ÜBER
DIE VERSCHIEDENEN STURM'SCHEN REIHEN UND IHRE GEGENSEITIGEN BEZIEHUNGEN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften
vom Jahre 1873. S. 117—154.

ÜBER DIE VERSCHIEDENEN STURM'SCHEN REIHEN UND IHRE GEGENSEITIGEN BEZIEHUNGEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 17. Februar 1873.]

I.

Die Methode von Sturm und Sylvester.

Sind

$$f, f_1, f_2, \dots f_\nu \quad \text{und} \quad g_1, g_2, \dots g_\nu$$

ganze Functionen von x mit reellen Coëfficienten, welche durch die Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad f = g_1 f_1 - f_2, \quad f_1 = g_2 f_2 - f_3, \quad \dots \quad f_{\nu-1} = g_\nu f_\nu$$

mit einander verbunden sind, so ergiebt jene fundamentale von *Sturm* herrührende und von Hrn. *Sylvester* verallgemeinerte Deduction, dass, f_ν als constant vorausgesetzt, die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenwechsel in den beiden Reihen:

$$f(x_1), \quad f_1(x_1), \quad f_2(x_1), \quad \dots \quad f_{\nu-1}(x_1), \quad f_\nu$$
$$f(x_2), \quad f_1(x_2), \quad f_2(x_2), \quad \dots \quad f_{\nu-1}(x_2), \quad f_\nu$$

gleich ist dem Unterschiede zwischen der Anzahl der Aus- und Eintrittsstellen, welche man passirt, indem man auf der x-Axe vom Punkte x_1 in der Richtung wachsender x bis zum Punkte x_2 geht.*) Als Aus- und Eintrittsstellen sind dabei die Schnittpunkte der x-Axe mit der Curve $y=f(x)$ zu betrachten, je nachdem man aus einem Theile der Ebene kommt, in welchem das Product

$$(y-f(x))\cdot(y-f_1(x))$$

negativ oder positiv ist, d. h. wenn, wie von jetzt ab geschehen soll, die Coëfficienten der höchsten Potenzen von $f(x)$ und $f_1(x)$ positiv vorausgesetzt werden, „je nachdem man aus einem von den beiden Curven $y=f(x)$, $y=f_1(x)$ umschlossenen Theile der Ebene herauskommt oder in einen solchen hineingeht". Wird nämlich die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$f(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots \quad f_{\nu-1}(x), \quad f_\nu$$

für irgend einen Werth von x mit $\mathfrak{N}(x)$ bezeichnet, so bleibt die Zahl $\mathfrak{N}(x)$ bei allmählig wachsendem x so lange ungeändert, bis ein Werth $x=\xi$ erreicht wird, wofür $f(\xi)=0$ ist; denn für eine Stelle, wo

$$f_k(x)=0 \qquad \scriptstyle (k=1,2,\ldots\nu-1)$$

ist, haben die beiden benachbarten Functionen $f_{k-1}(x)$ und $f_{k+1}(x)$ entgegengesetzte Zeichen, sodass sowohl vorher als nachher ein und nur ein Zeichenwechsel zwischen f_{k-1} und f_{k+1} stattfindet, also die Zahl $\mathfrak{N}(x)$ keinerlei Veränderung erleidet. Aber an einer Stelle $x=\xi$, wo $f(\xi)=0$ ist, geht ein Zeichenwechsel verloren oder es kommt ein solcher hinzu, je nachdem das Product $f(x)\cdot f_1(x)$ unmittelbar vorher negativ oder positiv war, d. h. je nachdem die Stelle $x=\xi$ als Aus- oder Eintrittsstelle anzusehen ist. Wird

*) Vgl. meine Notiz „Sur le théorème de *Sturm*". Comptes rendus 1869. I. pag. 1078 sqq.[1]) und *Sylvester* „On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions etc.". Philosophical Transactions. Part III for 1853. In der Section IV der *Sylvester*'schen Abhandlung sind unter der Ueberschrift „theory of intercalations" die obigen Ausführungen ihrem materiellen Inhalte nach schon vollständig enthalten; nur die geometrische Deutung fehlt, durch welche, wie mir scheint, der Inhalt gar sehr an Uebersichtlichkeit gewinnt.

[1]) Band I S. 227—234 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

also die Anzahl der Aus- und Eintrittsstellen zwischen x_1 und x_2 resp. mit $\mathfrak{A}(x_1, x_2)$ und $\mathfrak{E}(x_1, x_2)$ bezeichnet, so ist:

$$\mathfrak{N}(x_1)-\mathfrak{N}(x_2)=\mathfrak{A}(x_1, x_2)-\mathfrak{E}(x_1, x_2).$$

Nimmt man $x_1=-\infty$, $x_2=+\infty$ und bezeichnet den Grad von $f(x)$ mit n, den von f_k mit $n-n_k$ und den Coëfficienten von x^{n-n_k} in $f_k(x)$ mit c_k, so erhält man die beiden Reihen

$$\begin{array}{lllll} c, & (-1)^{n_1}c_1, & (-1)^{n_2}c_2, & \ldots & (-1)^{n_\nu}c_\nu, \\ c, & c_1, & c_2, & \ldots & c_\nu, \end{array}$$

und ein Zeichenwechsel zwischen dem k^{ten} und $(k+1)^{\text{ten}}$ Gliede in der einen Reihe kann nur dann in der andern verloren gehen, wenn n_k-n_{k-1} ungrade ist. Bedeutet nun $\mathfrak{P}(c_k c_{k-1})$ die Anzahl der positiven und $\mathfrak{N}(c_k c_{k-1})$ die Anzahl der negativen Producte $c_k c_{k-1}$, für welche n_k-n_{k-1} ungrade ist, ferner $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ resp. die Anzahl der Aus- und Eintrittsstellen auf der ganzen x-Axe, so wird

$$\text{(B)} \qquad \mathfrak{P}(c_k c_{k-1})-\mathfrak{N}(c_k c_{k-1})=\mathfrak{A}-\mathfrak{E}$$

d. h. für ein grades n gleich der doppelten Charakteristik des Systems von Functionen

$$\big(y, \ f(x)-y, \ f_1(x)-y\big),$$

wie ich schon im Monatsbericht vom März 1869 angegeben habe[1]). — Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Annahme $x_1=-\infty$, $x_2=+\infty$ keine Beschränkung der Allgemeinheit involvirt, da die Differenz

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2)-\mathfrak{E}(x_1, x_2)$$

für beliebige Werthe von x_1 und x_2 durch die Charakteristiken von zwei Functionensystemen

[1]) S. S. 184—185 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. Für ein ungrades n vgl. die einfache Modification Art. VIII dieser Abhandlung S. 346. H.

$$\left(y,\ f(x)-y,\ \mathfrak{f}_1(x)-y\right)$$

bestimmt wird, wo einmal $\mathfrak{f}_1(x)$ für alle Werthe $x=\xi$ mit denen von $(x-x_1)f_1(x)$, das andere Mal mit denen von $(x-x_2)f_1(x)$ übereinstimmend anzunehmen ist.

II.

Die Methode von Hermite und Jacobi.

Es soll nunmehr gezeigt werden, wie das angeführte allgemeine Resultat mittels der *Hermite-Jacobi*'schen Methode herzuleiten ist, bei deren Benutzung man sich meines Wissens bisher auf den einfachsten Fall beschränkt hat, in welchem sämmtliche Differenzen $n_k - n_{k-1}$ gleich Eins sind.*) Den Ausgangspunkt für die erwähnte Methode bildet die über alle Wurzeln ξ der Gleichung $f(x)=0$ erstreckte Summe:

$$\text{(C)}\qquad \sum_{(\xi)} \frac{(y_1+y_2\xi+\cdots+y_n\xi^{n-1})^2}{f_1(\xi)f'(\xi)},$$

unter $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ verstanden. Wird

$$\sum_{(\xi)} \frac{\xi^r}{f_1(\xi)f'(\xi)}$$

zur Abkürzung mit s_r bezeichnet, so ist (C) identisch mit der quadratischen Form

$$\text{(C')}\qquad \sum_{i,k} y_i y_k s_{i+k-2} \qquad (i,k=1,2,\ldots n).$$

*) Durch die von Hrn. *Borchardt* im 53. Bande seines Journals (pag. 281 sqq.) gegebenen historischen Mittheilungen[1]) erscheinen die Namen von *Hermite* und *Jacobi* ebenso unmittelbar mit der hier zu entwickelnden Methode verknüpft, wie der Name von *Sturm* mit der im Art. I angewendeten Deduction; aber der Name des Hrn. *Sylvester* wäre eigentlich gleichmässig bei beiden Methoden zu nennen, da er beide in der citirten Abhandlung wesentlich ausgebildet und verallgemeinert hat.

[1]) *C. W. Borchardt*, gesammelte Werke S. 469—472. H.

welche, in ein Aggregat von Quadraten verwandelt, $\mathfrak{P}$ positive und $\mathfrak{N}$ negative Quadrate enthalten möge. Da nun nach der oben in (B) angewendeten Bezeichnung $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ resp. die Anzahl derjenigen reellen Werthe ξ bedeuten, wofür $f(x)\cdot f_1(x)$ bei $x=\xi$ zunimmt oder abnimmt, d. h. also wofür $f_1(\xi)\cdot f'(\xi)$ positiv oder negativ ist, so hat man wegen der Unveränderlichkeit der Anzahl der positiven und negativen Zeichen bei reeller Transformation eines Aggregats von Quadraten:

$$\mathfrak{P}-\mathfrak{N}=\mathfrak{A}-\mathfrak{E}.$$

Die lineare Transformation, mittels welcher die quadratische Form (C′) in ein Aggregat von Quadraten verwandelt wird, kann aber schon an den in (C) enthaltenen linearen Ausdrücken

$$y_1+y_2\xi+y_3\xi^2+\cdots+y_n\xi^{n-1}$$

vorgenommen werden. Es sind hiernach irgend welche ganze, reelle, von einander linear unabhängige Functionen $F_k(x)$ so zu bestimmen, dass bei der Entwickelung von

$$\text{(D)}\qquad \sum_{(\xi)} \frac{1}{f_1(\xi)f'(\xi)}\left(y_1F_1(\xi)+y_2F_2(\xi)+\cdots+y_nF_n(\xi)\right)^2$$

die Coëfficienten von y_iy_k für ungleiche Indices i, k verschwinden, dass also, wenn δ_{ik} Null oder Eins bedeutet, je nachdem die Indices ungleich oder gleich sind,

$$\text{(D')}\qquad \sum_{h} \frac{F_i(\xi_h)F_k(\xi_h)}{f_1(\xi_h)f'(\xi_h)} = \delta_{ik}S_k \qquad (h,i,k=1,2,\ldots n)$$

und folglich auch, wie hier beiläufig zu bemerken ist,

$$\text{(D'')}\qquad \sum_{k} \frac{1}{S_k}F_k(\xi_h)F_k(\xi_i) = \delta_{hi}f_1(\xi_h)f'(\xi_h) \qquad (h,i,k=1,2,\ldots n)$$

wird.*) Alsdann muss die Anzahl der positiven und negativen Grössen S resp. gleich $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$ sein, und die Reihe der Grössen

$$S_1, \; S_2, \; \dots \; S_n$$

kann, wenn auch etwas abweichend von der bisher üblichen Ausdrucksweise, insofern als eine

„*Sturm*'sche oder *Sylvester*'sche Reihe für die Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$"

bezeichnet werden**), da $\mathfrak{P} - \mathfrak{N} = \mathfrak{A} - \mathfrak{E}$ ist, d. h. da die Differenz zwischen der Anzahl der positiven und negativen Werthe von S_k für ein grades n gleich ist der doppelten Charakteristik des Functionen-Systems

$$\big(y, \; f(x) - y, \; f_1(x) - y\big)$$

oder also gleich der Differenz zwischen der Anzahl derjenigen Nullpunkte von $f(x)$, wo die x-Axe aus einem von den Curven $y = f(x)$ und $y = f_1(x)$ umschlossenen Theile der Ebene austritt, und zwischen der Anzahl derjenigen, wo die Axe in einen der bezeichneten Ebenen-Theile eintritt[1]). Die hier angegebene Modification der *Hermite-Jacobi*'schen Methode, bei der die Bildung von *Sturm*'schen Reihen

$$S_1, \; S_2, \; \dots \; S_n$$

auf die von Systemen gewisser erzeugender Functionen

$$F_1(x), \; F_2(x), \; \dots \; F_n(x)$$

*) Wird $F_i(\xi_h)$ dividirt durch die Quadratwurzel aus $S_i f_1(\xi_h) f'(\xi_h)$ gleich c_{hi} gesetzt, so werden durch die Gleichungen (D′) die n^2 Grössen c_{hi} als die Coëfficienten einer orthogonalen Substitution definirt und genügen als solche auch gewissen analogen Gleichungen, die aus den definirenden durch Vertauschung der beiden Indices entstehen und oben in (D″) ausgedrückt sind.

**) Diese Modification der bisherigen Ausdrucksweise empfiehlt sich namentlich, wie sich nachher zeigen wird, für die Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen zwischen den verschiedenen *Sturm*'schen Reihen.

[1]) Für ein ungrades n vgl. Art. VIII dieser Abhandlung S. 346. H.

zurückgeführt wird, erleichtert die Anwendung derselben in dem allgemeinen Falle, wo die Nenner $g_k(x)$ der Kettenbruchsentwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ von beliebigem Grade sind.*) Es spielen dabei, wie ich für den sogenannten regulären Fall linearer Nenner $g_k(x)$ schon an dem oben angeführten Orte dargelegt habe**), die Restfunctionen $f_k(x)$ eine besondere Rolle, insofern aus ihnen ein System erzeugender Functionen $F_k(x)$ in einfacher Weise hergeleitet werden kann. Ehe ich aber zu der betreffenden Ausführung übergehe, habe ich noch eine für die vollständige Präcisirung der „*Sturm*'schen Reihen" wesentliche Bemerkung hier einzuschalten, da die oben gegebene ebenso wie die sonst übliche Definition an einer gewissen Unbestimmtheit leidet. Diese Unbestimmtheit kann, wenn man zugleich die Allgemeinheit des Begriffs der *Sturm*'schen Reihen bewahren will, nur behoben werden, indem man, wie ich es in allen algebraischen Arbeiten und Vorträgen zu thun pflege, gewisse Grössen

$$\mathfrak{R}, \; \mathfrak{R}', \; \mathfrak{R}'' \dots$$

einführt und zu Grunde legt, um Alles, was im Laufe der Untersuchung als rational anzusehen ist, ausdrücklich als „rationale Function der Grössen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots$ mit ganzzahligen Coëfficienten" bezeichnen und auf diese Weise deutlich und vollständig charakterisiren zu können.***) Dabei darf übrigens unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass die Grössen $\mathfrak{R}$ entweder sämmtlich von einander unabhängige Veränderliche

*) Schon in dem Aufsatze des Hrn. *Brioschi* „sur les séries qui donnent le nombre de racines réelles etc." (Nouvelles annales de mathématiques 1856) findet sich pag. 278 b. eine kurze Bemerkung, die vielleicht als ein Hinweis auf die Einführung erzeugender Functionen $F_k(x)$ aufzufassen ist. Hr. *Brioschi* hat in dieser Abhandlung auch schon eine allgemeinere erzeugende quadratische Form für *Sturm*'sche Reihen der Untersuchung zu Grunde gelegt, ist aber nicht darauf eingegangen zu untersuchen, inwiefern dieselbe eine unnöthige Allgemeinheit enthält d. h. inwiefern die daraus gebildeten *Sturm*schen Reihen mit einander identisch werden.

**) Vgl. auch die Note des Hrn. *Brioschi*, Comptes rendus 1869. I. pag. 1318.

***) Vgl. meine Notiz im Monatsbericht vom Juni 1853[1]), wo die Grössen $A, B, C \dots$ dieselbe Rolle spielen, wie oben die mit $\mathfrak{R}$ bezeichneten Grössen.

[1]) Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen. Band IV. S. 1 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.

seien, oder dass eine einzige irreductible algebraische Gleichung zwischen ihnen besteht; jedoch ist alsdann der Fall nicht auszuschliessen, wo die Anzahl der Variabeln gleich Null, wo also entweder gar keine oder nur eine, als Wurzel einer irreductibeln ganzzahligen Gleichung definirte Grösse $\mathfrak{R}$ vorhanden ist. In der That kann nämlich einerseits jede Grösse $\mathfrak{R}$, welche nicht in einer *algebraischen* Beziehung zu den übrigen steht, für alle algebraischen Fragen als eine neue unabhängige Variable gelten; ferner kann andrerseits, wenn *mehrere* Gleichungen zwischen den Grössen $\mathfrak{R}$ bestehen, die Wurzel der vollständigen Resolvente als eine neue Grösse $\mathfrak{R}$ hinzugefügt werden, da sie ja als eine rationale Function der übrigen mit ganzzahligen Coëfficienten anzunehmen ist, und alsdann können wiederum alle diejenigen Grössen $\mathfrak{R}$ weggelassen werden, welche durch das neu hinzugefügte $\mathfrak{R}$ und durch die übrigen rational ausdrückbar sind. Auf diese Weise gelangt man also von einem System irgend welcher, durch beliebige Beziehungen mit einander verbundenen Grössen $\mathfrak{R}$ zu einem specielleren von der vorhin angegebenen Beschaffenheit, für welches im vorliegenden Falle nur noch die Bedingung hinzuzufügen ist, dass die Grössen $\mathfrak{R}$ sämmtlich reell seien. Dies vorausgeschickt, sind die Grössen $\mathfrak{R}$ irgend wie so zu wählen, dass die Coëfficienten von $f(x)$ und $f_1(x)$ rationale Functionen (mit ganzzahligen Coëfficienten) von $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \dots$ werden; hiernach sind die erzeugenden Functionen $F_k(x)$ der *Sturm*'schen Reihen betreffs ihrer Coëfficienten eben derselben beschränkenden Bedingung zu unterwerfen, und in Folge dessen werden dann auch die einzelnen Glieder der *Sturm*'schen Reihen rationale Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$, nämlich die Coëfficienten der Quadrate, welche bei irgend einer Transformation der *Hermite-Jacobi*'schen Form (C′) in ein Aggregat von Quadraten auftreten, vorausgesetzt, dass die Substitutionscoëfficienten rationale Functionen von $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \dots$ sind.

Bezeichnet man nun mit φ_k und ψ_k resp. die Zähler und Nenner der Näherungswerthe für den aus der Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ hervorgehenden Kettenbruch, so bestehen die Gleichungen

$$\text{(E)} \qquad f_1\psi_{k-1} - f\varphi_{k-1} = f_k,$$

$$\text{(E}'\text{)} \qquad f_k\psi_k - f_{k+1}\psi_{k-1} = f,$$

und die Grade der Functionen

$$f_k, \qquad g_k, \qquad \varphi_k, \qquad \psi_k$$

sind resp.

$$n - n_k, \quad n_k - n_{k-1}, \quad n_k - n_1, \quad n_k.$$

Setzt man $\mathfrak{f}_1(x) = f_\nu\psi_{\nu-1}(x)$, so dass nach (E) zwischen $\mathfrak{f}_1(x)$ und $f_1(x)$ die Relation

$$\mathfrak{f}_1(\xi)f_1(\xi) = f_\nu^2$$

stattfindet, so hat man für sämmtliche aus der Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ hervorgehenden Restfunctionen $\mathfrak{f}_k(x)$ die Gleichung

$$\text{(E}''\text{)} \qquad \mathfrak{f}_k(x) = f_\nu\psi_{\nu-k}(x), \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots\nu)}$$

und da $\mathfrak{f}_1(\xi)$ und $f_1(\xi)$ für reelle Werthe von ξ stets gleiches Zeichen haben, so können überall im Folgenden die Restfunctionen $\mathfrak{f}_k(x)$ d. h. also die mit f_ν multiplicirten Functionen ψ an die Stelle der Restfunctionen f_k treten.

Werden die Coëfficienten der höchsten Potenzen von x in g_k und ψ_k resp. mit a_k und b_k bezeichnet, so folgt aus den Gleichungen (A) und (E′), wenn von nun an $c = 1$ gesetzt wird,

$$\text{(F)} \qquad c_{k-1} = a_k c_k, \qquad b_k c_k = 1$$

und aus der Gleichung (E):

$$\text{(F}'\text{)} \qquad f_1(\xi)\cdot\psi_{k-1}(\xi) = f_k(\xi)$$

für jede Wurzel ξ der Gleichung $f(x) = 0$. Nach den *Euler*'schen Formeln ist daher

$$\text{(G)} \qquad \sum_{(\xi)} \frac{\xi^{p-1}f_k(\xi)}{f_1(\xi)f'(\xi)} = 0 \quad \text{oder} \quad b_{k-1},$$

je nachdem die positive ganze Zahl p kleiner oder gleich $n - n_{k-1}$ ist, und also ferner für $i \geqq k$:

$$\text{(G')} \qquad \sum_{(\xi)} \frac{\xi^{p-1} f_i(\xi) f_k(\xi)}{f_1(\xi) f'(\xi)} = 0 \quad \text{oder} \quad c_i b_{k-1},$$

je nachdem p kleiner oder gleich $n_i - n_{k-1}$ ist. Setzt man nun

$$\sum_k \sum_r z_{kr} x^r f_k(x) = \theta(x) \qquad \left(\substack{k=1,2,\ldots\nu \\ r=0,1,\ldots n_k - n_{k-1} - 1}\right)$$

$$\sum_{(\xi)} \frac{\theta(\xi)\theta(\xi)}{f_1(\xi) f'(\xi)} = Z,$$

so ist $\theta(x)$ eine lineare und Z eine quadratische homogene Function der n Variabeln z_{kr}, und es ist die Anzahl der positiven und negativen Zeichen zu ermitteln, welche bei der Verwandlung von Z in ein Aggregat von Quadraten vorkommen.

Da

$$\theta(\xi)^2 = \sum_i \sum_k \sum_r \sum_s z_{ir} z_{ks} \xi^{r+s} f_i(\xi) f_k(\xi) \qquad \left(\substack{i,k=1,2,\ldots\nu; \\ r=0,1,\ldots n_i - n_{i-1} - 1,\ s=0,1,\ldots n_k - n_{k-1} - 1}\right)$$

ist, so verschwinden vermöge der Gleichungen (G') die Coëfficienten von $z_i\, z_{ks}$ in Z, sobald i von k verschieden, und die Coëfficienten von $z_{kr} z_{ks}$, sobald $r + s < n_k - n_{k-1} - 1$ ist. Die Form Z enthält hiernach nur Glieder $z_{kr} z_{ks}$, in denen

$$\tfrac{1}{2}(n_k - n_{k-1} - 1) \leqq s < n_k - n_{k-1}, \qquad r \leqq s$$

ist, und wenn die mit z_{ks} multiplicirte lineare Function der Variabeln z mit z'_{ks} bezeichnet wird, falls $s \geqq \frac{1}{2}(n_k - n_{k-1})$ ist, so kommt:

$$Z = \sum_k \frac{c_k}{c_{k-1}} z_{kr}^2 + \sum_k \sum_s z_{ks} z'_{ks},$$

wo $k = 1, 2, \ldots \nu$, ferner für ungrade Differenzen $n_k - n_{k-1}$, aber nur für solche,

$$r = \tfrac{1}{2}(n_k - n_{k-1} - 1)$$

zu nehmen ist, während s durch die Ungleichheit

$$\tfrac{1}{2}(n_k - n_{k-1}) \leqq s < n_k - n_{k-1}$$

bestimmt wird. Da die Gesammtanzahl der Variabeln z_{kr}, z_{ks}, z'_{ks} genau gleich n ist, so müssen dieselben von einander linear unabhängig sein und es findet sich daher Z als ein Aggregat von Quadraten der n linearen Functionen

$$\tfrac{1}{2}(z_{kr} \pm z'_{kr}) \qquad \left(\substack{k=1,2,\ldots\nu \\ \frac{1}{2}(n_k - n_{k-1} - 1) \leq r < n_k - n_{k-1}}\right)$$

dargestellt, wenn für $r = \frac{1}{2}(n_k - n_{k-1} - 1)$ die Variable z'_{kr} mit z_{kr} identisch genommen wird. Die Coëfficienten der Quadrate sind ± 1 und zwar übereinstimmend mit dem inneren Zeichen von $\frac{1}{2}(z_{kr} \pm z'_{kr})$, sobald z'_{kr} von z_{kr} verschieden ist, aber für $z'_{kr} = z_{kr}$ haben sie die Werthe $\frac{c_k}{c_{k-1}}$. Bezeichnet man also wie oben im Art. I die Anzahl der positiven und der negativen Werthe der Producte $c_k c_{k-1}$, für welche $n_k - n_{k-1}$ ungrade ist, resp. mit $\mathfrak{P}(c_k c_{k-1})$ und $\mathfrak{N}(c_k c_{k-1})$, so zeigt sich, dass in der That der Ueberschuss der positiven über die negativen Quadrate in Z gleich $\mathfrak{P}(c_k c_{k-1}) - \mathfrak{N}(c_k c_{k-1})$ ist, und es ergiebt sich demnach auch mittels der *Hermite-Jacobi*'schen Methode die Gleichung (B) des Art. I:

$$\mathfrak{P}(c_k c_{k-1}) - \mathfrak{N}(c_k c_{k-1}) = \mathfrak{A} - \mathfrak{E},$$

welche dort in bekannter und directer Weise abgeleitet worden ist.

III.

Die Beziehungen zwischen Sturm'schen Reihen.

Werden jene n linearen Functionen der Variabeln z, nämlich

$$\tfrac{1}{2}(z_{kr} \pm z'_{kr})$$

in irgend welcher Reihenfolge gleich $y_1, y_2, \dots y_n$ gesetzt, so bilden die n Coëfficienten der nach den Variabeln y geordneten, oben mit θ bezeichneten Function von $x, z_{11}, z_{12}, \dots$

$$\sum_k \sum_r z_{kr} x^r f_k(x)$$

ein System von n Functionen $F_k(x)$, welche den aufgestellten Bedingungen

$$\sum_{(\xi)} \frac{F_i(\xi) F_k(\xi)}{f_1(\xi) f'(\xi)} = \delta_{ik} S_k$$

genügen. Bedeutet $F'_k(x)$ irgend ein anderes System solcher Functionen, so kann

$$F'_k(x) = \sum_i C_{ik} F_i(x) \qquad (i, k = 1, 2 \dots n)$$

gesetzt werden, und die Coëfficienten C sind alsdann rationale Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$, welche nur den Bedingungen

$$\text{(H)} \qquad \sum_h S_h C_{hi} C_{hk} = \delta_{ik} S'_k \qquad (h, i, k = 1, 2, \dots n)$$

unterworfen sind, so dass die Transformation der quadratischen Formen

$$\sum_k S_k y_k^2, \qquad \sum_k S'_k y_k'^2 \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

in einander mittels der Substitution

$$\text{(H*)} \qquad y_i = \sum_k C_{ik} y'_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

bewirkt wird. Eine solche Transformation lässt sich aber in der allgemeinsten Weise aufstellen, da sich jede gegebene Transformation aus gewissen „elementaren" Transformationen zusammensetzen lässt*), d. h. hier aus solchen, die sich nur auf *ein* Quadrat oder auf das Aggregat von nur *zwei* Quadraten beziehen. Da nämlich für beliebige Werthe von t

$$\text{(H')} \qquad pu^2 + qv^2 = p'u'^2 + q'v'^2$$

wird, wenn man

$$u' = u + qtv\,, \qquad v' = v - ptu$$

$$p' = \frac{p}{1 + pqt^2}, \qquad q' = \frac{q}{1 + pqt^2}$$

setzt, so kann bei Anwendung der Transformation (H') auf das Aggregat $S'_1 y_1'^2 + S'_2 y_2'^2$ die Grösse t so gewählt werden, dass in einer der beiden transformirten Variabeln, die ebenfalls lineare Functionen von $y_1, y_2, \dots y_n$ sind, der Coëfficient von y_n gleich Null wird. Durch wiederholte Anwendung der Transformation (H') gelangt man auf diese Weise zu einem Aggregat von Quadraten linearer Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$, unter denen nur noch *eine* die Variable y_n enthält. Diese eine kann sich alsdann aber nur durch einen rationalen Factor von y_n selbst unterscheiden, und es handelt sich somit nur noch um die Transformation eines Aggregats von $(n-1)$ Variabeln. Bei dem angegebenen Verfahren wird also durch eine Reihe von Transformationen (H') die Form $\Sigma S' y'^2$ in die Form $\Sigma S y^2$ übergeführt, wenn schliesslich noch die „einfachen" Substitutionen $y'_k = c y_k$ hinzugenommen werden, und die allgemeinste Transformation von $\Sigma S y^2$ in ein Aggregat von Quadraten lässt sich daher als eine Folge von $\tfrac{1}{2} n(n-1)$ successive auf je zwei der Variabeln y anzuwendenden elementaren Transformationen (H') und von n einfachen Transformationen $y'_k = c y_k$ darstellen, wobei unter den

*) Vgl. meine Notiz im Monatsbericht vom October 1866 pag. 608 sqq.[1])

[1]) Band I S. 158 sqq. dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

$\frac{1}{2}n(n+1)$ willkürlichen Grössen c und t irgend welche rationale Functionen von $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots$ zu verstehen sind. — Aus dieser Betrachtung erhellt auch unmittelbar die Unveränderlichkeit der Zeichenanzahl bei der Transformation eines Aggregats von Quadraten; denn für jede einzelne elementare Transformation (H') haben offenbar die beiden Coëfficienten p', q' dieselbe Vorzeichen-Combination wie p, q.*)

Nach vorstehenden Ausführungen sind die Grössen S, nämlich die Glieder einer bestimmten *Sturm*'schen Reihe als rationale Functionen von $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots$ gegeben, und es sind daraus die Glieder S' irgend einer andern *Sturm*'schen Reihe mittels der Gleichungen (H)

$$S'_k = \sum_i S_i C_{ik}^2 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

herzuleiten. Die Coëfficienten C sind hierbei ebenfalls rationale Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$ und es tritt somit bei der *Hermite-Jacobi*'schen Methode namentlich *die* Beziehung zwischen den Reihen S und S' ganz unmittelbar in Evidenz, vermöge deren die Glieder der einen positiv sind, sobald die der andern diese Eigenschaft haben.

IV.

Die Ausdrücke von Cayley und Sylvester.

Sollen für eine ganze Function $F(x)$ die Relationen

$$\sum_{(\xi)} \frac{\xi^{p-1} F(\xi)}{f_1(\xi) f'(\xi)} = 0 \qquad (0 < p < n - n_{k-1})$$

wie oben (G) für $f_k(x)$ bestehen, so muss eine ganze Function $\Psi(x)$ vom

*) Der hier gegebene einfache Beweis für die Unveränderlichkeit der Zeichenanzahl bei reeller Transformation eines Aggregats von Quadraten steht in einer gewissen Gedankenverbindung mit demjenigen, welchen Hr. *Hermite* in *Borchardt's* Journal für Mathematik Bd. 53 p. 271 mitgetheilt hat.

Grade n_{k-1} existiren, welche für $x = \xi$ mit dem Quotienten $\frac{F(\xi)}{f_1(\xi)}$ übereinstimmt, für welche also eine Gleichung

$$F(x) = f_1(x)\Psi(x) - f(x)\Phi(x)$$

stattfindet. Hiernach ist $f_k(x)$ als eine Function von möglichst niedrigem Grade zu charakterisiren, welche den Relationen (G) für $p < n - n_{k-1}$ genügt. In Folge derselben ist, wenn

$$f_k(x) = c_k x^{n-n_k} + c'_k x^{n-n_k-1} + \cdots + c_k^{(n-n_k)}$$

gesetzt wird:

$$c_k s_h + c'_k s_{h-1} + \cdots + c_k^{(n-n_k)} s_{h-n+n_k} = 0$$

für

$$h = n - n_k, \quad n - n_k + 1, \quad \ldots \quad 2n - n_k - n_{k-1} - 2,$$

wo s_h dieselbe Bedeutung hat wie im Art. II (C'). Es bestehen also $n - n_{k-1} - 1$ lineare Gleichungen zwischen den $n - n_k + 1$ Coëfficienten c_k, und es verschwinden demnach $n_k - n_{k-1} - 1$ Determinanten von je $(n - n_k + 1)^2$ Elementen s.

Wenn $n_k - n_{k-1}$ für alle Indices k gleich Eins und also $n_k = k$ ist, so bilden, wie die Gleichungen (G') zeigen, die n Restfunctionen $f_k(x)$ selbst ein System erzeugender Functionen für eine *Sturm*'sche Reihe und zwar für die Reihe

$$\frac{c_1}{c}, \quad \frac{c_2}{c_1}, \quad \ldots \quad \frac{c_n}{c_{n-1}},$$

die Relationen (G) aber gewähren in diesem Falle die nothwendigen und hinreichenden Bestimmungen für die Functionen $f_k(x)$ und ergeben für dieselben sowohl die *Cayley*'schen als auch die *Sylvester*'schen Ausdrücke. Berücksichtigt man nämlich, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} s_0 & , s_1 , & \dots & s_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} , & s_k , & \dots & s_{2k-1} \\ 1 & , x , & \dots & x^k \end{vmatrix}$$

mit

$$|x s_{p+q} - s_{p+q+1}| \qquad (p, q = 0, 1, \dots k-1)$$

übereinstimmt, so ist die Gleichung

$$c_k \cdot |x s_{p+q} - s_{p+q+1}| = |s_{p+q}| \cdot f_k(x) \qquad (p, q = 0, 1, \dots n-k-1)$$

und

$$|s_{p+q}| \cdot c_k c_{k+1}^2 \dots c_{n-1}^2 c_n = 1 \qquad (p, q = 0, 1, \dots n-k-1)$$

unmittelbar durch die Relation (G) zu verificiren. Die Determinanten

$$|x s_{p+q} - s_{p+q+1}| \qquad (p, q = 0, 1, \dots k-1)$$

bilden demnach selbst ein System von Functionen $F_k(x)$, und die mit S bezeichneten Glieder der hieraus entstehenden *Sturm*'schen Reihe sind

$$\Big|\sum_h \eta_h \xi_h^{p+q}\Big| \cdot \Big|\sum_h \eta_h \xi_h^{p'+q'}\Big| \qquad \begin{pmatrix} p, q = 0, 1, \dots k-1 \\ p', q' = 0, 1, \dots k \\ h, k = 1, 2, \dots n \end{pmatrix},$$

wenn η_h durch die Gleichung

$$\eta_h f_1(\xi_h) f'(\xi_h) = 1$$

bestimmt wird. Bei Anwendung dieser besonderen Functionen $F_k(x)$ ergeben die Gleichungen (D') und (D'') des Art. II zwei für beliebige Grössen

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n; \ \eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$$

gültige Formeln. Wird nämlich der Ausdruck

$$\eta_h \frac{\left|\sum \eta_r (\xi_g - \xi_r) \xi_r^{p+q}\right| \cdot \left|\sum \eta_r (\xi_k - \xi_r) \xi_r^{p'+q'}\right|}{\left|\sum \eta_r \xi_r^{p'+q'}\right| \cdot \left|\sum \eta_r \xi_r^{p''+q''}\right|},$$

in welchem sich die Summationen sämmtlich auf $r = 1, 2, \dots n$, die Determinantenstriche aber resp. auf die Werthsysteme

$$p, q = 0, 1, \dots i-1; \ \ p', q' = 0, 1, \dots k-1; \ \ p'', q'' = 0, 1, \dots k$$

beziehen, als von den Zahlwerthen g, h, i, k abhängig mit $[g, h, i, k]$ bezeichnet, so müssen die beiden über alle Werthe $h = 1, 2, \dots n$ erstreckten Summen

$$\sum [h, h, i, k], \qquad \sum [i, k, h, h]$$

identisch gleich Null oder gleich Eins sein, je nachdem $i \gtrless k$ oder $i = k$ ist.*)

Wird nunmehr behufs Ableitung der *Sylvester*'schen Formeln die vollständige Eliminationsresultante zweier Gleichungen $\varphi(z) = 0$ und $\psi(z) = 0$ mit $R(\varphi, \psi)$ bezeichnet, und bedeutet $\varphi_k(x)$ irgend einen Divisor $(n-k)^{\text{ten}}$ Grades von $f(x)$, in welchem der Coëfficient von x^{n-k} gleich Eins ist, und $\varphi_{n-k}(x)$ den complementären Divisor vom k^{ten} Grade, so ist die auf alle Zerlegungen

$$f(x) = \varphi_k(x) \varphi_{n-k}(x)$$

ausgedehnte Summe

$$\text{(K)} \qquad \sum \frac{R(f_1, \varphi_{n-k})}{R(\varphi_k, \varphi_{n-k})} \varphi_k(x)$$

übereinstimmend mit

$$\text{(K')} \qquad (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} c_1^2 c_2^2 \cdots c_{k-1}^2 f_k(x).$$

Denn, bildet man die in den Relationen (G) vorkommenden Summen:

---

*) Vgl. die oben citirte *Sylvester*'sche Abhandlung p. 472 art. (f).

$$\sum_{(\xi)} \sum \frac{\xi^{p-1}\varphi_k(\xi)}{f_1(\xi)f'(\xi)} \cdot \frac{R(f_1, \varphi_{n-k})}{R(\varphi_k, \varphi_{n-k})},$$

so hat man nur diejenigen Wurzeln ξ zu nehmen, für welche

$$\varphi_k(\xi) \gtrless 0 \qquad \text{also} \qquad \varphi_{n-k}(\xi) = 0$$

ist, und es kommt, da

$$\varphi_{k-1}(x) = (x-\xi)\varphi_k(x), \qquad \varphi_{n-k}(x) = (x-\xi)\varphi_{n-k+1}(x)$$

zu setzen ist:

$$(-1)^{k-1} \sum_{(\xi)} \sum \frac{\xi^{p-1}}{\varphi'_{k-1}(\xi)} \cdot \frac{R(f_1, \varphi_{n-k+1})}{R(\varphi_{k-1}, \varphi_{n-k+1})},$$

unter $\varphi'_k(x)$ die Ableitung von $\varphi_k(x)$ verstanden. Summirt man hier zuerst über die $(n-k+1)$ Wurzeln ξ je einer bestimmten Gleichung $\varphi_{k-1}(x) = 0$, so sieht man, dass in der That, wie es die Relationen (G) erheischen, für $p < n-k+1$ nach den *Euler*'schen Formeln der Summenausdruck verschwindet und aber für $p = n-k+1$ sich auf

$$(-1)^{k-1} \sum \frac{R(f_1, \varphi_{n-k+1})}{R(\varphi_{k-1}, \varphi_{n-k+1})}$$

d. h. auf den Coëfficienten der höchsten Potenz von x in dem Ausdrucke (K) reducirt, wenn darin $(k-1)$ für k gesetzt und der Factor $(-1)^{k-1}$ hinzugefügt wird. Dieser Coëfficient wird nach dem oben angenommenen Werthe des Ausdrucks (K)

$$(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} c_1^2 c_2^2 \cdots c_{k-2}^2 c_{k-1}$$

also in der That genau übereinstimmend mit dem Werthe der Summe, welchen man erhält, wenn man den durch $f_1(x)f'(x)$ dividirten Ausdruck (K') mit x^{n-k} multiplicirt und alsdann über alle Werthe $x = \xi$ summirt.

V.

Anderweite Bedeutung des Sylvester'schen Ausdrucks.

Der *Sylvester*'sche Ausdruck (K) erhält noch eine anderweite Bedeutung, wenn man denselben mit jener Interpolationsformel in Beziehung setzt, die ich im Monatsbericht vom December 1865 pag. 691 aufgestellt habe.[1] Werden die oben im Ausdruck (K) vorkommenden Bezeichnungen beibehalten und noch die Wurzeln ξ der Gleichung $\varphi_{n-k}(x) = 0$ durch die Indices 1, 2, ... k charakterisirt, so lässt sich die erwähnte Formel auf folgende Gestalt bringen:

$$\text{(L)} \qquad \sum \frac{P(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k)}{R(\varphi_k, \varphi_{n-k})} \varphi_k(x_1)\varphi_k(x_2)\cdots\varphi_k(x_k),$$

— die Summation auf alle Zerlegungen

$$f(x) = \varphi_k(x)\varphi_{n-k}(x)$$

ausgedehnt — und stellt daher eine ganze symmetrische Function der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_k$ dar, welche in Beziehung auf jede derselben von möglichst niedrigem Grade und dabei ihrem Werthe nach mit dem der Function $P(x_1, x_2, \dots x_k)$ übereinstimmend ist, sobald für die k Variabeln x irgend welche k Wurzeln ξ der Gleichung $f(x) = 0$ gesetzt werden. Die Function (L) ist hierdurch vollständig definirt und kann aber auch auf andre Weise aus der nunmehr als ganz vorauszusetzenden Function $P(x_1, x_2, \dots x_k)$ abgeleitet werden. Bedeuten nämlich $x_1, x_2, \dots x_n$ unbestimmte Variable und setzt man

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n,$$

so sind $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n$ die n „elementaren symmetrischen Functionen“ der n Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ und jedes Product

$$(x-x_k)(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n),$$

[1] Ueber einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrer Variabeln. Band I S. 133—141 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. (S. S. 141.) H.

für $k = 1, 2, \ldots n$, ist eine ganze Function $(n-k+1)^{\text{ten}}$ Grades von x, deren Coëfficienten ganze ganzzahlige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ sind. Da diese Function von x für $x = x_k$ identisch Null ist, so lässt sich jede höhere als die $(n-k)^{\text{te}}$ Potenz von x_k durch Einführung der elementaren symmetrischen Functionen wegschaffen, und indem man dies successive für $k = n, n-1, n-2, \ldots 1$ ausführt, kann man offenbar jede ganze ganzzahlige Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf eine solche reduciren, welche in Beziehung auf jedes x_k nur vom Grade $(n-k)$ ist, und deren Coëfficienten ganze ganzzahlige Functionen der elementaren symmetrischen Functionen $\mathfrak{f}$ sind. Eine solche „reducirte Form" einer ganzen Function von n Variabeln ist völlig bestimmt*), und man muss daher den obigen Ausdruck (L) erhalten, wenn man $P(x_1, x_2, \ldots x_k)$ auf die reducirte Form bringt und darin die elementaren symmetrischen Functionen $\mathfrak{f}$ durch die bezüglichen positiv oder negativ zu nehmenden Coëfficienten der Gleichung $f(x) = 0$ ersetzt.

Nimmt man für $P(x_1, x_2, \ldots x_k)$ das Product

$$f_1(x_1) f_1(x_2) \cdots f_1(x_k),$$

so geht der Ausdruck (L) in folgenden über:

$$\text{(L')} \qquad \sum \frac{R(f_1, \varphi_{n-k})}{R(\varphi_k, \varphi_{n-k})} \varphi_k(x_1) \varphi_k(x_2) \cdots \varphi_k(x_k),$$

und der *Sylvester*'sche Ausdruck (K) ist demnach, wenn darin die Variable x_1 für x genommen wird, der Coëfficient des Gliedes

$$(x_2 x_3 \cdots x_k)^{n-k}$$

in der reducirten Form von $P(x_1, x_2, \ldots x_k)$. Wenn daher das Product

$$f_1(\xi_1) f_1(\xi_2) \cdots f_1(\xi_k)$$

*) Hieraus folgt unmittelbar die Darstellbarkeit jeder ganzen symmetrischen Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ als ganze ganzzahlige Function der elementaren Functionen $\mathfrak{f}$.

als ganze Function gewisser Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ auf die als „reducirt" charakterisirte Form gebracht und darin der Coëfficient des Gliedes höchster Dimension, nämlich des Gliedes

$$(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k)^{n-k}$$

mit γ_k bezeichnet wird, so unterscheidet sich γ_k nur durch einen quadratischen Factor von

$$(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} c_k,$$

und es bilden also die Glieder

$$(-1)^k \gamma_k \gamma_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

eine *Sturm*'sche Reihe für die Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$.

Die vorstehende Auseinandersetzung führt auf einfache Weise zur Bestimmung der Coëfficienten c_k' in den aus der Entwickelung von $\frac{f_1'(x)}{f(x)}$ hervorgehenden Restfunctionen $f_k'(x)$, wenn $f_1'(x)$ durch $f_1(x)$ so bestimmt wird, dass für jede Wurzel ξ die Gleichung

$$f_1(\xi) = (a - \xi) f_1'(\xi)$$

stattfindet. Alsdann ist nämlich offenbar der Werth des Productes

$$f_1'(x_1) f_1'(x_2) \cdots f_1'(x_k)$$

für $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots, x_k = \xi_k$ gleich

$$f_1(\xi_1) f_1(\xi_2) \cdots f_1(\xi_k) \cdot \frac{\varphi_k(a)}{f(a)};$$

der Coëfficient γ_k', nämlich

$$\sum \frac{R(f_1', \varphi_{n-k})}{R(\varphi_k, \varphi_{n-k})},$$

ist also gleich

$$\sum \frac{R(f_1, \varphi_{n-k})}{R(\varphi_k, \varphi_{n-k})} \cdot \frac{\varphi_k(a)}{f(a)},$$

und hieraus erhält man, wenn die Uebereinstimmung der Ausdrücke (K) und (K') in Rücksicht gezogen und dort einerseits $x = a$ andrerseits $x = \infty$ gesetzt wird, zur Bestimmung der Coëfficienten c_k' die Gleichung

$$c_k' = \left(\frac{c_1 c_2 \cdots c_{k-1}}{c_1' c_2' \cdots c_{k-1}'}\right)^2 \cdot \frac{f_k(a)}{f(a)}.$$

Hiernach kommt

$$\frac{c_k' c_{k-1}'}{c_{k-1}^2} = \frac{f_k(a)}{f_{k-1}(a)};$$

auch diese Betrachtung führt also zu dem Resultate, dass die Quotienten von je zwei aufeinanderfolgenden Restfunctionen $f_k(a)$ die Glieder einer *Sturm*'schen Reihe für die Functionen $f(x)$, $f_1'(x)$ bilden, und so zeigt sich in Uebereinstimmung mit der am Schlusse des Art. I gemachten Bemerkung, dass die hier überall festgehaltene Betrachtung der nur auf das ganze Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ bezüglichen *Sturm*'schen Reihen keine Beschränkung der Allgemeinheit involvirt.

VI.

Die Beziehungen zwischen den Sturm'schen Reihen, welche im weiteren Sinne des Wortes zu $f(x)$, $f_1(x)$ gehören.

Wenn $P_1, P_2, \ldots P_n$ sowie die Coëfficienten von $R_1(x), R_2(x), \ldots R_n(x)$ rationale Functionen von $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots$ sind und dann $\mathfrak{f}_1(x)$ als ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x dadurch definirt wird, dass die Gleichung

(M) $$\mathfrak{f}_1(\xi) \sum_g P_g R_g(\xi)^2 = f_1(\xi) \qquad (g=1,2,\ldots m)$$

für sämmtliche Wurzeln ξ Geltung haben solle, so lässt sich eine gewisse Beziehung zwischen den zu $f(x)$, $f_1(x)$ und den zu $f(x)$, $\mathfrak{f}_1(x)$ gehörigen *Sturm*'schen Reihen aufstellen. Es seien nämlich gemäss Art. II $F_k(x)$ und $\mathfrak{F}_k(x)$ Systeme erzeugender Functionen für die *Sturm*'schen Reihen S und $\mathfrak{S}$, dergestalt dass die beiden quadratischen Formen der Variabeln V und $\mathfrak{V}$

$$\sum_{(\xi)} \frac{1}{f_1(\xi) f'(\xi)} \left(V_1 F_1(\xi) + V_2 F_2(\xi) + \cdots + V_n F_n(\xi)\right)^2$$

$$\sum_{(\xi)} \frac{1}{\mathfrak{f}_1(\xi) f'(\xi)} \left(\mathfrak{V}_1 \mathfrak{F}_1(\xi) + \mathfrak{V}_2 \mathfrak{F}_2(\xi) + \cdots + \mathfrak{V}_n \mathfrak{F}_n(\xi)\right)^2$$

resp. gleich

$$\sum_k S_k V_k^2 \quad \text{und} \quad \sum_k \mathfrak{S}_k \mathfrak{V}_k^2 \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

werden. Bestimmt man nun mn lineare Functionen V_{kg} der n Variabeln $\mathfrak{V}_k$

$$V_{kg} = \sum_i C_{gk}^{(i)} \mathfrak{V}_i \qquad (g=1,2,\ldots m;\ i,k=1,2,\ldots n)$$

so, dass die Gleichung

$$R_g(\xi) \sum_i \mathfrak{V}_i \mathfrak{F}_i(\xi) = \sum_k V_{kg} F_k(\xi) \qquad (i,k=1,2\ldots n)$$

also auch die Gleichung

$$R_g(\xi) \mathfrak{F}_i(\xi) = \sum_k C_{gk}^{(i)} F_k(\xi) \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

für sämmtliche Wurzeln ξ sowie für alle Werthe der Indices g und i erfüllt ist, so wird der Ausdruck

$$\sum_g \sum_k P_g S_k V_{kg}^2 \qquad (g=1,2,\ldots m;\ k=1,2,\ldots n)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sum_{(\xi)}\sum_{g}\frac{P_g}{f_1(\xi)f'(\xi)}\Big(\sum_k V_{kg}F_k(\xi)\Big)^2 \qquad \left(\begin{smallmatrix} g=1,2,\dots m \\ k=1,2,\dots n\end{smallmatrix}\right)$$

identisch mit

$$\sum_{(\xi)}\sum_{g}\frac{P_g R_g(\xi)^2}{f_1(\xi)f'(\xi)}\Big(\sum_i \mathfrak{B}_i\mathfrak{F}_i(\xi)\Big)^2 \qquad \left(\begin{smallmatrix} g=1,2,\dots m \\ i=1,2,\dots n\end{smallmatrix}\right)$$

oder also wegen der Gleichung (M) auch identisch mit

$$\sum_{(\xi)}\frac{1}{\mathfrak{f}_1(\xi)f'(\xi)}\Big(\sum_i \mathfrak{B}_i\mathfrak{F}_i(\xi)\Big)^2 \quad \text{oder} \quad \sum_i \mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i^2 \qquad (i=1,2,\dots n).$$

Es resultirt daher die Gleichung

$$\sum_g\sum_k P_g S_k V_{kg}^2 = \sum_i \mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i^2 \qquad \left(\begin{smallmatrix} g=1,2,\dots m \\ i,k=1,2,\dots n\end{smallmatrix}\right)$$

oder also

$$\sum_g\sum_{h,i,k} P_g S_k C_{gk}^{(h)}C_{gk}^{(i)}\mathfrak{B}_h\mathfrak{B}_i = \sum_i \mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i^2 \qquad \left(\begin{smallmatrix} g=1,2,\dots m \\ h,i,k=1,2,\dots n\end{smallmatrix}\right)$$

und schliesslich

(N) $$\sum_g\sum_k P_g S_k C_{gk}^{(h)}C_{gk}^{(i)} = \delta_{hi}\mathfrak{S}_i \qquad \left(\begin{smallmatrix} g=1,2,\dots m \\ h,i,k=1,2,\dots n\end{smallmatrix}\right)$$

Die Formel (D″) im Art. II ergiebt, wenn darin $h=i$ gesetzt wird,

$$\sum_k \frac{F_k(\xi)^2}{S_k} = f_1(\xi)f'(\xi) \qquad (k=1,2,\dots n).$$

Bezeichnet man daher, entsprechend der Function $f_1(x)$, mit $f_1'(x)$ irgend eine andere Function vom Grade $(n-1)$ und haben alsdann $F_k'(x)$ und S_k' die analoge Bedeutung von $F_k(x)$ und S_k, so kann man in (M) die Zahl $m=n$ und

$$P_g = S_g', \quad R_g(\xi) = \frac{F_g'(\xi)}{S_g'} \qquad (g=1,2,\dots n)$$

setzen, wonach

$$\mathfrak{f}_1(\xi)f_1'(\xi)f'(\xi) = f_1(\xi)$$

und

$$S_i'S_k C_{ik}^{(h)} = \sum_{(\xi)}\frac{\mathfrak{F}_h(\xi)F_i'(\xi)F_k(\xi)}{f_1(\xi)f'(\xi)} \qquad (h,i,k=1,2,\dots n)$$

wird. Die Formel (N) geht dabei, wenn darin $h=i$ genommen wird, in folgende über

(N′) $$\sum_i\sum_k S_i'S_k C_{ik}^{(h)}C_{ik}^{(h)} = \mathfrak{S}_h \qquad (h,i,k=1,2,\dots n),$$

und, falls $f_1'(x) = f_1(x)$ gesetzt wird, in die noch speciellere

(N″) $$\sum_i\sum_k S_i S_k C_{ik}^{(h)}C_{ik}^{(h)} = \mathfrak{S}_h \qquad (h,i,k=1,2,\dots n),$$

auf deren Bedeutung nachher näher eingegangen werden soll.

