
桑木文庫
洋書
OLD
KER'S
KE
l 3,1
9

LEOPOLD KRONECKER'S WERKE.

LEOPOLD KRONECKER'S WERKE.

HERAUSGEGEBEN AUF VERANLASSUNG

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VON

K. HENSEL.

DRITTEN BANDES ERSTER HALBBAND.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

VORREDE.

Nach dem in der Vorrede zum ersten Bande veröffentlichten Plane sollen die drei ersten Bände der Werke Leopold Kronecker's alle auf die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen bezüglichen veröffentlichten und nachgelassenen Abhandlungen enthalten.

Da die Anzahl und der Umfang der noch nicht veröffentlichten Arbeiten verhältnissmässig gross ist, so erschien es zweckmässig, den letzten von diesen drei Banden in zwei Halbbände zu theilen, von denen ich den ersten hiermit der Oeffentlichkeit übergebe. Er enthält 16 Abhandlungen, deren Publication in die Zeit von 1883—1890 fällt.

Bei der genauen Nachprüfung dieser Arbeiten bin ich, wie ich hier mit aufrichtigem Danke hervorheben möchte, in wirksamster Weise durch die Herren Hermite, Kneser, Minkowski, Netto, Steinitz und Vahlen unterstützt worden; so konnte das Erscheinen dieses Bandes verhältnissmässig schnell nach dem des zweiten Bandes erfolgen.

Berlin, im April 1899.

K. Hensel.

INHALTSVERZEICHNISS.

SUR LES UNITÉS COMPLEXES

PAR

M. L. KRONECKER.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCVI, I Sem. 93—98, 148—152, 216—221, séances des 8, 15 et 22 janvier 1883.

SUR LES UNITÉS COMPLEXES.

»Une Lettre de Lejeune-Dirichlet, adressée à Liouville et insérée dans les *Comptes rendus* de 1840 (t. X, p. 285[1]), contient les premières Communications de l'illustre géomètre sur ses recherches concernant les unités complexes. Jamais on n'avait encore abordé dans toute leur généralité ces belles questions, qui comptent parmi les plus élevées de l'Arithmétique. Lejeune-Dirichlet se sert, pour les résoudre, de méthodes à la fois simples et fécondes. Dans ces recherches comme dans tant d'autres, il fait plutôt usage de la puissance admirable de sa pensée que de sa connaissance profonde des méthodes analytiques. Il trouve ainsi la voie la plus directe qui conduit au résultat.

»Lejeune-Dirichlet a communiqué plus tard à l'Académie de Berlin trois Notes (*Monatsberichte*, octobre 1841, avril 1842, mars 1846[2]) dans lesquelles il donne les résultats principaux de ses recherches sur les unités complexes, mais indique seulement les démonstrations. Dans la Note de 1846, il désigne comme point capital de cette théorie que, si les valeurs absolues différentes des racines de l'équation fondamentale sont en nombre h, on peut trouver $h-1$ unités complexes indépendantes.

»Dans les Leçons sur la théorie arithmétique des formes algébriques que j'ai données à l'Université de Berlin en février et mars 1882, j'ai exposé dans tous ses détails la théorie des unités complexes et j'ai surtout cherché à mettre en pleine lumière la cause du succès des méthodes employées par

---

[1]) *G. Lejeune-Dirichlet* gesammelte Werke Bd. I S. 619—624. H.
[2]) *G. Lejeune-Dirichlet* gesammelte Werke Bd. I S. 625—632, 633—638, 639—644. H.

Lejeune-Dirichlet. A cet effet, j'ai spécialement développé les considérations générales indiquées dans la Note de 1842. Le titre de cette Note, *Généralisation d'un théorème concernant les fractions continues et applications à la théorie des nombres*, indique déjà sa grande portée. J'ai été ainsi amené à modifier sensiblement la démonstration du point capital énoncé dans la Note de 1846 et à éclaircir notablement les méthodes de Lejeune-Dirichlet.

»Il m'a semblé que le résultat de mes recherches pourrait offrir quelque intérêt aux géomètres qui s'occupent de la théorie des nombres. C'est pourquoi j'entreprends de communiquer à l'Académie les développements que j'ai donnés l'hiver dernier à mes auditeurs. L'un d'eux, M. J. Molk, a bien voulu mettre à ma disposition les parties correspondantes de mon Cours, qu'il a rédigées avec soin; il m'a, de plus, été fort utile en m'aidant à la rédaction de ce Mémoire.

»1. Désignons par $w', w'', \ldots, w^{(n)}$ des nombres entiers quelconques, et par $z', z'', \ldots, z^{(n)}$ des quantités réelles ou complexes telles, qu'une équation de la forme $w'z' + w''z'' + \cdots + w^{(n)}z^{(n)} = 0$ ne puisse avoir lieu que si tous les w sont nuls. Donnons aux w m systèmes de valeurs, et formons les expressions correspondantes $w'z' + w''z'' + \cdots + w^{(n)}z^{(n)}$; par hypothèse, elles sont inégales; si nous les partageons en t groupes arbitraires, l'un d'eux au moins en contiendra $\frac{m}{t} + p$, où $p \geqq 0$.

»2. Si donc nous considérons ν systèmes

$$z'_\alpha,\ z''_\alpha,\ \ldots,\ z^{(n)}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

et si nous partageons en t_α groupes arbitraires les m valeurs correspondantes (w, z_α) pour $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, où

$$(w, z_\alpha) = w'z'_\alpha + w''z''_\alpha + \cdots + w^{(n)}z^{(n)}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

il y aura, parmi les t_1 groupes considérés, au moins un groupe G_1 contenant $\frac{m}{t_1} + p_1$ des valeurs (w, z_1) où $p_1 \geqq 0$. En posant $\frac{m}{t_1} + p_1 = m_1$, nous obtenons ainsi m_1 des m systèmes (w) et, par suite, m_1 valeurs correspondantes (w, z_2), dont

$\frac{m_1}{t_2} + p_2$, où $p_2 \geqq 0$, sont sûrement contenues dans un des t_2 groupes déjà définis. Nommons ce dernier groupe G_2; si nous posons $\frac{m_1}{t_2} + p_2 = m_2$, il est bien évident que $m_2 \geqq \frac{m}{t_1 t_2}$. En répétant plusieurs fois le même raisonnement, on trouve m_ν systèmes

$$w'_\varrho,\ w''_\varrho,\ \ldots,\ w^{(n)}_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m_\nu),$$

où les m_ν expressions correspondantes (w_ϱ, z_1) font partie d'un même groupe G_1, et en général les m_ν expressions (w_ϱ, z_α) appartiendront à un même groupe G_α pour chacune des valeurs $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$. On a d'ailleurs, $E(x)$ étant le plus grand entier contenu dans x,

$$m_\nu \geqq E\left(\frac{m}{t_1 t_2 \ldots t_\nu}\right),$$

où t_α désigne le nombre des groupes arbitraires formés par les différentes valeurs des m expressions (w, z_α).

»Il est bon d'observer que quelques-uns des systèmes $(z'_\alpha, z''_\alpha, \ldots, z^{(n)}_\alpha)$ peuvent être imaginaires conjugués ou même identiques.

»3. Nous pouvons considérer chacun des m systèmes $(w', w'', \ldots, w^{(n)})$ comme un point d'une variété $n^{\text{ième}}$, et chacune des valeurs correspondantes (w, z_α) comme un point dans le plan (α) des quantités complexes. Dans la variété $n^{\text{ième}}$, nous formerons une *région* (W), contenant les m points $(w', w'', \ldots, w^{(n)})$, et dans chaque plan (α) une *région* (R_α), contenant les m points (w, z_α). Nous partagerons ensuite, d'une manière arbitraire, chaque région (R_α) en t_α *domaines*. Il y aura alors, d'après ce que nous avons démontré, au moins $E\left(\frac{m}{t_1 t_2 \ldots t_\nu}\right)$ points $(w'_\varrho, w''_\varrho, \ldots, w^{(n)}_\varrho)$ tels que leurs correspondants (w_ϱ, z_α), où $\varrho = 1, 2, \ldots, m_\nu$, soient contenus dans un même domaine (G_α) pour $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$.

»4. Soit T_α la distance maximum de deux points quelconques (w, z_α) du domaine (G_α). Il est manifeste que

$$|(w_\varrho - w_1, z_\alpha)| \leqq \mathrm{T}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

On sait que $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

»Comme l'indice ϱ ne peut prendre que les valeurs $2, 3, \ldots, m_\nu$, il y a $m_\nu - 1$ expressions $(w_\varrho - w_1, z_\alpha)$; et l'on voit que, pour $m_\nu > \frac{m}{t_1 t_2 \ldots t_\nu}$, on a

$$m_\nu - 1 \geqq \mathrm{E}\left(\frac{m}{t_1 t_2 \ldots t_\nu}\right),$$

tandis que

$$m_\nu - 1 = \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{t_1 t_2 \ldots t_\nu}\right)$$

pour $m_\nu = \frac{m}{t_1 t_2 \ldots t_\nu}$. Dans ce dernier cas, les valeurs de (w, z_α) sont réparties uniformément dans les $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ groupes que l'on définit comme ensemble de tous les points (w) auxquels correspondent les points qui, pour chaque plan (α), sont situés dans un seul domaine. Nous pouvons donc écrire l'inégalité

$$m_\nu - 1 \geqq \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{t_1 t_2 \ldots t_\nu}\right).$$

»5. Si l'on prend pour chacun des $w^{(k)}$ les nombres entiers consécutifs

$$b^{(k)} + 1, \quad b^{(k)} + 2, \ldots, b^{(k)} + s^{(k)},$$

les valeurs absolues des différences $(w_\varrho^{(k)} - w_1^{(k)})$ sont plus petites que $s^{(k)}$. Nous avons donc $m_\nu - 1$ expressions (c_ϱ, z_α), où

$$(c_\varrho, z_\alpha) = c'_\varrho z'_\alpha + c''_\varrho z''_\alpha + \cdots + c_\varrho^{(n)} z_\alpha^{(n)},$$

dont les valeurs absolues ne surpassent pas les limites T_α, les entiers $|c_\varrho^{(k)}|$ restant plus petits que $s^{(k)}$. D'ailleurs $m_\nu - 1$ est au moins égal à

$$\mathrm{E}\left(\frac{s' s'' \ldots s^{(n)} - 1}{t_1 t_2 \ldots t_\nu}\right).$$

En particulier, si les nombres $s^{(k)}$ sont tous égaux à rt, on voit qu'il existe au moins

$$\mathrm{E}\left(\frac{r^n t^n - 1}{t_1 t_2 \ldots t_\nu}\right)$$

expressions (c_ϱ, z_α) telles que nous ayons à la fois

$$|c_\varrho^{(k)}| < rt \quad \text{et} \quad |(c_\varrho, z_\alpha)| \leqq \mathrm{T}_\alpha.$$

»Il est d'ailleurs facile de remplacer les T_α par d'autres limites, susceptibles d'une interprétation plus élégante. On prendra d'abord pour région (R_α) un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes coordonnés et passent par les points extrêmes considérés; on partagera ensuite (R_α) en θ_α^2 rectangles semblables à (R_α) et égaux entre eux. Alors, si D_α est la diagonale de (R_α), chacun de ces rectangles aura une diagonale $\frac{\mathrm{D}_\alpha}{\theta_\alpha}$ au moins égale à T_α. Si, d'autre part, nous introduisons des variables $v', v'', \ldots, v^{(n)}$, l'ensemble des points $v', v'', \ldots, v^{(n)}$, où chaque $v^{(k)}$ prend toutes les valeurs comprises dans un intervalle égal à l'unité, forme un *prismatoïde* (P) dans la variété $n^{\text{ième}}$ (v). Ce prismatoïde (P) détermine dans chaque plan (α) une région finie renfermant tous les points (v, z_α). Nous pouvons donc construire un rectangle, à côtés parallèles aux axes coordonnés, de manière que cette région y soit contenue tout entière. Nous nommerons S_α la diagonale de ce rectangle. Alors, en posant

$$w^{(k)} = rtv^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

nous définissons des points (v) situés dans un prismatoïde (P) et par suite des points (v, z_α) situés dans le rectangle à diagonale S_α. Nous avons donc $\mathrm{D}_\alpha < rt\mathrm{S}_\alpha$, et, puisque $\theta_\alpha \mathrm{T}_\alpha \leqq \mathrm{D}_\alpha$, il vient $\theta_\alpha \mathrm{T}_\alpha < rt\mathrm{S}_\alpha$, ce qui permet de remplacer l'inégalité $|(c_\varrho, z_\alpha)| \leqq \mathrm{T}_\alpha$ par la suivante:

$$|(c_\varrho, z_\alpha)| < \frac{rt\mathrm{S}_\alpha}{\theta_\alpha},$$

dans laquelle, par définition, les S_α ne dépendent que des $n \cdot \nu$ quantités

$z_\alpha^{(k)}$ et où $\theta_\alpha^2 = t_\alpha$, à moins que le rectangle (R_α) ne se réduise à un segment de droite.

»6. Supposons maintenant que, les $c^{(k)}$ désignant toujours des nombres entiers, et M un nombre essentiellement positif, l'inégalité

$$\prod_\alpha |(c, z_\alpha)| \geqq \mathrm{M} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, \nu)$$

ait lieu pour tout système des $c^{(k)}$ différent de zéro. Donnons aux $c^{(k)}$ *toutes* les valeurs telles que $|c^{(k)}| < rt$, et formons les expressions correspondantes (c, z_α). Nous pouvons envisager chacune d'entre elles comme différence de deux expressions (w, z_α), dans lesquelles les $w^{(k)}$ ne varient que de $b^{(k)}+1$ à $b^{(k)}+rt$; il en résulte que les expressions $|(c, z_\alpha)|$ sont plus petites que $rt\mathrm{S}_\alpha$; nous aurons donc

$$\frac{\mathrm{M}}{\prod_\alpha |(c, z_\alpha)|} \leqq \prod_\beta |(c, z_\beta)| < (rt)^{\nu-\lambda} \prod_\beta \mathrm{S}_\beta \qquad \begin{pmatrix}\alpha=1, 2, \ldots, \lambda; \\ \beta=\lambda+1, \ldots, \nu\end{pmatrix}.$$

»Pour les c_ϱ, la limite supérieure peut être remplacée par

$$(rt)^{\nu-\lambda} \prod_\beta \frac{\mathrm{S}_\beta}{\theta_\beta} \qquad (\beta=\lambda+1, \ldots, \nu).$$

»Nous en déduisons les inégalités fondamentales

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{M}}{(rt)^{\nu-\lambda}\prod_\beta \mathrm{S}_\beta} < \prod_\alpha |(c, z_\alpha)| < (rt)^\lambda \prod_\alpha \mathrm{S}_\alpha \\ \frac{\mathrm{M}}{(rt)^{\nu-\lambda}} \prod_\beta \frac{\theta_\beta}{\mathrm{S}_\beta} < \prod_\alpha |(c_\varrho, z_\alpha)| < (rt)^\lambda \prod_\alpha \frac{\mathrm{S}_\alpha}{\theta_\alpha}\end{aligned}\right\} \qquad \begin{pmatrix}\alpha=1, 2, \ldots, \lambda \\ \beta=\lambda+1, \ldots, \nu \\ \varrho=1, 2, \ldots, m_\nu\end{pmatrix}.$$

»Ce sont ces inégalités qui, pour $\lambda=1$ et $\lambda=\nu$, nous indiqueront avec évidence comment on peut trouver un système complet de $h-1$ unités complexes indépendantes. Mais auparavant nous tirerons de ces inégalités quelques conséquences intéressantes, concernant la réduction approximative des équations irréductibles.

»7. Soit u une quantité indéterminée. Développons le produit

$$\prod_\alpha [u + |(c, z_\alpha)|] \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, \lambda),$$

et appliquons aux coefficients des différentes puissances de u l'inégalité connue

$$m\,|a_1 a_2 \ldots a_m|^{\frac{1}{m}} \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|.$$

Les inégalités fondamentales que nous avons obtenues à la fin du paragraphe précédent nous permettent alors de passer à tout un système d'inégalités que nous écrirons sous la forme

$$\left.\begin{aligned}\prod_\alpha [u + |(c, z_\alpha)|] &= \left[u + (rt)^{1-\frac{\nu}{\lambda}} \mathrm{M}^{\frac{1}{\lambda}} \prod_\beta \mathrm{S}_\beta^{-\frac{1}{\lambda}}\right]^\lambda + \mathrm{P}(u), \\ \prod_\alpha [u + |(c, z_\alpha)|] &= \prod_\alpha (u + rt\mathrm{S}_\alpha) - \mathrm{P}'(u), \\ \prod_\alpha [u + |(c_\varrho, z_\alpha)|] &= \left[u + (rt)^{1-\frac{\nu}{\lambda}} \mathrm{M}^{\frac{1}{\lambda}} \prod_\beta \theta_\beta^{\frac{1}{\lambda}} \mathrm{S}_\beta^{-\frac{1}{\lambda}}\right]^\lambda + \mathrm{P}_\varrho(u), \\ \prod_\alpha [u + |(c_\varrho, z_\alpha)|] &= \prod_\alpha (u + rt\mathrm{S}_\alpha \theta_\alpha^{-1}) - \mathrm{P}'_\varrho(u);\end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix}\alpha=1, 2, \ldots\ldots, \lambda \\ \beta=\lambda+1, \lambda+2, \ldots, \nu\end{pmatrix}$$

les coefficients des fonctions entières $\mathrm{P}(u)$ sont essentiellement positifs.

»Les inégalités du paragraphe précédent se rapportaient seulement au produit des quantités $|(c, z_\alpha)|$; celles que nous venons d'en déduire sont plus générales. Elles nous donnent des limites inférieures et supérieures pour chaque fonction symétrique élémentaire de ces quantités et, par suite, pour ces λ quantités elles-mêmes. Nous pouvons donc les considérer comme donnant et limitant l'approximation avec laquelle on peut résoudre le système d'équations

$$c' z'_\alpha + c'' z''_\alpha + \cdots + c^{(n)} z_\alpha^{(n)} = 0 \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, \lambda),$$

où il est naturel de supposer qu'il n'y a point deux systèmes z_α identiques, et qu'à tout système imaginaire correspond toujours un système conjugué, compris parmi les λ systèmes (z_α). Ce problème est identique au suivant: *Trouver des nombres rationnels γ'', γ''', ..., $\gamma^{(n)}$ tels que les équations*

$$z'_\alpha + \gamma'' z''_\alpha + \cdots + \gamma^{(n)} z^{(n)}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

soient approximativement vérifiées.

»Pour résoudre ce problème, nous pourrons faire usage des nombres c_ϱ si nous parvenons à resserrer suffisamment les limites données par la dernière inégalité. Les quantités θ_α et rt y sont seules à notre disposition. Comme rt est la limite supérieure des entiers $|c|$, si nous fixons le nombre r, il faut laisser croître arbitrairement le nombre t. Alors l'ordre de grandeur des entiers $|c|$ nous sera donné par t; c'est à ce nombre que nous comparerons les quantités t_1, t_2, ..., t_ν dont nous pouvons encore disposer, ainsi que la valeur des quantités $|(c_\varrho, z_\alpha)|$, c'est-à-dire le degré d'approximation avec lequel les équations sont vérifiées. En fixant un terme de comparaison pour la grandeur des $|c_\varrho|$ et pour la valeur des $|(c_\varrho, z_\alpha)|$, le problème posé se présente sous une forme plus déterminée.

»Si $2\varkappa$ des λ systèmes (z_α) sont imaginaires et si nous posons $\lambda - \varkappa = h$, il n'y a à résoudre que h équations

$$c' z'_\alpha + c'' z''_\alpha + \cdots + c^{(n)} z^{(n)}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, h).$$

Les θ_1, θ_2, ..., θ_h y peuvent être choisis arbitrairement; mais les $t_1, t_2, \ldots, t_h$ sont alors déterminés; selon que le système (z_α) est réel ou imaginaire, t_α est égal à θ_α ou à θ^2_α. Comme nous ajoutons cependant aux h équations celles qui correspondent aux $\varkappa$ systèmes conjugués (z_{h+1}), (z_{h+2}), ..., (z_λ), il convient de prendre les valeurs de t_{h+1}, t_{h+2}, ..., t_λ égales à l'unité; mais deux θ correspondant à deux systèmes (z) conjugués, sont nécessairement égaux, car nos inégalités se basent sur ce que la *valeur absolue* de (c_ϱ, z_α) est plus petite que $\frac{rt\,S_\alpha}{\theta_\alpha}$.

»Ceci posé, nous aurons l'égalité

$$t_1 t_2 \ldots t_\lambda = \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_\lambda.$$

Pour être certain que parmi les c il existe des c_ϱ, il est nécessaire de satisfaire à la condition

$$t_1 t_2 \ldots t_\nu \leqq (rt)^n - 1 \quad \text{ou} \quad \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_\lambda t_{\lambda+1} t_{\lambda+2} \ldots t_\nu \leqq (rt)^n - 1.$$

D'autre part, pour que tous les $|(c_\varrho, z_\alpha)|$ deviennent simultanément aussi petits que possible, il faudra prendre les θ_α aussi grands que possible et du même ordre. Nous poserons donc $\theta_\alpha = r_\alpha t^\sigma$, les r_α désignant des nombres déterminés et σ devant être choisi aussi grand que possible. La condition

$$r_1 r_2 \ldots r_\lambda t_{\lambda+1} t_{\lambda+2} \ldots t_\nu t^{\lambda\sigma} \leqq (rt)^n - 1$$

montre alors qu'il faut choisir

$$t_{\lambda+1} = t_{\lambda+2} = \cdots = t_\nu = 1 \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{n}{\lambda}.$$

»Il résulte de ce qui précède que nous pouvons satisfaire aux λ équations

$$z'_\alpha + \gamma'' z''_\alpha + \cdots + \gamma^{(n)} z^{(n)}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

avec une approximation de l'ordre de $t^{-\frac{n}{\lambda}}$, en posant chaque $\gamma^{(k)}$ égal à une fraction $\frac{c^{(k)}_\varrho}{c'_\varrho}$ dont le numérateur et le dénominateur ont des valeurs du même ordre que t.

»Nous n'avons fait usage jusqu'ici que des limites supérieures des inégalités générales établies plus haut. Les limites inférieures nous montrent immédiatement que les λ équations ne peuvent être vérifiées par des fractions rationnelles $\frac{c^{(k)}}{c'}$ avec une approximation plus grande que $t^{-\frac{\nu}{\lambda}}$.

»Si $n = \lambda + 1$, et si l'on pose

$$z_\alpha^{(a)} = \delta_{a\alpha} \qquad (a, \alpha = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

$\delta_{a\alpha}$ étant nul pour $a \gtrless \alpha$ et δ_{aa} étant égal à l'unité, nous obtenons une approximation simultanée de l'ordre de $t^{-\frac{n}{n-1}}$ pour les valeurs de $z_1^{(\lambda+1)}, z_2^{(\lambda+1)}, \ldots, z_\lambda^{(\lambda+1)}$. C'est le cas considéré par M. Hermite dans son célèbre Mémoire sur la fonction exponentielle.

»8. Supposons maintenant que $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ soient les racines d'une équation irréductible $F(z) = 0$, à coefficients rationnels, et que $z'_\alpha, z''_\alpha, \ldots, z_\alpha^{(n)}$ soient des fonctions entières de z_α à coefficients rationnels. Pour que la condition imposée aux systèmes (z) dès le début de nos recherches soit vérifiée, il est nécessaire de choisir les z_α de manière qu'une équation de la forme $(c, z_\alpha) = 0$, où les c sont des nombres entiers, ne puisse avoir lieu que si tous les c sont nuls. Mais alors l'existence d'un minimum M, différent de zéro, est manifeste. Car, si nous prenons pour g un entier tel que les $gz^{(k)}$ soient des nombres algébriques *entiers*, le produit $g^\nu \prod_\alpha |(c, z_\alpha)|$ sera égal à un nombre entier différent de zéro, et, par suite, nous pourrons prendre pour M la fraction $\frac{1}{g^\nu}$. Nous pouvons donc appliquer les résultats du paragraphe précédent aux z ainsi définis, et parvenir ainsi à une *réduction approximative* de toute équation irréductible. Il suffit pour cela de prendre pour les fonctions $z'_\alpha, z''_\alpha, \ldots, z_\alpha^{(n)}$ les puissances successives de z_α et de poser

$$z_\alpha^{(k)} = z_\alpha^{n-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Puisqu'on suppose que l'équation $F(z) = 0$, de degré ν, est irréductible et qu'il n'existe pas de relations linéaires à coefficients entiers entre les n fonctions $z^{(k)}$, il est manifeste que $n \leq \nu$.

»Si nous formons une équation

$$\Phi(z) = z^{n-1} + \frac{c''_\varrho}{c'_\varrho} z^{n-2} + \cdots + \frac{c_\varrho^{(n)}}{c'_\varrho} = 0,$$

elle nous donne une réduction approximative de l'équation $F(z) = 0$; car $\Phi(z) = 0$, dont le degré $n - 1$ est plus petit que ν, est vérifiée pour λ racines de $F(z) = 0$ avec une approximation de l'ordre de $t^{-\frac{n}{\lambda}}$. Nous savons, de plus, qu'il est impossible de parvenir à une approximation plus grande que $t^{-\frac{\nu}{\lambda}}$. Ainsi l'ordre $t^{-\frac{n}{\lambda}}$ de la réduction approximative que nos méthodes nous permettent d'obtenir dépend du degré de l'équation *réduite*, tandis que la *limite* de l'ordre d'une réduction approximative quelconque dépend du degré de l'équation *à réduire*.

»Mais il est bien naturel d'admettre que le degré de l'équation réduite n'est inférieur que d'une unité à celui de l'équation donnée; ce cas est d'ailleurs le plus important. Nous poserons donc $n = \nu$. Alors l'ordre de réduction approximative donnée par $\Phi(z) = 0$ coïncide avec l'ordre extrême que la nature du problème permet d'atteindre, ce qui résout la question que nous avons été amenés à nous poser.

»En considérant le cas particulier où $n = 2$ et $\lambda = 1$, nous sommes amené, avec M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. XVI, p. 133), à faire une remarque intéressante que nous pouvons énoncer ainsi: La distance qui sépare les nombres algébriques d'ordre ν des nombres rationnels dont le numérateur et le dénominateur sont de l'ordre de t, est au moins de l'ordre de $t^{-\nu}$.

»Ce résultat découle immédiatement de l'introduction de limites inférieures pour $|(c, z_\alpha)|$, et il me semble que cette introduction est le seul point essentiel ajouté dans ce Mémoire aux principes clairement indiqués par Lejeune-Dirichlet, dans sa Note de 1842.

»9. Pour obtenir les résultats concernant les unités complexes, nous ferons $n = \nu - \lambda$; nous supposerons que les coefficients de $F(z)$ soient des nombres entiers, le coefficient de z^n étant égal à l'unité, et nous prendrons pour $z'_\alpha, z''_\alpha, \ldots, z_\alpha^{(n)}$ les puissances successives $z_\alpha^{n-1}, z_\alpha^{n-2}, \ldots, z_\alpha^0$ de z_α, ou plus généralement un système fondamental d'une *espèce* de nombres algébriques entiers du *genre* z_α; nous savons alors (*Crelle*, t. XCII, p. 13, 20 et 99[1]) que chaque fonction entière à coefficients entiers de $z'_\alpha, z''_\alpha, \ldots, z^{(n)}_\alpha$ peut s'exprimer en fonction homogène linéaire à coefficients entiers de ces mêmes $z'_\alpha, z''_\alpha, \ldots, z^{(n)}_\alpha$.

»Ceci posé, on a $\mathrm{M}=1$, $\theta_1\theta_2\ldots\theta_n = t_1t_2\ldots t_n$, et la limite inférieure du nombre des expressions (c_ϱ, z_α) est donnée par $\mathrm{E}\left[\frac{(rt)^n-1}{\theta_1\theta_2\ldots\theta_n}\right]$. Il faut donc choisir les θ de manière à satisfaire à la condition

$$\theta_1\theta_2\ldots\theta_n \leqq (rt)^n - 1.$$

Cette dernière est vérifiée si, p désignant le produit $(rt)^n\,\frac{\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\ldots\mathrm{S}_n}{\theta_1\theta_2\ldots\theta_n}$, nous prenons pour p un nombre arbitraire plus grand que $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\ldots\mathrm{S}_n$.

»Mais les inégalités du § 6 nous donnent pour $\nu = n$, $\lambda = 1$, les suivantes:

$$\frac{1}{p}\,\frac{rt\,\mathrm{S}_\alpha}{\theta_\alpha} < |(c_\varrho, z_\alpha)| < \frac{rt\,\mathrm{S}_\alpha}{\theta_\alpha} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, n).$$

Le produit de leurs limites supérieures est p; nous aurons donc aussi

$$1 \leqq \prod_\alpha |(c_\varrho, z_\alpha)| < p \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, n),$$

résultat que nous aurions pu obtenir directement en posant $n = \nu = \lambda$ dans les inégalités du § 6.

»Si maintenant nous posons $\theta_\alpha = r_\alpha t^{1+\sigma_\alpha}$, et si q désigne un nombre quelconque plus petit que $\frac{1}{p}$, nous aurons

$$q\,\frac{r\,\mathrm{S}_\alpha}{r_\alpha}\,t^{-\sigma_\alpha} < |(c_\varrho, z_\alpha)| < \frac{r\,\mathrm{S}_\alpha}{r_\alpha}\,t^{-\sigma_\alpha} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, n),$$

où les σ sont des nombres arbitraires, égaux lorsque les θ correspondants

[1]) *L. Kronecker*, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Bd. II S. 260, 267 und 360 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.

sont égaux et soumis à la condition $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = 0$, parce que $t^{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n}$ est égal à $\frac{r^n\,\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\ldots\mathrm{S}_n}{p\,r_1r_2\ldots r_n}$, et que cette fraction est, par définition, indépendante de t.

»Nous obtenons ainsi une approximation simultanée dans un sens plus général que dans le paragraphe précédent, car nous venons de déterminer des systèmes c_ϱ qui nous donnent des valeurs $|(c_\varrho, z_\alpha)|$ d'un ordre $(-\sigma_\alpha)$, arbitrairement fixé pour chaque α.

»De ce résultat nous pouvons déduire un système d'inégalités se prêtant particulièrement à l'objet que nous avons en vue. Nous choisissons, à cet effet, la valeur réciproque de t égale à une puissance entière et positive τ de q, ce qui nous permet d'écrire l'inégalité précédente sous la forme

$$\frac{r}{r_\alpha}\,\mathrm{S}_\alpha\,q^{\tau\sigma_\alpha+1} < |(c_\varrho, z_\alpha)| < \frac{r}{r_\alpha}\,\mathrm{S}_\alpha\,q^{\tau\sigma_\alpha}.$$

Les nombres arbitraires $q, r, r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont soumis à l'unique condition

$$q\,\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\cdots\mathrm{S}_n \leqq \frac{r_1r_2\ldots r_n}{r^n} < 1;$$

chaque S_α dépend des $z'_\alpha, z''_\alpha, \ldots, z^{(n)}_\alpha$ correspondants, et τ doit être pris assez grand pour que la condition $(rt)^n - 1 \geqq r_1r_2\ldots r_n t^n$ ou bien $r^n - r_1r_2\ldots r_n \geqq q^{\tau n}$ soit vérifiée. Les σ sont arbitraires pourvu que leur somme soit nulle. Nous prendrons

$$\sigma_1 = 1,\ \ \sigma_2 = 0,\ \ \sigma_3 = \sigma_4 = \cdots = \sigma_{n-2} = 0,\ \ \sigma_{n-1} = 0,\ \ \sigma_n = -1;$$
$$\sigma_1 = 1,\ \ \sigma_2 = 1,\ \ \sigma_3 = \sigma_4 = \cdots = \sigma_{n-2} = 0,\ \ \sigma_{n-1} = 0,\ \ \sigma_n = -2;$$
$$\sigma_1 = 1,\ \ \sigma_2 = 1,\ \ \sigma_3 = \sigma_4 = \cdots = \sigma_{n-2} = 0,\ \ \sigma_{n-1} = -1,\ \ \sigma_n = -1,$$

suivant que toutes les racines z_α sont réelles, ou que deux z_α seulement, z_1 et z_2, sont imaginaires conjuguées, ou enfin que, outre z_1 et z_2, z_{n-1} et z_n, au moins, sont imaginaires conjuguées.

»Si alors nous désignons, avec Lejeune-Dirichlet (1846), par h le nombre de racines z_α de l'équation fondamentale différentes en valeur absolue, il est bien facile de voir que pour $h-2$ des expressions $|(c_\varrho, z_\alpha)|$, correspondant aux h valeurs $|z_\alpha|$, les σ sont nuls. Nous avons donc $h-2$ expressions $|(c_\varrho, z_\alpha)|$ pour lesquelles les limites sont $\frac{r}{r_\alpha}\mathrm{S}_\alpha q$ et $\frac{r}{r_\alpha}\mathrm{S}_\alpha$, et par suite sont indépendantes de τ. Pour $|(c_\varrho, z_1)|$, nous avons, au contraire,

$$\frac{r}{r_1}\mathrm{S}_1 q^{\tau+1} < |(c_\varrho, z_\alpha)| < \frac{r}{r_1}\mathrm{S}_1 q^{\tau}.$$

Comme les intervalles donnés par cette dernière inégalité sont différents pour deux valeurs différentes de l'entier τ, et que nous pouvons donner à τ une infinité de valeurs, nous obtenons un nombre infini d'expressions différentes (c_ϱ, z_1). D'ailleurs, toutes ces expressions ont une norme plus petite que $\frac{1}{q}$, en valeur absolue. Il y en a donc un nombre infini qui ont même norme et sont congrues entre elles suivant un module fixé arbitrairement. Si maintenant nous prenons ce module égal au produit de tous les nombres plus petits que $\frac{1}{q}$, nous obtenons un nombre infini de nombres complexes (c_ϱ, z_α) divisibles l'un par l'autre. Leurs quotients (a_ϱ, z_α) sont des *unités complexes* dont les valeurs absolues sont comprises, pour $h-2$ des conjuguées, entre les quotients des limites des expressions $|(c_\varrho, z_\alpha)|$, q et $\frac{1}{q}$, ou, si l'on veut

$$\frac{r_1 r_2 \ldots r_n}{r^n \mathrm{S}_1 \mathrm{S}_2 \ldots \mathrm{S}_n} \quad \text{et} \quad \frac{r^n \mathrm{S}_1 \mathrm{S}_2 \ldots \mathrm{S}_n}{r_1 r_2 \ldots r_n}.$$

Ainsi:

»Dans chaque espèce de nombres algébriques, il y a un nombre infini »d'unités ayant chacune, en valeur absolue, toutes ses conjuguées, à l'ex»ception de deux, comprises entre des limites finies.»

»C'est la démonstration de ce théorème que j'avais en vue. Le résultat de Lejeune-Dirichlet (1846) s'en déduit à l'aide des considérations bien simples que j'ai développées dans ma Thèse de 1845[1]).

[1]) De unitatibus complexis. Bd. I S. 5—44 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.

