§ 7.
Infinitesimal-Analysis.

Es soll hier nur noch zum Schluß der Zusammenhang beleuchtet werden, welcher zwischen unseren bisherigen Betrachtungen und gewissen Hauptsätzen der Infinitesimalanalysis besteht.

Man sagt, daß eine veränderliche Größe x, welche sukzessive bestimmte Zahlwerte durchläuft, sich einem festen Grenzwert α nähert, wenn x im Laufe des Prozesses definitiv zwischen je zwei Zahlen zu liegen kommt, zwischen denen α selbst liegt, oder was dasselbe ist, wenn die Differenz $x - \alpha$ absolut genommen unter jeden gegebenen, von Null verschiedenen Wert definitiv herabsinkt.

Einer der wichtigsten Sätze lautet folgendermaßen: „Wächst eine Größe x beständig, aber nicht über alle Grenzen, so nähert sie sich einem Grenzwert."

Ich beweise ihn auf folgende Art. Der Voraussetzung nach gibt es eine und folglich auch unendlich viele Zahlen α_2 von der Art, daß stets $x < \alpha_2$ bleibt; ich bezeichne mit $\mathfrak{A}_2$ das System aller dieser Zahlen α_2, mit $\mathfrak{A}_1$ das System aller anderen Zahlen α_1; jede der letzteren hat die Eigenschaft, daß im Laufe des Prozesses definitiv $x \geqq \alpha_1$ wird, mithin ist jede Zahl α_1 kleiner als jede Zahl α_2, und folglich existiert eine Zahl α, welche entweder die größte in $\mathfrak{A}_1$ oder die kleinste in $\mathfrak{A}_2$ ist (§ 5, IV). Das erstere kann nicht der Fall sein, weil x nie aufhört, zu wachsen, also ist α die kleinste Zahl in $\mathfrak{A}_2$. Welche Zahl α_1 man nun auch nehmen mag, so wird schließlich definitiv $\alpha_1 < x < \alpha$ sein, d. h. x nähert sich dem Grenzwerte α.

Dieser Satz ist äquivalent mit dem Prinzip der Stetigkeit, d. h. er verliert seine Gültigkeit, sobald man auch nur eine reelle Zahl in dem Gebiete $\mathfrak{R}$ als nicht vorhanden ansieht; oder anders ausgedrückt: ist dieser Satz richtig, so ist auch der Satz IV in § 5 richtig.

Ein anderer, mit diesem ebenfalls äquivalenter Satz der Infinitesimalanalysis, welcher noch öfter zur Anwendung kommt, lautet folgendermaßen: „Läßt sich in dem Änderungsprozesse einer Größe x für jede gegebene positive Größe δ auch eine entsprechende Stelle angeben, von welcher ab x sich um weniger als δ ändert, so nähert sich x einem Grenzwert."

Diese Umkehrung des leicht zu beweisenden Satzes, daß jede veränderliche Größe, welche sich einem Grenzwert nähert, sich zuletzt um weniger ändert, als irgendeine gegebene positive Größe, kann ebensowohl aus dem vorhergehenden Satze wie direkt aus dem Prinzip der Stetigkeit abgeleitet werden. Ich schlage den letzteren Weg ein. Es sei δ eine beliebige positive Größe (d. h. $\delta > 0$), so wird der Annahme zufolge ein Augenblick eintreten, von welchem ab x sich um weniger als δ ändern wird, d. h. wenn x in diesem Augenblick den Wert a besitzt, so wird in der Folge stets $x > a - \delta$ und $x < a + \delta$ sein. Ich lasse nun einstweilen die ursprüngliche Annahme fallen, und halte nur die soeben bewiesene Tatsache fest, daß alle späteren Werte der Veränderlichen x zwischen zwei angebbaren, endlichen Werten liegen. Hierauf gründe ich eine doppelte Einteilung aller reellen Zahlen. In das System $\mathfrak{A}_2$ nehme ich eine Zahl α_2 (z. B. $a + \delta$) auf, wenn im Laufe des Prozesses definitiv $x \leqq \alpha_2$ wird; in das System $\mathfrak{A}_1$ nehme ich jede nicht in $\mathfrak{A}_2$ enthaltene Zahl auf; ist α_1 eine solche Zahl, so wird, wie weit auch der Prozeß vorgeschritten sein mag, es noch unendlich oft eintreten, daß $x > \alpha_1$ ist. Da jede Zahl α_1 kleiner ist als jede Zahl α_2, so gibt es eine völlig bestimmte Zahl α, welche diesen Schnitt $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ des Systems $\mathfrak{R}$ hervorbringt, und welche ich den oberen Grenzwert der stets endlich bleibenden Veränderlichen x nennen will. Ebenso wird durch das Verhalten der Veränderlichen x ein zweiter Schnitt $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ des Systems $\mathfrak{R}$ hervorgebracht: eine Zahl β_1 (z. B. $a - \delta$) wird in $\mathfrak{B}_1$ aufgenommen, wenn im Laufe des Prozesses definitiv $x \geqq \beta_1$ wird; jede andere, in $\mathfrak{B}_2$ aufzunehmende Zahl β_2 hat die Eigenschaft, daß niemals definitiv $x \geqq \beta_2$, also immer noch unendlich oft $x < \beta_2$ wird; die Zahl β, durch welche dieser Schnitt hervorgebracht wird, heiße der untere Grenzwert der Veränderlichen x. Die beiden Zahlen α, β sind offenbar auch durch die folgende Eigenschaft charakterisiert: ist ε eine beliebig kleine positive Größe, so wird stets definitiv $x < \alpha + \varepsilon$ und $x > \beta - \varepsilon$, aber niemals wird definitiv $x < \alpha - \varepsilon$, und niemals definitiv $x > \beta + \varepsilon$. Nun sind zwei Fälle möglich. Sind α und β verschieden voneinander, so ist notwendig $\alpha > \beta$, weil stets $\alpha_2 \geqq \beta_1$ ist; die Veränderliche x oszilliert und erleidet, wie weit der Prozeß auch vorgeschritten sein mag, immer noch Änderungen, deren Betrag den Wert $(\alpha - \beta) - 2\varepsilon$ übertrifft, wo ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet. Die ursprüngliche

Annahme, zu der ich erst jetzt zurückkehre, steht aber im Widerspruch mit dieser Konsequenz; es bleibt daher nur der zweite Fall $\alpha = \beta$ übrig, und da schon bewiesen ist, daß, wie klein auch die positive Größe ε sein mag, immer definitiv $x < \alpha + \varepsilon$ und $x > \beta - \varepsilon$ wird, so nähert sich x dem Grenzwert α, was zu beweisen war.

Diese Beispiele mögen genügen, um den Zusammenhang zwischen dem Prinzip der Stetigkeit und der Infinitesimalanalysis darzulegen.

[Die an diese klassische Schrift anknüpfende Entwicklung ist so bekannt, daß wir glauben auf Erläuterungen verzichten zu dürfen. Im übrigen verweisen wir — als Dedekinds eigene Erläuterungen darstellend — auf die Briefe an Lipschitz vom 10. Juni und 27. Juli 1876 (LXV), insbesondere auf die darin enthaltene axiomatische Auffassung.]

LI.

Was sind und was sollen die Zahlen?

[Erste Auflage 1888. Sechste Auflage 1930.]

Ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει.

Meiner Schwester
Julie
und meinem Bruder
Adolf,
Dr. jur., Oberlandesgerichtsrat zu Braunschweig
in herzlicher Liebe gewidmet.

Vorwort zur ersten Auflage.

Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. So einleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei der Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Teiles der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt, auch nach den neuesten Darstellungen*) noch keineswegs als erfüllt anzusehen. Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte. Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr

*) Von den mir bekannt gewordenen Schriften erwähne ich das verdienstvolle Lehrbuch der Arithmetik und Algebra von E. Schröder (Leipzig 1873), in welchem man auch ein Literaturverzeichnis findet, und außerdem die Abhandlungen von Kronecker und von Helmholtz über den Zahlbegriff und über Zählen und Messen (in der Sammlung der an E. Zeller gerichteten philosophischen Aufsätze, Leipzig 1887). Das Erscheinen dieser Abhandlungen ist die Veranlassung, welche mich bewogen hat, nun auch mit meiner, in mancher Beziehung ähnlichen, aber durch ihre Begründung doch wesentlich verschiedenen Auffassung hervorzutreten, die ich mir seit vielen Jahren und ohne jede Beeinflussung von irgendwelcher Seite gebildet habe.

gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlen-Reich beziehen*). Verfolgt man genau, was wir bei dem Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen tun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden, ohne welche Fähigkeit überhaupt kein Denken möglich ist. Auf dieser einzigen, auch sonst ganz unentbehrlichen Grundlage muß nach meiner Ansicht, wie ich auch schon bei einer Ankündigung der vorliegenden Schrift ausgesprochen habe**), die gesamte Wissenschaft der Zahlen errichtet werden. Die Absicht einer solchen Darstellung habe ich schon vor der Herausgabe meiner Schrift über die Stetigkeit gefaßt, aber erst nach Erscheinen derselben, und mit vielen Unterbrechungen, die durch gesteigerte Amtsgeschäfte und andere notwendige Arbeiten veranlaßt wurden, habe ich in den Jahren 1872 bis 1878 auf wenigen Blättern einen ersten Entwurf aufgeschrieben, welchen dann mehrere Mathematiker eingesehen und teilweise mit mir besprochen haben. Er trägt denselben Titel und enthält, wenn auch nicht auf das beste geordnet, doch alle wesentlichen Grundgedanken meiner vorliegenden Schrift, die nur deren sorgfältige Ausführung gibt; als solche Hauptpunkte erwähne ich hier die scharfe Unterscheidung des Endlichen vom Unendlichen (64), den Begriff der Anzahl von Dingen (161), den Nachweis, daß die unter dem Namen der vollständigen Induktion (oder des Schlusses von n auf $n+1$) bekannte Beweisart wirklich beweiskräftig (59, 60, 80), und daß auch die Definition durch Induktion (oder Rekursion) bestimmt und widerspruchsfrei ist (126).

Diese Schrift kann jeder verstehen, welcher das besitzt, was man den gesunden Menschenverstand nennt; philosophische oder mathematische Schulkenntnisse sind dazu nicht im geringsten erforderlich. Aber ich weiß sehr wohl, daß gar mancher in den schattenhaften Gestalten, die ich ihm vorführe, seine Zahlen, die ihn als treue und vertraute Freunde durch das ganze Leben begleitet haben, kaum wiedererkennen mag; er wird durch die lange, der

*) Vgl. § 3 meiner Schrift: Stetigkeit und irrationale Zahlen (Braunschweig 1872).

**) Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, dritte Auflage, 1879, § 163, Anmerkung auf S. 470.

Beschaffenheit unseres Treppenverstandes entsprechende Reihe von einfachen Schlüssen, durch die nüchterne Zergliederung der Gedankenreihen, auf denen die Gesetze der Zahlen beruhen, abgeschreckt und ungeduldig darüber werden, Beweise für Wahrheiten verfolgen zu sollen, die ihm nach seiner vermeintlichen inneren Anschauung von vornherein einleuchtend und gewiß erscheinen. Ich erblicke dagegen gerade in der Möglichkeit, solche Wahrheiten auf andere, einfachere zurückzuführen, mag die Reihe der Schlüsse noch so lang und scheinbar künstlich sein, einen überzeugenden Beweis dafür, daß ihr Besitz oder der Glaube an sie niemals unmittelbar durch innere Anschauung gegeben, sondern immer nur durch eine mehr oder weniger vollständige Wiederholung der einzelnen Schlüsse erworben ist. Ich möchte diese, der Schnelligkeit ihrer Ausführung wegen schwer zu verfolgende Denktätigkeit mit derjenigen vergleichen, welche ein vollkommen geübter Leser beim Lesen verrichtet; auch dieses Lesen bleibt immer eine mehr oder weniger vollständige Wiederholung der einzelnen Schritte, welche der Anfänger bei dem mühseligen Buchstabieren auszuführen hat; ein sehr kleiner Teil derselben, und deshalb eine sehr kleine Arbeit oder Anstrengung des Geistes reicht aber für den geübten Leser schon aus, um das richtige, wahre Wort zu erkennen, freilich nur mit sehr großer Wahrscheinlichkeit; denn bekanntlich begegnet es auch dem geübtesten Korrektor von Zeit zu Zeit, einen Druckfehler stehenzulassen, d. h. falsch zu lesen, was unmöglich wäre, wenn die zum Buchstabieren gehörige Gedankenkette vollständig wiederholt würde. So sind wir auch schon von unserer Geburt an beständig und in immer steigendem Maße veranlaßt, Dinge auf Dinge zu beziehen und damit diejenige Fähigkeit des Geistes zu üben, auf welcher auch die Schöpfung der Zahlen beruht; durch diese schon in unsere ersten Lebensjahre fallende unablässige, wenn auch absichtslose Übung und die damit verbundene Bildung von Urteilen und Schlußreihen erwerben wir uns auch einen Schatz von eigentlich arithmetischen Wahrheiten, auf welche später unsere ersten Lehrer sich wie auf etwas Einfaches, Selbstverständliches, in der inneren Anschauung Gegebenes berufen, und so kommt es, daß manche, eigentlich sehr zusammengesetzte Begriffe (wie z. B. der der Anzahl von Dingen) fälschlich für einfach gelten. In diesem Sinne, den ich durch die einem bekannten Spruche nachgebildeten Worte ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει bezeichne, mögen die folgenden Blätter als ein Versuch, die Wissenschaft der Zahlen auf einheitlicher Grundlage zu errichten, wohlwollende Aufnahme finden, und mögen sie andere Mathematiker dazu anregen, die langen Reihen von Schlüssen auf ein bescheideneres, angenehmeres Maß zurückzuführen.

Dem Zwecke dieser Schrift gemäß beschränke ich mich auf die Betrachtung der Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen. In welcher Art später die schrittweise Erweiterung des Zahlbegriffes, die Schöpfung der Null, der negativen, gebrochenen, irrationalen und komplexen Zahlen stets durch Zurückführung auf die früheren Begriffe herzustellen ist, und zwar ohne jede Einmischung fremdartiger Vorstellungen (wie z. B. der der meßbaren Größen), die nach meiner Auffassung erst durch die Zahlenwissenschaft zu vollständiger Klarheit erhoben werden können, das habe ich wenigstens an dem Beispiele der irrationalen Zahlen in meiner früheren Schrift über die Stetigkeit (1872) gezeigt; in ganz ähnlicher Weise lassen sich, wie ich daselbst (§ 3) auch schon ausgesprochen habe, die anderen Erweiterungen leicht behandeln, und ich behalte mir vor, diesem Gegenstande eine zusammenhängende Darstellung zu widmen. Gerade bei dieser Auffassung erscheint es als etwas Selbstverständliches und durchaus nicht Neues, daß jeder auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt, eine Behauptung, die ich auch wiederholt aus dem Munde von Dirichlet gehört habe. Aber ich erblicke keineswegs etwas Verdienstliches darin — und das lag auch Dirichlet gänzlich fern —, diese mühselige Umschreibung wirklich vornehmen und keine anderen als die natürlichen Zahlen benutzen und anerkennen zu wollen. Im Gegenteil, die größten und fruchtbarsten Fortschritte in der Mathematik und anderen Wissenschaften sind vorzugsweise durch die Schöpfung und Einführung neuer Begriffe gemacht, nachdem die häufige Wiederkehr zusammengesetzter Erscheinungen, welche von den alten Begriffen nur mühselig beherrscht werden, dazu gedrängt hat. Über diesen Gegenstand habe ich im Sommer 1854 bei Gelegenheit meiner Habilitation als Privatdozent zu Göttingen einen Vortrag vor der philosophischen Fakultät [LX] zu halten gehabt, dessen Absicht auch von Gauß gebilligt wurde; doch ist hier nicht der Ort, näher darauf einzugehen.

Ich benutze statt dessen die Gelegenheit, noch einige Bemerkungen zu machen, die sich auf meine frühere, oben erwähnte Schrift über

Stetigkeit und irrationale Zahlen beziehen. Die in ihr vorgetragene, im Herbste 1858 erdachte Theorie der irrationalen Zahlen gründet sich auf diejenige im Gebiete der rationalen Zahlen auftretende Erscheinung (§ 4), die ich mit dem Namen eines Schnittes belegt und zuerst genau erforscht habe, und sie gipfelt in dem Beweise der Stetigkeit des neuen Gebietes der reellen Zahlen (§ 5. IV). Sie scheint mir etwas einfacher, ich möchte sagen ruhiger, zu sein als die beiden von ihr und voneinander verschiedenen Theorien, welche von den Herren Weierstraß und G. Cantor aufgestellt sind und ebenfalls vollkommene Strenge besitzen. Sie ist später ohne wesentliche Änderung von Herrn U. Dini in die Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali (Pisa 1878) aufgenommen; aber der Umstand, daß mein Name im Laufe dieser Darstellung nicht bei der Beschreibung der rein arithmetischen Erscheinung des Schnittes, sondern zufällig gerade da erwähnt wird, wo es sich um die Existenz einer dem Schnitte entsprechenden meßbaren Größe handelt, könnte leicht zu der Vermutung führen, daß meine Theorie sich auf die Betrachtung solcher Größen stützte. Nichts könnte unrichtiger sein; vielmehr habe ich in § 3 meiner Schrift verschiedene Gründe angeführt, weshalb ich die Einmischung der meßbaren Größen gänzlich verwerfe, und namentlich am Schlusse hinsichtlich deren Existenz bemerkt, daß für einen großen Teil der Wissenschaft vom Raume die Stetigkeit seiner Gebilde gar nicht einmal eine notwendige Voraussetzung ist, ganz abgesehen davon, daß sie in den Werken über Geometrie zwar wohl dem Namen nach beiläufig erwähnt, aber niemals deutlich erklärt, also auch nicht für Beweise zugänglich gemacht wird. Um dies noch näher zu erläutern, bemerke ich beispielsweise folgendes. Wählt man drei nicht in einer Geraden liegende Punkte A, B, C nach Belieben, nur mit der Beschränkung, daß die Verhältnisse ihrer Entfernungen AB, AC, BC algebraische*) Zahlen sind, und sieht man im Raume nur diejenigen Punkte M als vorhanden an, für welche die Verhältnisse von AM, BM, CM zu AB ebenfalls algebraische Zahlen sind, so ist der aus diesen Punkten M bestehende Raum, wie leicht zu sehen, überall unstetig; aber trotz der Unstetigkeit, Lückenhaftigkeit dieses Raumes sind in ihm, so viel ich sehe, alle Konstruktionen, welche in Euklids Elementen auftreten, genau ebenso

*) Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, § 159 der zweiten, § 160 der dritten Auflage.

ausführbar wie in dem vollkommen stetigen Raume; die Unstetigkeit dieses Raumes würde daher in Euklids Wissenschaft gar nicht bemerkt, gar nicht empfunden werden. Wenn mir aber jemand sagt, wir könnten uns den Raum gar nicht anders als stetig denken, so möchte ich das bezweifeln und darauf aufmerksam machen, eine wie weit vorgeschrittene, feine wissenschaftliche Bildung erforderlich ist, um nur das Wesen der Stetigkeit deutlich zu erkennen und um zu begreifen, daß außer den rationalen Größenverhältnissen auch irrationale, außer den algebraischen auch transzendente denkbar sind. Um so schöner erscheint es mir, daß der Mensch ohne jede Vorstellung von meßbaren Größen, und zwar durch ein endliches System einfacher Denkschritte sich zur Schöpfung des reinen, stetigen Zahlenreiches aufschwingen kann; und erst mit diesem Hilfsmittel wird es ihm nach meiner Ansicht möglich, die Vorstellung vom stetigen Raume zu einer deutlichen auszubilden.

Dieselbe, auf die Erscheinung des Schnittes gegründete Theorie der irrationalen Zahlen findet man auch dargestellt in der Introduction à la théorie des fonctions d'une variable von J. Tannery (Paris 1886). Wenn ich eine Stelle der Vorrede dieses Werkes richtig verstehe, so hat der Herr Verfasser diese Theorie selbständig, also zu einer Zeit erdacht, wo ihm nicht nur meine Schrift, sondern auch die in derselben Vorrede erwähnten Fondamenti von Dini noch unbekannt waren; diese Übereinstimmung scheint mir ein erfreulicher Beweis dafür zu sein, daß meine Auffassung der Natur der Sache entspricht, was auch von anderen Mathematikern, z. B. von Herrn M. Pasch in seiner Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Leipzig 1883) anerkannt ist. Dagegen kann ich Herrn Tannery nicht ohne weiteres beistimmen, wenn er diese Theorie die Entwicklung eines von Herrn J. Bertrand herrührenden Gedankens nennt, welcher in dessen Traité d'arithmétique enthalten sei und darin bestehe, eine irrationale Zahl zu definieren durch Angabe aller rationalen Zahlen, die kleiner, und aller derjenigen, die größer sind als die zu definierende Zahl. Zu diesem Ausspruch, der von Herrn O. Stolz — wie es scheint, ohne nähere Prüfung — in der Vorrede zum zweiten Teile seiner Vorlesungen über allgemeine Arithmetik (Leipzig 1886) wiederholt ist, erlaube ich mir folgendes zu bemerken. Daß eine irrationale Zahl durch die eben beschriebene Angabe in der Tat als vollständig bestimmt anzusehen ist, diese Überzeugung ist ohne Zweifel auch vor Herrn Bertrand immer Gemeingut aller Mathematiker gewesen, die sich mit dem Begriffe des Irrationalen beschäftigt haben; jedem Rechner, der eine irrationale Wurzel einer Gleichung näherungsweise berechnet, schwebt gerade diese Art ihrer Bestimmung vor; und wenn man, wie es Herr Bertrand in seinem Werke ausschließlich tut (mir liegt die achte Auflage aus dem Jahre 1885 vor), die irrationale Zahl als Verhältnis meßbarer Größen auffaßt, so ist diese Art ihrer Bestimmtheit schon auf das deutlichste in der berühmten Definition ausgesprochen, welche Euklid (Elemente V. 5) für die Gleichheit der Verhältnisse aufstellt. Eben diese uralte Überzeugung ist nun gewiß die Quelle meiner Theorie wie derjenigen des Herrn Bertrand und mancher anderen, mehr oder weniger durchgeführten Versuche gewesen, die Einführung der irrationalen Zahlen in die Arithmetik zu begründen. Aber wenn man Herrn Tannery so weit vollständig beistimmen wird, so muß man bei einer wirklichen Prüfung doch sofort bemerken, daß die Darstellung des Herrn Bertrand, in der die Erscheinung des Schnittes in ihrer logischen Reinheit gar nicht einmal erwähnt wird, mit der meinigen durchaus keine Ähnlichkeit hat, insofern sie sogleich ihre Zuflucht zu der Existenz einer meßbaren Größe nimmt, was ich aus den oben besprochenen Gründen gänzlich verwerfe; und abgesehen von diesem Umstande, scheint mir diese Darstellung auch in den nachfolgenden, auf die Annahme dieser Existenz gegründeten Definitionen und Beweisen noch einige so wesentliche Lücken darzubieten, daß ich die in meiner Schrift (§ 6) ausgesprochene Behauptung, der Satz $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$ sei noch nirgends streng bewiesen, auch in Hinsicht auf dieses in mancher anderen Beziehung treffliche Werk, welches ich damals noch nicht kannte, für gerechtfertigt halte.

Harzburg, 5. Oktober 1887. **R. Dedekind.**

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die vorliegende Schrift hat bald nach ihrem Erscheinen neben günstigen auch ungünstige Beurteilungen gefunden, ja es sind ihr arge Fehler vorgeworfen. Ich habe mich von der Richtigkeit dieser Vorwürfe nicht überzeugen können und lasse jetzt die seit kurzem vergriffene Schrift, zu deren öffentlicher Verteidigung es mir an Zeit fehlt, ohne jede Änderung wieder abdrucken, indem ich nur folgende Bemerkungen dem ersten Vorworte hinzufüge.

Die Eigenschaft, welche ich als Definition (64) des unendlichen Systems benutzt habe, ist schon vor dem Erscheinen meiner Schrift von G. Cantor (Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Crelles Journal, Bd. 84; 1878), ja sogar schon von Bolzano (Paradoxien des Unendlichen § 20; 1851) hervorgehoben. Aber keiner der genannten Schriftsteller hat den Versuch gemacht, diese Eigenschaft zur Definition des Unendlichen zu erheben und auf dieser Grundlage die Wissenschaft von den Zahlen streng logisch aufzubauen, und gerade hierin besteht der Inhalt meiner mühsamen Arbeit, die ich in allem Wesentlichen schon mehrere Jahre vor dem Erscheinen der Abhandlung von G. Cantor und zu einer Zeit vollendet hatte, als mir das Werk von Bolzano selbst dem Namen nach gänzlich unbekannt war. Für diejenigen, welche Interesse und Verständnis für die Schwierigkeiten einer solchen Untersuchung haben, bemerke ich noch folgendes. Man kann eine ganz andere Definition des Endlichen und Unendlichen aufstellen, welche insofern noch einfacher erscheint, als bei ihr nicht einmal der Begriff der Ähnlichkeit einer Abbildung (26) vorausgesetzt wird, nämlich:

„Ein System S heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden läßt (36), daß kein echter Teil (6) von S in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Falle heißt S ein unendliches System.“

Nun mache man einmal den Versuch, auf dieser neuen Grundlage das Gebäude zu errichten! Man wird alsbald auf große Schwierigkeiten stoßen, und ich glaube behaupten zu dürfen, daß selbst der Nachweis der vollständigen Übereinstimmung dieser Definition mit der früheren nur dann (und dann auch leicht) gelingt, wenn man die Reihe der natürlichen Zahlen schon als entwickelt ansehen und auch die Schlußbetrachtung in (131) zu Hilfe nehmen darf; und doch ist von allen diesen Dingen weder in der einen noch in der anderen Definition die Rede! Man wird dabei erkennen, wie sehr groß die Anzahl der Gedankenschritte ist, die zu einer solchen Umformung einer Definition erforderlich sind.

Etwa ein Jahr nach der Herausgabe meiner Schrift habe ich die schon im Jahre 1884 erschienenen Grundlagen der Arithmetik von G. Frege kennengelernt. Wie verschieden die in diesem Werke niedergelegte Ansicht über das Wesen der Zahl von der meinigen auch sein mag, so enthält es, namentlich von § 79 an, doch auch sehr nahe Berührungspunkte mit meiner Schrift, insbesondere mit meiner Erklärung (44). Freilich ist die Übereinstimmung wegen der abweichenden Ausdrucksweise nicht leicht zu erkennen; aber schon die Bestimmtheit, mit welcher der Verfasser sich über die Schlußweise von n auf $n+1$ ausspricht (unten auf S. 93), zeigt deutlich, daß er hier auf demselben Boden mit mir steht.

Inzwischen sind (1890—1891) die Vorlesungen über die Algebra der Logik von E. Schröder fast vollständig erschienen. Auf die Bedeutung dieses höchst anregenden Werkes, dem ich meine größte Anerkennung zolle, hier näher einzugehen, ist unmöglich; vielmehr möchte ich mich nur entschuldigen, daß ich trotz der auf S. 253 des ersten Teiles gemachten Bemerkung meine etwas schwerfälligen Bezeichnungen (8) und (17) doch beibehalten habe; dieselben machen keinen Anspruch darauf, allgemein angenommen zu werden, sondern bescheiden sich, lediglich den Zwecken dieser arithmetischen Schrift zu dienen, wozu sie nach meiner Ansicht besser geeignet sind, als Summen- und Produktzeichen.

Harzburg, 24. August 1893. **R. Dedekind.**

Vorwort zur dritten Auflage.

Als ich vor etwa acht Jahren aufgefordert wurde, die damals schon vergriffene zweite Auflage dieser Schrift durch eine dritte zu ersetzen, trug ich Bedenken, darauf einzugehen, weil inzwischen sich Zweifel an der Sicherheit wichtiger Grundlagen meiner Auffassung geltend gemacht hatten. Die Bedeutung und teilweise Berechtigung dieser Zweifel verkenne ich auch heute nicht. Aber mein Vertrauen in die innere Harmonie unserer Logik ist dadurch nicht erschüttert; ich glaube, daß eine strenge Untersuchung der Schöpferkraft des Geistes, aus bestimmten Elementen ein neues Bestimmtes, ihr System zu erschaffen, das notwendig von jedem dieser Elemente verschieden ist, gewiß dazu führen wird, die Grundlagen meiner Schrift einwandfrei zu gestalten. Durch andere Arbeiten bin ich jedoch verhindert, eine so schwierige Untersuchung zu Ende zu führen, und ich bitte daher um Nachsicht, wenn die Schrift jetzt doch in ungeänderter Form zum dritten Male erscheint, was sich nur dadurch rechtfertigen läßt, daß das Interesse an ihr, wie die anhaltende Nachfrage zeigt, noch nicht erloschen ist.

Braunschweig, 30. September 1911. **R. Dedekind.**

Inhalt.

§ 1.
Systeme von Elementen.

1. Im folgenden verstehe ich unter einem Ding jeden Gegenstand unseres Denkens. Um bequem von den Dingen sprechen zu können, bezeichnet man sie durch Zeichen, z. B. durch Buchstaben, und man erlaubt sich, kurz von dem Ding a oder gar von a zu sprechen, wo man in Wahrheit das durch a bezeichnete Ding, keineswegs den Buchstaben a selbst meint. Ein Ding ist vollständig bestimmt durch alles das, was von ihm ausgesagt oder gedacht werden kann. Ein Ding a ist dasselbe wie b (identisch mit b), und b dasselbe wie a, wenn alles, was von a gedacht werden kann, auch von b, und wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann. Daß a und b nur Zeichen oder Namen für ein und dasselbe Ding sind, wird durch das Zeichen $a = b$ und ebenso durch $b = a$ angedeutet. Ist außerdem $b = c$, ist also c ebenfalls, wie a, ein Zeichen für das mit b bezeichnete Ding, so ist auch $a = c$. Ist die obige Übereinstimmung des durch a bezeichneten Dinges mit dem durch b bezeichneten Dinge nicht vorhanden, so heißen diese Dinge a, b verschieden, a ist ein anderes Ding wie b, b ein anderes Ding wie a; es gibt irgendeine Eigenschaft, die dem einen zukommt, dem anderen nicht zukommt.

2. Es kommt sehr häufig vor, daß verschiedene Dinge $a, b, c \ldots$ aus irgendeiner Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefaßt, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, daß sie ein System S bilden; man nennt die Dinge $a, b, c \ldots$ die Elemente des Systems S, sie sind enthalten in S; umgekehrt

besteht S aus diesen Elementen. Ein solches System S (oder ein Inbegriff, eine Mannigfaltigkeit, eine Gesamtheit) ist als Gegenstand unseres Denkens ebenfalls ein Ding (1); es ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von S ist oder nicht*). Das System S ist daher dasselbe wie das System T, in Zeichen $S = T$, wenn jedes Element von S auch Element von T und jedes Element von T auch Element von S ist. Für die Gleichförmigkeit der Ausdrucksweise ist es vorteilhaft, auch den besonderen Fall zuzulassen, daß ein System S aus einem einzigen (aus einem und nur einem) Element a besteht, d. h. daß das Ding a Element von S, aber jedes von a verschiedene Ding kein Element von S ist. Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschließen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten.

3. Erklärung. Ein System A heißt Teil eines Systems S, wenn jedes Element von A auch Element von S ist. Da diese Beziehung zwischen einem System A und einem System S im folgenden immer wieder zur Sprache kommen wird, so wollen wir dieselbe zur Abkürzung durch das Zeichen $A \mathrel{3} S$ ausdrücken. Das umgekehrte Zeichen $S \mathrel{\varepsilon} A$, wodurch dieselbe Tatsache bezeichnet werden könnte, werde ich der Deutlichkeit und Einfachheit halber gänzlich vermeiden, aber ich werde in Ermangelung eines besseren Wortes bisweilen sagen, daß S Ganzes von A ist, wodurch also ausgedrückt werden soll, daß unter den Elementen von S sich auch alle Elemente von A befinden. Da ferner jedes Element s eines Systems S nach 2 selbst als System aufgefaßt werden kann, so können wir auch hierauf die Bezeichnung $s \mathrel{3} S$ anwenden.

4. Satz. Zufolge 3 ist $A \mathrel{3} A$.

5. Satz. Ist $A \mathrel{3} B$ und $B \mathrel{3} A$, so ist $A = B$.

Der Beweis folgt aus 3, 2.

---

*) Auf welche Weise diese Bestimmtheit zustande kommt, und ob wir einen Weg kennen, um hierüber zu entscheiden, ist für alles Folgende gänzlich gleichgültig; die zu entwickelnden allgemeinen Gesetze hängen davon gar nicht ab, sie gelten unter allen Umständen. Ich erwähne dies ausdrücklich, weil Herr Kronecker vor kurzem (im Band 99 des Journals für Mathematik, S. 334 bis 336) der freien Begriffsbildung in der Mathematik gewisse Beschränkungen hat auferlegen wollen, die ich nicht als berechtigt anerkenne; näher hierauf einzugehen, erscheint aber erst dann geboten, wenn der ausgezeichnete Mathematiker seine Gründe für die Notwendigkeit oder auch nur die Zweckmäßigkeit dieser Beschränkungen veröffentlicht haben wird.

6. Erklärung. Ein System A heißt echter Teil von S, wenn A Teil von S, aber verschieden von S ist. Nach 5 ist dann S kein Teil von A, d. h. (3) es gibt in S ein Element, welches kein Element von A ist.

7. Satz. Ist $A \mathfrak{3} B$ und $B \mathfrak{3} C$, was auch kurz durch $A \mathfrak{3} B \mathfrak{3} C$ bezeichnet werden kann, so ist $A \mathfrak{3} C$, und zwar ist A gewiß echter Teil von C, wenn A echter Teil von B oder wenn B echter Teil von C ist.

Der Beweis folgt aus 3, 6.

8. Erklärung. Unter dem aus irgendwelchen Systemen $A, B, C \ldots$ zusammengesetzten System, welches mit $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$ bezeichnet werden soll, wird dasjenige System verstanden, dessen Elemente durch folgende Vorschrift bestimmt werden: ein Ding gilt dann und nur dann als Element von $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$, wenn es Element von irgendeinem der Systeme $A, B, C \ldots$, d. h. Element von A oder B oder $C \ldots$ ist. Wir lassen auch den Fall zu, daß nur ein einziges System A vorliegt; dann ist offenbar $\mathfrak{M}(A) = A$. Wir bemerken ferner, daß das aus $A, B, C \ldots$ zusammengesetzte System $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$ wohl zu unterscheiden ist von demjenigen System, dessen Elemente die Systeme $A, B, C \ldots$ selbst sind.

9. Satz. Die Systeme $A, B, C \ldots$ sind Teile von

$$\mathfrak{M}(A, B, C \ldots).$$

Der Beweis folgt aus 8, 3.

10. Satz. Sind $A, B, C \ldots$ Teile eines Systems S, so ist $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots) \mathfrak{3} S$.

Der Beweis folgt aus 8, 3.

11. Satz. Ist P Teil von einem der Systeme $A, B, C \ldots$, so ist $P \mathfrak{3} \mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$.

Der Beweis folgt aus 9, 7.

12. Satz. Ist jedes der Systeme $P, Q \ldots$ Teil von einem der Systeme $A, B, C \ldots$, so ist $\mathfrak{M}(P, Q \ldots) \mathfrak{3} \mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$.

Der Beweis folgt aus 11, 10.

13. Satz. Ist A zusammengesetzt aus irgendwelchen der Systeme $P, Q \ldots$, so ist $A \mathfrak{3} \mathfrak{M}(P, Q \ldots)$.

Beweis. Denn jedes Element von A ist nach 8 Element von einem der Systeme $P, Q \ldots$, folglich nach 8 auch Element von $\mathfrak{M}(P, Q \ldots)$, woraus nach 3 der Satz folgt.

14. Satz. Ist jedes der Systeme $A, B, C \ldots$ zusammengesetzt aus irgendwelchen der Systeme $P, Q \ldots$, so ist

$$\mathfrak{M}(A, B, C \ldots) \mathfrak{3} \mathfrak{M}(P, Q \ldots).$$

Der Beweis folgt aus 13, 10.

15. Satz. Ist jedes der Systeme $P, Q \ldots$ Teil von einem der Systeme $A, B, C \ldots$, und ist jedes der letzteren zusammengesetzt aus irgendwelchen der ersteren, so ist

$$\mathfrak{M}(P, Q \ldots) = \mathfrak{M}(A, B, C \ldots).$$

Der Beweis folgt aus 12, 14, 5.

16. Satz. Ist $A = \mathfrak{M}(P, Q)$ und $B = \mathfrak{M}(Q, R)$, so ist $\mathfrak{M}(A, R) = \mathfrak{M}(P, B)$.

Beweis. Denn nach dem vorhergehenden Satze 15 ist sowohl $\mathfrak{M}(A, R)$ als $\mathfrak{M}(P, B) = \mathfrak{M}(P, Q, R)$.

17. Erklärung. Ein Ding g heißt gemeinsames Element der Systeme $A, B, C \ldots$, wenn es in jedem dieser Systeme (also in A und in B und in $C \ldots$) enthalten ist. Ebenso heißt ein System T ein Gemeinteil von $A, B, C \ldots$, wenn T Teil von jedem dieser Systeme ist, und unter der Gemeinheit der Systeme $A, B, C \ldots$ verstehen wir das vollständig bestimmte System $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$, welches aus allen gemeinsamen Elementen g von $A, B, C \ldots$ besteht und folglich ebenfalls ein Gemeinteil derselben Systeme ist. Wir lassen auch wieder den Fall zu, daß nur ein einziges System A vorliegt; dann ist $\mathfrak{G}(A) = A$ zu setzen. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß die Systeme $A, B, C \ldots$ gar kein gemeinsames Element, also auch keinen Gemeinteil, keine Gemeinheit besitzen; sie heißen dann Systeme ohne Gemeinteil, und das Zeichen $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$ ist bedeutungslos (vgl. den Schluß von 2). Wir werden es aber fast immer dem Leser überlassen, bei Sätzen über Gemeinheiten die Bedingung ihrer Existenz hinzuzudenken und die richtige Deutung dieser Sätze auch für den Fall der Nicht-Existenz zu finden.

18. Satz. Jeder Gemeinteil von $A, B, C \ldots$ ist Teil von $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$.

Der Beweis folgt aus 17.

19. Satz. Jeder Teil von $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$ ist Gemeinteil von $A, B, C \ldots$

Der Beweis folgt aus 17, 7.

20. Satz. Ist jedes der Systeme $A, B, C \ldots$ Ganzes (3) von einem der Systeme $P, Q \ldots$, so ist

$$\mathfrak{G}(P, Q \ldots) \mathfrak{3} \mathfrak{G}(A, B, C \ldots).$$

Beweis. Denn jedes Element von $\mathfrak{G}(P, Q \ldots)$ ist gemeinsames Element von $P, Q \ldots$, also auch gemeinsames Element von $A, B, C \ldots$, w. z. b. w.

§ 2.

Abbildung eines Systems.

21. **Erklärung***). Unter einer **Abbildung** φ eines Systems S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding **gehört**, welches das **Bild** von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird; wir sagen auch, daß $\varphi(s)$ dem Element s **entspricht**, daß $\varphi(s)$ durch die Abbildung φ aus s **entsteht** oder **erzeugt** wird, daß s durch die Abbildung φ in $\varphi(s)$ **übergeht**. Ist nun T irgendein Teil von S, so ist in der Abbildung φ von S zugleich eine bestimmte Abbildung von T enthalten, welche der Einfachheit wegen wohl mit demselben Zeichen φ bezeichnet werden darf und darin besteht, daß jedem Elemente t des Systems T dasselbe Bild $\varphi(t)$ entspricht, welches t als Element von S besitzt; zugleich soll das System, welches aus allen Bildern $\varphi(t)$ besteht, das **Bild** von T heißen und mit $\varphi(T)$ bezeichnet werden, wodurch auch die Bedeutung von $\varphi(S)$ erklärt ist. Als ein Beispiel einer Abbildung eines Systems ist schon die Belegung seiner Elemente mit bestimmten Zeichen oder Namen anzusehen. Die einfachste Abbildung eines Systems ist diejenige, durch welche jedes seiner Elemente in sich selbst übergeht; sie soll die **identische** Abbildung des Systems heißen. Der Bequemlichkeit halber wollen wir in den folgenden Sätzen 22, 23, 24, die sich auf eine beliebige Abbildung φ eines beliebigen Systems S beziehen, die Bilder von Elementen s und Teilen T entsprechend durch s' und T' bezeichnen; außerdem setzen wir fest, daß kleine und große lateinische Buchstaben ohne Akzent immer Elemente und Teile dieses Systems S bedeuten sollen.

22. **Satz****). Ist $A\,3\,B$, so ist $A'\,3\,B'$.

Beweis. Denn jedes Element von A' ist das Bild eines in A, also auch in B enthaltenen Elementes und ist folglich Element von B', w. z. b. w.

23. **Satz.** Das Bild von $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$ ist $\mathfrak{M}(A', B', C' \ldots)$.

Beweis. Bezeichnet man das System $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$, welches nach 10 ebenfalls Teil von S ist, mit M, so ist jedes Element seines Bildes M' das Bild m' eines Elementes m von M; da nun m

*) Vgl. Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, dritte Auflage, 1879, § 163.
**) Vgl. Satz 27.

nach 8 auch Element von einem der Systeme $A, B, C \ldots$, und folglich m' Element von einem der Systeme $A', B', C' \ldots$, also nach 8 auch Element von $\mathfrak{M}(A', B', C' \ldots)$ ist, so ist nach 3

$$M'\,3\,\mathfrak{M}(A', B', C' \ldots).$$

Andererseits, da $A, B, C \ldots$ nach 9 Teile von M, also $A', B', C' \ldots$ nach 22 Teile von M' sind, so ist nach 10 auch

$$\mathfrak{M}(A', B', C' \ldots)\,3\,M',$$

und hieraus in Verbindung mit dem Obigen folgt nach 5 der zu beweisende Satz

$$M' = \mathfrak{M}(A', B', C' \ldots).$$

24. **Satz***). Das Bild jedes Gemeinteils von $A, B, C \ldots$, also auch das der Gemeinheit $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$, ist Teil von $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots)$.

Beweis. Denn dasselbe ist nach 22 Gemeinteil von $A', B', C' \ldots$, woraus der Satz nach 18 folgt.

25. **Erklärung und Satz.** Ist φ eine Abbildung eines Systems S, und ψ eine Abbildung des Bildes $S' = \varphi(S)$, so entspringt hieraus immer eine aus φ und ψ **zusammengesetzte****) Abbildung θ von S, welche darin besteht, daß jedem Elemente s von S das Bild

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\varphi(s))$$

entspricht, wo wieder $\varphi(s) = s'$ gesetzt ist. Diese Abbildung θ kann kurz durch das Symbol $\psi . \varphi$ oder $\psi\varphi$, das Bild $\theta(s)$ durch $\psi\varphi(s)$ bezeichnet werden, wobei auf die Stellung der Zeichen φ, ψ wohl zu achten ist, weil das Zeichen $\varphi\psi$ im allgemeinen bedeutungslos ist und nur dann einen Sinn hat, wenn $\psi(S')\,3\,S$ ist. Bedeutet nun χ eine Abbildung des Systems $\psi(S') = \psi\varphi(S)$, und η die aus ψ und χ zusammengesetzte Abbildung $\chi\psi$ des Systems S', so ist $\chi\theta(s) = \chi\psi(s') = \eta(s') = \eta\varphi(s)$, also stimmen die zusammengesetzten Abbildungen $\chi\theta$ und $\eta\varphi$ für jedes Element s von S miteinander überein, d. h. es ist $\chi\theta = \eta\varphi$. Dieser Satz kann nach der Bedeutung von θ und η füglich durch

$$\chi . \psi\varphi = \chi\psi . \varphi$$

ausgedrückt, und diese aus φ, ψ, χ zusammengesetzte Abbildung kann kurz durch $\chi\psi\varphi$ bezeichnet werden.

*) Vgl. Satz 29.
**) Eine Verwechslung dieser Zusammensetzung von Abbildungen mit derjenigen der Systeme von Elementen (8) ist wohl nicht zu befürchten.

§ 3.

Ähnlichkeit einer Abbildung. Ähnliche Systeme.

26. Erklärung. Eine Abbildung φ eines Systems S heißt ähnlich (oder deutlich), wenn verschiedenen Elementen a, b des Systems S stets verschiedene Bilder $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$ entsprechen. Da in diesem Falle umgekehrt aus $s' = t'$ stets $s = t$ folgt, so ist jedes Element des Systems $S' = \varphi(S)$ das Bild s' von einem einzigen, vollständig bestimmten Elemente s des Systems S, und man kann daher der Abbildung φ von S eine umgekehrte, etwa mit $\overline{\varphi}$ zu bezeichnende Abbildung des Systems S' gegenüberstellen, welche darin besteht, daß jedem Elemente s' von S' das Bild $\overline{\varphi}(s') = s$ entspricht, und offenbar ebenfalls ähnlich ist. Es leuchtet ein, daß $\overline{\varphi}(S') = S$, daß ferner φ die zu $\overline{\varphi}$ gehörige umgekehrte Abbildung, und daß die nach 25 aus φ und $\overline{\varphi}$ zusammengesetzte Abbildung $\overline{\varphi}\varphi$ die identische Abbildung von S ist (21). Zugleich ergeben sich folgende Ergänzungen zu § 2 unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen.

27. Satz*). Ist $A' \mathfrak{3} B'$, so ist $A \mathfrak{3} B$.

Beweis. Denn wenn a ein Element von A, so ist a' ein Element von A', also auch von B', mithin $= b'$, wo b ein Element von B; da aber aus $a' = b'$ immer $a = b$ folgt, so ist jedes Element a von A auch Element von B, w. z. b. w.

28. Satz. Ist $A' = B'$, so ist $A = B$.

Der Beweis folgt aus 27, 4, 5.

29. Satz**). Ist $G = \mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$, so ist $G' = \mathfrak{G}(A', B', C' \ldots)$.

Beweis. Jedes Element von $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots)$ ist jedenfalls in S' enthalten, also das Bild g' eines in S enthaltenen Elementes g; da aber g' gemeinsames Element von A', B', $C' \ldots$ ist, so muß g nach 27 gemeinsames Element von $A, B, C \ldots$, also auch Element von G sein; mithin ist jedes Element von $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots)$ Bild eines Elementes g von G, also Element von G', d. h. es ist $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots) \mathfrak{3} G'$, und hieraus folgt unser Satz mit Rücksicht auf 24, 5.

30. Satz. Die identische Abbildung eines Systems ist immer eine ähnliche Abbildung.

31. Satz. Ist φ eine ähnliche Abbildung von S, und ψ eine ähnliche Abbildung von $\varphi(S)$, so ist die aus φ und ψ zusammen-

*) Vgl. Satz 22.
**) Vgl. Satz 24.

gesetzte Abbildung $\psi\varphi$ von S ebenfalls eine ähnliche, und die zugehörige umgekehrte Abbildung $\overline{\psi\varphi}$ ist $= \overline{\varphi}\,\overline{\psi}$.

Beweis. Denn verschiedenen Elementen a, b von S entsprechen verschiedene Bilder $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$, und diesen wieder verschiedene Bilder $\psi(a') = \psi\varphi(a)$, $\psi(b') = \psi\varphi(b)$, also ist $\psi\varphi$ eine ähnliche Abbildung. Außerdem geht jedes Element $\psi\varphi(s) = \psi(s')$ des Systems $\psi\varphi(S)$ durch $\overline{\psi}$ in $s' = \varphi(s)$ und dieses durch $\overline{\varphi}$ in s über, also geht $\psi\varphi(s)$ durch $\overline{\varphi}\,\overline{\psi}$ in s über, w. z. b. w.

32. Erklärung. Die Systeme R, S heißen ähnlich, wenn es eine derartige ähnliche Abbildung φ von S gibt, daß $\varphi(S) = R$, also auch $\overline{\varphi}(R) = S$ wird. Offenbar ist nach 30 jedes System sich selbst ähnlich.

33. Satz. Sind R, S ähnliche Systeme, so ist jedes mit R ähnliche System Q auch mit S ähnlich.

Beweis. Denn sind φ, ψ solche ähnliche Abbildungen von S, R, daß $\varphi(S) = R$, $\psi(R) = Q$ wird, so ist (nach 31) $\psi\varphi$ eine solche ähnliche Abbildung von S, daß $\psi\varphi(S) = Q$ wird, w. z. b. w.

34. Erklärung. Man kann daher alle Systeme in Klassen einteilen, indem man in eine bestimmte Klasse alle und nur die Systeme $Q, R, S \ldots$ aufnimmt, welche einem bestimmten System R, dem Repräsentanten der Klasse, ähnlich sind; nach dem vorhergehenden Satze 33 ändert sich die Klasse nicht, wenn irgendein anderes ihr angehöriges System S als Repräsentant gewählt wird.

35. Satz. Sind R, S ähnliche Systeme, so ist jeder Teil von S auch einem Teile von R, jeder echte Teil von S auch einem echten Teile von R ähnlich.

Beweis. Denn wenn φ eine ähnliche Abbildung von S, $\varphi(S) = R$, und $T \mathfrak{3} S$ ist, so ist nach 22 das mit T ähnliche System $\varphi(T) \mathfrak{3} R$; ist ferner T echter Teil von S, und s ein nicht in T enthaltenes Element von S, so kann das in R enthaltene Element $\varphi(s)$ nach 27 nicht in $\varphi(T)$ enthalten sein; mithin ist $\varphi(T)$ echter Teil von R, w. z. b. w.

§ 4.

Abbildung eines Systems in sich selbst.

36. Erklärung. Ist φ eine ähnliche oder unähnliche Abbildung eines Systems S, und $\varphi(S)$ Teil eines Systems Z, so nennen wir φ eine Abbildung von S in Z, und wir sagen, S werde durch φ in Z

abgebildet. Wir nennen daher φ eine Abbildung des Systems S in **sich selbst**, wenn $\varphi(S) 3 S$ ist, und wir wollen in diesem Paragraphen die allgemeinen Gesetze einer solchen Abbildung φ untersuchen. Hierbei bedienen wir uns derselben Bezeichnungen wie in § 2, indem wir wieder $\varphi(s) = s'$, $\varphi(T) = T'$ setzen. Diese Bilder s', T' sind zufolge 22, 7 jetzt selbst wieder Elemente oder Teile von S, wie alle mit lateinischen Buchstaben bezeichneten Dinge.

37. **Erklärung.** K heißt eine **Kette**, wenn $K' 3 K$ ist. Wir bemerken ausdrücklich, daß dieser Name dem Teile K des Systems S nicht etwa an sich zukommt, sondern nur in Beziehung auf die bestimmte Abbildung φ erteilt wird; in bezug auf eine andere Abbildung des Systems S in sich selbst kann K sehr wohl keine Kette sein.

38. **Satz.** S ist eine Kette.

39. **Satz.** Das Bild K' einer Kette K ist eine Kette.

Beweis. Denn aus $K' 3 K$ folgt nach 22 auch $(K')' 3 K'$, w. z. b. w.

40. **Satz.** Ist A Teil einer Kette K, so ist auch $A' 3 K$.

Beweis. Denn aus $A 3 K$ folgt (nach 22) $A' 3 K'$, und da (nach 37) $K' 3 K$ ist, so folgt (nach 7) $A' 3 K$, w. z. b. w.

41. **Satz.** Ist das Bild A' Teil einer Kette L, so gibt es eine Kette K, welche den Bedingungen $A 3 K$, $K' 3 L$ genügt; und zwar ist $\mathfrak{M}(A, L)$ eine solche Kette K.

Beweis. Setzt man wirklich $K = \mathfrak{M}(A, L)$, so ist nach 9 die eine Bedingung $A 3 K$ erfüllt. Da nach 23 ferner $K' = \mathfrak{M}(A', L')$ und nach Annahme $A' 3 L$, $L' 3 L$ ist, so ist nach 10 auch die andere Bedingung $K' 3 L$ erfüllt, und hieraus folgt, weil (nach 9) $L 3 K$ ist, auch $K' 3 K$, d. h. K ist eine Kette, w. z. b. w.

42. **Satz.** Ein aus lauter Ketten $A, B, C \ldots$ zusammengesetztes System M ist eine Kette.

Beweis. Da (nach 23) $M' = \mathfrak{M}(A', B', C' \ldots)$ und nach Annahme $A' 3 A$, $B' 3 B$, $C' 3 C \ldots$ ist, so folgt (nach 12) $M' 3 M$, w. z. b. w.

43. **Satz.** Die Gemeinheit G von lauter Ketten $A, B, C \ldots$ ist eine Kette.

Beweis. Da G nach 17 Gemeinteil von $A, B, C \ldots$, also G' nach 22 Gemeinteil von $A', B', C' \ldots$ und nach Annahme $A' 3 A$, $B' 3 B$, $C' 3 C \ldots$ ist, so ist (nach 7) G' auch Gemeinteil von $A, B, C \ldots$ und folglich nach 18 auch Teil von G, w. z. b. w.

44. **Erklärung.** Ist A irgendein Teil von S, so wollen wir mit A_0 die Gemeinheit aller derjenigen Ketten (z. B. S) bezeichnen, von welchen A Teil ist; diese Gemeinheit A_0 existiert (vgl. 17), weil ja A selbst Gemeinteil aller dieser Ketten ist. Da ferner A_0 nach 43 eine Kette ist, so wollen wir A_0 die **Kette des Systems** A oder kurz die Kette von A nennen. Auch diese Erklärung bezieht sich durchaus auf die zugrunde liegende bestimmte Abbildung φ des Systems S in sich selbst, und wenn es später der Deutlichkeit wegen nötig wird, so wollen wir statt A_0 lieber das Zeichen $\varphi_0(A)$ setzen, und ebenso werden wir die einer anderen Abbildung ω entsprechende Kette von A mit $\omega_0(A)$ bezeichnen. Es gelten nun für diesen sehr wichtigen Begriff die folgenden Sätze.

45. **Satz.** Es ist $A 3 A_0$.

Beweis. Denn A ist Gemeinteil aller derjenigen Ketten, deren Gemeinheit A_0 ist, woraus der Satz nach 18 folgt.

46. **Satz.** Es ist $(A_0)' 3 A_0$.

Beweis. Denn nach 44 ist A_0 eine Kette (37).

47. **Satz.** Ist A Teil einer Kette K, so ist auch $A_0 3 K$.

Beweis. Denn A_0 ist die Gemeinheit und folglich auch ein Gemeinteil aller der Ketten K, von denen A Teil ist.

48. **Bemerkung.** Man überzeugt sich leicht, daß der in 44 erklärte Begriff der Kette A_0 durch die vorstehenden Sätze 45, 46, 47 vollständig charakterisiert ist.

49. **Satz.** Es ist $A' 3 (A_0)'$.

Der Beweis folgt aus 45, 22.

50. **Satz.** Es ist $A' 3 A_0$.

Der Beweis folgt aus 49, 46, 7.

51. **Satz.** Ist A eine Kette, so ist $A_0 = A$.

Beweis. Da A Teil der Kette A ist, so ist nach 47 auch $A_0 3 A$, woraus nach 45, 5 der Satz folgt.

52. **Satz.** Ist $B 3 A$, so ist $B 3 A_0$.

Der Beweis folgt aus 45, 7.

53. **Satz.** Ist $B 3 A_0$, so ist $B_0 3 A_0$, und umgekehrt.

Beweis. Weil A_0 eine Kette ist, so folgt nach 47 aus $B 3 A_0$ auch $B_0 3 A_0$; umgekehrt, wenn $B_0 3 A_0$, so folgt nach 7 auch $B 3 A_0$, weil (nach 45) $B 3 B_0$ ist.

54. **Satz.** Ist $B 3 A$, so ist $B_0 3 A_0$.

Der Beweis folgt aus 52, 53.

55. Satz. Ist $B\,3\,A_0$, so ist auch $B'\,3\,A_0$.

Beweis. Denn nach 53 ist $B_0\,3\,A_0$, und da (nach 50) $B'\,3\,B_0$ ist, so folgt der zu beweisende Satz aus 7. Dasselbe ergibt sich, wie leicht zu sehen, auch aus 22, 46, 7 oder auch aus 40.

