ÜBER EINREIHIGE DETERMINANTEN.

(AUSZUG AUS EINEM BRIEFE AN E. SCHERING.)

VON

L. KRONECKER.

Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen
vom 7. Mai 1881. Nr. 9. S. 271—279.

ÜBER EINREIHIGE DETERMINANTEN.

Ich erlaube mir Ihnen anlässlich des in Nr. 4 der „Nachrichten“ abgedruckten Aufsatzes von Herrn *Karl Heun*[1]) einige Bemerkungen über die dort behandelten Determinanten mitzutheilen.

Jacobi ist schon im Jahre 1835 bei der Entwickelung der *Bézout*'schen Eliminations-Methode, wie er sie in seinem Aufsatze „de eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis“ im 15. Bande des *Crelle*'schen Journals[2]) dargelegt hat, auf Determinanten n^{ter} Ordnung

$$|A_{r+s}| \qquad (r, s = 0, 1, \ldots n-1)$$

geführt worden, welche aus $2n-1$ Elementen $A_0, A_1, \ldots A_{2n-2}$ zu bilden sind. Er ist dann, genau 10 Jahre später, bei der Beschäftigung mit einem nahe verwandten Gegenstande auf solche Determinanten zurückgekommen und hat dieselben in der bezüglichen vom August 1845 datirten Arbeit „über die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function“ (*Crelle's* Journal Bd. 30[3]) allgemeiner und ausführlicher behandelt. Nachher erscheinen dieselben Determinanten in vielen auf den *Sturm*'schen Satz und die Kettenbruchs-Entwickelung rationaler Functionen bezüglichen Arbeiten, von denen nur zwei ältere, die *Cayley*'sche im 11. Bande von *Liouville*'s Journal 1846[4]) erschienene und die *Joachimsthal*'sche im 48. Bande

---

[1]) *K. Heun*, Neue Darstellung der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen durch Determinanten. Göttinger Nachrichten v. J. 1881. S. 104—119. H.

[2]) *C. G. J. Jacobi's* Werke. Band III S. 295—320. H.

[3]) Werke. Band III S. 479—511. H.

[4]) *A. Cayley*, Note sur les fonctions de M. *Sturm*; Collected mathematical papers Vol. I p. 306—308. H.

des *Crelle*'schen Journals 1854 veröffentlichte[1]) hervorgehoben werden mögen. Doch ist überdies zu erwähnen, dass dieselben Determinanten den Gegenstand einer Abhandlung bilden, welche *Hermann Hankel* als „Inaugural-dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde an der Universität Leipzig“ im Jahre 1861 (Göttingen, Druck der Dieterich'schen Universitäts-Buchdruckerei) hat erscheinen lassen, und dass darin auch eine besondere Bezeichnung („orthosymmetrisch“) für die Determinanten vorgeschlagen ist, welche aber keinen Eingang gefunden hat.

Bei allen Untersuchungen, welche auf die erwähnten Determinanten $|A_{r+s}|$ geführt haben, lässt sich eine unmittelbare Beziehung zu jener vielfach behandelten Aufgabe erkennen, zu gegebenen ganzen Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ zwei Multiplicatoren $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ zu finden, für welche die Differenz $f_1(x)\Psi(x) - f(x)\Phi(x)$ sich auf eine Function von einem bestimmten niedrigeren Grade reducirt, d. h. also für zwei gegebene ganze Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$, welche resp. vom Grade n und vom Grade $n - n_1 < n$ vorausgesetzt werden, drei ganze Functionen

$$F(x), \quad \Phi(x), \quad \Psi(x)$$

beziehungsweise von den Graden

$$\mu, \quad \nu - n_1, \quad \nu$$

zu bestimmen, so dass

$$F(x) = f_1(x)\Psi(x) - f(x)\Phi(x)$$

und $\mu + \nu < n$ wird. Abgesehen davon, dass sich die Functionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ als Zähler und Nenner der Näherungsbrüche der Kettenbruchs-Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ bestimmen, können

> *erstens* die Functionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ dadurch charakterisirt werden, dass die Differenz

[1]) *F. Joachimsthal*, Bemerkungen über den *Sturm*'schen Satz. *Crelle's* Journal. Bd. 48 S. 386—416. H.

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} - \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}$$

für unendlich grosse Werthe von x unendlich klein von der Ordnung $x^{-2\nu-\lambda}$ werden muss, wo λ eine positive ganze Zahl bedeutet, also $\lambda \geqq 1$ ist.

Zweitens können die Functionen $F(x)$ und $\Psi(x)$ nach der *Cauchy*'schen Interpolationsformel als Zähler und Nenner eines rationalen Bruches bestimmt werden, der für die n Werthe $x = \xi_\varkappa$, wofür $f(x) = 0$ ist, die vorgeschriebenen Werthe $f_1(\xi_\varkappa)$ annimmt.

Drittens kann die Function $\Psi(x)$ abgesehen von einem constanten Factor durch die ν Gleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \xi_\varkappa^t \, \Psi(\xi_\varkappa) \frac{f_1(\xi_\varkappa)}{f'(\xi_\varkappa)} = 0 \qquad (t=0, 1, \ldots \nu-1)$$

und ebenso die Function $F(x)$ durch die μ Gleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{\xi_\varkappa^r F(\xi_\varkappa)}{f_1(\xi_\varkappa) f'(\xi_\varkappa)} = 0 \qquad (r=0, 1, \ldots \mu-1)$$

bestimmt werden, wie z. B. in meinen in den Monatsberichten der Berliner Akademie abgedruckten Aufsätzen vom 17. Febr. 1873 und vom 14. Febr. 1878[1]) geschehen ist. Hier bedeutet $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$, und die n Wurzeln $\xi_\varkappa$ sind ebenso wie bei der zweiten Methode zunächst als verschieden vorauszusetzen; doch kann man leicht zu dem allgemeineren Falle, wo beliebig viele einander gleiche Wurzeln vorkommen, übergehen, wenn man die Ausdrücke, auf welche sich alsdann jene Summen, bei denen $f'(\xi)$ im Nenner steht, reduciren, an Stelle der Summenausdrücke in den Formeln substituirt. Dies findet sich schon in der citirten *Jacobi*-

[1]) Band I S. 303—348 und Band II S. 37—70 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

schen Abhandlung vom Jahre 1845 (*Crelle's* Journal Bd. 30 S. 149[1]) vollständig entwickelt.

Bei allen drei angegebenen Methoden zur Bestimmung der Functionen $F(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ treten die Determinanten $|A_{r+s}|$ auf, und zwar bei der ersten und dritten ganz unmittelbar und ausschliesslich, während sie bei der zweiten Methode, bei welcher bis dahin nur die *Cauchy*'sche combinatorische Formel zur Verwendung gekommen war, erst von *Jacobi* in der Abhandlung vom Jahre 1845 eingeführt worden sind. *Scheinbar* haben die Elemente der Determinanten $|A_{r+s}|$ in allen den erwähnten Fällen ihres Auftretens eine specielle Bedeutung, in Wahrheit aber sind diese Elemente, wie näher dargelegt werden soll, völlig allgemeine.

Der Einfachheit halber setze ich zunächst die Wurzeln ξ als verschieden voraus und knüpfe an die zuletzt erwähnte Methode an, bei der sich $F(x)$ abgesehen von einem constanten Factor als eine Determinante

$$|xs_{p+q} - s_{p+q+1}| \qquad (p, q = 0, 1, \dots \mu - 1)$$

bestimmt, in welcher die Grössen s durch die Gleichung

$$s_h = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{\xi_\varkappa^h}{f_1(\xi_\varkappa) f'(\xi_\varkappa)}$$

definirt werden (vgl. den Abschnitt II meiner citirten Arbeit vom 14. Febr. 1878[2]). Bestimmt man nun für $2n$ beliebig gegebene Grössen

$$s_0, s_1, s_2, \dots s_{2n-1}$$

n Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ als die n Wurzeln der Gleichung

$$|xs_{p+q} - s_{p+q+1}| = 0 \qquad (p, q = 0, 1, \dots n-1)$$

und alsdann n Grössen $u_1, u_2, \dots u_n$ durch die n Bedingungen

---

[1]) Gesammelte Werke. Band III S. 503. H.
[2]) Band II S. 41—45 dieser Ausgabe. H.

$$s_h = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} u_\varkappa \xi_\varkappa^h \qquad (h = 0, 1, \dots n-1),$$

so lässt sich leicht zeigen, dass diese Bedingungen auch noch für die folgenden n Werthe $h = n, n+1, \dots 2n-1$ erfüllt sind, so dass also, da die Function $f_1(x)$ den n Relationen

$$u_\varkappa f_1(\xi_\varkappa) f'(\xi_\varkappa) = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

gemäss anzunehmen ist, die obige Bedeutung der Grössen s, nämlich

$$s_h = \sum_{(\xi)} \frac{\xi^h}{f_1(\xi) f'(\xi)},$$

beliebigen $2n$ Grössen s beigelegt werden kann. Um den Nachweis zu führen, dass die Gleichungen

$$s_h = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} u_\varkappa \xi_\varkappa^h$$

für $h = n, n+1, \dots 2n-1$ erfüllt sind, seien $\sigma_{0n}, \sigma_{1n}, \dots \sigma_{nn}$ die $n+1$ Determinanten n^{ter} Ordnung, welche aus dem System von $n(n+1)$ Grössen

$$s_{p+q} \qquad \binom{p = 0, 1, \dots\dots n}{q = 0, 1, \dots n-1}$$

zu bilden sind, und zwar so, dass, wenn man diesem System eine $(n+1)^{\text{te}}$ Verticalreihe $a_0, a_1, \dots a_n$ anfügt, die Determinante gleich

$$a_0\sigma_{0n} + a_1\sigma_{1n} + \dots + a_n\sigma_{nn}$$

wird. Dies vorausgeschickt, ist bekanntlich

$$|xs_{p+q} - s_{p+q+1}| = \sigma_{0n} + \sigma_{1n}x + \dots + \sigma_{nn}x^n$$

und also für jeden beliebigen Werth von h

$$\sigma_{0n} \sum u_\varkappa \xi_\varkappa^h + \sigma_{1n} \sum u_\varkappa \xi_\varkappa^{h+1} + \dots + \sigma_{nn} \sum u_\varkappa \xi_\varkappa^{h+n} = 0,$$

während andrerseits vermöge der Bedeutung der Grössen σ als Determinanten des Systems (s_{p+q}) für $h=0,\ 1,\ \dots n-1$ die Relationen

$$\sigma_{0n}s_h+\sigma_{1n}s_{h+1}+\cdots+\sigma_{nn}s_{h+n}=0$$

bestehen. Nimmt man in beiden Relationen der Reihe nach $h=0,1,2,\dots n-1$, so erschliesst man daraus der Reihe nach die Uebereinstimmung von s_r mit

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} u_\varkappa \xi_\varkappa^r$$

für $r=n,\ n+1,\ \dots\ 2n-1$.

Aus der vorstehenden Entwickelung folgt, dass die aus *beliebigen* Elementen $s_0,\ s_1,\ s_2,\ \dots s_{2n-1}$ zu bildenden Determinanten

$$|x s_{p+q}-s_{p+q+1}| \qquad {\scriptstyle (p,\,q=0,1,\dots t-1;\ t\gtreqless n)}$$

alle jene Eigenschaften besitzen, welche ich in meinem mehrfach citirten Aufsatze vom 14. Febr. 1878 für diejenigen Determinanten hergeleitet habe, die bei der Kettenbruchs-Entwickelung rationaler Brüche auftreten und a. a. O. mit $D_t(x)$ bezeichnet sind. Ich erinnere dabei namentlich an die früher unbemerkt gebliebene Eigenschaft der Determinanten $D_t(x)$, dass alle diejenigen, für die nicht eine der beiden Zahlen $n-t$ oder $n-t-1$ als Grad eines Näherungsnenners der Kettenbruchs-Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ vorkommt, identisch gleich Null sind, während die übrigen mit den „Restfunctionen" $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots$, welche sich bei dieser Entwickelung ergeben, bis auf constante Factoren übereinstimmen; ich erinnere ferner daran, dass in dem sogenannten regulären Falle, d. h. wenn bei der Kettenbruchs-Entwickelung alle Theilnenner vom ersten Grade und also alle Determinanten $D_t(x)$ von Null verschieden sind, zwischen je drei aufeinanderfolgenden Determinanten $D_t(x)$ eine Relation

$$a D_{t+1}(x)-(x+b)D_t(x)+\frac{1}{a}D_{t-1}(x)=0$$

besteht, in welcher a den Coëfficienten der höchsten Potenz von x in $D_t(x)$ dividirt durch denjenigen in $D_{t+1}(x)$ bedeutet. Diese Relation findet sich

schon in *Jacobi's* Abhandlung vom Jahre 1835 und ferner im § 9 der citirten *Joachimsthal'*schen Arbeit für beliebige Grössen s entwickelt, jedoch unter der dabei erforderlichen Voraussetzung, dass die Determinanten D von Null verschieden sind. Von dieser Voraussetzung habe ich in meiner beregten Arbeit von 1878 völlig abstrahirt; aber es ist darin die andere Voraussetzung gemacht, dass die Wurzeln der Gleichung

$$|x s_{p+q}-s_{p+q+1}|=0 \qquad {\scriptstyle (p,\,q=0,1,\dots n-1)}$$

von einander verschieden seien. Doch kann auch diese Voraussetzung fallen gelassen werden, wenn man die Bedeutung der Grössen s so modificirt, wie es durch jene schon oben angedeutete Umgestaltung erfordert wird, welche im Falle gleicher Wurzeln die bezüglichen Summenausdrücke s_h erfahren müssen. Aber der allgemeinere, voraussetzungslose Fall gestattet noch eine einfachere Behandlung, wenn man eine anderweite Bedeutung jener Summenausdrücke s_h in Rücksicht zieht, bei welcher es überhaupt nicht in Frage kommt, ob die Werthe der mit $\xi_1,\ \xi_2,\ \dots\ \xi_n$ bezeichneten Wurzeln der Gleichung

$$|x s_{p+q}-s_{p+q+1}|=0 \qquad {\scriptstyle (p,\,q=0,1,\dots n-1)}$$

unter einander gleich oder ungleich sind. Da nämlich zunächst für den Fall ungleicher Wurzeln s_h oder

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} u_\varkappa \xi_\varkappa^h$$

der Coëfficient von x^{-h-1} in der Entwickelung von

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\frac{u_\varkappa}{x-\xi_\varkappa}$$

nach fallenden Potenzen von x ist, also in der Entwickelung eines rationalen Bruches mit dem Nenner

$$|x s_{p+q}-s_{p+q+1}| \qquad {\scriptstyle (p,\,q=0,1,\dots n-1)},$$

so kann *diese* Bedeutung der Grössen s auch im allgemeinen Falle zu Grunde gelegt werden. Auf diese Bedeutung wird man ganz unmittelbar geführt, wenn man die oben *zuerst* angeführte Methode der Bestimmung der Functionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ anwendet; ich habe desshalb an diese direct anknüpfend die Eigenschaften der Determinanten $D_t(x)$ ohne alle beschränkende Voraussetzungen in einer kleinen Arbeit entwickelt, welche im Monatsberichte der Berliner Akademie erscheinen wird[1]).

[1]) Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen. Band II S. 113 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

ZUR THEORIE DER ELIMINATION EINER VARIABELN AUS ZWEI ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1881. S. 535—600.

ZUR THEORIE DER ELIMINATION EINER VARIABELN AUS ZWEI ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 16. Juni 1881.]

In meinen der Akademie früher gemachten Mittheilungen*) über *Sturm*'sche Reihen, die zu zwei Functionen $f(x)$, $f_1(x)$ gehören, ist den Zielpunkten jener Untersuchungen gemäss die Voraussetzung festgehalten, dass die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ unter einander verschieden seien. Die Entwickelungen selbst bleiben aber im Wesentlichen, auch wenn die Voraussetzung fallen gelassen wird, bestehen; nur muss die Bedeutung der darin vorkommenden, a. a. O. mit s_h bezeichneten Summenausdrücke

$$\sum_{(\xi)} \frac{\xi^h}{f_1(\xi) f'(\xi)},$$

wenn Wurzeln ξ der Gleichung $f(x) = 0$ zusammenfallen, entsprechend modificirt werden, wie es schon von *Jacobi* in seiner Abhandlung im 30. Bande des *Crelle*'schen Journals S. 149[1]) näher dargelegt worden ist. Indessen haben eben diese Grössen s_h noch die anderweite Bedeutung als Coëfficienten einer Reihenentwickelung, da

---

*) Monatsberichte vom Februar 1873[2]) und vom Februar 1878[3]).

[1]) Ueber die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function. *C. G. J. Jacobi's* gesammelte Werke Band III S. 479—511. Vgl. S. 503. H.

[2]) Ueber die verschiedenen *Sturm*'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. Band I S. 303—348 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

[3]) Ueber *Sturm*'sche Functionen. Band II S. 37—70 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

$$\frac{\mathfrak{f}_1(x)}{f(x)} = \sum_{k=0}^{k=\infty} s_k x^{-k-1}$$

wird, wenn man $\mathfrak{f}_1(x)$ als eine ganze Function niedrigsten Grades definirt, welche für alle Werthe von ξ die Bedingung $\mathfrak{f}_1(\xi)f_1(\xi) = 1$ erfüllt. Nimmt man diese Bedeutung der Grössen s_h zum Ausgangspunkt, so hat man den Vortheil, dass jene Voraussetzung ungleicher Wurzeln dabei gar nicht in Frage kommt; doch muss alsdann $\mathfrak{f}_1(x)$ dadurch definirt werden, dass $\mathfrak{f}_1(x)f_1(x) - 1$ durch $f(x)$ theilbar sein, also eine Gleichung

$$\mathfrak{f}_1(x)f_1(x) - \mathfrak{f}(x)f(x) = 1$$

bestehen soll. Für den Fall, dass die zwei gegebenen Functionen von einem und demselben Grade n sind, müssen die beiden Entwickelungen

$$\frac{\mathfrak{f}_1(x)}{f(x)} = \sum_{h=0}^{h=\infty} s_{h-1} x^{-h}, \qquad \frac{\mathfrak{f}(x)}{f_1(x)} = \sum_{h=0}^{h=\infty} s'_{h-1} x^{-h}$$

in den ersten $2n$ Gliedern mit einander übereinstimmen, da ihre Differenz gleich dem reciproken Werthe des Productes $f(x)f_1(x)$ ist. Die Grössen $s_0, s_1, \ldots s_{2n-2}$ sind hiernach aus den Coëfficienten der Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ symmetrisch gebildet, und zwar sind sie, wenn

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

ist, durch die $2n - 2$ Gleichungen

$$\sum_{p=0}^{p=n} a_p s_{p+q} = 0, \quad \sum_{p=0}^{p=n} b_p s_{p+q} = 0 \qquad (q = 0, 1, \ldots n-2)$$

bestimmt und hiernach den in der *Jacobi*'schen Abhandlung im 15. Bande des *Crelle*'schen Journals (S. 101 ff.[1]) mit $A_0, A_1, \ldots A_{2n-2}$ bezeichneten Grössen proportional, welche, wenn

$$A_{ik} = A_{i+k} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots n-1)$$

[1]) *C. G. J. Jacobi,* De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. Gesammelte Werke, Band III S. 295—320. S. S. 301. H.

gesetzt wird, die Adjungirten jener dort zuerst eingeführten Coëfficienten der *Bézout*'schen Function, d. h. der durch die Gleichung

$$f_1(x)f(y) - f(x)f_1(y) = (y - x)\sum_{i,k} \alpha_{ik} x^i y^k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots n-1)$$

definirten Coëfficienten α_{ik} bilden. — An die Stelle der Grössen s_h treten, wenn $f_1(x)$ an Stelle von $\mathfrak{f}_1(x)$ genommen wird, die durch die Reihenentwickelung

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \sum_{h=0}^{h=\infty} c_{h-1} x^{-h}$$

definirten Coëfficienten c als die gegebenen Elemente für die Darstellung der bei der Elimination aus zwei Gleichungen $f(x) = 0$, $f_1(x) = 0$ vorkommenden ganzen Functionen von x, und die Grössen c erweisen sich hierfür, wie schon bei *Jacobi* die analogen Grössen A, weit geeigneter (vgl. Art. III am Schlusse), als die Coëfficienten der *Bézout*'schen Function, wenn sie auch den rein formalen Vorzug symmetrischer Zusammensetzung aus den Coëfficienten der beiden Functionen $f(x)$, $f_1(x)$ entbehren. Dass auch dieser Vorzug der Coëfficienten der *Bézout*'schen Function gewahrt wird, wenn man die mit den Grössen c auf gleicher Stufe stehenden Grössen s benutzt, ist schon oben erwähnt worden; überdies stehen die Grössen c selbst sowohl mit den Coëfficienten der *Bézout*'schen Function als auch mit deren Adjungirten s in sehr einfachem aus den Definitionsgleichungen unmittelbar sich ergebenden Zusammenhange (vgl. Art. XVIII).

Die *Jacobi*'schen Entwickelungen betreffend die Elimination einer Variabeln aus zwei Gleichungen (vgl. die citirte Abhandlung) knüpfen ebenso wie die oben erwähnten Entwickelungen, betreffend die *Sturm*'schen Reihen, an die Aufgabe an, zu zwei ganzen Functionen

$$f(x), \quad f_1(x)$$

von den Graden

$$n \quad , \quad n - n_1 \qquad (n > n_1)$$

zwei Multiplicatoren

$$\Phi(x), \qquad \Psi(x)$$

zu bestimmen, für welche der Grad von

$$\big(f_1(x)\Psi(x) - f(x)\Phi(x)\big)\,\Psi(x)$$

kleiner als n wird, so dass also, wenn, wie in meinen citirten früheren Mittheilungen,

$$f_1(x)\Psi(x) - f(x)\Phi(x) = F(x)$$

gesetzt wird, die Summe der Grade von $F(x)$ und $\Psi(x)$ kleiner als n ist. Diese Aufgabe wird zunächst vollständig und ausnahmslos mit Hülfe der Kettenbruchsentwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ erledigt*). Aber man kann auch die Aufgabe in directer Weise behandeln, indem man die Coëfficienten der gesuchten drei Functionen F, Φ, Ψ den gestellten Bedingungen gemäss bestimmt. Bezeichnet ν den Grad von $\Psi(x)$, so muss der Grad von $\Phi(x)$ gleich $\nu - n_1$ sein, und in $f_1\Psi - f\Phi$ müssen die Coëfficienten derjenigen Potenzen von x, deren Grad

$$n - \nu, \quad n - \nu + 1, \quad \ldots, \quad n - n_1 + \nu$$

ist, gleich Null werden. Man erhält hierdurch $2\nu - n_1 + 1$ lineare homogene Gleichungen für die $2\nu - n_1 + 2$ Coëfficienten von $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$, welche deren Verhältnisse ausnahmslos, d. h. für jedes beliebige System von Functionen $f(x)$, $f_1(x)$ und so vollständig als möglich bestimmen. In gewissen Fällen ist nämlich die Auflösung jener Gleichungen von einer solchen einfachen oder mehrfachen Unbestimmtheit, wie sie der Bestimmung von Grössen durch lineare homogene Gleichungen im Falle des Verschwindens von Unterdeterminanten der Natur der Sache nach anhaftet. In gewissen Fällen ergeben sich ferner für die Coëfficienten der höchsten Potenzen von x in $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ Nullwerthe als nothwendig, und die ursprüngliche Forderung, dass $\Psi(x)$ vom Grade ν sei, kann also nur in *dem* Sinne erfüllt werden, dass der wirkliche Grad nicht grösser als ν wird. Aber die nähere Charakterisirung dieser besonderen Fälle und der dabei vorkommenden Bestimmungs-

*) Siehe Art. I.

weisen für die Functionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ wird am einfachsten durch jene Methode dargelegt, welche sich auf die Kettenbruchsentwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ gründet.

Statt der Coëfficienten von $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ kann man die von $\Phi(x)$ und $F(x)$ oder auch die von $\Psi(x)$ und $F(x)$ als die zunächst zu bestimmenden Unbekannten ansehen. Enthält $f(x)$ den Factor $x - \xi_h$ z. B. m_h mal, so werden die Coëfficienten von $\Psi(x)$ und $F(x)$ durch die Bedingung definirt, dass in der Entwickelung von $f_1(x)\Psi(x) - F(x)$ nach steigenden Potenzen von $x - \xi_h$ die ersten m_h Glieder fehlen sollen. Für den Fall, dass jeder Linearfactor in $f(x)$ nur einfach enthalten ist, sind also die Coëfficienten von $\Psi(x)$ und $F(x)$, deren Gesammtzahl $n+1$ ist, durch die n Bedingungsgleichungen

$$f_1(\xi_h)\Psi(\xi_h) = F(\xi_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt, auf deren Natur nachher etwas näher eingegangen werden soll*).

Man kann sich endlich darauf beschränken, die Coëfficienten einer einzigen der drei Functionen $F(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ als Unbekannte einzuführen**), und dabei gelangt man zur einfachsten Lösung, welche die Aufgabe — abgesehen von jener auf die Kettenbruchsentwickelung gegründeten Methode — überhaupt zulässt. Es ist hierbei gleichgültig, welche der drei Functionen als die zuerst zu bestimmende Function angesehen wird; denn wenn f_2 den Rest der Division von f durch f_1, negativ genommen, und g_1 den Quotienten bedeutet, so dass

$$f - g_1 f_1 + f_2 = 0$$

wird, so folgt aus

$$f_1\Psi - f\Phi = F$$

die Gleichung

$$f_2\Phi - f_1(g_1\Phi - \Psi) = F,$$

*) Siehe Art. II.
**) Siehe Art. III.

in welcher die Function Φ die Rolle von Ψ übernommen hat; wenn ferner $\mathfrak{f}_1(x)$ dieselbe Bedeutung wie oben hat und demgemäss

$$\mathfrak{f}_1(x)f_1(x) = 1 + f(x)\mathfrak{f}(x)$$

wird, so entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{f}_1 F - f(\mathfrak{f}\,\Psi - \mathfrak{f}_1 \Phi) = \Psi$$

aus $f_1 \Psi - f\Phi = F$, in welcher die Function F an die Stelle der Function Ψ und diese an die Stelle jener getreten ist. Hiernach genügt es darzulegen, wie sich die Functionen F, Φ, Ψ bestimmen, wenn die Coëfficienten von $\Psi(x)$ allein als Unbekannte eingeführt werden, und es ist der Hauptzweck der vorliegenden Mittheilung zu zeigen, dass man bei *dieser* Methode der Bestimmung der Coëfficienten von $\Psi(x)$ durch lineare Gleichungen zu einer ebenso vollständigen und ausnahmslosen Lösung jener Aufgabe gelangt wie bei derjenigen, welche sich auf die Kettenbruchsentwickelung stützt. Aber es soll diese letztere Methode, weil nachher daran anzuknüpfen sein wird, hier (im Art. I) nochmals übersichtlich dargelegt und auch (im Art. II) eine kurze Erörterung derjenigen Methode daran angeschlossen werden, bei welcher die Coëfficienten von $\Psi(x)$ und $F(x)$ zugleich als Unbekannte auftreten, und welche mit der *Cauchy*'schen Methode zur Bestimmung von $\frac{F(x)}{\Psi(x)}$ aus den n Werthen, welche dieser Bruch für die n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ annehmen soll, im Wesentlichen identisch ist.

Bevor ich aber dazu übergehe, habe ich noch auf eine neulich (am 7. Mai) von mir in den „Göttinger Nachrichten“ veröffentlichte Notiz[1]) so wie ferner auf die interessante, im 90sten Bande des Journals für Mathematik erschienene Arbeit des Herrn *Frobenius* zu verweisen[2]), deren Inhalt mit dem Gegenstande der vorliegenden Mittheilung in genauer Beziehung steht, wenn auch darin andere Ziele verfolgt und andere Methoden benutzt sind.

[1]) Ueber einreihige Determinanten. Band II S. 103—112 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

[2]) *G. Frobenius*, Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen. *Crelle's* Journal, Band 90, S. 1—17. H.

I.

Bezeichnet man mit $N(g_1, g_2, \ldots g_m)$ den Nenner des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{g_1 - \cfrac{1}{g_2 - \ddots - \cfrac{1}{g_m}}},$$

oder die damit übereinstimmende Determinante

$$\begin{vmatrix} g_1, & -1, & 0, & \ldots & 0, & 0, & 0 \\ -1, & g_2, & -1, & \ldots & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & g_3, & \ldots & 0, & 0, & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & -1, & g_{m-1}, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & 0, & -1, & g_m \end{vmatrix},$$

so besteht unter der Bedingung $p \leqq q \leqq r \leqq s$ die Relation

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} N(g_{p+1}, \ldots g_{q-1}) N(g_{r+1}, \ldots g_{s-1}) - N(g_{p+1}, \ldots g_{r-1}) N(g_{q+1}, \ldots g_{s-1}) \\ + N(g_{p+1}, \ldots g_{s-1}) N(g_{q+1}, \ldots g_{r-1}) = 0\,, \end{aligned}$$

welche mit der in meiner Mittheilung vom 14. Februar 1878 im Monatsbericht S. 96 mit (C) bezeichneten Gleichung identisch ist[1]). Setzt man hierin $p = 0$, $q = h$, $r = k + 1$, $s = k + 2$, so kommt, weil dann

$$N(g_{r+1}, \ldots g_{s-1}) = 1$$

zu nehmen ist,

[1]) Band II S. 41 dieser Ausgabe. H.

(A°) $N(g_1, \dots g_{h-1}) = N(g_1, \dots g_k) N(g_{h+1}, \dots g_{k+1}) - N(g_1, \dots g_{k+1}) N(g_{h+1}, \dots g_k)$

und für $h = k$:

$$(A_0) \qquad N(g_1, \dots g_{k-1}) = g_{k+1} N(g_1, \dots g_k) - N(g_1, \dots g_{k+1}),$$

aber für $h = 1$:

$$(A') \qquad 1 = N(g_1, \dots g_k) N(g_2, \dots g_{k+1}) - N(g_1, \dots g_{k+1}) N(g_2, \dots g_k).$$

Dabei ist

$$N(g_1, g_2, \dots g_k) = N(g_k, g_{k-1}, \dots g_1),$$

und der Werth des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{g_1 - \cfrac{1}{g_2 - \ddots - \cfrac{1}{g_k}}}$$

ist

$$\frac{N(g_2, \dots g_k)}{N(g_1, \dots g_k)}$$

oder mit Hülfe der Relation (A')

$$(A'') \qquad \sum_{h=1}^{h=k} \frac{1}{N(g_1, \dots g_{h-1}) N(g_1, \dots g_h)}.$$

Führt nun die Kettenbruchsentwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ zu der Reihe von Gleichungen

$$f - g_1 f_1 + f_2 = 0, \quad f_1 - g_2 f_2 + f_3 = 0, \quad \dots \; f_{r-1} - g_r f_r = 0,$$

und bezeichnet man wie in meinen früheren Mittheilungen mit φ_k die Zähler und mit ψ_k die Nenner der Näherungsbrüche, so dass

$$\varphi_k = N(g_2, \dots g_k), \quad \psi_k = N(g_1, \dots g_k), \quad f_k = f_r \cdot N(g_r, g_{r-1}, \dots g_{k+1})$$

wird, so ist wegen (A°)

$$(B^{\circ}) \qquad f_1 \psi_k - f \varphi_k = f_{k+1}$$

und wegen (A')

$$(B') \qquad \varphi_{k+1} \psi_k - \psi_{k+1} \varphi_k = 1.$$

Wird der Grad von ψ_k mit n_k bezeichnet, so sind die Grade von

$$f_k, \qquad g_k, \qquad \varphi_k, \quad \psi_k$$

beziehungsweise

$$n - n_k, \; n_k - n_{k-1}, \; n_k - n_1, \; n_k.$$

Soll nun

$$(C) \qquad f_1(x) \Psi(x) - f(x) \Phi(x) = F(x)$$

und dabei

$$F(x), \qquad \Phi(x), \qquad \Psi(x)$$

beziehungsweise vom Grade

$$\varrho, \qquad \nu - n_1, \qquad \nu$$

mit der Bedingung $\nu + \varrho < n$ sein, so zeigt die durch Elimination von f_1 aus (B°) und (C) entstehende Gleichung

$$(\varphi_k \Psi - \psi_k \Phi) f = \psi_k F - f_{k+1} \Psi,$$

dass

$$\varphi_k \Psi - \psi_k \Phi = 0$$

sein muss, sobald

$$n_k \leq \nu < n_{k+1}$$

ist, da alsdann sowohl der Grad von $\psi_k F$ als der von $f_{k+1} \Psi$ kleiner als der Grad von f wird. Es giebt also keine andern Functionen $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ als solche, deren Quotient gleich einem der Näherungsbrüche der Kettenbruchsentwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ ist, und alle Systeme von Functionen $F(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, welche die Gleichung (C) befriedigen, werden daher durch die Gleichungen

$$(C') \qquad \Phi(x) = \theta(x)\varphi_k(x), \qquad \Psi(x) = \theta(x)\psi_k(x), \qquad F(x) = \theta(x)f_{k+1}(x)$$

gegeben, in denen $\theta(x)$ eine beliebige ganze Function von einem Grade bedeutet, der kleiner als $\frac{1}{2}(n_{k+1} - n_k)$, d. h. kleiner als die Hälfte des Grades des betreffenden Partialnenners g_{k+1} ist. Diese Gradbestimmung von $\theta(x)$ erfolgt nämlich in der Weise, dass, wenn τ den Grad von $\theta(x)$ bezeichnet, aus den Gleichungen (C′) die Relationen

$$\nu = \tau + n_k, \quad \varrho = \tau + n - n_{k+1}, \qquad \text{also} \qquad \varrho - \nu = n - n_k - n_{k+1}$$

und wegen $\varrho + \nu < n$ die Ungleichheitsbedingungen

$$\nu < \tfrac{1}{2}(n_k + n_{k+1}), \qquad \tau < \tfrac{1}{2}(n_{k+1} - n_k)$$

hervorgehen. Der Grad von $\Psi(x)$ bleibt hiernach immer unter dem mittleren Werthe der Grade von ψ_k und ψ_{k+1}, und ebenso bleibt der Grad von $F(x)$ unter dem mittleren Werthe der Grade von f_k und f_{k+1}.

Soll eine ganze Function von gegebenem Grade ν

$$\sum_p \beta_p x^p \qquad (p=0,1,\ldots\nu),$$

für $\Psi(x)$ gesetzt, die Gleichung (C) befriedigen, so muss sie nach vorstehenden Erörterungen, wenn ν zwischen $n_k - 1$ und n_{k+1} liegt, durch $\psi_k(x)$ theilbar sein, und der Quotient $\theta(x)$ ist an die Bedingung gebunden, dass der Grad des Productes $\theta(x)f_{k+1}(x)$ kleiner als $n - \nu$ sei. Die Function $\theta(x)$ unterliegt im Uebrigen keiner Beschränkung; wird deren Grad, wie oben, mit τ bezeichnet, so muss, da

$$\sum_p \beta_p x^p = \theta(x)\psi_k(x) \qquad (p=0,1,\ldots\nu)$$

ist, $\tau + n_k < \nu + 1$ und gleichzeitig $\tau + n - n_{k+1} < n - \nu$ sein, d. h. die Zahl τ ist nur den Bedingungen

$$\tau < \nu - n_k + 1, \qquad \tau < n_{k+1} - \nu$$

unterworfen.

(C̄) Die allgemeinste an Stelle von $\Psi(x)$ der Gleichung (C) genügende Function ν^{ten} Grades ist hiernach eine beliebige durch $\psi_k(x)$ theilbare ganze Function, für welche der Grad des Quotienten kleiner als jeder der beiden Abstände der Zahl ν von den beiden Grenzen $n_k - 1$ und n_{k+1} ist, zwischen denen sie liegt.

