbaren orthogonalen Systeme zur Anzahl der darstellbaren in endlichem Verhältniss, und die für die *Cayley*'sche Darstellungsweise gebotene Beschränkung macht sich somit bei der Ausdehnung auf *relativ* orthogonale Systeme noch stärker geltend. Dass aber diese Beschränkung nicht in der Natur der orthogonalen Systeme selbst begründet ist, erkennt man z. B. daraus, dass jene der *Cayley*'schen Darstellungsweise hinderliche Eigenschaft der orthogonalen Systeme bei deren Composition nicht nothwendig erhalten bleibt.

Um dies näher darzulegen, gehe ich auf die im art. VIII enthaltenen Entwickelungen zurück. Es sind dort die sämmtlichen orthogonalen Systeme mit reellen Elementen und der Determinante $+1$ mit $(\zeta_{ik}^{(+)})$ und mit:

$$\tau_{ik} \qquad\qquad (1 \leqq i < k \leqq n)$$

$\frac{1}{2}\, n\,(n-1)$ reelle unabhängige Variable bezeichnet worden, während die den übrigen Indexsystemen i, k entsprechenden Werthe τ_{ik} durch die Gleichungen:

$$\tau_{ik} + \tau_{ki} = 0 \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt worden sind. Alsdann ist gezeigt worden, dass für jedes specielle orthogonale System $(\zeta_{ik}^{(+)})$, für welches die Determinante:

$$\left|\, \zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik} \right| \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

von Null verschieden ist, Werthsysteme der Variabeln τ_{ik} existiren, für welche die Systeme:

$$\left(\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}\right), \quad \left(\tfrac{1}{2}\, \tau_{ik} + \tfrac{1}{2}\, \delta_{ik}\right)$$

zu einander reciprok sind. Bezeichnet man also zur Abkürzung das einem

Elemente u_{ik} in dem reciproken Systeme entsprechende Element mit rec. u_{ik} und setzt demgemäss:

$$\frac{\partial \log |u_{gh}|}{\partial u_{ki}} = \text{rec.}\, u_{ik} \qquad\qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so ist:

$$\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik} = \text{rec.}\, \tfrac{1}{2}\,(\tau_{ik} + \delta_{ik}) \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

oder also:

(79) $$\zeta_{ik}^{(+)} = -\,\delta_{ik} + 2\, \text{rec.}\, (\tau_{ik} + \delta_{ik}) \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Alle diejenigen orthogonalen Systeme $(\zeta_{ik}^{(+)})$, für welche die Determinante $|\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}|$ nicht gleich Null ist, können daher in folgender Form dargestellt werden:

(80) $$(-\,\delta_{ik} + 2\, \text{rec.}\, (\tau_{ik} + \delta_{ik})) \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

während die orthogonalen Systeme $(\zeta_{ik}^{(+)})$, für welche $|\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}| = 0$ ist, in dieser Form nicht mit enthalten sind.

Bedeutet nun $(\sigma_{ik}^{(+)})$ irgend ein specielles der orthogonalen Systeme $(\zeta_{ik}^{(+)})$, so wird offenbar die Gesammtheit derselben auch durch:

$$(\zeta_{ik}^{(+)})\; (\sigma_{ik}^{(+)}) \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

dargestellt, d. h. die Systeme, welche aus der Composition aller orthogonalen Systeme mit irgend einem bestimmten hervorgehen, bilden ebenfalls die Gesammtheit der orthogonalen Systeme. Componirt man aber nur alle in der Form (80) enthaltenen orthogonalen Systeme mit $(\sigma_{ik}^{(+)})$, so können unter den resultirenden orthogonalen Systemen solche vorkommen, welche selbst *nicht* in der Form (80) darstellbar sind. Bei der Darstellungsweise orthogonaler Systeme:

$$(-\,\delta_{ik} + 2\, \text{rec.}\, (\tau_{ik} + \delta_{ik}))\; (\sigma_{ik}^{(+)}) \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

welche, ebenso wie die *Cayley*'sche:

$$(-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\tau_{ik} + \delta_{ik})) \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)},$$

genau $\frac{1}{2}n(n-1)$ Parameter enthält, sind daher, je nach der Wahl des speciellen Systems $(\sigma_{ik}^{(\nu)})$, die darzustellenden Systeme anderen und anderen Beschränkungen unterworfen, und die einzelnen dieser Beschränkungen erweisen sich hiernach als unwesentlich.

Die vorstehende Betrachtung führt aber nicht bloss zur Erkenntniss, dass die bei der *Cayley*'schen Darstellungsweise auftretende Beschränkung eine unwesentliche ist, sondern sie zeigt auch, wie eben diese Beschränkung aufgehoben werden kann.

Aus der Composition des Systems $(-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(-\tau_{ik} + \delta_{ik}))$ mit irgend einem speciellen orthogonalen Systeme (c_{ik}), dessen Determinante gleich $+1$ ist, resultirt nämlich ein orthogonales, von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Variabeln τ_{ik} abhängendes System (F_{ik}) mit der Determinante $+1$, und da es, wie im art. VIII nachgewiesen worden ist, keine $\frac{1}{2}n(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit von Grössen F_{ik} giebt, für welche die Gleichungen:

$$\sum_i F_{gi}F_{hi} = \delta_{gh}, \quad |F_{ik}| = 1, \quad |F_{ik} + \delta_{ik}| = 0 \qquad {\scriptstyle (g,\,h,\,i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$

erfüllt wären, so ist die Determinante:

$$|F_{ik} + \delta_{ik}| \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)},$$

so lange die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Grössen τ_{ik}, bei denen $i<k$ ist, variabel bleiben, von Null verschieden. Es ist daher auf das componirte System (F_{ik}) die *Cayley*'sche Darstellungsweise anwendbar, d. h. es wird:

(81) $$F_{ik} = -\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(f_{ik} + \delta_{ik}) \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)},$$

wo f_{ik} rationale, den Gleichungen:

$$f_{ik} + f_{ki} = 0 \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$

genügende Functionen der n^2 Grössen F_{ik} bedeuten. Diese letzteren sind wiederum, gemäss der symbolischen Compositionsgleichung:

(82) $$(-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(-\tau_{ik} + \delta_{ik}))\,(c_{ik}) = (F_{ik}) \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)},$$

rationale Functionen der Grössen c_{ik} und der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Variabeln τ_{ik}, bei denen $i<k$ ist; es sind daher auch die n^2 Grössen f_{ik} rationale Functionen derselben Grössen c_{ik} und τ_{ik}.

Fügt man auf beiden Seiten der Compositionsgleichung (82) *vorn* das System hinzu:

$$(-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\tau_{ik} + \delta_{ik})) \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)},$$

welches das reciproke des Systems:

$$(-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\tau_{ki} + \delta_{ik})) \quad \text{oder} \quad (-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(-\tau_{ik} + \delta_{ik})) \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2\,\ldots\,n)}$$

ist, so kommt:

$$(c_{ik}) = (-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\tau_{ik} + \delta_{ik}))\,(F_{ik}) \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)},$$

oder also mit Benutzung der Gleichung (81):

(83) $$(c_{ik}) = (-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\tau_{ik} + \delta_{ik}))\,(-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(f_{ik} + \delta_{ik})) \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)}.$$

Diese symbolische Compositionsgleichung zeigt,

dass sich *ausnahmslos jedes* specielle orthogonale System c_{ik}, mit der

Determinante $+1$, als Resultat der Composition eines aus $\frac{1}{2}n(n-1)$ *unbestimmten Variabeln:*

$$\tau_{ik} \qquad (1 \leq i < k \leq n),$$

gebildeten Systems:

$$(-\delta_{ik} + 2\,\text{rec.}\,(\tau_{ik} + \delta_{ik})) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

mit einem Systeme:

$$(-\delta_{ik} + 2\,\text{rec.}\,(f_{ik} + \delta_{ik})) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

darstellen lässt, in welchem die Grössen f_{ik} rationale Functionen der unbestimmten Variabeln τ_{ik} und der Elemente des darzustellenden Systems c_{ik} sind.

Dabei genügen die Grössen τ_{ik} und f_{ik} den Gleichungen:

$$\tau_{ik} + \tau_{ki} = 0, \quad f_{ik} + f_{ki} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und gemäss der Compositionsgleichung (83) lassen sich auch die Elemente c_{ik} als rationale Functionen der Grössen τ_{ik} und f_{ik} ausdrücken. Es gehören also einerseits die Grössen f_{ik} zu dem aus den Elementen:

$$c_{ik}, \; \tau_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

gebildeten Rationalitätsbereich, andererseits die Grössen c_{ik} zu demjenigen, welcher aus den Elementen:

$$f_{ik}, \; \tau_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

zu bilden ist.