56. Satz. Ist $B\,3\,A_0$, so ist $(B_0)'\,3\,(A_0)'$.

Der Beweis folgt aus 53, 22.

57. Satz und Erklärung. Es ist $(A_0)' = (A')_0$, d. h. das Bild der Kette von A ist zugleich die Kette des Bildes von A. Man kann daher dieses System kurz durch A'_0 bezeichnen und nach Belieben das Kettenbild oder die Bildkette von A nennen. Nach der deutlicheren in 44 angegebenen Bezeichnung würde der Satz durch $\varphi(\varphi_0(A)) = \varphi_0(\varphi(A))$ auszudrücken sein.

Beweis. Setzt man zur Abkürzung $(A')_0 = L$, so ist L eine Kette (44), und nach 45 ist $A'\,3\,L$, mithin gibt es nach 41 eine Kette K, welche den Bedingungen $A\,3\,K$, $K'\,3\,L$ genügt; hieraus folgt nach 47 auch $A_0\,3\,K$, also $(A_0)'\,3\,K'$, und folglich nach 7 auch $(A_0)'\,3\,L$, d. h.

$$(A_0)'\,3\,(A')_0.$$

Da nach 49 ferner $A'\,3\,(A_0)'$ und $(A_0)'$ nach 44, 39 eine Kette ist, so ist nach 47 auch

$$(A')_0\,3\,(A_0)',$$

woraus in Verbindung mit dem obigen Ergebnis der zu beweisende Satz folgt (5).

58. Satz. Es ist $A_0 = \mathfrak{M}(A, A'_0)$, d. h. die Kette von A ist zusammengesetzt aus A und der Bildkette von A.

Beweis. Setzt man zur Abkürzung wieder

$$L = A'_0 = (A_0)' = (A')_0 \text{ und } K = \mathfrak{M}(A, L),$$

so ist (nach 45) $A'\,3\,L$, und da L eine Kette ist, so gilt nach 41 dasselbe von K; da ferner $A\,3\,K$ ist (9), so folgt nach 47 auch

$$A_0\,3\,K.$$

Andererseits, da (nach 45) $A\,3\,A_0$ und nach 46 auch $L\,3\,A_0$, so ist nach 10 auch

$$K\,3\,A_0,$$

woraus in Verbindung mit dem obigen Ergebnis der zu beweisende Satz $A_0 = K$ folgt (5).

59. Satz der vollständigen Induktion. Um zu beweisen, daß die Kette A_0 Teil irgendeines Systems Σ ist — mag letzteres Teil von S sein oder nicht —, genügt es zu zeigen,

ϱ. daß $A\,3\,\Sigma$, und

σ. daß das Bild jedes gemeinsamen Elementes von A_0 und Σ ebenfalls Element von Σ ist.

Beweis. Denn wenn ϱ wahr ist, so existiert nach 45 jedenfalls die Gemeinheit $G = \mathfrak{G}(A_0, \Sigma)$, und zwar ist (nach 18) $A\,3\,G$; da außerdem nach 17

$$G\,3\,A_0$$

ist, so ist G auch Teil unseres Systems S, welches durch φ in sich selbst abgebildet ist, und zugleich folgt nach 55 auch $G'\,3\,A_0$. Wenn nun σ ebenfalls wahr, d. h. wenn $G'\,3\,\Sigma$ ist, so muß G' als Gemeinteil der Systeme A_0, Σ nach 18 Teil ihrer Gemeinheit G sein, d. h. G ist eine Kette (37), und da, wie schon oben bemerkt, $A\,3\,G$ ist, so folgt nach 47 auch

$$A_0\,3\,G$$

und hieraus in Verbindung mit dem obigen Ergebnis $G = A_0$, also nach 17 auch $A_0\,3\,\Sigma$, w. z. b. w.

60. Der vorstehende Satz bildet, wie sich später zeigen wird, die wissenschaftliche Grundlage für die unter dem Namen der vollständigen Induktion (des Schlusses von n auf $n+1$) bekannte Beweisart, und er kann auch auf folgende Weise ausgesprochen werden: Um zu beweisen, daß alle Elemente der Kette A_0 eine gewisse Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder daß ein Satz $\mathfrak{S}$, in welchem von einem unbestimmten Dinge n die Rede ist, wirklich für alle Elemente n der Kette A_0 gilt), genügt es zu zeigen,

ϱ. daß alle Elemente a des Systems A die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder daß $\mathfrak{S}$ für alle a gilt), und

σ. daß dem Bilde n' jedes solchen Elementes n von A_0, welches die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt, dieselbe Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt (oder daß der Satz $\mathfrak{S}$, sobald er für ein Element n von A_0 gilt, gewiß auch für dessen Bild n' gelten muß).

In der Tat, bezeichnet man mit Σ das System aller Dinge, welche die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder für welche der Satz $\mathfrak{S}$ gilt), so leuchtet die vollständige Übereinstimmung der jetzigen Ausdrucksweise des Satzes mit der in 59 gebrauchten unmittelbar ein.

61. Satz. Die Kette von $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$ ist $\mathfrak{M}(A_0, B_0, C_0 \ldots)$.

Beweis. Bezeichnet man mit M das erstere, mit K das letztere System, so ist K nach 42 eine Kette. Da nun jedes der Systeme

$A, B, C \ldots$ nach 45 Teil von einem der Systeme $A_0, B_0, C_0 \ldots$, mithin (nach 12) $M \mathrel{3} K$ ist, so folgt nach 47 auch

$$M_0 \mathrel{3} K.$$

Andererseits, da nach 9 jedes der Systeme $A, B, C \ldots$ Teil von M, also nach 45, 7 auch Teil der Kette M_0 ist, so muß nach 47 auch jedes der Systeme $A_0, B_0, C_0 \ldots$ Teil von M_0, mithin nach 10

$$K \mathrel{3} M_0$$

sein, woraus in Verbindung mit dem Obigen der zu beweisende Satz $M_0 = K$ folgt (5).

62. Satz. Die Kette von $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$ ist Teil von $\mathfrak{G}(A_0, B_0, C_0 \ldots)$.

Beweis. Bezeichnet man mit G das erstere, mit K das letztere System, so ist K nach 43 eine Kette. Da nun jedes der Systeme $A_0, B_0, C_0 \ldots$ nach 45 Ganzes von einem der Systeme $A, B, C \ldots$, mithin (nach 20) $G \mathrel{3} K$ ist, so folgt aus 47 der zu beweisende Satz $G_0 \mathrel{3} K$.

63. Satz. Ist $K' \mathrel{3} L \mathrel{3} K$, also K eine Kette, so ist auch L eine Kette. Ist dieselbe echter Teil von K, und U das System aller derjenigen Elemente von K, die nicht in L enthalten sind, ist ferner die Kette U_0 echter Teil von K, und V das System aller derjenigen Elemente von K, die nicht in U_0 enthalten sind, so ist $K = \mathfrak{M}(U_0, V)$ und $L = \mathfrak{M}(U'_0, V)$. Ist endlich $L = K'$, so ist $V \mathrel{3} V'$.

Der Beweis dieses Satzes, von dem wir (wie von den beiden vorhergehenden) keinen Gebrauch machen werden, möge dem Leser überlassen bleiben.

§ 5.

Das Endliche und Unendliche.

64. Erklärung*). Ein System S heißt unendlich, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist (32); im entgegengesetzten Falle heißt S ein endliches System.

---

*) Will man den Begriff ähnlicher Systeme (32) nicht benutzen, so muß man sagen: S heißt unendlich, wenn es einen echten Teil von S gibt (6), in welchem S sich deutlich (ähnlich) abbilden läßt (26, 36). In dieser Form habe ich die Definition des Unendlichen, welche den Kern meiner ganzen Untersuchung bildet, im September 1882 Herrn G. Cantor und schon mehrere Jahre früher auch den Herren Schwarz und Weber mitgeteilt. Alle anderen mir bekannten Versuche, das Unendliche vom Endlichen zu unterscheiden, scheinen mir so wenig gelungen zu sein, daß ich auf eine Kritik derselben verzichten zu dürfen glaube.

65. Satz. Jedes aus einem einzigen Elemente bestehende System ist endlich.

Beweis. Denn ein solches System besitzt gar keinen echten Teil (2, 6).

66. Satz. Es gibt unendliche Systeme.

Beweis*). Meine Gedankenwelt, d. h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn s ein Element von S bedeutet, so ist der Gedanke s', daß s Gegenstand meines Denkens sein kann, selbst ein Element von S. Sieht man dasselbe als Bild $\varphi(s)$ des Elementes s an, so hat daher die hierdurch bestimmte Abbildung φ von S die Eigenschaft, daß das Bild S' Teil von S ist; und zwar ist S' echter Teil von S, weil es in S Elemente gibt (z. B. mein eigenes Ich), welche von jedem solchen Gedanken s' verschieden und deshalb nicht in S' enthalten sind. Endlich leuchtet ein, daß, wenn a, b verschiedene Elemente von S sind, auch ihre Bilder a', b' verschieden sind, daß also die Abbildung φ eine deutliche (ähnliche) ist (26). Mithin ist S unendlich, w. z. b. w.

67. Satz. Sind R, S ähnliche Systeme, so ist R endlich oder unendlich, je nachdem S endlich oder unendlich ist.

Beweis. Ist S unendlich, also ähnlich einem echten Teile S' seiner selbst, so muß, wenn R und S ähnlich sind, S' nach 33 ähnlich mit R und nach 35 zugleich ähnlich mit einem echten Teile von R sein, welcher mithin nach 33 selbst ähnlich mit R ist; also ist R unendlich, w. z. b. w.

68. Satz. Jedes System S, welches einen unendlichen Teil T besitzt, ist ebenfalls unendlich; oder mit anderen Worten, jeder Teil eines endlichen Systems ist endlich.

Beweis. Ist T unendlich, gibt es also eine solche ähnliche Abbildung ψ von T, daß $\psi(T)$ ein echter Teil von T wird, so kann man, wenn T Teil von S ist, diese Abbildung ψ zu einer Abbildung φ von S erweitern, indem man, wenn s irgendein Element von S bedeutet, $\varphi(s) = \psi(s)$ oder $\varphi(s) = s$ setzt, je nachdem s Element von T ist oder nicht. Diese Abbildung φ ist eine ähnliche; bedeuten nämlich a, b verschiedene Elemente von S, so ist, wenn sie zugleich

---

*) Eine ähnliche Betrachtung findet sich in § 13 der Paradoxien des Unendlichen von Bolzano (Leipzig 1851).

in T enthalten sind, das Bild $\varphi(a) = \psi(a)$ verschieden von dem Bilde $\varphi(b) = \psi(b)$, weil ψ eine ähnliche Abbildung ist; wenn ferner a in T, b nicht in T enthalten ist, so ist $\varphi(a) = \psi(a)$ verschieden von $\varphi(b) = b$, weil $\psi(a)$ in T enthalten ist; wenn endlich weder a noch b in T enthalten ist, so ist ebenfalls $\varphi(a) = a$ verschieden von $\varphi(b) = b$, was zu zeigen war. Da ferner $\psi(T)$ Teil von T, also nach 7 auch Teil von S ist, so leuchtet ein, daß auch $\varphi(S) \mathfrak{3} S$ ist. Da endlich $\psi(T)$ echter Teil von T ist, so gibt es in T, also auch in S ein Element t, welches nicht in $\psi(T) = \varphi(T)$ enthalten ist; da nun das Bild $\varphi(s)$ jedes nicht in T enthaltenen Elementes s selbst $= s$, also auch von t verschieden ist, so kann t überhaupt nicht in $\varphi(S)$ enthalten sein; mithin ist $\varphi(S)$ echter Teil von S, und folglich ist S unendlich, w. z. b. w.

69. Satz. Jedes System, welches einem Teile eines endlichen Systems ähnlich ist, ist selbst endlich.

Der Beweis folgt aus 67, 68.

70. Satz. Ist a ein Element von S, und ist der Inbegriff T aller von a verschiedenen Elemente von S endlich, so ist auch S endlich.

Beweis. Wir haben (nach 64) zu zeigen, daß, wenn φ irgendeine ähnliche Abbildung von S in sich selbst bedeutet, das Bild $\varphi(S)$ oder S' niemals ein echter Teil von S, sondern immer $= S$ ist. Offenbar ist $S = \mathfrak{M}(a, T)$, und folglich nach 23, wenn die Bilder wieder durch Akzente bezeichnet werden, $S' = \mathfrak{M}(a', T')$, und wegen der Ähnlichkeit der Abbildung φ ist a' nicht in T' enthalten (26). Da ferner nach Annahme $S' \mathfrak{3} S$ ist, so muß a' und ebenso jedes Element von T' entweder $= a$ oder Element von T sein. Wenn daher — welchen Fall wir zunächst behandeln wollen — a nicht in T' enthalten ist, so muß $T' \mathfrak{3} T$ und folglich $T' = T$ sein, weil φ eine ähnliche Abbildung und weil T ein endliches System ist; und da a', wie bemerkt, nicht in T', d. h. nicht in T enthalten ist, so muß $a' = a$ sein, und folglich ist in diesem Falle wirklich $S' = S$, wie behauptet war. Im entgegengesetzten Falle, wenn a in T' enthalten und folglich das Bild b' eines in T enthaltenen Elementes b ist, wollen wir mit U den Inbegriff aller derjenigen Elemente u von T bezeichnen, welche von b verschieden sind; dann ist $T = \mathfrak{M}(b, U)$ und (nach 15) $S = \mathfrak{M}(a, b, U)$, also $S' = \mathfrak{M}(a', a, U')$. Wir bestimmen nun eine neue Abbildung ψ von T, indem wir $\psi(b) = a'$

und allgemein $\psi(u) = u'$ setzen, wodurch (nach 23) $\psi(T) = \mathfrak{M}(a', U')$ wird. Offenbar ist ψ eine ähnliche Abbildung, weil φ eine solche war, und weil a nicht in U, also auch a' nicht in U' enthalten ist. Da ferner a und jedes Element u verschieden von b ist, so muß (wegen der Ähnlichkeit von φ) auch a' und jedes Element u' verschieden von a und folglich in T enthalten sein; mithin ist $\psi(T) \mathfrak{3} T$, und da T endlich ist, so muß $\psi(T) = T$, also $\mathfrak{M}(a', U') = T$ sein. Hieraus folgt aber (nach 15)

$$\mathfrak{M}(a', a, U') = \mathfrak{M}(a, T),$$

d. h. nach dem Obigen $S' = S$. Also ist auch in diesem Falle der erforderliche Beweis geführt.

§ 6.

Einfach unendliche Systeme. Reihe der natürlichen Zahlen.

71. Erklärung. Ein System N heißt einfach unendlich, wenn es eine solche ähnliche Abbildung φ von N in sich selbst gibt, daß N als Kette (44) eines Elementes erscheint, welches nicht in $\varphi(N)$ enthalten ist. Wir nennen dies Element, das wir im folgenden durch das Symbol 1 bezeichnen wollen, das Grundelement von N und sagen zugleich, das einfach unendliche System N sei durch diese Abbildung φ geordnet. Behalten wir die früheren bequemen Bezeichnungen für die Bilder und Ketten bei (§ 4), so besteht mithin das Wesen eines einfach unendlichen Systems N in der Existenz einer Abbildung φ von N und eines Elementes 1, die den folgenden Bedingungen α, β, γ, δ genügen:

α. $N' \mathfrak{3} N$.

β. $N = 1_0$.

γ. Das Element 1 ist nicht in N' enthalten.

δ. Die Abbildung φ ist ähnlich.

Offenbar folgt aus α, γ, δ, daß jedes einfach unendliche System N wirklich ein unendliches System ist (64), weil es einem echten Teile N' seiner selbst ähnlich ist.

72. Satz. In jedem unendlichen System S ist ein einfach unendliches System N als Teil enthalten.

Beweis. Es gibt nach 64 eine solche ähnliche Abbildung φ von S, daß $\varphi(S)$ oder S' ein echter Teil von S wird; es gibt also ein Element 1 in S, welches nicht in S' enthalten ist. Die Kette

$N = 1_0$, welche dieser Abbildung φ des Systems S in sich selbst entspricht (44), ist ein einfach unendliches, durch φ geordnetes System; denn die charakteristischen Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in 71 sind offenbar sämtlich erfüllt.

73. Erklärung. Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffaßt, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zueinander gesetzt sind, so heißen diese Elemente natürliche Zahlen oder Ordinalzahlen oder auch schlechthin Zahlen, und das Grundelement 1 heißt die Grundzahl der Zahlenreihe N. In Rücksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraktion) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen. Die Beziehungen oder Gesetze, welche ganz allein aus den Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in 71 abgeleitet werden und deshalb in allen geordneten einfach unendlichen Systemen immer dieselben sind, wie auch die den einzelnen Elementen zufällig gegebenen Namen lauten mögen (vgl. 134), bilden den nächsten Gegenstand der Wissenschaft von den Zahlen oder der Arithmetik. Aus den allgemeinen Begriffen und Sätzen des § 4 über Abbildung eines Systems in sich selbst entnehmen wir zunächst unmittelbar die folgenden Grundsätze, wobei unter $a, b \ldots m, n \ldots$ stets Elemente von N, also Zahlen, unter $A, B, C \ldots$ Teile von N, unter $a', b' \ldots m', n' \ldots A', B', C' \ldots$ die entsprechenden Bilder verstanden werden, welche durch die ordnende Abbildung φ erzeugt und stets wieder Elemente oder Teile von N sind; das Bild n' einer Zahl n wird auch die auf n folgende Zahl genannt.

74. Satz. Jede Zahl n ist nach 45 in ihrer Kette n_0 enthalten, und nach 53 ist die Bedingung $n \mathfrak{Z} m_0$ gleichwertig mit $n_0 \mathfrak{Z} m_0$.

75. Satz. Zufolge 57 ist $n'_0 = (n_0)' = (n')_0$.

76. Satz. Zufolge 46 ist $n'_0 \mathfrak{Z} n_0$.

77. Satz. Zufolge 58 ist $n_0 = \mathfrak{M}(n, n'_0)$.

78. Satz. Es ist $N = \mathfrak{M}(1, N')$, also ist jede von der Grundzahl 1 verschiedene Zahl Element von N', d. h. Bild einer Zahl.

Der Beweis folgt aus 77 und 71.

79. Satz. N ist die einzige Zahlenkette, in welcher die Grundzahl 1 enthalten ist.

Beweis. Denn wenn 1 Element einer Zahlenkette K ist, so ist nach 47 die zugehörige Kette $N \mathfrak{Z} K$, folglich $N = K$, weil selbstverständlich $K \mathfrak{Z} N$ ist.

80. Satz der vollständigen Induktion (Schluß von n auf n'). Um zu beweisen, daß ein Satz für alle Zahlen n einer Kette m_0 gilt, genügt es zu zeigen,

ρ. daß er für $n = m$ gilt, und

σ. daß aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl n der Kette m_0 stets seine Gültigkeit auch für die folgende Zahl n' folgt.

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem allgemeineren Satze 59 oder 60. Am häufigsten wird der Fall auftreten, wo $m = 1$, also m_0 die volle Zahlenreihe N ist.

§ 7.

Größere und kleinere Zahlen.

81. Satz. Jede Zahl n ist verschieden von der auf sie folgenden Zahl n'.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist wahr für die Zahl $n = 1$, weil sie nicht in N' enthalten ist (71), während die folgende Zahl $1'$ als Bild der in N enthaltenen Zahl 1 Element von N' ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, und setzt man die folgende Zahl $n' = p$, so ist n verschieden von p, woraus nach 26 wegen der Ähnlichkeit (71) der ordnenden Abbildung φ folgt, daß n', also p verschieden von p' ist. Mithin gilt der Satz auch für die auf n folgende Zahl p, w. z. b. w.

82. Satz. In der Bildkette n'_0 einer Zahl n ist zwar (nach 74, 75) deren Bild n', nicht aber die Zahl n selbst enthalten.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist wahr für $n = 1$, weil $1'_0 = N'$, und weil nach 71 die Grundzahl 1 nicht in N' enthalten ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, und setzt man wieder $n' = p$, so ist n nicht in p_0 enthalten, also verschieden von jeder in p_0 enthaltenen Zahl q, woraus wegen der Ähnlichkeit von φ folgt, daß n', also p verschieden von jeder in p'_0 enthaltenen Zahl q', also nicht in p'_0 enthalten ist. Mithin gilt der Satz auch für die auf n folgende Zahl p, w. z. b. w.

83. Satz. Die Bildkette n_0' ist echter Teil der Kette n_0.

Der Beweis folgt aus 76, 74, 82.

84. Satz. Aus $m_0 = n_0$ folgt $m = n$.

Beweis. Da (nach 74) m in m_0 enthalten, und

$$m_0 = n_0 = \mathfrak{M}(n, n_0')$$

ist (77), so müßte, wenn der Satz falsch, also m verschieden von n wäre, m in der Kette n_0' enthalten, folglich nach 74 auch $m_0 \mathfrak{3} n_0'$, d. h. $n_0 \mathfrak{3} n_0'$ sein; da dies dem Satze 83 widerspricht, so ist unser Satz bewiesen.

85. Satz. Wenn die Zahl n nicht in der Zahlenkette K enthalten ist, so ist $K \mathfrak{3} n_0'$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist nach 78 wahr für $n = 1$.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, so gilt er auch für die folgende Zahl $p = n'$; denn wenn p in der Zahlenkette K nicht enthalten ist, so kann nach 40 auch n nicht in K enthalten sein, und folglich ist nach unserer Annahme $K \mathfrak{3} n_0'$; da nun (nach 77) $n_0' = p_0 = \mathfrak{M}(p, p_0')$, also $K \mathfrak{3} \mathfrak{M}(p, p_0')$, und p nicht in K enthalten ist, so muß $K \mathfrak{3} p_0'$ sein, w. z. b. w.

86. Satz. Wenn die Zahl n nicht in der Zahlenkette K enthalten ist, wohl aber ihr Bild n', so ist $K = n_0'$.

Beweis. Da n nicht in K enthalten ist, so ist (nach 85) $K \mathfrak{3} n_0'$, und da $n' \mathfrak{3} K$, so ist nach 47 auch $n_0' \mathfrak{3} K$, folglich $K = n_0'$, w. z. b. w.

87. Satz. In jeder Zahlenkette K gibt es eine und (nach 84) nur eine Zahl k, deren Kette $k_0 = K$ ist.

Beweis. Ist die Grundzahl 1 in K enthalten, so ist (nach 79) $K = N = 1_0$. Im entgegengesetzten Falle sei Z das System aller nicht in K enthaltenen Zahlen; da die Grundzahl 1 in Z enthalten, aber Z nur ein echter Teil der Zahlenreihe N ist, so kann (nach 79) Z keine Kette, d. h. Z' kann nicht Teil von Z sein; es gibt daher in Z eine Zahl n, deren Bild n' nicht in Z, also gewiß in K enthalten ist; da ferner n in Z, also nicht in K enthalten ist, so ist (nach 86) $K = n_0'$, also $k = n'$, w. z. b. w.

88. Satz. Sind m, n verschiedene Zahlen, so ist eine und (nach 83, 84) nur eine der Ketten m_0, n_0 echter Teil der anderen, und zwar ist entweder $n_0 \mathfrak{3} m_0'$ oder $m_0 \mathfrak{3} n_0'$.

Beweis. Ist n in m_0 enthalten, also nach 74 auch $n_0 \mathfrak{3} m_0$, so kann m nicht in der Kette n_0 enthalten sein (weil sonst nach 74 auch $m_0 \mathfrak{3} n_0$, also $m_0 = n_0$, mithin nach 84 auch $m = n$ wäre), und hieraus folgt nach 85, daß $n_0 \mathfrak{3} m_0'$ ist. Im entgegengesetzten Falle, wenn n nicht in der Kette m_0 enthalten ist, muß (nach 85) $m_0 \mathfrak{3} n_0'$ sein, w. z. b. w.

89. Erklärung. Die Zahl m heißt kleiner als die Zahl n, und zugleich heißt n größer als m, in Zeichen

$$m < n \quad \text{und} \quad n > m,$$

wenn die Bedingung

$$n_0 \mathfrak{3} m_0'$$

erfüllt ist, welche nach 74 auch durch

$$n \mathfrak{3} m_0'$$

ausgedrückt werden kann.

90. Satz. Sind m, n irgendwelche Zahlen, so findet immer einer und nur einer der folgenden Fälle λ, μ, ν statt:

$$\begin{aligned} &\lambda.\ m = n, \quad n = m, \text{ d. h. } m_0 = n_0, \\ &\mu.\ m < n, \quad n > m, \text{ d. h. } n_0 \mathfrak{3} m_0', \\ &\nu.\ m > n, \quad n < m, \text{ d. h. } m_0 \mathfrak{3} n_0'. \end{aligned}$$

Beweis. Denn wenn λ stattfindet (84), so kann weder μ noch ν eintreten, weil nach 83 niemals $n_0 \mathfrak{3} n_0'$ ist. Wenn aber λ nicht stattfindet, so tritt nach 88 einer und nur einer der Fälle μ, ν ein, w. z. b. w.

91. Satz. Es ist $n < n'$.

Beweis. Denn die Bedingung für den Fall ν in 90 wird durch $m = n'$ erfüllt.

92. Erklärung. Um auszudrücken, daß m entweder $= n$ oder $< n$, also nicht $> n$ ist (90), bedient man sich der Bezeichnung

$$m \leqq n \quad \text{oder auch} \quad n \geqq m,$$

und man sagt, m sei höchstens gleich n, und n sei mindestens gleich m.

93. Satz. Jede der Bedingungen

$$m \leqq n, \quad m < n', \quad n_0 \mathfrak{3} m_0$$

ist gleichwertig mit jeder der anderen.

Beweis. Denn wenn $m \leqq n$, so folgt aus λ, μ in 90 immer $n_0 \mathfrak{3} m_0$, weil (nach 76) $m_0' \mathfrak{3} m_0$ ist. Umgekehrt, wenn $n_0 \mathfrak{3} m_0$, also nach 74 auch $n \mathrel{3} m_0$ ist, so folgt aus $m_0 = \mathfrak{M}(m, m_0')$, daß entweder $n = m$ oder $n \mathrel{3} m_0'$, d. h. $n > m$ ist. Mithin ist die Bedingung $m \leqq n$ gleichwertig mit $n_0 \mathrel{3} m_0$. Außerdem folgt aus 22, 27, 75, daß diese Bedingung $n_0 \mathrel{3} m_0$ wieder gleichwertig mit $n_0' \mathrel{3} m_0'$, d. h. (nach μ in 90) mit $m < n'$ ist, w. z. b. w.

94. *Satz.* Jede der Bedingungen

$$m' \leqq n, \quad m' < n', \quad m < n$$

ist gleichwertig mit jeder der anderen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus 93, wenn man dort m durch m' ersetzt, und aus μ in 90.

95. *Satz.* Wenn $l < m$ und $m \leqq n$, oder wenn $l \leqq m$ und $m < n$, so ist $l < n$. Wenn aber $l \leqq m$ und $m \leqq n$, so ist $l \leqq n$.

Beweis. Denn aus den (nach 89, 93) entsprechenden Bedingungen $m_0 \mathrel{3} l_0'$ und $n_0 \mathrel{3} m_0$ folgt (nach 7) $n_0 \mathrel{3} l_0'$, und dasselbe folgt auch aus den Bedingungen $m_0 \mathrel{3} l_0$ und $n_0 \mathrel{3} m_0'$, weil zufolge der ersteren auch $m_0' \mathrel{3} l_0'$ ist. Endlich folgt aus $m_0 \mathrel{3} l_0$ und $n_0 \mathrel{3} m_0$ auch $n_0 \mathrel{3} l_0$, w. z. b. w.

96. *Satz.* In jedem Teile T von N gibt es eine und nur eine *kleinste* Zahl k, d. h. eine Zahl k, welche kleiner ist als jede andere in T enthaltene Zahl. Besteht T aus einer einzigen Zahl, so ist dieselbe auch die kleinste Zahl in T.

Beweis. Da T_0 eine Kette ist (44), so gibt es nach 87 eine Zahl k, deren Kette $k_0 = T_0$ ist. Da hieraus (nach 45, 77) $T \mathrel{3} \mathfrak{M}(k, k_0')$ folgt, so muß zunächst k selbst in T enthalten sein (weil sonst $T \mathrel{3} k_0'$, also nach 47 auch $T_0 \mathrel{3} k_0'$, d. h. $k_0 \mathrel{3} k_0'$ wäre, was nach 83 unmöglich ist), und außerdem muß jede von k verschiedene Zahl des Systems T in k_0' enthalten, d. h. $> k$ sein (89), woraus zugleich nach 90 folgt, daß es nur eine einzige kleinste Zahl in T gibt, w. z. b. w.

97. *Satz.* Die kleinste Zahl der Kette n_0 ist n, und die Grundzahl 1 ist die kleinste aller Zahlen.

Beweis. Denn nach 74, 93 ist die Bedingung $m \mathrel{3} n_0$ gleichwertig mit $m \geqq n$. Oder es folgt unser Satz auch unmittelbar aus dem Beweise des vorhergehenden Satzes, weil, wenn daselbst $T = n_0$ angenommen wird, offenbar $k = n$ wird (51).

98. *Erklärung.* Ist n irgendeine Zahl, so wollen wir mit Z_n das System aller Zahlen bezeichnen, welche *nicht größer* als n, also *nicht* in n_0' enthalten sind. Die Bedingung

$$m \mathrel{3} Z_n$$

ist nach 92, 93 offenbar gleichwertig mit jeder der folgenden Bedingungen:

$$m \leqq n, \quad m < n', \quad n_0 \mathrel{3} m_0.$$

99. *Satz.* Es ist $1 \mathrel{3} Z_n$ und $n \mathrel{3} Z_n$.

Der Beweis folgt aus 98 oder auch aus 71 und 82.

100. *Satz.* Jede der nach 98 gleichwertigen Bedingungen

$$m \mathrel{3} Z_n, \quad m \leqq n, \quad m < n', \quad n_0 \mathrel{3} m_0$$

ist auch gleichwertig mit der Bedingung

$$Z_m \mathrel{3} Z_n.$$

Beweis. Denn wenn $m \mathrel{3} Z_n$, also $m \leqq n$, und wenn $l \mathrel{3} Z_m$, also $l \leqq m$, so ist nach 95 auch $l \leqq n$, d. h. $l \mathrel{3} Z_n$; wenn also $m \mathrel{3} Z_n$, so ist jedes Element l des Systems Z_m auch Element von Z_n, d. h. $Z_m \mathrel{3} Z_n$. Umgekehrt, wenn $Z_m \mathrel{3} Z_n$, so muß nach 7 auch $m \mathrel{3} Z_n$ sein, weil (nach 99) $m \mathrel{3} Z_m$ ist, w. z. b. w.

101. *Satz.* Die Bedingungen für die Fälle λ, μ, ν in 90 lassen sich auch in folgender Weise darstellen:

$$\lambda. \ m = n, \quad n = m, \quad Z_m = Z_n,$$
$$\mu. \ m < n, \quad n > m, \quad Z_{m'} \mathrel{3} Z_n,$$
$$\nu. \ m > n, \quad n < m, \quad Z_{n'} \mathrel{3} Z_m.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus 90, wenn man bedenkt, daß nach 100 die Bedingungen $n_0 \mathrel{3} m_0$ und $Z_m \mathrel{3} Z_n$ gleichwertig sind.

102. *Satz.* Es ist $Z_1 = 1$.

Beweis. Denn die Grundzahl 1 ist nach 99 in Z_1 enthalten, und jede von 1 verschiedene Zahl ist nach 78 in $1_0'$, also nach 98 nicht in Z_1 enthalten, w. z. b. w.

103. *Satz.* Zufolge 98 ist $N = \mathfrak{M}(Z_n, n_0')$.

104. *Satz.* Es ist $n = \mathfrak{G}(Z_n, n_0)$, d. h. n ist das einzige gemeinsame Element der Systeme Z_n und n_0.

Beweis. Aus 99 und 74 folgt, daß n in Z_n und n_0 enthalten ist; aber jedes von n verschiedene Element der Kette n_0 ist nach 77 in n_0', also nach 98 nicht in Z_n enthalten, w. z. b. w.

105. *Satz.* Zufolge 91, 98 ist die Zahl n' nicht in Z_n enthalten.

106. Satz. Ist $m < n$, so ist Z_m echter Teil von Z_n, und umgekehrt.

Beweis. Wenn $m < n$, so ist (nach 100) $Z_m 3 Z_n$, und da die nach 99 in Z_n enthaltene Zahl n nach 98 nicht in Z_m enthalten sein kann, weil $n > m$ ist, so ist Z_m echter Teil von Z_n. Umgekehrt, wenn Z_m echter Teil von Z_n, so ist (nach 100) $m \leqq n$, und da m nicht $= n$ sein kann, weil sonst auch $Z_m = Z_n$ wäre, so muß $m < n$ sein, w. z. b. w.

107. Satz. Z_n ist echter Teil von $Z_{n'}$.

Der Beweis folgt aus 106, weil (nach 91) $n < n'$ ist.

108. Satz. $Z_{n'} = \mathfrak{M}(Z_n, n')$.

Beweis. Denn jede in $Z_{n'}$ enthaltene Zahl ist (nach 98) $\leqq n'$, also entweder $= n'$, oder $< n'$ und folglich nach 98 Element von Z_n; mithin ist gewiß $Z_{n'} 3 \mathfrak{M}(Z_n, n')$. Da umgekehrt (nach 107) $Z_n 3 Z_{n'}$ und (nach 99) $n' 3 Z_{n'}$ ist, so folgt (nach 10)

$$\mathfrak{M}(Z_n, n') 3 Z_{n'},$$

woraus sich unser Satz nach 5 ergibt.

109. Satz. Das Bild Z'_n des Systems Z_n ist echter Teil des Systems $Z_{n'}$.

Beweis. Denn jede in Z'_n enthaltene Zahl ist das Bild m' einer in Z_n enthaltenen Zahl m, und da $m \leqq n$, also (nach 94) $m' \leqq n'$, so folgt (nach 98) $Z'_n 3 Z_{n'}$. Da ferner die Zahl 1 nach 99 in $Z_{n'}$, aber nach 71 nicht in dem Bilde Z'_n enthalten sein kann, so ist Z'_n echter Teil von $Z_{n'}$, w. z. b. w.

110. Satz. $Z_{n'} = \mathfrak{M}(1, Z'_n)$.

Beweis. Jede von 1 verschiedene Zahl des Systems $Z_{n'}$ ist nach 78 das Bild m' einer Zahl m, und diese muß $\leqq n$, also nach 98 in Z_n enthalten sein (weil sonst $m > n$, also nach 94 auch $m' > n'$, mithin m' nach 98 nicht in $Z_{n'}$ enthalten wäre); aus $m 3 Z_n$ folgt aber $m' 3 Z'_n$, und folglich ist gewiß

$$Z_{n'} 3 \mathfrak{M}(1, Z'_n).$$

Da umgekehrt (nach 99) $1 3 Z_{n'}$ und (nach 109) $Z'_n 3 Z_{n'}$, so folgt (nach 10) $\mathfrak{M}(1, Z'_n) 3 Z_{n'}$, und hieraus ergibt sich unser Satz nach 5.

111. Erklärung. Wenn es in einem System E von Zahlen ein Element g gibt, welches größer als jede andere in E enthaltene Zahl ist, so heißt g die größte Zahl des Systems E, und offenbar kann es nach 90 nur eine solche größte Zahl in E geben. Besteht

ein System aus einer einzigen Zahl, so ist diese selbst die größte Zahl des Systems.

112. Satz. Zufolge 98 ist n die größte Zahl des Systems Z_n.

113. Satz. Gibt es in E eine größte Zahl g, so ist $E 3 Z_g$.

Beweis. Denn jede in E enthaltene Zahl ist $\leqq g$, mithin nach 98 in Z_g enthalten, w. z. b. w.

114. Satz. Ist E Teil eines Systems Z_n, oder gibt es, was dasselbe sagt, eine Zahl n von der Art, daß alle in E enthaltenen Zahlen $\leqq n$ sind, so besitzt E eine größte Zahl g.

Beweis. Das System aller Zahlen p, welche der Bedingung $E 3 Z_p$ genügen — und nach unserer Annahme gibt es solche —, ist eine Kette (37), weil nach 107, 7 auch $E 3 Z_{p'}$ folgt, und ist daher (nach 87) $= g_0$, wo g die kleinste dieser Zahlen bedeutet (96, 97). Es ist daher auch $E 3 Z_g$, folglich (98) ist jede in E enthaltene Zahl $\leqq g$, und wir haben nur noch zu zeigen, daß die Zahl g selbst in E enthalten ist. Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn $g = 1$ ist, weil dann (nach 102) Z_g und folglich auch E aus der einzigen Zahl 1 besteht. Ist aber g von 1 verschieden und folglich nach 78 das Bild f' einer Zahl f, so ist (nach 108) $E 3 \mathfrak{M}(Z_f, g)$; wäre nun g nicht in E enthalten, so müßte $E 3 Z_f$ sein, und es gäbe daher unter den Zahlen p eine Zahl f, welche (nach 91) $< g$ ist, was dem Obigen widerspricht; mithin ist g in E enthalten, w. z. b. w.

115. Erklärung. Ist $l < m$ und $m < n$, so sagen wir, die Zahl m liege zwischen l und n (auch zwischen n und l).

116. Satz. Es gibt keine Zahl, die zwischen n und n' liegt.

Beweis. Denn sobald $m < n'$, also (nach 93) $m \leqq n$ ist, so kann nach 90 nicht $n < m$ sein, w. z. b. w.

117. Satz. Ist t eine Zahl in T, aber nicht die kleinste (96), so gibt es in T eine und nur eine nächst kleinere Zahl s, d. h. eine Zahl s von der Art, daß $s < t$, und daß es in T keine zwischen s und t liegende Zahl gibt. Ebenso gibt es, wenn nicht etwa t die größte Zahl in T ist (111), in T immer eine und nur eine nächst größere Zahl u, d. h. eine Zahl u von der Art, daß $t < u$, und daß es in T keine zwischen t und u liegende Zahl gibt. Zugleich ist t in T nächst größer als s und nächst kleiner als u.

Beweis. Wenn t nicht die kleinste Zahl in T ist, so sei E das System aller derjenigen Zahlen von T, welche $< t$ sind; dann ist (nach 98) $E \,3\, Z_t$, und folglich (114) gibt es in E eine größte Zahl s, welche offenbar die im Satze angegebenen Eigenschaften besitzt und auch die einzige solche Zahl ist. Wenn ferner t nicht die größte Zahl in T ist, so gibt es nach 96 unter allen den Zahlen von T, welche $> t$ sind, gewiß eine kleinste u, welche, und zwar allein, die im Satze angegebenen Eigenschaften besitzt. Ebenso leuchtet die Richtigkeit der Schlußbemerkung des Satzes ein.

118. Satz. In N ist die Zahl n' nächst größer als n, und n nächst kleiner als n'.

Der Beweis folgt aus 116, 117.

§ 8.

Endliche und unendliche Teile der Zahlenreihe.

119. Satz. Jedes System Z_n in 98 ist endlich.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist wahr für $n = 1$ zufolge 65, 102.

σ. Ist Z_n endlich, so folgt aus 108 und 70, daß auch $Z_{n'}$ endlich ist, w. z. b. w.

120. Satz. Sind m, n verschiedene Zahlen, so sind Z_m, Z_n unähnliche Systeme.

Beweis. Der Symmetrie wegen dürfen wir nach 90 annehmen, es sei $m < n$; dann ist Z_m nach 106 echter Teil von Z_n, und da Z_n nach 119 endlich ist, so können (nach 64) Z_m und Z_n nicht ähnlich sein, w. z. b. w.

121. Satz. Jeder Teil E der Zahlenreihe N, welcher eine größte Zahl besitzt (111), ist endlich.

Der Beweis folgt aus 113, 119, 68.

122. Satz. Jeder Teil U der Zahlenreihe N, welcher keine größte Zahl besitzt, ist einfach unendlich (71).

Beweis. Ist u irgendeine Zahl in U, so gibt es nach 117 in U eine und nur eine nächst größere Zahl als u, die wir mit $\psi(u)$ bezeichnen und als Bild von u ansehen wollen. Die hierdurch vollständig bestimmte Abbildung ψ des Systems U hat offenbar die Eigenschaft

$$\alpha.\quad \psi(U) \,3\, U,$$

d. h. U wird durch ψ in sich selbst abgebildet. Sind ferner u, v verschiedene Zahlen in U, so dürfen wir der Symmetrie wegen nach 90 annehmen, es sei $u < v$; dann folgt nach 117 aus der Definition von ψ, daß $\psi(u) \leqq v$ und $v < \psi(v)$, also (nach 95) $\psi(u) < \psi(v)$ ist; mithin sind nach 90 die Bilder $\psi(u)$, $\psi(v)$ verschieden, d. h.

δ. die Abbildung ψ ist ähnlich.

Bedeutet ferner u_1 die kleinste Zahl (96) des Systems U, so ist jede in U enthaltene Zahl $u \geqq u_1$, und da allgemein $u < \psi(u)$, so ist (nach 95) $u_1 < \psi(u)$, also ist u_1 nach 90 verschieden von $\psi(u)$, d. h.

γ. das Element u_1 von U ist nicht in $\psi(U)$ enthalten.

Mithin ist $\psi(U)$ ein echter Teil von U, und folglich ist U nach 64 ein unendliches System. Bezeichnen wir nun in Übereinstimmung mit 44, wenn V irgendein Teil von U ist, mit $\psi_0(V)$ die der Abbildung ψ entsprechende Kette von V, so wollen wir endlich noch zeigen, daß

$$\beta.\quad U = \psi_0(u_1)$$

ist. In der Tat, da jede solche Kette $\psi_0(V)$ zufolge ihrer Definition (44) ein Teil des durch ψ in sich selbst abgebildeten Systems U ist, so ist selbstverständlich $\psi_0(u_1) \,3\, U$; umgekehrt leuchtet aus 45 zunächst ein, daß das in U enthaltene Element u_1 gewiß in $\psi_0(u_1)$ enthalten ist; nehmen wir aber an, es gäbe Elemente von U, die nicht in $\psi_0(u_1)$ enthalten sind, so muß es unter ihnen nach 96 eine kleinste Zahl w geben, und da dieselbe nach dem eben Gesagten verschieden von der kleinsten Zahl u_1 des Systems U ist, so muß es nach 117 in U auch eine Zahl v geben, welche nächst kleiner als w ist, woraus zugleich folgt, daß $w = \psi(v)$ ist; da nun $v < w$, so muß v zufolge der Definition von w gewiß in $\psi_0(u_1)$ enthalten sein; hieraus folgt aber nach 55, daß auch $\psi(v)$, also w in $\psi_0(u_1)$ enthalten sein muß, und da dies im Widerspruch mit der Definition von w steht, so ist unsere obige Annahme unzulässig; mithin ist $U \,3\, \psi_0(u_1)$ und folglich auch $U = \psi_0(u_1)$, wie behauptet war. Aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geht nun nach 71 hervor, daß U ein durch ψ geordnetes einfach unendliches System ist, w. z. b. w.

123. Satz. Zufolge 121, 122 ist irgendein Teil T der Zahlenreihe N endlich oder einfach unendlich, je nachdem es in T eine größte Zahl gibt oder nicht gibt.

§ 9.

Definition einer Abbildung der Zahlenreihe durch Induktion.

124. Wir bezeichnen auch im folgenden mit kleinen lateinischen Buchstaben Zahlen und behalten überhaupt alle Bezeichnungen der vorhergehenden § 6 bis 8 bei, während Ω ein beliebiges System bedeutet, dessen Elemente nicht notwendig in N enthalten zu sein brauchen.

125. **Satz.** Ist eine beliebige (ähnliche oder unähnliche) Abbildung θ eines Systems Ω in sich selbst, und außerdem ein bestimmtes Element ω in Ω gegeben, so entspricht jeder Zahl n eine und nur eine Abbildung ψ_n des zugehörigen, in 98 erklärten Zahlensystems Z_n, welche den Bedingungen*)

I. $\psi_n(Z_n) \mathfrak{3} \Omega$,

II. $\psi_n(1) = \omega$,

III. $\psi_n(t') = \theta\,\psi_n(t)$, wenn $t < n$, genügt, wo das Zeichen $\theta\,\psi_n$ die in 25 angegebene Bedeutung hat.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist wahr für $n = 1$. In diesem Falle besteht nämlich nach 102 das System Z_n aus der einzigen Zahl 1, und die Abbildung ψ_1 ist daher schon durch II vollständig und so definiert, daß I erfüllt ist, während III gänzlich wegfällt.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, so zeigen wir, daß er auch für die folgende Zahl $p = n'$ gilt, und zwar beginnen wir mit dem Nachweise, daß es nur eine einzige entsprechende Abbildung ψ_p des Systems Z_p geben kann. In der Tat, genügt eine Abbildung ψ_p den Bedingungen

I'. $\psi_p(Z_p) \mathfrak{3} \Omega$,

II'. $\psi_p(1) = \omega$,

III'. $\psi_p(m') = \theta\,\psi_p(m)$, wenn $m < p$, so ist in ihr nach 21, weil $Z_n \mathfrak{3} Z_p$ ist (107), auch eine Abbildung von Z_n enthalten, welche offenbar denselben Bedingungen I, II, III genügt wie ψ_n und folglich mit ψ_n gänzlich übereinstimmt; für alle in Z_n enthaltenen, also (98) für alle Zahlen m, die $< p$, d. h. $\leqq n$ sind, muß daher

$$\psi_p(m) = \psi_n(m) \qquad (m)$$

*) Der Deutlichkeit wegen habe ich hier und im folgenden Satze 126 die Bedingung I besonders angeführt, obwohl sie eigentlich schon eine Folge von II und III ist.

sein, woraus als besonderer Fall auch

$$\psi_p(n) = \psi_n(n) \qquad (n)$$

folgt; da ferner p nach 105, 108 die einzige nicht in Z_n enthaltene Zahl des Systems Z_p ist, und da nach III' und (n) auch

$$\psi_p(p) = \theta\,\psi_n(n) \qquad (p)$$

sein muß, so ergibt sich die Richtigkeit unserer obigen Behauptung, daß es nur eine einzige, den Bedingungen I', II', III' genügende Abbildung ψ_p des Systems Z_p geben kann, weil ψ_p durch die eben abgeleiteten Bedingungen (m) und (p) vollständig auf ψ_n zurückgeführt ist. Wir haben nun zu zeigen, daß umgekehrt diese durch (m) und (p) vollständig bestimmte Abbildung ψ_p des Systems Z_p wirklich den Bedingungen I', II', III' genügt. Offenbar ergibt sich I' aus (m) und (p) mit Rücksicht auf I und darauf, daß $\theta(\Omega) \mathfrak{3} \Omega$ ist. Ebenso folgt II' aus (m) und II, weil die Zahl 1 nach 99 in Z_n enthalten ist. Die Richtigkeit von III' folgt zunächst für diejenigen Zahlen m, welche $< n$ sind, aus (m) und III, und für die einzige noch übrige Zahl $m = n$ ergibt sie sich aus (p) und (n). Hiermit ist vollständig dargetan, daß aus der Gültigkeit unseres Satzes für die Zahl n immer auch seine Gültigkeit für die folgende Zahl p folgt, w. z. b. w.

126. **Satz der Definition durch Induktion.** Ist eine beliebige (ähnliche oder unähnliche) Abbildung θ eines Systems Ω in sich selbst und außerdem ein bestimmtes Element ω in Ω gegeben, so gibt es eine und nur eine Abbildung ψ der Zahlenreihe N, welche den Bedingungen

I. $\psi(N) \mathfrak{3} \Omega$,

II. $\psi(1) = \omega$,

III. $\psi(n') = \theta\,\psi(n)$ genügt, wo n jede Zahl bedeutet.

Beweis. Da, wenn es wirklich eine solche Abbildung ψ gibt, in ihr nach 21 auch eine Abbildung ψ_n des Systems Z_n enthalten ist, welche den in 125 angegebenen Bedingungen I, II, III genügt, so muß, weil es stets eine und nur eine solche Abbildung ψ_n gibt, notwendig

$$\psi(n) = \psi_n(n) \qquad (n)$$

sein. Da hierdurch ψ vollständig bestimmt ist, so folgt, daß es auch nur eine einzige solche Abbildung ψ geben kann (vgl. den Schluß von 130). Daß umgekehrt die durch (n) bestimmte Abbildung ψ auch unseren Bedingungen I, II, III genügt, folgt mit Leichtigkeit aus (n)

unter Berücksichtigung der in 125 bewiesenen Eigenschaften I, II und (p), w. z. b. w.

127. Satz. Unter den im vorhergehenden Satze gemachten Voraussetzungen ist

$$\psi(T') = \theta\,\psi(T),$$

wo T irgendeinen Teil der Zahlenreihe N bedeutet.

Beweis. Denn wenn t jede Zahl des Systems T bedeutet, so besteht $\psi(T')$ aus allen Elementen $\psi(t')$, und $\theta\,\psi(T)$ aus allen Elementen $\theta\,\psi(t)$; hieraus folgt unser Satz, weil (nach III in 126) $\psi(t') = \theta\,\psi(t)$ ist.

128. Satz. Behält man dieselben Voraussetzungen bei und bezeichnet man mit θ_0 die Ketten (44), welche der Abbildung θ des Systems Ω in sich selbst entsprechen, so ist

$$\psi(N) = \theta_0(\omega).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion (80), daß

$$\psi(N) \, 3 \, \theta_0(\omega),$$

d. h. daß jedes Bild $\psi(n)$ auch Element von $\theta_0(\omega)$ ist. In der Tat,

ϱ. dieser Satz ist wahr für $n = 1$, weil (nach 126. II) $\psi(1) = \omega$, und weil (nach 45) $\omega \, 3 \, \theta_0(\omega)$ ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, ist also $\psi(n) \, 3 \, \theta_0(\omega)$, so ist nach 55 auch $\theta(\psi(n)) \, 3 \, \theta_0(\omega)$, d. h. (nach 126. III) $\psi(n') \, 3 \, \theta_0(\omega)$, also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

Um ferner zu beweisen, daß jedes Element ν der Kette $\theta_0(\omega)$ in $\psi(N)$ enthalten, daß also

$$\theta_0(\omega) \, 3 \, \psi(N)$$

ist, wenden wir ebenfalls die vollständige Induktion, nämlich den auf Ω und die Abbildung θ übertragenen Satz 59 an. In der Tat,

ϱ. das Element ω ist $= \psi(1)$, also in $\psi(N)$ enthalten.

σ. Ist ν ein gemeinsames Element der Kette $\theta_0(\omega)$ und des Systems $\psi(N)$, so ist $\nu = \psi(n)$, wo n eine Zahl bedeutet, und hieraus folgt (nach 126. III) $\theta(\nu) = \theta\,\psi(n) = \psi(n')$, mithin ist auch $\theta(\nu)$ in $\psi(N)$ enthalten, w. z. b. w.

Aus den bewiesenen Sätzen $\psi(N) \, 3 \, \theta_0(\omega)$ und $\theta_0(\omega) \, 3 \, \psi(N)$ folgt (nach 5) $\psi(N) = \theta_0(\omega)$, w. z. b. w.

129. Satz. Unter denselben Voraussetzungen ist allgemein

$$\psi(n_0) = \theta_0(\psi(n)).$$

Beweis durch vollständige Induktion 80. Denn

ϱ. der Satz gilt zufolge •128 für $n = 1$, weil $1_0 = N$ und $\psi(1) = \omega$ ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, so folgt

$$\theta(\psi(n_0)) = \theta(\theta_0(\psi(n)));$$

da nun nach 127, 75

$$\theta(\psi(n_0)) = \psi(n_0')$$

und nach 57, 126. III

$$\theta(\theta_0(\psi(n))) = \theta_0(\theta(\psi(n))) = \theta_0(\psi(n'))$$

ist, so ergibt sich

$$\psi(n_0') = \theta_0(\psi(n')),$$

d. h. der Satz gilt auch für die auf n folgende Zahl n', w. z. b. w.

130. Bemerkung. Bevor wir zu den wichtigsten Anwendungen des in 126 bewiesenen Satzes der Definition durch Induktion übergehen (§ 10 bis 14), verlohnt es sich der Mühe, auf einen Umstand aufmerksam zu machen, durch welchen sich derselbe von dem in 80, oder vielmehr schon in 59, 60 bewiesenen Satze der Demonstration durch Induktion wesentlich unterscheidet, so nahe auch die Verwandtschaft zwischen jenem und diesem zu sein scheint. Während nämlich der Satz 59 ganz allgemein für jede Kette A_0 gilt, wo A irgendein Teil eines durch eine beliebige Abbildung φ in sich selbst abgebildeten Systems S ist (§ 4), so verhält es sich ganz anders mit dem Satze 126, welcher nur die Existenz einer widerspruchsfreien (oder eindeutigen) Abbildung ψ des einfach unendlichen Systems 1_0 behauptet. Wollte man in dem letzteren Satze (unter Beibehaltung der Voraussetzungen über Ω und θ) an Stelle der Zahlenreihe 1_0 eine beliebige Kette A_0 aus einem solchen System S setzen, und etwa eine Abbildung ψ von A_0 in Ω auf ähnliche Weise wie in 126. II, III dadurch definieren, daß

ϱ. jedem Element a von A ein bestimmtes aus Ω gewähltes Element $\psi(a)$ entsprechen, und

σ. daß für jedes in A_0 enthaltene Element n und dessen Bild $n' = \varphi(n)$ die Bedingung $\psi(n') = \theta\,\psi(n)$ gelten soll,

so würde sehr häufig der Fall eintreten, daß es eine solche Abbildung ψ gar nicht gibt, weil diese Bedingungen ϱ, σ selbst dann noch in Widerspruch miteinander geraten können, wenn man auch die in ϱ enthaltene Wahlfreiheit von vornherein der Bedingung σ gemäß beschränkt. Ein Beispiel wird genügen, um sich hiervon zu überzeugen.

Ist das aus den verschiedenen Elementen a und b bestehende System S durch φ so in sich selbst abgebildet, daß $a' = b$, $b' = a$ wird, so ist offenbar $a_0 = b_0 = S$; es sei ferner das aus den verschiedenen Elementen α, β und γ bestehende System Ω durch θ so in sich selbst abgebildet, daß $\theta(\alpha) = \beta$, $\theta(\beta) = \gamma$, $\theta(\gamma) = \alpha$ wird; verlangt man nun eine solche Abbildung ψ von a_0 in Ω, daß $\psi(a) = \alpha$ und außerdem für jedes in a_0 enthaltene Element n immer $\psi(n') = \theta\,\psi(n)$ wird, so stößt man auf einen Widerspruch; denn für $n = a$ ergibt sich $\psi(b) = \theta(\alpha) = \beta$, und hieraus folgt für $n = b$, daß $\psi(a) = \theta(\beta) = \gamma$ sein müßte, während doch $\psi(a) = \alpha$ war.

Gibt es aber eine Abbildung ψ von A_0 in Ω, welche den obigen Bedingungen ϱ, σ ohne Widerspruch genügt, so folgt aus 60 leicht, daß sie vollständig bestimmt ist; denn wenn die Abbildung χ denselben Bedingungen genügt, so ist allgemein $\chi(n) = \psi(n)$, weil dieser Satz zufolge ϱ für alle in A enthaltenen Elemente $n = a$ gilt, und weil er, wenn er für ein Element n von A_0 gilt, zufolge σ auch für dessen Bild n' gelten muß.

131. Um die Tragweite unseres Satzes 126 ins Licht zu setzen, wollen wir hier eine Betrachtung einfügen, die auch für andere Untersuchungen, z. B. für die sogenannte Gruppentheorie, nützlich ist.