»10. En nous appuyant sur les § 10 à 12 de cette Thèse, *De unitatibus complexis*, nous démontrerons successivement:

»1° Qu'il n'y a qu'un nombre fini d'unités dont plus de $h-2$ valeurs absolues conjuguées sont comprises entre des limites finies;

»2° Qu'il y a donc, parmi les unités complexes (a_ϱ, z_α) du théorème précédent, $h-1$ qui sont *indépendantes* (Lejeune-Dirichlet, 1846);

»3° Que, parmi les systèmes indépendants, il y a une infinité de systèmes *fondamentaux*.

»Rappelons que l'on nomme *indépendantes* les unités complexes

$$\text{(A)} \qquad |(a_1, z_\alpha)|, \quad |(a_2, z_\alpha)|, \ldots, |(a_g, z_\alpha)| \qquad {\scriptstyle (\alpha=1,\,2,\,\ldots,\,n)},$$

lorsque le produit

$$\text{(B)} \qquad |(a_1, z_\alpha)^{m_1}(a_2, z_\alpha)^{m_2}\ldots(a_g, z_\alpha)^{m_g}| \qquad {\scriptstyle (\alpha=1,\,2,\,\ldots,\,n)},$$

est différent de l'unité pour *tous* les systèmes $m_1, m_2, \ldots, m_g$ différents du système $0, 0, \ldots, 0$, et que la suite (A) représente, pour $g=h-1$, un système *fondamental* lorsque l'expression (B) nous donne toutes les unités de l'espèce $(z'_\alpha, z''_\alpha, \ldots, z^{(n)}_\alpha)$, les m étant entiers.

»I. En fixant des limites pour $h-1$ valeurs absolues conjuguées d'une unité complexe (a, z_α), nous limitons les valeurs de ses coefficients, et, par suite, le nombre de systèmes des entiers $a', a'', \ldots, a^{(n)}$.

»II. Le théorème du § 9 nous donne une suite infinie $|(a_\varrho, z_\alpha)|$. Considérons, parmi ces unités, celles que l'on peut exprimer par un produit de puissances de g unités indépendantes, choisies arbitrairement. Pour déterminer les exposants de ces puissances, il suffit de choisir g conjuguées de l'unité à représenter. Si g est plus petit que $h-1$, nous pouvons prendre les g unités conjuguées parmi celles dont les valeurs absolues sont comprises entre des limites finies; alors les exposants eux-mêmes et, par suite, toutes les h valeurs conjuguées restent finies. Mais nous venons de démontrer que ces unités ne sont pas en nombre infini. Ainsi, si g est plus petit que $h-1$, nous pouvons sûrement trouver, dans la suite infinie (a_ϱ, z_α), une unité qui forme avec les g précédentes un système indépendant.

»III. *Toute* unité $|(a, z_\alpha)|$ de l'espèce considérée peut être exprimée par l'expression (B) dans le cas où $g=h-1$; on a donc

$$|(a, z_\alpha)| = |(a_1, z_\alpha)^{m_1}(a_2, z_\alpha)^{m_2}\dots(a_{h-1}, z_\alpha)^{m_{h-1}}| \qquad (\alpha=1, 2, \dots, h).$$

Car, si nous déterminons $m_1, m_2, \dots, m_{h-1}$ à l'aide de $h-1$ de ces h équations, la dernière est également vérifiée.

»Les exposants m sont nécessairement rationnels; en effet, s'il en était autrement, nous obtiendrions, en nombre infini, des unités

$$|(a_1, z_\alpha)|^{\mu m_1 - r_1^{(\mu)}}\,|(a_2, z_\alpha)|^{\mu m_2 - r_2^{(\mu)}}\dots|(a_{h-1}, z_\alpha)|^{\mu m_{h-1} - r_{h-1}^{(\mu)}} \qquad (\mu=1, 2, \dots),$$

toutes comprises entre des limites finies, pour des entiers r tels que $0 \leq \mu m_k - r_k^{(\mu)} < 1$.

»Les exposants seront entiers si l'on prend pour indépendantes: 1° l'une des expressions (B), dans laquelle le nombre rationnel m_1 est positif et minimum; 2° l'une des expressions (B) dans laquelle, m_1 étant nul, m_2 est positif et minimum, etc. De cette manière, on parvient à un système fondamental; il est facile d'en déduire une infinité d'autres, si $h>2$.

»Supposons que $(a_1, z_\alpha), (a_2, z_\alpha), \dots, (a_{h-1}, z_\alpha)$ forment un système fondamental. Comme alors une unité quelconque (a, z_α) satisfait à une relation

$$|(a, z_\alpha)| = |(a_1, z_\alpha)^{m_1}(a_2, z_\alpha)^{m_2}\dots(a_{h-1}, z_\alpha)^{m_{h-1}}| \qquad (\alpha=1, 2, \dots, n),$$

dans laquelle les m sont entiers, les n unités conjuguées

$$(a, z_\alpha)^{-1}(a_1, z_\alpha)^{m_1}(a_2, z_\alpha)^{m_2}\dots(a_{h-1}, z_\alpha)^{m_{h-1}} \qquad (\alpha=1, 2, \dots, n)$$

sont, en valeur absolue, égales à 1. Or, j'ai démontré (*Journal de Crelle*, t. 53, p. 173[1]) que »les racines de l'unité sont les seuls nombres algébriques dont »les valeurs absolues conjuguées soient toutes égales à 1.» Nous obtenons donc le théorème de Lejeune-Dirichlet:

»Toute unité d'une espèce donnée dont le nombre de conjuguées en valeur absolue est h peut être représentée par $h-1$ unités fondamentales et une racine de l'unité, contenue dans l'espèce, en élevant chacun de ces éléments à une puissance entière et en formant leur produit.

»Lejeune-Dirichlet fait remarquer que ce théorème donne la solution *complète*, en nombres entiers w, de l'équation $\mathrm{Nm}\,(w, z_\alpha) = 1$. Je ferai observer cependant qu'on suppose connus $h-1$ systèmes de n nombres fondamentaux w; alors seulement le théorème précédent permet de former rationnellement tous les nombres w; mais il n'est pas démontré qu'en général on ne peut y parvenir à l'aide d'un nombre moindre de systèmes fondamentaux. Ce point demande d'autant plus d'être éclairci que, dans le cas des équations abéliennes, il suffit toujours de connaître *deux* systèmes de n nombres fondamentaux w, comme je l'ai montré dans ma Thèse, à laquelle je renverrai pour plus de détails.»

[1]) Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten. Bd. I. S. 103—108 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

ADDITIONS AU MÉMOIRE SUR LES UNITÉS COMPLEXES.

PAR

M. L. KRONECKER.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCIX, II Sem. 765—771,
séance du 10 novembre 1884.

ADDITIONS AU MÉMOIRE SUR LES UNITÉS COMPLEXES.

»Je voudrais généraliser et simplifier à la fois les considérations contenues dans la première Partie du Mémoire que j'ai communiqué à l'Académie, en janvier 1883[1]).

»I. Désignons par $(x_{1\varrho}, x_{2\varrho}, \ldots, x_{k\varrho})$ un système de valeurs des variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_k$, c'est-à-dire un point de la variété $k^{\text{ième}}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$; on sait que l'on peut représenter ce point par la forme linéaire à coefficients indéterminés $u_1 x_{1\varrho} + u_2 x_{2\varrho} + \cdots + u_k x_{k\varrho}$ *).

»Prenons m points quelconques et partageons-les en g groupes arbitraires; un de ces groupes, au moins, en contiendra $\frac{m}{g} + p$, où $p \geqq 0$. Il n'est pas nécessaire que les points considérés soient tous différents, et, s'il y a des points identiques, il n'est pas nécessaire qu'ils fassent partie du même groupe.

»II. En posant

$$x_\alpha = w' y'_\alpha + w'' y''_\alpha + \cdots + w^{(n)} y^{(n)}_\alpha = (w, y_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k),$$

$y'_\alpha, y''_\alpha, \ldots, y^{(n)}_\alpha$ étant des quantités réelles déterminées et $w', w'', \ldots, w^{(n)}$ des variables réelles, à chaque point de la variété $n^{\text{ième}}$ $(w', w'', \ldots, w^{(n)})$

*) *Crelle*, t. 92, p. 49[2]).

[1]) Bd. III S. 1—19 dieser Ausgabe. H.
[2]) Bd. II S. 301 und 302 dieser Ausgabe. H.

correspond un point de la variété $k^{\text{ième}}$ $(x', x'', \ldots, x^{(k)})$. Si, pour fixer les m points $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ du n° I, nous employons m points

$$(w'_\varrho, w''_\varrho, \ldots, w^{(n)}_\varrho) \qquad (\varrho=1, 2, \ldots, m),$$

il y en aura $\frac{m}{g}+p$ tels que leurs correspondants $(x_{1\varrho}, x_{2\varrho}, \ldots, x_{k\varrho})$ soient contenus dans un même groupe*). Et si nous formons les m systèmes $(w'_\varrho, w''_\varrho, \ldots, w^{(n)}_\varrho)$ en prenant t nombres entiers consécutifs pour chacun des n éléments du système $(w', w'', \ldots, w^{(n)})$, nous aurons $m=t^n$.

»III. Si I_α désigne une quantité telle que la valeur de

$$w'y'_\alpha + w''y''_\alpha + \cdots + w^{(n)}y^{(n)}_\alpha$$

reste comprise dans un intervalle I_α, lorsque chaque coefficient $w^{(k)}$ prend toutes les valeurs comprises dans un intervalle égal à l'unité, il est bien évident que les quantités $x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \ldots, x_{\alpha m}$ seront comprises dans un intervalle égal à tI_α. Ces intervalles $tI_1, tI_2, \ldots, tI_k$ déterminent un prismatoïde $\mathrm{P}_t^{(k)}$ dans lequel sont situés les m points

$$(x_{1\varrho}, x_{2\varrho}, \ldots, x_{k\varrho}) \qquad (\varrho=1, 2, \ldots, m).$$

»IV. Pour former les g groupes arbitraires du n° I, partageons I_α en θ_α parties égales**), par conséquent $\mathrm{P}_t^{(k)}$ en $\theta_1\theta_2\ldots\theta_k$ prismatoïdes partiels $\Pi_t^{(k)}$, et comprenons dans un même groupe tous les points situés dans un même prismatoïde $\Pi_t^{(k)}$. Nous aurons alors $g=\theta_1\theta_2\ldots\theta_k$, et, comme $m=t^n$, l'un au moins des prismatoïdes partiels contiendra un nombre de points

*) Ce résultat nous conduit immédiatement à celui du n° 3 de mon Mémoire précédent, pour $g=t_1t_2\ldots t_\nu$. L'hypothèse du n° 1, relative aux quantités z, peut être omise sans que les développements des n^os 1, 2, 3 en soient affectés, pourvu que nous admettions, comme nous le faisons ici, des expressions $w'z'+w''z''+\cdots+w^{(n)}z^{(n)}$ dont les valeurs sont égales.

**) Quelques-uns des nombres θ_α peuvent être égaux à l'unité.

$$[(w_\varrho, y_1),\ (w_\varrho, y_2), \ldots, (w_\varrho, y_k)]$$

égal à

$$\frac{t^n}{\theta_1\theta_2\ldots\theta_k}+p, \quad \text{où} \quad p \geqq 0.$$

»Le prismatoïde $\mathrm{P}_t^{(k)}$ est limité, entre autres, par 2^{k-a} prismatoïdes de variété $a^{\text{ième}}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_a)$. Pour chacun de ces prismatoïdes les quantités $x_{a+1}, \ldots, x_k$ ont des valeurs déterminées. Soit $\mathrm{P}_t^{(a)}$ le prismatoïde pour lequel $x_{a+1}=\xi_{a+1}, \ldots, x_k=\xi_k$. A chaque point $(x_{1\varrho}, x_{2\varrho}, \ldots, x_{k\varrho})$ de $\mathrm{P}_t^{(k)}$ correspond un point $(x_{1\varrho}, \ldots, x_{a\varrho}, \xi_{a+1,\varrho}, \ldots, \xi_{k\varrho})$ de $\mathrm{P}_t^{(a)}$; donc au prismatoïde $\Pi_t^{(k)}$ correspond un prismatoïde $\Pi_t^{(a)}$, et $\mathrm{P}_t^{(a)}$ est ainsi divisé en $\theta_1\theta_2\ldots\theta_a$ prismatoïdes $\Pi_t^{(a)}$.

»V. Dans ce qui va suivre, nous considérerons des fonctions homogènes de dimension *un*, ne dépendant que des valeurs absolues de leurs arguments réels et n'étant jamais ni négatives ni infinies pour des valeurs finies de ces mêmes arguments, ne s'évanouissant d'ailleurs que si tous les arguments sont nuls, comme par exemple la valeur absolue de $\sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}$ ou encore de $\sqrt[4]{x_1^4+\cdots+x_k^4}$. Nous désignerons par $\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ces fonctions qui sont, en quelque sorte, «*distantives*» par rapport aux deux points $(x_1, \ldots, x_k)$ et $(0, \ldots, 0)$.

»Si $\varDelta$ est la valeur maximum de $\mathrm{D}(x_1-x'_1, \ldots, x_a-x'_a, 0, \ldots, 0)$ pour deux points quelconques

$$(x_1, \ldots, x_a, \xi_{a+1}, \ldots, \xi_k) \quad \text{et} \quad (x'_1, \ldots, x'_a, \xi_{a+1}, \ldots, \xi_k)$$

du prismatoïde $\mathrm{P}_t^{(a)}$, nous aurons, en considérant deux points

$$(x_{1\varrho}, \ldots, x_{a\varrho}, \xi_{a+1}, \ldots, \xi_k) \quad \text{et} \quad (x'_{1\varrho}, \ldots, x'_{a\varrho}, \xi_{a+1}, \ldots, \xi_k)$$

situés dans un même prismatoïde partiel $\Pi_t^{(a)}$ et en faisant usage de l'homogénéité de D, l'inégalité

$$\mathrm{D}(x_{1\varrho}-x'_{1\varrho},\ \ldots,\ x_{a\varrho}-x'_{a\varrho},\ 0,\ \ldots,\ 0)\leqq\frac{\varDelta}{\theta_a},$$

pourvu que nous choisissions $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_a$. Et, si S_a est la valeur maximum de la fonction distantive D pour deux points quelconques du prismatoïde de variété $a^{\text{ième}}$ déterminé par les quantités $I_1, \ldots, I_a$ du n° III, nous pourrons remplacer cette inégalité par la suivante:

$$\mathrm{D}(x_{1\varrho}-x'_{1\varrho},\ \ldots,\ x_{a\varrho}-x'_{a\varrho},\ 0,\ \ldots,\ 0)\leqq\frac{t\,\mathrm{S}_a}{\theta_a}.$$

»La différence $x_{a\varrho}-x'_{a\varrho}$ est, d'après le n° II, une fonction homogène linéaire de $y'_a, y''_a, \ldots, y^{(n)}_a$, à coefficients entiers, plus petits que t, en valeur absolue. Si donc nous écrivons

$$x_{a\varrho}-x'_{a\varrho}=c'_\varrho y'_a+c''_\varrho y''_a+\cdots+c^{(n)}_\varrho y^{(n)}_a=(c_\varrho,\ y_a),$$

l'inégalité précédente nous montre, en tenant compte des développements du n° IV, que nous pouvons toujours déterminer $\dfrac{t^n}{\theta_1\theta_2\ldots\theta_k}+p-1$ systèmes d'entiers c, satisfaisant à la fois aux inégalités

$$|c'_\varrho|<t;\quad |c''_\varrho|<t;\quad \ldots;\quad |c^{(n)}_\varrho|<t;$$

$$\mathrm{D}\,[(c_\varrho,\ y_1),\ (c_\varrho,\ y_2),\ \ldots,\ (c_\varrho,\ y_a),\ 0,\ \ldots,\ 0]\leqq\frac{t\,\mathrm{S}_a}{\theta_a}.$$

Pour être certain qu'il y a de tels systèmes, c'est-à-dire que

$$\frac{t^n}{\theta_1\theta_2\ldots\theta_k}+p-1>0,$$

il suffit de choisir les nombres $t,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_k$, de manière que

$$t^n>\theta_1\theta_2\ldots\theta_k.$$

»Si, au lieu d'une seule fonction distantive D, nous en avions considéré plusieurs, D′, D″, ..., $\mathrm{D}^{(\nu)}$, rien ne serait changé aux développements

précédents. Nous voyons donc immédiatement qu'il existe des entiers c plus petits que t, en valeur absolue, et tels que les valeurs des ν fonctions D′, D″, ..., $\mathrm{D}^{(\nu)}$, dont les arguments sont les $(c_\varrho,\ y_a)$, ne dépassent pas respectivement $\dfrac{t\,\mathrm{S}_a}{\theta_a},\ \dfrac{t\,\mathrm{S}_b}{\theta_b},\ \cdots$, a étant le nombre d'arguments différents de zéro de la fonction D′, b étant le nombre d'arguments différents de zéro de la fonction D″, ...

»En particulier, lorsque les arguments de D′, différents de zéro, sont $x_{a+1},\ \ldots,\ x_{a+b}$, que ceux de D″ sont $x_{a+b+1},\ \ldots,\ x_{a+b+c}$, et ainsi de suite, la somme $a+b+c+\cdots$ étant égale à k, nous sommes certains de pouvoir trouver des entiers c_ϱ vérifiant les n inégalités

$$|c'_\varrho|<t,\quad |c''_\varrho|<t,\ \ldots,\quad |c^{(n)}_\varrho|<t,$$

ainsi que les ν inégalités

$$\mathrm{D}'\,[(c_\varrho,\ y_1),\ \ldots,\ (c_\varrho,\ y_a),\ 0,\ \ldots,\ 0]\leqq\frac{t\,\mathrm{S}_a}{\theta_a},$$

$$\mathrm{D}''\,[0,\ \ldots,\ 0,\ (c_\varrho,\ y_{a+1}),\ \ldots,\ (c_\varrho,\ y_{a+b}),\ 0,\ \ldots,\ 0]\leqq\frac{t\,\mathrm{S}_b}{\theta_b},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

pourvu que $t^n>\theta_1\theta_2\ldots\theta_k$. Puisque

$$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_a;\quad \theta_{a+1}=\theta_{a+2}=\cdots=\theta_{a+b};\ \cdots,$$

en posant $\theta_a^a=t_1,\ \theta_{a+b}^b=t_2,\ \ldots$, la condition précédente devient

$$t^n>t_1t_2\ldots t_\nu.$$

»Le résultat que nous venons d'obtenir est plus général que celui du n° 5 du Mémoire déjà cité; il lui est identique lorsque chacun des entiers $a,\ b,\ \ldots$ est égal à 1 ou 2, et que les fonctions distantives D′, D″, ..., $\mathrm{D}^{(\nu)}$ expriment vraiment la distance des points dont elles dépendent. Cette dernière condition est, d'ailleurs, inutile lorsqu'un seul des arguments de D est différent de zéro, car, dans ce cas, D se réduit toujours à la valeur absolue de son unique argument.

»VI. En substituant les expressions $c'y'_\alpha + \cdots + c^{(n)}y^{(n)}_\alpha$ aux arguments $x_\alpha - x'_\alpha$ des fonctions distantives D, ces dernières deviennent des fonctions déterminées de $c', c'', \ldots, c^{(n)}$; nous les désignerons par $\Delta', \Delta'', \ldots, \Delta^{(\nu)}$. Les considérations qui précèdent nous donnent le moyen de résoudre approximativement, par des systèmes d'entiers, les ν équations

$$\Delta' = 0, \quad \Delta'' = 0, \quad \ldots, \quad \Delta^{(\nu)} = 0.$$

»En effet, pour $\theta_a = t^{1+\sigma_1}$, $\theta_b = t^{1+\sigma_2}$, ...*), la condition $t^n > t_1 t_2 \ldots t_\nu$ devient

$$a(1+\sigma_1) + b(1+\sigma_2) + \cdots < n \quad \text{ou bien} \quad a\sigma_1 + b\sigma_2 + \cdots < n - k;$$

et, en substituant aux arguments c les nombres c_ϱ, nous avons

$$\Delta' \leqq t^{-\sigma_1} S_a, \quad \Delta'' \leqq t^{-\sigma_2} S_b, \quad \ldots.$$

»Donc, pourvu que n soit plus grand que k et que nous prenions pour $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ des quantités positives, vérifiant l'inégalité

$$a\sigma_1 + b\sigma_2 + \cdots < n - k,$$

les valeurs de $\Delta', \Delta'', \ldots$ pourront être rendues aussi petites que l'on veut, en choisissant le nombre t suffisamment grand. On voit aussi que, en augmentant t, on obtient de nouveaux systèmes $(c'_\varrho, c''_\varrho, \ldots, c^{(n)}_\varrho)$ vérifiant simultanément, avec une approximation de plus en plus grande, les ν équations $\Delta = 0$, à moins qu'il n'y ait un système $(c'_\varrho, c''_\varrho, \ldots, c^{(n)}_\varrho)$ les vérifiant absolument.

*) Comparez n° 9 de mon Mémoire *Sur les unités complexes*[1]).

[1]) Bd. III S. 14 dieser Ausgabe. H.

»Remarquons que l'on peut considérer la résolution approximative des ν équations $\Delta = 0$ comme une résolution approximative des k équations linéaires $(c, y_\alpha) = 0$, telles que les fonctions distantives $D', D'', \ldots, D^{(\nu)}$ des petites valeurs de (c, y_α) deviennent elles-mêmes petites d'un ordre déterminé par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$.

»VII. Dans le cas particulier du Mémoire plusieurs fois cité, nous obtenons ainsi une résolution approximative des équations du n° 7:

$$c'z'_\alpha + c''z''_\alpha + \cdots + c^{(n)}z^{(n)}_\alpha = 0 \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1, \ldots, \lambda)},$$

en posant $y_\alpha = z_\alpha$ lorsque la fonction D est égale à $|(c, y_\alpha)|$ et $y_\alpha + iy_\beta = z_\alpha$, $y_\alpha - iy_\beta = z_\beta$ lorsqu'elle est égale à $|(c, y_\alpha) + i(c, y_\beta)|$; k est alors égal à λ. L'approximation est alors telle que la valeur absolue des nombres c reste plus petite que t et que les valeurs absolues des expressions (c, z_α) sont de l'ordre $t^{-\sigma_\alpha}$. Il faut remarquer que si z_α et z_β sont des imaginaires conjuguées, on a $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$.

»Nous avons, dans le n° 7, choisi tous les σ égaux, donc $\sigma = \frac{n}{\lambda} - 1$; en d'autres termes, nous avons considéré le cas où l'approximation de toutes les équations est de l'ordre $t^{1-\frac{n}{\lambda}}$.

»Dans ce même numéro, nous avons passé de la résolution approximative des équations à coefficients entiers $(c, z_\alpha) = 0$ à celle des équations à coefficients rationnels $z'_\alpha + \gamma''z''_\alpha + \cdots + \gamma^{(n)}z^{(n)}_\alpha = 0$. L'ordre d'approximation de cette dernière équation est $t^{-\frac{n}{\lambda}}$, à condition toutefois que l'un au moins des coefficients c, celui par lequel nous divisons (c, z_α), soit vraiment d'ordre t. Nous avons omis de parler de cette condition. Pour qu'elle soit satisfaite, il est nécessaire et suffisant que l'approximation donnée par les coefficients c soit la meilleure possible.

»En effet, si, dans une certaine approximation, le plus grand des coefficients c est de l'ordre $t\varrho$, où $\varrho \overline{\overline{<}} 1$, tandis que (c, z_α) est de l'ordre $t^{-\sigma_\alpha}$, nous avons aussi, en écrivant t_1 au lieu de t_ϱ, une approximation de l'ordre $\left(\frac{t_1}{\varrho}\right)^{-\sigma_\alpha}$, le plus grand des coefficients c étant de l'ordre t_1. Si ϱ est plus petit que *un*, il y a donc une approximation meilleure que $t^{-\sigma_\alpha}$, et inversement, si nous savons qu'il n'y a pas de meilleure approximation que $t^{-\sigma_\alpha}$, nous pouvons en conclure que $\varrho = 1$, c'est-à-dire que l'un au moins des coefficients c, qui sont, par hypothèse, plus petits que t, atteint l'ordre de t

»Nous avons indiqué, dans les n^{os} 7 et 8, les cas où la méthode suivie nous donne sûrement la meilleure approximation possible.

»Nous avons ensuite appliqué les résultats obtenus à la réduction approximative d'une équation $F(z) = 0$ de degré n. Nous avons montré que l'on obtient la meilleure approximation possible lorsque l'équation réduite est choisie de degré $n-1$. Alors, comme nous venons de le voir, l'un au moins des coefficients c_ϱ, par exemlpe $c_\varrho^{(h)}$, est nécessairement de l'ordre t; si donc c'_ϱ était d'un ordre moindre, le quotient $\frac{c_\varrho^{(h)}}{c'_\varrho}$ croîtrait indéfiniment avec t, ce qui est impossible lorsque l'équation $\Phi(z) = 0$ doit être vérifiée approximativement par $n-1$ des racines de $F(z) = 0$. Donc, pour $\lambda = n-1$, nous pourrons passer de l'équation réduite

$$c'_\varrho z^{n-1} + \cdots + c_\varrho^{(n)} = 0$$

à l'équation $\Phi(z) = 0$, où le coefficient de la plus haute puissance de z est égal à l'unité. Il faut nous restreindre à ce cas $\lambda = n-1$, parce que, pour $\lambda < n-1$, il pourrait arriver que c'_ϱ fût d'un ordre inférieur à t.

»Il résulte de ce qui précède qu'il faut chercher à faire la réduction approximative d'une équation de degré n par une équation de degré $n-1$ à coefficients réels, vérifiée approximativement par $n-1$ des racines de l'équation donnée.»

DIE PERIODENSYSTEME VON FUNCTIONEN REELLER VARIABELN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1884. S. 1071—1080.

DIE PERIODENSYSTEME VON FUNCTIONEN REELLER VARIABELN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 20. November 1884.]

I. Es sei a_{ik} für $i = 1, 2, \ldots p$ und $k = 1, 2, \ldots q$ irgend ein System reeller Grössen, und $F(x_1, x_2, \ldots x_p)$ sei eine eindeutige, gleichmässig stetige Function der reellen Variabeln x, für welche die Gleichung:

$$\text{(A)} \qquad F(x_1, x_2, \ldots x_p) = F(x_1 + a_{1k}, x_2 + a_{2k}, \ldots x_p + a_{pk})$$

besteht, wenn man dem Index k einen beliebigen der Werthe $1, 2, \ldots q$ beilegt. Bedeutet dann n die grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht sämmtliche aus dem System a_{ik} zu bildenden Determinanten n^{ter} Ordnung verschwinden, so kann unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass die aus den *ersten* n^2 Elementen a_{ik} gebildete Determinante:

$$|a_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung existirt ein System von n^2 Elementen a'_{gh}, welches den Relationen:

$$\sum_g a'_{fg} a_{gh} = \sum_g a_{fg} a'_{gh} = \delta_{fh} \qquad (f, g, h = 1, 2, \ldots n)$$

genügt, und welches ich in meiner Mittheilung vom 27. Juli 1882[1]) als das „*reciproke*“ des Systems a_{gh} bezeichnet habe. Dabei ist, wie gewöhnlich, $\delta_{fh} = 0$ oder $\delta_{fh} = 1$, je nachdem die beiden Indices von einander verschieden oder einander gleich sind.

---

[1]) Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme; Bd. II S. 389—396 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. S. S. 391. H.

II. Führt man p neue Variabeln y ein, welche mit den Variabeln x durch die Relationen:

$$\begin{aligned} x_g &= \sum_h a_{gh} y_h, \quad x_i = y_i + \sum_g a_{ig} y_g \\ y_g &= \sum_h a'_{gh} x_h, \quad y_i = x_i - \sum_g \sum_h a_{ig} a'_{gh} x_h \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g,\, h = 1, 2, \ldots n \\ i = n+1, n+2, \ldots p \end{pmatrix}$$

verbunden sind, so geht die eindeutige Function $F(x_1, x_2, \ldots x_p)$ in eine ebenfalls eindeutige, gleichmässig stetige Function $G(y_1, y_2, \ldots y_p)$ über, für welche eine der Gleichung (A) entsprechende Gleichung:

$$\text{(B)} \qquad G(y_1, y_2, \ldots y_p) = G(y_1 + b_{1k}, y_2 + b_{2k}, \ldots y_p + b_{pk}) \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

besteht. Dabei werden die pq Grössen b_{ik} durch die Gleichungen:

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} b_{fk} &= \sum_h a'_{fh} a_{hk} \\ b_{ik} &= a_{ik} - \sum_g \sum_h a_{ig} a'_{gh} a_{hk} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f, g, h = 1, 2, \ldots n \\ i = n+1, n+2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

definirt. Der Ausdruck auf der rechten Seite der letzteren Gleichung ist nichts Anderes als der Determinanten-Quotient:

$$\frac{|a_{rs}|}{|a_{gh}|} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots n, i; & s = 1, 2, \ldots n, k \\ g = 1, 2, \ldots n; & h = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix},$$

dessen Zähler, als Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, gemäss der obigen Voraussetzung gleich Null, dessen Nenner aber von Null verschieden ist. Lässt man hiernach $b_{n+1,k}, b_{n+2,k}, \ldots b_{pk}$, welche gleich Null sind, in der Gleichung (B) weg, so kommt:

$$G(y_1, y_2, \ldots y_p) = G(y_1 + b_{1k}, \ldots y_n + b_{nk}, y_{n+1}, \ldots y_p),$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung gelangt man zu der allgemeineren Gleichung:

$$\text{(B')} \quad G(y_1, y_2, \ldots y_p) = G(y_1 + \sum b_{1k} w_k, \ldots y_n + \sum b_{nk} w_k, y_{n+1}, \ldots y_p),$$

in welcher sich die Summationen auf $k = 1, 2, \ldots q$ beziehen und $w_1, w_2, \ldots w_q$ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Vermöge der ersteren von den Gleichungen (C) wird $b_{fk} = \delta_{fk}$, wenn beide Indices f, k nicht grösser als n sind. Die Gleichung (B') geht daher, wenn man alle Zahlen $w_{n+1}, w_{n+2}, \ldots w_{q-1}$ gleich Null nimmt, in folgende über:

$$\text{(B)} \quad G(y_1, y_2, \ldots y_p) = G(y_1 + w_1 + b_{1q} w_q, \ldots y_n + w_n + b_{nq} w_q, y_{n+1}, \ldots y_p),$$

welche ausdrückt, dass G eine periodische Function in Beziehung auf die ersten n Variabeln ist, die erstens ihren Werth nicht ändert, wenn man jede der n Variabeln um eine beliebige ganze Zahl vermehrt oder vermindert, und zweitens auch dann nicht, wenn man jeder der n Variabeln y_h ein und dasselbe ganze Vielfache von b_{hq} hinzufügt.

III. Wenn die Grössen $b_{1q}, b_{2q}, \ldots b_{nq}$ nicht sämmtlich rational sind, so können doch lineare (homogene oder nicht homogene) Beziehungen mit rationalen Coefficienten zwischen ihnen bestehen. Es wird hierüber offenbar die allgemeinste Annahme gemacht, wenn vorausgesetzt wird, dass die *ersten* m Grössen $b_{1q}, b_{2q}, \ldots b_{mq}$ sich als lineare Functionen der $n-m$ Grössen $b_{m+1,q}, b_{m+2,q}, \ldots b_{nq}$ mit rationalen Coefficienten ausdrücken lassen, dass aber zwischen diesen letzteren Grössen weder eine homogene noch eine nicht homogene lineare Relation mit rationalen Coefficienten besteht. Die Zahl m kann hierbei die Werthe $0, 1, 2, \ldots n$ haben, und für den Fall $m = n$ sind alle n Grössen $b_{1q}, b_{2q}, \ldots b_{nq}$ rationale Zahlen.

Setzt man gemäss der gemachten Voraussetzung, für den Fall $m < n$:

$$b_{hq} = r_{h0} + \sum_k r_{hk} b_{kq} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, m+2, \ldots n \end{pmatrix},$$

wo $r_{h0}, r_{h,m+1}, \ldots r_{hn}$ rationale Zahlen bedeuten, und führt man an Stelle der ersten m Variabeln y neue Variabeln z mittels der Substitution:

$$y_h = z_h + \sum_k r_{hk} y_k \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots m \\ k = m+1, m+2, \ldots n \end{pmatrix}$$

ein, so geht $G(y_1, y_2, \dots y_p)$ in eine eindeutige, gleichmässig stetige Function:

$$H(z_1, z_2, \dots z_m;\ y_{m+1}, y_{m+2}, \dots y_p)$$

über, und an die Stelle von $(\bar{\mathrm{B}})$ tritt eine Gleichung:

$$\text{(D)}\quad H(z_1, z_2, \dots z_m;\ y_{m+1}, y_{m+2}, \dots y_p) = H(z_1^0, z_2^0, \dots z_m^0;\ y_{m+1}^0, y_{m+2}^0, \dots y_p^0),$$

in welcher:

$$\begin{aligned} z_h^0 &= z_h + w_h - \sum_k r_{hk} w_k + r_{h0} w_q \\ y_k^0 &= y_k + w_k + b_{kq} w_q \end{aligned} \qquad \binom{h=1,2,\dots m}{k=m+1,m+2,\dots n}$$

und $y_{n+1}^0 = y_{n+1}$, $y_{n+2}^0 = y_{n+2}$, $\dots$ $y_p^0 = y_p$ zu setzen ist.

IV. Man kann bekanntlich die Werthe irgend welcher n Grössen $b_{1q}, b_{2q}, \dots b_{nq}$ durch rationale Brüche desselben Nenners mit solcher Annäherung darstellen, dass die n Werthunterschiede, noch mit dem Nenner multiplicirt, beliebig klein werden. Dies wird z. B. gleich im Eingange von Hrn. *Hermite*'s Abhandlung «*Sur la fonction exponentielle*» erwähnt. Es erhellt unmittelbar, wenn man erwägt, dass unter den absolut kleinsten Resten von $1 + t^n$ auf einander folgenden ganzen Vielfachen von b_{kq}:

$$\mathrm{R}(sb_{kq}),\ \mathrm{R}((s+1)b_{kq}),\ \mathrm{R}((s+2)b_{kq}),\ \dots\dots\ \mathrm{R}((s+t^n)b_{kq})$$

nothwendig mindestens *zwei* für alle n Werthe von k in einem und demselben Intervalle von der Grösse t^{-1} liegen,*) dass also die Differenz von zwei solchen Resten, welche in der Form:

$$\alpha_k + \beta b_{kq},$$

*) Der Rest, welcher verbleibt, wenn man von einer reellen Grösse a die ihr zunächst benachbarte ganze Zahl subtrahirt, ist hier, wie in meiner Mittheilung vom 7. Februar d. J.[1]) mit $\mathrm{R}(a)$ bezeichnet. Unter t ist eine beliebige positive ganze Zahl zu verstehen.

[1]) Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste; Bd. II S. 497—520. S. S. 500. H.

mit ganzzahligen Coefficienten α_k, β, dargestellt werden kann, ihrem absoluten Werthe nach kleiner als t^{-1} ist, während $|\beta| \leqq t^n$ wird.

