LEOPOLD KRONECKER'S WERKE.

LEOPOLD KRONECKER'S WERKE.

HERAUSGEGEBEN AUF VERANLASSUNG

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VON

K. HENSEL.

ZWEITER BAND.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

VORREDE.

Der vorliegende zweite Band der gesammelten Abhandlungen Leopold Kronecker's enthält 22 Arbeiten aus dem Gebiete der höheren Arithmetik, deren Abfassung in die Zeit von 1875—1884 fällt. Fast alle diese Abhandlungen stehen in näherer oder entfernterer Beziehung zu der Festschrift zu Kummer's Doctorjubiläum, welche in gewissem Sinne als der Mittelpunkt der arithmetischen Arbeiten Kronecker's angesehen werden kann.

Auch diese Abhandlungen sind vor ihrem Abdrucke einer bis ins Einzelne gehenden Nachprüfung unterworfen worden, und ich möchte mit aufrichtigem Danke hervorheben, dass mir diese schwierige Aufgabe durch die freundliche und wirksame Hülfe einiger Freunde und Fachgenossen, nämlich der Herren Frobenius, Hermite, Hurwitz, Kneser und Vahlen wesentlich erleichtert worden ist. Ganz besonderen Dank schulde ich den Herren Hurwitz und Kneser, welche die beiden umfangreichen Abhandlungen über die bilinearen Formen mit vier Variabeln (No. XVII) und über die Elimination (No. IX) vor ihrer Drucklegung auf das Genaueste durchgearbeitet haben.

Berlin, im Mai 1897.

K. Hensel.

INHALTSVERZEICHNISS.

ZUR GESCHICHTE DES RECIPROCITÄTSGESETZES.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1875. S. 267—274.

ZUR GESCHICHTE DES RECIPROCITÄTSGESETZES[1].

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 22. April 1875.]

In einem der Briefe von *Legendre* an *Jacobi*, welche Hr. *Borchardt* am 11. März d. J. der Akademie mitgetheilt hat, wird von *Gauss* gesagt, dass er sich im Jahre 1801 die Entdeckung des schon 1785 publicirten Reciprocitätsgesetzes habe aneignen wollen*), und es liegt den Worten *Legendre's* offenbar die Meinung zu Grunde, dass ihm selbst in Folge seiner Abhandlung vom Jahre 1785 das Verdienst der bezeichneten Entdeckung gebühre. In Wahrheit aber ist dieselbe weder *Legendre* noch *Gauss* zuzuschreiben, sondern *Euler*, der zuerst — freilich nur auf dem Wege der Induction — zu jenem Fundamentalsatze der Theorie der quadratischen Reste gelangt ist, welchem *Legendre* den Namen des Reciprocitätsgesetzes beigelegt hat.

Schon in einer Abhandlung aus den Jahren 1744 — 1746 *Theoremata circa divisores numerorum in hac forma* $pa^2 \pm qb^2$ *contentorum*, welche im XIV. Bande der Petersburger Commentarien p. 151 veröffentlicht und im I. Bande der *Commentationes Arithmeticae collectae***) p. 35 sqq. wieder abgedruckt

---

*) Die Stelle in der nunmehr gedruckt vorliegenden *Legendre-Jacobi*'schen Correspondenz lautet wörtlich: „. . . . c'est le même homme qui en 1801 voulut s'attribuer la découverte de la loi de réciprocité publiée en 1785 . . .“ (*Borchardt's* Journal Bd. 80, S. 217).

**) Petersburg 1849.

[1]) Im Original wird diese Abhandlung durch die Worte eingeleitet: „Hr. *Kronecker* machte folgende *Bemerkungen zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes.*“ H.

ist, giebt *Euler* eine Reihe von Lehrsätzen und Bemerkungen*), welche das Reciprocitätsgesetz im Wesentlichen enthalten; denn es ist darin als Resultat von Beobachtungen angegeben, dass die Primtheiler von $a^2 + Nb^2$ oder $a^2 - Nb^2$ und diejenigen Primzahlen, welche Nichttheiler eines solchen Ausdruckes sind, sich nach gewissen Linearformen $4Nm \pm \alpha$ sondern, und es ist auch der Zusammenhang der Werthe von α mit den quadratischen Resten von N ausdrücklich hervorgehoben. So heisst es in den *Annotationes* 14 und 16:

> „Posito ergo $4Nm \pm \alpha$ pro forma divisorum generali numerorum in hac expressione $aa - Nbb$ contentorum, littera α plerumque plures significabit numeros, inter quos unitas semper continetur .... Erunt ergo valores ipsius α numeri impares primi ad N, minores quam $2N$, horumque numerorum omnium imparium et primorum ad N et minorum quam $2N$, semissis tantum praebebit idoneos valores ipsius α; reliqui exhibebunt formulas, in quibus plane nullus continetur divisor .... Sicut autem unitas perpetuo inter valores ipsius α reperitur, ita etiam quivis numerus quadratus, qui sit primus ad $4N$, valorem idoneum pro α suppeditabit."

Nimmt man nun die einfache Bemerkung hinzu, dass für eine *Primzahl* N schon die ersten $\frac{1}{2}(N-1)$ ungraden Quadratzahlen, da sie mod. N unter einander incongruent sind, so viel geeignete Werthe (valores idoneos) für α liefern, als nach *Euler* überhaupt erforderlich sind, so ergiebt sich unmittelbar das Reciprocitätsgesetz; denn es folgt alsdann, dass N quadratischer Rest von jeder Primzahl sein muss — aber auch *nur* von einer solchen — welche, positiv oder negativ genommen, einem Quadrate mod. $4N$ congruent ist.

Euler selbst hat das Reciprocitätsgesetz in ganz entwickelter und vollendeter Form erst viel später und zwar am Schlusse einer Abhandlung aufgestellt, welche er unter dem Titel *Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos* im I. Bande seiner *Opuscula Analytica* (Petersburg 1783)

*) Man beachte namentlich das *Theorema* 27 und die *Annotationes* 3, 4, 7, 13, 14 und 16.

publicirt hat*). Nachdem nämlich *Euler* im § 38 der bezeichneten Abhandlung vier einzelne, die verschiedenen Falle des Reciprocitätsgesetzes enthaltende Theoreme aufgestellt und folgende Worte hinzugefügt hat:

> „Theoremata haec ideo subjungo, ut qui hujusmodi speculationibus delectantur, in eorum demonstrationem inquirant, cum nullum sit dubium, quin inde theoria numerorum insignia incrementa sit adeptura."

schliesst er daran die „Conclusio"**):

§ 39. Quatuor haec theoremata postrema, quorum demonstratio adhuc desideratur, sequenti modo concinnius exhiberi possunt:

Existente s numero quocunque primo, dividantur tantum quadrata imparia 1, 9, 25, 49 *etc. per divisorem* $4s$, *notenturque residua, quae omnia erunt formae* $4q+1$, *quorum quodvis littera* α *indicetur, reliquorum autem numerorum, formae* $4q+1$, *qui inter residua non occurrunt, quilibet littera* $\mathfrak{A}$ *indicetur, quo facto si fuerit*

divisor numerus primus formae	tum est
$4ns + \alpha$	$+s$ residuum et $-s$ residuum
$4ns - \alpha$	$+s$ residuum et $-s$ non-residuum
$4ns + \mathfrak{A}$	$+s$ non-residuum et $-s$ non-residuum
$4ns - \mathfrak{A}$	$+s$ non-residuum et $-s$ residuum.

Ich habe hier beim Abdruck die *Euler*'sche Stelle auch ihrer äusseren Form nach getreulich reproducirt, um zu zeigen, wie augenfällig sich im Original das Resultat hervorhebt, dessen Wichtigkeit von *Euler* vollständig erkannt

*) Die Abhandlung ist in der bereits citirten unter dem Titel *Leonhardi Euleri Commentationes Arithmeticae collectae* erschienenen Sammlung im I. Bande pag. 477 sqq. abgedruckt.

**) Opuscula Analytica Tom. I pag. 84 oder Commentationes Arithmeticae collectae Tom. I pag. 485 und 486.

worden ist. Lässt man die von ihm mit aufgenommene Bestimmung des quadratischen Charakters von $-s$ weg und bezeichnet die Zahlen unter der Rubrik *divisor numerus primus* mit p, so besagt jener Ausspruch wörtlich,

> dass eine positive Primzahl s quadratischer Rest oder Nichtrest einer positiven Primzahl p ist, je nachdem $(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}p$ quadratischer Rest oder Nichtrest von s ist,

und stimmt demnach genau mit dem *„theorema fundamentale“* überein, wie es *Gauss* im Art. 131 der *Disquisitiones Arithmeticae* formulirt hat:

> *Si p est numerus primus formae $4n+1$, erit $+p$, si vero p formae $4n+3$, erit $-p$ residuum vel non residuum cujusvis numeri primi. qui positive acceptus ipsius p est residuum vel non-residuum.*

Während also das Reciprocitätsgesetz, wie hier gezeigt worden ist, in einer höchst einfachen und der *Gauss*'schen ganz ähnlichen Fassung schon bei *Euler* vorkommt, beginnt Art. 151 der *Disquisitiones Arithmeticae* mit den Worten:

> „Theorema fundamentale, quod sane inter elegantissima in hoc genere est referendum, in eadem forma simplici, in qua supra propositum est, a nemine hucusque fuit prolatum“;

und *Gauss* fährt dann fort:

> „Quod eo magis est mirandum, quum aliae quaedam propositiones illi superstruendae, ex quibus ad illud facile reveniri potuisset, ill. *Eulero* jam innotuerint.“

Man muss hiernach annehmen, dass *Gauss* die oben citirte *Euler*'sche Abhandlung im I. Bande der *Opuscula analytica* übersehen hat, so wunderbar diess auch erscheinen mag, wenn man bedenkt, wie sehr schon der Titel derselben *Gauss* zur Durchsicht auffordern musste, und wie augenfällig darin am Schlusse das Reciprocitätsgesetz hervortritt. Dass *Gauss* zur Zeit den I. Band der *Euler*'schen *Opuscula analytica* in Händen gehabt hat, beweist das Citat einer anderen darin enthaltenen Abhandlung, welches im Art. 151

der *Disquisitiones Arithmeticae* vorkommt; dass er aber die *Euler*'schen *Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos* gekannt und deren Erwähnung absichtlich unterlassen haben sollte, ist völlig unglaublich, da er im weiteren Verfolg jenes Art. 151 grade darauf ausgeht, zu zeigen, dass sowohl *Euler* als auch *Legendre* schon vor ihm im Besitze von Theoremen gewesen sind, die im Wesentlichen mit dem Reciprocitätsgesetz übereinkommen. Nur die *Beweise* des Satzes, welche diese beiden Mathematiker gegeben hatten, werden von *Gauss* im Art. 151 angefochten, und er legt mit vollem Rechte darauf Gewicht, dass die Ausführungen in den vorhergehenden Abschnitten seines Werkes (Art. 135 sqq.) den ersten vollständigen und strengen Beweis des Reciprocitätsgesetzes enthalten. Auch im Jahre 1808 muss *Gauss* jene mehrfach citirte *Euler*'sche Abhandlung im I. Bande der *Opuscula Analytica* noch nicht gekannt haben; denn im § 2 der am 15. Jan. jenes Jahres der Göttinger Societät übergebenen Abhandlung *„Theorematis Arithmetici demonstratio nova“* schreibt er *Legendre* die erste Auffindung des Reciprocitätsgesetzes zu und nennt *Euler* und *Lagrange* nur als solche, die lange vorher auf dem Wege der Induction zur Entdeckung von mehreren speciellen Fällen des Gesetzes gelangt seien*). In dieser Weise würde sich aber *Gauss* offenbar nicht geäussert haben, wenn er zur Zeit von jener Abhandlung Kenntniss gehabt hätte, in welcher *Euler* schon einige Jahre vor *Legendre* das vollständig formulirte Reciprocitätsgesetz veröffentlicht hatte. Warum *Gauss* an der eben bezeichneten Stelle seiner Abhandlung von 1808 sich über den Antheil *Legendre's* an der Entdeckung des Reciprocitätsgesetzes ganz anders ausgedrückt und denselben weit bestimmter hervorgehoben hat als im Art. 151 der im Jahre 1801 erschienenen *Disquisitiones Arithmeticae*, ist mir durchaus unerfindlich; aber dass *Gauss* selber im Jahre 1808 in Beziehung auf die Aufstellung des Reciprocitätsgesetzes *Legendre* unumwunden ein Prioritätsrecht zugestand, welches er im Jahre 1801 theils *Euler*, theils auch sich selbst vindicirt hatte, mag wohl *Legendre* in der Meinung bestärkt haben, dass ihm von Seiten *Gauss'* im Jahre 1801 — wie es in jenem Briefe an *Jacobi* heisst — Unrecht geschehen sei. Um den auffälligen und nirgends motivirten Unterschied zwischen den *Gauss*'schen Aeusserungen von 1801 und 1808 deutlich zu zeigen, lasse ich die betreffenden Stellen wörtlich folgen:

*) *Gauss'* Werke Bd. II S. 4.

I. Der zweite Absatz des Art. 151 der *Disqq. Arithm.*, welcher sich auf die *Legendre*'schen Arbeiten bezieht, lautet*):

> Post *Eulerum* clar. *Le Gendre* eidem argumento operam navavit, in egregia tract. *Recherches d'analyse indéterminée* Hist. de l'Ac. des Sc. 1785 p. 465 sqq., ubi pervenit ad theorema, quod si rem ipsam spectas cum th. fund. idem est. . . . . . . Clar. *Le Gendre* etiam demonstrationem tentavit, de qua, quum perquam ingeniosa sit, in Sect. seq. fusius loquemur. Sed quoniam in ea plura sine demonstratione supposuit (uti ipse fatetur . . .), quae partim a nemine hucusque sunt demonstrata, partim nostro quidem judicio sine theor. fund. ipso demonstrari nequeunt: via quam ingressus est, ad scopum deducere non posse videtur, nostraque demonstratio pro prima erit habenda. — Ceterum infra *duas alias demonstrationes* ejusdem gravissimi theorematis trademus, a praec. et inter se toto coelo diversas"**).

II. In der Abhandlung vom 15. Januar 1808 sagt *Gauss****):

> „Pro *primo* hujus elegantissimi theorematis inventore ill. *Legendre* absque dubio habendus est, postquam longe antea summi geometrae

*) *Gauss*' Werke Bd. I. S. 118. Der erste Absatz, dessen Anfang oben S. 6 abgedruckt ist, bezieht sich auf die *Euler*'schen Forschungen.

**) Es folgt nur noch *ein* Beweis im Art. 262 desselben Werkes. *Gauss* hatte wohl ursprünglich die Absicht, in der achten Section noch einen aus der Kreistheilung entnommenen Beweis zu geben und zwar vermuthlich denjenigen, welchen er später im Art. 33 der Abhandlung *Summatio quarumdam serierum singularium* veröffentlicht hat. Denn nach den *Dedekind*'schen Bemerkungen im II. Bande von *Gauss*' Werken S. 240 findet sich unter den Manuscripten ein Fragment mit der Ueberschrift „Sectio octava", dessen Inhalt später in die angeführte Abhandlung vom Jahre 1808 übergegangen ist. Der im Art. 33 derselben enthaltene Beweis des Reciprocitätsgesetzes wird zwar nach der Reihenfolge in der Publication von *Gauss* als der vierte bezeichnet (*Gauss*' Werke II pag. 42), aber er gehört jedenfalls zu den „drei andren Beweisen", welche in den Göttinger gelehrten Anzeigen vom 12. Mai 1808 (*Gauss*' Werke II pag. 153) erwähnt und *vor* dem darin analysirten dritten Beweise von *Gauss* aufgefunden worden sind. Ueberhaupt dürfte nach den verschiedenen Bemerkungen, die darüber vorkommen, die Zeitfolge der Auffindung der sechs *Gauss*'schen Beweise so zu fixiren sein: I, II, IV, VI, III, V.

***) *Gauss*' Werke Bd. II pag. 4.

> *Euler* et *Lagrange* plures ejus casus speciales jam per inductionem detexerant. Conatibus horum virorum circa demonstrationem enumerandis hic non immoror; adeant quibus volupe est opus modo commemoratum. Adiicere liceat tantummodo, in confirmationem eorum, quae in art. praec. prolata sunt, quae ad meos conatus pertinent. In ipsum theorema proprio marte incideram anno 1795, dum omnium, quae in arithmetica sublimiori iam elaborata fuerant, penitus ignarus et a subsidiis literariis omnino praeclusus essem: sed per integrum annum me torsit, operamque enixissimam effugit, donec tandem demonstrationem in Sectione quarta operis illius traditam nactus essem."

Ganz ähnlich drückt sich *Gauss* auch in der Analyse der betreffenden Abhandlung*) über die erste Aufstellung des Reciprocitätsgesetzes aus, von dem er a. a. O. sagt:

> „Dieses ist zuerst, obwohl in einer etwas andern Gestalt, von *Legendre* vorgetragen, in der *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris* 1785; sowohl hier, als nachher in seinem Werke: *Essai d'une théorie des nombres*, hat dieser treffliche Analyst den Beweis auf sehr scharfsinnige Untersuchungen zu gründen gesucht, die aber gleichwohl nicht zu dem gewünschten Ziele geführt haben, welches, wenn wir uns nicht irren, auch auf diesem Wege nicht erreicht werden konnte."

In der hier erwähnten Abhandlung von 1785**) hat *Legendre* zuerst seine Arbeiten über das Reciprocitätsgesetz publicirt. Dass ihm bei deren Abfassung der I. Band von *Euler's Opuscula Analytica* vorgelegen hat, zeigt ein gleich im Eingang vorkommendes allgemeines Citat, und auch im weiteren Verlauf derselben z. B. auf pag. 523 nimmt *Legendre* noch Gelegenheit, auf einzelne Stellen des *Euler*'schen Werkes zurückzukommen. Dabei geschieht freilich derjenigen Abhandlung der *Op. Anal.*, welche mit dem oben angeführten Ausspruche des Reciprocitätsgesetzes schliesst, nicht ausdrücklich Erwähnung,

*) Göttinger gelehrte Anzeigen vom Mai 1808. *Gauss*' Werke Bd. II S. 152.

**) Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Année 1785. Paris 1788 p. 465 et suiv.

aber es ist immerhin klar, dass *Legendre* doch nicht, wie bisher vielfach geschehen ist, das Verdienst zugeschrieben werden kann, jenes Gesetz zuerst aufgefunden und aufgestellt zu haben. Dagegen gebührt ihm *das* Verdienst, *einen Theil* des Reciprocitätsgesetzes zuerst und zwar mehr als ein Jahrzehnt vor *Gauss* wirklich bewiesen zu haben. Denn in eben jener Abhandlung von 1785 erörtert *Legendre* die Bedingungen der Lösbarkeit der Gleichung $ax^2 + by^2 = cz^2$ in ganzen Zahlen x, y, z und zeigt, dass, wenn p irgend eine positive Primzahl und q eine solche von der Form $4n+3$ bedeutet, die Gleichung

$$x^2 + \varepsilon p y^2 = q z^2 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

nach einer Methode von *Lagrange* stets lösbar sein müsste, wenn nur die beiden Bedingungen

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{\varepsilon p}{q}\right) = -1$$

gleichzeitig erfüllt wären. Da aber andrerseits die Gleichung offenbar unmöglich ist, wenn $\varepsilon = \left(\frac{-1}{p}\right)$ genommen wird, so schliesst *Legendre*, dass für diesen Werth von ε

aus der Annahme $\left(\frac{q}{p}\right) = +1$ die Folgerung $\left(\frac{\varepsilon p}{q}\right) = +1$

und aus der Annahme $\left(\frac{\varepsilon p}{q}\right) = -1$ die Folgerung $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$

zu ziehen ist, und dieser Schluss ist, wie schon *Gauss* bei seiner eingehenden Kritik des *Legendre*'schen Beweises in den Artt. 296 und 297 der *Disquisitiones Arithmeticae* hervorgehoben hat, vollkommen begründet. Bei den Ausführungen aber, welche sich auf die übrigen Fälle des Reciprocitätsgesetzes beziehen, nimmt *Legendre* Primzahlen von gewissen Eigenschaften zu Hilfe, ohne darthun zu können, dass dergleichen Primzahlen existiren. Er ist desshalb weder a. a. O. zu einem vollständigen Beweise des Satzes gelangt, noch später im *Essai sur la théorie des nombres**), wo es ihm nur gelungen ist, die früheren Voraussetzungen über die Existenz gewisser Primzahlen wesentlich einzuschränken, nicht aber sie überhaupt entbehrlich zu machen.

*) Seconde édition. Paris 15. Octobre 1808. p. 198 et suiv.

ÜBER DAS RECIPROCITÄTSGESETZ.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1876. S. 331—341.

ÜBER DAS RECIPROCITÄTSGESETZ[1]).

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 22. Juni 1876.]

§ 1.

Es seien r und s beliebige positive oder negative ganze Zahlen; l, m und n seien ungrade und $\gamma = \pm 1$, $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$ seien deren Vorzeichen, so dass γl, δm und εn positiv werden. Setzt man nun nach *Eisenstein*'scher Weise *allgemein*:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \left(\frac{r}{n}\right) = \prod_k \frac{\sin\frac{2rk\pi}{n}}{\sin\frac{2k\pi}{n}} \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(\varepsilon n - 1)\right),$$

so ist zuvörderst zu bemerken, dass das Product, ohne dass sein Werth geändert wird, auch auf irgend welche $\frac{1}{2}(\varepsilon n - 1)$ Zahlen k erstreckt werden kann, welche so zu sagen „ein halbes Restensystem" mod. n bilden, d. h. auf $\frac{1}{2}(\varepsilon n - 1)$ solche Zahlen k, deren absolut kleinste Reste mod. n ihren positiven Werthen nach die sämmtlichen unter $\frac{1}{2}\varepsilon n$ liegenden Zahlen ergeben. Das durch die Gleichung $(\mathfrak{A})$ definirte Zeichen $\left(\frac{r}{n}\right)$ hat nun folgende Eigenschaften:

I. Das Zeichen $\left(\frac{r}{n}\right)$ hat den Werth 0 oder ± 1; und zwar hat es den Werth Null, wenn r und n einen gemeinsamen Theiler haben, da alsdann

---

[1]) Diese Abhandlung schliesst sich an die in derselben Sitzung der Akademie vorgelegte Notiz von *E. Schering* an: „Verallgemeinerung des *Gauss*ischen Criterium für den quadratischen Rest-Character einer Zahl in Bezug auf eine andere", und wird im Original durch die Worte eingeleitet:

„Herr *Kronecker* knüpfte hieran die folgende Mittheilung: Im Verlaufe der an der hiesigen Universität im Wintersemester 1869/70 gehaltenen Vorträge bin ich auch meinerseits auf die von Hrn. *Schering* gefundene Ausdehnung des *Gauss*'schen Lemmas geführt worden, und ich benutze die heutige Gelegenheit, um die bezüglichen Entwickelungen hier vollständig darzulegen." H.

offenbar Factoren des Zählers verschwinden; es hat aber den Werth ± 1, wenn r und n relative Primzahlen sind, da alsdann jeder Factor des Zählers mit je einem Factor des Nenners abgesehen vom Vorzeichen übereinstimmt.