In der ausnahmslosen Darstellung orthogonaler Systeme, welche durch die Hinzunahme von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Variabeln τ_{ik} ermöglicht worden ist, bewährt sich wiederum jenes „methodische Hülfsmittel der Einführung von Unbestimmten in die Algebra und Arithmetik", dessen Nützlichkeit und Bedeutung ich in meiner Festschrift zu Hrn. *Kummer*'s Doctorjubiläum näher dargelegt habe.*) Man kann aber in der Gleichung (83), welche die Darstellung aller orthogonalen Systeme liefert, für die Unbestimmten τ_{ik} auch irgend welche *bestimmte* Grössen substituiren, wenn diese nur so beschaffen sind, dass die in der Gleichung vorkommenden Nenner nicht gleich Null werden. Hierfür ist es, wie die Gleichungen (81) und (82) zeigen, nothwendig und hinreichend, an Stelle der Unbestimmten τ_{ik} solche Grössen zu setzen, dass beide Determinanten:

$$|\tau_{ik} + \delta_{ik}|, \quad |F_{ik} + \delta_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

von Null verschiedene Werthe erhalten, und dies ist für ein gegebenes bestimmtes System (c_{ik}) stets möglich, da für die aus der Gleichung (82) bei *unbestimmten* τ_{ik} resultirenden Elemente F_{ik} die Determinante $|F_{ik} + \delta_{ik}|$ nicht identisch gleich Null wird. Demnach können, wenn irgend ein orthogonales System mit der Determinante $+1$ gegeben ist, dessen Elemente $\mathfrak{c}_{ik}$ einem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehören, stets Grössen:

$$\mathfrak{a}_{ik}, \; \mathfrak{b}_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

desselben Bereichs gewählt werden, welche den Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_{ik} + \mathfrak{a}_{ki} = 0, \quad \mathfrak{b}_{ik} + \mathfrak{b}_{ki} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n) \tag{84}$$

genügen, und für welche:

$$\mathfrak{c}_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} (-\delta_{ih} + 2\,\text{rec.}\,(\mathfrak{a}_{ih} + \delta_{ih}))\,(-\delta_{hk} + 2\,\text{rec.}\,(\mathfrak{b}_{hk} + \delta_{hk})) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n) \tag{85}$$

wird, so dass die Compositionsgleichung besteht:

---

*) Vgl. den Schluss des § 22 der citirten Festschrift.[1])

[1]) Band II S. 353 flgde. dieser Ausgabe. H.

$$(\mathfrak{c}_{ik}) = (-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\mathfrak{a}_{ik} + \delta_{ik}))\;(-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\mathfrak{b}_{ik} + \delta_{ik})) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)\,. \tag{86}$$

Da nun andererseits offenbar jedes aus den beiden Systemen rechts componirte System ein orthogonales System des Bereichs $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ mit der Determinante $+1$ ist, sobald für $\mathfrak{a}_{ik}$, $\mathfrak{b}_{ik}$ irgend welche den Gleichungen (84) genügende Grössen desselben Bereichs genommen werden, so ergiebt sich das Resultat:

> *Alle* orthogonalen, einem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehörigen Systeme $(\mathfrak{c}_{ik})$ mit der Determinante $+1$, und *nur* diese, werden durch die Composition von je zwei Systemen:
>
> $$(-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\mathfrak{a}_{ik} + \delta_{ik}))\,, \quad (-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\mathfrak{b}_{ik} + \delta_{ik}))$$
> $$(i, k = 1, 2, \ldots n)$$
>
> erhalten, in denen $\mathfrak{a}_{ik}$, $\mathfrak{b}_{ik}$ irgend welche den Gleichungen (84) genügende Grössen des Bereichs $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ sind.

Die hier erlangte, ausnahmslos zulässige Darstellungsweise orthogonaler Systeme, bei welcher allerdings ein und dasselbe System aus verschiedenen Werthsystemen von $\mathfrak{a}_{ik}$, $\mathfrak{b}_{ik}$ hervorgeht und also mehrfach vorkommt, ist auch auf solche Systeme anwendbar, welche nur in Beziehung auf ein gewisses Modulsystem orthogonal sind. Sie bildet eine wesentliche Erweiterung der *Cayley*'schen Darstellungsweise, und diese resultirt selbst daraus, wenn man die sämmtlichen Grössen $\mathfrak{b}_{ik}$ gleich Null annimmt. Aber bei einer solchen Specialisation der obigen allgemeineren Darstellungsweise bleibt die volle Allgemeinheit der Darstellbarkeit nicht erhalten. So können, wie schon am Schlusse des art. V gezeigt worden ist, die orthogonalen Systeme:

$$(-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\mathfrak{a}_{ik} + \delta_{ik})) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

für endliche Werthe $\mathfrak{a}_{ik}$ niemals *symmetrisch* sein, ausser wenn alle Grössen $\mathfrak{a}_{ik}$ gleich Null sind; aber unter den aus der Composition *zweier* Systeme:

$$(-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\mathfrak{a}_{ik} + \delta_{ik}))\,, \quad (-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\mathfrak{b}_{ik} + \delta_{ik})) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

hervorgehenden Systemen sind z. B. diejenigen symmetrisch, bei welchen:

$$\mathfrak{b}_{ik} = -\delta_{ik} + \mathrm{rec.}\left(\tfrac{1}{2}(1 - \varepsilon_i)\,\delta_{ik} + \varepsilon_i\,\mathrm{rec.}\,(\mathfrak{a}_{ik} + \delta_{ik})\right) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ist, vorausgesetzt, dass die Werthe ε_i in gerader Anzahl gleich -1 und die übrigen gleich $+1$ sind. Denn setzt man:

$$-\delta_{hk} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\mathfrak{b}_{hk} + \delta_{hk}) = c_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n)\,,$$

so wird:

$$-\delta_{ih} + 2\,\mathrm{rec.}\,(\mathfrak{a}_{ih} + \delta_{ih}) = \varepsilon_h c_{hi} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n)\,,$$

und aus der Gleichung (85) ergiebt sich alsdann die Relation:

$$\mathfrak{c}_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} \varepsilon_h c_{hi} c_{hk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)\,,$$

durch welche gemäss der Gleichung (6) im art. I das System $(\mathfrak{c}_{ik})$ als ein orthogonales symmetrisches charakterisirt wird.

XIII.

Eine von der *Cayley*'schen principiell verschiedene, für den Fall reeller Grössen ausnahmslos zulässige Darstellung orthogonaler Systeme durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Parameter erhält man nach jener Methode der Transformation eines Aggregats von Quadraten in ein anderes, welche ich in meiner Mittheilung vom Februar 1873[1]) auseinandergesetzt und auch oben im art. IV benutzt habe.*)

---

*) Vergl. *Leonhardi Euleri* commentationes arithmeticae collectae, Tom. I, p. 427 und *C. G. J. Jacobi*'s gesammelte Werke, Bd. III, S. 601.

[1]) Band I S. 303—348 dieser Ausgabe. H.

Bedeutet nämlich, wie im art. I:

$$(c_{ik}) \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

irgend ein orthogonales System und:

$$(\mathfrak{c}_{ik}) \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

ein „*elementares*", d. h. ein solches, dessen Elemente in folgender Weise bestimmt sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_{gg} &= \cos v_{gh}, & \mathfrak{c}_{gh} &= \sin v_{gh}, & \mathfrak{c}_{gk} &= 0 \\ -\mathfrak{c}_{hg} &= \sin v_{gh}, & \mathfrak{c}_{hh} &= \cos v_{gh}, & \mathfrak{c}_{hk} &= 0 \end{aligned} \qquad \binom{k=1, 2, \dots n;}{k \gtrless g,\ k \gtrless h},$$

$$\mathfrak{c}_{ik} = \delta_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \dots n;\ i \gtrless g;\ i \gtrless h),$$

so resultirt aus der Composition:

$$(\mathfrak{c}_{ik})\,(c_{ik})$$

ein orthogonales System, in welchem die beiden durch die vorderen Indices g und h charakterisirten Horizontalreihen die Elemente haben:

$$\begin{aligned} &c_{gk} \cos v_{gh} + c_{hk} \sin v_{gh} \\ -&c_{gk} \sin v_{gh} + c_{hk} \cos v_{gh} \end{aligned} \qquad (k=1, 2, \dots n),$$

während die übrigen Horizontalreihen mit denen des Systems (c_{ik}) übereinstimmen. Bezeichnet man nun das elementare orthogonale System $(\mathfrak{c}_{ik})$, um die Abhängigkeit seiner Elemente von der Winkelgrösse v_{gh} hervorzuheben, mit:

$$\mathfrak{E}(v_{gh}),$$

so wird jenes aus der Composition mit (c_{ik}) resultirende System durch den Ausdruck:

$$(\mathfrak{E}(v_{gh}))\,(c_{ik})$$

symbolisch dargestellt.

Es sei jetzt zuerst $g=1$, $h=n$, und v_{1n} werde so bestimmt, dass das Element:

$$-c_{11} \sin v_{1n} + c_{n1} \cos v_{1n},$$

welches in dem componirten System:

$$(\mathfrak{E}(v_{1n}))\,(c_{ik})$$

an der ersten Stelle der n^{ten} Horizontalreihe steht, gleich Null wird, und dass zugleich das erste Element der *ersten* Horizontalreihe einen positiven Werth bekommt. Dies ist stets möglich, auch wenn $c_{11}=0$ ist, da in diesem Falle nur v_{1n} gleich $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ genommen zu werden braucht.