Wir betrachten ein System Ω, dessen Elemente eine gewisse Verbindung gestatten in der Art, daß aus einem Elemente ν durch Einwirkung eines Elementes ω immer wieder ein bestimmtes Element desselben Systems Ω entspringt, welches mit $\omega.\nu$ oder $\omega\nu$ bezeichnet werden mag und im allgemeinen von $\nu\omega$ zu unterscheiden ist. Man kann dies auch so auffassen, daß jedem bestimmten Elemente ω eine bestimmte, etwa durch $\dot\omega$ zu bezeichnende Abbildung des Systems Ω in sich selbst entspricht, insofern jedes Element ν das bestimmte Bild $\dot\omega(\nu) = \omega\nu$ liefert. Wendet man auf dieses System Ω und dessen Element ω den Satz 126 an, indem man zugleich die dort mit θ bezeichnete Abbildung durch $\dot\omega$ ersetzt, so entspricht jeder Zahl n ein bestimmtes, in Ω enthaltenes Element $\psi(n)$, das jetzt durch das Symbol ω^n bezeichnet werden mag und bisweilen die n-te Potenz von ω genannt wird; dieser Begriff ist vollständig erklärt durch die ihm auferlegten Bedingungen

$$\text{II. } \omega^1 = \omega,$$
$$\text{III. } \omega^{n'} = \omega\,\omega^n,$$

und seine Existenz ist durch den Beweis des Satzes 126 gesichert.

Ist die obige Verbindung der Elemente außerdem so beschaffen, daß für beliebige Elemente μ, ν, ω stets $\omega(\nu\mu) = (\omega\nu)\,\mu$ ist, so gelten auch die Sätze

$$\omega^{n'} = \omega^n\,\omega, \quad \omega^m\,\omega^n = \omega^n\,\omega^m,$$

deren Beweise leicht durch vollständige Induktion (80) zu führen sind und dem Leser überlassen bleiben mögen.

Die vorstehende allgemeine Betrachtung läßt sich unmittelbar auf folgendes Beispiel anwenden. Ist S ein System von beliebigen Elementen, und Ω das zugehörige System, dessen Elemente die sämtlichen Abbildungen ν von S in sich selbst sind (36), so lassen diese Elemente sich nach 25 immer zusammensetzen, weil $\nu(S)\,\mathfrak{3}\,S$ ist, und die aus solchen Abbildungen ν und ω zusammengesetzte Abbildung $\omega\nu$ ist selbst wieder Element von Ω. Dann sind auch alle Elemente ω^n Abbildungen von S in sich selbst, und man sagt, sie entstehen durch Wiederholung der Abbildung ω. Wir wollen nun einen einfachen Zusammenhang hervorheben, der zwischen diesem Begriffe und dem in 44 erklärten Begriffe der Kette $\omega_0(A)$ besteht, wo A wieder irgendeinen Teil von S bedeutet. Bezeichnet man der Kürze halber das durch die Abbildung ω^n erzeugte Bild $\omega^n(A)$ mit A_n, so folgt aus III, 25, daß $\omega(A_n) = A_{n'}$ ist. Hieraus ergibt sich leicht durch vollständige Induktion (80), daß alle diese Systeme A_n Teile der Kette $\omega_0(A)$ sind; denn

ϱ. diese Behauptung gilt zufolge 50 für $n = 1$, und

σ. wenn sie für eine Zahl n gilt, so folgt aus 55 und aus $A_{n'} = \omega(A_n)$, daß sie auch für die folgende n' gilt, w. z. b. w. Da ferner nach 45 auch $A\,\mathfrak{3}\,\omega_0(A)$ ist, so ergibt sich aus 10, daß auch das aus A und aus allen Bildern A_n zusammengesetzte System K Teil von $\omega_0(A)$ ist. Umgekehrt, da (nach 23) $\omega(K)$ aus $\omega(A) = A_1$ und aus allen Systemen $\omega(A_n) = A_{n'}$, also (nach 78) aus allen Systemen A_n zusammengesetzt ist, welche nach 9 Teile von K sind, so ist (nach 10) $\omega(K)\,\mathfrak{3}\,K$, d. h. K ist eine Kette (37), und da (nach 9) $A\,\mathfrak{3}\,K$ ist, so folgt nach 47, daß auch $\omega_0(A)\,\mathfrak{3}\,K$ ist. Mithin ist $\omega_0(A) = K$, d. h. es besteht folgender Satz: Ist ω eine Abbildung eines Systems S in sich selbst, und A irgendein Teil von S, so ist die der Abbildung ω entsprechende Kette von A zusammengesetzt aus A und allen durch Wiederholung von ω entstehenden Bildern $\omega^n(A)$. Wir empfehlen dem Leser, mit dieser Auffassung einer Kette zu den früheren Sätzen 57, 58 zurückzukehren.

§ 10.

Die Klasse der einfach unendlichen Systeme.

132. Satz. Alle einfach unendlichen Systeme sind der Zahlenreihe N und folglich (nach 33) auch einander ähnlich.

Beweis. Es sei das einfach unendliche System Ω durch die Abbildung θ geordnet (71), und es sei ω das hierbei auftretende Grundelement von Ω; bezeichnen wir mit θ_0 wieder die der Abbildung θ entsprechenden Ketten (44), so gilt nach 71 folgendes:

α. $\theta(\Omega) \mathfrak{3} \Omega$.

β. $\Omega = \theta_0(\omega)$.

γ. ω ist nicht in $\theta(\Omega)$ enthalten.

δ. Die Abbildung θ ist eine ähnliche.

Bedeutet nun ψ die in 126 definierte Abbildung der Zahlenreihe N, so folgt aus β und 128 zunächst

$$\psi(N) = \Omega,$$

und wir haben daher nach 32 nur noch zu zeigen, daß ψ eine ähnliche Abbildung ist, d. h. (26) daß verschiedenen Zahlen m, n auch verschiedene Bilder $\psi(m)$, $\psi(n)$ entsprechen. Der Symmetrie wegen dürfen wir nach 90 annehmen, es sei $m > n$, also $m \mathfrak{3} n'_0$, und der zu beweisende Satz kommt darauf hinaus, daß $\psi(n)$ nicht in $\psi(n'_0)$, also (nach 127) nicht in $\theta\psi(n_0)$ enthalten ist. Dies beweisen wir für jede Zahl n durch vollständige Induktion (80). In der Tat,

ϱ. dieser Satz gilt nach γ für $n = 1$, weil $\psi(1) = \omega$ und $\psi(1_0) = \psi(N) = \Omega$ ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, so gilt er auch für die folgende Zahl n'; denn wäre $\psi(n')$, d. h. $\theta\psi(n)$ in $\theta\psi(n'_0)$ enthalten, so müßte (nach δ und 27) auch $\psi(n)$ in $\psi(n'_0)$ enthalten sein, während unsere Annahme gerade das Gegenteil besagt, w. z. b. w.

133. Satz. Jedes System, welches einem einfach unendlichen System und folglich (nach 132, 33) auch der Zahlenreihe N ähnlich ist, ist einfach unendlich.

Beweis. Ist Ω ein der Zahlenreihe N ähnliches System, so gibt es nach 32 eine solche ähnliche Abbildung ψ von N, daß

$$\text{I.} \quad \psi(N) = \Omega$$

wird; dann setzen wir

$$\text{II.} \quad \psi(1) = \omega.$$

Bezeichnet man nach 26 mit $\overline{\psi}$ die umgekehrte, ebenfalls ähnliche Abbildung von Ω, so entspricht jedem Elemente ν von Ω eine bestimmte Zahl $\overline{\psi}(\nu) = n$, nämlich diejenige, deren Bild $\psi(n) = \nu$ ist. Da nun dieser Zahl n eine bestimmte folgende Zahl $\varphi(n) = n'$, und dieser wieder ein bestimmtes Element $\psi(n')$ in Ω entspricht, so gehört zu jedem Elemente ν des Systems Ω auch ein bestimmtes Element $\psi(n')$ desselben Systems, das wir als Bild von ν mit $\theta(\nu)$ bezeichnen wollen. Hierdurch ist eine Abbildung θ von Ω in sich selbst vollständig bestimmt*), und um unseren Satz zu beweisen, wollen wir zeigen, daß Ω durch θ als einfach unendliches System geordnet ist (71), d. h. daß die in dem Beweise von 132 angegebenen Bedingungen α, β, γ, δ sämtlich erfüllt sind. Zunächst leuchtet α aus der Definition von θ unmittelbar ein. Da ferner jeder Zahl n ein Element $\nu = \psi(n)$ entspricht, für welches $\theta(\nu) = \psi(n')$ wird, so ist allgemein

$$\text{III.} \quad \psi(n') = \theta\psi(n),$$

und hieraus in Verbindung mit I, II, α ergibt sich, daß die Abbildungen θ, ψ alle Bedingungen des Satzes 126 erfüllen; mithin folgt β aus 128 und I. Nach 127 und I ist ferner

$$\psi(N') = \theta\psi(N) = \theta(\Omega),$$

und hieraus in Verbindung mit II und der Ähnlichkeit der Abbildung ψ folgt γ, weil sonst $\psi(1)$ in $\psi(N')$, also (nach 27) die Zahl 1 in N' enthalten sein müßte, was (nach 71. γ) nicht der Fall ist. Wenn endlich μ, ν Elemente von Ω, und m, n die entsprechenden Zahlen bedeuten, deren Bilder $\psi(m) = \mu$, $\psi(n) = \nu$ sind, so folgt aus der Annahme $\theta(\mu) = \theta(\nu)$ nach dem Obigen, daß $\psi(m') = \psi(n')$, hieraus wegen der Ähnlichkeit von ψ, φ, daß $m' = n'$, $m = n$, also auch $\mu = \nu$ ist; mithin gilt auch δ, w. z. b. w.

134. Bemerkung. Zufolge der beiden vorhergehenden Sätze 132, 133 bilden alle einfach unendlichen Systeme eine Klasse im Sinne von 34. Zugleich leuchtet mit Rücksicht auf 71, 73 ein, daß jeder Satz über die Zahlen, d. h. über die Elemente n des durch die Abbildung φ geordneten einfach unendlichen Systems N, und zwar jeder solche Satz, in welchem von der besonderen Beschaffenheit der Elemente n gänzlich abgesehen wird und nur von solchen Begriffen die Rede ist, die aus der Anordnung φ entspringen, ganz

*) Offenbar ist θ die nach 25 aus $\overline{\psi}$, φ, ψ zusammengesetzte Abbildung $\psi\varphi\overline{\psi}$.

allgemeine Gültigkeit auch für jedes andere durch eine Abbildung θ geordnete einfach unendliche System Ω und dessen Elemente ν besitzt, und daß die Übertragung von N auf Ω (z. B. auch die Übersetzung eines arithmetischen Satzes aus einer Sprache in eine andere) durch die in 132, 133 betrachtete Abbildung ψ geschieht, welche jedes Element n von N in ein Element ν von Ω, nämlich in $\psi(n)$ verwandelt. Dieses Element ν kann man das n-te Element von Ω nennen, und hiernach ist die Zahl n selbst die n-te Zahl der Zahlenreihe N. Dieselbe Bedeutung, welche die Abbildung φ für die Gesetze im Gebiete N besitzt, insofern jedem Elemente n ein bestimmtes Element $\varphi(n) = n'$ folgt, kommt nach der durch ψ bewirkten Verwandlung der Abbildung θ zu für dieselben Gesetze im Gebiete Ω, insofern dem durch Verwandlung von n entstandenen Elemente $\nu = \psi(n)$ das durch Verwandlung von n' entstandene Element $\theta(\nu) = \psi(n')$ folgt; man kann daher mit Recht sagen, daß φ durch ψ in θ verwandelt wird, was sich symbolisch durch $\theta = \psi\varphi\bar{\psi}$, $\varphi = \bar{\psi}\theta\psi$ ausdrückt. Durch diese Bemerkungen wird, wie ich glaube, die in 73 aufgestellte Erklärung des Begriffes der Zahlen vollständig gerechtfertigt. Wir gehen nun zu ferneren Anwendungen des Satzes 126 über.

§ 11.

Addition der Zahlen.

135. Erklärung. Es liegt nahe, die im Satze 126 dargestellte Definition einer Abbildung ψ der Zahlenreihe N oder der durch dieselbe bestimmten Funktion $\psi(n)$ auf den Fall anzuwenden, wo das dort mit Ω bezeichnete System, in welchem das Bild $\psi(N)$ enthalten sein soll, die Zahlenreihe N selbst ist, weil für dieses System Ω schon eine Abbildung θ von Ω in sich selbst vorliegt, nämlich diejenige Abbildung φ, durch welche N als einfach unendliches System geordnet ist (71, 73). Dann wird also $\Omega = N$, $\theta(n) = \varphi(n) = n'$, mithin

$$\text{I.}\quad \psi(N) \mathrel{3} N,$$

und es bleibt, um ψ vollständig zu bestimmen, nur noch übrig, das Element ω aus Ω, d. h. aus N nach Belieben zu wählen. Nehmen wir $\omega = 1$, so wird ψ offenbar die identische Abbildung (21) von N, weil den Bedingungen

$$\psi(1) = 1, \quad \psi(n') = (\psi(n))'$$

allgemein durch $\psi(n) = n$ genügt wird. Soll also eine andere Abbildung ψ von N erzeugt werden, so muß für ω eine von 1 verschiedene, nach 78 in N' enthaltene Zahl m' gewählt werden, wo m selbst irgendeine Zahl bedeutet; da die Abbildung ψ offenbar von der Wahl dieser Zahl m abhängig ist, so bezeichnen wir das entsprechende Bild $\psi(n)$ einer beliebigen Zahl n durch das Symbol $m + n$ und nennen diese Zahl die Summe, welche aus der Zahl m durch Addition der Zahl n entsteht, oder kurz die Summe der Zahlen m, n. Dieselbe ist daher nach 126 vollständig bestimmt durch die Bedingungen*)

$$\text{II.}\quad m + 1 = m',$$
$$\text{III.}\quad m + n' = (m + n)'.$$

136. Satz. Es ist $m' + n = m + n'$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist wahr für $n = 1$, weil (nach 135. II)

$$m' + 1 = (m')' = (m + 1)'$$

und (nach 135. III) $(m + 1)' = m + 1'$ ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, und setzt man die folgende Zahl $n' = p$, so ist $m' + n = m + p$, also auch $(m' + n)' = (m + p)'$, woraus (nach 135. III) $m' + p = m + p'$ folgt; mithin gilt der Satz auch für die folgende Zahl p, w. z. b. w.

137. Satz. Es ist $m' + n = (m + n)'$.

Der Beweis folgt aus 136 und 135. III.

138. Satz. Es ist $1 + n = n'$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist nach 135. II wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, und setzt man $n' = p$, so ist $1 + n = p$, also auch $(1 + n)' = p'$, mithin (nach 135. III) $1 + p = p'$, d. h. der Satz gilt auch für die folgende Zahl p, w. z. b. w.

139. Satz. Es ist $1 + n = n + 1$.

---

*) Die obige, unmittelbar auf den Satz 126 gegründete Erklärung der Addition scheint mir die einfachste zu sein. Mit Zuziehung des in 131 entwickelten Begriffes kann man aber die Summe $m + n$ auch durch $\varphi^n(m)$ oder auch durch $\varphi^m(n)$ definieren, wo φ wieder die obige Bedeutung hat. Um die vollständige Übereinstimmung dieser Definitionen mit der obigen zu beweisen, braucht man nach 126 nur zu zeigen, daß, wenn $\varphi^n(m)$ oder $\varphi^m(n)$ mit $\psi(n)$ bezeichnet wird, die Bedingungen $\psi(1) = m'$, $\psi(n') = \varphi\psi(n)$ erfüllt sind, was mit Hilfe der vollständigen Induktion (80) unter Zuziehung von 131 leicht gelingt.

Der Beweis folgt aus 138 und 135. II.

140. Satz. Es ist $m + n = n + m$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist nach 139 wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt daraus auch $(m + n)' = (n + m)'$, d. h. (nach 135. III) $m + n' = n + m'$, mithin (nach 136) $m + n' = n' + m$; mithin gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

141. Satz. Es ist $(l + m) + n = l + (m + n)$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist wahr für $n = 1$, weil (nach 135. II, III, II) $(l + m) + 1 = (l + m)' = l + m' = l + (m + 1)$ ist.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt daraus auch $((l + m) + n)' = (l + (m + n))'$, d. h. (nach 135. III)

$$(l + m) + n' = l + (m + n)' = l + (m + n'),$$

also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

142. Satz. Es ist $m + n > m$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist nach 135. II und 91 wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so gilt er nach 95 auch für die folgende Zahl n', weil (nach 135. III und 91)

$$m + n' = (m + n)' > m + n$$

ist, w. z. b. w.

143. Satz. Die Bedingungen $m > a$ und $m + n > a + n$ sind gleichwertig.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz gilt zufolge 135. II und 94 für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so gilt er auch für die folgende Zahl n', weil die Bedingung $m + n > a + n$ nach 94 mit $(m + n)' > (a + n)'$, also nach 135. III auch mit

$$m + n' > a + n'$$

gleichwertig ist, w. z. b. w.

144. Satz. Ist $m > a$ und $n > b$, so ist auch

$$m + n > a + b.$$

Beweis. Denn aus unseren Voraussetzungen folgt (nach 143) $m + n > a + n$ und $n + a > b + a$ oder, was nach 140 dasselbe ist, $a + n > a + b$, woraus sich der Satz nach 95 ergibt.

145. Satz. Ist $m + n = a + n$, so ist $m = a$.

Beweis. Denn wenn m nicht $= a$, also nach 90 entweder $m > a$ oder $m < a$ ist, so ist nach 143 entsprechend $m + n > a + n$ oder $m + n < a + n$, also kann (nach 90) $m + n$ gewiß nicht $= a + n$ sein, w. z. b. w.

146. Satz. Ist $l > n$, so gibt es eine und (nach 145) nur eine Zahl m, welche der Bedingung $m + n = l$ genügt.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist wahr für $n = 1$. In der Tat, wenn $l > 1$, d. h. (89) wenn l in N' enthalten, also das Bild m' einer Zahl m ist, so folgt aus 135. II, daß $l = m + 1$ ist, w. z. b. w.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so zeigen wir, daß er auch für die folgende Zahl n' gilt. In der Tat, wenn $l > n'$ ist, so ist nach 91, 95 auch $l > n$, und folglich gibt es eine Zahl k, welche der Bedingung $l = k + n$ genügt; da dieselbe nach 138 verschieden von 1 ist (weil sonst $l = n'$ wäre), so ist sie nach 78 das Bild m' einer Zahl m, und folglich ist $l = m' + n$, also nach 136 auch $l = m + n'$, w. z. b. w.

§ 12.

Multiplikation der Zahlen.

147. Erklärung. Nachdem im vorhergehenden § 11 ein unendliches System neuer Abbildungen der Zahlenreihe N in sich selbst gefunden ist, kann man jede derselben nach 126 wieder benutzen, um abermals neue Abbildungen ψ von N zu erzeugen. Indem man daselbst $\Omega = N$ und $\theta(n) = m + n = n + m$ setzt, wo m eine bestimmte Zahl, wird jedenfalls wieder

$$\text{I.} \quad \psi(N) \mathrel{3} N,$$

und es bleibt, um ψ vollständig zu bestimmen, nur noch übrig, das Element ω aus N nach Belieben zu wählen. Der einfachste Fall tritt dann ein, wenn man diese Wahl in eine gewisse Übereinstimmung mit der Wahl von θ bringt, indem man $\omega = m$ setzt. Da die hierdurch vollständig bestimmte Abbildung ψ von dieser Zahl m abhängt, so bezeichnen wir das entsprechende Bild $\psi(n)$ einer beliebigen Zahl n durch das Symbol $m \times n$ oder $m \,.\, n$ oder $m\, n$, und nennen diese Zahl das Produkt, welches aus der Zahl m durch Multiplikation mit der Zahl n entsteht, oder kurz das Produkt der

Zahlen m, n. Dasselbe ist daher nach 126 vollständig bestimmt durch die Bedingungen

$$\text{II.}\quad m \,.\, 1 = m,$$
$$\text{III.}\quad m\,n' = m\,n + m.$$

148. Satz. Es ist $m'n = m\,n + n$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist nach 147. II und 135. II wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$$m'n + m' = (m\,n + n) + m'$$

und hieraus (nach 147. III, 141, 140, 136, 141, 147. III)

$$m'n' = m\,n + (n + m') = m\,n + (m' + n)$$
$$= m\,n + (m + n') = (m\,n + m) + n' = m\,n' + n';$$

also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

149. Satz. Es ist $1 \,.\, n = n$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist nach 147. II wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt $1 \,.\, n + 1 = n + 1$, d. h. (nach 147. III, 135. II) $1 \,.\, n' = n'$, also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

150. Satz. Es ist $m\,n = n\,m$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz gilt nach 147. II, 149 für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$$m\,n + m = n\,m + m,$$

d. h. (nach 147. III, 148) $m\,n' = n'm$, also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

151. Satz. Es ist $l(m + n) = l\,m + l\,n$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist nach 135. II, 147. III, 147. II wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$$l\,(m + n) + l = (l\,m + l\,n) + l;$$

nach 147. III, 135. III ist aber

$$l(m + n) + l = l(m + n)' = l\,(m + n')$$

und nach 141, 147. III ist

$$(l\,m + l\,n) + l = l\,m + (l\,n + l) = l\,m + l\,n',$$

mithin ist $l(m + n') = l\,m + l\,n'$, d. h. der Satz gilt auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

152. Satz. Es ist $(m + n)\,l = m\,l + n\,l$.

Der Beweis folgt aus 151, 150.

153. Satz. Es ist $(l\,m)\,n = l(m\,n)$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz gilt nach 147. II für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$$(l\,m)\,n + l\,m = l(m\,n) + l\,m,$$

d. h. (nach 147. III, 151, 147. III)

$$(l\,m)\,n' = l(m\,n + m) = l(m\,n'),$$

also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

154. Bemerkung. Hätte man in 147 keine Beziehung zwischen ω und θ angenommen, sondern $\omega = k$, $\theta\,(n) = m + n$ gesetzt, so würde hieraus nach 126 eine weniger einfache Abbildung ψ der Zahlenreihe N entstanden sein; für die Zahl 1 würde $\psi(1) = k$, und für jede andere, also in der Form n' enthaltene Zahl würde $\psi\,(n') = m\,n + k$; denn hierdurch wird, wovon man sich mit Zuziehung der vorhergehenden Sätze leicht überzeugt, die Bedingung $\psi\,(n') = \theta\,\psi\,(n)$, d. h. $\psi\,(n') = m + \psi\,(n)$ für alle Zahlen n erfüllt.

§ 13.

Potenzierung der Zahlen.

155. Erklärung. Wenn man in dem Satze 126 wieder $\Omega = N$, ferner $\omega = a$, $\theta\,(n) = a\,n = n\,a$ setzt, so entsteht eine Abbildung ψ von N, welche abermals der Bedingung

$$\text{I.}\quad \psi\,(N) \mathrel{3} N$$

genügt; das entsprechende Bild $\psi\,(n)$ einer beliebigen Zahl n bezeichnen wir mit dem Symbol a^n und nennen diese Zahl eine Potenz der Basis a, während n der Exponent dieser Potenz von a heißt. Dieser Begriff ist daher vollständig bestimmt durch die Bedingungen

$$\text{II.}\quad a^1 = a,$$
$$\text{III.}\quad a^{n'} = a \,.\, a^n = a^n \,.\, a.$$

156. Satz. Es ist $a^{m+n} = a^m \,.\, a^n$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz gilt nach 135. II, 155. III, 155. II für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$$a^{m+n} \,.\, a = (a^m \,.\, a^n)\,a;$$

nach 155. III, 135. III ist aber $a^{m+n}.a = a^{(m+n)'} = a^{m+n'}$, und nach 153, 155. III ist $(a^m.a^n)\,a = a^m(a^n.a) = a^m.a^{n'}$; mithin ist $a^{m+n'} = a^m.a^{n'}$, d. h. der Satz gilt auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

157. Satz. Es ist $(a^m)^n = a^{mn}$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz gilt nach 155. II, 147. II für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$$(a^m)^n.a^m = a^{mn}.a^m;$$

nach 155. III ist aber $(a^m)^n.a^m = (a^m)^{n'}$, und nach 156, 147. III ist $a^{mn}.a^m = a^{mn+m} = a^{mn'}$; mithin ist $(a^m)^{n'} = a^{mn'}$, d. h. der Satz gilt auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

158. Satz. Es ist $(ab)^n = a^n.b^n$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz gilt nach 155. II für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt nach 150, 153, 155. III auch $(ab)^n.a = a(a^n.b^n) = (a.a^n)\,b^n = a^{n'}.b^n$, und hieraus $((ab)^n.a)\,b = (a^{n'}.b^n)\,b$; nach 153, 155. III ist aber $((ab)^n.a)\,b = (ab)^n.(ab) = (ab)^{n'}$, und ebenso

$$(a^{n'}.b^n)\,b = a^{n'}.(b^n.b) = a^{n'}.b^{n'};$$

mithin ist $(ab)^{n'} = a^{n'}.b^{n'}$, d. h. der Satz gilt auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

§ 14.

Anzahl der Elemente eines endlichen Systems.

159. Satz. Ist Σ ein unendliches System, so ist jedes der in 98 erklärten Zahlensysteme Z_n ähnlich abbildbar in Σ (d. h. ähnlich einem Teile von Σ), und umgekehrt.

Beweis. Wenn Σ unendlich ist, so gibt es nach 72 gewiß einen Teil T von Σ, welcher einfach unendlich, also nach 132 der Zahlenreihe N ähnlich ist, und folglich ist nach 35 jedes System Z_n als Teil von N auch einem Teile von T, also auch einem Teile von Σ ähnlich, w. z. b. w.

Der Beweis der Umkehrung — so einleuchtend dieselbe erscheinen mag — ist umständlicher. Wenn jedes System Z_n ähnlich abbildbar in Σ ist, so entspricht jeder Zahl n eine solche ähnliche Abbildung α_n

von Z_n, daß $\alpha_n(Z_n) \mathrel{3} \Sigma$ wird. Aus der Existenz einer solchen als gegeben anzusehenden Reihe von Abbildungen α_n, über die aber weiter nichts vorausgesetzt wird, leiten wir zunächst mit Hilfe des Satzes 126 die Existenz einer neuen Reihe von ebensolchen Abbildungen ψ_n ab, welche die besondere Eigenschaft besitzt, daß jedesmal, wenn $m \leqq n$, also (nach 100) $Z_m \mathrel{3} Z_n$ ist, die Abbildung ψ_m des Teiles Z_m in der Abbildung ψ_n von Z_n enthalten ist (21), d. h. daß die Abbildungen ψ_m und ψ_n für alle in Z_m enthaltenen Zahlen gänzlich miteinander übereinstimmen, also auch stets

$$\psi_m(m) = \psi_n(m)$$

wird. Um den genannten Satz diesem Ziele gemäß anzuwenden, verstehen wir unter Ω dasjenige System, dessen Elemente alle überhaupt möglichen ähnlichen Abbildungen aller Systeme Z_n in Σ sind, und definieren mit Hilfe der gegebenen, ebenfalls in Ω enthaltenen Elemente α_n auf folgende Weise eine Abbildung θ von Ω in sich selbst. Ist β irgendein Element von Ω, also z. B. eine ähnliche Abbildung des bestimmten Systems Z_n in Σ, so kann das System $\alpha_{n'}(Z_{n'})$ nicht Teil von $\beta(Z_n)$ sein, weil sonst $Z_{n'}$ nach 35 einem Teile von Z_n, also nach 107 einem echten Teile seiner selbst ähnlich, mithin unendlich wäre, was dem Satze 119 widersprechen würde; es gibt daher in $Z_{n'}$ gewiß eine Zahl oder verschiedene Zahlen p derart, daß $\alpha_{n'}(p)$ nicht in $\beta(Z_n)$ enthalten ist; von diesen Zahlen p wählen wir — nur um etwas Bestimmtes festzusetzen — immer die kleinste k (96) und definieren, da $Z_{n'}$ nach 108 aus Z_n und n' zusammengesetzt ist, eine Abbildung γ von $Z_{n'}$ dadurch, daß für alle in Z_n enthaltenen Zahlen m das Bild $\gamma(m) = \beta(m)$, und außerdem $\gamma(n') = \alpha_{n'}(k)$ sein soll; diese, offenbar ähnliche, Abbildung γ von $Z_{n'}$ in Σ sehen wir nun als ein Bild $\theta(\beta)$ der Abbildung β an, und hierdurch ist eine Abbildung θ des Systems Ω in sich selbst vollständig definiert. Nachdem die in 126 genannten Dinge Ω und θ bestimmt sind, wählen wir endlich für das mit ω bezeichnete Element von Ω die gegebene Abbildung α_1; hierdurch ist nach 126 eine Abbildung ψ der Zahlenreihe N in Ω bestimmt, welche, wenn wir das zugehörige Bild einer beliebigen Zahl n nicht mit $\psi(n)$, sondern mit ψ_n bezeichnen, den Bedingungen

$$\text{II.}\quad \psi_1 = \alpha_1,$$
$$\text{III.}\quad \psi_{n'} = \theta(\psi_n)$$

genügt. Durch vollständige Induktion (80) ergibt sich zunächst, daß ψ_n eine ähnliche Abbildung von Z_n in Σ ist; denn

ϱ. dies ist zufolge II wahr für $n = 1$, und

σ. wenn diese Behauptung für eine Zahl n zutrifft, so folgt aus III und aus der Art des oben beschriebenen Überganges θ von β zu γ, daß die Behauptung auch für die folgende Zahl n' gilt, w. z. b. w. Hierauf beweisen wir ebenfalls durch vollständige Induktion (80), daß, wenn m irgendeine Zahl ist, die oben angekündigte Eigenschaft

$$\psi_n(m) = \psi_m(m)$$

wirklich allen Zahlen n zukommt, welche $\geqq m$ sind, also nach 93, 74 der Kette m_0 angehören; in der Tat,

ϱ. dies leuchtet unmittelbar ein für $n = m$, und

σ. wenn diese Eigenschaft einer Zahl n zukommt, so folgt wieder aus III und der Beschaffenheit von θ, daß sie auch der Zahl n' zukommt, w. z. b. w. Nachdem auch diese besondere Eigenschaft unserer neuen Reihe von Abbildungen ψ_n festgestellt ist, können wir unseren Satz leicht beweisen. Wir definieren eine Abbildung χ der Zahlenreihe N, indem wir jeder Zahl n das Bild $\chi(n) = \psi_n(n)$ entsprechen lassen; offenbar sind (nach 21) alle Abbildungen ψ_n in dieser einen Abbildung χ enthalten. Da ψ_n eine Abbildung von Z_n in Σ war, so folgt zunächst, daß die Zahlenreihe N durch χ ebenfalls in Σ abgebildet wird, also $\chi(N) \mathrel{3} \Sigma$ ist. Sind ferner m, n verschiedene Zahlen, so darf man der Symmetrie wegen nach 90 annehmen, es sei $m < n$; dann ist nach dem Obigen $\chi(m) = \psi_m(m) = \psi_n(m)$ und $\chi(n) = \psi_n(n)$; da aber ψ_n eine ähnliche Abbildung von Z_n in Σ war, und m, n verschiedene Elemente von Z_n sind, so ist $\psi_n(m)$ verschieden von $\psi_n(n)$, also auch $\chi(m)$ verschieden von $\chi(n)$, d. h. χ ist eine ähnliche Abbildung von N. Da ferner N ein unendliches System ist (71), so gilt nach 67 dasselbe von dem ihm ähnlichen System $\chi(N)$ und nach 68, weil $\chi(N)$ Teil von Σ ist, auch von Σ, w. z. b. w.

160. *Satz.* Ein System Σ ist endlich oder unendlich, je nachdem es ein ihm ähnliches System Z_n gibt oder nicht gibt.

Beweis. Wenn Σ endlich ist, so gibt es nach 159 Systeme Z_n, welche nicht ähnlich abbildbar in Σ sind; da nach 102 das System Z_1

aus der einzigen Zahl 1 besteht und folglich in jedem System ähnlich abbildbar ist, so muß die kleinste Zahl k (96), der ein in Σ nicht ähnlich abbildbares System Z_k entspricht, verschieden von 1, also (nach 78) $= n'$ sein, und da $n < n'$ ist (91), so gibt es eine ähnliche Abbildung ψ von Z_n in Σ; wäre nun $\psi(Z_n)$ nur ein echter Teil von Σ, gäbe es also ein Element α in Σ, welches nicht in $\psi(Z_n)$ enthalten ist, so könnte man, da $Z_{n'} = \mathfrak{M}(Z_n, n')$ ist (108), diese Abbildung ψ zu einer ähnlichen Abbildung ψ von $Z_{n'}$ in Σ erweitern, indem man $\psi(n') = \alpha$ setzte, während doch nach unserer Annahme $Z_{n'}$ nicht ähnlich abbildbar in Σ ist. Mithin ist $\psi(Z_n) = \Sigma$, d. h. Z_n und Σ sind ähnliche Systeme. Umgekehrt, wenn ein System Σ einem System Z_n ähnlich ist, so ist Σ nach 119, 67 endlich, w. z. b. w.

161. *Erklärung.* Ist Σ ein endliches System, so gibt es nach 160 eine, und nach 120, 33 auch nur eine einzige Zahl n, welcher ein dem Systeme Σ ähnliches System Z_n entspricht; diese Zahl n heißt die *Anzahl* der in Σ enthaltenen Elemente (oder auch der *Grad* des Systems Σ), und man sagt, Σ bestehe aus oder sei ein System von n Elementen, oder die Zahl n gebe an, *wie viele* Elemente in Σ enthalten sind*). Wenn die Zahlen benutzt werden, um diese bestimmte Eigenschaft endlicher Systeme genau auszudrücken so heißen sie *Kardinalzahlen*. Sobald eine bestimmte ähnliche Abbildung ψ des Systems Z_n gewählt ist, vermöge welcher $\psi(Z_n) = \Sigma$ wird, so entspricht jeder in Z_n enthaltenen Zahl m (d. h. jeder Zahl m, welche $\leqq n$ ist) ein bestimmtes Element $\psi(m)$ des Systems Σ, und rückwärts entspricht nach 26 jedem Elemente von Σ durch die umgekehrte Abbildung $\overline{\psi}$ eine bestimmte Zahl m in Z_n. Sehr oft bezeichnet man alle Elemente von Σ mit einem einzigen Buchstaben, z. B. α, dem man die unterscheidenden Zahlen m als Zeiger anhängt, so daß $\psi(m)$ mit α_m bezeichnet wird. Man sagt auch, diese Elemente seien *gezählt* und durch ψ in bestimmter Weise *geordnet*, und nennt α_m das m-te Element von Σ; ist $m < n$, so heißt $\alpha_{m'}$ das auf α_m *folgende* Element, und α_n heißt das *letzte* Element. Bei diesem Zählen der Elemente treten daher die Zahlen m wieder als Ordinalzahlen auf (73).

*) Der Deutlichkeit und Einfachheit wegen beschränken wir im folgenden den Begriff der Anzahl durchaus auf endliche Systeme; wenn wir daher von einer Anzahl gewisser Dinge sprechen, so soll damit immer schon ausgedrückt sein, daß das System, dessen Elemente diese Dinge sind, ein endliches ist.

162. Satz. Alle einem endlichen Systeme ähnlichen Systeme besitzen dieselbe Anzahl von Elementen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus 33, 161.

163. Satz. Die Anzahl der in Z_n enthaltenen, d. h. derjenigen Zahlen, welche $\leqq n$ sind, ist n.

Beweis. Denn nach 32 ist Z_n sich selbst ähnlich.

164. Satz. Besteht ein System aus einem einzigen Element, so ist die Anzahl seiner Elemente $= 1$, und umgekehrt.

Der Beweis folgt unmittelbar aus 2, 26, 32, 102, 161.

165. Satz. Ist T echter Teil eines endlichen Systems Σ, so ist die Anzahl der Elemente von T kleiner als diejenige der Elemente von Σ.

Beweis. Nach 68 ist T ein endliches System, also ähnlich einem System Z_m, wo m die Anzahl der Elemente von T bedeutet; ist ferner n die Anzahl der Elemente von Σ, also Σ ähnlich Z_n, so ist T nach 35 einem echten Teile E von Z_n ähnlich, und nach 33 sind auch Z_m und E einander ähnlich; wäre nun $n \leqq m$, also $Z_n \mathrel{3} Z_m$, so wäre E nach 7 auch echter Teil von Z_m, und folglich Z_m ein unendliches System, was dem Satze 119 widerspricht; mithin ist (nach 90) $m < n$, w. z. b. w.

166. Satz. Ist $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$, wo B ein System von n Elementen und γ ein nicht in B enthaltenes Element von Γ bedeutet, so besteht Γ aus n' Elementen.

Beweis. Denn wenn $B = \psi(Z_n)$ ist, wo ψ eine ähnliche Abbildung von Z_n bedeutet, so läßt sich dieselbe nach 105, 108 zu einer ähnlichen Abbildung ψ von $Z_{n'}$ erweitern, indem man $\psi(n') = \gamma$ setzt, und zwar wird $\psi(Z_{n'}) = \Gamma$, w. z. b. w.

167. Satz. Ist γ ein Element eines aus n' Elementen bestehenden Systems Γ, so ist n die Anzahl aller anderen Elemente von Γ.

Beweis. Denn wenn B den Inbegriff aller von γ verschiedenen Elemente in Γ bedeutet, so ist $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$; ist nun b die Anzahl der Elemente des endlichen Systems B, so ist nach dem vorhergehenden Satze b' die Anzahl der Elemente von Γ, also $= n'$, woraus nach 26 auch $b = n$ folgt, w. z. b. w.

168. Satz. Besteht A aus m, und B aus n Elementen, und haben A und B kein gemeinsames Element, so besteht $\mathfrak{M}(A, B)$ aus $m + n$ Elementen.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist wahr für $n = 1$ zufolge 166, 164, 135. II.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so gilt er auch für die folgende Zahl n'. In der Tat, wenn Γ ein System von n' Elementen ist, so kann man (nach 167) $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$ setzen, wo γ ein Element und B das System der n anderen Elemente von Γ bedeutet. Ist nun A ein System von m Elementen, deren jedes nicht in Γ, also auch nicht in B enthalten ist, und setzt man $\mathfrak{M}(A, B) = \Sigma$, so ist nach unserer Annahme $m + n$ die Anzahl der Elemente von Σ, und da γ nicht in Σ enthalten ist, so ist nach 166 die Anzahl der in $\mathfrak{M}(\Sigma, \gamma)$ enthaltenen Elemente $= (m + n)'$, also (nach 135. III) $= m + n'$; da aber nach 15 offenbar $\mathfrak{M}(\Sigma, \gamma) = \mathfrak{M}(A, B, \gamma) = \mathfrak{M}(A, \Gamma)$ ist, so ist $m + n'$ die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{M}(A, \Gamma)$, w. z. b. w.

169. Satz. Sind A, B endliche Systeme von beziehungsweise m, n Elementen, so ist $\mathfrak{M}(A, B)$ ein endliches System, und die Anzahl seiner Elemente ist $\leqq m + n$.

Beweis. Ist $B \mathrel{3} A$, so ist $\mathfrak{M}(A, B) = A$, und die Anzahl m der Elemente dieses Systems ist (nach 142) $< m + n$, wie behauptet war. Ist aber B kein Teil von A, und T das System aller derjenigen Elemente von B, welche nicht in A enthalten sind, so ist nach 165 deren Anzahl $p \leqq n$, und da offenbar

$$\mathfrak{M}(A, B) = \mathfrak{M}(A, T)$$

ist, so ist nach 143 die Anzahl $m + p$ der Elemente dieses Systems $\leqq m + n$, w. z. b. w.

170. Satz. Jedes aus einer Anzahl n von endlichen Systemen zusammengesetzte System ist endlich.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ϱ. der Satz ist nach 8 selbstverständlich für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, und ist Σ zusammengesetzt aus n' endlichen Systemen, so sei A eines dieser Systeme und B das aus allen übrigen zusammengesetzte System; da deren Anzahl (nach 167) $= n$ ist, so ist nach unserer Annahme B ein endliches System. Da nun offenbar $\Sigma = \mathfrak{M}(A, B)$ ist, so folgt hieraus und aus 169, daß auch Σ ein endliches System ist, w. z. b. w.

171. Satz. Ist ψ eine unähnliche Abbildung eines endlichen Systems Σ von n Elementen, so ist die Anzahl der Elemente des Bildes $\psi(\Sigma)$ kleiner als n.

Beweis. Wählt man von allen denjenigen Elementen von Σ, welche ein und dasselbe Bild besitzen, immer nur ein einziges nach Belieben aus, so ist das System T aller dieser ausgewählten Elemente offenbar ein echter Teil von Σ, weil ψ eine unähnliche Abbildung von Σ ist (26). Zugleich leuchtet aber ein, daß die (nach 21) in ψ enthaltene Abbildung dieses Teils T eine ähnliche, und daß $\psi(T) = \psi(\Sigma)$ ist; mithin ist das System $\psi(\Sigma)$ ähnlich dem echten Teil T von Σ, und hieraus folgt unser Satz nach 162, 165.

172. Schlußbemerkung. Obgleich soeben bewiesen ist, daß die Anzahl m der Elemente von $\psi(\Sigma)$ kleiner als die Anzahl n der Elemente von Σ ist, so sagt man in manchen Fällen doch gern, die Anzahl der Elemente von $\psi(\Sigma)$ sei $= n$. Natürlich wird dann das Wort Anzahl in einem anderen als dem bisherigen Sinne (161) gebraucht; ist nämlich α ein Element von Σ, und a die Anzahl aller derjenigen Elemente von Σ, welche ein und dasselbe Bild $\psi(\alpha)$ besitzen, so wird letzteres als Element von $\psi(\Sigma)$ häufig doch noch als Vertreter von a Elementen aufgefaßt, die wenigstens ihrer Abstammung nach als verschieden voneinander angesehen werden können, und wird demgemäß als a-faches Element von $\psi(\Sigma)$ gezählt. Man kommt auf diese Weise zu dem in vielen Fällen sehr nützlichen Begriffe von Systemen, in denen jedes Element mit einer gewissen Häufigkeitszahl ausgestattet ist, welche angibt, wie oft dasselbe als Element des Systems gerechnet werden soll. Im obigen Falle würde man z. B. sagen, daß n die Anzahl der in diesem Sinne gezählten Elemente von $\psi(\Sigma)$ ist, während die Anzahl m der wirklich verschiedenen Elemente dieses Systems mit der Anzahl der Elemente von T übereinstimmt. Ähnliche Abweichungen von der ursprünglichen Bedeutung eines Kunstausdrucks, die nichts anderes sind als Erweiterungen der ursprünglichen Begriffe, treten sehr häufig in der Mathematik auf; doch liegt es nicht im Zweck dieser Schrift, näher hierauf einzugehen.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung*).

„Was sind und was sollen die Zahlen?“ ist in zwei Richtungen bahnbrechend geworden, für die Grundlagenforschung und für die axiomatische Mengenlehre. Auf die Bedeutung für die Grundlagenforschung hat erst neuerdings Hilbert wieder hingewiesen (Math. Ann. **104**); eine eingehende von E. Zermelo stammende Analyse der Schrift findet sich in dem Nachruf von Landau (Gött. Nachr. 1917). Wie stark die axiomatische Mengenlehre durch Dedekind beeinflußt ist, zeigt ein

*) Vgl. auch die Erläuterungen zu LX und LXII.

Vergleich mit den Zermeloschen Axiomen (Math. Ann. **65**), die teilweise direkt aus den „Erklärungen“ Dedekinds (§ 1 der Schrift) übernommen sind. Daß dabei das „Axiom des Unendlichen“ postuliert werden mußte, da der Beweisversuch Dedekinds (66) auf dem widerspruchsvollen Begriff der „Menge alles Denkbaren“ beruht, ist bekannt; ebenso, daß in die Dedekindschen Überlegungen das Auswahlpostulat hineinspielt (159). Auch der zweite Zermelosche Beweis des Wohlordnungssatzes kann als eine Übertragung des hier gegebenen Beweises für die Möglichkeit der vollständigen Induktion auf die transfinite Induktion angesehen werden; dabei mußte allerdings im Transfiniten schon hier das Auswahlaxiom den übrigen, von Dedekind implizit benutzten Axiomen zugefügt werden. Dedekind konnte es für die gewöhnliche vollständige Induktion umgehen, dadurch, daß er die in die Definition des Unendlichen eingehende Abbildung zur Verfügung hatte. Der über den „Beweis“ durch vollständige Induktion hinausgehende Satz von der „Definition“ durch vollständige Induktion (126) ist für das Transfinite scharf herausgearbeitet bei J. v. Neumann (Math. Ann. **99**). Der Satz findet insbesondere Verwendung in der Algebra unendlicher Bereiche, entsprechend wie Dedekind die Rechnungsregeln der ganzen Zahlen vermöge Definition durch vollständige Induktion erhält.

Noether.

LII.

Vorwort zur ersten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie. 1863.

Gleich nach dem Tode Dirichlets wurde ich mehrfach aufgefordert, die von ihm gehaltenen Universitäts-Vorlesungen, welche so außerordentlich viel zur Verbreitung der Bekanntschaft mit neueren und feineren Teilen der Mathematik beigetragen haben, in möglichst getreuer Form zu veröffentlichen; ich glaubte dieser Aufforderung um so eher nachkommen zu können, als ich in den Jahren 1855 bis 1858 die wichtigsten dieser Vorlesungen in Göttingen gehört und außerdem vielfach Gelegenheit gehabt hatte, im persönlichen Verkehr Dirichlets Gründe für die von ihm befolgte Methode des Vortrags kennenzulernen. Nachdem auch die Verwandten Dirichlets mich dazu ermächtigt haben, so übergebe ich dem mathematischen Publikum hiermit eine Ausarbeitung der Vorlesung über Zahlentheorie, bei welcher im wesentlichen der im Winter 1856 bis 1857 von Dirichlet befolgte Gang eingehalten ist; er selbst faßte damals den Gedanken einer Herausgabe dieser Vorlesungen, und da er seinen Vortrag nie schriftlich ausgearbeitet hatte, so diente ihm ein von mir geschriebenes, allerdings nur die Hauptmomente der Beweise enthaltendes Heft dazu, einen ungefähren Überschlag über die Ausdehnung der einzelnen Abschnitte zu machen. In öfter wiederkehrenden Gesprächen über diesen Plan äußerte er die Absicht, bei der Veröffentlichung manche Abschnitte hinzufügen zu wollen, die in einem Lehrbuch nicht fehlen dürften, die aber in jener Winter-Vorlesung aus Mangel an Zeit übergangen werden mußten. Bei der jetzigen Herausgabe ist daher im wesentlichen zwar das eben erwähnte Heft zugrunde gelegt, aber ich habe teils nach älteren Heften, teils nach Dirichletschen Abhandlungen, endlich auch ganz nach eigenem Ermessen Zusätze von nicht unbedeutender Ausdehnung gemacht, welche ich hier

anführen zu müssen glaube, um für sie die Verantwortlichkeit zu übernehmen; sie sind in den Paragraphen 105 bis 110, 121 bis 144 und in den unmittelbar unter den Text gesetzten Anmerkungen enthalten.

Es ist meine Absicht, diesem ersten Bande, dessen Vollendung durch andere Arbeiten sich bis jetzt verzögert hat, zunächst einen zweiten weniger umfangreichen nachfolgen zu lassen, in welchem die Vorlesung über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte wiedergegeben werden soll.

Braunschweig, im Oktober 1863.

LIII.

Anzeige der ersten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie.

[Göttingische gelehrte Anzeigen, Jahrgang 1864, S. 121 bis 124.]

Der unterzeichnete Herausgeber besuchte als Privatdozent an der Universität Göttingen im Winter 1856—1857 eine Vorlesung Dirichlets über Zahlentheorie, welche, obwohl mit den Elementen beginnend, hauptsächlich der Theorie der quadratischen Formen gewidmet war und dieselbe vollständiger als in früheren Jahren behandelte. Die täglich nach der Vorlesung von ihm aufgeschriebenen kurzen Notizen, welche fast nur die Hauptmomente der Beweise enthielten und selbstverständlich durchaus nicht zur Publikation bestimmt waren, wurden von Dirichlet durchgesehen, welcher damals mit dem Gedanken einer Herausgabe dieser Vorlesung umging und sich auf diese Weise einen Überblick über die Ausdehnung der einzelnen Teile zu verschaffen suchte; es ist bekannt, daß er selbst seine Vorlesungen nie schriftlich ausarbeitete. Da die Mannigfaltigkeit der Methoden, welche zum Beweise eines und desselben Satzes dienen, einen Hauptreiz der Zahlentheorie bildet, und die Elemente in jener Vorlesung überhaupt nur kurz behandelt werden konnten, so lag es nicht im Sinne Dirichlets, sich bei der Herausgabe eines Lehrbuchs der Zahlentheorie auf den Inhalt dieser Vorlesung zu beschränken, sondern er äußerte die Absicht, manche Vervollständigungen hinzufügen zu wollen, durch welche das Werk sich zu einem abgerundeten Ganzen gestalten sollte. Als die Hoffnung, ein solches Werk zu besitzen, durch den zu frühen Tod Dirichlets vereitelt war, unternahm es nach mehrfacher Aufforderung der Unterzeichnete, mit Zugrundelegung des oben erwähnten Heftes, aber mit Rücksicht auf Vervollständigungen der genannten Art, Dirichlets Vorlesungen in möglichst getreuer Form wiederherzustellen und zu veröffentlichen. Das vorliegende Werk ist das Resultat seiner mehrjährigen Arbeit.

Was die äußere Form betrifft, so schien es notwendig, durch Einteilung in Abschnitte und Paragraphen den Überblick zu erleichtern; der erste Abschnitt handelt von der Teilbarkeit, der zweite von der Kongruenz der Zahlen, der dritte von den quadratischen Resten; in dem vierten sind die Elemente der Theorie der binären quadratischen Formen dargestellt, und der fünfte enthält die zuerst von Dirichlet gegebene Auflösung des Problems, die Anzahl der Klassen zu bestimmen, in welche die binären quadratischen Formen von gegebener Determinante zerfallen. Neben der eigentlichen Hauptvorlesung hielt Dirichlet eine Supplementar-Vorlesung, in welcher einige wichtige, andern Gebieten angehörige Hilfssätze bewiesen wurden; diese Trennung ist beibehalten, um den für den Anfänger ohnehin nicht so leicht zu fassenden Gedankengang des fünften Abschnitts nicht zu unterbrechen; der Inhalt dieser Nebenvorlesung ist in den drei ersten Supplementen wiedergegeben. Die folgenden Supplemente (IV—IX) sind Zusätze, durch welche der Herausgeber das Gebiet des behandelten Stoffes in dem obigen Sinn abzurunden versucht hat. Unter diesen bilden die Supplemente IV, VI, VIII im wesentlichen nur Reproduktionen von bekannten Dirichletschen Abhandlungen; die übrigen sind ohne ein solches Vorbild ausgearbeitet, behandeln aber ebenfalls fast ausschließlich schon bekannte Gegenstände. Ebenso sind die letzten Paragraphen (105—110) des fünften Abschnitts lediglich zur Vervollständigung hinzugefügt; auch in den vorhergehenden Abschnitten ist manches Einzelne enthalten, was der Herausgeber teils aus ältern Vorlesungsheften entlehnt, teils nach eigenem Ermessen hinzugesetzt hat; doch verlohnt es sich nicht der Mühe, alles aufzuzählen.

Gänzlich ausgeschlossen ist die Lehre von der Komposition der Formen, weil die einzige hierauf unmittelbar bezügliche Abhandlung Dirichlets (De formarum binariarum secundi gradus compositione. 1851) nur den ersten Fundamentalsatz behandelt, weshalb der Herausgeber befürchten mußte, bei einer vollständigen Darstellung dieser Theorie sich zu weit von dem ursprünglichen Zweck der ganzen Herausgabe zu entfernen.

Die Ausarbeitung der ersten Abschnitte ist absichtlich ausführlicher gehalten als die der spätern, um den Anfänger allmählich mehr und mehr auf seine eigenen Kräfte anzuweisen, und namentlich hat der Herausgeber geglaubt, in den von ihm hinzugefügten Teilen sich bedeutend kürzer fassen zu dürfen.

LIV.

Vorwort zur zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie. 1871.

Diese neue Auflage unterscheidet sich von der ersten hauptsächlich dadurch, daß sie um das zehnte Supplement bereichert ist, welches von der Komposition der Formen handelt. Dieser Gegenstand war bei der ersten Auflage gänzlich ausgeschlossen geblieben, weil die einzige Abhandlung Dirichlets, welche sich unmittelbar hierauf bezieht, nur den ersten Fundamentalsatz behandelt, weshalb ich befürchten mußte, bei einer vollständigen Darstellung dieser Theorie mich zu weit von dem ursprünglichen Zwecke der Herausgabe zu entfernen. Obwohl ich nun diese Gefahr auch jetzt durchaus nicht verkenne, so habe ich mich doch aus vielen Gründen entschlossen, das zehnte Supplement hinzuzufügen und dadurch mehrfachen an mich gerichteten Aufforderungen nach besten Kräften zu entsprechen, hauptsächlich, weil trotz des ungemeinen Interesses und der steigenden Wichtigkeit dieser Theorie noch immer kein Versuch gemacht ist, die großen Schwierigkeiten hinwegzuräumen, welche beim Eindringen in dieselbe sich dem Anfänger entgegenstellen, und weil die übrigen Abschnitte des Werkes ganz vorzüglich geeignet sind, einen solchen Versuch zu erleichtern. Bei der wirklichen Ausführung dieses Entschlusses habe ich mich nicht auf die Begründung der ersten Elemente beschränkt, sondern es für notwendig gehalten, den größten Teil der in der fünften Sektion der Disquisitiones Arithmeticae enthaltenen Untersuchungen möglichst kurz und einfach zur Darstellung zu bringen. Endlich habe ich in dieses Supplement eine allgemeine Theorie der Ideale aufgenommen, um auf den Hauptgegenstand des ganzen Buches von einem höheren Standpunkte aus ein neues Licht zu werfen; hierbei habe ich mich freilich auf die Darstellung der Grundlagen beschränken müssen, doch hoffe ich, daß das Streben nach charakteristischen Grundbegriffen, welches in anderen

Teilen der Mathematik mit so schönen Erfolgen gekrönt ist, mir nicht ganz mißglückt sein möge. Die Untersuchungen in diesem von Kummer geschaffenen Gebiete, welche Kronecker vor vierzehn Jahren angestellt hat, sind bis jetzt nicht veröffentlicht, und ich vermag nach den damaligen brieflichen Mitteilungen dieses ausgezeichneten Mathematikers nicht zu beurteilen, in welchen Beziehungen seine Prinzipien zu den meinigen stehen. Der Aufbau der Theorie in § 163 befriedigt mich selbst zwar noch nicht vollständig; allein es ist mir erst nach sehr langem Nachdenken geglückt, ihm diese Form zu geben, während ich vor etwa zehn Jahren von der Theorie der höheren Kongruenzen in Verbindung mit den Prinzipien von Galois zu einer ganz anderen Begründungsart gelangt war, welche einige Berührungspunkte mit der Theorie der idealen Zahlen von Selling hat, mir aber jetzt weniger naturgemäß erscheint. Eine ausführlichere Darstellung der an den Begriff eines Körpers (§ 159) sich anschließenden algebraischen Prinzipien, welche hier nur beiläufig angedeutet werden konnten, verspare ich mir für eine andere Gelegenheit.