Nimmt man nun für $w_1, w_2, \dots w_n, w_q$ ganze Zahlen $w_1', w_2', \dots w_n', w_q'$, für welche die n absoluten Werthe:

$$|w_k' + b_{kq} w_q'| \qquad (k=1,2,\dots n)$$

sämmtlich kleiner als eine willkürlich angenommene Grösse τ sind, so wird auch der absolute Werth des Aggregates von Ausdrücken $w_k' + b_{kq} w_q'$:

$$w_h' + b_{hq} w_q' - \sum_k r_{hk}(w_k' + b_{kq} w_q') \qquad \binom{h=1,2,\dots m}{k=m+1,\dots n}$$

oder des damit übereinstimmenden Ausdrucks:

$$w_h' - \sum_k r_{hk} w_k' + r_{h0} w_q' \qquad \binom{h=1,2,\dots m}{k=m+1,\dots n}$$

beliebig klein, wenn τ hinreichend klein angenommen wird. Dieser Ausdruck stellt aber eine rationale Zahl mit festem, d. h. von der Wahl der Zahlen w' nicht abhängigen Nenner dar; der Ausdruck muss also bei geeigneter Wahl der Zahlen w' sich auf Null reduciren. Setzt man alsdann der Einfachheit halber:

$$\text{(E)}\qquad w_k' + b_{kq} w_q' = b_{kq}' \qquad (k=1,2,\dots m, m+1,\dots n,$$

so wird in der Gleichung (D) von Art. III:

$$z_h^0 = z_h,\quad y_k^0 = y_k + b_{kq}' \qquad \binom{h=1,2,\dots m}{k=m+1,m+2,\dots n},$$

und es besteht daher für solche Zahlen w' die einfachere Relation:

$$\text{(D')}\quad H(z_1,\dots z_m;\ y_{m+1},\dots y_n;\ y_{n+1},\dots y_p) = H(z_1,\dots z_m;\ y_{m+1} + b_{m+1,q}',\dots y_n + b_{nq}';\ y_{n+1},\dots y_p),$$

welche ausdrückt, dass die Function H ihren Werth nicht ändert, wenn den

$n-m$ Variabeln $y_{m+1}, \dots y_n$ beziehungsweise die Grössen $b'_{m+1,q}, \dots b'_{nq}$ hinzugefügt werden, die übrigen Variabeln aber ungeändert bleiben.

V. Es kann unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass der absolute Werth $|b'_{nq}|$ der grösste der Werthe:

$$|b'_{m+1,q}|,\quad |b'_{m+2,q}|, \dots |b'_{nq}|$$

ist. Setzt man nun:

(F) $$y'_k = y_k - \frac{b'_{kq}}{b'_{nq}} y_n \qquad (k=m+1, m+2, \dots n-1),$$

so geht die Function H in eine Function:

$$H'(z_1, z_2, \dots z_m;\ y'_{m+1}, y'_{m+2}, \dots y'_{n-1};\ y_n, y_{n+1}, \dots y_p)$$

über, welche ihren Werth nicht ändert, wenn man y_n um b'_{nq} vermehrt, alle übrigen Variabeln aber ungeändert lässt. Hieraus folgt, dass die Function H' von y_n unabhängig sein muss.

Es muss nämlich, nach der über die ursprüngliche Function $F(x_1, x_2, \dots x_p)$ gemachten Voraussetzung gleichmässiger Stetigkeit, für jede beliebig gegebene positive Grösse σ eine Grösse τ von der Beschaffenheit gefunden werden können, dass die Functionswerthe von:

$$H(z_1, \dots z_m;\ y_{m+1}, \dots y_n;\ y_{n+1}, \dots y_p)$$

sich um weniger als σ von einander unterscheiden, wenn jedes der Argumente nur irgend ein Intervall von der Grösse τ durchläuft. In Bezug auf das Argument y_n bleibt diese Eigenschaft bei der Transformation der Variabeln y in die Variabeln y', unabhängig von jeder Veränderung der Grössen b'_{kq}, erhalten; denn es ist hierfür bei der bezüglichen Substitution (F) durch die über die Wahl von b'_{nq} getroffene Bestimmung vorgesorgt, vermöge deren die Coefficienten der Substitution:

$$\frac{b'_{kq}}{b'_{nq}}$$

ihrem absoluten Werthe nach nicht grösser als Eins werden können. Da nun nach Art. IV die Grössen $|b'_{kq}|$ so zu wählen sind, dass auch die grösste derselben $|b'_{nq}|$ noch kleiner als τ ist, und da die Function H' ihren Werth beibehält, wenn man y_n um ganze Vielfache von b'_{nq} ändert, die übrigen Variabeln aber ungeändert lässt, so folgt, dass der Unterschied *aller* Functionswerthe von H', welche dieselbe bei beliebiger Veränderung von y_n allein annimmt, stets kleiner bleiben muss als jene beliebig gegebene Grösse σ.

VI. Aendert man y_n um eine Einheit, so ändern sich die Variabeln y'_k gemäss der Gleichung (F) des Art. V um die Grössen:

$$-\frac{b'_{kq}}{b'_{nq}} \qquad (k=m+1, m+2, \dots n-1)$$

und die Variabeln z_h gemäss der Gleichung (D) des Art. III um $-r_{hn}$. Nimmt man nun in der vorstehenden Entwickelung an Stelle der n Grössen b_{kq} die $n-1$ Quotienten $\frac{b'_{kq}}{b'_{nq}}$ der durch Gleichung (E) definirten n Grössen b', so kann man daraus $(n-1)$ beliebig kleine Grössen b''_{kq} bilden, die durch Gleichungen:

(E') $$w''_k + \frac{b'_{kq}}{b'_{nq}} w''_n = b''_{kq} \qquad (k=1, 2, \dots n-1)$$

mit ganzzahligen Coefficienten w'' bestimmt sind. Dann bleibt die Function H' ungeändert, wenn gleichzeitig — analog wie in der Gleichung (D) am Schlusse von Art. III — die Variabeln:

$$\begin{matrix} z_h & \text{um} & w''_h - \sum_k r_{hk} w''_k, \\ y'_k & \text{um} & b''_{kq} \end{matrix} \qquad \binom{h=1, 2, \dots m}{k=m+1, m+2, \dots n-1}$$

geändert werden. Zugleich sind die Quotienten der Grössen b', wie die Grössen b, durch die linearen Gleichungen*):

$$\frac{b'_{hq}}{b'_{nq}} - \sum_k r_{hk} \frac{b'_{kq}}{b'_{nq}} \qquad \binom{h=1,2,\dots m}{k=m+1,m+2,\dots n-1}$$

mit einander verbunden; die Aenderung von z_h lässt sich hiernach durch:

$$b''_{hq} - \sum_k r_{hk} b''_{kq} \qquad \binom{h=1,2,\dots m}{k=m+1,m+2,\dots n-1},$$

also durch ein Aggregat beliebig kleiner Grössen darstellen, welches andererseits, wie der ursprüngliche Ausdruck $w''_h - \sum r_{hk} w''_k$ zeigt, durch Multiplication mit dem gemeinsamen Nenner der rationalen Zahlen r_{hk} gleich einer ganzen Zahl werden muss. Es folgt also, genau wie oben im Art. IV, dass bei geeigneter Wahl der Zahlen w'' die Aenderung von z_h sich auf Null reduciren muss. Bestimmt man aus solchen Zahlen w'' gemäss der Gleichung (E') die Grössen b''_{kq} und setzt dann analog der Substitution (F):

$$\text{(F')} \qquad y''_k = y'_k - \frac{b''_{kq}}{b''_{n-1,q}} y'_{n-1} \qquad (k=m+1,m+2,\dots n-2),$$

so geht H' in eine Function H'' über, von der man wie oben erschliesst, dass sie von y'_{n-1} unabhängig ist. Die nothwendige Bedingung für die Zulässigkeit dieser Deduction, dass wenigstens *eine* der Grössen b''_{kq} nicht gleich Null werden könne, ist durch die Voraussetzung erfüllt, welche zu Anfang des Art. III gemacht worden ist. Denn, wenn zwischen den $n-m$ Grössen $b_{m+1,q}, b_{m+2,q}, \dots b_{nq}$ keine lineare Relation mit rationalen Coefficienten besteht, kann das Verhältniss von b'_{kq} zu b'_{nq} offenbar keinen rationalen Werth erhalten.

VII. Durch weitere Fortsetzung der hier entwickelten Schlussweise ergiebt sich, dass die Function:

*) Vgl. Art. III und IV.

$$H(z_1, z_2, \dots z_m;\; y_{m+1}, \dots y_n;\; y_{n+1}, \dots y_p)$$

von den sämmtlichen $n-m$ Variabeln der zweiten Gruppe, nämlich von $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots y_n$ unabhängig sein muss, während sie in Beziehung auf die m Variabeln der ersten Gruppe periodisch ist. Die Perioden sind, wie im Art. III gezeigt worden ist, sämmtlich rationale Zahlen, und eine beliebige Anzahl solcher Periodensysteme lässt sich stets auf m Periodensysteme reduciren. Diese Reduction kann am Einfachsten mittelst der Methode bewirkt werden, welche ich im § 24 meiner Festschrift zu Hrn. *Kummer*'s Doctorjubiläum[1]) bei der Reduction der linearen Fundamentalformen auf solche mit möglichst wenig Gliedern angewandt habe. Dieselbe Methode dient auch zur Reduction eines aus linearen homogenen Functionen beliebig vieler Variabeln gebildeten Divisorensystems auf ein solches, welches die kleinste, d. h. eine mit der Stufenzahl übereinstimmende Anzahl von Elementen enthält; ich will sie aber hier ohne alle Bezugnahme auf die erwähnten Theorieen darlegen.*)

VIII. Bezeichnet man die $m+r$ Periodensysteme der Variabeln z_h mit:

$$c_{hk} \qquad \binom{h=1,2,\dots m}{k=1,2,\dots m+r},$$

und setzt man die Determinante der *ersten* m^2 Grössen c_{hi} als von Null verschieden voraus, so lassen sich die Elemente des $(m+1)^{\text{ten}}$ Periodensystems als lineare homogene Functionen der Elemente der ersten m Periodensysteme mit m rationalen Coefficienten darstellen. Reducirt man diese m Coefficienten sämmtlich, durch Weglassung der grössten Ganzen, auf echte Brüche, so kann man offenbar auch die so entstehenden linearen Functionen an Stelle der Elemente $c_{1,m+1}, c_{2,m+1}, \dots c_{m,m+1}$ des $(m+1)^{\text{ten}}$ Periodensystems nehmen und aber dieses Periodensystem weglassen, wenn bei der angegebenen Reduction die sämmtlichen m Coefficienten der linearen Function gleich Null werden. Wenn dieses Verfahren auf alle r letzten Periodensysteme angewendet ist, muss wenigstens eine der Determinanten m^{ter} Ordnung, welche sich aus den

*) Ich habe die erwähnte Methode bereits im Wintersemester 1865/66 und seitdem fast regelmässig in meinen Universitäts-Vorlesungen auseinandergesetzt.

[1]) Band II. S. 359—370 dieser Ausgabe. H.

neuen $m+r$ Periodensystemen bilden lassen*), kleiner als die Determinante der *ersten* m^2 Grössen c_{hi} sein, und da schon diese als die kleinste von allen des ursprünglichen Systems vorausgesetzt werden konnte, und aber die Determinanten, weil sie rationale Zahlen mit bestimmten Nennern sind, nicht beliebig verkleinert werden können, so muss man bei jenem Verfahren einmal zu m Periodensystemen gelangen, durch welche sich alle folgenden und demnach auch die $m+r$ ursprünglichen Periodensysteme c_{hk} als lineare Functionen mit *ganzzahligen* Coefficienten ausdrücken lassen. Ein solches System von m Periodensystemen kann noch durch lineare Transformation der Variabeln z mit rationalen Coefficienten in das „Einheitssystem" δ_{ik} umgewandelt werden, und es ergiebt sich daher, dass die Function G des Art. I sich durch *lineare Transformation der Variabeln* $y_1, y_2, \ldots y_n$ *mit rationalen Coefficienten* in eine solche umwandeln lässt, welche von $n-m$ Variabeln unabhängig und in Beziehung auf die übrigen m in der Weise periodisch ist, dass jede der Variabeln für sich um eine beliebige ganze Zahl vermehrt oder vermindert werden kann.

IX. Bei der bisherigen Deduction ist nur von der Grössenreihe:

$$b_{kq} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Gebrauch gemacht worden. Werden nun die übrigen Grössenreihen:

$$b_{k,n+1},\ b_{k,n+2},\ \ldots b_{k,q-1} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

in derselben Weise benutzt, so ergiebt sich als *schliessliche* und *erschöpfende* Folgerung aus der durch die Gleichung (A) ausgedrückten Eigenschaft der Function $F(x_1, x_2, \ldots x_p)$, dass

$$F(\Sigma a_{1h}y_h, \ldots \Sigma a_{nh}y_h;\ y_{n+1}+\Sigma a_{n+1,h}y_h, \ldots y_p+\Sigma a_{ph}y_h) \qquad (h=1,2,\ldots n)$$

*) Ist z. B. in einer der linearen Functionen der Coefficient von c_{h1} von Null verschieden und also ein echter Bruch, so wird die Determinante der ersten m Periodensysteme verkleinert, wenn man das erste Periodensystem durch das System jener linearen Functionen ersetzt.

durch *lineare Transformation der Variabeln* y *mit rationalen Coefficienten* in eine Function von weniger Variabeln verwandelt werden kann, welche ihren Werth beibehält, wenn man gewisse von den neuen Variabeln, und zwar jede für sich allein, um eine Einheit ändert.

X. Die Entwickelung vereinfacht sich, wenn man — statt alle Consequenzen aus der Voraussetzung einer bestimmten, durch die Gleichung (A) ausgedrückten Periodicitäts-Eigenschaft einer Function $F(x_1, x_2, \ldots x_p)$ zu ziehen — sich auf den Beweis des folgenden allgemeinen Satzes über die mögliche Anzahl von Periodensystemen beschränkt:

> Eine eindeutige Function von mehreren (reellen oder complexen) Variabeln kann stets durch lineare Transformation in eine solche verwandelt werden, für welche die Anzahl der Periodensysteme, aus denen sich *alle* der Function zugehörigen Periodensysteme linear mit ganzzahligen Coefficienten zusammensetzen lassen, genau gleich der Stufenzahl des aus allen Perioden gebildeten Grössensystems ist.

Unter der „*Stufenzahl*" (oder dem „*Range*") eines Systems reeller oder complexer Grössen:*)

$$a_{ik} \qquad \binom{i=1,2,\ldots p}{k=1,2,\ldots q}$$

soll hier die im Art. I mit n bezeichnete Zahl verstanden werden, d. h. also die grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht sämmtliche aus dem System zu bildenden Determinanten n^{ter} Ordnung verschwinden. Die Stufenzahl bleibt offenbar ungeändert, wenn man dem System beliebig viele Zeilen oder Colonnen von linearen Functionen der früheren Zeilen oder Colonnen

*) Der Begriff der Stufenzahl verdankt weit höheren Gesichtspunkten seine Entstehung. Nach den Definitionen, welche ich in meiner oben citirten Festschrift aufgestellt habe, ist die Stufenzahl n des Systems a_{ik} nichts Anderes als die Stufenzahl des aus den q Functionen von p Variabeln: $\Sigma a_{ik}x_i$ gebildeten Divisorensystems. Hr. *J. Molk* hat den Ausdruck „Stufe" in seiner *Thèse: „Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination"* mit „*rang*" übersetzt. Vgl. auch die Bedeutung des Wortes „Rang" in den Arbeiten des Hrn. *Frobenius*.

hinzufügt, und es kann daher auch ein System von unendlich vielen Zeilen oder Colonnen, wie z. B. das aus *allen* Perioden einer Function bestehende System, einen bestimmten endlichen Rang haben.

Das System a_{ik} wird so beschaffen vorausgesetzt, dass jeder Zeile, in welcher nicht alle Elemente reell sind, eine andere mit den conjugirten Elementen entspricht.

Ist nun wie in Art. I die Determinante der *ersten* n^2 Elemente a_{ik} von Null verschieden, so ist gemäss der Definition der Stufenzahl n die Form:

$$\sum_k a_{ik} u_k \qquad (k=1,2,\ldots q),$$

für unbestimmte u, auch wenn $i>n$ ist, eine lineare Function derjenigen n Formen, bei denen $i=1, 2, \ldots n$ ist. Das System der p Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} w_k = 0 \qquad \binom{i=1,2,\ldots p}{k=1,2,\ldots n,q}$$

lässt sich daher in ein System von folgender Gestalt:

$$w_k + b_{kq} w_q = 0 \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

bringen und also nach Art. IV entweder absolut oder mit beliebig grosser Annäherung in *ganzen Zahlen* w lösen.*) Im ersteren Falle lässt sich nach

*) Dass jedes System linearer homogener Gleichungen sich in ganzen Zahlen mit beliebiger Annäherung lösen lässt, wenn die Anzahl der zu bestimmenden ganzen Zahlen grösser als die Stufenzahl des Coefficienten-Systems ist, kann auch direct, d. h. ohne das System umzuformen, bewiesen werden. Ich habe dies in meinen beiden, in den Comptes rendus der Pariser Akademie veröffentlichten Aufsätzen vom Januar 1883 und November 1884[1]) gezeigt und darin überhaupt die näherungsweise Auflösung linearer Gleichungen eingehend behandelt. Aber der Nachweis der Möglichkeit einer solchen Auflösung ist schon von Hrn. *Hermite* im 40. Bande[2]), so wie implicite von *Riemann* im

[1]) Band III S. 1—30 dieser Ausgabe. H.

[2]) *Ch. Hermite* Extraits de lettres à *M. Jacobi* sur différents objets de la théorie des nombres. H.

Art. VIII ein System von nur n Colonnen:

$$a^0_{ik} \qquad \binom{i=1,2,\ldots p}{k=1,2,\ldots n}$$

finden, durch welche die $n+1$ Colonnen:

$$a_{ik} \qquad \binom{i=1,2,\ldots p}{k=1,2,\ldots n,q}$$

linear mit ganzzahligen Coefficienten dargestellt werden können. Im letzteren Falle aber bilden die durch die Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} w_k = a_{i,q+1} \qquad \binom{i=1,2,\ldots p}{k=1,2,\ldots n,q}$$

bestimmten Grössen $a_{i,q+1}$ eine neue, $(q+1)^{\text{te}}$, Colonne, welche dem System hinzugefügt werden kann, und welche aus lauter Elementen besteht, deren absoluter Betrag beliebig klein ist. Setzt man nun, analog wie oben im Art. V:

$$x_i' = x_i - \frac{a_{i,q+1}}{a_{p,q+1}} x_p,$$

71. Bande des Journals für Mathematik[1]) und von Hrn. *Weierstrass*[2]) im Monatsbericht der Akademie vom November 1876, bei Behandlung der Frage der Anzahl der Periodensysteme, geführt worden. Diese Frage selbst wird in dem citirten *Weierstrass*'schen Aufsatze für analytische Functionen in der Weise erledigt, dass eine Grenze für die Anzahl der zur Bildung *aller* Periodensysteme ausreichenden bestimmt wird, und zwar eben diejenige, welche sich oben als der Rang des gesammten Periodensystems erwiesen hat. In der *Riemann*'schen Entwickelung aber ist nur die Anzahl der Variabeln als Grenze für die Zahl der Periodensysteme nachgewiesen, und zwar eben nur in dem Falle, wo die Anzahl der Variabeln gleich dem Range des Periodensystems wird. Die anderen Fälle sind als „Ausnahmen" bei Seite gelassen, und am Schlusse des vierten Absatzes seines an Hrn. *Weierstrass* gerichteten Schreibens hat sich *Riemann* mit der blossen *Angabe* „dass es folglich eine Function von weniger als n linearen Ausdrücken der Grössen x ist" begnügt, ohne die nähere Begründung der Conclusion hinzuzufügen.

[1]) Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als $2n$-fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist. *B. Riemann* gesammelte Werke. S. 276—280. H.

[2]) Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen. *K. Weierstrass* gesammelte Werke. Bd. II S. 55—70. Vgl. besonders d. Anm. a. S. 70. H.

wenn der absolute Betrag von $a_{\varrho, \sigma+1}$ von keinem der anderen Grössen derselben Colonne übertroffen wird, so schliesst man wie a. a. O., dass die Function $F(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ durch die angegebene Substitution von x_ϱ unabhängig werden muss.

So lange noch mehr Colonnen, als die Stufenzahl angiebt, vorhanden sind, kann hiernach entweder die Anzahl der Colonnen oder die Anzahl der Variabeln, im letzteren Falle zugleich die Stufenzahl selbst, vermindert werden. Man muss also schliesslich zu einer Function gelangen, für welche in der That die Anzahl der Colonnen von Perioden, d. h. der Periodensysteme, mit der Stufenzahl des gesammten Periodensystems vollkommen übereinstimmt.

NÄHERUNGSWEISE GANZZAHLIGE AUFLÖSUNG LINEARER GLEICHUNGEN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1884. S. 1179—1193, 1271—1299.

NÄHERUNGSWEISE GANZZAHLIGE AUFLÖSUNG LINEARER GLEICHUNGEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 11. December 1884.]

Die Methode, welche ich bei Behandlung der Frage der Periodensysteme in meiner vorigen Mittheilung*) entwickelt habe, lässt sich auch auf das interessante Problem der näherungsweisen ganzzahligen Auflösung linearer Gleichungen anwenden und führt dabei zu der wahren Quelle, aus welcher die Lösung jener Frage unmittelbar zu entnehmen ist. Ich werde dies hier zuvörderst in den schon von *Jacobi* vor einem halben Jahrhundert behandelten einfachsten Fällen**) und erst dann ganz allgemein darlegen. Denn es erscheint nicht nur um der Deutlichkeit willen angemessen, die eingehende Behandlung jener speciellen Fälle voranzuschicken, sondern auch deshalb, weil bei der nachherigen allgemeinen Entwickelung von dem Inductionsschluss Gebrauch gemacht und dabei die Erledigung jener speciellen Fälle vorausgesetzt wird.

---

*) Sitzungsbericht vom 20. November, XLVI. S. 1071 ff.[1])

**) De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur. Journal für Mathem. Bd. XIII S. 55[2]). Die Abhandlung ist vom 14. Februar 1834 datirt. *Jacobi* schliesst im § 4 seine Entwickelungen über die mögliche Anzahl der Perioden von Functionen einer complexen Variabeln mit den Worten: „Unde omnibus casibus evictum est, *si functio proposita tribus periodis gaudeat, aut eas e duabus componi, aut eam habere indicem omni data quantitate minorem.* Quod cum

[1]) Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln. Bd. III. S. 31—46 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.

[2]) *C. G. J. Jacobi* Gesammelte Werke. Bd. II. S. 23—50. H.

§ 1.

Es seien a, a', ξ gegebene reelle Grössen, und w, w' seien ganze Zahlen, welche so bestimmt werden sollen, dass $aw + a'w'$ dem Werthe ξ möglichst nahe kommt. Ist das Verhältniss $a : a'$ rational, also durch das Verhältniss zweier ganzen Zahlen $n : n'$ ausdrückbar, so stellt $aw + a'w'$ nur ganze Vielfache von $\frac{a}{n}$ oder, was dasselbe ist, von $\frac{a'}{n'}$ dar, diese aber auch sämmtlich; denn da n und n' ohne gemeinsamen Theiler vorauszusetzen sind, so lassen sich für jede ganze Zahl w_0 Zahlen w, w' so bestimmen, dass $nw + n'w' = w_0$ und also:

$$(\mathfrak{A}) \qquad aw + a'w' = \frac{a}{n} \cdot w_0$$

wird. Man kann also in diesem Falle einer gegebenen Grösse ξ mit linearen ganzzahligen Functionen von a, a' nicht näher kommen, als dies eben mit ganzen Vielfachen von $\frac{a}{n}$ möglich ist; der Abstand kann demnach die Hälfte dieser Grösse erreichen.

Ist nun aber das Verhältniss $a : a'$ irrational, und wird es durch das Verhältniss ganzer Zahlen $n : n'$ in folgender Weise angenähert dargestellt:

$$\frac{a'}{a} = \frac{n'}{n} + \frac{\delta}{n^2} \qquad (-1 < \delta < 1),$$

so kann $w = -kn'$, $w' = kn$ gesetzt und für k die der Grösse $\frac{n\xi}{a\delta}$ zunächst benachbarte ganze Zahl genommen werden, um den Werth von $aw + a'w'$ dem Werthe von ξ beliebig nahe zu bringen. Denn es ist dann:

$$k = \frac{n}{a\delta}(\xi - \varphi),$$

wo φ den Werth:

$$\frac{a\delta}{n} \mathrm{R}\left(\frac{n\xi}{a\delta}\right)$$

---

absurdum sit, *functio tripliciter periodica non datur.*" *Jacobi* bleibt hierbei stehen, und unterlässt es, die behauptete Absurdität durch die aus der Voraussetzung dreifacher Periodicität zu ziehenden *erschöpfenden* Folgerungen näher zu begründen.

bedeutet,*) und es wird:

$$(\mathfrak{A}') \qquad aw + a'w' = \xi - \varphi.$$

Die Annäherung an ξ ist demnach mindestens $\frac{a\delta}{2n}$ und kann also mit wachsendem n beliebig verstärkt werden. Dabei wächst die Grösse der Zahlen w, w' mit n, aber — bei der angegebenen Bestimmung derselben — überdies auch mit dem Werthe von $\frac{1}{\delta}$. Doch kann man auch in einfacher Weise Zahlen w_0, w'_0 bestimmen, für welche:

$$|aw_0 + a'w'_0 - \xi| < \left|\frac{a}{n}\right| \quad \text{und zugleich} \quad |w'_0| \leq \tfrac{1}{2}|n|$$

ist. Bringt man nämlich die der Grösse $\frac{n\xi}{a}$ nächst benachbarte ganze Zahl auf die Form $nw_0 + n'w'_0$, und zwar so, dass $|w'_0| \leq \frac{1}{2}|n|$ wird, so resultirt die Gleichung:

$$aw_0 + a'w'_0 - \xi = \frac{a}{n}\left(\frac{\delta}{n} w'_0 - \mathrm{R}\left(\frac{n\xi}{a}\right)\right),$$

welche zeigt, dass in der That $|aw_0 + a'w'_0 - \xi| < \left|\frac{a}{n}\right|$ ist. — Setzt man ferner:

$$w = w_0 - kn', \quad w' = w'_0 + kn$$

und nimmt hierin für k die der Grösse $\frac{1}{\delta}\mathrm{R}\left(\frac{n\xi}{a}\right) - \frac{w'_0}{n}$ nächst benachbarte ganze Zahl, so wird:

$$aw + a'w' - \xi = \frac{a\delta\delta'}{2n} = \frac{a\delta'\delta''}{2w'},$$

wo

---

*) Mit $\mathrm{R}(a)$ ist hier wie in meinen früheren Mittheilungen der Rest bezeichnet, welcher verbleibt, wenn man von der reellen Grösse a die ihr zunächst benachbarte ganze Zahl subtrahirt.

$$\tfrac{1}{2}\delta' = k - \tfrac{1}{\delta}\,\mathrm{R}\left(\tfrac{n\xi}{a}\right) + \tfrac{w_0'}{n}, \quad \delta'' = \tfrac{1}{2}\delta\delta' + \mathrm{R}\left(\tfrac{n\xi}{a}\right)$$

ist, so dass auch δ', δ'', ebenso wie δ, zwischen -1 und $+1$ liegen.

Ich bemerke noch, dass alle Zahlensysteme w, w', wofür der Werth von $aw + a'w'$ sich um weniger als $\frac{a}{2n}$ von ξ unterscheidet, durch Verbindung irgend eines derselben mit einem solchen, wofür $|aw + a'w'| < \left|\frac{a}{n}\right|$ ist, erlangt werden können, und dass gewisse näherungsweise Lösungen der Gleichung $aw + a'w' = \xi$ schon von Hrn. *Tchebychef* und nachher von Hrn. *Hermite* gegeben worden sind.*)

Ist $F(x)$ eine eindeutige, gleichmässig stetige Function der reellen Variabeln x, für welche die Gleichung:

$$(\mathfrak{A}) \qquad F(x) = F(x + a) = F(x + a')$$

und also auch die Gleichung:

$$F(x) = F(x + aw + a'w')$$

besteht, in welcher w, w' irgend welche ganze Zahlen bedeuten, so besagt diese letztere Gleichung im Falle $a : a' = n : n'$ gemäss der Relation $(\mathfrak{A})$ nichts Anderes als die Gleichung:

$$F(x) = F\left(x + \tfrac{a}{n}w_0\right) \qquad (w_0 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

während sie für den Fall, dass das Verhältniss $a : a'$ irrational ist, gemäss $(\mathfrak{A}')$ die Gleichung:

$$F(x) = F(x' - \varphi)$$

ergiebt, wenn $x' = x + \xi$ gesetzt wird. Da die Grösse φ beliebig verkleinert

*) Journal für Mathematik Bd. 88 S. 10.

werden kann, und die Function $F(x)$ als stetig vorausgesetzt ist, so folgt, dass für jeden beliebigen Werth x':

$$F(x) = F(x'),$$

d. h. also, dass $F(x)$ eine von x unabhängige Constante sein muss.

Aus der Gleichung $(\mathfrak{A})$ ist also zu erschliessen, dass die Function $F(x)$ die Periode $\frac{a}{n}$ hat, wenn das Verhältniss $a : a'$ sich durch das Verhältniss ganzer Zahlen $n : n'$ darstellen lässt, dass sie aber, wenn dies nicht der Fall ist, sich auf eine Constante reduciren muss.

§ 2.

Nunmehr seien $a, a', a'', b, b', b'', \xi, \eta$ gegebene reelle Grössen, und es seien drei ganze Zahlen w, w', w'' so zu bestimmen, dass die beiden linearen Ausdrücke:

$$aw + a'w' + a''w'', \quad bw + b'w' + b''w''$$

beziehungsweise den Werthen ξ und η beliebig nahe kommen, d. h. also, dass die Ungleichheiten:

$$|aw + a'w' + a''w'' - \xi| < \tau, \quad |bw + b'w' + b''w'' - \eta| < \tau$$

für eine gegebene, beliebig kleine Grösse τ erfüllt sind, oder, was dasselbe ist, die Gleichungen:

$$(\mathfrak{B}) \qquad aw + a'w' + a''w'' = \xi - \varphi, \quad bw + b'w' + b''w'' = \eta - \psi,$$

nebst den Ungleichheitsbedingungen $|\varphi| < \tau$, $|\psi| < \tau$.

Für die Frage der Auflösung des Systems der Gleichungen $(\mathfrak{B})$ sind offenbar zwei Coefficienten-Systeme:

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_0, & a_0', & a_0'' \\ b_0, & b_0', & b_0'' \end{pmatrix}$$

einander aequivalent, wenn jedes aus dem andern durch lineare Transformation der *Zeilen* mit *beliebigen* Coefficienten und durch lineare Transformation der *Colonnen* mit *ganzzahligen* Coefficienten hervorgeht.

I. Ist nun *erstens* $ab' - a'b = ab'' - a''b = a'b'' - a''b' = 0$ oder also $a : a' : a'' = b : b' : b''$ so findet die Aequivalenz:

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b, & b', & b'' \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

statt, und das System der beiden Gleichungen ($\mathfrak{B}$) ist für *beliebige* Werthe von ξ und η nicht lösbar. Der „Rang" des Coefficientensystems*) ist in diesem Falle kleiner als *Zwei.*

II. Wenn aber *zweitens* der Rang des Coefficientensystems der Gleichungen ($\mathfrak{B}$) nicht kleiner als *Zwei* ist, so wähle ich zuvörderst drei ganze Zahlen m, m', m'', für welche die absoluten Werthe der beiden Ausdrücke:

$$am + a'm' + a''m'', \quad bm + b'm' + b''m''$$

kleiner als τ werden. Dies ist stets möglich. Denn wenn man jedes der beiden Intervalle:

$$(|a| + |a'| + |a''|)\, t^2, \quad (|b| + |b'| + |b''|)\, t^2,$$

welches die je $(t^2+1)^3$ Werthe von

$$aw + a'w' + a''w'' \quad \text{und} \quad bw + b'w' + b''w'' \qquad (w, w', w'' = 0, 1, 2, \ldots t^2)$$

*) Vergl. die Definition in § 5.

umfasst, in t^3 gleiche Theile theilt, so giebt es mindestens zwei Systeme von Zahlen:

$$(w_1, w_1', w_1''), \quad (w_2, w_2', w_2''),$$

für welche $aw_1 + a'w_1' + a''w_1''$ und $aw_2 + a'w_2' + a''w_2''$ in einem und demselben der t^3 Theilintervalle der Grössen $aw + a'w' + a''w''$ und ebenso $bw_1 + b'w_1' + b''w_1''$ und $bw_2 + b'w_2' + b''w_2''$ in einem und demselben der t^3 Theilintervalle der Grössen $bw + b'w' + b''w''$ liegen. Setzt man nun:

$$w_1 - w_2 = m, \quad w_1' - w_2' = m', \quad w_1'' - w_2'' = m'',$$

so ist:

$$|am + a'm' + a''m''| < \frac{|a| + |a'| + |a''|}{t}, \quad |bm + b'm' + b''m''| < \frac{|b| + |b'| + |b''|}{t},$$

und man kann also in der That durch angemessene Wahl der Zahl t bewirken, dass die beiden absoluten Werthe:

$$|am + a'm' + a''m''|, \quad |bm + b'm' + b''m''|$$

kleiner als die gegebene Grösse τ werden, dass also, wenn man:

$$am + a'm' + a''m'' = a''', \quad bm + b'm' + b''m'' = b'''$$

setzt,

$$\tau > |a'''| \geqq |b'''|$$

wird. Hierbei können aber beide Grössen a''' und b''' gleich Null werden. In diesem Falle ist:

$$-a''m'' = am + a'm', \quad -b''m'' = bm + b'm',$$

und das aus drei Colonnen von ganzen Zahlen bestehende System:

$$\begin{pmatrix} m'', & 0, & m \\ 0, & m'', & m' \end{pmatrix}$$

lässt sich nach dem im Art. VIII meiner vorigen Mittheilung[1]) angegebenen Verfahren auf ein System von nur zwei Colonnen:

$$\begin{pmatrix} r, & r' \\ s, & s' \end{pmatrix},$$

und zwar mittels ganzzahliger linearer Transformation der Colonnen *allein*, reduciren. Man kann nämlich zuvörderst die Coefficienten m, m' in der dritten Colonne jenes Systems durch ihre absolut kleinsten Reste *modulo* m'' ersetzen. Resultirt dann das System:

$$\begin{pmatrix} m'', & 0, & m_0 \\ 0, & m'', & m_0' \end{pmatrix},$$

so ist hieraus, wenn $|m_0| \leq |m_0'|$ ist, ein neues System:

$$\begin{pmatrix} m''+hm_0, & 0, & m_0 \\ hm_0', & m'', & m_0' \end{pmatrix}$$

zu bilden, in welchem $|m''+hm_0| < |m_0|$ ist. Die kleinste der drei Determinanten des vorigen Systems ist $|m''m_0|$, die des neuen Systems ist $|m''(m''+hm_0)|$ und also kleiner als die kleinste des vorigen. Man muss daher bei Fortsetzung des angegebenen Verfahrens zu einem System:

$$\begin{pmatrix} r, & r', & r'' \\ s, & s', & s'' \end{pmatrix}$$

gelangen, dessen kleinste Determinante $|rs'-r's|$ nicht mehr verkleinert werden kann. Alsdann müssen aber die Coefficienten α, β, für welche

$$\alpha r + \beta r' = r'', \quad \alpha s + \beta s' = s''$$

wird, *ganze Zahlen* sein; denn sonst würden bei Weglassung der grössten Ganzen von α und β Coefficienten r''', s''' an die Stelle von r'', s'' treten, für welche wenigstens eine der Determinanten $rs'''-r'''s$ oder $r's'''-r'''s'$ ihrem absoluten Werthe nach kleiner als $|rs'-r's|$ wäre.