Alsdann sei $g=1$, $h=n-1$ und $v_{1,n-1}$ werde so bestimmt, dass das erste Element der $(n-1)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe in dem System:

$$(\mathfrak{E}(v_{1,n-1}))\,(\mathfrak{E}(v_{1,n}))\,(c_{ik})$$

gleich Null und zugleich das erste Element der ersten Horizontalreihe positiv wird. Fährt man in dieser Weise fort, so erlangt man ein System:

$$(\mathfrak{E}(v_{12}))\,(\mathfrak{E}(v_{13}))\dots(\mathfrak{E}(v_{1,n-1}))\,(\mathfrak{E}(v_{1n}))\,(c_{ik}),$$

in welchem alle Elemente der ersten Verticalreihe, mit Ausnahme des ersten, gleich Null sind und das erste Element einen positiven Werth hat. Es ist also, wenn die Elemente des Systems mit $\bar{c}_{ik}$ bezeichnet werden:

$$\bar{c}_{21} = \bar{c}_{31} = \dots = \bar{c}_{n1} = 0,$$

und da das System ein orthogonales ist, also die Gleichungen bestehen:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \bar{c}_{h1}\bar{c}_{h1} = 1, \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \bar{c}_{h1}\bar{c}_{hk} = 0 \qquad (k=2, 3, \dots n),$$

so folgt, dass:

$$\bar{c}_{11} = +1, \quad \bar{c}_{1k} = 0 \qquad (k=2, 3, \dots n)$$

sein muss. Das System $(\bar{c}_{ik})$ ist daher nichts Anderes als ein orthogonales System von $(n-1)^2$ Elementen:

$$\bar{c}_{ik} \qquad (i, k=2, 3, \dots n),$$

welchem nur eine Horizontalreihe:

$$\bar{c}_{11} = +1, \quad \bar{c}_{12} = 0, \quad \bar{c}_{13} = 0, \cdots \bar{c}_{1n} = 0$$

und eine Verticalreihe:

$$\bar{c}_{11} = +1, \quad \bar{c}_{21} = 0, \quad \bar{c}_{31} = 0, \cdots \bar{c}_{n1} = 0$$

angefügt ist. Setzt man von diesem System $(\bar{c}_{ik})$, welches wesentlich nur ein orthogonales System von $(n-1)^2$ Elementen ist, schon voraus, dass es als Resultat der Composition von lauter elementaren Systemen in folgender Weise darstellbar ist:

$$(\mathfrak{E}(v_{23}))\,(\mathfrak{E}(v_{24}))\cdots(\mathfrak{E}(v_{n-1,n})),$$

so folgt nunmehr,

> dass jedes orthogonale System von n^2 Elementen sich als Resultat der Composition einer Reihe von $\frac{1}{2}n(n-1)$ *elementaren* orthogonalen Systemen:
>
> $$(\mathfrak{E}(v_{12}))\,(\mathfrak{E}(v_{13}))\cdots(\mathfrak{E}(v_{n-2,n}))\,(\mathfrak{E}(v_{n-1,n})) \tag{87}$$
>
> darstellen lässt, deren jedes von *einer* Grösse v abhängt.

Andererseits ist klar, dass aus der Composition *beliebiger* elementarer orthogonaler Systeme stets ein orthogonales System hervorgeht. Der mit (87) bezeichnete Ausdruck stellt demnach, in der angekündigten Weise, ausnahmslos jedes orthogonale System mit reellen Elementen durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Parameter v dar. Doch ist dabei zu bemerken, dass nicht jeder einzelne Coefficient der elementaren orthogonalen Systeme ($\cos v$, $\sin v$), sondern nur das Verhältniss ($\operatorname{tg} v$) *rational* in den Elementen des durch den Compositionsausdruck (87) darzustellenden Systems ausgedrückt wird.

Das mit $\mathfrak{E}(v_{gh})$ bezeichnete elementare orthogonale System lässt sich als Resultat der Composition anderer elementarer Systeme in folgender Weise darstellen:

$$(\mathfrak{E}(v_{1h}))\,(\mathfrak{E}(v_{12}))\,(\mathfrak{E}(v_{1g}))\,(\mathfrak{E}(v'_{12}))\,(\mathfrak{E}(v_{1g}))\,(\mathfrak{E}(v_{12}))\,(\mathfrak{E}(v_{1h}))\,(\mathfrak{E}(v'_{1g})),$$

wenn hierbei:

$$v_{12} = v_{1g} = v_{1h} = \frac{1}{2}\pi, \quad v'_{1g} = \pi, \quad v'_{12} = v_{gh}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt,

> dass sich jedes orthogonale System als Resultat der Composition einer Reihe von elementaren darstellen lässt, welche nur aus den $n-1$ Systemen:
>
> $$\mathfrak{E}(v_{12}), \quad \mathfrak{E}(v_{13}), \dots \mathfrak{E}(v_{1n})$$
>
> entnommen zu werden brauchen,

und diese Art der Darstellung ist besonders dazu geeignet, die partiellen Differentialgleichungen herzuleiten, durch welche die bei orthogonalen Transformationen ungeändert bleibenden Functionen der Coefficienten von Formensystemen charakterisirt werden.

XIV.

Bezeichnet man, wie in den §§ 13 und 14 meines am 6. Juni 1889 vorgelegten Aufsatzes*) mit:

$$(\mathrm{S})\qquad F^{(1)}(x_1, x_2, \ldots x_n),\quad F^{(2)}(x_1, x_2, \ldots x_n),\quad F^{(3)}(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots$$

homogene Formen der Dimensionen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$, ist also wie dort:

$$(88)\qquad F^{(q)}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{p_1, p_2, \ldots p_n} C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n},$$

$$(89)\qquad C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n} = \frac{1}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!} \frac{\partial^{(\nu_q)} F^{(q)}(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}$$

$$(p_1, p_2, \ldots p_n = 0, 1, 2, \ldots;\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \nu_q;\ q = 1, 2, 3, \ldots),$$

und werden nunmehr zwei Formensysteme (S), (S′) dann und nur dann als *„eigentlich aequivalent“* betrachtet, wenn die Formen des einen Systems in die des andern durch eine *„eigentliche orthogonale“* Transformation, d. h. durch eine solche mit der Determinante $+1$, übergeführt werden können, so wird eine Function der Coefficienten $C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}$:

$$(90)\qquad \mathrm{Inv.}\left(\ldots C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}, \ldots\right),$$

auf Grund des am Schlusse des vorhergehenden Abschnittes entwickelten Resultats, als eine „Invariante der eigentlichen Aequivalenz $(\mathrm{S}) \sim (\mathrm{S}')$“ vollständig durch die Bedingung charakterisirt, dass jede der $n-1$ Functionen:

$$(91)\qquad \mathrm{Inv.}\left(\ldots \frac{\partial^{(\nu_q)} F^{(q)}(x_1 \cos v + x_r \sin v, \ldots x_{r-1}, -x_1 \sin v + x_r \cos v, x_{r+1}, \ldots)}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!\, \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}, \ldots\right),$$

*) „Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten“.[1])

[1]) Band III S. 315—368 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken; s. S. 348—357. H.

welche den Werthen $r = 2, 3, \ldots n$ entsprechen, von v unabhängig sein muss. Differentiirt man also diese $n-1$ Functionen nach v und setzt das Resultat gleich Null, so erhält man $n-1$ für die Invarianteneigenschaft der Function Inv. $(\ldots C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}, \ldots)$ charakteristische Differentialrelationen.

Das Resultat der Differentiation ist ein Aggregat von Producten je zweier Factoren, von denen der eine die nach je einem der Argumente:

$$\frac{\partial^{(\nu_q)} F^{(q)}(x_1 \cos v + x_r \sin v, \ldots x_{r-1}, -x_1 \sin v + x_r \cos v, x_{r+1}, \ldots)}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!\, \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}$$

genommene partielle Ableitung der mit (91) bezeichneten Function ist, während der andere Factor durch die nach v genommene partielle Ableitung eben dieses Argumentes, d. h. also durch:

$$(92)\qquad \frac{\partial^{(\nu_q+1)} F^{(q)}(x_1 \cos v + x_r \sin v, \ldots x_{r-1}, -x_1 \sin v + x_r \cos v, x_{r+1}, \ldots)}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!\, \partial v\, \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}$$

gebildet wird. Diese letztere Ableitung kann mittels folgender Betrachtung umgeformt werden.