Es ist natürlich, daß die Hinzufügung des zehnten Supplementes einige Rückwirkung auf die früheren Abschnitte ausgeübt hat; doch braucht man nicht zu besorgen, daß ich mich durch solche Abänderungen der ersten Auflage im Plan und in der Haltung der Darstellung von der eigentlichen Grundlage, den Vorlesungen Dirichlets, weiter entfernt habe. Um einem etwaigen Vorwurfe dieser Art von vornherein zu begegnen, wiederhole ich hier (aus den Göttinger Gelehrten Anzeigen vom 27. Januar 1864), daß auch die erste Auflage sich nicht auf ein in den Vorlesungen selbst nachgeschriebenes Heft, sondern nur auf Notizen stützt, welche ich aus der Erinnerung und größtenteils in äußerst kurzer Form verfaßt habe; als ich diese Vorlesungen als Privatdozent in Göttingen hörte, war ich mit dem Stoffe hinreichend vertraut, und mein Hauptzweck bestand darin, den überaus eindringlichen Vortrag Dirichlets vollständig auf mich wirken zu lassen. Bei der Herausgabe der ersten Auflage, welche erst nach einer Reihe von Jahren erfolgte, wurde es notwendig, diese Notizen ganz neu auszuarbeiten und auch durch eigene Zutaten (z. B. § 2, wenn ich nicht irre) zu ergänzen, die unmöglich alle erwähnt werden konnten. Aber damals sowohl wie jetzt ist es mein eifrigstes Streben gewesen, Dirichlets Vortrag mit größter Treue wiederzugeben. Volle Freiheit habe ich mir dagegen bei den eigenen Zusätzen gestattet; gänzlich umgearbeitet sind z. B. die §§ 105 bis 110, 143, 144, und manches Neue ist teils im Text, teils in Form von Noten hinzugefügt.

Endlich habe ich mich bemüht, überall, wo es mir möglich war, auf die Quellen zu verweisen, um den Leser zum Studium der Originalwerke zu veranlassen und in ihm ein Bild von den Fortschritten der Wissenschaft zu erwecken, deren ebenso tiefe wie erhabene Wahrheiten einen Schatz bilden, welcher die unvergängliche Frucht eines wahrhaft edelen Wettkampfes der europäischen Völker ist.

Braunschweig, 1. März 1871.

LV.

Anzeige der zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie.

[Göttingische gelehrte Anzeigen, Jahrgang 1871, S. 1481—1494.]

Die erste im Jahre 1863 erschienene Auflage dieses Werkes ist von mir in diesen Blättern (27. Januar 1864) angezeigt, und ich kann hinsichtlich der Entstehung und des Inhaltes im wesentlichen auf meine damaligen Mitteilungen verweisen. Die neue Auflage unterscheidet sich von der ersten durch eine große Anzahl von Vervollständigungen, welche teils in Anmerkungen, teils im Texte selbst hinzugefügt sind. Viele Paragraphen sind auch gänzlich umgearbeitet. Diese Veränderungen, welche indessen den wesentlichen Kern des Dirichletschen Vortrages nicht berühren, sind hauptsächlich durch den Entschluß hervorgerufen, in einem neuen Anhange, dem zehnten Supplement, die Lehre von der Komposition der binären quadratischen Formen darzustellen, welche aus damals erwähnten Gründen in der ersten Auflage nicht behandelt war. Die umfassende Allgemeinheit, mit welcher Gauß diese Lehre in der fünften Sektion der Disquisitiones Arithmeticae vorgetragen hat, enthält für den Anfänger bedeutende Schwierigkeiten des Verständnisses; dieser Umstand hat Dirichlet Veranlassung gegeben zur Veröffentlichung der Abhandlung: De formarum binariarum secundi gradus compositione. 1851. Er sagt in der Einleitung zu derselben: De formarum compositione tunc non egi, quod argumentum ab illustrissimo Gauß in „Disquisitionum Arithmeticarum" sectione quinta maxima quidem generalitate sed per calculos tam prolixos tractatum esse constat, ut perpauci compositionis naturam percipere valuerint eo magis quod summus geometra, ut ipse monuit, brevitati consulens theorematum difficiliorum demonstrationes synthetice adornavit, suppressa analysi per quam erant eruta. Quare confidere posse mihi videor, hujus argumenti expositionem novam et plane elementarem artis analyticae cultoribus non fore ingratam. Da in dieser Abhandlung nur der erste Hauptsatz der in Rede stehenden Theorie bewiesen, aber keine Andeutung über den weiteren Verlauf gegeben wird, so habe ich einen etwas abweichenden Weg eingeschlagen, welcher mit dem von Dirichlet darin übereinstimmt, daß nur ein spezieller Fall der Komposition betrachtet wird. Die §§ 145—149 enthalten die allgemeinen Sätze über die Komposition der Formen und Formenklassen. Dieselben werden in den §§ 150, 151 dazu benutzt, das Verhältnis der Klassenzahlen für zwei Determinanten zu finden, welche sich wie zwei Quadratzahlen verhalten; es ist dies dieselbe Aufgabe, welche nach Dirichletschen Prinzipien schon in den §§ 97, 99, 100 behandelt ist. In den §§ 152—154 folgt die Komposition der Geschlechter und der zweite Beweis von Gauß für den Reziprozitätssatz in der Theorie der quadratischen Reste. Die §§ 155—158 enthalten einen Beweis des Satzes von Gauß, daß jede Klasse des Hauptgeschlechtes durch Duplikation entsteht; derselbe stützt sich auf einen Satz von Lagrange und Legendre über die Auflösung der unbestimmten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten in rationalen Zahlen.

In den nun noch folgenden Paragraphen habe ich versucht, den Leser in ein höheres Gebiet einzuführen, in welchem Algebra und Zahlentheorie sich auf das Innigste miteinander verbinden. Im Laufe der Vorlesungen über Kreisteilung und höhere Algebra, welche ich zu Göttingen im Winter 1856—1857 vor den Herrn Sommer und Bachmann, im Winter 1857—1858 vor den Herrn Selling und Auwers gehalten habe, drängte sich mir die Überzeugung auf, daß das Studium der algebraischen Verwandtschaft der Zahlen am zweckmäßigsten auf einen Begriff gegründet wird, welcher unmittelbar an die einfachsten arithmetischen Prinzipien anknüpft. Den damals von mir benutzten Namen „rationales Gebiet" habe ich später mit dem Worte „Körper" vertauscht; ich verstehe darunter ein System von unendlich vielen Zahlen, welches die Eigenschaft besitzt, daß die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von je zwei dieser Zahlen wieder demselben System angehören. Ich nenne einen Körper A einen Divisor eines Körpers M, diesen ein Multiplum von jenem, wenn alle in A enthaltenen Zahlen sich auch in M vorfinden. Je zwei Körper A, B besitzen immer ein kleinstes gemeinschaftliches Multiplum, welches mit AB bezeichnet werden kann, und ebenso

einen größten gemeinschaftlichen Divisor. Wenn jeder Zahl a eines Körpers A eine Zahl $b = \varphi(a)$ in der Weise entspricht, daß $\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$, und $\varphi(a a') = \varphi(a)\varphi(a')$ ist, so bilden die Zahlen b einen mit A konjugierten Körper $B = \varphi(A)$, welcher durch die Substitution φ aus A hervorgeht. Diese Begriffe leiten nach der algebraischen Richtung hin zu den Prinzipien von Galois, nach der zahlentheoretischen Seite hin zu Kummers Schöpfung der idealen Zahlen.

In § 159 sind die allgemeinsten Eigenschaften eines Körpers Ω entwickelt, welcher nur eine endliche Anzahl von Divisoren besitzt; in einem solchen gibt es immer eine endliche Anzahl von Zahlen ω_1, ω_2, ..., ω_n der Art, daß jede beliebige Zahl ω des Körpers stets und nur auf eine einzige Art in die Form

$$h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \cdots + h_n\omega_n$$

gebracht werden kann, wo h_1, h_2, ..., h_n rationale Zahlen bedeuten, die ich die Koordinaten der Zahl ω in bezug auf die Basis ω_1, ω_2, ..., ω_n nenne; die Zahl n heißt der Grad des Körpers Ω. Dann ergibt sich leicht, daß jede Zahl des Körpers eine algebraische Zahl, nämlich die Wurzel einer Gleichung $n$ten Grades ist, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind, und daß der Körper Ω durch n verschiedene Substitutionen in n konjugierte Körper übergeht. Das Produkt aus den n Werten, in welche eine bestimmte Zahl ω des Körpers durch diese n Substitutionen übergeht, heißt die Norm von ω und ist eine homogene Funktion der Koordinaten mit rationalen Koeffizienten, also eine rationale Zahl, welche mit $N(\omega)$ bezeichnet wird. Bildet man ferner, wenn ein System von n Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des Körpers Ω gegeben ist, die Determinante aus den n^2 korrespondierenden Zahlen der n konjugierten Körper, so ist das Quadrat derselben eine rationale Zahl, welche ich die Diskriminante der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nenne und mit $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ bezeichne. Auf die analytischen Entwicklungen einzugehen, welche sich an diese Begriffe anknüpfen, ist hier nicht möglich und auch nicht nötig; dieselben sind auch in diesem Paragraphen nur so weit mitgeteilt, wie es mir zum besseren Verständnis zweckmäßig erschien.

In dem folgenden § 160 werden alle algebraischen Zahlen (welche ebenfalls einen Körper bilden) in ganze und gebrochene Zahlen eingeteilt; unter einer ganzen Zahl wird jede Wurzel einer Gleichung verstanden, deren höchster Koeffizient = 1, und deren übrige Koeffizienten rationale und zwar ganze Zahlen sind. Aus diesem Begriffe werden die einfachsten Sätze über die Teilbarkeit, über Einheiten und über relative Primzahlen abgeleitet, von denen später Gebrauch gemacht wird.

Der folgende § 161 enthält einen Hilfssatz aus einer Theorie, durch welche der zuerst von Gauß eingeführte Begriff der Kongruenz der Zahlen verallgemeinert wird. Unter einem Modul verstehe ich ein System $\mathfrak{m}$ von Zahlen, deren Summen und Differenzen demselben System angehören, und die Kongruenz $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{m}}$ soll bedeuten, daß die Differenz $\omega - \omega'$ eine Zahl des Systems $\mathfrak{m}$ ist. Dieser Begriff besitzt eine größere Tragweite, als seine außerordentliche Einfachheit zu versprechen scheint; doch ist hier nur das mitgeteilt, was zur Erleichterung der nachfolgenden Darstellung dienen kann.

Nach diesen Vorbereitungen werden im § 162 die ganzen Zahlen eines Körpers Ω vom $n$ten Grade näher untersucht; sie bilden einen Modul $\mathfrak{o}$, und es wird zunächst gezeigt, daß man stets n solche ganze Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ als Basiszahlen des Körpers wählen kann, für welche jede ganze Zahl

$$\omega = h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2 + \cdots + h_n \omega_n$$

auch ganze Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ zu Koordinaten hat. Die Diskriminante $\Delta(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ einer solchen Basis, welche ich eine Grundreihe nenne, hat absolut genommen den möglich kleinsten Wert, und da diese ganze rationale, von Null verschiedene Zahl von besonders wichtiger Bedeutung für den Körper Ω ist, so wird sie die Diskriminante oder die Grundzahl desselben genannt und mit $\Delta(\Omega)$ bezeichnet. Sie geht in der Diskriminante eines jeden Systems von n ganzen Zahlen auf, und der Quotient ist ein Quadrat. Ist ferner μ eine bestimmte, von Null verschiedene Zahl in $\mathfrak{o}$, so ist die Anzahl der in $\mathfrak{o}$ enthaltenen, in bezug auf μ inkongruenten Zahlen gleich dem absoluten Wert der Norm $N(\mu)$. Sodann wird auf eine merkwürdige Erscheinung aufmerksam gemacht, welche zuerst bei den aus der Kreisteilung entspringenden Körpern beobachtet ist; sie besteht darin, daß eine ganze Zahl, welche nicht weiter in ein Produkt von ganzen Zahlen zerlegbar ist, durchaus nicht immer die Rolle einer wahren Primzahl spielt. Dies ist der Ausgangspunkt für Kummers Schöpfung der idealen Zahlen gewesen.

Ich versuche nun, in dem folgenden § 163 eine neue Theorie aufzustellen, welche alle Körper umfaßt; ihr Grundgedanke besteht in folgendem. Ist μ eine von Null verschiedene Zahl in $\mathfrak{o}$, so hat das System $\mathfrak{m}$ aller durch μ teilbaren Zahlen in $\mathfrak{o}$ die beiden folgenden Eigenschaften:

I. Die Summe und die Differenz je zweier Zahlen in $\mathfrak{m}$ sind wieder Zahlen in $\mathfrak{m}$; d. h. $\mathfrak{m}$ ist ein Modul.

II. Jedes Produkt aus einer Zahl in $\mathfrak{m}$ und einer Zahl in $\mathfrak{o}$ ist wieder eine Zahl in $\mathfrak{m}$.

Man kann aber nicht umgekehrt behaupten, daß ein jedes System $\mathfrak{m}$ von ganzen Zahlen des Körpers, welches die beiden vorstehenden Eigenschaften besitzt, und welches ich von nun an ein Ideal nenne, aus allen durch eine angebbare Zahl μ teilbaren Zahlen besteht; wenn dies aber der Fall ist, so nenne ich $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal und bezeichne es durch das Symbol $\mathfrak{i}(\mu)$. Es werden nun die Eigenschaften aller Ideale des Körpers Ω untersucht, und es ergibt sich folgendes Hauptresultat. Multipliziert man jede Zahl eines Ideals $\mathfrak{a}$ mit jeder Zahl eines Ideals $\mathfrak{b}$, so bilden diese Produkte und deren Summen ein Ideal, welches das Produkt aus den Faktoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ genannt und mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bezeichnet wird. Zufolge dieser Erklärung ist $\mathfrak{a}\mathfrak{o} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$, und aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ folgt $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Nennt man ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Ideal $\mathfrak{p}$ ein Primideal, wenn es keinen von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$ verschiedenen Faktor besitzt, so läßt sich jedes andere, zusammengesetzte Ideal stets und nur auf eine einzige Art als ein Produkt von Primidealen darstellen. Versteht man ferner unter der Norm $N(\mathfrak{a})$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ die Anzahl der in $\mathfrak{o}$ enthaltenen Zahlen, welche in bezug auf den Modul $\mathfrak{a}$ inkongruent sind, so ist $N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b})$. Auf diese Weise ist die vollständige Analogie mit den Gesetzen der Teilbarkeit in der rationalen Zahlentheorie hergestellt.

Diese ganze Theorie hängt auf das innigste mit der sogenannten Theorie der höheren Kongruenzen zusammen, welche man der Anregung von Gauß und den Arbeiten von Galois, Schönemann und anderen verdankt; ich bin zuerst durch die Abhandlungen Kummers über die idealen Zahlen der Kreisteilung und durch das Studium der algebraischen Untersuchungen von Galois veranlaßt, mich mit der Theorie der höheren Kongruenzen eingehend zu beschäftigen, und ich habe damals auch einen kurzen Abriß dieser Theorie veröffentlicht (Crelles Journal Bd. 54). Später versuchte ich, mit ihrer Hilfe eine allgemeine Theorie der idealen Zahlen aufzustellen, wurde dann durch andere Arbeiten von der Vollendung derselben abgezogen, bis die Vorarbeiten für die Herausgabe des vorliegenden Werkes mich demselben Gegenstande wieder zuwandten; die erneuten Anstrengungen führten mich auf meine jetzige Theorie der Ideale, welche mir deshalb den Vorzug vor meiner früheren Behandlungsweise zu verdienen scheint, weil sie sich auf viel einfachere Begriffe gründet. Auf den Zusammenhang mit der Theorie der höheren Kongruenzen bin ich in meiner Darstellung nicht näher eingegangen, weil ich befürchtete, den Umfang dieses Anhangs gar zu sehr zu vergrößern. Für diejenigen Leser, welche sich genauer mit diesem Zusammenhang beschäftigen wollen, füge ich hier folgende Bemerkungen hinzu, welche ihnen wohl nützlich sein können.

Bedeutet ω eine beliebige Zahl in $\mathfrak{o}$, und setzt man

$$\Delta(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}) = D^2 \Delta(\Omega),$$

so ist D immer eine ganze rationale Zahl, nämlich eine homogene Funktion der Koordinaten vom Grade $\frac{1}{2} n(n-1)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten. Ist nun p eine rationale Primzahl, und gibt es eine Zahl ω, für welche D nicht durch p teilbar wird, so läßt sich die Zerlegung des Hauptideals $\mathfrak{i}(p)$ in ein Produkt von Primidealen leicht auf die Theorie der höheren Kongruenzen zurückführen. Genügt nämlich ω der Gleichung $n$ten Grades $F(\omega) = 0$, und ist

$$F(x) \equiv P_1(x)^{e_1} P_2(x)^{e_2} \ldots P_m(x)^{e_m} \pmod{p},$$

wo $P_1, P_2, \ldots, P_m$ voneinander verschiedene Primfunktionen der Variablen x bzw. vom Grade $f_1, f_2, \ldots, f_m$ bedeuten, so ist

$$\mathfrak{i}(p) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_m^{e_m},$$

wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$ voneinander verschiedene Primideale bedeuten, deren Normen bzw. $p^{f_1}, p^{f_2}, \ldots, p^{f_m}$ sind. Hieraus folgt mit Leichtigkeit der für algebraische und zahlentheoretische Untersuchungen überaus fruchtbare Satz:

Die Primzahl p geht stets und nur dann in der Grundzahl $\Delta(\Omega)$ des Körpers auf, wenn p durch das Quadrat eines Primideals teilbar ist.

Anfangs hielt ich es für sehr wahrscheinlich, daß für jede bestimmte Primzahl p auch eine ganze Zahl ω existierte, welcher eine

durch p nicht teilbare Zahl D entspräche; erst als alle meine Versuche, die Existenz einer solchen Zahl ω nachzuweisen, fruchtlos blieben, stellte ich mir die Aufgabe, die Unrichtigkeit dieser Vermutung darzutun. Wäre sie richtig, so müßten jedesmal, wenn p durch r verschiedene Primideale $\mathfrak{p}$ teilbar ist, deren Normen denselben Wert p^f haben, auch mindestens r verschiedene Primfunktionen P vom Grade f existieren, und umgekehrt, wenn diese letztere Voraussetzung immer erfüllt wäre, so könnte man auch die Existenz einer Zahl ω von der angegebenen Beschaffenheit beweisen. Im einfachsten Fall, wenn $f = 1$, gibt es genau p verschiedene Primfunktionen ersten Grades; es fragt sich also, ob nicht ein Körper Ω existiert, in welchem p durch mindestens $(p+1)$ verschiedene Primideale teilbar ist, welche alle dieselbe Norm p besitzen; der Grad des Körpers muß dann mindestens $= p + 1$ sein. Der einfachste Fall wird entstehen, wenn man $p = 2$ nimmt, und man kann fragen: gibt es kubische Körper, in welchen die Zahl 2 durch drei verschiedene Primideale teilbar ist? In einem solchen würde D stets eine gerade Zahl sein. Als Grundreihe eines kubischen Körpers kann man immer die Zahl 1 und zwei andere ganze Zahlen α, β wählen, deren Produkt rational ist. Es wird dann

$$\begin{aligned} \alpha\alpha &= a'\alpha + b\beta - bb' \\ \beta\beta &= a\alpha + b'\beta - aa' \\ \alpha\beta &= ab, \end{aligned}$$

wo a, b, a', b' ganze rationale Zahlen bedeuten, die jedenfalls keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, und man findet

$$\Delta(\Omega) = \Delta(1, \alpha, \beta) = a'^2 b'^2 + 18 a b a' b' - 4 a a'^3 - 4 b b'^3 - 27 a^2 b^2.$$

Setzt man ferner

$$\omega = z + x\alpha + y\beta,$$

wo z, x, y willkürliche ganze rationale Zahlen bedeuten, so wird

$$\begin{aligned} \omega^2 = z^2 - bb'x^2 - aa'y^2 + 2abxy + (a'x^2 + ay^2 + 2xz)\alpha \\ + (bx^2 + b'y^2 + 2yz)\beta, \end{aligned}$$

und folglich

$$D = bx^3 - a'x^2y + b'xy^2 - ay^3$$

unabhängig von z, was wegen der Bedeutung von D notwendig erfolgen mußte. Obgleich nun a, b, a', b' keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so wird dennoch D stets eine gerade Zahl werden, wenn a und b gerade, a' und b' ungerade sind. Dann muß also auch die

Zahl 2 durch drei verschiedene Primideale teilbar sein. Dies bestätigt sich vollständig an dem Beispiel

$$a = b = 2, \quad a' = -b' = 1, \quad \Delta(\Omega) = -503;$$

es ist

$$\mathfrak{i}(2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \quad \mathfrak{i}(\alpha) = \mathfrak{a}^2\mathfrak{c}, \quad \mathfrak{i}(\beta) = \mathfrak{b}^2\mathfrak{c},$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei verschiedene Primideale bedeuten.

Ein anderes Beispiel gewinnt man auf folgende Art. In bezug auf den Modul $p = 2$ gibt es nur eine einzige Primfunktion zweiten Grades, nämlich $x^2 + x + 1$; wenn daher in einem Körper Ω die Zahl 2 durch mindestens zwei verschiedene Primideale teilbar ist, deren Normen $= p^2 = 4$, so muß D stets gerade sein. Offenbar muß der Grad des Körpers mindestens $= 4$ sein, und die erwähnte Erscheinung tritt in der Tat bei dem biquadratischen Körper ein, welcher aus der Gleichung

$$\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha + 4 = 0$$

entspringt; die Zahlen 1, α, $\beta = 2 : \alpha$ und $\gamma = \alpha^2 - \alpha$ bilden eine Grundreihe desselben, seine Grundzahl ist $= 13^2 . 17$.

Es gibt also Körper Ω, in welchen die sämtlichen Zahlen D durch gewisse singuläre Primzahlen p, deren Anzahl natürlich endlich ist, teilbar sind. Ich bemerke aber, daß hierdurch die allgemeine Gültigkeit des oben angeführten Satzes, durch welchen der Charakter der in der Grundzahl $\Delta(\Omega)$ eines Körpers aufgehenden rationalen Primzahlen definiert wird, keineswegs verlorengeht; doch würde es hier viel zu weit führen, wenn ich auf den Beweis dieses wichtigen Satzes oder auf seine tiefere Bedeutung für die Verwandtschaft der Körper eingehen wollte. —

Nach dieser Abschweifung fahre ich fort, den Inhalt der folgenden Paragraphen kurz anzugeben. Im § 164 werden sämtliche Ideale des Körpers Ω in eine endliche Anzahl von Klassen eingeteilt. Zwei Ideale heißen äquivalent, wenn sie beide durch Multiplikation mit einem und demselben Ideal in Hauptideale verwandelt werden; eine Idealklasse besteht aus allen Idealen, welche einem bestimmten Ideal äquivalent sind; die Hauptklasse besteht aus den Hauptidealen. Diese Idealklassen gestatten dann eine Komposition, in welcher dieselben Gesetze herrschen wie bei der Komposition der Klassen der quadratischen Formen.

Im § 165 wird der Zusammenhang zwischen der Komposition der Idealklassen und der der zerlegbaren homogenen Formen nachgewiesen, welche aus der Betrachtung desselben Körpers Ω entspringen.

Der § 166 gibt die Dirichletsche Theorie der Einheiten in einer etwas verallgemeinerten Form, die sich hier ganz von selbst darbietet, und in § 167 wird dieselbe benutzt, um einen Ausdruck für die Anzahl der Idealklassen in der Gestalt einer unendlichen Reihe zu gewinnen, genau wie bei der Bestimmung der Klassenanzahl der quadratischen Formen. An dieser Stelle aber breche ich die Durchführung des allgemeinen Problems ab, da meine weiteren Untersuchungen in dieser Richtung noch nicht von hinreichendem Erfolge gekrönt sind, um veröffentlicht werden zu können. Die nun noch folgenden §§ 168—170 sollen nur dazu dienen, die vorhergehenden allgemeinen Untersuchungen durch die Anwendung auf das Beispiel der quadratischen Körper zu erläutern.

Bis jetzt scheint die Theorie der idealen Zahlen nur für vier oder fünf Mathematiker Gegenstand ernstlicher Forschung gewesen zu sein; es ist mein inniger Wunsch, durch die neue Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie den Zugang zu diesem großen Gebiete zu erleichtern und womöglich eine größere Anzahl von Mathematikern zu veranlassen, ihre Kräfte demselben zuzuwenden, damit neben dem gewaltigen Aufschwunge, welchen die Geometrie und die Theorie der Funktionen in neuerer Zeit genommen haben, die Zahlentheorie nicht zurückbleiben möge.

22. Juli 1871.

LVI.

Anzeige von P. Bachmann, Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie.

[Literaturzeitung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 18, S. 14—24, 1873.]

Der Aufforderung des Herrn Hofrat Schlömilch, das vorliegende Werk in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" näher zu besprechen, komme ich um so lieber nach, als ich das Erscheinen desselben mit aufrichtiger Freude begrüßt habe. Denn ein großes und höchst interessantes Gebiet wird hier zum ersten Male in zweckmäßiger Abgrenzung und lichtvoller Darstellung dem lernenden mathematischen Publikum leicht zugänglich gemacht, und zwar unter Voraussetzung von nur sehr mäßigen Vorkenntnissen aus der Algebra und Zahlentheorie.

Die Lehre von der Kreisteilung, d. h. die Theorie der Gleichungen von der Form $x^m = 1$, wo m eine gegebene positive ganze Zahl bedeutet, ist, obwohl eine Menge interessanter Eigenschaften der Einheitswurzeln x schon früher bekannt waren, doch erst durch Gauß auf ihre eigentlichen Prinzipien zurückgeführt und dadurch der Ausgangspunkt für eine ganz neue Wissenschaft von unermeßlicher Ausdehnung geworden. Die siebente Sektion der 1801 erschienenen „Disquisitiones Arithmeticae", welche den Titel „De aequationibus circuli sectiones definientibus" führt, enthält eine rein algebraische Methode, die obige Gleichung, deren Auflösung mittels der trigonometrischen Funktionen längst bekannt war, auf andere Gleichungen von niedrigerem und zwar von möglichst niedrigem Grade zu reduzieren. Hierbei tritt zum ersten Male der Begriff der Irreduktibilität auf (Art. 341), welcher entscheidend für die ganze Richtung der späteren Algebra geworden ist; obgleich Gauß nur einen geringen Gebrauch von demselben macht (Art. 346), so zweifle ich doch nicht daran, daß dieses Grundprinzip ihn auch

bei der Entdeckung des Einzelnen geleitet und daß er nur der Kürze halber die synthetische Darstellung vorgezogen hat; namentlich lassen hierauf die gewichtigen Worte schließen (Art. 365): „omnique rigore demonstrare possumus, has aequationes elevatas nullo modo nec evitari nec ad inferiores reduci posse, etsi limites hujus operis hanc demonstrationem hic tradere non patiantur, quod tamen monendum esse duximus, ne quis adhuc alias sectiones praeter eas quas theoria nostra suggerit, e. g. in 7, 11, 13, 19 etc. partes, ad constructiones geometricas perducere speret, tempusque inutiliter terat". Die Wahrheit der in denselben enthaltenen Behauptung ist nach dem gegenwärtigen Stande der Algebra, namentlich seit der Fortbildung und Verallgemeinerung der Gaußschen Gedanken durch Abel und Galois leicht zu beweisen. In der Tat ist aus dem von Gauß gelegten Keime eine Wissenschaft entstanden, welche man, um in einem Nichtkenner wenigstens eine dunkle Vorstellung von ihrem Charakter zu erwecken, vielleicht als die Wissenschaft von der algebraischen Verwandtschaft der Zahlen oder, wenn man sich eines von mir gewählten Ausdruckes bedienen will, als die Wissenschaft von der Verwandtschaft der Körper bezeichnen könnte. Es zeigt sich nämlich, daß die eigentümliche Beschaffenheit einer Gleichung, die Möglichkeit, ihre Auflösung auf die von anderen Gleichungen zurückzuführen, erst dann deutlich erkannt werden kann, wenn man außer ihren Wurzeln noch unendlich viele andere Zahlen betrachtet, welche aus einer oder mehreren von ihnen rational ableitbar sind und deren Inbegriff eben das bildet, was ich einen Körper nenne, nämlich ein System von Zahlen, die sich durch die vier einfachsten, rationalen arithmetischen Operationen immer wieder reproduzieren. Eigenschaften einer Gleichung werden bei dieser Auffassung zu Eigenschaften des entsprechenden Körpers, Beziehungen zwischen Gleichungen stellen sich dar als Verwandtschaft zwischen den Körpern; namentlich entsteht bei gegenseitiger Durchdringung zweier Körper A, B immer wieder ein Körper, ihr kleinstes gemeinschaftliches Multiplum oder kürzer ihr Produkt AB, dessen Natur wesentlich von der Verwandtschaft der beiden Körper abhängt.

Neben dieser Entwicklung der eigentlichen Algebra, welche der Theorie der Kreisteilung den ersten Impuls verdankt, und Hand in Hand mit ihr hat die Zahlentheorie einen großartigen Aufschwung genommen. Die algebraischen Untersuchungen von Gauß im Gebiete der Kreisteilung bedurften schon einiger, wenn auch sehr elementarer Hilfssätze aus der Zahlentheorie; bald aber zeigte es sich, daß umgekehrt die Kreisteilung zu einer unerschöpflichen Quelle wurde, aus welcher immer neuer und bedeutender Gewinn für die Zahlentheorie ausströmte. Man kann sagen, daß fast alle späteren Fortschritte, welche die Zahlentheorie unter den Händen von Gauß, Jacobi, Dirichlet, Eisenstein, Kummer, Kronecker gemacht hat, entweder der Kreisteilung geradezu ihre Entstehung verdanken oder, was in einigen Fällen noch merkwürdiger war, in einen vorher ungeahnten Zusammenhang mit der Kreisteilung traten. Zu diesen letzteren Fortschritten gehören die Untersuchungen von Gauß und Dirichlet über die Klassenanzahl der quadratischen Formen, zu den ersteren die Erweiterung des Begriffes der ganzen Zahl durch Gauß, deren Verallgemeinerung später zu der Schöpfung der idealen Zahlen durch Kummer geführt hat.

Es ist nun zu verwundern, daß trotz der soeben kurz geschilderten Rolle, welche die Kreisteilung in der Geschichte der neueren Mathematik spielt, und trotz der großen Berühmtheit, deren sie sich vor anderen, mindestens ebenso tiefsinnigen Schöpfungen von Gauß zu erfreuen hat — man denke nur an das Siebenzehneck —, es ist zu verwundern, daß trotzdem kein Lehrbuch erschienen ist, in welchem die Kreisteilung mit voller Berücksichtigung des teils von Gauß, teils von seinen Nachfolgern durchforschten Details als ein abgerundetes Ganzes dargestellt ist. Es ist daher ein höchst dankenswertes Unternehmen des Verfassers, durch das vorliegende Werk diese empfindliche Lücke in unserer mathematischen Literatur auszufüllen, und ich freue mich, hinzufügen zu können, wofür allerdings schon sein Name hinreichende Bürgschaft leistet, daß er dieses Unternehmen in vortrefflicher Weise ausgeführt hat. Für jeden, der ein tieferes Studium der Algebra und ihrer Beziehungen zur Zahlentheorie beabsichtigt, wird dieses Werk den besten Führer abgeben, weil es ihn ohne Voraussetzung großer Vorkenntnisse in die Mitte eines überaus reichen und bisher nicht leicht zugänglichen Stoffes einführt, in welchem man durchaus orientiert sein muß, wenn man zu höheren Untersuchungen fortschreiten will.

Ich erlaube mir nun, im folgenden eine Reihe von Bemerkungen mitzuteilen, zu welchen mich einzelne Stellen oder auch ganze Abschnitte des Werkes veranlaßt haben. Wenn ich dabei einzelne Punkte hervorhebe, bei welchen ich eine andere Anordnung oder Darstellung als die vom Verfasser befolgte erwähne oder empfehle, so geschieht dies keineswegs, um Tadel auszusprechen; jeder, der sich gründlich mit einem bestimmten Gegenstande beschäftigt hat — und seit 18 Jahren habe ich mich diesem Teile der Mathematik mit besonderer Vorliebe zugewandt —, bildet sich gewisse, ihm eigentümliche Gesichtspunkte aus, die er für besonders wertvoll hält, während sie einem andern weniger wichtig erscheinen, und ich gebe zu, daß hierbei vieles reine Geschmackssache ist. Aber ich benutze doch gern diese Gelegenheit, aus meiner langjährigen Beschäftigung mit diesem Gegenstande einige Mitteilungen über meine Ansichten und auch einige Abschweifungen auf verwandte Gegenstände zu machen, in der Hoffnung, daß sie einigen Lesern willkommen sein werden. Ich lasse sie hier ohne innere Verbindung so folgen, wie sie beim Durchlesen des Werkes entstanden sind, indem ich nur auf die betreffende Stelle verweise.

Vorlesung 3, Nr. 2 und 3, Seite 13. Der Nachweis der Existenz primitiver Einheitswurzeln würde, wie ich glaube, durch eine kleine Umstellung an Klarheit und Präzision gewinnen. Da nämlich $\psi(d)$ definiert wird als die Anzahl der n^{ten} Einheitswurzeln, welche zum Exponenten d gehören, so erscheint, ehe nicht das Gegenteil bewiesen ist, $\psi(d)$ als abhängig nicht bloß von d, sondern möglicherweise auch von n, und die Anwendbarkeit des in der vorhergehenden Vorlesung bewiesenen Summensatzes zur Bestimmung von $\psi(d)$ bleibt Zweifeln unterworfen, welche erst nachträglich durch die Bemerkungen in Nr. 3 gehoben werden. Am einfachsten gestaltet sich wohl die Untersuchung, wenn der Begriff der primitiven Einheitswurzeln vorangestellt und $\psi(n)$ als die Anzahl der primitiven n^{ten} Einheitswurzeln definiert wird.

Vorlesung 4, Seite 20. In dieser Vorlesung werden die ersten Begriffe aus der sogenannten Theorie der höheren Kongruenzen mitgeteilt. Eine etwas weiter gehende Darstellung, welche auch die wichtigsten Sätze über Primfunktionen enthielte, würde bei manchen späteren Gelegenheiten sich als sehr nützlich erweisen, namentlich für die 5., 17. und 18. Vorlesung; aber sie würde freilich auch viel mehr Raum erfordern. Der Beweis des Satzes von Schönemann (S. 26) läßt sich unter Voraussetzung des Fermatschen Satzes durch die Theorie der Transformation der symmetrischen Funktionen abkürzen, welche vom Verfasser doch an manchen Stellen (z. B. in Vorlesung 5, Nr. 4) als bekannt vorausgesetzt wird.

Vorlesung 5, Nr. 6 und 7. Die Mitteilung eines speziellen Falles des allgemeinen Irreduktibilitätssatzes von Kronecker veranlaßt mich, den eigentlichen Nerv seines Beweises (sowie auch desjenigen von Arndt) hier hervorzuheben; dies kann mit verhältnismäßiger Kürze geschehen, wenn man einige allgemeine Begriffe über ganze algebraische Zahlen und einige Sätze aus der Theorie der Ideale als bekannt voraussetzt, welche ich teils in der zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie bewiesen, teils in den Göttinger „Gelehrten Anzeigen" (20. September 1871) ohne Beweis mitgeteilt habe. Bedeutet μ eine primitive m^{te} Einheitswurzel, so kommt alles auf den zahlentheoretischen Gehalt der Zahl $(1-\mu)$ an. Ist $m = 1$, so ist $1 - \mu = 0$; ist aber m durch eine einzige Primzahl p teilbar, also eine Potenz derselben, so ist, wie unmittelbar einleuchtet:

$$p = \varepsilon (1-\mu)^{\varphi(m)},$$

wo ε eine Einheit und $\varphi(m)$ die bekannte Funktion der Zahlentheorie bedeutet; ist endlich m durch zwei oder mehrere verschiedene Primzahlen $p, q \ldots$ teilbar, so muß die Zahl $(1-\mu)$, weil sie in allen Zahlen von der Form $(1-\mu^n)$ aufgeht, wo n jede ganze positive Zahl bedeutet, zufolge des vorhergehenden Falles auch in p, in $q \ldots$ aufgehen und folglich eine Einheit sein, was auch unmittelbar aus der Gleichung geschlossen werden kann, welche alle primitiven m^{ten} Einheitswurzeln zu Wurzeln hat. Nun sei a eine Potenz einer Primzahl p, und $m = ab$, wo b durch p nicht teilbar ist; man erhält dann bekanntlich alle primitiven m^{ten} Einheitswurzeln und jede nur einmal, wenn man jede primitive Wurzel der Gleichung $x^a = 1$ mit jeder primitiven Wurzel der Gleichung $x^b = 1$ multipliziert. Ist nun α eine bestimmte der ersteren, β eine bestimmte der letzteren, so lautet der noch etwas verschärfte Satz von Kronecker folgendermaßen:

„Ist die Grundzahl oder Diskriminante $\Delta(\Omega)$ eines Körpers Ω nicht teilbar durch die Primzahl p, so hat die in Ω irreduktible Gleichung $f(x) = 0$, welcher $x = \alpha\beta$ genügt, auch alle $\varphi(a)$ Produkte $\alpha'\beta$ zu Wurzeln, welche den sämtlichen $\varphi(a)$ primitiven Wurzeln α' der Gleichung $x^a = 1$ entsprechen."

Der Beweis beruht auf folgenden Momenten. Alle Wurzeln μ der Gleichung $f(x) = \Pi(x-\mu) = 0$ sind jedenfalls von der Form $\mu = \alpha'\beta'$, wo α', β' primitive Einheitswurzeln bzw. vom Grade a, b bedeuten. So oft nun β' mit β identisch ist, wird $(\beta-\mu) = \beta(1-\alpha')$, also materiell, d. h. abgesehen von einem Einheitsfaktor, $= (1-\alpha)$; ist dagegen β' von β verschieden, so wird $(\beta-\mu) = \beta(1-\alpha'\beta'')$, wo β'' eine von 1 verschiedene Wurzel der Gleichung $x^b = 1$ bedeutet, also ist zufolge der vorausgeschickten Bemerkungen $(\beta-\mu)$ eine Einheit. Mithin ist

$$f(\beta) = \Pi(\beta-\mu) = \varepsilon'(1-\alpha)^n,$$

wo ε' eine Einheit, und n die Anzahl der Wurzeln $\mu = \alpha'\beta'$ bedeutet, in welchen $\beta' = \beta$ ist; es wird daher $f(\beta)$ stets und nur dann durch

$$p = \varepsilon(1-\alpha)^{\varphi(a)}$$

teilbar sein, wenn $n = \varphi(a)$ ist, d. h. wenn wirklich alle $\varphi(a)$ Produkte $\alpha'\beta$ Wurzeln derselben in Ω irreduktiblen Gleichung $f(x) = 0$ sind. Diese Teilbarkeit der Zahl $f(\beta)$ durch p läßt sich aber aus der Voraussetzung, daß die Grundzahl $\Delta(\Omega)$ des Körpers Ω nicht durch p teilbar ist, folgendermaßen beweisen. Zunächst ist diese Voraussetzung identisch mit derjenigen, daß p durch kein Quadrat eines Primideals des Körpers Ω teilbar ist, und diese ist wiederum äquivalent mit der Annahme, daß unendlich viele solche Potenzen

$$s = p^f,\ p^{2f},\ p^{3f} \ldots$$

der Primzahl p existieren, für welche jede ganze Zahl ω des Körpers Ω der Kongruenz

$$\omega^s \equiv \omega \pmod p$$

genügt. Da nun die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ solche ganze Zahlen ω sind, so folgt

$$f(\beta)^s \equiv f(\beta^s) \pmod p;$$

wählt man ferner, was immer möglich ist, die Potenz s der Primzahl p so, daß $s \equiv 1 \pmod b$, also $\beta^s = \beta$, und zugleich $s \geqq \varphi(a)$ wird, und bedenkt, daß $f(\beta)$ den Faktor $(1-\alpha)$ wenigstens einmal enthält, also $f(\beta)^s$ durch p teilbar ist, so ergibt sich, daß auch $f(\beta) \equiv 0 \pmod p$ ist, wie zu beweisen war.

Durch wiederholte Anwendung dieses Resultates ergibt sich offenbar der folgende Satz, welcher nur noch wenig allgemeiner als der von Kronecker ist:

„Ist m relative Primzahl zu der Grundzahl $\Delta(\Omega)$ des Körpers Ω, so ist die Gleichung, deren Wurzeln die sämtlichen primitiven m^{ten} Einheitswurzeln sind, irreduktibel in Ω.“

Vorlesung 6, Seite 43. In dieser Vorlesung beginnt die eigentliche Theorie der Kreisteilung, deren Wesen in der Zurückführung der Gleichung

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

wo p eine Primzahl bedeutet, auf Gleichungen niedrigeren Grades besteht. Ich erlaube mir hier einige allgemeine Bemerkungen über die Verteilung des Stoffes und über die Methode der Untersuchung zu machen.

Die Darstellung von Gauß zerfällt in zwei wesentlich verschiedene Teile, deren erster (Art. 342—358) die sukzessive Zerlegung des Systems aller $(p-1)$ Wurzeln r^k der obigen Gleichung in sogenannte Perioden und die Aufstellung der ihnen entsprechenden Gleichungen enthält, während der zweite Teil die Zurückführung derselben auf reine Gleichungen, d. h. ihre Auflösung durch Wurzelzeichen behandelt. Diese scharfe Sonderung halte ich für äußerst zweckmäßig. Der erste Teil hat es nur mit den durch r rational darstellbaren Zahlen zu tun, welche einen Körper R vom Grade $(p-1)$ bilden, und er ist, wenn dies auch in der Darstellung von Gauß nicht hervortritt, wesentlich unabhängig von der Existenz primitiver Kongruenzwurzeln. Der zweite Teil dagegen bedarf der Betrachtung der letzteren und außerdem der Einführung eines Hilfskörpers S vom Grade $\varphi(p-1)$, welcher aus den Wurzeln der Gleichung $x^{p-1} = 1$ gebildet ist; der eigentliche Gegenstand der Untersuchung ist das Produkt RS aus beiden Körpern R und S, welches zugleich der aus den Wurzeln der Gleichung $x^{p(p-1)} = 1$ gebildete Körper vom Grade $(p-1)\varphi(p-1)$ ist. Dieser wesentliche Unterschied zwischen den beiden genannten Teilen würde es mir vorteilhafter erscheinen lassen, wenn der Verfasser den Hauptinhalt der Vorlesungen 9, 15, 16, 17, 18 gleich auf die siebente hätte folgen lassen.

Was ferner die Methode der Entwicklung anbetrifft, so ist nicht zu leugnen, daß in der synthetischen Darstellung von Gauß das Streben nach Kürze den Sieg über die Forderung davongetragen hat, alles aus einem einheitlichen algebraischen Gedanken abzuleiten. Bei meinem ersten gründlichen Studium der Kreisteilung in den Pfingstferien 1855 hatte ich, obgleich ich das Einzelne wohl verstand, doch

lange zu kämpfen, bis ich in der Irreduktibilität das Prinzip erkannte, an welches ich nur einfache, naturgemäße Fragen zu richten brauchte, um zu allen Einzelnheiten mit Notwendigkeit getrieben zu werden. Nachdem diese Gedanken durch eine eingehende Beschäftigung mit den algebraischen Untersuchungen von Abel und namentlich von Galois vervollständigt und durch die im Anfang Dezember desselben Jahres gelungene Auffindung der allgemeinsten Beziehungen zwischen irgend zwei irreduktiblen Gleichungen zu einem gewissen Abschluß gekommen waren, habe ich später in meinen beiden Wintervorlesungen über Kreisteilung und höhere Algebra 1856—1858 die damals gewonnene Methode befolgt, und ich glaube noch heute, daß sie auch für den Lernenden zweckmäßig ist. Statt, wie es der Verfasser mit Gauß tut, unmittelbar von den Perioden auszugehen, stelle man die Frage nach der Anzahl der verschiedenen konjugierten Werte, welche eine in R enthaltene, d. h. durch r rational darstellbare Zahl $\alpha = F(r)$ besitzt, und welche entstehen, wenn r durch alle $(p-1)$ Wurzeln r^k der irreduktiblen Gleichung $X = 0$ ersetzt wird. Bezeichnet man mit h alle diejenigen f inkongruenten Zahlen (mod p), für welche $F(r^h) = F(r)$ ist, so folgt aus der Irreduktibilität sofort, daß diese Zahlen h sich durch Multiplikation reproduzieren, und hieraus weiter, daß sie die sämtlichen Wurzeln der Kongruenz $h^f \equiv 1 \pmod p$ bilden, daß f ein Divisor von $(p-1) = ef$, und daß e die Anzahl der wirklich verschiedenen Werte $F(r^k)$ ist, deren jeder sich f mal wiederholt; die sämtlichen $(p-1)$ Exponenten k zerfallen nämlich in e Komplexe von je f Exponenten hn, denen jedesmal der eine Wert $F(r^n)$ entspricht. Fragt man nach der wirklichen Existenz solcher e-wertigen Zahlen $\alpha = F(r)$, so ergibt sich aus der Bedingung $F(r) = F(r^h)$, daß die rationalen Koeffizienten oder Koordinaten a in der Darstellungsform $\alpha = F(r) = \Sigma a r^k$, auf welche jede in R enthaltene Zahl stets und wegen der Irreduktibilität auch nur auf eine Weise gebracht werden kann, gruppenweise zu je f einander gleich sein müssen, daß nämlich

$$\alpha = a\eta + a_1\eta_1 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-1}$$

sein muß, wo jede der e Größen $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$ eine sogenannte Periode, d. h. eine Summe von f Gliedern r^{hn} bedeutet. Soll eine solche Zahl α wirklich e-wertig sein, so brauchen nur fernere gruppenweise Gleichheiten zwischen den e rationalen Zahlen $a, a_1, \ldots, a_{e-1}$

ausgeschlossen zu werden; mithin sind die Perioden selbst solche e-wertige und zwar konjugierte Zahlen. Es ergibt sich dann sofort, daß jede e-wertige Zahl α die Wurzel einer irreduktiblen Gleichung e^{ten} Grades ist und daß jede Zahl $\beta = f(r)$, welche den Bedingungen $f(r) = f(r^h)$ genügt, auch ohne e-wertig zu sein, durch α rational darstellbar ist, daß also alle solche Zahlen β einen Körper R_e vom Grade e bilden, welcher durch e vollständig bestimmt ist. Das allgemeinste Resultat, in welchem der ganze erste Teil der Kreisteilung enthalten und welches auf dieselbe Weise leicht abzuleiten ist, besteht in folgendem. Ist α eine e-wertige, α' eine e'-wertige Zahl, und e'' der größte gemeinschaftliche Teiler von e und $e' = d'e''$, so genügt α' einer in R_e irreduktiblen Gleichung vom Grade d'. Dasselbe kann auch so ausgesprochen werden: Das Produkt der Körper R_e und $R_{e'}$ ist der Körper $R_{e'''}$, wo e''' das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von e, e' bedeutet; und $R_{e''}$ ist ihr größter gemeinschaftlicher Divisor. Es bildet nur einen speziellen Fall des oben erwähnten allgemeinen Gesetzes, welches wenigstens teilweise durch die Gleichung

$$(BC, A) = (C, AB)(B, A)$$

ausgedrückt werden kann, wo A, B, C irgend drei Körper sind, und das Symbol (B, A) die Anzahl der in B enthaltenen Zahlen bedeutet, welche in bezug auf A unabhängig sind.

In dem zweiten Teile der Kreisteilung wird die Frage aufgeworfen, ob die im ersten Teile betrachteten irreduktiblen Gleichungen durch Wurzelzeichen lösbar, d. h. auf reine Gleichungen zurückführbar sind. Dieselbe drängt mit Notwendigkeit zur Einführung des Körpers S, und nachdem die Irreduktibilität der Gleichung $X = 0$ in bezug auf S erkannt ist, leuchtet sofort ein, daß die Sätze des ersten Teiles auf das neue Gebiet unmittelbar übertragen werden können. Fragt man nun nach solchen Zahlen, welche reinen Gleichungen genügen, so wird man auf dieselbe Weise zu allen Resolventen und der Benutzung der primitiven Kongruenzwurzeln getrieben, wie im ersten Teile zu den Perioden, und alles Detail ergibt sich mit größter Leichtigkeit.

Der im vorstehenden beschriebene Weg ist vom Verfasser nur teilweise befolgt; aber ich glaube, daß die Klarlegung der algebraischen Prinzipien an dem klassischen und zugleich einfachsten Beispiele der Kreisteilung eine sehr nützliche Vorbereitung für das tiefere Studium der Algebra bildet.

V o r l e s u n g 9, Nr. 4. Die Methode von K r o n e c k e r zur Bestimmung des Vorzeichens $\varepsilon = \pm 1$ in der Gleichung

$$\varepsilon\, \Pi(x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) = \sum \left(\frac{k}{p}\right) x^k + (x^p - 1) f(x)$$

läßt sich abkürzen, wenn man durch $(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$ dividiert und dann $x = 1$ setzt.

V o r l e s u n g 14. Nachdem die Reziprozitätssätze für kubische und biquadratische Reste in den Theorien der komplexen Zahlen bewiesen sind, ist es von Interesse, zu der Theorie der rationalen Zahlen zurückzukehren. Obgleich dieser Gegenstand seiner Natur nach nicht in das vorliegende Werk gehört, so erlaube ich mir doch, hier aus einer größeren Arbeit über beliebige kubische Körper, an deren Vollendung und Veröffentlichung ich für jetzt durch Amtsgeschäfte gehindert werde, folgendes mitzuteilen. Bedeutet k eine ganze rationale Zahl, deren Kubikwurzel irrational ist, so entspringt aus der Gleichung $x^3 = k$ ein reiner kubischer Körper, dessen Grundzahl die Form $D = -3g^2$ hat, wo g eine aus k leicht abzuleitende ganze Zahl ist. Fragt man nun nach allen in k nicht aufgehenden Primzahlen p von der Form $3n + 1$, von welchen die gegebene Zahl k kubischer Rest ist, so gelangt man mit Hilfe des Reziprozitätssatzes zu folgendem interessanten Resultat, welches im wesentlichen schon G a u ß bekannt gewesen ist: die sämtlichen nicht äquivalenten, ursprünglichen positiven quadratischen Formen $ax^2 + bxy + cy^2$, in welchen $b^2 - 4ac = D$, zerfallen in drei Abteilungen von gleich vielen Individuen, deren erste eine Gruppe bildet, durch deren Formen alle und nur solche Primzahlen p dargestellt werden, von welchen k kubischer Rest ist. Mit Hilfe desselben wird die Bestimmung der Anzahl der Idealklassen des kubischen Körpers auf einen bekannten Teil der Theorie der Thetafunktionen zurückgeführt.

V o r l e s u n g 17 und 18. Bei der Begründung der Theorie der idealen Zahlen in der Kreisteilung folgt der Verfasser dem von K u m m e r eingeschlagenen Wege. Der Versuch, einige Zweifel an der Strenge der ersten, später vervollständigten Darstellung von K u m m e r zu überwinden, führte mich zuerst im Winter 1855/56 auf die Theorie der höheren Kongruenzen, insbesondere auf die Zerlegung der Funktion $(x^m - 1)$ in Primfunktionen in bezug auf beliebige Primzahlmoduln. Diese Sätze, welche übrigens, wenn ich nicht irre, zuerst von Schönemann veröffentlicht sind und welche sich auch in dem Nachlasse von Gauß vorgefunden haben, gestatten, wie mir scheint, eine einfachere Begründung von Kummers genialer Theorie. Behält X die frühere Bedeutung und ist q eine von p verschiedene Primzahl, welche $(\mathrm{mod}\, p)$ zum Divisor f von $(p-1) = ef$ gehört, so ist

$$X \equiv Q_0 Q_1 \dots Q_{e-1} (\mathrm{mod}\, q),$$

wo die e Funktionen Q Primfunktionen vom Grade f bedeuten. Bezeichnet man mit h wieder die sämtlichen f in bezug auf p inkongruenten Zahlen $1, q, q^2, \dots, q^{f-1}$, welche die Wurzeln der Kongruenz $h^f \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ bilden, und sind Q, Q' irgend zwei der e Primfunktionen, so hat die Kongruenz

$$Q(y) \equiv 0 (\mathrm{modd}\, q, Q')$$

jedesmal f inkongruente Wurzeln $y \equiv x^{hn}$. Setzt man nun die e Funktionen

$$Q \equiv x^f - u x^{f-1} + \cdots (\mathrm{mod}\, q),$$

so ergibt sich hieraus beiläufig

$$\Pi(x-\eta) = F(x) \equiv \Pi(x-u) (\mathrm{mod}\, q),$$

wo $F(x)$ die Funktion vom Grade e bedeutet, welche für die e Perioden η von f Gliedern verschwindet; doch ist dies keineswegs erforderlich für die weitere Begründung. Die e Zahlen, welche der Verfasser mit ψ bezeichnet, können nämlich dem Erfolge nach vollständig ersetzt werden durch die e Zahlen, welche aus dem Produkte

$$Q_0(r) Q_1(r) \dots Q_{e-1}(r) = q f(r)$$

durch Weglassung je eines der e Faktoren $Q(r)$ hervorgehen. Die Beweisführung, namentlich bei den Sätzen über die Potenzen der idealen Primzahlen, wird vereinfacht, wenn man, was stets möglich ist, die e Funktionen Q so wählt, daß $f(r)$ relative Primzahl zu q, d. h. daß $f(x)$ relative Primfunktion zu $X (\mathrm{mod}\, q)$ wird; statt dessen kann man aber auch die Zerlegung der Funktion X in e Faktoren in bezug auf beliebig hohe Potenzen von q benutzen. Hierbei bemerke ich, daß die vom Verfasser (auf S. 262) gegebene Definition der Potenzen der idealen Primzahlen einen kleinen, leicht zu beseitigenden Zweifel übrig läßt, insofern nicht bewiesen wird, daß eine Zahl, welche einen Primfaktor m mal enthält, ihn gewiß auch $(m-1)$ mal enthalten muß; so lange dies nämlich nicht geschehen ist, bleibt es z. B. denkbar, daß eine Zahl einen Primfaktor genau sechsmal und zugleich auch genau achtmal enthält.

Eine ähnliche zweifelhafte Stelle findet sich auch in der allgemeinen Theorie der Ideale, welche ich in der zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie vorgetragen habe; die Behauptung, daß der Begriff der Potenzen eines Primideals von der zufälligen Definition des letzteren ganz unabhängig ist (§ 163, 4), ist nicht gehörig begründet, aber sie kann leicht durch die unmittelbar darauf folgenden Sätze bewiesen werden. Die ganze Darstellung läßt sich durch einige Umstellungen bedeutend vereinfachen, und eine noch größere Vereinfachung wird vermutlich solchen gelingen, die unbefangen mit frischen Kräften an den Stoff herantreten. Immerhin glaube ich durch diese Theorie, deren Herstellung mich eine mehrjährige unbeschreibliche Anstrengung gekostet hat, etwas Nützliches erreicht zu haben. Ich bin zwar weit davon entfernt, ihren Wert mit demjenigen des ersten schöpferischen Gedankens von Kummer vergleichen zu wollen; aber abgesehen von der ästhetischen Befriedigung, welche die Erkenntnis gewährt, daß dieselben einfachen Gesetze, nach welchen in der rationalen Zahlentheorie die Zahlen aus Primzahlen zusammengesetzt werden, in der Theorie der Ideale jedes Körpers wiederkehren, hat die Gewißheit der allgemeinen Theorie den großen praktischen Vorteil zur Folge, daß man nicht in jedem speziellen Falle immer wieder die ersten Grundlagen aufzusuchen braucht, und daß die Auffindung der speziellen Gesetze ganz außerordentlich erleichtert wird. Wie groß dieser Nutzen ist, erkennt man recht deutlich in dem vorliegenden Falle der Kreisteilung; die Natur aller hier auftretenden Ideale ergibt sich nämlich — wovon man sich leicht überzeugen wird — mit wenigen Federstrichen aus der einzigen Bemerkung, daß die p Zahlen $1, r, r^2, \dots, r^{p-1}$ in bezug auf jedes in p nicht aufgehende Primideal gewiß inkongruent sind, weil ihre Differenzen sämtlich in der Zahl p aufgehen.