Für die Werthe $\nu = n_k$, und zwar für diese allein, wird $\Psi(x)$, abgesehen von einem constanten Factor, gleich $\psi_k(x)$ selbst, also gleich einer bis auf einen constanten Factor völlig bestimmten Function, welche im eigentlichen Sinne vom Grade n_k, d. h. in welcher der Coëfficient der n_k^{ten} Potenz von x von Null verschieden ist, und es kann diese Art der Charakterisirung der Zahlen n_k an Stelle der bisher benutzten, auf der Kettenbruchsentwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ basirenden Definition zum Ausgangspunkte genommen werden. Bei den Veränderungen, welche die der Gleichung (C) genügenden Functionen $\Psi(x)$ erfahren, während die Zahl ν nach einander die Werthe 1, 2, 3, ... durchläuft, markiren die Zahlen n_k die Anfangspunkte der wesentlich verschiedenen Intervalle. Für das ganze Intervall von $\nu = n_k$ bis $\nu = n_{k+1} - 1$ ist $\psi_k(x)$ der grösste gemeinsame Theiler aller zugehörigen Functionen $\Psi(x)$, also, so zu sagen, eine Invariante des Intervalles; der andere Factor ist eine beliebige Function eines bestimmten Grades, der für $\nu = n_k$ gleich Null ist, mit wachsendem ν bis zur Mitte des Intervalls gleichmässig steigt, alsdann aber gleichmässig abnimmt und also am Ende des Intervalls bei $\nu = n_{k+1} - 1$ den Werth Null wiedererlangt. Der höchste wirkliche Grad der Function $\Psi(x)$ ist demnach in der ersten Hälfte eines jeden Intervalls gleich dem geforderten, der mit ν bezeichnet ist, in der zweiten Hälfte dagegen gleich der Zahl $n_k + n_{k+1} - 1 - \nu$, so dass das arithmetische Mittel des höchsten wirklichen und des geforderten Grades von $\Psi(x)$ in der zweiten Hälfte des Intervalls constant gleich der Mitte des Intervalls bleibt.

II.

Die Bestimmung von Functionen $F(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, welche die Gleichung (C) befriedigen, findet eine Anwendung bei Lösung der *Cauchy*'schen Aufgabe, einen Bruch $\frac{F(x)}{\Psi(x)}$ aus den n Werthen $u_1, u_2, \ldots u_n$ zu bestimmen, welche derselbe für die n Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ der Gleichung $f(x) = 0$ annehmen soll. Denn, wenn zuerst eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f_1(x)$ mittels der *Lagrange*'schen Interpolationsformel so bestimmt wird, dass

$$u_h = f_1(\xi_h) \qquad (h=1, 2, \ldots n)$$

wird, so handelt es sich nur darum, $F(x)$ und $\Psi(x)$ der Bedingung

$$f_1(\xi_h)\,\Psi(\xi_h) = F(\xi_h) \qquad (h=1, 2, \ldots n)$$

gemäss, also derart zu bestimmen, dass die Gleichung (C) erfüllt wird. Die vollständige Lösung der bezeichneten *Cauchy*'schen Aufgabe ist demnach in den Gleichungen (C') enthalten, d. h. es giebt keine andern Brüche als

$$\frac{f_{k+1}(x)}{\psi_k(x)},$$

welche die Eigenschaft haben, dass ihre Werthe für die n Wurzeln von $f(x) = 0$ mit denen von $f_1(x)$ übereinstimmen und dass die Summe der Grade von Zähler und Nenner kleiner als n sei. Hierbei zeigt sich eine bisher wohl noch nicht bemerkte Einschränkung der Lösbarkeit der *Cauchy*'schen Aufgabe. Diese verlangt nämlich die Bestimmung eines Bruches $\frac{F(x)}{\Psi(x)}$, für welchen

$$\frac{F(\xi_h)}{\Psi(\xi_h)} = u_h \qquad (h=1, 2, \ldots n)$$

wird, während der Grad des Zählers oder des Nenners gegeben und die Bedingung zu erfüllen ist, dass die Summe der beiden Grade kleiner als n sei. Wenn nun die Zahl ϱ als Grad des Zählers gegeben ist und der Ungleichheitsbedingung

$$n - n_{k+1} \leqq \varrho < n - n_k$$

genügt, oder wenn die Zahl ν als Grad des Nenners gegeben ist und der Ungleichheitsbedingung

$$n_k \leqq \nu < n_{k+1}$$

genügt, so kann nur

$$\frac{F(x)}{\Psi(x)} = \frac{f_{k+1}(x)}{\psi_k(x)}$$

sein. Aber dieser Bruch befriedigt nicht stets die Forderung der *Cauchy*schen Aufgabe. Freilich ist die Gleichung

$$f_{k+1}(\xi_h) = u_h \psi_k(\xi_h) \qquad (h=1, 2, \ldots n)$$

unter allen Umständen erfüllt; der Quotient

$$\frac{f_{k+1}(x)}{\psi_k(x)}$$

aber nimmt, wenn Zähler und Nenner einen gemeinsamen Theiler haben, nicht für jeden Werth $x = \xi_h$ den bezüglichen Werth u_h an. Dieser gemeinsame Theiler muss nämlich gemäss der Gleichung (B') nothwendig auch ein Theiler von $f(x)$ sein, und wenn derselbe mit $\chi(x)$ bezeichnet wird, so kann für diejenigen Werthe $x = \xi$, wofür $\chi(x) = 0$ wird, der Werth des Bruches $\frac{f_{k+1}(x)}{\psi_k(x)}$ nicht gleich dem von $f_1(x)$ werden, da sonst wegen der Gleichung (B') der Quotient

$$\frac{f(x) \cdot \varphi_k(x)}{\chi(x)}$$

für jene Werthe $x = \xi$ verschwinden müsste. Dies ist unmöglich, weil einerseits die n Grössen ξ, für welche $f(\xi) = 0$ wird, gemäss der *Cauchy*schen Aufgabe unter einander verschieden anzunehmen sind und also $\frac{f(x)}{\chi(x)}$ keinen Theiler $x - \xi$ haben kann, und weil andrerseits $\varphi_k(x)$ mit $\psi_k(x)$ keinen Theiler gemein haben, also keinen Factor $x - \xi$ von $\chi(x)$ enthalten kann. Es giebt demnach keine anderen rationalen Functionen von x, welche für $x = \xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_n$ die Werthe $u_1, u_2, \ldots u_n$ annehmen, als diejenigen Functionen

$$\frac{f_{k+1}(x)}{\psi_k(x)},$$

welche reducirte Brüche sind, und sobald der Grad des Nenners zwischen zwei Zahlen

$$n_k - 1 \quad \text{und} \quad n_{k+1}$$

liegen soll, für welche der Näherungsnenner $\psi_k(x)$ einen gemeinsamen Theiler mit $f(x)$ hat, ist die *Cauchy*'sche Aufgabe unlösbar.

Um dies an einem Beispiel zu erläutern, sei $n = 4$ und

$$f(x) = (x - \xi)(x - 1)(x - 2)(x - 3), \qquad f_1(x) = x^2 - 6x + 11$$
$$\nu = n_1 = 2,$$

so dass ein Bruch

$$\frac{a + a_1 x}{b + b_1 x + b_2 x^2}$$

bestimmt werden soll, der für $x = \xi, 1, 2, 3$ beziehentlich die Werthe $\xi^2 - 6\xi + 11,\ 6,\ 3,\ 2$ annehmen soll. Sieht man zunächst von der auf $x = \xi$ bezüglichen Forderung ab, so erhält man die Bestimmungen

$$a = 6b_1, \qquad a_1 = 6b_2, \qquad b = 0,$$

aus denen sich $\frac{6}{x}$ als der gesuchte Bruch ergiebt, der aber für $x = \xi$ den vorgeschriebenen Werth nicht annimmt, wenn ξ irgend einen von 1, 2 und 3 verschiedenen Werth hat.

Um die Functionen $F(x)$ und $\Psi(x)$ in der Gleichung (C) direct durch die n Bedingungsgleichungen

$$f_1(\xi_h)\,\Psi(\xi_h) = F(\xi_h) \qquad (h=1,2,\ldots n)$$

zu bestimmen, hat man, wenn wie oben $u_h = f_1(\xi_h)$ und überdies an Stelle von x die unbestimmte Grösse ξ_0 gesetzt wird, die Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\left| 1,\ \xi_h,\ \xi_h^2, \ldots \xi_h^\varrho,\ u_h,\ u_h\xi_h,\ u_h\xi_h^2, \ldots u_h\xi_h^\nu \right| \qquad (h=0,1,\ldots n;\ \nu+\varrho=n-1)$$

gleich

$$F(\xi_0) - u_0\Psi(\xi_0)$$

zu nehmen, da diese Determinante für $\xi_0 = \xi_h$, $u_0 = u_h$ verschwindet. Bei dieser Bestimmungsweise von $F(x)$ und $\Psi(x)$, welche zu der *Cauchy*'schen Formel (Analyse algébrique p. 528) führt, ist aber vorausgesetzt, dass jene Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht identisch gleich Null wird, dass also nicht sämmtliche nach Weglassung der Reihe für $h = 0$ zu bildenden Determinanten n^{ter} Ordnung verschwinden. Ist dies der Fall und trifft also jene Voraussetzung nicht zu, so sind an Stelle jener Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung solche von niedrigerer Ordnung zu nehmen; z. B. ist jene Determinante der Ordnung

$$n - n_{k+1} + n_k + 2,$$

welche entsteht, wenn oben

$$\varrho = n - n_{k+1}, \qquad \nu = n_k$$

und

$$h = 0, 1, \ldots n - n_{k+1} + n_k + 1$$

genommen wird, abgesehen von einem von ξ_0 unabhängigen Factor gleich

$$f_{k+1}(\xi_0) - u_0\psi_k(\xi_0)$$

und ergiebt demnach eine Bestimmung des Verhältnisses der beiden Functionen $f_{k+1}(x)$ und $\psi_k(x)$.

III.

Um nunmehr auf die Methode der Lösung der Gleichung (C) näher einzugehen, auf welche am Schlusse der Einleitung hingewiesen worden ist, und bei welcher die Coëfficienten der Function $\Psi(x)$ allein als Unbekannte eingeführt werden, sei zuvörderst bemerkt, dass sich hierbei die Verhältnisse der $\nu+1$ Coëfficienten der ganzen Function ν^{ten} Grades $\Psi(x)$ durch die Bedingung bestimmen, dass der bei der Division von $f_1(x)\Psi(x)$ durch $f(x)$ sich ergebende Rest $F(x)$ höchstens vom Grade $n-\nu-1$ sein soll. Werden nun zunächst die n Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ der Gleichung $f(x)=0$ als von einander verschieden vorausgesetzt, so wird jener Rest der Division $F(x)$ durch den Ausdruck

$$\sum_h \Psi(\xi_h)\frac{f_1(\xi_h)}{f'(\xi_h)}\,\frac{f(x)}{x-\xi_h} \qquad (h=1,2,\ldots n)$$

dargestellt, und bei Einführung von n ganzen Functionen $f^{(g)}(x)$, welche durch die Gleichung

$$\frac{f(x)}{x-\xi}=\sum_g \xi^g f^{(g)}(x) \qquad (g=0,1,\ldots n-1)$$

erklärt sind, wird also:

$$F(x)=\sum_g\sum_h \Psi(\xi_h)\frac{f_1(\xi_h)}{f'(\xi_h)}\,\xi_h^g f^{(g)}(x) \qquad \left(\begin{smallmatrix} g=0,1,\ \ldots n-1\\ h=\ \ 1,2,\ldots\ldots n\end{smallmatrix}\right).$$

Da die Functionen $f^{(g)}(x)$ vom Grade $n-g-1$, also sämmtlich von einander linear unabhängig sind, so werden die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $F(x)$ höchstens vom Grade $n-\nu-1$ sei, durch die Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{h=n}\xi_h^t\,\Psi(\xi_h)\frac{f_1(\xi_h)}{f'(\xi_h)}=0 \qquad (t=0,1,\ldots \nu-1)$$

ausgedrückt. Diesen Gleichungen wird genügt, wenn

$$\Psi(x)=\left|\, c_p,\ c_{p+1},\ \ldots c_{p+\nu-1},\ x^p \,\right| \qquad (p=0,1,\ldots \nu)$$

und in dieser Determinante

$$c_p=\sum_h \xi_h^p\frac{f_1(\xi_h)}{f'(\xi_h)} \qquad (h=1,2,\ldots n)$$

gesetzt wird. Alsdann erhält man für $F(x)$ den Determinanten-Ausdruck

$$(\mathrm{C}_\nu) \qquad F(x)=\left|\, c_p,\ c_{p+1},\ \ldots c_{p+\nu-1},\ \sum_g c_{p+g}f^{(g)}(x)\,\right| \qquad \left(\begin{smallmatrix} p=0,1,\ldots \nu\\ g=0,1,\ldots n-1\end{smallmatrix}\right),$$

und da auf Grund der Definition der Functionen $f^{(g)}(x)$

$$f(x)=\sum_g (x\xi^g-\xi^{g+1})f^{(g)}(x) \qquad (g=0,1,\ldots n-1)$$

also

$$c_pf(x)=\sum_g (xc_{p+g}-c_{p+g+1})f^{(g)}(x) \qquad (g=0,1,\ldots n-1)$$

ist, so kommt, wenn in dem Determinanten-Ausdrucke jede der ersten ν Horizontalreihen mit x multiplicirt und von der darunter stehenden subtrahirt wird,

$$F(x)=\begin{vmatrix} f_1(x)\,, & c_0\,, & \ldots & c_{\nu-1}\\ c_0f(x)\,, & xc_0-c_1\,, & \ldots & xc_{\nu-1}-c_\nu\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{\nu-1}f(x), & xc_{\nu-1}-c_\nu, & \ldots & xc_{2\nu-2}-c_{2\nu-1}\end{vmatrix},$$

und in derselben Weise geht der obige Determinanten-Ausdruck von $\Psi(x)$ in

$$\left|\, xc_{p+q}-c_{p+q+1} \,\right| \qquad (p,q=0,1,\ldots \nu-1)$$

über. Hiernach sind für $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ Determinanten-Ausdrücke zu setzen, welche durch die Gleichung

$$(\mathrm{C}^\circ) \qquad -\Phi(x) + U\Psi(x) = \begin{vmatrix} U, & c_0, & \dots & c_{\nu-1} \\ c_0, & xc_0 - c_1, & \dots & xc_{\nu-1} - c_\nu \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\nu-1}, & xc_{\nu-1} - c_\nu, & \dots & xc_{2\nu-2} - c_{2\nu-1} \end{vmatrix}$$

definirt werden, da alsdann in der That aus dem für $F(x)$ erlangten Determinanten-Ausdrucke

$$(\mathrm{C}) \qquad F(x) = f_1(x)\Psi(x) - f(x)\Phi(x)$$

folgt. Die Grössen c_p, aus welchen die Determinanten-Ausdrücke für $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ gebildet sind, und welche oben durch die Gleichung

$$c_p = \sum_h \xi_h^p \frac{f_1(\xi_h)}{f'(\xi_h)} \qquad (h=1,2,\dots n)$$

definirt wurden, können auch als Coëfficienten der Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ nach fallenden Potenzen von x aufgefasst werden, da

$$(\mathrm{C}'') \qquad \frac{f_1(x)}{f(x)} = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^{-k-1}$$

ist. Wird diese Bedeutung der Grössen c_k zu Grunde gelegt, so kann von der oben gemachten Voraussetzung, dass die n Wurzeln von $f(x) = 0$ ungleich seien, abgesehen werden; denn die unter dieser Voraussetzung hergeleitete Gleichung (C) muss, wie aus Continuitäts-Betrachtungen hervorgeht, noch bestehen bleiben, wenn Wurzeln ξ zusammenfallen. Aber dies zeigt sich auch ganz direct; denn die Umwandlung jenes Determinanten-Ausdrucks, durch den $F(x)$ in (C,) dargestellt ist, in den andern, welcher auf Grund der Gleichung (C°) durch

$$f_1(x)\Psi(x) - f(x)\Phi(x)$$

repräsentirt wird, erfolgt einzig und allein mittels der Relationen

$$(\mathrm{C}''') \qquad f_1(x) = \sum_g c_g f^{(g)}(x), \qquad c_p f(x) = \sum_g (xc_{p+g} - c_{p+g+1}) f^{(g)}(x), \qquad (g=0,1,\dots n-1),$$

und diese bestehen in der That, wenn den Functionen $f^{(g)}(x)$ und den Grössen c_p die obige Bedeutung beigelegt wird, und sie enthalten sogar die vollständige Definition der Grössen c_p in Uebereinstimmung mit derjenigen, welche durch (C″) gegeben ist. Wenn nämlich

$$f(x) = \sum_{h=0}^{h=n} b_h x^h, \qquad \text{also} \qquad f^{(g)}(x) = \sum_{r=g+1}^{r=n} b_r x^{r-g-1}$$

gesetzt und somit

$$f(x) - xf^{(0)}(x) = b_0, \quad f^{(0)}(x) - xf^{(1)}(x) = b_1, \quad \dots,$$
$$f^{(n-2)}(x) - xf^{(n-1)}(x) = b_{n-1}, \quad f^{(n-1)}(x) = b_n$$

wird, so kommt zuvörderst

$$\sum_{g=0}^{g=n-1} c_g f^{(g)}(x) = \sum_{g=0}^{g=n-1} \sum_{r=g+1}^{r=n} b_r c_g x^{r-g-1},$$

und der Ausdruck rechts ist gleich demjenigen Theile des Products

$$f(x) \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^{-k-1},$$

welcher die sämmtlichen Glieder mit nicht negativen Potenzen von x umfasst, also gleich $f_1(x)$. Ferner ist

$$c_p f(x) - \sum_{g=0}^{g=n-1} (xc_{p+g} - c_{p+g+1}) f^{(g)}(x) = \sum_{g=0}^{g=n} b_g c_{p+g} \qquad (p=0,1,2,\dots),$$

und der Ausdruck rechts ist der Coëfficient von x^{-p-1} in der Entwickelung des Products

$$f(x) \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^{-k-1},$$

also gleich Null. Die Gleichung (C) wird also in der That befriedigt, wenn

$$\Phi(x) = -\begin{vmatrix} 0\,, & c_0\,, & \dots & c_{\nu-1} \\ c_0\,, & xc_0 - c_1\,, & \dots & xc_{\nu-1} - c_\nu \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\nu-1}\,, & xc_{\nu-1} - c_\nu\,, & \dots & xc_{2\nu-2} - c_{2\nu-1} \end{vmatrix}$$

$$\Psi(x) = \left| xc_{p+q} - c_{p+q+1} \right| \qquad (p, q = 0, 1, \dots \nu-1)$$

$$F(x) = \left| c_p,\ c_{p+1},\ \dots c_{p+\nu-1},\ \sum_g c_{p+g} f^{(g)}(x) \right| \qquad \binom{p=0,1,\dots\nu}{g=0,1,\dots n-1}$$

gesetzt wird, und da in diesem Determinanten-Ausdruck von $F(x)$ offenbar aus der Summe

$$\sum_g c_{p+g} f^{(g)}(x)$$

der auf $g = 0, 1, \dots \nu - 1$ bezügliche Theil wegzulassen und die Summation nur auf die Werthe $g = \nu, \nu + 1, \dots n - 1$ auszudehnen ist, so erhellt, dass $F(x)$ höchstens vom Grade $n - \nu - 1$ sein kann.

Aber diese Lösung der Aufgabe, die Functionen F, Φ, Ψ zu bestimmen, ist keine vollständige; denn die hier für F, Φ, Ψ erlangten Ausdrücke sind nur als den Bedingungen der Aufgabe genügende, nicht als nothwendige aufgezeigt worden. Es soll daher jetzt die hier entwickelte Methode vervollständigt und die allgemeinste Bestimmung von Functionen $F(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, die zu $f(x)$ und $f_1(x)$ in der Gleichung (C) gehören, hergeleitet werden, indem die Grössen c_k als die gegebenen Grössen betrachtet werden. Dieselben bestimmen sich durch die Differentialquotienten von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$; auch ergeben sich die ersten n Grössen $c_0, c_1, \dots c_{n-1}$ als die Coëfficienten der als homogene lineare Function von

$$f^{(0)}(x), \quad f^{(1)}(x), \quad \dots f^{(n-1)}(x)$$

dargestellten Function $f_1(x)$, während alsdann die übrigen aus den Gleichungen

$$\sum_{g=0}^{g=n} b_g c_{p+g} = 0 \qquad (p=0,1,2,\dots)$$

resultiren. Dass für ein Problem, bei dessen Lösung sich die gesuchten Functionen $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ durch die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ bestimmen (vgl. Art. I), die Einführung der bei der Entwickelung

$$\text{(C'')} \qquad \frac{f_1(x)}{f(x)} = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^{-k-1}$$

auftretenden Coëfficienten als gegebener Grössen vollkommen naturgemäss ist, erhellt unmittelbar daraus, dass die ersten $2n_k$ Entwickelungscoëfficienten des Näherungsbruches $\frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}$ mit denen von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ übereinstimmen. Nach Art. I (A'') ist nämlich

$$\frac{\varphi_k}{\psi_k} = \frac{1}{\psi_1} + \frac{1}{\psi_1\psi_2} + \frac{1}{\psi_2\psi_3} + \dots + \frac{1}{\psi_{k-1}\psi_k},$$

und der Ausdruck rechts unterscheidet sich von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ für unendlich grosse Werthe von x nur um Glieder der Ordnung wie $\frac{1}{\psi_k\psi_{k+1}}$ d. h. um Glieder der Ordnung $n_k + n_{k+1}$, und $n_k + n_{k+1}$ ist grösser als $2n_k$. Es sind hiernach die ersten $2n$ Coëfficienten der Entwickelung eines rationalen Bruches nach fallenden Potenzen von x, wenn derselbe in der reducirten Form einen Nenner n^{ten} Grades und einen Zähler höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades hat, Invarianten für die Entwickelung aller derjenigen Functionen von x, deren Näherungswerth jener Bruch ist.

Bei der nunmehr darzulegenden allgemeinen Methode der Lösung der Gleichung (C) sind die $2n$ ersten Entwickelungscoëfficienten $c_0, c_1, \dots c_{2n-1}$, deren man nur bedarf, die gegebenen und die Verhältnisse der $\nu + 1$ Coëfficienten von $\Psi(x)$ die zu bestimmenden Grössen. Setzt man demgemäss

$$\Psi(x) = \sum_p \beta_p x^p \qquad (p=0,1,\dots\nu),$$

so sind die Coëfficienten β einzig und allein an die Bedingung gebunden, dass — wie schon im Anfange dieses Abschnittes erwähnt ist — der Rest der Division von $f_1(x)\Psi(x)$ durch $f(x)$ höchstens vom Grade $n-\nu-1$ sein soll, d. h. also dass bei der Entwickelung von $\frac{f_1(x)\Psi(x)}{f(x)}$ nach fallenden Potenzen von x die Coëfficienten von $x^{-1}, x^{-2}, \dots x^{-\nu}$ gleich Null werden sollen. Hieraus resultiren die ν Bedingungsgleichungen

$$\text{(D)} \qquad \sum_p \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad {\scriptstyle (p=0,1,\dots\nu;\; q=0,1,\dots\nu-1)},$$

welche nothwendig und hinreichend sind, damit $\sum \beta_p x^p$ eine der Aufgabe entsprechende Function $\Psi(x)$ darstelle.

Die Grössen β werden durch die Gleichung (D) als die Coëfficienten der allgemeinsten zwischen je $\nu+1$ aufeinanderfolgenden Grössen c bestehenden linearen Relation definirt oder also als die Coëfficienten der allgemeinsten für die 2ν Grössen

$$c_0,\; c_1,\; \dots c_{2\nu-1}$$

aufzustellenden „*linearen Recursionsformel*“, welche von Anfang an und mindestens νmal hintereinander Geltung hat, und deren „*Ordnung*“ daher höchstens gleich ν ist. Unter der Ordnung einer linearen Recursionsformel für eine Reihe von Grössen $c_0, c_1, c_2, \dots$ soll nämlich die Zahl μ verstanden werden, wenn jedes Glied der Reihe vom $(\mu+1)^{\text{ten}}$ ab durch die μ vorhergehenden Glieder mittels jener Formel linear ausdrückbar ist. Die Gleichung (D) stellt hiernach eine lineare Recursionsformel μ^{ter} Ordnung für die $\mu+\nu$ Grössen

$$c_0,\; c_1,\; \dots c_{\mu+\nu-1}$$

dar, wenn β_μ der letzte der von Null verschiedenen Coëfficienten β ist. Dabei können aber die *ersten* Coëfficienten $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_{\varkappa-1}$ gleich Null sein, so dass die Gleichung (D) sich auf die Gleichung

$$\sum_p \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad {\scriptstyle (p=\varkappa,\varkappa+1,\dots\mu;\; q=0,1,\dots\nu-1)}$$

reduciren kann, welche zwar eine lineare Recursionsformel $(\mu-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung für die $\mu+\nu-\varkappa$ Grössen

$$c_\varkappa,\; c_{\varkappa+1},\; \dots c_{\mu+\nu-1}$$

darstellt, aber doch, als Recursionsformel für die sämmtlichen $\mu+\nu$ Grössen

$$c_0,\; c_1,\; \dots c_{\mu+\nu-1}$$

aufgefasst, eine solche von der Ordnung μ ist, in welcher die ersten $\varkappa$ Coëfficienten verschwinden.

Die Aufgabe der Bestimmung der allgemeinsten, der Gleichung (C) genügenden Function ν^{ten} Grades $\Psi(x)$ kommt hiernach mit der Aufgabe der Aufstellung der allgemeinsten linearen Recursionsformel für die ersten 2ν Grössen c vollkommen überein, und es muss sich daher bei der Auflösung dieser letzteren Aufgabe oder bei der des Gleichungssystems (D) direct eben dasselbe Resultat ergeben, welches am Schlusse des Art. I (C′) aus der Kettenbruchsentwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ hergeleitet worden ist. Dies soll in der That durch eine eingehende Discussion des Gleichungssystems (D) gezeigt werden; doch bedarf es hierzu einiger vorbereitender Determinantensätze, welche der Uebersichtlichkeit wegen in einigen besonderen Abschnitten vorweg entwickelt werden sollen.

IV.

Sind die $n(n+1)$ Grössen

$$a_{ih} \qquad {\scriptstyle (h=0,1,\dots n;\; i=1,2,\dots n)}$$

so beschaffen, dass nur *eine* der daraus zu bildenden Determinanten n^{ter} Ordnung, nämlich

$$|a_{ik}| \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,\dots n)}$$

von Null verschieden ist, so müssen die n Elemente der ersten Verticalreihe, nämlich

$$a_{10},\ a_{20},\ \dots a_{n0}$$

sämmtlich gleich Null sein. Die gemachte Voraussetzung kann bei Einführung von $n+1$ unbestimmten Grössen

$$a_{00},\ a_{01},\ \dots a_{0n}$$

dahin formulirt werden, dass

$$|a_{gh}| = a_{00}\,|a_{ik}| \gtrless 0 \qquad \binom{g,\,h=0,1,2,\dots n}{i,\,k=\ \ 1,2,\dots n},$$

also bei der Entwickelung der Determinante $|a_{gh}|$ nach den Elementen a_{0h} der Coëfficient des Elements a_{00} von Null verschieden, dagegen jeder der folgenden n Coëfficienten gleich Null sein soll. Diese n Coëfficienten sind n lineare homogene Functionen von

$$a_{10},\ a_{20},\ \dots a_{n0},$$

und da deren Coëfficienten die n^2 Adjungirten der Grössen

$$a_{ik} \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

sind, also die Determinante der Voraussetzung nach von Null verschieden ist, so müssen die n Grössen $a_{10},\ a_{20},\ \dots a_{n0}$ selbst gleich Null sein.

Hieraus folgt unmittelbar der allgemeinere Satz, dass, wenn die Determinante

$$|a_{gh}| \qquad (g,h=0,1,2,\dots n)$$

eine lineare Function der ersten $m+1$ unbestimmten Grössen

$$a_{00},\ a_{01},\ \dots a_{0m}$$

allein, und darin der Coëfficient von a_{0m} nicht gleich Null ist, nothwendig die sämmtlichen aus dem System

$$a_{ih} \qquad (i=1,2,\dots n;\ h=0,1,\dots m)$$

zu bildenden Determinanten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden müssen. Der Voraussetzung nach soll nämlich

$$|a_{gh}| = b_0 a_{00} + b_1 a_{01} + \dots + b_m a_{0m} \qquad (g,h=0,1,\dots n)$$

und $b_m \gtrless 0$ sein; wenn daher in der Determinante $|a_{gh}|$ an Stelle von a_{gm} die lineare Verbindung

$$\frac{1}{b_m}(b_0 a_{g0} + b_1 a_{g1} + \dots + b_m a_{gm})$$

gesetzt wird, so folgt aus den obigen Ausführungen, dass diese für $g=1,2,\dots n$ gleich Null werden und also in der That jede aus den Elementen

$$a_{ih} \qquad (i=1,2,\dots n;\ h=0,1,\dots m)$$

zu bildende Determinante $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden muss.

V.

Bilden die Grössen a_{ik} für $i,k=1,2,\dots n$ ein System von n^2 Grössen, für welches die sämmtlichen Determinanten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, während die Determinante

$$|a_{gh}| \qquad (g,h=1,2,\dots m)$$

von Null verschieden ist, so kann die Auflösung der n Gleichungen

$$\text{(E)} \qquad \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} z_k = 0 \qquad (i=1,2,\dots n)$$

dadurch dargestellt werden, dass die n Grössen z für unbestimmte Werthe von

$$a_{01},\ a_{02},\ \dots\ a_{0n}$$

die Bedingung

$$
(\mathrm{E}') \qquad \begin{vmatrix} a_{01}, & \dots & a_{0m}, & a_{0,m+1}z_{m+1} + \dots + a_{0n}z_n \\ a_{11}, & \dots & a_{1m}, & a_{1,m+1}z_{m+1} + \dots + a_{1n}z_n \\ \vdots & & & \\ a_{m1}, & \dots & a_{mm}, & a_{m,m+1}z_{m+1} + \dots + a_{mn}z_n \end{vmatrix} = (-1)^m |a_{gh}| \sum_{k=1}^{k=n} a_{0k}z_k
$$

erfüllen, d. h. dass die Coëfficienten von $a_{01}, a_{02}, \dots a_{0n}$ auf beiden Seiten der Gleichung mit einander übereinstimmen. Die Determinante auf der linken Seite stellt also eine lineare Function von $a_{01}, a_{02}, \dots a_{0n}$ dar, deren Coëfficienten bezw. n solchen Grössen $z_1, z_2, \dots z_n$ proportional sind, wie sie durch die Gleichungen

$$
(\mathrm{E}) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}z_k = 0 \qquad (i=1,2,\dots n)
$$

bestimmt werden. Die Grössen $z_{m+1}, z_{m+2}, \dots z_n$ bleiben hierbei unbestimmt, während $z_1, z_2, \dots z_m$ sich als lineare Functionen der übrigen $n-m$ Grössen z ergeben.

Dass die Gleichung (E') die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der n Gleichungen (E) enthält, zeigt sich unmittelbar, wenn man in der Determinante auf der linken Seite von (E') die erste Verticalreihe mit z_1, die zweite mit z_2 u. s. w., die m^{te} mit z_m multiplicirt und der letzten Verticalreihe hinzufügt. Alsdann wird nämlich das erste Element der letzten Verticalreihe identisch mit $\sum a_{0k}z_k$, die folgenden Elemente aber werden

$$
\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}z_k \qquad (i=1,2,\dots m),
$$

und es ist darnach evident, dass die Gleichung (E') erfüllt ist, sobald die Gleichungen (E) bestehen. Andrerseits ergeben sich unter Benutzung der im Anfang des vorhergehenden Abschnittes (IV) enthaltenen Darlegung die m Gleichungen

$$
\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}z_k = 0 \qquad (i=1,2,\dots m)
$$

als eine *Folge* der Gleichung (E'), und aus diesen m Gleichungen resultiren dann die übrigen $n-m$ Gleichungen

$$
\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}z_k = 0 \qquad (i=m+1, m+2, \dots n).
$$

Denn vermöge der gemachten Voraussetzungen ist jede der Determinanten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$
|a_{pq}| \qquad (p=1,2,\dots m, i;\ q=1,2,\dots m, k)
$$

gleich Null und ergiebt daher, nach der letzten Verticalreihe entwickelt, eine Gleichung

$$
|a_{gh}|\, a_{ik} = \sum_g a_{gk} b_{gi} \qquad (g, h=1,2,\dots m),
$$

in welcher die Coëfficienten b_{gi} für alle Werthe $k=1,2,\dots n$ dieselben bleiben, so dass mit Hülfe dieser Gleichung eine beliebige von jenen $(n-m)$ Summen

$$
\sum a_{m+1,k}z_k, \quad \sum a_{m+2,k}z_k, \quad \dots \quad \sum a_{nk}z_k
$$

sich als lineare Function der ersten m Summen

$$
\sum a_{1k}z_k, \quad \sum a_{2k}z_k, \quad \dots \quad \sum a_{mk}z_k
$$

darstellen lässt.

VI.

Es seien die Grössen

$$
c_{pt} \qquad (p=0,1,\dots n;\ t=0,1,\dots n, n+1, \dots)
$$

so beschaffen, dass jede daraus zu bildende Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwindet, und zwar seien die sämmtlichen durch die verschiedenen Werthe von t bezeichneten Verticalreihen lineare Functionen der n ersten, so dass Gleichungen

$$
c_{pt} = \sum_q c_{pq} d_{qt} \qquad (p=0,1,\dots n;\ q=0,1,\dots n-1)
$$

bestehen. Für die $n(n+1)$ Grössen

$$
c_{pq} \qquad (p=0,1,\dots n;\ q=0,1,\dots n-1)
$$

sind nun entweder nicht alle daraus zu bildenden Determinanten n^{ter} Ordnung gleich Null, oder es giebt eine Zahl $m < n$ von der Beschaffenheit, dass nicht alle Determinanten m^{ter} Ordnung, aber die sämmtlichen Determinanten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden. Es muss also jedenfalls unter den $n(n+1)$ Grössen c_{pq} ein System von m^2 Grössen

$$c_{ik} \qquad (i = i_0, i_1, \dots i_{m-1};\ k = k_0, k_1, \dots k_{m-1})$$

enthalten sein, dessen Determinante von Null verschieden ist. Dabei ist $m \leqq n$, und die Indices $i_0, i_1, \dots$ sind gewisse m aus der Reihe der Zahlen $0, 1, \dots n$, die Indices $k_0, k_1, \dots$ aber gewisse m aus der Reihe der Zahlen $0, 1, \dots n-1$. Da nun jede aus den Grössen c_{pq} zu bildende Determinante $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwindet, also

$$|c_{pq}| = 0 \qquad (p = i_0, i_1, \dots i_{m-1}, r;\ q = k_0, k_1, \dots k_{m-1}, t)$$

ist, so führt die Entwickelung dieser Determinante nach den Elementen der durch $q = t$ bezeichneten Verticalreihe zu einer Gleichung

$$-c_{rt} = \sum_i \gamma_i^{(r)} c_{it} \qquad \begin{pmatrix} i = i_0, i_1, \dots i_{m-1} \\ r = 0, 1, \dots n \\ t = 0, 1, \dots n-1 \end{pmatrix},$$

in welcher die Grössen $\gamma_i^{(r)}$ die in dem Systeme (c_{pq}) den Elementen c_{it} adjungirten Determinanten m^{ter} Ordnung, dividirt durch die Determinante

$$|c_{ik}| \qquad (i = i_0, i_1, \dots i_{m-1};\ k = k_0, k_1, \dots k_{m-1}),$$

bedeuten. Eben dieselbe Gleichung gilt auch für die ferneren Werthe

$$t = n,\ n+1,\ n+2,\ \dots,$$

da sie für diese aus den Gleichungen

$$c_{rt} = \sum_q c_{rq} d_{qt}, \quad -c_{rq} = \sum_i \gamma_i^{(r)} c_{iq}, \quad c_{it} = \sum_q c_{iq} d_{qt}$$
$$(q = 0, 1, \dots n-1;\ i = i_0, i_1, \dots i_{m-1})$$

hervorgeht, und es zeigt sich daher,

dass jede der $n+1$ Horizontalreihen der Grössen c_{pt} eine lineare Function derjenigen m Horizontalreihen ist, welche durch die Indices

$$p = i_0, i_1, \dots i_{m-1}$$

bezeichnet sind.

