ÜBER DIE VOLLSTÄNDIGEN LÖSUNGEN EINER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG

AUS DEN HINTERLASSENEN PAPIEREN C. G. J. JACOBI'S

HERAUSGEGEBEN VON

A. CLEBSCH

ÜBER DIE VOLLSTÄNDIGEN LÖSUNGEN EINER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG.

§. 1. Zusammenhang der vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit dem System der vollständigen Integralgleichungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Wenn eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung die gesuchte Function selbst enthält, so giebt eine vollständige Lösung derselben die vollständigen Integralgleichungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, welche den in der Dynamik auftretenden ähnlich, aber von allgemeinerem Charakter sind. Man hat dann folgendes Theorem:

„Es sei

$$S = f(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)$$

eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0,$$

wo H eine Function von

$$t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ S,\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\ \frac{\partial S}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial S}{\partial q_m}$$

ist und $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die willkürlichen Constanten bedeuten; man setze in H für $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_m}$ die Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ und bilde die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} S = f(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m), \\ \dfrac{\partial f}{\partial q_1} = p_1,\ \ \dfrac{\partial f}{\partial q_2} = p_2,\ \ \ldots,\ \ \dfrac{\partial f}{\partial q_m} = p_m, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} : \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_1} : \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_2} : \ldots : \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \beta : \beta_1 : \beta_2 : \ldots : \beta_m, \end{cases}$$

wo β, β_1, β_2, ..., β_m neue willkürliche Constanten bedeuten, so sind diese Gleichungen die vollständigen Integralgleichungen eines zwischen den Variabeln

$$t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ S,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m$$

stattfindenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, & \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} - p_1\dfrac{\partial H}{\partial S}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} - p_2\dfrac{\partial H}{\partial S}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{dq_m}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_m}, & \dfrac{dp_m}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_m} - p_m\dfrac{\partial H}{\partial S}, \\ \dfrac{dS}{dt} = p_1\dfrac{\partial H}{\partial p_1} + p_2\dfrac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m\dfrac{\partial H}{\partial p_m} - H. \text{“} \end{cases}$$

Man kann in den Gleichungen (1) die Proportionen

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} : \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} : \ldots : \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \beta : \beta_1 : \ldots : \beta_m$$

durch folgende Gleichungen ersetzen:

$$(3)\quad \log\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \gamma + T,\quad \log\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \gamma_1 + T,\quad \ldots,\quad \log\frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \gamma_m + T,$$

wo $\gamma = \log\beta$, $\gamma_1 = \log\beta_1$, ..., $\gamma_m = \log\beta_m$ ebenfalls willkürliche Constanten bedeuten und

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S}$$

zu setzen ist.

Der Beweis des vorstehenden Theorems kann folgendermassen geführt werden. Wenn man die Integralgleichungen differentiirt und nach geschehener Differentiation die Differentialgleichungen (2) substituirt, so hat man nur zu zeigen, dass die so erhaltenen Gleichungen durch Substitution der aus den Integralgleichungen entnommenen Werthe

$$(4)\quad S = f,\quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial q_1},\quad p_2 = \frac{\partial f}{\partial q_2},\quad \ldots,\quad p_m = \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

identisch werden. Dies folgt aber unmittelbar daraus, dass die Function

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H$$

selbst, mithin auch ihre nach den Grössen

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$$

genommenen partiellen Differentialquotienten identisch gleich Null werden, wenn man in denselben vor den anzustellenden partiellen Differentiationen die nämlichen Werthe (4) substituirt.

Ich will aber jetzt zeigen, dass, wenn die zu Grunde gelegte Lösung $S = f$ eine vollständige ist, die Gleichungen (1) auch wirklich ein System *vollständiger* Integralgleichungen bilden können.

Damit die Lösung $S = f$ einer gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung eine vollständige sei, darf dieselbe keiner anderen von den willkürlichen Constanten freien partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen denselben Variabeln Genüge leisten. Da man aus zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den Variabeln

$$S,\ t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m$$

immer einen partiellen Differentialquotienten, z. B. $\frac{\partial S}{\partial t}$, eliminiren kann, so kann man die aufgestellte Bedingung auch so aussprechen, dass es keine identische Gleichung allein zwischen den Grössen

$$f,\ \frac{\partial f}{\partial q_1},\ \frac{\partial f}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial q_m},\ t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m$$

geben darf, oder dass die Ausdrücke

$$f,\ \frac{\partial f}{\partial q_1},\ \frac{\partial f}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial q_m},$$

als Functionen der willkürlichen Constanten

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$$

betrachtet, von einander unabhängig sein müssen. Es wird daher, wenn $S = f$ eine vollständige Lösung ist, die aus den Grössen

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_1}, & \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_m}, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_1}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial q_1}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2 \partial q_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m \partial q_1}, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial q_2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2 \partial q_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m \partial q_2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_m}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial q_m}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2 \partial q_m}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m \partial q_m} \end{array}$$

gebildete Determinante nicht verschwinden. Setzt man

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = u, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = u_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = u_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = u_m$$

so werden die vorstehenden Grössen:

$$\begin{array}{ccccc}
u, & u_1, & u_2, & \ldots, & u_m, \\
\frac{\partial u}{\partial q_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial q_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial q_1}, & \ldots, & \frac{\partial u_m}{\partial q_1}, \\
\frac{\partial u}{\partial q_2}, & \frac{\partial u_1}{\partial q_2}, & \frac{\partial u_2}{\partial q_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_m}{\partial q_2}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial u}{\partial q_m}, & \frac{\partial u_1}{\partial q_m}, & \frac{\partial u_2}{\partial q_m}, & \ldots, & \frac{\partial u_m}{\partial q_m}.
\end{array}$$

Nach einer von mir in dem Aufsatze „*De binis quibuslibet functionibus homogeneis etc.*“ aufgestellten und auf die Transformation der vielfachen Integrale angewandten Satze*) *ist die Determinante der vorstehenden Grössen gleich der in Bezug auf* $q_1, q_2, \ldots, q_m$ *gebildeten Functionaldeterminante der Grössen*

$$\frac{u_1}{u}, \quad \frac{u_2}{u}, \quad \ldots, \quad \frac{u_m}{u},$$

multiplicirt mit u^{m+1}. Man hat daher den folgenden Satz:

Theorem I.

„*Es sei f eine beliebige Function der Grössen*

$$t, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m, \quad \alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m,$$

so ist die in Bezug auf $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *gebildete Functionaldeterminante der* $m+1$ *Functionen*

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

gleich der in Bezug auf $q_1, q_2, \ldots, q_m$ *gebildeten Functionaldeterminante der m Functionen*

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}, \quad \ldots, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}},$$

multiplicirt mit $\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^{m+1}$.“

*) Crelle's Journal, Bd. XII p. 40; diese Ausgabe, Bd. III p. 235—236.

Aus dem vorstehenden Theorem ergiebt sich das folgende:

Theorem II.

„*Es sei* $S = f$ *eine vollständige Lösung einer zwischen der Function S und* $m+1$ *unabhängigen Variabeln gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung; es seien ferner die in f enthaltenen willkürlichen Constanten*

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m,$$

so sind die m Quotienten

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}, \quad \ldots, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}$$

in Bezug auf je m der $m+1$ *Variabeln von einander unabhängige Functionen, oder es giebt zwischen diesen Quotienten, einer der* $m+1$ *Variabeln und den willkürlichen Constanten keine identische Gleichung.*“

Daraus, dass zufolge der Definition einer vollständigen Lösung die Functionen

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

in Bezug auf $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ von einander unabhängig sind, folgt, dass man aus den Gleichungen (1) die willkürlichen Constanten

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m, \quad \frac{\beta_1}{\beta}, \quad \frac{\beta_2}{\beta}, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_m}{\beta}$$

durch die Variabeln

$$S, \quad t, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_m$$

ausgedrückt erhalten kann. Aus dem Theorem II ergiebt sich aber ferner, dass man, wenn $S = f$ eine vollständige Lösung ist, vermittelst der Gleichungen (1) immer auch die Grössen

$$S, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_m$$

durch t und die angegebenen willkürlichen Constanten ausdrücken kann. Wenn daher $S = f$ eine vollständige Lösung ist, so erfüllen die Gleichungen (1) die Bedingungen, welche im Allgemeinen zu einem System vollständiger Integralgleichungen erforderlich sind. Ist aber diesen allgemeinen Bedingungen genügt, so zeigt der im Vorhergehenden angedeutete Beweis, dass, wenn $S = f$ die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

ist, durch die Gleichungen (1) das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (2) vollständig integrirt wird.

§. 2. Von den überzähligen willkürlichen Constanten.

Bei Aufsuchung einer vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung ereignet es sich bisweilen, dass durch den naturgemässen Gang der Betrachtung eine grössere Zahl willkürlicher Constanten in die Lösung eingeführt wird, als zu einer vollständigen Lösung erfordert wird. Setzt man, wie es verstattet ist, einige derselben gleich Null, so wird unter Umständen die Symmetrie gestört; daher wird es zuweilen rathsam sein, sämmtliche willkürliche Constanten in der Lösung beizubehalten. Die Function S enthält dann, falls wir uns auf den Fall der Dynamik beschränken, in welchem S in der partiellen Differentialgleichung nicht vorkommt, und wenn wir von der additiven Constante abstrahiren, mehr als m willkürliche Constanten, die ich mit

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_k$$

bezeichnen will, wo $k > m$ ist. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass diese willkürlichen Constanten sich in der Function S nicht auf eine kleinere Anzahl bringen lassen, indem man gewisse Functionen von ihnen als die willkürlichen Constanten einführt.

Um den hier betrachteten Fall auf den früheren zurückzuführen, wo die Function S gerade die gehörige Anzahl von m willkürlichen Constanten enthält, kann man sich vorstellen, dass beliebige m von den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ diese m willkürlichen Constanten, die übrigen $k-m$ aber *beliebige particulare Constanten* sind. Man kann hierdurch sämmtliche im Vorigen gefundene Resultate auf den Fall anwenden, wo die Lösung S *überzählige willkürliche Constanten enthält.*

Es folgt hieraus zunächst, dass die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \ \dfrac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, \ \ldots, \ \dfrac{\partial S}{\partial q_m} = p_m, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ \ldots, \ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \beta_k \end{cases}$$

wiederum Integralgleichungen des Systems der dynamischen Gleichungen sein werden, und dass, wenn man von den letzteren k eine Anzahl m beliebig auswählt, diese mit den ersteren m zusammen als das ganze System der vollständigen dynamischen Integralgleichungen angesehen werden können. Die übrigen $k-m$ Gleichungen müssen daher aus ihnen folgen. Wenn diese Gleichungen aber auch nichts Neues ergeben, so können sie doch bemerkenswerthe Combinationen der übrigen sein, zu welchen man auf diese Weise durch die überzähligen Constanten gelangt.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ nicht alle willkürlich sein können, sondern dass $k-m$ unter ihnen von den übrigen und von den Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ abhängen, und eben so müssen sich $k-m$ der Functionen

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \ \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}$$

durch die übrigen und die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ bestimmen lassen. Dies ergiebt sich auch durch die folgenden Betrachtungen.

Zwischen den Functionen

$$\frac{\partial S}{\partial t}, \ \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial S}{\partial q_m}$$

und den Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ giebt es eine von allen willkürlichen Constanten freie Gleichung, die gegebene partielle Differentialgleichung. Wenn daher diese Functionen willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ enthalten, so sind sie, als Functionen von diesen betrachtet, nicht von einander unabhängig, und es verschwindet daher ihre in Bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ gebildete Functionaldeterminante. Aber diese ist dieselbe, wie die in Bezug auf $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ gebildete Functionaldeterminante der Functionen

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \ \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial S}{\partial \alpha_{m+1}},$$

und ihr Verschwinden lehrt, dass es auch zwischen den letzteren Functionen eine von den Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ unabhängige Gleichung giebt, welche nur noch die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ enthält. Dies aber giebt den zu beweisenden Satz, wenn man nach und nach $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_k$ für α_{m+1} setzt oder allgemeiner für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ beliebige $m+1$ von den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ nimmt.

Ich bemerke ferner, dass es zwischen den Grössen

$$t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$$

keine Relation giebt, sondern dass, wenn man auf eine Gleichung zwischen diesen Grössen kommt, dieselbe identisch sein muss.

In meiner Abhandlung „*Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis etc.*"*) habe ich die Folgerungen, welche sich aus dem Vorkommen überzähliger willkürlicher Constanten in den Integralgleichungen ziehen lassen, ausführlich und, wie ich glaube, zuerst untersucht, indem ich in dieser Abhandlung alle allgemeinen Betrachtungen über die Natur eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und ihrer Integralgleichungen zusammenstellen wollte, durch welche die Darstellung der von mir in Bezug auf die dynamischen Differentialgleichungen gefundenen Resultate an Klarheit gewinnen kann. Man habe im Allgemeinen eine Anzahl zu einem System vollständiger Integralgleichungen gehöriger Gleichungen

$$(2)\quad u_1 = 0,\quad u_2 = 0,\quad \ldots,\quad u_m = 0,$$

aus denen man durch Differentiation und Substitution der gegebenen Differentialgleichungen keine neue Gleichung erhalten kann, die sich nicht aus ihnen von selbst ergiebt. Enthalten die Gleichungen (2) mehr als m willkürliche Constanten

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m,\ \alpha_{m+1},\ \ldots,\ \alpha_k,$$

so kann man beliebige $k-m$ derselben als überzählige betrachten. Löst man die Gleichungen (2) nach $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$ auf und erhält dadurch die Gleichungen

$$(3)\quad v_1 = \alpha_1,\quad v_2 = \alpha_2,\quad \ldots,\quad v_m = \alpha_m,$$

so enthalten die Functionen $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m$ bloss die überzähligen willkürlichen Constanten

$$\alpha_{m+1},\ \alpha_{m+2},\ \ldots,\ \alpha_k.$$

Durch Substitution der gegebenen Differentialgleichungen müssen die Gleichungen

$$dv_1 = 0,\quad dv_2 = 0,\quad \ldots,\quad dv_m = 0,$$

welche aus (3) durch Differentiation hervorgehen, identisch werden, weil man sonst aus (2) gegen die Annahme durch Differentiation und Substitution der gegebenen Differentialgleichungen neue Integralgleichungen ableiten könnte, welche

*) Crelle's Journal, Bd. XXIII p. 1—104; diese Ausgabe, Bd. IV p. 147—255.

nicht in (2) enthalten sind. Differentiirt man die Functionen $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m$ beliebig oft hinter einander und setzt für jede derselben

$$\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_{k-m}} v}{\partial\alpha_{m+1}^{i_1}\,\partial\alpha_{m+2}^{i_2}\ldots\partial\alpha_k^{i_{k-m}}} = v^{i_1, i_2, \ldots, i_{k-m}},$$

so folgt aus dem Umstande, dass die Gleichungen

$$dv_1 = 0,\quad dv_2 = 0,\quad \ldots,\quad dv_m = 0$$

durch Substitution der gegebenen Differentialgleichungen identisch werden, auch, dass die Gleichungen

$$dv_1^{i_1, i_2, \ldots, i_{k-m}} = 0,\quad dv_2^{i_1, i_2, \ldots, i_{k-m}} = 0,\quad \ldots,\quad dv_m^{i_1, i_2, \ldots, i_{k-m}} = 0$$

durch die Substitution der gegebenen Differentialgleichungen identisch werden, weil in den zu substituirenden Differentialgleichungen die Grössen $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_k$ nicht vorkommen. *Wenn daher die Functionen $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m$ überzählige willkürliche Constanten $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_k$ enthalten, so werden nicht bloss diese Functionen selbst, sondern auch alle ihre beliebige Male hintereinander nach $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_k$ genommenen partiellen Differentialquotienten Constanten gleich.*

Da die Gleichungen (3) durch Auflösung aus den Gleichungen (2) erhalten worden sind, so müssen die Gleichungen (2) identisch werden, wenn man in ihnen für die Constanten $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$ die ihnen gleichen Functionen $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m$ setzt. Man muss daher auch identische Gleichungen erhalten, wenn man nach dieser Substitution die Gleichungen (2),

$$u_1 = 0,\quad u_2 = 0,\quad \ldots,\quad u_m = 0,$$

in Bezug auf die überzähligen Constanten $\alpha_{m+1},\ \alpha_{m+2},\ \ldots,\ \alpha_k$ differentiirt. Um die hierdurch entstehenden Gleichungen zu bilden, hat man die nach den Constanten $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ genommenen partiellen Differentialquotienten der Functionen $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m$ mit den nach $\alpha_{m+1},\ \alpha_{m+2},\ \ldots,\ \alpha_k$ genommenen partiellen Differentialquotienten der Functionen $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m$ zu multipliciren. Da aber diese letzteren, so wie die Functionen $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m$, Constanten gleich sind, *so erhält man aus jeder zu einem Systeme vollständiger Integralgleichungen gehörigen Gleichung $u=0$, welche überzählige willkürliche Constanten enthält, andere $U=0$, in welchen U eine lineare Function der nach den willkürlichen Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten gleich hoher Ordnung ist, während die Coefficienten dieser linearen Functionen Constanten sind.*

Man erhält auf diese Weise aus den Gleichungen

$$u_1 = 0,\quad u_2 = 0,\quad \ldots,\quad u_m = 0,$$

wenn man bloss einmal nach α_{m+1} differentiirt, die folgenden:

$$(4)\quad \begin{cases} \gamma_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_{m+1}} = 0, \\ \gamma_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_{m+1}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_1 \dfrac{\partial u_m}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial u_m}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial u_m}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial u_m}{\partial \alpha_{m+1}} = 0. \end{cases}$$

Hier sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ die Constanten, welchen respective die Functionen

$$\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \ldots,\quad \frac{\partial v_m}{\partial \alpha_{m+1}}$$

gleich werden. Wenn eine von den Gleichungen (4) nicht identisch ist, so können auch zufolge der bekannten Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in einer der Gleichungen (2) die willkürlichen Constanten auf eine kleinere Anzahl gebracht werden.

Differentiirt man zweimal hinter einander nach derselben Constante α_{m+1}, so erhält man aus jeder der Gleichungen (2), $u = 0$, die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \cdots + \varepsilon_m \frac{\partial u}{\partial \alpha_m} \\ + \gamma_1\gamma_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} + 2\gamma_1\gamma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \cdots + 2\gamma_m \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{m+1}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+1}}, \end{aligned}$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ die constanten Werthe der Functionen

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+1}},\quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+1}},\quad \ldots$$

sind. Differentiirt man zweimal hinter einander nach verschiedenen Constanten, einmal nach α_{m+1} und dann nach α_{m+2}, so erhält man aus $u = 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = \zeta_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \zeta_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \cdots + \zeta_m \frac{\partial u}{\partial \alpha_m} + \gamma_1\gamma_1' \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} + (\gamma_1\gamma_2' + \gamma_2\gamma_1') \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \cdots \\ \cdots + \gamma_m' \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{m+1}} + \gamma_m \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{m+2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+2}}, \end{aligned}$$

wo $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m, \gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_m'$ respective die constanten Werthe der Functionen

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+2}},\quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+2}},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^2 v_m}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+2}},\quad \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_{m+2}},\quad \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_{m+2}},\quad \ldots,\quad \frac{\partial v_m}{\partial \alpha_{m+2}}$$

bedeuten. Diese durch Differentiation nach den willkürlichen Constanten abgeleiteten Gleichungen können entweder neue Integralgleichungen sein oder sich aus den Gleichungen (2) ergeben.