Ich schließe meine schon zu ausführlichen Bemerkungen über das vorliegende Werk, indem ich dasselbe nochmals allen, welche eine gründliche und vielseitige Kenntnis der Kreisteilung und ihrer Beziehungen zur Zahlentheorie erwerben wollen, auf das wärmste zum Studium anempfehle und dem geehrten Verfasser meinen Dank für die Veröffentlichung dieser seiner Vorlesungen ausspreche.

Braunschweig, 1. Februar 1873.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Der ursprüngliche Kroneckersche Satz über die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichungen besagt, daß die Gleichung $\varphi_n(x) = 0$ der primitiven n-ten Einheitswurzeln in einem algebraischen Körper $K(\alpha)$ irreduzibel ist, wenn die Gleichungsdiskriminante von α zu n relativ prim ist. In den Bemerkungen zu Vorlesung 5 beweist aber Dedekind etwas schärfer, daß es schon genügen wird, wenn die Körperdiskriminante von $K(\alpha)$ zu n relativ prim ist.

Diejenigen Untersuchungen über die Klassenzahl der kubischen Körper, welche Dedekind in seinen Bemerkungen zu der 14. Vorlesung erwähnt, hat er später in der Abhandlung „Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern“ (XXIX) publiziert (vgl. die Einleitung dieser Arbeit).

Ore.

LVII.

Anzeige der ersten Auflage von Riemanns gesammelten Werken.

[Göttingische gelehrte Anzeigen, Jahrgang 1876, S. 961—965.]

Wenn ich infolge einer an mich gerichteten Aufforderung mir erlaube, das Erscheinen dieses Werkes in diesen Blättern anzuzeigen, so geschieht dies nicht in der Absicht, auf den Inhalt desselben näher einzugehen; denn eine solche Anzeige ist schon in vollkommenerer Weise, als es mir gelingen könnte, von dem eigentlichen Herausgeber, meinem hochverehrten Freunde Heinrich Weber in Königsberg, verfaßt und wird demnächst an einem anderen Orte (Repertorium von L. Königsberger und G. Zeuner) veröffentlicht werden. Der Zweck der folgenden Zeilen besteht vielmehr nur darin, einige Mitteilungen über die Entstehung der Herausgabe zu machen, die für die Leser der G. G. A. vielleicht von einigem Interesse sein möchten.

Bald nach dem Tode Riemanns erhielt ich von Frau Prof. Riemann den ehrenvollen Auftrag, den wissenschaftlichen Nachlaß einer Durchsicht zu unterziehen und das zur Publikation Geeignete herauszugeben. Drei Abhandlungen, nämlich die über die trigonometrischen Reihen, über die Hypothesen der Geometrie, und den Beitrag zur Elektrodynamik, fand ich in der saubersten Handschrift fertig vor, und ich beeilte mich dieselben zu veröffentlichen. Das Übrige befand sich mit wenigen Ausnahmen in einem gänzlich ungeordneten Zustande, welcher aus den vielfachen Reisen Riemanns leicht erklärlich war, und es kam vor allen Dingen darauf an, die außerordentliche Menge von einzelnen Blättern, die sich seit Riemanns Studienzeit angesammelt hatten, ihrem Inhalte nach zu prüfen, Zusammengehöriges zu erkennen und zu ordnen. Von der Beschaffenheit dieser vorbereitenden Tätigkeit kann nur der sich eine deutliche Vorstellung machen, der einen Blick in diese Papiere getan hat. Der Mehrzahl nach enthalten sie in vielfachen Wiederholungen die Entwürfe zu den von Riemann selbst publizierten Abhandlungen und Vorbereitungen zu seinen Vorlesungen; außerdem finden sich Exzerpte aus den verschiedensten Werken, Abschriften von solchen Stellen, welche Riemanns Interesse vorzugsweise erregt hatten, ferner Entwürfe zu Briefen; viele Blätter sind mit Formeln ohne jeden erklärenden Text bedeckt, und alle diese Dinge finden sich bisweilen auf einem und demselben Foliobogen vereinigt, der teils von oben nach unten, teils in der entgegengesetzten Richtung beschrieben ist. Unter diesen Umständen waren meine Bemühungen, die Papiere zu ordnen, nur von einem mangelhaften Erfolge begleitet, und obwohl ich Riemanns Werke immer wieder eifrig durchgearbeitet hatte, so konnte ich mir doch nicht verhehlen, daß ich für die Entzifferung des Inhalts mancher Papiere nicht die volle erforderliche Detailkenntnis besaß, da meine eigenen Studien im ganzen einem anderen Gebiete der Mathematik zugewandt waren. Ich begnügte mich daher zunächst, das mir Verständliche in Reinschriften zusammenzustellen, und wollte dazu übergehen, einiges davon, namentlich die Pariser Preisschrift nebst einem Kommentar über die Beziehungen derselben zu der Abhandlung über die Hypothesen der Geometrie, zu veröffentlichen, als ich durch die notwendigen Vorarbeiten für eine zweite Auflage von Dirichlets Zahlentheorie für mehrere Jahre in meinem Vorhaben gestört wurde. Bald nachdem ich mich demselben wieder zugewandt hatte, entstand in Göttingen der neue Gedanke, Riemanns Werke vollständig gesammelt herauszugeben; Clebsch, der Nachfolger Riemanns, hatte, wahrscheinlich durch Wilhelm Weber angeregt, diesen Gedanken mit seiner ganzen Lebhaftigkeit im Frühjahr 1872 erfaßt, und gern ging ich, als er mich Pfingsten besuchte, auf seinen Plan ein, dieser Herausgabe auch den Nachlaß einzuverleiben. Clebsch übernahm auf meinen Wunsch die Hauptleitung des Unternehmens und erhielt alle Papiere nach Göttingen zugeschickt, um sie einer nochmaligen Durchsicht und Prüfung zu unterziehen, die ich aus den obigen Gründen für dringend notwendig hielt; ich selbst konnte mich, da mir bald darauf ein sorgenvolles und meine Kräfte ganz absorbierendes Nebenamt für drei Jahre übertragen wurde, nur noch in geringem Grade an der beabsichtigten Herausgabe beteiligen. Dieselbe versprach rasch vonstatten zu gehen, und der Druck sollte bald begonnen werden, als durch das plötzliche, höchst beklagenswerte Hinscheiden von Clebsch im November

1872 das Unternehmen gänzlich ins Stocken geriet. Nachdem ich eine Zeitlang gar keine Kunde von dem Fortgange desselben erhalten hatte, versuchte ich, einen ausgezeichneten Mathematiker und Freund von Clebsch zu bewegen, an dessen Stelle zu treten; leider war derselbe durch die triftigsten Gründe verhindert, meine Bitte zu erfüllen. So blieb die Sache abermals liegen, da ich selbst infolge meiner Geschäfte außerstande war, die Herausgabe in Angriff zu nehmen. Unter Zustimmung der Frau Prof. Riemann entschloß ich mich endlich im November 1874, Herrn Prof. H. Weber in Zürich, der durch seine Arbeiten sich als einen der tiefsten Kenner der Riemannschen Schöpfungen bewährt hatte, zu bitten, das große Werk ganz allein in seine Hände zu nehmen, und je geringer meine Hoffnung gewesen war, meine Bitte erfüllt zu sehen, um so größer war meine Freude, als derselbe trotz schwerer Bedenken sich bedingungslos bereit erklärte, seine Kräfte ganz diesem Unternehmen zu widmen. Von diesem Augenblicke ab nahm die Angelegenheit den erfreulichsten und raschesten Fortgang. Es handelte sich neben der sorgfältigen Revision der schon publizierten Abhandlungen um eine nochmalige, genaue Prüfung des gesamten Nachlasses; diese mühsame Arbeit ergab außer anderen Erfolgen, deren Aufzählung hier zu weit führen würde, das höchst glückliche Resultat, daß mehrere Bestandteile des Nachlasses, deren Bedeutung mir entgangen oder deren Wert nicht vollständig von mir gewürdigt war, in die Herausgabe aufgenommen oder doch für dieselbe verwertet werden konnten. Es ist daher lediglich das Verdienst des Herrn Prof. Weber, daß das Werk so bald und in solcher Vollständigkeit dem mathematischen Publikum hat übergeben werden können. Meine eigene Mitwirkung hat sich dabei, abgesehen von einigen Kleinigkeiten, nur noch auf die Teilnahme an der Revision der Druckbogen erstreckt.

Braunschweig.

LVIII.

Vorwort zur dritten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie. 1879.

Über die Entstehung des vorliegenden Werkes, dessen erste Hälfte im wesentlichen eine im Winter 1856 bis 1857 von Dirichlet zu Göttingen gehaltene Vorlesung wiedergibt, habe ich in den Vorreden zu den beiden ersten Auflagen und in den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 27. Januar 1864 und 20. September 1871 das Erforderliche berichtet. Der Hauptzweck der Herausgabe, durch möglichst getreue Überlieferung des vollendeten Dirichletschen Vortrages den Anfänger in die Elemente der Zahlentheorie und namentlich in die Theorie der binären quadratischen Formen einzuführen, ist auch jetzt festgehalten, und ich habe mich nicht entschließen können, irgendeine erhebliche Veränderung an diesem Teile des Werkes vorzunehmen. Die schon in den früheren Auflagen zur Vervollständigung von mir hinzugefügten Zusätze, welche mit dem vierten Supplemente beginnen und teils nach Abhandlungen von Dirichlet ausgearbeitet, teils aus eigenen Untersuchungen hervorgegangen sind, habe ich abermals beträchtlich vermehrt. Besonders zu erwähnen ist die in dem letzten Supplemente enthaltene breitere Darstellung derselben Idealtheorie, welche ich zuerst in der zweiten Auflage, aber in so gedrängter Form veröffentlicht habe, daß der Wunsch nach einer ausführlicheren Behandlung von mehreren Seiten gegen mich ausgesprochen ist. Ich bin dieser Aufforderung um so lieber nachgekommen, als eine von meinem Freunde H. Weber in Königsberg in Gemeinschaft mit mir ausgeführte Untersuchung, welche demnächst erscheinen wird, das Resultat ergeben hat, daß dieselben Prinzipien sich mit Erfolg auf die Theorie der algebraischen Funktionen übertragen lassen. Die neue Darstellung, in welcher manches aus der vor drei Jahren erschienenen Schrift Sur la théorie des nombres entiers algébriques wörtlich

entlehnt ist, hat nun freilich einen viel größeren Raum erfordert; doch wird dies wohl Entschuldigung finden, wenn man, wie ich hoffe, sich davon überzeugt, daß der einheitliche Charakter des ganzen Werkes keineswegs Schaden gelitten hat. Ich benutze noch die Gelegenheit, den Leser auf die Abhandlungen von Selling (im zehnten Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch, 1865) und von Zolotareff (im sechsten Bande der dritten Folge des Journals von Liouville und Resal, 1880) aufmerksam zu machen, in welchen die Theorie der Ideale auf diejenige der höheren Kongruenzen gegründet wird, und ich darf schließlich die Hoffnung aussprechen, daß auch die bezüglichen Untersuchungen von Kronecker, welche aus einer früheren Zeit stammen, binnen kurzem veröffentlicht werden.

Braunschweig, 11. November 1880.

LIX.

Vorwort zur vierten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie. 1894.

In den Vorreden zu den drei ersten Auflagen (1863, 1871, 1879—1880) und in den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 27. Januar 1864 und 20. September 1871 habe ich über die erste Entstehung und die allmähliche Ausdehnung dieses Werkes die erforderlichen Mitteilungen gemacht, auf welche ich hiermit verweise. Auch jetzt, bei der Herausgabe der vierten Auflage, ist der erste Teil, welcher im wesentlichen eine im Winter 1856 bis 1857 von Dirichlet zu Göttingen gehaltene Vorlesung wiedergibt und bis § 120 reicht, fast ungeändert geblieben, und ich habe mich begnügt, meinen früheren Anmerkungen einige neue hinzuzufügen, um gelegentlich auf eine andere Beweisart oder auch auf neuere Erscheinungen der Literatur aufmerksam zu machen. Das Gleiche gilt auch von meinen Zusätzen, welche teils nach Abhandlungen von Dirichlet ausgearbeitet, teils aus eigenen Untersuchungen hervorgegangen sind. Nur das letzte Supplement, welches die allgemeine Theorie der ganzen algebraischen Zahlen behandelt, hat eine vollständige Umarbeitung erfahren; sowohl die algebraischen als auch die eigentlich zahlentheoretischen Grundlagen sind in größter Ausführlichkeit und in derjenigen Auffassung dargestellt, welche ich nach langjähriger Überzeugung für die einfachste halte, weil sie hauptsächlich nur einen deutlichen Überblick über das Reich der Zahlen und die Kenntnis der rationalen Grundoperationen voraussetzt. Dieselbe Auffassung liegt auch einigen Arbeiten über die Idealtheorie zugrunde, welche ich demnächst zu veröffentlichen hoffe, und so mag es Entschuldigung finden, wenn ich manches eingehender behandelt habe, als es die unmittelbaren Ziele des vorliegenden Werkes zu erfordern scheinen.

In der großen Festschrift, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, durch welche Kronecker dem so bald nach ihm dahingeschiedenen Lehrer und Freunde Kummer im voraus ein schönes Denkmal gesetzt hat, sind die umfassenden Gedanken niedergelegt, auf welchen sich eine andere Theorie der Ideale erhebt. Durch die Veröffentlichung derselben (1882 in Crelles

Journal, Bd. 92) hat Kronecker einen Wunsch erfüllt, den ich schon öfter, zuletzt im Juni 1880 bei Gelegenheit der Enthüllung unseres Braunschweiger Standbildes von Gauß ausgesprochen hatte, wo zugleich verabredet wurde, daß diese Abhandlung vor der von H. Weber und mir ausgearbeiteten Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in Crelles Journal erscheinen sollte. Ihr Inhalt war auch für mich vollständig neu, da ich nach einer alten brieflichen Mitteilung aus dem Jahre 1857 geglaubt hatte, die Theorie Kroneckers auf ganz anderen Wegen suchen zu müssen, die ich in § 10 meiner Schrift Sur la théorie des nombres entiers algébriques (1877) angedeutet habe. Ein sicheres Urteil über die Vorzüge und Nachteile dieser Theorie auszusprechen, deren hohe Bedeutung unzweifelhaft ist, halte ich jetzt noch nicht für möglich, da in der Abhandlung nur die Grundgedanken in großen Zügen vorgezeichnet sind; ich möchte daher den Wunsch aussprechen, daß einer der zahlreichen Schüler Kroneckers es unternähme, eine vollständige, systematische Darstellung dieser Theorie auszuarbeiten; einen kleinen Beitrag dazu habe ich vor kurzem in den Mitteilungen der Deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag (1892) zu geben versucht. Bedenkt man, welche Umgestaltungen andere Teile der Mathematik, z. B. die Theorie der elliptischen Funktionen, seit ihren ersten Anfängen im Laufe der Zeit erlitten haben, so wird man es für sehr wahrscheinlich halten, daß auch für die Idealtheorie noch einfachere Grundlagen, als die bisher bekannten, aufgefunden werden. Als eine solche Grundlage kann z. B. der von mir aus der Idealtheorie abgeleitete Satz (S. 465, 541, 577 der zweiten, dritten, vierten Auflage dieses Werkes) über den größten gemeinsamen Teiler von zwei beliebigen ganzen algebraischen Zahlen angesehen werden, und ich habe schon vor vielen Jahren versucht, diesen Weg einzuschlagen; hierbei ist es mir zwar nicht gelungen, eine wesentliche Vereinfachung zu erzielen, weil ich den unmittelbaren Beweis dieses Satzes doch nur mit denselben Hilfsmitteln führen konnte, welche im wesentlichen auch meiner Theorie der Ideale zugrunde liegen; immerhin möchte ich diesen Weg jüngeren Mathematikern zur Beachtung empfehlen, welche unbefangen dieses Feld der Forschung betreten, und denen deshalb ein solcher Beweis wohl leichter gelingen mag als mir.

Bad Harzburg, 30. September 1893.

Aus dem Nachlaß.

LX.

Im Hause des Prof. Hoeck, in Gegenwart von Hoeck, Gauß, Weber, Waitz.

Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik.

(Gehalten am 30. Juni 1854.)

Es ist zuerst erforderlich, einige Worte über den Sinn dieser Überschrift zu sagen.

Diese Vorlesung hat nicht etwa, wie man vielleicht die Überschrift deuten könnte, die Einführung einer bestimmten Klasse neuer Funktionen in die Mathematik, sondern vielmehr allgemein die Art und Weise zum Gegenstande, wie in der fortschreitenden Entwicklung dieser Wissenschaft neue Funktionen, oder, wie man ebensowohl sagen kann, neue Operationen zu der Kette der bisherigen hinzugefügt werden. Es ist leicht zu sehen, daß in dieser Auffassung das gewählte Thema eine Eigentümlichkeit bei dem systematischen Aufbau der Mathematik betrifft, eine Eigentümlichkeit, welche in mehr oder weniger ähnlicher Weise wohl in allen Wissenschaften wiederkehren wird. Möge es mir daher vergönnt sein, einige allgemeine Bemerkungen vorauszuschicken, um dann auf die Mathematik und zuletzt auch auf sehr spezielle Teile derselben zurückzukommen.

Findet man die Hauptaufgabe einer jeden Wissenschaft in dem Streben nach Ergründung der Wahrheit, und zwar der Wahrheit, die entweder ganz außer uns, oder doch, wenn sie sich auf uns bezieht, nicht unsre willkürliche Schöpfung, sondern eine von unserm Zutun unabhängige Notwendigkeit ist, so erklärt man damit die letzten Resultate, das letzte Ziel, dem man sich allerdings meist nur annähern kann, für unwandelbar, für unveränderlich. Dagegen ist die Wissenschaft selbst, welche den Gang der menschlichen Erkenntnis bis zu diesen Resultaten hin repräsentiert, einer unendlichen Mannigfaltigkeit, unendlich verschiedener Darstellung fähig, weil sie als das Werk des Menschen seiner Willkür unterworfen und von allen Unvollkommen-

heiten seiner geistigen Kräfte mit getroffen ist. Für einen mit unbegrenztem Verstande begabten Menschen, dem die letzten von uns durch eine lange Kette von Schlüssen erhaltenen Konsequenzen unmittelbar evidente Wahrheiten wären, würde eigentlich keine Wissenschaft mehr existieren, wenn er auch den Objekten derselben genau ebenso gegenüberstände, wie wir es tun. Diese Verschiedenheit der Auffassung des Gegenstands einer Wissenschaft findet ihren Ausdruck in den verschiedenen Formen, den verschiedenen Systemen, in welche man sie einzurahmen sucht. Dies zeigt sich überall. So in den beschreibenden Naturwissenschaften bei der Gruppierung, der Klassifikation des Materials. Je nach der größern oder geringern Wichtigkeit, welche der Naturforscher einem Merkmal, als einem zur Unterscheidung und Klassifikation geeigneten Begriffe, beilegt, erhebt er denselben zu einem Haupteinteilungsgrunde, oder benutzt ihn nur zur Bezeichnung unwesentlicher Verschiedenheiten. So streiten in der Mineralogie die Systeme miteinander, von denen das eine sich auf die chemische Konstitution der Mineralkörper, das andre auf ihre kristallographische, morphologische, Beschaffenheit stützt, ohne daß es bis jetzt gelungen wäre, beide miteinander in vollständige Harmonie zu setzen. Jedes dieser Systeme hat ein großes Recht für sich, weil die Wissenschaft weiterhin selbst lehrt, daß die ähnlichen Körper sich so am natürlichsten zusammengruppieren. Aber es wird keinem Mineralogen einfallen, etwa die Farbenverschiedenheiten als die charakteristischsten Merkmale hervorzuheben und eine hierauf beruhende Einteilung allen andern vorzusetzen. A priori ließe sich natürlich kein Grund dagegen angeben; aber die Erfahrung lehrt in dem weitern Fortgange der Forschung, daß die Farbe für die wahre Natur der Körper nicht von ebenso hoher Bedeutung ist als die vorher angeführten Merkmale, oder um mich so auszudrücken, sie lehrt, daß man mit diesem Merkmal nicht so sicher, so wirksam operieren kann, wie mit den andern. Die Einführung eines solchen Begriffs, als eines Motivs für die Gestaltung des Systems, ist gewissermaßen eine Hypothese, welche man an die innere Natur der Wissenschaft stellt; erst im weitern Verlauf antwortet sie auf dieselbe; die größere oder geringere Wirksamkeit eines solchen Begriffs bestimmt seinen Wert oder Unwert.

Ähnliches wiederholt sich in der Rechtswissenschaft; bei dem Versuch, teils die Rechtsverhältnisse, teils die Rechte selbst zu systematisieren, d. h. einige derselben als logische Konsequenzen andrer darzustellen, bildet der Systematiker gewisse Begriffe, z. B. die der Rechtsinstitute, welche als Definitionen in die Wissenschaft eintreten, und mit deren Hilfe er imstande ist, die aus der unendlichen Mannigfaltigkeit des Einzelnen erkennbaren allgemeinen Wahrheiten auszusprechen. Diese Wahrheiten wirken aber selbst wieder auf die Bildung der Definitionen zurück. So zeigt sich wohl, daß die aus irgendeinem Motive eingeführten Begriffe, weil sie anfangs zu beschränkt oder zu weit gefaßt waren, einer Abänderung bedürfen, um ihre Wirksamkeit, ihre Tragweite auf ein größeres Gebiet erstrecken zu können. Dieses Drehen und Wenden der Definitionen, den aufgefundenen Gesetzen oder Wahrheiten zuliebe, in denen sie eine Rolle spielen, bildet die größte Kunst des Systematikers.

Es ist wohl überflüssig, analoge Verhältnisse in noch andern Wissenschaften nachzuweisen; daß die weitere Entwicklung einer jeden Wissenschaft immer wieder auf das System, durch welches man ihren Organismus aufzufassen sucht, neubildend zurückwirkt, ist nicht allein eine historische Tatsache, sondern beruht auch auf einer innern Notwendigkeit.

Auch die Mathematik, von der man behauptet, daß sie von allen Wissenschaften sich der größten Evidenz erfreue, macht keine Ausnahme von diesem allgemeinen Gesetze, wenn auch es sich in ihr auf ganz andre Weise zeigt wie in andern. Auch ihre Definitionen treten anfangs notwendig in beschränkter Form auf, und erst durch weitere Entwicklung ergibt sich die Verallgemeinerung derselben. Aber, und dadurch unterscheidet sich die Mathematik rücksichtlich dieses Verhältnisses von andern Wissenschaften, diese Erweiterungen der Definitionen lassen der Willkür keinen Raum mehr, sondern sie folgen mit zwingender Notwendigkeit aus den frühern beschränkten, wenn man dabei den Grundsatz anwendet, Gesetze, welche aus den anfänglichen Definitionen hervorgehen und charakteristisch für die durch sie bezeichneten Begriffe sind, als allgemeingültig anzusehen; dann werden umgekehrt diese Gesetze die Quelle der verallgemeinerten Definitionen, wenn man fragt: Wie muß die allgemeine Definition gefaßt werden, damit dem gefundenen charakteristischen Gesetze stets Genüge geschieht? — Dieses Prinzip der Induktion an einigen Beispielen durchzuführen, ist jetzt meine Absicht.

Die Elementararithmetik geht aus von der Bildung der Ordinal- und Kardinalzahlen; der sukzessive Fortschritt von einem Gliede der

Reihe der absoluten ganzen Zahlen zu dem nächstfolgenden ist die erste und einfachste Operation der Arithmetik; auf ihr fußen alle andern. Faßt man die mehre Male hintereinander wiederholte Ausführung dieser Elementaroperation in einen einzigen Akt zusammen, so gelangt man zum Begriffe der Addition. Aus diesem bildet sich auf ähnliche Weise der der Multiplikation, aus diesem der der Potenzierung. Aber die so gegebenen Definitionen dieser Grundoperationen genügen der weitern Entwicklung der Arithmetik nicht mehr, und zwar aus dem Grunde, weil sie die Zahlen, mit denen sie operieren lehrt, auf ein sehr kleines Gebiet beschränkt annimmt. Die Forderung der Arithmetik nämlich, durch jede dieser Operationen das gesamte vorhandene Zahlgebiet jedesmal von neuem zu erzeugen, oder mit andern Worten: die Forderung der unbedingten Ausführbarkeit der indirekten, umgekehrten Operationen, der Subtraktion, Division usw., führt auf die Notwendigkeit, neue Klassen von Zahlen zu schaffen, da mit der ursprünglichen Reihe der absoluten ganzen Zahlen dieser Forderung kein Genüge geleistet werden kann. So erhält man die negativen, gebrochenen, irrationalen und endlich auch die sog. imaginären Zahlen. Nachdem nun auf diese Weise das Zahlengebiet erweitert ist, wird es notwendig, die Operationen, deren Wirksamkeit bis dahin nur für die absolute ganze Zahlenreihe bestimmt war, von neuem zu definieren, um sie auch auf die neugeschaffenen Zahlen anwenden zu können. Und diese Erweiterungen der Definitionen sind nicht willkürlich, sobald man das oben ausgesprochene allgemeine Prinzip befolgt, nämlich die Gesetze, welchen die Operationen in ihrer beschränkten Auffassung gehorchten, für allgemeingültig erklärt, und daraus umgekehrt die Bedeutung der Operationen für die neuen Zahlengebiete ableitet.

Ein bestimmtes Beispiel liefert hier schon die Multiplikation, welche zuerst aus der Forderung hervorgeht, eine mehre Male wiederholte Ausführung derselben Operation nächst niederer Ordnung, nämlich der Addition eines bestimmten positiven oder negativen Addenden, des sog. Multiplikanden, in einem einzigen Akt zusammenzufassen. Der Multiplikator, d. h. die Zahl, welche angibt, wie oft die Addition des Multiplikand wiederholt gedacht werden soll, ist daher anfangs notwendig eine absolute ganze Zahl; ein negativer Multiplikator würde nach dieser ersten Definition der Multiplikation durchaus keinen Sinn geben. Es bedarf daher einer besondern Definition, um auch negative Multiplikatoren zuzulassen, und auf diese Weise die Operation von der anfänglichen Beschränkung zu befreien; eine solche involviert aber a priori vollständige Willkürlichkeit, und es würde sich erst später entscheiden, ob denn die so beliebig gewählte Definition der Arithmetik einen wesentlichen Nutzen brächte; und glückte es auch, so könnte man dies doch immer nur ein zufälliges Erraten, ein glückliches Zutreffen nennen, von welchem eine wissenschaftliche Methode sich frei halten soll. Statt dessen wenden wir ein allgemeines Prinzip an. Man muß untersuchen, welchen Gesetzen das Produkt unterworfen ist, wenn der Multiplikator sukzessive dieselben Veränderungen erleidet, durch welche überhaupt aus der absoluten ganzen Zahlenreihe die der negativen erzeugt wurde. Dazu genügt allein schon die Bestimmung der Veränderung, welche das Produkt erleidet, wenn man mit dem Multiplikator die einfachste Zahlenoperation vornimmt, nämlich ihn in die nächstfolgende Zahl übergehen läßt; durch sukzessive Wiederholung dieser Operation erhält man das bekannte Additionstheorem für den Multiplikator: um eine Zahl mit einer Summe zu multiplizieren, hat man sie mit jedem Summanden zu multiplizieren und dann diese Partialprodukte zu addieren, und hieraus ergibt sich unmittelbar ein Subtraktionstheorem für den Fall, daß der Minuend größer als der Subtrahend ist. Erklärt man nun diese Gesetze für allgemeingültig, also auch für den Fall, wo die Differenz, welche den Multiplikator darstellt, negativ wird, so erhält man hieraus die Definition der Multiplikation mit negativen Multiplikatoren; und es ist dann natürlich kein Zufall mehr, daß das allgemeine Gesetz, dem die Multiplikation gehorcht, für beide Fälle genau dasselbe ist.

In ähnlicher Weise will ich auch noch zeigen, wie sich auf diesem Wege die Definition der Potenzierung vervollständigt. Die sukzessive Wiederholung derselben Multiplikation, also die Bildung eines Produkts aus einer bestimmten Anzahl gleicher, jetzt rationaler, Faktoren, gibt, als eine einzige Operation aufgefaßt, den Begriff der Potenzierung; wieder aber zeigt sich, daß die bestimmende Zahl, welche angibt, wieviel solcher Faktoren gesetzt werden, und welche man den Exponenten der Potenz nennt, nur eine absolute ganze Zahl sein kann, wenn die geforderte Operation Sinn haben soll. Potenzen mit andern Exponenten als absoluten ganzen Zahlen bedürfen wieder einer neuen Definition; statt eine solche aber willkürlich zu wählen, muß man

vielmehr untersuchen, wie man sie zu bestimmen habe, um die aus der ursprünglichen Definition folgenden Gesetze allgemeingültig zu machen. Man muß daher dieselbe Methode anwenden, und nach den Veränderungen fragen, welche die Potenz erleidet, wenn man den Exponenten den Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division unterwirft, solange der so veränderte Exponent immer noch eine absolute ganze Zahl bleibt. Sind die hierin herrschenden Gesetze erkannt, so liefern sie umgekehrt die verallgemeinerten Definitionen, wenn man die Forderung stellt, daß diese Gesetze maßgebend für den Charakter der Potenzierung überhaupt sein sollen. Dies alles erreicht man durch den einzigen aus der Definition unmittelbar einleuchtenden Satz, daß durch abermalige Hinzufügung desselben Faktors der Exponent der erhaltenen Potenz in die nächstfolgende Zahl übergeht, wodurch die Bedeutung der einfachsten mit dem Exponenten vorgenommenen Operation, welche zugleich die Quelle aller folgenden ist, für die Potenz aufgefunden ist. Durch sukzessive Wiederholung dieser Veränderung ergibt sich ein Additionstheorem für den Exponenten, welches, wenn es als allgemein gültig angenommen wird, sukzessive die Definitionen der Potenzen mit jedem beliebigen rationalen Exponenten liefert. Aus dem Satze, daß eine Potenz, deren Exponent die Summe zweier absoluten ganzen Zahlen ist, gleich dem Produkte zweier Potenzen derselben Basis ist, deren Exponenten diese beide Zahlen sind, läßt sich ein Subtraktionstheorem ableiten, in welchem die Potenz mit einem Exponenten, welcher als Differenz auftritt, auf den Quotienten der beiden Potenzen reduziert wird, deren Exponenten resp. Minuend und Subtrahend jener Differenz sind, vorausgesetzt, daß ersterer größer als letzterer ist. Behält man aber diesen Satz als einen allgemein geltenden bei, so ergibt sich daraus unmittelbar die Definition der Potenzen mit dem Exponenten Null und negativen Exponenten. Damit ist die erste Erweiterung gefunden. Um nun auch auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten zu kommen, muß man zuerst, was leicht geschieht, aus dem erwähnten Additionstheorem das Gesetz ableiten, daß einer Multiplikation des Exponenten eine gleichhohe Potenzierung der Potenz entspricht, woraus sogleich einleuchtet, daß jede Division eines Exponenten zuerst verlangt, die eine Umkehrung der ursprünglichen Operation der Potenzierung auszuführen, nämlich eine gegebene Zahl in eine gleichfalls gegebene Anzahl gleicher Faktoren zu zerlegen. Man wird bei dieser Aufgabe abermals auf neue Zahlengebiete geführt, indem das bisherige der Forderung der allgemeinen Ausführbarkeit der arithmetischen Operationen nicht mehr Genüge leistet; man ist dadurch gezwungen, die irrationalen Zahlen, mit welchen zugleich der Begriff der Grenze auftritt, und endlich auch die imaginären Zahlen zu schaffen. Diese Fortschritte sind so unermeßlich, daß es schwer zu entscheiden ist, welche der vielen verschiedenen Bahnen, die sich hier auftun, man zuerst betreten soll. Aber das leuchtet ein, will man die Operationen der Arithmetik, wie sie bis dahin entwickelt sind, auf diese neuen Klassen von Zahlen anwenden, so sind abermals Erweiterungen der frühern Definitionen erforderlich, und hier, wenigstens mit dem Auftreten der imaginären Zahlen, beginnen die Hauptschwierigkeiten der systematischen Arithmetik. Indessen ist wohl zu hoffen, daß man durch beharrliche Anwendung des Grundsatzes, sich auch hier keine Willkürlichkeit zu erlauben, sondern immer durch die gefundenen Gesetze selbst sich weiterleiten zu lassen, zu einem wirklich festen Gebäude der Arithmetik gelangen wird. Bis jetzt ist bekanntlich eine vorwurfsfreie Theorie der imaginären, geschweige denn der neuerdings von Hamilton erdachten Zahlen entweder nicht vorhanden, oder doch wenigstens noch nicht publiziert.

Ein dem letzten aus der Lehre von den Potenzen genommenen Beispiele durchaus verwandtes liefert ferner die geometrische Theorie der Winkelfunktionen, ich meine hier die Entwicklung der Definitionen von den mit den Namen Kosinus und Sinus belegten Begriffen. Mögen sie nun als Verhältnisse der Katheten zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks definiert werden, dessen Winkel ihre Argumente sind, oder, was im Grunde doch dasselbe ist, als Linien in einem Kreise, dessen Radius der Einheit gleich ist: immer sind auch diese Definitionen anfangs beschränkt, nämlich auf spitze Winkel, oder wenigstens erscheint die Art und Weise, wie sie bisweilen von vornherein allgemeiner gefaßt werden, durchaus willkürlich. In einigen Lehrbüchern findet sich folgendes Verfahren, um diese Funktionen zu verallgemeinern. Es wird ein Kreis mit dem Radius $= 1$ beschrieben und nach einem festen Punkt der Peripherie ein Radius gezogen. Denkt man sich nun einen beweglichen Radius, so beschreibt dieser von dem festen ausgehend nach der einen Seite hin positive, und nach der andern Richtung negative Winkel, und wir wollen wenigstens annehmen, es wäre die Berechtigung zu dieser Einführung negativer Winkel nachgewiesen. Dann ist das von dem Endpunkt des beweglichen Radius auf den festen gefällte Lot der Sinus, und das zwischen dem Fußpunkte dieses Lots und dem Mittelpunkte des Kreises liegende Stück des festen Radius der Kosinus des beschriebenen Winkels. Aus der verschiedenen Lage, welche diese beiden Linien annehmen, wird dann gefolgert, daß Sinus und Kosinus für gewisse Intervalle negativ werden. Diese Art und Weise zu folgern, muß natürlich verworfen werden, solange nicht allgemein nachgewiesen ist, daß entgegengesetzten Richtungen stets entgegengesetzte Zeichen entsprechen, was in dieser Allgemeinheit jedenfalls nicht möglich, weil es nicht richtig ist. Außerdem beruht aber diese ganze Ableitung darauf, daß jenes Lot vom Endpunkte des beweglichen Radius auf den festen gefällt wird, und sie verliert sogleich auch ihre letzte Kraft, sobald man statt dessen das Lot vom Endpunkte des festen Schenkels auf den beweglichen fällt, wogegen sich keine Erinnerung machen läßt, da das eine ebenso natürlich wie das andre ist.

Sodann wird durch eine geometrische Konstruktion ein Fundamentalsatz bewiesen, durch welchen Sinus und Kosinus einer Summe zweier Winkel auf die Sinus und Kosinus dieser Winkel selbst reduziert werden; aber diese Konstruktion wird meist nur für den Fall ausgeführt, daß alle 3 vorkommenden Winkel spitz sind, und entweder hält man es für selbstverständlich und nicht für der Mühe wert, zu beweisen, daß dieser Satz für alle Fälle gültig ist, welche Werte man auch den Winkeln beilegen mag, oder wenn dieser Mangel gefühlt wird, so fällt ein solcher Nachweis außerordentlich umständlich aus. Freilich bleibt es immer interessant zu sehen, daß bei den einmal angenommenen Definitionen der Satz zufällig auf alle Fälle paßt. Ich sage zufällig, denn anders kann man es nicht nennen; während man mit leichter Mühe einen konsequenten und natürlichen Weg entdecken kann, um zu denselben Resultaten zu gelangen. Man bedarf wirklich nur der Definitionen von Sinus und Kosinus spitzer Winkel; und wenn für diese das genannte Additionstheorem nachgewiesen ist, so liefert dasselbe, wenn es zu einem allgemeinen Gesetz erhoben wird, auf dem einfachsten Wege die erweiterten Definitionen mit zwingender Notwendigkeit. Denn läßt man den einen der beiden Winkel einem Rechten gleich werden, während der andre beliebig spitz bleibt, so erhält man die Definitionen für die goniometrischen Funktionen von stumpfen Winkeln; gibt man dann in demselben

Satze dem einen Winkel den Wert von 2 Rechten und läßt den andern das Gebiet der konkaven Winkel durchlaufen, so erhält man die Bedeutung des Sinus und Kosinus von Winkeln bis zur Größe von 4 Rechten, und wenn man so fortfährt, erhebt man sich leicht zur allgemeinen Definition für die positiven und auch auf analoge Weise durch Subtraktion zu der für negative Winkel. Das Gesetz lehrt auch hier, wie man den Begriff fassen soll, auf daß er am wirksamsten werde.

Diese Beispiele werden genügen, um die Eigentümlichkeit des Fortschritts von Begriffen, die sich nur auf ein beschränktes Gebiet beziehen, zu allgemeinern in der Mathematik nachzuweisen. In allen diesen Fällen blieb aber die ursprüngliche Definition für das beschränkte Gebiet unangetastet stehen. In einigen Teilen der Mathematik kommt es aber auch vor, daß diese ursprünglichen Definitionen durchaus aufgegeben werden müssen, um andern Platz zu machen. Ein solcher Fall tritt in der höhern Mathematik ein. Die Operation des Differentiierens lehrt auf bestimmte Weise aus gegebenen Funktionen die sogenannten derivierten Funktionen zu bilden, und die Integration wird anfänglich definiert als die Umkehrung der Differentiation, als die Operation, durch welche der Übergang von den derivierten Funktionen zu den ursprünglichen bewerkstelligt wird. Man kann aber hier nicht mit demselben Recht von vornherein die allgemeine Ausführbarkeit der Integration verlangen, wie früher die Umkehrung der Operationen der Elementararithmetik. Denn hier handelt es sich nicht direkt um numerische Resultate, um eine eigentliche Rechnung, vielmehr soll eine Form gefunden werden, welche der mechanischen Operation des Differentiierens unterworfen die gegebene Form wiedergibt. Bei dieser rein formellen Auffassung des Differentiierens und Integrierens wäre die allgemeine Ausführbarkeit der Integration durchaus problematisch. Aber bei der eigentlichen Erforschung der Beziehungen zwischen Differential und Integral stellt sich ein von diesem formellen Ausdruck völlig befreiter Zusammenhang heraus, welcher in der Art reziprok ist, daß er stets sowohl den Übergang vom Integral zum Differential wie den umgekehrten als möglich erweist. Der dabei notwendige Begriff der Grenze darf hier um so weniger einen Anstoß erregen und etwa die Meinung aufkommen lassen, daß diese Operationen als unausführbar zu verwerfen wären, als dieser, wie schon oben bemerkt, sich mit Notwendigkeit selbst in die Elementararithmetik eindrängt.

Dann aber, wenn man ihr diese Bedeutung, nämlich den Grenzwert einer Summe einer immer größer werdenden Anzahl immer kleinerer Teile zu bilden, als allgemeine Definition unterlegt, tritt die Operation des Integrierens in vollkommener Selbständigkeit und Unabhängigkeit von der Differentialrechnung auf, ohne indessen den frühern Zusammenhang mit dieser zu verlieren. Von welcher Bedeutung und Fruchtbarkeit diese Auffassung der Integralrechnung als einer selbständigen Operation gewesen ist und auch noch ferner sein wird, das lehrt die Geschichte der neuern Mathematik. Ich brauche nur an die Theorie der Eulerschen Integrale und Elliptischen Funktionen zu erinnern, die ja beide ihren ersten Keim in der Tat in der Integralrechnung gefunden haben. Aber interessant ist es zu sehen, daß auch bei diesen neu eingeführten Funktionen ein ähnlicher Entwicklungsgang sich bemerkbar gemacht hat wie in den oben angeführten Beispielen aus der Elementararithmetik. Die erstern, die sogenannten Γ-Funktionen, wurden als bestimmte Integrale definiert, und aus dieser Definition entwickelte man die Gesetze, denen sie gehorchten; allein diese Definition beschränkte sich nur auf das reelle positive Zahlengebiet, wenigstens hört die Wirksamkeit dieser Funktion schon für jeden negativen Wert des Arguments auf, da sie dann stets unendlich groß wird. Seitdem man aber gefunden hat, daß diese Funktion Γ für alle positiven Werte ihres Arguments mit einer Funktion Π, welche als unendliches Produkt definiert wird und für alle andern Werte gleichfalls eine veränderliche, wenn auch an bestimmten Stellen unendlich werdende Funktion bleibt, identisch ist, wird man natürlich die frühere Definition verlassen und in ein Theorem verwandeln, und statt dessen die Funktion Π als die Hauptfunktion definieren.

Etwas Ähnliches hat sich mit den Elliptischen Funktionen ereignet. Während man früher die Integralrechnung als die wahre Quelle der Theorie dieser Funktionen ansah — und in der Tat war sie es auch bis auf die neueste Zeit —, macht sich jetzt das Bestreben geltend, ihnen eine selbständigere Stellung zu verschaffen, dadurch, daß man entweder von unendlichen Reihen oder von unendlichen Produkten ausgeht. Es ist indessen hier unmöglich, weiter auf die sukzessiven Umgestaltungen dieser noch immer sich weiter entwickelnden Theorie einzugehen; schon erfordert es ein bedeutendes Studium, sich in Besitz dieser neuen Ideen zu setzen; viel weniger fühle ich mich der Aufgabe gewachsen, sie von einem sichern Standpunkt aus einer Kritik zu unterwerfen, und ich breche daher hiermit meinen Vortrag ab, indem ich nur noch hinzufügen will, daß durch einen merkwürdigen Zufall vor wenigen Stunden mir ein soeben erschienenes Buch von Prof. Apelt zugegangen ist, welches, nach einem flüchtigen Anblick zu urteilen, nicht nur eine allgemeine Theorie der Induktion, sondern auch spezielle Anwendungen derselben auf die Mathematik zu geben versucht.

[Dedekind erwähnt diesen Habilitationsvortrag im Vorwort zur ersten Auflage von „Was sind und was sollen die Zahlen?" (LI dieser Ausgabe), wo er über die Bedeutung der Schöpfung und Einführung neuer Begriffe spricht. E. N.]

LXI.

Aus den Gruppen-Studien (1855—1858).

Komposition.

Ist m eine positive Zahl, so fragt sich, wie viele verschiedene Arten Gruppen M von m Objekten gibt es? —

Ist θ irgendein in M enthaltenes Objekt, so ist die Ordnung n von θ jedenfalls ein Divisor von m.

Umgekehrt, ist n irgendein Divisor von m, so fragt sich, wie viele Objekte θ von der Ordnung n sind in M enthalten? — Satz: Diese Anzahl ist jedenfalls ein Multiplum $\psi(n)\,\varphi(n)$ von der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(n)$; (wo $\psi(n)$ auch $= 0$ sein kann, und im allgemeinen nicht eine vollständig bestimmte Funktion von n (wie $\varphi(n)$) bedeutet, sondern wesentlich von der Natur der Gruppe M abhängt). ...

Anwendbar auf Drehungen. Quaternions:

... III) $m = 8$; $1 + \psi(2) + 2\,\psi(4) + 4\,\psi(8) = 8$; da $\psi(8)$ wieder $= 0$ sein soll*), so bleibt $\psi(2) + 2\,\psi(4) = 7$; also a priori folgende Fälle:

1. $\psi(4) = 0$; $\psi(2) = 7$
2. $\psi(4) = 1$; $\psi(2) = 5$
3. $\psi(4) = 2$; $\psi(2) = 3$
4. $\psi(4) = 3$; $\psi(2) = 1$

... 4) $\psi(4) = 3$; $\psi(2) = 1$; es seien wieder θ, θ_1 zwei primitive Objekte 4ter Ordnung aus verschiedenen Systemen.

$$M = 1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \theta_1 + \theta\,\theta_1 + \theta^2\,\theta_1 + \theta^3\,\theta_1$$

und also θ, θ^3, θ_1, $\theta\,\theta_1$, $\theta^2\,\theta_1$, $\theta^3\,\theta_1$ sämtlich von der vierten Ordnung, also

$$\theta_1^2 = \theta\,\theta_1\,\theta\,\theta_1 = \theta^2\,\theta_1\,\theta^2\,\theta_1 = \theta^3\,\theta_1\,\theta^3\,\theta_1 = \theta^2.$$

*) [D. h. der zyklische Fall soll ausgeschlossen sein. E. N.]

Also

$$\theta_1 = \theta\,\theta_1\,\theta = \theta^2\,\theta_1\,\theta^2 = \theta^3\,\theta_1\,\theta^3$$

$$\theta_1\,\theta = \theta^3\,\theta_1 \quad \text{und} \quad \theta_1^2 = \theta^2.$$

Dann lautet das Schema:

$$\begin{array}{l}
1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \theta_1 + \theta\,\theta_1 + \theta^2\,\theta_1 + \theta^3\,\theta_1 \\
\theta + \theta^2 + \theta^3 + 1 + \theta^3\,\theta_1 + \theta_1 + \theta\,\theta_1 + \theta^2\,\theta_1 \\
\theta^2 + \theta^3 + 1 + \theta + \theta^2\,\theta_1 + \theta^3\,\theta_1 + \theta_1 + \theta\,\theta_1 \\
\theta^3 + 1 + \theta + \theta^2 + \theta\,\theta_1 + \theta^2\,\theta_1 + \theta^3\,\theta_1 + \theta_1 \\
\theta_1 + \theta\,\theta_1 + \theta^2\,\theta_1 + \theta^3\,\theta_1 + \theta^2 + \theta^3 + 1 + \theta \\
\theta\,\theta_1 + \theta^2\,\theta_1 + \theta^3\,\theta_1 + \theta_1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + 1 \\
\theta^2\,\theta_1 + \theta^3\,\theta_1 + \theta_1 + \theta\,\theta_1 + 1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 \\
\theta^3\,\theta_1 + \theta_1 + \theta\,\theta_1 + \theta^2\,\theta_1 + \theta^3 + 1 + \theta + \theta^2.
\end{array}$$

Äquivalenz von Gruppen.

Es sei M eine Gruppe von m Objekten; jedem in M enthaltenen Objekt θ entspreche ein Objekt θ_1 in der Weise, daß jedem Produkt $\theta\,\varphi\,\psi \ldots \lambda$ aus Objekten θ, φ, ψ, $\ldots$, λ, welche in M enthalten sind, das Produkt $\theta_1\,\varphi_1\,\psi_1 \ldots \lambda_1$ aus den entsprechenden Objekten θ_1, φ_1, ψ_1, $\ldots$, λ_1 entspreche. Der Komplex der m_1 voneinander verschiedenen Objekte θ_1 werde mit M_1 bezeichnet.

Satz 1: Der Komplex M_1 ist eine Gruppe. — Beweis. Sind θ_1, φ_1 in M_1 enthalten, so gibt es in M (mindestens) ein θ, welchem θ_1, ferner (mindestens) ein φ, welchem φ_1 entspricht; dem $\theta\,\varphi$ entspricht $\theta_1\,\varphi_1$; folglich ist $\theta_1\,\varphi_1$ in M_1 enthalten.

Satz 2: Es sei θ irgendein Objekt der Gruppe M, welchem das Objekt θ_1 der Gruppe M_1 entspricht; alle n Objekte der Gruppe M, welchen ein und dasselbe θ_1 entspricht, können in die Form $\theta\,\varphi$ oder $\psi\,\theta$ gebracht werden, wo φ und ψ stets Objekte der Gruppe M sind. Dem $\theta\,\varphi$ entspricht nun $\theta_1\,\varphi_1 = \theta_1$, also ist $\varphi_1 = 1$; ebenso entspricht jedem $\psi\,\theta$ ein Objekt $\psi_1\,\theta_1 = \theta_1$, also ist auch $\psi_1 = 1$. Also entspricht sämtlichen n Objekten φ, sowie sämtlichen n Objekten ψ das Objekt 1 der Gruppe M_1. Umgekehrt ist φ ein Objekt von M, dem das Objekt 1 entspricht, so entspricht θ_1 sowohl $\theta\,\varphi$ als auch $\varphi\,\theta$. Der Komplex aller der n in M enthaltenen Objekte φ, denen das Objekt 1 entspricht, bildet eine Gruppe, und zwar einen eigentlichen Divisor von M; dann ist $m = m_1\,n$.

Satz 3: Man bezeichne mit N die Gruppe aller n in M enthaltenen Objekte, denen das Objekt 1 entspricht; so kann man

$$M = N + N\,\theta' + N\,\theta'' + \cdots + N\,\theta^{(m_1 - 1)}$$

setzen. Allen in einem Komplex $N\,\theta = \theta\,N$ enthaltenen n Objekten entspricht ein und dasselbe Objekt θ_1 der Gruppe M_1. Die m_1 Komplexe N, N', N'', $\ldots$, $N^{(m_1-1)}$ gestatten bekanntlich wieder eine Komposition $N^{(p)}\,N^{(q)} = N^{(r)}$. Diese m_1 Komplexe bilden daher eine Gruppe von m_1 Objekten, und offenbar entspricht jedem Komplex $N^{(p)}$ ein Objekt $\theta_1^{(p)}$ der Gruppe M_1 in der Weise, daß jedem Produkte $N^{(p)}\,N^{(q)}$ das Objekt $\theta_1^{(p)}\,\theta_1^{(q)}$ der Gruppe M_1 entspricht. Und jedem Objekte θ_1 der Gruppe M_1 entspricht ein Komplex $N\,\theta = \theta\,N$, aber auch nur einer.

Definitionen: Von zwei Gruppen wie M und M_1 wollen wir sagen: die Art von M_1 ist unter der Art von M enthalten, die Art von M enthält die Art von M_1. — Ist daher N ein eigentlicher Divisor von $M = N + N' + \cdots$, so ist die Art der Gruppe der Komplexe N, N', etc. unter der Art von M enthalten. — Enthalten die Arten zweier Gruppen M und M_1 sich gegenseitig, so sollen diese beiden Gruppen äquivalent oder von derselben Art heißen. — Zwei äquivalente Gruppen haben stets denselben Grad; jedem Divisor der einen entspricht ein äquivalenter Divisor der andern. Sind zwei Gruppen einer dritten äquivalent, so sind sie untereinander äquivalent. — Sind M und M_1 äquivalent, so entspricht jedem in M enthaltenen Objekt θ ein in M_1 enthaltenes Objekt θ_1 auf die angegebene Weise; wir sagen, daß M durch die Substitution $S = \begin{pmatrix} 1, & \theta, & \theta', & \ldots \\ 1, & \theta_1, & \theta_1', & \ldots \end{pmatrix}$ in M_1 übergeht. Durch wieviel verschiedene Substitutionen geht M in M_1 über? Es sei T_1 das Symbol für alle Substitutionen, durch welche M_1 in sich selbst übergeht, S eine bestimmte Substitution, durch welche M in M_1 übergeht, so geht M durch sämtliche Substitutionen $S\,T_1$ in M_1 über; ebenso durch $T\,S$. Umgekehrt jede Substitution, durch welche M in M_1 übergeht, ist sowohl in der Form $S\,T_1$ als in der Form $T\,S$ enthalten; denn bringt man, was immer und (für ein bestimmtes S) nur auf eine einzige Weise möglich ist, eine solche Substitution auf die Formen $S\,T_1'$ und $T'\,S$, so folgt, daß M_1 durch T_1' in M_1, M durch T' in M übergeht. — Es fragt sich also, durch wieviel Substitutionen T geht eine Gruppe M in sich selbst über?

Die Substitutionen T beziehen sich auf die m Objekte der Gruppe M (Permutationen), lassen aber alle das Objekt 1 ungeändert. Der Komplex aller Substitutionen T bildet eine Gruppe. Der Komplex aller Objekte der Gruppe M, welche durch sämtliche Substitutionen T ungeändert bleiben, bildet eine Gruppe. — Eine reguläre Gruppe vom Grade m ist auf $\varphi(m)$ Arten sich selbst äquivalent. —

Satz ?: Ist M eine Gruppe von m Objekten, und p eine in m aufgehende Primzahl, so enthält M jedenfalls ein Objekt $p$ter Ordnung. —

Versuch zu einem Beweise. Gesetzt der Satz wäre falsch, so muß es einen kleinsten Grad $m \geqq 6$ geben, für welchen er falsch ist, so daß er für alle Gruppen von kleinerm Grade als m richtig ist. Dann sei M eine Gruppe vom Grade m, welche kein Objekt p^{ter} Ordnung enthält, obgleich p eine in m aufgehende Primzahl ist. Man kann $m = p^{\omega}.n$ setzen, wo n nicht durch p teilbar ist; n kann nicht $= 1$ sein, weil die Richtigkeit des Satzes für $m = p^{\omega}$ einleuchtet.

Der Grad $k < m$ einer jeden Gruppe $K < M$, welche ein Divisor von M ist, muß ein Divisor von n sein; denn dieser Grad k ist jedenfalls ein Divisor von $m = p^{\omega}.n$, wäre er aber teilbar durch p, so wäre, da K auch kein Objekt p^{ter} Ordnung enthalten kann, der Satz auch für $k < m$ falsch. Die Ordnung eines jeden in M enthaltenen Objekts ist ein Divisor von n. Ist δ irgendein Divisor von n, $\psi(\delta)$ die Anzahl der regulären Gruppen vom Grade δ, so ist

$$\sum \psi(\delta)\,\varphi(\delta) = p^{\omega}.n; \quad \sum \varphi(\delta) = n.$$

Ist nun K irgendein Divisor von M (von einem Grade $1 < k < m$, solche gibt es), und H der Komplex aller in M enthaltenen Objekte φ, für welche $\varphi^{-1} K \varphi = K$ ist; so ist H eine Gruppe, Divisor von M, und eigentliches Multiplum von K; der Grad h von H ist entweder $= m$, wenn K eigentlicher Divisor von M, oder ein Divisor von n, wenn K uneigentlicher Divisor von M ist. Es sei $m = \mu h$, $h = \nu k$.

Ist nun 1) $K < M$ eigentlicher Divisor von M, also $h = m$, $\mu = 1$, ν teilbar durch p^{ω}; $m = \nu k$; so zerfällt M in ν Komplexe

$$M = K + K_1 + \cdots + K_{\nu-1},$$

welche kompositionsfähig sind ($K_{\alpha} K_{\beta} = K_{\gamma}$) und so eine Gruppe vom Grade ν bilden. Da $\nu < m$, so enthält diese Gruppe mindestens einen Komplex p^{ter} Ordnung $K_1 = K\varphi = \varphi K$, so daß $K_1^p = K$; es muß also φ^p die niedrigste Potenz von φ in K enthalten sein; dann ist die Ordnung von φ ein Multiplum von p; folglich enthielte M doch auch Objekte von der p^{ten} Ordnung.

Hieraus folgt, daß M außer 1 und sich selbst nur uneigentliche Divisoren enthalten kann.

Es ist also für jeden (von 1 und M verschiedenen) Divisor K von M:

$h \geqq k$ ein Divisor von n; μ teilbar durch p^{ω}; $\nu \geqq 1$; $\mu < m$.

Die Anzahl μ der voneinander verschiedenen mit K konjugierten Gruppen ist daher stets teilbar durch p^{ω}. Ist daher $\delta' > 1$ ein Divisor von n, so ist auch $\psi(\delta')$ teilbar durch p^{ω}. Also wäre

$$p^{\omega}.n = \sum \psi(\delta)\,\varphi(\delta) = 1 + \sum{}' \psi(\delta')\,\varphi(\delta') = 1 + p^{\omega} \times x,$$

was unmöglich ist.

Also ist der Satz bewiesen.

Sätze über Gruppen M, deren Grade m Potenzen p^{ω} einer Primzahl p sind.