Für den Fall, dass es m Zahlen $h_0, h_1, \dots h_{m-1}$ aus der Reihe $0, 1, \dots n$ giebt, für welche

$$|c_{hk}| = 0 \qquad (h = h_0, h_1, \dots h_{m-1};\ k = k_0, k_1, \dots k_{m-1})$$

ist, lassen sich m Grössen b bestimmen, welche die Gleichung

$$\sum_h b_h c_{hk} = 0 \qquad (h = h_0, h_1, \dots h_{m-1})$$

für $k = k_0, k_1, \dots k_{m-1}$ befriedigen. Da hiernach für eben diese Werthe von k

$$\sum_h \sum_i b_h \gamma_i^{(h)} c_{ik} = 0 \qquad (h = h_0, h_1, \dots h_{m-1};\ i = i_0, i_1, \dots i_{m-1}),$$

und die Determinante $|c_{ik}|$ von Null verschieden ist, so muss für alle Werthe $i = i_0, i_1, \dots i_{m-1}$

$$\sum_h b_h \gamma_i^{(h)} = 0 \qquad (h = h_0, h_1, \dots h_{m-1}),$$

und also die Gleichung

$$\sum_h b_h c_{ht} = 0 \qquad (h = h_0, h_1, \dots h_{m-1})$$

für *alle* Werthe $t = 0, 1, \dots n, n+1, \dots$ erfüllt sein, d. h.

es muss zwischen den m durch die Indices $h_0, h_1, \dots h_{m-1}$ bezeichneten Horizontalreihen eine lineare Relation bestehen, sobald eine solche zwischen denjenigen Theilen dieser Horizontalreihen besteht, deren Glieder durch die zweiten Indices $k_0, k_1, \dots k_{m-1}$ bezeichnet sind.

Sind die Grössen c_{pt} von der besonderen Art, dass

$$c_{pt} = c_{p+t} \quad \text{also} \quad c_{p+1,\,t} = c_{p,\,t+1}$$

ist, so kann zwischen den *ersten* m Horizontalreihen keine lineare Relation bestehen. Denn eine solche Relation

$$\sum_h b_h c_{ht} = 0 \qquad (h=0,1,\dots m-1)$$

würde sich, da $c_{ht} = c_{h+r,\,t-r}$ ist, unter der Voraussetzung, dass r zugleich kleiner als $t+1$ und kleiner als $n-m+2$ ist, in folgender Weise darstellen lassen:

$$\sum_h b_h c_{h+r,\,t-r} = 0 \qquad (h=0,1,\dots m-1),$$

oder, wenn t für $t-r$ gesetzt wird:

$$\sum_h b_{h-r} c_{ht} = 0 \qquad (h=r,r+1,\dots r+m-1);$$

es müsste also zwischen *je* m aufeinanderfolgenden Horizontalreihen eine lineare Relation bestehen, und sogar schon zwischen je l, wenn für $l<m$

$$b_{m-1} = b_{m-2} = \cdots = b_l = 0$$

und erst b_{l-1} von Null verschieden wäre. Es würden hiernach alle $n+1$ Horizontalreihen lineare Functionen der $m-1$ oder der $l-1$ ersten Horizontalreihen und also die durch

$$i = i_0,\, i_1,\, \dots i_{m-1}$$

bezeichneten m Horizontalreihen c_{it} durch eine lineare Relation mit einander verbunden sein. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass

$$|c_{ik}| \gtrless 0 \qquad (i=i_0,i_1,\dots i_{m-1};\ k=k_0,k_1,\dots k_{m-1})$$

ist. — Ebenso wie die m ersten Horizontalreihen können auch die m ersten

Verticalreihen durch keine lineare Relation mit einander verbunden sein; denn aus jeder Gleichung

$$\sum_{h=0}^{h=m-1} b'_h c_{kh} = 0 \qquad (k=0,1,\dots n)$$

oder, da $c_{kh} = c_{hk}$ ist,

$$\sum_{h=0}^{h=m-1} b'_h c_{hk} = 0 \qquad (k=0,1,\dots n)$$

würde in der oben entwickelten Weise das Bestehen der Gleichung

$$\sum_{h=0}^{h=m-1} b'_h c_{ht} = 0$$

für *alle* Werthe $t=0,\,1,\,\dots n,\,n+1,\,\dots$ folgen.

Da sich alle Verticalreihen der Grössen c_{pt} von der besonderen Art, bei der $c_{pt} = c_{p+t}$ ist, durch gewisse m derselben linear ausdrücken lassen, und da die ersten m Verticalreihen von einander linear unabhängig sind, so sind die sämmtlichen Verticalreihen als lineare Functionen der m ersten darstellbar, und es kann daher

$$k_0 = 0,\quad k_1 = 1,\quad \dots\quad k_{m-1} = m-1$$

genommen werden. Ganz ebenso folgt aus der linearen Unabhängigkeit der m ersten Horizontalreihen, dass

$$i_0 = 0,\quad i_1 = 1,\quad \dots\quad i_{m-1} = m-1$$

genommen werden kann. Bei derartigen Grössen c_{pt} lässt sich also aus der Voraussetzung, dass sämmtliche Verticalreihen lineare Functionen der n ersten sind, die Folgerung ziehen, dass sämmtliche Horizontalreihen lineare Functionen der m ersten sein müssen, d. h. dass — unter Beibehaltung der oben für allgemeine Grössen c_{pt} gebrauchten Bezeichnungen — die Relationen

$$-c_{r+t} = \sum_i \gamma_i^{(r)} c_{i+t} \qquad \binom{i=0,1,\dots m-1}{r=m,m+1,\dots n}$$

für alle Werthe von t bestehen müssen, und dass die aus den *ersten* m^2 Grössen c gebildete Determinante

$$|c_{i+k}| \qquad {\scriptstyle (i,\,k=0,\,1,\,\dots\,m-1)}$$

von Null verschieden sein muss.

VII.

Ist eine aus mindestens $2n$ Gliedern bestehende endliche oder eine unendliche Reihe von Grössen $c_0, c_1, c_2, \dots$ so beschaffen, dass sich jedes Glied als eine und dieselbe lineare Function der n vorhergehenden darstellen lässt, dass also eine „*lineare Recursionsformel* n^{ter} *Ordnung*" für die Reihe $c_0, c_1, c_2, \dots$ existirt, so ist die im vorigen Abschnitte über die Grössen c_{p+t} gemachte Voraussetzung erfüllt, wenn aus den Grössen $c_0, c_1, c_2, \dots$ die n Horizontalreihen

$$\begin{array}{llll} c_0, & c_1, & c_2, & \dots \\ c_1, & c_2, & c_3, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ c_{n-1}, & c_n, & c_{n+1}, & \dots \end{array}$$

gebildet werden. Denn aus einer für alle Werthe von p geltenden Recursionsformel

$$c_{p+n} = \sum_q c_{p+q} d_{qn} \qquad {\scriptstyle (q=0,\,1,\,\dots\,n-1)},$$

folgt, indem nach einander $p+1, p+2, \dots$ für p gesetzt wird, dass für jeden Werth von t Relationen

$$c_{p+t} = \sum_q c_{p+q} d_{qt} \qquad {\scriptstyle (p=0,\,1,\,2,\,\dots;\; q=0,\,1,\,\dots\,n-1)}$$

bestehen, vermöge deren die durch beliebige Werthe von t bezeichneten Verticalreihen sich als lineare Functionen der n ersten durch $q = 0, 1, \dots n-1$ bezeichneten darstellen. Andrerseits ist aber im vorigen Abschnitte gezeigt worden, wie man, von dieser Voraussetzung ausgehend, zur Bestimmung der

kleinsten Zahl m gelangt, die so beschaffen ist, dass schon zwischen je $m+1$ aufeinanderfolgenden Grössen c eine lineare Relation, also eine lineare Recursionsformel m^{ter} Ordnung besteht; denn die Gleichung

$$-c_{r+t} = \sum_i \gamma_i^{(r)} c_{i+t} \qquad {\scriptstyle (i=0,\,1,\,\dots\,m-1)}$$

am Schlusse des vorigen Abschnittes liefert für $r = m$ eine solche Relation. Hiernach kann eine Reihe $c_0, c_1, c_2, \dots$ von der angegebenen Beschaffenheit

erstens dadurch charakterisirt werden, dass zwischen je $m+1$ (aber nicht schon zwischen je m) aufeinanderfolgenden Gliedern eine und dieselbe lineare Relation besteht, in welcher der Coëfficient des letzten Gliedes gleich *Eins* ist, d. h. also, dass eine lineare Recursionsformel m^{ter} Ordnung, aber keine von niedrigerer Ordnung existirt,

zweitens dadurch, dass — wenn aus den Grössen c, wie oben, eine beliebige Anzahl Horizontalreihen gebildet und also c_{p+t} das t^{te} Glied der p^{ten} Horizontalreihe wird — jede Verticalreihe sich als eine lineare Function der m ersten (nicht aber der $m-1$ ersten) darstellen lässt.

Drittens werden die Grössen c durch die Bedingungen

$$|c_{i+k}| \gtrless 0, \quad |c_{p+q}| = 0 \qquad \left({\scriptstyle i,\,k=0,\,1,\,\dots\,m-1,\quad p=0,\,1,\,\dots\,m \atop \scriptstyle q=0,\,1,\,\dots\,m-1,\,t;\; t=m,\,m+1,\,\dots}\right)$$

vollständig charakterisirt.

Denn die Bedingung $|c_{i+k}| \gtrless 0$ ist schon am Schlusse des vorigen Abschnittes als nothwendig hervorgehoben worden, und unter dieser Bedingung sind die Gleichungen $|c_{p+q}| = 0$ mit der Voraussetzung, dass sich jede Verticalreihe der Grössen c_{p+t} als lineare Function der m ersten darstellen lasse, vollkommen äquivalent.

Setzt man für $2(m+r)+1$ Grössen $c_0, c_1, \dots c_{2(m+r)}$ unter Festhalten der Bedingung $|c_{i+k}| \gtrless 0$ das Bestehen der Gleichungen

$$|c_{p+q}| = 0 \qquad (p=0,1,\dots m;\ q=0,1,\dots m-1,t),$$

also auch das Bestehen einer (bei Entwickelung von $|c_{p+q}|$ nach der durch t bezeichneten Verticalreihe sich ergebenden) Relation

$$(\mathrm{F}^\circ) \qquad c_{m+t} + \gamma_{m-1}c_{m+t-1} + \gamma_{m-2}c_{m+t-2} + \cdots + \gamma_0 c_t = 0$$

für $t = m, m+1, \dots m+r-1$ voraus, so werden in der Determinante $(m+r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$|c_{p+q}| \qquad (p,q=0,1,\dots m+r),$$

wenn man darin zu jeder der $r+1$ letzten Horizontalreihen die nächstvorhergehende, mit γ_{m-1} multiplicirt, die zweitvorhergehende, mit γ_{m-2} multiplicirt, u. s. f. hinzufügt, alle diejenigen Elemente dieser letzten $r+1$ Horizontalreihen gleich Null, deren Index kleiner als $2m+r$ ist. Es wird demnach

$$\pm|c_{p+q}| = |c_{i+k}|(c_{2m+r} + \gamma_{m-1}c_{2m+r-1} + \cdots + \gamma_0 c_{m+r})^{r+1},$$
$$(i,k=0,1,\dots m-1;\ p,q=0,1,\dots m+r)$$

oder, da für jeden Werth von t

$$|c_{p+q}| = |c_{i+k}|(c_{m+t} + \gamma_{m-1}c_{m+t-1} + \cdots + \gamma_0 c_t)$$
$$(i,k=0,1,\dots m-1;\ p=0,1,\dots m;\ q=0,1,\dots m-1,t)$$

ist,

$$\pm|c_{p+q}|\cdot|c_{i+k}|^r = |c_{p+q}|^{r+1} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i,k=0,1,\dots m-1;\ p,q=0,1,\dots m+r \\ p=0,1,\dots m;\ q=0,1,\dots m-1,m+r \end{smallmatrix}\right),$$

so dass, da $|c_{i+k}| \gtrless 0$ ist, die beiden Determinanten

$$|c_{p+q}|, \quad |c_{p+q}|$$

nur gleichzeitig Null werden können. Die Bedingungen

$$|c_{i+k}| \gtrless 0, \quad |c_{p+q}| = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} p=0,1,\dots m;\ q=0,1,\dots m-1,t \\ t=m,m+1,\dots m+r;\ i,k=0,1,\dots m-1 \end{smallmatrix}\right)$$

sind also mit den Bedingungen

$$|c_{i+k}| \gtrless 0, \quad |c_{p+q}| = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} p,q=0,1,\dots t;\ t=m,m+1,\dots m+r \\ i,k=0,1,\dots m-1 \end{smallmatrix}\right)$$

äquivalent, und man kann daher

viertens die Grössen c dadurch charakterisiren, dass von den verschiedenen für $n = 1, 2, 3, \dots$ aus den *ersten* h Horizontal- und Verticalreihen (c_{p+q}) zu bildenden Determinanten die der m^{ten} Ordnung, nämlich $|c_{i+k}|$, die letzte von Null verschiedene ist, dass also die der $(m+1)^{\text{ten}}$, $(m+2)^{\text{ten}}$ Ordnung u. s. w., d. h. die Determinanten

$$|c_{p+q}| \qquad (p,q=0,1,\dots t)$$

für $t \geqq m$ sämmtlich verschwinden.

Um eine Reihe $c_0, c_1, c_2, \dots$ von der angegebenen Art zu bilden, können die ersten $2m$ Grössen beliebig gewählt werden, jedoch mit der Massgabe, dass

$$|c_{i+k}| \gtrless 0 \qquad (i,k=0,1,\dots m-1)$$

ist. Die folgenden Grössen $c_{2m}, c_{2m+1}, \dots$ werden alsdann der Reihe nach bestimmt, wenn in der obigen Recursionsformel (F°), welche für $t = 0, 1, \dots m-1$ von selbst erfüllt ist, nach einander $t = m, m+1, \dots$ genommen wird.

VIII.

Es seien $c_0, c_1, \dots c_{2m-1}$ beliebige Grössen und $C^{(m)}(x)$, $D^{(m)}(x)$ dadurch definirt, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} U\ , & -c_0\ , & -c_1\ , & \dots & -c_{m-1} \\ -c_0\ , & c_0x - c_1\ , & c_1x - c_2\ , & \dots & c_{m-1}x - c_m \\ -c_1\ , & c_1x - c_2\ , & c_2x - c_3\ , & \dots & c_mx - c_{m+1} \\ \vdots & & & & \\ -c_{m-1}\ , & c_{m-1}x - c_m\ , & c_mx - c_{m+1}\ , & \dots & c_{2m-2}x - c_{2m-1} \end{vmatrix}$$

für ein unbestimmtes U gleich

$$-C^{(m)}(x)+UD^{(m)}(x)$$

werden soll. Wendet man auf diese Determinante jene bekannte (z. B. in *Baltzer's* Lehrbuch, IV. Auflage, § 7, 3 vorkommende) Relation an, welche, wenn die Elemente der Determinante mit a_{ik} bezeichnet werden, durch die Formel

$$-|a_{ik}|\frac{\partial^2|a_{ik}|}{\partial a_{00}\partial a_{mm}}+\frac{\partial|a_{ik}|}{\partial a_{00}}\cdot\frac{\partial|a_{ik}|}{\partial a_{mm}}=\frac{\partial|a_{ik}|}{\partial a_{0m}}\cdot\frac{\partial|a_{ik}|}{\partial a_{m0}} \qquad (i,k=0,1,\dots m)$$

dargestellt wird, so kommt*)

$$\text{(F)}\qquad C^{(m)}(x)D^{(m-1)}(x)-C^{(m-1)}(x)D^{(m)}(x)=|c_{i+k}|^2 \qquad (i,k=0,1,\dots m-1);$$

denn es ist offenbar

$$\frac{\partial|a_{ik}|}{\partial a_{00}}=D^{(m)}(x),\qquad \frac{\partial^2|a_{ik}|}{\partial a_{00}\partial a_{mm}}=D^{(m-1)}(x)$$

$$\frac{\partial|a_{ik}|}{\partial a_{mm}}=-C^{(m-1)}(x)+UD^{(m-1)}(x)$$

$$\frac{\partial|a_{ik}|}{\partial a_{0m}}=\frac{\partial|a_{ik}|}{\partial a_{m0}}=|c_{p+q}| \qquad (p,q=0,1,\dots m-1).$$

Wird die obige Determinante $UD^{(m)}(x)-C^{(m)}(x)$ in der Weise transformirt, dass zuerst die erste Horizontalreihe, mit x multiplicirt, der zweiten, alsdann die zweite, mit x multiplicirt, der dritten hinzugefügt wird u. s. f., so entsteht eine Determinante

$$\text{(F')}\qquad \left|(U-\sum_k c_{k-1}x^{-k})x^h,\ -c_h,\ -c_{h+1},\ \dots\ -c_{h+m-1}\right| \qquad \binom{k=1,2,\dots h}{h=0,1,\dots m},$$

---

*) Dass die Gleichung (F) eigentlich mit jener Relation (Art. I, A') zwischen den Zählern und Nennern aufeinanderfolgender Näherungsbrüche identisch ist, folgt aus den Betrachtungen in meiner oben citirten Göttinger Notiz. (Band II S. 103—112 dieser Ausgabe.)

und man erhält also, wenn hierin die erste Verticalreihe an die letzte Stelle gebracht und für U die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}c_{k-1}x^{-k}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\text{(F'')}\qquad -C^{(m)}(x)+D^{(m)}(x)\sum_{k=1}^{k=\infty}c_{k-1}x^{-k}=\left|c_h,\ c_{h+1},\ \dots c_{h+m-1},\ \sum_t c_{h+t}x^{-t-1}\right|$$
$$(h=0,1,\dots m;\ t=m,m+1,\dots)$$

Aus dieser Gleichung erhellt unmittelbar, dass das Verschwinden aller Determinanten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$|c_{h+k}| \qquad (h=0,1,\dots m;\ k=0,1,\dots m-1,t)$$

für $t=m,\ m+1,\ \dots$ die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichung

$$\text{(G)}\qquad C^{(m)}(x)=D^{(m)}(x)\sum_{k=1}^{k=\infty}c_{k-1}x^{-k}$$

ist. Die Gleichung (G) wird inhaltlos, wenn $C^{(m)}(x)$ und $D^{(m)}(x)$ identisch gleich Null sind. Dies tritt, wie sich bei der Determinante (F') unmittelbar zeigt, dann und nur dann ein, wenn alle $m+1$ aus dem Systeme von $m(m+1)$ Elementen

$$c_{h+k} \qquad (h=0,1,\dots m;\ k=0,1,\dots m-1)$$

zu bildenden Determinanten m^{ter} Ordnung verschwinden. Wird dieser Fall ausgeschlossen, so können die für das Bestehen der Gleichung (G) erforderlichen Bedingungen

$$|c_{h+k}|=0 \qquad (h=0,1,\dots m;\ k=0,1,\dots m-1,t)$$

für $t=m,\ m+1,\ \dots$ nicht erfüllt sein, ohne dass

$$|c_{i+k}|\gtrless 0 \qquad (i,k=0,1,\dots m-1)$$

ist. Wäre nämlich diese Determinante der ersten m^2 Grössen c_{i+k} gleich Null, also die Determinante $D^{(m)}(x)$ von niedrigerem als dem m^{ten} Grade, so müsste deren Entwickelung nach der letzten Verticalreihe eine Gleichung

$$\underset{(h=0,1,\dots m)}{|c_h,\ c_{h+1},\ \dots\ c_{h+m-1},\ x^h|} = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

liefern, in welcher $l < m$ wäre. Wird hierin c_{t+h} an Stelle von x^h gesetzt, so kommt

$$b_l c_{t+l} + b_{l-1} c_{t+l-1} + \dots + b_1 c_{t+1} + b_0 c_t = |c_{h+k}| \qquad \binom{h=0,1,\dots\dots m}{k=0,1,\dots m-1,t},$$

und da die Determinante rechts für $t = 0, 1, \dots m-1$ an und für sich verschwindet, während deren Verschwinden für $t = m, m+1, \dots$ für das Bestehen der Gleichung (G) erfordert wird, so müsste der Ausdruck links für alle Werthe von t gleich Null sein, es müsste also schon zwischen je $l+1$ aufeinanderfolgenden Grössen c eine und dieselbe lineare Relation bestehen. Dann würde aber $D^{(m)}(x)$ identisch Null werden.

Jene Ungleichheit $|c_{i+k}| \gtrless 0$ ist also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung (G) erfüllt wird, ohne dass beide Seiten derselben für sich Null werden, also auch die Bedingung dafür, dass gegebene Grössen $c_0, c_1, \dots c_{2m-1}$ die $2m$ ersten Coëfficienten der Entwickelung von $\frac{C^{(m)}(x)}{D^{(m)}(x)}$ nach fallenden Potenzen von x bilden; die folgenden Coëfficienten $c_{2m}, c_{2m+1}, \dots$ sind dann durch eine lineare Recursionsformel m^{ter} Ordnung, deren Coëfficienten denen von $D^{(m)}(x)$ proportional sind, nämlich durch die Gleichungen

$$|c_{h+k}| = 0 \qquad (h=0,1,\dots m;\ k=0,1,\dots m-1,t)$$

und ebenso durch die nach Art. VII hiermit äquivalenten Bedingungen

$$|c_{p+q}| = 0 \qquad (p,q=0,1,\dots t)$$

für $t = m, m+1, \dots$ d. h. also dadurch bestimmt, dass jede aus den *ersten* n^2 Grössen c_{p+q} gebildete Determinante verschwinden soll, sobald $n > m$ ist.

IX.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} c_{k-1} x^{-k}$$

aus der Entwickelung einer rationalen Function von x hervorgegangen sei, ist die Existenz einer linearen Recursionsformel d. h. das Bestehen einer und derselben linearen Relation zwischen je $n+1$ aufeinanderfolgenden Coëfficienten c, auf Grund deren die Reihen selbst auch als recurrirende bezeichnet werden. Denn, wenn bei der Multiplication der Reihe $\sum c_{k-1} x^{-k}$ mit einer ganzen Function n^{ten} Grades

$$\sum_{h=0}^{h=n} b_h x^h \qquad (b_n \gtrless 0)$$

die sämmtlichen Glieder mit negativen Potenzen von x wegfallen sollen, so muss die Gleichung

$$\sum_{p=0}^{p=n} b_p c_{p+t} = 0 \qquad (b_n \gtrless 0)$$

für alle Werthe $t = 0, 1, 2, \dots$ befriedigt sein. Es ist hiernach $c_0, c_1, c_2, \dots$ eine Reihe Grössen von der Beschaffenheit, wie sie im Art. VII näher dargelegt worden, und die Coëfficienten c sind also z. B. (gemäss Art. VII, 4) dadurch zu charakterisiren, dass die Reihe der Determinanten

$$|c_0|, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

abbricht, d. h. dass die Glieder dieser Reihe, von einem gewissen Gliede an, sämmtlich gleich Null werden. Besteht die Reihe dieser Determinanten in diesem Sinne nur aus m Gliedern (von denen aber auch einige gleich Null sein können), so ist

$$(\mathrm{G}^{(m)}) \qquad |c_{i+k}| \gtrless 0, \qquad |c_{p+q}| = 0 \qquad {\scriptstyle (i,\, k=0,\, 1,\, \dots\, m-1;\; p,\, q=0,\, 1,\, \dots\, t;\; t \geqq m)},$$

und es finden sich daher jene Bedingungen erfüllt, welche am Schlusse des vorigen Abschnittes für das Bestehen der Gleichung

$$(\mathrm{G}') \qquad \frac{C^{(m)}(x)}{D^{(m)}(x)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_{k-1} x^{-k}$$

aufgestellt worden sind. Dabei ist $D^{(m)}(x)$ genau vom Grade m, da der Coëfficient von x^m in $D^{(m)}(x)$ jene Determinante $|c_{i+k}|$, also von Null verschieden ist; ferner haben, wie die Gleichung (F) im Art. VIII zeigt, $C^{(m)}(x)$ und $D^{(m)}(x)$ keinen gemeinsamen Factor,

> es sind hiernach durch die Bedingungen $(\mathrm{G}^{(m)})$ (vgl. Art. VII, 4) sowie überhaupt durch jede der vier im VII. Abschnitt angegebenen Bestimmungsweisen die Grössen $c_0, c_1, c_2, \dots$ als Coëfficienten der Entwickelung eines Bruches nach fallenden Potenzen von x charakterisirt, welcher in der reducirten Form einen Nenner m^{ten} Grades und einen Zähler von niedrigerem Grade hat, und dieser Bruch ist als Quotient zweier Determinanten $C^{(m)}(x)$, $D^{(m)}(x)$ darzustellen, deren Elemente nur die ersten $2m$ Grössen c enthalten.

X.

Geht man von einer gegebenen rationalen Function $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ aus, in welcher $f(x)$ vom Grade n und $f_1(x)$ vom Grade $n - n_1 < n$ ist, so können die ersten $2n$ Coëfficienten $c_0, c_1, \dots c_{2n-1}$ in der Entwickelung

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_{k-1} x^{-k},$$

wie schon oben am Ende von Art. III erwähnt worden, einerseits durch die Differentialquotienten von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$, andrerseits durch eine dort näher charakterisirte Reihe von linearen Gleichungen aus den Coëfficienten von $f(x)$ und $f_1(x)$ bestimmt werden. Es können somit an Stelle dieser Coëfficienten jene $2n$ Entwickelungs-Coëfficienten $c_0, c_1, \dots c_{2n-1}$ als gegebene Grössen eingeführt werden; in diesen drücken sich alsdann die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $f(x)$ und $f_1(x)$ einen gemeinsamen Theiler vom Grade $n - m$ haben, einfach durch die $n - m$ Gleichungen

$$|c_{p+q}| = 0 \qquad {\scriptstyle (p,\, q=0,\, 1,\, \dots\, t;\; t=m,\, m+1,\, \dots\, n-1)}$$

aus, denen aber noch die Ungleichheit

$$|c_{i+k}| \gtrless 0 \qquad {\scriptstyle (i,\, k=0,\, 1,\, \dots\, m-1)}$$

hinzuzufügen ist, wenn dies der *grösste* gemeinsame Theiler sein soll. Denn dies sind, wie im vorigen Abschnitte gezeigt worden, Bedingungen dafür, dass jene Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ die eines Bruches ist, der in der reducirten Form einen Nenner m^{ten} Grades hat. Es sind dies freilich nicht *alle* Bedingungen, aber die übrigen, nämlich

$$|c_{p+q}| = 0 \qquad {\scriptstyle (p,\, q=0,\, 1,\, \dots\, t;\; t=n,\, n+1,\, \dots)},$$

sind bei der Entwickelung des Bruches $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ von selbst erfüllt.

Genügen die Grössen c jenen angegebenen $n - m$ Bedingungsgleichungen, so sind nach Art. VI und VII alle Determinanten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $|c_{p+q}|$ gleich Null, und es bestimmt sich daher eine ganze Function $f(x)$ oder

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n,$$

bei deren Multiplication mit $\sum c_{k-1} x^{-k}$ die negativen Potenzen von x wegfallen sollen, auf Grund der Gleichungen

$$\sum_{p=0}^{p=n} b_p c_{p+t} = 0 \qquad {\scriptstyle (t=0,\, 1,\, 2,\, \dots)}$$

gemäss Art. V als Determinante

$$
\text{(H)} \qquad \begin{vmatrix}
c_0 \,, & c_1 \,, & \dots & c_{m-1} \,, & b_m c_m + b_{m+1} c_{m+1} + \dots + b_n c_n \\
c_1 \,, & c_2 \,, & \dots & c_m \,, & b_m c_{m+1} + b_{m+1} c_{m+2} + \dots + b_n c_{n+1} \\
\vdots & & & & \\
c_{m-1}, & c_m, & \dots & c_{2m-2}, & b_m c_{2m-1} + b_{m+1} c_{2m} + \dots + b_n c_{m+n-1} \\
1 \,, & x \,, & \dots & x^{m-1}, & b_m x^m + b_{m+1} x^{m+1} + \dots + b_n x^n
\end{vmatrix},
$$

welche mit $\triangle(b_m, b_{m+1}, \dots b_n)$ bezeichnet werden möge. Alsdann ist nach der im Art. VIII eingeführten Bedeutung von $C^{(m)}(x)$ und $D^{(m)}(x)$

$$D^{(m)}(x) = \triangle(1, 0, 0 \cdots 0),$$

wie unmittelbar aus dem dort mit (F') bezeichneten Determinanten-Ausdrucke erhellt, und ferner nach Art. IX

$$\frac{C^{(m)}(x)}{D^{(m)}(x)} = \frac{f_1(x)}{f(x)},$$

so dass $\triangle(b_m, b_{m+1}, \dots b_n)$ eine beliebige durch $\triangle(1, 0, \dots 0)$ theilbare Function n^{ten} Grades darstellen muss. Um das, was hier indirect erschlossen worden ist, direct nachzuweisen, braucht nur gezeigt zu werden, dass jene Determinante (H) überhaupt durch $\triangle(1, 0, \dots 0)$ theilbar ist, da sie die erforderliche Allgemeinheit in den $n - m + 1$ Coëfficienten $b_m, b_{m+1}, \dots b_n$ offenbar enthält.

Bezeichnet man die $(m+1)^2$ Elemente jener Determinante (H) mit

$$a_{ik} \qquad\qquad (i, k = 0, 1, \dots m),$$

fügt eine $(m+2)^{\text{te}}$ Verticalreihe, in welcher

$$a_{0, m+1} = c_m, \quad a_{1, m+1} = c_{m+1}, \quad \dots \quad a_{m-1, m+1} = c_{2m-1}, \quad a_{m, m+1} = x^m$$

ist, und eine $(m+2)^{\text{te}}$ Horizontalreihe

$$a_{m+1, 0}, \quad a_{m+1, 1}, \quad \dots \quad a_{m+1, m}, \quad a_{m+1, m+1}$$

hinzu und bezeichnet die Adjungirten dieser $(m+2)^2$ Grössen

$$a_{gh} \quad \text{mit} \quad \alpha_{gh} \qquad\qquad (g, h = 0, 1, \dots m+1),$$

so ist

$$\alpha_{m+1, m+1} = \triangle(b_m, b_{m+1}, \dots b_n), \quad -\alpha_{m+1, m} = \triangle(1, 0, \dots 0)$$

und

$$
(-1)^{m+1} \alpha_{m+1, 0} = \begin{vmatrix}
c_1 \,, & c_2 \,, & \dots & c_{m-1} \,, & c_m \,, & b_m c_m + \dots + b_n c_n \\
c_2 \,, & c_3 \,, & \dots & c_m \,, & c_{m+1}, & b_m c_{m+1} + \dots + b_n c_{n+1} \\
\vdots & & & & & \\
c_m, & c_{m+1}, & \dots & c_{2m-2}, & c_{2m-1}, & b_m c_{2m-1} + \dots + b_n c_{m+n-1} \\
x \,, & x^2 \,, & \dots & x^{m-1}, & x^m \,, & b_m x^m + \dots + b_n x^n
\end{vmatrix},
$$

oder, da in dieser Determinante mittels der aus den Gleichungen

$$|c_{p+q}| = 0 \qquad\qquad (p = 0, 1, \dots m;\ q = 0, 1, \dots m-1, r)$$

hervorgehenden Relation (F°) des VII. Abschnittes die m ersten Horizontalreihen durch vorhergehende ersetzt, d. h. also alle Indices der Grössen c um eine Einheit vermindert werden können, wenn mit $-\gamma_0$ multiplicirt wird,

$$\alpha_{m+1, 0} = \gamma_0 x \triangle(b_{m+1}, b_{m+2}, \dots b_n, 0).$$

Nun ist nach einer schon oben im Anfang von Art. VIII citirten Determinanten-Formel

$$\alpha_{fi}\alpha_{gk} - \alpha_{fk}\alpha_{gi} = |a_{pq}| \frac{\partial \alpha_{fi}}{\partial a_{gk}} \qquad\qquad (p, q = 0, 1, \dots m+1)$$

und also

$$\text{(I)} \qquad \alpha_{fh} \frac{\partial \alpha_{fi}}{\partial a_{gk}} - \alpha_{fi} \frac{\partial \alpha_{fh}}{\partial a_{gk}} + \alpha_{fk} \frac{\partial \alpha_{fh}}{\partial a_{gi}} = 0,$$

wie unmittelbar erhellt, wenn man die drei partiellen Ableitungen gemäss der vorhergehenden Determinanten-Formel durch die ihnen proportionalen Determinanten

$$\alpha_{fi}\alpha_{gk} - \alpha_{fk}\alpha_{gi}, \quad \alpha_{fh}\alpha_{gk} - \alpha_{fk}\alpha_{gh}, \quad \alpha_{fh}\alpha_{gi} - \alpha_{fi}\alpha_{gh}$$

ersetzt. Nimmt man in der Gleichung (I)

$$f = h = m + 1, \quad g = i = m, \quad k = 0,$$

so erhält man eine lineare Relation zwischen

$$\triangle(b_m, b_{m+1}, \dots b_n), \quad x\triangle(b_{m+1}, \dots b_n, 0), \quad \triangle(1, 0, 0, \dots 0)$$

mit von x unabhängigen Coëfficienten, welche zeigt, dass die erste der drei Determinanten durch die dritte theilbar sein muss, wenn es die zweite ist, und welche also durch Inductionsschluss zum Nachweise führt, dass für beliebige Werthe von $b_m, b_{m+1}, \dots b_n$ in der That $\triangle(b_m, b_{m+1}, \dots b_n)$ durch $\triangle(1, 0, \dots 0)$ theilbar ist. — Eine nähere Discussion der Coëfficienten ergiebt übrigens für jene lineare Relation die einfache Form:

$$\triangle(b_m, b_{m+1}, \dots b_n) - x\triangle(b_{m+1}, \dots b_n, 0) = C \cdot \triangle(1, 0, \dots 0),$$

wo C durch die Gleichung

$$|c_{i+k}| \cdot C = |c_h, c_{h+1}, \dots c_{h+m-2}, b_m c_{h+m-1} + \dots + b_n c_{h+n-1}| \qquad {\scriptstyle (i=0,1\dots m-1;\ h,k=1,2\dots m)}$$

bestimmt ist, und in dieser Form kann die Relation auch leicht verificirt werden.

XI.

Die schon am Schlusse von Art. III erwähnte Aufgabe der vollständigen Auflösung des Gleichungssystems

$$\text{(D)} \qquad \sum_p \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad {\scriptstyle (p=0,1,\dots\nu;\ q=0,1,\dots\nu-1)},$$

auf welche jetzt eingegangen werden soll, verlangt für die 2ν gegebenen Grössen

$$c_0, c_1, \dots c_{2\nu-1}$$

die Aufstellung einer zwischen je $\nu+1$ aufeinanderfolgenden gültigen linearen Relation. Eine solche ist nur dann für die 2ν Grössen c eine Recursionsformel im eigentlichen Sinne, wenn β_ν von Null verschieden ist. Aber in allen Fällen hängt die besondere Natur der Auflösung jenes Gleichungssystems (D) wesentlich von den für die Grössen c oder nur für einen Theil derselben bestehenden Recursionsformeln ab.

Denkt man sich die 2ν Grössen c in $\nu+1$ (durch die verschiedenen Werthe von p bezeichnete) Horizontalreihen von je ν Elementen

$$c_{p+q} \qquad {\scriptstyle (p=0,1,\dots\nu;\ q=0,1,\dots\nu-1)}$$

geordnet, so giebt es eine grösste Zahl λ, wofür

$$|c_{i+k}| \gtrless 0 \qquad {\scriptstyle (i\ k=0,1,\dots\lambda-1)}$$

ist. Falls $\lambda < \nu$ ist, verschwinden nach Art. VII die sämmtlichen aus den ersten $\lambda+1$ Horizontalreihen zu bildenden Determinanten $(\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, d. h. es wird

$$|c_{p+q}| = 0 \qquad {\scriptstyle (p=0,1,\dots\lambda;\ q=0,1,\dots\lambda-1,t;\ t=\lambda,\lambda+1,\dots\nu-1)}.$$

Es können aber auch die sämmtlichen Determinanten $(\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, welche bei Hinzunahme der folgenden $\mu-\lambda$ Horizontalreihen zu bilden sind. Die allgemeinste über die 2ν Grössen c zu machende Voraussetzung besteht hiernach darin,

dass erstens λ die grösste Zahl sei, wofür

$$|c_{i+k}| \gtrless 0 \qquad {\scriptstyle (i,k=0,1,\dots\lambda-1)}$$

ist, und dass zweitens μ die grösste Zahl sei, wofür alle aus dem System

$$c_{p+q} \qquad {\scriptstyle (p=0,1,\dots\mu;\ q=0,1,\dots\nu-1)}$$

zu bildenden Determinanten $(\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden.