[1]) Band III. S. 41 dieser Ausgabe. H.

Das reducirte System $\begin{pmatrix} r, & r' \\ s, & s' \end{pmatrix}$ ist dem System $\begin{pmatrix} m'', & 0, & m \\ 0, & m'', & m' \end{pmatrix}$ aequivalent, sogar in dem engeren Sinne, dass das eine System aus dem andern durch lineare ganzzahlige Transformation der *Colonnen* allein hervorgeht. Es ist daher einerseits:

$$r = hm'' - h''m, \quad r' = km'' - k''m,$$
$$s = h'm'' - h''m', \quad s' = k'm'' - k''m',$$

und andrerseits:

$$m'' = \alpha_0 r + \alpha_0' r', \quad 0 = \beta_0 r + \beta_0' r', \quad -m = \gamma_0 r + \gamma_0' r',$$
$$0 = \alpha_0 s + \alpha_0' s', \quad m'' = \beta_0 s + \beta_0' s', \quad -m' = \gamma_0 s + \gamma_0' s',$$

wo $h, h', h'', k, k', k'', \alpha_0, \alpha_0', \beta_0, \beta_0', \gamma_0, \gamma_0'$ ganze Zahlen bedeuten, und wenn man:

$$\frac{ra+sa'}{m''} = a_0, \quad \frac{r'a+s'a'}{m''} = a_0',$$
$$\frac{rb+sb'}{m''} = b_0, \quad \frac{r'b+s'b'}{m''} = b_0'$$

setzt, erhält man für die Systeme

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_0, & a_0' \\ b_0, & b_0' \end{pmatrix}$$

die Transformations-Gleichungen:

$$a_0 = ah + a'h' + a''h'', \quad a_0' = ak + a'k' + a''k'',$$
$$b_0 = bh + b'h' + b''h'', \quad b_0' = bk + b'k' + b''k'';$$
$$a = a_0\alpha_0 + a_0'\alpha_0', \quad a' = a_0\beta_0 + a_0'\beta_0', \quad a'' = a_0\gamma_0 + a_0'\gamma_0',$$
$$b = b_0\alpha_0 + b_0'\alpha_0', \quad b' = b_0\beta_0 + b_0'\beta_0', \quad b'' = b_0\gamma_0 + b_0'\gamma_0'.$$

Das System der zwei Gleichungen mit drei zu bestimmenden ganzen Zahlen w, w', w'':

$$aw + a'w' + a''w'' = \xi - \varphi, \quad bw + b'w' + b''w'' = \eta - \psi,$$

ist also dem Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit nur zwei zu bestimmenden ganzen Zahlen w_0, w_0':

$$a_0 w_0 + a_0' w_0' = \xi - \varphi, \quad b_0 w_0 + b_0' w_0' = \eta - \psi,$$

aequivalent, und dieses gestattet offenbar für beliebige Werthe ξ, η keine beliebige Verkleinerung der Grössen φ und ψ, auch dann nicht, wenn die Determinante $a_0 b_0' - a_0' b_0$ verschwindet.

In dem hiermit erledigten zweiten Falle, wo:

$$am + a'm + a''m'' = 0, \quad bm + b'm' + b''m'' = 0$$

ist, kann das Verhältniss der drei Determinanten:

$$a'b'' - a''b', \quad a''b - ab'', \quad ab' - a'b$$

durch das Verhältniss von drei ganzen Zahlen $m : m' : m''$ dargestellt werden. Es wird also, wenn $m = k(a'b'' - a''b')$ gesetzt wird,

$$b'k(aw + a'w' + a''w'') - a'k(bw + b'w' + b''w'') = m''w - mw'',$$
$$-bk(aw + a'w' + a''w'') + ak(bw + b'w' + b''w'') = m''w' - m'w'',$$

und das Coefficientensystem:

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

ist demnach einem System *ganzzahliger* Coefficienten:

$$\begin{pmatrix} m', & 0, & -m \\ 0, & m'', & -m' \end{pmatrix}$$

aequivalent. Da umgekehrt, wenn eine Aequivalenz:

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_0, & a_0', & a_0'' \\ b_0, & b_0', & b_0'' \end{pmatrix}$$

besteht, in welcher a_0, a_0', a_0'', b_0, b_0', b_0'' *ganze Zahlen* sind, so dass die Gleichungen:

$$a_0 m_0 + a_0' m_0' + a_0'' m_0'' = 0, \quad b_0 m_0 + b_0' m_0' + b_0'' m_0'' = 0$$

in ganzen Zahlen m_0, m_0', m_0'' lösbar sind, wegen eben jener Aequivalenz auch die Gleichungen:

$$am + a'm' + a''m'' = 0, \quad bm + b'm' + b''m'' = 0$$

befriedigt werden können, so ist die Aequivalenz des Systems $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ mit einem solchen, dessen Elemente sämmtlich ganze Zahlen sind, als eine *charakteristische* für diejenigen Coefficientensysteme nachgewiesen, für welche die Möglichkeit des Nullwerdens von a''' und b''', welche die Voraussetzung des hier behandelten Falles bildet, vorhanden ist. Diese Coefficientensysteme sollen übrigens gemäss einer späteren allgemeinen Darlegung als solche bezeichnet werden, deren *Rationalitäts-Rang* gleich Null ist.

III. Es sei nun *drittens* wenigstens einer der beiden Werthe a''', b''', von Null verschieden, also, da oben $|a'''| \geq |b'''|$ angenommen worden ist: $\tau > |a'''| > 0$.

Alsdann sind drei ganze Zahlen n, n', n'' so zu bestimmen, dass der Werth von:

$$\left(b - \frac{b'''}{a'''} a\right) n + \left(b' - \frac{b'''}{a'''} a'\right) n' + \left(b'' - \frac{b'''}{a'''} a''\right) n'',$$

der mit $b^{(4)}$ bezeichnet werden soll, absolut kleiner als τ wird. Setzt man noch:

$$an + a'n' + a''n'' = a^{(4)},$$

so ist:

$$bn + b'n' + b''n'' = b^{(4)} + \frac{b'''}{a'''} a^{(4)}.$$

Wird nun $b^{(4)} = 0$, so ist:

$$b'''(an + a'n' + a''n'') = a'''(bn + b'n' + b''n''),$$

oder also, wenn man an Stelle von a''', b''' ihre Werthe:

$$am + a'm' + a''m'', \quad bm + b'm' + b''m''$$

einsetzt:

$$(ab' - a'b)(mn' - m'n) + (a'b'' - a''b')(m'n'' - m''n') + (a''b - ab'')(m''n - mn'') = 0.$$

Es verschwindet also die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ m'n'' - m''n', & m''n - mn'', & mn' - m'n \end{vmatrix},$$

und das Coefficienten-System ist daher dem Systeme:

$$\begin{pmatrix} a, & a' & a'' \\ m'n'' - m''n', & m''n - mn'', & mn' - m'n \end{pmatrix}$$

aequivalent, dessen zweite Zeile aus lauter ganzen Zahlen besteht. Hieraus erhellt, dass auch in diesem dritten Falle die Gleichungen:

$$aw + a'w' + a''w'' = \xi - \varphi, \quad bw + b'w' + b''w'' = \eta - \psi$$

für beliebig gegebene Werthe von ξ, η nicht in *der* Weise lösbar sind, dass φ und ψ beliebig klein werden.

Der „*Rationalitäts-Rang*“ des Systems $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ ist in diesem dritten Falle gleich *Eins*.

IV. Es bleibt nun *viertens* der Fall zu untersuchen, wo $b^{(4)} \gtrless 0$ ist. In diesem Falle werde zuvörderst eine ganze Zahl ν so bestimmt, dass der absolute Werth von:

$$\eta - \frac{b'''}{a'''}\xi - \nu b^{(4)}$$

kleiner als $\frac{1}{2}|b^{(4)}|$ wird, und demnächst eine ganze Zahl μ so, dass der absolute Werth von:

$$\xi - \nu a^{(4)} - \mu a'''$$

kleiner als $\frac{1}{2}|a'''|$ wird. Dann kommt, wenn:

$$\xi - \nu a^{(4)} - \mu a''' = \varphi, \quad \eta - \frac{b'''}{a'''}\xi - \nu b^{(4)} = \psi - \frac{b'''}{a'''}\varphi$$

gesetzt wird:

$$\mu(am + a'm' + a''m'') + \nu(an + a'n' + a''n'') = \xi - \varphi,$$
$$\mu(bm + b'm' + b''m'') + \nu(bn + b'n' + b''n'') = \eta - \psi.$$

Hier sind die absoluten Werthe von φ und ψ beide kleiner als τ, da

$$|\varphi| < \tfrac{1}{2}|a'''|, \quad |a'''| < \tau; \quad \left|\frac{b'''}{a'''}\right| < 1, \quad \left|\psi - \frac{b'''}{a'''}\varphi\right| < \tfrac{1}{2}|b^{(4)}|, \quad |b^{(4)}| < \tau$$

ist, und die Gleichungen:

$$aw + a'w' + a''w'' = \xi - \varphi, \quad bw + b'w' + b''w'' = \eta - \psi,$$

werden also in der That durch die ganzzahligen Werthe:

$$w = \mu m + \nu n, \quad w' = \mu m' + \nu n', \quad w'' = \mu m'' + \nu n''$$

in der durch das Problem geforderten Weise befriedigt.

In diesem vierten Falle ist der „*Rationalitäts-Rang*“ des Systems $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ gleich *Zwei*.

Bei der angegebenen Bestimmungsweise werden, analog wie im Falle *einer* Gleichung im § 1, die Zahlen w um so grösser, je kleiner a''' und $b^{(4)}$ sind. Die Frage der Auffindung der *kleinsten* dem Problem genügenden Zahlen w ist hier vorläufig bei Seite gelassen.

§ 3.

Ist $F(x, y)$ eine eindeutige, gleichmässig stetige Function der reellen Variablen x, y und bestehen die Gleichungen:

$$(\mathfrak{C}) \qquad F(x, y) = F(x + a, y + b) = F(x + a', y + b') = F(x + a'', y + b''),$$

so ist auch die Gleichung:

$$(\overline{\mathfrak{C}}) \qquad F(x, y) = F(x + aw + a'w' + a''w'', \;\; y + bw + b'w' + b''w'')$$

für alle ganzzahligen Werthe von w, w', w'' erfüllt. Hierbei kann offenbar angenommen werden, dass nicht alle sechs Grössen a, a', a'', b, b', b'' gleich Null sind.

I. Wenn nun der (absolute) Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ kleiner als *Zwei* und also

$$a : a' : a'' = b : b' : b''$$

ist, so kann angenommen werden, dass nicht alle drei Grössen a, a', a'' gleich Null sind. Wird dann

$$\lambda a = b, \quad \lambda a' = b', \quad \lambda a'' = b'', \quad y_1 = y - \lambda x$$

und

$$F(x, y_1 + \lambda x) = F_1(x, y_1)$$

gesetzt, so geht die Gleichung $(\overline{\mathfrak{C}})$ in folgende über:

$$F_1(x, y_1) = F_1(x + aw + a'w' + a''w'', y_1),$$

welche zeigt, dass die Function F_1 nur in Beziehung auf die Variable x periodisch ist. Gemäss § 1 ist aber dann $F_1(x, y_1)$, als Function von x allein betrachtet, einfach periodisch oder von x unabhängig, je nachdem das Verhältniss $a : a' : a''$ rational ist oder nicht, d. h. also je nachdem der „*Rationalitäts-Rang*“ des Systems $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ gleich Null oder gleich Eins ist. Es ergiebt sich daher folgendes Resultat:

> Ist der (absolute) Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ gleich *Eins*, so lässt sich die Function $F(x, y)$ durch lineare Transformation der Variabeln in eine Function *einer* Variabeln verwandeln, für welche aus der Gleichung $(\mathfrak{C})$ *keine* Periodicität folgt, wenn der *Rationalitäts*-Rang des Systems ebenfalls gleich *Eins* ist. Wenn aber dieser Rationalitäts-Rang gleich *Null* ist, so kann $F(x, y)$ durch lineare Transformation der Variabeln in eine Function von zwei Variabeln verwandelt werden, welcher auf Grund der Gleichung $(\mathfrak{C})$ nur in Beziehung auf *eine* der beiden Variabeln eine Periode zukommt.

II. Wenn der (absolute) Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ gleich *Zwei* und der Rationalitäts-Rang gleich *Null* ist, so folgt aus den Entwickelungen im § 2, II, dass die Gleichung $(\overline{\mathfrak{C}})$ nichts anderes ausdrückt, als die Gleichung:

$$F(x, y) = F(x + a_0 w_0 + a_0' w_0', \;\; y + b_0 w_0 + b_0' w_0'),$$

welche zeigt, dass der Function $F(x, y)$ die beiden Periodensysteme (a_0, b_0), (a'_0, b'_0) zukommen.

III. Wenn der (absolute) Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ gleich *Zwei* und der Rationalitäts-Rang gleich *Eins* ist, so ist dieses System gemäss den Entwickelungen im § 2, III dem Systeme:

$$\begin{pmatrix} a & , & a' & , & a'' \\ m'n'' - m''n', & & m''n - mn'', & & mn' - m'n \end{pmatrix}$$

aequivalent; die Function $F(x, y)$ geht also durch lineare Transformation der Variabeln y in eine Function $F_1(x, y_1)$ über, welche die drei Periodensysteme:

$$(a, m'n'' - m''n'), \quad (a', m''n - mn''), \quad (a'', mn' - m'n)$$

hat. Bestimmt man nun eine ganze Zahl λ so, dass der absolute Werth von $\xi - \lambda a'''$ kleiner als τ wird, und setzt man $\xi - \lambda a''' = \varphi$, so kommt, da:

$$am + a'm' + a''m'' = a''', \quad (m'n'' - m''n')\,m + (m''n - mn'')\,m' + (mn' - m'n)\,m'' = 0$$

ist:

$$F_1(x, y_1) = F_1(x + \xi - \varphi, y_1),$$

oder, wenn $x + \xi$ mit x' bezeichnet und die Stetigkeit der Function $F_1(x, y_1)$ berücksichtigt wird:

$$F_1(x, y_1) = F_1(x', y_1),$$

für beliebige Werthe von x und x'. Die Function F_1 ist daher von dem ersteren ihrer beiden Argumente unabhängig, während sie in Bezug auf das andere *einfach* periodisch ist.

IV. Wenn der Rationalitäts-Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ gleich *Zwei* ist, so zeigen die Entwickelungen im § 2, IV, dass aus der Gleichung $(\mathfrak{C})$ die Gleichung:

$$F(x, y) = F(x + \xi - \varphi, \quad y + \eta - \psi)$$

für beliebige Werthe von ξ, η folgt. Da φ und ψ beliebig klein gemacht werden können, so muss wegen der Stetigkeit der Function $F(x, y)$ auch die Gleichung:

$$F(x, y) = F(x + \xi, y + \eta) = F(x', y')$$

für ganz beliebige Werthe der Variabeln x, y, x', y' bestehen; die Function $F(x, y)$ muss also von *beiden* Argumenten unabhängig sein.

V. Die erlangten Resultate lassen sich, wenn man den (absoluten) Rang des Systems $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ mit r und den Rationalitäts-Rang mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet, für alle vier unterschiedenen Fälle in folgender Weise zusammenfassen:

> Die Function $F(x, y)$ kann durch lineare Transformation der Variabeln in eine andere verwandelt werden, für welche die Periodicitäts-Gleichung $(\mathfrak{C})$ in Bezug auf $2 - r$ Variabeln gar keine Perioden, in Bezug auf $r - \mathfrak{r}$ Variabeln genau $r - \mathfrak{r}$ Periodensysteme ergiebt, und welche von den übrigen $\mathfrak{r}$ Variabeln unabhängig ist.

§ 4.

Ist $F(x + yi)$ eine eindeutige stetige Function der complexen Variabeln $x + yi$, und werden für dieselbe Periodicitäts-Gleichungen:

$$F(x + yi) = F(x + yi + a + bi) = F(x + yi + a' + b'i) = F(x + yi + a'' + b''i)$$

vorausgesetzt, so ist in den oben (§ 3, I) behandelten Fällen:

$$F(x + yi) = F(x + yi + (aw + a'w' + a''w'')\,(1 + \lambda i))$$

für beliebige ganze Zahlen w, w', w''. Ist der Rationalitäts-Rang gleich *Null* und also das Verhältniss $a : a' : a''$ rational, so ergiebt sich aus den vorausgesetzten Gleichungen nur eine *einfache* Periodicität der Function $F(x+yi)$. Ist aber der Rationalitäts-Rang gleich *Eins*, so lassen sich ganze Zahlen w, w', w'' bestimmen, für welche $aw + a'w' + a''w''$ einer gegebenen reellen Grösse ξ beliebig nahe kommt. Es ist daher, in Folge der Voraussetzung der Stetigkeit von F, für jede reelle Grösse ξ:

$$F(x+yi) = F(x+yi+\xi(1+\lambda i)),$$

und also, wenn diese Gleichung nach ξ differentiirt und dann $\xi = 0$ gesetzt wird:

$$F'(x+yi) = 0.$$

Die Function $F(x+yi)$ muss sich daher auf eine Constante reduciren.

Für den im § 3, II behandelten Fall lassen sich die drei Perioden $a+bi$, $a'+b'i$, $a''+b''i$ auf zwei reduciren.

Für den im § 3, III behandelten Fall giebt es reelle Grössen α, β, so dass:

$$a\beta + b\alpha = m'n'' - m''n', \quad a'\beta + b'\alpha = m''n - mn'', \quad a''\beta + b''\alpha = mn' - m'n,$$

und also:

$$(a+bi)(\alpha+\beta i) = \gamma + ci, \quad (a'+b'i)(\alpha+\beta i) = \gamma' + c'i, \quad (a''+b''i)(\alpha+\beta i) = \gamma'' + c''i$$

wird, wenn man der Kürze halber die drei Determinanten:

$$m'n'' - m''n', \quad m''n - mn'', \quad mn' - m'n$$

mit c, c', c'' bezeichnet. Setzt man nun $x_1 + y_1 i = (\alpha+\beta i)(x+yi)$ und:

$$F(x+yi) = F_1(x_1+y_1 i),$$

so ist:

$$F_1(x_1+y_1 i) = F_1(x_1 + y_1 i + (\gamma+ci)w + (\gamma'+c'i)w' + (\gamma''+c''i)w''),$$

und wenn man hierin:

$$w = \lambda m, \quad w' = \lambda m', \quad w'' = \lambda m''$$

nimmt, wo m, m', m'' die im § 2, II definirten Zahlen bedeuten, so verschwindet der imaginäre Theil: $cw + c'w' + c''w''$, während $\gamma m + \gamma' m' + \gamma'' m''$ beliebig klein wird, und es kann demnach die Zahl λ so bestimmt werden, dass der reelle Theil $\gamma w + \gamma' w' + \gamma'' w''$ einem gegebenen Werthe ξ beliebig nahe kommt. Hieraus folgt, dass für beliebige Werthe ξ die Gleichung:

$$F_1(x_1+y_1 i) = F_1(x_1+y_1 i+\xi)$$

besteht, dass also die Ableitung von $F_1(x_1+y_1 i)$ verschwinden und die Function $F_1(x_1+y_1 i)$ selbst sich auf eine Constante reduciren muss.

Für den im § 3, IV behandelten Fall ergiebt sich direct, ohne die Ableitung der Function F zu Hülfe zu nehmen, dass $F(x+yi)$ für alle Werthe der complexen Variabeln constant sein muss.

§ 5.

Es sei (a_{ik}) für $i = 1, 2, \ldots p$ und $k = 1, 2, \ldots q$ ein System reeller Grössen, und r sei die grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht sämmtliche aus den Elementen a_{ik} zu bildenden Determinanten r^{ter} Ordnung verschwinden. Alsdann ist r die „Stufenzahl" oder der „Rang" des aus den q linearen Functionen von p Variabeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots . \mathfrak{R}_p$ gebildeten Divisorensystems:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \left(\sum_i a_{i1}\mathfrak{R}_i,\ \sum_i a_{i2}\mathfrak{R}_i, \ldots\ldots \sum_i a_{iq}\mathfrak{R}_i\right) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots p)},$$

und soll auch, wie im Art. X meiner vorigen Mittheilung[1]), als der Rang des Grössensystems (a_{ik}) *selbst* bezeichnet werden. Nach den allgemeinen Entwickelungen im § 21 meiner Festschrift zu Hrn. *Kummer*'s Doctorjubiläum[2]) ist

[1]) Band III S. 43 dieser Ausgabe. H.

[2]) Band II S. 334 flgde. dieser Ausgabe. H.

das Divisorensystem ($\mathfrak{D}$) dann und nur dann in einem anderen aus linearen Functionen von $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots \mathfrak{R}_p$ bestehenden Divisorensysteme:

$$(\mathfrak{D}') \qquad \Big(\sum_i b_{i1}\mathfrak{R}_i,\ \sum_i b_{i2}\mathfrak{R}_i,\ \dots\dots \sum_i b_{iq'}\mathfrak{R}_i\Big) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots p)}$$

„enthalten“, wenn sich jedes Element des Divisorensystems ($\mathfrak{D}'$) als ganzzahlige lineare homogene Function der Elemente des Divisorensystems ($\mathfrak{D}$) darstellen lässt, d. h. also, wenn:

$$(\mathfrak{E}) \qquad b_{ik'} = \sum_k a_{ik} g_{kk'} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots p \\ k=1,2,\dots q \\ k'=1,2,\dots q' \end{pmatrix}$$

ist, und die qq' Coefficienten $g_{kk'}$ ganze Zahlen sind. Es kann nun auch dieser Begriff des Enthalten-Seins von den aus linearen Functionen bestehenden Divisorensystemen auf die Systeme der Coefficienten der linearen Functionen selbst übertragen und also

> ein System (a_{ik}) als unter dem Systeme $(b_{ik'})$ enthalten bezeichnet werden, wenn Substitutions-Gleichungen ($\mathfrak{E}$) mit ganzzahligen Coefficienten $g_{kk'}$ bestehen, oder also wenn das System $(b_{ik'})$ aus der Composition des Systems (a_{ik}) mit einem ganzzahligen Systeme $(g_{kk'})$ resultirt.

Wenn zwei Systeme einander gegenseitig enthalten, so sind sie als „aequivalent“ zu bezeichnen.

Die hier aufgestellten Begriffe haben für das Problem der näherungsweisen ganzzahligen Auflösung linearer Gleichungen eine unmittelbare Bedeutung. Denn erstens

> ist überhaupt ein System linearer, nicht homogener Gleichungen dann und nur dann, wenn der Rang des Coefficientensystems mit der Anzahl der Gleichungen genau übereinstimmt, in dem *allgemeinen Sinne* lösbar, dass die gegebenen linearen homogenen Functionen der zu bestimmenden Grössen *beliebig gegebenen* Grössen gleich werden sollen;

es können also nur die Werthe von r linear unabhängigen Functionen:

$$(\mathfrak{F}) \qquad \sum_k a_{1k} w_k,\ \sum_k a_{2k} w_k,\ \dots\dots \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots q)}$$

durch passende Bestimmung von $w_1, w_2, \dots w_q$ gegebenen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \dots$ gleich gemacht werden. Es können daher auch nicht mehr als r Gleichungen:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_k a_{1k} w_k = \xi_1 - \varphi_1,\ \sum_k a_{2k} w_k = \xi_2 - \varphi_2,\ \dots \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots q)}$$

für *beliebig* gegebene Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots$ mit den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\varphi_1| < \tau,\ |\varphi_2| < \tau,\ \dots$$

in *ganzen Zahlen* $w_1, w_2, \dots w_q$ gelöst werden.

Zweitens kann an Stelle des Gleichungssystems ($\mathfrak{G}$) auch das Gleichungssystem:

$$(\mathfrak{G}^0) \qquad \sum_{k'} a^0_{1k'} w^0_{k'} = \xi_1 - \varphi_1,\ \sum_{k'} a^0_{2k'} w^0_{k'} = \xi_2 - \varphi_2,\ \dots \qquad {\scriptstyle (k'=1,2,\dots q')}$$

gesetzt werden, falls die Systeme (a_{ik}) und $(a^0_{ik'})$ in dem angegebenen Sinne einander aequivalent sind; denn wenn:

$$a^0_{ik'} = \sum_k a_{ik} g_{kk'},\quad a_{ik} = \sum_{k'} a^0_{ik'} g^0_{k'k} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots p \\ k=1,2,\dots q \\ k'=1,2,\dots q' \end{pmatrix}$$

ist, so werden durch die linearen ganzzahligen Transformationen der zu bestimmenden Grössen $w_k, w^0_{k'}$:

$$w_k = \sum_{k'} g_{kk'} w^0_{k'},\quad w^0_{k'} = \sum_k g^0_{k'k} w_k \qquad \begin{pmatrix} k=1,2,\dots q \\ k'=1,2,\dots q' \end{pmatrix}$$

die beiden Gleichungssysteme ($\mathfrak{G}$), ($\mathfrak{G}^0$) in einander transformirt.

§ 6.

Es seien nun die *ersten* r^2 Elemente a_{ik} so beschaffen, dass ihre Determinante:

$$|a_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \dots r)$$

von Null verschieden wird. Alsdann sind die ersten r linearen Gleichungen:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_k a_{gk} w_k = \xi_g - \varphi_g \qquad \begin{pmatrix} g=1, 2, \dots r \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

von einander unabhängig und — wenn von der Bedingung, dass $w_1, w_2, \dots w_q$ ganze Zahlen sein sollen, abstrahirt wird — für beliebig gegebene Werthe von $\xi_g - \varphi_g$ lösbar.

Bedeutet, wie im Art. 1 meiner vorigen Mittheilung,[1] (a'_{gh}) das zu (a_{gh}) reciproke System, so kann an Stelle des Gleichungssystems $(\mathfrak{G})$ das System:

$$(\mathfrak{G}') \qquad \sum_{gk} a'_{hg} a_{gk} w_k = \sum_g a'_{hg} (\xi_g - \varphi_g) \qquad \begin{pmatrix} g, h=1, 2, \dots r \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

genommen werden, und dieses verwandelt sich, wenn:

$$(\mathfrak{H}) \qquad b_{hk} = \sum_g a'_{hg} a_{gk}, \quad \eta_h = \sum_g a'_{hg} \xi_g, \quad \psi_h = \sum_g a'_{hg} \varphi_g \qquad \begin{pmatrix} g, h=1, 2, \dots r \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, in folgendes:

$$(\mathfrak{K}) \qquad \sum_k b_{hk} w_k = \eta_h - \psi_h \qquad \begin{pmatrix} h=1, 2, \dots r \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix},$$

in welchem übrigens $b_{h\bar{k}} = \delta_{hk}$ ist, wenn beide Indices nicht grösser als r sind.

---

[1]) Band III S. 33 dieser Ausgabe. H.

Die in den Gleichungen $(\mathfrak{H})$ gegebenen Bestimmungen der Coefficienten b_{hk} lassen sich auch so darstellen:

$$(\mathfrak{H}') \qquad b_{hk} = \frac{|a_{fg'}|}{|a_{fg}|} \qquad \begin{pmatrix} f, g=1, 2, \dots r \\ g'=1, 2, \dots h-1, k, h+1, \dots r \end{pmatrix};$$

die Coefficienten b_{hk} sind demnach Quotienten von Determinanten r^{ter} Ordnung, welche sich aus r durch die Indices h, k bestimmten Colonnen der ersten r Zeilen des Systems (a_{ik}) bilden lassen.

Führt man in dem Divisorensystem $(\mathfrak{D})$ des § 5 an Stelle der p Variabeln $\mathfrak{R}$ neue r Variabeln $\mathfrak{R}^0$ ein, welche mit den ersteren durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{R}_h^0 = \sum_i a_{ih} \mathfrak{R}_i \qquad \begin{pmatrix} h=1, 2, \dots r \\ i=1, 2, \dots p \end{pmatrix}$$

verbunden sind, so resultirt das Divisorensystem r^{ter} Stufe:

$$(\mathfrak{D}^0) \qquad \left(\mathfrak{R}_1^0, \mathfrak{R}_2^0, \dots \mathfrak{R}_r^0, \sum_h b_{h, r+1} \mathfrak{R}_h^0, \dots \sum_h b_{hq} \mathfrak{R}_h^0\right) \qquad (h=1, 2, \dots r),$$

welches aus linearen Functionen von nur r Variabeln besteht.

Die beiden Divisorensysteme $(\mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{D}^0)$ stehen, ebenso wie überhaupt je zwei Divisorensysteme, welche durch lineare Transformation der Variabeln aus einander hervorgehen, in einer Aequivalenz-Beziehung, und es sollen auch deren Coefficienten-Systeme, z. B. die Coefficienten-Systeme:

$$(a_{ik}) \text{ und } (b_{hk}) \qquad \begin{pmatrix} h=1, 2, \dots r \\ i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix},$$

als einander aequivalent bezeichnet werden.

Während die im vorigen Paragraphen entwickelte Aequivalenz-Beziehung zweier Systeme:

$$(a_{ik}), \quad (a^0_{ik'}) \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \\ k'=1, 2, \dots q' \end{pmatrix}$$

dadurch charakterisirt wurde, dass das eine System aus dem andern durch lineare ganzzahlige Transformation der *Colonnen* hervorgeht, wird die *hier* statuirte Aequivalenz:

$$(a_{ik}) \sim (\bar{a}_{i'k}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots p \\ i'=1,2,\dots p' \\ k=1,2,\dots q \end{pmatrix}$$

dadurch definirt, dass das eine System durch lineare Transformation der *Zeilen*, mit irgend welchen Transformations-Coefficienten, in das andere System übergeführt werden kann.

Es sind dies also zwei verschiedene Aequivalenz-Begriffe, von denen sich der eine auf die *Colonnen*, der andere auf die *Zeilen* bezieht; sie können aber auch beide zu einem neuen „weiteren" Aequivalenz-Begriff vereinigt werden, indem zwei Systeme:

$$(a^0_{ik'}), \quad (\bar{a}_{i'k}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots p;\ i'=1,2,\dots p' \\ k=1,2,\dots q;\ k'=1,2,\dots q' \end{pmatrix}$$

als im „weiteren Sinne einander aequivalent" bezeichnet werden können, wenn jedes derselben einem dritten Systeme:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots p \\ k=1,2,\dots q \end{pmatrix}$$

in dem einen oder anderen *engeren* Sinne aequivalent ist, d. h. also sowohl dann, wenn die Aequivalenzen:

$$(a_{ik}) \sim (a^0_{ik'}), \quad (a_{ik}) \sim (\bar{a}_{i'k})$$

beide in demselben engeren Sinne bestehen, als auch dann, wenn die eine in dem einen, die andere in dem anderen engeren Sinne stattfindet.

§ 7.

Giebt es lineare ganzzahlige Functionen der r Grössen:

$$b_{1k},\ b_{2k},\ \dots\dots\ b_{rk} \qquad (k=r+1,\ r+2,\ \dots\dots q),$$

deren Werthe für alle Indices k ganzzahlig sind, d. h. also, giebt es (für $k=r+1,\ r+2,\ \dots\dots q$) eine Anzahl Gleichungen:

$$\sum_{h=1}^{h=r} \mathfrak{w}_{gh} b_{hk} = \mathfrak{b}_{gk} \qquad (g=g_1, g_2, \dots),$$

in welchen $\mathfrak{w}_{gh}$, $\mathfrak{b}_{gk}$ ganze Zahlen bedeuten, so gelten diese Gleichungen, wenn für $k \leqq r$:

$$\mathfrak{b}_{gk} = \mathfrak{w}_{gk}$$

gesetzt wird, für *alle* Indices k. Es möge nun angenommen werden, dass die Anzahl solcher, von einander linear unabhängiger Gleichungen genau $r-\mathfrak{r}$ ist, und dass demnach $r-\mathfrak{r}$ lineare Relationen:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \sum_{h=1}^{h=r} \mathfrak{b}_{ih} b_{hk} = \mathfrak{b}_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i=\mathfrak{r}+1,\ \mathfrak{r}+2,\ \dots r \\ k=1,2,\dots\dots q \end{pmatrix}$$

bestehen, aus denen sich alle anderen solchen Relationen linear zusammensetzen lassen. Dann kann die Reihenfolge der Zeilen b_{1k}, b_{2k}, ... so vorausgesetzt werden, dass die Zeilen:

$$b_{1k},\ b_{2k},\ \dots\ b_{\mathfrak{r}k},\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{r}+1,k},\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{r}+2,k},\ \dots\ \mathfrak{b}_{rk} \qquad (k=1,2,\dots q)$$

von einander linear unabhängig sind, und dass daher das aus diesen r Zeilen bestehende System dem Systeme (b_{hk}) in dem zweiten engeren Sinne (der Zeilen-Transformation) aequivalent ist. Da das System (b_{hk}) in demselben engeren Sinne dem System (a_{ik}) aequivalent ist, so wird durch die obige Annahme eine Eigenschaft des Systems (a_{ik}) fixirt, welche folgendermaassen zu formuliren ist:

> „Das System (a_{ik}), vom Range r, kann durch lineare Transformation der Zeilen (mit irgend welchen Coefficienten) in ein solches verwandelt werden, welches nur r Zeilen hat, die nicht lauter Null-Elemente enthalten, und nur $\mathfrak{r}$ Zeilen, in denen nicht sämmtliche Elemente ganze Zahlen sind. Dabei sind die Zahlen r und $\mathfrak{r}$ die kleinsten, für welche dies möglich ist."

Die Zahl $\mathfrak{r}$ hat daher *in Beziehung auf den Rationalitäts-Bereich der gewöhnlichen rationalen Zahlen* eine ganz analoge Bedeutung wie die (absolute) Stufenzahl r; sie giebt einen „relativen Rang“ des Systems (a_{ik}) an, nämlich einen solchen, welcher dem Systeme in Beziehung auf den Rationalitäts-Bereich *Eins* zukommt*); die Zahl $\mathfrak{r}$ soll deshalb kurzweg als

„der Rationalitäts-Rang des Systems (a_{ik})“

bezeichnet werden.

Jedes System von pq Elementen:

$$(a_{ik}) \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\,2,\,\dots\, p \\ k=1,\,2,\,\dots\, q \end{smallmatrix}\right),$$

dessen (absoluter) Rang gleich r, und dessen Rationalitäts-Rang gleich $\mathfrak{r}$ ist, hat hiernach die charakteristische Eigenschaft, dass es in dem zweiten engeren Sinne (der Zeilen-Transformation) einem Systeme aequivalent ist, welches genau $\mathfrak{r}$ *nicht ganzzahlige* und überhaupt nur r Zeilen enthält.