II. Unmittelbar aus der Definition folgen die Relationen:

(A)
$$\left(\frac{r}{n}\right) = \left(\frac{r}{-n}\right), \quad \left(\frac{r}{n}\right) = \left(\frac{r'}{n}\right) \quad \text{wenn } r \equiv r' \bmod. n,$$
$$\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\varepsilon n - 1)}.$$

Da ferner

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \prod_k 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(\varepsilon n - 1)\right),$$

und die Anzahl der negativen Factoren rechts $\frac{1}{4}(\varepsilon n \pm 1)$ und diese Zahl gleichzeitig mit $\frac{1}{8}(n^2 - 1)$ grade oder ungrade ist, so folgt:

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(n^2 - 1)}.$$

III. Der obigen Bemerkung gemäss (pag. 13 Zeile 9 v. unten) kann

$$\left(\frac{s}{n}\right) = \prod_k \frac{\sin \frac{2rsk\pi}{n}}{\sin \frac{2rk\pi}{n}} \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(\varepsilon n - 1)\right)$$

gesetzt werden, und es ist daher:

(A′)
$$\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{s}{n}\right) = \left(\frac{rs}{n}\right).$$

IV. Nimmt man $r = m$ und an Stelle der Zahlen k die Zahlen $\frac{1}{2}(n+1)k$, so kommt:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_k \frac{\sin \frac{mk\pi}{n}}{\sin \frac{k\pi}{n}},$$

wo die Zahlen k ein halbes Restensystem mod. n bilden, und mit Benutzung der Relationen

$$\delta \cdot \frac{\sin mv}{\sin v} = \prod_h 2 \sin\left(\frac{h\pi}{m} + v\right) \cdot 2 \sin\left(\frac{h\pi}{m} - v\right),$$
$$\delta^{\frac{1}{2}(\varepsilon n - 1)}\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{\delta}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{\delta m}{n}\right)$$

erhält man daraus die Gleichung:

($\mathfrak{B}$)
$$\left(\frac{\delta m}{n}\right) = \prod 2 \sin\left(\frac{h\pi}{m} + \frac{k\pi}{n}\right) \cdot 2 \sin\left(\frac{h\pi}{m} - \frac{k\pi}{n}\right),$$

wo das Product auf irgend welche $\frac{1}{2}(\delta m - 1)$ Zahlen h zu erstrecken ist, die ein halbes Restensystem mod. m bilden und ebenso auf die $\frac{1}{2}(\varepsilon n - 1)$ Zahlen k eines halben Restensystems mod. n.

Die Gleichung ($\mathfrak{B}$) gilt, beiläufig bemerkt, auch noch wenn m grade ist; doch sind alsdann für k nur *grade* Zahlen zu nehmen und für h ist nur in *einem* der beiden Factoren rechts der Werth $\frac{1}{2}m$ zu setzen, während im Uebrigen in beiden Factoren h irgend welche $\frac{1}{2}\delta m - 1$ Werthe zu durchlaufen hat, die sowohl positiv als negativ genommen mod. m unter einander und mit $\frac{1}{2}m$ incongruent sind.

Aus der Gleichung ($\mathfrak{B}$) resultirt unmittelbar die Reprocitätsgleichung:

$$\left(\frac{\delta m}{n}\right)\left(\frac{\varepsilon n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(\delta m - 1)(\varepsilon n - 1)}$$

oder

(B)
$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1) + \frac{1}{4}(\delta - 1)(\varepsilon - 1)}.$$

V. Setzt man $l = r + mn$ oder $l = r$, je nachdem r grade oder ungrade ist, so ist l ungrade und das Product $\left(\frac{l}{mn}\right)\left(\frac{mn}{l}\right)$ oder $\left(\frac{l}{mn}\right)\left(\frac{m}{l}\right)\left(\frac{n}{l}\right)$ wird eine Potenz von -1, deren Exponent

$$\tfrac{1}{4}(l-1)(mn-1) + \tfrac{1}{4}(\gamma - 1)(\delta\varepsilon - 1)$$

ist. Ebenso wird das Product $\left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{m}{l}\right)\left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{n}{l}\right)$ eine Potenz von -1, deren Exponent

$$\tfrac{1}{4}(l-1)(m+n-2) + \tfrac{1}{4}(\gamma - 1)(\delta + \varepsilon - 2)$$

ist, und da die Differenz dieser Exponenten

$$\tfrac{1}{4}(l-1)(m-1)(n-1)+\tfrac{1}{4}(\gamma-1)(\delta-1)(\varepsilon-1)$$

offenbar grade ist, so folgt die Relation

$$\left(\frac{l}{mn}\right)=\left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{l}{n}\right)$$

oder also

$$\text{(C)}\qquad \left(\frac{r}{mn}\right)=\left(\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{n}\right).$$

VI. Bilden die Zahlen k ein halbes Restensystem mod. n, so entspricht jeder Zahl k eine Zahl k', für welche $rk\equiv\pm k'$ mod. n und also

$$rk\equiv k'\cdot\frac{\sin\frac{2rk\pi}{n}}{\sin\frac{2k'\pi}{n}}\qquad \text{mod. } n$$

ist. Hieraus folgt

$$r^{\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)}\prod_k k\equiv\left(\frac{r}{n}\right)\prod_k k\qquad \text{mod. } n,$$

und da, wenn n Primzahl ist, das Product Πk nicht durch n theilbar ist, so kommt für diesen Fall:

$$\text{(D)}\qquad \left(\frac{r}{n}\right)\equiv r^{\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)}\qquad \text{mod. } n.$$

Die zuletzt hergeleitete Congruenz (D) zeigt, dass für den Fall einer Primzahl n das durch die Gleichung ($\mathfrak{A}$) definirte Zeichen $\left(\frac{r}{n}\right)$ mit dem *Legendre*'schen übereinstimmt, und die Gleichung (C) ergiebt alsdann für eine beliebige Zahl n die Identität der Bedeutung von $\left(\frac{r}{n}\right)$ mit derjenigen, welche *Jacobi* dem Zeichen beigelegt hat.

§ 2.

Werden m und n als relative Primzahlen vorausgesetzt, so gelangt man durch die arithmetische Interpretation der Gleichung ($\mathfrak{A}$) zur Verallgemeinerung des *Gauss*'schen Lemmas. Wenn nämlich die Zahlen $k', k'', \dots$ ein halbes Restensystem mod. n bilden und für eben diesen Modul

$$rk'\equiv\varrho'k'',\quad rk''\equiv\varrho''k''',\quad \dots \qquad (\varrho'=\pm1,\ \varrho''=\pm1,\dots)$$

wird, so definirt die Gleichung ($\mathfrak{A}$) conform mit Hrn. *Schering*'s Entwickelung das Zeichen $\left(\frac{r}{n}\right)$ als das Product der Zeichen ϱ, und die arithmetische Definition:

$$(\mathfrak{A}')\qquad \left(\frac{r}{n}\right)=\Pi\varrho$$

ist völlig äquivalent derjenigen, welche bei ($\mathfrak{A}$) in transcendenter Form erscheint. — Die arithmetische Interpretation der Gleichung ($\mathfrak{B}$) definirt, wenn

$$h=1,\,2,\,\dots\tfrac{1}{2}(\delta m-1)\qquad\text{und}\qquad k=1,\,2,\,\dots\tfrac{1}{2}(\varepsilon n-1)$$

genommen wird, das Zeichen $\left(\frac{\delta m}{n}\right)$ als das Vorzeichen des Products

$$\prod_{h,k}\left(\frac{h^2}{m^2}-\frac{k^2}{n^2}\right),$$

also durch die Bedingungen

$$\left(\frac{\delta m}{n}\right)=\pm1,\qquad \left(\frac{\delta m}{n}\right)\prod_{h,k}\left(\frac{h}{\delta m}-\frac{k}{\varepsilon n}\right)>0,$$

oder, wenn man — wie der Einfachheit halber von jetzt an geschehen soll — die Vorzeichen $\delta=\varepsilon=+1$ d. h. m und n positiv nimmt,

$$(\mathfrak{B}')\qquad \left(\frac{m}{n}\right)\ \text{gleich dem Vorzeichen von}\ \ \Pi\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right),$$

wo das Product auf alle Werthe

$$h=1,\,2,\,\dots\tfrac{1}{2}(m-1)\quad\text{und}\quad k=1,2,\,\dots\tfrac{1}{2}(n-1)$$

zu erstrecken ist.

Das Product bei $(\mathfrak{B}')$ verschwindet ebenso wie der unter $(\mathfrak{B})$ gegebene Ausdruck, sobald m und n nicht relative Primzahlen sind, und auch die unter $(\mathfrak{A}')$ gegebene Definition von $\left(\frac{r}{n}\right)$ kann in Uebereinstimmung mit dem Ausdrucke bei $(\mathfrak{A})$ so gefasst werden, dass sie für den Fall, wo r und n einen gemeinsamen Theiler haben, den Werth Null ergiebt. — Die mit $(\mathfrak{A}')$ bezeichnete arithmetische Definition des Zeichens $\left(\frac{r}{n}\right)$ führt ebenso wie die Definition $(\mathfrak{A})$ ganz unmittelbar zu denjenigen Eigenschaften, welche in den Gleichungen (A) und (A′) ausgedrückt erscheinen. Andrerseits setzt ebenso wie die Definition $(\mathfrak{B})$ auch die rein arithmetische Erklärung $(\mathfrak{B}')$ die Reciprocitätsgleichung (B) in Evidenz. Um also auch an die *arithmetischen* Definitionen $(\mathfrak{A}')$ und $(\mathfrak{B}')$ die gesammte im § 1 enthaltene Deduction anknüpfen und damit die Theorie des Zeichens $\left(\frac{r}{n}\right)$ vollständig absolviren zu können, bedarf es nur noch einer ebenfalls arithmetischen Herleitung der einen jener beiden Definitionen aus der andern. Dies geschieht wohl am einfachsten in folgender Weise:

Nimmt man in der Definition $(\mathfrak{A}')$ für die Zahlen $k', k'', \ldots$ die ungraden Zahlen von 1 bis $n-1$, so wird jedes Product km dem positiven oder negativen Werthe einer der Zahlen k congruent mod. n, je nachdem die in $\frac{km}{n}$ enthaltene grösste ganze Zahl $E\left(\frac{km}{n}\right)$ grade oder ungrade ist. Das Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$ wird hiernach gleich einer Potenz von -1, deren Exponent

$$E\left(\frac{m}{n}\right)+E\left(\frac{3m}{n}\right)+E\left(\frac{5m}{n}\right)+\cdots+E\left(\frac{(n-2)m}{n}\right)$$

ist, und diese Summe kann wegen der Relation

$$E\left(\frac{am}{n}\right)+E\left(\frac{(n-a)m}{n}\right)=m-1 \qquad (0<a<n)$$

durch

$$\sum_k E\left(\frac{km}{n}\right) \qquad \left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right)$$

ersetzt werden. Eben dieselbe Potenz von -1 ist aber offenbar das Vorzeichen des Products bei $(\mathfrak{B}')$, da $E\left(\frac{km}{n}\right)$ die Anzahl der Werthe von h bestimmt, für welche die Differenz $\frac{h}{m}-\frac{k}{n}$ negativ ist.

Der hier angegebene Uebergang von der Definition $(\mathfrak{A}')$ zur Definition $(\mathfrak{B}')$ ersetzt in rein arithmetischer Weise denjenigen von der Definition $(\mathfrak{A})$ zu $(\mathfrak{B})$, welcher oben im § 1, IV nach *Eisenstein*'scher Weise durch die Formel für $\sin mv$ vermittelt worden ist; er ersetzt ebenso jede der verschiedenen Deductionen, durch welche man von dem *Gauss*'schen Lemma zum Reciprocitätsgesetze gelangt. Aber der eigentliche Kern der Entwickelung in dieser ganzen Kategorie von Reciprocitätsgesetz-Beweisen tritt deutlicher hervor, wenn man — wie jetzt geschehen soll — das *Gauss*'sche Lemma selbst bei Seite lässt und *nur* von der mit $(\mathfrak{B}')$ bezeichneten Definition Gebrauch macht.

§ 3.

Definirt man $\left(\frac{m}{n}\right)$ für positive ungrade Zahlen m und n als das Vorzeichen des Products

$$\Pi\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)\end{smallmatrix}\right),$$

so folgt aus der Definition ebenso unmittelbar die Reciprocitätsgleichung

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}$$

wie die Relation

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\sum_k E\left(\frac{km}{n}\right)} \qquad \left(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\right).$$

Hieraus folgt wiederum, dass für positive ungrade Zahlen l und m, welche nach dem Modul n, also auch nach dem Modul $2n$ einander congruent sind,

$$(\beta) \qquad \left(\frac{l}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)$$

ist, während für den Fall $l \equiv -m \mod. n$

$$(\beta') \qquad \left(\frac{l}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

wird. Wenn ferner $km \equiv \pm k' \mod. n$ ist und, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt, die Zahl k' oder $n - k'$ durch r bezeichnet wird, so ist

$$E\left(\frac{klm}{n}\right) = l \cdot E\left(\frac{km}{n}\right) + E\left(\frac{lr}{n}\right)$$

und

$$E\left(\frac{lr}{n}\right) + E\left(\frac{l(n-r)}{n}\right) = l - 1,$$

also

$$E\left(\frac{klm}{n}\right) \equiv E\left(\frac{km}{n}\right) + E\left(\frac{k'l}{n}\right) \quad \mod. 2,$$

und folglich

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{lm}{n}\right) = \left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right).$$

Wird auf jedes der drei Zeichen in dieser Formel die Reciprocitätsgleichung (α) angewendet und alsdann l mit n vertauscht, so folgt wie im § 1, V die Relation

$$(\gamma') \qquad \left(\frac{l}{mn}\right) = \left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{l}{n}\right),$$

welche zeigt, dass das oben definirte Zeichen mit dem *Legendre-Jacobi*'schen übereinstimmt, sobald nur für *Primzahlen* n das Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$ je nach dem quadratischen Charakter von $m \mod. n$ positiv oder negativ ist. Nun ergiebt zuvörderst die Gleichung (γ) für $l = m$ in Verbindung mit der Gleichung (β), dass für jeden quadratischen Rest l in der That $\left(\frac{l}{n}\right) = 1$ ist. Wenn ferner nur für *eine* Zahl m, die also nothwendig Nichtrest sein muss, $\left(\frac{m}{n}\right)$ negativ wird, so folgt dies aus den Gleichungen (β) und (γ) für *alle* Nichtreste, da unter der gemachten Voraussetzung für jeden der quadratischen Reste l die Gleichung

$$\left(\frac{lm}{n}\right) = -1$$

resultirt und lm hierin die sämmtlichen Nichtreste repräsentirt. Es bedarf daher nur noch des Nachweises, dass für jedes n eine Zahl m existirt, für welche die Gleichung $\left(\frac{m}{n}\right) = -1$ stattfindet.

Ist erstens $n \equiv -1 \mod. 4$, so folgt aus (β'), dass für $m = 2n - 1$ das Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$ negativ wird. Wenn zweitens $n \equiv 5 \mod. 8$ ist und $m = \frac{1}{2}(n+1)$ genommen wird, so ist gemäss der Gleichung (β')

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{2m-n}{m}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = -1$$

und also wegen (α) auch

$$\left(\frac{m}{n}\right) = -1.$$

Was drittens die Primzahlen n von der Form $8\nu + 1$ betrifft, so möge angenommen werden, dass für alle, die unter n' liegen, in der That zugehörige Zahlen m von der verlangten Eigenschaft existiren. Es folgt alsdann aus den bisherigen Entwickelungen die Uebereinstimmung des Zeichens $\left(\frac{m}{n}\right)$ mit dem *Legendre-Jacobi*'schen Zeichen für je zwei *beliebige* Zahlen m und n, die beide kleiner als n' sind. Nun giebt es aber, da $n' \equiv 1 \mod. 8$ ist, nach dem *Gauss*'schen Theorem (Disqu. Arithm. Sectio IV. Art. 129) wenigstens *eine* unter $2\sqrt{n'}$ liegende Primzahl m, von welcher n' quadratischer Nichtrest ist; für ein solches m ist daher, weil beide positive Zahlen m und $n' - 2m$ kleiner als n' sind, $\left(\frac{n'-2m}{m}\right)$ mit dem *Legendre-Jacobi*'schen Zeichen identisch also negativ, und die Gleichung (β) ergiebt hiernach

$$\left(\frac{n'-2m}{m}\right) = \left(\frac{n'}{m}\right) = -1,$$

woraus schliesslich mit Hilfe der Reciprocitätsgleichung (α)

$$\left(\frac{m}{n'}\right) = -1$$

folgt. Auch für die Zahl n' existirt also eine Zahl m von der verlangten Eigenschaft, und es ist durch diesen Inductionsschluss der zu führende Nachweis vervollständigt, dass das Vorzeichen des Products

$$\Pi\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \qquad \left(\begin{matrix} h=1,2,\ldots\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots\frac{1}{2}(n-1)\end{matrix}\right)$$

mit dem *Legendre-Jacobi*'schen Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$ übereinstimmt.

Die vorstehende Entwickelung bildet einen Beweis des Reciprocitätsgesetzes, welcher seinem wesentlichen Inhalte nach derjenigen Kategorie angehört, die durch den dritten und fünften *Gauss*'schen Beweis bezeichnet wird. Die Entwickelung hat dabei mit der des *ersten* *Gauss*'schen Beweises den Vorzug gemein, dass sie nicht über das Gebiet des zu beweisenden Satzes hinausgeht*), aber sie entlehnt dieser freilich in jenem Theorem der Disqu. Arithm. (Art. 129) ihre hauptsächlichste Grundlage und wenigstens theilweise auch die Methode der Induction. Natürlich kann auch der dritte und fünfte *Gauss*'sche Beweis selbst sowie jeder, der eben derselben Kategorie angehört, in der Weise der obigen Entwickelung umgestaltet und von der Herbeiziehung des Lemma Art. 106 der Disqu. Arithm. befreit werden. So würde, um an den fünften *Gauss*'schen Beweis**) anzuknüpfen, von dessen Art. 1 gänzlich abzusehen und nur der Inhalt des Art. 2 zu benutzen sein, in welchem nachgewiesen ist, dass die oben mit (α) bezeichnete Reciprocitätsgleichung stattfindet, wenn für irgend zwei relative Primzahlen m, n das Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$ als das Product der Vorzeichen erklärt wird, welche die positiven oder negativen absolut kleinsten Reste der Zahlen

$$m,\ 2m,\ 3m,\ \ldots\tfrac{1}{2}(n-1)m$$

mod. n haben. Da aus dieser Definition des Zeichens $\left(\frac{m}{n}\right)$ auch ganz unmittelbar die Gleichungen (β), (β'), (γ) folgen, so sind alle Mittel gegeben, um in der oben ausgeführten Weise die Uebereinstimmung von $\left(\frac{m}{n}\right)$ mit dem

*) Man vergleiche die Einleitung zu der *Dirichlet*'schen Abhandlung im 47. Bande des *Crelle*'schen Journals S. 139.

**) *Gauss*' Werke, Bd. II. S. 51 bis 54.

Legendre-Jacobi'schen Zeichen darzuthun, ohne zu diesem Zwecke, wie im Art. 1 des fünften *Gauss*'schen Beweises, das Lemma Art. 106 der Disqu. Arithm. zu Hülfe zu nehmen. Es tritt dabei an die Stelle dieses Lemmas die wichtigste von den Betrachtungen, auf denen der *erste* *Gauss*'sche Beweis beruht; und dass es durch *diese* grade ermöglicht wird, die in jenem Lemma vorkommenden Congruenzen höheren Grades zu vermeiden, giebt neuen Aufschluss über die tiefe Bedeutung jener merkwürdigen und scharfsinnigen Deduction, welche überhaupt zum ersten Male zu einer strengen Begründung des Reciprocitätsgesetzes geführt hat, und welche ganz direct mit Ueberwindung aller Schwierigkeiten auf das Ziel losgehend fast wie eine Art Kraftprobe *Gauss*'schen Geistes erscheint.

SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ.

PAR

M. KRONECKER.

Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série Tome IV p. 182—192.

SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ.

I.

Soient r et s deux nombres entiers positifs ou négatifs, l, m, n trois nombres impairs; soient enfin $\gamma = \pm 1$, $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, les signes étant choisis de façon que γl, δm, εn soient positifs. Si l'on pose, en généralisant une expression donnée par *Eisenstein,*

$$(\mathfrak{A}) \qquad \left(\frac{r}{n}\right) = \prod_k \frac{\sin\frac{2rk\pi}{n}}{\sin\frac{2k\pi}{n}} \qquad [k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(\varepsilon n - 1)],$$

on peut remarquer tout d'abord que ce produit conserve la même valeur lorsqu'on l'étend à tous les systèmes de $\frac{1}{2}(\varepsilon n - 1)$ nombres k, qui forment, pour ainsi dire, un demi-système de résidus relativement au module n, c'est-à-dire dont tous les restes, pris de manière à être, en valeur absolue, moindres que $\frac{\varepsilon n}{2}$, sont différents. Le symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$, défini par l'équation $(\mathfrak{A})$, jouit des propriétés suivantes.

1. Sa valeur est zéro ou ± 1: elle est zéro si r et n ont un commun diviseur, car alors un des facteurs du numérateur s'annule évidemment; elle est ± 1 quand les deux nombres r et n sont premiers entre eux, car chaque facteur du numérateur coïncide, abstraction faite du signe, avec un facteur du dénominateur.