Hierbei ist $\lambda \leqq \mu \leqq \nu$. Entwickelt man die der Voraussetzung nach verschwindende Determinante

$$|c_{p+q}| \qquad (p=0,1,\dots\lambda;\ q=0,1,\dots\lambda-1,\tau-\lambda;\ \tau-\lambda=0,1,\dots\nu-1)$$

nach der letzten Verticalreihe, so erhält man eine Recursionsformel wie die im Art. VII mit (F°) bezeichnete

$$\text{(K)} \qquad c_\tau + \gamma_{\lambda-1}c_{\tau-1} + \cdots + \gamma_1 c_{\tau-\lambda+1} + \gamma_0 c_{\tau-\lambda} = 0,$$

wo $\tau < \lambda + \nu$ ist. Wird nun diese Formel bis $\tau = \varkappa + \nu - 2$ als gültig angenommen, so bleibt die Determinante

$$|c_{p+q}| \qquad (p=0,1,\dots\lambda-1,\varkappa;\ q=0,1,\dots\lambda-1,\nu-1)$$

ungeändert, wenn man jedem Gliede der letzten Horizontalreihe $c_{\varkappa+q}$ den Ausdruck

$$\gamma_{\lambda-1}c_{\varkappa+q-1} + \cdots + \gamma_1 c_{\varkappa-\lambda+q+1} + \gamma_0 c_{\varkappa-\lambda+q}$$

hinzufügt, da derselbe auf Grund jener Annahme als lineare Function der ersten λ Horizontalreihen darstellbar ist. Durch diese Hinzufügung werden aber die ersten λ Glieder der letzten Horizontalreihe gleich Null, und es resultirt also die Gleichung

$$|c_{p+q}| = |c_{i+k}|(c_{\varkappa+\nu-1} + \gamma_{\lambda-1}c_{\varkappa+\nu-2} + \cdots + \gamma_0 c_{\varkappa+\nu-\lambda-1}),$$
$$(p=0,1,\dots\lambda-1,\varkappa;\ q=0,1,\dots\lambda-1,\nu-1;\ i,k=0,1,\dots\lambda-1)$$

aus welcher man, da $|c_{i+k}| \gtrless 0$ ist, erschliesst, dass die Gültigkeit der Recursionsformel (K) für $\tau = \varkappa + \nu - 1$ und das Verschwinden der Determinante $|c_{p+q}|$ sich gegenseitig bedingen. Wird diese Schlussweise bis zum Werthe $\varkappa = \mu$ fortgesetzt, so zeigt sich, dass das System von Bedingungen

$$\text{(K°)} \qquad \underset{(i,k=0,\dots\lambda-1)}{|c_{i+k}| \gtrless 0}, \qquad \underset{\left(\substack{p=0,1,\dots\lambda-1,\varkappa;\ \varkappa\leqq\mu \\ q=0,1,\dots\lambda-1,\nu-1}\right)}{|c_{p+q}| = 0}, \qquad \underset{\left(\substack{p'=0,1,\dots\lambda-1,\mu+1 \\ q'=0,1,\dots\lambda-1,\nu-1}\right)}{|c_{p'+q'}| \gtrless 0}$$

mit dem Bedingungssystem

$$\text{(K')} \qquad \underset{(i,k=0,1,\dots\lambda-1)}{|c_{i+k}| \gtrless 0}, \qquad \underset{\left(\substack{p=0,1,\dots\lambda;\ 2\lambda\leqq\tau<\mu+\nu \\ q=0,1,\dots\lambda-1,\tau-\lambda}\right)}{|c_{p+q}| = 0}, \qquad \underset{\left(\substack{p'=0,1,\dots\dots\lambda; \\ q'=0,1,\dots\lambda-1,\mu+\nu-\lambda}\right)}{|c_{p'+q'}| \gtrless 0}$$

vollständig äquivalent ist, und auf Grund der im Art. VII enthaltenen Entwickelung kann diesen beiden Bedingungssystemen das folgende

$$\text{(K'')} \qquad \underset{(i,k=0,1,\dots\lambda-1)}{|c_{i+k}| \gtrless 0}, \qquad \underset{(p,q=0,1,\dots\tau-\lambda;\ 2\lambda\leqq\tau<\mu+\nu)}{|c_{p+q}| = 0}, \qquad \underset{(p',q'=0,1,\dots\mu+\nu-\lambda)}{|c_{p'+q'}| \gtrless 0}$$

als drittes äquivalentes hinzugefügt werden, wenn man die gegebene Grössenreihe

$$c_0,\ c_1,\ \dots\ c_{2\nu-1}$$

in ganz beliebiger Weise bis $c_{2\mu+2\nu-2\lambda}$ fortsetzt.

Denkt man sich in den Bedingungen (K') die Determinante $|c_{p+q}|$ nach der letzten Verticalreihe entwickelt und durch die von Null verschiedene Determinante $|c_{i+k}|$ dividirt, so kommt

$$\text{(K}_{,}\text{)} \qquad \begin{array}{l} c_\tau + \gamma_{\lambda-1}c_{\tau-1} + \cdots + \gamma_1 c_{\tau-\lambda+1} + \gamma_0 c_{\tau-\lambda} = 0 \\ c_{\mu+\nu} + \gamma_{\lambda-1}c_{\mu+\nu-1} + \cdots + \gamma_1 c_{\mu+\nu-\lambda+1} + \gamma_0 c_{\mu+\nu-\lambda} \gtrless 0 \end{array} \qquad (\lambda\leqq\tau<\mu+\nu),$$

und da einerseits die Bedingungen (K°) aus den Eigenschaften der 2ν Grössen c, durch welche sie oben charakterisirt worden, unmittelbar hervorgehen, andrerseits die zweite dieser Eigenschaften eine offenbare Consequenz der Bedingungen (K,) ist, so kann die Reihe der 2ν Grössen c ebensowohl durch diese Bedingungen (K,), unter Hinzunahme der Bedingung $|c_{i+k}| \gtrless 0$, also dadurch charakterisirt werden,

> dass erstens die Determinante λ^{ter} Ordnung
>
> $$|c_{i+k}| \qquad (i,k=0,1,\dots\lambda-1)$$
>
> von Null verschieden ist, und dass zweitens für die ersten $\mu+\nu$ Glieder der Reihe c, aber auch nur für diese, eine lineare Recursionsformel λ^{ter} Ordnung besteht.

Hierbei ist nochmals hervorzuheben, dass die unter den Bedingungen (K′) enthaltene Gleichung

$$|c_{p+q}| = 0 \qquad {\scriptstyle (p=0,1,\dots\lambda;\ q=0,1,\dots\lambda-1,\tau-\lambda)}$$

für die Werthe

$$\tau = \lambda, \quad \lambda+1, \quad \dots \ \mu+\nu-1$$

eine lineare, für die ersten $\mu+\nu$ Glieder der Reihe c geltende Recursionsformel darstellt, welche mit der Formel (K) übereinstimmt, da deren Coëfficienten γ den Unterdeterminanten proportional sind, welche die Coëfficienten der Entwickelung von $|c_{p+q}|$ nach der letzten Verticalreihe bilden.

Um für die Reihe der 2ν hier charakterisirten Grössen c die *allgemeinste* Recursionsformel aufzustellen, welche von Anfang an und mindestens ν mal hintereinander Geltung hat, bedarf es, wie schon am Schlusse des Art. III bemerkt worden, der vollständigen Auflösung des dort mit (D) bezeichneten Gleichungssystems

$$\sum_p \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad {\scriptstyle (p=0,1,\dots\nu;\ q=0,1,\dots\nu-1)},$$

in welchem die Verhältnisse der $\nu+1$ Coëfficienten β die zu bestimmenden Grössen sind. Ersetzt man jede der Gleichungen (D), welche einem Werthe $q \geqq \lambda$ entspricht, durch das Aggregat

$$(\mathrm{D}^\circ) \qquad \sum_p \beta_p c_{p+q} + \gamma_{\lambda-1} \sum_p \beta_p c_{p+q-1} + \dots + \gamma_0 \sum_p \beta_p c_{p+q-\lambda} = 0 \qquad {\scriptstyle (p=0,1,\dots\nu)},$$

so gelangt man zu $\nu-\lambda$ Gleichungen (D°), von denen die ersten $\mu-\lambda$, den Werthen $q=\lambda$, $\lambda+1$, $\dots\ \mu-1$ entsprechenden, vermöge der bis zu $\tau=\mu+\nu-1$ gültigen Recursionsformel (K) von selbst erfüllt sind, während jede der folgenden $\nu-\mu$ Gleichungen (D°), die einem Werthe

$$q = \mu + \varkappa \qquad {\scriptstyle (\varkappa=0,1,\dots\nu-\mu-1)}$$

entspricht, sich auf die Glieder, welche mit β_ν, $\beta_{\nu-1}$, $\dots\beta_{\nu-\varkappa}$ multiplicirt sind, reducirt. Dabei hat $\beta_{\nu-\varkappa}$ den Factor

$$c_{\mu+\nu} + \gamma_{\lambda-1} c_{\mu+\nu-1} + \dots + \gamma_0 c_{\mu+\nu-\lambda},$$

welcher von Null verschieden ist, da die Recursionsformel (K) der Voraussetzung nach für $\tau=\mu+\nu$ nicht mehr Geltung hat. Aus den Gleichungen (D°) für $q=\mu$, $\mu+1$, $\dots\ \nu-1$ ergeben sich daher nach einander die Werthe

$$\beta_\nu = 0, \quad \beta_{\nu-1} = 0, \quad \dots\ \beta_{\mu+1} = 0,$$

und das Gleichungssystem (D) reducirt sich demgemäss auf das folgende

$$(\mathrm{L}) \qquad \sum_h \beta_h c_{h+k} = 0 \qquad {\scriptstyle (h=0,1,\dots\mu;\ k=0,1,\dots\lambda-1)},$$

aus welchem sich die $\mu+1$ Grössen β, da nur λ Gleichungen vorhanden sind, mit einer $(\mu-\lambda+1)$fachen Unbestimmtheit ergeben.

Führt man an Stelle der $\mu+1$ Grössen β ebenso viele Grössen α mittels der Gleichungen

$$(\mathrm{M}^\circ) \qquad \beta_h = \alpha_h + \alpha_{h+1}\gamma_{\lambda-1} + \alpha_{h+2}\gamma_{\lambda-2} + \dots + \alpha_{h+\lambda}\gamma_0 \qquad {\scriptstyle (h=0,1,\dots\mu)}$$

ein, in denen diejenigen Grössen α, deren Index grösser als μ ist, gleich Null zu nehmen sind, so geht die Gleichung (L) in

$$(\mathrm{L}') \qquad \sum_h \alpha_h c_{h+k} + \gamma_{\lambda-1} \sum_h \alpha_{h+1} c_{h+k} + \dots + \gamma_0 \sum_h \alpha_{h+\lambda} c_{h+k} = 0 \qquad {\scriptstyle (h=0,1,\dots\mu)}$$

über, und die $\mu+1$ Grössen α_0, α_1, $\dots\ \alpha_\mu$ sind demnach so zu bestimmen, dass diese Gleichung (L′) für jeden der Werthe $k=0$, 1, $\dots\ \lambda-1$ erfüllt wird. In der Gleichung (L′) werden nun die Coëfficienten von

$$\alpha_\lambda, \quad \alpha_{\lambda+1}, \quad \dots\ \alpha_\mu$$

vermöge der Recursionsformel (K) gleich Null, und zwar, da diese für die ersten $\mu+\nu$ Grössen c gilt, für jeden der Werthe $k=0$, 1, $\dots\ \nu-1$; die Gleichung (L′) reducirt sich daher auf die Gleichung

$$(\mathrm{L}'') \qquad \sum_h (\alpha_h + \alpha_{h+1}\gamma_{\lambda-1} + \alpha_{h+2}\gamma_{\lambda-2} + \dots + \alpha_{\lambda-1}\gamma_{h+1}) c_{h+k} = 0 \qquad {\scriptstyle (h=0,1,\dots\lambda-1)},$$

in welcher $\gamma_\lambda = 1$ zu nehmen ist, und diese Gleichung (L′) kann für die λ Werthe $k = 0, 1, \dots \lambda - 1$, da die Determinante

$$|c_{h+k}| \qquad {\scriptstyle (h, k = 0, 1, \dots \lambda - 1)}$$

von Null verschieden ist, nur dadurch befriedigt werden, dass für jeden der Werthe $h = 0, 1, \dots \lambda - 1$ der Ausdruck

$$\alpha_h + \alpha_{h+1}\gamma_{\lambda-1} + \alpha_{h+2}\gamma_{\lambda-2} + \cdots + \alpha_{\lambda-1}\gamma_{h+1}$$

und also jede der λ Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{\lambda-1}$ selbst gleich Null wird. Die allgemeine Auflösung der Gleichungen (L) wird hiernach durch die Gleichung (M°) gegeben, wenn darin $\alpha_\lambda, \alpha_{\lambda+1}, \dots \alpha_\mu$ als willkürliche Grössen, die übrigen α aber, deren Index kleiner als λ oder grösser als μ ist, gleich Null angenommen werden. Da nun bei diesen Festsetzungen der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (M°) für die zwischen μ und ν liegenden Werthe von h verschwindet, für welche auch β_h in den Gleichungen (D) gleich Null zu setzen ist, so wird die allgemeine und vollständige Auflösung des Gleichungssystems

$$\text{(D)} \qquad \sum_p \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad {\scriptstyle (p = 0, 1, \dots \nu;\; q = 0, 1, \dots \nu - 1)},$$

von welchem ausgegangen wurde, durch die Formel

$$\text{(M)} \qquad \beta_p = \alpha_p + \alpha_{p+1}\gamma_{\lambda-1} + \alpha_{p+2}\gamma_{\lambda-2} + \cdots + \alpha_{p+\lambda}\gamma_0 \qquad {\scriptstyle (p = 0, 1, \dots \nu)}$$

gegeben, wenn

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \dots \alpha_{\lambda-1} = 0; \quad \alpha_{\mu+1} = 0, \quad \alpha_{\mu+2} = 0, \quad \dots \alpha_{\nu+\lambda} = 0$$

gesetzt wird, die Grössen

$$\alpha_\lambda, \quad \alpha_{\lambda+1}, \quad \dots \alpha_\mu$$

aber willkürlich bleiben, und auf Grund der Formel (M) werden die Grössen β_p den Determinanten $(\lambda + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$|c_h, \quad c_{h+1}, \quad \dots c_{h+\lambda-1}, \quad \alpha_{p-h+\lambda}| \qquad {\scriptstyle (h = 0, 1, \dots \lambda)}$$

proportional.

Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (D) wird, wenn man den Werth von β_p aus der Formel (M) entnimmt,

$$\sum_{p=\lambda}^{p=\mu} \alpha_p (c_{p+q} + \gamma_{\lambda-1} c_{p+q-1} + \cdots + \gamma_0 c_{p+q-\lambda}),$$

und jede der Gleichungen (D) selbst wird hiernach ein Aggregat von $\mu - \lambda + 1$ mit willkürlichen Coëfficienten α multiplicirten Recursionsformeln (K), welche $\mu - \lambda + 1$ aufeinanderfolgenden Werthen von τ entsprechen. Dies ist aber der vorstehenden Entwickelung zufolge die allgemeinste Art und Weise des Bestehens der Gleichungen (D), oder mit anderen Worten, die allgemeinste Art und Weise für die Reihe der Grössen c eine lineare Recursionsformel aufzustellen, welche vom Anfang an ν mal hinter einander Geltung hat und daher höchstens ν^{ter} Ordnung ist (vgl. den Schluss des Art. III). Es giebt also keine andern, ν mal nach einander auf die Grössenreihe $c_0, c_1, c_2, \dots$ anwendbaren Recursionsformeln als solche, die aus der Recursionsformel λ^{ter} Ordnung (K) entstehen, wenn darin für τ eine Anzahl aufeinanderfolgender Werthe genommen, jede der bezüglichen Formeln mit einem beliebigen Coëfficienten multiplicirt und alsdann ein Aggregat aus allen diesen Formeln gebildet wird. Die Recursionsformel (K) ist deshalb als eine *„primitive“* und jedes in der angegebenen Weise gebildete Aggregat als eine *„derivirte“* oder *„abgeleitete“* Recursionsformel zu bezeichnen. Auf Grund dessen ist dann die Reihe $c_0, c_1, \dots c_{2\nu-1}$ endlich dadurch zu charakterisiren,

> dass für dieselbe eine primitive lineare Recursionsformel λ^{ter} Ordnung besteht, welche aber nur für die ersten $\mu + \nu$ Glieder Geltung hat.

Geht man von dieser Art der Charakterisirung der Reihe $c_0, c_1, \dots c_{2\nu-1}$ aus, so ergiebt sich die primitive Recursionsformel selbst aus den λ Gleichungen, welche die Bedingung enthalten, dass jede der Grössen $c_\lambda, c_{\lambda+1}, \dots c_{2\lambda-1}$ sich mittels der Formel (K) linear durch die λ unmittelbar vorhergehenden darstellen lässt. Die allgemeinste abgeleitete Recursionsformel, welche von der Ordnung μ ist, geht alsdann in der oben angegebenen Weise aus der primitiven hervor.

XII.

In dem besonderen Falle, wo $\lambda = \mu = \nu$ ist, bilden die 2ν Grössen c, wie am Schlusse des Art. VIII erwähnt worden, die ersten 2ν Coëfficienten der Entwickelung eines Bruches nach fallenden Potenzen von x, der in seiner reducirten Form einen Nenner ν^{ten} Grades hat. Es kann aber nunmehr auch für eine ganz beliebige Reihe von 2ν Grössen c der einfachste Bruch, d. h. ein solcher mit einem Nenner von möglichst niedrigem Grade bestimmt werden, dessen Entwickelung nach fallenden Potenzen von x mit

$$c_0 x^{-1} + c_1 x^{-2} + \cdots + c_{2\nu-1} x^{-2\nu}$$

beginnt, so dass die 2ν gegebenen Grössen c die ersten Entwickelungs-coëfficienten bilden.

Gemäss den Ausführungen im Art. VIII und IX ist das Bestehen einer primitiven linearen Recursionsformel λ^{ter} Ordnung charakteristisch für die Coëfficienten der Entwickelung eines Bruches, welcher in der reducirten Form einen Nenner λ^{ten} Grades hat. Sind daher die 2ν Grössen c so beschaffen, dass $\mu = \nu$ ist, d. h. dass die primitive Recursionsformel λ^{ter} Ordnung (K) für alle 2ν Grössen c Geltung hat, so sind sie die ersten 2ν Coëfficienten für den Bruch $\frac{C^{(\lambda)}(x)}{D^{(\lambda)}(x)}$ nach der im Art. VIII angenommenen Bezeichnungsweise. Ist aber $\mu < \nu$, so kann die gegebene Grössenreihe $c_0, c_1, \ldots c_{2\nu-1}$ in ganz beliebiger Weise, wie schon oben im Art. XI bei den Bedingungen (K″) ausgeführt ist, bis zum $2(\mu + \nu - \lambda + 1)^{\text{ten}}$ Gliede fortgesetzt werden, um aus diesen $2(\mu + \nu - \lambda + 1)$ Coëfficienten c einen Bruch $\frac{C^{(m)}(x)}{D^{(m)}(x)}$ zu bilden, dessen Nenner vom Grade $m = \mu + \nu - \lambda + 1$ ist, und in dessen Entwickelung nach fallenden Potenzen von x jene 2ν Grössen c die ersten 2ν Coëfficienten sind. Der Nachweis, dass es keinen Bruch mit einem Nenner von niedrigerem Grade giebt, der die verlangte Eigenschaft besitzt, kann darauf gestützt werden, dass nach den Bedingungen $(G^{(m)})$ im Art. IX, wenn der Nenner vom m^{ten} Grade sein soll, die Determinante

$$|c_{i+k}| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots m-1)$$

von Null verschieden sein, und dass ferner gemäss der ersten Bestimmungsweise im Art. VII eine lineare Recursionsformel m^{ter} Ordnung für *alle* Grössen c bestehen müsste. Da nämlich auf Grund der Bedingungen (K″) im Art. XI alle Determinanten $|c_{i+k}|$ für Werthe von m, die zwischen λ und $\mu + \nu - \lambda + 1$ liegen, gleich Null sind, so könnte, wenn $m < \mu + \nu - \lambda + 1$ sein soll, nur $m = \lambda$ sein, während auf Grund der zweiten Art der Charakterisirung der Grössen c im Art. XI die lineare Recursionsformel λ^{ter} Ordnung nicht für alle 2ν Glieder der Reihe c, sondern nur für die ersten $\mu + \nu$ derselben Geltung hat.

Die Zahl $\mu + \nu - \lambda$ giebt an, wie vielmal nacheinander die Recursionsformel λ^{ter} Ordnung auf die Grössenreihe c anwendbar ist; man kann also das obige Resultat folgendermassen formuliren:

„Der niedrigste Grad des Nenners eines Bruches, dessen Entwickelung nach fallenden Potenzen von x mit

$$c_0 x^{-1} + c_1 x^{-2} + \cdots + c_{2\nu-1} x^{-2\nu}$$

beginnt, bestimmt sich durch jene mindestens νmal nacheinander anwendbare Recursionsformel, welche nach Art. XI einer jeden Grössenreihe $c_0, c_1, \ldots c_{2\nu-1}$ zugehört; und zwar ist der Grad gleich der Ordnung der Recursionsformel, wenn dieselbe für *alle* 2ν Grössen c besteht, wenn dies aber nicht der Fall ist, so ist der Grad um Eins grösser als die Zahl, welche angiebt, wie vielmal nacheinander die Recursionsformel Anwendung findet.“

Schliesslich ist noch hervorzuheben, dass gemäss den am Ende des Art. III enthaltenen Darlegungen *alle* Brüche, deren Entwickelung mit jenen 2ν Gliedern anfängt, dadurch charakterisirt werden können, dass jene besonderen (mit Nennern niedrigsten Grades) Näherungsbrüche derselben sind.

XIII.

Setzt man die durch die Gleichungen (D) bestimmten Werthe der Coëfficienten β_p, wie sie sich aus der Formel (M) im Art. XI ergeben, in der nach Art. III für $\Psi(x)$ zu nehmenden Function

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_\nu x^\nu$$

ein, so wird dieselbe gleich dem Product

$$(\gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + x^\lambda)(\alpha_\lambda + \alpha_{\lambda+1} x + \cdots + \alpha_\mu x^{\mu-\lambda})$$

d. h., da die Grössen α willkürlich sind, gleich einer beliebigen, durch

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + x^\lambda$$

theilbaren ganzen Function μ^{ten} Grades. Dieser Ausdruck λ^{ten} Grades ist gleich der im Art. VIII mit $D^{(\lambda)}(x)$ bezeichneten Determinante, dividirt durch

$$|c_{i+k}| \qquad {\scriptstyle (i,\,k=0,\,1,\,\ldots\,\lambda-1)},$$

und es wird daher

$$\text{(N}^*\text{)} \qquad \Psi(x) = D^{(\lambda)}(x) E^{(\mu-\lambda)}(x),$$

wo $E^{(\mu-\lambda)}(x)$ eine beliebige ganze Function vom Grade $\mu - \lambda$ bedeutet.

Die ganze Function $\sum \beta_p x^p$, deren Coëfficienten durch die Gleichungen

$$\text{(D)} \qquad \sum_p \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad {\scriptstyle (p=0,\,1,\,\ldots\,\nu;\ q=0,\,1,\,\ldots\,\nu-1)}$$

bestimmt werden, lässt sich nach Art. V (E′) direct durch eine Determinante der Ordnung $\nu - \mu + \lambda + 1$ darstellen. Geht man nämlich von jener ersten Art der Charakterisirung der Grössen c aus, so hat man in der darstellenden Determinante die Reihen wegzulassen, deren Index $q = \lambda, \lambda + 1, \ldots \mu - 1$

ist, und man erhält, wenn man die Verticalreihen umstellt, zur Darstellung von $\Psi(x)$ eine Determinante, deren erste $\lambda + 1$ Colonnen

$$\begin{array}{llll}
1, & x, & \ldots\, x^{\lambda-1}, & \beta_\lambda x^\lambda + \cdots + \beta_\mu x^\mu \\
c_0, & c_1, & \ldots\, c_{\lambda-1}, & \beta_\lambda c_\lambda + \cdots + \beta_\mu c_\mu \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
c_{\lambda-1}, & c_\lambda, & \ldots\, c_{2\lambda-2}, & \beta_\lambda c_{2\lambda-1} + \cdots + \beta_\mu c_{\mu+\lambda-1} \\
c_\mu, & c_{\mu+1}, & \ldots\, c_{\mu+\lambda-1}, & \beta_\lambda c_{\mu+\lambda} + \cdots + \beta_\mu c_{2\mu} \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
c_{\nu-1}, & c_\nu, & \ldots\, c_{\nu+\lambda-2}, & \beta_\lambda c_{\nu+\lambda-1} + \cdots + \beta_\mu c_{\nu+\mu-1}
\end{array}$$

sind, während

$$\begin{array}{lll}
x^{\mu+1}, & x^{\mu+2}, & \ldots\, x^\nu \\
c_{\mu+1}, & c_{\mu+2}, & \ldots\, c_\nu \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
c_{\mu+\lambda}, & c_{\mu+\lambda+1}, & \ldots\, c_{\nu+\lambda-1} \\
c_{2\mu+1}, & c_{2\mu+2}, & \ldots\, c_{\nu+\mu} \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
c_{\nu+\mu}, & c_{\nu+\mu+1}, & \ldots\, c_{2\nu-1}
\end{array}$$

die letzten $\nu - \mu$ Colonnen bilden. Da nun vermöge der charakteristischen Eigenschaften der Grössen c jede aus dem Systeme

$$c_{p+q} \qquad {\scriptstyle (p=0,\,1,\,\ldots\,\mu;\ q=0,\,1,\,\ldots\,\nu-1)}$$

zu bildende Determinante $(\lambda + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwindet, so bestehen Relationen

$$c_{k+q} + \gamma_{\lambda-1}^{(q)} c_{k+\lambda-1} + \cdots + \gamma_1^{(q)} c_{k+1} + \gamma_0^{(q)} c_k = 0 \qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots \mu+\nu-q-1)}$$

für alle Indices q, und wenn also in jener Determinante der mit c_q beginnenden Horizontalreihe (für $q = \mu, \mu+1, \ldots \nu-1$) die λ^{te}, mit $\gamma_{\lambda-1}^{(q)}$ multiplicirt, die $(\lambda-1)^{\text{te}}$, mit $\gamma_{\lambda-2}^{(q)}$ multiplicirt, u. s. w. hinzugefügt wird, so werden alle Elemente der $(\lambda+2)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe mit Ausnahme des letzten, alle Elemente der $(\lambda+3)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe mit Ausnahme der zwei letzten u. s. w. gleich Null, und die Determinante reducirt sich auf die aus den ersten $\lambda+1$ Horizontal- und Verticalreihen gebildete Determinante $(\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{vmatrix} 1 & , x, \ldots x^{\lambda-1}, & \beta_\lambda x^\lambda & + \cdots + \beta_\mu x^\mu \\ c_0 & , c_1, \ldots c_{\lambda-1}, & \beta_\lambda c_\lambda & + \cdots + \beta_\mu c_\mu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{\lambda-1}, & c_\lambda, \ldots c_{2\lambda-2}, & \beta_\lambda c_{2\lambda-1} & + \cdots + \beta_\mu c_{\mu+\lambda-1} \end{vmatrix},$$

multiplicirt mit dem Producte der Ausdrücke

$$c_{\nu+\mu} + \gamma_{\lambda-1}^{(q)} c_{\nu+\lambda-1} + \cdots + \gamma_0^{(q)} c_\nu,$$

welche nach den über die Grössen c gemachten Annahmen sämmtlich von Null verschieden sind. Diese Determinante $(\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist nach dem, was im Art. X von der analogen Determinante (H) bewiesen worden, gleich der mit $D^{(\lambda)}(x)$ bezeichneten Determinante, multiplicirt mit einer ganzen Function vom Grade $\mu-\lambda$, deren Coëfficienten lineare homogene Functionen von $\beta_\lambda, \beta_{\lambda+1}, \ldots \beta_\mu$ sind, und es resultirt daher auch auf diesem directen Wege, dass $\Psi(x)$ eine beliebige, durch die Determinante $D^{(\lambda)}(x)$ theilbare ganze Function μ^{ten} Grades sein muss.

Die hier durch Auflösung des Gleichungssystems (D) erlangte Bestimmung von $\Psi(x)$ ist nun noch dadurch zu vervollständigen, dass die in der Gleichung (C) zugehörige Function $\Phi(x)$ ebenfalls durch die Grössen c ausgedrückt wird. Zu diesem Behufe braucht man nur analog mit (N')

(N) $$\Psi(x) = D^{(\lambda)}(x) E^{(\mu-\lambda)}(x), \qquad \Phi(x) = C^{(\lambda)}(x) E^{(\mu-\lambda)}(x)$$

zu setzen; denn gemäss den Gleichungen (C'') im Art. III und (F'') im Art. VIII wird

(O) $$f_1(x) D^{(\lambda)}(x) - f(x) C^{(\lambda)}(x) = f(x) \sum_t |c_{p+q}| x^{-t-1}$$
$${\scriptstyle (p=0,1,\ldots\lambda;\ q=0,1,\ldots\lambda-1,t;\ t=\lambda,\lambda+1,\ldots)},$$

und da vermöge der Eigenschaften der Grössen c die Determinanten $|c_{p+q}|$ für alle unter $\mu+\nu-\lambda$ liegenden Werthe von t verschwinden, so braucht man die Summation in Bezug auf t erst mit diesem Werthe beginnen zu lassen, so dass der Ausdruck rechts evident höchstens vom Grade $n-\nu-(\mu-\lambda)-1$ wird. Die mit einer beliebigen ganzen Function $(\mu-\lambda)^{\text{ten}}$ Grades $E^{(\mu-\lambda)}(x)$ multiplicirte Gleichung (O) giebt also unmittelbar die zur Erfüllung der Gleichung

(C) $$f_1(x)\Psi(x) - f(x)\Phi(x) = F(x)$$

genügenden Bestimmungen (N) für $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ nebst der Bestimmung

(N') $$F(x) = f(x) E^{(\mu-\lambda)}(x) \sum_t |c_{p+q}| x^{-t-1}$$
$${\scriptstyle (p=0,1,\ldots\lambda;\ q=0,1,\ldots\lambda-1,t;\ t=\mu+\nu-\lambda,\mu+\nu-\lambda+1,\ldots)}$$

durch die als gegeben betrachteten Grössen c, wenn diese nur gemäss der zweiten Art der Charakterisirung so beschaffen vorausgesetzt werden, dass die Bedingungen

$$\underset{(i,k=0,1,\ldots\lambda-1)}{|c_{i+k}| \gtrless 0}, \qquad \underset{(p=0,1,\ldots\lambda;\ q=0,1,\ldots\lambda-1,t;\ t<\mu+\nu-\lambda)}{|c_{p+q}| = 0}$$

erfüllt sind. Dass diese Bestimmungen von $F(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ nicht bloss genügende, sondern auch nothwendige sind, leuchtet ein, wenn man, wie im Art. I, aus zwei Gleichungen

$$f_1(x)\Psi(x) - f(x)\Phi(x) = F(x), \qquad f_1(x)\Psi_1(x) - f(x)\Phi_1(x) = F_1(x)$$

die Gleichung

$$f(x)\big(\Psi(x)\Phi_1(x) - \Psi_1(x)\Phi(x)\big) = F(x)\Psi_1(x) - F_1(x)\Psi(x)$$

und aus dieser wiederum erschliesst, dass, da der Ausdruck rechts von niedrigerem als dem n^{ten} Grade ist,

$$\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = \frac{\Phi_1(x)}{\Psi_1(x)},$$

folglich auch

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Psi_1(x)} = \frac{C^{(\lambda)}(x)}{D^{(\lambda)}(x)},$$

und also endlich

$$\Phi_1(x) = E_1^{(\mu-\lambda)}(x)C^{(\lambda)}(x), \qquad \Psi_1(x) = E_1^{(\mu-\lambda)}(x)D^{(\lambda)}(x)$$

sein muss, wenn $C^{(\lambda)}(x)$ und $D^{(\lambda)}(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Dies aber erhellt, wie schon im Art. IX erwähnt worden, aus der Gleichung (F) im Art. VIII mit Berücksichtigung der Voraussetzung, dass die aus den ersten λ Horizontal- und Verticalreihen der Grössen c_{i+k} gebildete Determinante von Null verschieden ist. *Hiernach ist es jene einfache im Art. VIII entwickelte Determinanten-Umformung allein, welche in der Gleichung* (O) *die vollständige Lösung der Aufgabe enthält, die der Gleichung* (C) *genügenden Functionen F, Φ, Ψ durch die ersten 2ν Coëfficienten der Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ auszudrücken.*

XIV.

Vergleicht man die am Schlusse des vorigen Abschnittes gegebene Bestimmung für eine der Gleichung (C) genügende Function ν^{ten} Grades $\Psi(x)$ mit derjenigen, welche am Schlusse des Art. I auf Grund der Kettenbruchsentwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ bei $(\bar{C})$ formulirt worden ist, so gelangt man zu dem Ergebniss, dass, wenn ν zwischen den beiden Zahlen

$$n_k - 1 \quad \text{und} \quad n_{k+1}$$

liegt, das Product

$$E^{(\mu-\lambda)}(x)D^{(\lambda)}(x)$$

eine beliebige durch den Nenner des k^{ten} Näherungsbruches $\psi_k(x)$ theilbare ganze Function darstellen muss, für welche der Grad des Quotienten kleiner als jeder der beiden Abstände der Zahl ν von den beiden Grenzen $n_k - 1$ und n_{k+1} ist. Es kann hiernach $\mu - \lambda$ nur genau um eine Einheit kleiner als der kleinere dieser beiden Abstände sein, und $D^{(\lambda)}(x)$ kann sich nur durch einen constanten Factor von $\psi_k(x)$ unterscheiden. Demgemäss ist

$$\lambda = n_k,$$

also, wenn mit η_k der Coëfficient der höchsten Potenz von x in $\psi_k(x)$ bezeichnet wird,

$$\text{(P)} \qquad \eta_k \cdot D^{(\lambda)}(x) = |c_{h+i}| \cdot \psi_k(x) \qquad {\scriptstyle (h,\,i=0,1,\dots\lambda-1)},$$

und

$$\text{für } \nu < \tfrac{1}{2}(n_k + n_{k+1}), \quad \mu - \lambda = \nu - n_k \qquad \text{also } \mu = \nu,$$

$$\text{für } \nu \geqq \tfrac{1}{2}(n_k + n_{k+1}), \quad \mu - \lambda = n_{k+1} - \nu - 1 \qquad \text{also } \mu = n_k + n_{k+1} - \nu - 1.$$

Da ferner für $\nu = n_{k+1} - 1$, ebenso wie für $\nu = n_k$, der Werth von μ gleich dem von λ und also $E^{(\mu-\lambda)}(x)$ gleich einer Constanten wird, so ist

$$\text{(P')} \qquad (-1)^{\nu+n_k}\eta_k \cdot D^{(\nu)}(x) = |c_{f+g}| \cdot \psi_k(x) \quad \left({\scriptstyle f=0,1,\dots\nu \text{ ausser } f=n_k \atop \scriptstyle g=0,1,\dots\nu-1;\ \nu=n_{k+1}-1}\right).$$

Bei eben diesem Werthe $\nu = n_{k+1} - 1$ und für den Fall $n_{k+1} - 1 > n_k$ ergiebt sich ferner gemäss der ersten im Art. XI gegebenen Charakterisirung der Grössen c, da hier $\lambda = \mu = n_k$ ist, dass

alle aus dem Systeme

$$c_{p+q} \qquad {\scriptstyle (p=0,1,\dots n_k;\ q=0,1,\dots n_{k+1}-2)}$$

(Q') zu bildenden Determinanten der Ordnung $n_k + 1$ verschwinden, und dass — wie schon die Gleichung (P) zeigt —

$$|c_{h+i}| \gtrless 0 \qquad {\scriptstyle (h,\,i=0,1,\dots n_k-1)}$$

ist.