Die Werthe der Constanten γ_1, γ_2 etc. lassen sich im Allgemeinen nicht angeben, sondern müssen nach der besonderen Natur der Gleichungen (2) und der gegebenen Differentialgleichungen jedesmal bestimmt werden. Nur in einem besonderen Falle habe ich ihre allgemeinen Werthe angegeben. Sind nämlich die zwischen den $n+1$ Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegebenen Differentialgleichungen:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n,$$

und nimmt man an, dass für $x = x^0$ gleichzeitig

$$x_1 = x_1^0,\quad x_2 = x_2^0,\quad \ldots,\quad x_n = x_n^0$$

ist, so kann man in den vollständigen Integralgleichungen die Constanten $x^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ für die willkürlichen Constanten annehmen, von denen eine *überzählig* sein wird. Hat man eine dieser Integralgleichungen, $u = 0$, welche diese willkürlichen Constanten sämmtlich enthält oder jedenfalls eine mehr, als die gesammte Zahl der Gleichungen beträgt, die man aus $u = 0$ durch Differentiation und Substitution der gegebenen Differentialgleichungen ableiten kann, so differentiire man diese Gleichung einige Male hinter einander so, als wären nur die Grössen $x^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ variabel, die Grössen $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ dagegen constant, und als hätte man die Differentialgleichungen

$$dx^0 : dx_1^0 : dx_2^0 : \ldots : dx_n^0 = X^0 : X_1^0 : X_2^0 : \ldots : X_n^0,$$

wo $X^0, X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0$ die Werthe von $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ für $x = x^0$, $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ bedeuten. Wenn man nach jeder Differentiation durch diese Gleichungen die Differentiale $dx^0, dx_1^0, dx_2^0, \ldots, dx_n^0$ eliminirt, so erhält man immer durch dieses Verfahren wieder Integralgleichungen. Die erste und einfachste derselben ist

$$X^0 \frac{\partial u}{\partial x^0} + X_1^0 \frac{\partial u}{\partial x_1^0} + X_2^0 \frac{\partial u}{\partial x_2^0} + \cdots + X_n^0 \frac{\partial u}{\partial x_n^0} = 0,$$

welche, wie man sieht, die Form der Gleichungen (4) hat.

§. 3. Anwendung der vorhergehenden Betrachtungen auf das aus einer vollständigen Lösung mit überzähligen Constanten entspringende System der dynamischen Integralgleichungen.

Diese in der angeführten Abhandlung ausführlicher auseinander gesetzten Betrachtungen will ich jetzt auf den Fall anwenden, wo die zur Bildung der Integralgleichungen gebrauchte vollständige Lösung S die willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ enthält, von denen $k-m$ überzählige sind. Die Anzahl dieser überzähligen willkürlichen Constanten kann auch unendlich gross sein.

Die Integralgleichungen

$$(1)\quad p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1},\quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2},\quad \ldots,\quad p_m = \frac{\partial S}{\partial q_m}$$

sind solche, aus denen durch Differentiation und Substitution der gegebenen Differentialgleichungen keine weitere abgeleitet werden kann, die nicht schon in den Gleichungen (1) enthalten ist. Es ergeben sich daher durch die Formeln (4) des vorigen §. aus diesen die neuen Integralgleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = \gamma_1 \dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_{m+1}}, \\ 0 = \gamma_1 \dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_{m+1}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = \gamma_1 \dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha_{m+1}}, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ für $\dfrac{\partial S}{\partial q_1}, \dfrac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \dfrac{\partial S}{\partial q_m}$ gesetzt ist. Erhält man durch Auflösung der Gleichungen (1) nach den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Gleichungen

$$\alpha_1 = A_1,\quad \alpha_2 = A_2,\quad \ldots,\quad \alpha_m = A_m,$$

so sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ zufolge der im vorigen §. mitgetheilten Sätze diejenigen Werthe, welchen die Functionen

$$\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \ldots,\quad \frac{\partial A_m}{\partial \alpha_{m+1}}$$

gleich werden müssen. Substituirt man für $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ diese Functionen, so werden die Gleichungen (2) identisch.

Man kann aber zu den Gleichungen (1) auch noch die anderen Integralgleichungen

$$(3)\quad \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1},\quad \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2},\quad \ldots,\quad \beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}$$

hinzunehmen und erhält dann folgendes System von Integralgleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} \delta_1 = \gamma_1 \dfrac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_{m+1}}, \\ \delta_2 = \gamma_1 \dfrac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_{m+1}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_k = \gamma_1 \dfrac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_{m+1}}, \end{cases}$$

wo die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ der Kürze halber für die Functionen $\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \ldots, \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_k}$ gesetzt sind. Erhält man durch Substitution der Werthe

$$\alpha_1 = A_1,\quad \alpha_2 = A_2,\quad \ldots,\quad \alpha_m = A_m$$

in die Gleichungen (3) die Gleichungen

$$\beta_1 = B_1,\quad \beta_2 = B_2,\quad \ldots,\quad \beta_k = B_k,$$

so werden $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ die constanten Werthe, welchen nach den im vorigen §. angestellten Betrachtungen die Functionen

$$\frac{\partial B_1}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \frac{\partial B_2}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \ldots,\quad \frac{\partial B_k}{\partial \alpha_{m+1}}$$

gleich werden. Die Gleichungen (4) werden identisch, wenn man in denselben für $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ die aequivalenten Ausdrücke

$$(5)\quad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\partial A_1}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \gamma_2 = \dfrac{\partial A_2}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \ldots,\quad \gamma_m = \dfrac{\partial A_m}{\partial \alpha_{m+1}}, \\ \delta_1 = \dfrac{\partial B_1}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \delta_2 = \dfrac{\partial B_2}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \ldots,\quad \delta_k = \dfrac{\partial B_k}{\partial \alpha_{m+1}} \end{cases}$$

substituirt. Die Werthe, welche die Constanten

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_m,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_k$$

in den Integralgleichungen (2) und (4) oder in den Integralgleichungen (5) annehmen, sind Functionen der Constanten

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_k.$$

Man erhält diese Functionen, wenn man in (5) die Werthe von $q_1, q_2, \ldots, q_m$, durch t und die willkürlichen Constanten

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$$

ausgedrückt, substituirt, nach welcher Substitution die Variabele t aus den Ausdrücken rechts vom Gleichheitszeichen ganz herausgehen muss. Man kann daher in (5) auch $t = 0$ setzen, und für $q_1, q_2, \ldots, q_m$ gleichzeitig die Functionen der willkürlichen Constanten substituiren, welche ihren Anfangswerthen gleich sind. Aehnliche Formeln, wie die vorstehenden, erhält man in Bezug auf jede der übrigen überzähligen willkürlichen Constanten $\alpha_{m+2}, \alpha_{m+3}, \ldots, \alpha_k$.

Die Gleichungen (2) und (4) kann man auch folgendermassen schreiben:

$$
(6) \quad \left\{
\begin{aligned}
0 &= \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q_1} + \gamma_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial q_1} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial \beta_m}{\partial q_1} + \frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial q_1}, \\
0 &= \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q_2} + \gamma_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial q_2} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial \beta_m}{\partial q_2} + \frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial q_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q_m} + \gamma_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial q_m} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial \beta_m}{\partial q_m} + \frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial q_m}, \\
\delta_1 &= \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial \beta_m}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_1}, \\
\delta_2 &= \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} + \gamma_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial \beta_m}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_k &= \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_k} + \gamma_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial \beta_m}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_k},
\end{aligned}
\right.
$$

wo die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1}$ immer die Functionen (3) bedeuten. Es ist aber β_{m+1} einer Function der Grössen

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_m, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_k$$

gleich, welche ausser diesen Grössen keine der Variabeln enthält, wie wir oben gesehen haben. Substituirt man diese Function für β_{m+1}, so zeigen die Gleichungen (6), *dass die Constanten* $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_m$ *den partiellen Differentialquotienten von* β_{m+1}, *nach* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *genommen, die Constanten* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ *den partiellen Differentialquotienten von* β_{m+1}, *nach* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *genommen, gleich werden, oder dass man die Gleichungen hat:*

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_{m+1}} = -\frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \beta_1}, \quad \delta_1 = \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_{m+1}} = \frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_1}, \\
\gamma_2 &= \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_{m+1}} = -\frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \beta_2}, \quad \delta_2 = \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_{m+1}} = \frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\gamma_m &= \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha_{m+1}} = -\frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \beta_m}, \quad \delta_k = \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_{m+1}} = \frac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_k},
\end{aligned}
$$

wo in jeder Gleichung in den partiellen Differentialquotienten links die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ *als Functionen der Variabeln und der überzähligen Constanten* $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_k$ *betrachtet werden, in den partiellen Differentialquotienten rechts dagegen die Grösse* β_{m+1} *als Function der Constanten* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Es folgt hieraus von selbst, dass die Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ constante Werthe haben.

Man sieht aus der vorstehenden Untersuchung, dass der in den Formeln (4) des vorigen §. enthaltene allgemeine Satz für den besonderen hier betrachteten Fall sich unmittelbar daraus ergiebt, dass in demselben die Constanten $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots, \beta_k$ Functionen der willkürlichen Constanten

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_k, \ \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_m$$

sind. Die complicirteren Formeln, welche sich durch *wiederholte* Differentiation nach den überzähligen Constanten ergeben, übergehe ich, da auch diese Formeln sich für den hier betrachteten Fall daraus ableiten lassen, dass die Constanten $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots, \beta_k$ Functionen der übrigen sind.

§. 4. Wie man aus einer beliebigen vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ihre sämmtlichen übrigen Lösungen ableitet.

Lagrange hat gezeigt, wie man aus jeder vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung *allgemeinere* ableiten kann. Es gehört diese wichtige Untersuchung zu seinen frühesten Arbeiten über die partiellen Differentialgleichungen. Aber zur Vollständigkeit seiner Theorie gehört der Nachweis, welchen er nicht gegeben hat, dass die von ihm eingeführten allgemeinen Formen wirklich alle Lösungen umfassen, oder dass die *willkürlichen Functionen*, welche sie enthalten, immer so bestimmt werden können, dass eine gegebene Lösung erhalten wird. Es scheint ferner die Natur der verschiedenen allgemeinen Formen nicht in das rechte Licht gesetzt worden zu sein. Ich werde im Folgenden eine neue Darstellung dieses Gegenstandes zu geben versuchen.

Es sei eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben, in welcher wieder die gesuchte Function S heisse und die Grössen

$$t, \ q_1, \ q_2, \ \ldots, \ q_m$$

die unabhängigen Variabeln seien. Man kenne irgend eine vollständige Lösung dieser partiellen Differentialgleichung mit den willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

$$S = f(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m).$$

Setzt man in f für $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ beliebige Functionen der übrigen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ und nimmt nach dieser Substitution die partiellen Differentialquotienten von f, so will ich der Unterscheidung wegen dieselben in Klammern einschliessen, so dass also z. B.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{i-1}}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

ist, und ferner, da die Functionen von $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$, welche man für $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$ gesetzt hat, nicht noch ausserdem die Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ enthalten:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial q_m}\right) = \frac{\partial f}{\partial q_m}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Man bestimme jetzt die Grössen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ als Functionen der unabhängigen Variabeln mittelst der Gleichungen

$$(1) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_{i+1}}\right) = 0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}\right) = 0,$$

so werden auch $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ Functionen der unabhängigen Variabeln. Aus den Gleichungen (1) folgt, dass die partiellen Differentialquotienten von f, nach den Variabeln $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ genommen, dieselben Werthe erhalten, ob man vor oder nach der partiellen Differentiation für $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ ihre veränderlichen Werthe substituirt. Wird durch diese Substitution

$$(2) \quad f = F,$$

so hat man demnach auch:

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial q_m} = \frac{\partial f}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t},$$

wenn man nach der partiellen Differentiation für $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ihre veränderlichen Werthe setzt. Die gegebene partielle Differentialgleichung giebt eine *identische* Gleichung zwischen den Grössen

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m, \quad t,$$

in welcher ausserdem nicht noch die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vorkommen. Es bleibt diese Gleichung daher identisch, was für Werthe man diesen Grössen auch beilegt. Setzt man aber dafür die veränderlichen Werthe, welche nach der im Vorhergehenden angegebenen Art bestimmt sind, so verwandeln sich die vorstehenden Grössen in

$$F, \quad \frac{\partial F}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m, \quad t,$$

oder es ist $S = F$ ebenfalls eine Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung.

Ich will jetzt zeigen, dass man auf die angegebene Art alle Lösungen der gegebenen partiellen Differentialgleichung erhält. Ist nämlich umgekehrt F irgend eine beliebig gegebene Lösung, so will ich beweisen, dass man diese bestimmte Lösung aus jeder beliebigen vollständigen Lösung f erhalten kann, wenn man eine bestimmte Zahl i ihrer $m+1$ willkürlichen Constanten bestimmten Functionen der übrigen gleich setzt und für diese letzteren wiederum die durch die Gleichungen (1) bestimmten Functionen substituirt. *Es ist daher, wenn F und f gegeben sind, zuerst die Zahl i zu bestimmen, oder festzustellen, wie viele der Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ man als Functionen der übrigen zu setzen hat; alsdann sind diese Functionen selbst zu ermitteln.*

Da die beiden Functionen f und F Lösungen derselben Differentialgleichung sind, so ist von den $m+2$ Gleichungen (2) und (3) eine die Folge der übrigen, so dass sie die Stelle von nur $m+1$ Gleichungen vertreten, zu welchen man die Gleichungen

$$(4) \quad f = F, \quad \frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial F}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = \frac{\partial F}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial q_m} = \frac{\partial F}{\partial q_m}$$

wählen kann. Aus diesen $m+1$ Gleichungen können immer die Werthe der $m+1$ Functionen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ bestimmt werden. Denn diese Grössen kommen in diesen Gleichungen nur in den Ausdrücken

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

vor, welche, als Functionen von $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ betrachtet, von einander unabhängig sind, weil sonst die Function f noch einer zweiten partiellen Differentialgleichung, welche die willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ nicht enthält, genügen würde und daher nach der oben gegebenen Definition keine *vollständige* Lösung sein könnte. Man kann daher die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ umgekehrt und auf identische Weise als Functionen der Grössen

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial q_m}, \quad t, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m$$

darstellen und erhält hieraus, wenn man zufolge (4) für $f, \frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_m}$ die Functionen $F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial q_m}$ setzt, die verlangten Werthe der

Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, die ich mit

$$(5) \quad A = \alpha, \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad A_m = \alpha_m$$

bezeichnen will.

Durch Substitution der Werthe (5) für $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ werden die Gleichungen (4) identisch, und dasselbe gilt dann von der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t},$$

welche eine Folge von ihnen ist. Ich will nun beweisen, *dass die Functionen $A, A_1, A_2, \ldots, A_m$ nicht von einander unabhängig sind.*

Wenn man nämlich die identische Gleichung

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, A, A_1, A_2, \ldots, A_m) = F$$

partiell nach $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ differentiirt, so erhält man, weil durch die Gleichungen (5) die Gleichungen (3) identisch werden,

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial A}\dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial A_1}\dfrac{\partial A_1}{\partial t} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial A_m}\dfrac{\partial A_m}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial A}\dfrac{\partial A}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f}{\partial A_1}\dfrac{\partial A_1}{\partial q_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial A_m}\dfrac{\partial A_m}{\partial q_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial A}\dfrac{\partial A}{\partial q_2} + \dfrac{\partial f}{\partial A_1}\dfrac{\partial A_1}{\partial q_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial A_m}\dfrac{\partial A_m}{\partial q_2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial A}\dfrac{\partial A}{\partial q_m} + \dfrac{\partial f}{\partial A_1}\dfrac{\partial A_1}{\partial q_m} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial A_m}\dfrac{\partial A_m}{\partial q_m} = 0. \end{cases}$$

Es sind dies zwischen den $m+1$ Grössen

$$\frac{\partial f}{\partial A}, \quad \frac{\partial f}{\partial A_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial A_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial A_m}$$

eine gleiche Anzahl linearer Gleichungen, in denen die von jenen Grössen unabhängigen Glieder gleich Null sind. Man kann daher aus ihnen diese Grössen eliminiren, wodurch man

$$\Sigma \pm \frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial A_1}{\partial q_1}\frac{\partial A_2}{\partial q_2}\cdots\frac{\partial A_m}{\partial q_m} = 0$$

erhält; d. h. es verschwindet die Functionaldeterminante von $A, A_1, A_2, \ldots, A_m$, oder diese Functionen sind von einander nicht unabhängig.

Da von den Functionen $A, A_1, A_2, \ldots, A_m$ bewiesen ist, dass sie von einander nicht unabhängig sind, so werden eine oder mehrere von ihnen Functionen der übrigen sein. Es seien i von diesen Grössen Functionen der übrigen. Die $m+1$ Gleichungen (4) lassen sich in diesem Falle durch successive Elimination immer in die Form der Gleichungen

$$\begin{aligned} &(7) \quad \alpha = \mathfrak{A}, \quad \alpha_1 = \mathfrak{A}_1, \quad \alpha_2 = \mathfrak{A}_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1} = \mathfrak{A}_{i-1}, \\ &(8) \quad q_i = Q, \quad q_{i+1} = Q_1, \quad q_{i+2} = Q_2, \quad \ldots, \quad q_m = Q_{m-i} \end{aligned}$$

bringen, wo die Functionen $Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-i}$ die Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$, die Functionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{i-1}$ nur die Grössen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ enthalten. Die Zahl und Beschaffenheit der Gleichungen (7) ist durch die Gleichungen (4), also durch die beiden gegebenen Lösungen f und F, von denen die eine eine vollständige, die andere eine beliebige ist, vollkommen bestimmt. Die Zahl i wird wenigstens gleich 1 sein und kann den Werth $m+1$ erreichen. Es wird daher von den Gleichungen (7) immer wenigstens eine geben, und dieses wird sogar im Allgemeinen der Fall sein. Die Gleichungen (8) dagegen werden nicht stattfinden, wenn $i = m+1$ ist, in welchem Falle die Grössen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ Constanten werden. Die Functionen f und F kommen dann dadurch mit einander überein, dass man für $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ constante Werthe setzt, oder die gegebene Lösung F ist in der vollständigen Lösung f selbst enthalten. Aus den Gleichungen (8) erhält man $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ als Functionen der unabhängigen Variabeln:

$$(9) \quad A_i = \alpha_i, \quad A_{i+1} = \alpha_{i+1}, \quad \ldots, \quad A_m = \alpha_m.$$

Umgekehrt folgen aus (9) die Gleichungen (8); es müssen daher die Functionen $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_m$ in Bezug auf die Grössen $q_i, q_{i+1}, \ldots, q_m$ von einander unabhängig sein. Setzt man in (7) für $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ ihre Werthe (9), so erhält man die Werthe von $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ als Functionen von $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_m$:

$$\alpha = A, \quad \alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = A_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1} = A_{i-1}.$$

Substituirt man diese Functionen für $A, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ in die identische Gleichung