Aus der unmittelbar zu verificirenden Formel:

$$\frac{\partial F(x_1 \cos v + x_r \sin v,\ -x_1 \sin v + x_r \cos v)}{\partial v} = x_r \frac{\partial F}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial F}{\partial x_r}$$

erhält man durch successive Differentiation nach den Variabeln x_1 und x_r die allgemeinere Formel:

$$(93)\qquad \frac{\partial^{(h+k+1)} F}{\partial v\, \partial x_1^h \partial x_r^k} = k \frac{\partial^{(h+k)} F}{\partial x_1^{h+1} \partial x_r^{k-1}} - h \frac{\partial^{(h+k)} F}{\partial x_1^{h-1} \partial x_r^{k+1}} + x_r \frac{\partial^{(h+k+1)} F}{\partial x_1^{h+1} \partial x_r^k} - x_1 \frac{\partial^{(h+k+1)} F}{\partial x_1^h \partial x_r^{k+1}}.$$

Die Richtigkeit dieser Formel, in welcher der Einfachheit halber die Function:

$$F(x_1 \cos v + x_r \sin v,\ -x_1 \sin v + x_r \cos v)$$

nur durch F bezeichnet ist, kann auch durch Inductionsschluss nachgewiesen werden. Denn wenn man die Richtigkeit für die Systeme der Zahlen:

$$(h-1,\ k),\quad (h,\ k-1)$$

voraussetzt, so folgt das eine Mal durch Differentiation nach x_1, das andere Mal durch Differentiation nach x_2 die Richtigkeit der Formel (93) für das System der Zahlen $(h,\ k)$.

Ersetzt man in der Formel (93) h durch p_1, ferner k durch p_r und F durch:

$$\frac{\partial^{(\nu_q - p_1 - p_r)} F(x_1 \cos v + x_r \sin v,\ \ldots\ x_{r-1},\ -x_1 \sin v + x_r \cos v,\ x_{r+1},\ \ldots)}{p_1!\ p_2!\ \ldots\ p_n!\ \partial x_2^{p_2}\ \ldots\ \partial x_{r-1}^{p_{r-1}}\, \partial x_{r+1}^{p_{r+1}}\ \ldots},$$

so werden die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite gleich Null, weil sie die $(\nu_q + 1)^{\text{te}}$, nach Variabeln $x_1,\ x_2,\ \ldots$ genommene Ableitung der Function:

$$F(x_1 \cos v + x_r \sin v,\ \ldots\ x_{r-1},\ -x_1 \sin v + x_r \cos v,\ x_{r+1},\ \ldots)$$

enthalten, welche eine homogene Function der Variabeln x von der Dimension ν_q ist, und der Ausdruck (92) wird hiernach in folgenden umgeformt:

$$(94)\qquad \begin{aligned} & p_r \frac{\partial^{(\nu_q)} F(x_1 \cos v + x_r \sin v,\ \ldots\ x_{r-1},\ -x_1 \sin v + x_r \cos v,\ x_{r+1},\ \ldots)}{p_1!\ p_2!\ \ldots\ p_n!\ \partial x_1^{p_1+1}\, \partial x_2^{p_2}\ \ldots\ \partial x_{r-1}^{p_{r-1}}\, \partial x_r^{p_r - 1}\, \partial x_{r+1}^{p_{r+1}}\ \ldots} \\ & - p_1 \frac{\partial^{(\nu_q)} F(x_1 \cos v + x_r \sin v,\ \ldots\ x_{r-1},\ -x_1 \sin v + x_r \cos v,\ x_{r+1},\ \ldots)}{p_1!\ p_2!\ \ldots\ p_n!\ \partial x_1^{p_1-1}\, \partial x_2^{p_2}\ \ldots\ \partial x_{r-1}^{p_{r-1}}\, \partial x_r^{p_r + 1}\, \partial x_{r+1}^{p_{r+1}}\ \ldots}. \end{aligned}$$

Setzt man nun analog der Gleichung (89):

$$\overline{C}^{(q)}_{p_1,\, p_2,\, \ldots\, p_n} = \frac{\partial^{(\nu_q)} F^{(q)}(x_1 \cos v + x_r \sin v,\ \ldots\ x_{r-1},\ -x_1 \sin v + x_r \cos v,\ x_{r+1},\ \ldots)}{p_1!\ p_2!\ \ldots\ p_n!\ \partial x_1^{p_1}\, \partial x_2^{p_2}\ \ldots\ \partial x_n^{p_n}},$$

so geht der Ausdruck (94) über in:

$$(p_1+1)\, \overline{C}^{(q)}_{p_1+1,\, \ldots\, p_r-1,\, \ldots\, p_n} - (p_r+1)\, \overline{C}^{(q)}_{p_1-1,\, \ldots\, p_r+1,\, \ldots\, p_n},$$

und der nach v genommene Differentialquotient des Ausdrucks (91), d. h. also:

$$\frac{\partial\, \mathrm{Inv.}\left(\ldots\ \overline{C}^{(q)}_{p_1,\, p_2,\, \ldots\, p_n},\ \ldots\right)}{\partial v},$$

wird durch die Summe:

$$(95)\quad \sum_{p_1,\, p_2,\, \ldots\, p_n,\, q} \left((p_1+1)\, \overline{C}^{(q)}_{p_1+1,\, \ldots\, p_r-1,\, \ldots\, p_n} - (p_r+1)\, \overline{C}^{(q)}_{p_1-1,\, \ldots\, p_r+1,\, \ldots\, p_n}\right) \frac{\partial\, \mathrm{Inv.}\left(\ldots\ \overline{C}^{(q)}_{p_1,\, p_2,\, \ldots\, p_n},\ \ldots\right)}{\partial\, \overline{C}^{(q)}_{p_1,\, p_2,\, \ldots\, p_n}}$$

$$(p_1,\, p_2,\, \ldots\, p_n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots;\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \nu_q;\ q = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$$

dargestellt, wenn man darin $\overline{C}^{(q)}$, falls einer der unteren Indices negativ ist, gleich Null nimmt.

Die Gleichungen, welche entstehen, indem der Ausdruck (95) für $r = 2,\ 3,\ \ldots\ n$ gleich Null gesetzt wird, sind vollkommen gleichbedeutend mit denjenigen, welche man erhält, wenn man die Coefficienten $\overline{C}$ durch die Coefficienten C ersetzt, und es resultiren alsdann die $n-1$ partiellen Differentialgleichungen:

$$(96)\qquad \begin{aligned} & \sum (p_1+1)\, C^{(q)}_{p_1+1,\, \ldots\, p_r-1,\, \ldots\, p_n} \frac{\partial\, \mathrm{Inv.}\left(\ldots\ C^{(q)}_{p_1,\, p_2,\, \ldots\, p_n},\ \ldots\right)}{\partial\, C^{(q)}_{p_1,\, p_2,\, \ldots\, p_n}} \\ & = \sum (p_r+1)\, C^{(q)}_{p_1-1,\, \ldots\, p_r+1,\, \ldots\, p_n} \frac{\partial\, \mathrm{Inv.}\left(\ldots\ C^{(q)}_{p_1,\, p_2,\, \ldots\, p_n},\ \ldots\right)}{\partial\, C^{(q)}_{p_1,\, p_2,\, \ldots\, p_n}}, \end{aligned}$$

welche den $n-1$ verschiedenen Werthen:

$$r = 2,\ 3,\ \ldots\ n$$

entsprechen, und in welchen links in Beziehung auf p_r, rechts in Beziehung auf p_1 nur von 1 an, in Beziehung auf alle übrigen Summationsbuchstaben p

aber auf beiden Seiten von 0 an so zu summiren ist, dass stets die Bedingung:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \nu_q$$

erfüllt bleibt, während die Summation in Beziehung auf q von 1 an bis zu derjenigen Zahl zu erstrecken ist, welche die Anzahl der Formen des zu Grunde gelegten Formensystems (S) bezeichnet.

XV.

Die $n-1$ partiellen Differentialgleichungen (96), durch welche die „Invarianten *eigentlich orthogonaler* Transformationen des Formensystems“:

$$\text{(S)} \qquad \sum_{p_1, p_2, \dots p_n} C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \qquad \begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots p_n = 0, 1, 2, \dots; \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = \nu_q; \\ q = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$$

vollständig und in elegantester Weise charakterisirt werden, stehen in einer bemerkenswerthen Beziehung zu jenen $2n-2$ partiellen Differentialgleichungen, welche ich im § 14 meines schon oben citirten vorjährigen Aufsatzes*) für die Invarianten *allgemeiner* linearer Transformationen mit der Determinante *Eins* entwickelt und dort mit (V) bezeichnet habe. Setzt man nämlich zur Abkürzung den Differentialausdruck:

$$\text{(97)} \qquad \sum (p_1 + 1)\, C^{(q)}_{p_1+1, p_2-1, p_3, \dots p_n} \frac{\partial \operatorname{Inv.} \left(\dots C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}, \dots\right)}{\partial C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}}$$

$$(p_2 = 1, 2, \dots;\ p_1, p_3, \dots p_n = 0, 1, 2, \dots;\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = \nu_q;\ q = 1, 2, 3, \dots)$$

gleich:

$$D_{1,2} \operatorname{Inv.} \left(\dots C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}, \dots\right),$$