Die 2ν Grössen $c_0, c_1, \ldots c_{2\nu-1}$ erfüllen also für den vorliegenden Fall $\nu = n_{k+1} - 1$ die Bedingungen

$$\text{(Q)} \qquad \underset{(h,\, i=0,1,\ldots n_k-1),}{|c_{h+i}| \gtrless 0}\,, \qquad \underset{(p=0,1,\ldots n_k;\; q=0,1,\ldots n_k-1,t;\; t<n_{k+1}-1),}{|c_{p+q}| = 0}$$

welche unmittelbar aus der zweiten Art der Charakterisirung im Art. XI mit Hülfe der Gleichung (K′) hervorgehen, wenn dort

$$\lambda = \mu - n_k\,, \quad \nu = n_{k+1} - 1\,, \quad \tau - \lambda = t$$

gesetzt wird, und es können auch an Stelle der Bedingungen (Q') die folgenden treten:

$$\text{(Q′)} \qquad \underset{(h,\, i=0,1,\ldots n_k-1),}{|c_{h+i}| \gtrless 0}\,, \qquad \underset{(p,\, q=0,1,\ldots t;\; n_k \leq t < n_{k+1}-1)}{|c_{p+q}| = 0}\,,$$

welche besagen, dass unter den Determinanten

$$|c_{p+q}| \qquad (p,\, q=0,1,\ldots t-1)\,,$$

die den verschiedenen Ordnungen $t = 1, 2, 3, \ldots n_{k+1} - 1$ angehören, diejenige der Ordnung n_k die letzte von Null verschiedene ist.

Die Formulirung der Bedingungen (Q'), (Q), (Q′) knüpft an die im Art. I den Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ beigelegte Bedeutung an, wonach dieselben als die Grade der verschiedenen Nenner der Näherungsbrüche $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ definirt sind. Die Bedingungen selbst constituiren jene Haupteigenschaften der Grössen c, die ich zuerst (unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ nur aus ungleichen Factoren bestehe) im Art. IV meines im Eingang citirten Aufsatzes vom Februar 1873 entwickelt habe. Es ergiebt sich aus denselben unmittelbar, dass die Determinanten $D^{(m)}(x)$, für welche der Index m *zwischen* zwei Zahlen n_k und $n_{k+1} - 1$ liegt, für welche also

$$n_k < m < n_{k+1} - 1$$

ist, identisch gleich Null sind, weil die Determinanten, welche die Coëfficienten bilden, sämmtlich verschwinden; es folgt ferner daraus, namentlich aus den

Bedingungen (Q′), dass die ganze Reihe der durch die Gleichung (C″) im Art. III

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \sum_{h=0}^{h=\infty} c_h x^{-h-1}$$

definirten Entwickelungscoëfficienten c dadurch charakterisirt wird, dass für alle von $n_1, n_2, n_3, \ldots$ verschiedenen Werthe von t

$$|c_{p+q}| = 0 \qquad (p,\, q=0,1,\ldots t-1)$$

ist. An Stelle der im Art. I den Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ beigelegten Bedeutung kann daher auch die folgende Definition treten:

Es sind $n_1, n_2, n_3, \ldots$ die Ordnungszahlen derjenigen Determinanten

$$\text{(R)} \qquad |c_0|\,, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \quad \ldots \qquad ,$$

welche von Null verschiedene Werthe haben.

Dabei ist zu bemerken, dass die Reihe dieser Zahlen, wie schon im Art. IX erwähnt ist, abbricht, und dass die letzte derselben gleich dem Grade von $f(x)$ abzüglich des Grades des grössten gemeinsamen Theilers von $f(x)$ und $f_1(x)$ sein muss. Aber die Uebereinstimmung der Ordnungszahlen der von Null verschiedenen Determinanten

$$|c_{p+q}| \qquad (p,\, q=0,1,\ldots t-1)$$

mit denen der Nenner der Näherungsbrüche eines die Reihe

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} c_h x^{-h-1}$$

darstellenden Kettenbruchs findet natürlich auch dann noch statt, wenn der Werth der Reihe nicht rational ist, da ja an deren Stelle, wenn die Uebereinstimmung der Ordnungszahlen $n_1, n_2, \ldots$ bis zu einer bestimmten Zahl n_ϱ nachgewiesen werden soll, die Reihe genommen werden kann, in welche einer der Näherungsbrüche höherer Ordnung zu entwickeln ist, d. h. ein solcher, deren Nenner von höherem Grade als n_ϱ ist.

XV.

Die im vorigen Abschnitte aus der allgemeinen und vollständigen Auflösung des Gleichungssystems

$$\text{(D)} \qquad \sum_p \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad \scriptstyle (p=0,1,\ldots\nu;\ q=0,1,\ldots\nu-1)$$

entwickelten Resultate können auch schon aus den einfachsten Fällen, wo ν gleich einer der Zahlen n_k ist, erschlossen werden, wenn man jene Fundamentalgleichung (F) im Art. VIII zu Hülfe nimmt, die überhaupt bei der Vergleichung der aus dem Kettenbruchsverfahren und der aus der Auflösung der linearen Gleichungen (D) resultirenden Bestimmungen die wesentliche Grundlage bildet.

Das Gleichungssystem (D) enthält, wie schon am Schlusse des III. Abschnittes dargelegt ist, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass der Rest der Division von

$$f_1(x) \sum_p \beta_p x^p \qquad \scriptstyle (p=0,1,\ldots\nu)$$

durch $f(x)$ höchstens vom Grade $n-\nu-1$ sein soll. Eine dieser Forderung entsprechende Function $\sum \beta_p x^p$ kann sich aber, wenn $\nu = n_k$ ist, nach Art. I von $\psi_k(x)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden, und es ergiebt sich daher, dass die Verhältnisse der Coëfficienten β durch die der Coëfficienten von $\psi_k(x)$ völlig bestimmt sind, dass also die dem Coëfficienten von x^{n_k} proportionale Determinante

$$|c_{h+i}| \qquad \scriptstyle (h,i=0,1,\ldots m-1;\ m=n_k)$$

von Null verschieden und, wie im vorigen Abschnitte,

$$\text{(P)} \qquad \eta_k D^{(m)}(x) = |c_{h+i}|\, \psi_k(x) \qquad \scriptstyle (h,i=0,1,\ldots m-1;\ m=n_k)$$

sein muss, wenn, wie a. a. O., η_k den Coëfficienten der höchsten Potenz von x in $\psi_k(x)$ bedeutet. Da nun gemäss der Gleichung (F″) im Art. VIII zwischen den Determinanten $C^{(m)}(x)$ und $D^{(m)}(x)$ die Relation

$$f_1(x) D^{(m)}(x) - f(x) C^{(m)}(x) = f(x) \sum_t |c_{h+i}|\, x^{-t-1}$$
$$\scriptstyle (h=0,1,\ldots m;\ i=0,1,\ldots m-1,t;\quad t=m,m+1,\ldots;\quad m=n_k)$$

besteht, welche $C^{(m)}(x)$ als den Quotienten bei der Division von $f_1(x) D^{(m)}(x)$ durch $f(x)$ charakterisirt, und da $\varphi_k(x)$ der Quotient der Division von $f_1(x)\psi_k(x)$ durch $f(x)$ ist, so folgt aus der Gleichung (P) die analoge Gleichung

$$(\overline{\text{P}}) \qquad \eta_k C^{(m)}(x) = |c_{h+i}|\, \varphi_k(x) \qquad \scriptstyle (h,i=0,1,\ldots m-1;\ m=n_k)\,.$$

Setzt man in der Relation (F) des Art. VIII

$$C^{(m)}(x) D^{(m-1)}(x) - C^{(m-1)}(x) D^{(m)}(x) = |c_{h+i}|^2 \qquad \scriptstyle (h,i=0,1,\ldots m-1)$$

die aus den Gleichungen (P) und ($\overline{\text{P}}$) zu entnehmenden Werthe von $C^{(m)}(x)$ und $D^{(m)}(x)$ ein, so erhält man die Gleichung

$$\varphi_k(x) D^{(m-1)}(x) - \psi_k(x) C^{(m-1)}(x) = \eta_k |c_{h+i}| \qquad \scriptstyle (h,i=0,1,\ldots m-1;\ m=n_k)\,,$$

aus deren Verbindung mit der Gleichung (B′) des Art. I,

$$\varphi_k(x)\psi_{k-1}(x) - \psi_k(x)\varphi_{k-1}(x) = 1\,,$$

folgt, dass

$$\varphi_k(x)\big(D^{(m-1)}(x) - \eta_k |c_{h+i}|\, \psi_{k-1}(x)\big) = \psi_k(x)\big(C^{(m-1)}(x) - \eta_k |c_{h+i}|\, \varphi_{k-1}(x)\big)\,,$$

und also, da $\varphi_k(x)$ und $\psi_k(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben und der Factor von $\varphi_k(x)$ von niedrigerem Grade als $\psi_k(x)$ ist,

$$\text{(P}''\text{)} \qquad C^{(m-1)}(x) = \eta_k |c_{h+i}|\, \varphi_{k-1}(x)\,, \qquad D^{(m-1)}(x) = \eta_k |c_{h+i}|\, \psi_{k-1}(x)$$
$$\scriptstyle (h,i=0,1,\ldots m-1;\ m=n_k)$$

sein muss. Die Determinante $D^{(m-1)}(x)$ ist hiernach wie $\psi_{k-1}(x)$ vom Grade n_{k-1}, und es ist ebenso, wenn $k+1$ für k gesetzt wird,

$$D^{(t)}(x) \quad \text{vom Grade} \quad n_k, \qquad \text{wenn} \quad t = n_{k+1} - 1 \quad \text{ist.}$$

Man kann also, falls $n_k + 1 < n_{k+1}$ ist, auf die Determinante $D^{(t)}(x)$ jene im zweiten Absatze des IV. Abschnittes entwickelte Deduction anwenden, wenn man dort

$$n = t = n_{k+1} - 1\,, \qquad m = n_k$$

$$a_{0h} = x^h \quad \text{und, wenn} \quad i > 0 \quad \text{ist,} \quad a_{ih} = c_{h+i-1}$$

setzt. Es ergiebt sich dabei unmittelbar jene oben mit (Q°) bezeichnete Eigenschaft der Grössen c, dass alle aus dem System

$$c_{h+i} \qquad \scriptstyle (h=0,1,\dots n_k;\ i=0,1,\dots n_{k+1}-2)$$

zu bildenden Determinanten der Ordnung $n_k + 1$ verschwinden, während die Determinante n_k^{ter} Ordnung

$$|\,c_{h+i}\,| \qquad \scriptstyle (h,\,i=0,1,\dots n_k-1)\,,$$

wie schon oben erschlossen worden, von Null verschieden ist.

Die Verbindung der Gleichungen (P) und (P″) führt zur Bestimmung der Coëfficienten η_k aus den Grössen c. Wird nämlich in der Gleichung (P) $k-1$ an Stelle von k gesetzt, so kommt

$$\eta_{k-1} D^{(l)}(x) = |\,c_{p+q}\,|\,\psi_{k-1}(x) \qquad \scriptstyle (p,\,q=0,1,\dots l-1;\ l=n_{k-1})\,,$$

und es ergiebt sich also mit Hülfe der zweiten Gleichung (P″) die Formel

$$\text{(S)} \qquad \eta_{k-1}\eta_k\,|\,c_{h+i}\,|\,D^{(l)}(x) = |\,c_{p+q}\,|\,D^{(m-1)}(x) \quad \left(\begin{smallmatrix} h,\,i=0,1,\dots m-1;\ m=n_k \\ p,\,q=0,1,\dots\ l-1;\ \ l=n_{k-1} \end{smallmatrix}\right),$$

mittels deren die Coëfficienten $\eta_1, \eta_2, \dots$ sich der Reihe nach durch die Grössen c bestimmen lassen. Vergleicht man nur die Coëfficienten der höchsten Potenz von x d. i. von x^l auf beiden Seiten der Gleichung (S), so entsteht die einfachere Formel

$$\text{(S')} \qquad (-1)^{n_k + n_{k-1} - 1}\,\eta_{k-1}\eta_k = \frac{|\,c_{f+g}\,|}{|\,c_{h+i}\,|} \quad \left(\begin{smallmatrix} f=0,1,\dots n_k-1 \text{ ausser } n_{k-1} \\ g=0,1,\dots n_k-2 \\ h,\,i=0,1,\dots n_k-1 \end{smallmatrix}\right),$$

mittels deren sich jeder Coëfficient η_k als Quotient von Determinanten durch die Grössen c ausdrücken lässt, und welche ihrem wesentlichen Inhalte nach mit der Formel (E) des Art. II in meinem Aufsatze vom 14. Febr. 1878 übereinstimmt.

XVI.

Benutzt man die dritte Art der Charakterisirung der Reihe c, welche am Schlusse des XI. Abschnittes gegeben worden ist, so zeigt sich, dass für die ersten $n_k + n_{k+1} - 1$ Glieder der Reihe c, aber nicht weiter, eine und dieselbe primitive lineare Recursionsformel der Ordnung n_k besteht. Denn es braucht zu diesem Behufe nur, wie im vorigen Abschnitte, der Fall $\nu = n_{k+1} - 1$ ins Auge gefasst zu werden, bei welchem die Ordnung λ der primitiven Recursionsformel gleich n_k und die Anzahl der Glieder $\mu + \nu$, für welche sie Geltung hat, gleich $n_k + n_{k+1} - 1$ wird. Die höchste Ordnung der überhaupt für die ersten 2ν Grössen c aufzustellenden (primitiven oder abgeleiteten) Recursionsformel übersteigt die Zahl $n_k - 1$ um diejenige Zahl, welche angiebt, aus wieviel primitiven die allgemeinste Recursionsformel zusammengesetzt werden kann. Diese ist nach Art. XI durch $\mu - \lambda + 1$, also nach Art. XIV durch

$$\nu - n_k + 1 \qquad \text{oder} \qquad n_{k+1} - \nu$$

ausgedrückt, wenn

$$n_k - 1 < \nu < n_{k+1}$$

ist, d. h. also durch den kleinsten Abstand der Zahl ν von den beiden Grenzen, zwischen denen sie liegt. Diese Zahl ist also für $\nu = n_k$ selbst gleich 1, die Zahl aber, welche die höchste Ordnung der Recursionsformeln angiebt, gleich n_k; beide Zahlen wachsen mit ν je um eine Einheit bis zur Mitte zwischen $n_k - 1$ und n_{k+1} und nehmen dann ebenso wieder ab, bis sie für $\nu = n_{k+1} - 1$ wieder dieselben Werthe 1 und n_k wie für $\nu = n_k$ erhalten.

Am Ende des III. Abschnittes ist bemerkt worden, dass die Aufgabe der Bestimmung der allgemeinsten dem Gleichungssysteme

$$\text{(D)}\qquad \sum_p \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad {\scriptstyle (p=0,\,1,\,\ldots\,\nu;\; q=0,\,1,\,\ldots\,\nu-1)}$$

genügenden Werthe von $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_\nu$ auch als Problem der Aufstellung der allgemeinsten linearen Recursionsformel für die Reihe der 2ν Grössen $c_0, c_1, \ldots c_{2\nu-1}$ aufgefasst werden kann, wenn man die Recursionsformel durch die Forderung beschränkt, dass sie von Anfang der Reihe an und mindestens ν mal hinter einander Geltung habe. Da die Ordnung einer solchen Recursionsformel höchstens gleich ν ist, so hat sie die Eigenschaft

(T) vom Anfang der Reihe an und mindestens sovielmal nach einander, als ihre Ordnungszahl beträgt, Anwendung zu finden,

eine Eigenschaft, *bei welcher die Anzahl der Glieder der Reihe nicht mehr in Betracht kommt,* und welche dadurch ausgedrückt werden kann, dass eine Recursionsformel λ^{ter} Ordnung, wie jene im Art. XI mit (K) bezeichnete

$$c_{t+\lambda} = -\sum_p \gamma_p c_{p+t} \qquad {\scriptstyle (p=0,\,1,\,\ldots\,\lambda-1)}$$

für die Werthe $t = 0, 1, \ldots \lambda - 1$ bestehen müsse. Wenn man diese in der That wesentliche Eigenschaft linearer Recursionsformeln festhält, jene frühere im Art. III aufgestellte, an die Anzahl der Glieder der Reihe anknüpfende Forderung aber fallen lässt, so findet das Problem der Aufstellung *aller* linearen Recursionsformeln für die Reihe der durch die Gleichung (C″) im Art. III und im Art. XIII

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \sum_{h=0}^{h=\infty} c_h x^{-h-1}$$

definirten Entwickelungscoëfficienten c gemäss dem Inhalte des vorigen Abschnittes folgende Lösung:

Sind $n_1, n_2, n_3, \ldots$, wie im Art. I, als die verschiedenen Grade der Näherungsbrüche von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ oder auch, wie im Art. XIV (R), als Ordnungszahlen gewisser aus den Coëfficienten c gebildeten Determinanten definirt, so existiren *erstens primitive* lineare Recursionsformeln nur von eben diesen Ordnungen $n_1, n_2, n_3, \ldots$, *zweitens* aus jeder primitiven Recursionsformel der Ordnung n_k abgeleitete der Ordnungen $n_k + 1, n_k + 2, \ldots$ mit der einzigen Bedingung, dass diese Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}(n_k + n_{k+1})$ bleibt. Jede dieser Recursionsformeln der Ordnungen $n_k, n_k + 1, n_k + 2, \ldots$ gilt bis zum $(n_k + n_{k+1} - 1)^{\text{ten}}$ Gliede der Reihe $c_0, c_1, c_2, \ldots$. (U)

Offenbar erhält man nämlich die Gesammtheit der linearen Recursionsformeln von der Eigenschaft (T), wenn man, um der Reihe nach die Recursionsformeln erster, zweiter, dritter Ordnung u. s. w. aufzustellen, für alle Werthe $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die dem Gleichungssysteme (D) im Art. III

$$\sum_p \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad {\scriptstyle (p=0,\,1,\,\ldots\,\nu;\; q=0,\,1,\,\ldots\,\nu-1)}$$

gemäss der Formel (M) im Art. XI genügenden Werthsysteme von $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_\nu$ bestimmt, hiervon aber nur diejenigen beibehält, für welche $\mu = \nu$ ist, da vermöge der erwähnten Formel jedes β, dessen Index grösser als μ ist, gleich Null wird, und die Erfüllbarkeit des Gleichungssystems (D), mit der Bedingung $\beta_\nu \gtrless 0$, nothwendig und hinreichend für die Existenz einer linearen Recursionsformel ν^{ter} Ordnung mit der Eigenschaft (T) ist. Nun ist nach den Erörterungen im Eingange des XIV. Abschnittes für alle zwischen $n_k - 1$ und $\frac{1}{2}(n_k + n_{k+1})$ liegenden Werthe von ν, und zwar nur für diese, $\mu = \nu$; es ist ferner für alle zwischen $n_k - 1$ und n_{k+1} liegenden Werthe von ν der Werth von λ, d. h. die Ordnung der primitiven Recursionsformel gleich n_k, und der Werth von $\mu + \nu$ d. h. nach Art. XI die Anzahl der Glieder, für welche die primitive Recursionsformel Geltung hat, ist — wie schon im Eingange dieses Abschnittes bemerkt worden — gleich $n_k + n_{k+1} - 1$, wenn $\nu = n_{k+1} - 1$ oder wenn ν überhaupt nur grösser als $\frac{1}{2}(n_k + n_{k+1} - 1)$ genommen wird.

Der Bedeutung von n_1 nach sind die ersten $n_1 - 1$ Coëfficienten c, deren Index also kleiner als $n_1 - 1$ ist, gleich Null. Die Reihe der Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ selbst schliesst mit derjenigen Zahl ab, welche den Grad des Nenners des reducirten Bruches angiebt, dessen Reihenentwickelung $\sum c_h x^{-h-1}$ ist.

Das oben durch die Bezeichnung (U) hervorgehobene Resultat knüpft zwar an die Bedeutung der Grössen c als Coëfficienten der Reihenentwickelung einer rationalen Function nach fallenden Potenzen von x an, giebt aber offenbar alle linearen Recursionsformeln für eine ganz beliebige Reihe von Grössen

$$c_0, c_1, \dots c_{2n-1},$$

da diese stets als die ersten $2n$ Coëfficienten der Entwickelung einer rationalen Function von x, z. B. von $c_0 x^{-1} + c_1 x^{-2} + \cdots + c_{2n-1} x^{-2n}$ selbst, aufgefasst werden können. Um jenes Resultat in der einfachsten Weise für eine beliebige Reihe von $2n$ Grössen c zu benutzen, hat man nach den Ausführungen im Art. XII für $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ einen Bruch zu nehmen, dessen Zähler $C^{(m)}(x)$ und dessen Nenner $D^{(m)}(x)$ gewisse aus den gegebenen Grössen c gebildete Determinanten-Ausdrücke sind. Dieser Bruch hat die Eigenschaft, dass seine Entwickelung nach fallenden Potenzen von x mit

$$c_0 x^{-1} + c_1 x^{-2} + \cdots + c_{2n-1} x^{-2n}$$

beginnt, und dass dabei der Nenner $D^{(m)}(x)$ von möglichst niedrigem Grade ist. Die Aufstellung aller linearen Recursionsformeln für beliebige Grössen $c_0, c_1, c_2, \dots$ kann jedoch auch, ohne die Auffassung derselben als Entwickelungscoëfficienten zu Hülfe zu nehmen, in directer Weise erfolgen, wie im nächsten Abschnitte dargelegt werden soll.

XVII.

Bezeichnet man mit $n_1 - 1$ die Anzahl derjenigen aufeinanderfolgenden Grössen $c_0, c_1, c_2, \dots$, welche gleich Null sind, so dass die erste von Null verschiedene Grösse c den Index $n_1 - 1$ hat, so leuchtet unmittelbar ein, dass sich für die ersten $2n_1$ Grössen c eine lineare Recursionsformel n_1^{ter} Ordnung

$$\text{(V)} \qquad c_{n_1+q} + \sum_p \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad (p, q = 0, 1, \dots n_1 - 1)$$

aufstellen lässt, welche überdies primitiv sein muss. Da diese Recursionsformel noch weiter, d. h. also noch über den Werth $q = n_1 - 1$ hinaus Geltung haben kann, so sei $n_2 - 2$ der letzte dieser Werthe, so dass also die Recursionsformel der Ordnung n_1 genau bis zum $(n_1 + n_2 - 1)^{\text{ten}}$ Gliede hin Geltung behält. Dies vorausgesetzt, muss die nach Art. XI für die ersten 2ν Grössen c aufzustellende primitive lineare Recursionsformel, so lange ν kleiner als n_2 ist, eben jene Formel (V) sein, da dieselbe ja alsdann die im Art. XI enthaltene Bedingung, von Anfang der Reihe c an mindestens νmal hinter einander anwendbar zu sein, d. h. also für $q = 0, 1, \dots \nu - 1$ Geltung zu behalten, auf Grund der hier festgesetzten Bedeutung von n_2 offenbar erfüllt. Wäre nun auch für $\nu = n_2$ die nach Art. XI für die ersten 2ν Grössen c aufzustellende primitive Recursionsformel von einer Ordnung $\lambda' < n_2$, so müsste eben dieselbe Recursionsformel den ersten $2\lambda'$ Grössen c angehören; da aber jedem Werthe $\lambda' < n_2$, wie soeben nachgewiesen worden, die Recursionsformel λ^{ter} Ordnung (V) angehört, diese jedoch nur $n_2 - 1$ mal nach einander Geltung hat, also die Bedingungen des Art. XI für eine zu den ersten $2n_2$ Grössen c gehörende Recursionsformel nicht erfüllt, so kann die Ordnung dieser Recursionsformel nicht kleiner als n_2, sondern muss gleich n_2 sein. Die Zahl n_2 erhält hiernach die fernere Bedeutung, die nach n_1 nächstgrössere Ordnung einer für die Grössen c bestehenden primitiven linearen Recursionsformel zu sein. Wird nunmehr die Recursionsformel n_2^{ter} Ordnung

$$\text{(V')} \qquad c_{n_2+q} + \sum_p \beta'_p c_{p+q} = 0 \qquad (p, q = 0, 1, \dots n_2 - 1),$$

welche wiederum primitiv sein muss, aufgestellt und der äusserste Werth $q = n_3 - 2$, bis zu welchem sie Geltung behält, ermittelt, so erweist sich wie oben die Zahl n_3 zugleich als die auf n_2 folgende Ordnungszahl der für die Grössen c bestehenden primitiven Recursionsformeln. Auf dieselbe Weise weiter schliessend gelangt man also direct zu folgendem Resultate:

> Wenn die Ordnungen der verschiedenen primitiven linearen Recursionsformeln, welche für die Grössenreihe $c_0, c_1, c_2, \dots$ bestehen, mit $n_1, n_2, n_3, \dots$ bezeichnet werden, und zwar so dass $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

ist, so bleibt die Recursionsformel n_k^{ter} Ordnung genau $n_{k+1}-1$ mal nach einander anwendbar und hat also für die ersten $n_k+n_{k+1}-1$ Glieder der Reihe, aber auch nicht weiter, Geltung.

Dass eben dieselben Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ zugleich die Grade der Nenner der Näherungsbrüche der Reihe $c_0x^{-1}+c_1x^{-2}+\cdots$ angeben, dass also das hier entwickelte Resultat mit demjenigen, welches im vorhergehenden Abschnitte bei (U) formulirt worden ist, völlig übereinstimmt, geht aus der bekannten, schon am Schlusse des III. Abschnittes erwähnten Eigenschaft der Näherungsbrüche hervor, vermöge deren die Entwickelung von $\frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}$ nach fallenden Potenzen von x die ersten $n_k+n_{k+1}-1$ Glieder mit der des folgenden Näherungsbruches $\frac{\varphi_{k+1}(x)}{\psi_{k+1}(x)}$, und also auch mit der Reihe $c_0x^{-1}+c_1x^{-2}+c_2x^{-3}+\cdots$ selbst gemein hat, so dass die primitive lineare Recursionsformel n_k^{ter} Ordnung, durch welche die Coëfficienten der Reihenentwickelung des Näherungsbruches $\frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}$ charakterisirt sind, für die ersten $n_k+n_{k+1}-1$ Coëfficienten der Reihe $c_0x^{-1}+c_1x^{-2}+c_2x^{-3}+\cdots$ selbst Geltung hat.

Bei einer Grössenreihe $c_0, c_1, c_2, \ldots$ der oben bezeichneten Art, d. h. bei einer solchen, für welche die Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_r$ die Ordnungen der primitiven linearen Recursionsformeln angeben, sind die ersten n_1-1 Glieder gleich Null, und für jede Zahl k sind die $n_{k+1}-n_k-1$ Glieder mit den Indices $2n_k, 2n_k+1, \ldots n_k+n_{k+1}-2$ durch die vorhergehenden bestimmt; es sind also, da die Gesammtzahl $2n_r$ beträgt,

$$2n_r-(n_1-1)-(n_2-n_1-1)-\cdots-(n_r-n_{r-1}-1)$$

d. h. n_r+r Glieder der Reihe c von einander unabhängig, und diese Zahl ist genau gleich der Gesammtzahl der Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x in den r Theilnennern $g_1, g_2, \ldots g_r$ bei der Kettenbruchsentwickelung der Reihe $c_0x^{-1}+c_1x^{-2}+c_2x^{-3}+\cdots$, da hierbei der Grad von g_k (vgl. Art. I) durch die Zahl n_k-n_{k-1} ausgedrückt wird.

XVIII.

Stellt eine Reihe $c_0x^{-1}+c_1x^{-2}+c_2x^{-3}+\cdots$ eine rationale Function von x und also einen endlichen Kettenbruch mit den Theilnennern $g_1, g_2, \ldots g_r$ dar, so stehen mit derselben alle diejenigen nach fallenden Potenzen von x fortschreitenden Reihen, welche Kettenbrüche mit eben denselben Theilnennern $g_1, g_2, \ldots g_r$ — diese in irgend einer anderen Folge genommen — darstellen, in bemerkenswerther Beziehung. Versteht man unter $i_1, i_2, \ldots i_r$ die Zahlen $1, 2, \ldots r$ in irgend einer anderen Folge, d. h. also irgend eine andere Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots r$, so drücken die Gleichungen

$$\text{(W)}\qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} c_{h-1}x^{-h} = \frac{1}{g_1-\frac{1}{g_2-\cdots-\frac{1}{g_r}}}\,, \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} c_{h-1}^{(i)}x^{-h} = \frac{1}{g_{i_1}-\frac{1}{g_{i_2}-\cdots-\frac{1}{g_{i_r}}}}$$

eine Beziehung der angegebenen Art zwischen den Coëfficienten c und $c^{(i)}$ aus, und es kann dies als eine Beziehung zwischen den beiden Reihen von je $2m$ Grössen

$$c_0, c_1, \ldots c_{2m-1}; \qquad c_0^{(i)}, c_1^{(i)}, \ldots c_{2m-1}^{(i)}$$

aufgefasst werden, wenn m den Grad des Products $g_1g_2\cdots g_r$ d. h. also den Grad des nothwendigen Nenners bei der Darstellung beider Kettenbrüche durch einfache Brüche bedeutet, da nach Art. IX die folgenden Coëfficienten jeder der beiden Reihen in den Gleichungen (W) durch die $2m$ ersten rational darstellbar sind. Um von einer beliebigen Reihe von $2m$ Grössen $c_0, c_1, \ldots c_{2m-1}$ ausgehend die entsprechende Reihe $c_0^{(i)}, c_1^{(i)}, \ldots c_{2m-1}^{(i)}$ zu erhalten, hat man daher nur gemäss Art. VIII aus jenen $2m$ Grössen c den Ausdruck $\frac{C^{(m)}(x)}{D^{(m)}(x)}$ zu bilden, diesen in einen Kettenbruch zu entwickeln und alsdann den Kettenbruch mit eben denselben, aber in der vorgeschriebenen Weise permutirten Theilnennern in eine Reihe nach fallenden Potenzen von x zu transformiren; die ersten $2m$ Coëfficienten dieser Reihe sind dann die den $2m$ Grössen c entsprechenden. Uebrigens ergeben sich die bei der Kettenbruchsentwickelung von $\frac{C^{(m)}(x)}{D^{(m)}(x)}$ auftretenden Theilnenner g_k auf Grund der Gleichungen (P) und (P″) im Art. XV auch direct als die Quotienten der Division von $\eta_k^2 D^{(t)}(x)$ durch $D^{(t-1)}(x)$, wenn $t = n_k$ ist, da diese beiden Determinanten-Ausdrücke den Näherungsnennern $\psi_k(x)$ und $\psi_{k-1}(x)$ proportional sind.

Die hier definirte Beziehung zwischen Reihen von je $2m$ Grössen ist eine „rationale“, d. h. jedes Glied der einen von zwei einander entsprechenden Reihen ist als rationale Function der $2m$ Grössen der anderen Reihe darstellbar. Setzt man demgemäss

$$c_p^{(i)} = \theta_p^{(i)}(c_0, c_1, \ldots c_{2m-1}) \qquad (p=0, 1, \ldots 2m-1),$$

wo $\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \ldots$ durch die Permutation $i_1, i_2, \ldots i_r$ bestimmte rationale Functionen der eingeklammerten Grössen $c_0, c_1, \ldots c_{2m-1}$ bezeichnen, so stellen die Grössen

$$\theta_p^{(h)}(c_0^{(i)}, c_1^{(i)}, \ldots c_{2m-1}^{(i)}) \qquad (p=0, 1, \ldots 2m-1)$$

eine zur Permutation $h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots h_{i_r}$ gehörige Reihe dar; das Functionszeichen $\theta^{(h)}\theta^{(i)}$ gehört also zu einer Permutation der Theilnenner g, welche entsteht, wenn man die Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots r \\ i_1 & i_2 \ldots i_r \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots r \\ h_1 & h_2 \ldots h_r \end{pmatrix}$$

in der hier angegebenen Folge anwendet. Die durch die Kettenbruchsentwickelung vermittelten Beziehungen von Grössenreihen hängen daher aufs Genaueste mit den Eigenschaften der Permutationen zusammen, und es ist namentlich die Ordnung der Permutation (i) gleich derjenigen Zahl, welche angiebt, nach wievielmaliger Wiederholung der rationalen Operation $\theta^{(i)}$ man wieder zu der Grössenreihe (c) zurückgelangt, von der man ausgegangen ist. Da die Grade der Theilnenner g gleich $n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2, \ldots$ sind, also der Grösse nach mit den für die Zahl ν am Schlusse des Art. I unterschiedenen Intervallen übereinstimmen, so sind eben diese Intervalle für alle mit einander in der oben definirten Beziehung stehenden Reihen (c) von

gleicher Grösse, d. h. die verschiedenen Intervalle in der Zahlenreihe $1, 2, \ldots m$, welche keine die Ordnung einer primitiven Recursionsformel für eine bestimmte Reihe (c) bezeichnende Zahl enthalten, sind für jede der auf einander bezogenen Reihen gleich gross, aber anders und anders vertheilt.

Die besondere Beziehung zweier Reihen (c), welche dadurch definirt wird, dass die Theilnenner g in den Gleichungen (W) in entgegengesetzter Folge erscheinen, verdient sowohl wegen ihrer Einfachheit als auch desshalb eine nähere Darlegung, weil sie einen in der Einleitung berührten Punkt genauer beleuchtet. Er seien also

$$(\mathrm{W}^*) \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} c_{h-1} x^{-h} = \frac{1}{g_1 - \frac{1}{g_2 - \ddots - \frac{1}{g_r}}}, \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} \bar{c}_{h-1} x^{-h} = \frac{1}{g_r - \frac{1}{g_{r-1} - \ddots - \frac{1}{g_1}}}$$

die für die Beziehung zwischen den beiden Reihen (c) und ($\bar{c}$) charakteristischen Relationen, welche bei Anwendung der im Art. I eingeführten Bezeichnungen in folgender Weise dargestellt werden können:

$$\frac{\varphi_r(x)}{\psi_r(x)} = \sum_{h=1}^{h=\infty} c_{h-1} x^{-h}, \qquad \frac{\psi_{r-1}(x)}{\psi_r(x)} = \sum_{h=1}^{h=\infty} \bar{c}_{h-1} x^{-h}.$$

Die letztere dieser beiden Gleichungen geht mit Hülfe der Relationen (P) und (P″) im Art. XV in die Gleichung

$$(\mathrm{W}') \qquad \frac{1}{\eta_r^2} \frac{D^{(m-1)}(x)}{D^{(m)}(x)} = \sum_{h=1}^{h=\infty} \bar{c}_{h-1} x^{-h}$$

über, welche zeigt, dass bei der Entwickelung einer bestimmten rationalen Function von x, deren Coëfficienten aus den $2m$ Grössen $c_0, c_1, \ldots c_{2m-1}$ rational gebildet sind, in eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe die entsprechenden Grössen $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \ldots \bar{c}_{2m-1}$ sich als die $2m$ Coëfficienten von $x^{-1}, x^{-2}, \ldots x^{-2m}$ ergeben. Die Bildungsweise von η_r geht aus der Gleichung (S′) im Art. XV hervor. Vertauscht man die Grössen c und $\bar{c}$ mit einander, und bezeichnet man mit $\bar{D}(x)$ die den Functionen $D(x)$ analog aus den Grössen $\bar{c}$ gebildeten Ausdrücke, so kommt an Stelle von (W′)

$$\frac{1}{\eta_r^2}\frac{\overline{D}^{(m-1)}(x)}{\overline{D}^{(m)}(x)} = \sum_{h=1}^{h=\infty} c_{h-1} x^{-h};$$

da nun nach Art. VIII

$$\frac{C^{(m)}(x)}{D^{(m)}(x)} = \sum_{h=1}^{h=\infty} c_{h-1} x^{-h}, \qquad \frac{\overline{C}^{(m)}(x)}{\overline{D}^{(m)}(x)} = \sum_{h=1}^{h=\infty} \overline{c}_{h-1} x^{-h}$$

ist, so können sich die beiden Functionen $D^{(m)}(x)$ und $\overline{D}^{(m)}(x)$ nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden, und es resultiren die Proportionen

$$(\mathrm{W}'') \qquad \begin{gathered} \eta_r^2 C^{(m)}(x) : \overline{D}^{(m-1)}(x) = D^{(m)}(x) : \overline{D}^{(m)}(x) = D^{(m-1)}(x) : \eta_r^2 \overline{C}^{(m)}(x) \\ D^{(m)}(x) : \overline{D}^{(m)}(x) = |c_{i+k}| : |\overline{c}_{i+k}| \qquad {\scriptstyle (i,\,k=0,\,1,\,\ldots\,m-1)}, \end{gathered}$$

welche für die Beziehungen der beiden Reihen

$$c_0,\ c_1,\ \ldots\ c_{2m-1}; \qquad \overline{c}_0,\ \overline{c}_1,\ \ldots\ \overline{c}_{2m-1}$$

charakteristisch sind, und von denen die letztere zeigt, dass die Verhältnisse der $m+1$ aus den $m(m+1)$ Grössen

$$c_{h+i} \qquad {\scriptstyle (h=0,\,1,\,\ldots\,m;\ i=0,\,1,\,\ldots\,m-1)}$$

zu bildenden Determinanten m^{ter} Ordnung für beide Grössenreihen denselben Werth haben.