Ist die ganze Function $\mathfrak{f}_1(x)$ so beschaffen, dass das Product $f_1(\xi)\mathfrak{f}_1(\xi)$ für alle reellen Wurzeln ξ der Gleichung $f(x)=0$ einen positiven Werth erhält, so sind die Nullpunkte von $f(x)$ als Aus- und Eintrittsstellen gleich charakterisirt, sei es dass man die Function $f_1(x)$ oder die Function $\mathfrak{f}_1(x)$ dabei zu Hilfe nimmt. Die am Schlusse des Art. I mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ bezeichneten Zahlen sind also für beide Functionen $f_1(x)$ und $\mathfrak{f}_1(x)$ dieselben, und die Charakteristiken der beiden Functionen-Systeme

$$\big(y,\ f(x)-y,\ f_1(x)-y\big), \quad \big(y,\ f(x)-y,\ \mathfrak{f}_1(x)-y\big)$$

haben einen und denselben Werth. Da hiernach in einer den Functionen $f(x), \mathfrak{f}_1(x)$ zugehörigen *Sturm*'schen Reihe $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$ die Differenz zwischen der Anzahl positiver und negativer Werthe gleich der in einer zu den Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ gehörigen Reihe $S_1, S_2, \dots$ ist, so kann man „im weiteren Sinne des Wortes“ auch die *Sturm*'sche Reihe $\mathfrak{S}$ als den Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ zugehörig betrachten. In diesem „weiteren Sinne“ ist wiederum, wie oben

(Art. II) in der engeren Bedeutung des Wortes, die Gesammtheit der zu $f(x)$ und $f_1(x)$ gehörigen *Sturm*'schen Reihen erst dadurch zu präcisiren, dass man gewisse Grössen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, ... zu Grunde legt und alsdann festsetzt, es sollen sowohl die Coëfficienten von $f(x)$ als auch die aller Functionen $f_1(x)$, $\mathfrak{f}_1(x)$, ... rationale Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, ... mit ganzzahligen Coëfficienten sein.

Die Voraussetzung, welche hier über die Beziehungen zwischen $f_1(x)$ und $\mathfrak{f}_1(x)$ gemacht worden, ist erfüllt, sobald die obige Gleichung (M) besteht und die Grössen P_g darin sämmtlich positiv sind. Durch die Gleichung (N) findet sich alsdann jedes Glied der *Sturm*'schen Reihe $\mathfrak{S}$ als eine homogene lineare Function der Glieder der Reihe S mit wesentlich positiven Coëfficienten dargestellt, und also der Zusammenhang zwischen verschiedenen *Sturm*'schen Reihen, welche der obigen Ausdrucksweise gemäss im weiteren Sinne des Wortes zu den Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ gehören, in analoger Weise in Evidenz gesetzt, wie es für die im engeren Sinne zusammengehörigen *Sturm*'schen Reihen die *Hermite-Jacobi*'sche Betrachtung (cf. Art. III) ganz unmittelbar ergiebt.

Die im weiteren Sinne zu $f(x)$, $f'(x)$ gehörigen *Sturm*'schen Reihen geben, da alsdann nur Austrittsstellen vorhanden sind, durch die Vorzeichen ihrer Glieder die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ an und können deshalb füglich als die zu dieser Gleichung gehörigen *Sturm*'schen Reihen bezeichnet werden. Die Reihe S' ist eine solche, wenn nur die obige Voraussetzung festgehalten wird, dass die Reihe $\mathfrak{S}$ im weiteren Sinne zu $f(x)$, $f_1(x)$ gehört; denn alsdann ist vermöge der obigen Gleichung

$$\mathfrak{f}_1(\xi)f_1'(\xi)f'(\xi)=f_1(\xi)$$

mit dem Producte $\mathfrak{f}_1(\xi)f_1(\xi)$ auch das Product $f_1'(\xi)f'(\xi)$ für alle reellen Wurzeln ξ positiv. Die Formel (N′) stellt also jedes Glied irgend einer den Functionen $f(x)$, $f_1(x)$ angehörigen *Sturm*'schen Reihe als eine bilineare Form der n Glieder einer andern solchen Reihe und der n Glieder einer zu der Gleichung $f(x)=0$ gehörigen *Sturm*'schen Reihe dar und zwar so, dass sämmtliche Coëfficienten Quadrate rationaler Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$ sind.

Durch die Formel (N″) endlich findet sich jedes Glied von gewissen *Sturm*-schen Reihen der Gleichung $f(x)=0$ als eine quadratische Form der n Glieder irgend einer beliebigen *Sturm*'schen Reihe S und zwar mit quadratischen Coëfficienten dargestellt. Die drei Formeln (N) erhalten ihre eigentliche Bedeutung in dem Falle, wo die sämmtlichen Glieder der *Sturm*'schen Reihe S positiv sind, insofern alsdann das mit $\mathfrak{S}_h$ bezeichnete Glied einer andern *Sturm*'schen Reihe als Summe von je n^2 Quadraten mit positiven Coëfficienten dargestellt erscheint. Sind aber die Grössen S sämmtlich positiv, so müssen für die am Schlusse des Art. I eingeführten Grössen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ die Gleichungen

$$\mathfrak{P}(c_k c_{k-1})=n\,,\quad \mathfrak{N}(c_k c_{k-1})=0 \quad \text{also} \quad \mathfrak{A}=n\,,\quad \mathfrak{E}=0$$

stattfinden; dieser Fall tritt daher nur bei solchen Gleichungen $f(x)=0$ ein, die lauter reelle Wurzeln haben, und auch dann nur bei solchen *Sturm*'schen Reihen, die der Gleichung $f(x)=0$ selbst angehören. Aus der Bedingung $\mathfrak{A}=n$ folgt für den vorliegenden Fall, dass auch die im Art. I mit ν bezeichnete Anzahl der Glieder in der Kettenbruchsentwickelung von $f_1(x):f(x)$ gleich n sein muss, dass also diese Entwickelung regulär ist. Es können demnach bei Anwendung der Formel (N″), wie im Art. IV, für die erzeugenden Functionen $F_k(x)$ die Determinanten

$$|xs_{p+q}-s_{p+q+1}| \qquad (p,q=0,1,\ldots k-1)$$

genommen werden, und dann resultirt die Formel

$$(\mathrm{N}''')\qquad |s_{p+q}|\cdot|s_{p'+q'}|=\sum_i\sum_k S_iS_kC_{ik}^{(h)}C_{ik}^{(h)}\,,$$

$$(p,q=0,1,\ldots h-1;\ \ p',q'=0,1,\ldots h;\ \ h,i,k=1,2,\ldots n)$$

in welcher die Coëfficienten C durch die Gleichung

$$(\mathrm{N}'''')\qquad S_iS_kC_{ik}^{(h)}=\sum_{(\xi)}\frac{F_i(\xi)F_k(\xi)}{f_1(\xi)f'(\xi)}\,|\xi s_{p+q}-s_{p+q+1}| \qquad (p,q=0,1,\ldots h-1)$$

bestimmt sind. Die Grössen s bedeuten hierbei die Potenzsummen der Wurzeln ξ, da für die Formel (N″) die Annahme

$$f_1'(x) = f_1(x) \quad \text{und also} \quad \mathfrak{f}_1(\xi) f'(\xi) = 1$$

gilt. Das hiernach in der Gleichung (N‴) enthaltene Resultat ist folgendermassen zu formuliren:

> „Wenn eine Gleichung vom Grade n, deren Coëfficienten rationale Functionen reeller Grössen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots$ sind, lauter reelle Wurzeln (ξ) hat, so lässt sich jedes Glied einer ihrer *Sturm*'schen Reihen
>
> $$|\sum \xi^{p+q}| \cdot |\sum \xi^{p'+q'}| \qquad \begin{pmatrix} p,\, q = 0, 1, \ldots k \\ p',\, q' = 0, 1, \ldots k-1 \\ k = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$
>
> als eine quadratische Form der n Glieder irgend einer andern so darstellen, dass die n^2 Coëfficienten sämmtlich Quadrate rationaler Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$ sind.“

Hieraus folgt die Darstellung jener Determinanten-Producte als Summen von je n^2 Quadraten rationaler Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$, wenn diese so gewählt sind, dass mindestens eine der *Sturm*'schen Reihen aus lauter positiven Einheiten besteht, und dies ist für irgend eine Gleichung mit reellen Wurzeln z. B. stets in der Weise möglich, dass man den Coëfficienten derselben noch die Quadratwurzeln aus den n Gliedern irgend einer *Sturm*'schen Reihe (als $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots$) adjungirt. Bedeutet $D(x)$ die aus reellen Grössen a_{ik} gebildete symmetrische Determinante

$$|x\delta_{ik} - a_{ik}| \qquad (a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so existirt, wie bekannt, eine solche aus positiven Einheiten bestehende *Sturm*'sche Reihe für die Gleichung $D(x) = 0$, wenn die Grössen a_{ik} selbst gleich $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots$ genommen werden. Andrerseits ist aber auch jede Gleichung $f(x) = 0$, deren Wurzeln ξ sämmtlich reell sind, auf diese Form zu bringen, sobald eben die Glieder einer *Sturm*'schen Reihe sämmtlich gleich Eins sind, d. h. also sobald für irgend eine rationale Function $\mathfrak{F}(x)$

$$\text{(O)} \qquad \sum_{(\xi)} \mathfrak{F}(\xi)(y_1 + y_2\xi + \cdots + y_n\xi^{n-1})^2 = \sum_k z_k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

ist, da alsdann die Grössen a_{ik} durch die Gleichung

$$\text{(O')} \qquad \sum_{(\xi)} \xi\mathfrak{F}(\xi)(y_1 + y_2\xi + \cdots + y_n\xi^{n-1})^2 = \sum_{i,k} a_{ik} z_i z_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt werden und zwar als rationale Functionen der Coëfficienten von $f(x)$ und der Coëfficienten der Substitution, durch welche die Variabeln y und z mit einander verbunden sind. Da nun bekanntlich von Hrn. *Borchardt* gezeigt worden ist, dass die Determinanten $|\Sigma\xi^{p+q}|$, welche aus den Potenzsummen der Wurzeln ξ jener Gleichung $D(x) = 0$ gebildet sind, sich als Summen von Quadraten darstellen lassen*), so lehrt jene Betrachtung, dass eigentlich schon daraus ein analoges Resultat für beliebige Gleichungen $(f(x) = 0)$ mit reellen Wurzeln gefolgert werden kann, zugleich geht aber aus eben derselben Betrachtung hervor, dass es dem Wesen der Sache nicht entsprechen würde, die erwähnte Eigenschaft der Determinanten $|\Sigma\xi^{p+q}|$ als an jene besondere Determinantenform der Gleichung $f(x) = 0$ geknüpft anzunehmen.

Bei der obigen Formulirung des in der Gleichung (N‴) enthaltenen Resultats erscheint die Eigenschaft der Gleichung $f(x) = 0$, dass die Glieder einer ihrer *Sturm*'schen Reihen sich in Form eines Aggregats von Quadraten mit gewissen positiven Coëfficienten darstellen lassen, als eine Folge der Eigenschaft, dass alle ihre Wurzeln reell sind. Umgekehrt aber lässt sich die Realität der Wurzeln einer Gleichung aus jener Eigenschaft ihrer *Sturm*schen Reihen nicht unbedingt erschliessen; denn eine Summe von Quadraten rationaler Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$ kann freilich — auch für specielle Werthe etwaiger Variabeln $\mathfrak{R}$ — *nicht negativ* werden, aber die Realität der Wurzeln von $f(x) = 0$ erfordert geradezu, dass alle Glieder einer *Sturm*schen Reihe *positiv* seien. Die oben citirte *Borchardt*'sche Darstellung *Sturm*scher Functionen für die Gleichung $D(x) = 0$ kann deshalb nicht ohne Weiteres, wie Seitens anderer Autoren geschehen**), als Beweis für die Rea-

*) *Liouville's* Journal Bd. XII.[1])

**) *Joachimsthal, Crelle's* Journal Bd. 48 pag. 401. *Brioschi* a. a. O., pag. 271. *Serret*, Cours d'algèbre supérieure, Paris 1866, Tome I. pag. 577.

[1]) *C. W. Borchardt*, Gesammelte Werke. S. 15—30. (Vgl. a. a. O. S. 506.) H.

lität der Wurzeln aufgefasst werden, hierzu bedürfte es vielmehr noch des Nachweises, dass die einzelnen Quadrate in jener Darstellung nicht sämmtlich gleich Null werden können, wenigstens nicht, so lange die Discriminante der Gleichung von Null verschieden ist. Dieser Nachweis ist, wenn man die Realität der Wurzeln von $f(x)=0$ *voraussetzt*, leicht daraus abzuleiten, dass alsdann die Kettenbruchsentwickelung von $f'(x):f(x)$ regulär sein muss. Die Realität der Wurzeln von $D(x) \doteq 0$ folgt aber eben ganz einfach daraus, dass eine ihrer *Sturm*'schen Reihen aus lauter positiven Einheiten besteht*), und grade diese *Sturm*'sche Reihe bietet sich von selbst dar, wenn man das Problem der Transformation quadratischer Formen behandelt, welches auf jene Gleichung führt. Bei der Behandlung der bezüglichen Aufgabe war eigentlich mit der Erkenntniss, dass *jede* Gleichung auf jene Determinantenform gebracht werden kann**), das Princip der *Hermite-Jacobi*'schen Methode fast unmittelbar gegeben, und die *Borchardt*'schen Mittheilungen im 53. Bande seines Journals (pag. 281 sqq.) machen es auch wahrscheinlich, dass *Jacobi* in solcher Weise zu den dort angegebenen Entwickelungen gekommen ist. Wenn *Jacobi* dabei nicht, wie Hr. *Hermite*, von vornherein auf die Ermittelung der Anzahl reeller Wurzeln in einem beliebigen Intervall sondern nur auf die Bestimmung der Gesammtzahl derselben ausgegangen ist, so lag darin nur scheinbar eine Beschränkung der Allgemeinheit; denn erstens entsprechen den zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ die sämmtlichen reellen Wurzeln z der Gleichung

$$f\left(\frac{a+bz^2}{1+z^2}\right)=0,$$

und zweitens ist die Anzahl jener offenbar gleich dem Ueberschusse der Anzahl reeller Wurzeln in der Gleichung $f(z^2+a)=0$ über die in der Gleichung $f(z^2+b)=0$, wenn $a<b$ vorausgesetzt wird. Bei dieser letzteren Betrachtung führt die *Jacobi*'sche Entwickelung unmittelbar auf die von Hrn.

*) Sachlich stimmt diese Begründung der Realität mit derjenigen überein, welche Hr. *Baltzer* in sein Determinanten-Lehrbuch (III. Aufl., p. 190) aufgenommen hat. Die Discriminante der Gleichung wird dabei stets von Null verschieden vorausgesetzt.

**) Siehe oben die Gleichung (O) und (O').

Hermite aufgestellte erzeugende quadratische Form und alsdann auf die Determinanten

$$|as_{p+q}-s_{p+q+1}|,\quad |bs_{p+q}-s_{p+q+1}| \qquad (p,q=0,1,\dots k-1),$$

welche nach Art. IV sich von den Restfunctionen bei der Entwickelung von $\frac{f'(a)}{f(a)}$ und $\frac{f'(b)}{f(b)}$ nur durch quadratische Factoren unterscheiden.

Wenn die ursprüngliche *Sturm*'sche Methode zur Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung durch ihre wahrhaft grossartige Einfachheit und Allgemeinheit ausgezeichnet ist, so hat ihr gegenüber die spätere *Hermite-Jacobi*'sche Betrachtungsweise doch *den* Vorzug, dass sie die Einsicht in die gegenseitigen Beziehungen der *Sturm*'schen Reihen ganz wesentlich erleichtert. Wie nur mühsam und dabei unvollständig eine solche Einsicht zu erlangen ist, wenn man auf die Benutzung des *Sturm*'schen Verfahrens allein angewiesen ist, zeigt sich in der immerhin sehr werthvollen Arbeit, welche *Joachimsthal* im 48. Bande des *Crelle*'schen Journals veröffentlicht hat. Während dort nur die verschiedenen Functionen $f_1(x)$ in Betracht gezogen werden, für welche die Restfunctionen der Entwickelung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ *Sturm*'sche Reihen für die Gleichung $f(x)=0$ liefern, gewährt die *Hermite-Jacobi*'sche Methode ausserdem, auch ohne die oben im Art. II eingeführte Modification derselben, ohne Weiteres die $\frac{1}{2}n(n+1)$fache Mannigfaltigkeit der zu einem und demselben System $\big(f(x), f_1(x)\big)$ gehörigen *Sturm*'schen Reihen.*) Die *Jacobi*'sche Transformation**) lässt sich nämlich auf die erzeugende quadratische Form

$$\sum_i \sum_k \sum_{(\xi)} y_i y_k \xi^{i+k-2} \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

insofern verschiedentlich anwenden, als die Aufeinanderfolge der Variabeln y verschieden gewählt werden kann, und es ist ferner von jeder anderen Transformation Gebrauch zu machen, welche jene erzeugende Form in ein Aggregat

*) Cf. Art. III.

**) *Borchardt's* Journal, Bd. 53. pag. 270.

von Quadraten verwandelt.*) Endlich kann in der erzeugenden Form auch statt der Wurzel ξ irgend eine ganze Function derselben genommen werden, deren Coëfficienten ebenso wie die von $f(x)$ rationale Functionen von $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots$ sind. Alle diese ganzen Functionen von ξ sind, ebenso wie ξ selbst, Wurzeln von Gleichungen n^{ten} Grades und zu derselben Klasse algebraischer Functionen von $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots$ zu rechnen, wenn die betreffende Gleichung irreductibel ist. Auch die Gleichungen selbst können füglich (bei Festhaltung der Grössen $\mathfrak{R}$) als einer und derselben Klasse angehörig aufgefasst und bezeichnet werden, und die Gesammtheit der *Sturm*'schen Reihen einer Gleichung gehört dann nicht sowohl dieser Gleichung speciell sondern der ganzen Klasse von Gleichungen an. Dies liegt schon in der im Art. II gegebenen, auf die *Hermite-Jacobi*'sche Methode gegründeten Definition, völlig übereinstimmend mit der Bedeutung, welche die *Sturm*'schen Reihen einer Gleichung für die Anzahl der reellen Wurzeln haben; es tritt aber keineswegs in Evidenz, wenn die *Sturm*'schen Reihen nur mittels der ursprünglichen *Sturm*'schen Methode hergeleitet und definirt werden.

VII.

Die Determinantenformen der Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$, auf welche die verschiedenen Sturm'schen Reihen führen.

Wenn $F_1(x), F_2(x) \ldots$, wie durchweg im Vorhergehenden, die Bedeutung haben, erzeugende Functionen *Sturm*'scher Reihen für $f(x)$, $f_1(x)$ zu sein, so ist

$$\sum_h \frac{F_i(\xi_h) F_k(\xi_h)}{f_1(\xi_h) f'(\xi_h)} = \delta_{ik} S_k \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

unter $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ verstanden. Setzt man nun

*) Bei manchen Gleichungen, wie z. B. bei der Gleichung $x^n = 1$, ist die *Jacobi*'sche Transformation gar nicht anwendbar, wie auch die Aufeinanderfolge der Variabeln y gewählt werden möge.

$$\sum_h \xi_h \frac{F_i(\xi_h) F_k(\xi_h)}{f_1(\xi_h) f'(\xi_h)} = S_i A_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so ist die quadratische Form der Variabeln V

$$\text{(P)} \qquad \sum_{i,k} (x\delta_{ik} - A_{ik}) S_i V_i V_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

identisch mit

$$\text{(P')} \qquad \sum_h \frac{x - \xi_h}{f_1(\xi_h) f'(\xi_h)} \Big(\sum_k V_k F_k(\xi_h)\Big)^2 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n),$$

und es ist hiernach

$$|x\delta_{ik} - A_{ik}| = f(x) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Andrerseits ist aber die Form (P) auch identisch mit

$$\text{(P'')} \qquad \sum_h \frac{(x - \xi_h) S_r}{f_{rr}(\xi_h) f'(\xi_h)} \Big(\sum_k f_{rk}(\xi_h) V_k\Big)^2 \qquad (h, k, r = 1, 2, \ldots n),$$

wenn $f_{rk}(x)$ die Unterdeterminanten von $|x\delta_{ik} - A_{ik}|$ bedeuten. Für die hier eingeführten Ausdrücke A_{ik}, f_{ik} gelten nämlich die Relationen

$$\text{(Q)} \qquad \begin{gathered} S_i A_{ik} = S_k A_{ki}, \qquad S_i f_{ik}(x) = S_k f_{ki}(x) \\ S_r f_{ri}(\xi_h) f_{rk}(\xi_h) = S_i f_{ik}(\xi_h) f_{rr}(\xi_h) \end{gathered} \qquad (h, i, k, r = 1, 2, \ldots n),$$

und mit Benutzung derselben geht (P'') in die Form

$$\sum_{h,i,k} \frac{f_{ik}(\xi_h)}{f'(\xi_h)} (x - \xi_h) S_i V_i V_k \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

über, deren Uebereinstimmung mit (P) sich unmittelbar ergiebt, wenn man von den *Euler*'schen Formeln

$$\sum_h \frac{\xi_h^{r-1}}{f'(\xi_h)} = \delta_{r,n} \qquad (h, r = 1, 2, \ldots n)$$

Gebrauch macht. Ueberdies kann man die Transformation von (P) in (P″) auch in der üblichen Weise bewirken*), wenn man zuerst in (P″) die Gleichung

$$(\mathrm{Q}') \qquad f_{rr}(\xi_h) f'(\xi_h) = \sum_k f_{rk}(\xi_h) f_{kr}(\xi_h) \qquad {\scriptstyle (h,\,k,\,r=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$

anwendet, eine Gleichung, welche in folgender Weise hergeleitet werden kann. Gemäss der Definition der Unterdeterminanten $f_{ir}(x)$ ist

$$\sum_i (x\delta_{ik} - A_{ik}) f_{ir}(x) = \delta_{kr} f(x) \qquad {\scriptstyle (i,\,k,\,r=1,\,2,\,\ldots\,n)},$$

und wenn hier nach x differentiirt, alsdann mit $f_{rk}(x)$ multiplicirt und über $k = 1, 2, \ldots n$ summirt wird, so erhält man die Gleichung

$$f_{rr}(x) f'(x) - f'_{rr}(x) f(x) = \sum_k f_{kr}(x) f_{rk}(x) \qquad {\scriptstyle (k,\,r=1,\,2,\,\ldots\,n)},$$

aus welcher die obige Gleichung (Q′) für $x = \xi_h$ hervorgeht.

Die *Sturm*'sche Reihe S gehört ebenso wie zu $f(x)$, $f_1(x)$ auch zu den Functionen $f(x)$, $f'_1(x)$, wenn für jede Wurzel ξ

$$f'_1(\xi) = f_1(\xi)\varphi(\xi)^2$$

ist, unter $\varphi(x)$ eine rationale Function von x, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ ... verstanden, und es kann daher irgend eine dieser Functionen $f_1(x)$ als Repräsentant aller gewählt werden. Nun folgt aus der Uebereinstimmung von (P′) und (P″)

$$(\mathrm{R}) \qquad \frac{F_i(\xi_h) F_k(\xi_h)}{f_1(\xi_h)} = S_r \cdot \frac{f_{ri}(\xi_h) f_{rk}(\xi_h)}{f_{rr}(\xi_h)} \qquad {\scriptstyle (h,\,i,\,k,\,r=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$

und das Verhältniss

$$S_r f_{rr}(\xi) : f_1(\xi)$$

*) Vgl. *Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten, III. Aufl. § 14, 10 u. 13.

ist demnach gleich dem Quadrate einer rationalen Function von ξ, so dass $S_r f_{rr}(x)$ als Repräsentant der Functionen $f_1(x)$ genommen werden kann. Auf diese Weise wird man also von einer *Sturm*'schen Reihe S ausgehend durch Vermittelung der quadratischen Form (P) zu den Determinantenformen

$$f(x) = |x\delta_{ik} - A_{ik}| \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$

$$S_r f_{rr}(x) = S_r\, |x\delta_{gh} - A_{gh}| \qquad {\scriptstyle (g,\,h=1,\,2,\,\ldots\,r-1,\,r+1,\,\ldots\,n)}$$

der beiden Functionen geführt, zu denen die *Sturm*'sche Reihe S gehört, und als deren erzeugende Functionen sind alsdann die Determinanten

$$S_r f_{rk}(x) \qquad {\scriptstyle (k=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$

zu betrachten.

Die quadratische Form (P), welche hierbei gebraucht wurde, ist dieselbe, welche bei Anwendung der *Hermite-Jacobi*'schen Methode zu dem im Anfang des Art. I entwickelten Resultate führt. Wenn nämlich mit $\mathfrak{N}(x)$ die Anzahl der negativen Quadrate bezeichnet wird, welche bei der Verwandlung der Form (P) in ein Aggregat von Quadraten auftreten, so ist

$$\mathfrak{N}(x_1) - \mathfrak{N}(x_2) = \mathfrak{A}(x_1, x_2) - \mathfrak{E}(x_1, x_2),$$

die Ausdrücke rechts in derselben Bedeutung wie im Art. I genommen. $\mathfrak{A}(x_1, x_2)$ und $\mathfrak{E}(x_1, x_2)$ sind darnach resp. die Anzahlen der Austritte und Eintritte, welche auf der x-Axe vom Punkte x_1 bis zum Punkte x_2 stattfinden, und zwar sind hierbei die Durchschnittspunkte der x-Axe mit der Curve

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad y = |x\delta_{ik} - A_{ik}| \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$

als Aus- und Eintrittsstellen ebensowohl durch die Curve

$$y = f_1(x) \quad \text{als durch} \quad yS_r = f_{rr}(x)$$

zu charakterisiren, da dies nach der über das Verhältniss $\frac{S_r f_{rr}(\xi)}{f_1(\xi)}$ gemachten Bemerkung offenbar übereinstimmt.

Werden in der Formel (N'''') des Art. VI die Functionen F_k mit Hilfe der Gleichung (R°) durch die Unterdeterminanten f_{rk} ersetzt und alsdann die Relationen (Q) benutzt, so kommt

$$S_k C_{ik}^{(h)} = \sum_{(\xi)} \frac{f_{ik}(\xi)}{f'(\xi)} \left| \xi s_{p+q} - s_{p+q+1} \right| \qquad (p, q = 0, 1, \dots h-1).$$

Da nun die Determinante rechts, wie im Art. IV, mit

$$\text{(R)} \qquad \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots & s_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{h-1}, & s_h, & \dots & s_{2h-1} \\ 1, & \xi, & \dots & \xi^h \end{vmatrix}$$

identisch ist, so zeigt die Formel (N''') des Art. VI, wenn

$$\sum_{(\xi)} \frac{f_{ik}(\xi)}{f'(\xi)} \xi^r = A_{ik}^{(r)}$$

gesetzt wird, dass das Product

$$\text{(S)} \qquad \left| s_{p+q} \right| \cdot \left| s_{p'+q'} \right| \qquad \binom{p,\ q = 0, 1, \dots h-1}{p', q' = 0, 1, \dots h}$$

gleich ist der Summe der n^2 Determinanten-Producte

$$\text{(S')} \qquad \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots & s_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{h-1}, & s_h, & \dots & s_{2h-1} \\ A_{ik}^{(0)}, & A_{ik}^{(1)}, & \dots & A_{ik}^{(h)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots & s_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{h-1}, & s_h, & \dots & s_{2h-1} \\ A_{ki}^{(0)}, & A_{ki}^{(1)}, & \dots & A_{ki}^{(h)} \end{vmatrix}$$

für $i, k = 1, 2, \dots n$. Dieses Ergebniss der aus allgemeineren Betrachtungen hergeleiteten Formel (N'''') soll nunmehr direct verificirt werden.

Zuvörderst folgt aus der Definition der Grössen $A_{ik}^{(r)}$, dass dieselben auch als Entwickelungscoëfficienten aufgefasst werden können, da

$$\frac{f_{ik}(x)}{f(x)} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{A_{ik}^{(r)}}{x^{r+1}}$$

ist. Es ist ferner zu bemerken, dass für irgend welche Systeme von je n^2 Grössen a_{ik}, b_{ik} und deren adjungirte α_{ik}, β_{ik} die Relation

$$\sum_{g,h} \alpha_{gi} \beta_{hk} (a_{gh} - b_{hg}) = \beta_{ik} \cdot \left| a_{ik} \right| - \alpha_{ki} \cdot \left| b_{ik} \right| \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \dots n)$$

stattfindet. Setzt man hierin

$$a_{gh} = x\delta_{gh} - A_{gh}, \quad b_{hg} = y\delta_{gh} - A_{gh},$$

so gelangt man zu der Gleichung

$$\text{(T)} \qquad \sum_h \frac{f_{hi}(x) f_{kh}(y)}{f(x) f(y)} = \frac{1}{y-x} \left(\frac{f_{ki}(x)}{f(x)} - \frac{f_{ki}(y)}{f(y)} \right) \qquad (h, i, k = 1, 2, \dots n),$$

welche auf beiden Seiten nach fallenden Potenzen von x und y entwickelt die Relationen

$$\text{(T')} \qquad \sum_h A_{hi}^{(p)} A_{kh}^{(q)} = A_{ki}^{(p+q)} \qquad (h, i, k = 1, 2, \dots n)$$

liefert. Wenn überdies

$$\text{(U)} \qquad f'(x) = \sum_k f_{kk}(x) \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

auf beiden Seiten durch $f(x)$ dividirt und alsdann nach fallenden Potenzen von x entwickelt wird, so kommt

$$\sum \xi^r = s_r = \sum_k A_{kk}^{(r)} \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

und also mit Berücksichtigung der Gleichungen (T′)

$$\text{(U′)} \qquad s_{p+q} = \sum_i \sum_k A_{ik}^{(p)} A_{ki}^{(q)} \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,\dots n)}.$$

Bedeutet nun B_r den Coëfficienten von ξ^r in der nach den Elementen der letzten Zeile entwickelten Determinante (R), so ist das Determinanten-Product (S′) gleich

$$\sum_p \sum_q A_{ik}^{(p)} A_{ki}^{(q)} B_p B_q \qquad {\scriptstyle (p,q,=0,1,\dots h)};$$

wenn also hierin über $i, k = 1, 2, \dots n$ summirt wird, so kommt

$$\sum_p \sum_q s_{p+q} B_p B_q \qquad {\scriptstyle (p,q=0,1,\dots h)},$$

und diese Doppelsumme reducirt sich in der That auf das Product (S), da erstens für $p < h$

$$\sum_q s_{p+q} B_q = 0 \qquad {\scriptstyle (p,q=0,1,\dots h)},$$

zweitens

$$B_h = |s_{p+q}| \qquad {\scriptstyle (p,q=0,1,\dots h-1)}$$

und drittens

$$\sum_q s_{h+q} B_q = |s_{p'+q'}| \qquad \left({\scriptstyle q=0,1,\dots h-1 \atop p',q'=0,1,\dots h}\right)$$

ist. — Setzt man

$$A_{ik}^{(r)} = a_{ik}^{(r)} S_k \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,\dots n)},$$

so ist wegen der Relationen (Q) auf Grund der Definition der Grössen $A_{ik}^{(r)}$:

$$a_{ik}^{(r)} = a_{ki}^{(r)} \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,\dots n)}$$

und also

$$|s_{p+q}| \cdot |s_{p'+q'}| = \sum_i \sum_k S_i S_k \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots & s_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{h-1}, & s_h, & \dots & s_{2h-1} \\ a_{ik}^{(0)}, & a_{ik}^{(1)}, & \dots & a_{ik}^{(h)} \end{vmatrix}^2$$

$${\scriptstyle (p,q=0,1,\dots h-1;\;\; p',q'=0,1,\dots h;\;\; h,i,k=1,2,\dots n)},$$

so dass das Product der beiden Determinanten auf der linken Seite als eine quadratische Form der n Grössen S ausgedrückt erscheint, deren einzelne Coëfficienten Quadrate von Determinanten sind. Andrerseits liefert die Gleichung (U′) ganz unmittelbar eine Darstellung jeder einzelnen Determinante $|s_{p+q}|$ als eine Summe von Producten je zweier Determinanten

$$|A_{ik}^{(p)}| \cdot |A_{ki}^{(p)}| \qquad {\scriptstyle (p=0,1,\dots h-1;\; i,k=1,2,\dots n)},$$

die resp. aus je h^2 Elementen $A_{ik}^{(p)}$ und $A_{ki}^{(p)}$ zu bilden sind; und zwar ist für diese Elemente der obere Index p, der überhaupt nur h Werthe hat, als der eine Index zu betrachten, während der andere durch den Complex der beiden unteren Indices i, k vertreten wird und demgemäss n^2 Werthe hat, aus welchen je h auszuwählen sind. Ersetzt man hierbei die Grössen $A_{ik}^{(r)}$ durch $a_{ik}^{(r)} \cdot S_k$, so wird jede einzelne Determinante $|s_{p+q}|$ als eine homogene Function der n Grössen S vom Grade $2h$ dargestellt, in welcher jeder der Coëfficienten eine Summe von Determinantenquadraten ist, gebildet aus den Elementen $a_{ik}^{(r)}$. Dies ist jene von Hrn. *Borchardt* herrührende Deduction, welche derselbe für den Fall

$$S_1 = S_2 = \dots = S_n = 1$$

in seiner bereits citirten Abhandlung angewendet hat, und die Elemente $a_{ik}^{(r)}$ sind auch alsdann mit den dort eingeführten Grössen $a_{ik}^{(r)}$ vollkommen identisch. Diejenige Eigenschaft derselben, welche in der *Borchardt*'schen Arbeit den Ausgangspunkt bildet*), findet ihre Analogie in der für alle Wurzeln ξ geltenden Gleichung

---

*) *Liouville's* Journal Bd. XII. pag. 60 sqq.[1])

[1]) *Borchardt's* Werke. S. 26 sqq. H.

$$|\xi^r \delta_{ik} - A_{ik}^{(r)}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und diese kann ebenso wie (T′) aus der Fundamental-Formel (T) hergeleitet werden. Wird nämlich in (T) auf beiden Seiten nach fallenden Potenzen von y allein entwickelt, so kommt

$$\sum_h (x^r \delta_{hi} - A_{ih}^{(r)}) f_{hk}(x) = f(x) \sum A_{ik}^{(p)} x^q \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

wo die Summe rechts auf alle nicht negativen Zahlen p, q zu erstrecken ist, welche zusammen die Zahl $r-1$ ergeben. Setzt man hier $x = \xi$, so resultirt die zu beweisende Gleichung.

Es ist im Vorstehenden durchweg vorausgesetzt, dass $f_{rr}(x)$ und $f(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Unter eben dieser Voraussetzung kann auch die Kettenbruchsentwickelung von $\frac{S_r f_{rr}(x)}{f(x)}$ an Stelle der von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ zu Grunde gelegt werden. Ist diese Entwickelung regulär, so bilden die Producte der beiden Coëfficienten der höchsten Potenzen von x in je zwei aufeinanderfolgenden Restfunctionen eine *Sturm*'sche Reihe. Die Glieder derselben lassen sich ebenso wie die irgend einer andern *Sturm*'schen Reihe $\mathfrak{S}$, welche aus erzeugenden Functionen $\mathfrak{F}_k(x)$ durch die Gleichung

$$\sum_{(\xi)} \frac{\mathfrak{F}_i(\xi)\mathfrak{F}_k(\xi)}{S_r f_{rr}(\xi) f'(\xi)} = \delta_{ik} \mathfrak{S}_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt sind, als lineare homogene Functionen der n Grössen S mit quadratischen Coëfficienten darstellen (cf. Art. III). Wenn nämlich für die Functionen $\mathfrak{F}_k(x)$, indem dieselben nach den Functionen $f_{rk}(x)$ entwickelt werden, sich die Gleichungen

$$\mathfrak{F}_i(x) = \sum_k c_{ik} f_{rk}(x) S_r \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ergeben, so kommt

$$\sum_h c_{ih} c_{kh} S_h = \delta_{ik} \mathfrak{S}_k \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und jedes Glied der *Sturm*'schen Reihe $\mathfrak{S}$ findet sich hiernach als eine Summe von nur n Quadraten dargestellt, wenn die *Sturm*'sche Reihe S aus lauter positiven Einheiten besteht d. h. wenn in dem Determinantenausdrucke von $f(x)$:

$$f(x) = |x\delta_{ik} - A_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

die Grössen A_{ik} ein symmetrisches System bilden. In diesem Falle bleiben, wie aus den Gleichungen (Q) hervorgeht, die Functionen $f_{ik}(x)$ bei Vertauschung der beiden Indices ungeändert, und aus der Gleichung (Q′) folgt alsdann

$$f_{rr}(\xi) f'(\xi) = \sum_k f_{kr}(\xi)^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

so dass $f_{rr}(\xi)$ und $f'(\xi)$ für alle reellen Wurzeln ξ gleiches Vorzeichen haben. Jene aus lauter positiven Einheiten bestehende *Sturm*'sche Reihe S ist demnach eine von denjenigen, welche nach der oben eingeführten Ausdrucksweise zu der Gleichung $f(x) = 0$ selber gehören, und hieraus folgt einerseits die Realität der sämmtlichen Wurzeln ξ sowie andrerseits die Regularität der Kettenbruchsentwickelung von $f_{rr}(x) : f(x)$.

VIII.

Die Vertauschbarkeit der beiden Functionen, zu denen die Sturm'schen Reihen gehören.

Die Charakteristik eines Systems von drei Functionen zweier Variabeln x und y ist ursprünglich nur für den Fall definirt, wo die drei Functionen gleich Null gesetzt geschlossene Curven repräsentiren. Um den Begriff der Charakteristik auf das oben pag. 307, 310 etc. vorkommende System

$$(y, f(x) - y, f_1(x) - y)$$

übertragen zu können, braucht man die drei Linien

$$y = 0, \quad y = f(x), \quad y = f_1(x)$$

nur auf *die* Weise in geschlossene Curven zu verwandeln, dass man irgend zwei Punkte auf je einer dieser drei Linien, zwischen denen sämmtliche Punkte belegen sind, in denen sie die beiden andern schneidet, durch eine beliebige Linie mit einander verbindet, und dass man alsdann diejenigen ins Unendliche verlaufenden Stücke der ursprünglichen Linie weglässt, welche jenseits der beiden neu verbundenen Punkte liegen. Hierbei kann so verfahren werden, dass z. B. für die Curve $y=f(x)$, wenn der Grad von $f(x)$ eine grade Zahl ist, die Anzahl der Durchschnittspunkte mit der x-Axe nicht vermehrt wird, dass ferner, wenn der Grad von $f(x)$ eine ungrade Zahl ist, nach dem letzten Durchschnittspunkt mit der x-Axe noch ein neuer hinzukommt, welcher dann als Aus- oder Eintrittsstelle jenem entgegengesetzt charakterisirt ist. Die Charakteristik des Systems

$$\left(y,\, f(x)-y,\, f_1(x)-y\right)$$

ist sonach für grade Zahlen n gleich $\frac{1}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{E})$, diese Buchstaben in der Bedeutung wie im Art. I (B) genommen, und aber für ungrade n gleich $\frac{1}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{E}\pm 1)$. Auch führt die vorstehend angegebene Verwandlung von ungeschlossenen Linien in geschlossene in Verbindung mit den Fundamentaleigenschaften der Charakteristik, wie ich dieselben im Art. II meiner Arbeit „über Systeme von Functionen mehrer Variabeln"*) dargelegt habe, wiederum zu dem oben im Art. I entwickelten *Sturm*'schen Verfahren, welches dabei unter einigermassen veränderten und allgemeineren Gesichtspunkten erscheint.

Es erhellt unmittelbar aus der Begriffsbestimmung der Charakteristik, dass dieselbe für zwei Functionensysteme

$$\left(y,\, f(x)-y,\, \mathfrak{f}(x)-y\right),\quad \left(y,\, \mathfrak{f}(x)-y,\, -f(x)+y\right)$$

identisch ist. Wenn also die beiden Functionen $f(x)$ und $\mathfrak{f}(x)$ von gleichem Grade sind, so dass die zum Schliessen der Curven

*) Monatsbericht vom März 1869.[1])

[1]) Band I S. 179—182 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

$$y=f(x),\quad y=\mathfrak{f}(x)$$

erforderliche Ergänzung für beide in derselben Weise geschehen kann, so ist

$$\text{(V)}\qquad \mathfrak{A}-\mathfrak{E}=\mathfrak{A}'-\mathfrak{E}',$$

falls unter $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{E}'$ resp. die Anzahl der Aus- und Eintrittsstellen verstanden wird, an denen die x-Axe die Curve $y=\mathfrak{f}(x)$ passirt, und falls hierbei die verschiedenen Theile der Ebene als innere oder äussere gelten, je nachdem das Product

$$\text{(W)}\qquad (y-f(x))(y-\mathfrak{f}(x))$$

positiv oder negativ ist. Die Gleichung (V) geht übrigens auch unmittelbar aus folgender Betrachtung hervor: Durch die Gesammtheit der beiden Curven

$$y=f(x),\quad y=\mathfrak{f}(x)$$

wird die Ebene in zwei Theile geschieden, so dass in dem einen das Product (W) positiv, in dem andern negativ ist; die x-Axe muss daher die gesammte Begrenzung dieser beiden Theile d. h. also die beiden Curven $y=f(x)$ und $y=\mathfrak{f}(x)$ ebenso oft in dem Sinne passiren, dass sie in einen der beiden Theile eintritt als in dem entgegengesetzten Sinne, nämlich so, dass sie aus demselben Theile wieder heraustritt. Es kann nun bei der Definition der zu den Functionen $f(x)$, $f_1(x)$ gehörigen *Sturm*'schen Reihen, wie dieselbe oben im Art. II aufgestellt worden ist, von jeder Voraussetzung über die Coëfficienten der höchsten Potenzen von x abgesehen und überdies unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass beide Functionen von gleichem Grade seien, da z. B. $f(x)+f_1(x)$ in der Definition an die Stelle von $f_1(x)$ gesetzt werden kann, wenn $f_1(x)$ von niedrigerem Grade ist als $f(x)$. Dies vorausgeschickt seien

$$S_1,\, S_2,\, \ldots S_n$$

die Glieder irgend einer zu den Functionen n^{ten} Grades $f(x)$, $\mathfrak{f}(x)$ gehörigen *Sturm*'schen Reihe und es seien ferner

$$S_1', \; S_2', \; \ldots \, S_n'$$

die Glieder einer zu den Functionen $\mathfrak{f}(x)$, $-f(x)$ gehörigen *Sturm*'schen Reihe; endlich seien in der ersten dieser beiden Reihen $\mathfrak{P}$ positive und $\mathfrak{N}$ negative, in der zweiten aber $\mathfrak{P}'$ positive und $\mathfrak{N}'$ negative Glieder. Alsdann ist wie im Art. II

$$\mathfrak{P} - \mathfrak{N} = \mathfrak{A} - \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{P}' - \mathfrak{N}' = \mathfrak{A}' - \mathfrak{E}'$$

und folglich vermöge der Gleichung (V)

$$\mathfrak{P} - \mathfrak{N} = \mathfrak{P}' - \mathfrak{N}'.$$

Da also der Ueberschuss der Anzahl der positiven über die der negativen Glieder in den beiden *Sturm*'schen Reihen S und S' derselbe ist, so kann jede zu Functionen gleichen Grades $f(x)$, $\mathfrak{f}(x)$ gehörige *Sturm*'sche Reihe im weitesten Sinne des Wortes zugleich als zu den Functionen $\mathfrak{f}(x)$, $-f(x)$ gehörig betrachtet werden, und die Vertauschung der beiden Functionen, zu denen eine *Sturm*'sche Reihe gehört, ist also unter der Bedingung gestattet, dass gleichzeitig das Vorzeichen einer der beiden Functionen geändert wird.

ÜBER SCHAAREN VON QUADRATISCHEN UND BILINEAREN FORMEN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1874. S. 59—76, 149—156, 206—232.

ÜBER SCHAAREN VON QUADRATISCHEN UND BILINEAREN FORMEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 19. Januar 1874.]

In einer am 18ten Mai 1868 vorgetragenen und im Monatsberichte veröffentlichten Abhandlung hat Hr. *Weierstrass* das allgemeine Problem der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen Formen in zwei andere fast vollständig erledigt, indem einzig und allein der Fall ausgeschlossen blieb, wo die der Untersuchung zu Grunde gelegte, a. a. O. p. 310 mit $[P, Q]$ bezeichnete Determinante identisch verschwindet. In derselben Sitzung der Akademie habe ich unmittelbar an den *Weierstrass*'schen Vortrag eine Mittheilung geknüpft[1]), in deren zweitem Theile jener unerledigt gebliebene Fall behandelt und ein allgemeiner Ausdruck für die Systeme von quadratischen Formen mit verschwindender Determinante $[P, Q]$ gegeben ist, während der erste Theil sich mit Fällen beschäftigt, in denen beide Formen gleichzeitig in Summen von Quadraten transformirbar sind und die Entwickelung einer ebenso allgemeinen als einfachen Methode zur Herleitung einer solchen Transformation enthält. Ich habe in der erwähnten Mittheilung die Gesammtheit der quadratischen Formen, welche entstehen, indem man zwei quadratische Formen mit beliebigen Constanten multiplicirt und zu einander addirt, eine Schaar genannt. Werden nun überhaupt nach zahlentheoretischer Weise zwei homogene Formen als äquivalent bezeichnet, sobald dieselben durch eine lineare Substitution der Variabeln in einander transformirbar sind, und werden ferner alle äquivalenten Formen zu einer „Classe“ gerechnet, so lässt

---

[1]) Ueber Schaaren quadratischer Formen. Bd. I S. 163—174 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

sich der Begriff der Aequivalenz und der Classe unmittelbar auf die „Schaaren quadratischer Formen“ übertragen. Da nämlich eine aus zwei quadratischen Formen $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$ und $\psi(x_1, x_2, \ldots)$ entstehende Schaar durch den Ausdruck

$$u\varphi + v\psi$$

repräsentirt werden kann, wo u, v zwei Variable bedeuten, so sind zwei Schaaren $u\varphi + v\psi$, $u'\varphi' + v'\psi'$ als einander äquivalent und zu derselben Classe gehörig zu bezeichnen, wenn die beiden Ausdrücke

$$u\varphi(x_1, x_2, \ldots) + v\psi(x_1, x_2, \ldots), \qquad u'\varphi'(x_1', x_2', \ldots) + v'\psi'(x_1', x_2', \ldots)$$

resp. als homogene Formen der Variabeln $u, v, x_1, x_2, \ldots$ und $u', v', x_1', x_2', \ldots$ in einander transformirbar sind, dergestalt, dass die Variabeln u, v für sich in die Variabeln u', v' und die Variabeln x in die Variabeln x' durch lineare Substitutionen übergehen. Bilineare Formen können hierbei als specielle Arten quadratischer Formen einer graden Anzahl von Variabeln betrachtet werden, aber die linearen Transformationen sind alsdann der Beschränkung zu unterwerfen, dass die eine wie die andere Hälfte der Variabeln nur für sich transformirt werde, und hiernach ist auch der Aequivalenz- und Classenbegriff zu modificiren.