*) „Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten“.[1])

[1]) Band III S. 357 dieser Ausgabe. H.

so werden die $n-1$ partiellen Differentialgleichungen für die Invarianten *eigentlich orthogonaler* Transformationen durch:

$$D_{1,r} \operatorname{Inv.} \left(\dots C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}, \dots\right) = D_{r,1} \operatorname{Inv.} \left(\dots C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}, \dots\right)$$

$$(r = 2, 3, \dots n),$$

aber die $2n-2$ partiellen Differentialgleichungen für die Invarianten *allgemeiner* linearer Transformationen mit der Determinante *Eins* durch:

$$D_{1,r} \operatorname{Inv.} \left(\dots C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}, \dots\right) = D_{r,1} \operatorname{Inv.} \left(\dots C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}, \dots\right) = 0$$

$$(r = 2, 3, \dots n)$$

dargestellt. Das in den obigen Differentialgleichungen (96) und in den Differentialgleichungen (V) meines vorjährigen Aufsatzes enthaltene Resultat kann also dahin formulirt werden:

Während die Invarianten *eigentlich orthogonaler* Transformationen eines Formensystems:

$$\text{(98)} \qquad \sum_{p_1, p_2, \dots p_n} C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \qquad \begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots p_n = 0, 1, 2, \dots; \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = \nu_q;\ q = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$$

dadurch vollständig charakterisirt werden, dass jeder der $n-1$, den Indices $r = 2, 3, \dots n$ entsprechenden Differentialausdrücke:

$$\sum (p_1 + 1)\, C^{(q)}_{p_1+1, \dots p_r-1, \dots p_n} \frac{\partial \operatorname{Inv.} \left(\dots C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}, \dots\right)}{\partial C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots p_n}}$$

$$(p_2 = 1, 2, \dots;\ p_1, p_3, \dots p_n = 0, 1, 2, \dots;\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = \nu_q;\ q = 1, 2, \dots)$$

bei Vertauschung der Indices p_1 und p_r seinen Werth beibehält, tritt für die Invarianten *allgemeiner* linearer Transformationen mit der Determinante *Eins* noch die Bedingung hinzu, dass jeder dieser Werthe gleich *Null* sein muss.

Der besondere Fall, in welchem sich das Formensystem (S) auf eine einzige quadratische Form reducirt, verdient sowohl an sich als auch deshalb hervorgehoben zu werden, weil derselbe auf andere Weise bereits von Herrn *Lipschitz* in seinem oben in der Einleitung citirten Aufsatze behandelt worden ist.*)

Bezeichnet man mit:

$$u_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n;\ i \leqq k)$$

$\frac{1}{2} n(n+1)$ unbestimmte Variable und setzt:

$$u_{ki} = u_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n;\ i \leqq k),$$

so bilden die n^2 Grössen:

$$u_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ein symmetrisches System, und es ist:

$$\sum_{i, k} u_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

eine quadratische Form mit variabeln Coefficienten. Setzt man also:

$$\sum_{i, k} u_{ik} x_i x_k = \sum C_{p_1, p_2, \ldots p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \qquad \left(\begin{smallmatrix} p_1, p_2, \ldots p_n = 0, 1, 2; \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 2 \end{smallmatrix}\right),$$

so wird:

$$C_{2000\ldots} = u_{11}, \quad C_{0200\ldots} = u_{22}, \quad C_{0020\ldots} = u_{33}, \ldots,$$

$$C_{1100\ldots} = 2u_{12}, \quad C_{1010\ldots} = 2u_{13}, \quad C_{0110\ldots} = 2u_{23}, \ldots,$$

*) Ich bemerke hierbei, dass ich überhaupt erst durch die citirten Entwickelungen des Hrn. *Lipschitz* auf das allgemeinere Problem der Ermittelung von partiellen Differentialgleichungen für die Invarianten orthogonaler Transformationen geführt worden bin.

und der oben mit (97) bezeichnete Differentialausdruck geht in folgenden über:

$$u_{11} \frac{\partial\, \text{Inv.}}{\partial u_{12}} + 2u_{12} \frac{\partial\, \text{Inv.}}{\partial u_{22}} + \sum_{h=3}^{h=n} u_{1h} \frac{\partial\, \text{Inv.}}{\partial u_{h2}},$$

in welchem, der Einfachheit halber, die Argumente der Function Inv. $(\ldots u_{ik}, \ldots)$ weggelassen worden sind. Gemäss dem oben mit (98) bezeichneten Resultat

> werden also die Invarianten orthogonaler Transformationen der quadratischen Form:
>
> $$\sum_{i, k} u_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$
>
> dadurch vollständig charakterisirt, dass jeder der $n-1$, den Indices $r = 2, 3, \ldots n$ entsprechenden Differentialausdrücke:
>
> $$(99) \qquad u_{1r} \frac{\partial\, \text{Inv.}}{\partial u_{rr}} + \sum_{h=1}^{h=n} u_{1h} \frac{\partial\, \text{Inv.}}{\partial u_{hr}}$$
>
> bei Vertauschung der Indices 1 und r seinen Werth beibehält,

und die $n-1$ partiellen Differentialgleichungen für diese Invarianten entstehen daher aus der folgenden:

$$(100) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \left(u_{1h} \frac{\partial\, \text{Inv.}}{\partial u_{rh}} - u_{rh} \frac{\partial\, \text{Inv.}}{\partial u_{1h}} \right) = u_{1r} \left(\frac{\partial\, \text{Inv.}}{\partial u_{11}} - \frac{\partial\, \text{Inv.}}{\partial u_{rr}} \right),$$

wenn man darin dem Index r nach einander die Werthe $2, 3, \ldots n$ beilegt

Bei der obigen Uebertragung des mit (98) bezeichneten Resultats auf den speciellen Fall, wo sich das Formensystem (S) auf eine quadratische Form reducirt, musste von der Einschränkung auf *eigentlich* orthogonale Transformationen abgesehen werden, weil in diesem Falle die Unterscheidung zwischen den beiden Arten von orthogonalen Transformationen, d. h. zwischen denjenigen mit der Determinante $+1$ und denjenigen mit der Determinante

-1, hinfällig wird. Jede quadratische Form ist nämlich sich selbst uneigentlich aequivalent, d. h. sie kann mittels einer orthogonalen Substitution mit der Determinante -1 in sich selbst transformirt werden, und es kann desshalb keine Invarianten geben, welche ausschliesslich Invarianten für *eigentlich* orthogonale Transformationen wären.

Um sich davon zu überzeugen, dass jede beliebige quadratische Form mit reellen Coefficienten:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

durch uneigentlich orthogonale Substitutionen in sich selbst transformirt werden kann, braucht man nur jene stets zulässige, schon im art. I angewendete Darstellung der Coefficienten a_{ik} in der Form (1):

$$a_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} p_h c_{hi} c_{hk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

zu benutzen, in welcher die Grössen c_{hi} die Elemente eines orthogonalen Systems bedeuten. Setzt man nämlich:

$$x_i = \sum_{l,r} \varepsilon_l c_{li} c_{lr} x'_r \qquad (i, l, r = 1, 2, \ldots n),$$

so wird:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k,l,m,r,s} \varepsilon_l \varepsilon_m c_{li} c_{mk} c_{lr} c_{ms} a_{ik} x'_r x'_s \qquad (i, k, l, m, r, s = 1, 2, \ldots n),$$

und hieraus folgt bei Benutzung des obigen Ausdrucks für a_{ik} die Gleichung:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = \sum_{h,i,k} \varepsilon_h^2 p_h c_{hi} c_{hk} x'_i x'_k \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

also, für $\varepsilon_h = \pm 1$:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_{\cdot} = \sum_{i,k} a_{ik} x'_i x'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Die quadratische Form $\sum a_{ik} x_i x_k$ wird demnach mittels der Substitution:

$$x_i = \sum_{l,r} \varepsilon_l c_{li} c_{lr} x'_r \qquad (i, l, r = 1, 2, \ldots n)$$

in sich selbst transformirt, und diese Substitution ist eine *uneigentlich* orthogonale, d. h. eine solche mit der Determinante -1, wenn $\varepsilon_1 = -1$ und für jeden von 1 verschiedenen Index $\varepsilon_h = +1$ genommen wird.

Die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten orthogonaler Transformationen der quadratischen Form $\sum u_{ik} x_i x_k$ ist genau gleich n; sie ergiebt sich nämlich zuvörderst als die Differenz zwischen der Zahl $\frac{1}{2} n (n+1)$, welche die Mannigfaltigkeit der quadratischen Formen und der Zahl $\frac{1}{2} n (n-1)$, welche die Mannigfaltigkeit der orthogonalen Transformationen angiebt, und sie reducirt sich nicht weiter, weil keine auch nur *ein*fache Mannigfaltigkeit, sondern nur eine endliche Anzahl orthogonaler Transformationen der quadratischen Form $\sum u_{ik} x_i x_k$ in sich selbst existirt. Die Invarianten orthogonaler Transformationen der Form $\sum u_{ik} x_i x_k$ bilden hiernach selbst eine $n$fache Mannigfaltigkeit.