Ist $f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ eine ganze Function, welche mit $D^{(m)}x$ bis auf einen constanten Factor übereinstimmt, ist ferner

$$f_1(x) = \sum_p a_p x^p, \qquad \mathfrak{f}_1(x) = \sum_p \mathfrak{a}_p x^p \qquad {\scriptstyle (p=0,\,1,\,\ldots\,m-1)}$$

und wie in der Einleitung

$$\mathfrak{f}_1(x) f_1(x) - \mathfrak{f}(x) f(x) = 1,$$

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \sum_{h=1}^{h=\infty} c_{h-1} x^{-h}, \qquad \frac{\mathfrak{f}_1(x)}{f(x)} = \sum_{h=1}^{h=\infty} s_{h-1} x^{-h},$$

so beginnen die Entwickelungen der beiden Differenzen

$$\frac{\mathfrak{f}_1(x)}{f(x)} - \frac{\mathfrak{f}(x)}{f_1(x)}, \qquad \frac{f_1(x)}{f(x)} - \frac{\mathfrak{f}(x)}{\mathfrak{f}_1(x)}$$

nach fallenden Potenzen von x mit dem Gliede x^{-2m+1}, und die ersten $(2m-2)$ Coëfficienten der Entwickelung von $\frac{\mathfrak{f}(x)}{f_1(x)}$ müssen daher mit den Grössen $s_0,\ s_1,\ \ldots\ s_{2m-3}$, die ersten $(2m-2)$ Coëfficienten der Entwickelung von $\frac{\mathfrak{f}(x)}{\mathfrak{f}_1(x)}$ mit den Grössen $c_0,\ c_1,\ \ldots\ c_{2m-3}$ übereinstimmen. Diese je $2m-2$ Grössen s und c müssen sonach gemäss Art. IX den je $2m-3$ Gleichungen

$$(\mathrm{Z}^\circ) \qquad \begin{matrix} \sum\limits_{k=0}^{k=m-1} a_k s_{h+k} = 0, & \sum\limits_{k=0}^{k=m} b_k s_{i+k} = 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{k=m-1} \mathfrak{a}_k c_{h+k} = 0, & \sum\limits_{k=0}^{k=m} b_k c_{i+k} = 0 \end{matrix} \qquad \left({\scriptstyle h=0,\,1,\,\ldots\ldots\,m-2 \atop i=0,\,1,\,\ldots\,m-3}\right)$$

genügen, und die Gleichungen mit den Coëfficienten b bestehen überdies noch für alle folgenden Werthe von i, da sowohl die Grössen s als auch die Grössen c Entwickelungscoëfficienten von Brüchen mit dem Nenner $b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ sind. Nun ist auf Grund der Proportionen (W″) und der Gleichung (F) im Art. VIII

$$\begin{gathered} \frac{f(x)}{b_m} = \frac{D^{(m)}(x)}{|c_{i+k}|} = \frac{\overline{D}^{(m)}(x)}{|\overline{c}_{i+k}|} \\ \frac{\eta_r^2 f_1(x)}{b_m} = \frac{\eta_r^2 C^{(m)}(x)}{|c_{i+k}|} = \frac{\overline{D}^{(m-1)}(x)}{|\overline{c}_{i+k}|} \qquad {\scriptstyle (i,\,k=0,\,1,\,\ldots\,m-1)}, \\ b_m \mathfrak{f}_1(x) = \frac{\eta_r^2 \overline{C}^{(m)}(x)}{|\overline{c}_{i+k}|} = \frac{D^{(m-1)}(x)}{|c_{i+k}|} \end{gathered}$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (W′), dass die sämmtlichen Entwickelungscoëfficienten s und $\bar{c}$ zu einander in dem constanten Verhältnisse

$$s_h : \overline{c}_h = \eta_r^2 : b_m^2$$

stehen, und dass also zwischen den zwei Verhältnissreihen

$$c_0 : c_1 : \cdots : c_{2m-1}; \qquad s_0 : s_1 : \cdots : s_{2m-1}$$

eben jene oben erörterte Beziehung wie zwischen den beiden Grössenreihen

$$c_0, c_1, \ldots c_{2m-1}; \qquad \bar{c}_0, \bar{c}_1, \ldots \bar{c}_{2m-1}$$

stattfindet. Es folgt ferner, dass die Coëfficienten $b_0, b_1, \ldots b_m$ den $m+1$ Coëfficienten von $D^{(m)}(x)$ und auch denen von $\bar{D}^{(m)}(x)$, die Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots a_{m-1}$ denen von $C^{(m)}(x)$ und endlich die Coëfficienten $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_{m-1}$ denen von $\bar{C}^{(m)}(x)$ proportional sind. In den ersten beiden Gleichungen (Z') können daher die Grössen a, b, beziehungsweise durch die Coëfficienten von $C^{(m)}(x), D^{(m)}(x)$, die Grössen s aber durch die Grössen $\bar{c}$ ersetzt werden, und in den beiden folgenden Gleichungen können an Stelle der Grössen $\mathfrak{a}, b$, beziehungsweise die Coëfficienten von $\bar{C}^{(m)}(x), \bar{D}^{(m)}(x)$ genommen werden. Da nun gemäss Art. VIII (F')

$$C^{(m)}(x) = \left| c_k, c_{k+1}, \ldots c_{k+m-1}, \sum_{g=1}^{g=k} c_{g-1} x^{k-g} \right|; \quad D^{(m)}(x) = \left| c_k, c_{k+1}, \ldots c_{k+m-1}, x^k \right|$$
$$(k=0, 1, \ldots m)$$

ist, so erhält man die Gleichungen

$$\text{(Z)} \quad \begin{aligned} &\text{I}, \quad \left| c_k, c_{k+1}, \ldots c_{k+m-1}, \sum_{g=1}^{g=k} c_{g-1} \bar{c}_{h+k-g} \right| = 0, \\ &\text{II}, \quad \left| c_k, c_{k+1}, \ldots c_{k+m-1}, \bar{c}_{i+k} \right| = 0, \end{aligned}$$

$$(\bar{\text{Z}}) \quad \begin{aligned} &\text{I}, \quad \left| \bar{c}_k, \bar{c}_{k+1}, \ldots \bar{c}_{k+m-1}, \sum_{g=1}^{g=k} \bar{c}_{g-1} c_{h+k-g} \right| = 0, \\ &\text{II}, \quad \left| \bar{c}_k, \bar{c}_{k+1}, \ldots \bar{c}_{k+m-1}, c_{i+k} \right| = 0, \end{aligned}$$
$$(h=0, 1, \ldots m-2; \quad i=0, 1, \ldots m-1; \quad k=0, 1, \ldots m)$$

welche die zwischen den beiden Verhältnissreihen

$$c_0 : c_1 : \cdots : c_{2m-1}; \qquad \bar{c}_0 : \bar{c}_1 : \cdots : \bar{c}_{2m-1}$$

bestehende Reciprocitätsbeziehung darlegen. Wenn nämlich die Verhältnisse von $2m$ Grössen $\bar{c}$ aus denen der $2m$ Grössen c durch die $2m-1$ Gleichungen (Z) bestimmt werden, so sind, wie die Gleichungen ($\bar{\text{Z}}$) zeigen,

genau in derselben Weise umgekehrt die Verhältnisse der Grössen c durch die der Grössen $\bar{c}$ bestimmt. Dabei ist noch hervorzuheben, dass die je m Gleichungen (Z) II und ($\bar{\text{Z}}$) II mit einander insofern identisch sind, als die Coëfficienten der zu bestimmenden Grössen in beiden einander proportional sind; denn es sind, wie schon oben erwähnt worden, in beiden Gleichungen

$$\left| c_k, c_{k+1}, \ldots c_{k+m-1}, u_k \right| = 0, \qquad \left| \bar{c}_k, \bar{c}_{k+1}, \ldots \bar{c}_{k+m-1}, u_k \right| = 0$$
$$(k=0, 1, \ldots m)$$

die Coëfficienten von $u_0, u_1, \ldots u_m$ den mit $b_0, b_1, \ldots b_m$ bezeichneten Grössen proportional. Endlich ist noch zu bemerken, dass die Ordnungen der primitiven linearen Recursionsformeln, welche für die Grössenreihe $\bar{c}$ bestehen, durch die Zahlen $m - n_{r-1}, m - n_{r-2}, \ldots m - n_1, m$ ausgedrückt sind, also, abgesehen von m selbst, sich mit den analogen Ordnungszahlen der Grössenreihe c zu m ergänzen.

Schliesslich ist noch eine Bemerkung über die in der Einleitung erwähnte *Bézout*'sche Function hinzuzufügen, welche sich ergiebt, wenn dort die Functionen $f(x)$ durch die Determinanten-Ausdrücke $D(x)$ ersetzt werden. Da nämlich die Coëfficienten der *Bézout*'schen Function

$$\frac{D^{(m)}(x) D^{(m-1)}(y) - D^{(m)}(y) D^{(m-1)}(x)}{x - y}$$

den Adjungirten der Grössen

$$c_{g+h} \qquad (g, h=0, 1, \ldots m-1)$$

proportional sein sollen, so muss diese *Bézout*'sche Function selbst, abgesehen von einem von x und y unabhängigen Factor, mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \cdots x^{m-1} \\ 1 & c_0 & c_1 \cdots c_{m-1} \\ y & c_1 & c_2 \cdots c_m \\ \vdots & & \\ y^{m-1} & c_{m-1} & c_m \cdots c_{2m-2} \end{vmatrix}$$

übereinstimmen. Bezeichnet man nun diese Determinante mit $B^{(m-1)}(x, y)$, so resultirt nach Bestimmung des Factors die Determinanten-Formel

$$D^{(m)}(x)D^{(m-1)}(y) - D^{(m)}(y)D^{(m-1)}(x) = |c_{g+h}|\,(x-y)B^{(m-1)}(x, y) \qquad \scriptstyle (g,\,h=0,\,1,\,\dots\, m-1),$$

welche auch direct in folgender Weise verificirt werden kann. Es sei

$$D^{(m)}(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m$$

und also

$$-\gamma_0 c_k = \gamma_1 c_{k+1} + \gamma_2 c_{k+2} + \cdots + \gamma_m c_{k+m} \qquad \scriptstyle (k=0,\,1,\,\dots\, m-1)$$

so wie

$$|c_{g+h}| = \gamma_m \qquad \scriptstyle (g,\,h=0,\,1,\,\dots\, m-1).$$

Bildet man nun das Product

$$\gamma_m x B^{(m-1)}(x, y),$$

indem man die erste Horizontalreihe der Determinante $B^{(m-1)}(x, y)$ mit x und die letzte Verticalreihe mit γ_m multiplicirt und fügt dann die zweite Colonne, mit γ_1 multiplicirt, die dritte, mit γ_2 multiplicirt, u. s. w. der letzten Colonne hinzu, so entsteht eine Determinante, in welcher das letzte Element der ersten Horizontalreihe $-\gamma_0 + D^{(m)}(x)$ ist. Dieses Element ist bei der Entwickelung der Determinante mit $D^{(m-1)}(y)$ multiplicirt, und wenn man an Stelle des Elementes $-\gamma_0 + D^{(m)}(x)$ nur $-\gamma_0$ setzt, so ist die Determinante in Beziehung auf x und y symmetrisch. Es muss daher der Ausdruck

$$\gamma_m x B^{(m-1)}(x, y) - D^{(m)}(x)D^{(m-1)}(y)$$

in Beziehung auf x und y symmetrisch, also dem Ausdrucke

$$\gamma_m y B^{(m-1)}(x, y) - D^{(m)}(y)D^{(m-1)}(x)$$

gleich sein, und dies bildet den Inhalt der zu verificirenden Determinanten-Formel.

ÜBER DIE DISCRIMINANTE ALGEBRAISCHER FUNCTIONEN EINER VARIABELN.

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 91. S. 301—334.

ÜBER DIE DISCRIMINANTE ALGEBRAISCHER FUNCTIONEN EINER VARIABELN.

Vorbemerkung.

Die Abhandlung, deren ersten Theil ich hier veröffentliche, ist von mir in der Sitzung der hiesigen Akademie der Wissenschaften am 16. Januar 1862 vorgetragen worden. Von anderen Untersuchungen, deren Resultate sich in den Monatsberichten desselben Jahres angegeben finden, aufs Lebhafteste in Anspruch genommen, habe ich damals unterlassen, die Abhandlung in den Denkschriften der Akademie, für welche sie bestimmt war, zum Abdruck zu bringen. Aber ich habe den wesentlichen Inhalt der darin gegebenen Entwickelungen schon in jener Zeit und seitdem regelmässig in meinen an der hiesigen Universität gehaltenen Vorlesungen mitgetheilt, die weitreichende Bedeutung des einfachen Princips derselben eingehend erörtert und das Interesse daran, wie ich von Manchen meiner Zuhörer im näheren persönlichen Verkehr erfahren habe, von Anfang an erweckt und in weiteren Kreisen verbreitet. So habe ich namentlich, um nur eine meiner älteren Universitäts-Vorlesungen anzuführen, im Wintersemester 1865/66 unter Zugrundelegung des Begriffs der ganzen algebraischen Grössen und Zahlen die allgemeinen Principien für die Zusammenfassung aller durch einander rational ausdrückbaren algebraischen Grössen sowie für deren Darstellung als homogene lineare Functionen einer gewissen Anzahl derselben vollständig dargelegt und im Wintersemester 1870/71 an die bezüglichen Erörterungen eine ausführliche Behandlung der algebraischen Functionen einer Variabeln, also des speciellen Gegenstandes der vorliegenden Abhandlung geknüpft. Unter meinen

Zuhörern von 1865/66 befanden sich die Herren *Brill, Kiepert, Lüroth, Schwarz,* unter denen von 1870/71 die Herren *Dantscher, Kiepert, Stickelberger, Stolz,* in der Zwischenzeit namentlich auch die Herren *Netto* und *Frobenius,* und Herr *Netto* hat erst neuerdings im vorigen Bande dieses Journals interessante Untersuchungen veröffentlicht, bei welchen der Inhalt jener Vorlesungen den Ausgangspunkt bildet[1]).

Auf das Princip, welches den folgenden Entwickelungen zu Grunde liegt, wurde ich durch allgemeine, die Theorieen complexer Zahlen betreffende Untersuchungen im Jahre 1857 geführt. Die Allgemeinheit der Untersuchungen leitete unmittelbar auf den Begriff der ganzen algebraischen Zahlen als Wurzeln ganzzahliger Gleichungen $F(x) = 0$, d. h. solcher, in welchen der Coëfficient der höchsten Potenz von x gleich *Eins* und die übrigen Coëfficienten ganze Zahlen sind; bei der Behandlung specieller Theorieen complexer Zahlen bot sich die Auffassung derselben als ganzer ganzzahliger Functionen einer bestimmten ganzen algebraischen Zahl zunächst dar. Dabei erhoben sich aber gewisse Schwierigkeiten, die freilich einzig und allein die Bestimmung der complexen Discriminanten-Factoren betrafen, und auch nur dann auftraten, wenn die behandelten speciellen complexen Zahlen die Eigenschaft zeigten, dass dabei ganze algebraische Zahlen in der Form gebrochener complexer Zahlen, d. h. ganzer Functionen der zu Grunde gelegten algebraischen Zahl mit gebrochenen Zahlcoëfficienten erscheinen konnten. Diese Schwierigkeiten brachten mich nach einiger Ueberlegung in dem bezeichneten Jahre zu der Erkenntniss, dass es eine theils unnütze, theils schädliche Beschränkung ist, die rationalen Functionen einer durch eine algebraische Gleichung definirten Grösse x nur in der Form von ganzen Functionen von x, d. h. also, wenn n den Grad der Gleichung bezeichnet, als lineare homogene Functionen der n Grössen $1, x, x^2, \dots x^{n-1}$ darzustellen, dass vielmehr die allgemeinere Darstellung derselben durch lineare homogene Formen von irgend welchen n rationalen von einander linear unabhängigen Functionen von x durch die Natur der Sache geboten ist. Hierdurch wird es nämlich ermöglicht, Formen complexer Zahlen aufzustellen, in denen jede ganze algebraische Zahl auch ganz erscheint, und damit die oben angedeuteten Schwierigkeiten zu beseitigen.

[1]) *E. Netto,* zur Theorie der Discriminanten; *Crelle's* Journal Bd 90. S. 164—185. H.

Die Zweckmässigkeit solcher Formen hatte sich auch schon bei den *Kummer*'schen Arbeiten über die aus den Perioden von Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen gezeigt, und dabei war auch schon jenes Schema der bestimmenden Coëfficienten aufgetreten, welches durch die Bedingung gegeben wird, dass bei der Multiplication linearer Formen von n Elementen mit ganzzahligen Coëfficienten eine ebensolche Form resultirt. Durch diese Bedingung werden die Elemente unmittelbar als ganze algebraische Zahlen bestimmt, und zwar als solche, die sämmtlich durch eine derselben rational ausdrückbar sind, also einer und derselben „Gattung" angehören.

Damals schon in regem persönlichen Verkehr mit meinem Freunde *Weierstrass* stehend, machte ich demselben Schritt vor Schritt von dem Fortgange meiner arithmetischen Untersuchungen Mittheilung, und als ich ihm nach kurzer Zeit die neu gewonnene Erkenntniss darlegen konnte, dass in der Theorie specieller complexer Zahlen an Stelle der ganzen Functionen einer Grösse homogene lineare Functionen einer gewissen Anzahl zusammengehöriger Grössen zu Grunde gelegt werden müssen, damit alle Schwierigkeiten und Ausnahmen beseitigt würden, da forderte er mich auf, dieselben Principien auf algebraische Functionen einer Variabeln anzuwenden, um womöglich auch dabei die analogen umständlichen Betrachtungen entbehrlich zu machen, welche bei der Behandlung der Integrale algebraischer Functionen, wenn alle möglichen Singularitäten der zu Grunde gelegten Gleichung zugelassen werden, zunächst erforderlich erschienen. Dies ward mir der erste Anlass zu rein algebraischer, von geometrischer Interpretation wie von analytischen Hülfsmitteln absehender Behandlung der algebraischen Functionen einer Variabeln, und ich habe meinem Freunde *Weierstrass* auf seinen Wunsch eine schriftliche Auseinandersetzung der Resultate nebst deren Herleitung am 19. October 1858 (mit diesem Datum bezeichnet) übergeben, von welcher er auch damals bei seinen analytischen Untersuchungen Gebrauch machen konnte. Aber gerade die weiteren Ergebnisse dieser *Weierstrass*'schen analytischen Untersuchungen waren es, welche meine bezüglichen algebraischen in meinen Augen überflüssig machten, und mich — nachdem ich die Veröffentlichung im Jahre 1862 unterlassen hatte — später von der Publication abstehen liessen. Herr *Weierstrass* gelangte nämlich zu einer wirklichen Darstellung der von ihm so genannten Primfunctionen — welche den *Kummer*'schen idealen Primfactoren entsprechen —

in transcendenter Form, und damit wurde das eigentliche Fundament der Theorie der algebraischen Functionen bloss gelegt und jede auf algebraische Mittel beschränkte Behandlung überholt.

Der Anlass dazu, dass ich nunmehr dennoch, und nach so langer Zeit, meine Arbeit aus dem Jahre 1862 abdrucken lasse, liegt in einer Verabredung mit den Herren *Dedekind* und *Weber*. Als ich im vorigen Jahre eine willkommene Gelegenheit fand und ergriff, Herrn *Dedekind* meine, als eines Mitstrebenden, Anerkennung auszudrücken, und ihm dabei schrieb, dass ich schon seit lange im Besitze der den seinigen vielfach verwandten Principien der Theorieen complexer Zahlen*) sei und diese auch für algebraische Fragen benutzt habe, theilte er mir in richtiger Voraussetzung des speciellen Gegenstandes mit, dass auch er seinerseits in neuerer Zeit und zwar im Vereine mit Herrn *Weber* jene Principien auf die Behandlung algebraischer Functionen einer Variabeln angewendet habe. Als nun später Herr *Weber* die von ihm und Herrn *Dedekind* verfasste Arbeit für das Journal zusagte, entschloss ich mich im Einvernehmen mit denselben, meine eigene bezügliche Abhandlung vom Jahre 1862 kurz vor der ihrigen und, bevor ich von derselben Kenntniss nähme, zum Abdruck zu bringen. Ich habe desshalb die inzwischen von Herrn *Weber* eingesandte Arbeit uneröffnet in die Hände des Herrn Prof. *Lampe* gelangen lassen, der seit lange den speciellen Redactionsgeschäften vorsteht, und dieselbe wird im nächsten Bande dieses Journals Aufnahme finden.

Ich habe geglaubt an meinem Manuscript vom Jahre 1862 keinerlei Veränderungen vornehmen zu sollen, wenngleich die Breite der Behandlung mir heute wenig zusagt. Auch die Bezeichnung „wesentlicher und ausser-

*) Gemeinsam ist Herrn *Dedekind's* und meiner Behandlungsweise das oben dargelegte Princip der Darstellung complexer Zahlen und Alles, was daraus fliesst; aber die Auffassung und Erklärung der Divisoren, von der ich ausgehe, ist von der des Herrn *Dedekind* verschieden, wenn auch natürlich die schliesslichen, von jeder Definition der complexen Divisoren unabhängigen Resultate dieselben sind. Ueberdies besteht auch eine Verschiedenheit in Bezug auf die Frage einer naturgemässen Darstellung der Divisoren, deren Erledigung mir, bei meiner Art des Eintretens in die bezüglichen Untersuchungen, von Anfang an als letztes Ziel erscheinen musste, während dies bei Herrn *Dedekind's* Ausgangspunkt nicht der Fall war.

wesentlicher Theiler der Discriminante" habe ich, obgleich ich davon später seltneren Gebrauch gemacht habe*), unverändert beibehalten, weil sie von jener Zeit her aus meinen Universitäts-Vorlesungen und privaten Mittheilungen vielfach Aufnahme und Verbreitung gefunden haben. Schon bei Abfassung der Arbeit habe ich absichtlich, um den an die zahlentheoretische Entstehung anknüpfenden Charakter der Entwickelungen nicht zu ändern, den Gesichtspunkt durchaus festgehalten, die eine der Variabeln v als eine „unbestimmte" Grösse, die andere x als deren algebraische Function zu betrachten, obgleich es begreiflicherweise sachgemässer ist, die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Variabeln, das durch ihren Zusammenhang constituirte algebraische Gebilde in das Auge zu fassen. Ich möchte es als eines der Hauptergebnisse der Arbeit — welches ich schon im Jahre 1858 *Riemann* mitgetheilt habe — bezeichnen, dass die Behandlung jenes so zu sagen allgemeinen oder regulären Falles algebraischer Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen, auf den sich *Riemann* mit dem Bemerken beschränkt hat (Theorie der *Abel*'schen Functionen Bd. 54 S. 127[2]), dass sich „die Resultate auf die übrigen als Grenzfälle leicht ausdehnen lassen", auch desshalb genügt, weil sich die anderen Gleichungen in solche transformiren lassen. Durch die bezüglichen Darlegungen gewinnt man auch erst für das von *Riemann* citirte Verfahren von *Lagrange* festen Boden, da sonst die Bestimmung fehlt, bis zu welchem Gliede man die Reihe zu untersuchen hat, um über die Verschiedenheit der Reihenentwickelungen eine Entscheidung zu erlangen. Endlich wird damit jene Mannigfaltigkeit der bei den Reihenentwickelungen algebraischer Functionen vorkommenden Besonderheiten, welche die Behandlung derselben so complicirt erscheinen lässt, völlig entwirrt, indem vorher die Gleichung in eine solche zu transformiren ist, für welche $v-a$, wenn v die unabhängige Variable ist und nach Potenzen von $v-a$ entwickelt werden soll, nicht zu den ausserwesentlichen Factoren der Discriminante gehört. Die ursprünglich verlangte Reihenentwickelung ergiebt sich dann als eine rationale Function der neuen „regulären", und es offenbart sich hierin der Grund der vielen Complicationen, welche die

*) Die modificirten Bezeichnungen finden sich in einem später folgenden Aufsatze[1]).

[1]) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Bd. II. S. 237 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

[2]) *B. Riemann's* gesammelte Werke. I. Aufl. S. 106. H.

Reihenentwickelungen algebraischer Functionen darbieten können. Schliesslich möchte ich das werthvolle methodische Hülfsmittel der unbestimmten Coëfficienten hervorheben, welches ich schon in früher Zeit, z. B. in einem kleinen, im XIX. Bande von *Liouville's* Journal abgedruckten Aufsatze[1]), und seitdem stets bei meinen algebraischen und arithmetischen Untersuchungen in der umfassendsten Weise benutzt habe. Bei den Entwickelungen, welche in den §§ 5, 6 und 8 dieses Aufsatzes enthalten sind, bei der Theorie der Elimination, wie ich sie in meinen Universitäts-Vorlesungen zu geben pflege und durch den Druck zu veröffentlichen im Begriffe stehe[2]), bei der Theorie der verschiedenen „Classen" von Gleichungen, die im *Galois*'schen Sinne besondere Gruppen von Substitutionen haben, endlich zumal bei der allgemeinen Theorie algebraischer Grössen, wie sie in einem folgenden Aufsatze skizzirt werden soll[3]), findet jenes methodische Hülfsmittel die ausgedehnteste und erfolgreichste Verwendung.

Berlin, August 1881.

---

[1]) *L. Kronecker*, Note sur les fonctions semblables des racines d'une équation. Band IV dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

[2]) *L. Kronecker*, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. § 10. H.

[3]) Vgl. die in der vorigen Anmerkung citirte Arbeit. H.

§ 1.

Wenn eine Grösse x von gewissen Variabeln $v, v', v'', \ldots$ in der Weise abhängt, dass sie Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades ist, deren Coëfficienten die Grössen v nur rational enthalten, so wird x im Allgemeinen als algebraische Function der Variabeln v bezeichnet. Denkt man sich die irreductible Gleichung

$$F(x, v, v', \ldots) = 0,$$

durch welche x als algebraische Function von $v, v', v'', \ldots$ definirt wird, auf die Form gebracht, dass darin der Coëfficient von x^n gleich Eins ist, so werden die übrigen Coëfficienten rationale, ganze oder gebrochene Functionen der Variabeln v sein. Da es nun für die Natur der algebraischen Function x einen wesentlichen Unterschied bedingt, ob $F(x, v, v', v'', \ldots)$ auch in Bezug auf die Grössen v eine ganze Function ist oder nicht, so soll im ersteren Falle — analog der herkömmlichen Ausdrucksweise für die rationalen Functionen — x als *ganze* algebraische Function von $v, v', v'', \ldots$ bezeichnet werden. Eine Grösse x ist demnach eine „ganze algebraische Function" gewisser Variabeln, wenn dieselbe einer irreductibeln Gleichung genügt, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz von x gleich Eins ist, während die übrigen Coëfficienten ganze rationale Functionen der unabhängigen Variabeln sind.

Aus der gegebenen Definition folgt unmittelbar, dass jede ganze algebraische Function die Eigenschaft hat, für endliche Werthe der unabhängigen Variabeln niemals unendlich werden zu können, sowie andererseits, dass jede algebraische Function, welche diese Eigenschaft hat, nothwendig eine *ganze* algebraische Function sein muss. Aus dieser charakteristischen Eigenschaft geht ferner hervor, dass jede ganze algebraische Function von ganzen algebraischen Functionen wiederum eine solche ist, sowie dass, wenn eine ganze algebraische Function von $v, v', v'', \ldots$ rational ist, dieselbe eine *ganze* rationale Function eben dieser Variabeln sein muss. Endlich sieht man leicht, dass man in gewisser Hinsicht von der Voraussetzung der Irreductibilität abstrahiren kann, welche in Bezug auf jene die ganze algebraische Function definirende Gleichung gemacht worden ist; denn eine Grösse x erweist sich schon dadurch als ganze algebraische Function von $v, v', v'', \ldots$, dass dieselbe irgend einer, wenn auch reductibeln, Gleichung $F(x)=0$ genügt, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz von x gleich Eins ist, während die übrigen Coëfficienten ganze rationale Functionen der Variabeln $v, v', v'', \ldots$ sind. Aber die definirende Gleichung musste um desswillen als irreductibel angenommen werden, weil eine reductible Gleichung überhaupt nicht *eine* algebraische Function mit ihren verschiedenen Werthen, sondern mehrere algebraische Functionen als Wurzeln enthält. Die Voraussetzung der Irreductibilität war also durch den Begriff der algebraischen Function überhaupt, nicht aber durch die besondere Eigenschaft der *ganzen* algebraischen Function geboten.

Ist $F(x, v, v', v'', \ldots)=0$ die irreductible Gleichung n^{ten} Grades, durch welche x als ganze algebraische Function von $v, v', v'', \ldots$ definirt wird, so lässt sich jede rationale Function von x und $v, v', v'', \ldots$, welche zugleich eine ganze algebraische Function der Grössen v ist, auf die Form $\frac{\varphi(x)}{F'(x)}$ bringen, wo φ eine ganze rationale Function von $x, v, v', v'', \ldots$ und $F'(x)$ die Ableitung von $F(x, v, v', \ldots)$ nach x bedeutet. Wenn nämlich $\psi(x)$ jene darzustellende Function ist, wenn ferner mit $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ die verschiedenen Werthe der algebraischen Function x und mit $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{n-1}$ die zugehörigen Werthe von $\psi(x)$ bezeichnet werden und alsdann

$$F(z, v, v', \ldots)\cdot\left(\frac{\psi_0}{z-x_0}+\frac{\psi_1}{z-x_1}+\cdots+\frac{\psi_{n-1}}{z-x_{n-1}}\right)=\varphi(z)$$

gesetzt wird, so ist φ offenbar eine rationale Function von $z, v, v', v'', \ldots$, da der in Klammern eingeschlossene Ausdruck in Beziehung auf $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ symmetrisch ist. Die einzelnen Summanden dieses Ausdrucks multiplicirt mit $F(z)$ sind aber andererseits in Folge der über $\psi(x)$ gemachten Voraussetzung ganze algebraische Functionen von $z, v, v', v'', \ldots$. Also ist $\varphi(z)$ auch eine ganze algebraische Function, und, da es zugleich rational ist, eine ganze rationale Function der Grössen z und $v, v', v'', \ldots$. Für jeden Werth $z=x_k$

reducirt sich $\varphi(z)$ auf den Werth $\psi(x_k)\cdot F'(x_k)$, und es ist daher allgemein für die durch die Gleichung $F(x)=0$ erklärte Function x:

$$\psi(x, v, v', \cdots)=\frac{\varphi(x, v, v', \ldots)}{F'(x, v, v', \ldots)}\,.$$

Demzufolge wird auch, wenn man das Product:

$$F'(x_0)\cdot F'(x_1)\cdots F'(x_{n-1})$$

als ganze rationale Function der Grössen v mit $D(v, v', v'', \ldots)$ bezeichnet, $D(v, v', \ldots)\cdot\psi(x, v, v', \ldots)$ gleich einer *ganzen* rationalen Function von $x, v, v', \ldots$. Da nun $D(v, v', \ldots)$ die gewöhnlich so genannte Discriminante der Gleichung $F=0$ ist, welche ich im Folgenden auch als „Discriminante der ganzen algebraischen Function x" bezeichnen will, so ergiebt die vorstehende Ausführung,

> „dass jede durch $x, v, v', \ldots$ rational ausdrückbare ganze algebraische Function der Variabeln v, multiplicirt mit der Discriminante von x, als *ganze* rationale Function von $x, v, v', \ldots$ dargestellt werden kann".

§ 2.

Wenn nunmehr x eine ganze algebraische, durch die Gleichung

$$F(x, v)=0$$

definirte Function einer einzigen Variabeln v, und $D(v)$ die Discriminante derselben bedeutet, so werden alle ganzen algebraischen Functionen von v, welche zugleich rationale Functionen von x und v sind, in der Form:

$$A_0(v)+A_1(v)\cdot x+A_2(v)\cdot x^2+\cdots+A_{n-1}(v)\cdot x^{n-1}$$

enthalten sein, wenn auch für die Coëfficienten $A_0(v), A_1(v), \ldots$ nur solche rationale Functionen von v genommen werden, deren Nenner Theiler der Discriminante $D(v)$ sind. Man wähle nun unter denjenigen ganzen algebraischen Functionen, welche in dieser Form dargestellt in Bezug auf x vom m^{ten} Grade sind, eine solche aus, für die der Nenner der rationalen Function $A_m(v)$ von möglichst hohem Grade ist. Wird alsdann dieser Nenner mit $N_m(v)$, der Zähler mit $M(v)$ bezeichnet, so giebt es, da diese beiden Functionen ohne gemeinschaftlichen Factor vorausgesetzt werden, zwei ebenfalls ganz rationale Functionen $P(v)$ und $Q(v)$, für welche die Gleichung:

$$P(v) \cdot M(v) + Q(v) \cdot N_m(v) = 1$$

stattfindet. Demnach wird man, wenn die ganze algebraische Function $A_m(v) \cdot x^m + \cdots$ mit $P(v)$ multiplicirt und alsdann $Q(v) \cdot x^m$ dazu addirt wird, wiederum eine ganze algebraische Function erhalten, welche als ganze rationale Function von x dargestellt nur vom m^{ten} Grade, und in welcher der Coëfficient von x^m gleich $\frac{1}{N_m(v)}$ ist. Bezeichnet man die auf diese Weise erhaltenen ganzen algebraischen Functionen für die verschiedenen Werthe des m von 1 bis $(n-1)$ mit:

$$f_1(x, v), \quad f_2(x, v), \quad \ldots \quad f_{n-1}(x, v)$$

und setzt der Gleichförmigkeit halber $1 = f_0(x, v)$, so soll das System der Functionen $f_0, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ ein *Fundamentalsystem* heissen, weil dasselbe die Eigenschaft hat, dass sich jede ganze algebraische Function von v, welche durch x und v rational ausdrückbar ist, als lineare Function von $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$ darstellen, d. h. auf eine Form:

$$\text{(I.)} \quad B_0(v) \cdot f_0(x, v) + B_1(v) \cdot f_1(x, v) + B_2(v) \cdot f_2(x, v) + \cdots + B_{n-1}(v) \cdot f_{n-1}(x, v)$$

bringen lässt, in welcher B_0, B_1, ... *ganze* rationale Functionen von v bedeuten.

Wenn nämlich $\varphi(x, v)$ eine beliebige ganze algebraische Function von v und, als ganze rationale Function von x dargestellt, vom m^{ten} Grade ist, so kann die rationale Function von v, welche den Coëfficienten von x^m bildet, in ihrem Nenner nur einen Theiler der oben mit $N_m(v)$ bezeichneten Function enthalten. Sonst würde nämlich die ganze algebraische Function $\varphi(x, v) + f_m(x, v)$ offenbar ebenfalls in Bezug auf x vom m^{ten} Grade sein, und der Coëfficient

von x^m würde einen Nenner von höherem Grade als $N_m(v)$ haben. Dies widerspricht aber der über die Wahl der Function $f_m(x, v)$ gemachten Voraussetzung. Da also der Coëfficient von x^m in $\varphi(x, v)$ auf die Form $\frac{R(v)}{N_m(v)}$ gebracht werden kann, wo auch $R(v)$ eine ganze Function bedeutet, so ist $\varphi(x, v) - R(v) \cdot f_m(x, v)$ eine ganze algebraische Function, welche als ganze rationale Function von x dargestellt nur vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Da sich diese nun wiederum durch Subtraction von $R_1(v) \cdot f_{m-1}(x, v)$, bei geeigneter Wahl der ganzen rationalen Function $R_1(v)$, auf eine ganze algebraische Function reducirt, welche in Bezug auf x vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade ist u. s. f., so sieht man, dass $\varphi(x, v)$ auf die Form

$$R(v) \cdot f_m(x, v) + R_1(v) \cdot f_{m-1}(x, v) + \ldots + R_m(v)$$

gebracht werden kann, und dass demnach der in Bezug auf die Functionen f lineare Ausdruck (I.) in der That sämmtliche durch x und v rational darstellbaren ganzen algebraischen Functionen von v und zwar *nur* solche enthält. Ferner lässt sich offenbar jede beliebige rationale Function von x und v als lineare Function von $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$ darstellen, und je nachdem hierbei die Coëfficienten ganze oder gebrochene Functionen von v werden, wird die dargestellte Function sich als eine *ganze* oder *nicht ganze* algebraische Function von v erweisen. Denn jene Linearform (I.) ist insofern eine „nothwendige" Form jeder durch dieselbe repräsentirten algebraischen Function, als bei dieser Darstellung die Coëfficienten $B(v)$ vollkommen bestimmt werden. Es folgt nämlich unmittelbar aus der Irreductibilität der Gleichung $F(x, v) = 0$, dass zwei Ausdrücke von der Form (I.) nur dann einander gleich sein können, wenn die Coëfficienten beider mit einander übereinstimmen, d. h. wenn die Ausdrücke identisch sind.