Nach diesen begrifflichen Festsetzungen gelangt man mit Hilfe der erwähnten *Weierstrass*'schen Untersuchungen und derjenigen, welche ich selbst ergänzend daran geknüpft habe, zu der Einsicht, dass jede Classe von Schaaren quadratischer Formen durch eine Reihe von Classen binärer homogener Formen charakterisirt wird, welche deshalb als „die Reihe oder das System von determinirenden Classen“ bezeichnet werden soll. Die Reihe enthält genau so viel Glieder als die Schaar Variabeln enthält. Das erste Glied derselben wird durch die Classe binärer Formen n^{ten} Grades von u, v gebildet, zu der die Determinante der eine Schaar repräsentirenden quadratischen Form

$$u\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) + v\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

gehört. Das folgende Glied entsteht ebenso aus dem grössten gemeinsamen

Theiler der ersten Unterdeterminanten, welche sämmtlich homogene Formen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von u, v sind; das nächstfolgende Glied wird in derselben Weise aus den zweiten Unterdeterminanten hergeleitet u. s. f. Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass, wie hier, so die algebraischen Invarianten überhaupt in ihrer wahren Allgemeinheit nur aus grössten gemeinsamen Theilern von ganzen Functionen gegebener Elemente herzuleiten und keineswegs, wie bisher angenommen wurde, durch literale Bildungen zu erschöpfen sind. Ich bin hierauf schon vor einer langen Reihe von Jahren bei meinen Untersuchungen über die Discriminante von algebraischen Gleichungen geführt worden, sowie später bei meiner Arbeit über lineare Transformationen, welche ich im October 1868 der Akademie mitgetheilt habe. Die bezüglichen Resultate habe ich zwar nicht durch den Druck veröffentlicht, aber durch meine an der hiesigen Universität gehaltenen Vorlesungen in weitere Kreise verbreitet.

Die einzelnen Glieder jener „Reihe von determinirenden Classen“ können sich auf Classen von Formen *einer* Variabeln, ja selbst auf blosse Constanten reduciren, welche der Natur der Sache nach nur als *Null* oder *Eins* anzunehmen sind. Das erste Glied der Reihe kann sich nur dann auf eine Constante reduciren, wenn es verschwindet; die in gewissem Sinne einfachsten Schaaren quadratischer Formen von n Variabeln werden demgemäss durch eine der beiden Reihen determinirender Classen

$$(u^n, 1, 1, \ldots 1) \qquad \text{oder} \qquad (0, 1, 1, \ldots 1)$$

charakterisirt und sollen im Anschluss an einen von Hrn. *Weierstrass* eingeführten Ausdruck „elementare Schaaren“ genannt werden, weil bei ihnen nicht mehr als ein „Elementar-Theiler“ vorhanden ist. Wird diese Ausdrucks- und Bezeichnungsweise auch für den Fall $n=1$ beibehalten, wiewohl sie alsdann nur noch in uneigentlichem Sinne anwendbar ist, so lassen sich die Resultate, welche in der wiederholt erwähnten Arbeit des Hrn. *Weierstrass* und in dem zweiten Theile meiner eigenen daran angeschlossenen Bemerkungen enthalten sind, folgendermassen formuliren:

A) Zu äquivalenten Schaaren gehört eine und dieselbe Reihe von determinirenden Classen, und wenn für zwei Schaaren die Reihe der determinirenden Classen genau dieselben Glieder und darunter keine oder nur eine Null enthält, so sind dieselben äquivalent.

B) Jede Schaar von quadratischen Formen ist ein Aggregat von elementaren Schaaren; d. h. für jede Schaar $u\varphi + v\psi$ besteht eine Gleichung

$$u\varphi + v\psi = \sum_k (u_k\varphi_k + v_k\psi_k) \qquad (k=1,2,3\ldots),$$

in welcher jedes einzelne Glied auf der rechten Seite eine elementare Schaar repräsentirt, während die Grössen u_k, v_k sämmtlich lineare homogene Functionen der zwei Variabeln u und v bedeuten.

C) Jede Classe elementarer Schaaren von n Variabeln kann durch zwei Grundformen folgender Gestalt repräsentirt werden

$$x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots; \qquad x_2x_3 + x_4x_5 + \cdots,$$

wo die eine mit $x_{n-1}x_n$, die andere mit $x_{n-2}x_{n-1} + \delta x_n^2$ abschliesst und $\delta = 0$ oder 1 ist; der Werth $\delta = 0$ ist für eine grade Anzahl der Variabeln jedoch nur dann zuzulassen, wenn die Formen bilinear sind und als solche behandelt werden.

Ich habe sehr bald, nachdem die beiden Arbeiten über bilineare und quadratische Formen am 18. Mai 1868 der Akademie vorgelegt waren, die Resultate derselben in der hier entwickelten Gestalt vereinigt und diese auch damals meinem Freunde *Weierstrass* mitgetheilt. Da indessen diese Vereinigung keinerlei Schwierigkeiten darbot, so hatte ich auch keine Veranlassung zu deren Publication. Aber mit jener veränderten Gestalt und Zusammenfassung der auf die simultane Transformation zweier quadratischen Formen bezüglichen Resultate war unmittelbar die Aufforderung gegeben, zu versuchen, ob auch im allgemeinen Falle jene einfache Herleitungsmethode brauchbar sei, welche ich im ersten Theil meiner erwähnten Arbeit für besondere Fälle entwickelt habe, wo bei der Reduction einer Schaar von quadratischen Formen auf ein Aggregat elementarer Schaaren lauter Formen einer Variabeln d. h. lauter einzelne Quadrate auftreten. Meine Bemühungen waren zu jener Zeit im Sommer 1868 erfolglos; als ich jedoch vor einigen Monaten bei Gelegenheit allgemeinerer Untersuchungen, von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehend, den erwähnten Gegenstand wieder aufnahm, gelang es mir, jene Reductionsmethode in der That dahin zu erweitern, dass mittels derselben jede beliebige Schaar quadratischer oder bilinearer Formen auf ein Aggregat von elementaren Schaaren zurückgeführt wird. Ich setzte dies damals in wissenschaftlichen Gesprächen meinem Freunde *Kummer* auseinander und hegte die Absicht, bei grösserer Musse eine ausführliche Arbeit über den beregten Gegenstand der Akademie vorzulegen; aber eine inzwischen erschienene Publication des Hrn. *C. Jordan* giebt mir Veranlassung, die heutige erste Classensitzung zu einer Mittheilung meiner Reductionsmethode zu benutzen.

I.

Es sei

$$f(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$$

eine quadratische Form, deren Determinante von Null verschieden ist. Die Variabeln y mögen irgendwie in zwei Gruppen getheilt sein:

$$y_1, y_2, \ldots y_\mu; \quad y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots y_\nu.$$

Alsdann lässt sich f, wie ich schon in meiner Mittheilung vom Mai 1868 p. 339 erwähnt habe[1]), auf eine der beiden Formen bringen:

$$y_1'^2 + f' \qquad \text{oder} \qquad y_1 y' + f',$$

wo y_1' eine (von y_1 nicht unabhängige) lineare Function der Variabeln y, y' dagegen eine lineare Function derjenigen Variabeln y bedeutet, deren Index grösser als Eins ist. Die *erste* der Variabeln y, welche in der linearen Function y' wirklich enthalten ist, kann, je nachdem sie der ersten oder der

[1]) S. 165—166 dieser Ausgabe. H.

zweiten Gruppe angehört, als die Variable y_2 oder $y_{\mu+1}$ angenommen werden. Wenn demgemäss y' mit dem Index 2 oder $\mu+1$ versehen, an Stelle von y_2 oder $y_{\mu+1}$ in f eingeführt, und alsdann der Factor von y'_2 oder $y'_{\mu+1}$ mit y'_1 bezeichnet wird, so bleibt von f nach Absonderung des Productes $y'_1 y'_2$ oder $y'_1 y'_{\mu+1}$ nur noch eine von y_1 und resp. von y_2 oder $y_{\mu+1}$ unabhängige quadratische Form der Variabeln y übrig.

Durch Fortsetzung des angegebenen Verfahrens gelangt man zu einer Transformirten von f, bei welcher in jeder der beiden Gruppen von Variabeln noch zwei Abtheilungen zu unterscheiden sind:

$$y'_1, y'_2, \dots y'_{\mu-\lambda}; \quad y'_{\mu-\lambda+1}, y'_{\mu-\lambda+2}, \dots y'_\mu;$$
$$y'_{\mu+1}, y'_{\mu+2}, \dots y'_{\mu+\lambda}; \quad y'_{\mu+\lambda+1}, y'_{\mu+\lambda+2}, \dots \quad y'_\nu,$$

und es kommt

$$f = f_0 + f_1 + f_2,$$

wo f_0 eine quadratische Form der Variabeln der ersten Abtheilung und f_2 eine quadratische Form der Variabeln der letzten Abtheilung bedeutet, während f_1 in Beziehung auf die beiden mittleren Abtheilungen bilinear ist, nämlich:

$$f_1 = y'_{\mu-\lambda+1} y'_{\mu+1} + y'_{\mu-\lambda+2} y'_{\mu+2} + \dots + y'_\mu y'_{\mu+\lambda}.$$

Jede der Variabeln y'_k ist hierbei eine lineare Function von y_k und den *darauf folgenden* Variabeln y, und zwar so, dass darin der Coëfficient von y_k von Null verschieden ist. Die Form f_0 besteht nur aus Quadraten der einzelnen Variabeln y' und aus Producten je zweier.

II.

Es sei

$$F(z_0, z_1, \dots z_\nu)$$

eine quadratische Form von $(\nu+1)$ Variabeln z, und deren Determinante D

von Null verschieden, ferner sei D_0 die Determinante der Form von ν Variabeln

$$F(0, z_1, z_2, \dots z_\nu).$$

Alsdann verschwindet die Determinante der quadratischen Form

$$D_0 F - D z_0^2,$$

und diese lässt sich daher als eine quadratische Form von ν linearen Functionen

$$z_1 + c_1 z_0, \; z_2 + c_2 z_0, \dots z_\nu + c_\nu z_0$$

darstellen. Dies gilt übrigens auch, wenn $D = 0$ ist.

Für den Fall $D_0 = 0$ ist eine der ν partiellen Ableitungen von $F(0, z_1, \dots z_\nu)$ eine lineare Function der übrigen. Wenn demgemäss die nach z_1 genommene Ableitung als lineare Function der nach $z_2, z_3, \dots$ genommenen resp. die Coëfficienten $b_2, b_3, \dots$ hat, so kommt

$$F(0, z_1, \dots z_\nu) = F(0, 0, z_2 + b_2 z_1, \dots z_\nu + b_\nu z_1),$$

und die Form $F(z_0, z_1, \dots z_\nu)$ erhält also, wenn

$$z'_k = z_k + b_k z_1 \qquad (k = 2, 3, \dots \nu)$$

gesetzt wird, die Gestalt

$$z_0(a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z'_2 + \dots + a_\nu z'_\nu) + F(0, 0, z'_2, \dots z'_\nu).$$

Da die Determinante von $F(z_0, z_1, \dots z_\nu)$ von Null verschieden vorausgesetzt ist, so kann weder der Coëfficient a_1 verschwinden noch auch die Determinante der Form von $\nu - 1$ Variabeln, welche den zweiten Theil dieses Ausdruckes bildet. Nimmt man das Glied $a_1 z_0 z_1$ davon hinweg, so bleibt demgemäss eine quadratische Form der ν Variabeln $z_0, z'_2, z'_3, \dots z'_\nu$, für welche die obigen Bedingungen erfüllt sind, die also, wenn ein bestimmtes Vielfaches von z_0^2 abgezogen wird, als eine quadratische Form von $\nu - 1$ Grössen

$$z_2' + c_2 z_0,\ z_3' + c_3 z_0,\ \dots z_\nu' + c_\nu z_0$$

darstellbar ist. Hieraus folgt, dass sich eine quadratische Form der Variabeln $z_0, z_1, \dots z_\nu$ stets auf eine der beiden folgenden Formen bringen lässt

$$a z_0^2 + \mathfrak{F}(z_1 + c_1 z_0, \dots z_\nu + c_\nu z_0)$$
$$z_0(a z_0 + a' z_1) + \mathfrak{F}'(z_2 + b_2 z_1 + c_2 z_0, \quad \dots z_\nu + b_\nu z_1 + c_\nu z_0),$$

wo $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ resp. nur ν und $\nu - 1$ Variabeln enthalten. Wenn man nun diese Formen ebenso transformirt und so weiter verfährt, bis die ersten μ Variabeln z resp. die durch Transformation daraus entstandenen Variabeln z' sämmtlich herausgehoben sind, dabei aber jedes Mal an Stelle von z_1 die *erste* der dazu geeigneten Variabeln nimmt, so gelangt man zu folgendem Resultat: Eine quadratische Form von $\nu + 1$ Variabeln z, welche irgendwie in zwei Gruppen

$$z_0, z_1, \dots z_{\mu-1};\quad z_\mu, z_{\mu+1}, \dots z_\nu$$

eingetheilt sind, lässt sich durch Substitutionen

$$z_k' = c_{k,k} z_k + c_{k,k-1} z_{k-1} + \cdots + c_{k,0} z_0$$

in eine quadratische Form der Variabeln

$$z_0', z_1', \dots z_{\mu-1}';\quad z_\mu', z_{\mu+1}', \dots z_\nu'$$

so transformiren, dass die neue Form als ein Aggregat von vier verschiedenen Theilen erscheint, nämlich in der Gestalt

$$\sum_g z_g'^2 + \sum_{h,i} z_h' z_i' + \sum_{k,p} z_k' z_p' + \mathfrak{F},$$

wo unter z_g', z_h', z_i', z_k' die sämmtlichen verschiedenen Variabeln der ersten

Gruppe, unter z_p' gewisse Variabeln der zweiten Gruppe zu verstehen sind, während $\mathfrak{F}$ eine quadratische Form von den übrigen Variabeln der zweiten Gruppe bedeutet.

III.

Es seien

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) \quad \text{und} \quad \psi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_r)$$

zwei quadratische Formen, ihre Determinanten von Null verschieden und m sei kleiner als n. Wird die Gesammtheit der in φ aber nicht in ψ enthaltenen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_m$ als erste Gruppe angesehen, so kann φ nach Art. I in ein Aggregat transformirt werden, dessen einzelne Theile durch eine Zerfällung der neuen Variabeln x' in fünf Abtheilungen zu charakterisiren sind:

$$x_1', x_2', \dots x_{2k}';$$
$$x_{2k+1}', x_{2k+2}', \dots x_{m-l}';$$
$$x_{m-l+1}', x_{m-l+2}', \dots x_m';$$
$$x_{m+1}', x_{m+2}', \dots x_{m+l}';$$
$$x_{m+l+1}', x_{m+l+2}', \dots x_n';$$

und zwar wird

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

wo

$$\varphi_0 = \sum_i x_i' x_{i+k}' \qquad (i = 1, 2, \dots k)$$

$$\varphi_1 = \sum_i x_i'^2 \qquad (i = 2k+1, 2k+2, \dots m-l)$$

$$\varphi_2 = \sum_i x_{i-l}' x_i' \qquad (i = m+1, m+2, \dots m+l)$$

und φ_3 eine quadratische Form der Variabeln x' der fünften Abtheilung ist.

Jede der neuen Variabeln x' ist hierbei eine lineare Function der gleichnamigen Variabeln x und derer, die darauf folgen.

Werden die Veränderlichen x' nun auch in ψ eingeführt, so gehören die darin vorkommenden Grössen x' sämmtlich der vierten und fünften Abtheilung an und, falls $r > n$ ist, noch einer sechsten, welche durch die Indices $n+1,\ n+2,\ \ldots r$ charakterisirt wird. Wenn man also die Form ψ gemäss Art. II transformirt, indem man jene vierte Abtheilung der Variabeln als erste Gruppe betrachtet, so resultirt eine weitere Zerlegung jener vierten, fünften und sechsten Abtheilung, die durch folgende Unterabtheilungen der Indices gegeben ist:

$$
\begin{array}{l}
m+1,\ m+2,\ \ldots m+2\mathfrak{l};\\
m+2\mathfrak{l}+1,\ m+2\mathfrak{l}+2,\ \ldots m+l-\mathfrak{l};\\
m+l-\mathfrak{l}+1,\ m+l-\mathfrak{l}+2,\ \ldots m+l-\mathfrak{l}';\\
m+l-\mathfrak{l}'+1,\ m+l-\mathfrak{l}'+2,\ \ldots m+l;\\
m+l+1,\ m+l+2,\ \ldots m+l+\mathfrak{l}';\\
m+l+\mathfrak{l}'+1,\ m+l+\mathfrak{l}'+2,\ \ldots n;\\
n+1,\ n+2,\ \ldots n+\mathfrak{l}-\mathfrak{l}';\\
n+\mathfrak{l}-\mathfrak{l}'+1,\ n+\mathfrak{l}-\mathfrak{l}'+2,\ \ldots r;
\end{array}
$$

und zwar wird

$$\psi = \psi_0'' + \psi_1'' + \psi_2'' + \psi_3'' + \psi_4'',$$

wo

$$\psi_0'' = \sum_h x_h'' x_{h+\mathfrak{l}}'' \qquad (h = m+1,\ m+2,\ \ldots m+\mathfrak{l})$$

$$\psi_1'' = \sum_h x_h''^2 \qquad (h = m+2\mathfrak{l}+1,\ m+2\mathfrak{l}+2,\ \ldots m+l-\mathfrak{l})$$

$$\psi_2'' = \sum_h x_{m+l-h}'' x_{n+\mathfrak{l}-h}'' \qquad (h = \mathfrak{l}-1,\ \mathfrak{l}-2,\ \ldots \mathfrak{l}')$$

$$\psi_3'' = \sum_h x_h'' x_{h-\mathfrak{l}'}'' \qquad (h = m+l+1,\ m+l+2,\ \ldots m+l+\mathfrak{l}')$$

und ψ_4'' eine quadratische Form der in der letzten und drittletzten Abtheilung enthaltenen Variabeln x'' ist. Jede der Variabeln x'' unterscheidet sich von der gleichnamigen Variabeln x' nur durch eine lineare Function derjenigen Veränderlichen, deren Indices

$$m+1,\ m+2,\ \ldots m+l+\mathfrak{l}'$$

sind, soweit diese Veränderlichen x' auch in der quadratischen Form φ vorkommen. Wenn also die Grössen x'' in φ eingeführt werden, wobei φ_0 und φ_1 natürlich ungeändert bleiben, so geht φ_2 über in

$$\sum_h x_{m-l+h}^0 x_{m+h}'' \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots l)$$

wo die Grössen x^0 lineare Functionen der sämmtlichen l Variabeln x_{m-l+h}' sind, und

$$\varphi_3(x_{m+l+1}',\ x_{m+l+2}',\ \ldots x_n')$$

verwandelt sich in eine quadratische Form

$$\varphi_3''(x_{m+l+1}'',\ x_{m+l+2}'',\ \ldots x_n'')$$

und noch ein Aggregat von Gliedern, deren jedes eine der Grössen

$$x_{m+1}'',\ x_{m+2}'',\ \ldots x_{m+l}''$$

als Factor enthält. Hiernach wird, wenn an Stelle der l Variabeln x^0 geeignete Grössen x'' eingeführt und der Gleichförmigkeit halber auch den ersten $m-l$ Grössen x' zwei obere Striche beigefügt werden,

$$\varphi = \varphi_0'' + \varphi_1'' + \varphi_2'' + \varphi_3''$$

und

$$\varphi_0'' = \sum_h x_h'' x_{h+k}'' \qquad (h=1,2,\dots k)$$

$$\varphi_1'' = \sum_h x_h''^2 \qquad (h=2k+1, 2k+2, \dots m-l)$$

$$\varphi_2'' = \sum_h x_{m-l+h}'' x_{m+h}'' \qquad (h=1,2,\dots l),$$

während φ_3'' eine quadratische Form derjenigen Variabeln x'' ist, deren Indices grösser als $m+l$ sind. Dabei kann noch

$$\varphi_2'' = \varphi_{20}'' + \varphi_{21}'' + \varphi_{22}'' + \varphi_{23}''$$

gesetzt werden, wo die verschiedenen Theile rechts den Formen

$$\psi_0'',\ \psi_1'',\ \psi_2'',\ \psi_3''$$

in der Weise entsprechen, dass sie *dieselben* Grössen x_{m+h}'' enthalten, dass also z. B.

$$\varphi_{20}'' = \sum_h x_{m-l+h}'' x_{m+h}'' \qquad (h=1,2,\dots 2l)$$

wird. Hieraus geht hervor, dass von einer Schaar $u\varphi + v\psi$ nach geeigneter Transformation der Variabeln Theile von folgender Art abgesondert werden können:

$$u x_a'' x_b'',\quad u x_b''^2,\quad u(x_a'' x_h'' + x_b'' x_i'') + v x_h'' x_i'',$$
$$u x_a'' x_h'' + v x_h''^2,\quad u x_a'' x_h'' + v x_h'' x_p'',$$

wo x_a'', x_b'' ausschliesslich in φ enthaltene Variabeln bedeuten, x_h'', x_i'' gewisse von den in φ *und* ψ vorkommenden Variabeln, und x_p'' gewisse von denjenigen, welche nur in ψ enthalten sind. Es bleibt alsdann noch der Theil

$$u\varphi_{23}'' + v\psi_3'' + u\varphi_3'' + v\psi_4''$$

übrig, d. h. eine Schaar, deren beide Grundformen $\varphi_{23}'' + \varphi_3''$ und $\psi_3'' + \psi_4''$ bei vereinfachender Aenderung der Indices folgende Gestalt annehmen:

$$\sum_k x_k'' x_{\mu+k}'' \quad + \varphi''(x_{2\mu+1}'', x_{2\mu+2}'', \dots)$$
$$\sum_k x_{\mu+k}'' x_{2\mu+k}'' + \psi''(x_{3\mu+1}'', x_{3\mu+2}'', \dots).$$

Die Summationen sind hierbei über $k = 1, 2, \dots \mu$ zu erstrecken, und unter φ'', ψ'' sind quadratische Formen der bezüglichen Variabeln zu verstehen.

IV.

Bedeuten $f_{2\nu+1}$, $f_{2\nu+2}, \dots$ homogene lineare Functionen von $x_{2\nu+1}$, $x_{2\nu+2}, \dots$ und Φ, Ψ homogene Functionen zweiten Grades, deren letztere aber von den ersten ν Grössen x unabhängig ist, so können die beiden quadratischen Formen

$$(\mathfrak{A}) \qquad \sum_k x_k x_{\nu+k} \quad + \Phi(x_{2\nu+1}, x_{2\nu+2}, \dots)$$
$$(\mathfrak{B}) \qquad \sum_k x_{\nu+k} f_{2\nu+k} + \Psi(x_{3\nu+1}, x_{3\nu+2}, \dots) \qquad (k=1,2,\dots \nu)$$

durch gleichzeitige lineare Transformation in

$$(\mathfrak{A}^0) \qquad \sum_k x_k^0 x_{\nu+k}^0 \quad + \Phi(x_{2\nu+1}^0, x_{2\nu+2}^0, \dots)$$
$$(\mathfrak{B}^0) \qquad \sum_k x_{\nu+k}^0 x_{2\nu+k}^0 + \Psi(x_{3\nu+1}^0, x_{3\nu+2}^0, \dots) \qquad (k=1,2,\dots \nu)$$

übergeführt werden. — Sondert man nämlich zuerst von $f_{2\nu+1}$ den ganzen Theil ab, welcher keine der Grössen $x_{3\nu+1}$, $x_{3\nu+2}, \dots$ enthält, und welcher mit $\mathfrak{f}_{2\nu+1}$ bezeichnet werden möge, so kann, da die Determinante von Ψ als von Null verschieden vorauszusetzen ist, gemäss der im Eingang von Art. II gemachten Bemerkung, der Ausdruck

$$(f_{2\nu+1} - \mathfrak{f}_{2\nu+1}) x_{\nu+1} + \Psi(x_{3\nu+1}, x_{3\nu+2}, \dots),$$

als quadratische Form von $x_{\nu+1}$ und $x_{3\nu+1}$, $x_{3\nu+2}, \dots$, auf die Gestalt

$$a x_{\nu+1}^2 + \Psi(x'_{3\nu+1}, x'_{3\nu+2}, \ldots)$$

gebracht werden, wo

$$x'_{3\nu+k} = x_{3\nu+k} + c_k x_{\nu+1} \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

ist. Wird hiernach in gleicher Weise derjenige Theil der mit $x_{\nu+2}$ multiplicirten linearen Function weggeschafft, welcher $x'_{3\nu+1}, x'_{3\nu+2}, \ldots$ enthält, und dieses Verfahren immer weiter fortgesetzt, so treten schliesslich an die Stelle der Variabeln $x_{3\nu+1}, x_{3\nu+2}, \ldots$ neue Veränderliche $x^0_{3\nu+1}, x^0_{3\nu+2}, \ldots$, welche sich von jenen nur durch lineare Functionen von

$$x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots x_{2\nu}$$

unterscheiden, und die Form $(\mathfrak{B})$ verwandelt sich in

$$(\mathfrak{B}') \qquad \sum_{k=1}^{k=\nu} x^0_{\nu+k} x_{3\nu+k} + F + \Psi(x^0_{3\nu+1}, x^0_{3\nu+2}, \ldots),$$

wo F eine homogene Function zweiten Grades und $x^0_{\nu+k}$ eine homogene lineare Function der Variabeln

$$x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots x_{2\nu}$$

bedeutet. Durch Einführung neuer Variabeln

$$x^0_{2\nu+1}, x^0_{2\nu+2}, \ldots x^0_{3\nu},$$

deren jede von der gleichnamigen Veränderlichen x nur um eine lineare Function von

$$x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots x_{2\nu}$$

differirt, können endlich die ersten beiden Theile der Form $(\mathfrak{B}')$ vereinigt werden, so dass sie die obige Gestalt $(\mathfrak{B}^*)$ annimmt.

Da jede der Variabeln $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots$ sich von der gleichnamigen Veränderlichen x^0 nur durch eine lineare Function von

$$x^0_{\nu+1}, x^0_{\nu+2}, \ldots x^0_{2\nu}$$

unterscheidet, so ist

$$\Phi(x_{2\nu+1}, x_{2\nu+2}, \ldots) = \Phi(x^0_{2\nu+1}, x^0_{2\nu+2}, \ldots) + \sum_{k=1}^{k=\nu} x^0_{\nu+k} f_{\nu+k},$$

wo $f_{\nu+1}, f_{\nu+2}, \ldots$ lineare Functionen von $x^0_{\nu+1}, x^0_{\nu+2}, \ldots$ bedeuten, und die Form $(\mathfrak{A})$ geht hiernach in der That, wenn noch neue Veränderliche

$$x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_\nu$$

an Stelle von

$$x_1, x_2, \ldots x_\nu$$

eingeführt werden, in die Form $(\mathfrak{A}^*)$ über.

V.

Wählt man aus einer gegebenen Schaar von quadratischen Formen der Variabeln $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ eine einzelne Form aus, deren Determinante verschwindet, welche also durch Substitutionen

$$\mathfrak{x}'_k = \mathfrak{x}_k + c_k \mathfrak{x}_1 \qquad (k=2,3,\ldots)$$

von $\mathfrak{x}_1$ unabhängig wird, so muss irgend eine andere Form der Schaar die Veränderliche $\mathfrak{x}_1$ wirklich enthalten, weil sonst die Schaar als solche auf eine Schaar quadratischer Formen von weniger Variabeln sich reduciren würde. Hiernach können als Grundformen der Schaar zwei solche angenommen werden, von denen die erste von $\mathfrak{x}_1$ abhängig, die zweite aber von $\mathfrak{x}_1$ unabhängig ist. Da nun überdies die zweite Grundform durch Substitutionen

$$\mathfrak{x}''_k = \mathfrak{x}'_k + b_k \mathfrak{x}'_2 \qquad (k=3,4,\ldots)$$

von $\mathfrak{x}_2'$ unabhängig werden kann u. s. f., so ist die allgemeinste Annahme die, dass die zweite Grundform von gewissen Variabeln, welche in der ersten vorkommen, unabhängig sei. Geht man hiernach von zwei Grundformen

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n), \quad \psi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_r) \qquad (m \leq n \leq r)$$

aus, so sind für den Fall $m = n$ beide einzeln gemäss Art. I zu transformiren; wenn aber $m < n$ ist, so sind dieselben gemäss Art. III *gleichzeitig* in zwei andere zu verwandeln. Hierbei sondern sich aus der Schaar $u\varphi + v\psi$ gewisse einfache Schaaren ab, und es bleibt für die weitere Untersuchung eine Schaar, deren zwei Grundformen am Schlusse von Art. III angegeben sind. Wenn man nun die darin vorkommenden quadratischen Formen φ'', ψ'' ebenso behandelt, wie die Formen φ, ψ, von denen im Art. III ausgegangen worden, so wird zwar durch Einführung von gewissen neuen Variabeln $x'''_{2\mu+1}, x'''_{2\mu+2}, \dots$ der aus $u\varphi'' + v\psi''$ bestehende Theil des Ausdrucks der ganzen Schaar gemäss der Tendenz der Untersuchung weiter umgestaltet, aber das bereits Gewonnene wird dabei theilweise wieder zerstört, insofern alsdann die Factoren $x''_{2\mu+k}$ in dem ersten Theile der zweiten Grundform nicht mehr die einzelnen Variabeln selbst, sondern lineare Functionen der neuen Veränderlichen x''' bedeuten. Die im Art. IV enthaltenen Entwickelungen lehren jedoch, wie man durch abermalige Transformation der Variabeln die zerstörte Form wiederherstellen und dabei die neu umgestalteten Theile unverändert erhalten kann.

Hiermit ist die Fortsetzbarkeit des im Art. III angegebenen Reductionsverfahrens vollständig dargethan, und es ergiebt sich also, dass jede Schaar quadratischer Formen in ein Aggregat von gewissen einfachen Schaaren transformirt werden kann, für welche

$$x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots, \quad x_2x_3 + x_4x_5 + \cdots$$

als die beiden Grundformen anzunehmen sind. Die eine dieser Grundformen schliesst mit $x_{n-1}x_n$, die andre mit

$$x_{n-2}x_{n-1} \quad \text{oder} \quad x_{n-2}x_{n-1} + x_n^2 .$$

Schaaren der angegebenen Art sind durchweg „elementar“, einzig und allein den Fall ausgenommen, wo für eine grade Zahl $m = 2n$ die beiden Grundformen

$$\sum_{k=1}^{k=m} x_{2k-1}x_{2k}, \quad \sum_{k=1}^{k=m-1} x_{2k}x_{2k+1}$$

sind, und die Schaar nicht als eine bilineare behandelt, sondern jegliche Transformation der Variabeln gestattet werden soll. In dem bezeichneten Falle ist jene Schaar vermittelst der Substitution

$$x_k = x_k' + x_{m+k}', \qquad x_{2m-k+1} = x_k' - x_{m+k}' \qquad (k = 1, 2, \dots m)$$

auf das Aggregat zweier elementarer Schaaren von je m Veränderlichen x' zurückzuführen, und hiermit ist die Reduction einer beliebigen Schaar quadratischer oder bilinearer Formen auf elementare vollendet. Handelt es sich um Schaaren von Formen mit reellen Coëfficienten, und will man sich dann auf reelle Transformationen beschränken, so gelangt man zu ähnlichen einfachen Resultaten, deren nähere Ausführung ich mir für eine andere Gelegenheit vorbehalte.

In der Publication des Hrn. *C. Jordan* „über bilineare Polynome“ (Heft No. 25 der Comptes Rendus, 22. December 1873), auf welche ich mich oben am Schlusse der Einleitung bezogen habe, werden unter den mannigfaltigen Fragen, welche man sich stellen könne, die drei folgenden als drei verschiedene „Probleme“ hervorgehoben: erstens durch orthogonale Transformationen der beiden Variabeln-Systeme und zweitens durch irgend welche, aber für beide Variabeln-Systeme übereinstimmende lineare Transformation ein bilineares Polynom auf eine „einfache canonische Form“ zu bringen; drittens zwei Polynome P und Q durch gesonderte lineare Transformation der beiden Systeme von Variabeln simultan in eine „canonische Form“ überzuführen. Sowie sie hier gestellt sind, ermangeln diese Probleme durchaus der Bestimmtheit, wie sehr auch grade das Wort „canonisch“, seinem eigentlichen Sinne gemäss, den Schein von etwas absolut Bestimmtem zu erwecken geeignet ist. In der That hat der Ausdruck „canonische Form“ oder „einfache canonische Form", welchen Hr. *Jordan* behufs Präcisirung der Frage gebraucht, keinerlei allgemein massgebende Bedeutung und bezeichnet an und für sich einen Begriff ohne jeden objectiven Inhalt. Wohl mag es Jemandem, der z. B. an die Frage der gleichzeitigen Transformation zweier bilinearer Formen herantritt, als erstes unbestimmtes Ziel seiner Bemühungen vorschweben, allgemeine und einfache Ausdrücke zu finden, auf welche beide Formen simultan zu reduciren sind; aber ein „Problem" in der ernsten und strengen Bedeutung, welche dem Worte in der wissenschaftlichen Sprache mit Recht beigelegt wird, darf jene vage Aufgabe sicherlich nicht genannt werden. Nachträglich, wenn dergleichen allgemeine Ausdrücke gefunden sind, dürfte die Bezeichnung derselben als canonische Formen allenfalls durch ihre Allgemeinheit und Einfachheit motivirt werden können; aber wenn man nicht bei den bloss formalen Gesichtspunkten stehen bleiben will, welche — gewiss nicht zum Vortheil der wahren Erkenntniss — in der neueren Algebra vielfach in den Vordergrund getreten sind, so darf man nicht unterlassen, die Berechtigung der aufgestellten canonischen Formen aus inneren Gründen herzuleiten. In Wahrheit sind überhaupt die sogenannten canonischen oder Normalformen lediglich durch die Tendenz der Untersuchung bestimmt und daher nur als Mittel, nicht aber als Zweck der Forschung anzusehen. Dies tritt namentlich überall da deutlich hervor, wo die algebraische Arbeit im Dienste andrer mathematischer Disciplinen geleistet wird und von ihnen Ausgangs- und Zielpunkt angewiesen erhält. Aber auch die Algebra selbst kann natürlich ausreichende Beweggründe zur Aufstellung canonischer Formen liefern, und so sind z. B. die Momente, welche Hrn. *Weierstrass* und mich in den beiden von Hrn. *Jordan* citirten Arbeiten*) bei Einführung gewisser Normalformen geleitet haben, an den bezüglichen Stellen klar und deutlich hervorgehoben. Bei Hrn. *Weierstrass* dient die „eigenthümliche" simultane Umgestaltung zweier bilinearer Formen P, Q, welche in den Formeln (44) pag. 319 der mehrerwähnten Abhandlung enthalten ist**), ausdrücklich dazu, um die Uebereinstimmung der Elementartheiler als eine hinreichende Bedingung für die Transformirbarkeit zweier Formenpaare zu erweisen. Jene Umgestaltung führt in der citirten Formel (44) zu einem Aggregat von Formenpaaren

$$X_0 Y_{e-1} + X_1 Y_{e-2} + \cdots, \qquad X_0 Y_{e-2} + X_1 Y_{e-3} + \cdots,$$

mit denen diejenigen, welche Hr. *Jordan* angedeutet hat, genau übereinstimmen, wenn

$$X_k = y_{k+1}, \qquad Y_k = x_{e-k-1} \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

gesetzt wird. Ebenso lassen sich jene allgemeinen Ausdrücke, welche ich für Formenpaare P, Q, wofür $[P, Q] = 0$ ist, auf p. 345 und 346 des Monatsberichts vom Mai 1868 entwickelt habe[1]), mit leichter Mühe in folgende umwandeln:

$$\sum_k x_{2k} x_{2k+1} + \Phi, \qquad \sum_k x_{2k+1} x_{2k+2} + \Psi \qquad (k=0,1,\ldots m-1),$$

wo Φ und Ψ quadratische Formen der auf x_{2m} folgenden Veränderlichen bedeuten. In der That braucht man behufs dessen z. B. nur von zwei Grundformen in der a. a. O. zuletzt angegebenen Gestalt auszugehen:

$$\mathfrak{f}_1 x'_{m+1} + \mathfrak{f}_2 x'_{m+2} + \cdots + \mathfrak{f}_m x'_{2m} + \mathfrak{F}$$
$$\mathfrak{f}'_1 x'_{m+1} + \mathfrak{f}'_2 x'_{m+2} + \cdots + \mathfrak{f}'_m x'_{2m} + \mathfrak{F}',$$

darin $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_m$ und $\mathfrak{f}'_m$ selbst als die Variabeln $x'_0, x'_1, \ldots x'_m$ zu nehmen, alsdann die oben im Eingang des Art. III gemachte Bemerkung nach der Art, wie es im Art. IV geschehen, wiederholentlich anzuwenden und endlich für die Indices k, die nicht grösser als m sind, $2k$, für die folgenden aber $2k - 2m - 1$ zu setzen.

So sind demnach die bei Hrn. *Jordan* für den Fall des dritten Problems als canonische Formen bezeichneten Ausdrücke bereits in der *Weierstrass*'schen Abhandlung vom Jahre 1868 und in meinem daran angeschlossenen

*) Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsbericht vom Mai 1868. Ueber bilineare Formen. Monatsbericht vom October 1866[1]).

**) Cf. p. 314 am Schlusse des Art. 1 der *Weierstrass*'schen Abhandlung.

[1]) Bd. I S. 143—162 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

[1]) S. 172 und 174 dieser Ausgabe. H.

Aufsatze gegeben. Seine Methode zur Herleitung derselben hat Hr. *Jordan* a. a. O. nicht mitgetheilt, aber aus seinen Andeutungen ist zu entnehmen, dass sie auf einer allmähligen, gleichzeitigen Reduction von zwei bilinearen Formen beruht und also wohl principiell mit derjenigen übereinstimmen dürfte, welche ich oben entwickelt habe. Doch scheint Hr. *Jordan* die simultane Transformation von quadratischen Formen bei Seite gelassen und sich nur auf bilineare beschränkt zu haben. Dass dies in der That eine Beschränkung involvirt, sobald man sich solcher Reductionsmethoden bedient, ohne die symmetrischen bilinearen Polynome besonders zu berücksichtigen, ist leicht zu sehen. Bei dem oben auseinandergesetzten Reductionsverfahren sind die bilinearen Formen nur als specielle quadratische Formen von $2n$ Veränderlichen zu betrachten, und es ist in den Entwickelungen der Artt. I bis V sorgfältig Alles vermieden, was in diesem besonderen Falle eine Vermischung der beiden Systeme von Variabeln verursachen könnte. Wenn im Gegensatz hierzu bei Hrn. *Weierstrass* der Fall bilinearer Formen als der allgemeinere erscheint, so liegt dies darin, dass sich bei der dortigen expliciten Darstellung der bezüglichen Substitutionen die Uebereinstimmung der Transformation beider Variabeln-Systeme für den Fall, wo die bilinearen Formen symmetrisch sind, ohne Weiteres ergiebt. Uebrigens kann ich die Meinung des Hrn. *Jordan* nicht theilen, dass es ziemlich schwer sei, der *Weierstrass*schen Analyse zu folgen; sie scheint mir im Gegentheil vollkommen durchsichtig zu sein, und ich finde einen besonderen Werth derselben noch darin, dass sie (im Falle, wo $[P, Q]$ von Null verschieden ist) mit zwingender Nothwendigkeit auf den naturgemässen Begriff der „Elementartheiler“ geführt und damit den Weg zu den oben entwickelten allgemeineren, den Fall $[P, Q] = 0$ mit umfassenden Begriffen der „elementaren Schaaren“ und „determinirenden Formenclassen“ klar und deutlich gezeigt hat. Es sind dies in der That, wie oben in der Einleitung und namentlich in den mit A, B, C bezeichneten Sätzen dargelegt worden ist, die wesentlichen Begriffe, die bei Behandlung derjenigen Frage auftreten, welche in ihrer bestimmteren, schärferen Fassung an die Stelle des „dritten *Jordan*'schen Problems“ zu setzen ist, nämlich:

> die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Aequivalenz von zwei beliebigen quadratischen oder bilinearen Formenpaaren zu ermitteln, und für den Fall der Aequivalenz eine Methode zur Auffindung der Transformation anzugeben.

Für die Lösung dieses Problems sind sowohl bei *Weierstrass*' directer Methode als auch bei dem oben entwickelten Reductionsverfahren jene einfachen Ausdrücke der Grundformen elementarer Schaaren

$$x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots, \qquad x_2x_3 + x_4x_5 + \cdots.$$

allerdings von grosser Wichtigkeit; aber nicht in ihrer formalen Einfachheit — und nur diese ist von Hrn. *Jordan* hervorgehoben worden —, sondern darin, dass in ihnen der Typus des „Elementaren“ in Evidenz tritt, liegt ihre wesentliche Bedeutung. Wie wenig entscheidend an und für sich die äussere Einfachheit des Ausdrucks ist, geht z. B. daraus hervor, dass die oben am Schlusse des Art. V vorkommenden Formen

$$\sum_{k=1}^{k=m} x_{2k-1}x_{2k}, \qquad \sum_{k=1}^{k=m-1} x_{2k}x_{2k+1},$$

wenn man jene Rücksicht allein walten lässt, kaum der weiteren Umwandlung mittels der Substitutionen

$$x_k = x'_k + x'_{m+k}, \qquad x_{2m-k+1} = x'_k - x_{m+k} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots m)}$$

bedürftig erscheinen, und dass in rein formaler Beziehung die transformirten Formen sogar etwas weniger einfach sich darstellen möchten; aber aus dem Umstande, dass die aus jenen beiden Formen entspringende Schaar noch mehr als einen Elementartheiler besitzt, folgt einerseits die Möglichkeit und andrerseits auch die Nothwendigkeit einer weiteren Reduction.

Die ersten beiden von Hrn. *Jordan* erwähnten Probleme sind in ähnlicher Weise wie das dritte zu präcisiren und aber, wie Hr. *Jordan* zu bemerken unterlassen hat, als specielle Fälle in diesem dritten schon enthalten. Das erste Problem bezieht sich sogar auf einen der einfachsten und bekanntesten dieser Fälle; denn es verlangt nichts, als zwei bilineare Formen von

$$x_1,\ x_2,\ \ldots x_n;\ \ y_1,\ y_2,\ \ldots y_n,$$

— als quadratische Formen der sämmtlichen Variabeln betrachtet — in einander und gleichzeitig die Summe aller Quadrate

$$\sum_k x_k^2 + \sum_k y_k^2 \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

in sich selber zu transformiren. — Beim zweiten Problem handelt es sich um die Transformation einer bilinearen Form in eine andere mittels einer Substitution, welche für beide Systeme von Variabeln übereinstimmt. Aber schon in meinem von Hrn. *Jordan* citirten Aufsatze (Monatsbericht vom October 1866 p. 600[1]) habe ich gleich von vorn herein ausdrücklich hervorgehoben, dass es hierbei eigentlich nur darauf ankommt, die zwei gegebenen bilinearen Formen selbst und gleichzeitig ihre Transponirten mittels linearer Substitutionen in einander überzuführen. Die überdies noch in Betracht zu ziehende Reduction einer symmetrischen oder alternirenden bilinearen Form auf ein Aggregat von Gliedern xy und resp. $xy' - x'y$ lässt sich mit leichter Mühe und auf mannigfaltige Weise bewirken, u. A. durch jenes einfache und nahe liegende Verfahren, welches sich im Art. I angegeben findet. Auch kann hierbei auf die „Theorie der bilinearen Functionen" verwiesen werden, welche Hr. *Christoffel* im 68. Bande von *Borchardt's* Journal veröffentlicht hat, und welche von Hrn. *Jordan* bei jenem zweiten Problem wohl hätte erwähnt werden müssen.

[1]) S. 148—149 dieser Ausgabe. H.

Nachtrag.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 16. Februar und am 16. März 1874 [1]).]

Es scheint mir nicht überflüssig, etwas näher auf die Vereinfachungen einzugehen, welche die in der vorigen Classensitzung vorgetragenen Entwickelungen für den speciellen Fall zulassen, wo die quadratischen Formen bilinear sind. Zuvörderst ist zu bemerken, dass überall diejenigen von den alternativ auftretenden Ausdrücken wegfallen, in denen Quadrate der Variabeln vorkommen. Hierdurch vereinfachen sich namentlich die in den Art. I, II und IV enthaltenen Deductionen. Der Inhalt des ersten Absatzes von Art. II kommt im vorliegenden Falle nur unter der Voraussetzung $D = 0$ zur Anwendung und zwar in so einfacher Weise, dass es unnöthig wird, denselben besonders hervorzuheben. Dass aber der Anfang von Art. II für $D = 0$ seine Gültigkeit behält, ist von selbst klar, und die Annahme $D \gtrless 0$ ist nur wegen des übrigen Inhalts des erwähnten Abschnittes an die Spitze desselben gestellt worden. Dies vorausgeschickt, übersieht man leicht, dass die oben citirten drei Artikel für den Fall bilinearer Formen durch folgende Betrachtungen ersetzt werden können.

I. Werden die in einer bilinearen Form f enthaltenen $2n$ Variabeln x und y irgendwie in zwei Gruppen getheilt, in denen übrigens die Anzahl der x nicht gleich der Anzahl der y zu sein braucht, so ist, wenn zugleich die Aufeinanderfolge der Veränderlichen innerhalb jeder Gruppe in beliebiger Weise fixirt wird, die erste Variable x_1 mit einer linearen Function der y

[1]) Der letzte Theil dieser Abhandlung, S. 382—413, ist am 16. Mai 1874 in der Akademie gelesen worden. H.

multiplicirt, welche als eine Variable y' eingeführt und als einer ersten oder zweiten Gruppe angehörig betrachtet werden kann, je nachdem darin ein y der ersten Gruppe vorkommt oder nicht. Nach Einführung von y' in f kann dessen Factor als eine neue Variable x_1' der ersten Gruppe angenommen werden, und indem man diese Operation so lange fortsetzt, als noch Variabeln der ersten Gruppe vorhanden sind, gelangt man zu einer Transformirten von f, in welcher drei verschiedene Theile zu unterscheiden sind, insofern als der eine nur Veränderliche der ersten Gruppe, der andre solche der ersten und zweiten Gruppe combinirt, der dritte endlich nur Variabeln der zweiten Gruppe enthält. Die ersten beiden Theile bestehen aus lauter einzelnen Producten $x'y'$, und jede der transformirten Veränderlichen x', y' ist nur eine lineare Function der gleichnamigen Variabeln x, y, sowie derer, die darauf folgen.

II. Wenn von der bilinearen Form f der mit der ersten Variabeln x_1 multiplicirte Theil abgesondert und das, was übrig bleibt, nach den Variabeln y geordnet wird, so besteht zwischen den n linearen Functionen der Variabeln $x_2, x_3, \dots x_n$, welche hierbei als Factoren der Veränderlichen y auftreten, eine lineare Relation. Da hierin möglicherweise nicht alle jene n Functionen von $x_2, x_3, \dots x_n$ wirklich vorkommen, so sei y_h die erste Variable, deren Factor eine lineare Function der Factoren von $y_{h+1}, y_{h+2}, \dots y_n$ ist. Sind die Coëfficienten dieser linearen Function resp. $b_1, b_2, \dots$, so kann durch die Substitution

$$y'_{h+k} = y_{h+k} + b_k y_h \qquad (k=1,2,\dots n-h)$$

die Variable y_h weggeschafft werden, und jener zweite Theil von f wird alsdann eine bilineare Form von

$$x_2, x_3, \dots x_n; \quad y_1, \dots y_{h-1}, y'_{h+1}, \dots y'_n \,.$$

In dem ersten Theile von f kommt nothwendig das Glied $x_1 y_h$ und zwar, wie angenommen werden kann, mit dem Coëfficienten Eins vor, da die Determinante von f von Null verschieden vorausgesetzt wird. Denkt man sich also die bilineare Form

$$f - x_1 y_h$$

nach den Variabeln y geordnet, so erhellt unmittelbar, dass sich dieselbe durch eine Substitution

$$x'_k = x_k + a_k x_1 \qquad (k=2,3,\dots n)$$

in eine bilineare Form von

$$x'_2, x'_3, \dots x'_n; \quad y_1, \dots y_{h-1}, y'_{h+1}, \dots y'_n$$

transformiren lässt. Setzt man dieses Verfahren so lange fort, als noch Variabeln der ersten Gruppe vorhanden sind, so gelangt man zu einer Transformirten von f, die in genau solche drei Theile zerfällt, wie die oben unter No. I aus f hergeleitete Form; doch ist hier jede der Variabeln x', y' nur eine lineare Function der gleichnamigen Variabeln x, y, sowie derer, die denselben vorangehen.