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, A, A_1, A_2, \ldots, A_m) = F$$

und differentiirt hierauf diese identische Gleichung partiell nach den Grössen $q_i, q_{i+1}, \ldots, q_m$, so erhält man wegen (3):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial A_i}\right)\frac{\partial A_i}{\partial q_i}+\left(\frac{\partial f}{\partial A_{i+1}}\right)\frac{\partial A_{i+1}}{\partial q_i}+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial A_m}\right)\frac{\partial A_m}{\partial q_i}=0,\\
&\left(\frac{\partial f}{\partial A_i}\right)\frac{\partial A_i}{\partial q_{i+1}}+\left(\frac{\partial f}{\partial A_{i+1}}\right)\frac{\partial A_{i+1}}{\partial q_{i+1}}+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial A_m}\right)\frac{\partial A_m}{\partial q_{i+1}}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\left(\frac{\partial f}{\partial A_i}\right)\frac{\partial A_i}{\partial q_m}+\left(\frac{\partial f}{\partial A_{i+1}}\right)\frac{\partial A_{i+1}}{\partial q_m}+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial A_m}\right)\frac{\partial A_m}{\partial q_m}=0,
\end{aligned}$$

wobei die Klammern andeuten, dass vor den partiellen Differentiationen von f die Grössen $A, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ durch die aequivalenten Functionen von $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_m$ ersetzt worden sind. In den vorstehenden, zwischen den $m+1-i$ Grössen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial A_i}\right),\ \left(\frac{\partial f}{\partial A_{i+1}}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{\partial f}{\partial A_m}\right)$$

stattfindenden linearen Gleichungen fehlen die ganz constanten Glieder. Die Determinante dieser Gleichungen

$$\Sigma \pm \frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial A_{i+1}}{\partial q_{i+1}}\cdots\frac{\partial A_m}{\partial q_m}$$

kann nicht verschwinden, weil $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_m$ in Bezug auf $q_i, q_{i+1}, \ldots, q_m$ von einander unabhängige Functionen sind. Es müssen daher die Grössen verschwinden, welche in den linearen Gleichungen die Stelle der Unbekannten einnehmen, wodurch man die Gleichungen

$$(10)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial A_i}\right)=0,\ \left(\frac{\partial f}{\partial A_{i+1}}\right)=0,\ \ldots,\ \left(\frac{\partial f}{\partial A_m}\right)=0$$

erhält. Auf diese Weise kommt man auf dem umgekehrten Wege zu den Gleichungen (1) zurück, von welchen oben ausgegangen worden ist, um aus der vollständigen Lösung andere in ihr nicht enthaltene abzuleiten, und man sieht daher, dass man auf dem angegebenen Wege von irgend einer vollständigen Lösung zu jeder beliebigen anderen gelangen kann, und dass sowohl die Zahl als die Natur der Relationen, welche zwischen den willkürlichen Constanten der vollständigen Lösungen angenommen werden müssen, durch die Lösung, zu welcher man gelangen will, bestimmt ist.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen nur einen einzigen Ausnahmefall zu. Es ist nämlich oben angenommen worden, dass die Determinante der linearen Gleichungen (6) verschwindet, weil ihre ganz constanten Glieder sämmtlich gleich Null sind. Diese Annahme ist aber in dem Falle nicht nothwendig, wenn sämmtliche Grössen

$$\frac{\partial f}{\partial A},\ \frac{\partial f}{\partial A_1},\ \frac{\partial f}{\partial A_2},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial A_m}$$

verschwinden. Dieser Fall kann in der That eintreten. Hat man nämlich die Functionen $A, A_1, A_2, \ldots, A_m$ durch die Gleichungen

$$(11)\quad \frac{\partial f}{\partial A}=0,\ \frac{\partial f}{\partial A_1}=0,\ \frac{\partial f}{\partial A_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial A_m}=0$$

bestimmt, und setzt dann

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, A, A_1, A_2, \ldots, A_m)=F,$$

so wird

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}=\frac{\partial F}{\partial q_1},\ \frac{\partial f}{\partial q_2}=\frac{\partial F}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial q_m}=\frac{\partial F}{\partial q_m},\ \frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial t},$$

und daher ist die zwischen f und seinen partiellen Differentialquotienten bestehende Gleichung auch für F gültig oder F eine Lösung. Aber es kann nur für ganz besonders gebildete, leicht erkennbare partielle Differentialgleichungen sich ereignen, dass die Gleichungen (11) *legitim* sind, wie ich diesen Begriff in meiner Abhandlung über den Multiplicator näher entwickelt habe. Für diese besonderen partiellen Differentialgleichungen kann man diese sogenannte *singuläre* Lösung, welche man mittelst (11) aus der vollständigen ableitet, auch *a priori* aus der partiellen Differentialgleichung ohne eine Integration finden. Für alle anderen partiellen Differentialgleichungen haben die Functionen

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha},\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_1},\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}$$

immer den Charakter von Exponentialgrössen oder von Brüchen und können nicht als verschwindend gesetzt werden, ohne den Variabeln unendliche Werthe beizulegen. Ich werde diese singulären Fälle hier um so eher übergehen, als sie in dem Falle der Dynamik nicht eintreten können, in welchem die gesuchte Function in der partiellen Differentialgleichung fehlt. Denn man kann für diesen Fall die Constante α als bloss durch Addition mit der vollständigen Lösung f verbunden ansehen, wodurch man

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=1$$

erhält, so dass man also die Grösse $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ nicht als verschwindend ansehen darf.

§. 5. Wie man aus *einer* vollständigen Lösung *alle* vollständigen Lösungen ableiten kann, wenn die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function selbst nicht enthält, und wie alle verschiedenen vollständigen Lösungen dieselben dynamischen Integralgleichungen geben.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, dass man aus einer vollständigen Lösung f, welche die willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ enthält, alle anderen ableiten kann, wenn man für einige der willkürlichen Constanten, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$, willkürliche Functionen der übrigen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ setzt und dann $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ als Functionen der unabhängigen Variabeln bestimmt. Wenn die willkürlichen Functionen von $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$, welche man für $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ setzt, $m+1$ willkürliche Constanten

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m$$

enthalten, so wird die abgeleitete neue Lösung F wieder, wie die Lösung f, von der man ausgegangen ist, $m+1$ willkürliche Constanten enthalten. Es fragt sich, auf welche Art die neuen willkürlichen Constanten in die angenommenen willkürlichen Functionen eingehen müssen, damit die neue Lösung F ebenfalls als eine vollständige Lösung angesehen werden kann.

Ich will diese Untersuchung mit einem einfacheren Falle beginnen, der aber in Bezug auf die dynamischen Probleme von hauptsächlichem Interesse ist. Ich will nämlich annehmen, dass die gegebene partielle Differentialgleichung nicht S selbst enthält, und demgemäss α mit f bloss durch Addition verbunden ist, ferner dass bloss diese eine Grösse α durch die übrigen mittelst einer Gleichung

$$\alpha = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, a_1, a_2, \ldots, a_m)+a$$

ausgedrückt wird, wo $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ die neuen willkürlichen Constanten bedeuten. Die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ werden als Functionen der unabhängigen Variabeln durch die Gleichungen

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m}=0$$

bestimmt, worauf die neue Lösung

$$F = f(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)+\varphi+a$$

wird.

Zufolge der oben für die Vollständigkeit einer Lösung gegebenen Kriterien wird die Function F, welche ausser der mit ihr durch blosse Addition verbun-

denen willkürlichen Constante a noch die m anderen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ enthält, dann immer eine *vollständige* Lösung, wenn man aus den m Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=b_1, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2}=b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_m}=b_m$$

die Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$ durch t und die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ ausgedrückt erhalten kann. Zufolge (1) ist aber

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_m}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_m}.$$

Es müssen also die Werthe von $q_1, q_2, \ldots, q_m$, durch $t, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ ausgedrückt, aus den Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}=b_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}=b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}=b_m$$

erhalten werden können. Aber weil f eine vollständige Lösung ist, kann man $q_1, q_2, \ldots, q_m$ identisch durch

$$t, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}$$

ausdrücken. Die Gleichungen (1) ergeben daher $q_1, q_2, \ldots, q_m$ als Functionen von

$$t, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m}$$

oder von

$$t, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m.$$

Es wird daher das Verlangte erfüllt, wenn man aus den Gleichungen (2) die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ als Functionen von

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_m$$

erhalten kann. *Man erhält daher aus der vollständigen Lösung*

$$S = f(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)+\alpha$$

durch Elimination von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ aus den Gleichungen

$$F = f+\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, a_1, a_2, \ldots, a_m)+a,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m}=0$$

eine neue vollständige Lösung mit den willkürlichen Constanten $a, a_1, a_2, \ldots a_m$, wenn die willkürliche Function φ so beschaffen ist, dass die Functionen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}$$

in Bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *von einander unabhängig sind, oder auch, was dasselbe ist, wenn die Functionen*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial a_m}$$

in Bezug auf $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *von einander unabhängig sind.*

Vermöge der ersten Bestimmung kann man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ identisch durch $a_1, a_2, \ldots, a_m, \frac{\partial\varphi}{\partial a_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial a_m}$, vermöge der letzten Bestimmung kann man $a_1, a_2, \ldots, a_m$ identisch durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha_m}$ ausdrücken. Setzt man daher

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1} = b_1, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_m} = b_m, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial \alpha_m} = -\beta_m, \end{cases}$$

so kann man von den beiden Systemen von Grössen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$$

und

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$$

jede Grösse des einen Systems durch die Grössen des anderen ausdrücken. Sind dann die Grössen des einen Systems willkürliche, von einander unabhängige Constanten, so sind es auch die Grössen des anderen Systems.

Wenn man zwischen den Variabeln $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ und den willkürlichen Constanten des ersten Systems die Gleichungen

$$(4)\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

aufstellt, welches die endlichen Integralgleichungen sind, und mittelst der Gleichungen (3) statt der willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ die willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ einführt, so verwandeln sich die Gleichungen (4) in:

$$(5)\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha_m} = 0.$$

Aus (5) ergeben sich die Werthe der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, durch $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, a_1, a_2, \ldots, a_m$ ausgedrückt. Substituirt man diese Werthe in die Function

$$F = f(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) + \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

in welcher ich die durch blosse Addition hinzukommende Constante fortgelassen habe, so wird F ebenfalls eine Function der Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, a_1, a_2, \ldots, a_m$, und man erhält wegen (5):

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_m} = \frac{\partial\varphi}{\partial a_m},$$

und daher wegen (3):

$$(6)\quad \frac{\partial F}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_m} = b_m.$$

Man sieht also, dass man dieselben endlichen Integralgleichungen erhält, ob man zu ihrer Bildung die vollständige Lösung f, oder ob man die vollständige Lösung F anwendet. Denn wenn man für die willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ die willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ einführt, verwandeln sich, wie wir gesehen haben, die Gleichungen (4) in (6). Ebenso verwandeln sich auch die intermediären Integralgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial q_m} = p_m$$

in die analog gebildeten

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial q_m} = p_m,$$

da aus (5) auch die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial q_m} = \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

folgen.

Ich will jetzt annehmen, dass man für $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ Functionen der Grössen

$$\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m, a_1, a_2, \ldots, a_m$$

setzt, welche ich mit

$$(7)\quad \varphi = \alpha, \quad \varphi_1 = \alpha_1, \quad \varphi_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{i-1} = \alpha_{i-1}$$

bezeichnen will, und aus der vollständigen Lösung f eine neue Lösung F dadurch ableitet, dass man mittelst der Gleichungen

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_i} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_i} + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_{i+1}} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_{i+1}} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_{i+1}} + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{i+1}} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{i+1}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_m} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = 0 \end{cases}$$

die Werthe der Grössen $\alpha_i,\ \alpha_{i+1},\ \ldots,\ \alpha_m$ durch

$$t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$$

ausdrückt, und diese Werthe in die Function

$$f(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{i-1},\ \alpha_i,\ \alpha_{i+1},\ \ldots,\ \alpha_m)+\varphi = F$$

substituirt. Die Grössen $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ bedeuten hier wieder willkürliche Constanten, und es fragt sich, wie dieselben in die Functionen

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{i-1}$$

eingehen müssen, damit die Lösung F eine vollständige sei.

Man erhält zufolge (8):

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_2} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_2} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_m} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_m} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_m} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_m} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_m}. \end{cases}$$

Betrachtet man $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ als willkürliche Constanten, so folgt aus den endlichen Integralgleichungen

$$(10)\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$

wo $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$ ebenfalls willkürliche Constanten bedeuten, und aus den Gleichungen (7) und (9), dass auch die Functionen $\frac{\partial F}{\partial a_1},\ \frac{\partial F}{\partial a_2},\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial a_m}$ constanten Werthen gleich werden, welche ich mit

$$(11)\quad b_1 = \frac{\partial F}{\partial a_1},\quad b_2 = \frac{\partial F}{\partial a_2},\quad \ldots,\quad b_m = \frac{\partial F}{\partial a_m}$$

bezeichnen will. Wenn zwischen diesen Constanten $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$ und den willkürlichen Constanten $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ keine Relation stattfindet, so ist F eine vollständige Lösung, und die vollständigen endlichen Integralgleichungen können auch durch die Gleichungen (11) dargestellt werden. Die Gleichungen, welche die beiden Systeme willkürlicher Constanten mit einander verbinden, sind zufolge (7), (8), (10), (11):

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \varphi_1,\ \ \alpha_2 = \varphi_2,\ \ \ldots,\ \ \alpha_{i-1} = \varphi_{i-1}, \\ -\beta_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_i} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + \beta_{i-1}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_i}, \\ -\beta_{i+1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{i+1}} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_{i+1}} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_{i+1}} + \cdots + \beta_{i-1}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_{i+1}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\beta_m = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_m} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_m} + \cdots + \beta_{i-1}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_m}; \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} + \cdots + \beta_{i-1}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_1}, \\ b_2 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_2} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_2} + \cdots + \beta_{i-1}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_m = \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_m} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_m} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_m} + \cdots + \beta_{i-1}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_m}. \end{cases}$$

Kann man aus (13) die Werthe von

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{i-1},\ \alpha_i,\ \alpha_{i+1},\ \ldots,\ \alpha_m$$

durch die Constanten des zweiten Systems $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$ bestimmen, so erhält man aus (12) die Werthe der übrigen Constanten des ersten Systems

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{i-1},\ \beta_i,\ \beta_{i+1},\ \ldots,\ \beta_m$$

durch dieselben Grössen $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$ bestimmt. Kann man aus (12) die Werthe von $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ durch die Constanten des ersten Systems $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$ ausgedrückt erhalten, so geben die Gleichungen (13) auch die Werthe von $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$ durch die Constanten des ersten Systems $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$ ausgedrückt. Beide Bedingungen aber finden immer gleichzeitig statt. Setzt man nämlich

$$\varphi + \beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + \cdots + \beta_{i-1}\varphi_{i-1} = \Phi,$$

so dass

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} = \varphi_1,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2} = \varphi_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{i-1}} = \varphi_{i-1}$$

ist, so fordert die erstere Bedingung, dass die in Bezug auf die Grössen $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{i-1},\ \alpha_i,\ \alpha_{i+1},\ \ldots,\ \alpha_m$ gebildete Functionaldeterminante der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1},\quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_m},$$

die zweite Bedingung, dass die in Bezug auf die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gebildete Functionaldeterminante der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_{i-1}}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial a_i}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial a_{i+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial a_m}$$

nicht verschwindet. Beide Functionaldeterminanten sind aber derselben Grösse, welche ich mit Δ bezeichnen will, gleich. Wenn dieses Δ nicht verschwindet, kann man nach dem Vorhergehenden mittelst der Gleichungen (12) und (13) die beiden Systeme von Grössen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$$

und

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$$

durch einander ausdrücken, woraus folgt, dass, wenn die Grössen des einen Systems von einander unabhängige willkürliche Constanten sind, auch die Grössen des anderen Systems als solche angesehen werden können, so dass zwischen den Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ keine Relation stattfindet. Wenn daher Δ nicht verschwindet, so wird F eine vollständige Lösung, und wenn man mittelst der Gleichungen (12) und (13) die willkürlichen Constanten des zweiten Systems für die des ersten Systems in die vollständigen endlichen Integralgleichungen (10) einführt, so erhalten sie die Form der Integralgleichungen (11).

Ich bemerke, dass die Gleichung $\Delta = 0$, welche stattfinden muss, wenn die Lösung F keine vollständige ist, in mehrere andere zerfällt. Es ist nämlich Δ in Bezug auf die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}$ eine ganze rationale Function der $(m-i+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, von der jedes einzelne Glied besonders für sich verschwinden muss. Die Gleichung $\Delta = 0$ zerfällt daher in

$$\frac{m.(m-1)\ldots i}{1.2\ldots(m-i+1)}$$

andere, von den Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}$ freie Gleichungen.

§. 6. Ueber die bei der Ableitung einer vollständigen Lösung aus einer anderen auftretenden Functionaldeterminanten.

Wenn man die $2m$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ durch $2m$ andere $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ oder umgekehrt diese durch jene aus-

drückt, so haben nach einem bekannten Satze die in Bezug auf $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ gebildete Functionaldeterminante von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ und die in Bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ gebildete Functionaldeterminante von $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ reciproke Werthe. Wenn daher die eine Functionaldeterminante gleich ± 1 wird, erhält auch die andere diesen Werth. Ich will jetzt zeigen, dass die erste der beiden Functionaldeterminanten und also auch die zweite diesen Werth annimmt, wenn zwischen den $4m$ Grössen die Gleichungen (12) und (13) gelten.

Eine Functionaldeterminante ändert nach einem ebenfalls bekannten Satze ihren Werth nicht, wenn man in die Ausdrücke einiger der Functionen die anderen einführt, und diese bei den partiellen Differentiationen als constant betrachtet. So enthalten die Ausdrücke von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_m$, die durch die Gleichungen (12) gegeben werden, die anderen Functionen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}$. Man kann daher bei Bildung der Functionaldeterminante von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ in Bezug auf $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_m$ die in (12) rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Functionen setzen, und bei ihrer partiellen Differentiation die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ als constant betrachten. Da diese Functionen die Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ nicht enthalten, so wird die Functionaldeterminante das Product zweier einfacheren, nämlich gleich

$$\Sigma \pm \frac{\partial\alpha_1}{\partial a_1}\frac{\partial\alpha_2}{\partial a_2}\cdots\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial a_{i-1}}\frac{\partial\beta_i}{\partial a_i}\frac{\partial\beta_{i+1}}{\partial a_{i+1}}\cdots\frac{\partial\beta_m}{\partial a_m}$$
$$\times \Sigma \pm \frac{\partial\beta_1}{\partial b_1}\frac{\partial\beta_2}{\partial b_2}\cdots\frac{\partial\beta_{i-1}}{\partial b_{i-1}}\frac{\partial\alpha_i}{\partial b_i}\frac{\partial\alpha_{i+1}}{\partial b_{i+1}}\cdots\frac{\partial\alpha_m}{\partial b_m}.$$

Die Ausdrücke von $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$, welche bei Bildung des zweiten Factors dieses Productes gebraucht werden, erhält man durch Auflösung der Gleichungen (13). Setzt man für diesen Factor, wie es verstattet ist, den reciproken Werth der in Bezug auf $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ gebildeten Determinante von $b_1, b_2, \ldots, b_m$, so verwandelt sich das vorstehende Product in

$$\frac{\Sigma \pm \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial a_1}\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial a_2}\cdots\dfrac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial a_{i-1}}\dfrac{\partial\beta_i}{\partial a_i}\dfrac{\partial\beta_{i+1}}{\partial a_{i+1}}\cdots\dfrac{\partial\beta_m}{\partial a_m}}{\Sigma \pm \dfrac{\partial b_1}{\partial\beta_1}\dfrac{\partial b_2}{\partial\beta_2}\cdots\dfrac{\partial b_{i-1}}{\partial\beta_{i-1}}\dfrac{\partial b_i}{\partial\alpha_i}\dfrac{\partial b_{i+1}}{\partial\alpha_{i+1}}\cdots\dfrac{\partial b_m}{\partial\alpha_m}}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist, abgesehen vom Vorzeichen, die in Bezug auf die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gebildete Functionaldeterminante von

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{i+1}}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_m}$$

oder von

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{i-1}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{i+1}}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_m}.$$

Der Nenner des Bruches ist dagegen die in Bezug auf die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ gebildete Functionaldeterminante von

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial a_m},$$

und da nach einem oben bemerkten Satze diese beiden Functionaldeterminanten bis auf das Vorzeichen identisch sind, so wird der Bruch gleich ± 1, wie zu beweisen war. Es ergiebt sich hieraus das folgende

Theorem I.