Ein solches dem Systeme (a_{ik}) aequivalentes System ist das obige System:

$$b_{1k},\ b_{2k},\ \dots\ b_{\mathfrak{r}k},\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{r}+1,k},\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{r}+2,k},\ \dots\ \mathfrak{b}_{rk} \qquad (k=1,2,\dots q),$$

dessen Elemente gemäss den Gleichungen $(\mathfrak{H}')$ und $(\mathfrak{L})$ nur Determinanten-Quotienten:

$$\frac{|a_{fg'}|}{|a_{fg}|} \qquad \left(\begin{smallmatrix} f,\,g=1,\,2,\,\dots\, r \\ g'=1,\,2,\,\dots\, h-1,\,k,\,h+1,\,\dots\, r \end{smallmatrix}\right)$$

und lineare ganzzahlige Functionen derselben sind. Die charakteristische Eigenschaft eines Systems (a_{ik}) vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$ kann hiernach auch dadurch ausgedrückt werden, dass

*) Vgl. § 3 meiner oben citirten Festschrift zu Hrn. *Kummer's* Doctorjubiläum.[1])

[1]) Band II S. 253 flgde. dieser Ausgabe. H.

zwischen den Determinanten r^{ter} Ordnung genau $r-\mathfrak{r}$ lineare ganzzahlige Relationen:

$$(\mathfrak{L}') \qquad \sum_{h=1}^{h=r} \mathfrak{b}_{ih}\,|a_{fg'}| = \mathfrak{b}_{ik}\,|a_{fg}| \qquad \left(\begin{smallmatrix} f,\,g=1,\,2,\,\dots\, r \\ g'=1,\,2,\,\dots\, h-1,\,k,\,h+1,\,\dots\, r \\ i=\mathfrak{r}+1,\,\mathfrak{r}+2,\,\dots\, r \end{smallmatrix}\right)$$

bestehen. Jede dieser Relationen kann, wenn $\mathfrak{b}_{im} = a_{0m}$ gesetzt wird, einfach durch die Gleichung:

$$|a_{lm}| = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} l=0,\,1,\,2,\,\dots\, r \\ m=k,\,1,\,2,\,\dots\, r \end{smallmatrix}\right)$$

dargestellt werden, und diese Gleichung besagt nichts Anderes, als dass das System (a_{ik}) in ein (im Sinne der Zeilentransformation) aequivalentes übergeht, wenn eine der Zeilen:

$$\mathfrak{b}_{i1},\ \mathfrak{b}_{i2},\ \dots\ \mathfrak{b}_{iq} \qquad (i=\mathfrak{r}+1,\,\mathfrak{r}+2,\,\dots\, r)$$

hinzugefügt wird. Es können daher auch *alle* $r-\mathfrak{r}$ Zeilen $\mathfrak{b}_{ik}$ hinzugefügt werden. Da diese von einander linear unabhängig sind, so müssen $\mathfrak{r}$ Zeilen a_{ik} — wenn auch nicht jede — mit den $r-\mathfrak{r}$ Zeilen $\mathfrak{b}_{ik}$ ein linear unabhängiges System von r Zeilen bilden. Es ergiebt sich also,

dass für jedes System von pq Elementen:

$$(a_{ik}) \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\,2,\,\dots\, p \\ k=1,\,2,\,\dots\, q \end{smallmatrix}\right),$$

dessen (absoluter Rang) gleich r und dessen Rationalitäts-Rang gleich $\mathfrak{r}$ ist, ein aequivalentes existirt, welches aus dem ersten dadurch entsteht, dass $p-r$ Zeilen weggelassen und $r-\mathfrak{r}$ Zeilen durch ebenso viel andere mit lauter ganzzahligen Elementen ersetzt werden.

Die vorstehende Entwickelung zeigt, dass (falls $r > \mathfrak{r}+1$ ist) nicht bloss zwischen den Determinanten r^{ter} Ordnung*), sondern auch zwischen den

*) Vgl. die obigen Gleichungen $(\mathfrak{L}')$.

Determinanten $(\mathfrak{r}+1)^{\text{ter}}$ Ordnung des Systems (a_{ik}) lineare ganzzahlige Relationen bestehen. Fügt man nämlich dem Systeme (a_{ik}) die $r-\mathfrak{r}$ Zeilen $\mathfrak{b}_{ik}$ hinzu, so entsteht ein aequivalentes System von $p+r-\mathfrak{r}$ Zeilen, für welches alle Determinanten der Ordnung $r+1$ verschwinden; und jede der Gleichungen, welche man erhält, wenn man eine derjenigen Determinanten $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung gleich Null setzt, die aus $(r-\mathfrak{r})\,(r+1)$ ganzzahligen Elementen $\mathfrak{b}_{ik}$ und aus $(\mathfrak{r}+1)\,(r+1)$ Elementen a_{ik} gebildet sind, liefert offenbar eine lineare ganzzahlige Relation zwischen Subdeterminanten $(\mathfrak{r}+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von Elementen a_{ik}.

Es ist noch zu erwähnen, dass (unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen) der Natur der Sache nach stets $\mathfrak{r} \leq r \leq q$ ist, und dass $\mathfrak{r}$, für den Fall $r=q$, den Werth *Null* hat, weil alsdann das aus den ersten r^2 Elementen bestehende System (a_{ik}), also auch das ganze System, im Sinne der Zeilen-Transformation dem „Einheitsysteme“

$$(\delta_{ik}) \qquad (i,\,k=1,\,2,\,\dots r),$$

folglich in der That einem aus lauter ganzzahligen Elementen bestehenden Systeme aequivalent ist. Der Rationalitäts-Rang eines Systems (a_{ik}) ist also höchstens gleich dem (absoluten) Range, und er ist stets gleich *Null*, wenn die Anzahl der Colonnen nicht grösser ist, als die Zahl, welche den (absoluten) Rang des Systems bezeichnet.

§ 8.

Ein System:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,\,2,\,\dots p \\ k=1,\,2,\,\dots q \end{pmatrix}$$

vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range *Null* ist einem Systeme:

$$(b_{hk}) \qquad \begin{pmatrix} h=1,\,2,\,\dots r \\ k=1,\,2,\,\dots q \end{pmatrix}$$

von *lauter ganzzahligen* Elementen aequivalent, und zwar im Sinne der Zeilen-

Transformation. Da in diesem Falle $\mathfrak{r}=0$ ist, nimmt der Index i in den Gleichungen $(\mathfrak{L}')$ des vorigen Paragraphen die Werthe $1,\,2,\,\dots r$ an, und diese Gleichungen:

$$\sum_h \mathfrak{b}_{ih}\,|\,a_{fg'}\,| = \mathfrak{b}_{is}\,|\,a_{fg}\,| \qquad \begin{pmatrix} f,\,g,\,h,\,i=1,\,2,\,\dots r \\ g'=1,\,2,\,\dots h-1,\,s,\,h+1,\,\dots r \end{pmatrix}$$

genügen dann, um das Verhältniss der $r+1$ Determinanten, welche aus den r Zeilen von je $r+1$ Elementen:

$$a_{f1},\ a_{f2},\ \dots\ a_{fr},\ a_{fs} \qquad (f=1,\,2,\,\dots r)$$

zu bilden sind, durch die Coefficienten $\mathfrak{b}$, also in *ganzen Zahlen,* darzustellen. Dies gilt für *jeden* Werth: $s=r+1,\ r+2,\ \dots q$; also:

für den Fall $\mathfrak{r}=0$ ist das Verhältniss je zweier Determinanten:

$$|\,a_{fg'}\,|:|\,a_{fg}\,| \qquad \begin{pmatrix} f,\,g,\,h=1,\,2,\,\dots r \\ g'=1,\,2,\,\dots h-1,\,s,\,h+1,\,\dots r \\ s=r+1,\,r+2,\,\dots q \end{pmatrix}$$

rational, und dies ist zugleich für diesen Fall *charakteristisch;*

denn jenes Verhältniss ist gemäss § 6 $(\mathfrak{H}')$ gleich b_{hs}, und das dem Systeme (a_{ik}) aequivalente System (b_{hk}), dessen Elemente für $k \leq r$ das Einheitssystem bilden, besteht daher für den Fall $\mathfrak{r}=0$ aus *lauter rationalen* Elementen.

Da die Auflösung des Systems der r Gleichungen:

$$(\mathfrak{M}) \qquad \sum_k a_{ik}\,w_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,\,2,\,\dots r \\ k=1,\,2,\,\dots r,\,s \end{pmatrix}$$

durch:

$$w_h : w_s = |\,a_{fg'}\,| : |\,a_{fg}\,| \qquad \begin{pmatrix} f,\,g,\,h=1,\,2,\,\dots r \\ g'=1,\,2,\,\dots h-1,\,s,\,h+1,\,\dots r \end{pmatrix}$$

gegeben ist, so erweist sich auch

die Lösbarkeit der Gleichungen $(\mathfrak{M})$ in *ganzen Zahlen* w, für *alle* Werthe $s = r+1,\ r+2,\ \dots q$,

als eine charakteristische Eigenschaft derjenigen Systeme (a_{ik}), deren Rationalitäts-Rang gleich *Null* ist.

§ 9.

Ist (a_{ik}) irgend ein System von pq Elementen, dessen (absoluter) Rang gleich r, und dessen Rationalitäts-Rang gleich $\mathfrak{r}$ (von *Null* verschieden) ist, so kann man sich die Zeilen so geordnet denken, dass die *ersten* r Reihen von Elementen:

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \dots a_{iq} \qquad (i=1,2,\dots r)$$

überhaupt von einander linear unabhängig und zugleich die *ersten* $\mathfrak{r}$ Reihen von Elementen:

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \dots a_{iq} \qquad (i=1,2,\dots \mathfrak{r})$$

in Beziehung auf den Rationalitäts-Bereich Eins von einander linear unabhängig sind. Dann giebt offenbar die Rangzahl r des ganzen Systems (a_{ik}) zugleich den (absoluten) Rang des aus den ersten r Zeilen bestehenden Systems an, und die Zahl $\mathfrak{r}$, welche den Rationalitäts-Rang des ganzen Systems (a_{ik}) bezeichnet, hat eben dieselbe Bedeutung auch für das aus den ersten $\mathfrak{r}$ Zeilen gebildete System.

Unter den angegebenen Voraussetzungen kann dasjenige System von Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \varphi_i \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots \mathfrak{r} \\ k=1,2,\dots q \end{smallmatrix}\right),$$

welches nur die *ersten* $\mathfrak{r}$ von den r Gleichungen $(\mathfrak{G})$ des § 5 enthält, für beliebig gegebene Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots$ mit den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\varphi_i| < \tau \qquad (i=1,2,\dots \mathfrak{r})$$

in ganzen Zahlen $w_1, w_2, \dots w_q$ gelöst werden.

I. Um eine solche Lösung zu erhalten, wähle man (wie im § 2, II) zuvörderst Zahlen m_{ks}, für welche die absoluten Werthe der r Ausdrücke:

$$\sum_k a_{ik} m_{ks} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots r \\ k=1,2,\dots r,\, s \end{smallmatrix}\right)$$

kleiner als τ werden. Dies ist stets möglich. Denn wenn man jedes der r Intervalle:

$$t^r \sum_k |a_{ik}| \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots r;\ k=1,2,\dots r,\, s; \\ |a_{ik}| \text{ bedeutet den absoluten Werth von } a_{ik} \end{smallmatrix}\right),$$

welches die je $(t^r+1)^{r+1}$ Werthe von:

$$\sum_k a_{1k} w_k,\ \sum_k a_{2k} w_k,\ \dots \sum_k a_{rk} w_k \qquad \left(\begin{smallmatrix} w_k = 0,1,2,\dots t^r \\ k=1,2,\dots r,\, s \end{smallmatrix}\right)$$

umfasst, in t^{r+1} gleiche Theile theilt, so giebt es mindestens zwei Systeme von Zahlen:

$$(w_1', w_2', \dots w_r', w_s'), \qquad (w_1'', w_2'', \dots w_r'', w_s''),$$

die so beschaffen sind, dass die beiden Werthe:

$$\sum_k a_{ik} w_k', \qquad \sum_k a_{ik} w_k'' \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots r \\ k=1,2,\dots r,\, s \end{smallmatrix}\right),$$

für keinen der Indices i, in zwei verschiedenen der t^{r+1} Theilintervalle liegen. Setzt man nun:

$$w_k' - w_k'' = m_{ks} \qquad (k=1,2,\dots r, s),$$

so ist:

$$\left|\sum_k a_{ik} m_{ks}\right| < t^{-1} \sum_k |a_{ik}| \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots r \\ k=1,2,\dots r,\, s \end{smallmatrix}\right),$$

und man kann also in der That durch angemessene Wahl der Zahl t bewirken, dass die absoluten Werthe:

$$\left|\sum_k a_{ik} m_{ks}\right| \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots r \\ k=1,2,\dots r,\, s \end{smallmatrix}\right)$$

kleiner als die gegebene Grösse τ werden.

Hierbei können freilich für einzelne Werthe von i und für einzelne Werthe von s die Ausdrücke $\sum\limits_k a_{ik} m_{ks}$ gleich Null werden. Aber für *alle* Werthe von i und s kann dies nicht der Fall sein, da nach dem, was am Schlusse des vorigen Paragraphen ausgeführt worden, die Existenz von Zahlen m_{ks}, wofür *alle* Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} m_{ks} = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\,2,\,\dots\,r;\ k=1,\,2,\,\dots\,r,\,s; \\ s=r+1,\,r+2,\,\dots\,q \end{smallmatrix}\right)$$

erfüllt sind, eine charakteristische Eigenschaft der Systeme (a_{ik}) vom Rationalitäts-Range *Null* ist. Es muss daher mindestens *einen* Index s geben, für den nicht *alle* r Werthe:

$$\sum_k a_{ik} m_{ks} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\,2,\,\dots\,r \\ k=1,\,2,\,\dots\,r,\,s \end{smallmatrix}\right)$$

gleich Null werden. Setzt man nun:

$$\sum_k a_{ik} m_{ks} = a_{i,\,q+1} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\,2,\,\dots\,r \\ k=1,\,2,\,\dots\,r,\,s \end{smallmatrix}\right),$$

so sind die r Grössen $a_{i,\,q+1}$ ihrem absoluten Werthe nach kleiner als τ, und nicht sämmtlich gleich *Null*.

II. Diejenigen Zeilen $a_{1k}, a_{2k}, \dots a_{rk}$, wofür der Werth von $a_{i,\,q+1}$ beliebig klein und doch von Null verschieden ist, können offenbar nicht lauter rationale Elemente enthalten. Jede solche Zeile, die nicht lauter rationale Elemente enthält, kann aber — unbeschadet der im Anfange dieses Paragraphen gemachten Voraussetzung — als *erste* Zeile genommen werden. Man kann also namentlich diejenige Zeile als die *erste* wählen, wofür der absolute Werth von $a_{i,\,q+1}$ am grössten ist. Alsdann wird:

$$\tau > |a_{1,\,q+1}| \geqq |a_{i,\,q+1}| \qquad (i=1,\,2,\,\dots\,r),$$

und nun kann aus jeder näherungsweisen ganzzahligen Lösung der Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}^0) \qquad \sum_k \left(a_{ik} - \frac{a_{i,\,q+1}}{a_{1,\,q+1}}\, a_{1k}\right) w_k = \xi_i - \frac{a_{i,\,q+1}}{a_{1,\,q+1}}\, \xi_1 \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=2,\,3,\,\dots\,r \\ k=1,\,2,\,\dots\,q \end{smallmatrix}\right),$$

eine ganzzahlige Lösung der Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}_1) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \varphi_i \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\,2,\,\dots\,r \\ k=1,\,2,\,\dots\,q \end{smallmatrix}\right),$$

hergeleitet werden. Da nämlich:

$$\sum_k \left(a_{ik} - \frac{a_{i,\,q+1}}{a_{1,\,q+1}}\, a_{1k}\right) m_{ks} = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=2,\,3,\,\dots\,r \\ k=1,\,2,\,\dots\,q \end{smallmatrix}\right),$$

ist, so genügen, wenn durch:

$$w_1 = n_1, \quad w_2 = n_2, \ \dots\dots\ w_q = n_q$$

irgend eine Lösung der Gleichungen $(\mathfrak{N}^0)$ gegeben wird, denselben Gleichungen $(\mathfrak{N}^0)$ auch die Werthe:

$$w_1 = n_1 + \mu m_{1s}, \quad w_2 = n_2 + \mu m_{2s}, \ \dots\dots\ w_q = n_q + \mu m_{qs},$$

und die hierbei noch beliebige ganze Zahl μ kann nun so bestimmt werden, dass für dieselben Werthe von $w_1, w_2, \dots\ w_q$:

$$\Big|\xi_1 - \sum_k a_{1k} w_k\Big| < \tfrac{1}{2}\tau \qquad (k=1,\,2,\,\dots\,q)$$

oder, was dasselbe ist:

$$\sum_k a_{1k} w_k = \xi_1 - \varphi_1, \qquad |\varphi_1| < \tfrac{1}{2}\tau \qquad (k=1,\,2,\,\dots\,q)$$

wird. Denn hierzu braucht man, da:

$$\xi_1 - \sum_k a_{1k}(\mu m_{ks} + n_k) = \xi_1 - \mu\, a_{1,\,q+1} - \sum_k a_{1k} n_k \qquad (k=1,\,2,\,\dots\,q)$$

und $|a_{1,\,q+1}| < \tau$ ist, nur die dem Werthe von:

$$\frac{\xi_1 - \sum\limits_k a_{1k} n_k}{a_{1,\,q+1}} \qquad (k=1, 2, \ldots q)$$

nächste ganze Zahl für μ zu nehmen. Wird nun die angenäherte Lösung derselben Gleichungen $(\mathfrak{N}^0)$ mittels der Zahlen n_k oder $n_k + \mu m_{ks}$ so vorausgesetzt, dass sich die Werthe auf den beiden Seiten der Gleichung um weniger als $\frac{1}{2}\tau$ von einander unterscheiden, so ist:

$$\sum_k \left(a_{ik} - \frac{a_{i,\,q+1}}{a_{1,\,q+1}}\, a_{1k}\right)(n_k + \mu m_{ks}) = \xi_i - \frac{a_{i,\,q+1}}{a_{1,\,q+1}}\, \xi_1 - \theta_i, \qquad |\theta_i| < \tfrac{1}{2}\tau$$

$$(i=2, 3, \ldots r;\ k=1, 2, \ldots q),$$

und wenn man hiermit die Gleichung:

$$\sum_k a_{1k}(n_k + \mu m_{ks}) = \xi_1 - \varphi_1 \qquad (k=1, 2, \ldots q)$$

verbindet, welche aus der obigen Gleichung: $\sum\limits_k a_{1k} w_k = \xi_1 - \varphi_1$, durch Einsetzen der Werthe $w_k = n_k + \mu m_{ks}$ entsteht, so resultirt die Gleichung:

$$\sum_k a_{ik}(n_k + \mu m_{ks}) = \xi_i - \theta_i - \frac{a_{i,\,q+1}}{a_{1,\,q+1}}\, \varphi_1 \qquad \binom{i=2, 3, \ldots r}{k=1, 2, \ldots q},$$

welche auch noch für $i=1$ gilt, falls man $\theta_1 = 0$ nimmt. Setzt man endlich noch:

$$\theta_i + \frac{a_{i,\,q+1}}{a_{1,\,q+1}}\, \varphi_1 = \varphi_i \qquad (i=2, 3, \ldots r),$$

so wird $|\varphi_i| < \tau$, da

$$|a_{i,\,q+1}| < |a_{1,\,q+1}|, \quad |\theta_i| < \tfrac{1}{2}\tau, \quad |\varphi_1| < \tfrac{1}{2}\tau \qquad (i=2, 3, \ldots r)$$

vorausgesetzt worden, und die Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}_1) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \varphi_i \qquad \binom{i=1, 2, \ldots r}{k=1, 2, \ldots q},$$

mit den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\varphi_i| < \tau \qquad (i=1, 2, \ldots r),$$

werden also in der That durch die Werthe:

$$w_k = n_k + \mu m_{ks} \qquad (k=1, 2, \ldots q)$$

befriedigt, wenn die Zahlen $n_1, n_2, \ldots . n_q$ den Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}_2) \qquad \sum_k \left(a_{ik} - \frac{a_{i,\,q+1}}{a_{1,\,q+1}}\, a_{1k}\right) n_k = \xi_i - \frac{a_{i,\,q+1}}{a_{1,\,q+1}}\, \xi_1 - \theta_i \qquad \binom{i=2, 3, \ldots r}{k=1, 2, \ldots q},$$

mit den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\theta_i| < \tfrac{1}{2}\tau \qquad (i=2, 3, \ldots r)$$

genügen, und wenn die ganze Zahl μ durch die Bedingung:

$$\left|\mu a_{1,\,q+1} - \xi_1 + \sum_k a_{1k} n_k\right| < \tfrac{1}{2}\,|a_{1,\,q+1}| \qquad (k=1, 2, \ldots q)$$

bestimmt ist.

III. In der hier unter I und II gegebenen Entwickelung kann überall der Index i auf die Werthe, die nicht grösser als $\mathfrak{r}$ sind, beschränkt werden. Dann sind die r Gleichungen $(\mathfrak{N}_1)$ mit den im Anfange dieses Paragraphen aufgestellten $\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \varphi_i \qquad \binom{i=1, 2, \ldots \mathfrak{r}}{k=1, 2, \ldots q}$$

identisch, deren Lösbarkeit in ganzen Zahlen w, mit den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\varphi_i| < \tau \qquad (i=1, 2, \ldots \mathfrak{r})$$

nachgewiesen werden sollte.

Bei der Beschränkung auf die Werthe $i \leqq \mathfrak{r}$ bilden aber die Gleichungen $(\mathfrak{N}_2)$ ein System von $(\mathfrak{r}-1)$ Gleichungen vom Rationalitäts-Range $(\mathfrak{r}-1)$.

Denn wenn der Rationalitäts-Rang kleiner sein sollte, müsste mindestens *eine* Gleichung:

$$\sum_{\mathfrak{i}} c_{\mathfrak{i}} \left(a_{\mathfrak{i}k} - \frac{a_{\mathfrak{i},\,q+1}}{a_{1,\,q+1}}\, a_{1k} \right) = \mathfrak{a}_k \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{i}=2,\,3,\,\ldots\,\mathfrak{r} \\ k=1,\,2,\,\ldots\,q \end{pmatrix},$$

in welcher die $\mathfrak{a}_k$ ganze Zahlen bedeuten, existiren. Dies ist aber nicht möglich, weil eine solche Gleichung, wenn:

$$\sum_{\mathfrak{i}} c_{\mathfrak{i}}\, a_{\mathfrak{i},\,q+1} = -\, c_1\, a_{1,\,q+1} \qquad (\mathfrak{i}=2,\,3,\,\ldots\,\mathfrak{r})$$

gesetzt wird, in die Gleichung:

$$\sum_{\mathfrak{i}} c_{\mathfrak{i}}\, a_{\mathfrak{i}k} = \mathfrak{a}_k \quad . \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{i}=1,\,2,\,\ldots\,\mathfrak{r} \\ k=1,\,2,\,\ldots\,q \end{pmatrix}$$

übergeht, deren Bestehen mit der Voraussetzung, dass die Zahl $\mathfrak{r}$ den Rationalitäts-Rang des Systems $(a_{\mathfrak{i}k})$ angiebt, unverträglich ist.

Da nun die Lösbarkeit eines Systems von $(\mathfrak{r}-1)$ Gleichungen vom Rationalitäts-Range $(\mathfrak{r}-1)$ vorausgesetzt werden kann,*) so ist der zu führende Nachweis der Lösbarkeit der Gleichungen $(\mathfrak{N})$ in der obigen Entwickelung vollständig enthalten. Doch soll eben diese Entwickelung noch benutzt werden, um den weiteren Nachweis zu führen, dass auch das System der r Gleichungen $(\mathfrak{N}_1)$ lösbar ist, wenn zwischen den gegebenen Grössen ξ gewisse Relationen bestehen.

§ 10.

Da das System (a_{ik}) den Rationalitäts-Rang $\mathfrak{r}$ hat, müssen $r-\mathfrak{r}$ linear unabhängige Relationen:

---

*) Die Lösbarkeit einer Gleichung vom Rationalitäts-Range *Eins*, sowie eines Systems von zwei Gleichungen vom Rationalitäts-Range *Zwei* ist in den §§ 1 und 2 ausführlich dargelegt worden.

$$(\mathfrak{P}) \qquad \sum_i c_{hi}\, a_{ik} = \mathfrak{a}_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\,\ldots\,r \\ i=1,\,2,\,\ldots\,r \\ k=1,\,2,\,\ldots\,q \end{pmatrix}$$

mit *ganzzahligen* Werthen $\mathfrak{a}_{hk}$ bestehen. Es war aber:

$$\sum_k a_{ik}\, m_{ks} = a_{i,\,q+1} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\,2,\,\ldots\,r \\ k=1,\,2,\,\ldots\,q \end{pmatrix},$$

also

$$\sum_i c_{hi}\, a_{i,\,q+1} = \sum_k \mathfrak{a}_{hk}\, m_{ks} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\,\ldots\,r \\ i=1,\,2,\,\ldots\,r \\ k=1,\,2,\,\ldots\,q \end{pmatrix}.$$

Da nun die Werthe $|a_{i,\,q+1}|$ sämmtlich kleiner als eine beliebig klein gewählte Grösse τ sind, die Summe rechts aber einen ganzzahligen Werth hat, so muss sie gleich Null sein. Zwischen den Grössen $a_{i,\,q+1}$ bestehen hiernach die $r-\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$(\mathfrak{Q}) \qquad \sum_i c_{hi}\, a_{i,\,q+1} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\,\ldots\,r \\ i=1,\,2,\,\ldots\,r \end{pmatrix}.$$

Dies vorausgeschickt, soll nun gezeigt werden, dass

die r Gleichungen $(\mathfrak{N}_1)$ des vorigen Paragraphen:

$$(\mathfrak{N}_1) \qquad \sum_k a_{ik}\, w_k = \xi_i - \varphi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,\,2,\,\ldots\,r \\ k=1,\,2,\,\ldots\,q \end{pmatrix}$$

in ganzen Zahlen w lösbar sind, sobald zwischen den gegebenen Grössen ξ die Relationen:

$$(\mathfrak{R}) \qquad \sum_i c_{hi}\, \xi_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\,\ldots\,r \\ i=1,\,2,\,\ldots\,r \end{pmatrix}$$

bestehen.

Dabei kann angenommen werden, dass die Determinante:

$$|c_{hi}| \qquad (h,\, i=\mathfrak{r}+1,\,\mathfrak{r}+2,\,\ldots\,r)$$

von Null verschieden ist; anderenfalls würde nämlich aus den Gleichungen $(\mathfrak{P})$ eine Relation:

$$\sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{i}=\mathfrak{r}} \gamma_{\mathfrak{i}} a_{\mathfrak{i}k} = \sum_{h=\mathfrak{r}+1}^{h=r} \alpha_h \mathfrak{a}_{hk} \qquad (k=1, 2, \ldots q)$$

hervorgehen, es würde also eine lineare Function der $\mathfrak{r}$ ersten Zeilen:

$$a_{\mathfrak{i}1},\ a_{\mathfrak{i}2}, \ldots a_{\mathfrak{i}q} \qquad (\mathfrak{i}=1, 2, \ldots \mathfrak{r})$$

als lineare Function der $r-\mathfrak{r}$ ganzzahligen Reihen:

$$\mathfrak{a}_{h1},\ \mathfrak{a}_{h2}, \ldots \mathfrak{a}_{hq} \qquad (h=\mathfrak{r}+1, \ldots r)$$

darstellbar sein, d. h. es würden — entgegen der im Anfang des § 9 gemachten Voraussetzung — die ersten $\mathfrak{r}$ Reihen von Elementen „in Beziehung auf den Rationalitäts-Bereich *Eins*“ von einander linear abhängig sein.

Unter der hiermit gerechtfertigten Voraussetzung, dass die Determinante:

$$|c_{hi}| \qquad (h, i=\mathfrak{r}+1, \mathfrak{r}+2, \ldots r)$$

von Null verschieden ist, folgen aus den Relationen $(\mathfrak{Q})$ und $(\mathfrak{R})$ auch Relationen folgender Art:

$$(\mathfrak{P}) \qquad a_{h,q+1} = \sum_{\mathfrak{i}} \bar{c}_{h\mathfrak{i}} a_{\mathfrak{i},q+1}$$
$$(\mathfrak{R}) \qquad \xi_h = \sum_{\mathfrak{i}} \bar{c}_{h\mathfrak{i}} \xi_{\mathfrak{i}} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{i}=1, 2, \ldots \mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1, \ldots r \end{pmatrix}.$$

Für den Fall $\mathfrak{r}=1$ ist demnach:

$$a_{h,q+1} = \bar{c}_{h1} a_{1,q+1}, \quad \xi_h = \bar{c}_{h1} \xi_1, \quad \text{also} \quad \xi_h = \frac{a_{h,q+1}}{a_{1,q+1}} \xi_1 \qquad (h=2, 3, \ldots r),$$

und wenn man für diesen Fall gemäss § 9 die Zahl μ als die dem Quotienten $\frac{\xi_1}{a_{1,q+1}}$ nächste ganze Zahl bestimmt, und

$$\varphi_h = \frac{a_{h,q+1}}{a_{1,q+1}} \varphi_1$$

setzt, so erhält man die Lösung der Gleichungen $(\mathfrak{N}_1)$

$$w_k = \mu m_{ks} \qquad (k=1, 2, \ldots q),$$

da alsdann:

$$\sum_k a_{ik} w_k = \mu \sum_k a_{ik} m_{ks} = \mu a_{i,q+1} = \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} (\xi_1 - \varphi_1) = \xi_i - \varphi_i$$

wird.

Nimmt man nun für Gleichungen $(\mathfrak{N}_1)$ vom Rationalitäts-Range $(\mathfrak{r}-1)$ an, dass sie unter Bedingungen $(\mathfrak{R})$ in ganzen Zahlen w lösbar seien, so kann man die Existenz von Zahlen w voraussetzen, durch welche die Gleichungen:

$$(\mathfrak{N}^\circ) \qquad \sum_k \left(a_{ik} - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} a_{1k}\right) w_k = \xi_i - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} \xi_1 \qquad \begin{pmatrix} i=2, 3, \ldots r \\ k=1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

erfüllt werden, falls die Grössen ξ den Bedingungsgleichungen:

$$(\mathfrak{R}^\circ) \qquad \sum_i c_{hi} \left(\xi_i - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} \xi_1\right) = 0 \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \ldots r \\ i=2, 3, \ldots r \end{pmatrix}$$

genügen. Denn die Coefficienten c_{hi} sind die Coefficienten der $(r-\mathfrak{r})$ linearen Relationen:

$$\sum_i c_{hi} \left(a_{ik} - \frac{a_{i,q+1}}{a_{1,q+1}} a_{1k}\right) = \mathfrak{a}_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \ldots r \\ i=2, 3, \ldots r \\ k=1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

welche zwischen den $(r-1)$ Zeilen der Coefficienten des Gleichungssystems $(\mathfrak{N}^\circ)$ — vermöge der Gleichungen $(\mathfrak{P})$ und $(\mathfrak{Q})$ — bestehen, und der Rationalitäts-Rang des Systems der $(r-1)$ Gleichungen $(\mathfrak{N}^\circ)$ ist daher in der That: $r-1-(r-\mathfrak{r})$ d. h. gleich $(\mathfrak{r}-1)$.

Aus jeder Lösung der Gleichungen ($\mathfrak{N}^0$) ist aber nach den Entwickelungen im § 9 für *dieselben* Grössen ξ, also auch mit *denselben* Bedingungen ($\mathfrak{R}^0$) eine Lösung des Systems:

$$(\mathfrak{N}_1) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \varphi_i \qquad \binom{i=1,2,\dots r}{k=1,2,\dots q}$$

herzuleiten. Da nun einerseits die Bedingungen ($\mathfrak{R}^0$) — vermöge der Gleichungen ($\mathfrak{Q}$) — mit den Bedingungen:

$$(\mathfrak{R}) \qquad \sum_i c_{hi}\, \xi_i = 0 \qquad (i=1,2,\dots r)$$

zusammenfallen, und da andrerseits für den Fall $\mathfrak{r}=1$ die Lösbarkeit der Gleichungen ($\mathfrak{N}_1$) unter den Bedingungen ($\mathfrak{R}$) oben dargethan worden ist, so folgt deren Lösbarkeit für jeden beliebigen Werth des Rationalitäts-Ranges $\mathfrak{r}$.

§ 11.

Das im vorhergehenden Paragraphen entwickelte Resultat,

> dass stets ganze Zahlen $w_1, w_2, \dots w_q$ gefunden werden können, für welche die Werthe von:
>
> $$\sum_k a_{1k} w_k,\ \sum_k a_{2k} w_k, \dots \sum_k a_{rk} w_k \qquad (k=1,2,\dots q)$$
>
> irgend welchen gegebenen, nur den Gleichungen ($\mathfrak{R}$) genügenden, Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ beliebig nahe kommen,

lässt sich noch in anderer Weise mit Hülfe einer, auch an sich wichtigen, Colonnentransformation des Systems (a_{ik}) begründen.

Um eben diese Transformation auseinanderzusetzen sei zuvörderst bemerkt, dass der Rationalitäts-Rang der Definition nach für Systeme, die im Sinne der Zeilentransformation aequivalent sind, identisch ist; dass er aber

offenbar auch ungeändert bleibt, wenn ein System in ein, im Sinne der Colonnentransformation, aequivalentes übergeht.

Nunmehr soll gezeigt werden,

> dass jedes System, dessen (absoluter) Rang grösser ist als der Rationalitäts-Rang, durch Colonnentransformation in ein aequivalentes verwandelt werden kann, welches die Eigenschaft hat, dass bei Weglassung einer bestimmten Colonne der (absolute) Rang um eine Einheit erniedrigt wird, während der Rationalitäts-Rang derselbe bleibt.

Wenn nämlich das System:

$$(a_{ik}) \qquad \binom{i=1,2,\dots p}{k=1,2,\dots q}$$

vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$ ist, und die Reihenfolge der Colonnen und Zeilen so bestimmt wird, dass die Determinante der *ersten* r^2 Elemente a_{ik} von Null verschieden ist, so giebt es unter der Voraussetzung $\mathfrak{r} < r$ (nach § 7) ganze Zahlen:

$$a_{01},\ a_{02},\ \dots\ a_{0q},$$

für welche die Determinante $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$|a_{lm}| \qquad \binom{l=0,1,2,\dots r}{m=k,1,2,\dots r}$$

verschwindet. Das durch Hinzufügung der Zeile ganzzahliger Elemente a_{0k} gebildete System:

$$(a_{hk}) \qquad \binom{h=0,1,\dots p}{k=1,2,\dots q}$$

ist dem ursprünglichen Systeme:

$$(a_{ik}) \qquad \binom{i=1,2,\dots p}{k=1,2,\dots q}$$

im Sinne der Zeilentransformation aequivalent; es ist also ebenfalls vom (absoluten) Range r, und es müssen demgemäss *alle* daraus zu bildenden Determinanten $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung — nicht bloss die oben angeführten besonderen — gleich Null sein.