III. Werden die beiden Formen, welche im Art. IV meines früheren Aufsatzes den Ausgangspunkt bilden, als bilinear vorausgesetzt, so genügt für die dort zuerst behandelte Transformation der Form ($\mathfrak{B}$) in ($\mathfrak{B}'$) folgendes einfachere Verfahren. Wenn die Veränderliche $x_{3\nu+k}$ in der linearen Function $f_{2\nu+1}$ mit dem Coëfficienten a, in Ψ aber mit $bx_{3\nu+k}$ multiplicirt vorkommt, so kann dieselbe durch die Substitution

$$ax_{\nu+1} + bx_{3\nu+k} = x'_{3\nu+k}$$

aus $f_{2\nu+1}$ entfernt werden. Wenn man auf diese Weise nach einander die sämmtlichen in der linearen Function $f_{2\nu+1}$ enthaltenen Variabeln wegschafft, deren Index grösser als 3ν ist, und dann die von $f_{2\nu+2}, \dots$, so gelangt man unmittelbar zu einer bilinearen Form

$$\sum_k x^0_{\nu+k} x_{2\nu+k} + \Psi(x^0_{3\nu+1}, x^0_{3\nu+2}, \dots) \qquad (k=1,2,\dots\nu)$$

in welcher jede der Variabeln x^0 sich von der gleichnamigen Variabeln x nur durch eine lineare Function von

$$x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \dots x_{2\nu}$$

unterscheidet, sodass auch die Umwandlung der Form $(\mathfrak{A})$ in $(\mathfrak{A}^{\circ})$ durch Einführung von neuen Veränderlichen $x_1^0, x_2^0, \ldots x_\nu^0$ ohne Weiteres bewerkstelligt werden kann[1]).

IV. Ich habe bereits in der vorigen Classensitzung angedeutet, wie man von den Ausdrücken, welche ich schon im Jahre 1868 für Schaaren mit verschwindenden Determinanten aufgestellt habe, zu den neuerdings hergeleiteten übergehen kann. Diesen Uebergang will ich nunmehr vollständig ausführen, um zugleich die Vereinfachungen darlegen zu können, welche auch hierbei für den Fall bilinearer Formen eintreten. Ich gehe zu diesem Behufe von der Schaar

$$\text{(A)} \qquad \sum_{k=1}^{k=m}(ux'_k + vx'_{k-1})\varphi'_k + u\Phi + v\Psi$$

aus, zu welcher ich bei meinen früheren Untersuchungen gelangt bin*). Hierin bedeuten $x'_0, x'_1, \ldots x'_m$ und $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots \varphi'_m$ von einander unabhängige lineare Functionen der ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$; es können daher, wie schon a. a. O. p. 346 bemerkt ist, die m Functionen φ' als ebensoviel neue Veränderliche $x'_{m+1}, x'_{m+2}, \ldots x'_{2m}$ eingeführt und $x'_0, x'_1, \ldots x'_{m-1}$ so gewählt werden, dass die quadratische Form Ψ nur noch $x'_{2m+1}, x'_{2m+2}, \ldots$ enthält, während aus der quadratischen Form Φ von den Variabeln $x'_{m+1}, x'_{m+2}, \ldots$, welche darin vorkommen können, nur x'_{2m} durch angemessene Wahl von x'_m wegzuschaffen ist. Wird endlich noch

$$x'_0 = \xi_1,\; x'_k = \xi_{2k+1},\; x'_{m+k} = \xi_{2k} \qquad (k=1,2,\ldots m)$$

gesetzt, so verwandelt sich jener Ausdruck der Schaar in folgenden:

$$\text{(B)} \qquad \sum_{k=1}^{k=m}(u\xi_{2k+1} + v\xi_{2k-1})\xi_{2k} + u\sum_{k=1}^{k=m-1}\xi_{2k}f_k + u\Phi' + v\Psi',$$

*) Cf. Monatsbericht vom Mai 1868 p. 345. [S. 172 dieser Ausgabe.]

[1]) Vgl. die Bemerkung am Schlusse des Abschnittes a. S. 399. H.

wo Φ' und Ψ' quadratische Formen von gewissen Veränderlichen $\xi_{2m+2}, \xi_{2m+3}, \ldots$ bedeuten, während die linearen Functionen f_k ausser diesen Variabeln noch

$$\xi_{2k},\; \xi_{2k+2},\; \ldots \xi_{2m-2}$$

enthalten können. Es handelt sich nun einzig und allein um den Nachweis, dass durch geeignete Transformation der Variabeln ξ aus dem vorstehenden Ausdrucke (B) der zweite Theil gänzlich entfernt werden kann. Nimmt man diesen zweiten Theil bereits so weit reducirt an, dass nur noch die den Indices $k = 1, 2, \ldots \mu$ entsprechenden Glieder darin vorkommen, so genügt es, nachzuweisen, wie das Glied $\xi_{2\mu}f_\mu$ resp. jedes der darin vorkommenden Einzelproducte

$$c\xi_{2\mu}\xi_\nu \qquad (\nu \geqq 2\mu)$$

weggeschafft werden kann. Kommt in dem übrigen Theile der in u multiplicirten quadratischen Form

$$\sum_k \xi_{2k}\xi_{2k+1} + \Phi' \qquad (k=1,2,\ldots m)$$

irgend ein Glied $a\xi_\lambda\xi_\nu$ vor, so braucht man nur, je nachdem $\lambda = \nu$ oder $\lambda \gtrless \nu$ ist, eine der beiden Substitutionen

$$a\xi_\nu + \tfrac{1}{2}c\xi_{2\mu} = \xi'_\nu, \qquad a\xi_\lambda + c\xi_{2\mu} = \xi'_\lambda$$

anzuwenden und dann die in (B) mit $v\xi_{2\mu}$ multiplicirte lineare Function als eine neue Variable $\xi'_{2\mu-1}$ an Stelle von $\xi_{2\mu-1}$ einzuführen. Auf diese Weise fällt nämlich in der That das Glied $uc\xi_{2\mu}\xi_\nu$ in dem Ausdrucke (B) weg, während im Uebrigen die Gestalt desselben erhalten bleibt. Dass aber irgend ein Glied $a\xi_\lambda\xi_\nu$ vorkommt, ist für $\nu < 2m+2$ evident und für $\nu \geqq 2m+2$ ergiebt es sich aus folgenden Betrachtungen. Offenbar kann nämlich angenommen werden, dass ξ_ν in Φ' vorkommt, wenn nur Ψ' nicht von ξ_ν unabhängig ist; denn die eine Grundform kann ja durch irgend ein Aggregat der ersten und zweiten ersetzt werden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es kann für v eine lineare Function $v + cu$ genommen werden. Wäre nun aber mit Φ' auch Ψ' von ξ_ν unabhängig, so würde an die Stelle der Gleichung m^{ten} Grades in w, welche den Ausgangspunkt des Art. II meiner Arbeit vom Jahre 1868 bildet, eine Gleichung μ^{ten} Grades treten, was der zu Grunde gelegten Annahme widerspricht. — Wenn auf die angegebene Weise allmählig sämmtliche Glieder $c\xi_{2\mu}\xi_\nu$ weggefallen sind, in denen $\nu > 2\mu$ ist, und alsdann noch ein Glied $a\xi_{2\mu}^2$ übrig bleibt, so kann dieses schliesslich durch die Substitutionen

$$\xi_{2\mu+1} + a\xi_{2\mu} = \xi'_{2\mu+1}, \qquad \xi_{2\mu-1} - a\xi_{2\mu+2} = \xi'_{2\mu-1}$$

beseitigt und damit die Wegschaffung von $\xi_{2\mu} f_\mu$ zu Ende geführt werden. Sowohl die Veranlassung zu dieser letzten Operation als auch die obige Alternative $\lambda = \nu$ fällt bei Schaaren bilinearer Formen weg, und dass bei der Transformation solcher Schaaren die beiden Variabeln-Systeme getrennt zu halten sind, geht aus dem angegebenen Transformations-Verfahren selbst hervor[1]).

V. Wenn für die Schaar $u\varphi + v\psi$*) die sämmtlichen $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten aber nicht die μ^{ten} identisch verschwinden, so existiren genau μ von einander unabhängige lineare Relationen zwischen den nach den verschiedenen Variabeln genommenen partiellen Ableitungen von $u\varphi + v\psi$, deren Coëfficienten ganze homogene Functionen von u und v sind. Werden nun durch irgend welche Verbindungen jener Relationen μ solche hergestellt, deren Coëfficienten von möglichst niedriger Dimension in Beziehung auf u und v sind, so erhält man ein System von μ Gleichungen

$$\text{(G)} \qquad \sum_{h,k} (-1)^k \theta_k^{(r)} u^h v^k = 0 \qquad {\scriptstyle (h+k=m^{(r)},\ r=0,1,\ldots\mu-1)},$$

in denen $\theta_k^{(r)}$ lineare homogene Functionen der Ableitungen von $u\varphi + v\psi$ und, wie leicht zu sehen, von einander unabhängig sind. Denkt man sich nämlich die Zahlen $m, m', m'', \ldots,$ welche die Dimensionen der verschiedenen Glei-

*) Cf. Monatsbericht vom Mai 1868 p. 343. II. [S. 170 dieser Ausgabe].

[1]) Vgl. die Darstellung dieser Reductionsmethode in der Abhandlung *L. Kronecker's* „Algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen". Berliner Berichte vom 8. Januar, S. 9—13. Band III dieser Ausgabe. H.

chungen (G) bestimmen, ihrer Grösse nach geordnet, so dass $m \leqq m' \leqq m'' \ldots$ ist, und wird dann $\theta_\varkappa^{(\varrho)}$ als eine lineare Verbindung derjenigen Grössen $\theta_k^{(r)}$ angenommen, in denen $r < \varrho$ ist, und derjenigen, in denen $r = \varrho$ aber $k < \varkappa$ ist, so kann der erstere Theil von $\theta_\varkappa^{(\varrho)}$ aus dem mit $v^\varkappa$ multiplicirten Gliede in der ϱ^{ten} Gleichung mit Hilfe der $\varrho - 1$ vorhergehenden und der zweite Theil mit Hilfe der ϱ^{ten} Gleichung selbst weggeschafft werden. Um dabei negative Potenzen von v zu vermeiden, genügt es für $\varkappa < m^{(\varrho-1)}$ die ϱ^{te} Gleichung mit einer Potenz von v zu multipliciren, deren Exponent $m^{(\varrho-1)} - \varkappa$ ist. Auf diese Weise entsteht eine neue Gleichung

$$\text{(G')} \qquad \sum_k (-1)^k \theta_k^{(\varrho)} u^h v^k = 0 \qquad {\scriptstyle (h+k=m^{(\varrho)},\ k=0,1,2,\ldots)},$$

in welcher $\theta_g^{(\varrho)} = 0$ ist, wenn g die grössere der Zahlen $\varkappa$ und $m^{(\varrho-1)}$ bedeutet. Diess kann aber nicht der Fall sein; denn die Grössen θ, welche einer derartigen Gleichung (G) genügen, haben überhaupt die Form

$$\text{(H)} \qquad \theta_0 = v\xi_2,\ \theta_1 = u\xi_2 + v\xi_4,\ \theta_2 = u\xi_4 + v\xi_6,\ \ldots,$$

wo $\xi_2, \xi_4, \xi_6, \ldots$ lineare Functionen der Variabeln der Schaar bedeuten; auf Grund der obigen Annahme müsste daher ξ_{2g}, als erster Theil des betreffenden θ, ebenfalls gleich Null sein, und durch Elimination der vorhergehenden Grössen ξ aus den ersten g Gleichungen (H) würde eine Gleichung resultiren, deren Dimension in Beziehung auf u und v gleich $g - 1$, also der ursprünglichen Voraussetzung zuwider kleiner als $m^{(\varrho)}$ wäre. Der Nachweis, dass zwischen denjenigen Grössen θ, welche einen und denselben oberen Index haben, keine lineare Relation bestehen kann, ist in ähnlicher Weise schon in meiner Arbeit vom Jahre 1868 gegeben worden.

Die Reihe der Zahlen $m, m', m'', \ldots$ bleibt natürlich bei irgend welcher linearen Transformation der Schaar $u\varphi + v\psi$ ebenso ungeändert wie die Reihe der determinirenden Classen, und diese Bemerkung hätte als eine unmittelbare Folgerung aus meiner Arbeit vom Jahre 1868 eigentlich schon in der Einleitung meines vorigen Aufsatzes ihre Stelle finden sollen. Da nur die Summe der Zahlen m, nicht aber die Reihe der einzelnen Zahlen selbst durch die Reihe der determinirenden Classen bestimmt ist, so muss zur

Identität dieser letzteren Reihe noch die der ersteren als Aequivalenzbedingung hinzugefügt werden, falls ausser der Determinante der Schaar auch noch die ersten Unterdeterminanten identisch verschwinden. Wird die Schaar $u\varphi + v\psi$ als ein Aggregat elementarer Schaaren dargestellt, so kommen darunter genau μ vor, deren Determinante gleich Null ist. Diess sind Schaaren von resp. $2m+1$, $2m'+1$, ... Veränderlichen, welche auf die Gestalt

$$\sum_k (u\xi_{2k+1}' + v\xi_{2k-1})\xi_{2k} \qquad (k=1,2,\dots m)$$

gebracht werden können, und die hierin auftretenden Variabeln ξ_{2k} sind als lineare Functionen der ursprünglichen Veränderlichen in ganz directer Weise durch jenes System von „determinirenden" Gleichungen (G) zu definiren. Es ist nämlich

$$\theta_0 = v\xi_2, \quad \theta_1 = u\xi_2 + v\xi_4, \quad \dots \theta_{m-1} = u\xi_{2m-2} + v\xi_{2m}, \quad \theta_m = u\xi_{2m},$$

und die hieraus zu bestimmenden m Variabeln ξ bleiben auch, wie hervorzuheben ist, völlig unberührt, wenn jene oben in IV angegebene Transformation des im Monatsbericht vom Mai 1868 aufgestellten Ausdruckes für Schaaren mit verschwindender Determinante ausgeführt wird. Mit den Variabeln ξ_2 und ξ_{2m} sind auch die Variabeln ξ_1 und ξ_{2m+1} als deren resp. Factoren in der einen und der andern Grundform definirt: aber diese Definitionen sind insoweit nicht völlig bestimmt, als die determinirenden Gleichungen, aus welchen sie entnommen wurden, mit einander ohne Aenderung der Dimension combinirt werden können. Diess hängt unmittelbar mit der Frage zusammen, ob und in welcher Weise eine Schaar von quadratischen Formen in sich selbst transformirt werden kann. Ich habe diese Frage neuerdings untersucht und gedenke die bezüglichen Resultate in einer ausführlicheren Arbeit zu veröffentlichen, in welcher überhaupt die Eigenschaften der Schaaren quadratischer Formen systematisch und vollständig entwickelt und auch die allgemeineren algebraischen Gesichtspunkte, welche dabei hervortreten, besonders dargelegt werden sollen.

Soweit die Grössen θ oder ξ bestimmbar sind, lassen sie sich, wie die Gleichungen (G) zeigen, aus den μ^{ten} Unterdeterminanten von $u\varphi + v\psi$

bilden. Ueberdies gehört auch zu jeder bestimmten Reihe von Zahlen m eine bestimmte Reihe in Determinantenform angebbarer Gleichungen, denen die Coëfficienten der Formen φ und ψ genügen müssen, und die also die Stelle von Invarianten vertreten. Ein solches vollständiges System von Invarianten kann natürlich in mannigfachster Weise aufgestellt werden, und man gelangt dazu namentlich durch folgende Betrachtungen, welche noch in anderer Hinsicht ein besonderes Interesse darbieten.

Werden die Factoren von $\theta_0^{(r)}$ in der Schaar $u\varphi + v\psi$ resp. mit $\xi_1^{(r)}$ und ferner mit $x_{n+1}^{(r)}$ ebensoviel neue Veränderliche bezeichnet, so ist

$$u\varphi + v\psi + u\sum_r \xi_1^{(r)} x_{n+1}^{(r)} \qquad (r=0,1,\dots \mu-1)$$

und auch

$$u\varphi + v\psi + u\sum_r \xi_1^{(r)} \xi_1^{(r)} \qquad (r=0,1,\dots \mu-1)$$

eine mit $u\varphi + v\psi$, so zu sagen, covariante Schaar, deren Determinante von Null verschieden ist, so dass diese selbst und ihre Unterdeterminanten ein vollständiges System von Invarianten ergeben. Aber diese Zurückführung des allgemeinsten Falles, wo die $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten der Schaar verschwinden, auf denjenigen, welchen Hr. *Weierstrass* behandelt hat, liefert überdiess im Gegensatz zu meiner Reductionsmethode eine directe Transformation von $u\varphi + v\psi$ in ein Aggregat von elementaren Schaaren, und es zeigt sich daher, dass die Principien, von denen ich in meiner Arbeit vom Jahre 1868 ausgegangen bin, in Verbindung mit den damals von Hrn. *Weierstrass* gegebenen Entwickelungen zur vollständigen Erledigung des Transformationsproblems für beliebige Schaaren von quadratischen oder bilinearen Formen völlig ausreichend sind.

Seit meinem am 16. Februar gehaltenen Vortrage „über quadratische und bilineare Formen“ sind zwei Publicationen des Hrn. *C. Jordan* über denselben Gegenstand erschienen: erstens eine grössere Abhandlung in *Liouville's* Journal (Ser. II, Bd. XIX, pag. 35—54), worin er seine Methoden zur Herleitung der schon in den Comptes Rendus vom 22. Dec. 1873 angekündigten Resultate vollständig entwickelt hat, zweitens eine kürzere Notiz in den Comptes Rendus vom 2. März d. J. (pag. 614—617), worin er sich gegen einige der Ausführungen wendet, welche ich der Darlegung meiner Reductionsmethode für Schaaren quadratischer Formen zu Anfang und Ende meines betreffenden Aufsatzes angefügt habe. Es findet sich in dieser Notiz *ein* Punkt, in Beziehung auf welchen ich mit dem Verfasser übereinstimme, und ich selbst habe schon in einem Nachtrage zu meiner ersten Arbeit, welchen ich in der vorigen Classensitzung gegeben habe, eine bezügliche Bemerkung mit aufgenommen. Ich habe nämlich dort unter No. V hervorgehoben, dass die Identität der Reihe der determinirenden Classen, falls dieselbe mehr als eine Null enthält, als Aequivalenzbedingung nicht *ausreichend* ist, und ich habe sowohl diese als einige andere im Nachtrage angegebene Modificationen im Texte selbst noch anbringen können, da das Januarheft zur Zeit im Drucke noch nicht so weit vorgeschritten und meine Arbeit bis dahin bloss in besonderen Exemplaren veröffentlicht war. In dem erwähnten Nachtrage habe ich übrigens auch die Aequivalenzbedingungen bezeichnet, welche in jenen speciellen Fällen noch hinzugefügt werden müssen, und ich habe damit schon im Voraus die Proposition abgelehnt, durch welche Hr. *Jordan* meinen Ausspruch über die Kriterien der Aequivalenz ersetzt wissen will. Seine Proposition, „dass für die Aequivalenz der Systeme zweier Formen die Uebereinstimmung der Reducirten nothwendig und hinreichend sei“, ist zwar vollkommen richtig, aber zu dürftigen Inhalts, denn es handelt sich nicht um die Angabe eines praktischen Verfahrens zur Entscheidung der Frage der

Aequivalenz gegebener Formensysteme, sondern um eine möglichst unmittelbare Anknüpfung der theoretischen Kriterien der Aequivalenz an die Coëfficienten der gegebenen Formen, d. h. um die Aufstellung eines vollständigen Systems von „Invarianten“, im höheren Sinne des Wortes*). Behufs Herleitung eines solchen Systems braucht man freilich zuerst jene Zurückführung zweier Formen auf Aggregate von Reducirten, aber man darf hierbei nicht stehen bleiben, sondern alsdann hat man noch für die einzelnen Reducirten die zugehörigen Invariantensysteme zu ermitteln und gelangt eben dadurch von dem bloss formalen Begriffe der „Reducirten“ zu dem höheren der „elementaren Schaaren“. Da nämlich die oben erwähnte Restriction der Aequivalenzbedingungen für elementare Schaaren nicht eintritt, so sind deren Classen durch die zugehörigen Reihen von determinirenden Formenclassen vollständig charakterisirt, und diese Reihen vertreten also durchaus die Stelle von Invariantensystemen. Demgemäss ist ferner für eine beliebige Classe von Schaaren S die Gesammtheit derjenigen Reihen determinirender Fomen-

*) In der arithmetischen Theorie der Formen muss man sich freilich mit der Angabe eines Verfahrens zur Entscheidung der Frage der Aequivalenz begnügen und das betreffende Problem wird deshalb auch ausdrücklich in dieser Weise formulirt (cf. *Gauss:* Disquisitiones arithmeticae, Sectio V, Artt. 173 sqq., 195 sqq.[1]). Das Verfahren selbst beruht auch dort auf dem Uebergange zu reducirten Formen: doch ist dabei nicht zu übersehen, dass denselben in den arithmetischen Theorieen eine ganz andere Bedeutung zukommt als in der Algebra. Da nämlich die Invarianten äquivalenter Formen dort ihrer Natur nach nur zahlentheoretische Functionen der Coëfficienten sind, so kann es nicht befremden, wenn dieselben zwar direct definirt aber nicht explicite sondern nur als Endresultate arithmetischer Operationen dargestellt werden können; denn ganz ähnlich verhält es sich mit den meisten arithmetischen Begriffen, z. B. schon mit jenem einfachsten Begriffe des grössten gemeinsamen Theilers. Man ist deshalb wohl berechtigt, z. B. im Falle binärer quadratischer Formen von negativer Determinante, die Coëfficienten der reducirten Form selbst als die Invarianten der Classe aufzufassen; sieht man aber von der Beschränkung ab, dass die Invarianten ganzzahlig sein sollen, so gewähren die singulären Moduln der elliptischen Functionen, wie die *Hermite*'schen und meine eigenen Untersuchungen ergeben haben, durchaus vollkommene Invarianten jener arithmetischen Formenclassen (cf. mein Aufsatz „Ueber die Auflösung der *Pell*'schen Gleichung mittels elliptischer Functionen“, Monatsbericht vom Januar 1863[2]).

[1]) *C. F. Gauss'* Gesammelte Werke Bd. I. S. 149 flgde., 184 flgde. H.
[2]) Band IV dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

classen charakteristisch, die den verschiedenen elementaren Schaaren entsprechen, in welche die Schaar S zu zerlegen ist. Alle diese Reihen enthalten zusammen genau so viel Glieder wie die Reihe der determinirenden Formenclassen, welche zu der Schaar S selbst gehört, und die Glieder der letzteren können aus denen der ersteren in folgender Weise gebildet werden. Als erstes Glied der neuen Reihe ist das Product aller ersten Glieder der verschiedenen andern Reihen zu nehmen; lässt man aus diesem Producte je einen Factor weg, so ist der grösste gemeinsame Theiler der verschiedenen Producte, welche auf diese Weise entstehen, das zweite Glied der neuen Reihe u. s. f. Aus der angegebenen Bildungsweise folgt, dass auch umgekehrt durch die einzelnen Glieder der neuen Reihe die ersten Glieder der sämmtlichen früheren Reihen vollkommen bestimmt sind und also diese Reihen selbst, falls nur noch die Anzahl ihrer Glieder, die ja mit Ausnahme des ersten alle gleich Eins sind, gegeben ist. Diese Anzahl ist aber gleich der Dimension des ersten Gliedes, falls dieses von Null verschieden ist, und die Gesammtanzahl der Glieder aller Reihen ist gleich der Anzahl der Variabeln der Schaar; es bedarf daher für die Gliederzahlen der verschiedenen Reihen nur dann noch einer besonderen Bestimmung, wie ich sie in der vorigen Classensitzung gegeben habe, wenn mehr als eines der Anfangsglieder verschwindet. — Diess sind die Betrachtungen, mit Hilfe deren ich (schon vor sechs Jahren) zu jenen Resultaten gelangt bin, welche ich in der Einleitung meines Aufsatzes vom Januar d. J. als Folgerungen aus der *Weierstrass*'schen und meiner eigenen Arbeit vom Jahre 1868 aufgeführt habe. Schon dort hätten eigentlich, wie ich gern zugebe, die erwähnten Betrachtungen zur Begründung der gezogenen Consequenzen ihre Stelle finden sollen, und es wäre dabei in der That jenes Moment der Gliederzahl deutlich hervorgetreten, welches mir in der Erinnerung zuerst entgangen war, und auf welches ich erst nachträglich wieder aufmerksam wurde, als eben dasselbe Moment bei der Frage der Transformation der Schaaren in sich selbst mir von Neuem vor Augen trat*). Indessen grade hier war jenes Moment nur von scheinbarer Bedeutung, und es hängt die ziemlich complicirte Frage der Transformation von Schaaren in sich selbst vielmehr von den Coëfficienten u_k, v_k ab,

*) Cf. Monatsbericht vom 16. Februar 1874 Art. V[1]).

[1]) S. 379 dieser Ausgabe. H.

welche bei der Darstellung einer Schaar $u\varphi + v\psi$ als ein Aggregat von elementaren Schaaren auftreten. Ist nämlich, wie in meinem früheren Aufsatze

$$u\varphi + v\psi = \sum_k (u_k\varphi_k + v_k\psi_k) \qquad (k=1,2,3,\ldots),$$

so lassen im Falle bilinearer Formen stets alle diejenigen Theil-Aggregate, in denen die mit u_k, v_k bezeichneten linearen Functionen von u und v identisch sind, für sich allein Transformationen in sich selbst zu, aus denen sich alle zusammensetzen. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass es sich nur darum handelt, ob eine Identification der Functionen u_k, v_k möglich ist; denn dieselben sind durchaus nicht vollständig bestimmt und können bei elementaren Schaaren mit verschwindender Determinante sogar ganz beliebig angenommen werden, wenn man sich nur bei der Auswahl der Grundformen φ_k und ψ_k darnach richtet. Diese Unbestimmtheit existirt aber nur bei jener formalen Definition des Zusammenhangs zwischen den verschiedenen Schaaren eines und desselben Theil-Aggregats. An sich ist dieser Zusammenhang völlig bestimmt, und zwar so, dass die Determinanten aller auf diese Weise zusammengehörigen elementaren Schaaren eine und dieselbe lineare Function von u, v als Factor enthalten. Diejenigen elementaren Schaaren, deren Determinante gleich Null ist, gehören demgemäss zu jedem Theil-Aggregate, welches aus den verschiedenen elementaren Schaaren zu bilden ist. So giebt es z. B. in der Schaar

$$(u+v)x_0y_0 + u(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + v(x_2y_1 + x_4y_3)$$

zwei solcher Theil-Aggregate, zu deren jedem die Schaar $y_3(ux_3 + vx_4)$ gehört, und die ganze Schaar bleibt ungeändert, wenn man die Variabeln y_0, y_1, x_3, x_4 resp. durch

$$y_0 - py_3, \quad y_1 - qy_3, \quad x_3 + px_0 + qx_1, \quad x_4 + px_0 + qx_2$$

ersetzt. Die Schaar, die aus den beiden Grundformen

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5, \quad x_2y_1 + x_3y_2 + x_5y_4$$

entsteht und eine von Null verschiedene Determinante hat, geht durch folgende Transformation in sich selbst über:

$$x_1' = x_1 + ax_2 + bx_3 + cx_4 + dx_5, \qquad x_2' = x_2 + ax_3 + cx_5,$$
$$x_3' = x_3, \qquad x_4' = \alpha x_2 + \beta x_3 + x_4 + \gamma x_5, \qquad x_5' = \alpha x_3 + x_5;$$
$$y_1 = y_1', \qquad y_2 = ay_1' + y_2' + \alpha y_4', \qquad y_3 = by_1' + ay_2' + y_3' + \beta y_4' + \alpha y_5',$$
$$y_4 = cy_1' + y_4', \qquad y_5 = dy_1' + cy_2' + \gamma y_4' + y_5'.$$

Auch elementare Schaaren bilinearer Formen, deren Determinante von Null verschieden ist, gestatten Transformationen in sich selbst, und es ist schon im einfachsten Falle

$$u(x_0y_1 + x_1y_0) + vx_0y_0 = u\big(x_0(y_1 - cy_0) + y_0(x_1 + cx_0)\big) + vx_0y_0.$$

Für Schaaren von quadratischen Formen, welche sich in Beziehung auf die Transformationen in sich selbst einigermassen anders als die der bilinearen Formen verhalten, möge hier nur die einfache Bemerkung Platz finden, dass jedes Aggregat von irgend zwei elementaren Schaaren

$$u(x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots) + v(x_2x_3 + x_4x_5 + \cdots)$$
$$+ u(x_1'x_2' + x_3'x_4' + \cdots) + v(x_2'x_3' + x_4'x_5' + \cdots)$$

ungeändert bleibt, wenn man x_1 und x_1' resp. durch

$$x_1 + cx_2', \qquad x_1' - cx_2$$

ersetzt.

Die vorstehenden Ausführungen über die Transformation der Schaaren in sich selbst genügen, um die in der neuesten Notiz des Hrn. *Jordan* enthaltene Angabe zu widerlegen, dass eine solche Transformation *nur* statthaben könne, wenn „mehrere von den partiellen Reducirten ähnlich“ seien; sie zeigen überdiess, dass die Natur der Bedingungen, unter denen Transformationen von Schaaren in sich selbst möglich sind, überhaupt eine ganz andere ist, und Hrn. *Jordan's* weitere Bemerkung, dass diese ganze Frage, die übrigens in den früheren Aufsätzen noch nicht erwähnt war, bei An-

wendung seiner Reductionsmethode auf höchst einfache Weise beiher erledigt werde, verliert hiernach an Werth und Interesse*).

Bei meiner Untersuchung über die Transformation der Schaaren in sich selbst, mit der ich übrigens noch nicht zu einem vollständig befriedigenden Abschlusse gelangt bin, habe ich mich hauptsächlich auf die *Weierstrass*'sche Methode stützen müssen und aus meinem Reductionsverfahren für die bezeichnete Frage nur wenig Nutzen ziehen können. Wenn auf diese Weise bei einzelnen Fragen die eine oder die andre der beiden Methoden grösseren Vortheil gewähren mag, so sind doch beide zur Herstellung der wesentlichen Grundlagen für die Theorie der Schaaren ganz gleich geeignet. Den dabei zu befolgenden Gang will ich hier in seinen Hauptzügen kurz andeuten und daran eine übersichtliche Darlegung der eigentlichen Ideen und Principien knüpfen, auf denen die beiden Methoden selbst beruhen.

Wie sehr die Herleitung der verschiedenen Eigenschaften von Schaaren quadratischer Formen an Klarheit und Einfachheit gewinnt, wenn man jene Reduction auf gewisse einfache Ausdrücke, die Hr. *Jordan* ganz passend „reducirte“ genannt hat, vorannimmt, das habe ich bereits in meiner Arbeit vom Jahre 1868 für diejenigen Schaaren gezeigt, welche *definite* Formen enthalten und dort als Schaaren der ersten Art bezeichnet sind**). Diese Ein-

*) *Jordan:* Sur la réduction des formes bilinéaires. Comptes Rendus 1874. I. pag. 615. „Enfin on reconnait, chemin faisant, de la manière la plus simple, que la forme des réduites est complétement déterminée, et l'on trouve ces substitutions qui transforment les réduites en elle-même.“

**) Da die Schaaren der ersten Art für viele andre mathematische Fragen von besonderer Bedeutung sind, so hatte sich ihnen früher die Untersuchung fast ausschliesslich zugewendet, und selbst in der ersten diesen Gegenstand betreffenden *Weierstrass*'schen Abhandlung vom Jahre 1858, in welcher zuerst das Problem der gleichzeitigen Transformation zweier quadratischer Formen allgemeiner gefasst wird, beziehen sich die ganz fertigen und hauptsächlichen Resultate — gemäss der ausgesprochenen Tendenz der Arbeit — auf den Fall, wo jede der beiden quadratischen Formen reell und wenigstens die eine *definit* ist. Erst die zweite *Weierstrass*'sche Arbeit vom Jahre 1868 enthält in der weiteren simultanen Umwandlung der zusammengehörigen (im Monatsberichte von 1858) mit ϑ_μ, θ_μ bezeichneten Functionen die vollständige Erledigung des Transformationsproblems für beliebige Schaaren von nicht verschwindender Determinante. Die Ausführungen, welche ich selbst damals unmittelbar daran geknüpft habe, beziehen sich aber sicht veranlasste mich eben, jene Reductionsmethode weiter auszubilden und auf ganz beliebige Schaaren anwendbar zu machen. Aber man kann ebenso gut die *Weierstrass*'sche Methode benutzen, um zu zeigen, dass sich jede beliebige Schaar in eine „reducirte Schaar“ d. h. in ein Aggregat von Schaaren transformiren lässt, deren Grundformen

$$x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots; \quad x_2x_3 + x_4x_5 + \cdots$$

sind; nur muss man, falls die Determinante der Schaar gleich Null ist, noch meine darauf bezüglichen Entwickelungen hinzunehmen. Uebrigens wird hierbei nur jener wichtigste Theil von der *Weierstrass*'schen Analyse gebraucht, welcher zuerst auf die „reducirten Schaaren“ geführt hat, nämlich derjenige, welcher im § 2 der mehrfach erwähnten Abhandlung*) enthalten ist, und man kann sogar — freilich unter Verzicht auf den Vortheil der genetischen Darstellung — von der dort vorausgeschickten Erörterung des Begriffes der Elementartheiler dabei absehen. — Nachdem so auf die eine oder die andere Weise der Hauptpunkt erledigt und nachgewiesen ist, dass in jeder Classe von Schaaren eine reducirte existirt, ist die „Reihe der determinirenden Formenclassen“ einzuführen und zu zeigen, dass dieselbe für alle Schaaren einer Classe identisch ist, d. h. dass der grösste gemeinsame Theiler der Unterdeterminanten von $u\varphi + v\psi$ bei jeder linearen Transformation ungeändert bleibt. Dies erhellt aber ganz unmittelbar, wenn man sich die linearen Substitutionen in lauter elementare zerlegt denkt d. h. in solche, die durch folgende $n+1$ Transformationen der n Variabeln x bezeichnet sind**):

in ihrem ersteren Theile nur auf den Inhalt der früheren *Weierstrass*'schen Arbeit und ergeben die wichtigsten Resultate derselben mittels einer andern Methode; sie zeigen, wie die gleichzeitige Verwandlung zweier quadratischer Formen in eine Summe von Quadraten, falls sie überhaupt möglich ist, durch ein einfaches und allgemeines Verfahren bewirkt werden kann, das also namentlich jenen Beschränkungen nicht unterworfen ist, welche — wie schon bei *Weierstrass* hervorgehoben wird — keineswegs durch die Natur der Sache sondern nur durch die Unvollkommenheit der früheren Methoden bedingt waren.

*) *Weierstrass:* Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsbericht vom Mai 1868.

**) Cf. meine Arbeit „über bilineare Formen“. Monatsbericht vom October 1866 pag. 609.[1])

[1]) Bd. I S. 159 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

$$(1) \qquad x_1 = -x_k', \quad x_k = x_1', \quad \text{und wenn} \quad i \gtrless k \quad \text{ist:} \quad x_i = x_i',$$

wo nach einander $k = 2, 3, \ldots n$ zu setzen ist;

$$(2) \qquad x_1 = x_1' + x_2', \quad \text{und wenn} \quad i > 1 \quad \text{ist:} \quad x_i = x_i',$$

$$(3) \qquad x_1 = cx_1', \quad \text{und wenn} \quad i > 1 \quad \text{ist:} \quad x_i = x_i';$$

denn bei jeder solchen elementaren Transformation geht eine Unterdeterminante nur entweder in eine andre oder in die Summe von zweien über, oder sie wird nur mit dem Substitutionscoëfficienten c multiplicirt. — Nunmehr sind die Schaaren hervorzuheben, welchen die einfachsten Reihen determinirender Formenclassen entsprechen, d. h. solche, in denen das erste Glied nur die Potenz einer linearen Function von u und v oder Null und jedes der übrigen Glieder gleich Eins ist. Die Reducirte einer solchen Schaar ist:

$$(u + cv)(x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots) + v(x_2x_3 + x_4x_5 + \cdots),$$

in welcher beide Formen gleich viel Glieder enthalten, wenn die Determinante gleich Null ist, während andernfalls die erste Form ein Glied mehr enthält als die zweite. Eine solche reducirte Schaar ist ebenso wie die ganze Classe von Schaaren, zu denen sie gehört, durch die Anzahl der Variabeln und durch den Werth ihrer Determinante, die entweder gleich Null oder gleich $(u + cv)^n$ ist, vollständig bestimmt, da im ersteren Falle $c = 0$ genommen werden kann, und jede Schaar einer solchen Classe d. h. jede Schaar, zu der eine jener einfachsten Reihen von determinirenden Classen gehört, ist demgemäss als „elementare Schaar“ zu bezeichnen. Da nun die Reducirte einer beliebigen Classe von Schaaren ein Aggregat von reducirten elementaren Schaaren ist, so besteht für jede Schaar $u\varphi + v\psi$ eine Gleichung

$$u\varphi + v\psi = \sum_k \left((u + c_k v)\varphi_k + v\psi_k\right) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots),$$

in welcher jedes einzelne Glied auf der rechten Seite eine elementare Schaar repräsentirt. Es lässt sich ferner, wie oben näher ausgeführt worden, einerseits aus den Determinanten und Gliederzahlen der einzelnen elementaren Schaaren die zu $u\varphi + v\psi$ gehörige Reihe der determinirenden Formenclassen bilden, andrerseits können aus dieser Reihe und aus jener Reihe von Zahlen, welche die Dimension der „determinirenden Gleichungen“ angeben, die Determinanten und Gliederzahlen der einzelnen elementaren Schaaren hergeleitet werden, und man erkennt somit, dass die erwähnten beiden Reihen für alle zu einer und derselben Classe gehörigen Schaaren durchaus charakteristisch sind.

Um nunmehr die *Weierstrass*'sche Reductionsmethode zu entwickeln, sei $u\varphi + v\psi$ eine Schaar bilinearer Formen der Variabeln x, y und ihre Determinante von Null verschieden. Setzt man

$$u\varphi + v\psi = \sum_{i,k} w_{ik} x_i y_k$$

$$\sum_i w_{ik} x_i = w_{0k} = u\varphi_{0k} + v\psi_{0k} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

$$\sum_k w_{ik} y_k = w_{i0} = u\varphi_{i0} + v\psi_{i0},$$

sowie ferner, um die Entwickelung in formaler Hinsicht zu vereinfachen,

$$u\varphi + v\psi = w \qquad \text{und} \qquad w_{00} = 0\,,$$

so erhält man w als bilineare Form ihrer Derivirten w_{0k}, w_{i0} in bekannter Weise als Quotient zweier Determinanten dargestellt, nämlich:

$$\text{(A)} \qquad w = -\frac{|w_{gh}|}{|w_{ik}|} \qquad \begin{pmatrix} g, h = 0, 1, \dots n \\ i, k = \ 1, \dots n \end{pmatrix}.$$

Diese Betrachtung der bilinearen Form w als Function ihrer derivirten bildet die eine wesentliche Grundlage der *Weierstrass*'schen Analyse, welche übrigens, so aufgefasst, auch in dem Falle anwendbar bleibt, wo die Determinante verschwindet. Ein zweiter Hauptpunkt der *Weierstrass*'schen Entwickelungen besteht darin, dass auf die Fom w, als Function ihrer derivirten betrachtet, die *Jacobi*'sche Transformation*) angewendet wird, um daraus die Zerlegung

*) *Borchardt's* Journal, Bd. 53, pag. 265 sqq.[1])

[1]) *C. G. J. Jacobi*, Gesammelte Werke. Bd. III. S. 583—590. H.

in Partialbrüche herzuleiten. Aber statt von dem *Jacobi*'schen Resultate Gebrauch zu machen entwickelt Hr. *Weierstrass* bei dieser Gelegenheit eine Methode, welche überhaupt zu einer eleganten Herleitung der *Jacobi*'schen Transformation benutzt und in folgender allgemeinen Determinantenformel zusammengefasst werden kann:

$$\text{(B)} \qquad w_{00} = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{|w_{qr}| \cdot |w_{rq}|}{|w_{qq'}| \cdot |w_{ss'}|} \qquad \begin{pmatrix} q, q' = m, m+1, \dots n \\ r = 0, m+1, \dots n \\ s, s' = \ m+1, \dots n \end{pmatrix}.$$

Die Grössen w bedeuten hier ganz beliebige $(n+1)^2$ Elemente, für welche die auf der rechten Seite vorkommenden Nenner von Null verschieden sind, in dem letzten Gliede d. h. für $m = n$ ist $|w_{ss'}| = 1$ zu setzen, und die Formel selbst ist ohne Weiteres mit Hilfe der bekannten Gleichung*)

$$\frac{|w_{qr}| \cdot |w_{rq}|}{|w_{qq'}| \cdot |w_{ss'}|} = \frac{|w_{rr'}|}{|w_{ss'}|} - \frac{|w_{pp'}|}{|w_{qq'}|} \qquad \begin{Bmatrix} p, p' = 0, m, m+1, \dots n \\ q, q' = \ m, m+1, \dots n \\ r, r' = \ 0, m+1, \dots n \\ s, s' = \ m+1, \dots n \end{Bmatrix}$$

zu verificiren. In dem obigen Falle ist $w_{00} = 0$, das dem Werthe $m = 0$ entsprechende erste Glied auf der rechten Seite von (B) wird gemäss der Gleichung (A) gleich $-w$, und die Formel (B) verwandelt sich daher in folgende:

$$\text{(C)} \qquad w = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{|w_{qr}| \cdot |w_{rq}|}{|w_{qq'}| \cdot |w_{ss'}|} \qquad \begin{pmatrix} q, q' = m, m+1, \dots n \\ r = 0, m+1, \dots n \\ s, s' = \ m+1, \dots n \end{pmatrix},$$

welche mit der *Jacobi*'schen**) genau übereinstimmt.

Man kann sich die Schaar $u\varphi + v\psi$ (gemäss einer mündlichen Mittheilung meines Freundes *Weierstrass*) aus den Schaaren derselben Classe von vorn herein so ausgewählt denken, dass alle die verschiedenen aus den Elementen w_{ik} gebildeten partialen Determinanten einer und derselben Ordnung

*) *Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten, III. Auflage § 6, 3.
**) *Borchardt's* Journal, Bd. 53, pag. 269.[1])

[1]) Werke. Bd. III. S. 589. H.

auch einen und denselben grössten gemeinsamen Theiler mit der Determinante $|w_{ik}|$ selbst haben; denn diess findet offenbar statt, wenn eine allgemeine lineare Transformation mit unbestimmten Substitutionscoëfficienten auf die Form $u\varphi + v\psi$ angewendet wird. Ist nun $u + c_\nu v$ irgend ein Factor der Determinante $|w_{ik}|$, so muss derselbe unter der angegebenen Voraussetzung*) in den Determinanten

$$|w_{qr}|, \quad |w_{rq}|, \quad |w_{ss'}|$$

auf der rechten Seite der Formel (C) genau gleich oft, in $|w_{qq'}|$ aber zu derselben oder zu einer noch höheren Potenz erhoben als Factor vorkommen. Wenn im letzteren Falle die in

$$|w_{qq'}| \qquad (q, q' = m, m+1, \dots n)$$

enthaltene Potenz um e_m Einheiten grösser und e_m positiv ist, so lassen sich die Quadratwurzeln aus

$$(u + c_\nu v)^{e_m} \cdot \frac{|w_{rq}| \cdot |w_{rq}|}{|w_{qq'}| \cdot |w_{ss'}|}, \qquad (u + c_\nu v)^{e_m} \cdot \frac{|w_{qr}| \cdot |w_{qr}|}{|w_{qq'}| \cdot |w_{ss'}|}$$

nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{u}{v} + c_\nu$ entwickeln, und die Coëfficienten werden hierbei das eine Mal lineare Functionen der Grössen w_{0k}, das andre Mal lineare Functionen der Grössen w_{i0}. Bezeichnet man daher die Coëfficienten der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz resp. mit

$$u X_{\varkappa\nu}^{(m)} + v \overline{X}_{\varkappa\nu}^{(m)}, \qquad u Y_{\varkappa\nu}^{(m)} + v \overline{Y}_{\varkappa}^{(m)} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \dots),$$

wo X, $\overline{X}$ lineare Functionen der Variabeln x und Y, $\overline{Y}$ lineare Functionen der Variabeln y bedeuten, so wird in der Entwickelung von

$$\frac{|w_{rq}| \cdot |w_{qr}|}{|w_{qq'}| \cdot |w_{ss'}|} \qquad \begin{pmatrix} q, q' = m, m+1, \dots n \\ r \quad = 0, m+1, \dots n \\ s, s' = \quad m+1, \dots n \end{pmatrix}$$

*) Die Grössen w_{0k}, w_{i0} sind hierbei nicht als lineare Functionen von u und v, sondern als unabhängige Veränderliche resp. als unbestimmte Grössen anzusehen.

nach steigenden Potenzen von $\frac{u}{v} + c_\nu$ der Coëfficient der $(-\varrho)^{\text{ten}}$ Potenz:

$$\sum_{\varkappa, \lambda} (u X_{\varkappa\nu}^{(m)} + v \overline{X}_{\varkappa\nu}^{(m)})(u Y_{\lambda\nu}^{(m)} + v \overline{Y}_{\lambda\nu}^{(m)}) \qquad \begin{pmatrix} \varkappa, \lambda = 0, 1, 2, \dots \\ \varkappa + \lambda = e_m - \varrho \end{pmatrix}.$$

Setzt man der Kürze halber diese bilineare Function der Variabeln x, y gleich $F_{\varrho\nu}^{(m)}$, so erhält man für die gesuchte Zerlegung von w in Partialbrüche die Formel

$$\text{(D)} \qquad w = \sum \sum_{\varrho} (-v)^{\varrho - 1} (u + cv)^{-\varrho} F_{\varrho\nu}^{(m)} \qquad (\varrho = 1, 2, \dots e_m),$$

in welcher die erste Summation sich auf alle Werthe von ν und resp. auf alle Werthe $m = 1, 2, \dots$ bezieht, für welche e_m positiv ist.

Wenn in den Elementen der ersten Horizontal- und Verticalreihe der Determinante $|w_{gh}|$ einmal $u = 0$, das andre Mal $v = 0$ gesetzt und diess in folgender Weise angedeutet wird:

$$|w_{gh}|_{u=0}, \qquad |w_{gh}|_{v=0} \qquad (g, h = 0, 1, \dots n),$$

so ist

$$\text{(E)} \qquad (u\varphi - v\psi) \cdot |w_{ik}| = |w_{gh}|_{u=0} - |w_{gh}|_{v=0} \qquad \begin{pmatrix} g, h = 0, 1, \dots n \\ i, k = \quad 1, \dots n \end{pmatrix}.$$

Wird nämlich in der zweiten Determinante rechts die zweite Horizontalreihe mit x_1, die dritte mit x_2 etc. multiplicirt und von der ersten Horizontalreihe subtrahirt, und alsdann die zweite Verticalreihe mit y_1, die dritte mit y_2 etc. multiplicirt und von der ersten Verticalreihe abgezogen, so kommt als erste Horizontalreihe

$$-u\varphi + v\psi, \quad -v\psi_{01}, \quad -v\psi_{02}, \quad \dots, \quad -v\psi_{0n}$$

und als erste Verticalreihe

$$-u\varphi + v\psi, \quad -v\psi_{10}, \quad -v\psi_{20}, \quad \dots, \quad -v\psi_{n0},$$

und die Determinante selbst wird also in der That gleich

$$-(u\varphi - v\psi)\cdot|w_{ik}| + |w_{gh}|_{u=0} \qquad \binom{g,\,h=0,\,1,\,2,\,\ldots\,n}{i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n}.$$

Aus der Gleichung (E) geht hervor, dass die Coëfficienten der beiden höchsten Potenzen von u auf der linken Seite mit denen des zweiten Theils auf der rechten Seite übereinstimmen, also auch mit denen der rechten Seite von (D), wenn dieselbe mit $|w_{ik}|$ multiplicirt und dann in den mit F bezeichneten bilinearen Formen $v=0$ genommen wird. Hiernach kommt schliesslich, wenn

$$\sum_{\varkappa,\lambda} X_{\varkappa\nu}^{(m)} Y_{\lambda\nu}^{(m)} = \Phi_\nu^{(m)} \qquad (\varkappa+\lambda=e_m-1,\quad \varkappa=0,1,\ldots e_m-1)$$

$$\sum_{\varkappa,\lambda} X_{\varkappa\nu}^{(m)} Y_{\lambda\nu}^{(m)} = \Psi_\nu^{(m)} \qquad (\varkappa+\lambda=e_m-2,\quad \varkappa=0,1,\ldots e_m-2)$$

gesetzt wird:

$$\text{(F)} \qquad u\varphi - v\psi = \sum \left((u-c_\nu v)\,\Phi_\nu^{(m)} - v\,\Psi_\nu^{(m)}\right),$$

wo die Summation auf alle Werthe von ν und resp. alle zugehörigen Werthe von $m=1,2,\ldots$ zu erstrecken ist, wofür $e_m>0$ bleibt, und $\Psi_\nu^{(m)}=0$ zu nehmen ist, sobald e_m den Werth Eins hat.

Durch die Formel (F), in welcher auch v in $-v$ verwandelt werden kann, wird eine beliebige Schaar, deren Determinante nicht verschwindet, als ein Aggregat von elementaren reducirten Schaaren dargestellt, und die obige Herleitung derselben zeigt, dass wenigstens für den erwähnten Fall der *Weierstrass*'sche Weg an Kürze und Uebersichtlichkeit demjenigen nicht nachsteht, welchen ich in meinem Vortrage vom 19. Januar d. J. für beliebige Schaaren angegeben habe. Aber die dort entwickelte Reductionsmethode lässt noch mancherlei redactionelle Vereinfachungen zu, bei denen zugleich die eigentlichen Principien, auf denen das Verfahren beruht, viel deutlicher hervortreten, und diess geschieht namentlich, wenn man dabei auf die volle Allgemeinheit verzichtet und sich auf den speciellen Fall beschränkt, wo die quadratischen Formen nur bilinear sind.