„*Wenn zwischen den* $4m$ *Grössen*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m,$$
$$a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$$

die $2m$ *Gleichungen* (12) *und* (13) *stattfinden, in welchen* $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$ *Functionen von*

$$\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m, a_1, a_2, \ldots, a_m$$

sind, und man mittelst dieser Gleichungen die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *als Functionen von* $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ *oder die Grössen* $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ *als Functionen von* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *ausdrückt, so ist in beiden Fällen die Functionaldeterminante gleich* ± 1."

Wenn i gleich 1 ist, reducirt sich die Function Φ auf φ, und die zwischen den $4m$ Grössen stattfindenden Gleichungen werden die obigen Gleichungen (3). Man erhält dann das folgende einfachere

Theorem II.

„*Wenn* φ *eine Function von* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, a_1, a_2, \ldots, a_m$ *ist, und man mittelst der Gleichungen*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = b_m,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = -\beta_m$$

die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *als Functionen der Grössen* $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ *oder diese Grössen als Functionen von jenen ausdrückt, so wird in beiden Fällen die Functionaldeterminante gleich* ± 1".

Wenn man aus den dynamischen Integralgleichungen

$$(A) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \quad \dfrac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial S}{\partial q_m} = p_m, \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_m} = \beta_m \end{cases}$$

die Functionen der Variabeln bestimmt, welche den willkürlichen Constanten gleich werden, oder die Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ als Functionen von t und den willkürlichen Constanten ausdrückt, so folgt aus dem vorstehenden Theorem, dass in beiden Fällen die Functionaldeterminante gleich ± 1 wird, wenn man bei der Bildung der zweiten die Grösse t als constant betrachtet.

Legt man der Bildung der dynamischen Integralgleichungen eine andere vollständige Lösung F zu Grunde, welche die willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ enthält, und bezeichnet die willkürlichen Constanten, welche ihren nach $a_1, a_2, \ldots, a_m$ genommenen partiellen Differentialquotienten gleich werden, respective mit $b_1, b_2, \ldots, b_m$, so muss auch die in Bezug auf $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ gebildete Functionaldeterminante von $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ den Werth ± 1 erhalten, da der vorstehende Satz in Bezug auf jede vollständige Lösung gilt. Nach einem Satze über die Functionaldeterminanten unterscheiden sich die in Bezug auf dieselben Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ gebildeten Functionaldeterminanten von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ und $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ durch einen Factor, welcher der in Bezug auf die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ gebildeten Functionaldeterminante von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ gleich ist. Es muss also diese letztere Functionaldeterminante für je zwei vollständige Lösungen ebenfalls den Werth ± 1 haben, woraus sich das obige allgemeine Theorem I ergiebt, da hierbei die Art, wie die vollständigen Lösungen aus einander abgeleitet werden können, gar nicht in Betracht kommt.

Durch die Gleichungen (A) wird das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, & \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{dq_m}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_m}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{dp_m}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_m} \end{cases}$$

vollständig integrirt. Wenn man aus (A) die Functionen bestimmt, welche den willkürlichen Constanten gleich werden,

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad A_m = \alpha_m,$$
$$B_1 = \beta_1, \quad B_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad B_m = \beta_m,$$

so erhält man durch Differentiation der vorstehenden Gleichungen $2m$ lineare Gleichungen zwischen den ersten Differentialquotienten

$$\frac{dq_1}{dt}, \quad \frac{dq_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt}, \quad \frac{dp_1}{dt}, \quad \frac{dp_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt}.$$

Die Determinante dieser linearen Gleichungen wird die nach $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ gebildete Functionaldeterminante von $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$ und erhält daher dem Obigen zufolge den Werth ± 1. Hieraus folgt durch Auflösung der linearen Gleichungen ferner, *dass, wenn man von den Ausdrücken $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$, welche in den dynamischen Integralgleichungen den willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ gleich werden, die verschiedenen Functionaldeterminanten bildet, indem man die Grösse t als eine der Variabeln annimmt, dagegen immer eine der anderen Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ als constant betrachtet, diese Functionaldeterminanten, abgesehen vom Vorzeichen, respective den Functionen*

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad -\frac{\partial H}{\partial q_m}$$

gleich werden.

Aus demselben Theorem II folgt auch noch, dass, *wenn man aus den dynamischen Differentialgleichungen (B) die Grössen*

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_m, \quad \frac{dq_1}{dt}, \quad \frac{dq_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt}$$

durch Functionen von

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m, \quad \frac{dp_1}{dt}, \quad \frac{dp_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt}$$

oder diese Grössen durch Functionen von jenen ausdrückt, und die Grösse t selbst, wenn sie in diesen Functionen vorkommt, als constant betrachtet, die Functionaldeterminante in beiden Fällen den Werth ± 1 annimmt. Bei allen diesen Sätzen aber setzt man voraus, dass überhaupt aus den jedesmaligen Gleichungen die Werthe der Grössen, deren Functionaldeterminante man zu bilden hat, gezogen werden können, was z. B. bei den dynamischen Differentialgleichungen (B) nicht der Fall ist, wenn für ein ganz freies System die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ die rechtwinkligen Coordinaten der materiellen Punkte sind.

§. 7. Ausdehnung der vorhergehenden Untersuchungen auf den allgemeineren Fall, in welchem die partielle Differentialgleichung auch die gesuchte Function selbst enthält.

Ich will noch die im Vorhergehenden angestellten Untersuchungen auf den Fall ausdehnen, in welchem die partielle Differentialgleichung auch die gesuchte Function enthält.

Es enthalte die vollständige Lösung f die willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, so erhält man eine neue Lösung F mit den willkürlichen Constanten $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$, wenn man in f zunächst

$$\alpha = \varphi, \quad \alpha_1 = \varphi_1, \quad \alpha_2 = \varphi_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1} = \varphi_{i-1}$$

setzt, wo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$ Functionen von

$$\alpha_i, \quad \alpha_{i+1}, \quad \ldots, \quad \alpha_m, \quad a, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m$$

sind, und dann mittelst der Gleichungen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_{i+1}}\right) = 0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}\right) = 0$$

aus f die Grössen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ eliminirt. Die Klammern zeigen hier wieder an, dass man vor den partiellen Differentiationen von f die angegebenen Werthe von $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ substituirt hat. Um zu entscheiden, ob die Lösung F eine vollständige sei, bilde man die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha = \varphi, \quad \alpha_1 = \varphi_1, \quad \alpha_2 = \varphi_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1} = \varphi_{i-1}, \\ -\beta_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_i} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_i}, \\ -\beta_{i+1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{i+1}} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_{i+1}} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_{i+1}} + \cdots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_{i+1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\beta_m = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_m} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_m} + \cdots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_m}, \end{cases}$$

oder die Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1}+\beta_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial a_1}+\beta_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial a_1}+\cdots+\beta_{i-1}\dfrac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial a_1}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}+\beta_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial a}+\beta_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial a}+\cdots+\beta_{i-1}\dfrac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial a}}, \\ b_2 = \dfrac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\beta_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial a_2}+\beta_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial a_2}+\cdots+\beta_{i-1}\dfrac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial a_2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}+\beta_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial a}+\beta_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial a}+\cdots+\beta_{i-1}\dfrac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial a}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_m = \dfrac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_m}+\beta_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial a_m}+\beta_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial a_m}+\cdots+\beta_{i-1}\dfrac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial a_m}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}+\beta_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial a}+\beta_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial a}+\cdots+\beta_{i-1}\dfrac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial a}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (1) unterscheiden sich von (12) des §. 5 nur durch die hinzutretende Gleichung $\alpha = \varphi$ und dadurch, dass die Fuuction φ auch noch die Grösse a enthält. Die Gleichungen (2) unterscheiden sich von (13) des §. 5 nur durch den allen Ausdrücken rechts vom Gleichheitszeichen gemeinschaftlichen Nenner. Die Bedingung dafür, dass F eine vollständige Lösung sei, ist, dass man aus (1) die Werthe von $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ erhalten kann, und diese kommt, wie ich unten zeigen werde, mit der Bedingung überein, dass man aus (2) die Werthe von $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ erhalten kann. Man kann dann mittelst der $2m+1$ Gleichungen (1) und (2) sowohl die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ durch $a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$, als auch umgekehrt die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ durch $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ ausdrücken. Es verwandeln sich ferner die Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} f = S,\ \dfrac{\partial f}{\partial q_1} = p_1,\ \dfrac{\partial f}{\partial q_2} = p_2,\ \ldots,\ \dfrac{\partial f}{\partial q_m} = p_m, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1\dfrac{\partial f}{\partial \alpha},\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2\dfrac{\partial f}{\partial \alpha},\ \ldots,\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \beta_m\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \end{cases}$$

durch Anwendung der Gleichungen (1) und (2) in die analog gebildeten

$$(4)\quad \begin{cases} F = S,\ \dfrac{\partial F}{\partial q_1} = p_1,\ \dfrac{\partial F}{\partial q_2} = p_2,\ \ldots,\ \dfrac{\partial F}{\partial q_m} = p_m, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = b_1\dfrac{\partial F}{\partial a},\ \dfrac{\partial F}{\partial a_2} = b_2\dfrac{\partial F}{\partial a},\ \ldots,\ \dfrac{\partial F}{\partial a_m} = b_m\dfrac{\partial F}{\partial a}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (3) waren nach §. 1 die vollständigen Integralgleichungen des

dort aufgestellten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, indem man die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ als willkürliche Constanten betrachtete. (Die dort der Symmetrie wegen eingeführte Grösse β habe ich hier gleich 1 gesetzt.) Um statt dieser die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$, welche mit ihnen durch die Gleichungen (1) und (2) verbunden sind, als willkürliche Constanten in das System der Integralgleichungen (3) einzuführen, hat man daher nur nöthig, die eine Function f mittelst der aufgestellten Gleichungen in die Function F zu verwandeln, d. h. sie durch die Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ auszudrücken, worauf man durch blosse partielle Differentiation von F die transformirten Integralgleichungen (4) erhält.

Setzt man wieder

$$\varphi+\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2+\cdots+\beta_{i-1}\varphi_{i-1} = \Phi,$$

so werden in den Gleichungen (2) die den Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ gleich gesetzten Brüche

$$\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial a_1}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}},\quad \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial a_2}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}},\quad \ldots,\quad \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial a_m}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}}.$$

Damit aus den Gleichungen (2) die Werthe der Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ erhalten werden können, darf die nach diesen Grössen gebildete Functionaldeterminante der vorstehenden Ausdrücke, die ich mit

$$\Sigma\pm\frac{\partial b_1}{\partial\beta_1}\frac{\partial b_2}{\partial\beta_2}\cdots\frac{\partial b_{i-1}}{\partial\beta_{i-1}}\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_i}\frac{\partial b_{i+1}}{\partial\alpha_{i+1}}\cdots\frac{\partial b_m}{\partial\alpha_m}$$

bezeichne, nicht verschwinden. Aber diese Functionaldeterminante wird gleich $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}\right)^{-(m+1)}$, multiplicirt mit der nach den Grössen $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ gebildeten Functionaldeterminante der Functionen

$$\Phi,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1},\ \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2},\ \ldots,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_{i-1}},\ \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_i},\ \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_{i+1}},\ \ldots,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_m}$$

oder der Functionen

$$\Phi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{i-1},\ \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_i},\ \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_{i+1}},\ \ldots,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_m},$$

wie aus dem im §. 1 mitgetheilten Theorem I erhellt, wenn man in demselben für $f, q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ respective die Buchstaben $\Phi, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m, a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ setzt. Für die an erster

Stelle stehende Function Φ kann man auch die Function φ setzen, da eine Functionaldeterminante sich nicht ändert, wenn man zu einer der Functionen die anderen, mit beliebigen Constanten multiplicirt, addirt, wo unter Constanten alle Grössen zu verstehen sind, die von denen, nach welchen bei Bildung der Functionaldeterminante differentiirt wird, unabhängig sind. Hat man φ für Φ gesetzt, so werden die Ausdrücke, deren Functionaldeterminante in Bezug auf die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ zu bilden ist, dieselben wie die in den Gleichungen (1) rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Ausdrücke. Wenn man daher aus den Gleichungen (1) die Werthe von

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{i-1},\ \beta_i,\ \beta_{i+1},\ \ldots,\ \beta_m$$

und aus den Gleichungen (2) die Werthe von

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$$

entnimmt, so hat man

$$(5)\quad \begin{cases} \quad (-1)^{m-i+1}\Sigma\pm\dfrac{\partial b_1}{\partial\beta_1}\dfrac{\partial b_2}{\partial\beta_2}\cdots\dfrac{\partial b_{i-1}}{\partial\beta_{i-1}}\dfrac{\partial b_i}{\partial\alpha_i}\dfrac{\partial b_{i+1}}{\partial\alpha_{i+1}}\cdots\dfrac{\partial b_m}{\partial\alpha_m} \\ = \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}\right)^{-m-1}\Sigma\pm\dfrac{\partial\alpha}{\partial a}\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial a_1}\cdots\dfrac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial a_{i-1}}\dfrac{\partial\beta_i}{\partial a_i}\dfrac{\partial\beta_{i+1}}{\partial a_{i+1}}\cdots\dfrac{\partial\beta_m}{\partial a_m}. \end{cases}$$

Damit aus den Gleichungen (1) die Werthe von $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ erhalten werden können, darf die Functionaldeterminante

$$\Sigma\pm\frac{\partial\alpha}{\partial a}\frac{\partial\alpha_1}{\partial a_1}\cdots\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial a_{i-1}}\frac{\partial\beta_i}{\partial a_i}\frac{\partial\beta_{i+1}}{\partial a_{i+1}}\cdots\frac{\partial\beta_m}{\partial a_m}$$

nicht verschwinden. Die Gleichung (5) zeigt daher, dass, wenn man aus (2) die Werthe von $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ entnehmen kann, man immer auch aus (1) die Werthe von $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ erhält. Die Grösse $\frac{\partial\Phi}{\partial a}$ kann weder verschwinden, noch unendlich werden, da aus Gleichungen wie (1) und (2) keine Relation zwischen den Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$, $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ folgen kann, welche von den Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$, $\beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ frei ist.

Es seien nun

$$u = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \ldots,\ u_{2m} = 0$$

die zwischen den Grössen

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$$

einerseits und den Grössen

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$$

andererseits bestehenden Gleichungen, welche man erhält, indem man in den Gleichungen (1), (2) die auf der rechten Seite befindlichen Grössen auf die linke hinüberschafft. Es wird dann zufolge der in meiner Abhandlung „*De determinantibus functionalibus*"*) bewiesenen Formeln die Functionaldeterminante von $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ in Bezug auf $a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ oder der reciproke Werth der Functionaldeterminante von $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ in Bezug auf $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ gleich der Functionaldeterminante von $u, u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$ in Bezug auf $a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$, dividirt durch die Functionaldeterminante von $u, u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$ in Bezug auf $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Es sind ferner, abgesehen vom Vorzeichen, die Functionaldeterminanten von $u, u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$ in Bezug auf $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ und in Bezug auf $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ dieselben, wie die beiden Functionaldeterminanten, welche sich in der obigen Gleichung (5) respective auf der rechten und linken Seite des Gleichheitszeichens befinden, und deren Quotient $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right)^{m+1}$ ist. Man hat daher den folgenden Satz:

„*Wenn man durch die Gleichungen* (1) *und* (2) *die Werthe der Grössen* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *als Functionen von* $a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ *ausdrückt, so ist ihre Functionaldeterminante gleich*

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial a}+\beta_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial a}+\beta_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial a}+\cdots+\beta_{i-1}\frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial a}\right\}^{m+1}."$$

In dem den dynamischen Problemen entsprechenden Falle wird

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = 1,\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial a} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial a} = \cdots = \frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial a} = 0.$$

Der vorstehende Satz vereinfacht sich dann zu dem in §. 6 bewiesenen.

§. 8. Wie man von einer abgeleiteten Lösung zu der ursprünglichen zurückgelangt.

Ich will jetzt zeigen, wie man von einer abgeleiteten vollständigen Lösung F zu der ursprünglich gegebenen f zurückkehrt, wobei ich gleich den allgemeinen Fall betrachten werde, in welchem die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function selber enthält. Auf ähnliche Art nämlich,

*) Crelle's Journal, Bd. XXII p. 319—352; diese Ausgabe, Bd. III p. 393—438.

wie man aus f eine andere vollständige Lösung F abgeleitet hat, kann man auch aus F andere vollständige Lösungen ableiten. Man hat dann in dem Ausdruck F für einige von den Grössen $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$, z. B. $a, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, Functionen der übrigen $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m$ zu setzen, welche $m+1$ willkürliche Constanten enthalten, und nach geschehener Substitution der Werthe von $a, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ die Werthe von $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m$ so zu bestimmen, dass die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten von F gleich Null werden. *Nimmt man $k = i$ und für die Relationen, durch welche $a, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ als Functionen von $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_m$ bestimmt werden, welche ausserdem noch die willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ enthalten, dieselben Gleichungen, welche dazu dienen, aus f die Lösung F abzuleiten, nämlich die Gleichungen*

$$(1) \quad \alpha = \varphi, \;\; \alpha_1 = \varphi_1, \;\; \alpha_2 = \varphi_2, \;\; \ldots, \;\; \alpha_{i-1} = \varphi_{i-1},$$

in welchen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$ Functionen von $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m, a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ waren, so kommt man von der vollständigen Lösung F auf die ursprünglich gegebene f zurück. Man beweist dies durch die folgenden Betrachtungen.

Die Lösung F ergab sich, indem man mittelst der Gleichungen (1) und der Gleichungen

$$(2) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right) = 0, \;\; \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_{i+1}}\right) = 0, \;\; \ldots, \;\; \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}\right) = 0$$

die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ aus f eliminirte. Die Gleichung $F = f$ wird daher mittelst der Gleichungen (1) und (2) identisch. Hieraus folgt, dass umgekehrt die ursprünglich gegebene Lösung f erhalten wird, wenn man aus F mittelst derselben Gleichungen (1) und (2) die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ eliminirt. Man erhält aber auch nach der angegebenen Regel eine Lösung, indem man aus F die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ vermittelst der Gleichungen (1) und der Gleichungen

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_{i-1}}\frac{\partial a_{i-1}}{\partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial a_k} = 0$$

eliminirt, wo a_k jede der Grössen $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_m$ und $a, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ Functionen von $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_m$ und willkürlichen Constanten bedeuten. Setzt man insbesondere für $a, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ die sich als ihre Werthe aus (1) ergebenden Functionen von $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, so folgen, wie ich unten zeigen werde, aus (1) und (2) auch die Gleichungen (3), so dass man für die Gleichungen (1) und (2) auch die Gleichungen (1) und (3) setzen kann. Es ist daher gleich, ob man sagt, dass man mittelst der Gleichungen (1) und (2) oder mittelst der

Gleichungen (1) und (3) die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ aus F eliminirt, und es ist daher die Lösung, die sich durch die letztere Elimination ergiebt, die ursprünglich gegebene f, wie zu beweisen war.

Es bleibt noch zu zeigen übrig, dass aus (1) und (2) die Gleichungen (3) folgen. Die Function F wurde aus f gefunden, indem man in f für $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ die Functionen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$ setzte und mittelst (2) die Grössen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ durch die unabhängigen Variabeln und die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ ausdrückte. Es wird daher, wenn man mit a_r irgend eine der Grössen $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ bezeichnet,

$$\frac{\partial F}{\partial a_r} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial a_r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_r} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_r},$$

da wegen (2) die in die partiellen Differentialquotienten von $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ multiplicirten Ausdrücke verschwinden. Substituirt man diesen Werth von $\frac{\partial F}{\partial a_r}$ in die Gleichung (3), welche zu beweisen ist, so erhält der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen die Form

$$\Phi \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \cdots + \Phi_{i-1} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}},$$

wo

$$\Phi_h = \frac{\partial \varphi_h}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial a_k} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial \varphi_h}{\partial a_{i-1}}\frac{\partial a_{i-1}}{\partial a_k} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial a_k}.$$

Da aber $a, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ diejenigen Functionen von $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sind, welche, in die Ausdrücke $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$ gesetzt, dieselben respective den Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ identisch gleich machen, wodurch also $\varphi_h = \alpha_h$ wird, so verschwindet der vorstehende Ausdruck von Φ_h, und es sind daher die Gleichungen (3) bewiesen.