Die Nenner $N_1(v)$, $N_2(v)$, ... $N_{n-1}(v)$, welche beziehungsweise in den Functionen $f_1(x, v)$, $f_2(x, v)$, ... $f_{n-1}(x, v)$ auftreten, lassen sich noch näher charakterisiren, wenn man sich jede dieser Functionen durch die vorhergehende ausgedrückt denkt. Da nämlich das Product $x \cdot f_{m-1}(x, v)$ eine ganze algebraische Function von v und als ganze Function von x vom m^{ten} Grade ist, so muss es, ebenso wie oben $\varphi(x, v)$, auf die Form

$$R^{(m)}(v) f_m(x, v) + R_1^{(m)}(v) f_{m-1}(x, v) + \cdots + R_m^{(m)}(v)$$

gebracht werden können. Da nun hierin der Coëfficient von x^m, wenn nach Potenzen von x entwickelt wird, $\frac{R^{(m)}(v)}{N_m(v)}$, aber in $x \cdot f_{m-1}(x, v)$ offenbar $\frac{1}{N_{m-1}(v)}$ ist, so resultirt die Gleichung

$$N_m(v) = R^{(m)}(v) N_{m-1}(v),$$

und wenn nach einander $m = 1, 2, 3, \ldots$ genommen wird:

$$N_m(v) = R^{(1)}(v) R^{(2)}(v) \cdots R^{(m)}(v).$$

Bei der hier angegebenen Darstellung der Functionen f, nämlich:

$$f_m(x, v) = \frac{1}{R^{(m)}(v)} \left(x f_{m-1}(v) - R_1^{(m)}(v) f_{m-1}(x, v) - \cdots - R_m^{(m)}(v) \right),$$

ist offenbar auch die Annahme zulässig, dass jeder der Coëfficienten $R_1^{(m)}(v), R_2^{(m)}(v), \ldots R_m^{(m)}(v)$ von niedrigerem Grade als der Nenner $R^{(m)}(v)$ sei; denn anderenfalls kann man statt der Coëfficienten $R(v)$ im Zähler den bei der Division durch den Nenner $R^{(m)}(v)$ verbleibenden Rest setzen, ohne dass die hierdurch entstehende Function $f_m(x, v)$ eine derjenigen Eigenschaften verliert, durch welche dieselbe oben charakterisirt worden ist.

§ 3.

Bezeichnet man die n verschiedenen Wurzeln der irreductibeln Gleichung $F(x, v) = 0$, d. h. also die n verschiedenen Werthe der ganzen algebraischen Function x mit $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, so ist die Determinante des Systems n^{ter} Ordnung:

$$\begin{array}{lllll}
f_0(x_0, v), & f_1(x_0, v), & f_2(x_0, v), & \ldots & f_{n-1}(x_0, v) \\
f_0(x_1, v), & f_1(x_1, v), & f_2(x_1, v), & \ldots & f_{n-1}(x_1, v) \\
f_0(x_2, v), & f_1(x_2, v), & f_2(x_2, v), & \ldots & f_{n-1}(x_2, v) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_0(x_{n-1}, v), & f_1(x_{n-1}, v), & f_2(x_{n-1}, v), & \ldots & f_{n-1}(x_{n-1}, v)
\end{array}$$

eine alternirende Function der Grössen $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ und zugleich eine *ganze* algebraische Function von v, also ist das Quadrat dieser Determinante eine ganze rationale Function von v und soll mit $\Delta(v)$ bezeichnet werden.

Nach demjenigen, was über die Bildungsweise der Functionen f vorausgesetzt worden, hat jede derselben die Form:

$$f_m(x, v) = \frac{1}{N_m(v)} \cdot x^m + R_1(v) \cdot x^{m-1} + \cdots + R_m(v).$$

Die Determinante des aus den Functionen f gebildeten Systems, nämlich $\sqrt{\Delta(v)}$, ist demnach gleich dem reciproken Werke des Products $N_1(v) \cdot N_2(v) \cdots N_{n-1}(v)$, multiplicirt mit der Determinante des Systems:

$$\begin{array}{lllll}
1, & x_0, & x_0^2, & \ldots & x_0^{n-1} \\
1, & x_1, & x_1^2, & \ldots & x_1^{n-1} \\
1, & x_2, & x_2^2, & \ldots & x_2^{n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1, & x_{n-1}, & x_{n-1}^2, & \ldots & x_{n-1}^{n-1}.
\end{array}$$

Da aber das Quadrat dieser letzteren Determinante dem absoluten Werthe nach gleich der Discriminante der Gleichung $F = 0$ ist, welche mit $D(v)$ bezeichnet worden ist, so hat man:

$$\pm D(v) = \Delta(v) \cdot (N_1(v) \cdot N_2(v) \cdots N_{n-1}(v))^2,$$

woraus auch hervorgeht, dass $\Delta(v)$ nicht verschwinden kann.

Wenn nun $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{n-1}(x)$ irgend welche rationalen Functionen von x und v bedeuten, die sich also sämmtlich auf die Form:

$$\varphi_m(x) = \Phi_{m,0}(v) \cdot f_0(x, v) + \Phi_{m,1}(v) \cdot f_1(x, v) + \cdots + \Phi_{m,n-1}(v) \cdot f_{n-1}(x, v)$$

bringen lassen, so wird die Determinante des aus den n^2 Functionen $\varphi_k(x_i, v)$

gebildeten Systems gleich der Determinante des aus den rationalen Functionen $\Phi_{k,i}(v)$ gebildeten Systems, multiplicirt mit $\sqrt{\Delta(v)}$. Sind die Functionen φ sämmtlich *ganze* algebraische Functionen von v, so ist das Quadrat der Determinante des durch $\varphi_k(x_i, v)$ repräsentirten Systems eine ganze rationale Function von v, welches mit $D_\varphi(v)$ bezeichnet werden möge. Alsdann sind ferner die rationalen Functionen $\Phi_{k,i}(v)$ sämmtlich ganz, und es ist also die betreffende Determinante eine ganze rationale Function $R(v)$. Man hat daher die Gleichung:

$$D_\varphi(v) = \Delta(v) \cdot (R(v))^2,$$

welche zeigt, dass das Quadrat der Determinante jedes durch $\varphi_k(x_i, v)$ repräsentirten Systems eine ganze rationale durch $\Delta(v)$ theilbare Function von v ist, wenn $\varphi_0(x, v)$, $\varphi_1(x, v)$, ... $\varphi_{n-1}(x, v)$ *ganze* algebraische Functionen von v bedeuten, und dass demnach eben dieses Quadrat der Determinante, wenn es von möglichst niedrigem Grade, aber nicht gleich Null sein soll, von $\Delta(v)$ sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann. Das Fundamentalsystem der Functionen f ergiebt daher die Determinante niedrigsten Grades, und umgekehrt hat, wie leicht zu sehen, jedes System von ganzen algebraischen Functionen φ, welches zu einer Determinante *desselben* Grades führt, für welches also $D_\varphi(v) = c \cdot \Delta(v)$ ist, ebenfalls die charakteristische Eigenschaft eines Fundamentalsystems, dass sich jede ganze algebraische Function von v, welche durch x und v rational ausdrückbar ist, als lineare Function der n Grössen φ darstellen lässt, deren Coëfficienten ganze rationale Functionen von v sind.

Es sei nunmehr $\varphi_0(x, v) = 1$, ferner sei y irgend eine ganze algebraische Function n^{ter} Ordnung $\varphi_1(x, v)$, so dass $y_i = \varphi_1(x_i, v)$ ist, endlich setze man $y^k = \varphi_k(x, v)$, also $y_i^k = \varphi_k(x_i, v)$. Alsdann wird das Quadrat der Determinante des durch $\varphi_k(x_i, v)$ repräsentirten Systems, d. h. also $D_\varphi(v)$ gleich der Discriminante der Gleichung n^{ten} Grades $F_1(y, v) = 0$, durch welche die algebraische Function y definirt wird. Man hat also, wenn diese Discriminante mit $D_1(v)$ bezeichnet wird:

$$D_1(v) = \Delta(v) \cdot (R(v))^2,$$

während oben für die Discriminante von x die ähnliche Beziehung

$$\pm D(v) = \Delta(v)\,(N_1(v) \cdot N_2(v) \cdots N_{n-1}(v))^2$$

sich ergeben hatte. Es ist demnach $\Delta(v)$ nicht bloss ein Theiler der Discriminante der Gleichung $F(x, v) = 0$ sondern auch ein Theiler der Discriminanten aller derjenigen irreductibeln Gleichungen n^{ten} Grades, durch welche ganze algebraische Functionen von v definirt werden, die zugleich rationale Functionen von x und v sind. Ich nenne desshalb diesen Divisor der Discriminante der Gleichung $F(x, v) = 0$ den „wesentlichen Theiler" derselben und bezeichne im Gegensatz dazu den übrigen Theil der Discriminante, welcher ein vollständiges Quadrat ist, als „ausserwesentlichen Theiler". Diese letztere Bezeichnung wird sich nämlich rechtfertigen, insofern gezeigt wird, dass eben *nur* der als wesentlicher Theiler bezeichnete Ausdruck $\Delta(v)$ gemeinsamer Divisor aller erwähnten Discriminanten, d. h. also der *grösste* gemeinschaftliche Factor derselben ist.

Wenn es im Folgenden nöthig werden wird, die einzelnen Linearfactoren des wesentlichen und ausserwesentlichen Theilers der Discriminante zu berücksichtigen, so werde ich dieselben kurzweg als „wesentliche" und resp. „ausserwesentliche Factoren" der Discriminante der algebraischen Function x bezeichnen. Es ist ferner zu erwähnen, dass im Vorhergehenden der wesentliche und ausserwesentliche Theiler der Discriminante nur abgesehen von einer Constanten erklärt und bestimmt worden ist. Für die vorliegende Untersuchung ist dies auch hinreichend, so lange x eben nur als algebraische Function der Variabeln v betrachtet und demnach von den in der Gleichung $F(x, v) = 0$ ausserdem noch vorkommenden und als constant bezeichneten Grössen abgesehen wird. Auf diesem Standpunkte, wo man die besondere Natur und Beschaffenheit, welche der algebraischen Function x durch die in der definirenden Gleichung enthaltenen Constanten gegeben wird, nicht in Rücksicht zieht, kann auch nur eine solche Unterscheidung zwischen den verschiedenen Theilern der Discriminante gewonnen werden, welche deren Linearfactoren in v betrifft. Desshalb ist es hier auch ganz gleichgültig, welche Bestimmung man über eine der Function $\Delta(v)$ hinzuzufügende Constante treffen möge. Aber es ist vortheilhaft, hierüber in irgend einer bestimmten Weise zu disponiren, um die folgenden Resultate einfacher präcisiren zu können. Aus diesem Grunde will ich annehmen, dass $\Delta(v)$ selbst, d. h. der wesentliche Theiler von $D(v)$ so bestimmt sei, dass der Coëfficient der höchsten Potenz von v darin gleich $+1$ wird. Das oben erlangte Resultat lässt sich alsdann in folgender Form aussprechen:

> Der wesentliche Theiler der Discriminante einer mit x bezeichneten ganzen algebraischen Function von v ist, abgesehen von einer so eben bestimmten Constanten, gleich dem Quadrate der Determinante eines durch $f_k(x_i, v)$ repräsentirten Systems, wenn die Functionen $f_0(x, v)$, $f_1(x, v)$, ... $f_{n-1}(x, v)$ irgend eines der Fundamentalsysteme bilden;

und es kann dies als erste charakteristische Eigenschaft des wesentlichen Theilers der Discriminante angesehen werden. Der ausserwesentliche Theiler derselben ist auch in Bezug auf seinen constanten Factor dadurch vollkommen definirt, dass das Product des wesentlichen und ausserwesentlichen Theilers genau gleich der Discriminante selber sein soll. Die erste Eigenschaft des letzteren aber, welche ebenfalls aus den obigen Ausführungen hervorgeht und eine für die Unterscheidung der beiden Theiler charakteristische Beziehung enthält, lässt sich dahin formuliren:

> Der ausserwesentliche Theiler der Discriminante einer ganzen algebraischen Function x ist stets das Quadrat einer ganzen rationalen Function der unabhängigen Variabeln v, und zwar ist derselbe gleich dem Quadrate der Determinante des Substitutionssystems, welches man erhält, wenn man die n ganzen algebraischen Functionen $1, x, x^2, \dots x^{n-1}$ linear durch die n Functionen eines Fundamentalsystems ausdrückt.

Es muss also andererseits das Substitutionssystem, vermittelst dessen die Functionen eines Fundamentalsystems als lineare Functionen von $1, x, x^2, \dots x^{n-1}$, d. h. als ganze rationale Functionen von x dargestellt werden, eine Determinante haben, deren Quadrat gleich dem reciproken Werthe des ausserwesentlichen Theilers ist. Wenn dieser nicht etwa eine Constante ist, so müssen also irgend welche der Elemente jenes Substitutionssystems gebrochene Functionen von v sein, und jeder einzelne ausserwesentliche Factor $(v-\alpha)$ muss

in irgend welchem der Elemente als nothwendiger Nenner vorkommen. Für jeden ausserwesentlichen Factor $(v-\alpha)$ ist es desshalb eine zweite charakteristische Eigenschaft,

> dass ganze algebraische Functionen von v existiren, die sich nur als gebrochene rationale Functionen von x und v und zwar mit dem Nenner $(v-\alpha)$ darstellen lassen, oder mit anderen Worten, dass es ganze rationale Functionen von x und v giebt, welche in Bezug auf x höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade und durch $(v-\alpha)$ nicht algebraisch theilbar sind, und welche dennoch, durch $(v-\alpha)$ dividirt, eine ganze algebraische Function von v ergeben.

Es ist hierbei zu bemerken, dass ein durch die erwähnte Eigenschaft als ausserwesentlicher Factor charakterisirter Linearfactor der Discriminante ausserdem zugleich in dem wesentlichen Theiler derselben enthalten sein kann. Endlich ist noch zu erwähnen, dass, wie aus der Bildung der Functionen f leicht zu ersehen ist, ein ausserwesentlicher Factor $(v-\alpha)$ mindestens zur $2m^{\text{ten}}$ Potenz erhoben in der Discriminante enthalten sein muss, wenn es ganze algebraische Functionen von v giebt, die sich als ganze rationale Functionen $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades von x darstellen lassen, und zwar so, dass irgend eine der rationalen Functionen von v, welche die Coëfficienten bilden, im Nenner den Factor $(v-\alpha)$ enthält.

§ 4.

In den vorstehenden Ausführungen ist nicht eigentlich von der Voraussetzung der Irreductibilität der Gleichung $F(x, v) = 0$ Gebrauch gemacht worden. Nur insofern eine reductible Gleichung nicht *eine* sondern *mehrere algebraische Functionen zugleich* definirt, würden die obigen Resultate anders zu formuliren sein, wenn man für die zu Grunde gelegte Gleichung die Voraussetzung der Irreductibilität fallen lässt. Bedeutet

$$\bar{F}(x, v) = 0$$

eine *reductible* Gleichung r^{ten} Grades, in welcher der Coëfficient von x^r gleich *Eins* ist, während die übrigen Coëfficienten ganze rationale Functionen von v

sind, so definirt diese Gleichung so viel ganze algebraische Functionen von v (nebst ihren conjugirten), als die Anzahl ihrer irreductibeln Factoren beträgt. Diese algebraischen Functionen sind sämmtlich von einander verschieden, sobald — wie vorausgesetzt werden soll — die Discriminante von $\bar{F}(x, v) = 0$, welche mit $\bar{D}(v)$ bezeichnet werden möge, nicht verschwindet. Analog den Functionen

$$A_0(v) + A_1(v) \cdot x + A_2(v) \cdot x^2 + \cdots + A_{n-1}(v) \cdot x^{n-1},$$

welche im § 2 den Ausgangspunkt bildeten, können Ausdrücke von der Form

$$\bar{A}_0(v) + \bar{A}_1(v) \cdot x + \bar{A}_2(v) \cdot x^2 + \cdots + \bar{A}_{r-1}(v) \cdot x^{r-1}$$

nur dann algebraische Functionen von v darstellen, welche für *alle* durch die Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ definirten Werthe von x *ganz* sind, wenn die rationalen Functionen $\bar{A}(v)$ keine anderen Nenner als Theiler von $\bar{D}(v)$ enthalten. Dies geht aus den im § 1 gegebenen Entwickelungen unmittelbar hervor, wenn dabei von der Voraussetzung der Irreductibilität der zu Grunde gelegten Gleichung abgesehen wird. Hiernach lässt sich ganz ebenso wie im § 2 ein System von Functionen

$$\bar{f}_0(x, v), \quad \bar{f}_1(x, v), \quad \bar{f}_2(x, v), \quad \ldots \quad \bar{f}_{r-1}(x, v)$$

bilden, welche den dort mit $f(x, v)$ bezeichneten genau entsprechen und folgende Eigenschaften haben:

I. Sie sind sämmtlich ganze Functionen $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades von x, welche als Coëfficienten nur solche rationale Functionen von v haben, deren Nenner Theiler der Discriminante $\bar{D}(v)$ sind.

II. Sie stellen *ganze* algebraische Functionen von v dar, sobald für x *irgend eine* der verschiedenen durch die Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ definirten algebraischen Functionen von v gesetzt wird, so dass auch der Ausdruck

$$\bar{B}_0(v)\bar{f}_0(x, v) + \bar{B}_1(v)\bar{f}_1(x, v) + \bar{B}_2(v)\bar{f}_2(x, v) + \cdots + \bar{B}_{r-1}(v)\bar{f}_{r-1}(x, v),$$

in welchem $\bar{B}_0(v)$, $\bar{B}_1(v)$, $\ldots$ $\bar{B}_{r-1}(v)$ ganze rationale Functionen von v bedeuten, für alle der Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ genügenden Werthe von x nur *ganze* algebraische Functionen von v darstellt.

III. Es lasst sich andererseits *jede* rationale Function von x und v, welche für *alle* durch $\bar{F}(x, v) = 0$ definirten Functionen x algebraisch ganze Functionen von v ergiebt, durch die angegebene in $\bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots \bar{f}_{r-1}$ lineare Form darstellen, und zwar in *dem* Sinne, dass die darzustellende Function mit dieser Form für sämmtliche der Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ genügenden Werthe von x übereinstimmt.

Die zuletzt angeführte Eigenschaft des Systems der Functionen f charakterisirt dasselbe als ein Fundamentalsystem, und es folgt nunmehr ganz wie im § 3, dass das Quadrat der Determinante

$$|\bar{f}_i(x_k, v)| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots r-1),$$

in welcher $x_0, x_1, \ldots x_{r-1}$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ bedeuten, eine ganze Function von v und zwar ein Theiler von $\bar{D}(v)$ ist. Bezeichnet man, wie im § 3, diesen Theiler der Discriminante der Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ als den „wesentlichen“, den anderen aber als den „ausserwesentlichen“, so leuchtet ein, dass der letztere ein vollständiges Quadrat ist. Beide Theiler aber lassen sich aus den wesentlichen und ausserwesentlichen Theilern der Discriminanten der einzelnen Factoren von $\bar{F}(x, v)$ leicht zusammensetzen. Es ist nämlich, genau wie im § 3, zu zeigen, dass der wesentliche Theiler der Discriminante von $\bar{F}(x, v) = 0$ zugleich Theiler des Quadrates jeder Determinante

$$|g_i(x_k, v)| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots r-1)$$

ist, wenn die r^2 Functionen $g_i(x_k, v)$ sämmtlich, d. h. für alle Werthe der Indices i und k ganze algebraische Functionen von v darstellen. Ist nun

$$\bar{F}(x, v) = \Phi(x, v) \cdot \Psi(x, v),$$

wo Φ und Ψ ganze Functionen von x, beziehungsweise von den Graden m und n bedeuten, deren Coëfficienten ganze Functionen sind, werden ferner mit

$$x_0,\ x_1,\ \dots x_{m-1} \qquad \text{die Wurzeln von} \qquad \Phi(x, v) = 0$$

und mit

$$x_m,\ x_{m+1},\ \dots x_{r-1} \qquad \text{die Wurzeln von} \qquad \Psi(x, v) = 0$$

bezeichnet, und sind endlich

$$\begin{array}{llll} \varphi_0(x, v), & \varphi_1(x, v), & \dots & \varphi_{m-1}(x, v), \\ \psi_m(x, v), & \psi_{m+1}(x, v), & \dots & \psi_{r-1}(x, v) \end{array}$$

(beziehungsweise für die Gleichungen $\Phi(x, v) = 0$, $\Psi(x, v) = 0$) Fundamentalsysteme im Sinne der obigen, auch für reductible Gleichungen geltenden Erklärung, so lassen sich rationale Functionen

$$g_0(x, v),\ \ g_1(x, v),\ \ g_2(x, v),\ \ \dots g_{r-1}(x, v)$$

so bestimmen, dass

$$g_i(x_k, v) = \varphi_i(x_k, v)$$

wird, wenn beide Indices i und k kleiner als m sind, dass hingegen

$$g_i(x_k, v) = \psi_i(x_k, v)$$

wird, wenn beide Indices grösser als $m - 1$ sind, und dass endlich

$$g_i(x_k, v) = 0$$

wird, wenn einer der beiden Indices kleiner als m ist, der andere aber nicht. In der That braucht man zu diesem Behufe nur zwei ganze Functionen von x mit Coëfficienten, die rationale Functionen von v sind,

$$P(x, v),\quad Q(x, v)$$

so zu wählen, dass

$$P(x, v)\Phi(x, v) + Q(x, v)\Psi(x, v) = 1$$

wird, und alsdann für $h = 0, 1, \dots m - 1$

$$g_h(x, v) = \varphi_h(x, v) Q(x, v) \Psi(x, v),$$

aber für $i = m, m + 1, \dots r - 1$

$$g_i(x, v) = \psi_i(x, v) P(x, v) \Phi(x, v)$$

zu setzen. Das Quadrat der aus diesen r^2 Functionen $g_i(x_k, v)$ gebildeten Determinante, welches nach einer bereits oben gemachten Bemerkung den wesentlichen Theiler der Discriminante von $\overline{F}(x, v) = 0$ als Theiler enthalten muss, ist offenbar gleich dem Quadrate des Productes der beiden aus den m^2 Elementen φ und den n^2 Elementen ψ gebildeten Determinanten, d. h. gleich dem Producte der wesentlichen Theiler der Discriminanten von $\Phi(x, v)$ und $\Psi(x, v)$. Es muss daher das Product der wesentlichen Theiler der Discriminanten von $\Phi(x, v)$ und $\Psi(x, v)$ durch den wesentlichen Theiler der Discriminante des Productes $\Phi(x, v) \cdot \Psi(x, v)$ theilbar sein. Andererseits lässt sich aber zeigen, dass der wesentliche Theiler der Discriminante von $\overline{F}(x, v)$ durch das Product derjenigen von $\Phi(x, v)$ und $\Psi(x, v)$ theilbar sein muss. Denn die mit $\bar{f}_i(x, v)$ bezeichneten Functionen des Fundamentalsystems für $\overline{F}(x, v) = 0$ lassen sich als homogene ganze lineare Functionen der r Elemente $g_0(x, v)$, $g_1(x, v)$, $\dots$ $g_{r-1}(x, v)$ so darstellen, dass die Coëfficienten ganze rationale Functionen von v sind, da die Gleichung

$$f_i(x, v) = C_{0i}(v) g_0(x, v) + C_{1i}(v) g_1(x, v) + \cdots + C_{r-1, i}(v) g_{r-1}(x, v)$$

offenbar für alle r Werthe $x = x_0, x_1, \dots x_{r-1}$ erfüllt ist, wenn die Coëfficienten C so bestimmt werden, dass für die ersten m Werthe von x

$$f_i(x, v) = C_{0i}(v) \varphi_0(x, v) + C_{1i}(v) \varphi_1(x, v) + \cdots + C_{m-1, i}(v) \varphi_{m-1}(x, v),$$

für die folgenden n Werthe aber

$$f_i(x, v) = C_{mi}(v) \psi_m(x, v) + C_{m+1, i}(v) \psi_{m+1}(x, v) + \cdots + C_{r-1, i}(v) \psi_{r-1}(x, v)$$

wird. Das gewonnene Resultat lässt sich daher, wenn der constante Factor des wesentlichen Theilers in der oben angegebenen Weise bestimmt wird, folgendermassen formuliren:

„Der wesentliche Theiler der Discriminante einer reductibeln Gleichung ist gleich dem aus den wesentlichen Theilern der Discriminanten ihrer Factoren gebildeten Producte.“

Ueber den ausserwesentlichen Theiler der Discriminante einer reductibeln Gleichung mag hier nur bemerkt werden, dass derselbe stets durch das Quadrat der Eliminations-Resultante ihrer Factoren theilbar ist. Wenn nämlich wie oben $\overline{F}(x, v) = \Phi(x, v) \cdot \Psi(x, v)$ angenommen und die Discriminante von $\overline{F}(x, v)$ mit $\overline{D}(v)$ bezeichnet wird, so findet die Gleichung

$$\overline{D}(v) = D_1(v) \cdot D_2(v) \cdot R(v)^2$$

statt, in welcher $D_1(v)$, $D_2(v)$, $R(v)$ beziehungsweise die Resultanten der Elimination von x aus

$$\begin{aligned} \Phi(x, v) &= 0, & \frac{\partial \Phi(x, v)}{\partial x} &= 0, \\ \Psi(x, v) &= 0, & \frac{\partial \Psi(x, v)}{\partial x} &= 0, \\ \Phi(x, v) &= 0, & \Psi(x, v) &= 0 \end{aligned}$$

bedeuten. Da nun $D_1(v)$, $D_2(v)$ beziehungsweise die Discriminanten von $\Phi(v)$ und $\Psi(v)$ sind, und da der wesentliche Theiler von $\overline{D}(v)$ nur gleich dem Producte der wesentlichen Theiler von $D_1(v)$ und $D_2(v)$ ist, so muss der Factor $R(v)^2$, d. h. das Quadrat der Eliminations-Resultante von $\Phi(x, v) = 0$ und $\Psi(x, v) = 0$ in der That als Theiler im ausserwesentlichen Theiler der Discriminante $\overline{D}(v)$ enthalten sein.

§ 5.

Versteht man unter $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ unbestimmte Grössen und setzt

$$z_k = w_0 \cdot f_0(x_k, v) + w_1 \cdot f_1(x_k, v) + \cdots + w_{n-1} \cdot f_{n-1}(x_k, v),$$

so genügen $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ einer irreductibeln Gleichung n^{ten} Grades, in welcher der Coëfficient von x^n gleich Eins ist, während die übrigen Coëfficienten ganze rationale Functionen von $v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ sind. Wenn die

Discriminante dieser Gleichung mit D_z bezeichnet wird, so ist also auch D_z eine ganze rationale Function von v und den n Unbestimmten w, und nach dem, was im vorigen Paragraphen bewiesen worden, durch den wesentlichen Theiler der Discriminante von x, d. h. durch $\Delta(v)$ theilbar, da z_k eine *ganze* algebraische Function von v ist. Die Discriminante D_z enthält also einen von den Grössen w unabhängigen Factor, d. h. wenn D_z nach den verschiedenen Potenzen von $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ entwickelt gedacht wird, so enthalten sämmtliche Coëfficienten der verschiedenen Terme von der Form $w_0^a \cdot w_1^b \cdots w_{n-1}^m$ einen grössten gemeinsamen Factor, der eine ganze rationale Function von v und jedenfalls durch $\Delta(v)$ theilbar ist. Wird dieser grösste gemeinschaftliche Factor mit $\Delta_1(v)$ bezeichnet, so dass also:

$$D_z = \Delta_1(v) \cdot V(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$$

ist, so muss, da D_z durch $\Delta(v)$ dividirt als Quotienten das vollständige Quadrat einer ganzen rationalen Function von v ergeben soll, sowohl $\frac{\Delta_1(v)}{\Delta(v)}$ als $V(v, w_0, \ldots)$ ein vollständiges Quadrat sein. Es wird desshalb:

$$D_z = \Delta(v) \cdot \big(\delta(v)\big)^2 \cdot \big(W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})\big)^2$$

sein, wo $\delta(v)$ eine ganze rationale Function von v allein und W eine ganze rationale Function von v und den Grössen w bedeutet, welche keinen von den letzteren unabhängigen Factor mehr enthält. Dass nämlich W nicht nur in Bezug auf v sondern auch in Bezug auf $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ ganz und rational ist, geht unmittelbar daraus hervor, dass $\delta(v) \cdot W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$, abgesehen von einem in Rücksicht auf $v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ constanten Factor, gleich der Determinante des Substitutionssystems ist, vermittelst dessen $1, z, z^2, \ldots z^{n-1}$ linear durch die Functionen f ausgedrückt werden. Nach der oben angenommenen Ausdrucksweise ist daher $\Delta(v)$ der wesentliche, $\delta(v)^2 \cdot W^2$ aber der ausserwesentliche Theiler der Discriminante D_z und jeder Factor von $\delta(v)$ ein ausserwesentlicher Factor derselben. Wenn nun $(v - \alpha)$ einer dieser Factoren und also α eine Constante, d. h. eine von v und $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ unabhängige Grösse ist, so muss es — auf Grund der zweiten Eigenschaft der ausserwesentlichen Factoren — ganze rationale Functionen von z und v geben, welche in Bezug auf z höchstens vom

$(n-1)^{\text{ten}}$ Grade und durch $(v-\alpha)$ nicht theilbar sind, und welche dennoch, durch $(v-\alpha)$ dividirt, algebraisch ganz bleiben. Es sei nun $\psi(z)$ eine derjenigen Functionen dieser Art, welche von möglichst niedrigem Grade in Bezug auf z sind. Dann ist also

$$\psi(z) = \psi_m \cdot z^m + \psi_{m-1} \cdot z^{m-1} + \cdots + \psi_0,$$

wo die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von z ganze rationale Functionen von v, w_0, w_1, $\dots w_{n-1}$ und nicht sämmtlich durch $(v-\alpha)$ theilbar sind; es ist ferner $m < n$, $\frac{\psi(z)}{v-\alpha}$ eine ganze algebraische Function von v und endlich ψ_m nicht durch $(v-\alpha)$ theilbar, da sonst entgegen der gemachten Voraussetzung eine ganze rationale Function $\psi_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \psi_0$ existirte, welche dieselben Eigenschaften wie $\psi(z)$ hätte. Bedeutet nun y eine unbestimmte Grösse, so ist auch $yz - \frac{\psi(z)}{v-\alpha}$ eine ganze algebraische Function von v, welche sich, wie z selbst, mit Hülfe von x rational darstellen lässt. Dieselbe kann daher als lineare Function von f_0, f_1, $\dots f_{n-1}$ ausgedrückt, d. h. in die Form:

$$yz - \frac{\psi(z)}{v-\alpha} = u_0 \cdot f_0(x, v) + u_1 \cdot f_1(x, v) + \cdots + u_{n-1} \cdot f_{n-1}(x, v)$$

gesetzt werden, in welcher die Coëfficienten u ganze rationale Functionen von v, w_0, w_1, $\dots w_{n-1}$ und y bedeuten. Die Discriminante von $yz - \frac{\psi(z)}{v-\alpha}$ ist nun offenbar nach der obigen Bezeichnungsweise gleich:

$$\Delta(v) \cdot \delta(v)^2 \cdot W(v, u_0, u_1, \dots u_{n-1})^2,$$

d. h. gleich dem Ausdrucke, den man erhält, wenn man in der obigen Darstellung der Discriminante von z die unbestimmten Grössen w durch die Grössen u ersetzt. Andererseits wird aber die Discriminante von $yz - \frac{\psi(z)}{v-\alpha}$, abgesehen vom Vorzeichen, durch das Product:

$$\Pi\left(y(z_k - z_i) - \frac{\psi(z_k) - \psi(z_i)}{v-\alpha}\right)^2$$

oder

$$\Pi(z_k - z_i)^2 \cdot \Pi\left(y - \frac{\psi(z_k) - \psi(z_i)}{(v-\alpha)(z_k - z_i)}\right)^2$$

dargestellt, wenn man darin den Indices k und i sämmtliche Werthe beilegt, bei welchen $k > i$ ist. Da nun das Product $\Pi(z_k - z_i)^2$ bei richtiger Bestimmung des Vorzeichens die Discriminante von z, welche mit D_z bezeichnet wurde, ausdrückt, so hat man:

$$\Delta(v) \cdot \delta(v)^2 \cdot \left(W(v, u_0, u_1, \dots u_{n-1})\right)^2 = D_z \cdot \Pi\left(y - \frac{\psi(z_k) - \psi(z_i)}{(v-\alpha)(z_k - z_i)}\right)^2,$$

oder indem man den oben angegebenen Werth von D_z einsetzt, alsdann den gemeinsamen Factor $\Delta(v) \cdot \delta(v)^2$ auf beiden Seiten der Gleichung weglässt und endlich die Quadratwurzel nimmt:

$$\pm W(v, u_0, u_1, \dots u_{n-1}) = W(v, w_0, w_1, \dots w_{n-1}) \cdot \Pi\left(y - \frac{\psi(z_k) - \psi(z_i)}{(v-\alpha)(z_k - z_i)}\right).$$

Nach der über die Function $W(v, w_0, w_1, \dots w_{n-1})$ gemachten Voraussetzung, dass sie keinen von den Grössen w unabhängigen Factor enthalte, kann dieselbe nicht durch $(v-\alpha)$ theilbar sein, also für $v = \alpha$ nicht verschwinden. Es muss also, ebenso wie die linke Seite jener Gleichung, auch der zweite Factor auf der rechten Seite, nämlich das Product:

$$\Psi(y) = \Pi\left(y - \frac{\psi(z_k) - \psi(z_i)}{(v-\alpha)(z_k - z_i)}\right)$$

für $v = \alpha$ endlich bleiben, und da dasselbe überdies offenbar für alle anderen Werthe von v endlich und in Beziehung auf v rational ist, so muss es eine ganze rationale Function von v, also überhaupt eine ganze rationale Function von v, w_0, w_1, $\dots w_{n-1}$ und y sein. Da ferner der Coëfficient der höchsten Potenz von y in $\Psi(y)$ gleich Eins ist, so stellt $\Psi(y) = 0$ eine Gleichung dar, deren Wurzeln sämmtlich ganze algebraische Functionen von v sind, d. h. es muss

$$\frac{1}{v-\alpha}\cdot\frac{\psi(z_k)-\psi(z_i)}{z_k-z_i}$$

für alle von einander verschiedenen Werthe der Indices k und i eine ganze algebraische Function von v sein. Wenn dies aber wirklich der Fall wäre, so müsste auch

$$\frac{1}{v-\alpha}\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{\psi(z_0)-\psi(z_i)}{z_0-z_i}$$

oder der damit übereinstimmende Ausdruck

$$-\frac{\psi'(z_0)}{v-\alpha}+\frac{1}{v-\alpha}\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{\psi(z_0)-\psi(z_i)}{z_0-z_i}$$

eine ganze algebraische Function darstellen. Da aber

$$\psi(z)=\psi_m z^m+\psi_{m-1}z^{m-1}+\cdots+\psi_0$$

ist, so erhält dieser Ausdruck die Form

$$\frac{1}{v-\alpha}\left((n-m)\psi_m\cdot z_0^{m-1}+\left(\psi_m\sum_{i=0}^{i=n-1}z_i+(n-m+1)\psi_{m-1}\right)z_0^{m-2}+\cdots\right),$$

aus welcher man ersieht, dass derselbe keine ganze algebraische Function darstellen kann. Denn es würde dies, weil jener Ausdruck in Bezug auf z vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade und der Coëfficient von z^{m-1} nicht durch $(v-\alpha)$ theilbar ist, den Bedingungen widersprechen, welche für die Wahl von $\psi(z)$ festgesetzt worden sind. Es zeigt sich also durch diesen Widerspruch, dass jene Bedingungen unerfüllbar sind, dass demnach keine Function $\psi(z)$ und desshalb auch kein ausserwesentlicher Factor $(v-\alpha)$, d. h. kein Factor von $\vartheta(v)$ existiren kann, dass also $\vartheta(v)$ selbst sich auf eine von v unabhängige Constante reduciren muss. Da nun diese Constante mit der Function W vereinigt werden kann, so haben wir schliesslich für die Discriminante der durch den Ausdruck:

$$w_0 f_0(x, v)+w_1 f_1(x, v)+\cdots+w_{n-1}f_{n-1}(x, v)$$

dargestellten ganzen algebraischen Function z die Gleichung:

$$D_z=\varDelta(v)\cdot\left(W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})\right)^2,$$

in welcher W eine ganze rationale Function von v, w_0, w_1, … w_{n-1} bedeutet, die keinen von den Grössen w unabhängigen Factor $(v-\alpha)$ enthält.