Ebenso wie die *Weierstrass*'sche Methode basirt auch die meinige im Falle bilinearer Formen wesentlich auf jener schon oben citirten *Jacobi*'schen Transformation:

$$\text{(G)} \qquad \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k = \sum_k A_k X_k Y_k \qquad (i,k=1,2,\ldots n),$$

und es sind hierbei X_k, Y_k resp. lineare Functionen der gleichnamigen Variabeln x_k, y_k und derer die darauf folgen. In dieser Fassung ist das *Jacobi*'sche Resultat zwar an die Bedingung geknüpft, dass keine der partialen Determinanten

$$|a_{rs}| \qquad (r,s=1,2,\ldots m;\ m=1,2,\ldots n)$$

verschwinde, aber die Deduction, aus der dasselbe hervorgegangen, ist ganz allgemein anwendbar, auch dann, wenn die Determinante $|a_{ik}|$ selbst gleich Null ist. Lässt man indessen diesen Fall bei Seite, so können nicht die sämmtlichen aus den *ersten* $n-1$ Horizontalreihen und *irgend welchen* $n-1$ Verticalreihen zu bildenden Determinanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, und es muss daher eine grösste Zahl k_n existiren, wofür

$$|a_{rs}| \qquad (r=1,2,\ldots n-1;\ s=1,\ldots n \text{ ausser } k_n)$$

von Null verschieden ist. Bedeutet nun ebenso k_{n-1} die grösste der Zahlen s, wofür die Determinante $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$|a_{pq}| \qquad (p=1,2,\ldots n-2;\ q=1,\ldots n \text{ ausser } k_{n-1} \text{ und } k_n)$$

nicht verschwindet u. s. f., so ist die *Jacobi*'sche Analyse ohne Weiteres anwendbar, wenn die Variabeln x in ihrer natürlichen Reihenfolge genommen werden, die Variabeln y aber in derjenigen, welche durch die Folge der Indices

$$k_1,\ k_2,\ \ldots\, k_n$$

bezeichnet ist. Es ergiebt sich daher eine der obigen durchaus analoge Gleichung

$$\text{(G')} \qquad \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k = \sum_h A'_h x'_h y'_h \qquad (h,i,k=1,2,\ldots n),$$

in welcher x'_h, y'_h resp. lineare Functionen von höchstens $n-h+1$ Variabeln x, y sind. Aber während in x'_λ, genau wie oben, ausser x_λ selbst nur die darauf folgenden Veränderlichen x vorkommen können, enthält y'_λ erstens die Variable y, deren Index k_λ ist, und zweitens nur solche, die zugleich bei der natürlichen und bei jener neuen Anordnung darauf folgen. In der mit y'_λ bezeichneten linearen Function der Variabeln y können daher nur solche vorkommen, deren Indices gleichzeitig in den beiden Reihen

$$k_\lambda, \; k_{\lambda+1}, \quad k_{\lambda+2}, \quad \ldots k_n$$
$$k_\lambda, \; k_\lambda + 1, \; k_\lambda + 2, \; \ldots n$$

enthalten sind. Um diess etwas näher zu erläutern, möge der Einfachheit halber $k_n = \nu$ und $k_{n-1} = \mu$ gesetzt werden. Dann wird z. B. y'_{n-1} nach *Jacobi* durch eine Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gegeben, welche entsteht, wenn man in dem System a_{ik} die μ^{te} Verticalreihe mit y_μ und die ν^{te} mit y_ν multiplicirt, die erstere zu der letzteren addirt und alsdann die μ^{te} Verticalreihe sowie die n^{te} Horizontalreihe weglässt. Ist nun $\mu > \nu$, so ist nach den bei der Wahl der Indices μ und ν massgebenden Bestimmungen der in y_ν multiplicirte Theil dieser Determinante gleich Null, und sie ist daher nur ein Vielfaches von y_μ allein.

Werden die Indices sowohl für die Variabeln x als für die Variabeln y irgendwie in je zwei Gruppen getheilt

$$1, 2, \ldots m; \;\; m+1, m+2, \ldots n,$$
$$1, 2, \ldots m'; \;\; m'+1, m'+2, \ldots n,$$

so lassen sich in der bilinearen Form auf der rechten Seite der Gleichung (G′) drei Theile f'_1, f'_2, f'_3 unterscheiden, je nachdem darin nur Variabeln der ersten Gruppe oder nur solche der zweiten Gruppe oder endlich Variabeln beider verschiedener Gruppen mit einander multiplicirt vorkommen. Die Gleichung (G′) zeigt demnach, dass jede bilineare Form f der Variabeln x, y sich in ein Aggregat von drei solchen eben charakterisirten Formen f'_1, f'_2, f'_3 der Variabeln x', y' verwandeln lässt, dass also

$$f = f'_1 + f'_2 + f'_3 \tag{H}$$

wird, und zwar vermittelst einer Substitution, bei welcher die Veränderlichen der einen Gruppe nur unter einander transformirt werden. Es ist diess die zweite Gruppe, wenn die Indices in ihrer natürlichen Reihenfolge genommen werden, und aber die erste, wenn man von der umgekehrten Anordnung ausgeht.

Aus der Gleichung (H) ergeben sich je nach der einen oder andern Anordnung der Indices die beiden Resultate, welche ich in den mit I und II bezeichneten Abschnitten jenes Nachtrages vom 16. Februar entwickelt habe. Dieselben sind dort absichtlich nicht auf die *Jacobi*'sche Deduction gegründet, sondern, wie es für den Rahmen der Darstellung passte, mit Hilfe eines Reductionsverfahrens direct hergeleitet worden. Auch ist dieses Verfahren, dem Zwecke entsprechend, nur so weit als nöthig fortgesetzt und nicht auch auf denjenigen Theil erstreckt worden, der in der transformirten Form nur Variabeln der zweiten Gruppe mit einander multiplicirt enthalten würde*).

Das in der Gleichung (H) enthaltene Resultat kommt, so wie es oben formulirt wurde, bei der Reduction von Schaaren bilinearer Formen folgendermassen zur Benutzung. Nachdem die beiden Grundformen φ und ψ in der Weise vorbereitet sind, wie es in den einleitenden Sätzen des Art. V meines Aufsatzes vom 19. Januar angegeben ist, vertheilen sich die sämmtlichen Variabeln der Schaar $u\varphi + v\psi$ in drei verschiedene Complexe C_1, C_2, C_3, so dass C_1 und C_3 resp. die ausschliesslich in φ oder ψ vorkommenden Variabeln, C_2 aber die in beiden Formen zugleich vorkommenden enthält. Nunmehr hat man die Variabeln der bilinearen Form φ in die zwei Gruppen C_1, C_2 zu sondern und darauf die Transformation (H) dergestalt anzuwenden, dass dabei die Variabeln der *zweiten* Gruppe C_2 nur unter sich transformirt werden. Durch diese Transformation scheiden sich die neuen Variabeln von

$$C_1 \quad \text{und} \quad C_2$$

---

*) Die im Art. I und II meines Aufsatzes vom 19. Januar enthaltenen Entwickelungen führen ebenso von verschiedenen Seiten her zu einer und derselben allgemein giltigen Transformation beliebiger quadratischer Formen, welche in die *Jacobi*'sche übergeht, sobald die Formen nur bilinear sind.

in je zwei Abtheilungen

$$C_{11},\ C_{12} \quad \text{und} \quad C_{21},\ C_{22},$$

insofern dabei sowohl die Variabeln von C_{11} als die von C_{22} nur unter einander, diejenigen von C_{12} aber mit denen von C_{21} multiplicirt erscheinen, und nach deren Einführung in ψ sind demgemäss die Variabeln dieser zweiten Grundform in zwei Gruppen zu theilen, deren erste durch die Variabeln von C_{21}, die zweite aber durch die von C_{22} und C_3 gebildet wird. Hiernach ist wiederum die Transformation (H) auf die Form ψ anzuwenden, jedoch so, dass die Variabeln der *ersten* Gruppe C_{21} nur unter sich transformirt werden. Führt man endlich die hierbei auftretenden neuen Variabeln auch in φ ein, so erscheint darin jede zum Complex C_{21} gehörige Veränderliche mit einer linearen Function der übrigen multiplicirt, welche je eine der Variabeln von C_{12} enthält und an deren Stelle als neue Variable zu nehmen ist. — Nach dieser Reihe von Operationen sind Schaaren folgender Art

$$uxy,\quad (ux+vx')y,\quad (uy+vy')x,\quad u(xy'+x'y)+vxy$$

abzusondern, und es bleibt eine Schaar mit den Grundformen

$$\begin{array}{ll} (\mathfrak{A}) & \sum\limits_k z_k z_{\nu+k} \quad + \Phi(z_{2\nu+1},\ z_{2\nu+2},\ \ldots) \\ (\mathfrak{B}) & \sum\limits_k z_{\nu+k} z_{2\nu+k} + \Psi(z_{3\nu+1},\ z_{3\nu+2},\ \ldots), \end{array} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots)}$$

wenn mit $z_1, z_2, \ldots$ die Veränderlichen x, y zusammen bezeichnet werden. Da nun für die Schaar $u\Phi + v\Psi$, welche weniger als n Variabeln enthält, die Existenz einer Reducirten $u\Phi' + v\Psi'$ vorausgesetzt werden kann, so hat man an Stelle von $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ resp.

$$\begin{array}{ll} (\mathfrak{A}') & \sum\limits_k z_k z_{\nu+k} \quad + \Phi'(z'_{2\nu+1},\ z'_{2\nu+2},\ \ldots) \\ (\mathfrak{B}') & \sum\limits_k z_{\nu+k} z_{2\nu+k} + \Psi'(z'_{3\nu+1},\ z'_{3\nu+2},\ \ldots) \end{array} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots)}$$

zu nehmen, darin $z_{2\nu+1},\ z_{2\nu+2},\ \ldots z_{3\nu}$ als lineare Functionen von

$z'_{2\nu+1},\ z'_{2\nu+2},\ \ldots$ zu betrachten und endlich $(\mathfrak{A}')$ und $(\mathfrak{B}')$ gleichzeitig in die beiden Formen

$$\begin{array}{ll} (\mathfrak{A}\ ) & \sum\limits_k z^0_k z^0_{\nu+k} \quad + \Phi^0(z^0_{2\nu+1},\ z^0_{2\nu+2},\ \ldots) \\ (\mathfrak{B}^{0}) & \sum\limits_k z^0_{\nu+k} z^0_{2\nu+k} + \Psi^0(z^0_{3\nu+1},\ z^0_{3\nu+2},\ \ldots) \end{array} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots)}$$

zu verwandeln, welche die Grundformen einer reducirten Schaar repräsentiren. Diese Verwandlung findet sich im Art. IV meines Aufsatzes vom Januar sowie im Art. III des Nachtrages vom Februar d. J. näher ausgeführt, und es ist dabei nur noch zu beachten, dass bei der angenommenen Bezeichnungsweise diejenigen beiden Arten von elementaren Schaaren ununterschieden bleiben, welche durch Vertauschung der beiden Variabelnsysteme aus einander entstehen. Für den Fall verschwindender Determinanten sind diess in der That zwei verschiedene Arten von Schaaren, und da ihnen auch zwei verschiedene Arten von determinirenden Gleichungen entsprechen, je nachdem die nach den Variabeln des einen oder des andern Systems genommenen Ableitungen darin vorkommen, so bedingt diess für den Fall bilinearer Formen einige leicht zu übersehende Modificationen der für Schaaren quadratischer Formen angegebenen Resultate.

Legt man bei der Bildung einer Schaar zwei bilineare Formen zu Grunde, die nach *Jacobi* als „conjugirt“ zu bezeichnen sind, d. h. zwei Formen, deren eine die transponirte der andern ist, so entsteht eine Schaar

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + va_{ki}) x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und die Zerlegung derselben in elementare führt auf eben solche Schaaren mit conjugirten Grundformen. Dabei sind jedoch im Allgemeinen je zwei elementare Schaaren paarweise zusammenzufassen, z. B. so, dass Schaaren entstehen, deren Grundformen

$$(\mathfrak{F}) \qquad a\sum_i x_{2i} y_{2i+1} + b\sum_i y_{2i} x_{2i+1} + c\sum_k x_{2k} y_{2k-1} + d\sum_k y_{2k} x_{2k-1} \qquad \binom{0 \leq 2i < n+1}{0 < 2k \leq n+1}$$

und ihre conjugirte sind, und deren Determinante, je nachdem n ungrade oder grade ist, den Werth Null oder

$$(au + bv)^m (av + bu)^m \qquad (n = 2m-2)$$

hat. Es treten aber auch einfache elementare Schaaren auf, deren Grundformen

$$(\mathfrak{F}') \qquad \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x_k y_{n-k} + \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i x_i y_{n-i-1}$$

und ihre conjugirte sind, und deren Determinante den Werth

$$\left(u + (-1)^n v\right)^{n+1}$$

hat. In dem Ausdrucke $(\mathfrak{F}')$ fällt für $n=0$ die auf i bezügliche Summation fort, und aus $(\mathfrak{F})$ entstehen für $n=0$ jene Schaaren

$$(au + bv) x_0 y_1 + (av + bu) x_1 y_0,$$

welche bei der Zerlegung in elementare allein auftreten, wenn

$$|ua_{ik} + va_{ki}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots 2r)$$

lauter verschiedene Factoren enthält*).

Man kann den Aequivalenzbegriff für bilineare Formen beschränken und zwei Formen

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \qquad \sum_{i,k} a'_{ik} x'_i y'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nur dann als äquivalent gelten lassen, wenn die eine derselben in die andre durch die Substitutionen

$$x_i = \sum_k c_{ik} x'_k, \qquad y_i = \sum_k c_{ik} y'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

übergeführt wird, d. h. also wenn die Transformation für beide Systeme von Variabeln identisch ist. Alsdann gehen gleichzeitig die transponirten Formen

$$\sum_{i,k} a_{ki} x_i y_k, \qquad \sum_{i,k} a'_{ki} x'_i y'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

durch eben dieselbe Transformation in einander über, und jene Aequivalenz von zwei bilinearen Formen

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \qquad \sum_{i,k} a'_{ik} x'_i y'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

*) Vgl. meine Arbeit „über bilineare Formen“ Monatsbericht v. Octob. 1866.[1])

[1]) Bd. I S. 143—162 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

hängt auf diese Weise unmittelbar mit der Aequivalenz der Schaaren

$$\sum_{i,k}(ua_{ik}+va_{ki})x_i y_k\,,\qquad \sum_{i,k}(ua'_{ik}+va'_{ki})x'_i y'_k \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,2,\ldots n)}$$

zusammen, deren je zwei Grundformen einander conjugirt sind*). So resultirt namentlich aus der Unzerlegbarkeit von elementaren Schaaren auch die Unmöglichkeit, irgend welche der Formen $\mathfrak{F}$ durch eine für beide Variabelnsysteme übereinstimmende Transformation in ein Aggregat bilinearer Functionen von weniger Variabeln zu verwandeln, und es widerlegt sich damit die *Jordan*'sche Behauptung, dass jedes bilineare Polynom durch eine solche Transformation auf eine Summe von bilinearen Functionen folgender Art

$$xy,\quad xy'-x'y,\quad xy+x'y-xy',\quad xy+x'y'+\Delta(x'y-xy')$$

zurückführbar sei, deren jede höchstens vier Variabeln enthält**).

Die Methode, mit Hilfe deren Hr. *Jordan* dieses unrichtige Resultat erlangt hat, muss natürlich ihre Mängel haben, und einer derselben ist auch leicht erkennbar. Es werden nämlich in den mit Nr. 7 und 8 bezeichneten Abschnitten seiner bezüglichen Arbeit***) Substitutionen benutzt, welche nicht anwendbar sind, sobald die a. a. O. mit D und Δ_1 bezeichneten Nenner verschwinden.

Es war zu erwarten, dass die Behandlung der allgemeineren Frage, welche die Aequivalenz von Schaaren bilinearer Formen betrifft, auch über die speciellere der Aequivalenz von bilinearen Formen — in dem oben angegebenen engeren Sinne des Wortes — Aufschluss ertheilen würde, und ich habe deshalb bei Hrn. *Jordan* die Hinweisung darauf vermisst, dass seine

---

*) Vgl. meine schon citirte Arbeit „über bilineare Formen“ Monatsbericht vom October 1866, p. 600[1]).

**) Comptes Rendus Tome LXXVII p. 1490 und 1491. *Liouville's* Journal Ser. II. Bd. XIX. p. 45 und 46.

***) *Liouville's* Journal Ser. II. Bd. XIX. p. 43, 44 und 45.

[1]) Band I S. 149 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

beiden ersten Probleme als specielle Fälle des dritten aufzufassen sind. Indem ich am Schlusse meines Aufsatzes vom Januar d. J. die gegenseitigen Beziehungen jener drei Probleme hervorhob und dabei die Worte einschaltete, dass Hr. *Jordan* eben diese Beziehungen „zu bemerken unterlassen hat“, habe ich keineswegs, wie er meint*), ihm zugleich den Vorwurf gemacht, für die Lösung seines zweiten Problems davon Nutzen gezogen zu haben. Eher hätte man wohl den entgegengesetzten Vorwurf aus jenen eingeschalteten Worten herauslesen können, aber ich habe damit eben nur constatiren wollen, dass jeder Hinweis auf das gegenseitige Verhältniss der drei Probleme in der *Jordan*'schen Mittheilung fehlt.

---

*) Die bezüglichen Worte (Comptes Rendus vom 2. März d. J. p. 617) lauten: „Nous avons traité accessoirement, dans notre travail, deux autres problèmes plus simples, qu'on peut considérer comme des cas particuliers du précédent. M. *Kronecker* nous reproche à la fois et d'avoir omis cette remarque, et de l'avoir utilisée pour la solution du second problème, sans indiquer que des méthodes fondées sur le même principe avaient été données par lui d'abord, puis par M. *Christoffel*.“ Uebrigens sind weder in der einen noch in der andern von den mehrfach citirten *Jordan*'schen Arbeiten die beiden ersten Probleme „accessorisch“ behandelt, sondern überall mit dem dritten auf ganz gleiche Linie gestellt, und in den Comptes Rendus vom December v. J. ist Hr. *Jordan* auf die ersten beiden Probleme sogar viel ausführlicher eingegangen, als auf das dritte.

Bei dem Reductionsverfahren für Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen, wie ich es hier und in meinen beiden vorhergehenden Arbeiten auseinandergesetzt habe, bildet die gruppenweise Zusammenfassung von gewissen Variabeln der Schaar das wesentliche Fundament. Das Bedürfniss einer solchen Zusammenfassung trat in jenem einfacheren Falle, welchen ich in dem ersten Theile meines Aufsatzes vom 18. Mai 1868 behandelt habe, noch nicht hervor und ebensowenig bei der weiteren Transformation der Ausdrücke, die ich dort im zweiten Theile aufgestellt habe*). Bei diesen Fragen genügte vielmehr die a. a. O. ausführlich entwickelte Methode, durch welche je eine der Variabeln nach der andern von der Schaar abgetrennt wird. Als ich diese einfache Methode im Sommer 1868 unmittelbar auf beliebige Schaaren anzuwenden versuchte, stiess ich auf die Schwierigkeit, dass in dem Falle, wo die eine Grundform mehr als eine Variable ausschliesslich enthält, unter gewissen Umständen einer der früheren Schritte des Reductionsverfahrens durch einen der späteren zu Nichte gemacht wurde, und erst dann, als ich bei meiner neueren Beschäftigung mit diesem Gegenstande auf den Gedanken kam, das Verfahren statt auf die einzelnen Veränderlichen gleichzeitig auf ganze Gruppen derselben zu erstrecken, gelang mir die Auffindung einer Methode zur Reduction von beliebigen Schaaren quadratischer oder bilinearer Formen. Dieser Gedanke der Gruppenbildung lag indessen nicht so nahe, als es vielleicht den Anschein hat, und die Durchführung desselben erforderte noch mancherlei Mühe, deren Spuren in meiner ersten Ausarbeitung vom 19. Januar d. J. nur zu deutlich erkennbar sind. Dass sich aber für eine zugleich einheitliche und ganz allgemeine Entwickelung, wie sie in der eben erwähnten Arbeit gegeben ist, gewisse neue

*) Die erwähnte Transformation findet sich im Art. IV des Nachtrages vom 16. Februar d. J. ausführlich dargelegt [S. 376—378 dieser Ausgabe].

Principien als nöthig erwiesen, kann durchaus nicht befremden, und es wäre im Gegentheil zu verwundern, wenn wirklich den *Jordan*'schen Behauptungen gemäss*) die allereinfachsten Mittel dazu ausreichen sollten. Denn man ist es gewohnt — zumal in algebraischen Fragen — wesentlich neue Schwierigkeiten anzutreffen, wenn man sich von der Beschränkung auf diejenigen Fälle losmachen will, welche man als die allgemeinen zu bezeichnen pflegt. Sobald man von der Oberfläche der sogenannten, jede Besonderheit ausschliessenden Allgemeinheit in das Innere der wahren Allgemeinheit eindringt, welche alle Singularitäten mit umfasst, findet man in der Regel erst die eigentlichen Schwierigkeiten der Untersuchung, zugleich aber auch die Fülle neuer Gesichtspunkte und Erscheinungen, welche sie in ihren Tiefen enthält. Diess bewährt sich durchweg in den wenigen algebraischen Fragen, welche bis in alle ihre Einzelheiten vollständig durchgeführt sind, namentlich aber in der Theorie der Schaaren von quadratischen Formen, die oben in ihren Hauptzügen entwickelt worden ist. Denn so lange man es nicht wagte, die Voraussetzung fallen zu lassen, dass die Determinante nur ungleiche Factoren enthalte, gelangte man bei jener bekannten Frage der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen Formen, welche seit einem Jahrhundert so vielfach, wenn auch meist blos gelegentlich, behandelt worden ist, nur zu höchst dürftigen Resultaten, und die wahren Gesichtspunkte der Untersuchung blieben gänzlich unerkannt**). Mit dem Aufgeben jener Voraussetzung führte die *Weierstrass*'sche Arbeit vom Jahre 1858 schon zu einer höheren Einsicht und namentlich zu einer vollständigen Erledigung des Falles, in welchem nur einfache Elementartheiler vorhanden sind. Aber die allgemeine Einführung dieses Begriffes der Elementartheiler, zu welcher dort nur ein vorläufiger Schritt gethan war, erfolgte erst in der *Weierstrass*'schen Abhandlung vom Jahre 1868, und es kam damit ganz neues Licht in die Theorie der Schaaren für den Fall beliebiger, doch von Null verschiedener Determinanten. Als ich darauf auch diese letzte Beschränkung abstreifte und aus jenem Begriffe der Elementartheiler den allgemeineren der elementaren

*) „Les méthodes nouvelles que nous proposons sont, au contraire, extrêmement simples. . . .“ „On voit, par une discussion très-simple, que l'on peut transformer. . . .“ Comptes Rendus Tome LXXVII pag. 1488 und 1491.

**) Cf. die Anmerkung auf pag. 387.

Schaaren entwickelte, verbreitete sich die vollste Klarheit über die Fülle der neu auftretenden algebraischen Gebilde, und bei dieser vollständigen Behandlung des Gegenstandes wurden zugleich die werthvollsten Einblicke in die Theorie der höheren, in ihrer wahren Allgemeinheit aufzufassenden Invarianten gewonnen.

Die oben erwähnte Schwierigkeit, durch die ich auf den Gedanken jener Gruppenbildung geführt worden bin, macht sich auch bei dem von Hrn. *Jordan* entwickelten Reductionsverfahren geltend, aber sie ist dort nicht wirklich behoben, sondern nur durch eine unausgesprochene und unzulässige Voraussetzung bei Seite geschoben. Hr. *Jordan* stellt nämlich im 12. Abschnitte seines Aufsatzes „über bilineare Formen" eine Gleichung auf*):

$$Q = x_\varrho y_1 + X_1 y_1 + (x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m) Y_1 + R_1',$$

welche auf der an sich unberechtigten Annahme beruht, dass die lineare Function der Variabeln x, welche mit Y_1 multiplicirt ist, keine der Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ enthält. Nur wenn in der Form Q überhaupt keine andern Variabeln x als

$$x_1, x_2, \ldots x_m \quad \text{und} \quad x_\varrho$$

vorkommen, ist jene Annahme ohne Weiteres gestattet; wollte man aber von vorn herein eine solche Voraussetzung machen, so würde dadurch der Giltigkeitsbereich der *Jordan*'schen Deduction ganz ungemein beschränkt. Um diess an einem einfachen concreten Beispiel von zwei symmetrischen bilinearen Formen zu erläutern, sei

$$P = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$
$$Q = (x_2 + x_3) y_1 + (x_1 + x_4) y_2 + (x_1 + x_3) y_3 + (x_2 + x_4) y_4,$$

sodass nach den *Jordan*'schen Vorschriften $m = 2$ und x_ϱ entweder gleich x_3 oder gleich x_4 zu nehmen ist. In beiden Fällen wird dann

*) *Liouville's* Journal Ser. II. Bd. XIX. pag. 47.

$$R_1' = (x_1 + x_3) y_3 + (x_2 + x_4) y_4,$$

aber je nach der einen oder andern Annahme

$$x_\varrho = x_3, \quad X_1 = x_2, \quad Y_1 = y_2, \quad Q = x_\varrho y_1 + X_1 y_1 + (x_1 + x_4) Y_1 + R_1',$$
$$x_\varrho = x_4, \quad X_1 = x_1, \quad Y_1 = y_1, \quad Q = x_\varrho y_2 + X_1 y_2 + (x_2 + x_3) Y_1 + R_1',$$

sodass der Factor von Y_1 stets eine derjenigen Variabeln x enthält, deren Index grösser als m ist. Das *Jordan*'sche Reductionsverfahren ist also auf das System jener beiden Formen (P, Q) nicht anwendbar; dagegen ergiebt sich eine geeignete Transformation

$$x_4' = x_4 + x_2, \quad x_3' = x_3 + x_1, \quad y_4' = y_4 + y_2, \quad y_3' = y_3 + y_1$$
$$Q = x_4' y_4' + x_3' y_3' - (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$$

ganz unmittelbar, wenn man auf die Form Q (der p. 397 angegebenen Vorschrift gemäss) die *Jacobi*'sche Transformation in der Weise anwendet, dass dabei die Variabeln x und y in der Reihenfolge

$$x_4, y_4, \quad x_3, y_3, \quad x_2, y_2, \quad x_1, y_1$$

genommen werden. Ebenso resultirt alsdann die weitere Substitution

$$x_1 + x_2 = 2x_1', \quad x_1 - x_2 = 2x_2', \quad y_1 + y_2 = 2y_1', \quad y_1 - y_2 = 2y_2',$$

sodass sich schliesslich die Schaar

$$2u x_1' y_1' + 2(u - 2v) x_2' y_2' + v(x_3' y_3' + x_4' y_4')$$

als die reducirte von $uP + vQ$ ergiebt.

Es ist nicht ein vereinzelter oder unwesentlicher Mangel der *Jordan*schen Analyse, den ich hier aufgezeigt habe; derselbe kehrt vielmehr im Laufe des Reductionsverfahrens immerfort wieder und berührt die Grundlagen der gesammten Deduction. Ob diesem Mangel abzuhelfen ist, ohne eben diejenigen Mittel in Anwendung zu bringen, durch welche ich die bezügliche Frage erledigt habe, mag dahingestellt bleiben; sicher ist, dass die *Jordan*schen Entwickelungen, sowie sie in *Liouville's* Journal vorliegen, in keiner Weise ausreichend sind, um die schliesslichen Resultate zu begründen und deren vorausgeschickte Ankündigung zu rechtfertigen*). Mit den Entwickelungen selbst fällt natürlich auch der Einwand, welchen Hr. *Jordan* meiner Aeusserung entgegensetzt, dass sich die in meiner Arbeit vom Jahre 1868 aufgestellten Ausdrücke mit leichter Mühe in diejenigen umwandeln lassen, welche ich erst im Januar d. J. veröffentlicht habe. Denn sein Einwand, dass sich das dazu erforderliche Verfahren ganz ebenso leicht wie auf jene besonderen Ausdrücke auch auf beliebige Formen anwenden lasse, und dass also jene erste Vorbereitung vollkommen unnöthig sei**), stützt sich eben auf die falsche Voraussetzung der Richtigkeit seiner Reductionsmethode. Das Verfahren, wie *ich* es in meinen Arbeiten auseinandergesetzt habe, verlangt für die Reduction von beliebigen „unvorbereiteten" Formenpaaren wesentlich andere Mittel, als für die Transformation von Schaaren mit verschwindender Determinante, welche bereits auf die Gestalt***)

$$\text{(A)} \qquad \sum_{k=1}^{k=m} (ux'_k + vx'_{k-1})\varphi'_k + u\Phi + v\Psi$$

gebracht sind, in der sie schon äusserlich mit der Reducirten nahezu übereinstimmen und sich auch in der That nur durch einen auf pag. 376 mit

$$u\sum_{k=1}^{k=m-1} \xi_{2k} f_k$$

*) „Les méthodes nouvelles que nous proposons sont, au contraire, extrêmement simples et ne comportent aucune exception." Comptes Rendus Tome LXXVII pag. 1488. „Nous pensons donc satisfaire les géomètres en exposant, pour la solution de ces questions, une méthode nouvelle très-simple, et ne comportant plus aucun cas d'exception." *Liouville's* Journal Ser. II Bd. XIX pag. 35.

**) Comptes Rendus Tome LXXVIII pag. 617.

***) Cf. Monatsbericht vom Mai 1868 pag. 343. II[1]) und Monatsbericht vom Februar d. J. pag. 151 resp. oben pag. 376.

[1]) Band I S. 170. II dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

bezeichneten Theil davon unterscheiden. Dass dieser eine Theil wirklich durch so einfache Mittel weggeschafft werden kann, wie sie Hr. *Jordan* ausschliesslich anwendet, liegt in einer Voraussetzung, auf welche dort ausdrücklich recurrirt wird; denn diese bewirkt, dass — wie es an der erwähnten Stelle heisst — stets ein Glied $a\xi_\lambda\xi_\nu$ vorkommt, und dass deshalb die Schwierigkeit nicht eintritt, welche sonst eine Zusammenfassung der Variabeln in Gruppen nöthig macht.

Ich habe bereits oben den specifischen Unterschied zwischen den Hilfsmitteln dargelegt, welche bei der Reduction von allgemeinen Schaaren und resp. bei der weiteren Transformation jener besonderen Schaaren (A) zu benutzen sind. Aber auch schon in meinem Aufsatze vom Januar d. J. habe ich, um jedem Einwande im Voraus zu begegnen, in Beziehung auf die weitere Transformation der Schaaren (A) ausdrücklich hervorgehoben, dass nur ein unbedeutender Theil von der gesammten Reductionsmethode dabei gebraucht wird, nämlich eine Reihe von gewissen einfachen Operationen, wie sie bei den im Art. IV entwickelten finalen Umgestaltungen zur Anwendung kommen*).

*) Hr. *Jordan* hat diess ausser Acht gelassen, indem er in den Comptes Rendus vom 2. März d. J. sagt: „Notre . . . critique répond qu'il est facile de passer des expressions (1) aux réduites (2): car il suffit de leur appliquer les nouveaux procédés de réduction qu'il développe dans son Mémoire de 1874."

In den beiden letzten Abschnitten hat es sich gezeigt, wie ungenügend die Entwickelungen sind, welche Hr. *Jordan* in der mehrerwähnten ausführlichen Arbeit „über bilineare Formen“*) in Beziehung auf sein „zweites und drittes Problem“ gegeben hat. Das erste von den drei darin behandelten Problemen ist eigentlich das der orthogonalen Transformation einer beliebigen bilinearen Form in eine andre, aber diese kann dadurch vermittelt werden, dass beide Formen durch orthogonale Substitutionen in eine dritte übergeführt werden, welche nur aus den einzelnen Producten von je zwei Veränderlichen besteht. Es ist demnach für irgend eine bilineare Form mit den Coëfficienten a_{ik} eine Transformation

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k = \sum_k c_k x'_k y'_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

zu finden, unter den Bedingungen

$$\sum_k x_k^2 = \sum_k x_k'^2, \qquad \sum_k y_k^2 = \sum_k y_k'^2 \qquad (k = 1, 2, \dots n),$$

die man offenbar durch die eine

$$\sum_k x_k^2 + \sum_k y_k^2 = \sum_k x_k'^2 + \sum_k y_k'^2 \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

ersetzen kann. Das bezeichnete Problem ist also — wie man bei Einführung der Grössen $x'_k + y'_k$ und $x'_k - y'_k$ sofort sieht — in demjenigen schon enthalten, welches in der *Weierstrass*'schen Abhandlung vom Jahre 1858 und nachher mit Hilfe einer einfachen Reductionsmethode in dem ersten Theile

*) *Liouville's* Journal, Ser. II Bd. XIX pag. 35 sqq.

meiner Arbeit vom Jahre 1868 vollständig gelöst worden ist. Nur muss noch gezeigt werden, dass, wenn eine bilineare Function

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

als quadratische Form der $2n$ Veränderlichen x, y betrachtet, durch eine orthogonale Substitution in eine andre

$$\sum_k c_k x'_k y'_k \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

transformirt wird, die beiden Variabelnsysteme gesondert bleiben oder gesondert werden können, je nachdem die Transformation eine bestimmte ist oder nicht. Die n Grössen c_k sind hierbei dadurch definirt, dass das Product

$$(u^2 - c_1^2 v^2)(u^2 - c_2^2 v^2) \cdots (u^2 - c_n^2 v^2)$$

mit der Determinante der Schaar

$$u \sum_k x_k^2 + u \sum_k y_k^2 + v \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

übereinstimmt. Scheidet man nun die linearen Functionen x'_k und y'_k in je zwei Theile, von denen die einen nur die Variabeln x, die andern nur die Variabeln y enthalten, so dass

$$x_k'^2 + y_k'^2 = (\xi_k + \eta'_k)^2 + (\xi'_k + \eta_k)^2, \qquad x'_k y'_k = (\xi_k + \eta'_k)(\xi'_k + \eta_k)$$

wird, so müssen die drei Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{k=n} c_k \xi_k \xi'_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k=n} c_k \eta_k \eta'_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k=n} (\xi_k \eta'_k + \xi'_k \eta_k) = 0$$

bestehen. Da aus den drei aufgestellten Bedingungen hervorgeht, dass die je n Grössen ξ_k, η_k als von einander unabhängige Functionen der Variabeln x, y angenommen werden können, so ist

$$\xi_i' = \sum_k b_{ik} \xi_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

und also gemäss der dritten Gleichung

$$\eta_k' = -\sum_i b_{ik} \eta_i \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

zu setzen. Endlich folgen aus den ersten beiden Gleichungen die für alle Indices i, k giltigen Relationen

$$c_k b_{kk} = 0, \quad c_i b_{ik} + c_k b_{ki} = 0, \quad c_k b_{ik} + c_i b_{ki} = 0,$$

und es kann also b_{kk} nur dann, wenn $c_k = 0$ ist, aber b_{ik} und b_{ki} nur dann, wenn $c_i^2 = c_k^2$ ist, von Null verschieden sein. Man braucht aber dann im ersteren Falle nur

$$\xi_k \sqrt{1 + b_{kk}^2}, \quad \eta_k \sqrt{1 + b_{kk}^2}$$

an Stelle von ξ_k, η_k und im letzteren Falle

$$\xi_i \sqrt{1 + b_{ki}^2}, \quad \xi_k \sqrt{1 + b_{ik}^2}, \quad \eta_i \sqrt{1 + b_{ik}^2}, \quad \eta_k \sqrt{1 + b_{ki}^2}$$

an Stelle von ξ_i, ξ_k, η_i, η_k einzuführen, um die mit b_{kk} und resp. die mit b_{ik}, b_{ki} multiplicirten Glieder weglassen zu dürfen, sodass die etwa vorkommenden, mit ξ_k', η_k' bezeichneten Theile in der That weggeschafft werden können. — Ich bemerke hierbei, dass in ganz ähnlicher Weise das allgemeine Problem der simultanen Transformation dreier Formen

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \quad \sum_{i,k} b_{ik} y_i y_k, \quad \sum_{i,k} c_{ik} x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

in

$$\sum_{i,k} a_{ik}' x_i' x_k', \quad \sum_{i,k} b_{ik}' y_i' y_k', \quad \sum_{i,k} c_{ik}' x_i' y_k' \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

mit Hilfe der gleichzeitigen Umformung zweier

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k + \sum_{i,k} b_{ik} y_i y_k, \quad \sum_{i,k} c_{ik} x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

in

$$\sum_{i,k} a_{ik}' x_i' x_k' + \sum_{i,k} b_{ik}' y_i' y_k', \quad \sum_{i,k} c_{ik}' x_i' y_k' \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

zu behandeln ist.

Die vorstehenden Entwickelungen zeigen, dass in der *Jordan*'schen Abhandlung die Lösung des ersten Problems nicht eigentlich neu ist, während die des zweiten sich als gänzlich verfehlt und die des dritten als durchaus unzulänglich begründet erwiesen hat. Nimmt man hinzu, dass eben dieses dritte Problem in Wahrheit die beiden ersten als besondere Fälle umfasst, dass ferner dessen vollständige Lösung einestheils unmittelbar aus der *Weierstrass*'schen Arbeit vom Jahre 1868 folgt und anderntheils mit leichter Mühe aus den Bemerkungen entnommen werden kann, welche ich damals daran angeschlossen habe, so ist wahrlich hinreichender Grund vorhanden, Hrn. *Jordan* „seine Resultate“, soweit sie eben richtig sind, streitig zu machen. Aber nicht um dieses untergeordneten Zweckes willen bin ich hier und in meiner früheren Mittheilung auf die *Jordan*'schen Arbeiten näher eingegangen; es galt vielmehr die wirkliche Bedeutung der darin enthaltenen Methoden und Resultate zu ermitteln und ihre Beziehungen zu den vorher bekannten aufzuklären. Es war also nicht die Feststellung der Priorität, sondern die Feststellung der Wahrheit der eigentliche Zweck meiner Ausführungen, aber sie erfüllen nebenher auch die Bestimmung, es im Voraus zu rechtfertigen, wenn ich mich künftig der Rücksichtnahme auf die bezüglichen *Jordan*'schen Publicationen enthalte.

SUR LES FAISCEAUX DE FORMES QUADRATIQUES ET BILINÉAIRES

PAR

L. KRONECKER.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences t. LXXVIII, I Sem. 1181—1182
séance du 27 avril 1874.

SUR LES FAISCEAUX DE FORMES QUADRATIQUES ET BILINÉAIRES.

J'ai l'honneur d'offrir à l'Académie mes Mémoires *sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires.* Il résulte des développements contenus dans ces Mémoires, à la fin desquels cette conclusion se trouve d'ailleurs indiquée, que dans le Mémoire de M. *Jordan* „*Sur les formes bilinéaires*“ *(Journal de M. Liouville, 2e série t. XIX, p. 35—54),* la solution du premier problème n'est pas véritablement nouvelle; la solution du deuxième est manquée, et celle du troisième n'est pas suffisamment établie. Ajoutons qu'en réalité ce troisième problème embrasse les deux autres comme cas particuliers, et que sa solution complète résulte du travail de M. *Weierstrass* de 1868[1]) et se déduit aussi de mes additions à ce travail. Il y a donc, si je ne me trompe, de sérieux motifs pour contester à M. *Jordan* l'invention première de ses résultats, en tant qu'ils sont corrects; mais ce n'est pas là l'intention qui m'a guidé dans l'examen auquel, dans le cours des miens, j'ai soumis les travaux analogues de M. *Jordan.* J'ai été entraîné dans cette voie par le désir de reconnaître la véritable portée des méthodes dont il s'est servi et des résultats auxquels il est parvenu, et d'en éclaircir les rapports avec les méthodes et les résultats antérieurs, et ce n'est pas une question de priorité, mais une question d'analyse, que je me suis proposé d'élucider par mes remarques. Croyant d'ailleurs qu'elles servent à me justifier, si dorénavant je me dispense de revenir sur les publications de M. *Jordan* relatives à ce

[1]) *C. Weierstrass*, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Berliner Berichte v. J. 1868. S. 310—338. *L. Kronecker*, Ueber Schaaren quadratischer Formen; ebenda S. 339—346. Bd. I S. 163—174 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

sujet, je vais en peu de mots indiquer les principes à l'aide desquels j'ai traité la théorie des faisceaux de formes quadratiques et qui peuvent être appliqués directement à une question de transformation des formes bilinéaires, que j'ai déjà abordée en 1866.[1]) C'est par ces moyens, en effet, que j'ai trouvé qu'en opérant la même substitution linéaire sur les deux séries de variables, tout polynôme bilinéaire peut être transformé en une somme de fonctions de l'une des formes suivantes:

$$\text{I.} \qquad (-1)^n \sum_h x_h y_{h+1} + \sum_h (-1)^h y_h x_{h+1} + x_n y_n \qquad (h=0,1,\ldots n-1)$$

$$\text{II.} \qquad (-1)^m \sum_h x_h y_{h+1} + \sum_h (-1)^h y_h x_{h+1} \qquad (h=0,1,\ldots 2m-2)$$

$$\text{III.} \qquad a \sum_h x_h y_{h+1} + b \sum_h y_h x_{h+1} \qquad \left(\begin{matrix} h=0,1,\ldots n-1 \\ a^2 \gtrless b^2 \end{matrix}\right),$$

Ces trois fonctions ne sont plus décomposables d'une manière analogue et c'est pourquoi je les désigne comme *formes élémentaires*. L'un des deux coefficients a, b peut toujours être pris égal à l'unité; l'autre est alors différent de ± 1, et il peut être pris égal à zéro si n est un nombre pair.

En appliquant les notions de l'Arithmétique à l'Algèbre, on peut appeler *équivalentes* deux formes bilinéaires, dont l'une peut être transformée en l'autre par une même substitution, opérée sur les deux systèmes de variables, et ensuite on peut réunir en une même *classe* toutes les formes équivalentes. Cela posé, on voit que toute forme bilinéaire est équivalente à une somme de formes élémentaires, et que par conséquent toute classe peut être décomposée, pour ainsi dire, en *classes élémentaires*.

Pour que deux formes bilinéaires $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ appartiennent à une même classe, il faut et il suffit que les deux faisceaux formés des deux paires de fonctions conjuguées

$$u\varphi(x, y) + v\varphi(y, x), \qquad u\psi(x, y) + v\psi(y, x)$$

[1]) *L. Kronecker*, Ueber bilineare Formen, Berliner Berichte v. J. 1866 S. 597—612. Bd. I S. 143—162 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

soient équivalents. C'est de cette manière qu'un certain faisceau de formes est lié avec chaque forme bilinéaire, et si l'on désigne par F_1, F_2, F_3 respectivement les faisceaux qui appartiennent aux formes élémentaires I, II, III et par D_1, D_2, D_3 leurs déterminants, on a

$$D_1 = [u + (-1)^n v]^{n+1},$$

$$D_2 = [u + (-1)^m v]^{2m},$$

$$D_3 = (au + bv)^m (av + bu)^m, \qquad (n+1 \text{ étant égal à } 2m),$$

$$D_3 = 0, \qquad (n+1 \text{ étant un nombre impair}).$$

Les faisceaux F_1 sont eux-mêmes élémentaires, mais chacun des faisceaux F_2 et F_3 est décomposable en deux faisceaux élémentaires du même nombre de variables.

ÜBER
DIE CONGRUENTEN TRANSFORMATIONEN
DER BILINEAREN FORMEN.

VON

L. KRONECKER.

Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
vom Jahre 1874. S. 397—447.

ÜBER DIE CONGRUENTEN TRANSFORMATIONEN DER BILINEAREN FORMEN.

Wenn man in einer bilinearen Form die einzelnen Glieder der beiden Reihen von Variabeln einander irgendwie zuordnet, sodass je eine Veränderliche der einen Reihe als je einer der andern entsprechend oder *„correspondirend"* angesehen wird, so heben sich aus der Gesammtheit der allgemeinen Transformationen bilinearer Formen gewisse besondere heraus, namentlich solche, bei denen die Substitutionssysteme für die correspondirenden Variabeln gegen einander symmetrisch*), und solche, bei denen dieselben untereinander congruent sind, d. h., wenn je zwei gleichnamige Variabeln x_k, y_k als einander correspondirend betrachtet werden, die beiden Arten von Transformationen:

$$x_i = \sum_k c_{ik} x'_k, \quad y_i = \sum_k c_{ki} y'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

$$x_i = \sum_k c_{ik} x'_k, \quad y_i = \sum_k c_{ik} y'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

In einer im Monatsbericht vom October 1866 und nachher auch in *Borchardt's* Journal veröffentlichten Arbeit[2]) habe ich bereits Transformationen der letzteren Art behandelt, d. h. solche, bei welchen die bezüglichen Substitutionscoëfficienten für beide Reihen von Variabeln übereinstimmen, und welche deshalb

---

*) *Jacobi* bezeichnet die gegen einander symmetrischen Substitutionssysteme als conjugirt, und es ist auch im Folgenden von dieser Bezeichnung Gebrauch gemacht (cf. *Borchardt's* Journal, Bd. 53, pag. 265[1]).

[1]) *C. G. J. Jacobi*, Gesammelte Werke. Bd. III S. 585. H.

[2]) Ueber bilineare Formen, Bd. I S. 143—162 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

als „congruente Transformationen“ bezeichnet werden sollen*). Es wird a. a. O. zuerst hervorgehoben, dass, wenn zwei bilineare Formen

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k\,, \qquad \sum_{i,k} a'_{ik} x'_i y'_k \qquad\qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2\,\ldots\,2m)}$$

durch eine „congruente“ Transformation

$$x_i = \sum_k c_{ik} x'_k\,, \qquad y_i = \sum_k c_{ik} y'_k \qquad\qquad {\scriptstyle (k=1,\,2,\,\ldots\,2m)}$$

in einander transformirbar sind, nothwendig auch die conjugirten und also auch die beiden bilinearen Formen

$$\sum_{i,k} (u a_{ik} + v a_{ki}) x_i y_k\,, \qquad \sum_{i,k} (u a'_{ik} + v a'_{ki}) x'_i y'_k \qquad\qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,2m)}$$

durch dieselbe lineare Transformation in einander übergehen. Alsdann wird für den Fall, dass die Determinante

$$|u a_{ik} + v a_{ki}| \qquad\qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,2m)}$$

aus lauter verschiedenen Factoren besteht, noch gezeigt, dass jene nothwendige Bedingung der Transformirbarkeit auch eine hinreichende ist, und dieser Nachweis wird darauf gegründet, dass jede bilineare Form sich unter der angegebenen Voraussetzung durch congruente Transformation in ein Aggregat von elementaren Formen

$$p_k x_k y_{m+k} + q_k y_k x_{m+k} \qquad\qquad {\scriptstyle (k=1,\,2,\,\ldots\,m)}$$

verwandeln lässt. Aber das angegebene Resultat ist in Wahrheit nicht an jene Restriction gebunden, noch auch auf den Fall einer graden Anzahl von Variabeln beschränkt, sondern ganz allgemein giltig, und diess ist in entsprechender Weise mit Hilfe einer allgemeinen Zerlegung der bilinearen Formen in „elementare“ zu beweisen, welche den Hauptgegenstand der vor-

---

*) Vgl. auch die *Christoffel*'sche Abhandlung im 68. Bande von *Borchardt's* Journal p. 253 sqq.

liegenden Mittheilung bildet. Die erwähnte Zerlegung einer beliebigen bilinearen Form

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k \qquad\qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$

lässt sich freilich aus derjenigen der „zugehörigen“ Schaaren

$$\sum_{i,k} (u a_{ik} + v a_{ki}) x_i y_k \qquad\qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots\,n)}$$

ableiten, aber man kann auch — wie im Folgenden geschehen soll — die Methode, mit Hilfe deren ich die Zerlegung der Schaaren in elementare bewirkt habe, direct zur congruenten Transformation einer beliebigen bilinearen Function in ein Aggregat von elementaren benutzen.

§ 1.

Die Jacobi'sche Transformation quadratischer und bilinearer Formen.

Bedeutet $F(z_1, z_2 \cdots z_n)$ eine beliebige homogene Function zweiten Grades, F_k deren nach z_k genommene Ableitung und F_{ik} die Derivirte von F_k nach z_i, so ist jeder der beiden Ausdrücke

$$F_{ik}^2 F - F_{ik} F_i F_k + \tfrac{1}{2} F_{kk} F_i^2\,, \qquad F_{ii} F_{kk} F - \tfrac{1}{2} F_{ii} F_k^2$$

von z_k und die Differenz derselben auch von z_i unabhängig. Für $F_{ii} = 0$ ist also der erstere Ausdruck frei von den beiden Variabeln z_i und z_k, und wenn man darin $i = 1$ und k gleich der kleinsten der Zahlen $h = 1, 2, \ldots n$ nimmt, für welche $F_{1h} \gtrless 0$ ist, so hat man in

$$F_{1h}^2 F - F_1' (F_{1h} F_h - \tfrac{1}{2} F_{hh} F_1)$$

eine quadratische Form, welche von der Variabeln z_1 und, falls $F_{11} = 0$ ist, noch von einer zweiten Variabeln z_h unabhängig ist. Je nachdem F_{11} von Null verschieden oder gleich Null ist, lässt sich daher ein Ausdruck

$$c Z_1^2 \quad \text{oder} \quad Z_1 Z_h$$

von F absondern, und zwar so, dass nur eine quadratische Form von höchstens $n-1$ und resp. $n-2$ Veränderlichen übrig bleibt. Dabei kann

$$2cF_{11}=1,\quad Z_1=F_1 \quad \text{und resp.} \quad F_{1h}Z_1=F_{1h}F_h-\tfrac{1}{2}F_{hh}F_1,\quad F_{1h}Z_h=F_1$$

gesetzt werden, sodass c und die Coëfficienten der linearen Functionen Z_1, Z_h rational aus denen der quadratischen Form F zu bilden sind, und dass ferner Z_1 die erste Variable z_1 und irgend welche von den übrigen, aber Z_h nur z_h und darauf folgende Variabeln enthält. Setzt man dieses Verfahren in der Weise fort, dass man stets an Stelle von z_1 die *erste* in der quadratischen Form vorkommende Veränderliche nimmt, so gelangt man zu einer Transformation von F, bei welcher die angenommene (natürliche) Anordnung der Variabeln

$$z_1,\ z_2,\ \ldots z_n$$

durchaus massgebend ist, und welche mit Rücksicht auf *Jacobi's* bezügliche Entwickelungen*) die „*Jacobi*'sche Transformation" genannt und im Folgenden näher charakterisirt werden soll.