Bezeichnet $\psi(p^{\alpha}) = \psi_{\alpha}$ die Anzahl der regulären Gruppen vom Grade p^{α}, welche Divisoren von M sind, so ist

$$\psi_0 \cdot \varphi(1) + \psi_1 \varphi(p) + \cdots + \psi_{\alpha} \varphi(p^{\alpha}) + \cdots + \psi_{\omega} \varphi(p^{\omega}) = p^{\omega}$$

oder, da $\psi_0 = 1$ und $\varphi(p^{\alpha}) = (p-1)\,p^{\alpha-1}$ ist,

$$\psi_1 + p\,\psi_2 + \cdots + p^{\alpha-1}\psi_{\alpha} + \cdots + p^{\omega-1}\psi_{\omega} = \frac{p^{\omega}-1}{p-1}$$
$$= 1 + p + \cdots + p^{\omega-1}.$$

Ist ferner $\psi_{\alpha} = 0$, so ist auch $\psi_{\alpha+1} = \psi_{\alpha+2} =$ etc. $= 0$; offenbar kann ψ_1 nie $= 0$ sein, weil $\psi_1 \equiv 1 \pmod{p}$; ist ferner ψ_{ω} von Null verschieden, so ist $\psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{\omega} = 1$, also die Gruppe regulär, und umgekehrt.

Gesetzt nun $\overset{\alpha}{P}$ ist ein regulärer Divisor von dem Grade p^{α}, und $\overset{\alpha}{\mathfrak{P}}$ der Komplex aller in M enthaltenen Objekte φ, für welche $\varphi^{-1}\overset{\alpha}{P}\varphi$

$= \overset{\alpha}{P}$ ist, so ist $\overset{\alpha}{\mathfrak{P}}$ eine Gruppe, ein Divisor von M, und ein Multiplum von $\overset{\alpha}{P}$; der Grad von $\overset{\alpha}{\mathfrak{P}}$ ist daher $= p^{\alpha+\varepsilon}$, worin ε die Werte 0, 1, 2, .. $(\omega-\alpha)$ haben kann; dann ist die Anzahl der voneinander verschiedenen mit $\overset{\alpha}{P}$ konjugierten Gruppen $= p^{\omega-\alpha-\varepsilon}$. Man kann daher setzen

$$\psi_\alpha = (\alpha, 0) + p(\alpha, 1) + \cdots + p^{\omega-\alpha-\varepsilon}(\alpha, \omega-\alpha-\varepsilon) + \cdots$$
$$+ p^{\omega-\alpha}(\alpha, \omega-\alpha),$$

und hierin bedeutet (α, λ) die Anzahl der Systeme von konjugierten regulären Gruppen vom Grade p^α, deren jedes aus p^λ konjugierten Gruppen besteht. Man kann daher

$$(1,0) + p\{(1,1)+(2,0)\} + p^2\{(1,2)+(2,1)+(3,0)\} + \text{etc.} = \frac{p^\omega - 1}{p-1}$$

setzen. Da also $(1,0) \equiv 1 \pmod p$ ist, so kann $(1,0)$ nicht Null sein. Mithin existiert stets mindestens eine (reguläre) Gruppe p^{ten} Grades

$$P = 1 + \theta + \theta^2 + \cdots + \theta^{p-1},$$

welche eigentlicher Divisor von M ist, so daß $\varphi^{-1}P\varphi = P$, wenn φ in M enthalten ist; man kann daher für jedes solche φ setzen

$$\varphi^{-1}\theta\varphi = \theta^n, \quad \varphi^{-2}\theta\varphi^2 = \varphi^{-1}\theta^n\varphi = (\varphi^{-1}\theta\varphi)^n = (\theta^n)^n = \theta^{n^2},$$
$$\text{allgemein} \quad \varphi^{-k}\theta\varphi^k = \theta^{n^k};$$

da nun $\varphi^{p^\omega} = 1$ ist, so folgt für $k = p^\omega$, daß $\theta = \theta^{n^{p^\omega}}$, also $n^{p^\omega} \equiv 1 \pmod p$, also auch $n \equiv 1 \pmod p$, also $\varphi^{-1}\theta\varphi = \theta$; also ist θ permutabel mit jedem in M enthaltenen Objekt φ.

Reziprozität.

Es seien $A = \sum^a \alpha$ und $B = \sum^b \beta$ Divisoren von $S = \sum^s \sigma$

$$s = am, \quad s = bn; \quad am = bn = s$$

und es sei

$$C = \sum^c \gamma \text{ der größte gem. Div. von } A \text{ und } B$$

$$a = c\nu, \quad b = c\mu; \quad t = m\nu = n\mu; \quad \frac{\mu}{m} = \frac{\nu}{n}.$$

Sind φ, ψ irgend zwei in S enthaltene Objekte, so haben die Komplexe $A\varphi$, $B\psi$ entweder gar keine gemeinschaftlichen Objekte, oder sie haben solche $\alpha\varphi = \beta\psi = \theta$; dann ist auch

$$\gamma\alpha\varphi = \gamma\beta\psi = \gamma\theta$$

sowohl in $A\varphi$ als auch in $B\psi$ enthalten, und umgekehrt: ist $\sigma\theta$ in $A\varphi$ und in $B\psi$ enthalten, so ist $\sigma\alpha$ in A, $\sigma\beta$ in B, folglich σ in A und B enthalten, also $\sigma = \gamma$.

Also $A\varphi$ und $B\psi$ haben entweder gar kein gemeinschaftliches Objekt, oder sie haben c gemeinschaftliche Objekte $C\theta$.

Es sei

$$A = C + C\alpha_1 + \cdots + C\alpha_{\nu-1}; \quad B = C + C\beta_1 + \cdots + C\beta_{\mu-1},$$

so ist

$C\alpha_{\nu'}$ der gleichzeitig in A und $B\alpha_{\nu'}$ enthaltene Komplex,
$C\beta_{\mu'}$ „ „ „ $A\beta_{\mu'}$ und B enthaltene Komplex,

mithin sind

$$A, A\beta_1, \ldots, A\beta_{\mu-1} \qquad \mu \leqq m$$

voneinander verschiedene Komplexe, und ebenso

$$B, B\alpha_1, \ldots, B\alpha_{\nu-1} \qquad \nu \leqq n$$

voneinander verschiedene Komplexe.

$$\begin{array}{l|l}
A = C + C\alpha_1 + \cdots + C\alpha_{\nu-1} & B = C + C\beta_1 + \cdots + C\beta_{\mu-1} \\
A\beta_1 = C\beta_1 + C\alpha_1\beta_1 + \cdots + C\alpha_{\nu-1}\beta_1 & B\alpha_1 = C\alpha_1 + C\beta_1\alpha_1 + \cdots + C\beta_{\mu-1}\alpha_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A\beta_{\mu-1} = C\beta_{\mu-1} + C\alpha_1\beta_{\mu-1} + \cdots + C\alpha_{\nu-1}\beta_{\mu-1} & B\alpha_{\nu-1} = C\alpha_{\nu-1} + C\beta_1\alpha_{\nu-1} + \cdots + C\beta_{\mu-1}\alpha_{\nu-1}.
\end{array}$$

Es gehöre x zu der Gruppe A, y zu der Gruppe B, z zur Gruppe C. Den Komplexen $A, A\beta_1, \ldots, A\beta_{\mu-1}$ korrespondieren die Wurzeln $x, x_1, \ldots, x_{\mu-1}$ einer in bezug auf y rationalen und irreduktibeln Gleichung.

Es sei $A\beta'$ ein von den vorigen verschiedener Komplex, welchem die Wurzel x' korrespondiert; es sei C' der größte gem. Div. von $\beta'^{-1}A\beta'$ und B

$$B = C' + C'\beta_1' + \cdots + C'\beta_{\mu'-1}'.$$

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Dedekind erwähnt diese Gruppenstudien in einem Brief an Frobenius 1895 (Bd. 2, S. 419). Die hier des historischen Interesses halber wiedergegebenen Stücke zeigen, wie vollständig Dedekind schon in dieser frühen Zeit im Besitz von Begriffen und Methoden der abstrakten Gruppentheorie war.

Mit der im ersten Stück angegebenen Methode sind alle Gruppen bis zur zehnten Ordnung einschließlich aufgestellt; wie das angegebene Beispiel zeigt, war Dedekind so schon damals zur Quaternionengruppe gelangt. Das scheint er später vergessen zu haben, wie eine Äußerung in einem Brief an Frobenius (Bd. 2, S. 440) zeigt.

Die „Äquivalenz von Gruppen" gibt eine so scharfe Herausarbeitung des „Homomorphiesatzes", wie sie erst in neuester Zeit wieder üblich geworden ist.

Das nächste Stück enthält den im Brief von 1895 an Frobenius erwähnten Satz, arbeitet wesentlich mit dem Begriffe des Normalisators.

Auf ähnlichen Überlegungen beruht auch der folgende Beweis, daß eine Gruppe von Primzahlpotenzgrad auflösbar ist.

An die im letzten Stück — Reziprozität — gegebene gegenseitige Reduktion von Körpern (oder Polynomen) schließt ausführlicher die Zerlegung einer Gruppe nach zwei Untergruppen an, die Dedekind später der Idealtheorie in Unterkörpern zugrunde gelegt hat (XXIV); dort erwähnt er auch den Zusammenhang mit der gegenseitigen Reduktion.

Noether.

LXII.

Ähnliche (deutliche) Abbildung und ähnliche Systeme.
1887. 7. 11.

Satz. Ist S ähnlich in sich selbst abgebildet, ist also das Bild $\varphi(S) = S' 3 S$, ist ferner $S' 3 T 3 S$, so ist auch T dem S ähnlich.

Beweis. Klar im Falle $T = S$. Im entgegengesetzten Fall, sei U das System aller der Elemente von S, die nicht in T enthalten sind, und es sei U_0 die dieser Abbildung φ von S entsprechende Bildkette (§ 4) von U. Ist nun s irgend ein Element von S, so setze man

$$\psi(s) = \varphi(s) \text{ oder } = s,$$

je nachdem s in U_0 enthalten ist oder nicht. Dann ist ψ eine ähnliche Abbildung von S, und zwar ist $\psi(S) = T$. Hierzu ist zu zeigen

1. Ähnlichkeit der Abbildung ψ. — α) Wenn a und b verschieden und in U_0 enthalten sind, so sind $\psi(a) = \varphi(a)$ und $\psi(b) = \varphi(b)$ verschieden, weil φ eine ähnliche Abbildung ist. β) Wenn a in U_0, b nicht in U_0 enthalten, so sind $\psi(a) = \varphi(a)$ und $\psi(b) = b$ verschieden, weil U_0 Kette, $\varphi(U_0) 3 U_0$, also $\psi(a)$ in U_0, $\psi(b)$ nicht in U_0 enthalten. γ) Wenn a und b nicht in U_0 enthalten und verschieden, so sind $\psi(a) = a$, $\psi(b) = b$ verschieden.

2. $\psi(S) 3 T$. — Bezeichnet man mit V das System aller der Elemente von S, welche nicht in U_0 enthalten sind, so ist

$$S = \mathfrak{M}(U_0, V), \quad \psi(S) = \mathfrak{M}(\varphi(U_0), V).$$

Nun ist, weil $U_0 3 S$, auch $\varphi(U_0) 3 \varphi(S)$, und da $\varphi(S) 3 T$, so ist auch $\varphi(U_0) 3 T$; da außerdem $V 3 T$ {denn wäre ein Element v von V nicht in T enthalten, also in U, also (§ 4) auch in U_0, gegen die Defin. von V; besser vorauszuschicken}, so folgt (§ 1) $\psi(S) 3 T$.

3. $T \mathfrak{3} \psi(S)$. t irgend ein Element von T. — Ist t in V enthalten, so ist t {zufolge $\psi(S) = \mathfrak{M}(\varphi(V_0), V)$} auch in $\psi(S)$ enthalten. Ist aber t nicht in V, also in U_0 enthalten, so muß, weil (§ 4) $U_0 = \mathfrak{M}(U, \varphi(U_0))$ ist, nach Definition von U, t in $\varphi(U_0)$, also auch in $\psi(S)$ enthalten sein. W. Z. B. W.

Oder gleich klar $T = \mathfrak{M}(\varphi(U_0), V) = \psi(S)$.

Satz: Ist A einem Teile von B, und ist B einem Teile von A ähnlich, so sind auch A, B ähnlich.

Beweis. Deutliche Abbildungen φ, ψ; und

$$\varphi(A) \mathfrak{3} B, \quad \psi(B) \mathfrak{3} A$$

also

$$\psi\varphi(A) \mathfrak{3} \psi(B) \mathfrak{3} A;$$

da nun die Abbildung $\psi\varphi$ ebenfalls ähnlich ist, so ist $\psi\varphi(A)$ ähnlich A, also (nach vorigem Satze) auch $\psi(B)$ ähnlich A, und da $\psi(B)$ ähnlich B, so (einfachster Satz über Ähnlichkeit) ist auch A ähnlich B. W. Z. B. W.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Dieser nach der Datierung vom 11. Juli 1887 stammende Beweis des Cantor-Bernsteinschen Äquivalenzsatzes von 1897 ist genau derselbe, den Zermelo 1908 gegeben hat mit dem ausdrücklichen Hinweis, daß sein Beweis nur auf der Dedekindschen Kettentheorie beruhe (Grundlagen der Mengenlehre, Math. Ann. **65**, Nr. 25 und 27). In der Tat findet sich der wesentliche Hilfssatz, $T = \mathfrak{M}(\varphi(U_0), V)$, schon ohne Beweis in Satz 63, § 4, von „Was sind und was sollen die Zahlen?“ (LI dieser Ausgabe; die obigen Paragraphenverweisungen beziehen sich auf diese Schrift).

In einem Brief vom 29. August 1899 schreibt Dedekind über den Satz an Cantor: „Als der junge Herr Felix Bernstein mich Pfingsten 1897 in Harzburg besuchte, sprach er von dem Satze B. auf S. 7 der Übersetzung von Marotte und stutzte ein wenig, als ich meine Überzeugung aussprach, daß derselbe mit meinen Mitteln (Was sind und was sollen die Zahlen?) leicht zu beweisen sei; doch kam es zu keiner weiteren Unterhaltung über seinen oder meinen Beweis. Nach seiner Abreise setzte ich mich daran und konstruierte den hier beiliegenden Beweis des offenbar mit B. gleichwertigen Satzes C.“

Dieser Beweis stimmt mit dem vorliegenden sachlich überein; die Bezeichnung ist geändert, schließt sich nicht mehr so eng an „Was sind und was sollen die Zahlen?“ an. Offenbar hatte Dedekind vergessen, daß es sich um Rekonstruktion eines alten Beweises handelte.

Den ursprünglichen Beweis fand J. Cavaillès-Paris im Nachlaß*).

*) Zusatz bei der Korrektur: Der Beweis von 1899 ist unterdes erschienen in den Gesammelten Abhandlungen von Georg Cantor, Berlin, Springer (1932), S. 449.

F. Bernstein übermittelt noch die folgenden Bemerkungen:

„Der genannte Besuch war durch Cantor veranlaßt. Dieser hatte kurz zuvor die Paradoxie der Menge aller Ordnungszahlen gefunden, und zwar bei dem Versuche, zu beweisen, daß jede Menge wohlgeordnet werden könne — ein Beweis, den er etwa mit ähnlichen Überlegungen zu führen suchte, wie sie Zermelo dann später, nur unter Vermeidung der inkonsistenten Mengen, in seinem ersten Beweise der Wohlordnung verwandt hat. Cantor bemerkte sehr wohl, daß die gefundene Paradoxie auch auf die Menge aller Dinge Anwendung findet. Diese hatte Dedekind in seiner Schrift ‚Was sind und was sollen die Zahlen?‘ zum Beweise der Existenz unendlicher Mengen angewandt, und zwar so, daß nach dem Aufbau seiner Schrift die Definition der Zahlen von der widerspruchsfreien Existenz dieser Mengen abhängt. Cantor hatte ihn wohl schon brieflich um eine Stellungnahme gebeten und beauftragte mich nun, da eine solche, vermutlich infolge der schweren Erkrankung Dedekinds im Winter 1896/97, ausblieb, dieselbe in mündlicher Verhandlung herbeizuführen.

Dedekind war jedoch zu einer abschließenden Stellungnahme damals nicht gelangt und äußerte mir gegenüber, daß er in seinen Überlegungen fast zu Zweifeln daran gelangt sei, ob das menschliche Denken ein vollkommen rationales sei.

Von besonderem Interesse dürfte folgende Episode sein: Dedekind äußerte, hinsichtlich des Begriffes der Menge: er stelle sich eine Menge vor wie einen geschlossenen Sack, der ganz bestimmte Dinge enthalte, die man aber nicht sähe, und von denen man nichts wisse, außer daß sie vorhanden und bestimmt seien. Einige Zeit später gab Cantor seine Vorstellung einer Menge zu erkennen: Er richtete seine kolossale Figur hoch auf, beschrieb mit erhobenem Arm eine großartige Geste und sagte mit einem ins Unbestimmte gerichteten Blick: ‚Eine Menge stelle ich mir vor wie einen Abgrund.‘“

Noether.

LXIII.

Zweite Definition (1889. 3. 9) des Endlichen und Unendlichen.

Zuerst veröffentlicht in der zweiten Auflage (1893) der Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“ Seite XVII, in der Form:

Ein System S heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden läßt, daß kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Fall heißt S ein unendliches System.

Verfolgung dieser Definition eines endlichen Systems S ohne Benutzung der natürlichen Zahlen. Es sei φ eine Abbildung von S in sich selbst, durch welche kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird. — Kleine lateinische Buchstaben $a, b \ldots z$ bedeuten immer Elemente von S, große lateinische Buchstaben A, $B \ldots Z$ bedeuten Teile von S; die durch φ erzeugten Bilder von a, A werden resp. mit a', A' bezeichnet. Daß A Teil von B ist, wird durch $A \mathrel{3} B$ ausgedrückt. Das aus den Elementen $a, b, c \ldots$ bestehende System wird mit $[a, b, c \ldots]$ bezeichnet. Es ist also

(1) $$S' \mathrel{3} S$$

und

(2) $$\text{aus } A' \mathrel{3} A \text{ folgt } A = S.$$

1. Satz: $S' = S$. — Jedes Element von S ist Bild von (mindestens) einem Element r von S. Denn aus (1) folgt $(S')' \mathrel{3} S'$, also nach (2) unser Satz.

Jedes aus einem einzigen Element s bestehende System $[s]$ ist endlich, weil es keinen echten Teil besitzt und durch die identische Abbildung in sich selbst abgebildet wird. Dieser Fall wird im folgenden ausgeschlossen, S bedeutet ein endliches System, das nicht aus einem einzigen Element besteht.

2. Satz: Jedes Element s ist verschieden von seinem Bilde s', in Zeichen: $s \neq s'$. — Denn wäre $s = s'$, so wäre $[s]' = [s'] = [s] \mathrel{3} [s]$, also nach (2) auch $[s] = S$ im Widerspruch zu unserer Annahme über S.

3. Definition. Ist s ein bestimmtes Element von S, so soll mit H_s jeder solche Teil von S bezeichnet werden, der den beiden folgenden Bedingungen genügt:

I. s ist Element von H_s, also $[s] \mathrel{3} H_s$, also auch
$$[s] + H_s = H_s.$$

II. Ist h ein von s verschiedenes Element von H_s, so ist auch h' Element von H_s; ist also $H \mathrel{3} H_s$, aber s nicht in H enthalten, so ist $H' \mathrel{3} H_s$.

4. Satz. S und $[s]$ sind spezielle Systeme H_s, und $[s]$ ist der Durchschnitt (die Gemeinheit) aller dem Elemente s entsprechenden Systeme H_s. — Offenbar.

5. Satz. H_s ist $= S$ oder echter Teil von S, je nachdem s' in H_s liegt oder nicht. — Denn wenn s' in H_s liegt, so folgt aus II in 3., daß $H'_s \mathrel{3} H_s$, also nach (2), daß $H_s = S$ ist; und umgekehrt, wenn $H_s = S$, so liegt auch s' in H_s.

6. Satz. Ist H_s echter Teil von S, so ist s' das einzige Element von H'_s, das außerhalb H_s liegt. — Denn jedes Element k von H'_s ist Bild h' von mindestens einem Element h in H_s; ist nun $k = h'$ verschieden von s', so ist auch h verschieden von s, und folglich (nach II in 3.) liegt $k = h'$ in H_s, während das Element s' von H'_s (nach 5.) außerhalb H_s liegt.

7. Satz. Jedes System H'_s ist ein System $H_{s'}$, d. h. (Definition 3.):

I'. s' ist Element von H'_s.

II'. Ist k ein von s' verschiedenes Element von H'_s, so liegt auch k' in H'_s.

Das Erste folgt daraus, daß s in H_s liegt, das Zweite daraus (Satz 6), daß k in H_s liegt.

8. Satz. Sind $A, B, C \ldots$ spezielle, demselben s entsprechende Systeme H_s, so ist auch ihr Durchschnitt H ein System H_s.

Denn zufolge 3. I. ist s gemeinsames Element von A, von B, von $C, \ldots$, also auch Element von H. Ist ferner h ein von s verschiedenes Element von H, so ist (zufolge 3. II.) das Bild h' Element von A, von B, von $C, \ldots$, also auch von H. Mithin erfüllt H die beiden für jedes H_s charakteristischen Bedingungen I, II in 3.

9. Definition. Sind a, b bestimmte Elemente von S, so soll das Symbol ab den Durchschnitt aller derjenigen Systeme H_b bedeuten (Strecke ab), welche (wie z. B. S) das Element a enthalten.

10. Satz. a ist Element von ab, d. h. $[a] \, 3 \, ab$. — Denn ab ist der Durchschnitt von lauter solchen Systemen H_b, in denen a liegt. — (a Anfang von ab.)

11. Satz. ab ist ein System H_b, d. h. $[b] \, 3 \, ab$, und wenn s ein von b verschiedenes Element von ab, so ist $[s'] \, 3 \, ab$. — Dies folgt aus 8. — Also b Element (Ende) von ab. Ist $H \, 3 \, ab$, aber b nicht in H enthalten, so ist $H' \, 3 \, ab$.

12. Satz. Aus $[a] \, 3 \, H_b$ folgt $ab \, 3 \, H_b$. — Unmittelbare Folge von 9.

13. Satz. $aa = [a]$. — Dies folgt aus 4., weil aa der Durchschnitt aller H_a ist, die ja alle das Element a enthalten (nach 3. I.).

14. Satz. Ist b' Element von ab, so ist $ab = S$. — Dies folgt aus 11 und 5.

15. Satz. $b'b = S$. — Dies folgt aus 14 und 10.

16. Satz. Ist c Element von ab, so ist $cb \, 3 \, ab$. — Dies folgt aus 12, denn ab ist ein H_b (nach 11), welches das Element c enthält.

17. Satz. Bedeutet $A + B$ das aus A, B zusammengesetzte System, so ist

$$a'b + b'a = S.$$

Denn wenn s Element von $a'b$, so ist s' in $b'a$ oder $a'b$ enthalten, je nachdem $s = b$ oder verschieden von b (zufolge 10 oder 11 und 3. II), und ebenso, wenn s Element von $b'a$, so ist s' in $a'b$ oder $b'a$ enthalten; also ist $(a'b + b'a)' \, 3 \, a'b + b'a$; hieraus folgt der Satz nach (2).

18. Satz. Ist a verschieden von b, so ist $ab = [a] + a'b$. — Denn da a ein von b verschiedenes Element von ab ist, so ist a' Element von ab (10, 11), und folglich (16) ist $a'b \, 3 \, ab$; da ferner (10) auch $[a] \, 3 \, ab$, mithin

$$[a] + a'b \, 3 \, ab.$$

Ferner: jedes von b verschiedene Element s von $[a] + a'b$ ist entweder $= a$ oder ein von b verschiedenes Element von $a'b$, in beiden Fällen ist s' (nach 10, 11) Element von $a'b$, also auch von $[a] + a'b$, und da (11) auch $[b] \, 3 \, [a] + a'b$, so ist $[a] + a'b$ ein System H_b; da endlich auch $[a] \, 3 \, [a] + a'b$, so ist (12) auch

$$ab \, 3 \, [a] + a'b.$$

Aus der Vergleichung beider Resultate folgt der Satz.

19. Satz. Sind a, b verschiedene Elemente von S, so liegt a außerhalb $a'b$, und b liegt außerhalb $b'a$.

Beweis. Nimmt man nämlich das Gegenteil an, es gebe ein von b verschiedenes Element a, das in $a'b$ liegt, und bezeichnet mit A das System aller solcher Elemente a, so ergibt sich folgendes. Setzt man $a' = s$, so liegt a in sb, und da a verschieden von b ist, also (nach 13) nicht in bb liegt, so ist s verschieden von b, und hieraus folgt (nach 18), daß $sb = [s] + s'b$ ist. Da ferner a (nach 2) verschieden von s ist und in sb liegt, so muß a in $s'b$ liegen, und hieraus folgt wieder (nach 1), daß auch s (als Bild a') in $s'b$ liegt. Mithin ist das Bild a' eines jeden Elementes a von A ebenfalls in A enthalten, also $A' \, 3 \, A$. Da aber hieraus $A = S$ folgen würde, während doch A das Element b nicht enthält, so ist unsere Annahme unzulässig, also der Satz wahr, w. z. b. w. Der zweite Teil folgt durch Vertauschung von a mit b.

20. Satz. Sind a, b verschieden, so haben die Strecken $a'b$, $b'a$ kein gemeinsames Element.

Beweis. Nimmt man nämlich das Gegenteil an, es gebe ein gemeinsames Element m von $a'b$, $b'a$, so folgt aus dem vorhergehenden Satz 19, daß m verschieden von b und von a ist; mithin muß (nach 11) das Bild m' ebenfalls gemeinsames Element von $a'b$ und $b'a$ sein; bezeichnet man daher mit M das System aller solcher Elemente m, so ist $M' \, 3 \, M$, also $M = S$. Dies ist aber unmöglich, weil a, b Elemente von S, aber nicht Elemente von M sind. Also ist unser Satz wahr.

21. Satz. Sind a, b verschieden, so sind auch die Bilder a', b' verschieden.

Beweis. Denn sonst hätten die Strecken $a'b$, $b'a$ ein gemeinsames Element $a' = b'$, weil a' (nach 10) Element von $a'b$ und b' Element von $b'a$ ist.

22. Satz. Aus $cb = S$ folgt $c = b'$.

Beweis. Es gibt (nach 1 und 21) in S ein und nur ein Element a, welches der Bedingung $a' = c$ genügt, und es ist also $a'b = S$, mithin $[a] \, 3 \, a'b$; es muß daher (19) $a = b$, also $c = b'$ sein, w. z. b. w.

23. Satz. Sind a, b verschieden, so ist jedes Element von S in einer und nur einer der Strecken $a'b$, $b'a$ enthalten. — Dies folgt aus 17 und 20.

24. Satz. Sind a, b, c verschieden, so haben die Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$ kein gemeinsames Element, und dasselbe gilt von den Strecken $a'c$, $b'a$, $c'b$.

Beweis. Denn die gegenteilige Annahme, es gebe ein den Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$ gemeinsames Element m, führt zu einem Widerspruch. Es sei M das System aller solcher Elemente. Da (nach 19) a nicht in $a'b$, b nicht in $b'c$, c nicht in $c'a$ liegt, so ist m verschieden von c, a, b, und folglich (11) ist m' ebenfalls gemeinsames Element von $b'c$, $c'a$, $a'b$, also Element von M; mithin ist $M' \mathfrak{3} M$, also $M = S$. Dies ist aber unmöglich, weil M keins der Elemente a, b, c enthält. Also ist unser Satz wahr. — Der zweite Teil ergibt sich aus dem ersten, wenn man a mit b vertauscht, wodurch die Annahme nicht geändert wird. —

Zusatz. Setzt man (wie auch in dem folgenden 25):

$$A = c'b,\ B = a'c,\ C = b'a;\ A_1 = b'c,\ B_1 = c'a,\ C_1 = a'b,$$

so ist $A - B - C = 0$*) (leer) und $A_1 - B_1 - C_1 = 0$ (leer) und (nach 17, 20) ist

$$S = A + A_1 = B + B_1 = C + C_1;$$
$$0 = A - A_1 = B - B_1 = C - C_1.$$

Dies gilt auch dann (nach 20), wenn von den Elementen a, b, c wenigstens zwei verschieden sind.

25. Satz. Sind a, b, c verschieden, so tritt einer und nur einer der beiden folgenden Fälle ein: Entweder ist

$$b'c = b'a + a'c,\ c'a = c'b + b'a,\ a'b = a'c + c'b$$
$$c'b = c'a - a'b,\ a'c = a'b - b'c,\ b'a = b'c - c'a$$

und jedes Element von S liegt in einer, aber nur einer der Strecken $c'b$, $a'c$, $b'a$; oder es ist

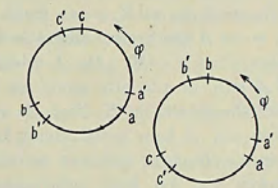
$$c'b = c'a + a'b,\ a'c = a'b + b'c,\ b'a = b'c + c'a$$
$$b'c = b'a - a'c,\ c'a = c'b - b'a,\ a'b = a'c - c'b$$

und jedes Element von S liegt in einer, aber nur einer der Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$.

Beweis. Zufolge 23 liegt c entweder in $a'b$ oder in $b'a$. Wir betrachten nur den ersten Fall, weil aus ihm der zweite durch Vertauschung von a mit b hervorgeht. Da c in $a'b$ liegt und von b

*) [Dabei bedeutet das Zeichen — den Durchschnitt.]

verschieden ist, so liegt (nach 11) auch c' in $a'b$, und folglich (16) ist $c'b \mathfrak{3} a'b$; hieraus folgt (19), daß $c'b$ mit $b'a$ kein gemeinsames Element hat; nun ist (17) $a'b + b'a = b'c + c'b$, mithin $b'a \mathfrak{3} b'c$, und folglich (11) liegt a in $b'c$. Aus der Annahme, daß c in $a'b$ liegt, hat sich also ergeben: $c'b \mathfrak{3} a'b$, $b'a \mathfrak{3} b'c$, a liegt in $b'c$. Auf dieselbe Weise ergeben sich aus dieser letzten Folgerung, wenn man c, a, b in der Annahme resp. durch a, b, c ersetzt, wieder die Folgerungen $a'c \mathfrak{3} b'c$, $c'b \mathfrak{3} c'a$, b liegt in $c'a$; und hieraus folgt abermals $b'a \mathfrak{3} c'a$, $a'c \mathfrak{3} a'b$ (und die erste Annahme: c liegt in $a'b$). Es



ist also: $c'b \mathfrak{3} a'b$, $b'a \mathfrak{3} b'c$, $a'c \mathfrak{3} b'c$, $c'b \mathfrak{3} c'a$, $b'a \mathfrak{3} c'a$, $a'c \mathfrak{3} a'b$, also auch $b'a + a'c \mathfrak{3} b'c$, $c'b + b'a \mathfrak{3} c'a$, $a'c + c'b \mathfrak{3} a'b$. Läge nun z. B. ein Element von $b'c$ weder in $b'a$, noch in $a'c$, so wäre es (nach 23) gemeinsames Element von $b'c$, $a'b$, $c'a$, was (nach 24) unmöglich ist; mithin ist $b'c \mathfrak{3} b'a + a'c$, also auch $b'c = b'a + a'c$, und ebenso folgt $c'a = c'b + b'a$, $a'b = a'c + c'b$. Hätten nun z. B. $b'a$, $a'c$ ein gemeinsames Element, so wäre dasselbe auch gemeinsames Element von $b'c$, $c'a$, $a'b$, was (nach 24) nicht der Fall ist. Aus $S = b'c + c'b$ folgt endlich $S = b'a + a'c + c'b$, womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

Zusatz. Es kann nie gleichzeitig $[a] \mathfrak{3} cb$ und $[b] \mathfrak{3} ca$ sein; weil (nach 18) dann auch gleichzeitig $[a] \mathfrak{3} c'b$ und $[b] \mathfrak{3} c'a$ sein müßte, was unmöglich.

26. Satz. Aus $ab = cb$ folgt $a = c$, und wenn $ab = cd$ ein echter Teil von S ist, so ist $a = c$, $b = d$.

Dies folgt schon aus früheren Sätzen. Da (10) c in cb, also auch in ab liegt, so muß, falls $a = b$, also $ab = [a]$ ist, auch $c = a$ sein. Ist aber a verschieden von b, so ist (18) $ab = [a]$

$+ a'b$, und (19) $a'b$ ist echter Teil von ab; nimmt man an, es sei c verschieden von a, so muß c in $a'b$ liegen, also ist (16) $cb \mathfrak{3} a'b$, also cb echter Teil von ab; da aber $cb = ab$ ist, so ist diese Annahme unzulässig, mithin immer $c = a$, w. z. b. w. Ist ferner $ab = cd$ ein echter Teil von S, so muß $b = d$ sein; ist nämlich b verschieden von d, so muß (11) auch b' in cd, also auch in ab liegen; dann wäre aber (14) $ab = S$ gegen die Voraussetzung, also ist $b = d$, mithin $ab = cb$, also auch $a = c$, w. z. b. w.

27. Satz. Jedes (in 3. erklärte) System H_s ist eine Strecke $a's$ mit dem Ende s und ihr Anfang a' ist völlig bestimmt.

Beweis. Ist $H_s = S$, so ist $H_s = s's$ (nach 15). Ist aber H_s *echter* Teil von S, so sei A das System aller außerhalb H_s liegenden Elemente von S, also $S = A + H_s$. Da A echter Teil von S ist, so kann nicht $A' \mathfrak{3} A$ sein, es gibt also gewiß ein Element a in A, dessen Bild a' außerhalb A, also in H_s liegt; da (nach 12) folglich $a's \mathfrak{3} H_s$ ist, so haben $a's$, A kein gemeinsames Element. Da a in A, s in H_s (sogar in $a's$) liegt, so sind a, s verschieden, also haben (nach 20) die Strecken $a's$, $s'a$ kein gemeinsames Element, und (nach 17) ist $a's + s'a = S = H_s + A$, mithin $A \mathfrak{3} s'a$. Nimmt man nun an, es sei $a's$ ein *echter* Teil von H_s, und bezeichnet mit H das System aller derjenigen Elemente von H_s, welche außerhalb $a's$, also in $s'a$, so ist $H_s = H + a's$, und $s'a = H + A$, also ist $H = H_s - s'a$ der Durchschnitt der Systeme H_s, $s'a$. Da nun weder s, noch a in H liegt, so folgt aus $H \mathfrak{3} H_s$ und $H \mathfrak{3} s'a$ (nach 3 und 11), daß auch $H' \mathfrak{3} H_s$ und $H' \mathfrak{3} s'a$, also auch $H' \mathfrak{3} H$, mithin $H = S$ ist. Dies ist aber unmöglich, weil s (und ebenso a) außerhalb H liegt. Mithin ist gewiß $H_s = a's$, und $A = s'a$, w. z. b. w.

28. Satz. Der Durchschnitt von solchen Strecken as, bs ..., welche dasselbe Ende s haben, ist selbst eine solche Strecke hs, und ihr Anfang h ist vollständig bestimmt.

Denn jede solche Strecke ist (nach 11) ein System H_s, und (nach 8) gilt dasselbe von ihrem Durchschnitt, woraus der Satz (nach 27) folgt.

Zusatz zu 28. Der Durchschnitt der Strecken as, bs, cs ... ist selbst eine dieser Strecken. — Zum Beweise schicke man voraus den

Hülfssatz. Ist hs *echter* Teil von as, und k das Element, dessen Bild $k' = h$ ist, so ist hs auch echter Teil von ks, und zugleich ist $ks \mathfrak{3} as$.

Beweis. Wäre $k = s$, so wäre $hs = s's = S$, während doch hs echter Teil von as, also auch von S ist. Da also k verschieden von s ist, so ist (18) $ks = [k] + hs$, und (nach 19) k *nicht* in hs enthalten, also hs echter Teil von ks. Da hs echter Teil von as ist, so sei $as = M + hs$, wo M das System aller Elemente m von as, die außerhalb hs liegen und also auch von s verschieden sind; daraus folgt $M' \mathfrak{3} as$, und da offenbar M' nicht Teil von M sein kann (weil M nicht $= S$ ist), so muß es in M ein Element m geben, dessen Bild m' außerhalb M, also in hs liegt, woraus $m's \mathfrak{3} hs$ folgt*).

29. Satz. Ist T ein Teil von S, und s ein Element von S, so gibt es in S immer ein und nur ein zugehöriges Element s_1, welches die beiden folgenden Eigenschaften hat:

1. Wenn a der Bedingung $T \mathfrak{3} as$ genügt, so ist $s_1 s \mathfrak{3} as$
2. $T \mathfrak{3} s_1 s$

und hieraus folgen die beiden Eigenschaften

3. s_1 liegt in T
4. Die Strecke ss_1 enthält kein von s und s_1 verschiedenes Element von T.

Beweis. Da $s's = S$, also $T \mathfrak{3} s's$ ist (15), so gibt es mindestens ein Element a, das der Bedingung $T \mathfrak{3} as$ genügt. Ist A das System aller dieser Elemente a, so ist (nach 28) der Durchschnitt aller ihnen entsprechenden Strecken eine Strecke $s_1 s$, wo s_1 ein völlig bestimmtes Element von S. Nach dem Begriffe eines Durchschnitts hat s_1 die Eigenschaft 1., aber auch die Eigenschaft 2., weil T ein gemeinsamer Teil aller as, mithin auch Teil ihres Durchschnitts $s_1 s$ ist. Ist $s_1 = s$, also $s_1 s = ss = [s]$, so folgt aus 2., daß T aus dem einzigen Elemente s besteht; und umgekehrt, wenn s in T liegt und das einzige Element von T ist, so ist $T = [s] = ss$, also nach 1. auch $s_1 s \mathfrak{3} ss$, mithin $s_1 = s$; in diesem Falle hat daher s_1 die Eigenschaft 3. und offenbar auch die Eigenschaft 4. Ist aber s_1 verschieden von s, so ist (nach 18) $s_1 s = [s_1] + (s_1)'s$. Nimmt man nun an, s_1 liege außerhalb T, es sei also jedes Element von T verschieden von s_1, so folgt aus 2. auch $T \mathfrak{3} (s_1)'s$, und hieraus nach 1. auch $s_1 s \mathfrak{3} (s_1)'s$, was aber unmöglich ist, weil das (nach 10) in $s_1 s$ liegende Element s_1 (nach 19) außerhalb $(s_1)'s$ liegt; mithin

*) [Der Beweis ist offenbar unvollständig. Ein Beweis des Hilfssatzes ergibt sich nach Mitteilung von J. Cavaillès direkt aus 25, indem man die dortigen a, b, c durch a, k, s ersetzt. Der Zusatz folgt aus 28 und dem Hilfssatz. E. N.]

ist unsere Annahme unzulässig, d. h. s_1 hat die Eigenschaft 3. Wir betrachten nun die Strecke $s s_1$; besitzt sie ein von s und s_1 verschiedenes Element u, so ist auch s verschieden von s_1 (weil sonst $s s_1 = [s]$, also auch $u = s$ wäre), und (nach 18) $s s_1 = [s] + s' s_1$; mithin liegt u in $s' s_1$, also (nach 19) außerhalb $(s_1)' s$, und da (wie oben) $s_1 s = [s_1] + (s_1)' s$, und u auch von s_1 verschieden ist, so liegt u auch außerhalb $s_1 s$, also zufolge 2. auch außerhalb T, d. h. s_1 hat auch die Eigenschaft 4.

30. Abbildung von S in T. Durch (29) ist eine Abbildung ψ von S in T hergestellt, welche dadurch definiert wird, daß jedes Element s von S durch ψ in das dort erklärte, (nach 3.) in T liegende Element s_1 übergeht. Ist dann A irgend ein Teil von S, so soll A_1 das zugehörige Bild von A (d. h. das System der Bilder a_1 aller Elemente a von A) bedeuten. Es ist also $S_1 \mathfrak{3}\, T$, also auch $T_1 \mathfrak{3}\, T$, d. h. T wird durch ψ in sich selbst abgebildet.

31. Satz. Diese Abbildung ψ von T in sich selbst ist eine ähnliche, d. h.: sind a, b verschiedene Elemente von T, so sind auch deren Bilder a_1, b_1 verschieden.

Beweis. Nach 29 ist $T \mathfrak{3}\, a_1 a$ und $T \mathfrak{3}\, b_1 b$. Da nun a, b Elemente von T sind, so ist auch $[a] \mathfrak{3}\, b_1 b$, $[b] \mathfrak{3}\, a_1 a$. Wäre nun, obgleich a, b verschieden sind, doch $a_1 = b_1 = c$, so wäre $[a] \mathfrak{3}\, c b$, $[b] \mathfrak{3}\, c a$; da aber c von a und b verschieden ist (weil sonst auch $a = b$ wäre), so ist dies (nach Zusatz zu 25) unmöglich. Mithin sind a_1, b_1 verschieden, w. z. b. w.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Die hier gegebene Definition des Endlichen ist chronologisch die erste, die die Ableitung aller Eigenschaften ohne Heranziehung des Auswahlaxioms ermöglicht — eine Tatsache, die Dedekind wohl noch nicht bewußt war. Er selbst zieht nur die ersten Folgerungen; auf diesem Weg läßt sich aus seinem letzten Satz noch folgern, daß jede Untermenge einer endlichen Menge endlich ist, und es läßt sich das Prinzip der vollständigen Induktion beweisen und damit zu der ursprünglichen Dedekindschen Definition übergehen (vgl. eine demnächst, Fund. Math. **19**, erscheinende Note von J. Cavaillès).

Einen vergleichenden Überblick über die verschiedenen Definitionen des Endlichen gibt A. Tarski (Sur les ensembles finis, Fund. Math. **6**), dessen eigene Definition so lautet: Eine Menge heißt endlich, wenn in jedem System von Untermengen mindestens eine im System minimale enthalten ist. Gleichbedeutend mit dieser Minimalbedingung — durch Übergang zur Komplementärmenge — ist die entsprechende Maximalbedingung; aus beiden folgen alle Eigenschaften der end-

lichen Mengen ohne Heranziehung des Auswahlpostulats. Daß die obige Definition von Dedekind mit der Minimalbedingung äquivalent ist, folgert Tarski aus der auch bei Dedekind in einer anderen Fassung auftretenden Relation: $a b' \mathfrak{3}\, a b + [b']$. Insbesondere gelangt Tarski so von der obigen zu der ursprünglichen Dedekindschen Definition, während der umgekehrte Übergang das Auswahlpostulat erfordert.

Dedekind glaubte — Vorwort zur 2. Auflage von „Was sind und was sollen die Zahlen?" —, daß der Nachweis der Übereinstimmung der Definitionen die volle dort entwickelte Theorie erfordere. Wie er sich den Übergang im einzelnen gedacht hatte, zeigt die folgende Stelle aus einem Brief an H. Weber:

„Die kürzeste Charakterisierung des Endlichen und Unendlichen ist, wie ich glaube, diejenige, welche ich am 9. März 1889 gefunden und in dem Vorwort (S. XI) zur zweiten Auflage (1893) der Schrift ‚Was sind und was sollen die Zahlen?' mitgeteilt habe. Ich spreche sie so aus: ‚Ein System S heißt endlich, wenn es eine Abbildung von S in sich selbst gibt, durch welche kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Falle heißt S ein unendliches System.'

Nimmt man aber an, daß man die natürliche Zahlenreihe und ihre Gesetze schon vollständig kennt, und ersetzt man im vorstehenden das Wort ‚heißt' durch das Wort ‚ist', so verwandelt sich diese Definition in einen Satz, der sich so beweisen läßt:

Es sei φ eine Abbildung eines Systems S in sich selbst, durch welche kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird. Das Bild eines Elementes a oder eines Teiles A von S bezeichne ich mit $a\varphi$ oder $A\varphi$ (viel natürlicher als $\varphi(a)$ oder $\varphi(A)$). Ist a irgendein Element von S, so sind auch alle Bilder

$$a\varphi,\ a\varphi^2 = (a\varphi)\varphi \ldots,\quad a\varphi^{n+1} = (a\varphi^n)\varphi \ldots$$

Elemente von S, also ist auch das System A aller dieser Bilder ein Teil von S, und da $A\varphi$ das System aller Bilder

$$(a\varphi)\varphi = a\varphi^2, \qquad (a\varphi^2)\varphi = a\varphi^3,$$

also ein Teil von A ist, so wird A durch φ in sich selbst abgebildet; und folglich ist $A = S$. Mithin ist a auch Element von A, es gibt also eine kleinste natürliche Zahl n, die der Bedingung

$$a\varphi^n = a$$

genügt. Dann ist S das System der n Elemente

$$a\varphi,\ a\varphi^2 \ldots a\varphi^n$$

und diese sind voneinander verschieden. Denn zufolge der Definition von n ist das letzte Element verschieden von allen vorhergehenden; wäre ferner $1 \leqq r < s < n$ und

$$a\varphi^r = a\varphi^s,$$

so wäre

$$(a\varphi^r)\varphi^{n-s} = (a\varphi^s)\varphi^{n-s},$$

also

$$a\varphi^{r+n-s} = a\varphi^n = a;$$

obgleich $1 < r + n - s < n$. Daß endlich S keine anderen als diese n Elemente enthält, folgt aus $a\varphi^{m+n} = a\varphi^m$. Also ist wirklich S ein endliches System (im üblichen Sinne), und zugleich ergibt sich, daß φ eine zyklische Permutation der n Elemente von S, also auch eine **ähnliche** (d. h. eindeutig umkehrbare) Abbildung ist.

Umgekehrt, besteht ein (im üblichen Sinne) endliches System S aus n verschiedenen Elementen

$$a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$$

und definiert man eine Abbildung φ von S durch

$$a_n \varphi = a_1, \; a_r \varphi = a_{r+1}$$

für $1 \leqslant r < n$, so ist $S' = S$, also φ eine Abbildung von S in sich selbst, und man zeigt leicht, daß kein **echter** Teil von S in sich selbst abgebildet wird. Denn wenn ein Teil A von S durch φ in sich selbst abgebildet wird und ein Element a enthält, so muß A auch alle Elemente $a\varphi$, $a\varphi^2$, $a\varphi^3$, ..., also alle Elemente von S enthalten, mithin $= S$ sein. W. z. b. w."

Noether.

LXIV.

1891. 7. 22. Herrn Dr. H. Minkowski, Privatdoc. an d. Univ. Bonn*).

... Erst in den letzten Wochen habe ich Zeit gefunden mich eingehend mit dem höchst wichtigen Satze zu beschäftigen, welchen Sie auf der ersten Seite Ihres an Herrn **Hermite** gerichteten Briefes aussprechen. Der Beweis, den ich hierbei für diesen Satz gefunden habe, stimmt vermuthlich gänzlich mit dem Ihrigen überein. Er beruht wesentlich darauf, daß die Function

$$\varphi(x, y \ldots) = \left\{\text{abs.}\, \xi^p + \text{abs.}\, \eta^p + \cdots\right\}^{\frac{1}{p}}$$

die Eigenschaft

$$\varphi(x' - x'', y' - y'' \ldots) \leqq \varphi(x', y' \ldots) + \varphi(x'', y'' \ldots)$$

hat, und daß durch jede vorgeschriebene endliche obere Grenze von $\varphi(x, y \ldots)$ auch alle Variabelen $x, y \ldots$ in endliche Grenzen eingeschlossen werden; bedeutet M den Minimumwerth, welchen $\varphi(x, y \ldots)$ für irgend welche ganze rationale Zahlen $x, y \ldots$ erreichen kann, die nicht alle verschwinden, so folgt hieraus leicht, daß das über das Gebiet $\varphi(x, y \ldots) < \frac{1}{2} M$ erstreckte Integral $\int\int \ldots \partial x \partial y \ldots \leqq 1$ sein muß, und die Ermittelung des Integrals giebt Ihren Satz. ...

Beweise zu meinem Briefe (1891. 7. 22) an H. Minkowski.

Nennt man jede Folge $\mathfrak{p}$ von n bestimmten reellen Werten $x, y, z \ldots$ einen **Punkt**, und jene Werte die **Koordinaten** von $\mathfrak{p}$, bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{p}' \pm \mathfrak{p}''$ die beiden Punkte, deren Koordinaten aus denen von $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ durch Addition und Subtraktion

*) [Die Briefe an **Minkowski** und **Lipschitz** sind ebenso wie die verschiedenen in den Erläuterungen zitierten Briefstellen eigenhändigen Abschriften von **Dedekind** entnommen. E. N.]

gebildet sind, so wollen wir eine reelle Punkt-Funktion $\varphi(\mathfrak{p})$ betrachten, welche durchweg der Bedingung

$$(1) \qquad \varphi(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}'') \leqq \varphi(\mathfrak{p}') + \varphi(\mathfrak{p}'')$$

genügt und außerdem die Eigenschaft (2) besitzt, daß durch jede vorgeschriebene endliche obere Grenze von $\varphi(\mathfrak{p})$ auch alle Koordinaten von $\mathfrak{p}$ in endliche Grenzen eingeschlossen werden.

Setzt man in (1) für $\mathfrak{p}''$ den Nullpunkt 0, dessen Koordinaten alle verschwinden, so folgt $\varphi(0) \geqq 0$, und wenn man für $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ einen und denselben beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ setzt, so folgt

$$\varphi(\mathfrak{p}) \geqq \tfrac{1}{2}\varphi(0) \geqq 0.$$

Aus (2) ergibt sich folgendes. Versteht man unter einem Gitterpunkt jeden Punkt $\mathfrak{g}$, dessen Koordinaten ganze rationale Zahlen sind, und wählt man nach Belieben einen von Null verschiedenen Gitterpunkt $\mathfrak{g}'$, so sind zufolge (2) die Koordinaten aller Punkte $\mathfrak{p}$, welche der Bedingung $\varphi(\mathfrak{p}) \leqq \varphi(\mathfrak{g}')$ genügen, in endliche Grenzen eingeschlossen, und folglich befindet sich unter diesen Punkten $\mathfrak{p}$ nur eine endliche Anzahl solcher Gitterpunkte $\mathfrak{g}''$, die von Null verschieden sind wie $\mathfrak{g}'$; bezeichnet man mit M den kleinsten der ihnen entsprechenden Werte $\varphi(\mathfrak{g}'')$, so ist offenbar M überhaupt der kleinste von allen Werten $\varphi(\mathfrak{g})$, die allen von Null verschiedenen Gitterpunkten $\mathfrak{g}$ entsprechen (ob $\varphi(0)$ ebenfalls $\geqq M$ ist oder nicht, möge dahingestellt bleiben).

Bedeutet nun $\mathfrak{A}$ das Gebiet aller derjenigen Punkte $\mathfrak{a}$, welche der Bedingung

$$\varphi(\mathfrak{a}) < \tfrac{1}{2}M$$

genügen, so besteht der in dem Briefe von mir ausgesprochene Satz darin, daß das über das Gebiet $\mathfrak{A}$ erstreckte n-fache Integral

$$A = \iint \ldots \partial x \, \partial y \ldots \leqq 1$$

ist (der Satz hat natürlich nur dann Wert, wenn das Gebiet $\mathfrak{A}$ existiert und ein von Null verschiedenes Integral A erzeugt).

Der Beweis beruht lediglich auf folgender Eigenschaft des Gebietes $\mathfrak{A}$: Bedeutet, wenn $\mathfrak{p}$ ein bestimmter Punkt ist, das Zeichen $\mathfrak{p} + \mathfrak{A}$ den Inbegriff aller Punkte $\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$, welche allen Punkten $\mathfrak{a}$ des Gebietes $\mathfrak{A}$ entsprechen, so haben, wenn $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ zwei verschiedene Gitterpunkte sind, die beiden Gebiete $\mathfrak{g}' + \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{g}'' + \mathfrak{A}$ keinen gemeinschaftlichen Punkt. Dies folgt unmittelbar aus (1); wäre nämlich $\mathfrak{g}' + \mathfrak{a}' = \mathfrak{g}'' + \mathfrak{a}''$, wo $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ Punkte in $\mathfrak{A}$ bedeuten, so wäre $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'' - \mathfrak{g}' = \mathfrak{a}' - \mathfrak{a}''$ ein von Null verschiedener Gitterpunkt, und da $\varphi(\mathfrak{a}')$ und $\varphi(\mathfrak{a}'') < \tfrac{1}{2}M$, so wäre zufolge (1)

$$\varphi(\mathfrak{g}) = \varphi(\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}'') \leqq \varphi(\mathfrak{a}') + \varphi(\mathfrak{a}'') < M,$$

was im Widerspruch mit der Definition von M steht.

Aus dieser Eigenschaft des Gebietes $\mathfrak{A}$ und daraus, daß zufolge (2) die Koordinaten aller Punkte $\mathfrak{a}$ absolut kleiner als eine endliche positive Konstante a sind, ergibt sich unser Satz auf folgende einfache Weise. Es sei k eine beliebige natürliche Zahl, so konstruieren wir für jeden der $(2k+1)^n$ Gitterpunkte $\mathfrak{g}$, deren Koordinaten absolut $\leqq k$ sind, das Gebiet $\mathfrak{g} + \mathfrak{A}$, dessen Inhalt das von $\mathfrak{g}$ unabhängige Integral A ist. Konstruiert man ferner das Gebiet $\mathfrak{P}$ aller derjenigen Punkte, deren Koordinaten absolut $\leqq k + a$ sind, und dessen Inhalt $= (2k + 2a)^n$ ist, so bildet die Gesamtheit jener Gebiete $\mathfrak{g} + \mathfrak{A}$, von denen je zwei keinen gemeinsamen Punkt haben, einen echten Teil von $\mathfrak{P}$, und folglich ist

$$(2k+1)^n A < (2k + 2a)^n, \quad A < \left(\frac{2k + 2a}{2k+1}\right)^n;$$

da A und a feste Größen sind, während k beliebig groß gewählt werden darf, so folgt $A \leqq 1$, w. z. b. w. ...

[Von hier an läuft der Beweis im wesentlichen wie bei Minkowski, Geometrie der Zahlen. Der im Vorstehenden wiedergegebene Satz ist aber allgemeiner als der bei Minkowski zugrunde liegende, da Mittelpunkts- und Homogenitätsvoraussetzung durch schwächere Voraussetzungen ersetzt sind. E. N.]

LXV.

Aus Briefen an R. Lipschitz.

Braunschweig, 29 April 1876.

Sie haben mir durch Ihren Brief eine sehr große und zugleich sehr unverhoffte Freude gemacht, da ich seit einigen Jahren so ziemlich die Hoffnung aufgegeben hatte, daß meine Darstellung und Auffassung einer allgemeinen Theorie der Ideale in jetziger Zeit noch irgend Jemand außer mir interessiren würde. Mit Ausnahme des Prof. H. Weber in Königsberg, der als Herausgeber der demnächst erscheinenden gesammelten Werke Riemann's in einen nahen Verkehr mit mir getreten ist und mir neulich, wohl durch diesen Umstand veranlaßt, seine Absicht zu erkennen gegeben hat, sich mit dieser Theorie zu beschäftigen, sind Sie der erste, der nicht blos ein Interesse an dem Gegenstande äußert, sondern dasselbe auch in so praktischer Weise bethätigt, daß ich daraus die Hoffnung schöpfe, nicht ganz vergeblich gearbeitet zu haben. Ich hatte geglaubt, daß die Aufnahme dieser Untersuchung in Dirichlet's Zahlentheorie das sicherste Mittel wäre, um einen größeren Kreis von Mathematikern für die Bearbeitung dieses Feldes zu gewinnen, allein ich habe mich nach und nach davon überzeugt, daß die Darstellung selbst wohl die Schuld an dem Mißlingen dieses Planes trägt. Ich muß vermuthen, daß die Darstellung durch übertriebene Kürze und Gedrängtheit die Leser abgeschreckt hat, und ich habe daher seit dem Herbst meine freie Zeit, die ich durch Niederlegung meines dreijährigen Directorats des hiesigen Polytechnikums gewonnen habe, dazu benutzt, eine ausführlichere Darstellung der Theorie der Ideale auszuarbeiten, mit welcher ich auch so weit gekommen bin, daß die eigentliche Grundlage (der Inhalt des § 163) in einer etwas verbesserten Form gewonnen ist. Die Änderung ist indessen keine wesentliche, und ich glaube auch, daß eine solche, wenigstens bei dem von mir eingeschlagenen Wege, gar nicht möglich ist; die Schwierigkeiten, die ich bei der

Herstellung dieser allgemeinen, ausnahmelosen Theorie vor sechs Jahren zu überwinden gehabt habe, finden nach meiner Überzeugung ihren innern Grund in dem Umstande, daß neben dieser Theorie, welche alle ganzen Zahlen eines beliebigen Körpers umfaßt, immer unendlich viele mit Ausnahmen behaftete Theorieen nebenher laufen, die sich immer nur auf einen Theil aller ganzen Zahlen (auf Ordnungen, derivirte Formen) beziehen. Und diese Schwierigkeit, durch welche die Beweisführung sehr verlängert wird, halte ich für ganz unvermeidlich. Leider! denn jeder Leser wird schon auf dem halben Wege glauben, dem Abschlusse der Beweisführung ganz nahe zu sein, und dann immer zu seinem Verdrusse bemerken, daß noch neue Hülfsmittel zugezogen werden müssen. Allerdings kommt dann endlich der Abschluß, aber der Weg ist weit.