Wir haben oben gesehen, dass man aus einer gegebenen vollständigen Lösung jede andere bestimmte nur auf eine einzige Art ableiten kann, d. h. dass die hierzu zwischen den willkürlichen Constanten der vollständigen Lösung anzunehmenden Relationen sowohl ihrer Zahl als Natur nach bestimmt sind. Wenn man daher aus einer gegebenen vollständigen Lösung f eine andere F abgeleitet hat und die gegebene Lösung f ihrerseits aus F ableiten will, so kann dies nur mittelst derjenigen Relationen geschehen, welche im Vorhergehenden zwischen den in F enthaltenen willkürlichen Constanten angenommen worden sind. Diese Relationen, welche gemeinschaftlich dazu dienen, F aus f

und f aus F abzuleiten, wo f und F zwei *beliebige* vollständige Lösungen bedeuten können, werden erhalten, wenn man die unabhängigen Variabeln $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ aus den Gleichungen

$$F = f,\quad \frac{\partial F}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1},\quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = \frac{\partial f}{\partial q_2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial F}{\partial q_m} = \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

eliminirt, was immer möglich ist, da F und f Lösungen derselben partiellen Differentialgleichung sind.

Wenn man eine bestimmte vollständige Lösung zu Grunde legt, so theilen sich alle Lösungen in verschiedene Classen, je nachdem man, um sie aus der vollständigen Lösung abzuleiten, eine oder zwei etc. oder $m+1$ Relationen zwischen den in denselben enthaltenen willkürlichen Constanten anzunehmen hat. Die erste Classe ist die allgemeinste, die letzte umfasst die Lösungen selbst, welche in der zu Grunde gelegten vollständigen Lösung enthalten sind. Diese Eintheilung drückt aber nichts den Lösungen selbst Immanentes aus, sondern nur ihre Beziehung zu der zu Grunde gelegten vollständigen Lösung. Denn es kann jede gegebene Lösung zu jeder beliebigen Classe gehören, je nachdem man verschiedene vollständige Lösungen zu Grunde legt. Man kann nämlich, wenn die gegebene Lösung ebenfalls eine vollständige ist, leicht solche vollständigen Lösungen angeben, in Bezug auf welche die gegebene Lösung zu einer bestimmten Classe gehört. Denn man hat nur aus der gegebenen Lösung irgend eine der i^{ten} Classe abzuleiten und diese zu Grunde zu legen, so gehört die gegebene Lösung auch ihrerseits in Bezug auf dieselbe zur i^{ten} Classe, wie im Vorhergehenden bewiesen worden ist. Es kann aber jede gegebene Lösung, welche keine vollständige Lösung selbst ist, als particulärer Fall einer vollständigen Lösung angesehen werden. Denn man kann sie immer aus irgend einer zu Grunde gelegten vollständigen Lösung mittelst gewisser Relationen ableiten, die man zwischen den willkürlichen Constanten derselben annimmt. Bezeichnet man diese Relationen mit $u = 0$, $v = 0$ etc., so kann man allgemeinere

$$u+\delta u_1 = 0,\quad v+\varepsilon v_1 = 0 \quad \text{etc.}$$

annehmen, in welchen δ, ε etc. willkürliche Constanten sind, und u_1, v_1 etc. ebenfalls willkürliche Constanten enthalten, so, dass die mittelst dieser allgemeineren Relationen abgeleitete Lösung eine vollständige wird. In dem besonderen Fall, wo $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ etc., erhält man dann aus dieser vollständigen Lösung die gegebene.

ÜBER DIE INTEGRATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG ZWISCHEN VIER VARIABELN

AUS DEN HINTERLASSENEN PAPIEREN C. G. J. JACOBI'S

HERAUSGEGEBEN VON

A. CLEBSCH

ÜBER DIE INTEGRATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG ZWISCHEN VIER VARIABELN.

1.
Historisches.

Lagrange hat in den Berliner Memoiren von 1772 die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen *drei* Variabeln integriren gelehrt. Nach seiner dort gegebenen Methode wird zuerst ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen *vier* Variabeln aufgestellt; da diese Differentialgleichungen von der *ersten* Ordnung sind, so kann die Integration dieses Systems auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung *dritter* Ordnung, die nur zwei Variabele enthält, zurückgeführt werden. Lagrange fordert aber zur Auffindung eines vollständigen Integrals der vorgelegten partiellen Differentialgleichung nicht die vollständige Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, sondern er zeigt, dass, wenn man *ein* Integral desselben kennt, man nur noch zwei Differentialgleichungen *erster* Ordnung zwischen *zwei* Variabeln zu integriren hat. Da man, wie ich im 17ten Bande des Crelle'schen Journals*) nach einer von Hamilton gegebenen Methode gezeigt habe, immer umgekehrt die vollständigen Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen angeben kann, wenn man irgend ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung kennt, so folgt für den von Lagrange behandelten Fall, dass das von ihm aufgestellte System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen zwei Variabeln zurückkommt, die merkwürdige Eigenschaft hat, dass, wenn man *ein* Integral desselben kennt, man nur noch Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln und keine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu integriren

*) Vergl. diese Ausgabe, Bd. IV p. 57—127.

braucht, um die vollständigen Integralgleichungen zu haben; oder, was dasselbe ist, es wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung, die man noch zu integriren hat, sich immer auf zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln reduciren lassen. Es bekommen hierdurch die gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen vorkommen, einen besonderen Character, der sie von anderen Differentialgleichungen unterscheidet und für ihre Integration Vortheile darbieten kann. Besonders einfach wird die Lagrange'sche Methode, wenn die partielle Differentialgleichung nicht die unbekannte Function selber involvirt, sondern nur die beiden unabhängigen Variabeln und die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der gesuchten Function. In diesem Falle ist nur ein Integral eines Systems von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen drei Variabeln oder einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Variabeln zu suchen, wonach das Problem auf Quadraturen zurückgeführt ist. Man kann hier also zufolge der obigen Betrachtungen die Differentialgleichung erster Ordnung, welche nach Auffindung des einen Integrals noch zu integriren bleibt, immer auf Quadraturen zurückführen oder nach einer allgemeinen Regel den Multiplicator angeben, welcher die Differentialgleichung integrabel macht. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung, auf welche die zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen drei Variabeln zurückgeführt werden können, hat daher die Eigenschaft mit den *linearen* Differentialgleichungen zweiter Ordnung gemein, dass nach Auffindung eines Integrals man das zweite durch blosse Quadratur erhält, sie lässt sich jedoch nicht, wie die *linearen*, auf die erste Ordnung zurückführen.

2.

Die Lagrange'sche Methode der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, in welcher die abhängige Veränderliche selbst nicht vorkommt.

Da der zuletzt erwähnte Fall, in welchem die partielle Differentialgleichung die unbekannte Function selbst nicht enthält, in der *Mechanik* von Wichtigkeit ist, so will ich für ihn die Lagrange'sche Methode kurz auseinander setzen.

Es sei

$$(1)\quad dV = p\,dx + q\,dy,$$

wo q eine gegebene Function von x, y, p ist; man soll p und V so als Functionen von x und y bestimmen, dass die Gleichung (1) erfüllt wird. Auf diese Weise kann man ganz allgemein die Aufgabe der Integration einer Gleichung zwischen x, y und den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial V}{\partial x} = p,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = q$$

darstellen, d. h. die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln, welche die abhängige Variabele selbst (die gesuchte Function) nicht enthält. Die Bedingung der Integrabilität von

$$p\,dx + q\,dy$$

ergiebt

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},$$

in welcher Gleichung auch $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial q}{\partial p}$ gegebene Functionen von x, y, p sind. Es sei nun

$$f(x, y, p) = a$$

irgend ein Integral der Differentialgleichungen

$$dx : dy : dp = \frac{\partial q}{\partial p} : -1 : -\frac{\partial q}{\partial x},$$

wo die Grösse a eine willkürliche Constante bedeutet, welche ebenso wenig als eine andere willkürliche Constante in der Function $f(x, y, p)$ selber vorkommt.

Man nennt $f = a$ ein Integral der vorgelegten Differentialgleichungen, wenn die Gleichung

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0$$

durch dieselben *identisch* erfüllt wird, d. h. ohne dass eine Integralgleichung zu Hülfe genommen wird.

Man muss daher für die aufgestellten Differentialgleichungen die identische Gleichung haben:

$$\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Bestimmt man p als Function von x, y durch die Gleichung

$$f(x, y, p) = a,$$

so hat man:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial p},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial p},$$

und es verwandelt sich die vorige Gleichung in folgende:

$$-\frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung wird also erfüllt, oder es wird $pdx + qdy$ integrabel, wenn man p als Function von x und y durch eine Gleichung

$$f(x, y, p) = a$$

bestimmt, welche ein Integral nachfolgender Differentialgleichungen ist:

$$dx : dy : dp = \frac{\partial q}{\partial p} : -1 : -\frac{\partial q}{\partial x},$$

in welchen $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial q}{\partial p}$ die nach x und p genommenen partiellen Differentialquotienten der als Function von x, y, p gegebenen Grösse q sind. Hat man auf diese Art $pdx + qdy$ integrabel gemacht, so findet man

$$V = \int (pdx + qdy),$$

und zufolge der von mir modificirten Hamilton'schen Theorie wird das *letzte* Integral der Differentialgleichungen

$$dx : dy : dp = \frac{\partial q}{\partial p} : -1 : -\frac{\partial q}{\partial x}$$

die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int \left(\frac{\partial p}{\partial a} dx + \frac{\partial q}{\partial a} dy \right) = b,$$

wo b die zweite willkürliche Constante ist.

Wenn die zwischen x, y, p, q gegebene Gleichung

$$\psi(x, y, p, q) = 0$$

ist, so kann man auf eine mehr *symmetrische* Art statt der Gleichungen

$$dx : dy : dp - \frac{\partial q}{\partial p} : -1 : -\frac{\partial q}{\partial x}$$

die folgenden setzen:

$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \psi}{\partial p} : \frac{\partial \psi}{\partial q} : -\frac{\partial \psi}{\partial x} : -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

von denen wegen der Gleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \psi}{\partial q} dq = 0$$

eine die Folge der übrigen ist.

3.

Anwendung auf eine Classe mechanischer Probleme.

Es gelte in einem Problem der Mechanik das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft, und es seien die Bedingungen, denen das System materieller Punkte, welches man betrachtet, unterworfen ist, so beschaffen, dass der Ort sämmtlicher bewegten Punkte durch nur zwei Grössen x und y bestimmt ist. Es sei T die halbe lebendige Kraft, so giebt der Satz von der lebendigen Kraft:

$$T = U + h,$$

wo h eine willkürliche Constante und U eine blosse Function von x und y ist.

Es sei

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt},$$

so wird T eine Function von x, y, x', y' sein, und zwar in Bezug auf die letzten beiden Grössen eine homogene Function der zweiten Ordnung.

Setzt man

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = p, \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = q,$$

so kann man auch durch Auflösung zweier linearen Gleichungen x' und y' durch p, q, x, y ausdrücken. Wenn man dieses thut, wird T eine Function von p und q, und setzt man in derselben

$$p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial V}{\partial y},$$

so wird die Gleichung für die lebendige Kraft,

$$T = U + h,$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x, y, V, in welcher die abhängige Variabele V nicht selbst verkommt, sondern ausser x und y nur die nach x und y genommenen partiellen Differentialquotienten von V. Setzt man daher

$$\psi = T - U - h,$$

so wird nach §. 2 das aufzustellende System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial T}{\partial p} : \frac{\partial T}{\partial q} : \frac{\partial (U - T)}{\partial x} : \frac{\partial (U - T)}{\partial y},$$

welches die Differentialgleichungen des mechanischen Problems selbst sind. Um diese daher vollständig zu integriren, braucht man nur *ein* Integral von ihnen,

$$f = a,$$

zu kennen. Die aus den Gleichungen

$$f = a, \quad T = U+h$$

gezogenen Werthe von p und q in x und y substituirt man dann in die Gleichung

$$dV = pdx+qdy;$$

zufolge der Lagrange'schen Theorie wird der Ausdruck rechter Hand integrabel, und daher auch seine nach a und h genommenen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial p}{\partial a}dx+\frac{\partial q}{\partial a}dy, \quad \frac{\partial p}{\partial h}dx+\frac{\partial q}{\partial h}dy.$$

Die Integration dieser Ausdrücke giebt die vollständigen endlichen Integralgleichungen des mechanischen Problems. Man hat nämlich nach §. 2:

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial a}dx+\frac{\partial q}{\partial a}dy\right) = b.$$

Die Zeit findet man, wie ich in meinen Abhandlungen über die Hamilton'sche Methode gezeigt habe, durch die Gleichung:

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial h}dx+\frac{\partial q}{\partial h}dy\right) = t+\tau.$$

In diesen Gleichungen sind a, b, h, τ die vier willkürlichen Constanten, welche die vollständige Integration des mechanischen Problems erfordert.

Ich habe die vorstehenden Resultate für den Fall der freien Bewegung eines Punktes in einer Ebene bereits vor längerer Zeit der Pariser Akademie der Wissenschaften mitgetheilt. In der Allgemeinheit, in welcher ich sie im Vorstehenden vorgetragen habe, umfassen sie auch die freie Bewegung eines Punktes auf irgend einer gegebenen Oberfläche, so wie mehrere andere merkwürdige mechanische Probleme. Wenn das System sich frei um eine Axe drehen kann, so hat man immer das verlangte Integral $f = a$ mittelst des Flächenprincips.

4.

Über die Weiterbildung der Lagrange'schen Methode.

Die Ausdehnung der Lagrange'schen Methode auf eine partielle Differentialgleichung mit mehr als drei Variabeln scheint beim ersten Anblick ein sehr complicirtes Problem. Diese Complication und der Umstand, dass man sich wegen der physikalischen Anwendungen seit längerer Zeit auf die Unter-

suchung der *linearen* partiellen Differentialgleichungen beschränkt, mögen Schuld daran sein, dass in dem langen Zeitraum seit dem Jahre 1772 diese Lücke in der Integralrechnung geblieben ist. Denn die Arbeit von Pfaff, welche grosse Wichtigkeit man ihr auch beilegen muss, ist weit entfernt, für jede Zahl von Variabeln Aehnliches zu leisten, wie die Methode von Lagrange für drei Variabele gethan hat. Denn während Lagrange nicht die vollständige Integration des aufzustellenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen nöthig hat, sondern nur die Kenntniss *eines* Integrals statt *zweier* fordert, braucht Pfaff nicht nur sämmtliche Integrale der von ihm aufgestellten Differentialgleichungen oder ihre vollständige Integration, sondern selbst diese ist ihm nur ein erster Schritt zu der Lösung des Problems. Ich habe nun zwar durch eine leichte Verallgemeinerung der Hamilton'schen Methode in einer anderen Abhandlung*) gezeigt, wie man die Pfaff'sche Methode so vervollständigen kann, dass die vollständige Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in allen Fällen ausreicht; aber es bleibt noch zu zeigen übrig, dass man auch diese nicht einmal nöthig habe. Bei einer näheren Untersuchung dieses Gegenstandes ist es mir gelungen, die hierbei vorkommenden Schwierigkeiten zu heben, wodurch auch die analytische Mechanik eine wesentliche Bereicherung erhält, indem die dynamischen Grundgleichungen für den weitverbreiteten Fall des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft und selbst noch in anderen Fällen einer eigenthümlichen Behandlung hinsichtlich ihrer Integration fähig werden. Wenn nun gleich die Ausdehnung der Lagrange'schen Methode bei näherer Betrachtung nicht die grosse Complication hat, welche sie beim ersten Anblick darbietet, so will ich mich doch hier nur auf den nächsten Fall, auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen vier Variabeln, beschränken; ja ich werde sogar, um eine klarere Einsicht in das Wesen der von mir verfolgten Methode zu geben, wieder nur den in der Mechanik vorkommenden Fall behandeln, in welchem die partielle Differentialgleichung ausser den unabhängigen Variabeln nur die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der gesuchten Function, nicht diese selbst enthält. Die analogen, von mir für eine beliebige Zahl von Variabeln gefundenen Resultate habe ich in einem in Crelle's Journal Bd. XVII abgedruckten Schreiben an Herrn Professor Encke kurz angedeutet.**)

---

*) Crelle's Journal, Bd. XVII p. 97—162; diese Ausgabe, Bd. IV p. 57—127.

**) Vergl. diese Ausgabe, Bd. IV p. 39—55.

5.

Partielle Differentialgleichung mit drei unabhängigen Veränderlichen, welche die gesuchte Function nicht enthält. Exposition der Aufgabe. Erstes System gewöhnlicher Differentialgleichungen, von welchem ein Integral zu suchen ist.

Es sei

$$dV = pdx + qdy + rdz$$

und r eine gegebene Function von x, y, z, p, q, welche V nicht enthält. Man soll p und q so als Functionen von x, y, z bestimmen, dass der Ausdruck

$$pdx + qdy + rdz$$

integrabel wird. Die Ausführung der Integration giebt dann die Function V. Damit ihr Ausdruck vollständig sei, müssen die Ausdrücke von p und q in x, y, z *zwei* willkürliche Constanten enthalten; bei der Integration kann man dann dem Ausdruck von V noch eine dritte willkürliche Constante durch blosse Addition zufügen.

Die Aufgabe scheint beim ersten Anblick mehr als bestimmt zu sein. Betrachtet man nämlich p, q, r als Functionen von x, y, z und setzt:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial z} - \dfrac{\partial r}{\partial y} = A, \\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial z} = B, \\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial x} = C, \end{cases}$$

so hat man nur *zwei* Functionen p und q zu bestimmen und soll damit den *drei* Gleichungen

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

genügen, welche erfüllt werden müssen, wenn der Ausdruck

$$pdx + qdy + rdz,$$

wie verlangt wurde, integrabel werden soll. Indessen wenn die drei zu erfüllenden Gleichungen sich auch nicht auf zwei reduciren lassen, so sind sie doch auch nicht von einander unabhängig. Man hat nämlich, wie man leicht sieht, die identische Gleichung:

$$(2)\quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

so dass, wenn zwei von den Ausdrücken A, B, C verschwinden, man von dem

dritten weiss, dass er die eine von den drei Variabeln x, y, z nicht enthalten kann. In dieser Gleichung (2) hat man die Lösung des Problems zu suchen.

Ich will die Aufgabe, die beiden Grössen p und q so als Functionen von x, y, z zu bestimmen, dass der Ausdruck $pdx + qdy + rdz$ integrabel wird, oder dass die drei Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ erfüllt werden, in *zwei* Aufgaben theilen, weil die *gleichzeitige* Behandlung und Bestimmung zweier Functionen mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Wir wollen nämlich zuerst q als Function von x, y, z, p und dann p als Function von x, y, z bestimmen. So lange man q nur als Function von x, y, z, p darstellt, ohne p als Function von x, y, z zu bestimmen, wird es nicht möglich sein, einer der drei Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ zu genügen. Man wird aber eine gewisse Combination dieser Gleichungen bilden können, der schon durch die Bestimmung der einen Grösse q als Function von x, y, z, p Genüge geschehen kann, während die Function p noch unbestimmt bleibt. Betrachtet man nämlich die beiden Grössen r und q als Functionen von x, y, z, p, so werden die drei Gleichungen $C = 0$, $B = 0$, $A = 0$ folgende Gestalt annehmen:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial q}{\partial p} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial r}{\partial p} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial q}{\partial z} + \dfrac{\partial q}{\partial p} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial r}{\partial p} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial y}. \end{cases}$$

Substituirt man die ersten beiden Gleichungen in die letzte, so erhält man:

$$\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}$$

oder

$$(4)\quad \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Man kann diese Gleichung auch in der Form

$$(5)\quad A + B\frac{\partial q}{\partial p} + C\frac{\partial r}{\partial p} = 0,$$

welche zugleich die Art ihrer Ableitung erkennen lässt, darstellen. In dieser Formel, so wie in (3) und (4), werden die beiden Grössen q und r als Functionen von x, y, z, p betrachtet.