I. Die *Jacobi*'sche Transformation verwandelt die Form F in einen Ausdruck

$$\sum_{h,h'} c_{hh'} Z_h Z_{h'} \qquad (h=h_1, h_2, \ldots h_\nu;\ h'=h'_1, h'_2, \ldots h'_\nu)$$

und führt auf diese Weise, von der natürlichen Anordnung der Variabeln z ausgehend, zu einer besonderen Reihenfolge derselben, welche durch die Folge der Indices

$$\text{(H)} \qquad h_1,\ h'_1,\ h_2,\ h'_2,\ \ldots h_\nu,\ h'_\nu,$$

bestimmt ist, und welche als „die zu $F(z_1, z_2, \ldots z_n)$ gehörige" oder auch als „die zur Form F gehörige und aus der ursprünglichen Anordnung

$$z_1,\ z_2,\ \ldots z_n$$

*) Cf. *Borchardt's* Journal, Bd. 53, pag. 265 sqq.[1]).

[1]) Gesammelte Werke Bd. III pag. 585 sqq.

abgeleitete" bezeichnet werden soll. Nur die ungestrichenen Indices h finden sich hei dieser Anordnung stets zugleich ihrer Grösse nach geordnet, d. h.

$$\text{für} \quad r<s \quad \text{ist auch} \quad h_r<h_s.$$

Zugleich ist

$$\text{für} \quad r<s \quad \text{auch} \quad h_r<h'_s \quad \text{aber} \quad h'_r \gtrless h'_s,$$

und endlich für jeden Index r

$$h_r \leqq h'_r.$$

Einer und derselbe Index kann hiernach, aber eben *nur* in dieser Weise, doppelt vorkommen; hinwiederum kommen nicht alle Indices in jener Reihe (H) vor, wenn die Determinante von F gleich Null ist.

Jede lineare Function Z enthält die Variable z von gleichem Index, aber ausserdem nur solche, die sowohl bei der ursprünglichen als bei der abgeleiteten Anordnung darauf folgen. Die Coëfficienten der Functionen Z und die Coëfficienten $c_{hh'}$ sind sämmtlich rational aus denen der Form F zusammengesetzt, und wenn h und h' von einander verschieden sind, kann $c_{hh'}=1$ genommen werden.

II. Bei der zu $F(z_1, z_2, \ldots z_n)$ gehörigen Anordnung (H) bestimmen sich die Indices h_r, h'_r aus den $2r-2$ vorhergehenden nicht bloss durch die bezüglichen Bestimmungen des Transformationsverfahrens, sondern auch dadurch, dass

$$nh_r+h'_r$$

die kleinste Zahl ist, wofür die symmetrische Determinante

$$|F_{ik}| \qquad (i,k=h_1, h'_1, h_2, h'_2, \ldots h_r, h'_r),$$

in welcher den beiden Indices i, k natürlich nur alle von einander *verschiedenen* Werthe von h_1, h'_1, $\ldots h_r$, h'_r beizulegen sind, nicht gleich Null wird.

Denkt man sich die n^2 Elemente F_{ik} auf die übliche Weise in n Horizontalreihen von je n Elementen geordnet und so auf einander folgend, wie wenn sie in diesem Schema die einzelnen Buchstaben gewöhnlicher Schrift repräsentirten, so erhält man eben jene durch die Zahlen $ni+k$ gegebene Reihenfolge, und es wird F_{ik} das $(ni+k-n)^{\text{te}}$ Element. Die charakteristischen Eigenschaften der Anordnung (H) lassen sich hiernach folgendermassen formuliren: die ν Determinanten

$$|F_{ik}| \qquad (i, k = h_1, h'_1, h_2, h'_2, \ldots h_r, h'_r;\ r = 1, 2, \ldots \nu)$$

sind sämmtlich von Null verschieden, und jedes dieser ν Systeme F_{ik} entsteht aus dem vorhergehenden durch Hinzufügung des *ersten* dazu geeigneten Elements F_{ik} und der dadurch bestimmten Horizontal- und Verticalreihen. Wenn nämlich für dieses Element F_{ik} die beiden Indices die Werthe

$$i = h_r\,, \quad k = h'_r$$

haben, so ist die Anfügung der h_r^{ten} und der h'^{ten}_r Horizontal- und Verticalreihe erforderlich, also nur *eine*, falls $h_r = h'_r$ ist.

III. Nimmt man $2n$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ resp. einen Theil derselben in derjenigen Aufeinanderfolge, welche

für die Grössen x_i durch die Reihe der Werthe $i = h_1, h'_1, h_2, h'_2, \ldots h_\nu, h'_\nu$,

für die Grössen y_k durch die Reihe der Werthe $k = h'_1, h_1, h'_2, h_2, \ldots h'_\nu, h_\nu$

bezeichnet wird, so lässt sich auf die symmetrische bilineare Form

$$\sum_{i,k} F_{ik} x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

die *Jacobi*'sche Transformation anwenden, wie sie sich im 53. Bande von *Borchardt's* Journal auf pag. 265 sqq. angegeben findet. Dabei bestimmen sich die oben mit $c_{hh'}$ bezeichneten Coëfficienten, sowie die jener linearen Functionen Z in Form von Quotienten gewisser aus den Elementen F_{ik} gebildeten

Determinanten, und es folgen eben daraus die vorher im Art. II aufgestellten charakteristischen Eigenschaften der Anordnung

$$\text{(H)} \qquad h_1, h'_1, h_2, h'_2, \ldots h_\nu, h'_\nu,$$

welche zu der quadratischen Form

$$\sum_{i,k} F_{ik} z_i z_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

gehörig und aus der natürlichen Anordnung der Variabeln z abgeleitet ist. Es gilt nämlich, wie hier gezeigt werden soll, die betreffende *Jacobi*'sche Transformationsformel für ganz beliebige bilineare Formen d. h. auch für solche, deren Determinante gleich Null ist, und eben darauf beruht es, dass, wie ich bereits in meiner vorigen Mittheilung*) bemerkt habe, die *Weierstrass*'sche Methode der Reduction von Schaaren quadratischer Formen auch dann anwendbar bleibt, wenn die Determinante der Schaar identisch verschwindet.

Bedeutet $\mathfrak{F}$ irgend eine bilineare Form der Variabeln $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$, $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_n$, und bezeichnet man mit $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}0}$, $\mathfrak{F}_{0\mathfrak{k}}$ resp. deren Ableitungen nach $\mathfrak{x}_\mathfrak{i}$, $\mathfrak{y}_\mathfrak{k}$, mit $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}$ aber die zweite nach $\mathfrak{x}_\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{y}_\mathfrak{k}$ genommene Derivirte, so sind die $\mathfrak{n}^2$ Grössen $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}$ die Coëfficienten der Form $\mathfrak{F}$, und wenn für das System dieser Coëfficienten nur Determinanten von niedrigerer als der $(\mathfrak{m}+1)^{\text{ten}}$ Ordnung von Null verschieden sind, so ist

$$|\mathfrak{F}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}|\,. \qquad (\mathfrak{g}, \mathfrak{h} = 0, 1, \ldots \mathfrak{m};\ \mathfrak{F}_{00} = \mathfrak{F})$$

identisch gleich Null. Denn diese Determinante ist eine bilineare Form der Variabeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, und durch deren zweimalige Differentiation nach $\mathfrak{x}_\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{y}_\mathfrak{k}$ entsteht die Determinante

$$|\mathfrak{F}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}| \qquad (\mathfrak{g} = \mathfrak{i}, 1, 2, \ldots \mathfrak{m};\ \mathfrak{h} = \mathfrak{k}, 1, 2. \ldots \mathfrak{m}),$$

welche in denjenigen Fällen, wo $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{k}$ grösser als $\mathfrak{m}$ sind, der gemachten

*) Cf. Monatsbericht vom März p. 212; p. 37 der Separatabdrücke[1]).

[1]) Band I S. 390 dieser Ausgabe. H.

Voraussetzung gemäss, in allen andern Fällen aber an und für sich verschwindet. — Es kann offenbar für eine ganz beliebige bilineare Form $\mathfrak{F}$ sowohl die Zahl $\mathfrak{m}$ als auch die Bezeichnung der in $\mathfrak{F}$ enthaltenen Variabeln stets so gewählt werden, dass die $\mathfrak{m}$ Determinanten

$$|\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}| \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q} = 1, 2, \ldots \mathfrak{r};\ \mathfrak{r} = 1, 2, \ldots \mathfrak{m})$$

von Null verschieden sind. Diess vorausgesetzt, ergiebt die aus

$$|\mathfrak{F}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}| = 0 \qquad (\mathfrak{g}, \mathfrak{h} = 0, 1, \ldots \mathfrak{m};\ \mathfrak{F}_{00} = \mathfrak{F})$$

unmittelbar folgende Gleichung

$$\mathfrak{F} = -\frac{|\mathfrak{F}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}|}{|\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}|} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{g}, \mathfrak{h} = 0, 1, 2, \ldots \mathfrak{m};\ \mathfrak{F}_{00} = 0 \\ \mathfrak{i}, \mathfrak{k} = \ 1, 2, \ldots \mathfrak{m} \end{pmatrix}$$

eine ganz allgemeine Darstellung bilinearer Formen als Functionen ihrer Derivirten, deren Giltigkeit man wohl bisher als auf den speciellen Fall $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ beschränkt angesehen hat. Unter den gemachten Voraussetzungen kann ferner auf das System der $(\mathfrak{m}+1)^2$ Grössen

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}} \qquad (\mathfrak{g}, \mathfrak{h} = 0, 1, \ldots \mathfrak{m};\ \mathfrak{F}_{00} = \mathfrak{F})$$

die in meiner vorigen Mittheilung aufgestellte Determinantenformel*)

$$w_{00} = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{|w_{qr}| \cdot |w_{rq}|}{|w_{qq'}| \cdot |w_{ss'}|} \qquad \begin{pmatrix} q, q' = m, m+1, \ldots n \\ r = 0, m+1, \ldots n \\ s, s' = \ m+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

angewendet werden, und man gelangt auf diese Weise, da das dem Werthe $m = 0$ entsprechende erste Glied

$$\frac{|\mathfrak{F}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}|}{|\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}|} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{g}, \mathfrak{h} = 0, 1, 2, \ldots \mathfrak{m};\ \mathfrak{F}_{00} = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{i}, \mathfrak{k} = \ 1, 2, \ldots \mathfrak{m} \end{pmatrix}$$

*) Cf. Monatsbericht vom März pag. 212; p. 37 der Separatabdrücke[1]).

[1]) S. 391 dieser Ausgabe. H.

verschwindet, zu der Gleichung

$$\mathfrak{F} = \sum_{m=1}^{m=\mathfrak{m}} \frac{|\mathfrak{F}_{qr}| \cdot |\mathfrak{F}_{rq}|}{|\mathfrak{F}_{qq'}| \cdot |\mathfrak{F}_{ss'}|} \qquad \begin{pmatrix} q, q' = m, m+1, \ldots \mathfrak{m} \\ r = 0, m+1, \ldots \mathfrak{m} \\ s, s' = \ m+1, \ldots \mathfrak{m} \end{pmatrix},$$

welche die *Jacobi*'sche Transformation einer ganz beliebigen bilinearen Form explicite enthält und für den Fall $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ mit der von *Jacobi* selbst aufgestellten vollkommen übereinstimmt.

IV. Wenn man eine bilineare Function $\mathfrak{F}$ als quadratische Form der $2\mathfrak{n}$ Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ auffasst und als solche mittels des oben für $F(z_1, z_2, \ldots z_n)$ entwickelten Verfahrens transformirt, so bleiben die beiden Variabeln-Systeme dabei gesondert, und von den je zwei oben mit z_h, $z_{h'}$ bezeichneten linearen Functionen der ursprünglichen Variabeln enthält die eine immer nur Variabeln $\mathfrak{x}$, die andre nur Variabeln $\mathfrak{y}$. Die *Jacobi*'sche Transformation bilinearer Functionen kann auf diese Weise aus der bezüglichen Transformation quadratischer Formen hergeleitet werden, und wenn auch gewöhnlich, sowie im vorhergehenden Art. III, der entgegengesetzte Weg eingeschlagen wird, so hat doch auch jene Art der Deduction gewisse Vorzüge. Man kann dabei die sämmtlichen Variabeln des einen Systems denen des andern vorangehen lassen, oder auch die einen Veränderlichen auf ganz beliebige Weise unter die andern einreihen, z. B. so, dass stets zwei gleichnamige oder correspondirende Variabeln unmittelbar auf einander folgen. Geht man von einer solchen Anordnung der Variabeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{x}_\mathfrak{n}, \mathfrak{y}_\mathfrak{n}$$

aus, so führt das *Jacobi*'sche Verfahren, wenn die bilineare Form $\mathfrak{F}$ symmetrisch oder alternirend ist*), zu einer für beide Variabeln-Systeme *congruenten* Transformation. Nimmt man nämlich bei der Entwickelung im Anfange dieses Paragraphen

*) Eine bilineare Form heisst symmetrisch oder alternirend, wenn sie bei gleichzeitiger Vertauschung aller correspondirenden Variabeln unverändert bleibt oder einen entgegengesetzten Werth annimmt; die Bezeichnung setzt also eine gewisse Zuordnung der Variabeln der beiden Systeme voraus.

$$z_1 = \mathfrak{x}_1, \quad z_2 = \mathfrak{y}_1, \quad z_3 = \mathfrak{x}_2, \quad z_4 = \mathfrak{y}_2, \quad \ldots$$

und die bilineare Function $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2, \ldots)$ an Stelle von $F(z_1, z_2, \ldots z_n)$, so wird unter Beibehaltung der im Art. III angenommenen Bezeichnungen das erste Glied der *Jacobi*'schen Transformirten für den Fall $\mathfrak{F}_{11} \gtrless 0$

$$\mathfrak{F}_{11}\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1,$$

wenn $\mathfrak{F}_{01} = \mathfrak{F}_{11}\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{F}_{10} = \mathfrak{F}_{11}\mathfrak{Y}_1$ gesetzt wird, während für den Fall

$$\mathfrak{F}_{11} = 0, \quad \mathfrak{F}_{12} = 0, \quad \ldots \mathfrak{F}_{1\,h-1} = 0, \quad \mathfrak{F}_{1h} \gtrless 0$$

das Aggregat der zwei ersten Glieder gleich

$$\frac{\mathfrak{F}_{h1}\mathfrak{F}_{10}\mathfrak{F}_{0h} + \mathfrak{F}_{1h}\mathfrak{F}_{h0}\mathfrak{F}_{01} - \mathfrak{F}_{hh}\mathfrak{F}_{10}\mathfrak{F}_{01}}{\mathfrak{F}_{1h}\mathfrak{F}_{h1}}$$

wird. Diess folgt auch unmittelbar daraus, dass die Form $\mathfrak{F}$ nach Absonderung des angegebenen Ausdrucks von den Variabeln $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_h, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_h$ unabhängig wird. Setzt man nun, wenn $\mathfrak{F}$ symmetrisch, also $\mathfrak{F}_{1h} = \mathfrak{F}_{h1}$ ist,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{0h}\mathfrak{F}_{h1} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}_{01}\mathfrak{F}_{hh} &= \mathfrak{F}_{h1}\mathfrak{X}_1, & \mathfrak{F}_{10} &= \mathfrak{F}_{1h}\mathfrak{Y}_h \\ \mathfrak{F}_{h0}\mathfrak{F}_{1h} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}_{10}\mathfrak{F}_{hh} &= \mathfrak{F}_{1h}\mathfrak{Y}_1, & \mathfrak{F}_{01} &= \mathfrak{F}_{h1}\mathfrak{X}_h \end{aligned}$$

und, wenn $\mathfrak{F}$ alternirend, also $\mathfrak{F}_{1h} = -\mathfrak{F}_{h1}$ und $\mathfrak{F}_{hh} = 0$ ist,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{0h} &= \mathfrak{X}_1, & \mathfrak{F}_{10} &= \mathfrak{F}_{1h}\mathfrak{Y}_h \\ -\mathfrak{F}_{h0} &= \mathfrak{Y}_1, & \mathfrak{F}_{01} &= \mathfrak{F}_{h1}\mathfrak{X}_h, \end{aligned}$$

so erhält man durch Einführung der Variabeln $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ an Stelle der gleichnamigen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die congruente Transformation symmetrischer Functionen $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{11}\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{F}' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_h + \mathfrak{X}_h\mathfrak{Y}_1 + \overline{\mathfrak{F}}$$

und die congruente Transformation alternirender Functionen $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_h - \mathfrak{X}_h\mathfrak{Y}_1 + \overline{\mathfrak{F}}.$$

Hierbei bedeutet $\mathfrak{F}'$ eine symmetrische bilineare Function der Variabeln

$$\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2, \quad \mathfrak{x}_3, \mathfrak{y}_3, \ldots \mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n,$$

und mit $\overline{\mathfrak{F}}$ ist im ersten Falle eine symmetrische, im zweiten aber eine alternirende bilineare Function der Variabeln

$$\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{x}_{h-1}, \mathfrak{y}_{h-1}, \quad \mathfrak{x}_{h+1}, \mathfrak{y}_{h+1}, \ldots \mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n$$

bezeichnet. Die *Jacobi*'sche Transformation führt also in der That zu einer Umwandlung von $\mathfrak{F}$ in

$$\sum_{h,h'} c_{hh'}(\mathfrak{X}_h\mathfrak{Y}_{h'} + \mathfrak{X}_{h'}\mathfrak{Y}_h) \quad \text{und resp.} \quad \sum_{h,h'} (\mathfrak{X}_h\mathfrak{Y}_{h'} - \mathfrak{X}_{h'}\mathfrak{Y}_h) \quad \begin{pmatrix} h = h_1, h_2, \ldots h_\nu, \\ h' = h'_1, h'_2, \ldots h'_\nu \end{pmatrix}$$

mittels congruenter Substitution; die Reihe der Indices h hat dabei genau diejenigen Eigenschaften der Reihe

(H) $$h_1, h'_1, h_2, h'_2, \ldots h_\nu, h'_\nu,$$

welche sich im Art. I auseinandergesetzt finden, und die Grössen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ sind auch den dort mit Z bezeichneten vollkommen analog. Jede lineare Function $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ enthält nämlich beziehungsweise die Variable $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ von gleichem Index, aber ausserdem nur solche, die sowohl bei der natürlichen als bei der abgeleiteten, mit (H) bezeichneten Anordnung darauf folgen. Die Coëfficienten der Functionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ und die Coëfficienten $c_{hh'}$ sind sämmtlich rational aus denen von $\mathfrak{F}$ zusammengesetzt, und für $h < h'$ ist $c_{hh'} = 1$.

Die angegebene congruente Transformation der bilinearen Form $\mathfrak{F}$ ergiebt sich für den Fall, dass dieselbe symmetrisch ist, auch unmittelbar aus der *Jacobi*'schen Transformation der quadratischen Form

$$\sum_{\mathfrak{i},\mathfrak{k}} \mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} z_{\mathfrak{i}} z_{\mathfrak{k}} \qquad (\mathfrak{i}, \mathfrak{k} = 1, 2, \dots \mathfrak{n}),$$

aber für den Fall alternirender Formen $\mathfrak{F}$ bedurfte die Transformations-Gleichung

$$\mathfrak{F} = \sum_{h,h'} (\mathfrak{X}_h \mathfrak{Y}_{h'} - \mathfrak{X}_{h'} \mathfrak{Y}_h) \qquad (h = h_1, h_2, \dots h_\nu;\ h' = h'_1, h'_2, \dots h'_\nu)$$

einer besonderen Herleitung. Es folgt aus derselben, dass die Determinante von $\mathfrak{F}$,

$$|\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}| \qquad (\mathfrak{i}, \mathfrak{k} = 1, 2, \dots \mathfrak{n}),$$

verschwindet, sobald die Zahl 2ν d. h. die Anzahl der Indices h kleiner als $\mathfrak{n}$ ist, und diess ist natürlich für ungrade Zahlen $\mathfrak{n}$ immer der Fall. Wenn aber $\mathfrak{n}$ eine grade Zahl und genau gleich 2ν ist, so wird

$$|\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}| = \left| \frac{\partial \mathfrak{X}_{\mathfrak{i}}}{\partial \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}} \right| \cdot \left| \frac{\partial \mathfrak{Y}_{\mathfrak{i}}}{\partial \mathfrak{y}_{\mathfrak{k}}} \right| \qquad (\mathfrak{i}, \mathfrak{k} = 1, 2, \dots \mathfrak{n}),$$

und da die Transformation eine congruente, d. h. da

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_{\mathfrak{i}}}{\partial \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}} = \frac{\partial \mathfrak{Y}_{\mathfrak{i}}}{\partial \mathfrak{y}_{\mathfrak{k}}} \qquad (\mathfrak{i}, \mathfrak{k} = 1, 2, \dots \mathfrak{n})$$

ist, so lässt sich die Determinante einer alternirenden bilinearen Form oder eines Systems, dessen conjugirte Elemente $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}$ entgegengesetzt gleich sind, als das Quadrat eines Ausdruckes darstellen, welcher aus den Grössen $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}$ rational zusammengesetzt ist*).

V. Wenn ein System von Veränderlichen $\mathfrak{z}$, welche irgendwie in zwei Gruppen

$$\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}''_1, \mathfrak{z}'''_1, \dots; \quad \mathfrak{z}'_2, \mathfrak{z}''_2, \mathfrak{z}'''_2, \dots$$

*) Vgl. *Baltzer's* Theorie und Anwendung der Determinanten § 7. III. Auflage.

eingetheilt sind, in ein System z mittels dreier Substitutionen $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{12}$, $\mathfrak{S}_{22}$ übergeführt wird, welche so beschaffen sind, dass durch $\mathfrak{S}_{11}$ nur die Variabeln $\mathfrak{z}_1$ und durch $\mathfrak{S}_{22}$ nur die Variabeln $\mathfrak{z}_2$ unter sich transformirt werden, während durch $\mathfrak{S}_{12}$ jeder Variabeln $\mathfrak{z}_1$ eine lineare Function von $\mathfrak{z}'_2, \mathfrak{z}''_2, \dots$ hinzugefügt wird, so zerfällt auch das System der Variabeln z in zwei Gruppen

$$z'_1, z''_1, z'''_1, \dots; \quad z'_2, z''_2, z'''_2, \dots,$$

welche denen der Veränderlichen $\mathfrak{z}$ entsprechen. Ist nun

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}''_1, \dots, \mathfrak{z}'_2, \mathfrak{z}''_2, \dots)$$

eine quadratische Form,

$$F(z'_1, z''_1, \dots, z'_2, z''_2, \dots)$$

deren Transformirte, und denkt man sich die Variabeln z so geordnet, dass diejenigen der ersten Gruppe sämmtlich denen der zweiten vorangehen, so ist die *Jacobi*'sche Transformation von F als Resultat von drei Substitutionen der angegebenen Art S_{11}, S_{12}, S_{22} aufzufassen, und die transformirten Variabeln Z vertheilen sich demnach in zwei Gruppen, welche den bezüglichen Gruppen der Variabeln z entsprechen, aber für den Fall, dass die Determinante von F gleich Null ist, eine geringere Anzahl von Variabeln enthalten. Die beiden Gruppen der Variabeln Z zerfallen wiederum in je zwei Abtheilungen, sodass im Ganzen vier Abtheilungen entstehen:

$$Z'_{11}, Z''_{11}, \dots; \quad Z'_{12}, Z''_{12}, \dots; \quad Z'_{21}, Z''_{21}, \dots; \quad Z'_{22}, Z''_{22}, \dots,$$

welche folgendermassen zu charakterisiren sind. Die erste Abteilung (Z_{11}) umfasst alle diejenigen Variabeln der ersten Gruppe und die letzte Abtheilung (Z_{22}) alle diejenigen der zweiten, welche in der *Jacobi*'schen Transformirten nur mit Variabeln *derselben* Gruppe multiplicirt vorkommen; die hiernach übrig bleibenden Variabeln vertheilen sich alsdann in die zweite oder dritte Abtheilung (Z_{12}), (Z_{21}), je nachdem sie der ersten oder zweiten Gruppe angehören.

Nimmt man für $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{12}$, $\mathfrak{S}_{22}$ Substitutionen mit unbestimmten Coëfficienten, so erhält man eine möglichst allgemeine Transformation von

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_1'', \ldots, \mathfrak{z}_2', \mathfrak{z}_2'', \ldots)$$

in

$$\sum_{(i,k)} c_{ik} Z_{11}^{(i)} Z_{11}^{(k)} + \sum_{(i,k)} Z_{12}^{(i)} Z_{21}^{(k)} + \sum_{(i,k)} c_{ik}' Z_{22}^{(i)} Z_{22}^{(k)},$$

wo die Summationen nur auf gewisse zusammengehörige Paare von Indices (i, k) zu beziehen sind, wo ferner die Coëfficienten c_{ik} für $i \gtrless k$ gleich Eins und Z_{21}, Z_{22} lineare Functionen der Veränderlichen $\mathfrak{z}_2$ allein sind, sodass die sämmtlichen Variabeln Z auch direct, d. h. ohne Vermittelung der Variabeln z, von den Veränderlichen $\mathfrak{z}$ mittels dreier Substitutionen $\overline{\mathfrak{S}}_{11}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{12}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{22}$ abgeleitet werden können, welche ganz ebenso wie oben $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{12}$, $\mathfrak{S}_{22}$ zu charakterisiren sind.

Ist die quadratische Form $\mathfrak{F}$ bilinear, so hat man die drei allgemeinen Substitutionen $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{12}$, $\mathfrak{S}_{22}$ soweit zu beschränken, dass die beiden Reihen von Variabeln getrennt bleiben; sie sind ferner für den Fall, dass $\mathfrak{F}$ eine symmetrische oder alternirende bilineare Form ist, noch dahin zu specialisiren, dass sie für beide Reihen von Variabeln übereinstimmend d. h. congruent werden. Vermöge der im Art. IV entwickelten Eigenschaften der *Jacobi*'schen Transformation sind nun in den bezeichneten Fällen die Substitutionen S_{11}, S_{12}, S_{22} und also auch die Substitutionen $\overline{\mathfrak{S}}_{11}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{12}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{22}$ von ebenderselben Beschaffenheit wie $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{12}$, $\mathfrak{S}_{22}$; es lässt sich daher eine beliebige bilineare Form

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_1'', \ldots, \mathfrak{x}_2', \mathfrak{x}_2'', \ldots; \; \mathfrak{y}_1', \mathfrak{y}_1'', \ldots, \mathfrak{y}_2', \mathfrak{y}_2'', \ldots)$$

mittels dreier Substitutionen $\overline{\mathfrak{S}}_{11}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{12}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{22}$ in

$$\sum_{(i,k)} \mathfrak{X}_{11}^{(i)} \mathfrak{Y}_{11}^{(k)} + \sum_{(i,k)} \mathfrak{X}_{12}^{(i)} \mathfrak{Y}_{21}^{(k)} + \sum_{(i,k)} \mathfrak{X}_{21}^{(i)} \mathfrak{Y}_{12}^{(k)} + \sum_{(i,k)} \mathfrak{X}_{22}^{(i)} \mathfrak{Y}_{22}^{(k)}$$

transformiren, ferner, wenn $\mathfrak{F}$ symmetrisch oder alternirend ist, noch speciell in

$$\sum_{(i,k)} c_{ik} (\mathfrak{X}_{11}^{(i)} \mathfrak{Y}_{11}^{(k)} + \mathfrak{X}_{11}^{(k)} \mathfrak{Y}_{11}^{(i)}) + \sum_{(i,k)} (\mathfrak{X}_{12}^{(i)} \mathfrak{Y}_{21}^{(k)} + \mathfrak{X}_{21}^{(k)} \mathfrak{Y}_{12}^{(i)}) + \sum_{(i,k)} c_{ik}' (\mathfrak{X}_{22}^{(i)} \mathfrak{Y}_{22}^{(k)} + \mathfrak{X}_{22}^{(k)} \mathfrak{Y}_{22}^{(i)})$$

resp.

$$\sum_{(i,k)} (\mathfrak{X}_{11}^{(i)} \mathfrak{Y}_{11}^{(k)} - \mathfrak{X}_{11}^{(k)} \mathfrak{Y}_{11}^{(i)}) + \sum_{(i,k)} (\mathfrak{X}_{12}^{(i)} \mathfrak{Y}_{21}^{(k)} - \mathfrak{X}_{21}^{(k)} \mathfrak{Y}_{12}^{(i)}) + \sum_{(i,k)} (\mathfrak{X}_{22}^{(i)} \mathfrak{Y}_{22}^{(k)} - \mathfrak{X}_{22}^{(k)} \mathfrak{Y}_{22}^{(i)})$$

und zwar so, dass die drei Substitutionen $\overline{\mathfrak{S}}$ für jede der zwei Reihen von Variabeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ gesondert und dabei in den letzten beiden Fällen *congruent* sind, wenn durchweg in dem ursprünglichen Variabelnsystem $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ebenso wie in dem transformirten $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ die gleichnamigen Veränderlichen als correspondirende angesehen werden. Die Coëfficienten c_{ik}, c_{ik}' sind für $i \gtrless k$ gleich Eins, c_{ii} und c_{ii}' aber, sowie die Substitutionscoëfficienten von $\overline{\mathfrak{S}}_{11}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{12}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{22}$ sind rational aus denen der Form $\mathfrak{F}$ und aus jenen allgemeinen Coëfficienten von $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{12}$, $\mathfrak{S}_{22}$ zusammengesetzt, deren Unbestimmtheit für obige drei Formen von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ die Transformationen in sich selbst ergiebt.

Nur die hier zuletzt dargelegten Consequenzen der *Jacobi*'schen Transformation quadratischer und bilinearer Formen werden im Folgenden zur Anwendung kommen; die übrigen Eigenschaften derselben, namentlich jene mehr formalen, deren Ausführung den Gegenstand der Artt. II und III bildet, sind nur der Vollständigkeit halber bei dieser Gelegenheit mit entwickelt worden.

§ 2.

Die Reduction der bilinearen Formen mittels congruenter Transformationen.

Die Art und Weise, wie die beiden Reihen von Variabeln einer bilinearen Form einander zugeordnet werden, kommt nicht bloss, wie in der Einleitung bemerkt worden, bei der Transformation zur Geltung, sondern sie ist schon für die Definition der Determinante in gewisser Hinsicht als massgebend zu betrachten. Denn es wird z. B., wenn — wie es auch in der Folge geschehen soll — die correspondirenden Variabeln x, y stets mit gleichen Indices oder sonstigen Merkzeichen versehen werden, die Determinante der Form xy gleich Eins, aber die von $x'y$ gleich Null. Wie man nämlich in der Theorie homogener Formen überhaupt von einer bestimmten Reihe von Variabeln ausgehen muss, so ist bei der specielleren Behandlung der bilinearen Formen ein *vollständiges System von zwei Reihen einander gegenseitig entsprechender Variabeln* zu Grunde zu legen. Zuvörderst können freilich die bilinearen Functionen als quadratische Formen der sämmtlichen ungetrennten Variabeln beider Reihen angesehen werden, und in der allgemeineren Theorie derselben, welcher sich bisher die Untersuchung fast ausschliesslich zugewendet hat, kommt eben nur die Sonderung der beiden Reihen von Veränderlichen, nicht aber die gegenseitige Correspondenz der einzelnen Variabeln in Betracht. Geht man aber von einem *zweitheiligen Variabelnsystem*

$$\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \ldots$$
$$\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''', \ldots$$

aus, in welchem die unter einander stehenden Veränderlichen die correspondirenden sind, so hat man unter der Determinante einer bilinearen Function

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots; \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \ldots)$$

die Determinante

$$(\mathfrak{D}) \qquad \left| \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x \partial y} \right| \qquad \begin{pmatrix} x = \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \ldots \\ y = \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''', \ldots \end{pmatrix}$$

zu verstehen, auch dann, wenn irgend welche von den Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{F}$ gar nicht vorkommen. Da nun andrerseits für die Theorie der bilinearen Formen auch die Determinante derjenigen linearen Functionen von Bedeutung ist, welche durch partielle Differentiation von $\mathfrak{F}$ nach allen wirklich darin enthaltenen Variabeln resultiren, so soll dieselbe zur Unterscheidung von jener Determinante ($\mathfrak{D}$) als die *Discriminante* von $\mathfrak{F}$ bezeichnet werden, zumal dieselbe nichts Anderes als die Determinante oder, nach der *Sylvester*schen Ausdrucksweise, die Discriminante der Function $\mathfrak{F}$ ist, sofern dieselbe als quadratische Form der sämmtlichen darin vorkommenden Veränderlichen betrachtet wird.

I. Eine bilineare Function $f(x', x'', \ldots; y', y'' \ldots)$ kann stets durch congruente Substitutionen in eine Form $\mathfrak{f}$ transformirt werden, deren Discriminante von Null verschieden ist. Wenn man nämlich auf die Function f die *Jacobi*'sche Transformation anwendet und dabei die Variabeln x, y unter einander in beliebiger Weise ordnet, so resultirt zuvörderst eine Form

$$(\varphi) \qquad \xi_1 \eta_1' + \xi_2 \eta_2' + \cdots + \xi_n \eta_n',$$

worin $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und $\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_n'$ resp. von einander unabhängige, lineare Functionen der Variabeln x und y bedeuten. Führt man nun die Functionen $\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_n'$ sowie die analogen Functionen $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n'$ als neue Variabeln ein, so sind von den Functionen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ nur so viele hinzuzunehmen, als dann noch linear unabhängig sind. Demgemäss seien die Variabeln

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m; \quad \xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n'$$

ausreichend, um die sämmtlichen Functionen ξ dadurch linear auszudrücken, so dass also $n - m$ Gleichungen

$$\xi_k = \mathfrak{x}_k + \sum_h c_{hk} \xi_h \qquad (h = 1, \ldots m;\ k = m+1, \ldots n)$$

bestehen, in denen $\mathfrak{x}_{m+1}, \ldots \mathfrak{x}_n$ lineare Functionen der Variabeln ξ' sind. Setzt man der Gleichförmigkeit wegen $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_m$ anstatt $\xi_1, \ldots \xi_m$, behält dann wiederum nur so viele von den Variabeln $\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_n'$ bei, als von

$$\mathfrak{y}_{m+1}, \mathfrak{y}_{m+2}, \ldots \mathfrak{y}_n$$

d. h. von denjenigen Functionen, welche $\mathfrak{x}_{m+1}, \mathfrak{x}_{m+2}, \ldots \mathfrak{x}_n$ correspondiren, linear unabhängig sind, und bezeichnet diese m Grössen η' mit

$$\mathfrak{y}_{n+1}, \mathfrak{y}_{n+2}, \ldots \mathfrak{y}_{n+m},$$

so geht φ über in eine bilineare Form

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n;\ \mathfrak{y}_{m+1}, \mathfrak{y}_{m+2}, \ldots \mathfrak{y}_{m+n}),$$

deren zwei Reihen von Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{x}_2,\ \ldots \mathfrak{x}_m,\ \mathfrak{x}_{m+1},\ \mathfrak{x}_{m+2},\ \ldots \mathfrak{x}_n$$
$$\mathfrak{y}_{m+1},\ \mathfrak{y}_{m+2},\ \ldots \mathfrak{y}_n,\ \mathfrak{y}_{n+1},\ \mathfrak{y}_{n+2},\ \ldots \mathfrak{y}_{n+m}$$

durch congruente Substitutionen aus dem Variabelnsystem

$$x',\ x'',\ x''',\ \ldots$$
$$y',\ y'',\ y''',\ \ldots$$

hervorgegangen sind. — Die *Discriminante* der auf diese Weise resultirenden Form $\mathfrak{f}$ ist in der That von Null verschieden, da $\mathfrak{f}$ durch Transformation aus φ entstanden ist; aber die *Determinante* von $\mathfrak{f}$, nämlich

$$\left| \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i \partial \mathfrak{y}_k} \right| \qquad {\scriptstyle (i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots\, m+n)},$$

ist ebenso wie jede der ersten, zweiten, ... $(m-1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten, für positive Werthe von m, gleich Null, und erst eine der m^{ten} Unterdeterminanten, nämlich

$$\left| \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_i \partial \mathfrak{y}_k} \right| \qquad {\scriptstyle \binom{i = 1,\, 2,\, \ldots\, n}{k = m+1,\, m+2,\, \ldots\, m+n}},$$

welche gleich der Quadratwurzel aus der Discriminante ist, hat einen von Null verschiedenen Werth. Diese Eigenschaft der Determinante und der Unterdeterminanten von $\mathfrak{f}$ bleibt natürlich bei jeder congruenten Transformation erhalten, und hieraus folgt unmittelbar, dass die Function $\mathfrak{f}$ eine „eigentliche" bilineare Form von $m+n$ Variabeln-Paaren ist, d. h. dass dieselbe durch congruente Transformation nicht in eine Form f' von Variabeln x, y verwandelt werden kann, welche einem zweitheiligen System von weniger als $2(m+n)$ Veränderlichen angehören. Eine solche Form f' von nur $2(m+n-k)$ Variabeln würde nämlich nach dem oben angegebenen Verfahren mittels congruenter Transformation in eine Form $\mathfrak{f}'$ übergeführt werden können, deren Discriminante nicht gleich Null ist; in $\mathfrak{f}'$ müssten aber dann genau je n Variabeln $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ vorkommen und also nur je $m-k$ Variabeln fehlen, so dass schon eine der $(m-k)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten gleich

der Quadratwurzel aus der Discriminante und daher von Null verschieden sein würde.

Wie die vorstehenden Entwickelungen zeigen, lässt sich in der That jede bilineare Form (f) mittels congruenter Transformation in eine solche $(\mathfrak{f})$ verwandeln, deren Discriminante von Null verschieden ist. Die Anzahl der Variabeln in einer solchen Transformirten ist für beide Reihen gleich gross, und wie man auch jene Transformation bewirken mag, es ändert sich dabei weder die Gesammtanzahl der Variabeln noch auch die Anzahl der Paare von correspondirenden. Bezeichnet man, wie oben, die Anzahl dieser Paare mit $n-m$ und die Anzahl derjenigen Variabeln der einen Reihe, denen keine der andern correspondirt, mit m, so ist ferner $n+m$ die Minimalanzahl der Glieder eines vollständigen Systems von Variabeln-Paaren für die sämmtlichen bilinearen Formen, welche aus der Form (f) durch congruente Transformation hervorgehen. Die Zahl m kann hierbei nur gleich 0, 1, ... n sein.

II. Wenn man unter f und f' zwei mit einander conjugirte bilineare Formen versteht, deren *Determinante* von Null verschieden ist, und

$$f + f' = 2\varphi_1, \quad f - f' = 2\psi_1, \quad af - bf' = (a^2 - b^2)\mathfrak{f}_1, \quad af' - bf = (a^2 - b^2)\mathfrak{f}_1'$$

setzt, so ist

$$f = \varphi_1 + \psi_1 \quad \text{und} \quad f = a\mathfrak{f}_1 + b\mathfrak{f}_1'.$$

Je nachdem also die Determinante der Schaar bilinearer Formen

$$uf + vf'$$

irgend einen Linearfactor $u \pm v$ hat oder einen Factor $av + bu$, für welchen $a^2 \gtrless b^2$ ist, kann f als ein Aggregat einer symmetrischen und einer alternirenden Form so dargestellt werden, dass die Determinante der einen dieser beiden Formen gleich Null ist, oder als ein Aggregat von zwei conjugirten Formen, deren Determinante verschwindet. Wenn nun die Form $\mathfrak{f}_1$ oder resp. diejenige der Formen φ_1, ψ_1, deren Determinante gleich Null ist, durch congruente Substitution in eine Form $\mathfrak{f}$ oder resp. φ, ψ verwandelt wird, deren *Discriminante* von Null verschieden ist, so kommt nach Einführung der neuen Variabeln in $\mathfrak{f}'$ oder resp. in ψ_1, φ_1:

$$f = \varphi + \psi \qquad \text{oder} \qquad f = a\mathfrak{f} + b\mathfrak{f}';$$

und im ersten Falle enthält die eine der beiden Formen φ und ψ Variabeln, die in der andern nicht vorkommen, im zweiten Falle enthält jede der beiden conjugirten Formen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ Variabeln, deren correspondirende darin fehlen.

III. Ist $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots \mathfrak{x}_n; \mathfrak{y}_{m+1}, \mathfrak{y}_{m+2}, \dots \mathfrak{y}_{m+n})$ eine bilineare Form von nicht verschwindender Discriminante, so können die Variabeln

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots \mathfrak{x}_m; \quad \mathfrak{y}_{n+1}, \mathfrak{y}_{n+2}, \dots \mathfrak{y}_{n+m},$$

deren correspondirende fehlen, zu einer ersten Gruppe und die übrigbleibenden

$$\mathfrak{x}_{m+1}, \mathfrak{x}_{m+2}, \dots \mathfrak{x}_n; \quad \mathfrak{y}_{m+1}, \mathfrak{y}_{m+2}, \dots \mathfrak{y}_n$$

zu einer zweiten zusammengefasst werden. Diess vorausgeschickt, ist nach § 1 Art. V die Form $\mathfrak{f}$ mittels einer Reihe von Substitutionen $\overline{\mathfrak{S}}_{11}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{12}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{22}$ in die bilineare Function

$$(\mathfrak{F}) \qquad \sum_{\mathfrak{a}} (\mathfrak{X}_{12}^{(\mathfrak{a})} \overline{\mathfrak{Y}}_{21}^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{m})} + \mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{m})} \mathfrak{Y}_{12}^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{n})}) + \sum_{\mathfrak{b}} \mathfrak{X}_{11}^{(\mathfrak{b})} \mathfrak{Y}_{11}^{(\mathfrak{b}+\mathfrak{n})} + \sum_{\mathfrak{c}} \mathfrak{X}_{22}^{(\mathfrak{c})} \overline{\mathfrak{Y}}_{22}^{(\mathfrak{c})}$$

$$(\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \mathfrak{l};\ \mathfrak{b} = \mathfrak{l}+1, \mathfrak{l}+2, \dots \mathfrak{m};\ \mathfrak{c} = \mathfrak{l}+\mathfrak{m}+1, \mathfrak{l}+\mathfrak{m}+2, \dots \mathfrak{n})$$

zu verwandeln, wo die Variabeln $\mathfrak{Y}_{21}$, $\mathfrak{Y}_{22}$ überstrichen sind, um anzudeuten, dass sie als lineare Functionen der Variabeln $\mathfrak{y}$ in ihren Coëfficienten nicht nothwendig mit denen von $\mathfrak{X}_{21}$, $\mathfrak{X}_{22}$ übereinstimmen. Die mit $\overline{\mathfrak{S}}_{11}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{12}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{22}$ bezeichneten Substitutionen sind nämlich nicht an und für sich in Beziehung auf die beiden Reihen von Variabeln congruent, aber man kann, von denselben ausgehend, in folgender Weise zu congruenten Transformationen gelangen. Zuvörderst sind

$$\mathfrak{X}_{11}, \mathfrak{X}_{12}, \mathfrak{Y}_{11}, \mathfrak{Y}_{12}$$

an Stelle derjenigen Variabeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zu nehmen, welche der ersten Gruppe

angehören, da die denselben correspondirenden Veränderlichen fehlen. Ferner sind auch die sämmtlichen in $(\mathfrak{F})$ vorkommenden Grössen $\mathfrak{X}_{21}$ beizubehalten und von denjenigen linearen Functionen der Variabeln $\mathfrak{x}$, welche den Functionen $\overline{\mathfrak{Y}}_{21}$ correspondiren, so viele hinzuzunehmen, als dann noch linear unabhängig sind. Bezeichnet man diese durch die *letzten* $\mathfrak{l}-\mathfrak{k}$ Indices, so bestehen für die *ersten* $\mathfrak{k}$ Grössen $\overline{\mathfrak{X}}_{21}$ lineare Relationen

$$\overline{\mathfrak{X}}_{21}^{(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})} = \mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{p})} + \sum_{\mathfrak{q}} \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} \overline{\mathfrak{X}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})} \qquad \binom{\mathfrak{p} = 1, 2, \dots \mathfrak{k}}{\mathfrak{q} = \mathfrak{k}+1, \dots \mathfrak{l}},$$

in denen die Grössen $\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{p})}$ lineare Functionen der Grössen

$$\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{m}+1)}, \ \mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{m}+2)}, \ \dots \ \mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{l})},$$

und also ebenso viele von diesen zu ersetzen geeignet sind. Man kann daher als unabhängige Variabeln $\mathfrak{X}$ erstens die sämmtlichen Grössen

$$\mathfrak{X}_{12}^{(\mathfrak{a})}, \ \mathfrak{X}_{11}^{(\mathfrak{b})}$$

und ferner

$$\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{p})}, \ \mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}, \ \overline{\mathfrak{X}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}, \ \mathfrak{X}_{22}^{(\mathfrak{r})} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = 1, 2, \dots \mathfrak{l};\ \mathfrak{b} = \mathfrak{l}+1, \dots \mathfrak{m} \\ \mathfrak{p} = 1, 2, \dots \mathfrak{k};\ \mathfrak{q} = \mathfrak{k}+1, \dots \mathfrak{l} \\ \mathfrak{r} = \mathfrak{m}+2\mathfrak{l}-\mathfrak{k}+1, \dots \mathfrak{n} \end{pmatrix}$$

wählen, da unter den Functionen $\mathfrak{X}_{22}$ genau $\mathfrak{l}-\mathfrak{k}$, nämlich soviel als Grössen $\overline{\mathfrak{X}}_{21}$ hinzugenommen sind, von den übrigen eingeführten Variabeln linear abhängig sein müssen; denn die Gesammtanzahl der transformirten Veränderlichen $\mathfrak{X}$ muss, weil die Discriminante von $\mathfrak{f}$ als von Null verschieden vorausgesetzt ist, gleich derjenigen der ursprünglichen Veränderlichen $\mathfrak{x}$ d. h. gleich $\mathfrak{n}$ sein. Von den Variabeln $\mathfrak{Y}$ sind nun vermöge der linearen Relationen

$$\overline{\mathfrak{Y}}_{21}^{(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})} = \mathfrak{Y}_{21}^{(\mathfrak{p})} + \sum_{\mathfrak{q}} \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} \overline{\mathfrak{Y}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})} \qquad \binom{\mathfrak{p} = 1, 2, \dots \mathfrak{k}}{\mathfrak{q} = \mathfrak{k}+1, \dots \mathfrak{l}}$$

die sämmtlichen Grössen $\overline{\mathfrak{Y}}_{21}$ durch die letzten $\mathfrak{l}-\mathfrak{k}$ derselben und durch die Grössen $\mathfrak{Y}_{21}^{(\mathfrak{p})}$ ausdrückbar, welche den Grössen $\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{p})}$ correspondiren. Die Variabeln $\overline{\mathfrak{Y}}_{22}$ müssen ferner sämmtlich durch diejenigen Grössen

$$\mathfrak{Y}_{21}^{(\mathfrak{p})},\ \mathfrak{Y}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})},\ \overline{\mathfrak{Y}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})},\ \mathfrak{Y}_{22}^{(\mathfrak{r})}$$
$$(\mathfrak{p}=1,2,\ldots\mathfrak{k};\ \mathfrak{q}=\mathfrak{k}+1,\ldots\mathfrak{l};\ \mathfrak{r}=\mathfrak{m}+2\mathfrak{l}-\mathfrak{k}+1,\ldots\mathfrak{n}),$$

welche den oben eingeführten Grössen

$$\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{p})},\ \mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})},\ \overline{\mathfrak{X}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})},\ \mathfrak{X}_{22}^{(\mathfrak{r})}$$

correspondiren, linear darstellbar sein. Denn, wären gewisse unter den Functionen $\overline{\mathfrak{Y}}_{22}$ von allen diesen Grössen $\mathfrak{Y}$ linear unabhängig, so würden ebensoviele von den Grössen $\mathfrak{Y}_{22}^{(\mathfrak{r})}$ weggelassen werden können, und die Form $\mathfrak{f}$ wäre somit durch congruente Substitutionen in eine Form von je $\mathfrak{n}$ Variabeln $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ transformirbar, unter denen weniger als je $\mathfrak{n}-\mathfrak{m}$ einander correspondirten; diess ist aber nach Art. I unmöglich. Hiernach sind nunmehr die in $\mathfrak{F}$ vorkommenden Veränderlichen

$\mathfrak{X}_{21}$ durch die Grössen $\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{p})}$, $\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}$

$\mathfrak{X}_{22}$ durch die Grössen $\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{p})}$, $\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}$, $\overline{\mathfrak{X}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}$, $\mathfrak{X}_{22}^{(\mathfrak{r})}$

$\overline{\mathfrak{Y}}_{21}$ durch die Grössen $\mathfrak{Y}_{21}^{(\mathfrak{p})}$, $\overline{\mathfrak{Y}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}$

$\overline{\mathfrak{Y}}_{22}$ durch die Grössen $\mathfrak{Y}_{21}^{(\mathfrak{p})}$, $\overline{\mathfrak{Y}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}$, $\mathfrak{Y}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}$, $\mathfrak{Y}_{22}^{(\mathfrak{r})}$

linear darstellbar, und wenn man nach Einführung dieser letzteren Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ die mit

$$\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{p})},\quad \mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})},\quad \mathfrak{Y}_{21}^{(\mathfrak{p})},\quad \overline{\mathfrak{Y}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}$$

multiplicirten Glieder sammelt, und die bezüglichen Factoren mit

$$\overline{\mathfrak{Y}}_{12}^{(\mathfrak{p}+\mathfrak{n})},\ \overline{\mathfrak{Y}}_{12}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{n})},\quad \overline{\mathfrak{X}}_{12}^{(\mathfrak{p})},\quad \overline{\mathfrak{X}}_{12}^{(\mathfrak{q})}$$

bezeichnet, so geht die Form $\mathfrak{F}$ in das Aggregat

$$(\overline{\mathfrak{F}})\qquad \mathfrak{F}_0+\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}^0+\mathfrak{F}'$$

über, wo

$$\mathfrak{F}_0=\sum_{\mathfrak{b}}\mathfrak{X}_{11}^{(\mathfrak{b})}\mathfrak{Y}_{11}^{(\mathfrak{b}+\mathfrak{n})}\qquad (\mathfrak{b}=\mathfrak{l}+1,\ldots\mathfrak{m})$$

$$\mathfrak{F}_1=\sum_{\mathfrak{p}}(\overline{\mathfrak{X}}_{12}^{(\mathfrak{p})}\mathfrak{Y}_{21}^{(\mathfrak{p})}+\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{p})}\overline{\mathfrak{Y}}_{12}^{(\mathfrak{p}+\mathfrak{n})})\qquad (\mathfrak{p}=1,2,\ldots\mathfrak{k})$$

$$\mathfrak{F}^0=\sum_{\mathfrak{q}}(\overline{\mathfrak{X}}_{12}^{(\mathfrak{q})}\overline{\mathfrak{Y}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}+\mathfrak{X}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}\overline{\mathfrak{Y}}_{12}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{n})})\qquad (\mathfrak{q}=\mathfrak{k}+1,\ldots\mathfrak{l})$$

ist und $\mathfrak{F}'$ eine bilineare Function der $\mathfrak{n}-\mathfrak{m}-\mathfrak{l}$ Variabeln

$$\overline{\mathfrak{X}}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})},\ \mathfrak{X}_{22}^{(\mathfrak{r})},\quad \mathfrak{Y}_{22}^{(\mathfrak{r})},\ \mathfrak{Y}_{21}^{(\mathfrak{q}+\mathfrak{m})}\qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{q}=\mathfrak{k}+1,\mathfrak{k}+2,\ldots\mathfrak{l}\\ \mathfrak{r}=\mathfrak{m}+2\mathfrak{l}-\mathfrak{k}+1,\ldots\mathfrak{n}\end{pmatrix}$$

bedeutet. Die Discriminante von $\mathfrak{F}'$ ist nicht gleich Null; die in $\overline{\mathfrak{F}}$ vorkommenden Variabeln $\mathfrak{X}_{11}$, $\mathfrak{Y}_{11}$ sind mit den bezüglichen von $\mathfrak{F}$ identisch; die Grössen $\overline{\mathfrak{X}}_{12}$, $\overline{\mathfrak{Y}}_{12}$ in $\overline{\mathfrak{F}}$ sind resp. lineare Functionen der in $\mathfrak{F}$ enthaltenen Grössen $\mathfrak{X}_{12}$, $\mathfrak{X}_{22}$ und $\mathfrak{Y}_{12}$, $\overline{\mathfrak{Y}}_{22}$, und diejenigen Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ in $\overline{\mathfrak{F}}$, deren erster Index 2 ist, sind lineare Functionen der in $\mathfrak{F}$ enthaltenen Grössen $\mathfrak{X}_{21}$, $\mathfrak{X}_{22}$ und $\overline{\mathfrak{Y}}_{21}$, $\overline{\mathfrak{Y}}_{22}$. Die Form $\mathfrak{f}$ geht daher durch eine Reihe *congruenter* Substitutionen $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{12}$, $\mathfrak{S}_{22}$ in $\overline{\mathfrak{F}}$ über, sodass die der zweiten Gruppe angehörigen Variabeln der Form $\mathfrak{f}$ dabei nur unter einander transformirt werden.