Ich bitte Sie nun sehr um Entschuldigung, daß ich nicht schon längst Ihnen meinen Dank für Ihre mir überaus erfreuliche und werthvolle Theilnahme ausgesprochen habe; mein Zögern, das, wie ich fürchte, Ihnen auffällig und kaum erklärlich sein wird, hat theils seinen Grund in der großen Menge von Geschäften und Arbeiten, die ich gerade in dieser Zeit zu erledigen hatte, theils und vor Allem in meiner Unentschlossenheit über die Art, wie der von Ihnen geäußerte Gedanke sich wohl verwirklichen ließe; so ist es gekommen, daß ich schon mehrere Male begonnen habe Ihnen zu schreiben, dann aber durch neue Zweifel an der Ausführbarkeit meiner Vorschläge bewogen bin, sie noch zurückzuhalten. Nach nochmaliger reiflicher Überlegung erlaube ich mir nun, Ihnen meine Ansicht mitzutheilen, in der Hoffnung, daß ich durch meine Lässigkeit das Interesse, welches Sie an der Sache nehmen, nicht gänzlich verscherzt habe.

Die oben erwähnte, in diesem Winter begonnene, aber noch nicht vollendete Arbeit, welche ich entweder für das Borchardt'sche Journal oder für die Göttinger Abhandlungen bestimmt hatte, würde für den vorliegenden Zweck viel zu ausführlich sein; andererseits würde eine auszugsweise Darstellung in ähnlicher Weise, wie Sie eine solche von Ihren höchst interessanten Untersuchungen über die homogenen Differential-Ausdrücke für das Bulletin ausgearbeitet haben, mir schwerlich gelingen; Sie haben es in sehr glücklicher Weise erreicht, dem Leser ein übersichtliches Bild Ihrer Forschungen vorzuführen und in so verständlicher Weise, daß man allenfalls im Stande wäre, die Original-Abhandlungen danach wiederherzustellen. Bei meinem Gegenstande aber, bei der Ihnen ja so genau bekannten Natur der zahlentheoretischen Deduction, scheint mir die wirkliche Begründung durch vollständige Beweise unerläßlich zu sein; ohne diese würde die Mittheilung der Hauptresultate allein schwerlich in verständlicher Weise möglich sein, und jedenfalls würde sie kein Interesse erregen. Es ist auch nicht möglich, die Beweise etwa nur andeutungsweise mitzutheilen; ob der Beweis glückt oder nicht, das hängt meist an einem Haare. Obgleich damals das zu erreichende Ziel stets klar vor mir lag, so ist es mir doch erst nach wirklich unsäglichen Anstrengungen gelungen, Schritt für Schritt vorwärts zu kommen und endlich jede Lücke auszufüllen; ich hatte fortwährend das Gefühl, an einer Leiter zu hängen mit der Furcht, daß es mir nicht mehr gelingen würde, die folgende Sprosse zu abreichen, und wenn ich meine damalige Darstellung dieser Beweise nicht gedruckt oder geschrieben vor mir hätte, so würde es mir jetzt abermals eine große Mühe machen, alle Beweismittelchen, jedes am rechten Orte wieder so zusammenzufügen, daß das Ziel wirklich erreicht würde. Aus diesem Grunde glaube ich fest, daß nur eine in den Beweisen vollständige Darstellung einige Aussicht haben kann, den Leser für die Sache zu interessiren. Wenn die Herausgeber des Bulletin hierauf eingehen und mir sogar zugestehen wollen, daß ich einzelne Puncte etwas weiter ausführe, dagegen alles Überflüssige weglasse, so würde der Inhalt sich etwa so gestalten.

Von § 159 würde der Theil I beibehalten, II und III gänzlich gestrichen; § 160 beibehalten etwa mit Weglassung von Nros. 5 und 7; § 161 beibehalten, sogar noch etwas vervollständigt; § 162 wesentlich beibehalten; § 163 in veränderter, ausführlicherer Darstellung beibehalten; § 164 beibehalten.

Hiermit wäre ein gewisser Abschluß erreicht, mit welchem man sich wohl begnügen könnte, da die eigentliche Grundlage der Theorie dann gewonnen ist. Dies würde etwa 50 Druckseiten, vielleicht auch noch mehr geben. In Wahrheit habe ich meine Untersuchungen, von denen damals nur ein Theil veröffentlicht ist, sowohl im Allgemeinen als auch in ihrer Anwendung auf specielle Körper-Classen weiter fortgeführt, soviel es meine in den letzten Jahren sehr beschränkte Zeit gestattete; ein eigentliches Ende dieses Arbeitsfeldes ist gar nicht zu absehen. Würde mehr gewünscht, so könnte eine Fortsetzung geliefert werden, aber mir scheint die obige Abgrenzung vorläufig eine zweckmäßige, und man könnte der beabsichtigten Darstellung

mit Recht den Titel Éléments de la théorie des idéaux geben, wenn dieser Plural von idéal richtig ist. Ich würde übrigens nicht mehr im Stande sein, diese Darstellung selbst in französischer Sprache auszuarbeiten, da es mir seit meinem Weggang von Zürich an der erforderlichen Übung gefehlt hat.

Ich bitte Sie nun, hochgeehrter Herr College, meinen Vorschlag zu prüfen und, falls er Ihren Beifall findet, den Herausgebern des Bulletin mitzutheilen; sollten Sie aber von vornherein die Überzeugung haben, daß die von mir vorgeschlagene Darstellungsweise für die eigentlichen Zwecke des Bulletin ungeeignet ist, so bitte ich Sie, mir dies ohne Weiteres zu eröffnen; ich würde dann auf eine Darstellung in dem Bulletin, so leid es mir thun würde, verzichten müssen. Wie aber auch Ihr Urtheil hierüber ausfallen möge, seien Sie überzeugt, daß ich Ihnen von Herzen dankbar bin für die große Freude, die Sie mir durch Ihre freundliche Theilnahme bereitet haben; denn ich bin keineswegs unempfänglich für eine Anerkennung, die von so competenter Seite ausgeht. ...

Braunschweig, 30 Mai 1876.

Ihr Schreiben vom 4. d. M. habe ich mit großem Interesse gelesen, und ich sage Ihnen meinen besten Dank für die Theilnahme, die Sie meiner Ideal-Arbeit zu schenken fortfahren; ich bin aber fest überzeugt, daß Sie die Beziehungen zwischen einzelnen Theilen derselben und auch ihre Stellung zu den Untersuchungen anderer Mathematiker in etwas anderem Lichte sehen würden, wenn es mir vergönnt wäre, mich ausführlich darüber mit Ihnen mündlich zu unterhalten. Es ist mir unmöglich, in der Hauptsache den von Ihnen in Vorschlag gebrachten Plan zu befolgen, sowohl hinsichtlich der Anordnung, als dem Inhalte nach. Um hierüber keinen Zweifel übrig zu lassen und um noch nicht gänzlich auf die Ausführung der von Ihnen angeregten Publication verzichten zu müssen, habe ich mich zuletzt entschlossen, die beiliegende Einleitung zu verfassen, in welcher ich mich bemühe, den eigentlichen Gegenstand und denjenigen Kernpunct der Ideal-Theorie deutlich zu bezeichnen, auf dessen Darstellung ich mich durchaus beschränken muß, wenn diese nicht eine unpassende und gewiß unerwünschte Länge erhalten soll; selbst bei dieser Beschränkung fürchte ich schon zu lang zu werden. Der beiliegenden Einleitung würden drei Abschnitte folgen:

I. Hülfssätze aus der Theorie der Moduln (etwas genauere Ausführung von § 161 der Zahlentheorie von Dirichlet, mit dem Beweise des in der letzten Anmerkung daselbst angegebenen Satzes).

II. Der Keim der Theorie der Ideale (Erinnerung an die Lehre von der Theilbarkeit und deren Beweismethoden bei den rationalen und den Gauß'schen complexen Zahlen. Abweichendes Verhalten in dem Gebiete der Zahlen von der Form $x + y\sqrt{-5}$, an welchem einfachsten Beispiele die in der nachfolgenden Theorie auftretenden Hauptbegriffe ausführlich erörtert werden).

III. Theorie der ganzen algebraischen Zahlen (in der in der Einleitung angedeuteten Reihenfolge; eine lange Kette von Sätzen!).

Ich hoffe die Einleitung so geschrieben zu haben, daß aus ihr sich eine hinlängliche Rechtfertigung des vorstehenden Planes ergiebt, und es würde mich sehr freuen, wenn es mir gelänge, auch Ihre Zustimmung zu demselben zu gewinnen, da ich auf eine Änderung nicht eingehen könnte und dann ganz auf die Ausführung verzichten müßte. ...

1876. 6. 10.

... Ich bin weit davon entfernt, die Bemerkungen, welche Sie über meine „Einleitung" [XLVIII] machen, übel aufzunehmen; im Gegentheil bin ich sehr erfreut über die aufrichtige Mittheilung Ihrer Bedenken und über das Interesse an dem Gegenstande, welches sich in denselben deutlich ausspricht. Aber ich hoffe auch, daß Sie es nicht einem hartnäckigen Eigensinn zuschreiben werden, wenn ich nach einer durch zwanzig Jahre fortgesetzten Beschäftigung mit diesen Gedanken Ihre Bedenken nicht theile und mich auch nicht dazu entschließen kann, durch Abänderungen dieser Einleitung, in welcher ich jedes Wort erst nach der sorgfältigsten Überlegung niedergeschrieben habe, noch weitere Concessionen zu machen; denn es finden sich in derselben wirklich schon mehrere Concessionen. Mein Streben in der Zahlentheorie geht dahin, die Forschung nicht auf zufällige Darstellungsformen oder Ausdrücke sondern auf einfache Grundbegriffe zu stützen und hierdurch — wenn diese Vergleichung auch vielleicht anmaßend klingen mag — auf diesem Gebiete etwas Ähnliches zu erreichen,

wie Riemann auf dem Gebiete der Functionentheorie, wobei ich die beiläufige Bemerkung nicht unterdrücken kann, daß die Riemannschen Principien von den meisten Schriftstellern, z. B. auch in den neuesten Werken über elliptische Functionen, nach meiner Ansicht nicht in consequenter Weise zur Anwendung gebracht werden; fast immer wird die einfache Theorie verunziert durch unnöthige Einmischung der Darstellungsformen, welche doch eigentlich nur Resultat, nicht Hülfsmittel der Theorie sein sollten. In ähnlicher Weise verunziere ich in der Einleitung den Begriff eines endlichen Körpers Ω dadurch, daß ich eine Darstellungsform angebe, in welcher alle Zahlen des Körpers enthalten sind und welche ebenso gut durch unendlich viele andere Darstellungsformen ersetzt werden könnte, wenn statt der dortigen Zahl θ andere Zahlen desselben Körpers als Ausdrucksmittel genommen würden; es bedarf offenbar schon einiger Überlegung oder gar eines wenn auch leichten Beweises, um einzusehen, daß hierbei der gesammte Zahlen-Inhalt des Körpers durchaus unverändert bleibt. Principiell ist daher die in der Zahlentheorie § 159 [XLVII] gegebene Definition bei Weitem vorzuziehen „ein endlicher Körper ist ein solcher, der nur eine endliche Anzahl von Divisoren besitzt" oder auch die hiermit abermals äquivalente Definition: „ein endlicher Körper ist ein solcher Körper, welcher nur eine endliche Anzahl von einander unabhängiger Zahlen enthält". Aber ich habe diese Concession gemacht, um aus der allgemeinen Theorie der Körper möglichst wenig zu entlehnen und um an allgemein bekannte Dinge anzuknüpfen. ...

. . . .

... 3°. Hinsichtlich meiner auf die irrationalen Zahlen bezüglichen Note schreiben Sie: ... „Ich muß jetzt gestehen, daß ich die „Berechtigung Ihrer Definition nicht leugne, daß ich aber der Meinung „bin, dieselbe unterscheide sich nur in der Form des Ausdruckes aber „nicht in der Sache von dem, was die Alten festgestellt haben. Ich „kann nur sagen, daß die von Euclid V, 5 aufgestellte Definition, „welche ich lateinisch anführe

rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo superare,

„und was folgt, für genau so befriedigend halte, als Ihre Definition. „Aus diesem Grunde würde ich wünschen, daß namentlich die Be-

„hauptung wegfiele, daß solche Sätze wie $\sqrt{2}\,.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ bisher nicht „wirklich bewiesen seien. Ich glaube nämlich, daß insbesondere die „französischen Leser mit mir der Überzeugung sein werden, daß das „angeführte Buch des Euklid die Principien enthalte, die zum Beweise „dieser Sätze nothwendig und hinreichend sind. Ich kann übrigens „diese Bemerkung nicht schließen, ohne zu sagen, wie schwer es mir „wird, Ihnen dieselbe zu schreiben. Diese Fragen berühren, um einen „Ausdruck Jacobi's zu gebrauchen, ein analytisches Herz auf das „tiefste, und ich will nur wünschen, daß Sie mir nicht böse werden."

Hier bin ich leider gestern (Freitag) Abend durch einen Besuch unterbrochen, und dadurch verzögert sich meine Antwort. — Zunächst bitte ich Sie nochmals überzeugt zu sein, daß ich bei dieser Gelegenheit ganz und gar nicht empfindlich bin; ich habe mir nie eingebildet, daß meine Auffassung der irrationalen Zahlen einen besonderen Werth habe, sonst würde ich sie nicht beinahe vierzehn Jahre für mich behalten haben; im Gegentheil bin ich immer überzeugt gewesen, daß jeder gut durchgebildete Mathematiker unserer Zeit, der sich nur einmal ernstlich die Aufgabe stellt, diesen Gegenstand in strenger Weise zu erledigen, auch ganz gewiß zum Ziele kommen wird; zugleich bin ich weit davon entfernt, etwa den Mathematikern, die sich diese Frage überhaupt gar nicht vorlegen, daraus einen Vorwurf zu machen; jeder von ihnen wird mit Recht das untrügliche Gefühl haben, daß er die Sache machen könnte, wenn er nur wollte, und wenn es sich der Mühe verlohnte, die Zeit daran zu wenden. Ich werde daher, obgleich ich durchaus nicht unempfänglich für Lob und Tadel bin, in diesem Falle wirklich gar nicht gekränkt sein, wenn man mir selbst das geringe Verdienst abspricht, was ich an der Sache zu haben glaube. Trotzdem will ich, weil der Gegenstand mich nun einmal sehr interessirt, mir erlauben Ihnen die Gründe vorzutragen, weshalb ich mich Ihrer Ansicht durchaus nicht anschließen kann. Ich setze dabei als Basis, über die man sich natürlich verständigt haben muß, die Arithmetik der rationalen Zahlen als fest begründet voraus und Nichts weiter; in meiner Schrift zeige ich, ohne jede Einmischung fremdartiger Dinge, daß in dem Gebiete der rationalen Zahlen selbst eine Erscheinung sich angeben läßt (der Schnitt), welche dazu benutzt werden kann, dieses Gebiet durch eine einzige Schöpfung von neuen, irrationalen Zahlen zu vervollständigen, und ich beweise, daß das so entstandene Gebiet aller reellen Zahlen die Eigenthümlichkeit besitzt, in welcher ich das Wesen der Stetigkeit (§ 3) erblicke (will man keine neuen Zahlen einführen, so habe ich nichts dagegen; der von mir bewiesene Satz (§ 5, IV) lautet dann so: das System aller Schnitte in dem für sich unstetigen Gebiete der rationalen Zahlen bildet eine stetige Mannigfaltigkeit); ich zeige ferner (§ 6), daß die Addition von je zwei reellen Zahlen in aller Schärfe definirbar ist, und behaupte, daß dasselbe von den übrigen Rechnungen gilt, und daß man hierauf gestützt auch die Sätze, aus welchen das Gebäude der Arithmetik besteht, in aller Strenge beweisen könne. Natürlich sind diese letzten Behauptungen obligatorisch für mich in der Weise, daß, wenn Jemand die Beweisbarkeit eines Satzes aus meinen Principien noch bezweifeln sollte, ich diesen Beweis wirklich liefern muß. Zugleich behaupte ich, daß diese Sätze der Arithmetik zum größten Theile (eigentlich fast alle) bisher nicht bewiesen seien, und um wo möglich den Widerspruch aufs Äußerste zu reizen, sage ich, der Satz: $\sqrt{2}\,.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ sei vorher noch nie bewiesen. Will Jemand mich hierin widerlegen, will man also behaupten, der Satz sei schon bewiesen, so liegt jetzt die Beweislast dem Anderen ob, und er muß mir einen wirklich publicirten Beweis dieses oder eines ihn umfassenden Satzes namhaft machen. Glauben Sie nun wirklich, daß ein solcher Beweis sich in irgend einem Buche findet? Natürlich habe ich eine ganze Menge von Werken der verschiedenen Nationen auf diesen Punct hin geprüft, und was findet man da? Nichts als die rohesten Cirkelschlüsse, etwa so: $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ist $=\sqrt{ab}$, weil $(\sqrt{a}\,.\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2.(\sqrt{b})^2=ab$ ist; nicht die geringste Erklärung des Productes von zwei irrationalen Zahlen geht voraus, und ohne irgend ein Bedenken wird der für rationale Zahlen m, n bewiesene Satz $(mn)^2=m^2n^2$ auch für irrationale Zahlen in Anspruch genommen. Ist es nun nicht eigentlich empörend, daß der Unterricht in der Mathematik auf Schulen als ein besonders ausgezeichnetes Bildungsmittel des Verstandes gilt, während doch in keiner anderen Disciplin (wie z. B. Grammatik) solche grobe Verstöße gegen die Logik nur einen Augenblick geduldet würden? Man sei, wenn man einmal nicht wissenschaftlich verfahren will oder auch der Zeit wegen nicht kann, wenigstens ehrlich und gestehe dies auch dem Schüler offen ein, der ohnehin sehr geneigt ist, dem Lehrer auf dessen Wort hin an einen Satz zu glauben; das ist besser, als durch Scheinbeweise den reinen, edelen Sinn für wahre Beweise zu ertödten.

Ich glaube nun eigentlich, daß ich mich durch das Vorstehende schon hinlänglich gerechtfertigt habe; aber ich will so leichten Kaufes gar nicht davon kommen und sehr gern auf die ganz andere Wendung eingehen, die Sie der Frage gegeben haben; Sie behaupten gar nicht, daß ein strenger Beweis des obigen Satzes irgendwo zu finden sei, aber Sie sprechen die Ansicht aus, daß in der berühmten und mit Recht bewunderten Euklidischen Definition des Verhältnisses (ratio, λογος) von gleichartigen Größen, sowie in dem übrigen Inhalte des fünften Buches der Elemente die Principien enthalten seien, welche zum Beweise des Satzes nothwendig und hinreichend sind. Abgesehen davon, daß mir wie schon oben bemerkt die Hereinziehung der Größen in die reine Zahlenlehre nicht gefällt, muß ich mich bestimmt gegen diese Ansicht erklären; die genannte Basis ist nach meiner Meinung nicht ausreichend, wenn nicht zu den Euklidischen Principien außerdem noch der darin keineswegs enthaltene Kernpunct meiner Schrift, das Wesen der Stetigkeit (§ 3), hinzugethan wird. Die Definition von Euklid lautet in unserer Ausdrucksweise so: die gleichartigen Größen A, B haben dasselbe Verhältniß wie die gleichartigen Größen A_1, B_1, wenn für jedes Paar von ganzen rationalen Zahlen m, n entweder gleichzeitig $nA < mB$ und $nA_1 < mB_1$, oder gleichzeitig $nA = mB$ und $nA_1 = mB_1$, oder gleichzeitig $nA > mB$ und $nA_1 > mB_1$ ist. Soll diese Definition überhaupt einen Sinn haben, so wird über die Dinge, die Größen genannt werden, zweierlei und nichts weiter vorausgesetzt:

1⁰. Von je zwei verschiedenen, gleichartigen Größen wird stets eine als die größere, die andere als die kleinere erkannt.

2⁰. Ist A eine Größe, und n eine ganze Zahl, so giebt es immer eine mit A gleichartige Größe nA, das der Zahl n entsprechende Vielfache von A.

Im Übrigen erfährt man, außer diesen stillschweigend gemachten und den in Ihren lateinischen Worten (ich bitte Sie mir zu schreiben, weshalb unterstreichen Sie das Wort superare so bedeutungsvoll?*)) enthaltenen Voraussetzungen, Nichts über die Ausdehnung oder

*) [Lipschitz antwortet hier: „Das Wort superare habe ich deshalb unterstrichen, weil Euklid sich mit demselben die Möglichkeit öffnet, die Verhältnisse von solchen Größen zu betrachten, die nicht das Verhältniß von zwei ganzen Zahlen haben.“ Er fährt dann mit den von Dedekind im nächsten Brief (S. 476 f.) zitierten Worten fort: Die ... Definition von der Gleichheit zweier Verhältnisse .... E. N.]

Mannigfaltigkeit eines Gebietes von gleichartigen Größen, und die Definition sagt nur, wann zwei in einem Größengebiete vorhandenen Individuen dasselbe Verhältniß haben wie zwei andere. Ich will aber außerdem noch gern zugeben, daß das Verhältniß als allgemeine Definition einer Zahl gelten soll, obgleich Euklid niemals λογος und ἀριθμος als gleichbedeutend gebraucht. Nun bildet z. B., wenn A eine bestimmte Größe ist, der Inbegriff aller Vielfachen nA ein Größen-Gebiet, welches für sich allein schon den obigen Voraussetzungen genügt, und es findet sich in diesem Buche Euklids nicht die geringste Andeutung darüber, daß noch vollständigere Größen-Gebiete existiren können; ein solches Größen-Gebiet würde offenbar durch die Verhältnisse zwischen je zwei dieser Größen zu der Definition aller rationalen Zahlen führen; und dieses Zahlgebiet würde auch nicht mehr erweitert werden, wenn man zu den um eine Stufe vollständigeren Größen-Gebieten übergeht, welche aus allen genauen Theilen (Definition 1) einer bestimmten Größe und deren Vielfachen also allen mit einer Größe commensurabeln Größen bestehen. Ein solches Gebiet besitzt schon eine sehr respectabele Mannigfaltigkeit der Größen-Abstufungen, und es würde so leicht kein Mensch darauf kommen, noch vollständigere Gebiete zu verlangen. Der Begriff der Zahl als Verhältniß gleichartiger Größen würde dann niemals über das Rationale hinaus kommen. Nun wird Jeder sagen: wenn Euklid weiter Nichts gewollt hätte, als die Betrachtung solcher Größen-Gebiete, dann hätte er nicht nöthig gehabt, seine Verhältniß-Definition so schwerfällig zu machen, er hätte einfach sagen können: das Verhältniß von A zu B ist gleich dem von A_1 zu B_1, wenn es zwei ganze Zahlen m, n von der Art giebt, daß gleichzeitig $nA = mB$ und $nA_1 = mB_1$ ist. Also versteht sich von selbst, daß Euklid vollständigere Größen-Gebiete im Auge gehabt hat; und in der That wird im Buch X auch von incommensurabeln Größen gehandelt, denen mithin neue Verhältnisse, neue, irrationale Zahlen entsprechen. Aber nirgends findet sich bei Euklid oder einem späteren Schriftsteller der Abschluß solcher Vervollständigung, der Begriff des stetigen d. h. denkbar vollständigsten Größen-Gebietes, dessen Wesen in der Eigenschaft besteht: „zerfallen alle Größen eines stetig abgestuften Größen-Gebietes in zwei Classen von der Art, daß jede Größe der ersten Classe kleiner ist als jede Größe der zweiten Classe, so existirt entweder in der ersten Classe eine größte, oder in der zweiten Classe eine kleinste Größe“. Wenn diese Eigenschaft nicht *ausdrücklich* in den Begriff des Größen-Gebietes aufgenommen wird, so bleibt auch das zugehörige Zahlen-Gebiet unvollständig, und es sind schon deshalb allgemein-gültige Definitionen der arithmetischen Operationen geradezu *unmöglich*, weil in solchen lückenhaften Zahlen-Gebieten die aus zwei wirklich darin existirenden Zahlen abzuleitende Summe, Differenz u. s. w. in demselben Zahlen-Gebiete vielleicht *nicht* existirt. Wenn man freilich auf *allgemeine* Definitionen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division verzichtet, so braucht man nur zu sagen: Ich *verstehe* unter dem Producte $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}$ die Zahl $\sqrt{6}$, folglich *ist* $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$, w. z. b. w.! Es wäre dies nur das äußerste Extrem einer an sich wohl denkbaren aber gewiß nicht empfehlenswerthen Behandlungsweise, bei welcher eine Operation, z. B. die Multiplication, immer wieder von Neuem definirt würde, sobald ihr neue Zahlen unterworfen werden sollen. Nach allem diesem bleibe ich bei meiner Behauptung, daß die *Euklidischen* Principien allein, ohne Zuziehung des Principes der Stetigkeit, welches in ihnen *nicht* enthalten ist, *unfähig* sind, eine vollständige Lehre von den reellen Zahlen als den Verhältnissen der Größen zu begründen; und ich halte die provocirende Bemerkung, der Satz $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$ sei nicht bewiesen, nicht blos für wahr, sondern auch für nützlich. Umgekehrt aber wird durch meine Theorie der irrationalen Zahlen das vollkommene Muster eines *stetigen* Gebietes erschaffen, welches eben deshalb fähig ist, jedes Größen-Verhältniß durch ein bestimmtes in ihm enthaltenes Zahl-Individuum zu charakterisiren. — Und nun bitte ich Sie, meinem analytischen Herzen auch eine offenherzige Anfrage zu verzeihen: nicht wahr, die von Ihnen unter 3° ausgesprochene Ansicht über das Verhältniß meiner Principien zu *Euklid's* Elementen ist bis jetzt nur eine Vermuthung, deren Triftigkeit Sie selbst nicht bis auf den tiefsten Grund geprüft haben? im entgegengesetzten Falle würden Sie mich zum größten Danke verpflichten, wenn Sie mir eine Begründung Ihrer Ansicht mittheilen wollten. ...

1876. 7. 27.

... Obgleich ich nun, wie schon gesagt, wenig Hoffnung habe, daß wir uns einigen werden, weil wir uns schwerlich einander etwas Neues zu bieten haben, und obgleich es vielleicht zweckmäßiger wäre,

die Discussion zu verschieben, bis Ihr Werk vollendet ist, falls dann überhaupt noch eine Veranlassung zur Fortsetzung unserer Verhandlung vorliegen sollte, so bitte ich Sie doch, auf Ihren zweiten Brief mir auch zum zweiten Male das Wort zu gestatten, da ich wünsche, Ihrem Standpuncte gegenüber den meinigen noch einmal möglichst deutlich hervorzuheben. Zunächst möchte ich mich gern gegen eine Äußerung von Ihnen vertheidigen, aus welcher mir hervorzugehen scheint, daß Sie mir noch immer eine unrichtige Meinung über den *Werth* meiner Schrift über die Stetigkeit zuschreiben, während ich doch in meinem letzten Briefe an Sie mich so darüber ausgesprochen habe, daß ich jeden Zweifel zerstreut zu haben glaubte. Nachdem Sie das Beispiel von der $\sqrt{2}$ besprochen haben, fügen Sie die Worte hinzu: „Auch dies haben uns die Alten gelehrt, und hat die Definition Ihres Schnittes einen hievon verschiedenen Inhalt? Ich meine, nein. Was Sie von der Vollständigkeit des Gebietes erwähnen, die aus Ihren Principien abgeleitet wird, so fällt dieselbe in der Sache mit der Grundeigenschaft einer Linie zusammen, ohne die kein Mensch sich eine Linie vorstellen kann.“ Die erste Hälfte dieses Passus, von welcher ich zunächst allein rede, klingt nun genau so, als schrieben Sie mir die Meinung zu, ich hätte zuerst die Erscheinung beobachtet und hervorgehoben, die ich lediglich der *Kürze* wegen, weil sie so oft in meiner Schrift erwähnt wird, mit einem besondern Namen — Schnitt — bezeichnet habe. Diese Annahme bitte ich Sie gänzlich fallen zu lassen; niemals habe ich geglaubt, in meiner Schrift auch nur eine einzige neue Erscheinung oder irgend ein neues Object der mathematischen Untersuchung zu Tage gefördert zu haben. Die Erscheinung des Schnittes wird ja fast in jedem arithmetischen Lehrbuche angeführt, wenn es sich darum handelt, irrationale Zahlen mit jeder beliebigen Annäherung durch rationale Zahlen darzustellen (wobei freilich immer ein logischer Hauptfehler gemacht wird). Ebenso wenig habe ich gemeint, durch meine Definition der irrationalen Zahlen irgend eine Zahl erschaffen zu haben, die nicht vorher schon in dem Geiste eines jeden Mathematikers mehr oder weniger deutlich aufgefaßt war; dies geht aus meiner ausdrücklichen Erklärung (S. 10 und 30) hervor, daß die durch meine Definition der irrationalen Zahlen erreichte Vollständigkeit oder Stetigkeit (A) des reellen Zahlgebietes wesentlich äquivalent ist mit dem von allen Mathematikern anerkannten und benutzten Satze (B):

„Wächst eine Größe beständig, aber nicht über alle Grenzen, so nähert sie sich einem Grenzwerth“. Ebenso habe ich (S. 18) ausdrücklich bemerkt, daß ich keinem Menschen etwas Neues zu sagen glaube durch den Satz (C): „Zerfallen alle Puncte ... in zwei Stücke hervorbringt“. Ebenso wenig endlich halte ich für neu den in meinem letzten Briefe an Sie angeführten Satz (D): „Zerfallen alle Größen . . . . eine kleinste Größe“. Die ganze Tendenz meiner Schrift, die ich in der Einleitung und in § 3. deutlich bezeichnet zu haben glaube, geht vielmehr lediglich darauf hinaus, mit Benutzung der allgemein bekannten Schnitt-Erscheinung nachzuweisen (was meines Wissens noch nirgends geschehen war), daß auf der alleinigen Grundlage der Arithmetik der rationalen Zahlen, also ohne jede Zuziehung des ziemlich dunkelen und complicirten Größen-Begriffes, die irrationalen Zahlen mit einem Schlage definirt werden können, und zwar, was das Wichtigste ist, in derjenigen Vollständigkeit (Stetigkeit), welche für einen absolut strengen, wissenschaftlichen Aufbau der Arithmetik der reellen Zahlen ausreichend und zugleich unentbehrlich ist. Daß dies wirklich gelungen ist, stellen Sie, wie ich glaube, nicht in Abrede (dasselbe gilt von der Darstellung der Herrn Heine und Cantor in Halle, die nur äußerlich von der meinigen verschieden ist); unsere Meinungs-Differenz bezieht sich ausschließlich auf die von Ihnen ausgesprochene Ansicht, daß diese Principien, wenn auch in anderem Gewande, doch vollständig in Euklid's Elementen enthalten seien, und Sie wiederholen in Ihrem letzten Briefe diesen Ausspruch theils ausdrücklich, theils implicite dadurch, daß Sie in dem zweiten Theile des oben citirten Passus gerade die Vollständigkeit oder Stetigkeit, — um die allein sich meine ganze Schrift dreht und drehen mußte, wenn der beabsichtigte Erfolg erreicht werden sollte —, für etwas Selbstverständliches erklären, theils endlich dadurch, daß Sie schreiben: „Die .. Definition von der Gleichheit zweier Verhältnisse ... entscheidet Alles mit Einem Schlage. Wenn Sie dies nicht anerkennen, so kann ich es mir nur dadurch erklären, dass Sie nicht erwogen haben, dass Euklid bei jener Definition die Existenz von Verhältnissen, die nicht dem Verhältniss von zwei ganzen Zahlen gleich sind, voraussetzt. Sie haben die Absicht von vorne herein nur rationale Zahlen vorauszusetzen und Grössen, die durch rationale Zahlen gemessen werden. Euklid

verfährt in diesem Stücke anders, und das ist auch der Kern Ihrer Differenz mit Euklid. Euklid denkt sich eine Grösse durch das Mass einer scharf definirten Linie bestimmt, und unter diesem Gesichtspunkt kann er Linien aufweisen, die zu einer gewissen Linie in einem Verhältnisse stehen, das nicht durch zwei ganze Zahlen ausgedrückt werden kann“. Es folgt dann die Besprechung des Beispiels vom Verhältnisse der Diagonale zur Seite des Quadrats, dessen Irrationalität (im modernen Sinne) auch ich in meiner Schrift (S. 16) als etwas den alten Griechen Bekanntes erwähnt habe. Seit meinem dreizehnten oder vierzehnten Jahre kenne ich Euklid und bewundere ihn, und ich sehe auch jetzt nicht ein, inwiefern ich mich mit ihm in einer Differenz befinde; auch habe ich in meinem letzten Briefe ausführlich von seiner Behandlung der incommensurabelen Größen gesprochen, ohne jede Einwendung gegen sein Verfahren, so daß ich die im Obigen von Ihnen mir zugeschriebene Absicht wohl mit Recht in Abrede stellen darf. Euklid kann seine Definition gleicher Verhältnisse auf alle Größen anwenden, die ihm in seinem System vorkommen, d. h. deren Existenz aus guten Gründen ersichtlich ist, und dies reicht für Euklid vollständig aus. Für denjenigen Zweck aber, welcher die Arithmetik auf dem Begriffe des Größen-Verhältnisses aufbauen will (was Euklid's Absicht nicht gewesen ist), genügt dies durchaus nicht; da vielmehr die Vollständigkeit des Zahlbegriffs bei dieser Begründung der Arithmetik lediglich von der Vollständigkeit des Größen-Begriffs abhängt, und da die stetige Vollständigkeit der reellen Zahlen für den wissenschaftlichen Aufbau der Arithmetik unentbehrlich ist, so ist unerläßlich von vorneherein genau zu wissen, wie vollständig das Gebiet der Größen ist, weil Nichts in der Mathematik gefährlicher ist, als ohne genügenden Beweis Existenzen anzunehmen und zwar erst dann, wenn die Noth, das augenblickliche Bedürfniß es gebeut. Woran sollen die erlaubten Existenz-Annahmen erkannt und von den unzähligen unerlaubten unterschieden werden, wie z. B. von der Annahme der Existenz einer Größe A, welche das Doppelte von B und zugleich das Dreifache von der Hälfte von B ist? Soll dies nur von dem Erfolge, von dem zufälligen Gewahrwerden eines inneren Widerspruchs abhängig gemacht werden? Wenn nun Euklid weitergehende Untersuchungen beabsichtigt hätte, als es in Wahrheit der Fall war, nämlich solche, bei denen die Stetigkeit eine wesentliche Rolle spielt, und wenn in den Handschriften sich unter den Definitionen oder Axiomen des fünften Buches der obige Passus (D) dem Inhalte nach vorfände, so bin ich der Meinung, es würde Niemand denselben für überflüssig oder selbstverständlich erklären; vielmehr glaube ich, daß dann unter denjenigen, welche die Arithmetik auf dem Begriffe der Zahl als Größen-Verhältniß aufbauen wollen, sich gewiß schon Jemand gefunden hätte, der erkannt und gesagt hätte: „Mit dieser präcis definirten Vollständigkeit des Größen-Begriffs ist auch die Vollständigkeit des Zahlbegriffs gegeben, welche zum strengen Aufbau der Arithmetik der reellen Zahlen ausreichend und unentbehrlich ist.“ Und ich glaube, wir besäßen in diesem Falle bessere Lehrbücher der Arithmetik, als die wir wirklich haben. Aber Euklid schweigt vollständig über diesen, für die Arithmetik wichtigsten Punct, und deshalb kann ich Ihrer Ansicht nicht zustimmen, daß bei Euklid die vollständigen Grundlagen für die Theorie der irrationalen Zahlen zu finden seien. Wenn Euklid es nicht für überflüssig hält, in der Erklärung des fünften Buches, die Sie in Ihrem vorletzten Briefe lateinisch angeführt haben, eine so einfache Eigenschaft der Größen namhaft zu machen, so würde er den viel complicirteren Charakter (D) der Stetigkeit ganz gewiß in seiner Art ebenfalls definirt haben, wenn er desselben in seinem System bedurft hätte. Sie sagen dagegen, diese Vollständigkeit oder Stetigkeit sei selbstverständlich und brauche also nicht ausgesprochen zu werden, kein Mensch könne sich eine Linie ohne dieselbe, also ohne die obige Eigenschaft (C) denken. Obgleich dies Heranziehen der Geometrie zur Begründung der reinen Arithmetik, wie Sie im voraus vermutheten, ganz gegen meine Neigung ist, so will ich mich doch jetzt selbst auf diesen Standpunct stellen; aber auch dann kann ich Ihnen nicht beistimmen; ich kann mir den ganzen Raum und jede Linie in ihm, wie ich schon am Schlusse des § 3. meiner Schrift hinter (C) bestimmt ausgesprochen habe, durchweg unstetig vorstellen; ein zweiter Mensch dieser Art wird wohl Herr Prof. Cantor in Halle sein, wenigstens scheint dies aus seiner von mir citirten Abhandlung hervorzugehen; und ich sollte meinen, jeder Mensch kann dasselbe. Man wird mir vielleicht entgegnen, daß ich mich über mein räumliches Vorstellungsvermögen täusche, daß nämlich Jeder, der den stetigen Raum zu denken fähig ist, eben deshalb unfähig sein müsse, den Raum sich als unstetig vorzustellen, weil von vorneherein im Raumbegriffe die Vorstellung von der denkbar größten Vollständigkeit enthalten sei. Dies muß ich aber durchaus bestreiten; vielmehr ist für mich der Raumbegriff gänzlich unabhängig, gänzlich trennbar von der Vorstellung der Stetigkeit, und die Eigenschaft (C) dient nur dazu, aus dem allgemeinen Raumbegriff den speciellen des stetigen Raums auszusondern. Und wie steht es in dieser Beziehung mit Euklid? Man analysire alle Annahmen, sowohl die ausdrücklich als die stillschweigend gemachten, auf welchen das gesammte Gebäude der Geometrie Euklid's beruht, man gebe die Wahrheit aller seiner Sätze, die Ausführbarkeit aller seiner Constructionen zu (eine untrügliche Methode einer solchen Analyse besteht für mich darin, alle Kunstausdrücke durch beliebige neu erfundene (bisher sinnlose) Worte zu ersetzen, das Gebäude darf, wenn es richtig construirt ist, dadurch nicht einstürzen, und ich behaupte z. B., daß meine Theorie der reellen Zahlen diese Probe aushält): niemals, so weit ich geforscht habe, gelangt man auf diese Weise zu der Stetigkeit des Raums als einer mit Euklid's Geometrie untrennbar verbundenen Bedingung; sein ganzes System bleibt bestehen auch ohne die Stetigkeit — ein Resultat, was gewiß für Viele überraschend ist und mir deshalb wohl erwähnenswerth schien.

Mit diesen Bemerkungen, die nur weitere Ausführungen von den in meiner Schrift ausgesprochenen Gedanken sind, glaube ich meinen Standpunct so genau bezeichnet zu haben, daß ich nichts Weiteres hinzuzufügen brauche. Vielmehr muß ich Sie sehr um Entschuldigung bitten wegen der Ausführlichkeit meiner Erörterungen; Sie wissen aber, wie tief mein analytisches Herz von diesen Fragen berührt wird, und deshalb hoffe ich auf Ihre Nachsicht. ...

1876. 9. 28.

... Auch diese Antwort kann nur eine sehr oberflächliche sein, da der Gegenstand, um den es sich handelt, mir einigermaßen fremd geworden ist. Meine Untersuchungen über denselben*) stammen nämlich aus den Jahren 1866 und 1867 und sind — wenigstens der Hauptsache nach — in drei Abhandlungen zusammengestellt, die ich dem Collegen Weber, als er die Herausgabe der Riemann'schen Werke

*) [Vgl. Band 2, S. 353.]

auf meinen dringenden Wunsch ganz in seine Hände genommen hatte, zu beliebiger Benutzung überlassen habe; von ihm stammt der in der ersten Note zu der Pariser Preisaufgabe enthaltene Auszug her, gegen dessen Abdruck ich auch Nichts einzuwenden hatte, da das Verständniß des Textes für die meisten Leser dadurch wohl erleichtert wird. Ich ging ursprünglich mit der Absicht um, diese Untersuchungen zu veröffentlichen, aber ich wurde, bevor ich ihnen den wünschenswerthen Abschluß geben konnte, durch andere Arbeiten davon abgezogen, und als bald darauf Ihre Untersuchungen und die von Christoffel erschienen, verlohnte es sich nicht mehr der Mühe, die meinigen zu publiciren; seitdem habe ich mich so gut wie gar nicht mehr mit dem Gegenstande beschäftigt und mich begnügt, im Großen und Ganzen den Fortgang Ihrer Arbeiten zu verfolgen. Heute Morgen habe ich meine Papiere, die H. Weber mir schon vor einem Jahre zurückgegeben hat, wieder durchgesehen, um sie mit dem Inhalte Ihres Briefes zu vergleichen. Es ist in denselben das Ziel verfolgt (im Anschluß an Riemann's Vorschriften), den Covarianten-Charakter der Ausdrücke unmittelbar durch ihre Definition festzustellen und jede wirkliche Transformations-Rechnung durch Einführung neuer Variabeln zu vermeiden. Wird das Quadrat des dem Fortschritte ∂ (Differential, Variation) entsprechenden Längenelementes ohne Nennung der Orts-Variabeln mit (∂, ∂) bezeichnet, und

$$2(\partial, \partial') = (\partial + \partial', \partial + \partial') - (\partial, \partial) - (\partial', \partial')$$

gesetzt, so werden die Änderungen d in den kürzesten Linien durch das Gesetz

$$(d, d)\,\delta(d, d) + (d, \delta)\,d(d, d) = 2(d, d)\,d(d, \delta) + 2(d, d)(d, \delta')$$

bestimmt, wo δ eine willkürliche Änderung, und $\delta' = \delta d - d\delta$ wieder eine Operation bedeutet, welche die Gesetze der totalen Differentiation erster Ordnung befolgt. Der Ausdruck für die Abweichung von der Ebenheit oder für die allgemeinere quadrilineare Form wird dann ohne Schwierigkeit auf den folgenden zurückgeführt

$$\partial'\partial'''(\partial, \partial'') + \partial\partial''(\partial', \partial''') - \partial'\partial''(\partial, \partial''') - \partial\partial'''(\partial', \partial''),$$

aus welchem die Differentiale zweiter Ordnung $\partial\partial'$ etc. durch die Gleichungen $\partial(\partial', \partial'') = 0$ etc. entfernt werden. Die Covarianten, welche aus den durch die letzten Bedingungen fortfallenden Gliedern bestehen, habe ich nicht untersucht, und es ist mir sehr interessant, aus Ihrem Briefe zu erfahren, daß sie ebenfalls eine so wichtige

Bedeutung besitzen. In der Note zu der Pariser Preisaufgabe ist die Darstellung mit Benutzung der Central- oder Normal-Variabeln, die sich auch in meinen Papieren findet. von H. Weber gewiß deshalb vorgezogen, weil sie die unmittelbare Ausführung der Riemann'schen Vorschriften ist (Hypoth. d. Geom. II. 2), während die oben angedeutete, äußerlich variabelnlose Ableitung wohl einige allgemeine Erörterungen nothwendig gemacht hätte. Auch der Nachweis der Übereinstimmung mit dem Gauß'schen Krümmungsmaß scheint mir in dieser erläuternden Note nicht überflüssig zu sein, da sie selbst für den Fall $n = 2$ nicht ohne Weiteres vorausgesetzt werden konnte. Ihr Beweis, den ich soeben in der Abhandlung (in Crelle 72) nachgesehen habe, macht denselben allerdings überflüssig, sobald die Übereinstimmung für $n = 2$ schon gewiß ist; ich gebe auch zu, daß in Ihren Arbeiten der Inhalt der Note, obgleich sie ganz unabhängig von denselben, lediglich nach den Vorschriften Riemann's abgefaßt ist, größten Theils enthalten ist, und ich bedaure, daß wir versäumt haben, dies zu bemerken, was bei einer hoffentlich bald nöthigen neuen Auflage jedenfalls nachgeholt werden soll. Der von Ihnen beabsichtigten neuen Publication über diesen Gegenstand, und namentlich über die Bedeutung der oben erwähnten Covarianten, sehe ich nun, da ich mich in diese Untersuchungen wieder einzudenken anfange, mit großem Interesse entgegen, und ich bitte Sie, ja nicht aus Rücksicht auf mich oder Andere Etwas zu unterdrücken. ...

[Als Ergänzung zu den ersten Briefen seien hier noch einige Aufzeichnungen wiedergegeben, die F. Bernstein sich nach einem Besuch bei Dedekind am 6. März 1911 machte und die er freundlich zur Verfügung stellt:

„... Wir sprachen dann von Dirichlet und Kummer. Dedekind sagte, daß nach seiner Ansicht bei Kummer doch vielerlei nicht haltbar sei; z. B. werde der Satz, daß die Norm des Produktes gleich dem Produkt der Normen sei, einfach vorausgesetzt. In der französischen Ausgabe [XLVIII] habe er auch seinen Bedenken Ausdruck gegeben.

‚Kummer wollte übrigens gar nichts von meinen Untersuchungen wissen. Als ich nach Berlin kam, um meinen Freund H. Weber zu besuchen, da ging ich auch zu Kummer, und da empfing er mich gar nicht freundlich. Er sagte: Sie kommen wohl, um zu sehen, ob ich nicht bald abgehe. Ich sagte darauf: Ich komme, um den Mann zu sehen, den ich aufs höchste verehre und dem ich die größte Anregung meines Lebens verdanke. Da wurde er etwas freundlicher, und zum Schluß kamen wir ganz gut auseinander. Er machte meiner Theorie hauptsächlich das zum Vorwurf, was eigentlich genau betrachtet ihr Vorzug ist, nämlich daß ich die Ideale, die in der Diskriminante aufgehen, ganz wie die andern behandele; die seien eben etwas total Verschiedenes, das dürfe man nicht durcheinanderbringen.'"

Eine weitere Ergänzung bildet die folgende Stelle aus einem Brief vom 23. Mai 1892 an Gymnasial-Direktor H. Seeger-Güstrow i. M.:

„Es hat mich sehr gefreut ... mich dabei wieder — was auch sonst sehr häufig geschehen ist — in die schöne Zeit des Jahres 1852 zurückzuversetzen, wo Sie in Göttingen erschienen, und wo ich durch den lebhaften, freundschaftlichen Verkehr mit Ihnen so vielfache wissenschaftliche Anregung empfangen habe. ... Ich hatte damals, als Sie kamen, schon ein wenig Zahlentheorie getrieben, aber den eigentlichen Antrieb, tiefer in dieselbe einzudringen, habe ich durch Sie und durch zwei von Ihnen ausgearbeitete Hefte Dirichletscher Vorlesungen erhalten, aus denen ich mir damals mehr oder weniger vollständige Auszüge machte. Das eine ist betitelt: ‚Einige Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Zahlentheorie', das andere war eine größere Vorlesung über Zahlentheorie von den Elementen an bis zur Bestimmung der Klassenanzahl der binären quadratischen Formen. Die hierdurch und durch weitere Studien erworbene genaue Bekanntschaft mit den Arbeiten von Dirichlet ist später, als dieser unvergleichliche Forscher, Lehrer und Mensch als Nachfolger von Gauß nach Göttingen berufen wurde, für mich die Grundlage eines sehr innigen persönlichen Verkehrs mit ihm geworden, den ich leider nur noch wenige Jahre genießen konnte."

Im übrigen sei auf die Anmerkungen am Schluß von L verwiesen. E. N.]

LXVI.

Aus Briefen an H. Weber*).

1876.

... Zuvor aber lassen Sie mich Ihnen erklären, daß ich mit herzlichstem Danke Ihre freundschaftliche Einladung annehme, trotz des früher abgeschlossenen Vertrages nun doch neben Ihnen mit meinem Namen auf dem Titel des Werkes zu erscheinen. Sie hätten zwar wirklich nicht nöthig gehabt, sich Gewissensbisse zu machen, als alleiniger Herausgeber aufzutreten, denn Sie haben nicht blos die Hauptarbeit daran gethan, sondern auch das Ganze durch Ihre vollständige Beherrschung der Riemann'schen Schöpfungen so geleitet, daß die Welt sagen wird: es ist gut geworden. Mir wäre das ganz unmöglich gewesen; unzählige Male habe ich mir das in diesem Winter gesagt, und bei dem wirklichen Fortgange Ihrer Arbeit habe ich erst so recht eingesehen, was Alles dazu gehört, und wie wenig mein Wissen dazu ausgereicht haben würde. Mit dem größten Interesse bin ich Ihrer Arbeit gefolgt, bei der ich sehr viel gelernt habe, und die Freude darüber, mit Ihnen in einen so nahen Verkehr gekommen zu sein, würde allein mir reichliche Belohnung für meinen Arbeitsantheil. Nun habe ich mir aber Ihren erneuten Antrag überlegt, und ich finde es so verlockend und ehrenvoll, gerade in Ihrer Gesellschaft zu erscheinen, daß ich nicht widerstehen kann; nur muß es in einer Form geschehen, die dem Publicum keinen Zweifel darüber läßt, daß Sie der eigentliche Herausgeber sind; ich habe darüber nachgedacht und bin z. B. auf folgende Titel-Form gekommen: „Riemann's gesammelte mathematische Werke. In Verbindung mit R. Dedekind herausgegeben von H. Weber" oder: „R. g. m. W. Herausgegeben von H. Weber unter Mitwirkung von R. Dedekind." Vielleicht wird es Ihnen gelingen, eine Form zu finden, die das wirkliche Verhältniß noch besser trifft. Es wird ferner in der Ordnung sein,

*) [Diese Briefe wurden durch Herrn P. Epstein freundlichst zur Verfügung gestellt. E. N.]

daß Sie die Vorrede allein unterzeichnen. Finden Sie aber bei näherer Überlegung, daß mein Miterscheinen doch einige formelle Schwierigkeiten mit sich bringt (was wird z. B. Teubner dazu sagen?), so lassen Sie uns zu unserer alten Verabredung zurückkehren, und seien Sie überzeugt, daß die freundschaftliche Gesinnung, aus welcher Ihr Antrag hervorgegangen ist, mich herzlich erfreut und meine Ansprüche vollauf befriedigt hat.

Da ich die Vorrede erwähnt habe, so möchte ich Sie fragen, ob Sie beabsichtigen, mit einigen Worten auch die Geschichte dieser Herausgabe mitzutheilen? es würde dann namentlich Clebsch zu nennen sein, der die Sache wirklich mit großem Eifer ergriff, wiewohl ich glaube, daß er den Nachlaß nicht mit solcher großen Sorgfalt durchforscht haben würde, wie Sie es gethan haben.

Dies bringt mich zunächst auf Ihre Frage über den Titel der Biographie; ich bin der Meinung, daß er einfach so lauten möge: „Bernhard Riemann's Lebenslauf" ohne irgend einen Zusatz, und ich würde wünschen, daß Sie in Ihrer Vorrede ganz kurz ungefähr Folgendes bemerkten: „Die biographische Skizze ist auf meinen Wunsch von R. Dedekind verfaßt, hauptsächlich nach Mittheilungen der Riemann'schen Familie." Hierzu bewegt mich Folgendes: ich habe mich einige Male in der dritten Person eingeführt, weil ich ein unbestimmtes Gefühl hatte und auch noch habe, daß das „ich" oder „mir" oder „in meiner Gesellschaft" etwas den sonst ruhigen Ton Störendes für den Leser haben würde, was ich vermeiden wollte. Als Henle mein Manuscript in Göttingen gelesen hatte, fragte er sogleich: „Wollen Sie sich in der Überschrift als Verfasser nennen? das geht nicht, wenn Sie von sich in der dritten Person sprechen." Das war auch ganz meine Meinung, und ich fragte ihn nur noch, wofür er sich lieber entscheiden würde: dritte Person mit Nennung des Verfassers an einer ganz entfernten Stelle, nämlich in der Vorrede — oder erste Person mit Nennung des Verfassers in der Überschrift selbst — worauf er sich sofort für die erstere Art erklärte; und mir scheint es ebenfalls so besser zu sein. Mich ganz wegzulassen aus der Erzählung, wäre geradezu unnatürlich; sollte ich mich aber in erster Person einführen, so würde dem Leser wieder auffallen, daß ich z. B. gar nicht erwähne, wie ich Riemann kennen gelernt habe, und Anderes; und ich möchte gern alles Störende vermeiden. ...

Braunschweig, 8. November 1878.

... Dein Apostelthum für die Stetigkeit und Irrationalität freut mich; die Verbindung mit der Darstellung von Heine (oder vielmehr Cantor) habe ich am Schluß von §. 6 auch empfohlen; die Abkürzung, die man dadurch erreicht, ist aber nicht beträchtlich, und ich glaube jetzt sogar, daß für Schüler, die von Grenzwerthen veränderlicher Größen noch Nichts wissen, meine Definition der Summe, Differenz u. s. w. leichter zu begreifen ist und bei gehörigem Vortrage überhaupt gar keine Schwierigkeit darbietet. Ich bin in der That so optimistisch zu glauben, daß auch auf den Gymnasien die Arithmetik streng gelehrt werden kann; denn bisher giebt der betreffende Unterricht eigentlich nur ein ausgezeichnetes Beispiel davon, mit welcher Leichtigkeit man die Schüler betrügen kann, sobald man den Muth hat, auf den Gebrauch der Logik zu verzichten. Ein herrliches Bildungsmittel, um die geistigen Fähigkeiten der Jugend zu entwickeln, diese Arithmetik, wie sie gelehrt wird! Fick hat neulich eine Lanze für die Realschulen gebrochen, aber über den Werth des mathematischen Gymnasialunterrichts denke ich anders als er, und vielleicht schreibe ich nächstens mal darüber. ...

Braunschweig, 19. November 1878.