2. La définition conduit immédiatement aux relations

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} \left(\frac{r}{n}\right)=\left(\frac{r}{-n}\right), \quad \left(\frac{r}{n}\right)=\left(\frac{r'}{n}\right) \quad \text{si} \quad r\equiv r'\ (\mathrm{mod.}\ n), \\ \left(\frac{1}{n}\right)=1, \quad \left(\frac{-1}{n}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)}. \end{cases}$$

Or, comme on a

$$\left(\frac{2}{n}\right)=\prod_k 2\cos\frac{2k\pi}{n} \qquad [k=1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(\varepsilon n-1)],$$

le nombre des facteurs négatifs $\cos\frac{2k\pi}{n}$ étant $\frac{1}{4}(\varepsilon n\pm 1)$ et ayant la même parité que $\frac{1}{8}(n^2-1)$, il s'ensuit

$$\left(\frac{2}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}.$$

3. La remarque faite au début sur les systèmes des nombres k montre que l'on peut écrire

$$\left(\frac{s}{n}\right)=\prod_k \frac{\sin\frac{2rsk\pi}{n}}{\sin\frac{2rk\pi}{n}} \qquad [k=1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(\varepsilon n-1)],$$

et par suite que l'on a

$$(\mathrm{A}')\qquad \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{s}{n}\right)=\left(\frac{rs}{n}\right).$$

4. En prenant $r=m$ et en mettant à la place des nombres k les nombres $\frac{1}{2}(n+1)k$, il vient

$$\left(\frac{m}{n}\right)=\prod_k \frac{\sin\frac{mk\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}},$$

où les k forment un demi-système de résidus par rapport au module n; puis, en utilisant les relations

$$\delta\,\frac{\sin mv}{\sin v}=\prod_h 2\sin\left(\frac{h\pi}{m}+v\right)2\sin\left(\frac{h\pi}{m}-v\right),$$

$$\delta^{\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)}\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{\delta}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{\delta m}{n}\right),$$

on arrive à l'équation

$$(\mathfrak{B})\qquad \left(\frac{\delta m}{n}\right)=\prod 2\sin\left(\frac{h\pi}{m}+\frac{k\pi}{n}\right)2\sin\left(\frac{h\pi}{m}-\frac{k\pi}{n}\right),$$

où le produit s'étend aux $\frac{1}{2}(\delta m-1)$ nombres h et aux $\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)$ nombres k qui forment les uns un demi-système de résidus par rapport au module m, les autres un demi-système de résidus par rapport au module n.

L'équation ($\mathfrak{B}$) subsiste, il convient de le remarquer, lors même que m est un nombre pair; toutefois, il faut prendre alors pour k seulement des nombres pairs, remplacer h dans un seul des deux facteurs du second membre par $\frac{1}{2}m$, et enfin, partout ailleurs, faire parcourir à h dans les deux facteurs, $\frac{1}{2}\delta m-1$ nombres qui, en valeur absolue, soient incongrus entre eux et avec $\frac{1}{2}m$ par rapport au module m.

De l'équation ($\mathfrak{B}$) résulte immédiatement l'équation de réciprocité

$$\left(\frac{\delta m}{n}\right)\left(\frac{\varepsilon n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(\delta m-1)(\varepsilon n-1)},$$

ou

$$(\mathrm{B})\qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)+\frac{1}{4}(\delta-1)(\varepsilon-1)}.$$

5. En posant $l=r+mn$ ou $l=r$, selon que r est pair ou impair, l sera impair et le produit

$$\left(\frac{l}{mn}\right)\left(\frac{mn}{l}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{l}{mn}\right)\left(\frac{m}{l}\right)\left(\frac{n}{l}\right)$$

sera une puissance de -1 dont l'exposant sera

$$\tfrac{1}{4}(l-1)(mn-1)+\tfrac{1}{4}(\gamma-1)(\delta\varepsilon-1);$$

de même, le produit $\left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{m}{l}\right)\left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{n}{l}\right)$ sera une puissance de -1 dont l'exposant sera

$$\tfrac{1}{4}(l-1)(m+n-2)+\tfrac{1}{4}(\gamma-1)(\delta+\varepsilon-2).$$

La différence des deux exposants

$$\tfrac{1}{4}(l-1)(m-1)(n-1)+\tfrac{1}{4}(\gamma-1)(\delta-1)(\varepsilon-1)$$

étant paire, on a

$$\left(\frac{l}{mn}\right)=\left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{l}{n}\right),$$

et par conséquent

(C) $$\left(\frac{r}{mn}\right)=\left(\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{n}\right).$$

6. Les nombres k formant un demi-système de résidus par rapport au module n, à chaque nombre k correspond un nombre k' pour lequel on a

$$rk\equiv\pm k' \qquad (\text{mod. } n),$$

et par suite

$$rk\equiv k'\,\frac{\sin\frac{2rk\pi}{n}}{\sin\frac{2k'\pi}{n}} \qquad (\text{mod. } n);$$

de là résulte

$$r^{\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)}\prod_k k\equiv\left(\frac{r}{n}\right)\prod_k k \qquad (\text{mod. } n).$$

Si n est un nombre premier, le produit Πk n'est pas divisible par n, et dans ce cas on a, par conséquent,

(D) $$\left(\frac{r}{n}\right)\equiv r^{\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)} \qquad (\text{mod. } n).$$

Cette dernière congruence montre que, si n est un nombre premier, le symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$ défini par l'équation ($\mathfrak{A}$) coïncide avec le symbole de *Legendre*, et ensuite il résulte de l'équation (C) que, n étant un nombre quelconque, le symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$ est identique avec celui qu'a introduit *Jacobi* en généralisant le symbole de *Legendre*.

II.

m et n étant supposés premiers entre eux, l'interprétation arithmétique de l'équation ($\mathfrak{A}$) donne la généralisation du lemme de *Gauss*, qui a été

obtenue par M. *Schering*[1]). Si en effet les nombres k', k'', ... forment un demi-système de résidus relativement au module n, et que l'on ait toujours pour ce module

$$rk'\equiv\varrho'k'', \qquad rk''\equiv\varrho''k''', \qquad \ldots \qquad (\varrho'=\pm1,\ \varrho''=\pm1,\ldots),$$

l'équation ($\mathfrak{A}$) donne pour le symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$ la définition arithmétique

($\mathfrak{A}'$) $$\left(\frac{r}{n}\right)=\Pi\varrho,$$

entièrement équivalente à celle qui apparaît d'abord sous une forme transcendante.

L'interprétation arithmétique de l'équation ($\mathfrak{B}$), lorsqu'on prend

$$h=1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(\delta m-1), \qquad k=1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(\varepsilon n-1),$$

permet de définir le signe de $\left(\frac{\delta m}{n}\right)$ par le signe du produit

$$\prod_{h,k}\left(\frac{h^2}{m^2}-\frac{k^2}{n^2}\right),$$

ou, si l'on veut, par les conditions

$$\left(\frac{\delta m}{n}\right)=\pm1, \qquad \left(\frac{\delta m}{n}\right)\prod_{h,k}\left(\frac{h}{\delta m}-\frac{k}{\varepsilon n}\right)>0.$$

En supposant, comme on le fera désormais pour plus de simplicité, m et n positifs, le signe de $\left(\frac{m}{n}\right)$ est le signe de

($\mathfrak{B}'$) $$\Pi\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right),$$

où le produit s'étend aux valeurs

$$h=1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(m-1), \qquad k=1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(n-1).$$

[1]) *E. Schering*, Verallgemeinerung des *Gauss*ischen Criterium für den quadratischen Rest-Character einer Zahl in Bezug auf eine andere. Monatsberichte der Berliner Akademie v. J. 1876. S. 330—331. H.

Le produit ($\mathfrak{B}'$), ainsi que celui qui figure dans l'équation ($\mathfrak{B}$), s'annule si m et n ne sont pas premiers entre eux; de même, la définition du symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$ donnée par l'équation ($\mathfrak{A}'$) peut être énoncée de telle manière que la coïncidence avec celle qui résulte de l'équation ($\mathfrak{A}$) soit encore conservée quand r et n ne sont pas premiers entre eux. La définition arithmétique du symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$ donnée par l'équation ($\mathfrak{A}'$) conduit aussi immédiatement que la définition ($\mathfrak{A}$) aux propriétés qu'expriment les équations (A) et (A'); d'un autre côté, la définition arithmétique ($\mathfrak{B}'$) met, tout aussi bien que la définition ($\mathfrak{B}$), l'équation de réciprocité (B) en évidence: en sorte que, pour lier aux définitions arithmétiques ($\mathfrak{A}'$) et ($\mathfrak{B}'$) toute l'analyse déduite dans le § 1 des définitions correspondantes ($\mathfrak{A}$) et ($\mathfrak{B}$), et pour constituer de cette manière la théorie complète du symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$, il ne manque plus qu'un procédé purement arithmétique pour passer de l'une à l'autre; on y parvient aisément comme il suit.

Dans la définition ($\mathfrak{A}'$), prenons pour les nombres k', k'', ... les nombres impairs positifs moindres que $n-1$; chaque produit km sera congru suivant le module n à la valeur positive ou négative de l'un des nombres k suivant que la partie entière $E\left(\frac{km}{n}\right)$ de $\left(\frac{km}{n}\right)$ sera paire ou impaire. Par suite, le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ représente une puissance de -1 dont l'exposant est

$$E\left(\frac{m}{n}\right)+E\left(\frac{3m}{n}\right)+E\left(\frac{5m}{n}\right)+\cdots+E\left(\frac{(n-2)m}{n}\right),$$

et cette somme, en vertu de la relation

$$E\left(\frac{am}{n}\right)+E\left(\frac{(n-a)m}{n}\right)=m-1 \qquad (0<a<n),$$

peut être remplacée par

$$\sum_k E\left(\frac{km}{n}\right) \qquad [k=1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(n-1)].$$

Or c'est évidemment cette même puissance de -1 qui détermine le signe du produit ($\mathfrak{B}'$) puisque $E\left(\frac{km}{n}\right)$ est le nombre de valeurs de h pour lesquelles $\frac{h}{m}-\frac{k}{n}$ est négatif.

Ce passage de la définition ($\mathfrak{A}'$) à la définition ($\mathfrak{B}'$) remplace, au point de vue arithmétique, le passage de la définition ($\mathfrak{A}$) à la définition ($\mathfrak{B}$) obtenu par la méthode d'*Eisenstein* au moyen de la formule qui donne $\sin mv$; de même, il remplace chacune des différentes déductions qui, partant du lemme de *Gauss*, conduisent à la loi de réciprocité. Mais le nœud de toutes les démonstrations de la loi de réciprocité qui rentrent dans cette catégorie apparaîtra plus nettement encore en laissant, comme nous le ferons désormais, le lemme de *Gauss* de côté et en s'arrêtant à la définition ($\mathfrak{B}'$).

III.

Le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ relatif aux nombres positifs impairs m, n étant défini par le signe de

$$\Pi\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \qquad \begin{bmatrix} h=1,2,\ldots,\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots,\frac{1}{2}(n-1) \end{bmatrix},$$

l'équation de réciprocité

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}$$

résulte immédiatement de cette définition, ainsi que la relation

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\sum_k E\left(\frac{km}{n}\right)} \qquad [k=1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(n-1)].$$

De là résulte aussi que, pour les nombres positifs impairs l et m, congrus entre eux suivant le module n et par suite suivant le module $2n$, on a

$$(\beta) \qquad \left(\frac{l}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right);$$

mais, dans le cas où $l\equiv -m \pmod{n}$, il vient

$$(\beta') \qquad \left(\frac{l}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Si maintenant on suppose $km \equiv \pm k'$ (mod. n), en désignant les nombres k' ou $n - k'$ suivant les deux cas par r, on aura

$$E\left(\frac{klm}{n}\right) = lE\left(\frac{km}{n}\right) + E\left(\frac{lr}{n}\right)$$

et

$$E\left(\frac{lr}{n}\right) + E\left(\frac{l(n-r)}{n}\right) = l - 1;$$

ainsi

$$E\left(\frac{klm}{n}\right) \equiv E\left(\frac{km}{n}\right) + E\left(\frac{k'l}{n}\right) \qquad (\text{mod. } 2),$$

et par suite

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{lm}{n}\right) = \left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right).$$

En appliquant à chacun des trois symboles l'équation de réciprocité (α) et en permutant l avec n, on parvient, comme dans le § I, 5, à la relation

$$(\gamma') \qquad \left(\frac{l}{mn}\right) = \left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{l}{n}\right),$$

qui montre que le symbole défini précédemment sera identique avec celui de *Legendre-Jacobi* si, pour le nombre premier n, le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ est $+1$ ou -1, suivant le caractère quadratique de m par rapport au module n. Or l'équation (γ), pour $m = l$, jointe à l'équation (β), montre d'abord que, pour tout résidu quadratique l de n, on a en effet $\left(\frac{l}{n}\right) = 1$; si maintenant pour un seul nombre m le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ est négatif, m sera nécessairement non-résidu, et le symbole sera -1 pour tous les non-résidus, ainsi que cela résulte des équations (β) et (γ), qui montrent qu'alors on aura

$$\left(\frac{lm}{n}\right) = -1$$

si l est résidu quadratique: or lm peut représenter tous les non-résidus. Il

ne reste plus qu'à prouver que pour tout nombre n il existe un nombre m qui satisfait à l'équation $\left(\frac{m}{n}\right) = -1$. Soit d'abord $n \equiv -1$ (mod. 4); il suit de l'équation (β') que pour $m = 2n - 1$ le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ est négatif; si, en second lieu, $n \equiv 5$ (mod. 8) et qu'on prenne $m = \frac{1}{2}(n+1)$, on aura, à cause de (β'),

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{2m-n}{m}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = -1,$$

et par suite, à cause de (α),

$$\left(\frac{m}{n}\right) = -1.$$

En troisième lieu, quand le nombre n est de la forme $8\nu + 1$, supposons que pour tous les entiers inférieurs à n' existent des nombres m satisfaisant à la condition imposée: les développements précédents prouvent l'identité du symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ avec celui de *Legendre-Jacobi* pour *tous* les nombres m et n inférieurs à n'. Or le théorème de *Gauss* (*Disqu. arithm.*, sect. IV, art. 129) montre qu'il y a toujours au moins *un* nombre premier m inférieur à $2\sqrt{n'}$ par rapport auquel n' est non-résidu quadratique: dès lors, les deux nombres positifs m et $n' - 2m$ étant inférieurs à n', $\left(\frac{n'-2m}{m}\right)$ est identique au symbole de *Legendre-Jacobi*, et par conséquent négatif, et l'équation (β) donne

$$\left(\frac{n'-2m}{m}\right) = \left(\frac{n'}{m}\right) = -1;$$

et enfin, en vertu de l'équation de réciprocité, on aura

$$\left(\frac{m}{n'}\right) = -1.$$

L'existence de ce nombre m, par rapport au nombre n', complète la démonstration, par voie d'induction, de l'identité du symbole défini par le signe du produit

$$\Pi\left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right) \qquad \begin{bmatrix} h=1,2,\ldots,\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,2,\ldots,\frac{1}{2}(n-1) \end{bmatrix}$$

avec le symbole de *Legendre-Jacobi*.

Les développements qui précèdent constituent donc une démonstration de la loi de réciprocité qui appartient essentiellement à la même catégorie que la troisième et la cinquième démonstration de *Gauss.* Elle a cela de commun avec la première démonstration de *Gauss* qu'elle ne sort point du domaine de la proposition à démontrer; elle lui emprunte en outre son principal point d'appui, à savoir le théorème de l'article 129 des *Disquisitiones arithmeticæ*, et aussi, du moins en partie, sa marche inductive. Naturellement la troisième et la cinquième preuve de *Gauss*, et toutes celles qui rentrent dans cette catégorie, peuvent être établies de la même façon que les développements précédents et débarrassées du lemme de l'article 108 des *Disquisitiones arithmeticæ.* Si l'on voulait se rattacher à la cinquième démonstration de *Gauss*, il faudrait faire abstraction du § I, utiliser seulement le contenu du § II, où l'équation de réciprocité (α) est établie en regardant le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ relatif à deux nombres premiers entre eux m, n comme défini par le signe du produit des résidus par rapport au module n, pris en valeur absolue moindre que $\frac{n}{2}$, des nombres

$$m,\ 2m,\ 3m,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(n-1)m.$$

De cette définition du symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ résultent immédiatement les équations (β), (β'), (γ), et l'on a tout ce qu'il faut pour établir comme plus haut l'identité du symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ avec celui de *Legendre-Jacobi*, sans avoir besoin, ainsi que dans l'article 1 de la cinquième preuve de *Gauss*, d'invoquer le lemme de l'article 106 des *Disquisitiones.* Or, à la place de ce lemme, on utilise la plus importante des propositions sur lesquelles s'appuie la première preuve de *Gauss.* Que ce soit justement cette proposition à l'aide de laquelle on puisse éviter les congruences de degré supérieur qui figurent dans le lemme, cela me semble éclairer une fois de plus le caractère profond de cette déduction si singulière et si cachée qui a conduit pour la première fois à la démonstration rigoureuse de la loi de réciprocité et qui, tendant directement au but en surmontant tous les obstacles, se présente comme une épreuve de force du génie de *Gauss.*

ÜBER STURM'SCHE FUNCTIONEN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1878. S. 95—121.

ÜBER STURM'SCHE FUNCTIONEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 14. Februar 1878.]

Ich will im Folgenden an meinen im Monatsbericht vom Februar 1873 veröffentlichten Aufsatz[1]) einige weitere Entwickelungen knüpfen und werde dabei die dort angewendeten Bezeichnungen benutzen, ohne dieselben von Neuem zu erklären. Hierzu schicke ich die Bemerkung voraus, dass ich den ganzen Inhalt der ersten drei Abschnitte sowie das Wesentlichste des auf die Gleichungen vierten Grades bezüglichen letzten Theils schon in meinen Universitäts-Vorlesungen im Januar und Februar 1875 ausgeführt und bei der hier vorliegenden Darstellung desselben mich genau an die Ausarbeitung eines meiner damaligen Zuhörer, des Hrn. Dr. *Hettner*, gehalten habe.

I.

Die Betrachtungen, welche der Einführung des Begriffes der Charakteristik zu Grunde liegen (s. Monatsbericht vom März 1869[2])), führen auch zu einer neuen Deduction des *Sturm*'schen Satzes. Bezeichnet man nämlich mit $[a]$ den Werth Null oder $+1$ oder -1, je nachdem die reelle Grösse a selbst gleich Null oder positiv oder negativ ist, und bedeutet $F(z)$ eine eindeutige zwischen z_1 und z_2 endlich bleibende, stetige, reelle Function der reellen Variabeln z und $F'(z)$ die Ableitung derselben, so ist

$$\sum[F'(\zeta)] = -\tfrac{1}{2}[F(z_1)] + \tfrac{1}{2}[F(z_2)],$$

[1]) Band I S. 303 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.
[2]) Band I S. 175 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

wenn die Summation links auf alle Werthe ζ erstreckt wird, wofür $F(\zeta)=0$ und $z_1<\zeta<z_2$ ist. Wendet man diese Formel auf das Product $f_{h-1}(x)f_h(x)$ an und bezeichnet die reellen Wurzeln von $f_h(x)=0$ mit $\xi^{(h)}$, so kommt

$$\sum[f'_{h-1}(\xi^{(h-1)})f_h(\xi^{(h-1)})]+\sum[f_{h-1}(\xi^{(h)})f'_h(\xi^{(h)})]=\tfrac{1}{2}[f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)]-\tfrac{1}{2}[f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)],$$

wo sich die Summationen links resp. auf sämmtliche Wurzeln $\xi^{(h-1)}$, $\xi^{(h)}$ beziehen, die zwischen x_1 und x_2 liegen. Da nun vermöge der Gleichungen

$$f-g_1f_1+f_2=0,\qquad f_1-g_2f_2+f_3=0,\ \ldots\ f_{\nu-1}-g_\nu f_\nu=0$$
$$f_{h-1}(\xi^{(h)})=-f_{h+1}(\xi^{(h)})$$

wird, so erhält man durch Summation von $h=1$ bis $h=r$ die Formel

$$\text{(A)}\quad \sum[f'(\xi)f_1(\xi)]-\sum[f'_r(\xi^{(r)})f_{r+1}(\xi^{(r)})]=\tfrac{1}{2}\sum_{h}\underset{(h=1,2,\ldots r)}{\{[f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)]-[f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)]\}},$$

in welcher sich die Summationen links resp. auf die sämmtlichen zwischen x_1 und x_2 liegenden Wurzeln ξ, $\xi^{(r)}$ beziehen. Geht man hierbei bis zu einer Zahl r, wofür der Werth der zweiten Summe links bekannt ist, so bestimmt sich auch der Werth der ersten, und es resultirt namentlich, wenn $f_r(x)$ constant also $r=\nu$ ist, die Formel

$$\text{(B)}\qquad \sum_{(\xi)}\underset{(x_1<\xi<x_2)}{[f'(\xi)f_1(\xi)]}=\tfrac{1}{2}\sum_{h}\underset{(h=1,2,\ldots\nu)}{\{[f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)]-[f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)]\}},$$

welche den *Sturm*'schen Satz enthält.

In Beziehung auf die hierbei vorkommende Kettenbruchs-Entwickelung möge noch bemerkt werden, dass, wenn der Zähler in dem durch den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{g_p-\cfrac{1}{g_{p+1}-\ddots-\cfrac{1}{g_{q-1}}}}$$

dargestellten Bruch mit $Z_{p,q}$ bezeichnet wird, die allgemeine Gleichung

$$\text{(C)}\qquad Z_{p,q}Z_{r,s}-Z_{p,r}Z_{q,s}+Z_{p,s}Z_{q,r}=0$$

unter der Bedingung

$$p\leqq q\leqq r\leqq s$$

besteht, eine Gleichung, unter welcher die verschiedenen Relationen zwischen den Resten, Zählern und Nennern der Näherungswerthe als specielle Fälle begriffen sind. Die Formel (C) ergiebt sich leicht aus den die Grössen Z definirenden Relationen

$$Z_{p,p}=0,\qquad Z_{p,p+1}=1$$
$$Z_{p,q-1}-g_qZ_{p,q}+Z_{p,q+1}=0\qquad\qquad (p\leqq q-1)$$

und aus der Gleichung

$$Z_{0,p}Z_{1,q}-Z_{0,q}Z_{1,p}=Z_{p,q},$$

welche daraus folgt.