IV. Wenn man gemäss § 1 Art. V die bilineare Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n; y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_{m+n})$ mittels einer Reihe von Substitutionen, $\overline{\mathfrak{S}}_{22}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{21}$, $\overline{\mathfrak{S}}_{11}$ in die bilineare Form

$$(\mathrm{F})\qquad \sum_a (X_{12}^{(a)}\overline{Y}_{21}^{(a+m)}+X_{21}^{(a+m)}Y_{12}^{(a+n)})+\sum_b X_{11}^{(b)}Y_{11}^{(b+n)}+\sum_c X_{22}^{(c)}\overline{Y}_{22}^{(c)}$$
$$(a=1,2,\ldots l;\ b=l+1,l+2,\ldots m;\ c=l+m+1,l+m+2,\ldots n)$$

verwandelt, so bestehen die darin vorkommenden linearen Functionen

$$X_{21},\ X_{22},\ \overline{Y}_{21},\ \overline{Y}_{22}$$

aus zwei verschiedenen Theilen, von denen der eine die Variabeln der ersten Gruppe x, y, der andre die der zweiten Gruppe enthält. Bezeichnet man die letzteren Theile durch die entsprechenden deutschen Buchstaben $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, und bildet aus denselben nach den im vorhergehenden Abschnitt III enthaltenen Vorschriften die analog mit

$$\mathfrak{X}_{21}^{(p)},\ \mathfrak{X}_{21}^{(q+m)},\ \overline{\mathfrak{X}}_{21}^{(q+m)},\ \mathfrak{X}_{22}^{(r)};\quad \mathfrak{Y}_{21}^{(p)},\ \mathfrak{Y}_{21}^{(q+m)},\ \overline{\mathfrak{Y}}_{21}^{(q+m)},\ \mathfrak{Y}_{22}^{(r)}$$
$$(p=1,2,\dots k;\ q=k+1,k+2,\dots l;\ r=m+2l-k+1,\dots n)$$

zu bezeichnenden linearen Functionen, so sind diese, wie schon am Schlusse von Art. III hervorgehoben worden, auch umgekehrt lineare Functionen jener Grössen $\mathfrak{X}_{21}$, $\mathfrak{X}_{22}$ und resp. $\overline{\mathfrak{Y}}_{21}$, $\overline{\mathfrak{Y}}_{22}$, von denen man ausgegangen ist. Substituirt man in diesen linearen Functionen die bezüglichen gesammten Ausdrücke X_{21}, X_{22}, $\overline{Y}_{21}$, $\overline{Y}_{22}$ für deren mit $\mathfrak{X}_{21}$, $\mathfrak{X}_{22}$, $\overline{\mathfrak{Y}}_{21}$, $\overline{\mathfrak{Y}}_{22}$ bezeichnete Theile, so unterscheiden sich dieselben von jenen Grössen

$$\mathfrak{X}_{21}^{(p)},\ \mathfrak{X}_{21}^{(q+m)},\ \overline{\mathfrak{X}}_{21}^{(q+m)},\ \mathfrak{X}_{22}^{(r)};\quad \mathfrak{Y}_{21}^{(p)},\ \mathfrak{Y}_{21}^{(q+m)},\ \overline{\mathfrak{Y}}_{21}^{(q+m)},\ \mathfrak{Y}_{22}^{(r)}$$

nur durch lineare Functionen von Variabeln x, y, welche der ersten Gruppe angehören, und man erhält somit Functionen folgender Art

$$\mathfrak{X}_{21}^{(p)} + \Phi^{(p)}(x_1, x_2, \dots x_m),\quad \mathfrak{Y}_{21}^{(p)} + \Psi^{(p)}(y_{n+1}, \dots y_{n+m}), \dots,$$

wo unter Φ, Ψ lineare Functionen der bezüglichen Variabeln zu verstehen sind. Setzt man endlich

$$X_{21}^{(p)} = \mathfrak{X}_{21}^{(p)} + \Phi^{(p)}(x_1, \dots x_m) + \Psi^{(p)}(x_{n+1}, \dots x_{n+m}),\quad \text{etc.}$$

und bezeichnet die diesen Grössen

$$X_{21}^{(p)},\ X_{21}^{(q+m)},\ \overline{X}_{21}^{(q+m)},\ X_{22}^{(r)}$$

correspondirenden Functionen der Variabeln y resp. mit

$$Y_{21}^{(p)},\ Y_{21}^{(q+m)},\ \overline{Y}_{21}^{(q+m)},\ Y_{22}^{(r)},$$

so sind die Grössen

$$X - \Psi(x_{n+1}, \dots x_{n+m}),\quad Y - \Phi(y_1, \dots y_m)$$

ausreichend, um dadurch die sämmtlichen in F vorkommenden Variabeln X, Y, deren erster Index 2 ist, linear darzustellen, und die Form F geht demnach bei Einführung derselben in das Aggregat

$$(\overline{F})\qquad F^0 + F^{(1)} + F^{(2)} + F_0 + F_1$$

über, wo F^0 eine bilineare Form ist, in welcher jedes Glied eine von den Variabeln

$$y_1, y_2, \dots y_m;\quad x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_{n+m}$$

enthält, wo ferner

$$F^{(1)} = \sum_b X_{11}^{(b)} Y_{11}^{(b+n)} \qquad (b=l+1,\dots m)$$

$$F^{(2)} = \sum_p (\overline{X}_{12}^{(p)} Y_{21}^{(p)} + X_{21}^{(p)} \overline{Y}_{12}^{(p+n)}) \qquad (p=1,2,\dots k)$$

$$F_0 = \sum_q (\overline{X}_{12}^{(q)} \overline{Y}_{21}^{(q+m)} + X_{21}^{(q+m)} \overline{Y}_{12}^{(q+n)}) \qquad (q=k+1,\dots l)$$

ist, und F_1 eine bilineare Function der $n-m-l$ Variabeln

$$\overline{X}_{21}^{(q+m)},\ X_{22}^{(r)},\quad Y_{22}^{(r)},\ Y_{21}^{(q+m)} \qquad \begin{pmatrix} q=k+1, k+2, \dots l \\ r=m+2l-k+1, \dots n \end{pmatrix}$$

bedeutet, deren Discriminante von Null verschieden ist. Die Variabeln der transformirten Form $\overline{F}$ können aus denen von f durch eine Reihe *congruenter* Substitutionen S_{22}, S_{21}, S_{11} abgeleitet werden, und so sind die in $\overline{F}$ vorkommenden Grössen

$$X_{11},\ \overline{X}_{12};\quad Y_{11},\ \overline{Y}_{12}$$

lineare Functionen von

$$x_1, x_2, \dots x_m;\quad y_{n+1}, y_{n+2}, \dots y_{n+m},$$

d. h. sie enthalten einzig und allein diejenigen Variabeln von f, aus denen die erste Gruppe gebildet ist.

V. Bezeichnet man mit $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \ldots$ lauter bilineare Formen folgender Art

$$\xi\eta' + \xi'\eta'' + \cdots + \xi^{(\nu-1)}\eta^0,$$

so lässt sich jede bilineare Function

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_\mathfrak{n};\ \mathfrak{y}_{\mathfrak{m}+1}, \mathfrak{y}_{\mathfrak{m}+2}, \ldots \mathfrak{y}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}) \qquad (\mathfrak{m} > 0),$$

deren Discriminante von Null verschieden ist, mittels congruenter Substitutionen in ein Aggregat

$$(\varphi) \qquad \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \cdots + \mathfrak{E}_\mathfrak{m} + \mathfrak{F}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots;\ \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \ldots)$$

transformiren, und zwar so, dass sowohl die Veränderlichen der bilinearen Form $\mathfrak{F}$ als auch die sämmtlichen mit

$$\xi', \xi'', \ldots \xi^{(\nu-1)};\ \eta', \eta'', \ldots \eta^{(\nu-1)}$$

bezeichneten Variabeln der Formen $\mathfrak{E}$, welche zusammen die zweite Gruppe der in (φ) vorkommenden Variabeln constituiren, nur Transformirte von den der zweiten Gruppe angehörigen Veränderlichen von $\mathfrak{f}$, nämlich von

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{m}+1}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{m}+2}, \ldots \mathfrak{x}_\mathfrak{n};\ \mathfrak{y}_{\mathfrak{m}+1}, \mathfrak{y}_{\mathfrak{m}+2}, \ldots \mathfrak{y}_\mathfrak{n}$$

sind. Dagegen enthalten die beiden äussersten Variabeln der Formen $\mathfrak{E}$, nämlich ξ und η^0, deren Gesammtheit die erste Gruppe von (φ) bildet, als lineare Functionen der ursprünglichen Veränderlichen, zugleich die der ersten Gruppe von $\mathfrak{f}$, nämlich

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_\mathfrak{m};\ \mathfrak{y}_{\mathfrak{n}+1}, \mathfrak{y}_{\mathfrak{n}+2}, \ldots \mathfrak{y}_{\mathfrak{n}+\mathfrak{m}};$$

und zwar bilden die diese Variabeln enthaltenden Theile der je $\mathfrak{m}$ Functionen ξ, η^0 als solche zwei vollständige Systeme von je $\mathfrak{m}$ linear unabhängigen Ausdrücken.

Um zu der angegebenen Transformation zu gelangen, hat man zuvörderst die Form $\mathfrak{f}$ nach Art. III in ein Aggregat

$$\mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}^0 + \mathfrak{F}'$$

zu verwandeln. Die beiden ersten Theile $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$ bestehen alsdann bereits aus lauter Formen $\mathfrak{E}$, nämlich für $\nu = 1$ und $\nu = 2$, und es bleibt nach deren Absonderung ein Ausdruck

$$\sum_{h=1}^{h=m} (x_h' y_h + x_{n+h} y_{n+h}') + f(x_1, x_2, \ldots x_n;\ y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_{m+n}),$$

in welchem die sämmtlichen je n Grössen x, y nur lineare Functionen der ursprünglichen Veränderlichen der zweiten Gruppe sind, während die mit x', y' bezeichneten Functionen auch die der ersten Gruppe enthalten. Wird nunmehr die bilineare Form f gemäss Art. IV transformirt, so ist der dort mit F^0 bezeichnete Theil mit der Summe

$$\sum_h (x_h' y_h + x_{n+h} y_{n+h}') \qquad (h=1, 2, \ldots m)$$

zu einem durchaus analogen Ausdrucke

$$\sum_h (x_h^0 y_h + x_{n+h} y_{n+h}^0) \qquad (h=1, 2, \ldots m)$$

zu vereinigen, und alsdann sind in demselben an Stelle der Variabeln x_{n+h}, y_h die Veränderlichen

$$X_{11}^{(\mathfrak{b}+n)}, \overline{X}_{12}^{(p+n)}, \overline{X}_{12}^{(q+n)};\ Y_{11}^{(\mathfrak{b})}, \overline{Y}_{12}^{(p)}, \overline{Y}_{12}^{(q)}$$

einzuführen, welche denjenigen correspondiren, die im Art. IV in $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, F_0 an Stelle der je m Variabeln x_h, y_{n+h} getreten sind. Jener Summenausdruck zerfällt hiernach in drei Theile, von denen die ersten beiden, nämlich

$$\sum_\mathfrak{b} (X_{01}^{(\mathfrak{b})} Y_{11}^{(\mathfrak{b})} + X_{11}^{(\mathfrak{b}+n)} Y_{01}^{(\mathfrak{b}+n)}), \qquad \sum_p (X_{01}^{(p)} \overline{Y}_{12}^{(p)} + \overline{X}_{12}^{(p+n)} \overline{Y}_{02}^{(p+n)})$$

sich resp. mit $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ zu den Ausdrücken

$$\sum_{\delta}(X_{01}^{(\delta)}Y_{11}^{(\delta)} + X_{11}^{(\delta)}Y_{11}^{(\delta+n)} + X_{11}^{(\delta+n)}Y_{01}^{(\delta+n)})$$

$$\sum_{p}(X_{01}^{(p)}\overline{Y}_{12}^{(p)} + \overline{X}_{12}^{(p)}Y_{21}^{(p)} + X_{21}^{(p)}\overline{Y}_{12}^{(p+n)} + \overline{X}_{12}^{(p+n)}\overline{Y}_{02}^{(p+n)})$$

vereinigen, welche aus lauter Formen $\mathfrak{E}$, und zwar resp. für $\nu = 3$ und $\nu = 4$, bestehen. Nach Absonderung derselben bleibt noch der dritte Theil des obigen Summenausdrucks, nämlich

$$\sum_{q}(\overline{X}_{02}^{(q)}\overline{Y}_{12}^{(q)} + \overline{X}_{12}^{(q+n)}\overline{Y}_{02}^{(q+n)}),$$

welcher, mit der im Art. IV durch F_0 bezeichneten Summe vereinigt, den Ausdruck

$$\sum_{q}(\overline{X}_{02}^{(q)}\overline{Y}_{12}^{(q)} + \overline{X}_{12}^{(q)}\overline{Y}_{21}^{(q+m)} + X_{21}^{(q+m)}\overline{Y}_{12}^{(q+n)} + \overline{X}_{12}^{(q+n)}\overline{Y}_{02}^{(q+n)})$$

ergiebt, und überdiess die im Art. IV mit F_1 bezeichnete bilineare Form der $n - m - l$ Variabeln

$$\overline{X}_{21}^{(q+m)},\ X_{22}^{(r)},\ Y_{22}^{(r)},\ Y_{21}^{(q+m)},$$

welche also jedenfalls weniger Variabeln als $\mathfrak{f}$ enthält. Diese Form F_1 kann daher bereits in der Weise transformirt angenommen werden, wie sie als zulässig für $\mathfrak{f}$ nachgewiesen werden soll; d. h. es kann

$$(\Phi) \qquad \sum_{q}\mathrm{E}^{(q)} + \mathfrak{F}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots;\ \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \ldots)$$

für F_1 gesetzt werden, wo

$$\mathrm{E} = \Xi_2\Upsilon_3 + \Xi_3\Upsilon_4 + \cdots + \Xi_{\nu-3}\Upsilon_{-2}$$

ist, sodass an die Stelle der einander nicht correspondirenden und also einer ersten Gruppe angehörigen Variabeln der Form F_1,

$$\overline{X}_{21}^{(q+m)},\ Y_{21}^{(q+m)},$$

ebensoviel neue Veränderliche

$$\Xi_2^{(q)},\ \Upsilon_{-2}^{(q)}$$

treten, und correspondirend

$$\Upsilon_2^{(q)},\ \Xi_{-2}^{(q)} \ \text{ an die Stelle von } \ \overline{Y}_{21}^{(q+m)},\ X_{21}^{(q+m)},$$

während die Variabelnpaare $X_{22}^{(r)}$, $Y_{22}^{(r)}$ durch die paarweise einander zugeordneten Variabeln

$$\Xi_3, \Xi_4, \ldots \Xi_{\nu-3};\ \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots$$
$$\Upsilon_3, \Upsilon_4, \ldots \Upsilon_{\nu-3};\ \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \ldots$$

ersetzt werden, welche die zweite Gruppe der in Φ enthaltenen Veränderlichen bilden. Nach Einführung dieser neuen Variabeln werden die Grössen

$$X_{21}^{(q+m)},\ \overline{Y}_{21}^{(q+m)}$$

lineare Functionen derselben, aber diejenigen Theile, welche die neuen Variabeln der zweiten Gruppe enthalten, können durch Umformung der Variabeln

$$\overline{X}_{02}^{(q)},\ \overline{Y}_{02}^{(q+n)}$$

daraus weggeschafft werden. Was nämlich zuvörderst die Variabeln Ξ, Υ der zweiten Gruppe betrifft, so kann jedes in $X_{21}^{(q+m)}$ vorkommende Glied

$$C\Xi_{\lambda-1} \qquad (\lambda - 1 > 2)$$

weggelassen werden, sobald man nur

$$\Upsilon_\lambda + C\overline{Y}_{12}^{(q+n)},\ \ \Xi_\lambda + C\overline{X}_{12}^{(q+n)},\ \ \overline{Y}_{02}^{(q+n)} - C\Upsilon_{\lambda+1}$$

resp. an Stelle von

$$\Upsilon_\lambda, \qquad \Xi_\lambda, \qquad \overline{Y}_{02}^{(q+n)}$$

setzt. Wenn ferner

$$\sum_g \mathfrak{C}_{qg}\mathfrak{X}_g \qquad (g=1,2,\ldots)$$

derjenige Theil von $X_{21}^{(q+m)}$ ist, welcher die Variabeln $\mathfrak{X}$ der zweiten Gruppe enthält, und die Form $\mathfrak{F}$, welche den zweiten Theil von Φ bildet, gleich

$$\sum_{g,h} \mathfrak{A}_{gh}\mathfrak{X}_g\mathfrak{Y}_h \qquad (g,h=1,2,\ldots)$$

gesetzt wird, so sind Grössen $\mathfrak{B}_{hq}$ für alle Werthe von q zu bestimmen, welche den Gleichungen

$$\sum_h \mathfrak{A}_{gh}\mathfrak{B}_{hq} = \mathfrak{C}_{qg} \qquad (h=1,2,\ldots)$$

Genüge leisten, und alsdann alle jene Theile

$$\sum_g \mathfrak{C}_{qg}\mathfrak{X}_g \quad \text{oder} \quad \sum_{g,h} \mathfrak{A}_{gh}\mathfrak{B}_{hq}\mathfrak{X}_g$$

aus den Functionen $X_{21}^{(q+m)}$ wegzulassen, sobald nur für die Variabeln

$$\overline{Y}_{02}^{(q+n)}, \qquad \mathfrak{X}_h, \qquad \mathfrak{Y}_h$$

resp. die Ausdrücke

$$\overline{Y}_{02}^{(q+n)} - \sum_{g,h} \mathfrak{A}_{gh}\mathfrak{B}_{gq}(\mathfrak{Y}_h + \mathfrak{B}_{hq}\overline{Y}_{12}^{(q+n)}),\quad \mathfrak{X}_h + \sum_q \mathfrak{B}_{hq}\overline{X}_{12}^{(q+n)},\quad \mathfrak{Y}_h + \sum_q \mathfrak{B}_{hq}\overline{Y}_{12}^{(q+n)}$$

substituirt werden. Es ist hierbei nur noch nachzuweisen, dass jene Grössen $\mathfrak{B}_{hq}$ stets bestimmbar sind, d. h. dass die *Determinante* der bilinearen Form $\mathfrak{F}$,

$$|\mathfrak{A}_{gh}| \qquad (g,h=1,2,\ldots)$$

von Null verschieden ist. Bei der im Eingange dieses Abschnitts charakterisirten Transformation von f in φ sollen die Formen $\mathfrak{E}$ die sämmtlichen Variabeln der ersten Gruppe und überdiess nur Paare von Correspondirenden

der zweiten Gruppe enthalten. Eben dieselbe Eigenschaft ist daher bei den Formen E in Φ *vorauszusetzen*; die übrigbleibende Function $\mathfrak{F}$ muss also, wenn sie mittels congruenter Substitution auf die Form gebracht ist, dass ihre Discriminante nicht gleich Null ist, nach Art. I ebenfalls lauter Paare correspondirender Variabeln $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ enthalten, sodass auch ihre *Determinante* einen von Null verschiedenen Werth haben muss*).

Nachdem aus den linearen Functionen $X_{21}^{(q+m)}$, $\overline{Y}_{21}^{(q+m)}$ die Variabeln der zweiten Gruppe von Φ sämmtlich weggeschafft und dabei die Variabeln

$$\overline{X}_{02}^{(q)},\ \overline{Y}_{02}^{(q+n)} \quad \text{in andre:} \quad X_{02}^{(q)},\ Y_{02}^{(q+n)}$$

transformirt sind, ist der Summenausdruck

$$\sum_q (X_{02}^{(q)}\overline{Y}_{12}^{(q)} + \overline{X}_{12}^{(q)}\overline{Y}_{21}^{(q+m)} + X_{21}^{(q+m)}\overline{Y}_{12}^{(q+n)} + \overline{X}_{12}^{(q+n)}Y_{02}^{(q+n)})$$

nach den in

$$X_{21}^{(q+m)},\ \overline{Y}_{21}^{(q+m)}$$

nur noch enthaltenen Variabeln der ersten Gruppe

$$\Xi_{-2}^{(q)},\quad \Upsilon_2^{(q)}$$

zu ordnen. Bezeichnet man dann die linearen Functionen der Grössen $\overline{X}_{12}^{(q)}$,

---

*) Es ist diess einer der Hauptpunkte der ganzen Deduction, durch welchen auch die Nothwendigkeit der Gruppeneintheilung bedingt ist. Bei der Reduction der Schaaren kommt die analoge Stelle im Art. IV meines Aufsatzes vom Januar d. J. vor. In dem Beispiele aber, welches in meiner Mittheilung vom März d. J. jene Nothwendigkeit erläutern sollte, sind die Variabeln x_3, y_4 in den beiden letzten Gliedern, zum Unterschiede von denen in den beiden ersten mit Strichen zu versehen; erst dann zeigt es sich, dass das Verfahren, mittels dessen die einzelnen Variabeln von der mit Q bezeichneten Form abgesondert werden, zuerst auf alle diejenigen Veränderlichen anzuwenden ist, welche nicht zugleich in der Form P vorkommen und als solche in eine besondere Gruppe zusammengefasst sind.

welche mit $\Upsilon_2^{(q)}$ multiplicirt sind, durch $\Xi_1^{(q)}$, und ebenso die Factoren von $\Xi_{-2}^{(q)}$ durch $\Upsilon_{-1}^{(q)}$, so werden die Grössen

$$\overline{Y}_{12}^{(q)}, \quad X_{12}^{(q+n)}$$

resp. lineare Functionen der Correspondirenden

$$\Upsilon_1^{(q)}, \; \Xi_{-1}^{(q)},$$

und bei deren Einführung verwandelt sich der obige Summenausdruck in ein Aggregat von Ausdrücken

$$\Xi^{(q)}\Upsilon_1^{(q)} + \Xi_1^{(q)}\Upsilon_2^{(q)} + \Xi_{-2}^{(q)}\Upsilon_{-1}^{(q)} + \Xi_{-1}^{(q)}\Upsilon_0^{(q)},$$

welche sich mit den bezüglichen Formen $E^{(q)}$ zu

$$\Xi^{(q)}\Upsilon_1^{(q)} + \Xi_1^{(q)}\Upsilon_2^{(q)} + \Xi_2^{(q)}\Upsilon_3^{(q)} + \cdots + \Xi_{\nu-3}^{(q)}\Upsilon_{-2}^{(q)} + \Xi_{-2}^{(q)}\Upsilon_{-1}^{(q)} + \Xi_{-1}^{(q)}\Upsilon_0^{(q)},$$

also in der That zu lauter Formen $\mathfrak{E}$ vereinigen.

VI. Es sei f eine bilineare Form, deren Determinante von Null verschieden ist, und die nach Art. II gleich der Summe der beiden Formen

$$\varphi(\mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_1'', \ldots, \mathfrak{x}_2', \mathfrak{x}_2'', \ldots; \; \mathfrak{y}_1', \mathfrak{y}_1'', \ldots, \mathfrak{y}_2', \mathfrak{y}_2'', \ldots)$$
$$\psi(\mathfrak{x}_2', \mathfrak{x}_2'', \ldots, \mathfrak{x}_3', \mathfrak{x}_3'', \ldots; \; \mathfrak{y}_2', \mathfrak{y}_2'', \ldots, \mathfrak{y}_3', \mathfrak{y}_3'', \ldots)$$

gesetzt werden kann, von denen die erstere symmetrisch, die letztere alternirend ist. Dabei können entweder die Variabeln $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ oder die Variabeln $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{y}_3$, aber nur nicht beide Arten von Variabeln zugleich fehlen. Ferner sei der Abkürzung wegen

$$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Y} = (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'), \qquad \mathfrak{X}\mathfrak{Y}' - \mathfrak{X}'\mathfrak{Y} = [\mathfrak{X}\mathfrak{Y}']$$

und

$$\overline{\mathfrak{E}} = \mathfrak{A}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}') + [\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}''] + (\mathfrak{X}''\mathfrak{Y}''') + \cdots + [\mathfrak{X}^{(\mu-1)}\mathfrak{Y}^{(\mu)}] + \mathfrak{B}(\mathfrak{X}^{(\mu)}\mathfrak{Y}^{(\nu)}),$$

wo

$$\nu = \mu + 1 \quad \text{oder} \quad \mu, \qquad \mathfrak{A} = 0 \quad \text{oder} \quad 1$$

und stets, wenn $\mu < \nu$ ist, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ genommen werden muss, während für $\mu = \nu$ die Constante $\mathfrak{B}$ von Null verschieden, im Uebrigen aber unbestimmt zu lassen ist. Es sind sonach

$$\begin{array}{rll}
\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{X}^{(\mu+1)}, \mathfrak{Y}^{(\mu+1)} & \text{für} & \mathfrak{A} = 1, \;\; \nu = \mu + 1 \\
\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{X}^{(\mu)}, \;\; \mathfrak{Y}^{(\mu)} & \text{für} & \mathfrak{A} = 0, \;\; \mathfrak{B} = 0 \\
\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} & \text{für} & \mathfrak{A} = 1, \;\; \nu = \mu \\
\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}' & \text{für} & \mathfrak{A} = 0, \;\; \nu = \mu
\end{array}$$

diejenigen Variabeln, welche *nur* in den äussersten Gliedern der Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ enthalten sind, und diese Veränderlichen sollen deshalb als die *„äusseren"* von den übrigen als den *„mittleren"* unterschieden werden. Diess vorausgeschickt, kann f mittels congruenter Substitutionen so transformirt werden, dass sich ein Aggregat von Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ absondern lässt, und dass sowohl die Variabeln der übrigbleibenden Form als auch die mittleren Variabeln der Formen $\overline{\mathfrak{E}}$, als lineare Functionen der Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ einzig und allein diejenigen enthalten, welche beiden Formen φ und ψ gemeinsam sind. Wenn die Variabeln $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ nicht fehlen, so ist in den Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ die Constante $\mathfrak{A}$ gleich Eins zu nehmen; die äusseren Variabeln derselben, d. h. also die Variabeln

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \quad \text{und, falls} \quad \nu = \mu + 1 \quad \text{ist,} \quad \mathfrak{X}^{(\mu+1)}, \mathfrak{Y}^{(\mu+1)}$$

enthalten dann, als lineare Functionen der Variabeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, jedenfalls die Veränderlichen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$; wenn aber die Variabeln $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ fehlen, also nur Variabeln $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}_3$ vorhanden sind, so ist in den Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ die Constante $\mathfrak{A}$ gleich Null zu setzen, und die äusseren Variabeln derselben, d. h. also die Variabeln

$$\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}' \quad \text{und, falls} \quad \mathfrak{B} = 0 \quad \text{ist,} \quad \mathfrak{X}^{(\mu)}, \mathfrak{Y}^{(\mu)}$$

enthalten dann, als lineare Functionen der ursprünglichen Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, jedenfalls die Variabeln $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{y}_3$, welche der Form ψ ausschliesslich angehören.

Da die Entwickelung der vorstehend charakterisirten Transformation von f in den beiden unterschiedenen Fällen ($\mathfrak{A}=1$ und $\mathfrak{A}=0$) durchaus analog ist, so soll dieselbe im Folgenden nur für den ersten Fall ausgeführt werden, wo Variabeln $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ als vorhanden anzunehmen und daher die Constanten $\mathfrak{A}$ in den Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ sämmtlich gleich Eins zu setzen sind. Die symmetrische Form φ kann alsdann gemäss § 1 Art. V mittels congruenter Substitutionen in ein Aggregat

$$\sum_{(i,k)} c_{ik}(\mathfrak{X}_{11}^{(i)}\mathfrak{Y}_{11}^{(k)}) + \sum_{(h)} (\mathfrak{X}_{12}^{(h)}\mathfrak{Y}_{21}^{(h)}) + \sum_{(i,k)} c'_{ik}(\mathfrak{X}_{22}^{(i)}\mathfrak{Y}_{22}^{(k)})$$

transformirt werden, in welchem die neuen Variabeln

$$\mathfrak{X}_{21},\ \mathfrak{X}_{22},\ \mathfrak{Y}_{21},\ \mathfrak{Y}_{22}$$

nur lineare Functionen der Veränderlichen $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$ sind. Hiermit löst sich schon der erste der drei Summenausdrücke als ein Aggregat von Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ von der Transformirten der Form f ab, und wenn die neuen Variabeln $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ auch in ψ eingeführt und dann die Bezeichnungen

$$\mathfrak{X}_{12},\ \mathfrak{X}_{21},\ \mathfrak{X}_{22},\ \mathfrak{Y}_{12},\ \mathfrak{Y}_{21},\ \mathfrak{Y}_{22},\ \mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{y}_3$$

resp. mit

$$x_0,\quad x_2,\quad x_1,\quad y_0,\quad y_2,\quad y_1,\quad x_3,\ y_3$$

vertauscht werden, so bleibt ein Ausdruck

$$\text{(F)}\qquad \sum_{h} (x_0^{(h)}y_2^{(h)}) + \sum_{(i,k)} c'_{ik}(x_1^{(i)}y_1^{(k)}) + \Psi$$

zur weiteren Discussion, in welchem Ψ eine alternirende Form der Variabeln

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\quad y_1,\ y_2,\ y_3$$

bedeutet. Nunmehr ist auf die Form Ψ gemäss § 1 Art. IV und V die *Jacobi*'sche Transformation anzuwenden und zwar so, dass die Variabeln in der Reihenfolge

$$x_3,\ y_3,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2$$

genommen und nur congruente Substitutionen benutzt werden. Dabei verwandelt sich Ψ in ein Aggregat von Ausdrücken

$$[X_{22}Y'_{22}],\ [X_{23}Y_{32}],\ [X_{21}Y_{12}],\ [X_{11}Y'_{11}],\ [X_{13}Y_{31}],\ [X_{33}Y'_{33}],$$

in denen

$$\begin{array}{lr} X_{33},\ X_{32},\ X_{31} \text{ lineare Functionen der Variabeln} & x_3,\ x_1,\ x_2, \\ X_{13},\ X_{12},\ X_{11} \text{ lineare Functionen der Variabeln} & x_1,\ x_2, \\ X_{23},\ X_{22},\ X_{21} \text{ lineare Functionen der Variabeln} & x_2, \end{array}$$

und Y deren Correspondirende bedeuten. Andrerseits sind auch die Variabeln x_2 lineare Functionen derjenigen Variabeln X, deren vorderer Index 2 ist, und die Variabeln x_1 sind lineare Functionen von

$$X_{11},\ X_{12},\ X_{13},\ X_{21},\ X_{22},\ X_{23},$$

sodass nach Einführung der neuen Veränderlichen X, Y der Ausdruck (F) auf folgende Gestalt zu bringen ist:

$$\Phi_0 + \Phi_1 + \Psi,$$

wo unter Φ_0 ein Aggregat von Ausdrücken

$$(X_0Y_{21}),\ \ (X_0Y_{22}),\ \ (X_0Y_{23})$$

und unter Φ_1 eine symmetrische Form der Variabeln X_{11}, X_{12}, X_{13}, Y_{11}, Y_{12}, Y_{13} zu verstehen ist. Da die Determinante jeder der Formen

$$(X_0Y_{22}) + [X_{22}Y'_{22}],\qquad (X_0Y_{23}) + [X_{23}Y_{32}]$$

verschwindet, und aber die Determinante der ursprünglichen Form f von Null verschieden vorausgesetzt ist, so können die Ausdrücke

$$[X_{22}Y'_{22}], \quad [X_{23}Y_{32}]$$

in Ψ gar nicht vorkommen, und es müssen daher die Variabeln

$$X_{22},\ X_{23},\ X_{32}; \quad Y_{22},\ Y_{23},\ Y_{32}$$

gänzlich fehlen. Hiernach wird (F) gleich

$$\sum_h \{(X_0^{(h)}Y_{21}^{(h)}) + [X_{21}^{(h)}Y_{12}^{(h)}]\} + \Phi_1 + \Psi_1,$$

wo Φ_1 eine symmetrische Form von

$$X_{12},\ X_{11},\ X_{13}; \quad Y_{12},\ Y_{11},\ Y_{13}$$

und Ψ_1 eine alternirende Form von

$$X_{11},\ X_{13},\ X_{31},\ X_{33}; \quad Y_{11},\ Y_{13},\ Y_{31},\ Y_{33}$$

bedeutet. Es fehlen also in Ψ_1 die in der Form Φ_1 vorkommenden Variabeln $X_{12}^{(h)}$, $Y_{12}^{(h)}$, aber auch *nur* diese, und die nachzuweisende Transformation kann deshalb für die Form $\Phi_1 + \Psi_1$, welche weniger Variabeln als $\varphi + \psi$ enthält, als zulässig angenommen werden, und zwar so, dass den drei Arten von Variabeln $\mathfrak{x}$ der Form $\varphi + \psi$, welche mit $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ bezeichnet sind, resp. die drei Gruppen von Variabeln der Form $\Phi_1 + \Psi_1$

$$X_{12}; \ X_{11},\ X_{13}; \ X_{31},\ X_{33}$$

entsprechen. Ist hiernach (F) gleich

$$\sum_h \{(X_0^{(h)}Y_{21}^{(h)}) + [X_{21}^{(h)}Y_{12}^{(h)}]\} + \sum_k \overline{\mathfrak{E}}_k + \mathfrak{F},$$

$$\overline{\mathfrak{E}}_k = (\mathfrak{X}_k''\mathfrak{Y}_k''') + [\mathfrak{X}_k'''\mathfrak{Y}_k''''] + \cdots + \mathfrak{B}_k(\mathfrak{X}_k^{(\mu)}\mathfrak{Y}_k^{(\nu)}),$$

wo natürlich die Zahlen μ, ν mit k variiren können, so muss die Determinante der bilinearen Form $\mathfrak{F}$ von Null verschieden sein, da ja die Determinante von $\Phi_1 + \Psi_1$ ebenso wie die der ursprünglichen Form $\varphi + \psi$ nicht verschwindet. Auf Grund der oben angegebenen und demnach hier vorauszusetzenden Eigenschaften der bezüglichen Transformation von $\Phi_1 + \Psi_1$ sind ferner die Variabeln von $\mathfrak{F}$, sowie die mittleren Variabeln der Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ sämmtlich von den Veränderlichen $X_{12}^{(h)}$, $Y_{12}^{(h)}$ unabhängig. Diese kommen vielmehr einzig und allein in den äusseren Variabeln der Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ vor, deren Gesammtanzahl mit derjenigen der Variabeln $X_{12}^{(h)}$, $Y_{12}^{(h)}$ übereinstimmen muss, und diese Variabeln $X_{12}^{(h)}$, $Y_{12}^{(h)}$ sind auch umgekehrt als lineare Functionen der in den Formen $\overline{\mathfrak{E}}_k$ und in $\mathfrak{F}$ enthaltenen Variabeln darstellbar. Endlich darf, wenn $\overline{\mathfrak{E}}'$, $\mathfrak{F}'$, resp. die mit $\overline{\mathfrak{E}}$, $\mathfrak{F}$ conjugirten Formen bedeuten, die erstere der zwei Formen

$$\sum_k (\overline{\mathfrak{E}}_k + \overline{\mathfrak{E}}_k') + \mathfrak{F} + \mathfrak{F}', \qquad \sum_k (\overline{\mathfrak{E}}_k - \overline{\mathfrak{E}}_k') + \mathfrak{F} - \mathfrak{F}'$$

keine andern Variabeln ausschliesslich enthalten als die äusseren Veränderlichen der Formen $\overline{\mathfrak{E}}$; denn die Anzahl solcher in der ersteren Form allein vorkommenden Variabeln kann nicht grösser sein als diejenige der in Φ_1 und nicht in Ψ_1 enthaltenen Veränderlichen; diess sind aber die Veränderlichen $X_{12}^{(h)}$, $Y_{12}^{(h)}$, deren Anzahl mit derjenigen der in den Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ enthaltenen äusseren Variabeln vollkommen identisch ist. Die erstere der zwei Formen

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}', \quad \mathfrak{F} - \mathfrak{F}'$$

kann hiernach *keine* ihrer Variabeln ausschliesslich enthalten, und die Determinante der letzteren muss deshalb von Null verschieden sein, sodass nach § 1 Art. IV, wenn $\mathfrak{F}$ eine bilineare Form zweier Reihen von je $2r$ Variabeln ist,

$$\mathfrak{F} - \mathfrak{F}' = 2\sum_\varkappa [\Xi_\varkappa \Upsilon_{\varkappa+1}] \qquad (\varkappa = 1, 3, 5, \ldots 2r-1)$$

und also

$$\mathfrak{F} = \sum_\varkappa [\Xi_\varkappa \Upsilon_{\varkappa+1}] + \sum_{i,k} C_{ik}(\Xi_i \Upsilon_k) \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varkappa = 1, 3, 5, \ldots 2r-1 \\ i, k = 1, 2, 3, \ldots 2r\end{smallmatrix}\right)$$

gesetzt werden kann. — Wenn die Grössen $X_{12}^{(h)}$, $Y_{12}^{(h)}$ nunmehr als lineare Functionen der Variabeln $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, Ξ, Υ dargestellt, und die bezüglichen Ausdrücke in (F) d. h. in

$$\sum_h \{(X_0^{(h)} Y_{21}^{(h)}) + [X_{21}^{(h)} Y_{12}^{(h)}]\} + \sum_k \overline{\mathfrak{E}}_k + \mathfrak{F}$$

eingeführt werden, so kann durch geeignete Transformation der Variabeln X_0, Y_0, X_{21}, Y_{21} bewirkt werden, dass sowohl die mittleren Variabeln $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ als auch die sämmtlichen Variabeln Ξ, Υ aus jenen linearen Functionen wegfallen. In der That braucht man zu diesem Behufe nur, wenn

$$\mathfrak{C}\mathfrak{X}^{(\tau+\varepsilon)} \quad \text{und resp.} \quad C\Xi_{\varrho+\varepsilon} \qquad (-\varepsilon=(-1)^\tau \ \text{resp.}\ -\varepsilon=(-1)^\varrho)$$

in $X_{12}^{(h)}$ vorkommt,

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{X}^{(\tau)} + \varepsilon\mathfrak{C}X_{21}^{(h)} & \text{für} \quad \mathfrak{X}^{(\tau)}, & X_0 - \varepsilon\mathfrak{C}\mathfrak{X}^{(\tau-\varepsilon)} & \text{für} \quad X_0 \\ \mathfrak{Y}^{(\tau)} + \varepsilon\mathfrak{C}Y_{21}^{(h)} & \text{für} \quad \mathfrak{Y}^{(\tau)}, & Y_0 - \varepsilon\mathfrak{C}\mathfrak{Y}^{(\tau-\varepsilon)} & \text{für} \quad Y_0 \end{array}$$

und resp.

$$\begin{array}{llll} \Xi_\varrho + \varepsilon C X_{21}^{(h)} & \text{für} \quad \Xi_\varrho, & X_0 - \varepsilon C \sum_k C'_{\varrho k}\Xi_k & \text{für} \quad X_0 \\ \Upsilon_\varrho + \varepsilon C Y_{21}^{(h)} & \text{für} \quad \Upsilon_\varrho, & Y_0 - \varepsilon C \sum_k C'_{\varrho k}\Upsilon_k & \text{für} \quad Y_0 \end{array}$$

zu substituiren, um dadurch eben jene Glieder

$$\mathfrak{C}\mathfrak{X}^{(\tau+\varepsilon)} \quad \text{und resp.} \quad C\Xi_{\varrho+\varepsilon}$$

aus $X_{12}^{(h)}$ und zugleich die correspondirenden Glieder aus $Y_{12}^{(h)}$ wegzuschaffen. Die Coëfficienten C' sind hierbei aus denen von $\mathfrak{F}$ durch die Relationen

$$C'_{ik} = C_{ik} + C_{ki}$$

für alle Indices i, k zu bestimmen, und die auf k bezüglichen Summationen sind auf die sämmtlichen Werthe $k = 1, 2, \ldots 2\tau$ zu erstrecken.

Nach Ausführung der angegebenen Operationen sind die Grössen $X_{12}^{(h)}$, $Y_{12}^{(h)}$ nur noch lineare Functionen der äusseren Variabeln der Formen $\overline{\mathfrak{E}}_k$ d. h. also von

$$\mathfrak{X}_k'', \mathfrak{Y}_k'' \quad \text{und, falls} \quad \nu = \mu + 1 \quad \text{ist,} \quad \mathfrak{X}_k^{(\mu+1)}, \mathfrak{Y}_k^{(\mu+1)}.$$

Wird nun der erste Theil des obigen Ausdrucks von (F) d. i.

$$\sum_h \{(X_0^{(h)} Y_{21}^{(h)}) + [X_{21}^{(h)} Y_{12}^{(h)}]\}$$

nach jenen äusseren Variabeln $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ geordnet und alsdann der Factor von

$$\mathfrak{X}_k'' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{Y}_k', \qquad \text{der von} \quad \mathfrak{X}_k^{(\mu+1)} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{Y}_k^{(\mu+2)}$$

und correspondirend der Factor von

$$\mathfrak{Y}_k'' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{X}_k', \qquad \text{der von} \quad \mathfrak{Y}_k^{(\mu+1)} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{X}_k^{(\mu+2)}$$

bezeichnet, so werden die Grössen $X_{21}^{(h)}$, $Y_{21}^{(h)}$ lineare Functionen dieser neuen Variabeln $\mathfrak{X}_k'$, $\mathfrak{Y}_k'$, $\mathfrak{X}_k^{(\mu+2)}$, $\mathfrak{Y}_k^{(\mu+2)}$, bei deren Einführung die Ausdrücke

$$(X_0^{(h)} Y_{21}^{(h)}) \quad \text{in ähnliche} \quad (\mathfrak{X}_k\mathfrak{Y}_k'), \ (\mathfrak{X}_k^{(\mu+2)}\mathfrak{Y}_k^{(\mu+3)})$$

übergehen. Jener erste Theil von (F) verwandelt sich hiernach in ein Aggregat von Ausdrücken

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}') + [\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}''], \qquad [\mathfrak{X}^{(\mu+1)}\mathfrak{Y}^{(\mu+2)}] + (\mathfrak{X}^{(\mu+2)}\mathfrak{Y}^{(\mu+3)}),$$

welche sich mit den Formen $\overline{\mathfrak{E}}$, die den zweiten Theil von (F) bilden, nämlich mit

$$(\mathfrak{X}''\mathfrak{Y}''') + [\mathfrak{X}'''\mathfrak{Y}''''] + \cdots + (\mathfrak{X}^{(\mu)}\mathfrak{Y}^{(\mu+1)})$$

und resp.

$$(\mathfrak{X}''\mathfrak{Y}''') + [\mathfrak{X}'''\mathfrak{Y}''''] + \cdots + 2\mathfrak{B}\mathfrak{X}^{(\mu)}\mathfrak{Y}^{(\mu)}$$

zu neuen Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ vereinigen, und die gesuchte Transformation von (F) ist hiermit vollendet.

Die zu Anfang dieses Abschnitts eingeführten Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ können, je nachdem darin $\nu = \mu + 1$ oder $\nu = \mu$ gesetzt wird, durch einen der beiden Ausdrücke

$$(\overline{\mathfrak{E}}_1) \qquad \sum_k \left(\mathfrak{X}^{(k)}\mathfrak{Y}^{(k+1)} + (-1)^k \mathfrak{Y}^{(k)}\mathfrak{X}^{(k+1)}\right) \qquad \left({k=0,1,\ldots\mu \atop \text{oder }\ k=1,\ldots\mu-1}\right)$$

$$(\overline{\mathfrak{E}}_2) \qquad \sum_k \left(\mathfrak{X}^{(k)}\mathfrak{Y}^{(k+1)} + (-1)^k \mathfrak{Y}^{(k)}\mathfrak{X}^{(k+1)}\right) + 2\mathfrak{B}\mathfrak{X}^{(\mu)}\mathfrak{Y}^{(\mu)} \qquad \left({k=0,1,\ldots\mu-1 \atop \text{oder }\ k=\ 1,\ldots\mu-1}\right)$$

dargestellt werden. Wird die gerade Zahl $\mu = 2r$ und

$$\left(3-(-1)^h\right)\mathfrak{X}^{(h)} = 2(X_h + X_h'), \qquad \left(3-(-1)^h\right)\mathfrak{Y}^{(h)} = 2(Y_h + Y_h')$$

$$\varepsilon_h\left(3-(-1)^h\right)\mathfrak{X}^{(k)} = 2(X_h - X_h'), \qquad \varepsilon_h\left(3-(-1)^h\right)\mathfrak{Y}^{(k)} = 2(Y_h - Y_h')$$

$$\left(\varepsilon_h = (-1)^{\frac{1}{2}h(h-1)};\quad k=2r+1-h;\quad h=0,1,\ldots r\right)$$

gesetzt, so kommt

$$\mathfrak{X}^{(h)}\mathfrak{Y}^{(h+1)} + (-1)^k \mathfrak{Y}^{(k)}\mathfrak{X}^{(k+1)} = X_h Y_{h+1} + X_h' Y_{h+1}'$$

$$(-1)^h \mathfrak{Y}^{(h)}\mathfrak{X}^{(h+1)} + \mathfrak{X}^{(k)}\mathfrak{Y}^{(k+1)} = (-1)^h Y_h X_{h+1} + (-1)^h Y_h' X_{h+1}'$$

$$(k=2r-h;\quad 0 \leqq h < r)$$

$$\mathfrak{X}^{(r)}\mathfrak{Y}^{(r+1)} + \mathfrak{Y}^{(r)}\mathfrak{X}^{(r+1)} = \pm 2X_r Y_r \mp X_r' Y_r',$$

und durch jene Substitution wird daher der Ausdruck $(\overline{\mathfrak{E}}_1)$ für den Fall, wo r grade ist, in ein Aggregat von zwei Ausdrücken $(\overline{\mathfrak{E}}_2)$ transformirt. Man braucht also den ersteren von jenen beiden Ausdrücken $(\overline{\mathfrak{E}})$ nur für *ungrade* Zahlen r beizubehalten, und derselbe lässt sich alsdann auf die Gestalt bringen

$$(\overline{\mathfrak{E}}_0) \qquad (-1)^m \sum_h x_h y_{h+1} + \sum_h (-1)^h y_h x_{h+1} \qquad (h=0,1,\ldots 2m-2),$$

indem oben für den Fall $k = 0, 1, \ldots \mu$ die Zahl $\mu = 2m-2$ und x, y an Stelle von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ gesetzt, für den Fall aber, wo sich die Summation auf $k = 1, 2, \ldots \mu - 1$ erstreckt, $\mu = 2m$ und

$$\mathfrak{X}^{(k)} = (-1)^k x_{k-1}, \qquad \mathfrak{Y}^{(k)} = (-1)^k y_{k-1}$$

genommen wird. Durch eben solche Substitutionen und durch Einsetzung von x_{n-k}, y_{n-k} für x_k, y_k verwandelt sich der obige Ausdruck $(\overline{\mathfrak{E}}_2)$ in folgenden:

$$(\overline{\mathfrak{E}}^0) \qquad c'x_0y_0 + \sum_h x_h y_{h-1} + \sum_h (-1)^h y_h x_{h-1} \qquad (c' \gtrless 0;\ h=1,2,\ldots n),$$

sodass durch die Formen $(\overline{\mathfrak{E}}_0)$ und $\overline{\mathfrak{E}}^0)$ die oben überhaupt mit $(\overline{\mathfrak{E}})$ bezeichneten Formen vollständig ersetzt werden.