Wenn man wieder q als Function von x, y, z, p, aber r als Function von x, y, z, p, q betrachtet, wie es durch die gegebene partielle Differentialgleichung bestimmt ist, und in diesem Sinne partiell differentiirt, so verwandelt sich die Gleichung (4) oder (5), wenn man die sich aufhebenden Terme

$$\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial r}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}$$

fortlässt, in folgende:

$$(6)\quad -\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}=\frac{\partial r}{\partial y}.$$

In dieser Gleichung sind die Grössen

$$\frac{\partial r}{\partial p},\ \frac{\partial r}{\partial q},\ \frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial r}{\partial y}$$

gegebene Functionen von x, y, z, p, q, und die Gleichung ist daher eine lineare partielle Differentialgleichung zwischen q und den unabhängigen Variabeln x, y, z, p. Um eine Function q der Grössen x, y, z, p zu finden, welche der Gleichung (6) genügt, hat man bekanntlich das System von Differentialgleichungen aufzustellen:

$$(7)\quad dx:dy:dz:dp:dq=-\frac{\partial r}{\partial p}:-\frac{\partial r}{\partial q}:1:\frac{\partial r}{\partial x}:\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Ist ein Integral desselben *)

$$f(x, y, z, p, q)=a,$$

wo a eine willkürliche Constante bedeutet, so ist der aus dieser Gleichung gezogene Werth von q die verlangte Function von x, y, z, p, welche die Gleichung (6) erfüllt. Diese Function enthält, wie man sieht, eine willkürliche Constante a.

Um die Gleichungen (7) in einer mehr symmetrischen Form darzustellen, sei

$$\psi(x, y, z, p, q, r)=0$$

die gegebene partielle Differentialgleichung. Führt man die Werthe der partiellen Differentialquotienten von r, wie sie sich aus dieser Gleichung ergeben, in die Gleichungen (7) ein, so erhält man:

$$(8)\quad dx:dy:dz:dp:dq:dr=\frac{\partial\psi}{\partial p}:\frac{\partial\psi}{\partial q}:\frac{\partial\psi}{\partial r}:-\frac{\partial\psi}{\partial x}:-\frac{\partial\psi}{\partial y}:-\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

*) Hier, wie immer, nenne ich $f=a$ ein Integral eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, wenn die Gleichung $df=0$ bloss mit Hülfe der Differentialgleichungen *identisch* erfüllt wird.

Ich habe hier der Symmetrie wegen sogleich das Verhältniss von dr zu den übrigen Differentialen beigefügt, welches sich aus der Gleichung

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz+\frac{\partial\psi}{\partial p}dp+\frac{\partial\psi}{\partial q}dq+\frac{\partial\psi}{\partial r}dr=0$$

ergiebt.

6.

Aufstellung zweier linearen partiellen Differentialgleichungen, von denen eine gemeinsame Lösung zu suchen ist.

Im Vorhergehenden ist q so als Function von x, y, z, p bestimmt worden, dass einer gewissen Combination der Gleichungen $A=0$, $B=0$, $C=0$, nämlich der unter (5) angeführten Gleichung

$$A+B\frac{\partial q}{\partial p}+C\frac{\partial r}{\partial p}=0,$$

Genüge geschieht, was für eine Function von x, y, z auch p bedeute. Dieses war der erste Schritt in unserer Untersuchung. Es war hierzu die Kenntniss eines Integrals der Gleichungen (7) nöthig, welche vier verschiedene Integrale haben, die ich mit

$$f=a,\ f_1=a_1,\ f_2=a_2,\ f_3=a_3$$

bezeichnen will. Man kann im Voraus nicht wissen, ob der Verlauf der weiteren Untersuchung uns gestatten wird, irgend ein beliebiges dieser Integrale oder eine *beliebige* Combination derselben zu wählen, um daraus q als Function von x, y, z, p zu bestimmen, oder ob nicht die Erfüllung aller Gleichungen $A=0$, $B=0$, $C=0$ fordern wird, dass diese Combination eine bestimmte sei oder wenigstens noch gewissen Bedingungen genüge. Ich werde aber zeigen, dass, wenn man auch für die Gleichung $f=a$ ein ganz beliebiges Integral der Gleichungen (7) annimmt, es immer möglich ist, die Function p so zu bestimmen, dass den beiden Gleichungen

$$B=0,\ \ C=0$$

Genüge geschieht, welche, nachdem die Gleichung (5) erfüllt ist, allein noch übrig sind.

Betrachten wir q und r als Functionen von x, y, z, p, wie sie durch die beiden Gleichungen

$$\psi=0,\ \ f=a$$

bestimmt sind, so sind die Gleichungen $C=0$, $B=0$ folgende:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$

wie ich sie bereits oben hingestellt habe. Es kann nun durch eine besondere Beschaffenheit dieser Gleichungen möglich sein, dass sie beide durch dieselbe Function p erfüllt werden können. Ich will mich hier auf die allgemeine Untersuchung, wie man die Bedingungen dafür findet, dass zwei partielle Differentialgleichungen gleichzeitig erfüllt werden können, nicht einlassen, sondern mich auf den vorliegenden Fall beschränken.

Um auf die allgemeinste Art die erste der beiden aufgestellten Gleichungen,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$

in welcher $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial p}$ gegebene Functionen von x, y, z, p sind, zu integriren, sucht man die beiden Integrale der Gleichungen

$$dy : dx : dp = 1 : -\frac{\partial q}{\partial p} : \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Sind diese

$$\varphi = \alpha, \quad \chi = \beta,$$

wo α, β willkürliche Constanten sind, die in φ und χ nicht vorkommen, so hat man die identischen Gleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial p} = 0; \end{cases}$$

und allgemeiner, wenn Π irgend eine Function von φ, χ und der Grösse z ist (welche letztere hier als Constante betrachtet wird):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt, dass die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

durch jeden Werth p erfüllt wird, welcher der Gleichung

$$\Pi(\varphi, \chi, z) = b$$

genügt, wo $\Pi(\varphi, \chi, z)$ eine beliebige Function von φ, χ und z ist, während b eine willkürliche Constante bedeutet. Es fragt sich nun, ob es möglich ist, diese Function Π von φ, χ und z so zu bestimmen, dass durch denselben Ausdruck von p auch die andere Gleichung erfüllt wird:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$

oder, was dasselbe ist, ob man Π so als Function von φ, χ und z bestimmen kann, dass auch die Gleichung

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0$$

identisch erfüllt wird.

Um diese letztere Gleichung durch die partiellen Differentialquotienten von Π, nach φ, χ und z genommen, auszudrücken, sei:

$$d\Pi = \Pi'(\varphi) d\varphi + \Pi'(\chi) d\chi + \Pi'(z) dz;$$

es sei ferner

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \varphi_1,$$
$$\frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial p} = \chi_1,$$

so wird die zu erfüllende Gleichung:

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p}$$
$$= \Pi'(\varphi) \cdot \varphi_1 + \Pi'(\chi) \cdot \chi_1 + \Pi'(z).$$

Diese Gleichung würde eine partielle Differentialgleichung zwischen den Grössen Π, φ, χ, z sein, wenn sich die Grössen φ_1 und χ_1 durch φ, χ, z ausdrücken liessen, oder, was dasselbe ist, wenn sie, in die Gleichungen (9) für φ oder χ gesetzt, dieselben ebenfalls erfüllten. Und dieses wird man in der That bei näherer Untersuchung finden.

7.

Hülfssatz zur Aufsuchung der gemeinsamen Lösung.

Man hat nämlich folgendes Theorem:

„*Wenn q und r Functionen von x, y, z, p sind, welche der Gleichung* (4)

$$\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

genügen, und wenn φ ein Integral der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}=0$$

ist, so wird die Function

$$\varphi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}$$

ebenfalls ein Integral dieser Gleichung, d. h. man hat auch:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}=0.“$$

Es seien nämlich φ, q und r irgend welche Functionen von x, y, z, p, und es werde der Kürze halber

$$\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}=\varDelta,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}=K,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}=L$$

gesetzt; dann findet man, wenn alle sich aufhebenden Terme fortgelassen werden:

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial p}-\left\{\frac{\partial K}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial K}{\partial p}\right\}\\
&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\left\{\begin{aligned}&-\frac{\partial^2 r}{\partial p\partial y}+\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial p\partial x}-\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial p^2}\\&+\frac{\partial^2 q}{\partial p\partial z}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial p\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial p^2}\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\cdot\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial p}\\&-\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}-\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial p}\end{aligned}\right\}\\
&=\frac{\partial\varDelta}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varDelta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}.
\end{aligned}\right.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass, wenn die Functionen q, r und φ so beschaffen sind, dass die Ausdrücke K und $\varDelta$ identisch gleich Null sind, die

Function L der Gleichung genügt:

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial p}=0,$$

was zu beweisen war.

8.

Bestimmung der gemeinsamen Lösung. Vollständige Integration des in §. 5 benutzten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Aus dem soeben bewiesenen Theorem folgt, dass man aus einem Integral φ der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}=0$$

immer ein zweites durch blosse partielle Differentiation ableiten kann; es wird nämlich

$$\varphi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}$$

ein Integral derselben Gleichung, oder man hat ebenfalls:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}=0.$$

Ja man kann diese Operation wiederholen und, indem man φ_1 statt φ setzt, aus φ_1 ein drittes Integral ableiten:

$$\varphi_2=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}.$$

Sind aber φ und φ_1 zwei Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}=0,$$

so ist bekanntlich jedes andere Integral eine Function dieser beiden Integrale, und es muss daher φ_2 eine Function von φ und φ_1 und von der Grösse z sein, welche letztere bei der Integration der vorstehenden Gleichung als Constante angesehen wird.

Ich nannte aber χ ein zweites Integral der vorstehenden Gleichung, und χ_1 eine Function, welche durch dieselben Operationen aus χ abgeleitet wird, wie φ_1 aus φ, und welche daher nach dem obigen Theorem ein Integral derselben Gleichung ist. Nimmt man φ_1 für dieses zweite Integral χ, so wird

$$\chi=\varphi_1,\quad \chi_1=\varphi_2,$$

und die Function Π wird eine Function von φ, φ_1 und z, welche der Gleichung genügen muss:

$$\varphi_1.\Pi'(\varphi)+\varphi_2.\Pi'(\varphi_1)+\Pi'(z) = 0,$$

in welcher φ_2 eine gegebene Function von φ, φ_1 und z ist. Hat man daher ein Integral

$$\varphi(x, y, z, p) = \alpha$$

der Gleichungen

$$dy:dx:dp = 1:-\frac{\partial q}{\partial p}:\frac{\partial q}{\partial x}$$

gefunden, in welchen z als Constante angesehen wird, so leitet man aus φ die Function φ_1 und aus φ_1 die Function φ_2 ab vermittelst der Formeln:

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial p},$$

und drückt φ_2 durch φ, φ_1 und z aus, was immer möglich ist. Hierauf bildet man die Differentialgleichungen

$$(11)\quad d\varphi:d\varphi_1:dz = \varphi_1:\varphi_2:1$$

und sucht ein Integral derselben,

$$\Pi(\varphi, \varphi_1, z) = b.$$

Diese Gleichung, verbunden mit den Gleichungen

$$\psi = 0, \quad f = a,$$

giebt für p, q, r Ausdrücke in x, y, z mit zwei willkürlichen Constanten a und b, welche den Ausdruck

$$pdx+qdy+rdz$$

integrabel machen. Setzt man dann

$$V = \int(pdx+qdy+rdz),$$

so dass V eine Function von x, y, z, a, b wird, so erhält man zufolge der in einer anderen Abhandlung (Crelle's Journal, Bd. XVII p. 97; diese Ausgabe, Bd. IV p. 57—127) von mir gegebenen Theorie die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen (7) durch das System der Gleichungen:

$$f = a, \quad \Pi = b, \quad \frac{\partial V}{\partial a} = a', \quad \frac{\partial V}{\partial b} = b',$$

in welchen a', b' zwei neue willkürliche Constanten sind. Die beiden letzten Gleichungen kann man auch so darstellen:

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial a}dx+\frac{\partial q}{\partial a}dy+\frac{\partial r}{\partial a}dz\right) = a',$$

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial b}dx+\frac{\partial q}{\partial b}dy+\frac{\partial r}{\partial b}dz\right) = b',$$

in welchen Formeln die unter dem Integralzeichen enthaltenen Ausdrücke ebenfalls integrabel sind.

9.

Besonderer Charakter der erhaltenen Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Differentiirt man die Gleichung $\Pi = b$, durch welche die zweite willkürliche Constante eingeführt wurde, indem man Π wieder, wie oben, als Function von x, y, z, p betrachtet, so erhält man:

$$d\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Pi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Pi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Pi}{\partial p}dp = 0.$$

Die Function Π war aber so bestimmt worden, dass sie gleichzeitig den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\Pi}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial p} = 0$$

genügte. Multiplicirt man die erste Gleichung mit dy, die zweite mit dz und zieht die Summe beider Producte von der Gleichung $d\Pi = 0$ ab, so verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$0 = \frac{\partial\Pi}{\partial x}\left\{dx+\frac{\partial q}{\partial p}dy+\frac{\partial r}{\partial p}dz\right\}+\frac{\partial\Pi}{\partial p}\left\{dp-\frac{\partial q}{\partial x}dy-\frac{\partial r}{\partial x}dz\right\}.$$

Wenn man r als Function von x, y, z, p, q betrachtet, so werden die beiden in $\frac{\partial\Pi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\Pi}{\partial p}$ multiplicirten Ausdrücke:

$$dx+\frac{\partial r}{\partial p}dz+\frac{\partial q}{\partial p}\left(dy+\frac{\partial r}{\partial q}dz\right),$$

$$dp-\frac{\partial r}{\partial x}dz-\frac{\partial q}{\partial x}\left(dy+\frac{\partial r}{\partial q}dz\right).$$

Diese Ausdrücke verschwinden, wenn die Gleichungen (7) stattfinden, da aus diesen Gleichungen folgt:

$$dx + \frac{\partial r}{\partial p}\,dz = 0, \quad dy + \frac{\partial r}{\partial q}\,dz = 0, \quad dp - \frac{\partial r}{\partial x}\,dz = 0.$$

Man sieht daher, dass die Gleichung $d\Pi = 0$ eine der Combinationen ist, welche man aus den Gleichungen (7) oder (8) bilden kann, oder dass die Gleichung $\Pi = b$, ebenso wie diejenige, durch welche die erste willkürliche Constante a eingeführt wurde, $f = a$, ein Integral dieser Differentialgleichungen ist. Aber die Gleichung $\Pi = b$ ist nicht, wie die Gleichung $f = a$, ein beliebiges Integral dieser Differentialgleichungen, sondern nur ein Integral einer Combination derselben, welche zwischen den drei Variabeln φ, φ_1 und z stattfindet, während die Gleichungen (7), nachdem durch das erste Integral $f = a$ die Grösse q als Function von x, y, z, p bestimmt wurde, zwischen diesen *vier* Variabeln gegeben waren.

10.

Die Ordnung der zur Aufsuchung der gemeinsamen Lösung nothwendigen Integrationen kann sich unter Umständen erniedrigen.

Ich habe oben gesagt, dass der allgemeinste Ausdruck einer Function χ, welche der Gleichung

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial p} = 0$$

Genüge leistet, eine beliebige Function von z und zwei Integralen dieser Gleichung, φ und φ_1, sei, und dass daher, da auch φ_2 dieser Gleichung Genüge leistet, φ_2 eine Function von φ, φ_1 und z sein müsse. Dieses hört auf, seine Gültigkeit zu haben, wenn es sich trifft, dass der Ausdruck

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

selber schon eine Function von φ und z ist. In diesem Falle aber erfährt die Aufsuchung der Function Π eine bedeutende Vereinfachung, indem sie nur eine Function der beiden Grössen φ und z wird. Denn da es nur darauf ankommt, Π so zu bestimmen, dass es gleichzeitig den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0,$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0$$

genügt, und jede Function $\Pi(\varphi, z)$ schon von selbst die erste erfüllt, so hat man nur noch der Gleichung

$$\Pi'(\varphi).\varphi_1 + \Pi'(z) = 0$$

zu genügen, in welcher, wie angenommen wurde, φ_1 eine Function von φ und z ist. Diese Gleichung wird aber erfüllt, wenn $\Pi = b$ das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi_1$$

ist. Man hat also in diesem Falle nur eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Grössen φ und z zu integriren, während man vorher von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den drei Grössen φ, φ_1 und z oder, was dasselbe ist, von einer Differentialgleichung *zweiter* Ordnung zwischen φ und z ein Integral zu finden hatte.

Trifft man zufällig ein Integral φ, für welches φ_1 gleich 0 wird, so hat man keine Differentialgleichung weiter zu integriren, sondern Π gleich φ zu setzen.

11.

Zahl und Ordnung der nach dieser Methode erforderlichen Integrationen.

Die Differentialgleichungen (7) sind vier Gleichungen erster Ordnung zwischen fünf Grössen, welche die Stelle einer Differentialgleichung vierter Ordnung zwischen zwei Grössen vertreten. Wollte man diese successive integriren, so hätte man nach und nach ein Integral einer Differentialgleichung vierter, dritter, zweiter und erster Ordnung zu suchen. Vergleichen wir dagegen die im Vorhergehenden geforderten Integrationen, so haben wir, nachdem ein Integral der vier Differentialgleichungen erster Ordnung ermittelt ist, nur Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen zwei Variabeln zu integriren und keine der dritten Ordnung; daraus ersehen wir, dass nach der angewandten Methode die Differentialgleichung dritter Ordnung, auf welche nach gefundenem ersten Integral das Problem zurückkommt, sich immer auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückführen lässt. Wir hatten nämlich zwei Differentialgleichungen erster oder eine zweiter Ordnung, um die Functionen φ und φ_1 zu bestimmen; hiervon brauchten wir aber nur *ein* Integral zu kennen, $\varphi = \alpha$, da sich nach einer bestimmten Regel ein zweites Integral $\varphi_1 = \beta$ daraus ableiten liess. Nachdem die Functionen φ und φ_1 gefunden, hatten wir zwischen diesen und z wieder zwei Differentialgleichungen erster oder eine zweiter Ordnung, von denen wieder nur *ein* Integral $\Pi = b$ zu suchen war. Alles Übrige war dann auf Quadraturen zurückgeführt. Statt also nach und nach ein Integral einer Differentialgleichung dritter, zweiter, erster Ordnung, haben wir nur zweimal ein Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu suchen und blosse Quadraturen auszuführen, was eine bedeutende Vereinfachung ist.

Wir haben nach dem Vorhergehenden zweierlei Arten von Differentialgleichungen, für welche ein Integral zu suchen ist, solche, von denen ein Integral mit einer willkürlichen Constante eine Gleichung zwischen den Grössen x, y, z, p, q und einer willkürlichen Constante liefert, die als eine der Integralgleichungen des Problems zu betrachten ist, und ein Hülfssystem, das nur dazu dient, passende Variabele aufzufinden, die an Stelle der ursprünglichen zu wählen sind. Diejenigen Integrale, welche die willkürlichen Constanten geben, sind zugleich Integrale desselben ursprünglichen Systems von Differentialgleichungen (7) oder (8).