Da die quadratische Form:

$$\sum_{i,k} (z \delta_{ik} + u_{ik}) x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

in welcher z eine unbestimmte Variable bedeutet, mittels der orthogonalen Substitution:

$$x_i = \sum_{h=1}^{h=n} c_{ih} y_h \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

in die Form:

$$\sum_{i,k} (z \delta_{ik} + v_{ik}) y_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

übergeht, so sind die beiden Determinanten:

$$|z\delta_{ik} + u_{ik}|, \qquad |z\delta_{ik} + v_{ik}| \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

einander gleich. Nun ist die quadratische Form $\sum v_{ik} y_i y_k$ die orthogonal transformirte der Form $\sum u_{ik} x_i x_k$; die Determinante:

$$|z\delta_{ik} + u_{ik}| \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

ist also für jeden beliebigen Werth von z eine Invariante orthogonaler Transformationen der Form $\sum u_{ik} x_i x_k$, und es kann daher die n fache Mannigfaltigkeit dieser Invarianten durch die n fache Mannigfaltigkeit von Determinanten:

$$|z_1\delta_{ik} + u_{ik}|, \quad |z_2\delta_{ik} + u_{ik}|, \dots |z_n\delta_{ik} + u_{ik}| \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

repraesentirt, d. h. es kann jede Invariante als eine Function von n, verschiedenen Werthen von z entsprechenden Determinanten:

$$|z\delta_{ik} + u_{ik}| \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

dargestellt werden. Zu einem directen Nachweis des Bestehens jener partiellen Differentialgleichungen (100) genügt es hiernach zu zeigen, dass sie erfüllt werden, wenn man darin für Inv. $(\dots u_{ik}, \dots)$ die Determinante $|z\delta_{ik} + u_{ik}|$ setzt, oder dass in diesem Falle der mit (99) bezeichnete Differentialausdruck, nämlich:

$$u_{1r} \frac{\partial |z\delta_{ik} + u_{ik}|}{\partial u_{rr}} + \sum_{h=1}^{h=n} u_{1h} \frac{\partial |z\delta_{ik} + u_{ik}|}{\partial u_{hr}} \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

bei Vertauschung der Indices 1 und r seinen Werth nicht ändert.

Der angegebene Differentialausdruck kann zuvörderst in folgender Weise dargestellt werden:

$$-z \frac{\partial |z\delta_{ik} + u_{ik}|}{\partial u_{1r}} + \sum_{h=1}^{h=n} (z\delta_{1h} + u_{1h})(1 + \delta_{hr}) \frac{\partial |z\delta_{ik} + u_{ik}|}{\partial u_{hr}} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n).$$

Da nun das System der Grössen $z\delta_{ik} + u_{ik}$ ein symmetrisches ist, so ist der Factor von $z\delta_{1h} + u_{1h}$ in der vorstehenden Summe genau die doppelte Adjungirte der Grösse $z\delta_{hr} + u_{hr}$, d. h. es besteht die Relation:

$$(1 + \delta_{hr}) \frac{\partial |z\delta_{ik} + u_{ik}|}{\partial u_{hr}} = 2 \operatorname{adj.} (z\delta_{hr} + u_{hr}).$$

Da ferner für jeden der Werthe $r = 2, 3, \dots n$:

$$\sum_{h=1}^{h=n} (z\delta_{1h} + u_{1h}) \operatorname{adj.} (z\delta_{hr} + u_{hr}) = 0$$

ist, so reducirt sich jener Differentialausdruck auf das Glied:

$$-z \frac{\partial |z\delta_{ik} + u_{ik}|}{\partial u_{1r}},$$

von welchem, vermöge der Symmetrie-Eigenschaft des Systems (u_{ik}) evident ist, dass es bei der Vertauschung der Indices 1 und r ungeändert bleibt.

In dem schliesslich noch zu erwähnenden besonderen Falle, wo das Formensystem (S) aus n *linearen* Formen:

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_{ik} x_k \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

besteht, nehmen die partiellen Differentialgleichungen (96) folgende einfache Gestalt an:

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_{kr} \frac{\partial \text{ Inv.}}{\partial u_{k1}} = \sum_{k=1}^{k=n} u_{k1} \frac{\partial \text{ Inv.}}{\partial u_{kr}} \qquad\qquad (r = 2, 3, \dots n).$$

Die Mannigfaltigkeit dieser Formensysteme ist eine n^2 fache, die der orthogonalen Transformationen, wie immer, eine $\frac{1}{2} n(n-1)$ fache, also die der

Invarianten eine $\left(n^2 - \frac{1}{2}n(n-1)\right)$ fache, und diese können sämmtlich als Functionen der $\frac{1}{2}n(n+1)$ speciellen Invarianten:

$$\sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} \qquad (i, k=1, 2, \dots n;\ i \leq k)$$

dargestellt werden, deren Invarianteneigenschaft unmittelbar erhellt, wenn man die Grössen u_{ih}, u_{kh} durch die orthogonal transformirten:

$$\sum_{r=1}^{r=n} u_{ir} c_{rh}, \qquad \sum_{s=1}^{s=n} u_{ks} c_{sh}$$

ersetzt. Dann geht nämlich jene Summe über in:

$$\sum_{r,s} u_{ir} u_{ks} \sum_{h=1}^{h=n} c_{rh} c_{sh} \qquad (r, s=1, 2, \dots n),$$

und da die innere auf h bezügliche Summe wegen der Orthogonalität des Systems (c_{ik}) gleich δ_{rs} wird, so kommt, wie oben:

$$\sum_{r=1}^{r=n} u_{ir} u_{kr}.$$

Die angegebenen $\frac{1}{2}n(n+1)$ speciellen Invarianten bleiben auch bei *uneigentlichen* orthogonalen Transformationen ungeändert, aber im vorliegenden Falle existiren noch Invarianten, welche *nur* bei *eigentlichen* orthogonalen Transformationen ungeändert bleiben. Zu diesen gehört offenbar die Determinante des Functionensystems, nämlich:

$$|u_{ik}| \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

da die Determinante des transformirten Systems linearer Functionen gleich dem Product:

$$|u_{ik}|\,|c_{ik}| \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

wird. Diese Invariante $|u_{ik}|$ lässt sich desshalb nicht als *eindeutige* Function jener $\frac{1}{2}n(n+1)$ Invarianten:

$$\sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} \qquad (i, k=1, 2, \dots n;\ i \leq k)$$

ausdrücken, sondern nur ihr *Quadrat* wird mittels der Relation:

$$|u_{ik}|^2 = \left|\sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh}\right| \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

als ganze rationale Function jener $\frac{1}{2}n(n+1)$ Invarianten dargestellt.

ÜBER DIE COMPOSITION DER SYSTEME VON n^2 GRÖSSEN MIT SICH SELBST.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1890. S. 1081—1088.

ÜBER DIE COMPOSITION DER SYSTEME VON n^2 GRÖSSEN MIT SICH SELBST.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 22. Mai 1890.]

I.

Bedeuten $z_{ik}^{(1)}$ für $i, k = 1, 2, \dots n$ unbestimmte Variable und $z_{ik}^{(r)}$ die n^2 Elemente desjenigen Systems, welches aus r-maliger Composition des Systems $(z_{ik}^{(1)})$ mit sich selbst hervorgeht, so sind die Grössen $z_{ik}^{(r)}$ durch die Gleichungen definirt:

$$\sum_{h=1}^{h=n} z_{ih}^{(1)} z_{hk}^{(g-1)} = z_{ik}^{(g)} \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \dots n \\ g = 1, 2, \dots r \end{pmatrix}, \tag{1}$$

und es bestehen auch die allgemeineren Relationen:

$$\sum_{h=1}^{h=n} z_{ih}^{(l)} z_{hk}^{(m)} = z_{ik}^{(l+m)} \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \dots n \\ l, m = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wenn für den oberen Index Null:

$$z_{ik}^{(0)} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

gesetzt wird.