Es sei nun a_{00}^0 der grösste gemeinsame Theiler der q Zahlen a_{0k} und:

$$a_{0k} = d_k a_{00}^0 \qquad (k=1, 2, \ldots q).$$

Ferner seien die q ganzen Zahlen g_k so gewählt, dass:

$$\sum_k a_{0k} g_k = a_{00}^0 \qquad (k=1, 2, \ldots q)$$

wird. Setzt man dann:

$$a_{i0}^0 = \sum_k a_{ik} g_k, \quad a_{ik}^0 = a_{ik} - d_k \sum_k a_{ik} g_k \qquad \binom{i=1, 2, \ldots p}{k=1, 2, \ldots q},$$

so ist:

$$a_{ik} = a_{ik}^0 + a_{i0}^0 d_k \qquad \binom{i=1, 2, \ldots p}{k=1, 2, \ldots q}.$$

Die beiden Systeme:

$$(a_{il}^0), \quad (a_{ik}) \qquad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \ldots p \\ k=1, 2, \ldots q \\ l=0, 1, 2, \ldots q \end{matrix}\right)$$

gehen also durch ganzzahlige lineare Transformation der Colonnen in einander über, d. h. sie sind im Sinne der Colonnentransformation einander aequivalent.

Diese Aequivalenz besteht auch, wenn man die Werthe des Index i auf die ersten r Zahlen beschränkt. Andererseits gelten die Transformations-Gleichungen auch für $i=0$, wenn:

$$a_{0k}^0 = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots q)$$

genommen wird. Es sind also auch die Systeme:

$$(a_{jl}^0), \quad (a_{jk}) \qquad \left(\begin{matrix} j=0, 1, \ldots p \text{ oder } j=0, 1, \ldots r \\ k=1, 2, \ldots q; \qquad l=0, 1, \ldots q \end{matrix}\right)$$

im Sinne der Colonnentransformation einander aequivalent. Endlich ist das System:

$$(a_{jl}^0) \qquad \left(\begin{matrix} j=0, 1, \ldots p \text{ oder } j=0, 1, \ldots r \\ l=0, 1, \ldots q \end{matrix}\right)$$

dem ursprünglichen Systeme:

$$(a_{ik}) \qquad \binom{i=1, 2, \ldots p}{k=1, 2, \ldots q}$$

in jenem „weiteren“ am Schlusse des § 6 erläuterten Sinne aequivalent; und das System (a_{jl}^0) hat daher ebenso wie das System (a_{ik}) den (absoluten) Rang r und den Rationalitäts-Rang r.

Bedeuten $i_1, i_2, \ldots i_r$ beliebige von den Zahlen $1, 2, \ldots p$, und $k_1, k_2, \ldots k_r$ beliebige von den Zahlen $1, 2, \ldots q$, so besteht offenbar die Determinanten-Relation:

$$|a_{i_0 k_0}^0| = a_{00}^0 \, |a_{ik}^0| \qquad \left(\begin{matrix} i_0=0, i_1, i_2, \ldots i_r; \; i=i_1, i_2, \ldots i_r \\ k_0=0, k_1, k_2, \ldots k_r; \; k=k_1, k_2, \ldots k_r \end{matrix}\right).$$

Da das System (a_{jl}^0) vom (absoluten) Range r ist, so muss die Determinante links, als eine aus diesem Systeme gebildete Determinante $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung gleich Null sein; es verschwindet hiernach jede Determinante r^{ter} Ordnung, die aus dem Systeme:

$$(a_{ik}^0) \qquad \binom{i=1, 2, \ldots p}{k=1, 2, \ldots q}$$

gebildet werden kann, und der (absolute) Rang dieses Systems ist also kleiner als r. Dieser Rang kann aber nicht kleiner als $(r-1)$ sein, weil sonst das System, welches durch Hinzufügung der Colonne:

$$a_{10}^0, \; a_{20}^0, \; \ldots \; a_{p0}^0$$

entsteht, von niedrigerem als dem r^{ten} Range wäre. Der Rang jenes Systems (a_{ik}^0) muss also genau gleich $(r-1)$ sein.

Da der Rationalitäts-Rang des Systems:

$$(a_{jl}^0) \qquad \binom{j=0, 1, \ldots r}{l=0, 1, \ldots q}$$

gleich $\mathfrak{r}$ ist, so giebt es genau $r-\mathfrak{r}$ von einander linear unabhängige Relationen:

$$(\mathfrak{P}^0) \qquad \sum_j c^0_{\mathfrak{r}+1,j}\, a^0_{jl} = \mathfrak{a}^0_{\mathfrak{r}+1,l}, \;\ldots\; \sum_j c^0_{rj}\, a^0_{jl} = \mathfrak{a}^0_{rl} \qquad \binom{j=0,1,\ldots r}{l=0,1,\ldots q},$$

in denen $\mathfrak{a}^0_{\mathfrak{r}+1,l}, \ldots \mathfrak{a}^0_{rl}$ ganze Zahlen sind. Da ferner a^0_{00} eine ganze Zahl und

$$a^0_{0k} = 0 \qquad (k=1,2,\ldots q)$$

ist, so kann in der ersten jener $r-\mathfrak{r}$ Relationen $(\mathfrak{P}^0)$:

$$c^0_{\mathfrak{r}+1,0} = 1,\; c^0_{\mathfrak{r}+1,1} = c^0_{\mathfrak{r}+1,2} = \cdots = c^0_{\mathfrak{r}+1,r} = 0,\; \mathfrak{a}^0_{\mathfrak{r}+1,0} = a^0_{00}$$

genommen werden. Die übrigen $r-\mathfrak{r}-1$ Relationen können, bei Weglassung des Werthes $l=0$, folgendermaassen dargestellt werden:

$$\sum_i c^0_{\mathfrak{r}+2,i}\, a^0_{ik} = \mathfrak{a}^0_{\mathfrak{r}+2,k}, \;\ldots\; \sum_i c^0_{ri}\, a^0_{ik} = \mathfrak{a}^0_{rk} \qquad \binom{i=1,2,\ldots r}{k=1,2,\ldots q}.$$

Aber es kann auch keine weitere solche Relation:

$$\sum_i c^0_{r+1,i}\, a^0_{ik} = \mathfrak{a}^0_{r+1,k} \qquad \binom{i=1,2,\ldots r}{k=1,2,\ldots q}$$

bestehen; denn sonst würde eine $(r-\mathfrak{r}+1)^{\text{te}}$ Relation:

$$\sum_j c^0_{r+1,j}\, a^0_{jl} = \mathfrak{a}^0_{r+1,l} \qquad \binom{j=0,1,\ldots r}{l=0,1,\ldots q}$$

für das System (a^0_{jl}) folgen, wenn für $l=0$ der ganzzahlige Werth von $\mathfrak{a}^0_{r+1,0}$ beliebig angenommen und dann der Werth von $c^0_{r+1,0}$ gemäss der Gleichung:

$$c^0_{r+1,0}\, a^0_{00} + \sum_i c^0_{r+1,i}\, a^0_{i0} = \mathfrak{a}^0_{r+1,0} \qquad (i=1,2,\ldots r)$$

bestimmt wird. Es bestehen hiernach für die Zeilen des Systems:

$$(a^0_{ik}) \qquad \binom{i=1,2,\ldots r}{k=1,2,\ldots q}$$

nur genau $r-\mathfrak{r}-1$ Relationen der angegebenen Art, und eben dieses System (a^0_{ik}), dessen (absoluter) Rang gleich $r-1$ ist, hat daher den Rationalitäts-Rang: $r-1-(r-\mathfrak{r}-1)$, d. h. den Rationalitäts-Rang $\mathfrak{r}$.

Es hat also das dem gegebenen Systeme vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$:

$$(a_{ik}) \qquad \binom{i=1,2,\ldots p}{k=1,2,\ldots q}$$

(im Sinne der Colonnentransformation) aequivalente System:

$$(a^0_{il}) \qquad \binom{i=1,2,\ldots p}{l=0,1,\ldots q}$$

in der That die Eigenschaft, dass bei Weglassung der durch den Index $l=0$ bezeichneten Colonne ein System:

$$(a^0_{ik}) \qquad \binom{i=1,2,\ldots p}{k=1,2,\ldots q}$$

resultirt, welches vom (absoluten) Range $r-1$ und vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$ ist.

Der oben aufgestellte Satz ist hiermit vollständig bewiesen, und es kann nun aus demselben unmittelbar der allgemeinere Satz gefolgert werden,

($\mathfrak{S}$) dass jedes System vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$ durch Colonnentransformation in ein aequivalentes verwandelt werden kann, aus welchem bei Weglassung bestimmter $(r-\mathfrak{r})$ Colonnen ein System entsteht, dessen (absoluter) Rang, mit dem Rationalitäts-Range übereinstimmend, den Werth $\mathfrak{r}$ hat.

In dem Systeme, welches diesem Satze gemäss, bei Weglassung von $(r-\mathfrak{r})$ Colonnen, für den Fall $\mathfrak{r}=0$ resultirt, müssen, da der (absolute) Rang gleich Null ist, sämmtliche Elemente gleich Null sein; es folgt also,

($\mathfrak{S}^0$) dass jedes System vom Rationalitäts-Range *Null* durch Colonnentransformation in ein aequivalentes verwandelt werden kann, welches *nur* so viel Colonnen enthält, als der absolute Rang angiebt.

Dieser speciellere Satz, dessen eigentliche Quelle hier aufgezeigt worden, findet sich schon in meinen früheren Arbeiten*); er ist vollkommen identisch mit dem Satze, dass jedes aus linearen homogenen Functionen beliebig vieler Variabeln mit ganzzahligen Coefficienten gebildete Divisorensystem auf ein solches reducirt werden kann, in welchem die Anzahl der Elemente mit der Stufenzahl übereinstimmt. Denn wenn die Elemente a_{ik} sämmtlich ganze Zahlen sind, so ist der Rationalitäts-Rang des Systems (a_{ik}) gleich Null. Nun sind zwei Divisorensysteme:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \Big(\sum_i a_{i1}\mathfrak{R}_i,\ \sum_i a_{i2}\mathfrak{R}_i,\ \ldots\ \sum_i a_{iq}\mathfrak{R}_i\Big)$$

$$(\mathfrak{D}^0) \qquad \Big(\sum_i a^0_{i1}\mathfrak{R}_i,\ \sum_i a^0_{i2}\mathfrak{R}_i,\ \ldots\ \sum_i a^0_{iq'}\mathfrak{R}_i\Big) \qquad (i=1,2,\ldots p)$$

einander aequivalent (vergl. § 5), wenn die Elemente des einen Systems homogene lineare ganzzahlige Functionen der Elemente des anderen sind, d. h. wenn Gleichungen:

$$\begin{gathered}\sum_k g_{kk'} \sum_i a_{ik}\mathfrak{R}_i = \sum_i a^0_{ik'}\mathfrak{R}_i \\ \sum_{k'} g^0_{k'k} \sum_i a^0_{ik'}\mathfrak{R}_i = \sum_i a_{ik}\mathfrak{R}_i\end{gathered} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \\ k'=1,2,\ldots q' \end{pmatrix}$$

bestehen, in denen $g_{kk'}$ und $g^0_{k'k}$ ganze Zahlen bedeuten. Alsdann sind aber gemäss § 5 die beiden Coefficienten-Systeme:

$$(a_{ik}),\quad (a^0_{ik'}) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \\ k'=1,2,\ldots q' \end{pmatrix}$$

im Sinne der Colonnentransformation einander aequivalent, weil sie durch die ganzzahligen Transformationsgleichungen:

$$a^0_{ik'} = \sum_k a_{ik} g_{kk'},\quad a_{ik} = \sum_{k'} a^0_{ik'} g^0_{k'k} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \\ k'=1,2,\ldots q' \end{pmatrix}$$

*) Vergl. No. VII und VIII meiner vorigen Mittheilung[1]): „Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln".

[1]) Band III S. 40—42 dieser Ausgabe. H.

mit einander verbunden sind. Da nun nach jenem (specielleren) Satze $(\mathfrak{S}^0)$ stets Systeme $(a^0_{ik'})$ existiren, für welche die hier mit q' bezeichnete Anzahl der Colonnen mit der Rangzahl r übereinstimmt, so folgt, dass in der That für jedes Divisorensystem $(\mathfrak{D})$ aequivalente Divisorensysteme $(\mathfrak{D}^0)$ existiren, die nur aus so viel Elementen bestehen, als die Stufenzahl des Systems angiebt.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dass der oben bewiesene allgemeinere Satz $(\mathfrak{S})$ auch aus dem specielleren $(\mathfrak{S}^0)$ *gefolgert* werden kann.

Wenn nämlich das System (a_{ik}) den (absoluten) Rang r und den Rationalitäts-Rang $\mathfrak{r}$ hat, so bestehen — gemäss der Bedeutung der Zahlen r und $\mathfrak{r}$ — genau $p-\mathfrak{r}$ linear unabhängige Relationen:

$$(\mathfrak{P}') \qquad \sum_i c'_{hi} a_{ik} = \mathfrak{a}_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\ldots p \\ i=1,2,\ldots p \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix},$$

in welchen

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{r}+1,k},\ \mathfrak{a}_{\mathfrak{r}+2,k},\ \ldots\ldots\ \mathfrak{a}_{rk} \qquad (k=1,2,\ldots q)$$

ganze Zahlen, und

$$\mathfrak{a}_{r+1,k},\ \mathfrak{a}_{r+2,k},\ \ldots\ldots\ \mathfrak{a}_{pk} \qquad (k=1,2,\ldots q)$$

sämmtlich gleich Null sind. Diese $p-\mathfrak{r}$ linearen Relationen $(\mathfrak{P}')$ sind aber auch dafür *charakteristisch*, dass das System (a_{ik}) den (absoluten) Rang r und den Rationalitäts-Rang $\mathfrak{r}$ hat.

Das System der $(r-\mathfrak{r})q$ ganzen Zahlen:

$$(\mathfrak{a}_{hk}) \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\ldots r \\ k=1,2,\ldots q \end{pmatrix},$$

hat, weil es aus lauter ganzzahligen Elementen besteht, den Rationalitäts-Rang Null. Aber der (absolute) Rang ist gleich der Anzahl der Zeilen, also gleich $r-\mathfrak{r}$; denn zwischen den $r-\mathfrak{r}$ Zeilen des Systems kann keine lineare Relation:

$$\sum_h \gamma_h \mathfrak{a}_{hk} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \dots r \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

bestehen; sonst würde nämlich, wenn

$$\sum_h \gamma_h c'_{hi} = c''_i \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \dots r \\ i=1, 2, \dots p \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, aus den Gleichungen ($\mathfrak{P}'$) die lineare Relation:

$$\sum_i c''_i a_{ik} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

folgen, und diese würde als eine $(p-r+1)^{\text{te}}$ zu jenen $(p-r)$ Relationen hinzukommen, die in ($\mathfrak{P}'$) für $h = r+1, r+2, \dots p$ enthalten sind; der (absolute) Rang des Systems (a_{ik}) würde also kleiner als r sein.

Jenem specielleren Satze ($\mathfrak{S}^0$) gemäss giebt es nun ein nur $r-\mathfrak{r}$ Colonnen enthaltendes, im Sinne der Colonnentransformation dem Systeme $(\mathfrak{a}_{hk})$ aequivalentes System:

$$(\mathfrak{a}^0_{hf}) \qquad \begin{pmatrix} f=1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1, \dots\dots r \end{pmatrix}.$$

Es giebt daher Transformations-Relationen:

$$\mathfrak{a}^0_{hf} = \sum_k \mathfrak{a}_{hk}\mathfrak{g}_{kf}, \quad \mathfrak{a}_{hk} = \sum_f \mathfrak{a}^0_{hf}\mathfrak{g}^0_{fk} \qquad \begin{pmatrix} f=1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1, \dots\dots r \\ k=1, 2, \dots\dots q \end{pmatrix},$$

mit *ganzzahligen* Coefficienten $\mathfrak{g}_{kf}$, $\mathfrak{g}^0_{fk}$, und wenn diese Coefficienten $\mathfrak{g}_{kf}$, $\mathfrak{g}^0_{fk}$ zur Transformation des Systems (a_{ik}) in ein im Sinne der Colonnen-Transformation aequivalentes System (a^0_{ik}) benutzt werden, indem

$$\begin{aligned} a^0_{if} &= \sum_k a_{ik}\mathfrak{g}_{kf} \\ a^0_{ig} &= a_{ig} - \sum_f a^0_{if}\mathfrak{g}^0_{fg} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f=1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ g=r-\mathfrak{r}+1, \dots q \\ i=1, 2, \dots\dots p \\ k=1, 2, \dots\dots q \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, so erhält man mit Hülfe der Relationen ($\mathfrak{P}'$) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_i c'_{hi} a^0_{if} &= \mathfrak{a}^0_{hf} \\ \sum_i c'_{hi} a^0_{ig} &= \sum_i c'_{hi} a_{ig} - \sum_{i,f} c'_{hi} a^0_{if}\mathfrak{g}^0_{fg} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f=1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ g=r-\mathfrak{r}+1, \dots q \\ h=\mathfrak{r}+1, \dots\dots r \\ i=1, 2, \dots\dots p \\ k=1, 2, \dots\dots q \end{pmatrix},$$

die auch noch für $h > r$ gelten, wenn für diese Werthe von h die Grössen $\mathfrak{a}^0_{hf}$ gleich Null gesetzt werden. Nun ist ferner:

$$\sum_i c'_{hi} a_{ig} = \mathfrak{a}_{hg},$$

$$\sum_{i,f} c'_{hi} a^0_{if}\mathfrak{g}^0_{fg} = \sum_{i,k,f} c'_{hi} a_{ik}\mathfrak{g}_{kf}\mathfrak{g}^0_{fg} = \sum_{k,f} \mathfrak{a}_{hk}\mathfrak{g}_{kf}\mathfrak{g}^0_{fg} = \sum_f \mathfrak{a}^0_{hf}\mathfrak{g}^0_{fg} = \mathfrak{a}_{hg};$$

$$(f=1, 2, \dots r-\mathfrak{r};\ g=r-\mathfrak{r}+1, \dots q;\ h=\mathfrak{r}+1, \mathfrak{r}+2, \dots p;\ i=1, 2, \dots p;\ k=1, 2, \dots q)$$

es wird daher:

$$\sum_i c'_{hi} a^0_{ig} = 0 \qquad \begin{pmatrix} g=r-\mathfrak{r}+1, \dots q \\ h=\mathfrak{r}+1, \dots\dots r \\ i=1, 2, \dots\dots p \end{pmatrix},$$

und die für das System (a^0_{ik}) geltenden linearen Relationen lassen sich also in folgender Weise darstellen:

$$(\mathfrak{P}'_0) \qquad \sum_i c'_{hi} a^0_{ik} - \mathfrak{a}^0_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \dots p \\ i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix},$$

wenn:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^0_{hf} &= \sum_k \mathfrak{a}_{hk}\mathfrak{g}_{kf} \\ \mathfrak{a}^0_{hg} &= 0 \\ \mathfrak{a}^0_{ik} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f=1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ g=r-\mathfrak{r}+1, \dots q \\ h=\mathfrak{r}+1, \dots\dots r \\ i=r+1, \dots\dots p \\ k=1, 2, \dots\dots q \end{pmatrix}$$

genommen wird. Das System (a^0_{ik}) hat demnach die in dem allgemeineren Satze ($\mathfrak{S}$) angegebene Eigenschaft, dass bei Weglassung der ersten, den Werthen $k = 1, 2, \dots r-\mathfrak{r}$ entsprechenden, Colonnen ein System:

$$(a^0_{ig}) \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots\dots p \\ g=r-\mathfrak{r}+1, \dots q \end{pmatrix}$$

resultirt, für welches keine anderen linearen Relationen als die folgenden $p-\mathfrak{r}$ bestehen:

$$\sum_{i=1}^{i=p} c'_{hi} a^0_{ig} = 0 \qquad \binom{h=\mathfrak{r}+1,\ \mathfrak{r}+2,\ \ldots p}{g=r-\mathfrak{r}+1,\ \ldots\ldots q},$$

und welches daher vom (absoluten) Range $\mathfrak{r}$ und dabei zugleich vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$ ist.

§ 12.

Nimmt man, wie im § 5, an Stelle des Gleichungssystems:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i - \varphi_i \qquad \binom{i=1,\ 2,\ \ldots p}{k=1,\ 2,\ \ldots q}$$

ein Gleichungssystem:

$$(\mathfrak{G}^0) \qquad \sum_k a^0_{ik} w^0_k = \xi_i - \varphi_i \qquad \binom{i=1,\ 2,\ \ldots p}{k=1,\ 2,\ \ldots q},$$

in welchem das Coefficienten-System (a^0_{ik}) die im vorigen Paragraphen angegebene Beschaffenheit hat, so wird vermöge der mit $(\mathfrak{P}'_0)$ bezeichneten linearen Relationen:

$$\sum_{i,k} c'_{hi} a^0_{ik} w^0_k = \sum_k \mathfrak{a}^0_{hk} w^0_k = \sum_i c'_{hi} (\xi_i - \varphi_i) \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \ldots p \\ i=1,\ 2,\ \ldots p \\ k=1,\ 2,\ \ldots q \end{pmatrix}.$$

Da $\mathfrak{a}^0_{hk}$

für jeden Werth von h, wenn $k > r - \mathfrak{r}$ ist, und
für jeden Werth von k, wenn $h > r$ ist,

den Werth *Null* hat, so reduciren sich die Gleichungen auf folgende:

$$\begin{aligned} &\sum_i c'_{hi} (\xi_i - \varphi_i) = \sum_f \mathfrak{a}^0_{hf} w^0_f \\ &\sum_i c'_{ji} (\xi_i - \varphi_i) = 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f=1,\ 2,\ \ldots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\ \ldots\ r \\ i=1,\ 2,\ \ldots\ldots p \\ j=r+1,\ \ldots\ p \end{pmatrix};$$

es müssen daher, da ja die Grössen φ beliebig klein werden sollen, die gegebenen Grössen ξ nothwendig den Bedingungen:

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{T}) \qquad \sum_i c'_{hi} \xi_i = \sum_f \mathfrak{a}^0_{hf} w^0_f \\ &(\mathfrak{T}^0) \qquad \sum_i c'_{ji} \xi_i = 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f=1,\ 2,\ \ldots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\ \ldots\ldots r \\ i=1,\ 2,\ \ldots\ldots p \\ j=r+1,\ \ldots\ldots p \end{pmatrix}$$

genügen, wenn das Gleichungssystem $(\mathfrak{G})$ in ganzen Zahlen w lösbar sein soll.

I. Nimmt man nun zuvörderst:

$$w^0_f = 0 \qquad (f=1,\ 2,\ \ldots r-\mathfrak{r}),$$

so gehen die p Gleichungen $(\mathfrak{G}^0)$ in folgende über:

$$\sum_g a^0_{ig} w^0_g = \xi_i - \varphi_i \qquad \binom{i=1,\ 2,\ \ldots\ldots p}{g=r-\mathfrak{r}+1,\ \ldots q},$$

mit den $(p - \mathfrak{r})$ Bedingungen:

$$\sum_i c'_{hi} \xi_i = 0 \qquad \binom{h=\mathfrak{r}+1,\ \mathfrak{r}+2,\ \ldots p}{i=1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots p}.$$

Man braucht aber nur den $\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$\sum_g a^0_{1g} w^0_g = \xi_1 - \varphi_1, \quad \sum_g a^0_{2g} w^0_g = \xi_2 - \varphi_2, \quad \ldots \quad \sum_g a^0_{\mathfrak{r}g} w^0_g = \xi_{\mathfrak{r}} - \varphi_{\mathfrak{r}} \qquad (g=r-\mathfrak{r}+1, \ldots q)$$

durch passende Werthe der $q - r + \mathfrak{r}$ Zahlen w^0_g Genüge zu thun. Denn, setzt man dann:

$$\xi_i - \sum_g a^0_{ig} w^0_g = \varphi_i \qquad \binom{i=\mathfrak{r}+1,\ \ldots\ldots p}{g=r-\mathfrak{r}+1,\ \ldots q},$$

so wird:

$$\sum_i c'_{hi} \varphi_i = \sum_i c'_{hi} \xi_i - \sum_{i,g} c'_{hi} a^0_{ig} w^0_g \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\ \ldots\ldots p \\ i=1,\ 2,\ \ldots\ldots p \\ g=r-\mathfrak{r}+1,\ \ldots q \end{pmatrix};$$

da nun erstens die Grössen ξ durch die Bedingungen:

$$\sum_i c'_{hi} \xi_i = 0 \qquad \binom{h=\mathfrak{r}+1,\ \ldots p}{i=1,\ 2,\ \ldots p}$$

mit einander verbunden sind, und da zweitens zwischen den Coefficienten a^0_{ik} gemäss $(\mathfrak{P}'_0)$ § 11 die Relationen:

$$\sum_i c'_{hi} a^0_{ig} = \mathfrak{a}^0_{hg} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \mathfrak{r}+2, \dots p \\ i = 1, 2, \dots\dots p \\ g = r-\mathfrak{r}+1, \dots\dots q \end{pmatrix}$$

bestehen, so resultiren die $(p - \mathfrak{r})$ Gleichungen:

$$\sum_i c'_{hi} \varphi_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \dots p \\ i = 1, 2, \dots p \end{pmatrix},$$

aus denen hervorgeht, dass

$$\varphi_{\mathfrak{r}+1}, \quad \varphi_{\mathfrak{r}+2}, \dots \varphi_p$$

beliebig klein und also auch die $p - \mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$\sum_g a^0_{ig} w^0_g - \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i = \mathfrak{r}+1, \dots\dots p \\ g = r-\mathfrak{r}+1, \dots q \end{pmatrix}$$

näherungsweise erfüllt werden, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \dots\dots \varphi_{\mathfrak{r}}$ beliebig klein, d. h. wenn die $\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$\sum_g a^0_{ig} w^0_g = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots\dots \mathfrak{r} \\ g = r-\mathfrak{r}+1, \dots q \end{pmatrix}$$

näherungsweise erfüllt sind.

Die näherungsweise Auflösung von $\mathfrak{r}$ Gleichungen, vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$, ist aber schon im § 9 gegeben worden, und gemäss den im § 11 enthaltenen Entwickelungen ist für das System:

$$(a^0_{ig}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots\dots \mathfrak{r} \\ g = r-\mathfrak{r}+1, \dots q \end{pmatrix}$$

in der That sowohl der (absolute) Rang als auch der Rationalitäts-Rang gleich $\mathfrak{r}$.

II. Werden nun ferner für $w^0_1, w^0_2, \dots\dots w^0_{r-\mathfrak{r}}$ *beliebige* ganze Zahlen genommen, so braucht man nur nach der im § 9 angegebenen Weise dem Systeme von $\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$\sum_g a^0_{ig} w^0_g = - \sum_f a^0_{if} w^0_f + \xi_i - \varphi_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots\dots \mathfrak{r} \\ f = 1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ g = r-\mathfrak{r}+1, \dots q \end{pmatrix},$$

dessen Rationalitäts-Rang gleich $\mathfrak{r}$ ist, durch geeignete Werthe der $q - r + \mathfrak{r}$ Zahlen w^0_g Genüge zu thun. Denn, setzt man dann:

$$\xi_i - \sum_k a^0_{ik} w^0_k = \varphi_i \qquad \begin{pmatrix} i = \mathfrak{r}+1, \dots p \\ k = 1, 2, \dots q \end{pmatrix},$$

so wird:

$$\sum_i c'_{hi} \varphi_i = \sum_i c'_{hi} \xi_i - \sum_{i,k} c'_{hi} a^0_{ik} w^0_k \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \dots p \\ i = 1, 2, \dots p \\ k = 1, 2, \dots q \end{pmatrix};$$

es ist also wegen der Gleichungen $(\mathfrak{P}'_0)$ im § 11 für $h \leqq r$:

$$\sum_i c'_{hi} \varphi_i = \sum_i c'_{hi} \xi_i - \sum_f \mathfrak{a}^0_{hf} w^0_f \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ h = \mathfrak{r}+1, \dots\dots r \\ i = 1, 2, \dots\dots p \end{pmatrix}$$

und für $j > r$:

$$\sum_i c'_{ji} \varphi_i = \sum_i c'_{ji} \xi_i \qquad \begin{pmatrix} j = r+1, \dots p \\ i = 1, 2, \dots p \end{pmatrix}.$$

Vermöge der oben mit $(\mathfrak{T})$ und $(\mathfrak{T}^0)$ bezeichneten Bedingungen, welche zwischen den gegebenen Grössen ξ bestehen müssen, erfüllen daher $\varphi_{\mathfrak{r}+1}, \varphi_{\mathfrak{r}+2}, \dots\dots \varphi_p$ die $p - \mathfrak{r}$ Bedingungen:

$$\sum_i c'_{hi} \varphi_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = \mathfrak{r}+1, \dots p \\ i = 1, 2, \dots p \end{pmatrix},$$

aus denen, wie oben, zu erschliessen ist, dass *näherungsweise* nicht bloss die $\mathfrak{r}$ Gleichungen:

$$\sum_k a^0_{1k} w^0_k = \xi_1, \quad \sum_k a^0_{2k} w^0_k = \xi_2, \dots\dots \sum_k a^0_{\mathfrak{r}k} w^0_k = \xi_{\mathfrak{r}} \qquad (k = 1, 2, \dots q),$$

sondern alle p Gleichungen:

$$\sum_k a^0_{ik} w^0_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots p \\ k = 1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

erfüllt werden.

Hiermit sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der näherungsweisen Lösbarkeit eines Gleichungssystems:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

oder eines damit aequivalenten Gleichungssystems:

$$(\mathfrak{G}^0) \qquad \sum_k a^0_{ik} w^0_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

vollständig dargelegt, und es ist auch gezeigt worden, wie man im Falle der Lösbarkeit ganze Zahlen w_k finden kann, für welche die sämmtlichen p Differenzen:

$$\sum_k a_{ik} w_k - \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

beliebig klein werden. Es ist nun klar, dass *alle* Systeme von Zahlen w_k aus irgend einem abgeleitet werden können, indem man dieses eine mit allen denjenigen Systemen von ganzen Zahlen $\mathfrak{w}_k$ verbindet, welche die linearen *homogenen* Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} \mathfrak{w}_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

näherungsweise erfüllen. Die näherungsweise Auflösung linearer *homogener* Gleichungen habe ich aber schon in meinen beiden in den Comptes Rendus der Pariser Akademie veröffentlichten Aufsätzen vom Januar 1883 und November 1884[1]) allgemein entwickelt.

§ 13.

Die im vorigen Paragraphen mit $(\mathfrak{T})$ und $(\mathfrak{T}^0)$ bezeichneten Relationen, denen die gegebenen Grössen ξ genügen müssen, damit die Gleichungen $(\mathfrak{G}^0)$ in ganzen Zahlen w näheruugsweise lösbar seien, können auf eine andere Form gebracht werden, in welcher ihre eigentliche Bedeutung klarer hervortritt.

[1]) Band III S. 1—30 dieser Ausgabe. H.

Bezeichnet man nämlich mit

$$(\mathfrak{a}'_{fh}) \qquad \begin{pmatrix} f=1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1, \dots\dots r \end{pmatrix}$$

das zu

$$(\mathfrak{a}^0_{fh}) \qquad \begin{pmatrix} f=1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1, \dots\dots r \end{pmatrix}$$

reciproke System, so besteht die Gleichung:

$$\sum_h \mathfrak{a}'_{fh} \mathfrak{a}^0_{hk} = \delta_{fk} \qquad \begin{pmatrix} f, k=1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1, \dots\dots r \end{pmatrix}$$

und diese gilt auch für $k > r - \mathfrak{r}$, weil alsdann $\mathfrak{a}^0_{hk} = 0$ wird. Gemäss den Gleichungen $(\mathfrak{P}'_0)$ und $(\mathfrak{T})$ wird hiernach:

$$\begin{aligned} &\sum_{h,i} \mathfrak{a}'_{fh} c'_{hi} a^0_{ik} = \delta_{fk} \\ &\sum_{h,i} \mathfrak{a}'_{fh} c'_{hi} \xi_i = \sum_{h,f'} \mathfrak{a}'_{fh} \mathfrak{a}^0_{hf'} w^0_{f'} = w^0_f \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} f, f'=1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1, \dots\dots r \\ i=1, 2, \dots\dots p \\ k=1, 2, \dots\dots q \end{pmatrix},$$

und diese Gleichungen gehen, wenn

$$\sum_h \mathfrak{a}'_{fh} c'_{hi} = a'_{\mathfrak{r}+f,\, i} \qquad \begin{pmatrix} f=1, 2, \dots r-\mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1, \dots\dots r \\ i=1, 2, \dots\dots p \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, in folgende über:

$$\begin{aligned} &\sum_i a'_{hi} a^0_{ik} = \delta_{h-\mathfrak{r},\, k} \\ &\sum_i a'_{hi} \xi_i = w^0_{h-\mathfrak{r}} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \dots r \\ i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}.$$

An die Stelle der Gleichungen $(\mathfrak{P}'_0)$, $(\mathfrak{T})$, $(\mathfrak{T}^0)$ treten hiernach, wenn

$$\mathfrak{g}_h \text{ statt } w^0_{h-\mathfrak{r}}$$

und der Gleichförmigkeit wegen $\begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \dots r \\ j=r+1, \dots p \\ i=1, 2, \dots p \end{pmatrix}$

$$a'_{ji} \text{ statt } c'_{ji}$$

gesetzt wird, die Relationen:

$$(\mathfrak{U})\qquad \begin{aligned} &\sum_i a'_{hi}\, a^0_{ik} = \delta_{h-\mathfrak{r},k} \\ &\sum_i a'_{ji}\, a^0_{ik} = 0 \end{aligned}$$

$$(\mathfrak{B})\qquad \begin{aligned} &\sum_i a'_{hi}\, \xi_i = \mathfrak{g}_h \\ &\sum_i a'_{ji}\, \xi_i = 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \ldots r \\ j=r+1, \ldots p \\ i=1, 2, \ldots p \\ k=1, 2, \ldots q \end{pmatrix},$$

in denen $\mathfrak{g}_{\mathfrak{r}+1}, \mathfrak{g}_{\mathfrak{r}+2}, \ldots \mathfrak{g}_r$ beliebige ganze Zahlen bedeuten, und das hiermit erlangte Resultat kann folgendermaassen formulirt werden:

„Die näherungsweise Auflösung eines Systems von p Gleichungen (vergl. § 5 und § 12):

$$(\mathfrak{G})\qquad \sum_k a_{ik} w_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots p \\ k=1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

in ganzen Zahlen $w_1, w_2, \ldots w_q$ kann mittels ganzzahliger Transformationen (vergl. § 5):

$$a_{ik} = \sum_{k'} a^0_{ik'} g^0_{k'k}, \quad w_k = \sum_{k'} g_{kk'} w^0_{k'} \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots p \\ k, k'=1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

auf die näherungsweise Auflösung eines aequivalenten Gleichungssystems:

$$(\mathfrak{G}^0)\qquad \sum_k a^0_{ik} w^0_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots p \\ k=1, 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

zurückgeführt werden, dessen Coefficienten so beschaffen sind, dass $p(p-\mathfrak{r})$ Grössen:

$$a'_{hi} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \ldots p \\ i=1, 2, \ldots p \end{pmatrix}$$

existiren, für welche:

$$(\mathfrak{U}_1)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} a'_{\mathfrak{r}+1,i}\, a^0_{i1} = 1, \quad \sum_{i=1}^{i=p} a'_{\mathfrak{r}+2,i}\, a^0_{i2} = 1, \ \ldots\ldots \sum_{i=1}^{i=p} a'_{ri}\, a^0_{i,r-\mathfrak{r}} = 1$$

und aber:

$$(\mathfrak{U}_0)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} a'_{hi}\, a^0_{ik} = 0 \qquad (h=\mathfrak{r}+1, \ldots p)$$

wird, wenn h und $\mathfrak{r}+k$ verschiedene Werthe haben. Da alsdann:

$$\sum_{i,k} a'_{hi}\, a^0_{ik}\, w^0_k = \sum_i a'_{hi}\, \xi_i \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1, \ldots r \\ i=1, 2, \ldots p \end{pmatrix}$$

ist, so muss $\sum_i a'_{hi}\xi_i$ gleich $w^0_{h-\mathfrak{r}}$ oder gleich Null werden, je nachdem $h \leqq r$ oder $h > r$ ist. Die gegebenen Grössen ξ müssen also, wenn die Gleichungen $(\mathfrak{G})$ mit beliebiger Annäherung lösbar sein sollen, nothwendig die Bedingungen erfüllen, dass die $r-\mathfrak{r}$ linearen Functionen:

$$\sum_{i=1}^{i=p} a'_{\mathfrak{r}+1,i}\, \xi_i, \quad \sum_{i=1}^{i=p} a'_{\mathfrak{r}+2,i}\, \xi_i, \ \ldots\ldots \sum_{i=1}^{i=p} a'_{ri}\, \xi_i$$

irgend welche ganzzahlige Werthe, und dass die $p-r$ linearen Functionen:

$$\sum_{i=1}^{i=p} a'_{r+1,i}\, \xi_i, \quad \sum_{i=1}^{i=p} a'_{r+2,i}\, \xi_i, \ \ldots\ldots \sum_{i=1}^{i=p} a'_{pi}\, \xi_i$$

den Werth Null haben. Andererseits lassen sich, wenn die gegebenen Grössen ξ diese Bedingungen erfüllen, die Gleichungen $(\mathfrak{G})$ oder $(\mathfrak{G}^0)$ stets nach der in den vorhergehenden Paragraphen (§§ 9 bis 12) entwickelten Methode mit beliebiger Annäherung auflösen.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Lösbarkeit der Gleichungen $(\mathfrak{G})$ sind hiermit nochmals, aber in einer anderen Form als am Schlusse von § 12, aufgestellt worden, und zwar namentlich deshalb, um die daraus resultirende Beschränkung der Wahl der Grössen ξ ersichtlich zu machen. Es können nämlich, wie sich hier deutlich gezeigt hat, z. B. $\mathfrak{r}$ von den Grössen ξ ganz beliebig angenommen werden; die Wahl von ferneren $r-\mathfrak{r}$ Grössen ξ wird dann bloss durch Rationalitäts-Beziehungen beschränkt, aber die noch verbleibenden $p-r$ Grössen ξ sind auch dem Werthe nach durch die ersten r Grössen ξ vollständig bestimmt.“

In diesem Resultate tritt die wesentliche Bedeutung der in den §§ 5 und 7 entwickelten Begriffe des „absoluten“ und des „Rationalitäts-Ranges“ klar hervor. Denn durch die Bedingungen $(\mathfrak{U}_1)$ und $(\mathfrak{U}_0)$ wird das aufzulösende Gleichungssystem als

„vom (absoluten) Range r und vom Rationalitäts-Range $\mathfrak{r}$“

charakterisirt, und eben dieselben Zahlen r und $\mathfrak{r}$ haben eine maassgebende Bedeutung für den Grad der Verfügbarkeit über die p Grössen ξ, denen die p linearen Functionen:

$$\sum_k a_{ik} w_k \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

durch passende ganzzahlige Werthe von $w_1, w_2, \dots w_q$ beliebig nahe gebracht werden sollen.