II.

Denkt man sich die Function $f_1(x)$ aus den n Werthen bestimmt, welche sie für

$$x=\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_n$$

annimmt, so hat man bei der *Cauchy*'schen Interpolations-Aufgabe*) zwei ganze Functionen $F(x)$ und $\Psi(x)$ zu suchen, für welche die Summe der Grade kleiner als n ist, und welche die Gleichungen

$$\frac{F(\xi)}{\Psi(\xi)}=f_1(\xi)$$

für alle n Werthe ξ erfüllen. Da nun zwischen den aus der Kettenbruchs-Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ hervorgehenden Functionen f_k, φ_k, ψ_k die Relationen

*) Vgl. Hrn. *Liouville's* Bemerkung in seinem Journal Tome VII (1842) S. 361.

$$f_1\psi_{k-1} - f\varphi_{k-1} = f_k$$

bestehen, so können die Brüche

$$\frac{f_k(x)}{\psi_{k-1}(x)} \quad \text{für} \quad \frac{F(x)}{\Psi(x)}$$

genommen werden, und zwar sind dies die einzigen, welche den Bedingungen der *Cauchy*'schen Aufgabe genügen. Denn, wenn der Nenner Ψ vom Grade r und also der Zähler F höchstens vom Grade $n-r-1$ sein soll und r zwischen n_{k-1} und n_k, die untere Grenze eingeschlossen, liegt, also

$$n_{k-1} \leqq r < n_k$$

ist, so muss die Gleichung

$$f_k(x)\Psi(x) = \psi_{k-1}(x)F(x),$$

da sie für die n Werthe $x = \xi$ Geltung haben soll und von niedrigerem als dem n^{ten} Grade ist, identisch erfüllt sein. Alle Functionen F und Ψ, für welche

$$F(\xi) = f_1(\xi)\Psi(\xi)$$

sein soll, sind demnach durch die Gleichungen

$$F(x) = \theta(x)f_k(x), \qquad \Psi(x) = \theta(x)\psi_{k-1}(x)$$

gegeben, in denen $\theta(x)$ eine ganze Function bedeutet, deren Grad nicht grösser als die kleinere der beiden Zahlen

$$n_k - r - 1, \qquad r - n_{k-1}$$

sein kann. Für die Werthe

$$r = n_k - 1, \qquad r = n_{k-1}$$

ist also $\theta(x)$ eine Constante. Nun sind andrerseits die Functionen $F(x)$ vom Grade $(n-r-1)$ durch die Relationen

$$\sum_{(\xi)} \frac{\xi^t F(\xi)}{f_1(\xi)f'(\xi)} = 0 \qquad {\scriptstyle (0 \leq t < n-r-1)}$$

bis auf einen constanten Factor bestimmt*), da die hiermit gleichbedeutenden Relationen

$$\sum_{(\xi)} \frac{\xi^t \Psi(\xi)}{f'(\xi)} = 0 \qquad {\scriptstyle (0 \leq t < n-r-1)}$$

$\Psi(x)$ als eine Function r^{ten} Grades charakterisiren, und es werden also, wenn

$$F(x) = \sum_h C_h x^h \qquad {\scriptstyle (h=0,1,\ldots n-r-1)}$$

gesetzt wird, die Verhältnisse der Coëfficienten C durch die Gleichungen

$$\sum_h C_h s_{h+t} = 0 \qquad {\scriptstyle (t=0,1,\ldots n-r-2)}$$

definirt. Diese Definition muss in den Fällen

$$r = n_{k-1}, \qquad r = n_k - 1,$$

wo nur

$$F(x) = C \cdot f_k(x)$$

den Bedingungen genügt, eine vollständige sein, und es wird daher, wenn man die Determinante

$$|x s_{p+q} - s_{p+q+1}| \qquad {\scriptstyle (p,q=0,1,\ldots t-1)}$$

zur Abkürzung mit $D_t(x)$ bezeichnet,

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} c_k D_t(x) &= \sigma_k f_k(x) && \text{für} \quad t = n - n_k \\ c_k D_t(x) &= \tau_k f_k(x) && \text{für} \quad t = n - n_{k-1} - 1. \end{aligned}$$

---

*) Vgl. *Jacobi's* Abhandlung im 30. Bande von *Crelle's* Journal S. 127 ff.[1])

[1]) *C. G. J. Jacobi*, Ueber die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function. *Jacobi's* Werke Bd. III S. 479—511. H.

Hierbei bedeuten σ_k und τ_k die Coëfficienten von x^{n-n_k} in den bezüglichen Determinanten $D(x)$; sie sind also selbst Determinanten und nach vorstehender Ausführung nothwendig von Null verschieden.

Der Bedeutung von σ gemäss ist für $t = n - n_{k-1} - 1$

$$\sum_{(\xi)} \frac{\xi^t D_t(\xi)}{f_1(\xi) f'(\xi)} = \sigma_{k-1};$$

da nun

$$\frac{D_t(\xi)}{f_1(\xi)} = \frac{\tau_k f_k(\xi)}{c_k f_1(\xi)} = \frac{\tau_k}{c_k} \psi_{k-1}(\xi)$$

und $\frac{1}{c_{k-1}}$ der Coëfficient der höchsten Potenz von x in $\psi_{k-1}(x)$ ist, so erhält man die Gleichung

$$\text{(E)} \qquad c_k c_{k-1} \sigma_{k-1} = \tau_k,$$

welche zur Bestimmung der Coëfficienten c aus den Determinanten σ, τ dienen kann.

Liegt t zwischen $n - n_k$ und $n - n_{k-1} - 1$, so ist $D_t(x)$ identisch gleich Null, da, wie ich schon im Anfang des Art. IV meines Aufsatzes vom Febr. 1873[1]) gezeigt habe, die sämmtlichen aus dem rechteckigen System

$$s_{p+q} \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, \ldots n - n_k \\ q = 0, 1, \ldots n - n_{k-1} - 2 \end{pmatrix}$$

zu bildenden Determinanten der Ordnung $n - n_k + 1$ verschwinden. Demgemäss und vermöge der Gleichungen (D) und (E) ergeben sich für die Producte von zwei aufeinanderfolgenden Functionen D dreierlei Werthe:

Erstens, wenn der grössere Index gleich dem Grade einer der Restfunctionen f ist,

$$\text{(F)} \qquad D_{t-1}(x) D_t(x) = \sigma_{k-1}^2 f_{k-1}(x) f_k(x) \quad \text{für} \quad t = n - n_{k-1};$$

---

[1]) Band I S. 319 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

zweitens, wenn der grössere Index zwischen den Graden zweier Restfunctionen und dabei von jedem derselben nur um eine Einheit entfernt liegt,

$$\text{(F')} \qquad D_{t-1}(x) D_t(x) = \frac{\sigma_k \tau_k}{c_k^2} f_k(x)^2 \quad \text{für} \quad t = n - n_k + 1 = n - n_{k-1} - 1;$$

drittens, für jeden andern Werth von t

$$\text{(F'')} \qquad D_{t-1}(x) D_t(x) = 0.$$

Hiernach ist, wenn t dem Grade einer der Restfunctionen gleich ist, nämlich für $t = n - n_{k-1}$:

$$[D_{t-1}(x_2) D_t(x_2)] - [D_{t-1}(x_1) D_t(x_1)] = [f_{k-1}(x_2) f_k(x_2)] - [f_{k-1}(x_1) f_k(x_1)],$$

während für alle andern Werthe von t der Ausdruck links verschwindet, und die den *Sturm*'schen Satz enthaltende Gleichung (B) kann daher auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$\text{(G)} \qquad \sum_{(\xi)} \underset{(x_1 < \xi < x_2)}{[f'(\xi) f_1(\xi)]} = \tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{t=n} \{[D_{t-1}(x_2) D_t(x_2)] - [D_{t-1}(x_1) D_t(x_1)]\}.$$

Man ersieht hieraus, dass, wie Hr. *Hattendorff* zuerst gezeigt hat*), die Reihe der sämmtlichen Determinanten $D(x)$ in *jedem* Falle — nicht bloss, wenn die Kettenbruchs-Entwickelung regulär ist — als *Sturm*'sche Functionen dienen können; aber es ist noch die wesentliche Bemerkung hinzuzufügen, dass die Producte von zwei aufeinanderfolgenden Functionen $D(x)$ im Allgemeinen gemäss der Gleichung (F″) verschwinden, wenn der Werth des grösseren Index nicht mit dem Grade einer der Restfunctionen f zusammenfällt, und dass überhaupt die Summation auf der rechten Seite der Gleichung (G) auf diejenigen Werthe von t beschränkt werden kann, welche mit den Graden der Restfunctionen $f, f_1, f_2, \ldots f_\nu$ übereinstimmen, da die übrigen Glieder stets gleich Null sind.

---

*) Vgl. Hrn. *Hattendorff*'s Buch „die *Sturm*'schen Functionen" II. Auflage 1874.

III.

Durch den Inhalt der oben citirten Abhandlung *Jacobi's* waren in Verbindung mit der angeführten Bemerkung des Hrn. *Liouville* eigentlich schon damals sowohl die *Sylvester*'schen combinatorischen Ausdrücke als auch die *Cayley*'schen Determinantenformen für die aus der Kettenbruchs-Entwickelung hervorgehenden Restfunctionen vollständig gegeben und erwiesen. Vermittelt wurden die Beziehungen zwischen diesen verschiedenen Formen derselben Functionen durch jene *Cauchy*'sche Aufgabe, eine Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function darzustellen, da diese Aufgabe einerseits mit Hülfe einer Kettenbruchs-Entwickelung und andrerseits sowohl durch die combinatorische *Cauchy*'sche Formel als auch durch die Determinanten-Ausdrücke *Jacobi's* gelöst wird. Aber die Uebereinstimmung der *Cauchy*'schen und *Jacobi*'schen Ausdrücke lässt sich auch in folgender einfachen Weise direct darlegen*).

Durch Zusammensetzung der beiden rechteckigen Systeme

$$(u_k \xi_k^h), \quad (v_k \eta_k^h) \qquad \binom{h=0,1,\dots m}{k=0,1,\dots n}$$

entsteht für $m \leqq n$ das System

$$\left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k v_k \xi_k^g \eta_k^h\right) \qquad (g, h=0, 1, \dots m)\,.$$

Bildet man hieraus die Determinante, so kommt

$$\text{(H)} \qquad \left|\sum_{k=0}^{k=n} u_k v_k \xi_k^g \eta_k^h\right|_{(g,h=0,1,\dots m)} = \sum_{(i)} \prod_{\alpha} u_\alpha v_\alpha \prod_{\alpha,\beta} (\xi_\alpha - \xi_\beta)(\eta_\alpha - \eta_\beta)\,, \quad (\alpha, \beta = i_0, i_1, \dots i_m;\ \alpha < \beta)$$

wo sich die Summation rechts auf alle Systeme von $(m+1)$ verschiedenen Zahlen $i_0, i_1, \dots i_m$ bezieht, welche aus den Zahlen $0, 1, \dots n$ ausgewählt werden können. Setzt man nun

*) Vgl. den 4. Abschnitt der oben citirten *Jacobi*'schen Abhandlung.

$$u_0 = 1, \qquad \xi_0 = x, \qquad \eta_0 = 0$$

und für $k = 1, 2, \dots n$:

$$v_k \eta_k = 1, \qquad \xi_k = \eta_k$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k \xi_k^h = s_h\,,$$

so erhält man durch Vergleichung der auf den beiden Seiten von (H) mit v_0 multiplicirten Ausdrücke die Formel

$$\text{(J)} \qquad |x s_{g+h} - s_{g+h+1}|_{(g,h=0,1,\dots m-1)} = \sum_{(i)} \prod_{\alpha} u_\alpha (x - \xi_\alpha) \prod_{\alpha,\beta} (\xi_\alpha - \xi_\beta)^2\,, \quad (\alpha, \beta = i_1, i_2, \dots i_m;\ \alpha < \beta)$$

in welcher sich die Summation rechts auf alle Systeme von m verschiedenen Zahlen $i_1, i_2, \dots i_m$ bezieht, die aus den Zahlen $1, 2 \dots n$ ausgewählt werden können. Da die Determinante auf der linken Seite, wenn der Werth von u_k durch die Gleichung

$$u_k f_1(\xi_k) f'(\xi_k) = 1$$

bestimmt ist, gleich $D_m(x)$ wird, so behalten alle Entwickelungen im vorhergehenden Abschnitt, welche die Determinanten $D(x)$ betreffen, für die mit denselben identischen combinatorischen Ausdrücke auf der rechten Seite der Formel (J) ihre Gültigkeit.

IV.

Wird jetzt, um die folgenden Ausführungen übersichtlicher zu machen, die Kettenbruchs-Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ als regulär vorausgesetzt, so dass also in den Gleichungen

$$\text{(K)} \qquad f - g_1 f_1 + f_2 = 0, \quad f_1 - g_2 f_2 + f_3 = 0, \quad \dots f_{n-1} - g_n f_n = 0$$

die Functionen g sämmtlich linear und die Functionen f_k vom Grade $n-k$ sind, so kann im VII. Abschnitt meines Aufsatzes vom Februar 1873[1]) (Monatsbericht S. 145)

[1]) Band I S. 336 dieser Ausgabe. H.

$$F_k(x) = g_k' f_k(x)$$

genommen werden. Hierbei bedeutet g_k' die Ableitung von g_k oder also den Coëfficienten von x in g_k, der a. a. O. mit a_k bezeichnet ist. Setzt man ferner v an Stelle der dortigen Variabeln V, so tritt an die Stelle der dort S. 145[1]) mit (P') bezeichneten quadratischen Form die folgende:

$$\text{(L)} \qquad \sum_h \frac{x-\xi_h}{f_1(\xi_h)f'(\xi_h)} \Big(\sum_k g_k' v_k f_k(\xi_h)\Big)^2 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n),$$

in welcher vermöge der a. a. O. S. 125 mit (G') bezeichneten Relationen[2]) sämmtliche Glieder mit Ausnahme von

$$\sum_{h,k} (x-\xi_h) \cdot \frac{f_k(\xi_h) f_k(\xi_h)}{f_1(\xi_h) f'(\xi_h)} \cdot (g_k' v_k)^2 - 2 \sum_{h,k} \xi_h \cdot \frac{f_k(\xi_h) f_{k+1}(\xi_h)}{f_1(\xi_h) f'(\xi_h)} g_k' g_{k+1}' v_k v_{k+1}$$

verschwinden. Wird hierin

$$g_k' \cdot (x-\xi) \quad \text{durch} \quad g_k(x) - g_k(\xi), \qquad f_k(\xi) \quad \text{durch} \quad f_1(\xi)\psi_{k-1}(\xi)$$

ersetzt und alsdann noch von den Gleichungen

$$g_k(\xi) f_k(\xi) = f_{k-1}(\xi) + f_{k+1}(\xi), \qquad \psi_{k-1}(\xi) f_{k-1}(\xi) = f_k(\xi)\psi_{k-2}(\xi)$$

und von den *Euler*'schen Formeln Gebrauch gemacht, so verwandeln sich die übrig gebliebenen Theile von (L) in die quadratische Form

$$\text{(L')} \qquad \sum_{k=1}^{k=n} g_k v_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} v_k v_{k+1},$$

welche mit

$$\text{(L'')} \qquad \sum_{k=1}^{k=n} f_{k-1} f_k \left(\frac{v_{k-1}}{f_{k-1}} - \frac{v_k}{f_k}\right)^2$$

identisch ist, wenn $v_0 = 0$ genommen wird. Aus der Identität der Formen (L)

[1]) Band I S. 337 dieser Ausgabe. H.
[2]) Band I S. 314 dieser Ausgabe. H.

und (L'') folgt wegen der Constanz der Anzahl der Vorzeichen bei Aggregaten von Quadraten linearer Functionen die für jeden reellen Werth von x geltende Relation

$$\sum_{(\xi)} [(x-\xi) f_1(\xi) f'(\xi)] = \sum_{k=1}^{k=n} [f_{k-1}(x) f_k(x)],$$

in welcher links in Beziehung auf alle reellen Wurzeln ξ zu summiren ist, und diese Relation führt unmittelbar, indem darin erst $x = x_1$, dann $x = x_2$ gesetzt und die Differenz gebildet wird, zu der obigen, den *Sturm*'schen Satz enthaltenden Formel (B).

Zu eben derselben Relation gelangt man auch, indem man die quadratische Form (L'), deren Coëfficienten das System

$$\text{(K}^0\text{)} \qquad \begin{matrix} g_1, & -1, & 0, & 0, \ldots & 0, & 0, & 0, \\ -1, & g_2, & -1, & 0, \ldots & 0, & 0, & 0, \\ 0, & -1, & g_3, & -1, \ldots & 0, & 0, & 0, \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, & 0, \ldots & -1, & g_{n-1}, & -1, \\ 0, & 0, & 0, & 0, \ldots & 0, & -1, & g_n \end{matrix}$$

bilden, mittels der *Jacobi*'schen Transformation in ein Aggregat von Quadraten verwandelt*). Denn dabei treten bekanntlich die Determinanten aller derjenigen Systeme auf, die aus dem System (K^0) durch Weglassung einer Anzahl der ersten Horizontal- und Verticalreihen entstehen. Ist diese Anzahl gleich k, so ist der Werth der Determinante gleich $\frac{f_k(x)}{f_n}$, da bei der Ent-

*) Vgl. die Note des Herrn *Brioschi*, Comptes Rendus Tome 68. p. 1321.

wickelung von $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}$ in einen Kettenbruch die Diagonalglieder $g_{k+1}, g_{k+2}, \dots g_n$ die Theilnenner bilden.

Quadratische Formen von der Art wie (L′), nämlich die Formen mit nur $2n-1$ Gliedern

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k X_k^2 + 2\sum_{k=1}^{k=n-1} B_k X_k X_{k+1}$$

bilden den Gegenstand einer Notiz *Jacobi's* im Monatsbericht von 1848 S. 414 und im 39. Bande des *Crelle*'schen Journals S. 290[1]). Werden solche Formen demgemäss als *Jacobi*'sche bezeichnet, so ist es die Transformation der von Hrn. *Hermite* aufgestellten Form in eine *Jacobi*'sche, welche den eigentlichen Inhalt der vorstehenden Entwickelung ausmacht. Denn die quadratische Form

$$(\bar{\mathrm{L}}) \qquad \sum_h \frac{x-\xi_h}{f_1(\xi_h)f'(\xi_h)} \left(\sum_k u_k \xi_h^{k-1}\right)^2 \qquad {\scriptstyle (h,k=1,2,\dots n)},$$

welche bei der *Hermite*'schen Methode den Ausgangspunkt bildet, wird in die *Jacobi*'sche Form

$$(\mathrm{L}') \qquad \sum_{k=1}^{k=n} g_k v_k^2 - 2\sum_{k=1}^{k=n-1} v_k v_{k+1}$$

mittels einer Substitution transformirt, welche in der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{k=n} v_k g_k' f_k(x)$$

zusammengefasst ist und durch Vergleichung der Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x daraus hervorgeht. Allerdings bedarf es zur Ableitung des *Sturm*'schen Satzes noch einer weiteren Umwandlung der *Jacobi*'schen Form in ein Aggregat von Quadraten; aber grade die Vermittelung durch die *Jacobi*'sche Form lässt die Bedeutung der Kettenbruchs-Entwickelung von

[1]) *C. G. J. Jacobi*, Ueber die Reduction der quadratischen Formen auf die kleinste Anzahl Glieder. Gesammelte Werke Bd. VI S. 318—321. H.

$\frac{f_1(x)}{f(x)}$ d. h. also des ursprünglichen *Sturm*'schen Verfahrens so klar hervortreten, dass dabei die *Hermite-Jacobi*'sche Methode nur noch als eine andre Methode zur Begründung eben jenes Verfahrens erscheint.

Die obigen Ausführungen können auch dazu benutzt werden, um eine beliebige quadratische Form mittels einer orthogonalen Substitution in eine *Jacobi*'sche Form zu transformiren, oder um mittels einer und derselben Substitution

$$\sum_k S_k V_k^2 \quad \text{in} \quad \sum_k g_k' v_k^2$$

und $\qquad \binom{i,k=1,2,\dots n}{h=1,2,\dots n-1}$

$$\sum_{i,k} C_{ik} V_i V_k \quad \text{in} \quad \sum_k g_k^0 v_k^2 + 2\sum_h v_h v_{h+1}$$

überzuführen. Setzt man nämlich, um die Bezeichnungen mit den in meinem Aufsatze vom Febr. 1873 (Monatsbericht S. 145[1]) gebrauchten übereinstimmend zu machen:

$$C_{ik} = S_i A_{ik}, \qquad f(x) = |x\delta_{ik} - A_{ik}| \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,\dots n)}$$

und ebenso, wie dort, $f_{ik}(x)$ für die Unterdeterminanten von $f(x)$, so wird die Identität der a. a. O. mit (P) und (P″) bezeichneten Formen durch die Gleichung

$$\sum_{i,k} (x\delta_{ik} - A_{ik}) S_i V_i V_k = \sum_i \frac{(x-\xi_i)S_r}{f_{rr}(\xi_i)f'(\xi_i)} \left(\sum_k f_{rk}(\xi_i) V_k\right)^2 \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,\dots n)}$$

ausgedrückt, in welcher für r irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots n$ zu nehmen ist. Es sei nun $\varphi(x)$ eine beliebige ganze Function von x vom Grade $(n-1)$, und man bestimme eine Function $f_1(x)$ vom Grade $(n-1)$ gemäss der Bedingung:

$$S_r f_1(\xi_h) = \varphi(\xi_h)^2 f_{rr}(\xi_h) \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots n)},$$

so wie n Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $F_k(x)$ gemäss den Bedingungen

[1]) Band I S. 337 dieser Ausgabe. H.

$$F_k(\xi_h) = \varphi(\xi_h) f_{rk}(\xi_h) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n).$$

Ergiebt alsdann die Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ in einen Kettenbruch die Reihe von Gleichungen

$$f - g_1 f_1 + f_2 = 0, \quad f_1 - g_2 f_2 + f_3 = 0, \quad \ldots f_{n-1} - g_n f_n = 0,$$

wo die Partialnenner g_k sämmtlich lineare Functionen von x

$$g'_k x - g^0_k$$

sind, so werden die Formen

$$\sum_k S_k V_k^2, \qquad \sum_{i,k} C_{ik} V_i V_k$$

beziehungsweise in $\qquad \binom{i,\,k=1,2,\ldots n}{h=1,2,\ldots n-1}$

$$\sum_k g'_k v_k^2, \qquad \sum_k g^0_k v_k^2 + 2 \sum_h v_h v_{h+1}$$

mittels einer Substitution transformirt, welche aus

$$\sum_k V_k F_k(x) = \sum_k v_k g'_k f_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

durch Vergleichung der Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x hervorgeht.