Bedeuten nun ferner:

$$\text{rec.}\,(a_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

die n^2 Elemente des zu einem System (a_{ik}) reciproken Systems, so sind dieselben durch die Relationen bestimmt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ih} \operatorname{rec.}(a_{ik}) = \delta_{hk} \qquad (h, k=1, 2, \dots n) \tag{3}$$

und stehen zu den Adjungirten der Grössen a_{ik} in der einfachen Beziehung:

$$\operatorname{adj.}(a_{ik}) = |a_{ik}| \operatorname{rec.}(a_{ik}) \qquad (i, k=1, 2 \dots n).$$

Dies vorausgeschickt, erhält man, wie ich bereits im art. VII meines im Monatsbericht vom Februar 1873 abgedruckten Aufsatzes*) gezeigt habe, die folgende Reihenentwickelung von rec. $(z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)})$ nach fallenden Potenzen der Variabeln z:

$$\operatorname{rec.}(z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)}) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{z_{ki}^{(r)}}{z^{r+1}} \qquad (i, k=1, 2, \dots n). \tag{4}$$

Denn der Definitionsgleichung für rec. $(z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)})$, wie sie gemäss der Gleichung (3) zu formuliren ist:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (z\delta_{ih} - z_{ih}^{(1)}) \operatorname{rec.}(z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)}) = \delta_{hk} \qquad (h, k=1, 2, \dots n) \tag{5}$$

wird genügt, wenn man für rec. $(z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)})$ die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (4) substituirt, da alsdann der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (5) in folgenden übergeht:

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{z^{r+1}} \sum_{i=1}^{i=n} (z\delta_{ih} - z_{ih}^{(1)}) z_{ki}^{(r)},$$

welcher bei Anwendung der Gleichung (1) sich auf die Differenz:

*) „Ueber die verschiedenen *Sturm*'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen."[1])

[1]) Band I S. 303—348 dieser Ausgabe; s. S. 336—345. H.

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{z_{kh}^{(r)}}{z^r} - \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{z_{kh}^{(r+1)}}{z^{r+1}},$$

d. h. also in der That auf δ_{hk} reducirt.

In der Gleichung (4) sind die Elemente der durch Composition mit sich selbst entstehenden Systeme als Entwickelungscoefficienten dargestellt. Man kann dies noch dahin formuliren,

dass die nach fallenden Potenzen von z fortschreitende unendliche Reihe:

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{z^{r+1}} \sum_{i,k} z_{ik}^{(r)} x_i' y_k' \qquad (i, k=1, 2, \dots n),$$

deren Coefficienten bilineare Formen der je n Variabeln x', y' sind, gleich der Reciproken der bilinearen Form:

$$z \sum_k x_k y_k - \sum_{i,k} z_{ik} x_i y_k \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

ist,

und hieraus ergeben sich unmittelbar die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass aus wiederholter Composition eines Systems mit sich selbst zwei Systeme hervorgehen, welche einander gleich oder auch nur in Bezug auf ein gegebenes Primmodulsystem einander congruent sind. Dabei ist jedoch die Voraussetzung hinzuzufügen, dass die Determinante des Systems nicht gleich oder congruent Null sei.

II.

Bezeichnet man mit:

$$z_{ik}^{(1)} \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

n^2 ganze Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots)$ und mit $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots)$ ein Primmodulsystem desselben Bereichs, so kann die obige Frage dahin formulirt werden, unter welchen Bedingungen die n^2 Congruenzen:

$$(6) \qquad \mathfrak{z}_{ik}^{(l)} \equiv \mathfrak{z}_{ik}^{(l+m)} \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots) \qquad \binom{i,\, k=1,\, 2, \dots n}{l \geqq 0,\; m > 0}$$

erfüllt sind, während die Determinante:

$$\left| \mathfrak{z}_{ik}^{(1)} \right| \qquad (i,\, k=1,\, 2, \dots n)$$

modulis $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots$: *nicht* congruent Null ist.

Gemäss der Gleichung (2) geht aus der Congruenz (6) die folgende hervor:

$$\mathfrak{z}_{ik}^{(l)} \equiv \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{z}_{ih}^{(l)} \mathfrak{z}_{hk}^{(m)} \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots) \qquad (i,\, k=1,\, 2, \dots n),$$

und es kommt also, wenn mit $\mathfrak{Z}_{gi}^{(l)}$ die Adjungirte von $\mathfrak{z}_{ig}^{(l)}$ bezeichnet wird:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Z}_{gi}^{(l)} \mathfrak{z}_{ik}^{(l)} \equiv \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{z}_{hk}^{(m)} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Z}_{gi}^{(l)} \mathfrak{z}_{ih}^{(l)} \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots) \qquad (g,\, k=1,\, 2, \dots n)$$

oder:

$$\left| \mathfrak{z}_{gk}^{(1)} \right|^l (\delta_{gk} - \mathfrak{z}_{gk}^{(m)}) \equiv 0 \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots) \qquad (g,\, k=1,\, 2, \dots n).$$

Da nun die Determinante $\left| \mathfrak{z}_{gk}^{(1)} \right|$ nicht congruent Null ist, so ergiebt sich die Congruenz:

$$\mathfrak{z}_{ik}^{(m)} \equiv \delta_{ik} \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots) \qquad (i,\, k=1,\, 2, \dots n)$$

und hiermit das Resultat:

> Wenn überhaupt bei der Composition eines Systems $(\mathfrak{z}_{ik}^{(1)})$ mit sich selbst ein und dasselbe System mehr als einmal vorkommt, so muss dabei auch das Einheitssystem vorkommen, und wenn dieses zum ersten Male bei ν-maliger Composition auftritt, so gehen aus der Composition von $(\mathfrak{z}_{ik}^{(1)})$ mit sich selbst nur die ν verschiedenen Systeme:
>
> $$(\delta_{ik}),\ (\mathfrak{z}_{ik}^{(1)}),\ (\mathfrak{z}_{ik}^{(2)}),\ \dots\ (\mathfrak{z}_{ik}^{(\nu-1)}) \qquad (i,\, k=1,\, 2, \dots n)$$
>
> hervor.

Für die Existenz einer Congruenz (6) ist daher die einer Congruenz:

$$\mathfrak{z}_{ik}^{(\nu)} \equiv \delta_{ik} \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots) \qquad (i,\, k=1,\, 2, \dots n)$$

nothwendige und hinreichende Bedingung, und man kann demnach die weitere Untersuchung in *der* Weise führen, dass man das System der n^2 *unbestimmten Variabeln* $z_{ik}^{(1)}$ im Sinne der Congruenz für das aus n^2 Elementen:

$$z_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik} \qquad (i,\, k=1,\, 2, \dots n)$$

bestehende Modulsystem behandelt.

III.

Für das Modulsystem $(z_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})$ geht die aus der Gleichung (2) resultirende Congruenz:

$$\sum_{h=1}^{h=n} z_{ih}^{(\nu)} z_{hk}^{(m)} \equiv z_{ik}^{(\nu+m)} \qquad (i,\, k=1,\, 2, \dots n)$$

über in:

$$z_{ik}^{(m)} \equiv z_{ik}^{(\nu+m)} \qquad (i,\, k=1,\, 2, \dots n),$$

und die Gleichung (4) verwandelt sich demnach in die Congruenz:

$$(7) \qquad (z^\nu - 1)\ \text{rec.}\ (z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)}) \equiv \sum_{r=0}^{r=\nu-1} z_{ki}^{(r)} z^{\nu-r-1} \qquad (i,\, k=1,\, 2, \dots n),$$

deren Inhalt man auch dahin formuliren kann, dass die Reciproke der bilinearen Form:

$$z\sum_k x_k y_k - \sum_{i,k} z_{ik}^{(1)} x_i y_k \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

für das Modulsystem:

$$(z_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}) \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

der bilinearen Form:

$$\frac{1}{z^\nu - 1} \sum_{i,k,r} z^{\nu-r-1} z_{ik}^{(r)} x_i' y_k' \qquad \binom{i, k=1, 2, \ldots n}{r=0, 1, \ldots \nu-1}$$

congruent ist.

Es ergiebt sich also als eine nothwendige Bedingung für die Existenz einer Congruenz (6):

$$\mathfrak{z}_{ik}^{(l)} \equiv \mathfrak{z}_{ik}^{(l+m)} \quad (\text{modd. } \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots) \qquad (i, k=1, 2, \ldots n),$$

dass die Reciproke der bilinearen Form:

(8) $$z\sum_k x_k y_k - \sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik}^{(1)} x_i y_k \qquad (i, k=1, 2, \ldots n),$$

nach Multiplication mit $z^\nu - 1$, einer *ganzen* Function von z *modulis* $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$ congruent werde.

Dass diese Bedingung aber auch eine *hinreichende* ist, erkennt man unmittelbar, wenn man in der Congruenz:

$$\text{rec.}\,(z\delta_{ik} - z_{ik}^{(1)}) \equiv \frac{1}{z^\nu - 1} \sum_{h=0}^{h=\nu-1} z_{ki}^{(h)} z^{\nu-h-1} \qquad (i, k=1, 2, \ldots n),$$

welche der Bedingung gemäss bestehen muss, den Ausdruck auf der rechten Seite auf die Form bringt:

$$\sum_{g=0}^{g=\infty} \sum_{h=0}^{h=\nu-1} \frac{z_{ki}^{(h)}}{z^{g\nu+h+1}} \qquad (i, k=1, 2, \ldots n),$$

da alsdann aus der Vergleichung mit dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (4) die nachzuweisende Congruenz:

$$z_{ki}^{(g\nu+h)} \equiv z_{ki}^{(h)} \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

resultirt.

IV.