VII. Die vorstehenden Auseinandersetzungen genügen, um darzuthun, dass jede bilineare Form f mittels congruenter Substitutionen in ein Aggregat von lauter Formen

$$(\mathfrak{E}^0) \qquad \sum_k x_k y_{k+1} \qquad (k=0,1,\ldots 2m-1)$$

$$(\mathfrak{E}) \qquad \sum_k (x_k y_{k+1} + c y_k x_{k+1}) \qquad \left({k=0,1,\ldots 2m-2 \atop c^2 \text{ nicht gleich Eins}}\right)$$

$$(\overline{\mathfrak{E}}_0) \qquad \sum_k \left((-1)^m x_k y_{k+1} + (-1)^k y_k x_{k+1}\right) \qquad (k=0,1,\ldots 2m-2)$$

$$(\overline{\mathfrak{E}}^0) \qquad c'x_0y_0 + \sum_k \left(x_k y_{k-1} + (-1)^k y_k x_{k-1}\right) \qquad \left({k=1,2,\ldots n \atop c' \text{ nicht gleich Null}}\right)$$

transformirt und also auf eine gewisse einfache Form gebracht werden kann, welche als die Reducirte der bilinearen Function f bezeichnet werden soll*).

*) Die in $(\overline{\mathfrak{E}}^0)$ enthaltene Constante c' könnte dadurch weggeschafft werden, dass für grade Indices $x_k\sqrt{c'} = x_k'$, $y_k\sqrt{c'} = y_k'$, für ungrade $x_k = x_k'\sqrt{c'}$, $y_k = y_k'\sqrt{c'}$ gesetzt wird.

Nach Art. I lässt sich nämlich jede Form f mittels congruenter Substitutionen in eine bilineare Function

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots \mathfrak{x}_n;\ \mathfrak{y}_{\mathfrak{m}+1}, \mathfrak{y}_{\mathfrak{m}+2}, \mathfrak{y}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}})$$

verwandeln, deren Discriminante von Null verschieden ist. Eine solche Function $\mathfrak{f}$ ist ferner, für $\mathfrak{m} > 0$, nach Art. V in ein Aggregat

$$\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \cdots + \mathfrak{E}_{\mathfrak{m}} + \mathfrak{F}$$

zu transformiren, und die Form $\mathfrak{F}$ kann dabei, weil sie weniger Variabeln als $\mathfrak{f}$ enthält, schon in der reducirten Form d. h. als ein Aggregat von Formen $\mathfrak{E}$ und $\overline{\mathfrak{E}}$ angenommen werden. Wenn ferner $\mathfrak{m} = 0$ ist und also die Determinante der ursprünglichen Form f als von Null verschieden vorausgesetzt werden kann, so hat man nach Art. II, indem dort $\mathfrak{f}$ für $a\mathfrak{f}$ und $b = ac$ gesetzt wird,

$$f = \mathfrak{f} + c\mathfrak{f}' \qquad \text{oder} \qquad f = \varphi + \psi\,,$$

und im ersten Falle enthält jede der conjugirten Formen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ eine oder mehrere Veränderliche, deren correspondirende darin fehlen, im zweiten Falle aber enthält die eine der beiden Formen φ, ψ mindestens ein Variabeln-Paar, welches in der andern nicht vorkommt. Im ersten Falle ist daher wiederum nach Art. V die Form f gleich einem Aggregat

$$\sum_k (\mathfrak{E}_k + c\mathfrak{E}'_k) + \mathfrak{F} + c\mathfrak{F}',$$

wo $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{F}'$ resp. die Conjugirten von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ bedeuten, und hieraus folgt ganz ebenso wie oben die nachzuweisende Reduction. Dabei können übrigens keine der Formen $\mathfrak{E}_k$ zu den oben mit $\mathfrak{E}^0$ bezeichneten Formen gehören, da alsdann die Determinante der Form $\mathfrak{E}_k + c\mathfrak{E}'_k$ und also auch die der Form f gleich Null wäre. Wenn endlich im zweiten Falle die Form f gleich $\varphi + \psi$ ist, so lässt sie sich nach Art. VI durch congruente Substitutionen so umwandeln, dass sich von der Transformirten ein Aggregat von Formen $\overline{\mathfrak{E}}$ absondert, und da für die übrigbleibende Form, welche weniger Variabeln als f enthält, jene Reduction auf ein Aggregat von lauter Formen $\mathfrak{E}$ und $\overline{\mathfrak{E}}$ vorausgesetzt werden kann, so ist auch in diesem Falle die in Rede stehende Transformation bilinearer Formen nachgewiesen.

Die in der reducirten Form enthaltenen Coëfficienten c und c' ebenso wie die Coëfficienten der Substitution, mittels deren die Form f in ihre Reducirte übergeht, sind rational aus denen von f und aus den verschiedenen Werthen von w zusammengesetzt, wofür die Determinante von

$$f + wf'$$

verschwindet, resp. aus denjenigen, wofür die sämmtlichen Unterdeterminanten je einer und derselben Ordnung gleichzeitig Null werden*). Ueberdiess enthalten jene Coëfficienten, und zwar ebenfalls in rationaler Weise, die allgemeinen, unbestimmten Coëfficienten der mit $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{12}$, $\mathfrak{S}_{22}$ bezeichneten Substitutionen des Abschnitts V, § 1, da eben diese Substitutionen bei den in den Artt. III bis VI entwickelten Transformationen, auf welchen schliesslich die Reduction basirt, implicite benutzt sind. Auf diese Weise kann, soweit nämlich die Unbestimmtheit jener allgemeinen Coëfficienten in der finalen Transformation erhalten bleibt, eine gewisse Mannigfaltigkeit von Reductionen für eine und dieselbe Form resultiren, woraus alsdann ganz unmittelbar eine eben solche Mannigfaltigkeit von congruenten Transformationen einer Form in sich selbst hervorgeht. Doch kann man zu denselben Transformationen auch dadurch gelangen, dass man die Variabeln der Reducirten selbst durch allgemeine lineare Functionen von ebenso viel neuen Veränderlichen ersetzt, und die auf diese Weise entstehende bilineare Form wiederum nach den obigen Vorschriften in eine „Reducirte" transformirt.

---

*) Die erwähnten Werthe von w sind Invarianten, wie im folgenden Paragraphen näher ausgeführt wird.

§ 3.

Die Bedingungen für die Transformirbarkeit bilinearer Formen mittels congruenter Substitutionen.

I. Wenn zwei bilineare Formen f und $\mathfrak{f}$ durch eine für beide Reihen von Variabeln congruente Substitution S, deren Determinante von Null verschieden ist, in einander transformirt werden können, so sollen sie im Folgenden als „äquivalent“ bezeichnet und zu einer und derselben „Classe“ gerechnet werden. Sind f' und $\mathfrak{f}'$ resp. die zu f und $\mathfrak{f}$ conjugirten Formen, so gehen auch f' und $\mathfrak{f}'$ durch die Substitution S in einander über, und die beiden Paare conjugirter Formen (f, f') und $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ sind also simultan in einander transformirbar. Bezeichnet man nun zwei *Systeme* von je zwei bilinearen Formen als einander äquivalent, wenn die beiden Formen des einen Systems durch *irgend eine* lineare Substitution in die entsprechenden des andern simultan übergeführt werden können, so zeigt sich die Aequivalenz der beiden Systeme conjugirter Formen (f, f') und $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$, als eine unmittelbare Folge der Aequivalenz der beiden Formen f und $\mathfrak{f}$. Dass aber auch umgekehrt die Aequivalenz der beiden Formen f und $\mathfrak{f}$ aus derjenigen der Systeme (f, f') und $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ resultirt, dass also zwei Paare conjugirter bilinearer Formen, welche überhaupt durch *irgend eine* lineare Substitution simultan in einander übergehen, stets auch durch *congruente* Substitutionen in einander transformirbar sind, soll erst weiterhin mit Hilfe der Ergebnisse des vorigen Paragraphen nachgewiesen werden.

II. Wenn $(f, f') \sim (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ ist, d. h. wenn die beiden Systeme von Formen (f, f') und $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ einander äquivalent sind, so unterscheidet sich die Determinante der beiden Formen

$$uf + vf', \quad u\mathfrak{f} + v\mathfrak{f}'$$

nur durch einen Factor, welcher gleich der Substitutionsdeterminante ist. Ferner ist der grösste gemeinsame Theiler der sämmtlichen Unterdeterminanten ν^{ter} Ordnung von $uf + vf'$ gleich dem grössten gemeinsamen Theiler der bezüglichen Unterdeterminanten von $u\mathfrak{f} + v\mathfrak{f}'$, da der grösste gemeinsame

Theiler aller Unterdeterminanten einer und derselben Ordnung offenbar ungeändert bleibt, wenn die beiden Formen simultan durch eine „elementare“ Substitution transformirt werden*). Endlich existiren, wenn die sämmtlichen $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten von $uf + vf'$, aber nicht die μ^{ten}, identisch verschwinden, genau je μ von einander unabhängige lineare Relationen zwischen den nach den verschiedenen Variabeln der einen oder der andern Reihe genommenen partiellen Ableitungen von $uf + vf'$, deren Coëfficienten ganze homogene Functionen von u und v sind. Diese linearen Relationen können so ausgewählt oder durch Combination mit einander so umgewandelt werden, dass die Dimensionen derselben in Beziehung auf u und v möglichst klein sind, und man erhält alsdann ein System von je μ Gleichungen

$$\sum_{h,k} (-1)^k \theta_k^{(r)} u^h v^k = 0 \qquad (h + k = m^{(r)}, \; r = 0, 1, \ldots \mu - 1),$$

in denen die Grössen $\theta_k^{(r)}$ lineare homogene Functionen der nach den Variabeln einer Reihe genommenen Ableitungen von $uf + vf'$ und in *dem* Sinne von einander unabhängig sind, dass zwischen ihnen keine lineare Relation mit constanten, d. h. u, v nicht enthaltenden, Coëfficienten besteht**). Die Zahlen

$$m^0, \; m', \; m'' \; \ldots \; m^{(\mu-1)},$$

welche die Dimensionen der μ verschiedenen Gleichungen angeben, und deren jede, um eine Einheit vermehrt, zugleich die Anzahl der in der bezüglichen Gleichung vorkommenden, von einander unabhängigen linearen Functionen der Ableitungen von $uf + vf'$ ausdrückt, bleiben natürlich bei irgend welcher simultanen Transformation der Formen f und f' ungeändert und repräsentiren daher, im Falle die Determinante von $uf + vf'$ identisch verschwindet, eine Reihe von Invarianten für alle unter einander äquivalenten Systeme von Formen (f, f'). — Es giebt hiernach zweierlei Invarianten von Systemen (f, f'), nämlich erstens jene μ Zahlen m, und zweitens eine Reihe ganzer homogener, symmetrischer Functionen von u und v

*) Cf. Monatsbericht vom März d. J. pag. 210; [p. 389 dieser Ausgabe].
**) Cf. Monatsbericht vom Februar d. J. pag. 154; [p. 378 dieser Ausgabe].

$$P_s(u, v) \qquad (s=\mu, \mu+1, \dots n-1),$$

welche dadurch definirt sind, dass P_s den grössten gemeinsamen Theiler der sämmtlichen aus den n^2 Elementen

$$u\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_k} + v\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial y_i} \qquad (i, k=1, 2, \dots n)$$

zu bildenden Determinanten $(n-s)^{\text{ter}}$ Ordnung repräsentirt. Die Functionen P sind auf diese Weise bis auf einen constanten Factor völlig bestimmt, und dieser kann irgendwie, z. B. so fixirt werden, dass die Coëfficienten derjenigen beiden Glieder, in denen u und v zur höchsten Potenz erhoben vorkommen, gleich Eins sind. Versteht man unter f^0 eine bilineare Function der $2n$ Grössen x, y mit *unbestimmten* (oder variabeln) Coëfficienten, so sind die Functionen P auch dadurch zu charakterisiren, dass der Coëfficient von w^s in der Entwickelung der Determinante von

$$uf + vf' + wf^0$$

die Function P_s, aber ausserdem keine Function von u und v als Factor enthält, deren Coëfficienten von denen der Function f^0 unabhängig wären, und es tritt hierbei in Evidenz, dass die Functionen P bei irgend welcher simultanen Transformation von f und f' unverändert bleiben. Da die $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten von $uf + vf'$ als verschwindend vorausgesetzt sind, so fängt die Entwickelung der Determinante von $uf + vf' + wf^0$ nach steigenden Potenzen von w erst mit w^μ an, und die Coëfficienten von w^r, für $r < \mu$, sind sämmtlich gleich Null. Für den Fall $\mu = 0$ fehlen die Invarianten der ersten Art, nämlich die Zahlen m, aber die Gesammtzahl der Invarianten beider Arten

$$m^{(r)},\ P_s \qquad (r=0, 1, \dots \mu-1;\ s=\mu, \mu+1, \dots n-1)$$

ist stets gleich n, d. h. gleich der Anzahl der Variabelnpaare der bilinearen Formen f und f'.

Bedeutet D_s irgend eine der Determinanten $(n-s)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus den n^2 Coëfficienten der bilinearen Form $uf + vf'$ gebildet werden können,

so zeigt die Entwickelung von D_s nach den Elementen einer Horizontal- oder Verticalreihe, dass der grösste gemeinsame Theiler der Determinanten D_{s+1} darin als Factor enthalten sein muss, dass also die durch die Gleichungen

$$P_s = Q_s P_{s+1} \qquad (s=\mu, \mu+1, \dots n-1)$$

definirten Functionen Q ganze homogene symmetrische Functionen von u und v sind. Ferner ergiebt sich aus der bekannten, für ein beliebiges Elementensystem $\mathfrak{a}_{ik}$ giltigen Determinantenformel

$$|\mathfrak{a}_{ik}| \cdot \frac{\partial^2 |\mathfrak{a}_{ik}|}{\partial \mathfrak{a}_{11} \partial \mathfrak{a}_{22}} = \frac{\partial |\mathfrak{a}_{ik}|}{\partial \mathfrak{a}_{11}} \cdot \frac{\partial |\mathfrak{a}_{ik}|}{\partial \mathfrak{a}_{22}} - \frac{\partial |\mathfrak{a}_{ik}|}{\partial \mathfrak{a}_{12}} \cdot \frac{\partial |\mathfrak{a}_{ik}|}{\partial \mathfrak{a}_{21}},$$

dass D_s, multiplicirt mit einer Determinante D_{s+2}, durch das Quadrat von P_{s+1} theilbar ist. Denkt man sich nun die Form f unter den Formen derselben Classe so ausgewählt, dass keine der mit D_s bezeichneten Determinanten, dividirt durch P_s, irgend einen Theiler mit P_μ gemein hat*), so folgt, dass

$$\frac{P_s P_{s+2}}{P_{s+1} P_{s+1}}, \quad \text{oder, was dasselbe ist,} \quad \frac{Q_s}{Q_{s+1}}$$

eine ganze Function von u und v sein muss. Es sind daher

$$Q_\mu,\ Q_{\mu+1},\ \dots\ Q_{n-1},$$

genau ebenso wie die mit P bezeichneten Functionen, aus denen sie hergeleitet wurden, $n-\mu$ ganze homogene symmetrische Functionen von u und v, deren jede durch die folgende theilbar ist, und welche die Functionen P auch als Invarianten des Systems (f, f') zu ersetzen durchaus geeignet sind.

---

*) Bei Anwendung einer allgemeinen, für beide Reihen von Variabeln congruenten Transformation mit unbestimmten Substitutionscoëfficienten gelangt man von irgend einer gegebenen bilinearen Form zu einer äquivalenten, welche die geforderten Eigenschaften besitzt, und hieraus folgt die Möglichkeit der oben vorausgesetzten Auswahl.

Jede der Functionen Q_s kann durch ihre Linearfactoren charakterisirt werden; man braucht also zur völligen Bestimmung der Invarianten Q erstens die unter einander verschiedenen Werthverhältnisse von $u:v$, welche überhaupt vorkommen — und diese kommen sämmtlich schon bei der ersten Function Q_μ vor — sowie zweitens die Zahlen $n_h^{(\varkappa)}$, welche angeben, wie viel mal der Linearfactor $uv^{(\varkappa)} - vu^{(\varkappa)}$ in Q_{n-h} enthalten ist. Setzt man noch

$$n - \mu = \nu, \quad n_k^0 = 2m^{(n-k)} + 1, \quad n_h^0 = 0 \qquad (1 \leqq h \leqq \nu < k \leqq n),$$

so hat man in den verschiedenen Werthverhältnissen

$$u:v = u':v', \; u'':v'', \; u''':v''', \ldots,$$

wofür die sämmtlichen aus den Coëfficienten von $uf + vf'$ zu bildenden Determinanten je einer und derselben Ordnung verschwinden, und in den ganzen Zahlen

$$n_k^0, \; n_h^0, \; n_h', \; n_h'', \; n_h''', \ldots \qquad (1 \leqq h \leqq \nu < k \leqq n),$$

die alle positiv oder gleich Null sind, zwei Reihen von Invarianten des Formensystems (f, f'), welche die obigen Invarianten m und P vollständig ersetzen.

Da die Functionen Q symmetrisch sind, so gehört zu jedem Werthverhältnisse $u:v = u':v'$ ein zweites $u:v = v':u'$, es sei denn, dass $u' = \pm v'$ also

$$-u:v = 1:+1 \quad \text{oder} \quad -u:v = 1:-1$$

ist, und diese beiden besonderen Werthverhältnisse können nebst zwei Reihen von zugehörigen Zahlen

$$n_h^{(+)}, \quad n_h^{(-)} \qquad (h=1, 2, \ldots \nu)$$

stets unter die Invarianten mit aufgenommen werden, da — falls $Q^{(\mu)}$ den

Factor $u + v$ oder $u - v$ nicht enthält — die Zahlen $n^{(+)}$ oder $n^{(-)}$ sämmtlich gleich Null zu setzen sind.

Die Summe der sämmtlichen Zahlen $n^{(\varkappa)}$ ist, wie sich im vierten Abschnitte zeigen wird, stets gleich n, und es ist ausdrücklich hervorzuheben, dass man nicht nöthig hat, die Zahlen $n_h^{(\varkappa)}$ für jeden Werth von h gesondert anzugeben, da sich der untere Index h, welcher jeder einzelnen Zahl $n^{(\varkappa)}$ zukommt, durch deren Grösse von selber bestimmt. Daraus, dass Q_{n-h-1} durch Q_{n-h} theilbar ist, folgt nämlich für jeden von Null verschiedenen Index $\varkappa$ die Ungleichheit

$$n_h^{(\varkappa)} \leqq n_{h+1}^{(\varkappa)} \qquad (h=1, 2, \ldots \nu-1),$$

und man braucht also nur die ν Zahlen $n^{(\varkappa)}$ ihrer Grösse nach zu ordnen, und alsdann der kleinsten den oberen Index 1, der nächstfolgenden ebenso grossen oder grösseren Zahl $n^{(\varkappa)}$ den oberen Index 2 u. s. f., endlich der letzten und grössten Zahl $n^{(\varkappa)}$ den oberen Index ν zuzutheilen.

Den vorstehenden Ausführungen gemäss lässt sich das ganze Schema der Invarianten des Formensystems (f, f') folgendermassen darstellen:

$$\text{(J)} \qquad \begin{array}{r|l}
-u:v = & \\
\hline
0:0 & 0 \;\;, 0 \;\;, \ldots 0 \;\;, n_{\nu+1}^0, \ldots n_n^0 \\
1:1 & n_1^{(+)}, n_2^{(+)}, \ldots n_\nu^{(+)} \\
-1:1 & n_1^{(-)}, n_2^{(-)}, \ldots n_\nu^{(-)} \\
1:w', \; w':1 & n_1', \; n_2', \; \ldots n_\nu' \\
1:w'', \; w'':1 & n_1'', \; n_2'', \; \ldots n_\nu'' \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}$$

und dabei ergiebt sich die Bedeutung der ersten Horizontalreihe aus der obigen Definition der Zahlen n^0, während die Bedeutung der folgenden Zeilen darin besteht, dass der (mit P_{n-h} bezeichnete) grösste gemeinsame Theiler der sämmtlichen aus den Coëfficienten von $uf+vf'$ zu bildenden Determinanten h^{ter} Ordnung gleich dem Producte

$$(u+v)^{e^{(+)}}(u-v)^{e^{(-)}}(u^2+t'uv+v^2)^{e'}(u^2+t''uv+v^2)^{e''}\cdots$$

wird, in welchem zur Abkürzung für jeden oberen Index ($\varkappa$)

$$t^{(\varkappa)}=w^{(\varkappa)}+\frac{1}{w^{(\varkappa)}} \quad \text{und} \quad e^{(\varkappa)}=n_1^{(\varkappa)}+n_2^{(\varkappa)}+\cdots+n_h^{(\varkappa)}$$

gesetzt ist. Die Reihenfolge der Zahlen n^0 ist an sich beliebig; sie mögen aber ebenfalls so geordnet werden, dass $n_k^0 \leqq n_{k+1}^0$ wird. An die leeren Stellen im Schema (J) gehören, so zu sagen, unbestimmte Grössen hin, da die Determinanten von höherer als der ν^{ten} Ordnung gleich Null sind und also die Zahlen, welche mit

$$n_k^{(+)},\quad n_k^{(-)},\quad n_k',\quad n_k'',\quad \ldots \qquad (k=\nu+1,\ldots n)$$

zu bezeichnen sein würden, durchaus unbestimmt bleiben. Dass die in der ersten Horizontalreihe stehenden Zahlen n^0 gewissermassen einem unbestimmten Verhältnisse $u:v$ entsprechen*), ist an der betreffenden Stelle der ersten Rubrik durch $0:0$ angedeutet worden.

III. Nach Inhalt des Art. I ist jede Invariante eines Formensystems (f, f') zugleich eine Invariante von f in dem Sinne, dass sie für alle Formen, welche durch congruente Substitutionen aus f hervorgehen, d. h. also für alle mit f äquivalenten Formen identisch ist. Das Invariantensystem (J) kann demgemäss auch als der Form f selbst resp. der durch f repräsentirten Formenclasse angehörig betrachtet werden, und zwar ist — wie nunmehr gezeigt werden soll — das System (J) ein *vollständiges*, d. h.

*) Die hier dargelegte Anschauung rechtfertigt sich in mannigfaltiger Weise, u. A. dadurch, dass gewisse Covarianten von der Art, wie sie sich am Schlusse meiner Mittheilung vom 16. Februar angegeben finden, zu einer Anzahl beliebiger Werthverhältnisse $u:v$ führen. [S. p. 381 dieser Ausgabe.]

ein solches, welches der bezüglichen Classe ausschliesslich zukommt und dieselbe also vollständig charakterisirt. Der zu führende Nachweis stützt sich wesentlich auf die im § 2 entwickelte Reduction der bilinearen Formen mittels congruenter Transformation; denn es braucht hiernach nur gezeigt zu werden, dass zu verschiedenen Reducirten auch verschiedene Invariantensysteme (J) gehören. Diess tritt aber deutlich hervor, wenn das zu einer Reducirten gehörige Invariantensystem aus denen der einzelnen, im § 2 Art. VII mit ($\mathfrak{E}$) bezeichneten Theilformen gebildet wird, wobei die Bildungsweise auf einer Fundamentaleigenschaft der Invariantensysteme (J) beruht, welche zuvörderst dargelegt werden soll.

Sind f und $\mathfrak{f}$ irgend zwei bilineare Formen, die keine Variabeln mit einander gemein haben, und gehören zu $\mathfrak{f}$

die Grössen $\mathfrak{w}^{(\varkappa)}$ und die Zahlen $\mathfrak{n}^{(\varkappa)}$

ebenso wie zu f

die Grössen $w^{(\varkappa)}$ und die Zahlen $n^{(\varkappa)}$,

so folgt aus der Bedeutung derselben, dass sich für das Aggregat der zwei Formen

$$\mathfrak{f}+f$$

sowohl die Grössen $\mathfrak{w}^{(\varkappa)}$ und $w^{(\varkappa)}$ als auch die Zahlen $\mathfrak{n}^{(\varkappa)}$ und $n^{(\varkappa)}$ zu einander aggregiren, d. h. das zu $\mathfrak{f}+f$ gehörige Invariantensystem (J) ist nichts Anderes als das Aggregat der beiden Invariantensysteme, welche den durch $\mathfrak{f}$ und f repräsentirten Formenclassen angehören. Um dieses Aggregat bilden zu können, sind die zu $\mathfrak{f}$ und f gehörigen Schemata so zu vervollständigen, dass die erste Rubrik in beiden genau dieselben Werthverhältnisse enthält, und diess kann ohne Weiteres geschehen, wenn nur bei jedem Werthverhältnisse, welches unter den Invarianten der einen Form $\mathfrak{f}$ oder f eigentlich nicht vorkommt, die zugehörigen Zahlen $\mathfrak{n}$ oder n gleich Null genommen werden. In dem zu $\mathfrak{f}+f$ gehörigen Schema ist dann die erste Rubrik ebenfalls mit jener übereinstimmend anzunehmen, und jede der Horizontalreihen ist darin mit den sämmtlichen Zahlen $\mathfrak{n}$ und n auszufüllen, welche die bezüglichen beiden Horizontalreihen der einzelnen zu $\mathfrak{f}$ und f gehörigen Schemata enthalten. Das zu $\mathfrak{f} + f$ gehörige Invariantensystem ist hiermit vollständig gegeben, denn die Stelle, welche jeder einzelnen Zahl $\mathfrak{n}$ oder n darin anzuweisen ist, bestimmt sich, wie im Art. II hervorgehoben worden, durch ihre Grösse von selbst.

Es sind nunmehr unter den Invarianten der durch f repräsentirten Classe diejenigen Zahlen n^0 herauszuheben, deren Werth gleich Eins ist; denn die Anzahl derselben giebt zugleich an, wie viel von den n Variabelnpaaren durch congruente Transformation weggeschafft werden können. Vermöge der Bedeutung der Zahlen n^0 existiren nämlich, wenn genau λ derselben gleich Eins sind, auch λ von einander unabhängige lineare Relationen zwischen den nach den Variabeln der einen Reihe genommenen Ableitungen, und dieselben Relationen bleiben bestehen, wenn man darin jede der Ableitungen durch die nach der correspondirenden Variabeln ersetzt. Es finden also λ Gleichungen statt

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_g c_{gk} \frac{\partial f}{\partial x_g}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_k} = \sum_g c_{gk} \frac{\partial f}{\partial y_g},$$

in denen dem Index k gewisse λ von den Werthen $1, 2, \ldots n$, dem Index g aber die übrigen $n - \lambda$ Werthe beizulegen sind, und die Form f geht mittels der Substitution

$$x_g = x'_g - \sum_k c_{gk} x_k, \qquad y_g = y'_g - \sum_k c_{gk} y_k$$

in eine Form von nur $n - \lambda$ Variabelnpaaren x'_g, y'_g über. Da nun andrerseits eine mit f äquivalente Form, welche nur $n - \lambda$ Variabelnpaare x', y' enthält, als eine solche von n Variabelnpaaren angesehen werden kann, für welche λ partielle Ableitungen nach Variabeln x' und ebensoviele nach correspondirenden Variabeln y' gleich Null sind, so ist in der That das Vorhandensein von λ Werthen $n^0 = 1$ die nothwendige und ausreichende Bedingung für die Reduction der n Variabelnpaare auf genau $n - \lambda$. Diess lässt sich mit Rücksicht auf den Inhalt des I. Abschnittes von § 2 auch

folgendermassen formuliren: Wenn genau λ Werthe $n^0 = 1$ unter den Invarianten einer Classe vorkommen, so ist jede darin enthaltene bilineare Form, deren Discriminante von Null verschieden ist, eine Function von $n - \lambda$ Variabelnpaaren.

Versteht man unter der Form f selbst die Reducirte der bezüglichen Classe, so ist dieselbe — wenn für die Zahl λ die obige Bedeutung beibehalten wird — ein Aggregat von Formen $\mathfrak{E}$, in welchem die Gesammtanzahl der Variabelnpaare gleich $n - \lambda$ ist, und das Invariantensystem für die durch f repräsentirte Classe bilinearer Formen von n Variabelnpaaren setzt sich aus den Invarianten der einzelnen Formen $\mathfrak{E}$ und aus λ Zahlen $n^0 = 1$ zusammen. Für die verschiedenen Arten von Formen $\mathfrak{E}$, welche im § 2 Art. VII aufgeführt sind, können nun die zugehörigen Invariantensysteme folgendermassen dargestellt werden:

I	$(\mathfrak{E}^0)$	$\sum\limits_{k=0}^{k=2m-1} x_k y_{k+1}$;	$n^0 = 2m+1, 0, 0, \ldots$
II	$(\mathfrak{E})$	$\sum\limits_{k=0}^{k=2m-2} (x_k y_{k+1} + c y_k x_{k+1})$;	$n' = m, 0, 0, \ldots$ $w' = c$
III	$(\bar{\mathfrak{E}}_0)$	$\sum\limits_{k=0}^{k=4m-2} \left(x_k y_{k+1} + (-1)^k y_k x_{k+1}\right)$;	$n^{(+)} = 2m, 2m, 0, 0, \ldots$
IV	$(\bar{\mathfrak{E}}_0)$	$\sum\limits_{k=0}^{k=4m} \left(x_k y_{k+1} - (-1)^k y_k x_{k+1}\right)$;	$n^{(-)} = 2m+1, 2m+1, 0, 0, \ldots$
V	$(\bar{\mathfrak{E}}^0)$	$x_0 y_0 + \sum\limits_{k=1}^{k=2m} \left(x_k y_{k-1} + (-1)^k y_k x_{k-1}\right)$;	$n^{(+)} = 2m+1, 0, 0, \ldots$
VI	$(\bar{\mathfrak{E}}^0)$	$x_0 y_0 + \sum\limits_{k=1}^{k=2m-1} \left(x_k y_{k-1} + (-1)^k y_k x_{k-1}\right)$;	$n^{(-)} = 2m, 0, 0, \ldots$.

Sowohl alle diese sechs Arten von Invariantensystemen als auch die einzelnen Invariantensysteme derselben Art, welche den verschiedenen Werthen von m und resp. c entsprechen, sind unter einander verschieden: auch kann offenbar keines dieser Invariantensysteme aus mehreren derselben zusammengesetzt werden, und es tritt hiermit in Evidenz, dass jedes der obigen

60*

Invariantensysteme von Formen $\mathfrak{E}$ ausschliesslich der betreffenden Formenclasse angehört. Hieraus folgt erstens, dass auch den verschiedenen Reducirten überhaupt, da dieselben nur Aggregate von Formen $\mathfrak{E}$ sind, verschiedene Aggregate jener Invariantensysteme entsprechen, dass also in der That, wie im Eingange dieses Abschnittes behauptet worden ist, *jedes Invariantensystem* (J) *die betreffende Classe bilinearer Formen vollständig charakterisirt*, und zweitens zeigt es sich, dass die Formen $\mathfrak{E}$ nicht weiter zerlegbar sind, d. h. dass keine derselben mittels congruenter Substitutionen in ein Aggregat zweier Formen transformirt werden kann, von denen jede nur Variabelnpaare enthält, die in der andern nicht vorkommen. Diese Eigenschaft der Unzerlegbarkeit gehört natürlich nicht bloss den Formen $\mathfrak{E}$ selber, sondern auch allen äquivalenten Formen an, und es sollen deshalb diese Formen, sowie die einzelnen Classen, in denen sie zusammengefasst sind, als *„elementare"* bezeichnet werden.

IV. Da die Summe der Invarianten n für jede elementare Classe gleich der Anzahl der Variabelnpaare ist, so findet dasselbe auch für jedes beliebige Aggregat elementarer Classen statt, und es erweist sich daher, wenn noch die Zahlen $n^0 = 1$ hinzugenommen werden, jene Eigenschaft der Invarianten als eine ganz allgemeine, d. h. die zu bilinearen Formen von n Variabelnpaaren gehörigen Invarianten $n^{(x)}$ sind stets zusammen gleich n, vorausgesetzt, dass die je zweien Verhältnissen $1 : w^{(x)}$, $w^{(x)} : 1$ entsprechenden Zahlen $n^{(x)}$ auch zweifach gezählt werden*). — Als fernere Eigenschaften der Invarianten $n^{(x)}$ sind folgende hervorzuheben:

1) Die Zahlen n^0 sind stets ungrade oder gleich Null, wie auch aus der ursprünglichen Definition derselben hervorgeht.

2) Unter den Zahlen $n^{(+)}$ kommen sowohl grade als ungrade, aber die *ersteren* stets zweifach vor.

3) Unter den Zahlen $n^{(-)}$ kommen ebenfalls sowohl grade als ungrade, aber die *letzteren* stets zweifach vor.

Setzt man wie im § 2 Art. II

---

*) Es ist dies bereits auf pag. 470 erwähnt worden.

$$f = \varphi + \psi, \qquad f' = \varphi - \psi$$

und ferner $p = u + v$, $q = u - v$, so dass

$$uf + vf' = p\varphi + q\psi$$

wird, so ist φ eine symmetrische und ψ eine alternirende bilineare Form von n Variabelnpaaren, also

$$\varphi = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \qquad \psi = \sum_{i,k} b_{ik} x_i y_k$$

und $(i, k = 1, 2, \ldots n)$

$$a_{ik} - a_{ki} = 0, \qquad b_{ik} + b_{ki} = 0.$$

Da nun die Zahlen $n_h^{(+)}$, $n_h^{(-)}$ angeben, um wie viel öfter der Factor p und resp. der Factor q in allen Unterdeterminanten h^{ter} Ordnung von

$$pa_{ik} + qb_{ik}$$

enthalten ist, als in denen der nächst niedrigeren Ordnung, so folgt aus jener Eigenschaft der Zahlen $n^{(+)}$ und $n^{(-)}$, dass beim stufenweisen Aufsteigen von Unterdeterminanten niedrigerer Ordnung zu denen höherer der Exponent der darin enthaltenen Potenz von p stets zweimal hinter einander um eine und dieselbe Zahl wächst, sobald sie *grade* ist, der Exponent von q dagegen, wenn es eine *ungrade* Zahl ist. Diess lässt sich bei geeigneter simultaner Transformation von φ und ψ auch direct begründen, und zwar muss die Transformation eine congruente und zugleich so beschaffen sein, dass entweder

$$\varphi = x_1' y_1' + x_2' y_2' + \cdots \quad \text{oder} \quad \psi = (x_1' y_2' - x_2' y_1') + (x_3' y_4' - x_4' y_3') + \cdots$$

wird.

V. Zu jeder bilinearen Form f gehört eine Schaar mit conjugirten Grundformen $uf + vf'$, und die elementaren Schaaren, in welche sich dieselbe zerlegen lässt, hängen auf das Genaueste mit den elementaren Formen zusammen, als deren Aggregat die bilineare Form f selbst dargestellt werden kann. Es sind nämlich die Schaaren, welche zu den im § 2 Art. VII aufgestellten und oben pag. 475 wiederaufgeführten elementaren Formen $\mathfrak{E}^0$ gehören, an sich elementare Schaaren, während diejenigen, welche den ersten mit $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{E}$, $\overline{\mathfrak{E}}_0$ bezeichneten Arten von elementaren Formen entsprechen, in je zwei elementare Schaaren zu zerlegen sind. Denn wenn man die Form $\mathfrak{E}^0$ mit u, die conjugirte mit v multiplicirt und beide zu einander addirt, so erhält man die Summe der beiden Ausdrücke

$$\begin{matrix} u\sum\limits_h x_{2h}y_{2h+1} + v\sum\limits_h y_{2h+1}x_{2h+2} \\ u\sum\limits_h y'_{2h}x'_{2h+1} + v\sum\limits_h x'_{2h+1}y'_{2h+2} \end{matrix} \qquad \left(\begin{matrix} 0 \leq h < m, \text{ und für jeden Index } k \\ x'_k = x_{2m-k}, \; y'_k = y_{2m-k} \end{matrix}\right),$$

welche mit einander conjugirte Schaaren repräsentiren. Ebenso ist

$$\text{sowohl} \quad u\mathfrak{E} + v\mathfrak{E}' \quad \text{als auch} \quad \pm(u\overline{\mathfrak{E}}_0 + v\overline{\mathfrak{E}}'_0)$$

gleich der Summe der beiden Ausdrücke

$$\begin{matrix} u^0\sum\limits_{h=0}^{h=m-1} y_{2h}x_{2h+1} + v^0\sum\limits_{h=1}^{h=m-1} y_{2h}x_{2h-1} \\ u'\sum\limits_{h=0}^{h=m-1} y'_{2h}x'_{2h+1} + v'\sum\limits_{h=1}^{h=m-1} y'_{2h}x'_{2h-1} \end{matrix} \qquad \left(\begin{matrix} \text{für jeden Werth des Index } k \text{ ist} \\ x'_k = x_{2m-k-1}, \; y'_k = y_{2m-k-1} \end{matrix}\right),$$

welche äquivalente Schaaren repräsentiren, und es ist hierbei für die Formen $\mathfrak{E}$

$$u' = v^0 = u + cv; \qquad u^0 = v' = cu + v,$$

für die Formen $\overline{\mathfrak{E}}_0$ aber $(-1)^m = \varepsilon$ und

$$u^0 = \varepsilon u' = u + \varepsilon v, \qquad \varepsilon v^0 = -v' = u - \varepsilon v$$

zu setzen.

Die Invarianten einer Schaar mit conjugirten Grundformen $uf + vf'$ ergeben sich unmittelbar aus denen des Systems (f, f'); denn dem Begriffe

der Schaar gemäss hat man dabei nur noch von der Unterscheidung zweier Systeme conjugirter Formen

$$(f, f'), \quad (af + bf', \; af' + bf)$$

zu abstrahiren, wenn a und b irgendwelche Constanten bedeuten. Es treten deshalb in dem Schema (J) an die Stelle der Invarianten $w^{(h)}$ selbst die Ausdrücke

$$\frac{w' - w''}{1 - w'w''}, \qquad \frac{w' - w'''}{1 - w'w'''}, \quad \ldots,$$

während die Zahlen n Invarianten bleiben.

Sind zwei Formen f und $\mathfrak{f}$ einander äquivalent, so sind die beiden Systeme conjugirter Formen (f, f') und $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$, also auch die beiden Schaaren

$$uf + vf', \qquad u\mathfrak{f} + v\mathfrak{f}'$$

einander äquivalent. Andrerseits kann nunmehr auch aus der Aequivalenz der beiden Systeme (f, f') und $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ auf die der Formen f und $\mathfrak{f}$ geschlossen werden, da aus jener Aequivalenz die Identität der beiden zu f und $\mathfrak{f}$ gehörigen Invariantensysteme folgt, welche sich im Art. III als vollkommen charakteristisch für die einzelnen Formenclassen erwiesen haben. Da nun die Aequivalenz der Systeme zweier Formen nur die Möglichkeit *irgend einer* simultanen Transformation der beiden Paare erfordert, während die Bedeutung der Aequivalenz für zwei Formen f, $\mathfrak{f}$ selbst auf ihrer Transformirbarkeit mittels *congruenter* Substitutionen beruht, so folgt — wie in der Einleitung angekündigt worden —, dass zwei Paare *conjugirter* Formen, falls eine simultane Transformation derselben überhaupt möglich ist, stets durch eine solche Substitution in einander übergeführt werden können, welche für die beiden Reihen correspondirender Variabeln identisch ist.

VI. Bei der bisher gebräuchlichen Auffassung von Invarianten homogener Formen möchte das oben aufgestellte, mit (J) bezeichnete Invariantensystem als eines von ganz singulärem Charakter erscheinen, da es keinerlei literale Bildungen enthält. Doch sind die sämmtlichen in dem Schema (J) vorkommenden Grössen und Zahlen w und $n^{(\varkappa)}$ im eigentlichen Sinne des Wortes Invarianten der bilinearen Form f; denn sie sind in bestimmter Weise aus den Coëfficienten von f abgeleitet und also genau definirte „Functionen" derselben, welche für alle unter einander äquivalenten Formen f, in ihrer Gesammtheit aber auch *nur* für diese, vollkommen identisch sind. Es giebt also gewisse (in dem Schema (J) mit w und $n^{(\varkappa)}$ bezeichnete) Functionen irgend welcher n^2 Elemente

$$a_{ik} \qquad (i,k=1,2,\ldots n),$$

welche die Eigenschaft haben, unverändert zu bleiben, wenn man eben diese Elemente a_{ik} durch n^2 Grössen $\mathfrak{a}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}$ ersetzt, die durch die Gleichungen

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} c_{i\mathfrak{i}} c_{k\mathfrak{k}} \qquad (\mathfrak{i},\mathfrak{k}=1,2,\ldots n)$$

mit den Grössen a_{ik} verbunden sind; und zwar ist die Uebereinstimmung der aus den Grössen a_{ik} hergeleiteten Functionen w und $n^{(\varkappa)}$ mit denjenigen, welche aus den Grössen $\mathfrak{a}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}$ hervorgehen, zugleich die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Relationen

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} c_{i\mathfrak{i}} c_{k\mathfrak{k}} \qquad (\mathfrak{i},\mathfrak{k}=1,2,\ldots n),$$

welche die Aequivalenz der Formen

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \qquad \sum_{i,k} \mathfrak{a}_{ik} \mathfrak{x}_i \mathfrak{y}_k \qquad (i,k=1,2,\ldots n),$$

wie dieselbe oben definirt worden, und damit eine Aequivalenz der Grössensysteme a_{ik}, $\mathfrak{a}_{ik}$ selber begründen. Für diesen wichtigen Uebergang von der Aequivalenz zur Identität d. h. für die vollständige Erkenntniss des Bleibenden in der Mannigfaltigkeit des Gleichartigen reichte der Begriff der literalen Invarianten nicht aus, sondern es bedurfte noch gewisser functionaler Bildungen, die sich auf den Begriff des grössten gemeinsamen Theilers stützen. Aber diess ist keineswegs, wie es den Anschein haben könnte, eine besondere Eigenthümlichkeit der hier behandelten speciellen Frage, sondern es zeigt

sich darin grade der ganz allgemeine, jedoch bisher kaum beachtete Charakter von Invarianten bei algebraischen Aequivalenzbedingungen. Dieser Charakter tritt nur bei der Theorie der bilinearen Formen in ein besonders helles Licht, und eben weil hiermit das Interesse derselben weit über ihren speciellen Gegenstand hinausreicht, bin ich in der vorliegenden Arbeit so ausführlich darauf eingegangen. Ist die Einsicht in die allgemeine Natur der Invarianten an dem Paradigma der bilinearen Formen einmal gewonnen, so findet man sie schon bei den allereinfachsten Problemen leicht wieder und erkennt dabei die Lücken der bisherigen Behandlung derselben. Lässt man z. B. zwei bilineare Formen als äquivalent gelten, wenn sie durch irgend welche (auch nicht congruente) Substitutionen in einander transformirt werden können, deren Determinanten von Null verschieden sind, so ist der grösste gemeinsame Theiler von w^n und

$$|v a_{ik} + w z_{ik}| \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

oder auch der Grad, welchen diese Determinante als ganze Function von v hat, die einzige Invariante, da dieser Grad zugleich die höchste Ordnung derjenigen aus den Coëfficienten der bilinearen Form

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

zu bildenden Unterdeterminanten angiebt, welche nicht sämmtlich verschwinden. Wenn ferner die Invarianten eines Systems von n linearen Functionen von je n Variabeln

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_k \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

im gewöhnlichen Sinne des Wortes aufgefasst und demgemäss als Functionen der Coëfficienten a_{ik} definirt werden, welche bei jeder linearen Transformation mit der Substitutionsdeterminante Eins ungeändert bleiben, so ist bekanntlich die Determinante $|a_{ik}|$ die einzige literale Invariante; aber es giebt ausserdem noch $n-1$ Invarianten, welche als grösste gemeinsame Theiler zu erklären sind. Bedeuten nämlich

$$D_{m1}, \; D_{m2}, \; D_{m3} \; \ldots$$

die verschiedenen Determinanten, welche aus den mn Elementen a_{ik} der ersten m Verticalreihen gebildet werden können, ferner

$$D'_{m1},\ D'_{m2},\ D'_{m3},\ \dots$$

die entsprechenden Determinanten m^{ter} Ordnung für irgend welche andre m Verticalreihen u. s. f., so ist der grösste gemeinsame Theiler der sämmtlichen Ausdrücke

$$\begin{array}{c} D_{m1}z_1 + D_{m2}z_2 + D_{m3}z_3 + \cdots \\ D'_{m1}z_1 + D'_{m2}z_2 + D'_{m3}z_3 + \cdots \\ D''_{m1}z_1 + D''_{m2}z_2 + D''_{m3}z_3 + \cdots \\ \vdots \end{array}$$

eine Invariante jenes Systems von linearen Functionen

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{1k}x_k,\qquad \sum_{k=1}^{k=n} a_{2k}x_k,\qquad \dots \sum_{k=1}^{k=n} a_{nk}x_k.$$

Es resultiren auf diese Weise für die $n-1$ Werthe $m=1, 2, \dots n-1$ ebensoviel Invarianten, die zusammen mit der Determinante $|a_{ik}|$ ein vollständiges System von Invarianten bilden; denn die Uebereinstimmung der bezüglichen zu zwei Formen-Systemen

$$\sum_k a_{ik}x_k,\qquad \sum_k a'_{ik}x'_k \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

gehörigen Invarianten ist nothwendig und hinreichend, damit dieselben durch eine Substitution mit der Determinante Eins in einander transformirt werden können.

Ich will schliesslich noch ein Beispiel aus einem höheren algebraischen Gebiete anführen und zwar grade dasjenige, durch welches ich zuerst, schon vor einer Reihe von Jahren, darauf geführt worden bin, bei der Definition von Invarianten den Begriff des grössten gemeinsamen Theilers zu Hilfe zu nehmen.

Sind $f_0, f_1, \dots f_n$ ganze Functionen einer Variabeln x, so wird durch die Gleichung

$$f_0 + f_1 y + f_2 y^2 + \cdots + f_n y^n = 0,$$

falls sie irreductibel ist, die Grösse y als eine algebraische Function n^{ter} Ordnung von x definirt. Betrachtet man nun jede andre algebraische Function y', welche von derselben Ordnung und durch y und x rational ausdrückbar ist, als zu derselben „Gattung"*) algebraischer Functionen gehörig, so giebt es offenbar keine literalen Invarianten für die verschiedenen algebraischen Functionen einer Gattung. Aber eine nähere Untersuchung der Discriminanten der verschiedenen Gleichungen n^{ten} Grades, denen die Grössen $y, y', y'', \dots$ genügen, führt zu einer ganzen Function von x, welche in allen als Factor enthalten ist. Jede Discriminante wird hiermit in einen „wesentlichen" und einen „ausserwesentlichen" Factor geschieden, und der erstere kann als der grösste gemeinsame Theiler der Discriminanten aller zu einer Gattung gehörigen algebraischen Functionen definirt und desshalb auch füglich als „Discriminante der Gattung" bezeichnet werden. Es ist diess also eine ganze Function von x, die aus den Functionen $f_0, f_1, \dots f_n$ d. h. aus den Coëfficienten jener Gleichung herzuleiten ist, und welche, da sie bei jedem Uebergange von y zu $y', y'', \dots$ ungeändert bleibt, sich als eigentliche Invariante für rationale Transformationen erweist.

---

*) Ich glaube den in früheren Aufsätzen gebrauchten Ausdruck „Classe" durch „Gattung" ersetzen zu müssen.

Druckfehlerverzeichniss zum ersten Bande.

S. 57 Z. 11 v. o. statt „$r^{\frac{\chi(s}{p^{\alpha}}}$“ lies „$r^{\frac{\chi(s)}{p^{\alpha}}}$“.

S. 92 Z. 2 v. u. statt „$x^n - 1$“ lies „$x^n - 1 = 0$“.

(Verbesserung gegen das Original.)

S. 99 Z. 2 v. o. und S. 101 Z. 2 v. o. statt „ou“ lies „où“.

S. 145 Z. 3 v. u. statt „Formen“ lies „Functionen“.

S. 184 Z. 3 v. u. statt „Charakteristik“ lies „doppelten Charakteristik“.

(Verbesserung gegen das Original.)

LE
KRO
W