Sämmtliche auf die angegebene Weise entstehenden Transformationen, deren ganze Mannigfaltigkeit aus der willkürlichen Wahl von $\varphi(x)$ hervorgeht, sind rational, d. h. wenn die Coëfficienten S_k, C_{ik} der simultan zu transformirenden Formen rationale Functionen gewisser Grössen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots$ sind, so sind es auch die Substitutionscoëfficienten. Die verschiedenen Functionen $f_1(x)$, durch welche jede einzelne Transformation charakterisirt ist, insofern die Kettenbruchs-Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ alle Elemente derselben ergiebt, verhalten sich für jeden Werth $x = \xi_h$ zu einander wie Quadrate rationaler Functionen von ξ_h. Demgemäss wird auch jede lineare und in dem angegebenen Sinne rationale Transformation eines Systems zweier Formen

$$\sum_k g'_k v_k^2, \qquad \sum_k g^0_k v_k^2 + 2 \sum_h v_h v_{h+1} \qquad \binom{k=1,2,\ldots n}{h=1,2,\ldots n-1}$$

in ein System derselben Art

$$\sum_k \mathfrak{g}'_k \mathfrak{v}_k^2, \qquad \sum_k \mathfrak{g}^0_k \mathfrak{v}_k^2 + 2 \sum_h \mathfrak{v}_h \mathfrak{v}_{h+1} \qquad \binom{k=1,2,\ldots n}{h=1,2,\ldots n-1}$$

mittels einer Substitution bewirkt, welche durch die für alle Werthe von ξ geltende Gleichung

$$\mathfrak{f}_0(\xi) \sum_{k=1}^{k=n} v_k g'_k f_k(\xi) = f_0(\xi) \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{v}_k \mathfrak{g}'_k \mathfrak{f}_k(\xi)$$

dargestellt werden kann. Hierbei bedeuten $\mathfrak{f}_k$ die Restfunctionen und $\mathfrak{g}_k$ die Theilnenner, welche aus der Kettenbruchs-Entwickelung von $\frac{\mathfrak{f}_1(x)}{f(x)}$ hervorgehen, und es ist vorausgesetzt, dass für jeden Werth von ξ die Proportion

$$f_1(\xi) : \mathfrak{f}_1(\xi) = f_0(\xi)^2 : \mathfrak{f}_0(\xi)^2$$

besteht.

Die Transformation des Systems zweier quadratischer Formen von n Veränderlichen

$$\sum_k S_k V_k^2, \qquad \sum_{i,k} C_{ik} V_i V_k$$

in $\qquad \binom{i,\,k=1,2,\ldots n}{h=1,2,\ldots n-1}$

$$\sum_k g'_k v_k^2, \qquad \sum_k g^0_k v_k^2 + 2 \sum_h v_h v_{h+1}$$

kann auch in folgender Weise bewirkt resp. auf den Fall von $(n-1)$ Variabeln zurückgeführt werden. Setzt man

$$V_n = v_n, \qquad S_n = g'_n, \qquad C_{nn} = g^0_n,$$

führt alsdann die durch die Gleichung

$$\sum_{h=1}^{h=n-1} C_{nh} V_h = \mathfrak{V}_{n-1}$$

definirte Variable $\mathfrak{V}_{n-1}$ an Stelle von V_{n-1} in

$$\sum_{h=1}^{h=n-1} S_h V_h^2$$

ein und wendet die *Jacobi*'sche Transformation*) darauf an, indem dabei die Variabeln

$$V_1, \quad V_2, \quad \dots \quad V_{n-2}, \quad \mathfrak{B}_{n-1}$$

in der hier angegebenen Reihenfolge genommen werden, so treten an deren Stelle, als neue Veränderliche $\mathfrak{B}_h$, lineare Functionen von

$$V_h, \quad V_{h+1}, \quad \dots \quad V_{n-2}, \quad \mathfrak{B}_{n-1},$$

für welche

$$\sum_h S_h V_h^2 = \sum_h \mathfrak{S}_h \mathfrak{B}_h^2, \qquad \sum_{h,h'} C_{h,h'} V_h V_{h'} = \sum_{h,h'} \mathfrak{C}_{h,h'} \mathfrak{B}_h \mathfrak{B}_{h'} \qquad {\scriptstyle (h,\,h'=1,\,2,\,\dots\,n-1)}$$

und, wie beiläufig bemerkt werden mag,

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_{n-1}} = \sum_{h=1}^{h=n-1} \frac{C_{nh}^2}{S_h}$$

wird. Setzt man nun für die Formen der $(n-1)$ Veränderlichen $\mathfrak{B}$

$$\sum_h \mathfrak{S}_h \mathfrak{B}_h^2, \qquad \sum_{h,h'} \mathfrak{C}_{h,h'} \mathfrak{B}_h \mathfrak{B}_{h'} \qquad {\scriptstyle (h,\,h'=1,\,2,\,\dots\,n-1)}$$

die Transformation in

$$\sum_h g_h' v_h^2, \qquad \sum_h g_h^0 v_h^2 + 2 \sum_f v_f v_{f+1} \qquad \left({\scriptstyle h=1,\,2,\,\dots\,n-1 \atop f=1,\,2,\,\dots\,n-2}\right)$$

voraus, und zwar so, dass dabei analog wie oben

$$\mathfrak{B}_{n-1} = v_{n-1}, \quad \mathfrak{S}_{n-1} = g_{n-1}', \quad \mathfrak{C}_{n-1,n-1} = g_{n-1}^0$$

*) Vgl. *Borchardt's* Journal Bd. 53 S. 265 ff.[1]) und Monatsbericht von 1874 S. 398[2]).

[1]) *C. G. J. Jacobi,* Ueber eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variabeln-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks. Werke Band III S. 583—590. H.

[2]) Band I S. 425 dieser Ausgabe. H.

wird, so resultirt unmittelbar jene gesuchte Transformation der Formensysteme von n Variabeln.

Da die Determinanten der beiden quadratischen Formen

$$\sum_{i,k} (x S_k \delta_{ik} - C_{ik}) V_i V_k, \qquad \sum_k g_k v_k^2 - 2 \sum_h v_h v_{h+1}, \qquad \left({\scriptstyle i,\,k=1,\,2,\,\dots\,n \atop h=1,\,2,\,\dots\,n-1}\right)$$

wenn wieder

$$g_k = g_k' x - g_k^0$$

gesetzt wird, bis auf einen von x unabhängigen Factor (das Quadrat der Substitutionsdeterminante) mit einander übereinstimmen müssen, so wird durch das angegebene Transformations-Verfahren offenbar die Gleichung

$$\text{(M)} \qquad | x S_k \delta_{ik} - C_{ik} | = 0 \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\dots\,n)}$$

als eine aus den Gleichungen

$$-g_1 f_1 + f_2 = 0, \quad f_1 - g_2 f_2 + f_3 = 0, \quad \dots f_{n-1} - g_n f_n = 0$$

durch Elimination von $f_1, f_2, \dots f_n$ hervorgehende Resultante dargestellt, also in jener besonderen Determinantenform, welche dem oben mit (K°) bezeichneten Systeme angehört. Die Determinante

$$| x S_k \delta_{ik} - C_{ik} | \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\dots\,n)}$$

selbst wird dabei abgesehen von einem constanten Factor gleich dem Nenner des Bruches

$$\cfrac{1}{g_1 - \cfrac{1}{g_2 - \ddots - \cfrac{1}{g_n}}},$$

und es kann hiernach auf die Gleichung (M) der *Sturm*'sche Satz in seiner ursprünglichen Form angewendet werden. Denn die Formel (B) geht in bekannter Weise für $x_1 = -\infty$ und $x_2 = +\infty$ in folgende über:

$$\text{(B')} \qquad \sum_{(\xi)} [f'(\xi) f_1(\xi)] = \sum_{h=1}^{h=\nu} [g_h'],$$

wo sich die Summation links auf alle reellen Wurzeln ξ der Gleichung $f(x) = 0$ bezieht. Ist nun, wie hier, $\nu = n$ d. h. gleich dem Grade der Gleichung (M) und sind dann überdies sämmtliche Grössen g_h' positiv, so ist die rechte Seite in (B') gleich n, und es müssen daher alle n Wurzeln ξ reell sein. Die Grössen g_h' sind aber in Anbetracht der Gleichung

$$\sum_k S_k V_k^2 = \sum_k g_k' v_k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

dann und nur dann sämmtlich positiv, wenn die Grössen S_k von derselben Beschaffenheit sind, und es findet sich daher, meines Wissens zum ersten Male, der Beweis, dass die Wurzeln jeder Gleichung

$$|x S_k \delta_{ik} - C_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

mit positiven S sämmtlich reell sind, unmittelbar auf den *Sturm*'schen Satz gegründet*).

Für den hier besonders hervorgehobenen Fall, dass die Grössen g_h' sämmtlich positiv sind, bedurfte es keiner näheren Untersuchung der in der Formel (B') vorkommenden Function $f_1(x)$, welche den Zähler jenes Kettenbruchs bildet. Dass sie in diesem Falle in der That die bei *Sturm* vorkommende abgeleitete Function $f'(x)$ zu ersetzen geeignet ist, erhellt in ganz directer Weise aus der Gleichung

$$\text{(N)} \qquad f_1 f' - f f_1' = \sum_{k=1}^{k=n} g_k' f_k^2,$$

welche zeigt, dass bei lauter positiven Grössen g_k' die Functionen $f_1(x)$ und $f'(x)$ für alle reellen Wurzeln $x = \xi$ gleiches Vorzeichen haben. Die Gleichung (N) ergiebt sich, wenn man

*) Nach dem angegebenen Verfahren lässt sich z. B. für die bekannte Hauptaxen-Gleichung im Falle $n = 3$ die Transformation in jene besondere Determinantenform von S. 49 leicht ausführen.

$$f_{k-1}(x) - g_k(x) f_k(x) + f_{k+1}(x) = 0$$

erst differentiirt, dann mit $f_k(x)$ multiplicirt, demnächst $g_k f_k$ durch $f_{k-1} + f_{k+1}$ ersetzt und endlich in Beziehung auf alle Werthe von k summirt. Für den allgemeinen Fall aber ist noch zu bemerken, dass überhaupt die Anzahl der positiven Grössen S_k mit der Anzahl der positiven Grössen g_k' übereinstimmen muss. Setzt man ferner den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{g_1 - \cfrac{1}{g_2 - \cdots - \cfrac{1}{g_n}}}$$

gleich $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ und nimmt hierbei den Coëfficienten von x^n in $f(x)$ gleich Eins, so finden sich die beiden Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ auf Grund der Transformationsgleichung

$$\sum_{i,k} (x S_k \delta_{ik} - C_{ik}) V_i V_k = \sum_k g_k v_k^2 - 2 \sum_h v_h v_{h+1} \qquad \binom{i, k = 1, 2, \ldots n;}{h = 1, 2, \ldots n-1}$$

und in Gemässheit der obigen Ausführungen auch in folgender Weise bestimmt:

$$f(x) = \left| x \delta_{ik} - \frac{C_{ik}}{S_k} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$
$$S_i f_1(\xi_k) = \varphi(\xi_k)^2 \cdot f_{ii}(\xi_k),$$

und es ist auch mit Rücksicht auf die Gleichungen (Q) und (Q') meines Aufsatzes vom Febr. 1873 (s. Monatsbericht S. 145, 146[1]) für jeden Werth von ξ und einen beliebigen Werth von k:

$$f_1(\xi) = f'(\xi) \Phi(\xi)^2 \sum_{i=1}^{i=n} S_i f_{ik}(\xi)^2,$$

wenn mit f_{ik} die Unterdeterminanten der Determinante $f(x)$ und mit $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ ganze rationale Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet werden. Man sieht also, dass eine Transformation, welche simultan eine beliebige quadratische

[1]) Band I S. 337 und 338 dieser Ausgabe. H.

Form in eine *Jacobi*'sche und ein Aggregat von Quadraten in ein anderes überführt, die Theilnenner einer Kettenbruchs-Entwickelung liefert, welche für die Anwendung des *Sturm*'schen Satzes mit derjenigen von $\frac{S_1 f_{11}(x)}{f(x)}$ oder, falls die Grössen S sämmtlich positiv sind, mit derjenigen von $\frac{f'(x)}{f(x)}$ völlig aequivalent ist.

V.

Bedeuten $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ zwei ganze Functionen gleichen Grades und bezeichnet man mit ξ die sämmtlichen reellen Wurzeln der Gleichung $\varphi(z)=0$ und mit η diejenigen der Gleichung $\psi(z)=0$, so kommt, wenn oben im I. Abschnitt S. 39 für $F(z)$ das Product $\varphi(z)\cdot\psi(z)$ genommen wird:

$$\sum_{(\xi)}[\varphi'(\xi)\psi(\xi)]+\sum_{(\eta)}[\varphi(\eta)\psi'(\eta)]=0\,.$$

Ist der Grad von $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ eine grade Zahl, und nimmt man diese Functionen selbst für $F(z)$, so wird:

$$\sum_{(\xi)}[\varphi'(\xi)]=0\,,\qquad \sum_{(\eta)}[\psi'(\eta)]=0\,.$$

Demnach müssen, wenn

$$\varDelta(z)=\varphi(z)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi(z)$$

gesetzt wird, die beiden Zeichensummen

$$\sum_{(\xi)}[\varDelta(\xi)]\,,\qquad \sum_{(\eta)}[\varDelta(\eta)]$$

mit einander übereinstimmen und eine *grade* Zahl ergeben. Bezeichnet man nun gemäss den allgemeineren Entwickelungen, welche ich im Monatsbericht vom März 1869 dargelegt habe[1]), die negative Hälfte dieser Zeichensummen und zwar auch für den Fall, dass der Grad von φ und ψ eine ungrade Zahl ist, als die *Charakteristik* des Functionensystems (φ, ψ) und setzt demzufolge

[1]) Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln, erste Abhandlung; Band I S. 175 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

$$\chi\big(\varphi(z),\ \psi(z)\big)=-\tfrac{1}{2}\sum_{(\xi)}[\varDelta(\xi)]=-\tfrac{1}{2}\sum_{(\eta)}[\varDelta(\eta)]\,,$$

so ist es die Charakteristik

$$\chi\big(f(z),\ (x-z)f_1(z)\big)\,,$$

welche durch den *Sturm*'schen Satz bestimmt wird.

Es ist zu bemerken, dass die Voraussetzung gleichen Grades für die Functionen φ und ψ keine Beschränkung der Allgemeinheit mit sich bringt, da, wenn der Grad von ψ der kleinere wäre, die Summe $\varphi+\psi$ an Stelle von ψ genommen werden könnte. Auch hätte unbeschadet der Allgemeinheit die Voraussetzung, dass der Grad von φ und ψ eine grade Zahl sei, beibehalten und für den Fall ungraden Grades je ein Factor $x-u$ und $x-v$ mit hinreichend grossen Werthen von u, v den Functionen φ, ψ hinzugefügt werden können. Doch schien es einfacher, den Ausdruck für die Charakteristik unmittelbar und ohne Weiteres auf den Fall, wo der Grad von φ und ψ ungrade ist, zu übertragen, obwohl dabei die Eigenschaft der Charakteristik, eine ganze Zahl zu sein, nicht immer erhalten bleibt.

Die eine der beiden Functionen, deren Charakteristik der *Sturm*'sche Satz bestimmt, enthält in ihren Coëfficienten eine Variable x, und die *Sturm*'sche Deduction selbst stützt sich wesentlich auf die Veränderlichkeit, welche der Charakteristik in Folge der Variabilität von x zukommt. Dies hat mich darauf geführt, überhaupt die Coëfficienten der Functionen φ und ψ als variabel zu betrachten und die Veränderungen zu untersuchen, welche die Charakteristik bei Variirung der Coëfficienten erfährt.

Da die Charakteristik des Systems (φ, ψ) sowohl durch die Vorzeichen der Grössen $\varDelta(\xi)$ als durch diejenigen der Grössen $\varDelta(\eta)$ ausdrückbar ist, so kann sie bei Variirung der Coëfficienten ihren Werth nur ändern, sobald einer der Werthe $\varDelta(\xi)$ und einer der Werthe $\varDelta(\eta)$ zugleich Null wird, oder die Continuität der mit den Functionen φ, ψ selbst variirenden Werthe ξ, η gleichzeitig aufhört. Da nun

$$\varDelta(\xi)=-\varphi'(\xi)\psi(\xi)\,,\qquad \varDelta(\eta)=\varphi(\eta)\psi'(\eta)$$

ist, so muss, wenn $\Delta(\xi)$ und $\Delta(\eta)$ gleichzeitig Null sein sollen, entweder die Resultante der beiden Gleichungen $\varphi(z)=0$, $\psi(z)=0$ oder jede der beiden Discriminanten derselben zugleich verschwinden, und die letztere Alternative enthält zugleich die Bedingung für das Aufhören der Continuität bei den Wurzeln ξ und η. Diese Alternative kann aber fallen gelassen werden; denn es resultirt daraus, wenn man sich von vorn herein an Stelle der Function ψ die Function $\psi - u\varphi$ gesetzt denkt, die Bedingung, dass für einen und denselben Werth von z die beiden Gleichungen

$$\psi(z) = u\varphi(z), \qquad \psi'(z) = u\varphi'(z)$$

erfüllt seien. Die Grösse u kann hierbei als ganz beliebig vorausgesetzt werden; die den beiden Gleichungen genügenden Werthe von z sind aber durch die Relation

$$\varphi(z)\psi'(z) - \varphi'(z)\psi(z) = 0$$

unabhängig von u bestimmt, und es muss daher für solche Werthe von z sowohl $\varphi(z)$ als $\psi(z)$ gleich Null, somit also gleichzeitig die *erste* Bedingung erfüllt sein.

Was nun den Sinn anlangt, in welchem die Aenderung der Charakteristik erfolgt, so ist klar, dass an den gewöhnlichen Stellen, an denen die Aenderung nur eine einzige Einheit beträgt, die Charakteristik ab- oder zunimmt, je nachdem $\Delta(z)$ beim Durchgang durch den Werth von z, für welchen beide Functionen φ und ψ verschwinden, aus dem Negativen ins Positive oder aus dem Positiven ins Negative geht. Es ergiebt sich demnach folgendes Resultat:

Die Charakteristik eines Systems von zwei ganzen Functionen einer Variabeln $\varphi(z)$, $\psi(z)$ kann bei Variirung der Coëfficienten nur dann eine Aenderung erfahren, wenn solche Werthe passirt werden, wofür die Resultante der beiden Functionen verschwindet. Haben dabei die beiden Functionen nur einen linearen Factor gemein, so beträgt die Aenderung nur eine Einheit und erfolgt in demselben Sinne wie die Aenderung des Ausdrucks

$$\varphi'(z)\psi(z) - \varphi(z)\psi'(z)$$

an demjenigen Werthe von z, wofür jener gemeinsame lineare Factor gleich Null ist.

Ist das System $\big(\varphi(z),\ \psi(z)\big)$ nur in der unmittelbaren Nähe eines solchen, wofür die Resultante verschwindet, und ist ξ_1 diejenige Wurzel von $\varphi(z)=0$, welche einer Wurzel der Gleichung $\psi(z)=0$ nahezu gleich ist, so ist in der auf alle Wurzeln ξ erstreckten Summe

$$\sum_{(\xi)} \frac{R}{\varphi'(\xi)\psi(\xi)}$$

das Glied, welches ξ_1 enthält, über alle andern weit überwiegend. Daher wird, wenn man diese Summe mit R_1 bezeichnet,

$$[\varphi'(\xi_1)\psi(\xi_1)] = [RR_1].$$

Sind nun $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ vom n^{ten} Grade und die Coëfficienten von z^n in beiden Functionen gleich *Eins* und sind ferner $\varphi_1(z)$ und $\psi_1(z)$ die beiden Multiplicatoren $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, für welche

$$\varphi_1(z)\psi(z) - \psi_1(z)\varphi(z) = R$$

wird, so ist R_1 der Coëfficient von z^{n-1} in $\varphi_1(z)$ und $\psi_1(z)$, und das Vorzeichen

$$[\varphi'(\xi_1)\psi(\xi_1)] \qquad \text{oder} \qquad -[\Delta(\xi_1)]$$

gewinnt also die fernere Bedeutung als das Vorzeichen des Coëfficienten der höchsten Potenz von z in zwei Multiplicatoren $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, wofür

$$\psi(z)\Phi(z) - \varphi(z)\Psi(z) = 1$$

wird. Der Coëfficient passirt den Werth Null, wenn die Charakteristik sich ändert, und zwar wie diese zu- oder abnehmend. Setzt man

$$\sum_{(\xi)} \frac{\psi(\xi)}{\varphi'(\xi)}\xi^h = s_h,$$

wo die Summation auf *sämmtliche* Wurzeln ξ der Gleichung $\varphi(z) = 0$ zu erstrecken ist, so bestimmt sich $\Phi(z)$ dadurch, dass

$$\sum_{(\xi)} \frac{\psi(\xi)}{\varphi'(\xi)} \xi^h \Phi(\xi) = 0 \quad \text{oder} \quad 1$$

sein soll, je nachdem $h = 0, 1, \ldots n-2$ oder $h = n-1$ ist, als Determinanten-Quotient

$$\frac{|z s_{g+h} - s_{g+h+1}|}{|s_{i+k}|} \qquad \begin{pmatrix} g, h = 0, 1, \ldots n-2 \\ i, k = 0, 1, \ldots\ldots n-1 \end{pmatrix}.$$

Man kann daher

$$R = |s_{i+k}|, \qquad R_1 = |s_{g+h}| \qquad \begin{pmatrix} g, h = 0, 1, \ldots n-2 \\ i, k = 0, 1, \ldots\ldots n-1 \end{pmatrix}$$

nehmen, so dass $R = 0$ die Resultante der Gleichungen

$$\varphi(z) = 0, \qquad \psi(z) = 0$$

wird (vgl. die oben im III. Abschnitt mit (J) bezeichnete Formel).