12.

Das bei der Aufsuchung der gemeinsamen Lösung benutzte System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Seine vollständige Integration. Sein Multiplicator.

Zur besseren Einsicht in die Natur der hier vorkommenden Differential- und Integralgleichungen bemerke ich noch, dass die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \int \left\{ \frac{\partial p}{\partial b}\, dx + \frac{\partial q}{\partial b}\, dy + \frac{\partial r}{\partial b}\, dz \right\} = b'$$

nicht nur ein Integral der Gleichungen (7) ist, wenn man sich daraus die Constanten a und b vermittelst der Gleichungen $f = a$, $\Pi = b$ eliminirt denkt, sondern auch der Gleichungen (11), wenn man nur die Constante b vermittelst der Gleichung $\Pi = b$ eliminirt, so dass also

$$\Pi = b, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = b'$$

die beiden Integrale der Gleichungen

$$d\varphi : d\varphi_1 : dz = \varphi_1 : \varphi_2 : 1$$

werden. Wenn nämlich $\Pi = b$, $\Pi_1 = b'$ die beiden Integrale dieser Gleichungen sind, so hat man, wie ich in §. 9 gezeigt habe:

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \left\{ dx + \frac{\partial q}{\partial p}\, dy + \frac{\partial r}{\partial p}\, dz \right\} + \frac{\partial \Pi}{\partial p} \left\{ dp - \frac{\partial q}{\partial x}\, dy - \frac{\partial r}{\partial x}\, dz \right\},$$

$$0 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} \left\{ dx + \frac{\partial q}{\partial p}\, dy + \frac{\partial r}{\partial p}\, dz \right\} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial p} \left\{ dp - \frac{\partial q}{\partial x}\, dy - \frac{\partial r}{\partial x}\, dz \right\}.$$

Denn dasselbe Resultat, welches ich dort in Bezug auf die Function Π erhalten habe, erhält man auch in Bezug auf die Function Π_1. Aus diesen folgen aber die Gleichungen

$$(12) \quad \begin{cases} 0 = dx + \dfrac{\partial q}{\partial p}\, dy + \dfrac{\partial r}{\partial p}\, dz, \\[2mm] 0 = dp - \dfrac{\partial q}{\partial x}\, dy - \dfrac{\partial r}{\partial x}\, dz, \end{cases}$$

welche mit den Gleichungen (11) äquivalent sein müssen, oder von denen jede eine Combination der Gleichungen (11) sein muss. Substituirt man in q und r den Werth von p als Function von x, y, z und der willkürlichen Constante b, der durch die Gleichung $\Pi = b$ gegeben ist, so enthalten q und r die Grösse b nur, insofern dieselbe in p vorkommt, oder man hat:

$$\frac{\partial q}{\partial b} = \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial b}, \quad \frac{\partial r}{\partial b} = \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial b}.$$

Multiplicirt man daher die erste der beiden Gleichungen (12) mit $\frac{\partial p}{\partial b}$, so erhält man:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial b}\, dx + \frac{\partial q}{\partial b}\, dy + \frac{\partial r}{\partial b}\, dz.$$

Der Ausdruck rechts ist integrabel, und man erhält durch seine Integration das zweite Integral der Gleichungen (11):

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \int \left\{ \frac{\partial p}{\partial b}\, dx + \frac{\partial q}{\partial b}\, dy + \frac{\partial r}{\partial b}\, dz \right\} = b',$$

was zu beweisen war.

Ich will noch den integrabeln Ausdruck

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial b}\, dx + \frac{\partial q}{\partial b}\, dy + \frac{\partial r}{\partial b}\, dz \\ & = \frac{\partial p}{\partial b} \left\{ dx + \frac{\partial q}{\partial p}\, dy + \frac{\partial r}{\partial p}\, dz \right\}, \end{aligned}$$

dessen Integration ein Integral der Gleichungen

$$d\varphi : d\varphi_1 : dz = \varphi_1 : \varphi_2 : 1$$

giebt, durch die Variabeln φ, φ_1, z selbst auszudrücken suchen. Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} = 0$$

erhält man, wenn man der Kürze halber

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}=M$$

setzt, die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}=M\frac{\partial q}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}=M\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Man differentiire die erste Gleichung nach x, die zweite nach p und ziehe die erhaltenen Ausdrücke von einander ab. Bemerkt man nun die identische Gleichung

$$\frac{\partial\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right\}}{\partial x}+\frac{\partial\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}}{\partial y}+\frac{\partial\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right\}}{\partial p}=0,$$

so erhält man durch die angegebenen Operationen:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial M}{\partial p},$$

woraus wir ersehen, dass, *wenn φ und φ_1 irgend zwei Integrale der Gleichung*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

sind, der Ausdruck

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$$

ebenfalls ein Integral dieser Gleichung ist. Es folgt hieraus, dass M eine Function von φ, φ_1 und z ist.

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\varphi_1=\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}-\varphi_2=\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}$$

folgt ferner:

$$M\frac{\partial r}{\partial p}=\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}-\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}+\varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

$$M\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}-\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Substituirt man die für $M\frac{\partial q}{\partial p}$, $M\frac{\partial r}{\partial p}$ gefundenen Werthe, so erhält man:

$$M\left\{dx+\frac{\partial q}{\partial p}dy+\frac{\partial r}{\partial p}dz\right\}$$

$$=\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right\}dx+\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right\}dy+\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right\}dz$$

$$+\left\{\varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial p}-\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}dz$$

oder

$$M\left\{dx+\frac{\partial q}{\partial p}dy+\frac{\partial r}{\partial p}dz\right\}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}d\varphi-\frac{\partial \varphi}{\partial p}d\varphi_1+\left\{\varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial p}-\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}dz$$

$$=\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}(d\varphi-\varphi_1 dz)-\frac{\partial \varphi}{\partial p}(d\varphi_1-\varphi_2 dz).$$

Es ergiebt sich ferner, wenn man die Gleichung $\Pi(\varphi,\varphi_1,z)=b$ nach b differentiirt:

$$1=\frac{\partial \Pi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial b}=\left\{\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p}+\Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}\frac{\partial p}{\partial b}.$$

Man hat daher den integrabeln Ausdruck

$$\frac{\partial p}{\partial b}dx+\frac{\partial q}{\partial b}dy+\frac{\partial r}{\partial b}dz=\frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}(d\varphi-\varphi_1 dz)-\frac{\partial \varphi}{\partial p}(d\varphi_1-\varphi_2 dz)}{M\left\{\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p}+\Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}}.$$

Es ist nicht möglich, aus diesem Ausdruck den Quotienten $\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}:\frac{\partial \varphi}{\partial p}$ fortzuschaffen, welcher allein darin keine Function von φ, φ_1 und z ist, ohne dass man die Gleichung

$$d\Pi=\Pi'(\varphi)d\varphi+\Pi'(\varphi_1)d\varphi_1+\Pi'(z)dz=0$$

zu Hülfe nimmt. Eliminirt man aber vermittelst dieser Gleichung dz und setzt:

$$\frac{\partial V}{\partial b}=\Pi_1,\quad d\Pi_1=\frac{\partial p}{\partial b}dx+\frac{\partial q}{\partial b}dy+\frac{\partial r}{\partial b}dz,$$

so verwandelt sich die Gleichung in:

$$d\Pi_1=d\Pi_1+\frac{\left(\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)d\Pi}{M\Pi'(z)\left\{\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p}+\Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}}=$$

$$\frac{\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\Pi'(z)+\left(\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\Pi'(\varphi)\right\}d\varphi+\left\{-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\Pi'(z)+\left(\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\Pi'(\varphi_1)\right\}d\varphi_1}{M\Pi'(z)\left\{\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p}+\Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}}.$$

Substituirt man in diesem Ausdruck für $\Pi'(z)$ den Werth (§. 8):

$$\Pi'(z) = -\Pi'(\varphi).\varphi_1 - \Pi'(\varphi_1).\varphi_2,$$

so kann man im Zähler und Nenner den Factor

$$\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}$$

fortheben und man erhält:

$$d\Pi_1 = d\Pi_1 + \frac{\left\{\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right\} d\Pi}{M\Pi'(z)\left\{\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}} = \frac{\varphi_1 d\varphi_1 - \varphi_2 d\varphi}{M\Pi'(z)}.$$

Hat man also φ_2 und M durch φ, φ_1 und z ausgedrückt, und von den Differentialgleichungen

$$d\varphi : d\varphi_1 : dz = \varphi_1 : \varphi_2 : 1$$

ein Integral

$$\Pi(\varphi, \varphi_1, z) = b$$

gefunden, vermittelst dessen man z durch φ und φ_1 ausdrückt, so hat man zur vollständigen Integration dieser Differentialgleichungen noch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen φ und φ_1 zu integriren:

$$\varphi_1 d\varphi_1 - \varphi_2 d\varphi = 0.$$

Nach dem Obigen kann man aber zu dieser Gleichung immer den Multiplicator finden, indem

$$d\Pi_1 = \frac{\varphi_1 d\varphi_1 - \varphi_2 d\varphi}{M\Pi'(z)}$$

ein integrabeler Ausdruck ist, wenn man vermittelst der Gleichung $\Pi = b$ in φ_2 und in dem Multiplicator

$$\frac{1}{M\Pi'(z)}$$

die Grösse z durch φ und φ_1 ausdrückt.

DE AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM ISOPERIMETRICARUM TRANSFORMATIONIBUS EARUMQUE REDUCTIONE AD AEQUATIONEM DIFFERENTIALEM PARTIALEM PRIMI ORDINIS NON LINEAREM

AUCTORE

C. G. J. JACOBI,
PROF. ORD. MATH. REGIOM.

DE AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM ISOPERIMETRICARUM TRANSFORMATIONIBUS EARUMQUE REDUCTIONE AD AEQUATIONEM DIFFERENTIALEM PARTIALEM PRIMI ORDINIS NON LINEAREM.

(Ex Ill. C. G. J. Jacobi manuscriptis posthumis in medium protulit A. Clebsch.)

Transformatio Prima.

1.

Proponatur integrale $\int U dt$ *Maximum Minimumve* reddere, sive proponatur aequatio

$$\delta \int U dt = 0,$$

designante δ notum variationis signum. Statuatur primum, expressionem U unicam involvere ipsius t functionem x una cum eius differentialibus $x', x'', \ldots, x^{(m)}$. Integranda erit aequatio differentialis $2m^{ti}$ ordinis

$$(1)\quad 0 = \frac{d^m U_m}{dt^m} - \frac{d^{m-1} U_{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots \pm U_0,$$

in qua brevitatis causa posui

$$U_i = \frac{\partial U}{\partial x^{(i)}}, \quad U_0 = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Sit

$$(2)\quad \xi = U_m = \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}},$$

eiusque aequationis ope e functione

$$(3)\quad V = U - x^{(m)}\xi$$

eliminetur $x^{(m)}$. Quam functionem ubi variamus habendo V pro quantitatum t, $x, x', \ldots, x^{(m-1)}, \xi$ functione, ipsam U autem pro quantitatum $t, x, x', \ldots, x^{(m-1)}, x^{(m)}$ functione, reiectis terminis se mutuo destruentibus

$$\xi \delta x^{(m)} - \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} \delta x^{(m)},$$

prodit

$$\frac{\partial V}{\partial t}\delta t+\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial x'}\delta x'+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)}+\frac{\partial V}{\partial \xi}\delta\xi$$
$$=\frac{\partial U}{\partial t}\delta t+\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial x'}\delta x'+\cdots+\frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)}-x^{(m)}\delta\xi.$$

Hinc obtinemus

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial V}{\partial x'}=\frac{\partial U}{\partial x'},\quad \dots,\quad \frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}=\frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}},$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t},\quad \frac{\partial V}{\partial \xi}=-x^{(m)},$$

vel si etiam ponimus

$$V_i=\frac{\partial V}{\partial x^{(i)}},\quad V_0=\frac{\partial V}{\partial x},$$

fit

$$(4)\quad U_0=V_0,\ U_1=V_1,\ U_2=V_2,\ \dots,\ U_{m-1}=V_{m-1},\ U_m=\xi,\ \frac{\partial V}{\partial \xi}=-x^{(m)}.$$

Unde aequationi differentiali (1), inter variabiles t et x propositae, substitui potest hoc systema duarum aequationum:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m}=-\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, \\[2mm] \dfrac{d^m \xi}{dt^m}=\dfrac{d^{m-1}V_{m-1}}{dt^{m-1}}-\dfrac{d^{m-2}V_{m-2}}{dt^{m-2}}+\cdots\mp V_0. \end{cases}$$

Differentiationes in dextra parte aequationis posterioris ita transigantur, ut post unamquamque differentiationem loco ipsius $dx^{(m-1)}$ substituatur eius valor ex aequatione priore

$$dx^{(m-1)}=-\frac{\partial V}{\partial \xi}dt.$$

Unde aequationis illius dextra pars revocatur ad functionem quantitatum

$$t,\ x,\ x',\ \dots,\ x^{(m-1)},\ \xi,\ \xi',\ \dots,\ \xi^{(m-1)},$$

quam designabo per

$$(6)\quad \Xi=\frac{d^m\xi}{dt^m}.$$

Simul patet, ipsius Ξ unicum terminum affectum ipso $\xi^{(m-1)}$ fore $\dfrac{\partial V_{m-1}}{\partial \xi}\xi^{(m-1)}$, e quantitate $\dfrac{d^{m-1}V_{m-1}}{dt^{m-1}}$ provenientem. Unde erit

$$(7)\quad \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{m-1}}=\frac{\partial V_{m-1}}{\partial \xi}.$$

Aequatio differentialis (1) $2m^{ti}$ ordinis, inter x et t proposita, antecedentibus transformata est in systema duarum aequationum differentialium m^{ti} ordinis

inter t, x et ξ:

$$(8)\quad \frac{d^m x}{dt^m}=-\frac{\partial V}{\partial \xi},\quad \frac{d^m\xi}{dt^m}=\Xi.$$

Quae aequationes differentiales ea forma gaudent, quam aequationibus differentialibus tanquam normalem tribuere convenit, in qua scilicet ad singularum aequationum alteram partem singularum variabilium dependentium differentialia altissima relegata sunt, ita ut alterae aequationum partes non nisi inferiora involvant differentialia.

Secundum praecepta, in commentatione *de novo Multiplicatore* tradita*), definitur aequationum (8) Multiplicator formula:

$$\frac{d\log M}{dt}-\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial x^{(m-1)}}+\frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}}=0.$$

Fit autem e (7)

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}}=\frac{\partial V_{m-1}}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)}\partial \xi},$$

unde

$$\frac{d\log M}{dt}=0.$$

Quae docet formula, *aequationum* (8), *in quas propositam transformavi, Multiplicatorem esse unitati aequalem.*

2.

Faciamus iam, ipsam U duas involvere functiones x et y una cum earum differentialibus x', x'', $\dots$, $x^{(m)}$, y', y'', $\dots$, $y^{(n)}$. Posito

$$(1)\quad \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}=\xi,\quad \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}=\eta,$$
$$(2)\quad V=U-x^{(m)}\xi-y^{(n)}\eta,$$

sequitur:

$$\delta V=\frac{\partial U}{\partial t}\delta t+\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial x'}\delta x'+\cdots+\frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)}-x^{(m)}\delta\xi$$
$$+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial y'}\delta y'+\cdots+\frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}\delta y^{(n-1)}-y^{(n)}\delta\eta,$$

reiectis terminis se mutuo destruentibus

$$\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}\delta x^{(m)}+\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}-\xi\delta x^{(m)}-\eta\delta y^{(n)}.$$

Unde, si aequationum (1) ope in ipsa V loco quantitatum $x^{(m)}$ et $y^{(n)}$ introducimus quantitates ξ et η, eruitur

*) Cf. huj. edit. vol. IV p. 396.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial U}{\partial x'}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}} = \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\partial U}{\partial y'}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}},$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = -x^{(m)}, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = -y^{(n)}.$$

His substitutis, aequationes differentiales, quae integrandae proponuntur,

$$(3) \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^m \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^m} - \dfrac{d^{m-1} \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}} + \cdots \pm \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\[2ex] 0 = \dfrac{d^n \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^n} - \dfrac{d^{n-1} \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}} + \cdots \pm \dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

abeunt in sequentes:

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \dfrac{d^n y}{dt^n} = -\dfrac{\partial V}{\partial \eta}, \\[2ex] \dfrac{d^m \xi}{dt^m} = \dfrac{d^{m-1} \dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}} - \dfrac{d^{m-2} \dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-2)}}}{dt^{m-2}} + \cdots \mp \dfrac{\partial V}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^n \eta}{dt^n} = \dfrac{d^{n-1} \dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}} - \dfrac{d^{n-2} \dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-2)}}}{dt^{n-2}} + \cdots \mp \dfrac{\partial V}{\partial y}. \end{cases}$$

Si $n \leqq m$, in dextra parte aequationis postremae ita transigantur differentiationes, ut post unamquamque substituantur valores

$$\frac{dx^{(m-1)}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \frac{dy^{(n-1)}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \eta},$$

unde quantitas dextrae partis aequabitur functioni ipsarum

$$\begin{array}{l} t, \; x, \; x', \; x'', \; \ldots, \; x^{(m-1)}, \\ \quad y, \; y', \; y'', \; \ldots, \; y^{(n-1)}, \\ \quad \xi, \; \xi', \; \xi'', \; \ldots, \; \xi^{(m-1)}, \\ \quad \eta, \; \eta', \; \eta'', \; \ldots, \; \eta^{(n-1)}, \end{array}$$

quam designo per

$$H = \frac{d^n \eta}{dt^n}.$$

In qua functione ipsum $\eta^{(n-1)}$ tantum invenitur in unico termino, ex ipso

$$\frac{d^{n-1} \dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}$$

proveniente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)} \partial \eta} \eta^{(n-1)},$$

unde fit:

$$(5) \quad \frac{\partial H}{\partial \eta^{(n-1)}} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)} \partial \eta}.$$

Deinde in expressione, quae ipsi $\frac{d^m \xi}{dt^m}$ aequatur, differentiationes ita transigendae sunt, ut post unamquamque differentiationem ipsis $dx^{(m-1)}$, $dy^{(n-1)}$ substituantur valores $-\frac{\partial V}{\partial \xi} dt$, $-\frac{\partial V}{\partial \eta} dt$, atque insuper, ubi ipsum $\frac{d^n \eta}{dt^n} = \eta^{(n)}$ differentiatione provenit, ei valor H substituatur. Unde ipsum $\frac{d^m \xi}{dt^m}$ aequale invenitur functioni quantitatum

$$\begin{array}{l} t, \; x, \; x', \; \ldots, \; x^{(m-1)}, \; y, \; y', \; \ldots, \; y^{(n-1)}, \\ \quad \xi, \; \xi', \; \ldots, \; \xi^{(m-1)}, \; \eta, \; \eta', \; \ldots, \; \eta^{(n-1)}, \end{array}$$

quae designatur per

$$\Xi = \frac{d^m \xi}{dt^m}.$$

In qua functione ipsum $\xi^{(m-1)}$ tantum invenitur in unico termino, ex ipso

$$\frac{d^{m-1} \dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}}$$

proveniente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)} \partial \xi} \xi^{(m-1)},$$

unde fit:

$$(6) \quad \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)} \partial \xi}.$$

Aequationes differentiales quatuor

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \dfrac{d^n y}{dt^n} = -\dfrac{\partial V}{\partial \eta}, \\[2ex] \dfrac{d^m \xi}{dt^m} = \Xi, \qquad \dfrac{d^n \eta}{dt^n} = H, \end{cases}$$

in quas systema duarum aequationum propositarum (3) transformatum est, dextris partibus gaudent, quae non nisi inferiora differentialia implicant iis, quae in laeva parte posita sunt. Unde aequatio differentialis, qua ipsarum (7) Multiplicator definitur, fit

$$-\frac{d \log M}{dt} = -\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial x^{(m-1)}} - \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}} + \frac{\partial H}{\partial \eta^{(n-1)}}.$$

Cuius dextra pars secundum (5) et (6) identice evanescit, unde ponere licet $M = 1$.