... Es freut mich sehr, daß das Thema des Arithmetik-Unterrichts auf Gymnasien Dich so sehr interessirt, und ich glaube, daß wir bei mündlicher Unterhaltung darüber uns einigen werden. Das Buch von Schröder kenne ich genau; es ist nicht für die Schüler, sondern für den Lehrer bestimmt; es soll kein Lehrbuch sein. Es enthält sehr viel Gutes, aber auch viel Überflüssiges. Ich will den Köpfen der Schüler gewiß nicht mehr zumuthen, sondern weniger. Von Stetigkeit braucht gar nicht die Rede zu sein; aber die Schüler müssen einen deutlichen Überblick über das Gebiet der Zahlen, zunächst der rationalen Zahlen gewinnen; die Unterscheidung nach Größer und Kleiner (durch Subtraction) muß ihnen in Fleisch und Blut übergehen. Dann sind sie vollkommen vorbereitet für das Irrationale. Und hier sind wir, wenn ich Deinen Brief richtig verstehe, vielleicht verschiedener Meinung. Du schreibst: „Ich kann dann auch nichts Falsches darin sehen, wenn man z. B. sagt $\sqrt{2}$ suchen heißt eine Zahl suchen, deren Quadrat sich von 2 so wenig unterscheidet als vorgeschrieben ist, und daß $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$ ist, ist dann auch bewiesen". Erstens gefällt mir hieran nicht recht, daß mehr die Operation, als das Resultat der Operation definirt wird; ich mag es lieber, wenn z. B. die Summe als eine durch die Summanden vollständig bestimmte Zahl definirt wird, als wenn das Addiren erklärt wird; dies schon bei den rationalen Zahlen. Nun aber denke Dir genau einen Schüler, der die rationale Arithmetik gut begriffen hat, und dem eben vom Lehrer in aller Strenge bewiesen ist: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ existiren nicht; wird er nicht verwirrt werden müssen, wenn nun doch von $\sqrt{2}$ die Rede ist, zwar nicht von $\sqrt{2}$ selbst, sondern nur von dem Suchen der $\sqrt{2}$? Er hat ferner in der rationalen Arithmetik gelernt, mit dem Worte Product eine ganz bestimmte Vorstellung zu verbinden; kann er nun das Zeichen $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ verstehen? Mir scheint es, er wird viel leichter das Phänomen eines „Schnittes" begreifen, bei welchem die ihm wohlbekannten rationalen Zahlen sämmtlich in so entschiedener Weise darauf angesehen werden, ob sie in die eine oder die andere Klasse fallen; einige Beispiele werden das Wesen dieser Erscheinung ihm vollständig deutlich machen; die Schärfe dieses Begriffes ist wohlthätig für sein Denken, und er wird sich auch nicht sehr dagegen sträuben, wenn diese Erscheinung zur Einführung neuer Zahlen benutzt wird: soviel Schnitte, soviel Zahlen. Auch die Definitionen der Summen, Differenzen u. s. w. der neuen Zahlen sind sehr einfach herzustellen. Du willst doch auch, daß die Schüler mit $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ u. s. w. umgehen lernen; willst Du nun, daß sie darin immer nur Symbole für Näherungsrechnungen sehen? oder hältst Du es nicht auch für besser, daß sie darin Symbole für neue, mit den alten ganz gleichberechtigte Zahlen sehen? welche von beiden Vorstellungen wird das genauere, schärfere Denken befördern, den Geist besser üben? Doch es ist zu schwer, sich hierüber schriftlich zu einigen.

Du fragst auch nach meiner Untersuchung über den Uranfang der Arithmetik: „Was sind und was sollen die Zahlen?" Sie ruht und ich zweifle, ob ich sie je publiciren werde; sie ist auch nur in rohem Entwurfe aufgeschrieben, mit dem Motto: „Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden." Die Hauptsache ist die Unterscheidung des Zählbaren vom Unzählbaren, und der Begriff der Anzahl, und die Begründung der sog. vollständigen Induction. ...

19. 1. 80.

... Aber die Theorie der ganzen Functionen ω, die Definition von $\Delta(\Omega)$ und vieles Andere macht große Weitläufigkeiten, wie ich glaube, und wenn dies auch nicht wäre, so würde eine solche schattenhafte Behandlung des Wesen-Körpers Ω*) jeden anderen, als mich (und Dich?), im höchsten Grade zurückschrecken, und er würde auch durch die nachträgliche Beseelung dieser Schattenwesen ω nicht mehr zu versöhnen sein; ich für mein Theil habe aber gegen diese Auffassung an sich gar nichts einzuwenden als die Weitläufigkeit, und ich muß Dir sogar gestehen, daß die furchtbare Abgeschlossenheit, in welcher der Körper Ω so erscheint, und die vollständige starre Bestimmtheit jedes einzelnen in ihm enthaltenen Wesen-Individuum ω mir sehr wohl gefällt; und schön ist es doch, wenn diese Welt durch einen Zauberschlag plötzlich zum Zahlen-Leben erweckt wird! Ich habe aber gar nichts dagegen, wenn Du mich ordentlich auslachst wegen meiner Begeisterung.

Will man nun also in diesen Hades nicht mit hinabsteigen, sondern stets in der Sonnenhelle des Zahlenlebens bleiben (— so sehr haben wir uns schon an die complexen Zahlen gewöhnt, daß wir als Sonnenhelle empfinden, was unseren Vorfahren als nächtliches Dunkel erschien —), so kann man, um auch die Conjugirten genießen zu dürfen, wohl so verfahren, daß man Anfangs nur ein beliebig kleines Stück der z-Ebene betrachtet, über welchem die Blätter der Riemann'schen Fläche sämmtlich von einander gesondert verlaufen, und lediglich für dieses Stück die Functionen ω untersucht; nimmt man für ϑ ein beliebiges, aber bestimmtes dieser n Blätter, so erhält man einen bestimmten zugehörigen Functionenkörper Ω, in welchem jede Function ω einwerthig ist; jede Beziehung zwischen den in ihm enthaltenen Functionen ω, die sich durch rationale Gleichungen

*) Wenn eine irreductibele Function $f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ mit Coefficienten a gegeben ist, die rationale Functionen von z sind, so kann man ein System Ω von Wesen (Functionen) ω erschaffen, deren jedes durch n rationale Functionen $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ völlig bestimmt ist. ... Man kann der Einfachheit halber festsetzen, daß unter ω die Function x_0 selbst verstanden werden soll, wenn alle folgenden $x_1, x_2 \ldots$ identisch verschwinden; versteht man dann unter ϑ das Wesen, welches dem $x_1 = 1$, $x_0 = x_2 = \cdot\cdot = x_{n-1} = 0$ entspricht, dann ist schon in aller Strenge $\omega = x_0 + x_1 \vartheta + x_2 \vartheta^2 + \cdot\cdot x_{n-1} \vartheta^{n-1}$ zufolge dieser Definitionen.

ausdrücken läßt, kommt schon in diesem Stück zur Geltung, und später wird sich zeigen, daß alle Erscheinungen, die in der fernsten Ferne auftreten, schon durch die Erscheinungen innerhalb dieses kleinen Stückes vollständig „bestimmt und entschieden“ sind. ...

30. 10. 1880.

... Ich benutze die Gelegenheit, um Dir nochmals meinen innigsten Dank für die ganze, beinahe zweijährige Arbeit zu sagen, von der Du so unendlich viel Mühe gehabt hast, und an der Theil zu nehmen mir die größte Freude und eine bedeutende Bereicherung an Wissen gebracht hat; es ist ein ganz besonderes schönes Gefühl, sich so bei der Erforschung der Wahrheit zu begegnen, was Pascal in seinem ersten Brief an Fermat so trefflich ausdrückt: Car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris. Oft habe ich an diese Stelle denken müssen bei den Fortschritten unserer Arbeit, die nach mancherlei Oscillationen doch immer mehr den Charakter innerer Nothwendigkeit angenommen haben. Es soll mich nun auch herzlich freuen, wenn die Sache einigen Beifall finden wird, worauf ich aber vorläufig nicht allzu sehr baue, weil die langweiligen Moduln gewiß manchen zurückschrecken werden. ...

Braunschweig, 24. Januar 1888.

... Daß Du solches Interesse an meiner Zahlen-Schrift nimmst, erfreut mich sehr; es werden sehr Wenige sein, die das thun. Cantor hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß er den Unterschied zwischen dem Endlichen und Unendlichen schon 1877 (Crelle Bd. 84, S. 242) hervorgehoben habe, daß er aber keine Reclamation wegen Priorität beabsichtige. Darüber ließe sich Vieles sagen; in gewissem Sinne hat er ja Recht, und doch bezweifelte er 1882 die Möglichkeit einer einfachen Definition und war sehr überrascht, als ich ihm, durch seinen Zweifel veranlaßt, und auf seinen Wunsch die meinige mittheilte; man besitzt bisweilen Etwas, ohne dessen Werth und Bedeutung gehörig zu würdigen. Zu einem Prioritätsstreit habe ich aber auch nicht die geringste Lust. — Deine Bemerkungen und Vorschläge habe ich wiederholt durchgelesen und durchdacht; ob aber durch sie eine wesentliche Vereinfachung und Abkürzung erzielt würde, läßt sich

schwer beurtheilen, ehe man nicht das Neue in vollständiger Ausführung vor sich sieht. Außerdem muß ich Dir gestehen, daß ich bis jetzt immer noch die Ordinalzahl, nicht die Cardinalzahl (Anzahl) als den ursprünglichen Zahlbegriff ansehe. Ich hätte vielleicht besser gethan, diese Namen (Ordinal, Cardinal) in meiner Schrift gar nicht zu erwähnen, da sie in der gewöhnlichen Grammatik in anderem Sinne gebraucht werden. Meine Ordinalzahlen, die abstracten Elemente des geordneten einfach unendlichen Systems, haben natürlich gar Nichts zu thun mit der adjectivischen Form der in der Grammatik sogenannten Ordinalzahlen, aus welcher Form etwa ein Grund für die begriffliche Priorität der Cardinalzahlen (Anzahlen) hergenommen werden könnte; diese adjectivische Form wird auch gebraucht, wo von einer Anordnung (also von meinen Ordinalzahlen) gar keine Rede ist, z. B. wenn man von dem fünften Theile einer Strecke spricht. Die Cardinalzahl (Anzahl) halte ich nur für eine Anwendung der Ordinalzahl, und auch in unserem ἀριθμητίζειν gelangt man zum Begriff fünf nur durch den Begriff vier. Will man aber Deinen Weg einschlagen — und ich würde sehr empfehlen, ihn einmal ganz durchzuführen —, so möchte ich doch rathen, unter der Zahl (Anzahl, Cardinalzahl) lieber nicht die Classe (das System aller einander ähnlichen endlichen Systeme) selbst zu verstehen, sondern etwas Neues (dieser Classe Entsprechendes), was der Geist erschafft. Wir sind göttlichen Geschlechtes und besitzen ohne jeden Zweifel schöpferische Kraft nicht blos in materiellen Dingen (Eisenbahnen, Telegraphen), sondern ganz besonders in geistigen Dingen. Es ist dies ganz dieselbe Frage, von der Du am Schlusse Deines Briefes bezüglich meiner Irrational-Theorie sprichst, wo Du sagst, die Irrationalzahl sei überhaupt Nichts anderes als der Schnitt selbst, während ich es vorziehe, etwas Neues (vom Schnitte Verschiedenes) zu erschaffen, was dem Schnitte entspricht, und wovon ich sage, daß es den Schnitt hervorbringe, erzeuge. Wir haben das Recht, uns eine solche Schöpfungskraft zuzusprechen, und außerdem ist es der Gleichartigkeit aller Zahlen wegen viel zweckmäßiger, so zu verfahren. Die rationalen Zahlen erzeugen doch auch Schnitte, aber ich werde die rationale Zahl gewiß nicht für identisch ausgeben mit dem von ihr erzeugten Schnitte; und auch nach Einführung der irrationalen Zahlen wird man von Schnitt-Erscheinungen oft mit solchen Ausdrücken sprechen, ihnen solche Attribute zuerkennen, die auf die entsprechenden Zahlen selbst angewendet gar seltsam klingen würden. Etwas ganz Ähnliches gilt auch von der Definition der Cardinalzahl (Anzahl) als Classe; man wird Vieles von der Classe sagen (z. B. daß sie ein System von unendlich vielen Elementen, nämlich allen ähnlichen Systemen ist), was man der Zahl selbst doch gewiß höchst ungern (als Schwergewicht) anhängen würde; denkt irgend Jemand daran, oder wird er es nicht gern bald vergessen, daß die Zahl vier ein System von unendlich vielen Elementen ist? (Daß aber die Zahl 4 das Kind der Zahl 3 und die Mutter der Zahl 5 ist, wird Jedem stets gegenwärtig bleiben). Aus demselben Grunde habe ich auch Kummer's Schöpfung der Idealzahlen stets für durchaus berechtigt gehalten, wenn sie nur mit Strenge durchgeführt wird. Ob ferner die Zeichensprache ausreicht, um alle neu zu schaffenden Individuen einzeln zu bezeichnen, fällt nicht ins Gewicht; sie reicht immer dazu aus, um die in irgend einer (begrenzten) Untersuchung auftretenden Individuen zu bezeichnen. ...

[Dedekind ist auch im pädagogischen Sinn auf solche Grundlagenfragen zurückgekommen. So liegt z. B. ein Brief des Zweiundachtzigjährigen vor — Antwort an einen damaligen Studenten, Lachmann, jetzt im Besitz von G. Hamel —, wo er die „Erweiterung des Reiches N der natürlichen Zahlen zu dem Reiche G der ganzen rationalen Zahlen“ durch Einführung von Zahlenpaaren in allen Einzelheiten durchführt, unter Bestätigung aller Rechenregeln, und den Gang der übrigen Erweiterungen andeutet.

In pädagogischer Richtung liegt auch eine im Nachlaß vorhandene ausführliche Korrespondenz mit einem Hamburger Oberlehrer, Keferstein, wo Dedekind versucht, Mißverständnisse in der Auffassung von „Was sind und was sollen die Zahlen?“ zu zerstreuen. Er zeigt dabei, wie er durch Analyse der Eigenschaften der natürlichen Zahlenreihe zu seinem synthetischen Aufbau gekommen ist, wie insbesondere die Kettentheorie notwendig (und hinreichend) war, um das „System S von fremden, alle Ordnung störenden Eindringlingen zu reinigen und auf N zu beschränken“. „Dies war einer der schwierigsten Punkte meiner Analyse, und seine Überwindung hat ein langes Nachdenken erfordert.“ E. N.]

Anhang.

LXVII.

Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung*).

[Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 58, S. 217—228 (1861).]

Bei dem gegenwärtigen neuen Abdruck der Dirichletschen Abhandlung erschien es mir zweckmäßig, zu den im § 9 aufgestellten Sätzen die Rechnungen nachzuliefern, welche ich in die Abhandlung selbst nicht aufnehmen zu dürfen glaubte; es ist mir bei dieser erneuerten Beschäftigung mit dem Gegenstande gelungen, einen neuen allgemeinen Satz zu finden, welcher eine eigentümliche Reziprozität zwischen je zwei zusammengehörigen Bewegungen eines und desselben flüssigen Ellipsoides ausspricht, und als speziellen Fall die Beziehung enthält, welche zwischen der Rotation eines Jacobischen ungleichachsigen Ellipsoides und der von mir aufgefundenen Bewegung desselben Ellipsoides stattfindet.

§ 1.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Untersuchung desjenigen Falles, in welchem während der ganzen Dauer der Bewegung die Relationen

$$(1) \qquad \begin{cases} P' = mn + m'n' + m''n'' = 0, \\ Q' = nl + n'l' + n''l'' = 0, \\ R' = lm + l'm' + l''m'' = 0 \end{cases}$$

stattfinden, deren geometrische Bedeutung, wie im § 9 der Abhandlung bemerkt ist, darin besteht, daß die Hauptachsen des Ellipsoides

*) [Es handelt sich um einen Zusatz zu der Arbeit von Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, aus dessen Nachlaß hergestellt von Dedekind, Journ. f. Math. 58 (1861), S. 181—216, wieder abgedruckt Werke 2 (1897), S. 263—301, zuerst publiziert ohne Zusatz Abh. d. Gött. Gesellsch. d. Wissensch., Bd. 8. Da beim Wiederabdruck in Dirichlets Werken der Zusatz Dedekinds nicht mitaufgenommen wurde, bringen wir ihn hier im Anhang, obwohl er nur im Zusammenhang mit der Arbeit von Dirichlet verständlich ist. Diese Arbeit drucken wir nicht ab, da sie ja schon in Dirichlets Werke aufgenommen ist. E. N.]

stets von denselben Elementen der flüssigen Masse gebildet werden. Bezeichnet man, wie ich es in § 4 der Abhandlung getan habe, die Verbindungen

$$\begin{aligned} &l^2 + l'^2 + l''^2 \quad \text{mit} \quad P,\\ &m^2 + m'^2 + m''^2 \quad \text{mit} \quad Q,\\ &n^2 + n'^2 + n''^2 \quad \text{mit} \quad R, \end{aligned}$$

so ergibt sich aus der Hypothese (1) folgendes System von Relationen:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} l &= P\lambda, & l' &= P\lambda', & l'' &= P\lambda'',\\ m &= Q\mu, & m' &= Q\mu', & m'' &= Q\mu'',\\ n &= R\nu, & n' &= R\nu', & n'' &= R\nu''. \end{aligned} \right.$$

Es leuchtet ein, daß die neun Größen

$$\begin{matrix} \dfrac{l}{\sqrt{P}}, & \dfrac{l'}{\sqrt{P}}, & \dfrac{l''}{\sqrt{P}},\\ \dfrac{m}{\sqrt{Q}}, & \dfrac{m'}{\sqrt{Q}}, & \dfrac{m''}{\sqrt{Q}},\\ \dfrac{n}{\sqrt{R}}, & \dfrac{n'}{\sqrt{R}}, & \dfrac{n''}{\sqrt{R}} \end{matrix}$$

die Koeffizienten einer orthogonalen Koordinaten-Transformation bilden, und es ist

$$PQR = 1.$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} x'\sqrt{P} &= lx + l'y + l''z,\\ y'\sqrt{Q} &= mx + m'y + m''z,\\ z'\sqrt{R} &= nx + n'y + n''z, \end{aligned}$$

so sind x', y', z' die Koordinaten eines Punktes in bezug auf ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Koordinaten in bezug auf das ursprüngliche x, y, z sind. Da nun die mit der Zeit veränderlichen Koordinaten x, y, z eines flüssigen Elementes von den anfänglichen Koordinaten a, b, c desselben Elementes in folgender Weise abhängen:

$$\begin{aligned} x &= la + mb + nc,\\ y &= l'a + m'b + n'c,\\ z &= l''a + m''b + n''c, \end{aligned}$$

so sind

$$x' = a\sqrt{P}, \quad y' = b\sqrt{Q}, \quad z' = c\sqrt{R}$$

die Koordinaten desselben Elementes zur Zeit t in bezug auf das neue mit der Zeit veränderliche System, und die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoides wird

$$\frac{x'^2}{A^2P} + \frac{y'^2}{B^2Q} + \frac{z'^2}{C^2R} = 1,$$

woraus die oben angegebene geometrische Bedeutung unserer Hypothese (1) unmittelbar hervorgeht. Aber es ergibt sich auch der Wert des Potentiales im Elemente (x', y', z') oder (a, b, c) zur Zeit t:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \frac{x'^2}{A^2P+s} - \frac{y'^2}{B^2Q+s} - \frac{z'^2}{C^2R+s}\right)\\ &= \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \frac{Pa^2}{A^2P+s} - \frac{Qb^2}{B^2Q+s} - \frac{Rc^2}{C^2R+s}\right), \end{aligned}$$

also

$$L = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{P}{A^2P+s}, \quad M = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{Q}{B^2Q+s}, \quad N = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{R}{C^2R+s},$$

$$L' = 0, \qquad M' = 0, \qquad N' = 0,$$

worin

$$\Delta = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{A^2P}\right)\left(1 + \frac{s}{B^2Q}\right)\left(1 + \frac{s}{C^2R}\right)}$$

ist. Dieselben Werte ergeben sich auch aus den Formeln des § 4 der Abhandlung; doch schien es mir zweckmäßig, dieselben für unsern Fall direkt abzuleiten.

§ 2.

Nach diesen unmittelbaren Folgerungen aus der Hypothese gehen wir zu der Untersuchung über, wann dieselbe mit den Differentialgleichungen (a) im § 1 der Abhandlung in Übereinstimmung ist. Durch eine erste Differentiation erhalten wir in Verbindung mit den Integralgleichungen (I.) (in § 5 der Abh.) folgende Gleichungen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &m\frac{dn}{dt} + m'\frac{dn'}{dt} + m''\frac{dn''}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}; \quad n\frac{dm}{dt} + n'\frac{dm'}{dt} + n''\frac{dm''}{dt} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{A};\\ &n\frac{dl}{dt} + n'\frac{dl'}{dt} + n''\frac{dl''}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}; \quad l\frac{dn}{dt} + l'\frac{dn'}{dt} + l''\frac{dn''}{dt} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{B};\\ &l\frac{dm}{dt} + l'\frac{dm'}{dt} + l''\frac{dm''}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}; \quad m\frac{dl}{dt} + m'\frac{dl'}{dt} + m''\frac{dl''}{dt} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}; \end{aligned} \right.$$

also für den Anfangszustand der Bewegung die Relationen

$$\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A};\ \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B};\ \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}.$$

Da ferner

$$L' = M' = N' = 0$$

ist, so ergibt die folgende Differentiation

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dm}{dt}\dfrac{dn}{dt} + \dfrac{dm'}{dt}\dfrac{dn'}{dt} + \dfrac{dm''}{dt}\dfrac{dn''}{dt} = 0, \\ \dfrac{dn}{dt}\dfrac{dl}{dt} + \dfrac{dn'}{dt}\dfrac{dl'}{dt} + \dfrac{dn''}{dt}\dfrac{dl''}{dt} = 0, \\ \dfrac{dl}{dt}\dfrac{dm}{dt} + \dfrac{dl'}{dt}\dfrac{dm'}{dt} + \dfrac{dl''}{dt}\dfrac{dm''}{dt} = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgen für den Anfangszustand der Bewegung die Relationen

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 2\mathfrak{A}\left\{\left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dn''}{dt}\right)_0\right\};\ \mathfrak{C}\mathfrak{A} = 2\mathfrak{B}\left\{\left(\frac{dn''}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dl}{dt}\right)_0\right\};$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 2\mathfrak{C}\left\{\left(\frac{dl}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0\right\},$$

also auch

$$\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 = 0,$$

d. h.

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0,\quad \mathfrak{C}\mathfrak{A} = 0,\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0.$$

Es ist daher entweder

$$\mathfrak{A} = 0,\quad \mathfrak{B} = 0,\quad \mathfrak{C} = 0,$$

oder z. B.

$$\mathfrak{A} = 0,\quad \mathfrak{B} = 0,\quad \left(\frac{dl}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0.$$

In beiden Fällen entnimmt man aus den Gleichungen (3)

$$l\frac{dn}{dt} + l'\frac{dn'}{dt} + l''\frac{dn''}{dt} = 0,$$

$$m\frac{dn}{dt} + m'\frac{dn'}{dt} + m''\frac{dn''}{dt} = 0,$$

so daß mit Rücksicht auf die Gleichungen (2)

$$dn : dn' : dn'' = \nu : \nu' : \nu'' = n : n' : n''$$

ist, woraus folgt, daß die Verhältnisse $\frac{n}{n''}$, $\frac{n'}{n''}$ konstant und folglich

$$(5)\qquad n = 0,\quad n' = 0$$

ist. Hieraus ergibt sich sogleich in Verbindung mit $P' = 0$, $Q' = 0$, daß auch

$$(6)\qquad m'' = 0,\quad l'' = 0$$

sein muß. Die Forderungen der Hypothese (1) und die daraus abgeleiteten Folgerungen (3) und (4) reduzieren sich daher auf die Gleichungen

$$R' = lm + l'm' = 0;\quad l\frac{dm}{dt} + l'\frac{dm'}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C};\quad \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt} + \frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt} = 0.$$

Man setze deshalb

$$l' = hl,\quad m = -hm',$$

worin h eine neue Funktion bezeichnet, deren Anfangswert $= 0$ ist; durch Einführung dieser beiden Ausdrücke für l', m in die zuletzt aufgestellten Gleichungen erhält man

$$-lm'\frac{dh}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C};\quad \left(l\frac{dm'}{dt} - m'\frac{dl}{dt}\right)\frac{dh}{dt} = 0.$$

Es ist daher entweder

$$\frac{dh}{dt} = 0,\quad h = 0,\quad l' = 0,\quad m = 0,\quad \mathfrak{C} = 0,$$

$$x = la,\quad y = m'b,\quad z = n''c$$

oder, wenn $\mathfrak{C}$ von Null verschieden,

$$l\frac{dm'}{dt} = m'\frac{dl}{dt},\quad m' = l,\quad l' = -m,$$

$$x = la + mb,\quad y = -ma + lb,\quad z = n''c.$$

Der erste dieser beiden Fälle stimmt mit dem zu Anfang des § 9 der Abhandlung angeführten überein; bezeichnet man die Achsen Al, Bm', Cn'' mit α, β, γ, so hat man zur Bestimmung derselben und der Funktion σ die Gleichungen

$$\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + s};\quad \beta\frac{d^2\beta}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{\beta^2}{\beta^2 + s};$$

$$\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + s};\quad \alpha\beta\gamma = \text{Const.},$$

worin

$$\varDelta = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}$$

ist.

Im zweiten Fall reduzieren sich die Gleichungen (a) (§ 1 der Abh.) auf die folgenden fünf:

$$l\frac{d^2 l}{d t^2} + m\frac{d^2 m}{d t^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{1}{A^2 + n'' s},$$

$$m\frac{d^2 m}{d t^2} + l\frac{d^2 l}{d t^2} = \frac{2\cdot\sigma}{B^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{1}{B^2 + n'' s},$$

$$n''\frac{d^2 n''}{d t^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{n''^2}{C^2 n''^2 + s},$$

$$l\frac{d^2 m}{d t^2} - m\frac{d^2 l}{d t^2} = 0,$$

$$(l^2 + m^2)\, n'' = 1,$$

worin

$$\varDelta = \sqrt{\left(1 + \frac{n'' s}{A^2}\right)\left(1 + \frac{n'' s}{B^2}\right)\left(1 + \frac{s}{C^2 n''^2}\right)}.$$

Wenn nun $A = B$ ist, so sind die beiden ersten dieser Gleichungen untereinander identisch, und man erhält den in §§ 6—8 der Abhandlung untersuchten Fall. Ist dagegen B von A verschieden, so ergibt die genauere Untersuchung, wie sie sogleich angedeutet werden soll, daß diesen fünf zur Bestimmung der vier Funktionen l, m, n'', σ dienenden Gleichungen nur durch ein konstantes

$$n'' = 1$$

Genüge geschieht. Es folgt dann

$$\sigma = \varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{1}{\left(1 + \frac{s}{A^2}\right)\left(1 + \frac{s}{B^2}\right)} = \varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{1}{1 + \frac{s}{C^2}},$$

$$l\frac{d^2 l}{d t^2} + m\frac{d^2 m}{d t^2} = -\frac{2\varepsilon\pi}{A^2 B^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{s}{\left(1 + \frac{s}{A^2}\right)\left(1 + \frac{s}{B^2}\right)} = -k^2;$$

$$l\frac{d^2 m}{d t^2} - m\frac{d^2 l}{d t^2} = 0;\quad l^2 + m^2 = 1,$$

worin

$$\varDelta = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{A^2}\right)\left(1 + \frac{s}{B^2}\right)\left(1 + \frac{s}{C^2}\right)}.$$

Damit die drei letzten Gleichungen miteinander harmonieren, ist erforderlich, daß

$$\frac{d^2 l}{d t^2} = -k^2 l,\quad \frac{d^2 m}{d t^2} = -k^2 m,$$

$$l = \cos kt + \left(\frac{dl}{dt}\right)_0 \frac{\sin kt}{k},\quad m = \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 \frac{\sin kt}{k}$$

ist; aus $l^2 + m^2 = 1$ folgt endlich

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = k,$$

$$l = \cos kt,\quad m = \sin kt,$$

worin k zweideutig ist. Dies ist der Satz von Jacobi.

Daß wirklich in diesem Falle n'' konstant sein muß, ergibt sich auf folgendem Wege, dessen nähere Ausführung hier aber zuviel Raum einnehmen würde. Die beiden ersten der fünf Gleichungen geben σ und $l\frac{d^2 l}{d t^2} + m\frac{d^2 m}{d t^2}$ ausgedrückt durch n''; verbindet man hiermit die beiden letzten Gleichungen und verfährt wie in § 6 der Abhandlung, so kann man l und m vollständig eliminieren, und man erhält folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{1}{2 n''^2}\frac{d^2 n''}{d t^2} - \frac{3}{4 n''^3}\left(\frac{d n''}{d t}\right)^2 + \omega_0^2 n'' = 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{n'' s}{(A^2 + n'' s)(B^2 + n'' s)},$$

welche nun noch mit der dritten jener fünf Gleichungen

$$n''\frac{d^2 n''}{d t^2} = \frac{2\varepsilon\pi}{C^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{A^2}{A^2 + n'' s}\cdot\frac{B^2}{B^2 + n'' s} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{n''^2}{C^2 n''^2 + s}$$

harmonieren muß. Allein aus der Kombination dieser beiden Gleichungen leitet man eine von $\frac{d n''}{dt}$, $\frac{d^2 n''}{d t^2}$ befreite Gleichung ab, von welcher man nachweisen kann, daß sie für kein noch so kleines an $n'' = 1$ angrenzendes Intervall von Werten eine Identität in bezug auf n'' sein kann, wie auch die Integrationskonstanten und die Achsen A, B, C beschaffen sein mögen. Woraus folgt, daß n'' konstant sein muß.

§ 3.

Statt nun die zweite Hypothese, welche darin besteht, daß während der ganzen Dauer der Bewegung die Relationen

$$T = \frac{\lambda' \lambda''}{A^2} + \frac{\mu' \mu''}{B^2} + \frac{\nu' \nu''}{C^2} = 0,$$

$$T' = \frac{\lambda'' \lambda}{A^2} + \frac{\mu'' \mu}{B^2} + \frac{\nu'' \nu}{C^2} = 0,$$

$$T'' = \frac{\lambda \lambda'}{A^2} + \frac{\mu \mu'}{B^2} + \frac{\nu \nu'}{C^2} = 0$$

stattfinden, in ähnlicher Weise zu behandeln wie die soeben untersuchte, ziehe ich es vor, einen allgemeinen Satz zu beweisen, vermöge dessen diese Diskussion sogleich auf die vorhergehende zurückgeführt werden kann. Freilich ist die Umformung der Differentialgleichungen (a) (§ 1 der Abh.), welche zu diesem Resultat führt, etwas umständlich, allein es ist mir bis jetzt nicht geglückt, dasselbe auf einem kürzeren Wege zu erreichen.

Durch die zu Anfang des § 2 der Abhandlung angedeutete Auflösung der neun Differentialgleichungen erhält man z. B.

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 l}{d t^2} = \dfrac{2\sigma}{A^2} \lambda - 2\varepsilon (L\lambda + N'\mu + M'\nu), \\ \dfrac{d^2 m}{d t^2} = \dfrac{2\sigma}{B^2} \mu - 2\varepsilon (N'\lambda + M\mu + L'\nu), \\ \dfrac{d^2 n}{d t^2} = \dfrac{2\sigma}{C^2} \nu - 2\varepsilon (M'\lambda + L'\mu + N\nu), \end{cases}$$

und hieraus ergeben sich die sechs andern zweiten Derivierten durch gleichzeitige Akzentuation der Buchstaben l, m, n, λ, μ, ν. Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$K = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta^3} + \left(\frac{QR - P'^2}{A^2} + \frac{RP - Q'^2}{B^2} + \frac{PQ - R'^2}{C^2}\right) \pi \int_0^\infty \frac{s\,ds}{\varDelta^3},$$

$$K' = \pi \int_0^\infty \frac{s\,ds}{\varDelta^3}; \quad K'' = \pi \int_0^\infty \frac{s^2\,ds}{\varDelta^3},$$

so ist zufolge § 4 der Abhandlung:

$$L = \frac{K}{A^2} - \frac{QR - P'^2}{A^4} K' + \frac{P}{A^2 B^2 C^2} K'',$$

$$M = \frac{K}{B^2} - \frac{RP - Q'^2}{B^4} K' + \frac{Q}{A^2 B^2 C^2} K'',$$

$$N = \frac{K}{C^2} - \frac{PQ - R'^2}{C^4} K' + \frac{R}{A^2 B^2 C^2} K'',$$

$$L' = -\frac{Q'R' - P'P}{B^2 C^2} K' + \frac{P'}{A^2 B^2 C^2} K'',$$

$$M' = -\frac{R'P' - Q'Q}{C^2 A^2} K' + \frac{Q'}{A^2 B^2 C^2} K'',$$

$$N' = -\frac{P'Q' - R'R}{A^2 B^2} K' + \frac{R'}{A^2 B^2 C^2} K''.$$

Hieraus findet man

$$L\lambda + N'\mu + M'\nu = \frac{K}{A^2}\lambda - \frac{K'}{A^2}(S\lambda + T''\lambda' + T'\lambda'') + \frac{K''}{A^2}\,\frac{l}{B^2 C^2},$$

$$N'\lambda + M\mu + L'\nu = \frac{K}{B^2}\mu - \frac{K'}{B^2}(S\mu + T''\mu' + T'\mu'') + \frac{K''}{B^2}\,\frac{m}{C^2 A^2},$$

$$M'\lambda + L'\mu + N\nu = \frac{K}{C^2}\nu - \frac{K'}{C^2}(S\nu + T''\nu' + T'\nu'') + \frac{K''}{C^2}\,\frac{n}{A^2 B^2}.$$

Multipliziert man daher die Gleichungen (7) der Reihe nach einmal mit $A^2 l$, $B^2 m$, $C^2 n$; dann mit $A^2 l'$, $B^2 m'$, $C^2 n'$; endlich mit $A^2 l''$, $B^2 m''$, $C^2 n''$ und addiert jedesmal, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} A^2 l \dfrac{d^2 l}{d t^2} + B^2 m \dfrac{d^2 m}{d t^2} + C^2 n \dfrac{d^2 n}{d t^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\{K - SK' + (S'S'' - T^2)K''\}, \\ A^2 l' \dfrac{d^2 l}{d t^2} + B^2 m' \dfrac{d^2 m}{d t^2} + C^2 n' \dfrac{d^2 n}{d t^2} = \quad -2\varepsilon\{-T''K' + (TT' - T''S'')K''\}, \\ A^2 l'' \dfrac{d^2 l}{d t^2} + B^2 m'' \dfrac{d^2 m}{d t^2} + C^2 n'' \dfrac{d^2 n}{d t^2} = \quad -2\varepsilon\{-T'K' + (T''T - T'S')K''\}. \end{cases}$$

Es wird nicht nötig sein, die sechs anderen Gleichungen, welche man durch Akzentuation (die jedoch nicht auf K, K', K'' auszudehnen ist) aus diesen erhält, ebenfalls hieher zu setzen; doch bemerke ich, daß aus den drei Paaren dieser Gleichungen, auf deren rechter Seite σ fehlt, sogleich die drei Integralgleichungen (II.) (§ 5 der Abh.) folgen, welche von dem Prinzip der Flächen herrühren. Die Gleichungen (8) führen nun zum Beweise eines neuen Satzes über das Dirichletsche Problem. Zu dem Zweck führe ich folgende neun Funktionen der Zeit ein:

$$l_1 = l; \qquad m_1 = \frac{A}{B} l'; \quad n_1 = \frac{A}{C} l'';$$
$$l_1' = \frac{B}{A} m; \quad m_1' = m'; \qquad n_1' = \frac{B}{C} m'';$$
$$l_1'' = \frac{C}{A} n; \quad m_1'' = \frac{C}{B} n'; \quad n_1'' = n'';$$

und übertrage jede früher zur Abkürzung eingeführte Bezeichnung durch Anhängung des Index 1 auf die Verbindungen, welche in derselben Weise von diesen neuen Funktionen abhängen, so daß z. B.

$$P_1 = l_1^2 + l_1'^2 + l_1''^2$$

ist. Dann ergibt sich

$$P_1 = B^2 C^2 (S' S'' - T^2); \qquad P_1' = A^2 B C (T' T'' - T S);$$
$$Q_1 = C^2 A^2 (S'' S - T'^2); \qquad Q_1' = B^2 C A (T'' T - T' S');$$
$$R_1 = A^2 B^2 (S S' - T''^2); \qquad R_1' = C^2 A B (T T' - T'' S'');$$

ferner

$$Q_1 R_1 - P_1'^2 = A^2 S; \quad Q_1' R_1' - P_1' P_1 = B C T;$$
$$R_1 P_1 - Q_1'^2 = B^2 S'; \quad R_1' P_1' - Q_1' Q_1 = C A T';$$
$$P_1 Q_1 - R_1'^2 = C^2 S''; \quad P_1' Q_1' - R_1' R_1 = A B T''.$$

Da ferner umgekehrt

$$l = l_1; \qquad m = \frac{A}{B} l_1'; \qquad n = \frac{A}{C} l_1'';$$
$$l' = \frac{B}{A} m_1; \quad m' = m_1'; \qquad n' = \frac{B}{C} m_1'';$$
$$l'' = \frac{C}{A} n_1; \quad m'' = \frac{C}{B} n_1'; \qquad n'' = n_1''$$

ist, so folgt unmittelbar, daß auch

$$P = B^2 C^2 (S_1' S_1'' - T_1^2); \quad P' = A^2 B C (T_1' T_1'' - T_1 S_1);$$

usw.

und

$$Q R - P'^2 = A^2 S_1; \quad Q' R' - P' P = B C T_1;$$

usw.

ist. Nun war früher

$$\frac{P}{B^2 C^2} + \frac{Q}{C^2 A^2} + \frac{R}{A^2 B^2} = S' S'' - T^2 + S'' S - T'^2 + S S' - T''^2;$$

zufolge der vorstehenden Relationen ist dieser Ausdruck aber auch gleich dem folgenden:

$$S_1' S_1'' - T_1^2 + S_1'' S_1 - T_1'^2 + S_1 S_1' - T_1''^2 = \frac{P_1}{B^2 C^2} + \frac{Q_1}{C^2 A^2} + \frac{R_1}{A^2 B^2},$$

und ebenso ergibt sich

$$\frac{Q R - P'^2}{A^2} + \frac{R P - Q'^2}{B^2} + \frac{P Q - R'^2}{C^2} = S + S' + S'' =$$
$$\frac{Q_1 R_1 - P_1'^2}{A^2} + \frac{R_1 P_1 - Q_1'^2}{B^2} + \frac{P_1 Q_1 - R_1'^2}{C^2} = S_1 + S_1' + S_1'',$$

folglich

$$\Delta_1 = \Delta,$$
$$K_1 = K, \quad K_1' = K', \quad K_1'' = K''$$

und daher

$$L_1 = \frac{K_1}{A^2} - \frac{Q_1 R_1 - P_1'^2}{A^4} K_1' + \frac{P_1}{A^2 B^2 C^2} K_1''$$
$$= \frac{K}{A^2} - \frac{S}{A^2} K' + \frac{S' S'' - T^2}{A^2} K''$$

usw.

$$L_1' = -\frac{Q_1' R_1' - P_1' P_1}{B^2 C^2} K_1' + \frac{P_1'}{A^2 B^2 C^2} K_1''$$
$$= -\frac{T}{B C} K' + \frac{T' T'' - T S}{B C} K''$$

usw.

Hieraus folgt nun endlich, daß die Gleichungen (8) sich folgendermaßen schreiben lassen:

$$l_1 \frac{d^2 l_1}{d t^2} + l_1' \frac{d^2 l_1'}{d t^2} + l_1'' \frac{d^2 l_1''}{d t^2} = \frac{2 \sigma}{A^2} - 2 \varepsilon L_1,$$
$$m_1 \frac{d^2 l_1}{d t^2} + m_1' \frac{d^2 l_1'}{d t^2} + m_1'' \frac{d^2 l_1''}{d t^2} = \qquad - 2 \varepsilon N_1',$$
$$n_1 \frac{d^2 l_1}{d t^2} + n_1' \frac{d^2 l_1'}{d t^2} + n_1'' \frac{d^2 l_1''}{d t^2} = \qquad - 2 \varepsilon M_1'$$

usw.

Da nun außerdem

$$\sum \pm l_1 m_1' n_1'' = \sum \pm l m' n'' = 1,$$

so ergibt sich durch Vergleichung mit den Gleichungen (a) (§ 1 der Abh.) folgendes Theorem:

Einer jeden durch die Gleichungen

$$x = l a + m b + n c,$$
$$y = l' a + m' b + n' c,$$
$$z = l'' a + m'' b + n'' c$$

ausgedrückten Bewegung eines flüssigen Ellipsoides, dessen anfängliche Oberfläche die Gleichung

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} + \frac{c^2}{C^2} = 1$$

hat, entspricht durch Abänderung des anfänglichen Bewegungszustandes eine zweite durch die Gleichungen

$$x_1 = \quad l a + \frac{A}{B} l' b + \frac{A}{C} l'' c,$$

$$y_1 = \frac{B}{A} m a + \quad m' b + \frac{B}{C} m'' c,$$

$$z_1 = \frac{C}{A} n a + \frac{C}{B} n' b + \quad n'' c$$

ausgedrückte Bewegung desselben Ellipsoides.

Über diesen Satz mögen hier nur folgende allgemeine Bemerkungen noch Platz finden. Die zweite Bewegung unterscheidet sich von der ersten dadurch, daß an die Stelle von

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dn}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dn'}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dm''}{dt}\right)_0$$

die Größen

$$\frac{A}{B}\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0, \quad \frac{A}{C}\left(\frac{dl''}{dt}\right)_0, \quad \frac{B}{A}\left(\frac{dm}{dt}\right)_0, \quad \frac{B}{C}\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0, \quad \frac{C}{A}\left(\frac{dn}{dt}\right)_0, \quad \frac{C}{B}\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0$$

treten. Die beiden anfänglich koinzidierenden Ellipsoide sind auch zu jeder späteren Zeit einander kongruent, da $\Delta_1 = \Delta$ ist. Je zwei anfänglich zusammenfallende Teilchen erleiden in beiden Bewegungen zu derselben Zeit auch denselben Druck, da für beide Bewegungen σ dieselbe Bedeutung hat; dies läßt sich auch leicht durch die im § 4 der Abhandlung zur Bestimmung von σ gegebene Formel verifizieren, da die Größen

$$\frac{QR - P'^2}{A^2} + \frac{RP - Q'^2}{B^2} + \frac{PQ - R'^2}{C^2} \quad \text{und} \quad \sum \frac{dl}{dt}\frac{d\lambda}{dt}$$

beim Übergange von der einen Bewegung zur anderen ungeändert bleiben.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, daß infolge der Willkürlichkeit der Vorzeichen der Achsen A, B, C jedesmal vier solche korrespondierende Bewegungen existieren, welche untereinander in derselben Beziehung stehen wie die vier durch die Koeffizientensysteme

$$\begin{matrix} l, & m, & n, \\ l', & m', & n', \\ l'', & m'', & n'', \end{matrix} \qquad \begin{matrix} l, & -m, & -n, \\ -l', & m', & n', \\ -l'', & m'', & n'', \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} l, & -m, & n, \\ -l', & m', & -n', \\ l'', & -m'', & n'', \end{matrix} \qquad \begin{matrix} l, & m, & -n, \\ l', & m', & -n', \\ -l'', & -m'', & n'' \end{matrix}$$

charakterisierten Bewegungen, welche durch Vertauschung der positiven Koordinatenrichtungen mit den negativen auseinander entspringen.

Endlich leuchtet ein, daß bei dem Übergange von der einen zu der anderen Bewegung die Integralgleichungen (I.) und (II.) sich miteinander vertauschen, während das aus dem Prinzip der lebendigen Kraft herrührende Integral (III.) ungeändert bleibt (§ 5 der Abh.).

Wenn ferner für den Anfangszustand der Bewegung die Relationen

$$B\left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = A\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0, \quad C\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = A\left(\frac{dl''}{dt}\right)_0, \quad B\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 = C\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0$$

gelten, so ist auch für die ganze Dauer der Bewegung

$$Bm = Al', \quad Cn = Al'', \quad Bm'' = Cn',$$

und die beiden Bewegungen sind identisch. In diesem Fall reduzieren sich die neun Differentialgleichungen (a) auf nur sechs wesentlich verschiedene, und die Bewegung hängt nur noch von fünf willkürlichen Konstanten ab.

§ 4.

Ist nun während der ganzen Dauer der Bewegung $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$, so ist in der korrespondierenden Bewegung beständig

$$P_1' = 0, \quad Q_1' = 0, \quad R_1' = 0$$

und umgekehrt. Die Gleichungen der letzteren haben daher zufolge unserer ersten Untersuchung entweder die Form

$$x_1 = l_1 a, \quad y_1 = m_1' b, \quad z_1 = n_1'' c$$

oder

$$x_1 = l_1 a + m_1 b, \quad y_1 = -m_1 a + l_1 b, \quad z_1 = n_1'' c; \quad B = A,$$

in welchen beiden Fällen die ursprüngliche Bewegung dieselben Gleichungen hat; oder endlich die korrespondierende Bewegung besteht in der gleichförmigen Rotation

$$x_1 = a\cos kt + b\sin kt, \quad y_1 = -a\sin kt + b\cos kt, \quad z_1 = c$$

eines Jacobischen ungleichachsigen Ellipsoides. Dann ist die ursprüngliche Bewegung durch die Gleichungen

$$x = a\cos kt - b\frac{A}{B}\sin kt, \quad y = a\frac{B}{A}\sin kt + b\cos kt, \quad z = c$$

ausgedrückt, und hierin besteht der am Schluß der Dirichletschen Abhandlung von mir mitgeteilte Satz.

Zürich, den 6ten August 1860.

[Über den zugrunde liegenden Sachverhalt entnimmt man das Nähere aus der Anzeige Gött. Nachr. **1859**, S. 191—192:

„Der Königlichen Sozietät legte der Professor Riemann eine von Herrn Professor Dedekind in Zürich aus Dirichlets Nachlasse hergestellte Abhandlung vor:

‚Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik.'

Der Verstorbene hatte von diesen Untersuchungen schon in Nro. 14 d. Jahrg. 1857 dieser Nachrichten einen kurzen Auszug veröffentlicht, hinterließ aber das Manuskript der Abhandlung in einem unvollendeten und noch sehr lückenhaften Zustande mit der ausdrücklichen Bestimmung, daß nach seinem Tode Herr Professor Dedekind ersucht werden sollte, die Vollendung der Abhandlung zum Zwecke ihrer Herausgabe in den Schriften der Sozietät zu übernehmen. In betreff des wesentlichen Inhalts der Abhandlung genügt es hier auf die erwähnte Anzeige Dirichlets zu verweisen, und es bleibt daher nur zu bemerken übrig, daß die beigefügte Anwendung der Dirichletschen Prinzipien auf spezielle Fälle fast ganz Hrn. Prof. Dedekind verdankt wird, indem derselbe nicht bloß die schon von Dirichlet untersuchten Fälle nach den in seinen Vorlesungen und im Nachlasse gegebenen Andeutungen bearbeitet hat, sondern auch durch Anwendung derselben Prinzipien auf einen neuen Fall zu einem neuen und sehr schönen Resultate gelangt ist."

Der Zusatz führt hauptsächlich das eben genannte Resultat im einzelnen aus. E. N.]

Schriften von R. Dedekind*).

1. Über die Elemente der Theorie der Euler'schen Integrale. (Inaugural-Dissertation. Göttingen. E. A. Huth. 1852.)
2. Über ein Eulersches Integral (1852. Crelle's Journal Bd. 45).
3. Über die Zeitverhältnisse beim Pflügen von Ackerstücken (Beeten) verschiedener Gestalt (1853. Mit W. Henneberg. In der Zeitschrift (?) des Hannov. Landwirthsch. Vereins).
4. Ein Satz aus der Theorie der dreiaxigen Coordinatensysteme (1854. Crelle Bd. 50).
5. Bemerkungen zu einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1854. Crelle Bd. 50).
6. Abriss einer Theorie der höheren Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus (1856. Crelle Bd. 54).
7. Beweis für die Irreductibilität der Kreistheilungs-Gleichungen (1856. Crelle Bd. 54).
8. Herausgabe der nachgelassenen Abhandlung: Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. Von G. Lejeune Dirichlet (1859. Abh. d. K. Ges. d. W. zu Göttingen Bd. 8 und wieder abgedruckt in Crelle Bd. 58).
9. Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung (1860. Crelle Bd. 58).
10. Mathematische Mittheilungen in der Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. zu Zürich:
    - I. Ableitung der allgemeinen Form der Kugelfunctionen (1859).
    - II. Ueber Kreisevolventen (1859).
    - III. Ueber die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1860).
    - IV. Ueber die Bestimmung der Praecision einer Beobachtungsmethode nach der Methode der kleinsten Quadrate (1860).
    - V. Zur Theorie der Maxima und Minima (1860).
11. Noten zu Bd. II von Gauß Werken (1863).
12. Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet (1863, 1871, 1879; Aufl. 1, 2, 3. 1894, Aufl. 4).
13. Anzeige der Aufl. 1, 2 des vorst. Werkes (Göttingische gelehrte Anzeigen vom 27. Januar 1864, 20. September 1871).
14. Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872. Braunschweig, Vieweg). (1892, Aufl. 2.) (1905, Aufl. 3).

*) Von R. Fricke genommene Abschrift einer von R. Dedekind selbst verfaßten Zusammenstellung.

15. Anzeige des Werkes: Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie, von P. Bachmann. 1872. (1873. Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrgang 18. Literaturzeitung S. 14—24, 43).
16. Herausgabe von Abhandlungen aus dem Nachlass von B. Riemann:
    I. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Abh. d. K. G. d. W. zu Gött. Bd. 13).
    II. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Abh. d. K. Ges. d. W. zu Göttingen. Bd. 13).
    III. Ein Beitrag zur Elektrodynamik (Poggendorff's Annalen Bd. 131).
17. Herausgabe (mit H. Weber) von: Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass (Leipzig, Teubner, 1876).
18. Anzeige dieses Werkes (Gött. gel. Anz. vom 2. August 1876).
19. Über die Anzahl der Ideal-Classen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers (Festschrift zur Saecularfeier des Geburtstages von C. F. Gauß. Braunschweig, Vieweg, 1877).
20. Sur la théorie des nombres entiers algébriques (Paris, 1877, Bulletin des sciences math. et astr. Darboux, Hoüel).
21. Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen (Crelle Bd. 83. 1877).
22. Ueber den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen (1878. Abh. d. K. Ges. d. W. zu Göttingen Bd. 23).
23. Comptes rendus de l'Ac. d. Sc. de Paris (1880).
24. Comptes rendus de l'Ac. d. Sc. de Paris (1880).
25. (Mit H. Weber). Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen (1880. Crelle Bd. 92).
26. Über die Discriminanten endlicher Körper (1882. Abh. d. K. Ges. d. W. zu Göttingen Bd. 29).
27. Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen (1885. Nachrichten von d. K. Ges. d. W. zu Göttingen, 7. März).
28. Erläuterungen zur Theorie der sogen. allgemeinen complexen Grössen (1887. Nachrichten von d. K. Ges. d. W. zu Göttingen, 8. Januar).
29. Was sind und was sollen die Zahlen? (1888. Braunschweig, Vieweg). (1893. Aufl. 2). (1911. Aufl. 3).
30. Über einen arithmetischen Satz von Gauß (Mittheilungen der Deutschen mathematischen Gesellschaft zu Prag. 1892).
31. Ueber Gleichungen mit rationalen Coefficienten (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. I. 1892). (1898 übersetzt von L. Langel in Nouv. Ann. de Math. 3e série, t. XVII).
32. Zur Theorie der Ideale (1894. Nachr. d. K. Ges. d. W. zu Göttingen, vorgel. 10. September).

33. Ueber die Begründung der Idealtheorie (1895. Nachr. d. K. Ges. d. W. zu Göttingen, vorgelegt 26. Januar).
34. Herausgabe von: Auszug aus einem Briefe von L. Kronecker an R. Dedekind (Sitzgsber. d. Akad. zu Berlin vom 14. Februar 1895).
35. Ueber eine Erweiterung des Symbols $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in der Theorie der Moduln (1895. Nachr. d. K. Ges. d. W. zu Göttingen, vorgelegt 11. Mai).
36. Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind (1896. Math. Annalen, Bd. 48).
37. Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Theiler (1897. Festschrift der Herzogl. technischen Hochschule zur Naturforscher-Versammlung).
38. Ueber die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern (vollendet 1898. 7. 29; Crelle's Journal Bd. 121. 1899).
39. Ueber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. (Math. Annalen Bd. 53. 1900).
40. Ueber die Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen (Festschrift zur Feier des 150 jährigen Bestehens der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1901. Berlin. Weidmann. Ausgearbeitet 27. März — 7. Juni, Reinschrift 7.—24. Juni 1901).
41. Gauss in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate (Dieselbe Festschrift. Ausgearbeitet 17. — 24. Juli, Reinschrift 24. —26. Juli 1901).
42. Über binäre trilineare Formen und die Komposition der binären quadratischen Formen (Crelle's Journal Bd. 129. S. 1—34. 1905. — Ausgearbeitet 18. December 1904 — 22. Januar 1905. Reinschrift 18. Januar — 23. Januar 1905).
43. Bemerkung zu Dirichlets Werken Bd. I S. 348. Z. 7. (in Bd. II S. 418—420. 1897. Verfasst 12. Februar 1897).
44. Bemerkungen zu: Gesammelte mathematische Werke von L. Fuchs. Bd. I. 1904 (S. 67. 110. 476. redigirt v. L. Schlesinger.)
45. Über den Zellerschen Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes (in der Weber-Festschrift zum 5. März 1912; vollendet 13. September 1911).

Verweisungen.

Auf mehrfachen Wunsch geben wir hier eine Anzahl von Verweisungen. Die Seitenzahlen sind hier und sonst mittels der in den Überschriften angegebenen Originalseitenzahlen leicht zu finden.

Band 1.

S. 67, Z. 3—2 v. u.: XV.
S. 158, Z. 3 v. o.: XLV.
S. 224, Z. 5—4 v. u.: LV.
S. 239, Fußnote, Z. 4—6 v. o.: XLVII, XLIX, XLVIII.
S. 351, Z. 11—10 v. u.: XV.
S. 357, Fußnote: V.
S. 390, Fußnote: XXIX.

Band 2.

S. 43, Fußnote: XVI, XLVI.
S. 77, Fußnote: XXX.
S. 102, Z. 10 v. u.: XLV.
S. 113, Z. 15—16 v. o.: XXX.
S. 119, Fußnote: XXX.
S. 146, Fußnote: XXX.
S. 195, Fußnote**): XXVIII.
S. 226, Fußnote: XIV.
S. 236, Fußnote: XXVIII.
S. 249, Fußnote: XXVI.
S. 269, Fußnote**): XXIX.
S. 270, Fußnote**): XXVII.
S. 316, Fußnote: XLVII, XX.
S. 387, Z. 1 v. u.: VI.
S. 400, Z. 13 v. o.: XLV.
S. 411, Z. 3—2 v. u.: XXIV.

Band 3.

S. 37, Fußnote: XX.
S. 38, Fußnote: LVI.
S. 136, Fußnote: XV, XIX.
S. 148, Fußnote*): XXII.
S. 184, Fußnote, Z. 9—8 v. u.: XLVIII, XVI.

Druckfehlerverzeichnis.

Band 1.

S. 234, Z. 16 v. o.: Statt ν lies $\mathfrak{p}$.
S. 234, Z. 11 v. u.: Statt νp lies $\mathfrak{p} p$.
S. 234, Z. 7 v. u.: Statt $N(y)$ lies $N(\mathfrak{p})$.
S. 350, Z. 19 v. o.: Statt § 22 lies § 32.
S. 396, Z. 17 v. u.: Statt 1) lies (1).
S. 396, Z. 5 v. u.: Statt versprochenen lies versprochene.
S. 396, Z. 4 v. u.: Das Komma ist wegzulassen.

Band 2.

S. 102, Z. 11 v. u.: Statt plubliziert lies publiziert.
S. 301, Tabelle: In der letzten Zeile der q-Spalte lies 271 statt 221.
S. 318, Z. 1 v. u.: a l l e ist beim zweiten Mal zu entsperren.
S. 330, Z. 11 v. o.: Statt $D(-F_s F_t)$ lies $D(-2 F_s F_t)$.
Auf S. 162, Z. 9 v. u.; S. 344, Z. 13 v. o.; S. 346, Z. 15 v. o.; S. 348, Z. 13 v. o. ist am Schluß der Zeile jeweils ein Gedankenstrich hinzuzufügen.

Band 3.

S. 36, Z. 17 v. o.: Statt letzteren lies letzten.
S. 153, Fußnote, Z. 1 v. u.: Statt α lies α_ι'.
S. 387, Z. 15 v. u.: Am Schluß der Zeile ist ein Komma hinzuzufügen.