Mit Hülfe der beiden Ausdrücke R und R_1, welche offenbar ganze ganzzahlige Functionen der Coëfficienten von $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ sind und als solche mit

$$R(\varphi, \psi), \qquad R_1(\varphi, \psi)$$

bezeichnet werden mögen, lässt sich die Aenderung, welche die Charakteristik beim Fortgang von einem Functionen-System zu einem andern erfährt, vollständig bestimmen; denn es ergiebt sich aus den obigen Entwickelungen der folgende Satz:

Die Charakteristik $\chi(\varphi, \psi)$ d. h. die halbe algebraische Summe der Vorzeichen aller derjenigen Werthe von

$$\varphi'(z)\psi(z) - \psi'(z)\varphi(z),$$

welche man erhält, wenn man darin für z entweder die reellen Wurzeln von $\varphi(z) = 0$ oder diejenigen von $\psi(z) = 0$ setzt, wächst bei irgend einem Uebergange von einem System (φ, ψ) zu einem andern um den Betrag von

$$\sum [R_1(\varphi, \psi) \cdot \delta R(\varphi, \psi)].$$

Die Summation erstreckt sich hier auf alle beim Uebergang passirten Systeme (φ, ψ), wofür $R(\varphi, \psi)$ gleich Null ist und je nachdem dabei R wächst oder abnimmt, ist $\delta R(\varphi, \psi)$ positiv oder negativ zu nehmen.

Dieser Satz, welcher die Veränderung der Charakteristik in ihrer Abhängigkeit von der Variation der Constanten der beiden Functionen genau bestimmt, kann zur Ermittelung des Werthes der Charakteristik benutzt werden, wenn man ein Functionensystem mit bekannter Charakteristik als Ausgangspunkt wählt. Der Satz führt aber auch zu einer Verallgemeinerung des *Sturm*'schen Satzes, sobald man für die Coëfficienten ganze Functionen einer einzigen Variabeln x nimmt; denn alsdann tritt beim Fortgang von $x = x_1$ bis $x = x_2$, wenn mit R' die nach x genommene Ableitung von R bezeichnet wird, der Betrag der Summe

$$\sum [R_1(\varphi, \psi) \cdot R'(\varphi, \psi)]$$

zum Werthe der Charakteristik hinzu, und da diese Summe sich auf alle Wurzeln x der Gleichung $R = 0$ bezieht, so lässt sich der Werth derselben unmittelbar durch den *Sturm*'schen Satz bestimmen. Der specielle Fall des *Sturm*'schen Satzes selbst tritt ein, wenn man, wie schon im Anfang dieses Abschnittes hervorgehoben wurde,

$$\varphi(z) = f(z), \qquad \psi(z) = (x - z) f_1(z)$$

setzt, so dass nur die Coëfficienten der einen Function und zwar in linearer Weise von x abhängig werden.

Nimmt man für die Coëfficienten von $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ bestimmte, eindeutige, reelle Functionen von ν reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, so entspricht jedem Punkte der ν-fachen Mannigfaltigkeit (x) ein bestimmtes Functionensystem (φ, ψ), und jene Mannigfaltigkeit (x) sondert sich nach den verschiedenen Werthen der Charakteristik $\chi(\varphi, \psi)$ in verschiedene Gebiete, welche durch die $(\nu-1)$fache Mannigfaltigkeit $R=0$ von einander abgetrennt werden. Beim Durchgang durch $R=0$ nimmt den obigen Entwickelungen gemäss die Charakteristik um eine Einheit zu oder ab, je nachdem an diesen Punkten, die aber nicht mehrfache Punkte von $R=0$ sein dürfen, der Werth des Productes $R\cdot R_1$ zu- oder abnimmt, und da diese Punkte als Aus- oder Eintrittsstellen von einander unterschieden werden können, wenn man die Gebiete, wo $R\cdot R_1<0$ ist, als innere Theile und die, wo $R\cdot R_1>0$ ist, als äussere Theile bezeichnet, so lässt sich der obige Satz in folgender Weise formuliren:

> *Passirt man auf dem Wege aus einem Gebiete mit der Charakteristik* $\chi^{(1)}$ *in ein solches mit der Charakteristik* $\chi^{(2)}$ *im Ganzen* $\mathfrak{A}$ *Austritts- und* $\mathfrak{E}$ *Eintrittsstellen, so ist* $\chi^{(2)}-\chi^{(1)}=\mathfrak{A}-\mathfrak{E}$.

Zur Ermittelung des Werthes der Charakteristik für jedes gegebene Functionensystem (φ,ψ) bedarf es hiernach nur der Untersuchung des $(\nu-1)$fach ausgedehnten Gebildes $R=0$ und der Bestimmung des Vorzeichens, welches der Werth von R_1 in den Punkten dieses Gebildes hat. Abgesehen von den speciellen Fällen, wo die Charakteristik im Ganzen nicht mehr als zwei Werthe annimmt, muss das Gebilde $R=0$ sich in eine Anzahl von Zweiggebilden sondern; denn es müssen dann verschiedene Arten von Gebietstheilen vorhanden sein, in denen R dasselbe Vorzeichen hat. Diese Gebietstheile können nur in singulären Gebilden von weniger als $(\nu-1)$ Dimensionen mit einander zusammenhängen, und die zur Bestimmung der Charakteristik erforderliche Scheidung derselben kann also nur durch $(\nu-1)$fache Mannigfaltigkeiten erfolgen, welche jene singulären Gebilde enthalten. Eine solche Scheidung wird durch die $(\nu-1)$fache Mannigfaltigkeit $R_1=0$ bewirkt, die aber hierbei auch durch jede andre $(\nu-1)$fache Mannigfaltigkeit ersetzt werden kann, welche eine und dieselbe $(\nu-2)$fache Mannigfaltigkeit mit $R=0$ gemein hat. Auch die durch die andern *Sturm*'schen Functionen gegebenen $(\nu-1)$fachen Mannigfaltigkeiten

$$|s_{g+h}|=0 \qquad (g,h=0,1,\dots n-k-1)$$

für $k=2,3,\dots n-1$ können mit zur Scheidung der Zweiggebilde von $R=0$ benutzt werden; aber die Betrachtung, dass eben diese Scheidung der alleinige

Zweck bei Aufstellung einer Reihe von *Sturm*'schen Functionen ist, gewährt erst die volle Erkenntniss des einzig Bleibenden in den mannigfach verschiedenen Formen, welche die *Sturm*'schen Reihen darbieten.

Sind

$$S_1,\ S_2,\ \dots S_n$$

in dem im Monatsbericht von 1873 S. 121[1]) angegebenen Sinne die Glieder irgend einer *Sturm*'schen Reihe für das Functionensystem (φ,ψ), so ist dessen Charakteristik gleich der halben algebraischen Summe der Vorzeichen der n Grössen S, also

$$\chi(\varphi,\psi)=\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}[S_k].$$

Die Grössen S sind Functionen der ν Grössen x, von denen die Coëfficienten von φ und ψ abhängen, und wenn man die Werthe derselben für zwei verschiedene Punkte (x) durch obere Indices unterscheidet, so ist dem obigen Satze gemäss

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}[S_k^{(2)}]-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}[S_k^{(1)}]=\mathfrak{A}-\mathfrak{E}=\sum[R_1(\varphi,\psi)\cdot\delta R(\varphi,\psi)].$$

Die algebraische Summe der Zeichen einer *Sturm*'schen Reihe ändert sich daher nur, wenn $R=0$ wird, und zwar alsdann im Sinne von

$$[R_1(\varphi,\psi)\cdot\delta R(\varphi,\psi)].$$

Diese Eigenschaft der *Sturm*'schen Reihen spricht sich, ähnlich wie in dem speciellen Falle des *Sturm*'schen Satzes, wo nur *eine* Variable x in den Coëfficienten von φ und ψ vorkommt, in Relationen aus, welche zwischen je drei benachbarten *Sturm*'schen Functionen bestehen und hier für die durch die Gleichung

$$R_k=|s_{g+h}| \qquad (g,h=0,1,\dots n-k-1)$$

[1]) Band I S. 310 dieser Ausgabe. H.

definirten Functionen R_k dargelegt werden sollen. Nimmt man nämlich oben im II. Abschnitt $f(z) = \varphi(z)$ und bestimmt $f_1(z)$ dadurch, dass die Gleichung

$$\psi(\xi) f_1(\xi) = \xi^2$$

für sämmtliche Wurzeln ξ bestehen soll, so ergeben sich aus den Relationen

$$f_{k-1} - g_k f_k + f_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

für $z = 0$ die folgenden

$$P_k^2 R_{k-1} - Q_k R_k + P_{k-1}^2 R_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

wo P_k die Determinante $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$| s_{g+h} | \qquad (g, h = -1, 0, 1 \ldots n-k-2)$$

bedeutet. Diese Relationen zeigen, dass für die *Sturm*'sche Reihe, deren Glieder durch Multiplication von je zwei aufeinanderfolgenden *Sturm*'schen Functionen R_k entstehen, der Werth von

$$\sum_k [R_{k-1} R_k] \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

beim Durchgang durch $R_k = 0$ ungeändert bleibt, da sowohl unmittelbar vorher als nachher

$$[R_{k-1} R_k] + [R_k R_{k+1}] = 0$$

ist.

Wendet man die obigen Auseinandersetzungen auf das im Monatsbericht von 1873 S. 147[1]) erwähnte System der zwei Functionen

$$\varphi(z) = | z\delta_{ik} - A_{ik} |, \underset{(i, k = 1, 2, \ldots n)}{} \qquad \psi(z) = \varphi(z) + S_r | z\delta_{gh} - A_{gh} | \underset{(g, h = 1, 2, \ldots r-1, r+1, \ldots n)}{}$$

[1]) Band I S. 339 dieser Ausgabe. H.

an, so ergeben sie die Bestimmung der Charakteristik durch die Glieder der *Sturm*'schen Reihe S_k und ersetzen demnach die *Hermite-Jacobi*'sche Deduction. Die Resultante $R(\varphi, \psi)$ unterscheidet sich nämlich von dem Product der n Grössen S nur durch einen quadratischen Factor und ändert demgemäss nur gleichzeitig mit diesem Product ihr Vorzeichen. Werden die Grössen S speciell gleich *Eins* und in Folge dessen die Grössen A_{ik} als Elemente eines *symmetrischen* Systems angenommen, so folgt unmittelbar, dass die Wurzeln der Gleichung $\varphi(z) = 0$ stets reell sind, da dies offenbar der Fall ist, wenn man sämmtliche Elemente A_{ik} mit alleiniger Ausnahme der Diagonalgrössen A_{kk} gleich Null setzt.

Nimmt man

$$\psi(z) = \varphi(z) + \varphi'(z),$$

so wird die Charakteristik gleich der halben Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $\varphi(z) = 0$ und $\pm R$ die Discriminante derselben. Den vorstehenden Auseinandersetzungen gemäss ändert sich also bei Variirung der Coëfficienten der Gleichung die halbe Anzahl der reellen Wurzeln da, wo die Discriminante ihr Zeichen ändert, in der Weise, dass die positive oder negative Einheit

$$-[\varphi''(z)\, \delta\varphi(z)]$$

hinzutritt. Dabei bedeutet $\varphi''(z)$ die zweite Ableitung von $\varphi(z)$, und für z ist die gemeinschaftliche Wurzel von $\varphi(z) = 0$ und $\varphi'(z) = 0$ zu setzen. Denkt man sich die Coëfficienten von $\varphi(z)$ von ν Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ abhängig, so liegen die Gleichungen $\varphi(z) = 0$ gewissermassen in verschiedenen durch die Anzahl der reellen Wurzeln charakterisirten Gebieten der Mannigfaltigkeit (x). Beim Fortgang von einem Gebiete in irgend ein anderes vermehrt sich diese Anzahl um den Betrag der auf alle passirten Nullwerthe von R erstreckten Summe

$$2 \sum [R_1 \cdot \delta R],$$

wo

$$R = | s_{i+k} |, \qquad R_1 = | s_{g+h} | \qquad \binom{g, h = 0, 1, \ldots n-2}{i, k = 0, 1, \ldots n-1}$$

ist und s_k die Summe der k^{ten} Potenzen der Wurzeln von $\varphi = 0$ bedeutet.

Um die vorstehenden Entwickelungen an einem einfachen Beispiele in ein klares Licht zu setzen, setze ich

$$\varphi(z) = 3x_1 + 4x_2 z - 6x_3 z^2 + z^4$$
$$D = (x_1 + x_3^2)^3 - (3x_1x_3 + x_2^2 - x_3^3)^2 = x_1(x_1 - 3x_3^2)^2 - 2x_2^2 x_3(3x_1 - x_3^2) - x_2^4,$$
$$D_1 = -x_1x_3 - x_2^2 + 3x_3^3.$$

Dann sind R und R_1 abgesehen von Zahlenfactoren gleich D und D_1, und die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $\varphi(z) = 0$, welche eine allgemeine Gleichung vierten Grades repräsentirt, beträgt nach dem *Sturm*'schen Satze:

$$[DD_1] + [x_3D_1] + [x_3] + 1.$$

Betrachtet man nun x_1, x_2, x_3 als (rechtwinklige) Coordinaten, so gehört jedem Punkt im Raume eine bestimmte Gleichung vierten Grades $\varphi = 0$ an, und die abwickelbare Fläche $D = 0$, welche die *Discriminantenfläche* heissen möge, theilt den Raum in drei verschiedene Gebiete, die, je nachdem die Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln gleich 0, 1, 2 ist, mit G_0, G_1, G_2 bezeichnet werden sollen. Die beiden Gebiete G_0 und G_2 können dabei als „innere" von der Discriminantenfläche umschlossene Raumtheile betrachtet werden und G_1 umfasst dann den gesammten „äusseren" durch die Ungleichheit $D < 0$ vollständig charakterisirten Raum.

Die beiden singulären Curven der Discriminantenfläche, nämlich die Wendecurve

$$x_1 + x_3^2 = 0, \qquad x_2^2 - 4x_3^3 = 0$$

und die Doppelcurve

$$x_1 - 3x_3^2 = 0, \qquad x_2 = 0$$

bilden den vollständigen Durchschnitt der Flächen $D = 0$ und $D_1 = 0$. Die Wendecurve ist der Ort der Gleichungen mit drei gleichen Wurzeln; die Parabel, welche die Doppelcurve bildet, ist der Ort der Gleichungen mit zwei

Paaren gleicher Wurzeln, und zwar sind diese Paare in dem oberen Theile der Parabel, wo $x_3 > 0$ ist, reell, in dem unteren Theile imaginär. In diesem letzteren Theile verläuft die Parabel innerhalb des Gebietes G_2 als isolirte Curve, während sie in ihrer oberen Hälfte auf der Discriminantenfläche liegt und die Grenze zwischen den beiden Gebieten G_0 und G_2 bildet. Das Gebiet G_0 liegt ganz in der oberen Hälfte des Raumes, wo $x_3 > 0$ ist, hat in der Ebene $x_3 = 0$ selbst nur eine Spitze und dehnt sich nach oben zu immer weiter aus. Die Spitze, der Anfangspunkt der Coordinaten und der Schnittpunkt der beiden singulären Curven, ist der Ort der einzigen Gleichung mit vier gleichen Wurzeln. Das Gebiet G_2 liegt ganz in derjenigen Hälfte des Raumes, wo $x_1 > 0$ ist, und reicht bis in die Ebene $x_1 = 0$ nur in dem unteren Theile ($x_3 < 0$) und zwar längs der Linie $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ heran. Eine nähere Vorstellung von der Gestalt der Discriminantenfläche und der dadurch gegebenen Configuration der Gebiete G bildet man sich leicht mit Hülfe von ebenen Schnitten, in denen x_3 constant ist. Aber schon die hier darüber gemachten Angaben zeigen, dass eine Fläche, welche die beiden inneren Gebiete G_0 und G_2 von einander scheiden soll, durch die Grenzlinie derselben nämlich durch den oberen Theil der Parabel d. h. durch die Linie

$$x_1 - 3x_3^2 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 > 0$$

gehen muss, in die beiden inneren Gebiete selbst aber nirgends eintreten darf. Es kann dies also, da eine algebraische Fläche natürlich die *ganze* Parabel enthalten muss, nur ein *Theil* einer solchen Fläche sein, wie z. B. der durch die Bedingungen

$$x_1 = 3x_3^2, \qquad x_3 > 0$$

bestimmte Theil einer Cylinderfläche, und es erhellt auf diese Weise die Nothwendigkeit, zugleich aber auch die eigentliche Bedeutung der hier auftretenden Ungleichheitsbedingung $x_3 > 0$, welche auch durch den *Sturm*'schen Satz eingeführt wird. Benutzt man jene Cylinderfläche zur Scheidung der beiden inneren Gebiete, so erhält man für die drei Gebiete G die Bestimmungen:

$$(G_0) \qquad D > 0, \quad x_3 > 0, \quad 3x_3^2 > x_1$$

$$(G_1) \qquad D < 0$$

$$(G_2) \qquad D > 0, \quad x_3 > 0, \quad 3x_3^2 < x_1 \quad \text{und} \quad D > 0, \quad x_3 < 0,$$

welche natürlich auch aus dem *Sturm*'schen Satze abgeleitet werden können.

ÜBER DIE CHARAKTERISTIK VON FUNCTIONEN-SYSTEMEN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1878. S. 145—152.

ÜBER DIE CHARAKTERISTIK VON FUNCTIONEN-SYSTEMEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 21. Februar 1878.]

Im Verfolg der Untersuchungen, welche ich in meinem vor acht Tagen gehaltenen Vortrage erwähnt habe, bin ich zur Auffindung einer neuen Fundamental-Eigenschaft jener Charakteristik der Systeme von Functionen mehrer Variabeln gelangt, welche ich in meiner Mittheilung vom 4. März 1869[1]) eingeführt und dort durch ein vielfaches Integral ausgedrückt habe. Die neue Eigenschaft, welche ich hier auseinandersetzen will, wird durch Variirung der Functionen-Systeme erlangt und kann füglich zur numerischen Bestimmung der Charakteristik benutzt werden.

Es seien wie in meinen Aufsätzen in den Monatsberichten vom März und August 1869[2]) durch

$$z_1, z_2, \ldots z_n$$

reelle Veränderliche und durch

$$F_{00}, F_{10}, \ldots F_{n0}$$

eindeutige reelle Functionen derselben bezeichnet, welche auch im Uebrigen den dort angegebenen Bedingungen genügen. Es bedeute ferner F_{gh} die nach z_h genommene Ableitung von F_{g0}, und $[a]$ bedeute die positive oder negative Einheit oder Null, je nachdem die reelle Grösse a positiv oder

---

[1]) Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Erste Abhandlung. Band I S. 175—212 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

[2]) Band I S. 175—212 und S. 213—226 dieser Ausgabe. H.

negativ oder gleich Null ist. Alsdann ergiebt sich mittels des a. a. O. entwickelten Fortgangsprincips die Gleichung

$$\text{I} \qquad \Sigma[\,|F_{ik}|\,] = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

die Summation auf alle Werthe der Variabeln z bezogen, wofür alle n Functionen $F_{10}, F_{20}, \ldots F_{n0}$ verschwinden. Setzt man an Stelle von F_{m0} das Product $F_{00} \cdot F_{m0}$, so folgt aus der Gleichung I, dass

$$\text{II} \qquad -\tfrac{1}{2}\Sigma[\,|F_{gh}|\,] \qquad (g, h = 0, 1, 2, \ldots n)$$

einen und denselben Werth hat, gleichviel welches von den $n+1$ den Werthen $m = 0, 1, \ldots n$ entsprechenden Bedingungs-Systemen

$$\text{III} \qquad F_{g0} = 0 \qquad (g = 0, 1, 2, \ldots n \text{ ausgenommen } g = m)$$

für die Summation festgesetzt wird. Der Werth von II ist eine positive oder negative ganze Zahl, da die Anzahl der Glieder der Summe im Falle $m = 0$ mit der offenbar *graden* Anzahl der Glieder in der Summe I übereinstimmt, und in den erwähnten früheren Aufsätzen habe ich *diese Zahl als die Charakteristik des Systems der* $n+1$ *Functionen* $F_{00}, F_{10}, \ldots F_{n0}$ bezeichnet. Es ist hiernach die Charakteristik auch durch die Summe:

$$\Sigma[\,|F_{ik}|\,] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

gegeben, wenn für die Summation die Bedingungen

$$F_{00} < 0, \quad F_{10} = 0, \quad F_{20} = 0, \quad \ldots F_{n0} = 0$$

festgesetzt werden. Dieser Ausdruck der Charakteristik zeigt, dass durch dieselbe überhaupt jede Anzahl von Werthsystemen bestimmt wird, welche gleichzeitig durch Gleichungen und durch Ungleichheiten definirt werden, und darin liegt es, dass jenes im Monatsbericht vom März 1869 für die Charakteristik aufgestellte Integral, welches dort zuerst als Windungszahl auftritt, noch bei so vielen andern Fragen erscheint, wie z. B. bei der gesammten Krümmung der Flächen, der Gesammtdichtigkeit der Strahlensysteme, bei der gegenseitigen Umschlingung von Curven und bei deren Verknotung; denn bei

allen diesen Fragen handelt es sich nur um die Ermittelung einer Anzahl von Werthsystemen von Variabeln, welche durch Gleichungen bestimmt und dabei noch gewissen Ungleichheitsbedingungen unterworfen sind.