Auch zeigt sich dabei die Analogie, welche zwischen den beiden Rangzahlen (r und $\mathfrak{r}$) eines Gleichungssystems, in Bezug auf ihre Bedeutung für dessen Auflösbarkeit, besteht. Denn während bei dem Problem, die linearen Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} z_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

durch *irgend welche* Werthe der Unbekannten $z_1, z_2, \dots z_q$ aufzulösen, die Anzahl der ganz beliebig zu bestimmenden Grössen ξ_i gleich dem (absoluten) Range r ist, reducirt sich diese Anzahl bei dem Problem, die Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} w_k = \xi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

näherungsweise in *ganzen Zahlen* $w_1, w_2, \dots w_q$ aufzulösen, auf die Zahl $\mathfrak{r}$, welche den Rationalitäts-Rang des Gleichungssystems bezeichnet.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass in diesem wie im vorhergehenden Paragraphen die Anzahl der Colonnen des transformirten Systems (a^0_{ik}) stets mit demselben Buchstaben q bezeichnet worden ist, wie die Anzahl der Colonnen des ursprünglichen Systems (a_{ik}), obgleich aus der Begründung des Satzes ($\mathfrak{S}$) im § 11 nicht hervorgeht, dass die dortige Colonnentransformation auch *so* bewirkt werden kann, dass dabei die Anzahl der Colonnen nicht vergrössert wird. Nun ist es zwar für die entwickelten Resultate ohne wesentliche Bedeutung, ob die Anzahl der Colonnen des Systems (a^0_{ik}) gleich der-

jenigen der Colonnen des Systems (a_{ik}) oder grösser als diese ist. Doch ist auch leicht zu zeigen, dass in der That aus jedem Systeme (a_{ik}) durch Colonnentransformation ein aequivalentes System (a^0_{ik}) gebildet werden kann, welches die in jenem Satze ($\mathfrak{S}$) angegebene Eigenschaft und dabei nicht mehr Colonnen hat als das ursprüngliche System. Man braucht nämlich zu diesem Zwecke nur q^2 ganzzahlige Coefficienten $g_{kk'}$ der am Schlusse von § 5 angegebenen Colonnentransformation so zu bestimmen, dass deren Determinante gleich *Eins* und zugleich:

$$\sum_k g_k g_{kk'} = \delta_{1k'} \qquad (k, k'=1, 2, \dots q)$$

wird, wo $g_1, g_2, \dots g_q$ die im § 11 angegebene Bedeutung haben; und dies ist stets möglich. Denn wenn man irgend ein System von q^2 ganzen Zahlen bestimmt, in welchem die q Zahlen $g_1, g_2, \dots g_q$ die erste Zeile bilden, und dessen Determinante gleich *Eins* ist, so kann man für die Zahlen $g_{kk'}$ die q^2 Adjungirten eines solchen Systems nehmen.

§ 14.

In den vorhergehenden Paragraphen ist von der Umwandlung der gegebenen Gleichungen durch *Zeilen*transformation desshalb nicht Gebrauch gemacht worden, weil sie bei manchen Anwendungen, z. B. bei der Frage der Periodensysteme von Functionen complexer Variabeln, nicht in ihrer vollen Allgemeinheit zulässig ist. Aber eben diese Umwandlung gewährt einige formale Vereinfachungen bei der Deduction, und dies soll hier noch kurz dargelegt werden.

Gemäss den Ausführungen im § 6 kann aus dem Systeme:

$$(a^0_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

mittels der Zeilentransformation ein aequivalentes System:

$$(b^0_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots p \\ k=1, 2, \dots q \end{pmatrix}$$

abgeleitet werden, welches mit dem ersteren durch die Relationen:

$$\begin{aligned} \sum_i a'_{hi} a^0_{ik} &= b^0_{hk} \\ a^0_{gk} - \sum_h a^0_{g,\,h-\mathfrak{r}} b^0_{hk} &= b^0_{gk} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g=1,2,\dots \mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\dots r \\ i=1,2,\dots p \\ k=1,2,\dots q \end{pmatrix}$$

verbunden ist. Alsdann ist nach § 13 ($\mathfrak{U}$):

$$b^0_{hk} = \delta_{h-\mathfrak{r},k} \qquad \begin{pmatrix} h=\mathfrak{r}+1,\dots r \\ k=1,2,\dots q \end{pmatrix}$$

und folglich $b^0_{gk}=0$, für $h-\mathfrak{r}=k$, d. h. also für die Werthe $k=1,2,\dots r-\mathfrak{r}$. Da hiernach

$$b^0_{gk} = 0 \qquad \begin{pmatrix} g=1,2,\dots\dots \mathfrak{r} \\ k=1,2,\dots r-\mathfrak{r} \end{pmatrix}$$

ist, so resultirt, wenn man

$$\begin{aligned} \sum_i a'_{hi}\,\xi_i &= \eta_h \\ \xi_g - \sum_h a^0_{g,\,h-\mathfrak{r}}\,\eta_h &= \eta_g \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g=1,2,\dots \mathfrak{r} \\ h=\mathfrak{r}+1,\dots r \\ i=1,2,\dots p \end{pmatrix}$$

setzt, das Gleichungssystem:

$$(\mathfrak{K}^0) \qquad \sum_k b^0_{ik} w^0_k = \eta_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots r \\ k=1,2,\dots q \end{pmatrix},$$

und dieses Gleichungssystem, welches dem Systeme:

$$(\mathfrak{S}^0) \qquad \sum_k a^0_{ik} w^0_k = \xi_i$$

im Sinne der Zeilentransformation aequivalent ist, zerfällt vermöge der obigen Gleichung: $b^0_{hk} = \delta_{h-\mathfrak{r},k}$ in die beiden Systeme:

$$(\mathfrak{K}^0_1) \qquad \sum_k b^0_{gk} w^0_k = \eta_g \qquad \begin{pmatrix} g=1,2,\dots\dots \mathfrak{r} \\ k=r-\mathfrak{r}+1,\dots q \end{pmatrix}$$

$$(\mathfrak{K}^0_2) \qquad w^0_{h-\mathfrak{r}} = \eta_h \qquad (h=\mathfrak{r}+1,\dots\dots r)$$

mit den beiden getrennten Gruppen der Unbekannten:

$$w_{r-\mathfrak{r}+1},\; w_{r-\mathfrak{r}+2}, \dots w_q;$$
$$w_1,\; w_2, \dots\dots\dots w_{r-\mathfrak{r}}.$$

Das zweite Gleichungssystem ($\mathfrak{K}^0_2$) drückt nur die Bedingung aus, dass die gegebenen Grössen $\eta_{\mathfrak{r}+1}, \eta_{\mathfrak{r}+2}, \dots \eta_r$ ganzzahlige Werthe haben müssen; das erste Gleichungssystem ($\mathfrak{K}^0_1$) hat sowohl den absoluten als auch den Rationalitäts-Rang $\mathfrak{r}$ und kann, bei *beliebig* gegebenen Werthen der $\mathfrak{r}$ Grössen η_g, nach der einfachsten, schon im § 9 vollständig entwickelten Methode in ganzen Zahlen:

$$w_{r-\mathfrak{r}+1},\; w_{r-\mathfrak{r}+2}, \dots w_q$$

mit beliebiger Annäherung aufgelöst werden.

Es ist schliesslich zu bemerken, dass offenbar das erstere System noch dahin vereinfacht werden kann, dass die ersten $\mathfrak{r}^2$ Coefficienten b^0_{gk} ein Einheitssystem bilden.

DIE ABSOLUT KLEINSTEN RESTE REELLER GRÖSSEN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1885. S. 383—396, 1045—1049.

DIE ABSOLUT KLEINSTEN RESTE REELLER GRÖSSEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 30. April und am 26. November 1895.]

I.

Sollen je zwei reelle Grössen, die sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, als einander aequivalent betrachtet werden, so genügt es, die Aequivalenz:

$$a \sim a + 1$$

als für jede reelle Grösse a bestehend anzunehmen. Bei einer solchen Definition des Aequivalenz-Begriffs wird die Aequivalenz:

$$a \sim a'$$

durch jede der beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg} a\pi = \operatorname{tg} a'\pi, \qquad \mathrm{R}(a) = \mathrm{R}(a')$$

vollkommen ersetzt, und es charakterisirt sich also $\operatorname{tg} a\pi$ als eine „analytische“ und $\mathrm{R}(a)$ als eine „arithmetische“ Invariante aller unter einander aequivalenten Grössen a.

Mit $\mathrm{R}(a)$ ist hier, wie in meinen früheren Aufsätzen*), der Rest bezeichnet, welcher verbleibt, wenn man von der Grösse a die ihr zunächst benachbarte ganze Zahl subtrahirt; es ist daher $\mathrm{R}(a)$ die ihrem absoluten

*) Sitzungsberichte 1884. XXIII. S. 520[1]).

[1]) Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Bd. II S. 497—522 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. S. S. 500. H.

Werthe nach kleinste von allen mit a aequivalenten Grössen, und sie soll durch die Ungleichheitsbedingung:

$$-\tfrac{1}{2} \leqq \mathrm{R}(a) < \tfrac{1}{2}$$

bestimmt werden, damit sie auch für den Fall, wo die Grösse a genau in der Mitte zwischen zwei benachbarten ganzen Zahlen liegt, unzweideutig definirt sei.

Die Aequivalenz $a \backsim a'$ kann in üblicher Weise an die Betrachtung einer „Form“, nämlich an die der nicht homogenen, linearen Form $x + a$ angeknüpft werden, indem man nur diejenigen durch die Transformation $x = x' + h$ daraus entstehenden Formen als aequivalent bezeichnet, bei denen der Substitutionscoefficient h eine ganze Zahl ist. Die Form $x + \mathrm{R}(a)$ ist alsdann offenbar die „Reducirte“ unter den der Form $x + a$ aequivalenten Formen.

Nimmt man für a einen rationalen Bruch $\frac{k}{n}$, so ist $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$ eine analytische, und $\mathrm{R}\left(\frac{k}{n}\right)$ eine arithmetische Invariante aller unter einander *modulo* n congruenten Zahlen k, und die Congruenz $k \equiv k'$ (mod. n) ist durch eine oder die andere der beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} = \operatorname{tg}\frac{k'\pi}{n}, \qquad \mathrm{R}\left(\frac{k}{n}\right) = \mathrm{R}\left(\frac{k'}{n}\right)$$

vollkommen zu ersetzen.*) Hierauf gründen sich die Anwendungen, welche man in der Theorie der Congruenzen von der analytischen Function $\operatorname{tg} a\pi$ und von der arithmetischen Function $\mathrm{R}(a)$ machen kann.

Da $\pi\mathrm{R}(a)$ als der absolut kleinste zu $\operatorname{tg} a\pi$ gehörige Bogen definirt werden kann, so wird hierdurch in gewisser Hinsicht eine analytische

*) Sie ist auch durch die Aequivalenz der beiden Formen $nx + k$, $nx' + k'$ zu ersetzen, und man erlangt so einen naturgemässen Uebergang von dem in der ersten Section der Disqq. Arithm. aufgestellten Congruenzbegriff zu dem in der fünften Section benutzten Aequivalenzbegriff.

Bestimmung für die arithmetische Function $\mathrm{R}(a)$ gegeben; aber das arithmetische Element eben dieser Bestimmung ist darin zu finden, dass jener Bogen als der absolut kleinste unter allen charakterisirt wird, oder dass, wenn der Bogenwerth aus der Integration hervorgehen soll, der Integrationsweg als der directe vorgeschrieben wird. Dass überdies $\mathrm{R}(a)$ — den Fall $\mathrm{R}(a) = -\frac{1}{2}$ ausgenommen — sich durch die unendliche Reihe:

$$(\mathfrak{A}) \qquad -\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m \frac{\sin 2ma\pi}{m\pi} \quad \text{oder} \quad i\sum_{n}(-1)^n \frac{e^{2na\pi i}}{2n\pi} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm \infty)$$

ausdrücken lässt, hat keinerlei Bedeutung für die Natur der Function $\mathrm{R}(a)$, da bekanntlich durch *Grenzwerthe* zahlentheoretische Functionen in mancherlei Weise dargestellt werden können.

II.

Bedeutet $[a]$, wie bei *Gauss*, die der Grösse a zunächst liegende nicht grössere ganze Zahl, so ist $[a + \frac{1}{2}]$ die der Grösse a *überhaupt* zunächst liegende, kleinere oder grössere, ganze Zahl, und es kann also die Gleichung:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \mathrm{R}(a) = a - [a + \tfrac{1}{2}]$$

zur Definition von $\mathrm{R}(a)$ benutzt werden, wie es an der oben angeführten Stelle in der That geschehen ist.

Da $\mathrm{R}(a)$ positiv oder negativ ist, je nachdem a in der ersten oder in der zweiten Hälfte des von zwei benachbarten ganzen Zahlen begrenzten Intervalls liegt, so ist für *positive* Grössen a:

$$(\mathfrak{C}) \qquad \operatorname{sgn.} \mathrm{R}(a) = \operatorname{sgn.} \prod_{g}(\tfrac{1}{2}g - a) \qquad (g = 1, 2, 3, \ldots),$$

wenn die Multiplication rechts wenigstens bis zu der Zahl $g = [2a]$ erstreckt wird. Dabei bedeutet sgn. a das Vorzeichen der Grösse a, und die Formel $(\mathfrak{C})$ gilt auch noch für den Fall $\mathrm{R}(a) = 0$, wenn $\operatorname{sgn.} 0 = 0$ genommen wird. Aber der Fall $\mathrm{R}(a) = -\frac{1}{2}$ ist auszuschliessen, da alsdann das Product auf der rechten Seite gleich Null werden würde.

Aus der Definition der Function $\mathrm{R}(a)$ folgen unmittelbar ihre durch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \mathrm{R}(a) = \mathrm{R}(a+1), \qquad \mathrm{R}(a) + \mathrm{R}(-a) = 0$$

ausgedrückten Grundeigenschaften; doch ist auch hier in der zweiten Gleichung der Fall $\mathrm{R}(a) = -\frac{1}{2}$ auszuschliessen. Es folgt ferner aus der Definition der Function R, dass für irgend welche Grössen a, b, c, die der Aequivalenz:

$$a + b + c \sim 0$$

genügen, die Gleichung:

$$(\mathfrak{E}) \qquad \mathrm{R}(a) + \mathrm{R}(b) + \mathrm{R}(c) = -1,\ 0,\ +1$$

besteht, und zwar so, dass der Werth -1 eintritt, wenn die drei Reste links negativ, der Werth $+1$, wenn sie positiv sind, und der Werth 0, wenn nicht alle drei Reste gleiches Vorzeichen haben. Die Gleichung $(\mathfrak{E})$ kann daher auch in folgender Form dargestellt werden:

$$(\mathfrak{E}) \qquad \mathrm{R}(a) + \mathrm{R}(b) + \mathrm{R}(c) = [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sgn.}\,\mathrm{R}(a) + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sgn.}\,\mathrm{R}(b) + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sgn.}\,\mathrm{R}(c)],$$

und da vermöge der Bedingung $a + b + c \sim 0$ der Rest von c gleich dem negativen Werthe des Restes von $a + b$ wird, so kann auch die Summe der drei Reste auf der linken Seite von $(\mathfrak{E})$ und $(\bar{\mathfrak{E}})$ durch den Ausdruck:

$$\mathrm{R}(a) + \mathrm{R}(b) - \mathrm{R}(a+b)$$

ersetzt werden. Die Gleichung $(\mathfrak{E})$ ergiebt hiernach eine Bestimmung für den Rest einer Summe zweier Grössen durch die Summe der beiden Reste.

Nimmt man in $(\mathfrak{E})$ $b = \frac{1}{2} - a$, $c = \frac{1}{2}$, so kommt:

$$\mathrm{R}(a) + \mathrm{R}(\tfrac{1}{2} - a) + \mathrm{R}(\tfrac{1}{2}) = 0,\ -1,$$

je nachdem $\mathrm{R}(a)$ positiv oder negativ ist. Denn $\mathrm{R}(\frac{1}{2})$ ist negativ, und die beiden Reste $\mathrm{R}(a)$, $\mathrm{R}(\frac{1}{2} - a)$ haben stets gleiches Zeichen. Es resultirt also die Gleichung:

$$(\mathfrak{E}^0) \qquad \mathrm{R}(a) + \mathrm{R}(\tfrac{1}{2} - a) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn.}\,\mathrm{R}(a) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn.}\,\mathrm{R}(\tfrac{1}{2} - a)$$

als ein Corollar der Gleichung $(\mathfrak{E})$.

Sind v, w irgend zwei positive reelle, zu einander reciproke Grössen, so lassen sich unendlich viele Paare ganzer Zahlen h, k so bestimmen, dass für dieselben die Reciprocitäts-Beziehung:

$$(\mathfrak{F}^0) \qquad h = [kv + \tfrac{1}{2}], \qquad k = [hw + \tfrac{1}{2}]$$

besteht, d. h. dass zugleich h die der Grösse kv nächste ganze Zahl und k die der Grösse hw nächste ganze Zahl wird. Nimmt man nämlich, wenn $v \geqq 1$ ist, für k eine beliebige und alsdann für h die der Grösse kv zunächst liegende ganze Zahl, so ist:

$$kv = h + \mathrm{R}(kv)$$

und folglich, wenn auf beiden Seiten mit w multiplicirt und von der Gleichung $vw = 1$ Gebrauch gemacht wird:

$$k = hw + w\,\mathrm{R}(kv).$$

Da nun $v \geqq 1$ also $w \leqq 1$ vorausgesetzt worden ist, so muss der absolute Werth von $w\,\mathrm{R}(kv)$ kleiner als $\frac{1}{2}$ und also k die der Grösse hw zunächst liegende ganze Zahl sein. Es wird hiernach:

$$\mathrm{R}(hw) = -w\,\mathrm{R}(kv),$$

und es findet also für jedes Paar positiver reeller Grössen v, w, für welche $vw = 1$ ist, und für ein zugehöriges Paar ganzer Zahlen h, k die Relation:

$$(\mathfrak{F}) \qquad \frac{\mathrm{R}(hw)}{|\sqrt{w}|} + \frac{\mathrm{R}(kv)}{|\sqrt{v}|} = 0$$

statt. Diese Relation definirt selbst eine gewisse Reciprocitäts-Beziehung zwischen zwei Zahlen h, k, von denen die eine willkürlich angenommen werden kann; sie kann also als eine *„Reciprocitäts-Gleichung zwischen den Resten von zwei ganzen Vielfachen zweier reciproken Grössen"* charakterisirt werden.

Setzt man $hw = a$, $kv = b$, so stehen a, b, h, k mit einander in der durch die Gleichungen:

$$a - \mathrm{R}(a) = k, \quad b - \mathrm{R}(b) = h, \quad (a - \mathrm{R}(a))(b - \mathrm{R}(b)) = ab$$

bezeichneten Verbindung, und die letzte dieser drei Gleichungen kann auch in der Form:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \frac{a}{\mathrm{R}(a)} + \frac{b}{\mathrm{R}(b)} = 1$$

dargestellt werden. Geht man also von irgend zwei durch diese Gleichung $(\mathfrak{G})$ mit einander verbundenen Grössen a, b aus und bezeichnet mit h, k die beziehungsweise den beiden Grössen b, a zunächst benachbarten ganzen Zahlen, so ergiebt sich die Gleichung $(\mathfrak{F})$ als mit der Gleichung $(\mathfrak{G})$ aequivalent, wenn in $(\mathfrak{F})$ die beiden Grössen v, w beziehungsweise durch $\frac{b}{k}$, $\frac{a}{h}$ ersetzt werden.

III.

Ersetzt man jeden der Reste von a, b, c auf der linken Seite der Gleichung $(\mathfrak{E})$ oder $(\overline{\mathfrak{E}})$ des Art. II durch die Sinus-Reihe $(\mathfrak{A})$ des Art. I, so ergiebt sich, dass die Reihe:

$$(\mathfrak{H}) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{m(a+b+c+1)}}{m\pi} \sin ma\pi \sin mb\pi \sin mc\pi,$$

wenn $a + b + c$ gleich einer ganzen Zahl ist, stets einen der drei Werthe $-\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{4}$ hat, welcher durch:

$$\tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn.\,tg}\, a\pi + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn.\,tg}\, b\pi + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn.\,tg}\, c\pi\right]$$

dargestellt werden kann. Nimmt man $b = \frac{1}{2} - a$, $c = \frac{1}{2}$, so resultirt die bekannte Gleichung:

$$(\mathfrak{H}^0) \qquad \sum_{\nu} \frac{\sin 2\nu a\pi}{\nu\pi} = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sgn.\,R}(a) = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sgn.\,tg}\, a\pi \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 3, 5, \ldots \infty)}.$$

Wenn man in der Relation $(\mathfrak{F})$ die Sinus-Reihe $(\mathfrak{A})$ einsetzt, so kommt:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left(|\sqrt{v}| \sin 2mhw\pi + |\sqrt{w}| \sin 2mkv\pi\right) = 0,$$

wo $vw = 1$ und $h = [kv + \frac{1}{2}]$, $k = [hw + \frac{1}{2}]$ ist.

Bedeuten m, n zwei ungrade Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, so folgt aus der Gleichung $(\mathfrak{H}^0)$, dass

$$\sum_{h} \mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{hn}{m}\right) \qquad {\scriptstyle (h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1))}$$

durch die Reihe

$$\sum_{\nu} \frac{1}{\nu\pi} \cot \frac{\nu n\pi}{2m} \qquad {\scriptstyle (\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm \infty)}$$

dargestellt werden kann. Zerlegt man diese Reihe in $\frac{1}{2}(m-1)$ Partialreihen, indem man

$$\nu = m(2r + 1) \pm 2h$$

setzt und alsdann r alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, aber h nur die Werthe von 1 bis $\frac{1}{2}(m-1)$ durchlaufen lässt, so erhält man nach Ausführung der Summation in Beziehung auf r die bemerkenswerthe Gleichung:

$$(\mathfrak{H}') \qquad \sum_{h} \mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \frac{1}{m} \sum_{h} \mathrm{tg}\, \frac{h\pi}{m}\, \mathrm{tg}\, \frac{hn\pi}{m} \qquad {\scriptstyle (h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1))},$$

welche sich durch die angegebene Herleitung als ein Corollar der Gleichung $(\mathfrak{H}^0)$ erweist.

IV.

Für zwei beliebige ungrade Zahlen m, n ohne gemeinsamen Theiler besteht eine Reciprocitäts-Beziehung, welche ebensowohl durch die Formel:

$$(\mathfrak{K}) \qquad \operatorname{sgn.} \prod_h \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) \prod_k \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)} \qquad \begin{pmatrix} h=1,\,2,\,\dots\,\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,\,2,\,\dots\,\frac{1}{2}(n-1) \end{pmatrix}$$

als durch die Formel:

$$(\mathfrak{K}') \quad \tfrac{1}{2}\sum_h \left(1 - \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\sum_k \left(1 - \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\right) \equiv \tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod{2}$$

$$\left(h=1,\,2,\,\dots\,\tfrac{1}{2}(m-1);\; k=1,\,2,\,\dots\,\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

dargestellt und auch so ausgedrückt werden kann, dass die Anzahl der *negativen* Werthe von:

$$\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right), \qquad \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \left(h=1,\,2,\,\dots\,\tfrac{1}{2}(m-1);\; k=1,\,2,\,\dots\,\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

nur im Falle $m \equiv n \equiv -1 \pmod{4}$ ungrade, sonst aber stets grade ist. Diese Reciprocitäts-Beziehung soll hier auf drei verschiedene Weisen aus den im Art. II angegebenen Eigenschaften der Reste reeller Grössen hergeleitet werden.

Erstens folgt aus der Gleichung ($\mathfrak{C}$) des Art. II, wenn darin $a = \frac{hn}{m}$ gesetzt und die Multiplication bis $g = n-1$ erstreckt wird:

$$\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_g \left(\tfrac{1}{2}g - \frac{hn}{m}\right) \qquad (g=1,\,2,\,\dots\,n-1).$$

Werden nun rechts die graden und die ungraden Werthe von g gesondert und die einen mit $2k$, die anderen mit $n-2k$ bezeichnet, so kommt:

$$\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_k \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \qquad \left(k=1,\,2,\,\dots\,\tfrac{1}{2}(n-1)\right).$$

Ebenso wird:

$$\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_h \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right)\left(\frac{k}{n} + \frac{h}{m} - \frac{1}{2}\right) \qquad \left(h=1,\,2,\,\dots\,\tfrac{1}{2}(m-1)\right),$$

und mit Hülfe dieser Ausdrücke für $\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$ und $\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ lässt sich die Formel ($\mathfrak{K}$) unmittelbar erschliessen.

Zweitens folgt aus den Gleichungen ($\mathfrak{D}$) des Art. II, dass:

$$\sum_g \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{g}{m}\right) \mathrm{R}\left(\frac{g}{n}\right) = 0 \qquad \left(g=1,\,2,\,\dots\,\tfrac{1}{2}(mn-1)\right)$$

ist. Denn wenn man die Summation auf alle mn Werthe von $g = -\frac{1}{2}(mn-1)$ bis $g = \frac{1}{2}(mn-1)$ erstreckt, so verdoppelt sich der Werth der Summe; da aber dann g die sämmtlichen Werthe eines Restensystems *modulo* mn durchläuft, so kann

$$g = hn + km \qquad \left(h=\pm 1,\,\pm 2,\,\dots\,\pm\tfrac{1}{2}(m-1);\; k=\pm 1,\,\pm 2,\,\dots\,\pm\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

genommen werden, und jene Summe wird dann gleich dem Product von zwei Summen:

$$\sum_h \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) \sum_k \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$$

$$\left(h=\pm 1,\,\pm 2,\,\dots\,\pm\tfrac{1}{2}(m-1);\; k=\pm 1,\,\pm 2,\,\dots\,\pm\tfrac{1}{2}(n-1)\right),$$

deren jede offenbar gleich Null ist.

Ebenso folgt ferner aus den Gleichungen ($\mathfrak{D}$) des Art. II, dass:

$$\sum_g \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{g}{m}\right) = \tfrac{1}{2}(m-1) \qquad \left(g=1,\,2,\,\dots\,\tfrac{1}{2}(mn-1)\right)$$

ist. Denn für die *ersten* $\frac{1}{2}(m-1)$ Werthe von g ist $\mathrm{R}\left(\frac{g}{m}\right)$ offenbar positiv, während für je zwei von den folgenden, $\frac{1}{2}(m+1)+r$ und $\frac{1}{2}(mn-1)-r$,

$$\mathrm{R}\left(\frac{m+1+2r}{2m}\right) + \mathrm{R}\left(\frac{mn-1-2r}{2m}\right) = \mathrm{R}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1+2r}{2m}\right) + \mathrm{R}\left(-\tfrac{1}{2} - \frac{1+2r}{2m}\right) = 0$$

wird. Ebenso ist natürlich:

$$\sum_g \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{g}{n}\right) = \tfrac{1}{2}(n-1) \qquad (g=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(mn-1)),$$

und also:

$$\sum_g \left(1-\operatorname{sgn.}\mathrm{R}\left(\frac{g}{m}\right)\right)\left(1-\operatorname{sgn.}\mathrm{R}\left(\frac{g}{n}\right)\right) = \tfrac{1}{2}(mn-1)-\tfrac{1}{2}(m-1)-\tfrac{1}{2}(n-1) = \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)$$
$$(g=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(mn-1)).$$

Jedes derjenigen Glieder der Summe auf der linken Seite, für welches g nicht durch m oder n theilbar ist, hat entweder den Werth *Vier* oder den Werth *Null*. Lässt man alle diese Glieder weg, so bleiben nur diejenigen übrig, für welche:

$$g = hn \quad \text{oder} \quad g = km \qquad (h=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

ist, und es resultirt daher die mit der Formel ($\mathfrak{K}'$) gleichbedeutende Congruenz:

$$\sum_h \left(1-\operatorname{sgn.}\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right) + \sum_k \left(1-\operatorname{sgn.}\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\right) \equiv \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1) \pmod{4}.$$

Drittens lässt sich mit Hülfe der Gleichungen ($\mathfrak{E}$) und ($\mathfrak{F}$) des Art. II darthun, dass die Anzahl der *negativen* Werthe von:

$$\operatorname{sgn.}\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right), \qquad \operatorname{sgn.}\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad (h=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

nur für $m \equiv n \equiv -1 \pmod{4}$ ungrade, sonst aber stets grade ist.

Wird nämlich, unter der von nun an zu machenden Voraussetzung: $m < n$, in der Gleichung ($\mathfrak{E}$):

$$a = \frac{km}{n}, \quad b = \frac{k'm}{n}, \quad c = \tfrac{1}{2} - \frac{\varepsilon m}{2n} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

gesetzt, und wird hierbei für k irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)$, wofür:

$$\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) < \frac{(\varepsilon+1)m}{4n}$$

ist, und alsdann für k' die durch die Gleichung:

$$k + k' = \tfrac{1}{2}(n+\varepsilon)$$

mit k verbundene Zahl genommen, so kommt:

$$(\mathfrak{E}') \qquad \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) + \mathrm{R}\left(\frac{k'm}{n}\right) - \frac{m}{2n} + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Wird ferner in der allgemeinen Reciprocitäts-Gleichung ($\mathfrak{F}$) $v = \frac{m}{n}$, $w = \frac{n}{m}$ gesetzt, so resultirt die speciellere:

$$(\mathfrak{F}') \qquad m\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) + n\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) = 0,$$

durch welche mit jeder Zahl $h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1)$ je eine bestimmte von den Zahlen $k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)$ verbunden wird. Aus dieser Reciprocitäts-Gleichung erhellt, dass für je zwei mit einander verbundene Zahlen h, k die Reste: $\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$, $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, und dass die Reste $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$, welche Resten $\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$ entsprechen, alle diejenigen unter den Resten von $\frac{m}{n}, \frac{2m}{n}, \frac{3m}{n}, \ldots \frac{(n-1)m}{2n}$ sind, deren absoluter Werth kleiner als $\frac{m}{2n}$ ist. Jedem solchen *positiven* Reste $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ entspricht aber, wie die Gleichung ($\mathfrak{E}'$) für $\varepsilon = +1$ zeigt, je einer der negativen Reste $\mathrm{R}\left(\frac{k'm}{n}\right)$, die kleiner als $-\tfrac{1}{2} + \frac{m}{2n}$ sind, während alle anderen negativen Reste, die also zwischen 0 und $-\tfrac{1}{2} + \frac{m}{2n}$ liegen, gemäss eben derselben Gleichung ($\mathfrak{E}'$) für $\varepsilon = +1$ einander paarweise durch die Relation: $k + k' = \tfrac{1}{2}(n+1)$ zugeordnet werden können. Dabei werden nur in dem Falle, wo k den Werth $\tfrac{1}{4}(n+1)$ haben kann, zwei einander entsprechende Zahlen k, k' mit einander identisch; und dies tritt nur ein, wenn $\tfrac{1}{4}(n+1)$ *ganz* und dabei $\mathrm{R}\left(\frac{m(n+1)}{4n}\right)$ negativ, also auch $m \equiv -1 \pmod{4}$ ist. Es zeigt sich also mit Hülfe der Reciprocitäts-

Gleichung ($\mathfrak{F}'$) und der Gleichung ($\mathfrak{E}'$) für $\varepsilon = +1$, dass sich je zwei von allen negativen Resten:

$$\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right), \quad \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad (h=1, 2, \dots \tfrac{1}{2}(m-1),\ k=1, 2, \dots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

einander zuordnen lassen, dass dabei nur in dem Falle $m \equiv n \equiv -1 \pmod{4}$ der eine negative Rest $\mathrm{R}\left(\frac{m(n+1)}{4n}\right)$ übrig bleibt, und dass also in der That nur in diesem Falle die Anzahl jener negativen Reste ungrade ist.