Für den speciellen Fall, wo an Stelle der Congruenzen Gleichungen treten, wird durch die Bedingung,

> dass die Elemente des zu $(z\delta_{ik} - \mathfrak{z}_{ik}^{(1)})$ reciproken Systems sich als rationale Functionen von z *mit dem Nenner* $z^\nu - 1$ darstellen lassen,

wohl in der einfachsten und übersichtlichsten Weise ein System $\mathfrak{z}_{ik}^{(1)}$ überhaupt als ein solches charakterisirt, dessen ν-malige Composition mit sich selbst das Einheitssystem liefert.*) Nun ist eine bilineare Form:

$$\sum_{i,k} (z\delta_{ik} - \mathfrak{z}_{ik}^{(1)})\, x_i y_k \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

dann und nur dann in die Form:

$$\sum_{h=1}^{h=n} (z - \zeta_h)\, \xi_h \eta_h$$

transformirbar, d. h. die n^2 Grössen $\mathfrak{z}_{ik}^{(1)}$ sind dann und nur dann in der Form:

(9) $$\mathfrak{z}_{ik}^{(1)} = \sum_{h=1}^{h=n} c_{ih}\, \zeta_h\, c'_{hk} \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

---

*) Dem Wesen, wenn auch nicht der Form nach findet sich die Bedingung schon in einem vom 4. April 1887 datirten Aufsatze des Hrn. *Lipschitz* (Acta Mathematica X, S. 137).

darstellbar, in welcher (c_{ik}), (c'_{ik}) zu einander reciproke Systeme bedeuten, wenn die ganze Function von z, welche in dem einfachsten Ausdrucke der Reciproken von:

$$\sum_{i,k} (z\delta_{ik} - \mathfrak{z}_{ik}^{(1)})\, x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

den Nenner bildet, keine gleichen Factoren enthält.*) Da diese Reciproke für die oben charakterisirten Systeme $\mathfrak{z}_{ik}^{(1)}$ als ein Ausdruck mit dem Nenner $z^\nu - 1$ erscheint, so ist die angegebene Bedingung erfüllt, und es lassen sich daher die Elemente $\mathfrak{z}_{ik}^{(\nu)}$ jedes Systems, für welches die Gleichung:

$$(10) \qquad \mathfrak{z}_{ik}^{(\nu)} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

besteht, in der Form (9) darstellen. Die Gleichung (10) geht aber alsdann in folgende über:

$$\sum_{h=1}^{h=n} c_{ih}\, \zeta_h^\nu\, c'_{hk} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und hieraus resultirt, wenn man auf beiden Seiten mit $c'_{gi} c_{kg}$ multiplicirt und dann über alle Werthe von i und k summirt, die Bedingung:

$$\zeta_g^\nu = 1 \qquad (g = 1, 2, \ldots n)$$

als eine nothwendige, welche sich aber offenbar auch als eine hinreichende erweist. In der Form (9) sind also, wenn ν die kleinste Zahl ist, für welche die n Bedingungen:

$$\zeta_1^\nu = 1, \ \zeta_2^\nu - 1, \ldots \zeta_n^\nu = 1$$

zugleich erfüllt werden, *alle* Systeme $\mathfrak{z}_{ik}^{(1)}$ und *nur* solche enthalten, welche

*) Dieser Satz ist vollständig analog demjenigen über quadratische Formen, welchen ich im art. III meiner vorhergehenden Abhandlung „über orthogonale Systeme" entwickelt und dort mit (21) bezeichnet habe.[1]) Der Beweis ist auch genau in derselben Art wie a. a. O. zu führen.

[1]) Band III S. 369—459 dieser Ausgabe; s. S. 385—386. H.

erst nach ν-maliger Composition mit sich selbst das Einheitssystem liefern.*)

Die vorstehenden Entwickelungen, welche ganz unmittelbar aus denjenigen meiner schon oben citirten Abhandlung vom Februar 1873 und aus meinen in den Monatsberichten von 1874 veröffentlichten Mittheilungen über bilineare Formen[1]) hervorgehen, habe ich, genau in der hier auseinandergesetzten Weise, schon im Wintersemester 1875/76 und alsdann auch wiederholentlich in meinen Universitätsvorlesungen über Determinantentheorie vorgetragen. Die Darlegung der weiteren Ergebnisse, welche ich aus meiner neueren Behandlungsweise der bilinearen Formen gewonnen habe, behalte ich einer folgenden Mittheilung vor; aber einige der hauptsächlichsten will ich schon hier anführen.

Ist $F(z)$ eine ganze Function m^{ten} Grades der Variabeln z, in welcher der Coefficient von z^m gleich *Eins* ist, und setzt man:

$$F(z) = z^m - \sum_k c_{mk} z^k \qquad (k = 0, 1, \ldots m-1),$$

so werden durch die Congruenz:

$$z^r \equiv \sum_k c_{rk} z^k \quad (\text{mod. } F(z)) \qquad (k = 0, 1, \ldots m-1)$$

die Coefficienten c_{rk} für jede positive ganze Zahl r vollkommen bestimmt. Dabei ist offenbar für $r < m$:

$$c_{rk} = \delta_{rk} \qquad (k = 0, 1, \ldots m-1),$$

und für $r = m$ stimmen die Coefficienten c_{mk} in der Congruenz mit denen von $F(z)$ überein.

Die m^2 Elemente des Systems:

$$(c_{h+1,k}) \qquad (h, k = 0, 1, \ldots m-1)$$

*) Vergl. die Ausführungen in der vom Juni 1877 datirten Abhandlung des Hrn. *Camille Jordan* (Journal für Mathematik, Bd. 84, S. 112).

[1]) Band I S. 349—414, 421—483 dieser Ausgabe. H.

bilden die Coefficienten des von z unabhängigen Theiles der bilinearen Form:

$$z\sum_{k=0}^{k=m-1} x_k y_k - \sum_{k=1}^{k=m-1} x_{k-1} y_k - x_{m-1} \sum_{k=0}^{k=m-1} c_{mk} y_k,$$

deren Determinante gleich $F(z)$ ist. Durch diese bilineare Form wird, wegen der Variabilität von z, eine *Schaar* repraesentirt, und zwar eine in Beziehung auf einen gegebenen Rationalitätsbereich „elementare", d. h. nicht weiter zerfällbare Schaar, wenn $F(z)$ die Potenz einer in demselben Rationalitätsbereich irreductibeln Function von z ist.

Das in allgemeinerer Weise durch irgend welche m auf einander folgende Werthe des ersten Index charakterisirte System:

$$(c_{h+\nu,k}) \qquad\qquad (h,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$$

entsteht aus der ν-maligen Composition des speciellen Systems:

$$(c_{h+1,k}) \qquad\qquad (h,\ k=0,\ 1,\ \ldots\ m-1)$$

mit sich selbst. Ein solches System ist wegen der Congruenz:

$$z^{h+\nu} \equiv \sum_k c_{h+\nu,k} z^k \pmod{F(z)} \qquad\qquad (h,\ k=0,\ 1,\ \ldots\ m-1)$$

offenbar dann und nur dann das Einheitssystem (δ_{hk}), wenn $F(z)$ ein Theiler von $z^\nu - 1$ ist.

Bezeichnet man ein System von m^2 ganzen Zahlen, welches erst bei ν-maliger Composition mit sich selbst das Einheitssystem ergiebt, als ein „uneigentliches zum Exponenten ν gehörendes Einheitssystem", so ist $(c_{h+1,k})$ ein solches, wenn ν die kleinste Zahl ist, für welche $z^\nu - 1$ durch $F(z)$ theilbar wird. Bezeichnet man ferner diejenigen uneigentlichen Einheitssysteme als „primitive", für welche $F(z)$ der zu ν gehörige irreductible Factor von $z^\nu - 1$ ist, so kann man das Hauptresultat der Untersuchung dahin formuliren, dass es diese primitiven uneigentlichen Einheitssysteme sind, durch welche

sich *alle* uneigentlichen Einheitssysteme in einfachster Weise darstellen lassen. Dabei ist noch hervorzuheben, dass sich für den Fall $F(z) = z^m - 1$ das System $(c_{h+1,k})$ auf das uneigentliche Einheitssystem:

$$(\delta_{h+1,k}) \qquad\qquad (h,\ k=0,\ 1,\ \ldots\ m-1)$$

reducirt, in welchem aber δ_{mk} durch δ_{0k} zu ersetzen ist. Da hierdurch eine cyklische Substitution dargestellt wird, so sieht man, dass sich hier eine bemerkenswerthe, aber, wie ich glaube, noch nicht bemerkte Zerlegungsweise cyklischer Substitutionen ergiebt.

Druckfehlerverzeichniss zum dritten Bande.

S. 113 Z. 2 v. o. statt „1895“ lies „1885“.

S. 356 Z. 8 v. o. statt „$x_1^{p_1} x_2^{p_2}, \ldots x_n^{p_n}$“ lies „$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$“.

S. 387 Z. 8 v. o. statt „$\sum_h p_h c_{hi} c_{hk}$“ lies „$\sum_h \frac{p_h}{q_h} c_{hi} c_{hk}$“.

(Verbesserung gegen das Original.)