Denkt man sich die $n+1$ Functionen F irgendwie variirt, jedoch so, dass dabei die Art ihres Verhaltens im Unendlichen gewahrt bleibt, so erkennt man sowohl an dem Integralausdruck

$$-\frac{1}{\varpi}\int |F_{gh}| \cdot \frac{dw}{S^n \mathfrak{S}} \qquad (g, h = 0, 1, \ldots n),$$

welchen ich im Monatsbericht vom März 1869 für die Charakteristik gegeben habe, als auch an dem oben mit II bezeichneten Ausdrucke, *dass die Charakteristik nur dann eine Veränderung erfahren kann, wenn bei der Variation ein System von Functionen passirt wird, welche sämmtlich für eines und dasselbe Werthsystem* $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ *verschwinden.* Um dies näher darzulegen, bemerke ich zuvörderst, dass für jedes den Bedingungen III genügende Werthsystem (z) die Determinante $|F_{gh}|$ gleich dem Producte von F_{m0} und der Functionaldeterminante der übrigen n Functionen F_{g0} wird. Dass die Determinante $|F_{gh}|$ für eines dieser Werthsysteme (z) verschwinde, ist daher sowohl für die Unterbrechung der Continuität eines solchen bei jener Variation der Functionen F und folglich für eine Aenderung der Anzahl der Glieder im Ausdruck II als auch für die Aenderung des Vorzeichens eines dieser Glieder also überhaupt für eine Aenderung der Charakteristik erforderlich. Setzt man aber, wie es unbeschadet des Werthes der Charakteristik geschehen kann, für $i = 1, 2, \ldots n$

$$F_{i0} - v_i F_{00} \quad \text{an Stelle von} \quad F_{i0},$$

wo unter $v_1, v_2, \ldots v_n$ variable Grössen zu verstehen sind, und nimmt alsdann in den Bedingungen III die Zahl $m = 0$, so verwandeln sich diese in die folgenden:

$$\text{III}' \qquad F_{i0} = v_i F_{00} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

vermöge deren

$$\text{IV} \qquad F_{00} \cdot |F_{ik} - v_i F_{0k}| = |F_{gh}| \qquad \begin{pmatrix} g = 0, i_1, i_2, \ldots i_\mu; & i = i_1, i_2, \ldots i_\mu \\ h = 0, k_1, k_2, \ldots k_\mu; & k = k_1, k_2, \ldots k_\mu \end{pmatrix}$$

wird, wenn $i_1, i_2, \ldots i_\mu$ und $k_1, k_2, \ldots k_\mu$ je μ von den Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeuten. Da nun durch Differentiation von III′ die n Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{k=n}(F_{ik} - v_i F_{0k})dz_k = F_{00}dv_i \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

entstehen und die Variabeln v von einander unabhängig sind, so folgt aus je m dieser Gleichungen für den Fall des Verschwindens sämmtlicher Determinanten IV bei $\mu = m$, dass entweder $F_{00} = 0$ wird, oder dass auch sämmtliche Determinanten IV bei $\mu = m - 1$ verschwinden, und man gelangt auf diese Weise von der obigen für die Veränderung der Charakteristik erforderlichen Bedingung $|F_{gh}| = 0$ bei $\mu = n$ zu der Bedingung $F_{00} = 0$ d. h. mit Berücksichtigung des gleichzeitigen Bestehens der Gleichungen III′ zu den $n + 1$ Bedingungen

V $$F_{g0} = 0 \qquad (g=0,1,\ldots n).$$

Wird bei der Variation der Functionen F_{g0} ein System passirt, für welches diese Bedingungen erfüllbar sind, so wird für das bezügliche Werthsystem $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ natürlich auch die Determinante

$$|F_{gh}| \qquad (g,h=0,1,\ldots n)$$

gleich Null und, *je nachdem sie dabei aus dem Positiven in das Negative übergeht oder umgekehrt, nimmt die Charakteristik um eine Einheit zu oder ab,* wenn nicht etwa die passirte Stelle singulär ist. Für diejenigen Werthe der Variabeln z, für welche $F_{10} = 0,\ F_{20} = 0,\ \ldots\ F_{n0} = 0$ ist, reducirt sich die Determinante $|F_{gh}|$ auf

$$F_{00} \cdot |F_{ik}| \qquad (i,k=1,2,\ldots n),$$

und es ist daher dieses Product, dessen Aenderung beim Durchgang durch Null für die Aenderung des Werthes der Charakteristik massgebend ist.

Betrachtet man die Functionen $F(z_1, z_2, \ldots z_n)$ als von ν reellen Parametern $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ abhängig, so entspricht jedem Punkte der νfachen Mannigfaltigkeit (x) ein bestimmtes Functionen-System $(F_{00}, F_{10}, \ldots F_{n0})$ und also auch eine bestimmte Charakteristik desselben. Erfüllen nun die Punkte (x),

denen jene besondern Systeme entsprechen, für welche die Bedingungen V erfüllbar sind, eine $(\nu - 1)$fache Mannigfaltigkeit

$$R(x_1, x_2, \ldots x_\nu) = 0,$$

so werden dadurch die Gebiete der νfachen Mannigfaltigkeit (x), in denen die Charakteristik verschiedene Werthe hat, von einander abgesondert, und der obigen Deduction zufolge *tritt beim Durchgang durch $R(x_1, x_2, \ldots x_\nu) = 0$ zur Charakteristik der Werth von*

$$-[|F_{ik}|\,\delta F_{00}] \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

hinzu, wenn mit δ die Veränderung am Punkte $(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$ bezeichnet und in F_{00}, F_{ik} das den $n+1$ Gleichungen V genügende Werthsystem $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ eingesetzt wird. Hiernach lässt sich die Veränderung der Charakteristik beim Uebergang von einem Functionen-System zum andern und also, wenn nur die Charakteristik eines einzigen Functionen-Systems bekannt ist, die Charakteristik aller den verschiedenen Punkten entsprechenden Functionen-Systeme bestimmen. Diese Bestimmung findet sich dabei, indem der Uebergang von einer einzigen Variabeln x abhängig gemacht wird, auf die Ermittelung der Charakteristik eines Systems von zwei Functionen einer Variabeln zurückgeführt, welche im Falle algebraischer Functionen mittels des *Sturm*'schen Verfahrens erfolgen kann.

Trifft die oben gemachte Voraussetzung, dass die Punkte von

$$R(x_1, x_2, \ldots x_\nu) = 0$$

eine $(\nu - 1)$fache Mannigfaltigkeit bilden, nicht zu, und liegen diese Punkte sämmtlich auf einer höchstens $(\nu - 2)$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, so hat die Charakteristik für alle Systeme von Functionen einen und denselben Werth, und dieser ist daher durch die Untersuchung eines einzigen der Systeme zu finden.

Sind die Functionen F ganze rationale Functionen der Variabeln z, so ist $R = 0$ die Resultante der $(n+1)$ Gleichungen $F = 0$, und das Vorzeichen von

$$-F_{00}\,|F_{ik}| \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

in der Nähe des Durchgangs durch $R=0$ wird gleich demjenigen des Ausdrucks

$$\sum \frac{-1}{F_{00}\,|F_{ik}|} \qquad (i, k=1, 2, \ldots n),$$

wenn die Summation auf alle reellen und complexen den Gleichungen

$$F_{k0}=0 \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

genügenden Werthsysteme (z) erstreckt wird. Bedeutet nun G_0 eine ganze Function der Variabeln z, welche für alle diese Werthsysteme mit $\frac{-R}{F_{00}}$ übereinstimmt, und setzt man

$$R_1=\sum \frac{G_0}{|F_{ik}|} \qquad (i, k=1, 2, \ldots n),$$

wo sich die Summation wieder auf alle jene Werthsysteme (z) bezieht, so gehört G_0 zu jenen Multiplicatoren, für welche

$$\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^{h+1}G_h F_{h0}=R$$

wird*), und die Zunahme oder Abnahme der Charakteristik erfolgt an den Stellen, wo $R=0$ wird, wie diejenige des Products RR_1. Man erhält hiernach die Gesammtänderung der Charakteristik auf dem Wege von einem Functionen-System F zu einem andern durch die Zeichensumme

$$\sum [R_1 \delta R]$$

ausgedrückt, wenn man die Summation auf alle passirten Stellen (x) bezieht, wofür $R=0$ wird. Zur Ermittelung des Werthes dieser Zeichensumme kann man sich des *Sturm*'schen Verfahrens selbst bedienen, bei welchem man als-

*) Vergl. meinen im Monatsbericht v. Dec. 1865 abgedruckten Aufsatz[1]).

[1]) Band I S. 133—142 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

dann von den beiden Ausdrücken R und R_1 auszugehen hat. Ueberhaupt ist es das System dieser beiden Functionen der Coëfficienten von $F_{00}, F_{10}, \ldots F_{n0}$, durch welches das Wesen der Charakteristik solcher algebraischer Functionen-Systeme vollständig klargelegt wird, und es ist auch damit eine Ausdehnung des *Sturm*'schen Satzes sowohl in Bezug auf die Anzahl der Gleichungen als in Bezug auf die Anzahl der Variabeln in den Coëfficienten fast unmittelbar gegeben. Ich behalte mir vor, dies näher darzulegen, so wie auch die obigen allgemeinen Entwickelungen speciell auszuführen; hier aber möge schliesslich noch daran erinnert werden, dass bei besonderer Wahl der Function F_{00} die Charakteristik geradezu die Anzahl der den n Gleichungen

$$F_{10}=0, \quad F_{20}=0, \quad \ldots F_{n0}=0$$

genügenden reellen Werthsysteme (z) bedeutet, und dass die vorstehenden Betrachtungen demgemäss zur Ermittelung dieser Anzahl führen.

Um dies für einen der einfachsten Fälle auseinanderzusetzen, sei wie im IX. Abschnitt meines mehrerwähnten Aufsatzes vom 4. März 1869[1]) die Zahl n *grade* und zwar gleich $2m$; ferner seien $f_1, f_2, \ldots f_m$ ganze rationale Functionen der m complexen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_m$ und $f_1', f_2', \ldots f_m'$ resp. zu $f_1, f_2, \ldots f_m$ conjugirt; endlich sei für $k=1, 2, \ldots m$:

$$y_k=z_k+iz_{m+k}, \qquad 2F_{k0}=f_k+f_k', \qquad 2iF_{m+k,0}=f_k-f_k'.$$

Die Functionen f seien so beschaffen, dass die m Aggregate der Glieder höchster Dimension für von Null verschiedene Werthe der Variabeln y nicht gleichzeitig verschwinden, und die Variirung der Functionen f möge nur so erfolgen, dass die Glieder der höchsten Dimension dabei ganz ungeändert, die Coëfficienten der übrigen Glieder aber ihrem absoluten Betrage nach stets unterhalb einer Grenze γ bleiben. Dies vorausgesetzt, lässt sich immer eine Function $F_{00}(z_1, z_2, \ldots z_n)$ z. B. in der Form

$$F_{00}=\sum_k z_k^2-r^2 \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

[1]) Band I S. 196 dieser Ausgabe. H.

so bestimmen, dass in dem (äusseren) Bereiche $F_{00} > 0$ weder die m Functionen f desjenigen Systems, von welchem ausgegangen wird, noch auch die m Functionen irgend eines der variirten Systeme gleichzeitig Null werden. Bezeichnet man nämlich mit λ die Dimension einer der Functionen f und mit r_h den absoluten Betrag von y_h, so ist für jedes Glied von niedrigerer als der λ^{ten} Dimension der absolute Betrag kleiner als $\gamma r_1^{\lambda-1}$, wenn die übrigen Grössen $r_2, r_3, \ldots r_m$ kleiner oder wenigstens nicht grösser als r_1 sind. Jedes dieser Glieder hat sonach die Form

$$\varrho \gamma r_1^{\lambda-1} e^{v i} \qquad (0 < \varrho < 1),$$

und wenn deren Anzahl mit μ bezeichnet wird, so kann jede der Functionen f_k selbst durch einen Ausdruck

$$(\varphi_k + \psi_k i) y_1^{\lambda_k} + \frac{\gamma}{r_1} \mu_k (\varrho_k + \sigma_k i) y_1^{\lambda_k} \qquad (0 \leq \varrho_k^2 + \sigma_k^2 < 1)$$

dargestellt werden, in welchem der erstere Theil das Aggregat der Glieder der höchsten Dimension umfasst. Für hinreichend grosse Werthe von r_1 d. h. also, da

$$r_1^2 = z_1^2 + z_{m+1}^2 \geq z_k^2 + z_{m+k}^2 \qquad (k=2, 3, \ldots m)$$

ist, im Bereiche $F_{00} > 0$, falls in

$$F_{00} = \sum_k z_k^2 - r^2 \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

der Werth von r genügend gross angenommen wird, können die $2m$ Gleichungen

$$\varphi_k + \frac{\gamma}{r_1} \mu_k \varrho_k = 0, \qquad \psi_k + \frac{\gamma}{r_1} \mu_k \sigma_k = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots m)$$

nicht sämmtlich erfüllt sein. Denn der Voraussetzung nach können die m Functionen $\varphi_k + \psi_k i$ nicht gleichzeitig verschwinden, und es muss daher die auf $k = 1, 2, \ldots m$ erstreckte Summe

$$\sum (\varphi_k^2 + \psi_k^2)$$

stets über einer gewissen Grösse bleiben, also für hinreichend grosse Werthe von r_1 auch

$$\sum (\varphi_k^2 + \psi_k^2) > 2 \frac{\gamma^2}{r_1^2} \sum \mu_k^2 > \frac{\gamma^2}{r_1^2} \sum \mu_k^2 (\varrho_k^2 + \sigma_k^2)$$

sein. — Da die Functionaldeterminante

$$|F_{ik}| \qquad (i, k=1, 2, \ldots n)$$

im vorliegenden Falle stets positiv ist, so wird die Charakteristik des Functionen-Systems $(F_{00}, F_{10}, \ldots F_{n0})$ bei obiger Bestimmung von F_{00} gleich der Gesammtzahl der den n Gleichungen $F_{10} = 0$, $F_{20} = 0$, $\ldots F_{n0} = 0$ oder den m Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\ldots f_m = 0$ genügenden Werthsysteme $(z_1, z_2, \ldots z_n)$. Diese Anzahl bleibt also nach vorstehenden Erörterungen ungeändert, wenn man $m - 1$ von den Functionen f lediglich auf ihre Glieder höchster Dimension beschränkt, in der übrigbleibenden m^{ten} Function f aber noch ausserdem ein von allen Variabeln y freies Glied annimmt. Dass für ein *derartiges* System von Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots f_m = 0$$

die Anzahl der denselben genügenden Werthsysteme gleich dem Producte der Dimensionen der m Functionen f ist, folgt ganz unmittelbar, wenn man die bezügliche Eigenschaft für den Fall von nur $m - 1$ complexen Variabeln y voraussetzt. Im Falle $m = 1$ aber führt die vorstehende Entwickelung direct zu dem „Grundlehrsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen" und legt das eigentliche Wesen der von *Gauss* in seiner Abhandlung von 1849 gegebenen Herleitung dar, indem sie zeigt, dass für die zwei durch irgend eine algebraische Gleichung $f(x + yi) = 0$ dargestellten Curvensysteme die Configuration in Bezug auf deren Schnittpunkte innerhalb eines hinreichend gross gewählten Kreises nicht anders ist, wie für diejenigen Curvensysteme, welche aus einer „reinen" Gleichung desselben Grades hervorgehen. Man kann es übrigens an *Gauss'* Deduction selbst erkennen, dass dabei eigentlich nur die höchste Potenz von $x + yi$ und von den Coëfficienten der übrigen Glieder der Gleichung nur die Eigenschaft in Betracht gezogen wird, dass deren absolute Werthe unter einer gewissen Grenze liegen, so dass eine dabei zulässige Veränderung der Coëfficienten die Deduction nicht berührt; doch ist eine solche Veränderung auch schon unmittelbar von Hrn. *Weierstrass* zu einem Beweise des algebraischen Fundamentalsatzes benutzt worden, den er im Juli 1868 hier vorgetragen aber bis jetzt noch nicht veröffentlicht hat.

ÜBER DIE IRREDUCTIBILITÄT VON GLEICHUNGEN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1880. S. 155—162.

ÜBER DIE IRREDUCTIBILITÄT VON GLEICHUNGEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 2. Februar 1880.]

Seitdem ich mich genau vor 35 Jahren bei Gelegenheit einer von Hrn. *Kummer* in Breslau gehaltenen Vorlesung über Zahlentheorie auf seine specielle Anregung mit der Vereinfachung des Beweises der Irreductibilität der Kreistheilungsgleichungen beschäftigt und das Ergebniss im XXIX. Bande des *Crelle*'schen Journals veröffentlicht habe[1]), bin ich wiederholt auf die Frage zurückgekommen und habe mich namentlich bemüht, charakteristische Eigenschaften der irreductibeln Zahlengleichungen aufzufinden. Ich habe dafür sowohl in meinen allgemeinen Untersuchungen über algebraische Zahlen als auch in den specielleren über die singulären Moduln der elliptischen Functionen mancherlei Anhaltspunkte gefunden (vgl. Monatsbericht vom Juni 1862 pag. 368[2]), bin aber erst neuerdings zu einem befriedigenden Resultate gelangt, und zwar gerade rechtzeitig, um die erste Mittheilung davon meinem Freunde *Kummer* an seinem siebzigsten Geburtstagsfeste am 29. v. M. widmen zu können.

Den Kernpunkt der ganzen Entwickelung bildet folgender Satz:

„Ist $F(x)$ eine ganze ganzzahlige Function von x und bedeutet v_p in der auf alle Primzahlen p ausgedehnten Summe

$$\sum v_p p^{-1-w}$$

die Anzahl der (gleichen oder verschiedenen) Wurzeln der Con-

[1]) Band I S. 1—4 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

[2]) Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen; Band IV dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

gruenz $F(x) \equiv 0 \mod. p$, so wird der Grenzwerth jener Reihe für unendlich kleine positive Werthe von w proportional $\log \frac{1}{w}$ und zwar gleich $\log \frac{1}{w}$ multiplicirt mit der Anzahl der irreductibeln Factoren von $F(x)$."

Für irreductible Functionen ist also der Grenzwerth der Reihe $\log \frac{1}{w}$ selbst, und hieraus ergiebt sich eben unmittelbar jener Werth der Reihe für beliebige Functionen $F(x)$. Da ν_p nur die Werthe $0, 1, 2, \ldots n$ haben kann, wenn n den Grad von $F(x)$ bezeichnet, so ist jene Reihe in n Partialreihen zu zerlegen und in folgender Weise darzustellen:

$$\sum_{k=1}^{k=n} k \sum p_k^{-1-w},$$

wo p_k jede Primzahl bedeutet, für welche k Congruenzwurzeln von $F(x) \equiv 0$ existiren. Für *alle* Primzahlen ist bekanntlich der Grenzwerth von $\sum \frac{1}{p^{1+w}}$ gleich $\log \frac{1}{w}$; wenn man daher die Existenz einer Function voraussetzt, welche die Dichtigkeit der Primzahlen angiebt, so kann man den obigen Satz einfach so formuliren, dass diese Dichtigkeit mit derjenigen übereinstimmt, welche resultirt, wenn jede Primzahl p soviel mal genommen wird, als die Congruenz $F(x) \equiv 0 \mod. p$ Wurzeln hat, vorausgesetzt, dass $F(x)$ irreductibel ist.

Nimmt man die Dichtigkeit *aller* Primzahlen als Maass und bezeichnet alsdann die Dichtigkeit der Primzahlen p_k mit D_k, so ist dem obigen Satze gemäss die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=n} k D_k = 1$$

charakteristisch für irreductible Gleichungen $F(x) = 0$ *überhaupt*. Die Einzelwerthe der Dichtigkeiten D_k sind im Allgemeinen für die verschiedenen Grade der Gleichungen verschieden, aber stets *dieselben für alle Gleichungen einer und derselben Classe*. Wenn $F(x) = 0$ eine allgemeine Gleichung ist, d. h.

keinen besonderen Affect besitzt, so resultirt, indem man sich die Gleichung für eine lineare Function von h Wurzeln gebildet denkt, die Relation

$$\sum_{k=1}^{k=n} k(k-1)\cdots(k-h+1) D_k = 1,$$

und diese ergiebt für die Dichtigkeit D_k den Werth

$$\frac{1}{k!} \sum_h \frac{(-1)^h}{h!} \qquad (h = 0, 1, \ldots n-k) \qquad (0! = 1),$$

welcher für grosse Werthe von n und relativ kleine von k nahezu gleich $\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{k!}$ wird, und die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e \cdot k!}$$

wird eben wieder gleich 1. Dagegen wird die Gesammtdichtigkeit der Primtheiler einer irreductibeln Function $F(x)$, die gleich Null gesetzt eine allgemeine Gleichung repräsentirt, für grössere Werthe des Grades n nahezu $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ also etwa $\frac{7}{11}$.

Die Dichtigkeit D_{n-1} ist stets gleich Null. Für solche irreductible Gleichungen, deren Wurzeln sämmtlich rationale Functionen einer sind, werden auch alle vorhergehenden Werthe von D gleich Null und also $D_n = \frac{1}{n}$. Hieraus folgt, dass jede irreductible ganzzahlige Function einer Variabeln $F(x)$ für unendlich viele Primzahlmoduln einem Product von Linearfactoren congruent ist, und dass die Dichtigkeit dieser Primzahlen durch den reciproken Werth der Ordnung des Affects der Gleichung $F(x) = 0$ d. h. durch den reciproken Werth des Grades der irreductibeln Factoren der *Galois*schen Resolvente ausgedrückt wird. Aber nicht bloss diese Dichtigkeit, deren Index gleich dem Grade von $F(x)$ ist, sondern auch alle andern Werthe $D_1, D_2, \ldots$ werden durch den Affect bestimmt, und es wird z. B., wenn $F(x) = 0$ eine auflösbare Gleichung vom Primzahlgrade n und die Ordnung ihres Affects nd ist, wo d einen Divisor von $(n-1)$ bedeutet,

$$D_1 = 1 - \frac{1}{d}, \quad D_2 = 0, \quad \ldots \; D_{n-1} = 0, \quad D_n = \frac{1}{nd}.$$

Wenn zwei Functionen n^{ten} Grades $F(x)$ und $F_1(x)$ dieselben charakteristischen Zahlen v_p besitzen, so hat die aus den Wurzeln beider gebildete Gleichung n^2ten Grades für die Zahlen p_k die Zahl $v_p = k^2$ als charakteristische Zahl. Da jedenfalls $D_n > 0$ ist, so ist also

$$\sum k D_k > 1$$

d. h. die Gleichung muss reductibel sein. Dies kann auch schon erschlossen werden, wenn man nur voraussetzt, dass die Dichtigkeit der Primzahlen, für welche *beide* Congruenzen $F(x) \equiv 0$ und $F_1(x) \equiv 0$ genau k Congruenzwurzeln haben, mit der Dichtigkeit derjenigen, für welche je eine derselben diese Eigenschaft besitzt, für jedes k übereinstimmt. Ohne heute näher auf den allgemeinen Fall einzugehen, hebe ich hervor, dass die zugehörigen *Galois*schen Gleichungen in dieselbe Gattung gehören müssen, und dass also, wenn n Primzahl ist, auch die Gleichungen selbst zu *einer* Gattung gehören, d. h.