Eben dasselbe Resultat lässt sich aber auch aus der Reciprocitäts-Gleichung ($\mathfrak{F}'$) in Verbindung mit der Gleichung ($\mathfrak{E}'$) für $\varepsilon = -1$ erschliessen. Denn gemäss der Reciprocitäts-Gleichung ($\mathfrak{F}'$) beträgt die Anzahl *aller* negativen Reste $\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$ und derjenigen negativen Reste $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$, deren absoluter Werth kleiner als $\frac{m}{2n}$ ist, zusammen genau $\frac{1}{2}(m-1)$, während je zwei der übrigen negativen Reste $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ gemäss der Gleichung ($\mathfrak{E}'$) für $\varepsilon = -1$ einander paarweise mittels der Relation: $k + k' = \frac{1}{2}(n-1)$ zugeordnet werden können. Dabei werden nur in dem Falle, wo k den Werth $\frac{1}{4}(n-1)$ haben kann, zwei einander entsprechende Zahlen k, k' mit einander identisch; und dies tritt nur ein, wenn $\frac{1}{4}(n-1)$ *ganz* und dabei $\mathrm{R}\left(\frac{m(n-1)}{4n}\right)$ negativ, also $m \equiv -1 \pmod{4}$ ist. Die Gesammtanzahl der negativen Reste:

$$\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right), \quad \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad (h=1, 2, \dots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1, 2, \dots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

übersteigt also die Zahl $\frac{1}{2}(m-1)$ nur in dem Falle: $m \equiv -n \equiv -1 \pmod{4}$ um eine *ungrade* Zahl, und sie selbst ist daher nur dann ungrade, wenn $m \equiv n \equiv -1 \pmod{4}$ ist.

V.

Sind m und n Primzahlen, so ist gemäss dem *Gauss*'schen Lemma:

$$\operatorname{sgn.} \prod_h \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right), \quad \operatorname{sgn.} \prod_k \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) \qquad \begin{pmatrix} h=1, 2, \dots \frac{1}{2}(m-1) \\ k=1, 2, \dots \frac{1}{2}(n-1) \end{pmatrix},$$

wo $\left(\frac{n}{m}\right)$, $\left(\frac{m}{n}\right)$ die *Legendre*'schen Zeichen sind. Die drei Herleitungsweisen der zwischen den Zeichen:

$$\operatorname{sgn.} \prod_h \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right), \quad \operatorname{sgn.} \prod_k \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \begin{pmatrix} h=1, 2, \dots \frac{1}{2}(m-1) \\ k=1, 2, \dots \frac{1}{2}(n-1) \end{pmatrix}$$

bestehenden Reciprocitäts-Beziehung, welche im Art. IV auseinandergesetzt worden sind, können darnach als drei verschiedene Beweismethoden des Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste angesehen werden. Doch gehören diese drei Beweismethoden einer und derselben, durch die Anwendung des *Gauss*'schen Lemma charakterisirten Kategorie von Reciprocitätsgesetz-Beweisen an. Ihre Unterschiede treten in den Entwickelungen des Art. IV deutlich darin hervor, dass in jeder der drei Methoden von anderen Fundamental-Eigenschaften der Reste reeller Grössen Gebrauch gemacht wird.

Die erste, in *formaler* Hinsicht einfachste, stützt sich nur auf die Gleichung ($\mathfrak{C}$) des Art. II; sie findet sich, wenn auch etwas modificirt, schon in meiner Mittheilung vom 7. Februar v. J.*) und sie ist als eine Vereinfachung des *dritten Gauss*'schen Beweises zu betrachten.**)

Der zweite ist die *sachlich* einfachste Beweismethode, weil dabei nur die nächstliegenden, unmittelbar evidenten Eigenschaften der Reste reeller Grössen, nämlich:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \mathrm{R}(a) = \mathrm{R}(a+1), \quad \mathrm{R}(a) = -\mathrm{R}(-a)$$

benutzt werden; sie ist nichts Anderes als der *fünfte Gauss*'sche Beweis in einer mit Hülfe des Zeichens R vereinfachten Darstellung.

Die dritte der im Art. IV gegebenen Beweismethoden unterscheidet sich principiell von den beiden ersten dadurch, dass dabei eine zwischen zwei Resten $\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$, $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ *selbst* bestehende Reciprocitäts-Gleichung, die Gleichung

*) Sitzungsberichte 1884. XXIII. S. 522[1]).
**) Vgl. Sitzungsberichte 1884. XXIX. S. 645[2]).

[1]) Bd. II S. 503 dieser Ausgabe. H.
[2]) Bd. II S. 521 dieser Ausgabe. H.

($\mathfrak{F}$) des Art. II zu Grunde gelegt wird. Es kommt zwar ausserdem noch die Gleichung ($\mathfrak{E}$) zur Anwendung; aber diese ist von analoger Beschaffenheit wie die bei der zweiten Beweismethode benutzten Gleichungen ($\mathfrak{D}$).

Diese dritte Beweismethode ist nun nichts Anderes als jene *Zeller*'sche, welche ich im December 1872 der Akademie mitgetheilt und im betreffenden Monatsbericht veröffentlicht habe[1]); aber sie ist hier im Art. IV unter Anwendung des Zeichens R entwickelt, und es zeigt sich dabei ihr eigentliches Fundament eben darin, dass, wenn $m < n$ angenommen wird, zuvörderst von allen Resten $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ diejenigen herausgehoben werden, welche mit den verschiedenen Resten $\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$ durch die Reciprocitäts-Gleichung:

$$(\mathfrak{F}') \qquad m\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) + n\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) = 0$$

verbunden sind. Erst dann werden die übrigen Reste $\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)$ unter einander paarweise verbunden, und es wird deren Grösse und Vorzeichen mit Hülfe der Gleichung ($\mathfrak{E}'$) bestimmt.

Auf eben demselben Fundament wie der *Zeller*'sche ruht auch der 1879 von Hrn. *Petersen* im zweiten Bande des American Journal of Mathematics S. 285 veröffentlichte Beweis des Reciprocitätsgesetzes, und die wesentliche Uebereinstimmung beider Beweise tritt unmittelbar hervor, wenn man in den a. a. O. mit (1), (2) bezeichneten *Petersen*'schen Gleichungen die Zahlen a, b beziehungsweise durch p, q und ferner:

$$\begin{array}{llll} & m, & n, & r, \\ \text{in (1) durch:} & -h+\tfrac{1}{2}(p+\mathrm{sgn.}\,r), & -k+\tfrac{1}{2}(q-1), & 2r-q\,\mathrm{sgn.}\,r \\ \text{in (2) durch:} & h, & k-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn.}\,r, & -2r+p\,\mathrm{sgn.}\,r \end{array}$$

ersetzt. Alsdann werden nämlich die beiden *Petersen*'schen Gleichungen mit der Gleichung: $hq - kp = r$, von welcher die *Zeller*'sche Entwickelung ausgeht, identisch und die einzige Modification der von Hrn. *Petersen* daran

[1]) Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin v. J. 1872, S. 846—847. H.

geknüpften weiteren Deduction*) lässt sich dadurch bezeichnen, dass diese zu der oben in der dritten Beweismethode für $\varepsilon = +1$ dargelegten Restgruppirung, die *Zeller*'sche aber zu derjenigen Gruppirung führt, die dem Werthe $\varepsilon = -1$ entspricht.

Die Zurückführung auf die verschiedenen Fundamental-Eigenschaften der Reste reeller Grössen gewährt also eine neue und vollständige Einsicht in die gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen, auf dem *Gauss*'schen Lemma fussenden Reciprocitätsgesetz-Beweise; und eine solche Aufklärung zu erlangen, war der eigentliche Zweck meiner hier mitgetheilten Untersuchungen.

VI.

Eine Function $\theta(m, n)$ zweier positiver oder negativer ungrader Zahlen m, n, die keinen gemeinsamen Theiler haben, wird durch die Bedingungen:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \begin{aligned} &\theta(m, n) = \theta(m+2n, n), \\ &\theta(m, n) = \theta(-n, m)\,(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n+1)-\frac{1}{4}(\mathrm{sgn.}\,m-1)(\mathrm{sgn.}\,n+1)}, \end{aligned}$$

abgesehen von einem constanten Factor, vollständig bestimmt. Denn, wenn man, wie im Art. VI meines oben citirten, im Sitzungsbericht vom 1. Mai 1884 abgedruckten Aufsatzes[2]), von zwei (positiven oder negativen) ungraden Zahlen n_0, n_1 ausgehend, eine Reihe von Zahlen $n_0, n_1, n_2, \ldots. n_t$ derart bildet, dass zwischen ihnen die Gleichungen:

$$n_0 - 2r_1 n_1 + n_2 = 0, \quad n_1 - 2r_2 n_2 + n_3 = 0, \ldots. \quad n_{t-2} - 2r_{t-1} n_{t-1} + n_t = 0$$

bestehen, in denen $r_1, r_2, \ldots r_{t-1}$ positive oder negative ganze Zahlen sind, so ist:

*) Diese weitere Deduction kann übrigens durch die wesentlich einfachere, welche ich in den letzten Zeilen von S. 336 des Monatsberichts von 1876 gegeben habe[1]), ersetzt werden, da die Erklärung des *Legendre*'schen Zeichens, von welcher Hr. *Petersen* ausgeht, genau mit der a. a. O. von mir benutzten übereinstimmt.

[1]) Bd. II S. 18 dieser Ausgabe. H.
[2]) Band II. S. 513 flgde dieser Ausgabe. H.

$$\theta(-n_{k+1},\, n_k) = \theta(n_{k-1},\, n_k) = (-1)^{\frac{1}{4}\sigma_k}\,\theta(-n_k,\, n_{k-1}),$$

wenn σ_k die Zahl:

$$(n_{k-1}-1)(n_k+1) - (\text{sgn.}\, n_{k-1} - 1)(\text{sgn.}\, n_k + 1)$$

bedeutet, und es wird daher $\theta(-n_1,\, n_0)$ gleich $\theta(-n_\iota,\, n_{\iota-1})$, multiplicirt mit einer durch die Zahlen n genau bestimmten Potenz von -1. Da ferner, wenn n_0, n_1 als relative Primzahlen vorausgesetzt werden, $n_\iota = \pm 1$ angenommen werden kann, so folgt aus den Gleichungen $(\mathfrak{L})$, dass:

$$\theta(-n_\iota,\, n_{\iota-1}) = \pm\, \theta(1,\, 1)$$

wird. Der Quotient:

$$\frac{\theta(m,\, n)}{\theta(1,\, 1)}$$

ist daher durch die Gleichungen $(\mathfrak{L})$ vollständig bestimmt.

Das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste kann also — und es erscheint mir dies von besonderem Interesse — in *der* Weise bewiesen werden, dass die Uebereinstimmung jenes Quotienten mit dem *Jacobi-Legendre*'schen Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$ dargethan wird. Hierzu bedarf es einzig und allein des Nachweises, dass für die durch die Gleichungen $(\mathfrak{L})$ definirte Function $\theta(m,\, n)$ der Multiplicationssatz:

$$(\mathfrak{M}) \qquad \theta(l,\, n)\,\theta(m,\, n) = \theta(lm,\, n)\,\theta(1,\, 1)$$

besteht; denn wie mit Benutzung dieses Satzes und der Gleichungen $(\mathfrak{L})$ gefolgert werden kann, dass in der That:

$$\theta(m,\, n) = \left(\frac{m}{n}\right)\theta(1,\, 1)$$

sein muss, habe ich bereits im § 3 meines im Monatsbericht vom Juni 1876 abgedruckten Aufsatzes[1]) ausführlich entwickelt. Es ist mir aber bis jetzt

[1]) Band II S. 19—23 dieser Ausgabe. H.

noch nicht gelungen, den Multiplicationssatz $(\mathfrak{M})$ unmittelbar aus den Definitions-Gleichungen $(\mathfrak{L})$ abzuleiten. Mittelbar ergiebt sich derselbe durch den im Art. IV auf drei verschiedene Arten geführten Nachweis, dass die durch die Gleichung:

$$\theta(m,\, n) = \theta(1,\, 1)\cdot \text{sgn.} \prod_k \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \left(k=1,\, 2,\, \ldots\, \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

bestimmte Function θ der zweiten der Definitions-Gleichungen $(\mathfrak{L})$ genügt. Es ist nämlich an sich klar, dass sie auch der ersten genügt, und der Multiplicationssatz folgt dann aus der Relation:

$$\mathrm{R}\left(\frac{lk}{n}\right)\cdot \text{sgn.}\, \mathrm{R}\left(\frac{mk'}{n}\right) = \mathrm{R}\left(\frac{lmk'}{n}\right) \qquad \left(k,\, k'=1,\, 2,\, \ldots\, \tfrac{1}{2}(n-1)\right),$$

welche offenbar besteht, wenn die Zahlen k, k' mit einander durch die Congruenz:

$$mk' \equiv \pm\, k \pmod{n}$$

verbunden sind.

An Stelle der Gleichungen $(\mathfrak{L})$ kann man auch diejenigen zu Grunde legen, welche $\log\theta(m,\, n)$ definiren. Man wird alsdann auf die Bestimmung:

$$\log\theta(m,\, n) = \log\theta(1,\, 1) + \tfrac{1}{2}\pi i \sum_k \left(1 - \text{sgn.}\, \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\right)$$
$$\left(k=1,\, 2,\, \ldots\, \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

geführt, da offenbar einer der Werthe von:

$$\log \text{sgn.} \prod_k \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \quad \text{oder} \quad \log\left(\frac{m}{n}\right) \qquad \left(k=1,\, 2,\, \ldots\, \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

durch:

$$\tfrac{1}{2}\pi i \sum_k \left(1 - \text{sgn.}\, \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\right) \qquad \left(k=1,\, 2,\, \ldots\, \tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

dargestellt wird, und es mag dabei schliesslich noch die bemerkenswerthe Relation:

$$\frac{2n}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)=\tfrac{1}{2}n\,(n-1)-\sum_k \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{km\pi}{n}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(n-1))$$

für den Logarithmus des *Legendre*'schen Zeichens hervorgehoben werden, welche sich aus der Gleichung ($\mathfrak{H}'$) des Art. III ergiebt.

VII.

Am Schlusse des art. VI habe ich die Logarithmen der Vorzeichenwerthe von:

$$\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(n-1))$$

für die Darstellung des Logarithmus des *Legendre*'schen Zeichens verwendet. Diese Benutzung der Logarithmen beruht auf der Congruenz:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \frac{1}{\pi i}(\log a-\log|a|)\equiv\frac{1}{\pi i}\log\operatorname{sgn.}a\equiv\tfrac{1}{2}(1-\operatorname{sgn.}a) \pmod 2,$$

welche offenbar für jede reelle Grösse a und für jeden der verschiedenen Werthe der Logarithmen Geltung hat, sowie auf der allgemeineren Congruenz:

$$(\mathfrak{N}') \qquad \frac{1}{\pi i}\log\operatorname{sgn.}\prod_r a_r\equiv\tfrac{1}{2}\sum_r(1-\operatorname{sgn.}a_r) \pmod 2 \qquad (r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

welche aus jener unmittelbar folgt.

Die *zweite* der beiden Formeln, durch welche sich im art. IV die zwischen zwei Zahlen m, n bestehende Reciprocitäts-Beziehung ausgedrückt findet, nämlich die Formel:

$$(\mathfrak{K}') \qquad \tfrac{1}{2}\sum_h\left(1-\operatorname{sgn.}\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right)+\tfrac{1}{2}\sum_k\left(1-\operatorname{sgn.}\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\right)\equiv\tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod 2$$

$$(h=1,\ 2,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,\ 2,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(n-1)),$$

deren Herleitung — wie im art. V erwähnt worden — den wesentlichen Inhalt des *fünften Gauss*'schen Beweises bildet, erweist sich hiernach als völlig übereinstimmend mit der Congruenz:

$$(\overline{\mathfrak{K}}) \qquad \frac{1}{\pi i}\log\operatorname{sgn.}\prod_h \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\prod_k \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right)\equiv\frac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod 2$$

$$(h=1,\ 2,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,\ 2,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(n-1)),$$

welche nur eine logarithmische Umgestaltung der *ersten* jener beiden Formeln des art. IV, nämlich der dort mit ($\mathfrak{K}$) bezeichneten Gleichung, ist. Da nun in der Herleitung eben dieser Gleichung ($\mathfrak{K}$) — wie im art. V erwähnt worden — das Charakteristische des *dritten Gauss*'schen Beweises besteht, so enthüllt sich hiermit in überraschender Weise die eigentliche innere Beziehung jener beiden, von demselben Lemma ausgehenden *Gauss*'schen Beweismethoden und auch der wahre Grund dafür, dass die letztere der beiden Methoden sich bei der obigen Analyse (vergl. art. V) als die *sachlich* einfachste erwiesen hat. Indem nämlich beim Uebergang zu den Logarithmen die Productformel ($\mathfrak{K}$) sich auf eine Additionsformel ($\mathfrak{K}'$) reducirt, können sich auch die zur Verification dienenden Mittel entsprechend vereinfachen.

Will man, auf eine solche Vereinfachung verzichtend, sich genau derselben Mittel für die Verification der Formel ($\mathfrak{K}'$) bedienen, welche zum Beweise der Formel ($\mathfrak{K}$) angewendet werden, so hat man nur in jeder einzelnen Gleichung, die im art. IV bei der Herleitung der Productformel ($\mathfrak{K}$) vorkommt, den Uebergang zu den Logarithmen zu machen. Auf diese Weise resultirt aus der Gleichung ($\mathfrak{C}$) des art. II, mit Hülfe der Congruenz ($\mathfrak{N}'$), die Formel:

$$(\mathfrak{D}) \qquad \frac{1}{\pi i}\log\operatorname{sgn.}\mathrm{R}(a)\equiv\frac{1}{2}\sum_g\left(1-\operatorname{sgn.}\left(\frac{1}{2}g-a\right)\right) \pmod 2 \qquad (g=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

in welcher die Summation rechts *wenigstens* bis zu der Zahl $g=[2a]$ zu erstrecken ist. Gemäss dieser Formel, welche sich auch leicht direct verificiren lässt, ist:

$$\frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\sum_{g}\left(1-\operatorname{sgn.}\left(\frac{g}{2n}-\frac{h}{m}\right)\right) \pmod{2} \qquad (g=1,2,\ldots n-1).$$

Werden nun, wie im art. IV, die graden und die ungraden Werthe von g gesondert, die einen mit $2k$, die anderen mit $n-2k$ bezeichnet, und die Glieder mit graden Werthen von g negativ genommen, so kommt:

$$(\mathfrak{P}) \qquad \frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\sum_{k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \pmod{2}$$

$$(k=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(n-1)).$$

Ebenso wird:

$$(\mathfrak{Q}) \qquad \frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\sum_{h}\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right) \pmod{2}$$

$$(h=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(m-1)).$$

und durch Addition der Formeln ($\mathfrak{P}$) und ($\mathfrak{Q}$) entsteht die Congruenz:

$$\frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} \prod_{h}\mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\prod_{k}\mathrm{R}\left(\frac{km}{n}\right) \equiv \sum_{h,k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right) \equiv \tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod{2}$$

$$(h=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(n-1)),$$

durch welche offenbar das Reciprocitätsgesetz für die quadratischen Reste ausgedrückt wird. Dieses ergiebt sich also hier durch eine *„logarithmische Umgestaltung“* des dritten *Gauss*'schen Beweises. Denn ebenso wie es bei diesem dritten Beweise unmittelbar aus der Formel:

$$\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_{k}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right) \qquad (k=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

resultirt (vergl. art. IV), so folgt es hier aus der Congruenz:

$$\frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \pmod{2}$$

$$(k=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(n-1)),$$

welche oben mit ($\mathfrak{P}$) bezeichnet ist.

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Congruenz stellt den Ueberschuss der Anzahl der positiven Werthe von:

$$\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2} \qquad (k=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

über die Anzahl der positiven Werthe von:

$$\frac{h}{m}-\frac{k}{n} \qquad (k=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

dar. Die erstere Anzahl wird offenbar durch die dem Bruche $\frac{hn}{m}$ *zunächst* liegende ganze Zahl, die letztere aber durch die Zahl $\left[\frac{hn}{m}\right]$ gegeben; jener Ueberschuss ist also gleich:

$$\tfrac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right)$$

und also, gemäss der Relation ($\mathfrak{R}$), in der That dem Werthe von:

$$\frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{hn}{m}\right)$$

nach dem Modul 2 congruent. Die Congruenz ($\mathfrak{P}$) ist hiermit direct arithmetisch erwiesen.

VIII.

Ein Beweis des Reciprocitätsgesetzes, welcher von Hrn. *A. Genocchi* schon im November 1852 der Brüsseler Akademie überreicht, bald darauf in deren Abhandlungen publicirt und neulich wieder in Erinnerung gebracht worden ist*), geht davon aus, dass der Ueberschuss der Anzahl der positiven Werthe von:

$$\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2mn} \qquad (k=1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

über die Anzahl der positiven Werthe von:

$$\frac{h}{m} - \frac{k}{n} \qquad (k=1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

gleich $\frac{1}{2}\left(1 - \text{sgn. R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right)$ ist. Es wird dies a. a. O. nachgewiesen und die obige Congruenz ($\mathfrak{K}'$) daraus erschlossen.

Um diesen *Genocchi*'schen Beweis zu analysiren, bemerke ich zuvörderst, dass für positive Werthe von $\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2mn}$ offenbar auch $\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}$ positiv ist. Jene Grundlage des *Genocchi*'schen Beweises kann also durch die Formel:

$$(\mathfrak{R}) \qquad \frac{1}{2}\left(1 - \text{sgn. R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_k \text{sgn.}\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_k \text{sgn.}\left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)$$
$$(k=1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)),$$

ausgedrückt werden, welche am Schlusse des art. VII auf kürzestem Wege hergeleitet worden ist, und aus welcher sich die oben mit ($\mathfrak{K}'$) bezeichnete Congruenz:

$$\frac{1}{2}\sum_h \left(1 - \text{sgn. R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right) + \frac{1}{2}\sum_k \left(1 - \text{sgn. R}\left(\frac{km}{n}\right)\right) \equiv \tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod 2$$
$$(h=1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

unmittelbar ergiebt. Für den Modul 2 sind aber die Werthe von:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \text{sgn. R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right), \quad \frac{1}{\pi i}\log \text{sgn. R}\left(\frac{hn}{m}\right)$$

*) Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Tome 90, p. 300, Séance du 16 février 1880; Tome 101, p. 425, Séance du 10 août 1885.

einander congruent; die *Genocchi*'sche Beweismethode kommt daher mit jener, welche im art. VII entwickelt worden ist, völlig überein, und sie ist daher selbst als eine „logarithmische Umgestaltung" des dritten *Gauss*'schen Beweises zu charakterisiren.

Da für den Beweis des Reciprocitätsgesetzes nur der nach dem Modul 2 genommene Congruenzwerth von $\frac{1}{2}\left(1 - \text{sgn. R}\left(\frac{hn}{m}\right)\right)$ in Betracht kommt, so kann die Grundlage des *Genocchi*'schen Beweises — ebenso wie durch die Gleichung ($\mathfrak{R}$) — auch durch die Congruenz:

$$(\mathfrak{P}) \qquad \frac{1}{\pi i}\log \text{sgn. R}\left(\frac{hn}{m}\right) \equiv \frac{1}{2}\sum_k \text{sgn.}\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_k \text{sgn.}\left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right) \pmod 2$$
$$(k=1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

dargestellt werden. Diese Congruenz resultirt aber unmittelbar aus den *Eisenstein*'schen Entwickelungen, wenn man in der daraus hervorgehenden Gleichung*):

$$\text{sgn. R}\left(\frac{hn}{m}\right) = \text{sgn. sin}\,\frac{2hn\pi}{m} = \text{sgn.}\prod_k\left(\sin\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{2h\pi}{m}\right)$$
$$(k=1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

jeden Factor:

$$\sin\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{2h\pi}{m}$$

durch das Product:

$$\sin\left(\frac{h\pi}{m} - \frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{h\pi}{m} + \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)$$

ersetzt und alsdann zu den Logarithmen übergeht. Doch hat, wie ich hinzufügen muss, Hr. *Genocchi* die Grundlage seines Beweises keineswegs den *Eisenstein*'schen Entwickelungen entnommen, sondern unabhängig von diesen —

*) Journal für Mathematik Bd. 29, S. 178 und 179.

die ihm zur Zeit der Redaction seiner Abhandlung noch unbekannt waren*) — auf rein arithmetischem Wege selbständig gefunden.

Ich bemerke noch, dass mich *H. Stern* auf eine Formel aufmerksam gemacht hat, welche er im 59. Bande des Journals für Mathematik (S. 154, letzte Zeile) hergeleitet hat, und welche in dem speciellen Falle, wo n Primzahl ist, mit der am Schlusse des art. VI hervorgehobenen Formel genau übereinstimmt.

*) Vergl. den Schluss der *Genocchi*'schen Mittheilung in den Comptes Rendus vom 10. August 1885.

BEWEIS DES RECIPROCITÄTSGESETZES FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE.

(Aus einem Aufsatze in No. XLVIII der Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1885.)
[Band III S. 111—136 dieser Ausgabe.]

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 104. S. 348—351.

BEWEIS DES RECIPROCITÄTSGESETZES FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE.

Bei „logarithmischer Umgestaltung" der Deduction, welche ich im 96sten Bande dieses Journals (S. 348[1]) gegeben habe, gelangt man in fast ebenso einfacher Weise zu der Reciprocitätsgleichung:

$$(A.)\qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}.$$

Hierin bedeuten m und n ungrade Zahlen, und die Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$ werden, wenn, wie in meinen früheren Aufsätzen, mit sgn. a die mit dem Vorzeichen von a genommene Einheit und mit $R(a)$ der kleinste Rest von a bezeichnet wird, durch die Gleichungen definirt:

$$(B.)\qquad \left(\frac{m}{n}\right) = \text{sgn.} \prod_k R\left(\frac{km}{n}\right), \quad \left(\frac{n}{m}\right) = \text{sgn.} \prod_h R\left(\frac{hn}{m}\right) \qquad \left(\begin{matrix} h=1, 2, \dots \frac{1}{2}(m-1) \\ k=1, 2, \dots \frac{1}{2}(n-1) \end{matrix}\right).$$

Für jede der Zahlen $h = 1, 2, \dots \frac{1}{2}(m-1)$ ist:

$$(C.)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_k \left(1 + \text{sgn.}\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \tfrac{1}{2}\right)\right) = \left[\frac{hn}{m} + \tfrac{1}{2}\right], \qquad \tfrac{1}{2}\sum_k \left(1 + \text{sgn.}\left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\right) = \left[\frac{hn}{m}\right].$$
$$(k=1, 2, \dots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

Denn in der ersten Gleichung giebt der Ausdruck auf jeder der beiden Seiten die Anzahl der Zahlen $\frac{1}{2}(n+1) - k$ an, welche kleiner als $\frac{hn}{m} + \frac{1}{2}$ sind,

[1]) Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Bd. II S. 523—527 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.

während durch die Ausdrücke auf beiden Seiten der zweiten Gleichung die Anzahl derjenigen Zahlen k dargestellt wird, die kleiner als $\frac{hn}{m}$ sind. Ferner ist offenbar:

$$\left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right]-\left[\frac{hn}{m}\right]=\tfrac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn.} R\left(\frac{hn}{m}\right)\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} R\left(\frac{hn}{m}\right) \quad (\text{mod. } 2);$$

die Gleichungen ($C.$) führen daher zu der Congruenz:

$$(D.)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_k \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_k \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} R\left(\frac{hn}{m}\right) \quad (\text{mod. } 2)$$

$$(k=1,2,\dots \tfrac{1}{2}(n-1)),$$

und aus dieser resultirt mit Hülfe der Gleichungen ($B.$) die folgende:

$$(E.)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right) \quad (\text{mod. } 2)$$

$$(h=1,2,\dots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\dots \tfrac{1}{2}(n-1)),$$

deren unmittelbare Folge die Congruenz:

$$(F.)\qquad \frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)\pm\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right)\equiv(m-1)(n-1) \quad (\text{mod. } 2),$$

und also auch die Reciprocitätsgleichung:

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}$$

ist. Denn wenn man in der Congruenz ($E.$) m mit n und h mit k vertauscht, so kommt:

$$(E'.)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right) \quad (\text{mod. } 2),$$

und die Verbindung der Congruenzen ($E.$) und ($E'.$) ergiebt, dass:

$$\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right)\equiv\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right) \quad (\text{mod. } 2),$$

$$\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)-\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right)\equiv\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \quad (\text{mod. } 2)$$

$$(h=1,2,\dots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\dots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

ist. Es bedarf daher nur noch der Bemerkung, dass jedes einzelne von den $\frac{1}{4}(m-1)(n-1)$ Gliedern der Summen auf der rechten Seite *modulo* 2 congruent 1 ist, um die Richtigkeit der Congruenz ($F.$) zu begründen.

In einem auf S. 109—111 des 12. Bandes der *Acta Mathematica* abgedruckten Aufsatze des Herrn *Jacob Hacks*[1]) ist die oben in den Gleichungen ($C.$) dargelegte, schon von *Genocchi* erkannte Bedeutung der Zahlen*):

$$\left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{hn}{m}\right]$$

nicht bemerkt. Diese Bedeutung setzt aber die Relationen, deren Nachweis jener Aufsatz gewidmet ist, und welche in den hier gebrauchten Zeichen folgendermassen lauten:

$$\sum_h\left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right]=\sum_k\left[\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\right],\qquad \sum_h\left[\frac{hn}{m}\right]+\sum_k\left[\frac{km}{n}\right]=\tfrac{1}{4}(m-1)(n-1)$$

$$(h=1,2,\dots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\dots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

unmittelbar in Evidenz und macht daher die ganze dortige Beweisführung entbehrlich.

In dem oben formulirten Reciprocitätsgesetzbeweise hat man — wie im art. VII meiner im Titel angeführten Arbeit: „Die absolut kleinsten Reste

*) Vergl. auch den Schluss von art. VII meiner Mittheilung im Stück XLVIII der Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1885[2]).

[1]) *J. Hacks*, Scherings Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste dargestellt mit Hülfe des Zeichens $[x]$. H.

[2]) Bd. III S. 133 dieser Ausgabe. H.

reeller Grössen" näher ausgeführt ist — nur eine logarithmische Umgestaltung des dritten *Gauss*'schen Beweises zu sehen. Dasselbe gilt von dem fünften *Gauss*'schen, von dem *Genocchi*'schen*) und dem damit übereinkommenden *Schering*'schen Beweise, an welchen der oben erwähnte Aufsatz des Herrn *Hacks* anknüpft.

Der Ausgangspunkt der *Genocchi*'schen Entwickelung lässt sich mittels der hier gebrauchten Bezeichnungen durch die Gleichung:

$$(G.)\quad \tfrac{1}{2}\left(1-\text{sgn.}\,R\left(\tfrac{nh}{m}\right)\right)=\tfrac{1}{2}\sum_k\left(1+\text{sgn.}\left(\tfrac{h}{m}+\tfrac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\right)-\tfrac{1}{2}\sum_k\left(1+\text{sgn.}\left(\tfrac{h}{m}-\tfrac{k}{n}\right)\right)$$
$$(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1))$$

darstellen, während die Ausführungen des Herrn *Schering* darauf basiren, dass für $x \geqq 0$:

$$(H.)\quad \tfrac{1}{2}(1-\text{sgn.}\,R(x))=\tfrac{1}{2}\sum_{k'}(1+\text{sgn.}(x+\tfrac{1}{2}-k'))-\tfrac{1}{2}\sum_k(1+\text{sgn.}(x-k))$$
$$(k,k'=1,2,3,\ldots \text{ in inf.})$$

ist. Diese letztere Gleichung ist freilich allgemeiner als die erstere $(G.)$, sie findet aber in der *Schering*'schen Deduction**) nur für $x=\frac{nh}{m}$ Anwendung, und hierfür stimmt sie mit der *Genocchi*'schen Gleichung genau überein. Um dies zu erkennen, braucht man nur die Summationen in der Gleichung $(H.)$ auf die positiven Zahlen k, k', die kleiner als $\frac{1}{2}n$ sind, zu beschränken und den Summationsbuchstaben k' durch $\frac{1}{2}(n+1)-k$ zu ersetzen.

Ich bin auf den Beweis, welchen *Genocchi* im art. XIII seiner im Jahre 1852 der Akademie zu Brüssel eingesandten und bald darauf dort preisgekrönten und publicirten Arbeit gegeben hat, erst im Anfange des Jahres 1881 durch eine von ihm selbst erhaltene briefliche Mittheilung aufmerksam geworden*). Indessen hatte *Genocchi* schon in den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 16. Februar 1880 eine Notiz darüber veröffentlicht. Bis dahin scheint aber sein Beweis einem grossen Theile des mathematischen Publikums unbekannt geblieben zu sein; wenigstens haben wir beide, Herr *Schering* und ich, ihn in den verbreitetsten Werken und Zeitschriften nirgends erwähnt gefunden. Um ihn nunmehr in der ursprünglichen Darstellung allgemeiner zugänglich zu machen, habe ich auf den vorhergehenden Seiten den ersten Theil des art. XIII der erwähnten *Genocchi*'schen Preisschrift abdrucken lassen[1]).

*) Vgl. art. VIII meiner Mittheilung im Stück XLVIII der Sitzungsberichte von 1885[1]).

**) Vgl. die mit [1] bezeichnete Gleichung auf S. 220 der Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1879.

[1]) Band III S. 133 flgde. dieser Ausgabe. H.

*) In demselben Briefe lenkte *Genocchi* meine Aufmerksamkeit auf einen von *Schaar* in den Schriften der Brüsseler Akademie veröffentlichten Beweis, der mir ebenfalls entgangen ist, mit folgenden Worten:

„Mais entre toutes les démonstrations de la loi de réciprocité, celle que vous avez publiée en 1876 (Monatsberichte p. 331[2]) est surtout remarquable parce qu'elle se renferme dans le champ des résidus quadratiques, comme la première de *Gauss* et n'emprunte rien à la théorie des résidus des puissances supérieures. Toutefois les produits que vous considérez sont à-peu-près les mêmes que M. *Schaar* avait introduits dès 1847 dans la démonstration de la loi de réciprocité (Bulletin de l'Académie de Belgique, I Série, Tome XIV, Partie I, p. 79—83) sans pouvoir la rendre indépendante de l'art. 106 des *Disquisitiones.*"

[1]) Première partie du chapitre XIII de la Note sur la théorie des résidus quadratiques par *Angelo Genocchi*; Crelles Journal Bd. 104 S. 345—347. H.

[2]) Ueber das Reciprocitätsgesetz; Band II S. 11—25 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.