Die so eben angeführte Eigenschaft der Function W macht es offenbar möglich, für die bisher unbestimmt gebliebenen Grössen w derartige ganze rationale Functionen von v zu wählen, dass $W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$ irgend welche gegebenen Factoren $(v-\alpha)$, $(v-\alpha')$, … *nicht* enthält. In der That lassen sich z. B. immer constante, d. h. von v unabhängige Werthe für die Grössen w finden, durch welche der erwähnten Bedingung Genüge geleistet wird, da hierzu nur erforderlich ist, die Grössen w so zu bestimmen, dass die Gleichung:

$$W(\alpha, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})\cdot W(\alpha', w_0, w_1, \ldots w_{n-1})\cdots=0$$

nicht befriedigt werde. Dies ist aber stets möglich, weil diese Gleichung — wie bewiesen worden ist — durch unbestimmte Grössen w, d. h. also identisch niemals erfüllt ist, welche Werthe auch α, α', … haben mögen. Denkt man sich nun namentlich die Grössen w_0, w_1, … w_{n-1} so bestimmt, dass die Function W keinen ausserwesentlichen Factor der Discriminante von x enthält, so wird die Discriminante der ganzen algebraischen Function

$$w_0 f_0(x, v)+w_1 f_1(x, v)+\cdots+w_{n-1}f_{n-1}(x, v)$$

mit der Discriminante von x *nur* den Factor $\varDelta(v)$ gemein haben. Wir haben hiermit für den *wesentlichen* Theiler der Discriminante einer ganzen algebraischen Function x die zweite Eigenschaft erlangt,

> dass derselbe der grösste gemeinschaftliche Theiler der Discriminanten aller derjenigen ganzen algebraischen Functionen n^{ter} Ordnung ist, welche sich durch x und v rational ausdrücken lassen.

Der *ausserwesentliche* Theiler ist dagegen im Allgemeinen für alle diese algebraischen Functionen verschieden und erhält für jede derselben den Werth $W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})^2$, wenn man darin für $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ solche ganzen rationalen Functionen von v setzt, dass die betreffende algebraische Function durch den Ausdruck $w_0 f_0 + w_1 f_1 + \cdots + w_{n-1} f_{n-1}$ dargestellt wird. Bezeichnet man ferner diesen Ausdruck für unbestimmte Grössen w wie oben mit z, so ist vermöge der oben erwähnten ersten Eigenschaft des ausserwesentlichen Theilers jede der Functionen $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$, also auch jede andere durch x rational ausdrückbare ganze algebraische Function von v, als ganze rationale Function von z, v und $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$, dividirt durch $W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$, darzustellen.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass $W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$ keine von v unabhängige ganze Function der Grössen w als Theiler enthalten kann, sobald $n > 2$ ist. Wäre dies nämlich der Fall, so würde wenigstens einer der in Beziehung auf die Grössen w linearen Factoren von W

$$w_0\big(f_0(x_i, v) - f_0(x_k, v)\big) + w_1\big(f_1(x_i, v) - f_1(x_k, v)\big) + \cdots$$
$$\cdots + w_{n-1}\big(f_{n-1}(x_i, v) - f_{n-1}(x_k, v)\big)$$

einen von v unabhängigen Factor haben müssen, d. h. es müsste dieser Ausdruck, dividirt durch einen der Coëfficienten von $w_0, w_1, \ldots$ oder w_{n-1}, von v unabhängig sein. Haben nun die Functionen f dieselbe Bedeutung wie oben, so dass $f_0 = 1$ und $f_m(x, v)$ in Beziehung auf x vom m^{ten} Grade ist, so wird jener Ausdruck, abgesehen von dem Factor $\frac{x_i - x_k}{N_1(v)}$, gleich:

$$w_1 + w_2\big(\varphi_0 + \varphi_1(x_i + x_k)\big) + w_3\big(\psi_0 + \psi_1(x_i + x_k) + \psi_2(x_i^2 + x_i x_k + x_k^2)\big) + \cdots,$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ rationale Functionen von v bedeuten. Damit alle Coëfficienten der verschiedenen Grössen w von v unabhängig seien, müssten daher die symmetrischen Functionen von x_i und x_k rationale Functionen von v sein, d. h. $F(x, v)$ müsste, als Function von x allein betrachtet, einen in v rationalen Factor zweiten Grades enthalten, und dies widerspricht für den Fall $n > 2$ der Voraussetzung, dass die Gleichung $F(x, v) = 0$ irreductibel sei.

§ 6.

Die Function $W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$ hat, als ganze rationale Function von v betrachtet, mit ihrer nach v genommenen Ableitung $W'(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$ keinen Factor gemein, so lange nämlich $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ noch unbestimmte Grössen bedeuten. Denn wenn man sich W als ganze rationale Function aller darin enthaltenen Grössen in ihre irreductibeln Factoren zerlegt denkt, d. h. in solche, die nicht wiederum ganze rationale Functionen von v und den Grössen w zu Theilern haben, so kann nach dem Inhalt des vorigen Paragraphen keiner derselben von den Grössen w unabhängig sein. Bedeutet nun $U(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$ irgend einen dieser irreductibeln Factoren, mit dem W' einen gemeinsamen Factor haben soll, so muss der grösste gemeinsame Theiler von W' und U eine ganze rationale Function von v und den Grössen w, also wegen der Irreductibilität der Function U eben diese selbst sein. Da also, wenn W ausser U noch den Factor V enthält, so dass:

$$W = U \cdot V, \qquad W' = U'V + V'U$$

zu setzen ist, das Product $U'V$ durch U theilbar sein muss und U' wegen der Irreductibilität von U keinen Factor mit U gemein haben kann, so muss nothwendig V noch den Factor U enthalten, d. h. W muss durch U^2 theilbar sein. Diese Theilbarkeit bezieht sich zwar zuvörderst nur auf die Variable v, in dem Sinne, dass W durch U^2 dividirt als Quotienten eine ganze rationale Function von v ergiebt; aber da U auch in Bezug auf die Grössen w irreductibel angenommen worden, so ist leicht zu sehen, dass jener Quotient zugleich eine ganze rationale Function von $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ sein muss. Bezeichnet man denselben mit Q, so dass $W = U^2 \cdot Q$ ist, so hat sich also gezeigt, dass, wenn W und $\frac{\partial W}{\partial v}$ einen gemeinsamen Factor U hätten, derselbe auch in $\frac{\partial W}{\partial w_0}, \frac{\partial W}{\partial w_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial w_{n-1}}$ enthalten wäre. Unter dieser Annahme müsste daher, weil

$$W \cdot \sqrt{\Delta(v)} = \pm \Pi \big\{ w_0\big(f_0(x_k) - f_0(x_i)\big) + w_1\big(f_1(x_k) - f_1(x_i)\big) + \cdots$$
$$\cdots + w_{n-1}\big(f_{n-1}(x_k) - f_{n-1}(x_i)\big) \big\}$$

ist, irgend einer der in Beziehung auf die Grössen w linearen Factoren dieses Productes einem anderen gleich sein, oder doch nur durch einen von den Grössen w unabhängigen Factor sich von demselben unterscheiden. Die Functionen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ sind aber resp. ganze Functionen des nullten, ersten, zweiten etc. Grades von x, also von der Form:

$$f_1 = a + a_1 x, \quad f_2 = b + b_1 x + b_2 x^2, \quad f_3 = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3, \quad \ldots,$$

wo die Coëfficienten $a, a_1, b, \ldots$ rationale Functionen von v bedeuten. Soll nun derjenige Factor jenes Productes, welcher die Indices k und i enthält, nach Multiplication desselben mit einer von $w_0, w_1, \ldots$ unabhängigen Grösse λ, gleich demjenigen Factor sein, welcher die Indices r und s enthält, so bekommt man durch Vergleichung der verschiedenen Coëfficienten der einzelnen Unbestimmten w die Bedingungen:

$$\lambda a_1(x_k - x_i) = a_1(x_r - x_s), \quad \lambda b_2(x_k^2 - x_i^2) + \lambda b_1(x_k - x_i) = b_2(x_r^2 - x_s^2) + b_1(x_r - x_s),$$
$$\lambda c_3(x_k^3 - x_i^3) + \lambda c_2(x_k^2 - x_i^2) + \lambda c_1(x_k - x_i) = c_3(x_r^3 - x_s^3) + c_2(x_r^2 - x_s^2) + c_1(x_r - x_s),$$

und aus diesen ergeben sich leicht, wenn man berücksichtigt, dass a_1, b_2, c_3 jedenfalls von Null verschieden sind, die einfacheren Relationen:

$$x_k + x_i = x_r + x_s \quad \text{und} \quad x_k^2 + x_k x_i + x_i^2 = x_r^2 + x_r x_s + x_s^2.$$

Hieraus folgt durch Elimination von x_s die Bedingung: $(x_k - x_r)(x_i - x_r) = 0$, welche offenbar nicht erfüllt ist, und es hat sich daher die Annahme, dass W und W' einen gemeinsamen Factor haben, als unmöglich erwiesen.

Da nun W und W', so lange die Grössen w unbestimmt sind, keinen gemeinsamen Factor in v haben, so lassen sich auch specielle Werthe, d. h. specielle ganze rationale Functionen von v für $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ setzen, für welche jene Eigenschaft bestehen bleibt. Denn wenn man sich in W und W' für $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ ganze rationale Functionen von v irgend eines beliebigen Grades mit noch unbestimmten Coëfficienten gesetzt und dann die durch Elimination von v aus W und W' entstehende Gleichung gebildet

denkt, so kann dieselbe nach dem oben Ausgeführten nicht identisch, d. h. für beliebige Werthe jener unbestimmten Coëfficienten befriedigt werden; diese Coëfficienten können also stets so gewählt werden, dass eben jene Eliminationsgleichung *nicht* erfüllt wird. Man sieht hieraus auch, dass es stets von v unabhängige, constante Werthe $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$ giebt, für welche $W(v, c_0, c_1, \ldots c_{n-1})$ und $W'(v, c_0, c_1, \ldots c_{n-1})$ keinen gemeinsamen Factor haben.

Wählt man dem Inhalte dieses und des vorigen Paragraphen gemäss für $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ irgend welche Werthe $w'_0, w'_1, \ldots w'_{n-1}$, welche die Eigenschaft haben, dass $W(v, w'_0, w'_1, \ldots w'_{n-1})$ weder mit $W'(v, w'_0, w'_1, \ldots w'_{n-1})$ noch mit $\Delta(v)$ einen Factor gemein hat, so wird

$$\xi = w'_0 f_0(x, v) + w'_1 f_1(x, v) + \cdots + w'_{n-1} f_{n-1}(x, v)$$

eine ganze algebraische Function von v, für welche die Quadratwurzel des ausserwesentlichen Theilers der Discriminante eine ganze rationale Function von v ist, deren lineare Factoren sämmtlich sowohl unter einander als von denen des wesentlichen Theilers verschieden sind.

Hierbei könnte die Bestimmung der für $w'_0, w'_1, \ldots w'_{n-1}$ zu nehmenden Werthe noch weiter dahin beschränkt werden, dass der ausserwesentliche Theiler von möglichst niedrigem Grade wird, aber es soll im Folgenden, wenn von der algebraischen Function ξ die Rede ist, ein derartiger besonderer Charakter derselben nicht vorausgesetzt werden. Die obigen Bestimmungen allein genügen, wie aus den bisherigen Ausführungen hervorgeht, dafür,

> dass jede durch x rational ausdrückbare ganze algebraische Function von v sich als ganze rationale Function von ξ darstellen lasse, deren in v rationale Coëfficienten in ihren Nennern nur Linearfactoren enthalten, welche sowohl unter einander als von denen des wesentlichen Theilers der Discriminante verschieden sind;

und man kann hierbei unter dem Ausdruck „Discriminante" ebensowohl die von x als die von ξ verstehen, weil der wesentliche Theiler für beide identisch ist.

§ 7.

Mit Hülfe der erlangten Resultate kann nunmehr die Unterscheidung zwischen wesentlichem und ausserwesentlichem Theiler auf die Discriminante von Gleichungen ausgedehnt werden, in welchen der erste Coëfficient *nicht* gleich Eins ist. Wenn nämlich unter $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_n$ ganze rationale Functionen von v verstanden werden, welche nicht sämmtlich einen gemeinsamen Factor haben, und wenn ferner

$$\Psi(y, v) = \psi_n y^n + \psi_{n-1} y^{n-1} + \cdots + \psi_1 y + \psi_0$$

gesetzt wird, so will ich jene ganze Function, welche gewöhnlich als „Discriminante" der in Beziehung auf X und Y homogenen Function:

$$\psi_n Y^n + \psi_{n-1} Y^{n-1} X + \cdots + \psi_1 Y X^{n-1} + \psi_0 X^n$$

bezeichnet wird, die Discriminante der Gleichung $\Psi(y, v) = 0$ oder auch, vorausgesetzt, dass $\Psi(y, v)$ irreductibel ist, die Discriminante der durch dieselbe Gleichung definirten algebraischen Function y nennen. — Bedeutet nun $\theta(v)$ eben diese Discriminante und Ψ' die Ableitung von Ψ nach y, so ist bekanntlich:

$$\theta(v) = \psi_n^{n-2} \cdot \Psi'(y_0, v) \cdot \Psi'(y_1, v) \cdots \Psi'(y_{n-1}, v),$$

wenn unter $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Psi(y, v) = 0$ verstanden werden. Die Discriminante $\theta(v)$ bleibt offenbar ungeändert, wenn man y durch $y + r$ ersetzt; das letzte Glied in der Entwickelung von $\Psi(y + r)$ wird aber alsdann gleich $\Psi(r)$, also gleich einer ganzen rationalen Function von v, die für beliebige Werthe der Constanten r keinen gemeinsamen Factor mit ψ_n hat. Man kann daher der Grösse r auch einen *speciellen* Werth beilegen, für welchen diese Eigenschaft von $\Psi(y + r)$ bestehen bleibt, und desshalb unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass für $\Psi(y)$ selbst eben diese Bedingung schon erfüllt sei, d. h. dass ψ_n und ψ_0 keinen gemeinsamen Factor haben.

Setzt man $x = \psi_n \cdot y$ und:

$$F(x, v) = x^n + \psi_{n-1} \cdot x^{n-1} + \psi_n \cdot \psi_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + \psi_n^{n-2} \cdot \psi_1 x + \psi_n^{n-1} \cdot \psi_0,$$

so wird x als ganze algebraische Function von v durch die Gleichung $F(x, v) = 0$ bestimmt, wenn y diejenige algebraische Function ist, welche durch die Gleichung $\Psi(y, v) = 0$ definirt und welche daher, sobald ψ_n sich nicht auf eine Constante reducirt, *nicht* ganz ist. Man hat ferner:

$$F(x, v) = \psi_n^{n-1} \cdot \Psi(y, v), \qquad F'(x, v) = \psi_n^{n-2} \cdot \Psi'(y, v),$$

also, wenn, wie oben, die Discriminante von x mit $D(v)$ bezeichnet wird:

$$D(v) = \psi_n^{n^2-3n+2} \cdot \theta(v).$$

Es soll nunmehr gezeigt werden, dass der Factor von $\theta(v)$, nämlich $\psi_n^{(n-1)(n-2)}$, als Factor in dem *ausserwesentlichen* Theiler der Discriminante $D(v)$ enthalten ist, und ich werde zu diesem Zwecke zuvörderst nachweisen, dass für jede Zahl m von 1 bis $(n-1)$ der Ausdruck:

$$\frac{\psi_0^{n-m}}{\psi_n^{m-1}} \cdot (x^m + \psi_{n-1} \cdot x^{m-1} + \psi_n \cdot \psi_{n-2} x^{m-2} + \cdots + \psi_n^{m-2} \cdot \psi_{n-m+1} \cdot x)$$

eine *ganze* algebraische Function von v darstellt. Wenn man nämlich der Kürze halber diesen Ausdruck mit $\varphi_m(x)$ und $\frac{\psi_n \cdot \psi_0}{x}$ mit η bezeichnet, so ist vermöge der Gleichung $F(x, v) = 0$:

$$-\varphi_m(x) = \psi_0^{n-m} \cdot \psi_{n-m} + \psi_0^{n-m-1} \cdot \psi_{n-m-1} \cdot \eta + \psi_0^{n-m-2} \cdot \psi_{n-m-2} \cdot \eta^2 + \cdots$$
$$\cdots + \psi_0 \psi_1 \eta^{n-m-1} + \psi_0 \cdot \eta^{n-m}.$$

Ferner hat man, da $\eta = \frac{\psi_0}{y}$ ist, vermöge der Gleichung $\Psi(y, v) = 0$:

$$\eta^n + \psi_1 \eta^{n-1} + \psi_2 \psi_0 \eta^{n-2} + \psi_3 \psi_0^2 \eta^{n-3} + \cdots + \psi_{n-1} \psi_0^{n-2} \eta + \psi_n \psi_0^{n-1} = 0.$$

Durch diese Gleichung wird offenbar η als *ganze* algebraische Function von v

definirt, und da in der vorhergehenden Gleichung $\varphi_m(x)$ als ganze rationale Function von η und v dargestellt worden ist, so ist auch $\varphi_m(x)$ als *ganze* algebraische Function von v erwiesen. — Die Determinante des Substitutionssystems, durch welches die n Grössen $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$ als eben so viele lineare Functionen der n Grössen $1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{n-1}(x)$ dargestellt werden, ist offenbar gleich Eins, dividirt durch das Product der Coëfficienten der höchsten Potenzen von x in den verschiedenen n Functionen φ, d. h. also gleich:

$$\frac{\psi_n^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}}{\psi_0^{\frac{1}{2}n(n-1)}}.$$

Nennt man nun $\partial(v)$ die Determinante desjenigen Substitutionssystems, mit Hülfe dessen die n Grössen $1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{n-1}(x)$ linear durch die Functionen des Fundamentalsystems $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$ ausgedrückt werden, so ist

$$\frac{\psi_n^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}}{\psi_0^{\frac{1}{2}n(n-1)}} \cdot \partial(v)$$

die Determinante des Substitutionssystems, vermittelst dessen sich $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$ als lineare Functionen von $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$ darstellen lassen, d. h. also diejenige Determinante, deren Quadrat im § 3 als ausserwesentlicher Theiler der Discriminante von x charakterisirt worden ist. Offenbar muss nun, da ψ_n und ψ_0 ohne gemeinsamen Factor sind, der Quotient $\frac{\partial(v)}{\psi_0^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$ für sich eine ganze rationale Function von v sein. Wird dieser Quotient mit $\delta(v)$ bezeichnet, so ist demnach $\psi_n^{(n-1)(n-2)} \cdot \delta(v)^2$ der ausserwesentliche Theiler der Discriminante $D(v)$. Folglich ist, wenn $\Delta(v)$, wie früher, den wesentlichen Theiler derselben bedeutet:

$$D(v) = \psi_n^{(n-1)(n-2)} \cdot \delta(v)^2 \cdot \Delta(v)$$

und also:

$$\theta(v) = \delta(v)^2 \cdot \Delta(v).$$

Hierdurch wird es gerechtfertigt, dass $\Delta(v)$ auch der wesentliche Theiler

der Discriminante $\theta(v)$ genannt wird, und $\delta(v)^2$ der ausserwesentliche Theiler derselben, d. h. *dass unter dem wesentlichen Theiler der Discriminante einer beliebigen algebraischen Function y gradezu der wesentliche Theiler der Discriminante* irgend einer *ganzen* algebraischen Function verstanden wird, welche durch y dividirt eine ganze rationale Function der unabhängigen Variabeln ergiebt. Auf Grund der im § 5 angeführten zweiten Eigenschaft des wesentlichen Theilers erhält man demnach für den wesentlichen Theiler der Discriminante einer *beliebigen* algebraischen Function n^{ter} Ordnung y die charakteristische Eigenschaft,

> dass derselbe der grösste gemeinsame Factor der Discriminanten aller derjenigen algebraischen Functionen n^{ter} Ordnung ist, welche sich durch y und die unabhängige Variable rational ausdrücken lassen.

Diese bemerkenswerthe Beziehung zeigt deutlich die Analogie mit der Invarianten-Eigenschaft der Discriminante selbst. Aber während vermöge dieser letzteren die gesammte Discriminante von y nur unverändert bleibt, wenn y durch eine *lineare* Function $\frac{y+\varphi}{\psi y + \varphi\psi + 1}$ ersetzt wird, haben wir in dem wesentlichen Theiler der Discriminante von y das Bleibende und zwar den einzig bleibenden Theil derselben für *alle rationalen* Functionen von y und v erkannt.

§ 8.

Wenn unter Beibehaltung der in den vorigen Paragraphen gebrauchten Bezeichnungen $v - \alpha$ ein ausserwesentlicher Factor der Discriminante von y, also ein Factor von $\delta(v)$ ist, so muss $v - \alpha$ auch ein ausserwesentlicher Factor der Discriminante der ganzen algebraischen Function x sein, deren gesammter ausserwesentlicher Theiler durch

$$\psi_n^{(n-1)(n-2)} \delta(v)^2$$

dargestellt worden ist. Es müssen demnach gemäss § 3 ganze rationale

Functionen von x und v existiren, welche durch $v-\alpha$ dividirt algebraisch ganz bleiben, d. h. wenn irgend eine derselben mit $\mathfrak{f}(x, v)$ bezeichnet wird, so muss $\frac{\mathfrak{f}(x, v)}{v-\alpha}$ eine ganze algebraische Function von v sein, während $\mathfrak{f}(x, v)$ selbst eine ganze Function höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist, deren Coëfficienten ganze rationale, nicht durch $v-\alpha$ theilbare Functionen von v sind. Demzufolge muss auch $\frac{\mathfrak{f}(x, \alpha)}{v-\alpha}$ eine ganze algebraische Function von v sein. Andererseits ist aber auch, da x durch die Gleichung $F(x, v)=0$ definirt wird,

$$\frac{F(x, \alpha)}{v-\alpha} \quad \text{übereinstimmend mit} \quad \frac{F(x, \alpha)-F(x, v)}{v-\alpha}$$

algebraisch ganz; wenn daher $\varphi(x)$ der grösste gemeinsame Theiler von $\mathfrak{f}(x, \alpha)$ und $F(x, \alpha)$ ist, so muss auch

$$\frac{\varphi(x)}{v-\alpha}$$

eine ganze algebraische Function von v sein und für $v=\alpha$ endlich bleiben. Die Function $\varphi(x)$ muss daher für jeden der verschiedenen Werthe von x verschwinden, für den $F(x, \alpha)=0$ wird, d. h. also, $\varphi(x)$ muss jeden der von einander verschiedenen Linearfactoren von $F(x, \alpha)$ enthalten. — Es sei nunmehr $\psi(x)$ der Quotient der Division von $F(x, \alpha)$ durch $\varphi(x)$, so dass also $\psi(x)$ keine anderen als die bereits in $\varphi(x)$ vorkommenden Linearfactoren enthält; es seien ferner $F_1, F_2, F_3, \ldots$ die erste, zweite, dritte, u. s. w. Ableitung von $F(x, v)$ nach v, so besteht die Gleichung

$$F(x, v)=\varphi(x) \cdot \psi(x)+(v-\alpha) F_1(x, \alpha)+\tfrac{1}{2}(v-\alpha)^2 F_2(x, \alpha)+\cdots=0,$$

und es ist also für $v=\alpha$:

$$\psi(x) \cdot \frac{\varphi(x)}{v-\alpha}=-F_1(x, \alpha).$$

Da nun $\frac{\varphi(x)}{v-\alpha}$ als ganze algebraische Function von v für $v=\alpha$ und sämmtliche zugehörigen Werthe von x endlich bleibt, so muss $F_1(x, \alpha)$ für alle Wurzeln der Gleichung $\psi(x)=0$, d. h. also für mindestens eine von den

Wurzeln der Gleichung $F(x, \alpha)=0$ verschwinden, da $\psi(x)$ mindestens vom ersten Grade ist. Da überdies durch Differentiation der obigen Gleichung nach x für den Werth $v=\alpha$ die Gleichung

$$F'(x, \alpha)=\varphi'(x) \psi(x)+\varphi(x) \psi'(x),$$

entsteht, wenn mit $F'(x, \alpha)$, φ', ψ' in üblicher Weise die Ableitungen von $F(x, \alpha)$, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bezeichnet werden, und da für jede Wurzel a der Gleichung $\psi(x)=0$ auch $\varphi(a)=0$ wird, so sind für

$$x=a, \quad v=\alpha$$

die drei Gleichungen

$$F(x, v)=0, \quad F'(x, v)=0, \quad F_1(x, v)=0$$

gleichzeitig erfüllt, d. h. es verschwindet für die Werthe $x=a$, $v=\alpha$ gleichzeitig die Function $F(x, v)$ selbst mit ihren beiden nach x und v genommenen Derivirten.

Andererseits soll nun gezeigt werden, dass, wenn dies der Fall ist, wenn also die drei Functionen

$$F(x, \alpha), \quad F'(x, \alpha), \quad F_1(x, \alpha)$$

den gemeinschaftlichen Theiler $x-a$ haben, nothwendig $v-\alpha$ ein ausserwesentlicher Factor der Discriminante sein muss.

Setzt man $y=x-(v-\alpha) w$, wo w eine beliebige Grösse bedeutet, so ist

$$F(x, v)-F(y, \alpha)-(v-\alpha)\big(w F'(y, \alpha)+F_1(y, \alpha)\big)$$

eine durch $(v-\alpha)^2$ theilbare ganze Function von y und v. Wird dieselbe durch

$$(v-\alpha)^2 G(y, v)$$

bezeichnet, so ist daher

$$F(y, \alpha)+(v-\alpha) w F'(y, \alpha)+(v-\alpha) F_1(y, \alpha)+(v-\alpha)^2 G(y, v)=0,$$

und wenn diese Gleichung durch $(y-a)(v-\alpha)$ dividirt und für $F(y,\alpha)$, welches durch $y-a$ theilbar ist, $(y-a)\mathfrak{f}(y)$ gesetzt wird,

$$\frac{\mathfrak{f}(y)}{v-\alpha} + \frac{wF'(y,\alpha)+F_1(y,\alpha)}{y-a} + \frac{v-\alpha}{y-a}G(y,v) = 0\,.$$

Der Voraussetzung nach haben $F'(x,\alpha)$ und $F_1(x,\alpha)$ den gemeinschaftlichen Theiler $x-a$ und folglich $F'(y,\alpha)$ und $F_1(y,\alpha)$ den gemeinschaftlichen Theiler $y-a$. Das mittlere Glied der Gleichung ist also algebraisch ganz, und es muss daher auch das erste Glied $\frac{\mathfrak{f}(y)}{v-\alpha}$ algebraisch ganz sein, wenn der Bruch $\frac{v-\alpha}{y-a}$ für keinen endlichen Werth von v unendlich wird. Der Werth dieses Bruches wird aber für $y=a$, $v=\alpha$ gleich

$$-\frac{F'(a,\alpha)}{F_1(a,\alpha)+wF'(a,\alpha)},$$

und dieser Werth ist endlich, wenn die Grösse w, wie es offenbar möglich ist, so bestimmt wird, dass die Summe

$$F_1(x,\alpha)+wF'(x,\alpha)$$

den beiden Theilen gemeinsamen Factor $x-a$ nicht öfter enthält als $F'(x,\alpha)$. Da endlich mit

$$\frac{\mathfrak{f}(y)}{v-\alpha} \quad \text{d. i.} \quad \frac{\mathfrak{f}(x-(v-\alpha)w)}{v-\alpha} \quad \text{auch} \quad \frac{\mathfrak{f}(x)}{v-\alpha}$$

eine ganze algebraische Function von v ist, so besitzt der Factor $v-\alpha$ in der That jene im § 3 erwähnte Eigenschaft, welche denselben als ausserwesentlichen Factor der Discriminante kennzeichnet.

Die hiermit erlangte dritte charakteristische Eigenschaft eines ausserwesentlichen Factors $v-\alpha$, dass den drei Gleichungen

$$F(x,v)=0, \qquad F'(x,v)=0, \qquad F_1(x,v)=0$$

durch den Werth $v=\alpha$ und einen zugehörigen Werth von x genügt werden kann, soll nunmehr noch näher bestimmt, beziehungsweise erweitert werden.

Bezeichnet man mit U, V beliebige oder unbestimmte Grössen und bildet das Product

$$\prod_k \big(UF'(x_k,v)+VF_1(x_k,v)\big) \qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots n-1)},$$

so erhält man eine ganze homogene Function n^{ter} Ordnung von U und V, deren Coëfficienten sämmtlich *durch* $(v-\alpha)^2$ *theilbare* ganze Functionen von v sind. Setzt man nämlich, wie oben, $y=x-(v-\alpha)w$ und berücksichtigt, dass

$$F'(x,v)-F'(y,\alpha) \qquad \text{und} \qquad F_1(x,v)-F_1(y,\alpha)$$

durch $v-\alpha$ und andererseits

$$F'(y,\alpha) \qquad \text{und} \qquad F_1(y,\alpha)$$

durch $y-a$ theilbar sind, so sieht man, dass sich jeder Factor jenes Productes auf die Form

$$(y_k-a)\varphi_k+(v-\alpha)\psi_k$$

bringen lässt, wo φ_k und ψ_k ganze rationale Functionen von x_k und v bedeuten, in deren Coëfficienten noch U und V linear vorkommen. Das Product selbst, welches mit $P(U,V)$ bezeichnet werden möge, wird demnach in der That durch $(v-\alpha)^2$ theilbar sein, wenn die ganze rationale Function von v, U, V

$$\prod_k (y_k-a)\prod_k \varphi_k \left\{1+\sum_k \frac{\psi_k(v-\alpha)}{\varphi_k(y_k-a)}\right\} \qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots n-1)}$$

den Theiler $(v-\alpha)^2$ enthält. Und dies ist wirklich der Fall; denn erstens fallen in der Entwickelung des Productes $\prod(y_k-a)$ nach Potenzen von $(v-\alpha)$ die ersten beiden Glieder weg, da

$$\prod_k (y_k - a) = \pm F\big(a + (v - \alpha) w, v\big)$$

ist, und es ist daher dieses Product durch $(v - \alpha)^2$ theilbar; zweitens ist der mit diesem Producte multiplicirte Ausdruck eine rationale Function von v, welche — wie dies oben von $\frac{v - \alpha}{y - a}$ gezeigt ist — für $v = \alpha$ nicht unendlich wird.

Die ganze homogene Function $P(U, V)$ enthält, wie soeben bewiesen worden, jeden ausserwesentlichen Factor der Discriminante zweimal, und offenbar nicht *mehr* als zweimal, wenn die Discriminante selbst, welche in $P(U, V)$ als Coëfficient von U^n erscheint, denselben Factor nicht öfter enthält. Es ist ferner $P(U, V)$ durch keinen anderen Factor $v - \alpha$ theilbar als durch einen solchen, der ausserwesentlicher Factor der Discriminante ist; denn die Bedingung $P(U, V) = 0$ für $v = \alpha$ zieht offenbar die Relationen

$$F'(x_k, v) = 0, \quad F_1(x_k, v) = 0 \quad \text{für} \quad v = \alpha$$

nach sich, d. h. es muss für $v = \alpha$ den drei Gleichungen

$$F(x, v) = 0, \quad F'(x, v) = 0, \quad F_1(x, v) = 0$$

gleichzeitig genügt werden können, und dies ist, wie oben gezeigt worden, nur möglich, wenn $v - \alpha$ ein ausserwesentlicher Factor der Discriminante der Gleichung $F(x, v)$ ist.

Wendet man das erlangte Resultat auf die Gleichung an, welcher die im § 5 mit z_k bezeichnete Function

$$w_0 f_0(x_k, v) + w_1 f_1(x_k, v) + \cdots + w_{n-1} f_{n-1}(x_k, v)$$

genügt, und deren ausserwesentlicher Theiler nach der dortigen Bezeichnung das Quadrat von

$$W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$$

ist, so muss, wenn

$$\prod_k (z - z_k) = G(z, v)$$

gesetzt wird, das auf alle n Werthe $z = z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ erstreckte Product

$$\Pi\left(U \frac{\partial G(z, v)}{\partial z} + V \frac{\partial G(z, v)}{\partial v}\right)$$

durch das Quadrat jedes Linearfactors von $W(v)$ und also, da für unbestimmte Werthe von $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ diese Linearfactoren sämmtlich unter einander verschieden sind, durch das Quadrat von $W(v)$ selbst theilbar sein. Es wird nun bei geeigneter Bestimmung von $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ jener mit z_k bezeichnete Ausdruck gleich x_k selbst; für diese besonderen Werthe der Grössen w geht dann $G(x, v)$ in $F(x, v)$ über, und $W(v)^2$ wird der gesammte ausserwesentliche Factor der Discriminante der Gleichung $F(x, v) = 0$. Hieraus geht also schliesslich hervor, dass der mit $P(U, V)$ bezeichnete Ausdruck durch den ganzen quadratischen ausserwesentlichen Factor der Discriminante theilbar sein muss und dass, da derselbe, wie oben nachgewiesen ist, keine anderen von U, V unabhängigen Factoren enthalten kann,

> der ausserwesentliche Theiler der Discriminante der Gleichung $F(x, v) = 0$ als der grösste von U, V unabhängige Theiler des über alle n Wurzeln der Gleichung erstreckten Productes
>
> $$\Pi\left(U \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} + V \frac{\partial F(x, v)}{\partial v}\right)$$
>
> zu charakterisiren ist.

Diese Eigenschaft des ausserwesentlichen Theilers entspricht in gewisser Hinsicht der obigen zweiten Eigenschaft des wesentlichen Theilers. Während der wesentliche Theiler bei rationaler Transformation von x erhalten bleibt, d. h. wenn die Gleichung $F(x, v) = 0$ in eine andere $G(y, v) = 0$ transformirt wird, deren Wurzel y eine rationale Function von x und v ist, bleiben die ausserwesentlichen Factoren der Discriminante bei linearer Transformation von v erhalten, da

$$F(x, v' + ux), \qquad \frac{\partial F(x, v' + ux)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F(x, v' + ux)}{\partial v'}$$

gleichzeitig für die Werthe $x=a$, $v'+ux=\alpha$ verschwinden, wenn

$$F(x,v),\qquad \frac{\partial F(x,v)}{\partial x},\qquad \frac{\partial F(x,v)}{\partial v}$$

gleichzeitig für die Werthe $x=a$, $v=\alpha$ Null werden. Es sind dies bekanntlich die Werthepaare, welche die Doppelpunkte der durch $F(x,v)=0$ dargestellten Curve bezeichnen, wenn x und v als Punktcoordinaten in der Ebene aufgefasst werden.

GRUNDZÜGE EINER ARITHMETISCHEN THEORIE DER ALGEBRAISCHEN GRÖSSEN.

VON

L. KRONECKER.

Festschrift zu Herrn Ernst Eduard Kummer's fünfzigjährigem Doctor-Jubiläum am 10. September 1881.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 92. S. 1—122.