> wenn für zwei Functionen, deren Grad eine Primzahl ist, die Primtheiler der verschiedenen Arten im Allgemeinen beiden gemeinsam sind, so sind die Wurzeln der einen Gleichung rational durch die der andern ausdrückbar,

und es ist also (in ähnlicher Weise, wie nach dem *Cauchy*'schen Satze eine Function durch ihre Randwerthe bestimmt wird) mit blossen Congruenzbestimmungen der ganze Inbegriff der durch die Gleichung definirten algebraischen Irrationalitäten bestimmt.

Um die einfachen Betrachtungen, welche zu dem obigen Satze führen, an den Kreistheilungsgleichungen darzulegen, knüpfe ich an Hrn. *Kummer's* Ausführungen im § VIII seiner im XVI. Bande von *Liouville's* Journal veröffentlichten Abhandlung an. Darnach ergiebt sich, wenn α wie a. a. O. eine Wurzel der Gleichung

$$x^{\lambda-1} + x^{\lambda-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

bedeutet, auch ohne die Voraussetzung der Irreductibilität, dass der mittlere Werth von $Nf(\alpha)$ constant und also $\sum Nf(\alpha)^{-1-w}$ für unendlich kleine positive Werthe von w proportional $\frac{1}{w}$ ist. Wird der Grad der irreductibeln Gleichung für α mit r bezeichnet, so ist unter $Nf(\alpha)$ natürlich nur das Product der r conjugirten Factoren zu verstehen. Nun ist andrerseits $\sum Nf(\alpha)^{-1-w}$ gleich dem auf alle Primzahlen $p_{\lambda-1}$ von der Form $n\lambda+1$ zu erstreckenden Producte

$$\Pi\,(1 - p_{\lambda-1}^{-1-w})^{-r},$$

multiplicirt mit einem Producte von Factoren $(1 - p^{-h-hw})^{-1}$, welches, da $h > 1$ ist, für $w = 0$ endlich und grösser als Eins bleibt. Man hat daher

$$\lim_{w=0} \sum \frac{r}{p_{\lambda-1}^{1+w}} = \log \frac{1}{w},$$

und dies ist für den vorliegenden Fall der Inhalt des obigen allgemeinen Satzes, da die Primzahlen $p_{\lambda-1}$ die sämmtlichen Primtheiler von

$$x^{\lambda-1} + x^{\lambda-2} + \cdots + x + 1$$

bilden. — Der Nachweis, dass jene Gleichung für α irreductibel oder also dass $r = \lambda - 1$ ist, lässt sich im Wesentlichen nunmehr darauf gründen, dass die Differenzen

$$\sum_{m=1}^{\infty} (m\lambda + h)^{-1-w} - \sum_{m=1}^{\infty} (m\lambda + k)^{-1-w}$$

und also auch jene *Dirichlet*'schen Reihen

$$\sum_n \frac{\beta^{h \text{ ind. } n}}{n^{1+w}} \qquad (h = 1, 2, \ldots \lambda - 2),$$

wenn β wie in der *Kummer*'schen Abhandlung eine primitive $(\lambda - 1)^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit bedeutet, für $w = 0$ endlich bleiben. Dass eben diese Reihen für $w = 0$ auch nicht gleich Null werden, ergiebt sich gleichzeitig mit der Irreductibilität. Ist nämlich $P(w)$ das Product aller dieser $(\lambda - 2)$ Reihen, so hat man die identische Gleichung

$$P(w)\sum n^{-1-w} = \prod_{d}\prod_{p_d}\left(1-p_d^{-\delta(1+w)}\right)^{-d},$$

wenn mit d die verschiedenen Divisoren von $\lambda-1$, mit δ die complementären, wofür $d\delta=\lambda-1$ ist, und mit p_d die zum Divisor δ für den Modul λ gehörigen Primzahlen bezeichnet werden, und da die sämmtlichen den Werthen $d<\lambda-1$ entsprechenden Producte für $w=0$ endlich und grösser als Eins bleiben, so kommt

$$\lim_{w=0}.\log.\frac{P(w)}{w} = \lim_{w=0}.\sum\frac{\lambda-1}{p_{\lambda-1}^{1+w}}.$$

Der Grenzwerth des Ausdrucks auf der rechten Seite ist nach der obigen Deduction

$$\frac{\lambda-1}{r}\log\frac{1}{w};$$

es muss daher erstens $P(w)$ für $w=0$ von Null verschieden und zweitens $r=\lambda-1$ sein. Der Kernpunkt des hier geführten Nachweises der Irreductibilität, der sich ohne Weiteres auf Wurzeln der Einheit mit zusammengesetzten Exponenten übertragen lässt, ist darin zu finden, dass jene *Dirichlet*schen Reihen selbst ein System von conjugirten Einheiten liefern, deren Unabhängigkeit darauf beruht, dass die Werthe der Reihen für $w=0$ von Null verschieden sind.

Die singulären Moduln der elliptischen Functionen führen zu Gattungen von ganzzahligen Gleichungen $F(x)=0$, die ich in meiner Mittheilung vom 26. Juni 1862 näher charakterisirt habe. Wird der Grad der Function $F(x)$ wie dort mit $2N$ bezeichnet, so ist N gleich der Classenanzahl quadratischer Formen einer bestimmten negativen Determinante oder Discriminante, wenn man, wie ich es seit lange in meinen Universitäts-Vorlesungen zu thun pflege, hierbei die Formen $ax^2+bxy+cy^2$ mit ganzen Zahlen a, b, c zu Grunde legt und b^2-4ac als deren Discriminante bezeichnet. Jede der Gleichungen $F(x)=0$ zerfällt unter Adjunction der Quadratwurzel der Discriminante in zwei *Abel*'sche Gleichungen N^{ten} Grades, und deren besondere Natur bestimmt sich durch die auf die Composition bezüglichen Eigen-

schaften der zugehörigen quadratischen Formen. Denkt man sich nämlich in der Weise wie im Monatsbericht vom December 1870 S. 882 bis 885[1]) sämmtliche Formenclassen durch ein Fundamentalsystem

$$\theta_1^{h_1}\theta_2^{h_2}\theta_3^{h_3}\cdots\theta_\nu^{h_\nu} \qquad (h_\alpha=0,1,\ldots n_\alpha-1;\ N=n_1n_2\cdots n_\nu)$$

dargestellt, so sind die den einzelnen Classen entsprechenden Wurzeln jener *Abel*'schen Gleichung N^{ten} Grades gemäss den Auseinandersetzungen, welche ich im Monatsbericht vom December 1877 unter Nr. III gegeben habe[2]), durch die entsprechenden Systeme der ν Indices

$$h_1, h_2, \ldots h_\nu$$

charakterisirt, und wenn wie bei *Gauss* (Disqu. arithm. sectio V, art. 305[3]) m diejenige Zahl bedeutet, zu der im Sinne der Composition eine Classe quadratischer Formen gehört, so ist m als die kleinste den Congruenzen

$$mh_\alpha\equiv 0 \mod. n_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\ldots\nu)$$

genügende Zahl bestimmt. Bezeichnet man nun die Discriminante der quadratischen Formen mit D und die sämmtlichen nicht in D enthaltenen Primzahlen mit p oder q, so dass stets

$$\left(\frac{D}{p}\right)=+1,\quad \left(\frac{D}{q}\right)=-1$$

ist, so zerfällt $F(x)$ für jeden Primzahlmodul q in N irreductible Factoren zweiten Grades, für jeden Primzahlmodul p aber in lauter irreductible Factoren m^{ten} Grades, wenn die Formenclasse, durch welche p darstellbar ist, zu m gehört. Dabei ist zu bemerken, dass, falls p durch zwei entgegengesetzte Formenclassen darstellbar ist, beide zu derselben Zahl m gehören. Hiernach ist es das Product

---

[1]) Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Classenanzahl idealer complexer Zahlen. Band I S. 274—278 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

[2]) Ueber *Abel*'sche Gleichungen. Band IV dieser Ausgabe. H.

[3]) *C. F. Gauss*' Werke. Bd. I S. 369. H.

$$\prod_m \prod_p \left(1 - p^{-m(1+w)}\right)^{-\frac{2N}{m}} \cdot \prod_q \left(1 - q^{-2(1+w)}\right)^{-N},$$

welches in diesem Falle auftritt und jenem zu den Kreistheilungsgleichungen gehörigen Doppelproducte auf p. 90 entspricht. Die auf p bezügliche Multiplication erstreckt sich auf die im Sinne der Composition zu m gehörigen Primzahlen p. Das Product ist in N Theilproducte

$$\prod_p \left(1 - \omega_1^{h_1} \omega_2^{h_2} \cdots \omega_\nu^{h_\nu} p^{-(1+w)}\right)^{-1} \prod_q \left(1 - q^{-2(1+w)}\right)^{-1}$$

zu zerlegen, deren jedes genau wie das speciellere bei *Dirichlet* im Monatsbericht vom März 1840[1]) als Reihe darstellbar ist:

$$\tfrac{1}{2} \sum_{a,b,c} \omega_1^{h_1} \omega_2^{h_2} \cdots \omega_\nu^{h_\nu} \sum_{x,y} (ax^2 + bxy + cy^2)^{-1-w},$$

und diese Reihe ist nach einer im Monatsbericht vom Jan. 1863 S. 46 aufgestellten Formel[2]) durch ϑ-Functionen zu summiren. Das erste Summenzeichen in der Reihe bezieht sich auf die verschiedenen Formenclassen (a, b, c) der Discriminante D, das zweite auf alle ganzen Zahlen x, y, für welche $ax^2 + bxy + cy^2$ zu D prim ist; die Grössen ω sind die verschiedenen durch die Gleichungen

$$\omega_1^{n_1} = 1, \quad \omega_2^{n_2} = 1, \quad \ldots \omega_\nu^{n_\nu} = 1$$

bestimmten Wurzeln der Einheit, und die Exponenten h wie oben die ν Indices, welche der Classe (a, b, c) resp. den durch dieselbe darstellbaren Primzahlen p angehören.

Nach diesen Auseinandersetzungen sind es einzig und allein die durch die Hauptclasse darstellbaren Primzahlen p, für welche $F(x) \equiv 0$ wird, und deren Dichtigkeit ist gleich dem reciproken Werthe des Grades der irreductibeln Factoren von $F(x)$. Da nun die Differenzen

1) *G. Lejeune-Dirichlet*, gesammelte Werke. Band I S. 497. H.

2) Ueber die Auflösung der *Pell*'schen Gleichung mittels elliptischer Functionen. Band IV dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.

$$\sum_{x,y} (ax^2 + bxy + cy^2)^{-1-w} - \sum_{x,y} (a'x^2 + b'xy + c'y^2)^{-1-w}$$

für $w = 0$ endlich bleiben (vgl. meine Mittheilung im Monatsbericht vom Jan. 1863), so folgt in der oben für die Kreistheilungsgleichungen ausgeführten Weise, dass $F(x)$ irreductibel und dass die Dichtigkeit der Primzahlen in den einzelnen Classen quadratischer Formen (in erster Annäherung) proportional der Anzahl der Classen ist, durch welche die Primzahlen darstellbar sind. Die Dichtigkeit der Primzahlen ist demnach

$$\frac{1}{2N} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{N}$$

je nachdem die darstellende Classe *anceps* ist oder nicht, und die Dichtigkeit der den quadratischen Formen entsprechenden *complexen* Primfactoren ist in jeder Classe gleich $\frac{1}{N}$.

Um zum Schlusse nur *ein* Beispiel anzuführen sei $D = -31$. Alsdann kann für $F(x)$ die Function

$$(x^3 - 10x)^2 + 31(x^2 - 1)^2$$

genommen werden, welche unter Adjunction von $\sqrt{-31}$ in zwei Factoren dritten Grades mit der Discriminante 1 zerfällt. Die je 3 Wurzeln der betreffenden Gleichungen entsprechen den Formenclassen $(1, 1, 8)$, $(2, \pm 3, 5)$, und die Anzahl der Primzahlen $x^2 + 31y^2$ ist etwa halb so gross als diejenige der Primzahlen von der Form $5x^2 \pm 4xy + 7y^2$.

ÜBER DIE POTENZRESTE GEWISSER COMPLEXER ZAHLEN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
vom Jahre 1880. S. 404—406.

ÜBER DIE POTENZRESTE GEWISSER COMPLEXER ZAHLEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 22. April 1880.]

Schon sehr früh hatte *Euler* die Beobachtung gemacht, dass die Primtheiler der quadratischen Formen einer bestimmten Discriminante D in gewissen Linearformen $mD+\alpha$ enthalten sind, aber erst im Jahre 1783 hat er diese für die Entwickelung der Zahlentheorie so folgenreiche Beobachtung in jener merkwürdigen Weise formulirt, welcher der Name des Reciprocitätsgesetzes seine Entstehung verdankt*). Vor der Eleganz der Correlation, auf welche hierbei — und mit Recht — stets ein besonderer Nachdruck gelegt worden ist, trat seitdem die Bedeutung und der Zielpunkt der ursprünglichen *Euler*'schen Beobachtung einigermassen in den Hintergrund. Nun ist mir aber in diesen Tagen bei der Anwendung der arithmetischen Theorie der singulären Moduln auf die Potenzreste complexer Zahlen eine specifisch neue Erscheinung entgegengetreten, die unmittelbar an jene erste Wortfassung erinnert, in welcher *Euler* den wesentlichen Inhalt des quadratischen Reciprocitätsgesetzes veröffentlicht hat, und da diese Erscheinung in der Theorie der Potenzreste nicht nur im Rückblick durch die Analogie mit dem historischen Ausgangspunkt derselben sondern auch im Vorblick durch den Hinweis auf ein neues Stadium der Entwickelung ein besonderes Interesse darbietet, so will ich schon heute der Akademie eine kurze Mittheilung darüber machen.

Die *Abel*'schen Gleichungen, welche in der Theorie der singulären Moduln vorkommen, lassen ganz ebenso wie die der Kreistheilung zwei ver-

*) Vgl. meine Bemerkungen im Monatsbericht vom April 1875. S. 268[1]).

[1]) Band II S. 3—4 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

schiedene Arten von Bestimmungen derjenigen Primtheiler zu, für welche sie als Congruenzen aufgefasst Wurzeln haben. Die Identität dieser beiden Bestimmungsweisen ergiebt für den Fall quadratischer Gleichungen ganz unmittelbar das quadratische Reciprocitätsgesetz und führt im allgemeineren Falle der Kreistheilungsgleichungen wenigstens zu *einer* Reciprocitäts-Beziehung, die im Falle der cubischen und biquadratischen Reste noch zum vollständigen Beweise des Reciprocitätsgesetzes ausreichend ist. Man kann nämlich unter dem Gesichtspunkte der erwähnten Identität alle jene Entwickelungen auffassen, welche in *Gauss'* sechstem Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes zuerst gegeben und nachher von *Jacobi*, *Eisenstein* und Andern bei Behandlung der höheren Potenzreste weiter ausgebildet und mit Erfolg benutzt worden sind. Um dies für den einfachen Fall quadratischer Gleichungen vollständig darzulegen, sei q eine positive Primzahl und $\varepsilon = \pm 1$, so dass $\varepsilon q \equiv 1 \bmod. 4$ ist. Alsdann sind die Primtheiler p von $z^2 - \varepsilon q$ oder von $x^2 + x + \frac{1}{4}(1 - \varepsilon q)$ durch die Bedingung

$$\left(\frac{\varepsilon q}{p}\right) = 1$$

vollständig charakterisirt. Andrerseits werden aber, wenn man von der Darstellung der Wurzeln der Gleichung $x^2 + x + \frac{1}{4}(1 - \varepsilon q) = 0$ als Perioden q^{ter} Wurzeln der Einheit Gebrauch macht, die Primtheiler p als solche durch die Congruenzbedingung

$$\sum_k \left(\frac{k}{q}\right) e^{\frac{2kp\pi i}{q}} \equiv \sum_k \left(\frac{k}{q}\right) e^{\frac{2k\pi i}{q}} \quad \text{mod. } p \qquad (k = 1, 2, \ldots q-1)$$

bestimmt, welche unmittelbar zu der Bedingung

$$\left(\frac{p}{q}\right) = 1$$

führt; und daraus, dass die beiden Bestimmungsweisen der Primtheiler p mit einander übereinstimmen müssen, folgt die Reciprocitätsgleichung

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{\varepsilon q}{p}\right).$$

Nunmehr sei wie in meiner Mittheilung vom 2. Febr. d. J.[1])

$$F(x) = (x^3 - 10x)^2 + 31(x^2 - 1)^2,$$

so dass die Wurzeln von $F(x) = 0$ die Gattung der singulären Moduln für $\sqrt{-31}$ bestimmen. Setzt man zur Abkürzung

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \qquad \varpi = \frac{-1 + \sqrt{-31}}{2}$$

$$\eta_1 = 1 - \varpi + 3\omega, \quad \eta_2 = 1 - \varpi + 3\omega^2,$$

so ist

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \qquad \varpi^2 + \varpi + 8 = 0, \qquad \eta_1 \eta_2 + 1 = 0,$$

und die drei Wurzeln ξ_0, ξ_1, ξ_2 der cubischen Gleichung

$$x^3 - 10x + (1 + 2\varpi)(x^2 - 1) = 0$$

sind durch die Gleichungen

$$\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 = \eta_1 + \eta_2, \quad (\xi_0 + \omega^2 \xi_1 + \omega \xi_2)^3 = \eta_1, \quad (\xi_0 + \omega \xi_1 + \omega^2 \xi_2)^3 = \eta_2$$

explicite gegeben. Die Primzahlen p, für welche die Congruenz $F(x) \equiv 0 \bmod. p$ Wurzeln hat, werden hiernach erstens durch die Bedingung

$$\left(\frac{-31}{p}\right) = 1$$

und zweitens dadurch charakterisirt, dass η_1 cubischer Rest des complexen Primfactors von p in der Theorie der bezüglichen complexen Zahlen sein muss. Diese Bedingungen können auch dahin formulirt werden, dass erstens Zahlen n existiren müssen, wofür

$$n^2 + n + 8 \equiv 0 \quad \text{mod. } p$$

ist, und dass zweitens

---

[1]) *L. Kronecker*, Ueber die Irreductibilität von Gleichungen. Band II S. 93 dieser Ausgabe. H.

$$(1 - 3n + \omega)^{\frac{p \pm 1}{3}} \equiv \mp 1 \mod. p$$

sein muss. Die anderweite Bestimmung der Primtheiler p, welche aus der Theorie der singulären Moduln hervorgeht (vgl. meine Mittheilung vom 2. Febr. d. J.), ergiebt aber, dass dieselben durch die Hauptform $x^2 + 31y^2$ darstellbar sein müssen, und es folgt daher, dass die complexe Einheit η_1 cubischer Rest von allen im *Kummer*'schen Sinne *wirklichen* complexen Primfactoren $a + b\varpi$, von allen andern aber Nichtrest ist. Auch die beiden andern cubischen Restcharaktere, welche η_1 haben kann, scheiden sich nach den Classen, welchen die Primzahl-Moduln angehören, so dass überhaupt die Restcharaktere von η_1 durch den Index, den der bezügliche Modul im Sinne der Composition hat, bestimmt wird. — Ist q irgend eine Primzahl von der Form $3k + 1$, welche im Sinne der Composition zum Exponenten 3 gehört, so dass also nicht q selbst sondern erst q^3 durch die Hauptform $x^2 + 31y^2$ darstellbar ist, und hat man q^3 in vier conjugirte complexe, aus ω, ϖ gebildete Factoren q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22} zerlegt, wo der erste Index sich auf die beiden Werthe von ω, der zweite auf die beiden Werthe von ϖ bezieht, so wird der Quotient zweier conjugirter q_{11}, q_{21} durch Multiplication mit einem der beiden Werthe von η stets ein vollständiger Cubus. Der cubische Charakter dieser Quotienten bestimmt sich daher genau wie der der Einheiten η durch die *quadratischen* Formen der Discriminante -31, durch welche die Norm des Primzahlmoduls darstellbar ist, und es ist gerade dieser Umstand, welcher einen deutlichen Hinweis auf die Weiterentwickelung der Theorie der Potenzreste namentlich auch für die in den *Kummer*'schen Untersuchungen ausgeschlossenen Falle enthält.

Zur Erläuterung der vorstehenden Bemerkungen füge ich noch folgende specielle Beispiele an:

Da $N(1 - 2\varpi) = 35$ und $\eta_1 \equiv \frac{1}{2} + 3\omega \mod. (1 - 2\varpi)$ ist, so kommt

$$\eta_1^2 \equiv -6\omega \mod. 35,$$

und es ist

$$\tfrac{1}{3}(5 + 1) = 2, \quad \tfrac{1}{3}(7 - 1) = 2, \quad -6\omega \equiv -\omega \mod. 5, \quad -6\omega \equiv \omega \mod. 7.$$

Ferner ist $N(3 - 2\varpi) = 47$ und $\frac{47 + 1}{3} = 16$ und

$$\eta_1^{16} \equiv -1 \mod. (3 - 2\varpi),$$

während $N(5 - 2\varpi) = 67$ und $\frac{67 - 1}{3} = 22$ und

$$\eta_1^{22} \equiv +1 \mod. (5 - 2\varpi)$$

wird. Endlich ist

$$N_\omega N_\varpi(5 + 3\omega + \varpi) = N_\varpi(11 + 6\varpi) = 7^3$$

und die Gleichung

$$\frac{5 + 3\omega + \varpi}{5 + 3\omega^2 + \varpi} \cdot \eta_1 = \left(\frac{\omega - \varpi}{3 + 2\omega}\right)^3,$$

diene als Beispiel für die oben angeführte Reduction des Restcharakters gewisser complexer Zahlen auf den der Einheiten η.