Eadem methodus casui applicari potest, quo functio U praeter variabilem independentem t implicat quotlibet functiones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una cum earum differentialibus, quae respective in ipsa U ad ordinem $m_1^{\text{tum}}, m_2^{\text{tum}}, \ldots, m_n^{\text{tum}}$ ascendant. Introducendo ipsarum $x_1^{(m_1)}, x_2^{(m_2)}, \ldots, x_n^{(m_n)}$ loco quantitates

$$\xi_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}}, \quad \xi_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}}, \quad \ldots, \quad \xi_n = \frac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n)}},$$

n aequationes differentiales integrandae in alias $2n$ transformari poterunt, quibus differentialia

$$\frac{d^{m_1}x_1}{dt^{m_1}}, \quad \frac{d^{m_2}x_2}{dt^{m_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m_n}x_n}{dt^{m_n}},$$

$$\frac{d^{m_1}\xi_1}{dt^{m}}, \quad \frac{d^{m_2}\xi_2}{dt^{m_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m_n}\xi_n}{dt^{m_n}},$$

exprimuntur per formulas non nisi ipsis illis inferiora differentialia involventes. Quarum aequationum differentialium Multiplicator aequabitur *unitati*.

Transformatio altera.

Reductio problematum isoperimetricorum ad aequationes differentiales partiales primi ordinis non lineares.

Iam alteram transformationem valde memorabilem aequationum differentialium tradam, a quarum integratione solutio aequationis

$$\delta \int U dt = 0$$

pendet. Cum methodus adhibenda sine negotio ad quemlibet functionum numerum pateat, eam tribus ipsius t functionibus x, y, z applicare sufficiet, quae ipsam U afficiant una cum earum differentialibus

$$x', \; x'', \; \ldots, \; x^{(m)}, \; y', \; y'', \; \ldots, \; y^{(n)}, \; z', \; z'', \; \ldots, \; z^{(p)}.$$

Sunt eo casu tres aequationes differentiales integrandae sequentes:

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^m \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^m} - \dfrac{d^{m-1} \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}} + \cdots \pm \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ 0 = \dfrac{d^n \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^n} - \dfrac{d^{n-1} \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}} + \cdots \pm \dfrac{\partial U}{\partial y}, \\ 0 = \dfrac{d^p \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt^p} - \dfrac{d^{p-1} \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}}}{dt^{p-1}} + \cdots \pm \dfrac{\partial U}{\partial z}. \end{cases}$$

Pono:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}} - \dfrac{d \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt} = \xi_1, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-2)}} - \dfrac{d \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}}{dt} + \dfrac{d^2 \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^2} = \xi_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x'} - \dfrac{d \dfrac{\partial U}{\partial x''}}{dt} + \dfrac{d^2 \dfrac{\partial U}{\partial x'''}}{dt^2} - \cdots \mp \dfrac{d^{m-1} \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^{m-1}} = \xi_{m-1}; \\ \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = \eta, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}} - \dfrac{d \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt} = \eta_1, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}} - \dfrac{d \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}}{dt} + \dfrac{d^2 \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^2} = \eta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial y'} - \dfrac{d \dfrac{\partial U}{\partial y''}}{dt} + \dfrac{d^2 \dfrac{\partial U}{\partial y'''}}{dt^2} - \cdots \mp \dfrac{d^{n-1} \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^{n-1}} = \eta_{n-1}; \\ \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p)}} = \zeta, \\ \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}} - \dfrac{d \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt} = \zeta_1, \\ \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-2)}} - \dfrac{d \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}}}{dt} + \dfrac{d^2 \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt^2} = \zeta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial z'} - \dfrac{d \dfrac{\partial U}{\partial z''}}{dt} + \dfrac{d^2 \dfrac{\partial U}{\partial z'''}}{dt^2} - \cdots \mp \dfrac{d^{p-1} \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt^{p-1}} = \zeta_{p-1}. \end{cases}$$

Ex his expressionibus sequitur:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi, & \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = \eta, & \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p)}} = \zeta, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}} = \xi_1 + \dfrac{d\xi}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}} = \eta_1 + \dfrac{d\eta}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}} = \zeta_1 + \dfrac{d\zeta}{dt}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-2)}} = \xi_2 + \dfrac{d\xi_1}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}} = \eta_2 + \dfrac{d\eta_1}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-2)}} = \zeta_2 + \dfrac{d\zeta_1}{dt}, \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x'} = \xi_{m-1} + \dfrac{d\xi_{m-2}}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial y'} = \eta_{n-1} + \dfrac{d\eta_{n-2}}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial z'} = \zeta_{p-1} + \dfrac{d\zeta_{p-2}}{dt}. \end{cases}$$

His aequationibus iungendae sunt sequentes, quae ex ipsis aequationibus differentialibus propositis fluunt:

$$(4)\quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d\xi_{m-1}}{dt},\quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{d\eta_{n-1}}{dt},\quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d\zeta_{p-1}}{dt}.$$

Ponatur iam

$$V = U - x^{(m)}\xi - y^{(n)}\eta - z^{(p)}\zeta;$$

sequitur reiciendo terminos se mutuo destruentes:

$$\begin{aligned} \delta V = \frac{\partial U}{\partial t}\delta t &+ \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial x'}\delta x' + \dots + \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)} - x^{(m)}\delta\xi \\ &+ \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta y' + \dots + \frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}\delta y^{(n-1)} - y^{(n)}\delta\eta \\ &+ \frac{\partial U}{\partial z}\delta z + \frac{\partial U}{\partial z'}\delta z' + \dots + \frac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}}\delta z^{(p-1)} - z^{(p)}\delta\zeta. \end{aligned}$$

Sit $x^{(i)}$ una quantitatum $x, x', \dots, x^{(m-1)}$, atque $y^{(i)}$ una quantitatum $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, et $z^{(i)}$ una quantitatum $z, z', \dots, z^{(p-1)}$; patet e formula praecedente, fieri

$$(5)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial V}{\partial x^{(i)}}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial x^{(i)}}, & \left(\dfrac{\partial V}{\partial y^{(i)}}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial y^{(i)}}, & \left(\dfrac{\partial V}{\partial z^{(i)}}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial z^{(i)}}, \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial \xi}\right) = -x^{(m)}, & \left(\dfrac{\partial V}{\partial \eta}\right) = -y^{(n)}, & \left(\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}\right) = -z^{(p)}, \end{cases}$$

ubi differentialia partialia uncis includendo innuo, ipsarum $x^{(m)}$, $y^{(n)}$, $z^{(p)}$ loco introducendas esse ξ, η, ζ in variabilium independentium systema, ad quod differentiationes partiales referuntur. Quae ipsarum $x^{(m)}$, $y^{(n)}$, $z^{(p)}$ eliminatio efficienda est ope aequationum supra propositarum:

$$\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi,\quad \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = \eta,\quad \frac{\partial U}{\partial z^{(p)}} = \zeta.$$

E formulis (5) sequitur ipsius U per V expressio:

$$U = V - \xi\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) - \eta\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) - \zeta\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right).$$

Substituendo (5) in aequationibus (3) et (4) iam uncis omissis *hoc nanciscimur systema aequationum differentialium vulgarium transformatum:*

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, & \dfrac{d^n y}{dt^n} = -\dfrac{\partial V}{\partial \eta}, & \dfrac{d^p z}{dt^p} = -\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}, \\ \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}} - \xi_1, & \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} - \eta_1, & \dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z^{(p-1)}} - \zeta_1, \\ \dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-2)}} - \xi_2, & \dfrac{d\eta_1}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-2)}} - \eta_2, & \dfrac{d\zeta_1}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z^{(p-2)}} - \zeta_2, \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{d\xi_{m-2}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x'} - \xi_{m-1}, & \dfrac{d\eta_{n-2}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y'} - \eta_{n-1}, & \dfrac{d\zeta_{p-2}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z'} - \zeta_{p-1}, \\ \dfrac{d\xi_{m-1}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x}, & \dfrac{d\eta_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y}, & \dfrac{d\zeta_{p-1}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z}. \end{cases}$$

Aequationes differentiales antecedentes, quae locum tenent trium aequationum differentialium propositarum (1), constituunt systema $m+n+p+3$ aequationum differentialium inter variabiles

$$t,\ x,\ y,\ z,\ \xi,\ \xi_1,\ \dots,\ \xi_{m-1},\ \eta,\ \eta_1,\ \dots,\ \eta_{n-1},\ \zeta,\ \zeta_1,\ \dots,\ \zeta_{p-1},$$

quarum aequationum tres sunt resp. ordinis m^{ti}, n^{ti}, p^{ti}, reliquae omnes $m+n+p$ primi ordinis. Atque gaudent aequationes forma illa quasi canonica, qua in dextra parte inferiora tantum differentialia inveniuntur, quam quae ad laevam posita sunt. In quam formam iam redactae sunt aequationes differentiales propositae, nullis factis differentiationibus, quae in priore transformatione requirebantur, neque aliis adhibitis eliminationibus, nisi quod ipsarum $x^{(m)}$, $y^{(n)}$, $z^{(p)}$ loco introducendae erant in functionem

$$V = U - x^{(m)}\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} - y^{(n)}\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}} - z^{(p)}\frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}$$

quantitates

$$\xi = \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}},\quad \eta = \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}},\quad \zeta = \frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}.$$

Porro facile aequationum antecedentium (6) invenitur Multiplicator M.

Nam cum aequationes illae forma canonica gaudeant, aequatur $-\frac{d\log M}{dt}$ aggregato differentialium partialium expressionum, quae ad dextram positae sunt, siquidem harum expressionum quaeque respectu eius quantitatis differentiatur, cuius differentiali aequatur. At e numero aequationum (6) sex tantum sunt, videlicet:

$$\frac{d^m x}{dt^m} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \frac{d^n y}{dt^n} = -\frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad \frac{d^p z}{dt^p} = -\frac{\partial V}{\partial \zeta},$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}} - \xi_1, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} - \eta_1, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z^{(p-1)}} - \zeta_1,$$

in quibus dextrae partes non iis vacant quantitatibus, quarum differentialibus aequantur. Secundum regulam assignatam trium priorum aequationum dextrae partes resp. differentiandae erunt ipsarum $x^{(m-1)}$, $y^{(n-1)}$, $z^{(p-1)}$ respectu, trium posteriorum dextrae partes ipsarum ξ, η, ζ respectu, omniumque sex differentialium partialium provenientium formandum erit aggregatum. Quod patet aggregatum identice evanescere, binis terminis

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)} \partial \xi},$$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)} \partial \eta},$$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta \partial z^{(p-1)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^{(p-1)} \partial \zeta}$$

sese mutuo destruentibus. Unde fit

$$\frac{d\log M}{dt} = 0,$$

sive aequationum differentialium transformatarum (5) Multiplicatorem aequare licet *unitati*.

Aequationibus differentialibus (6) formam magis concinnam conciliare licet ponendo:

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi = V - \xi_1 x^{(m-1)} - \xi_2 x^{(m-2)} - \cdots - \xi_{m-1} x' \\ \qquad - \eta_1 y^{(n-1)} - \eta_2 y^{(n-2)} - \cdots - \eta_{n-1} y' \\ \qquad - \zeta_1 z^{(p-1)} - \zeta_2 z^{(p-2)} - \cdots - \zeta_{p-1} z'. \end{cases}$$

Sic enim introducendo functionem φ loco ipsius V, aequationum vulgarium (6) systema hoc modo repraesentari poterit:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_{m-1}}, & \frac{d\xi_{m-1}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_{m-2}}, & \frac{d\xi_{m-2}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{dx^{(m-1)}}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, & \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(m-1)}}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{n-1}}, & \frac{d\eta_{n-1}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{n-2}}, & \frac{d\eta_{n-2}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y'}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{dy^{(n-1)}}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, & \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}}, \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_{p-1}}, & \frac{d\zeta_{p-1}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \frac{dz'}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_{p-2}}, & \frac{d\zeta_{p-2}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z'}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{dz^{(p-1)}}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, & \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z^{(p-1)}}. \end{cases}$$

Videlicet cum functio V omnino non involvat quantitates

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \ldots, \ \xi_{m-1}, \ \eta_1, \ \eta_2, \ \ldots, \ \eta_{n-1}, \ \zeta_1, \ \zeta_2, \ \ldots, \ \zeta_{p-1},$$

fit e (7), excluso valore $i = 0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = -x^{(m-i)} = -\frac{dx^{(m-i-1)}}{dt},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_i} = -y^{(n-i)} = -\frac{dy^{(n-i-1)}}{dt},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i} = -z^{(p-i)} = -\frac{dz^{(p-i-1)}}{dt};$$

porro

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \frac{\partial V}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{(m-i)}} = \frac{\partial V}{\partial x^{(m-i)}} - \xi_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-i)}} = \frac{\partial V}{\partial y^{(n-i)}} - \eta_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z^{(p-i)}} = \frac{\partial V}{\partial z^{(p-i)}} - \zeta_i.$$

Quas formulas substituendo ex aequationibus differentialibus (6) antecedentes (8) prodeunt.

Demonstravi, designante φ functionem quamcunque quantitatum

$$t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m,$$

systema aequationum differentialium vulgarium:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}, & \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_2}, & \dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{dq_m}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_m}, & \dfrac{dp_m}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_m} \end{cases}$$

arctissimo vinculo connexum esse cum aequatione differentiali primi ordinis

$$(10)\quad \frac{\partial W}{\partial t} = \varphi,$$

in qua quantitates p_i designant differentialia partialia functionis incognitae W, ipsarum q_i respectu sumta. Sit enim W solutio completa aequationis differentialis partialis (10), affecta praeter Constantem additione iungendam m Constantibus arbitrariis $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$, datur aequationum differentialium vulgarium integratio completa formulis:

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, & \dfrac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, & \ldots, & \dfrac{\partial W}{\partial q_m} = p_m, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, & \ldots, & \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m, \end{cases}$$

designantibus $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$ novas Constantes arbitrarias, una cum ipsis $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$, quae functionem W afficiunt, numerum Constantium arbitrariarum requisitum $2m$ implentes. Vice versa si aequationum (9) integratione completa eruuntur valores quantitatum $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m$, exhibiti per quantitatem t ipsarumque valores initiales

$$q_1^0,\ q_2^0,\ \ldots,\ q_m^0,\ p_1^0,\ p_2^0,\ \ldots,\ p_m^0,$$

obtinetur aequationis differentialis partialis (10) solutio completa W per formulam

$$(12)\quad W = \int\left\{\varphi - p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} - p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} - \cdots - p_m\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\right\}dt,$$

siquidem post integrationem factam ope aequationum integralium mutetur functio quantitatum $t,\ q_1^0,\ q_2^0,\ \ldots,\ q_m^0,\ p_1^0,\ p_2^0,\ \ldots,\ p_m^0$ sic inventa in aliam quantitatum

$$t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ q_1^0,\ q_2^0,\ \ldots,\ q_m^0.$$

Scilicet per $2m$ aequationes integrales, quae inter $2m+1$ variabiles atque $2m$ Constantes arbitrarias locum habent, quamlibet harum $4m+1$ quantitatum functionem in aliam mutare licet, quae quaslibet $2m+1$ ex earum numero solas involvat.

Systema aequationum differentialium (8) ipso intuitu patet eadem gaudere forma atque aequationes (9), modo ipsis $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m$ substituantur $m+n+p$ quantitates

$$x,\ x',\ \ldots,\ x^{(m-1)};\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)};\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(p-1)},$$

ipsis vero $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m$ quantitates

$$\xi_{m-1},\ \xi_{m-2},\ \ldots,\ \xi;\ \eta_{n-1},\ \eta_{n-2},\ \ldots,\ \eta;\ \zeta_{p-1},\ \zeta_{p-2},\ \ldots,\ \zeta.$$

Unde aequationum differentialium (8) integratio completa eruitur quaerendo variabilium

$$t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(m-1)},\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(p-1)}$$

functionem W, praeter Constantem additione accedentem affectam $m+n+p$ Constantibus arbitrariis, quae satisfaciat aequationi differentiali partiali

$$(13)\quad \frac{\partial W}{\partial t} = \varphi,$$

siquidem in ipsa φ quantitatibus

$$\xi_{m-1},\ \xi_{m-2},\ \ldots,\ \xi,\ \eta_{n-1},\ \eta_{n-2},\ \ldots;\ \eta,\ \zeta_{p-1},\ \zeta_{p-2},\ \ldots,\ \zeta$$

substituantur respective functionis W differentialia partialia

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial W}{\partial x}, & \dfrac{\partial W}{\partial x'}, & \ldots, & \dfrac{\partial W}{\partial x^{(m-1)}}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial y}, & \dfrac{\partial W}{\partial y'}, & \ldots, & \dfrac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial z}, & \dfrac{\partial W}{\partial z'}, & \ldots, & \dfrac{\partial W}{\partial z^{(p-1)}}. \end{array}$$

Cum sit e (7)

$$\begin{aligned} \varphi = V &- \xi_1 x^{(m-1)} - \xi_2 x^{(m-2)} - \cdots - \xi_{m-1} x' \\ &- \eta_1 y^{(n-1)} - \eta_2 y^{(n-2)} - \cdots - \eta_{n-1} y' \\ &- \zeta_1 z^{(p-1)} - \zeta_2 z^{(p-2)} - \cdots - \zeta_{p-1} z', \end{aligned}$$

designante V functionem quantitatum

$$t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(m-1)};\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)};\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(p-1)};\ \xi,\ \eta,\ \zeta;$$

aequatio differentialis partialis (13) hoc modo repraesentari poterit:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t}+x'\dfrac{\partial W}{\partial x}+x''\dfrac{\partial W}{\partial x'}+\cdots+x^{(m-1)}\dfrac{\partial W}{\partial x^{(m-2)}} \\ \quad +y'\dfrac{\partial W}{\partial y}+y''\dfrac{\partial W}{\partial y'}+\cdots+y^{(n-1)}\dfrac{\partial W}{\partial y^{(n-2)}} \\ \quad +z'\dfrac{\partial W}{\partial z}+z''\dfrac{\partial W}{\partial z'}+\cdots+z^{(p-1)}\dfrac{\partial W}{\partial z^{(p-2)}} = V, \end{cases}$$

ubi functio V praeter variabiles independentes sola involvit differentialia partialia

$$\frac{\partial W}{\partial x^{(m-1)}},\quad \frac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}},\quad \frac{\partial W}{\partial z^{(p-1)}}.$$

Videmus igitur, aequationem differentialem partialem (14) et ab ipsa functione incognita vacuam esse, et omnia praeter tria differentialia partialia tantum lineariter implicare.

Si in formula (12) evenit, ut functio φ complures quantitatum $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tantum lineariter implicet, illae omnino abeunt e quantitate, quae sub signo integrationis est:

$$\varphi-p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}-p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}-\cdots-p_m\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}.$$

Unde nostro casu haec quantitas simpliciter evadit:

$$V-\xi\frac{\partial V}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial V}{\partial\eta}-\zeta\frac{\partial V}{\partial\zeta} = U,$$

cum omnia ξ_i, η_i, ζ_i praeter ipsa ξ, η, ζ functionem φ tantum lineariter afficiant. Hinc e formula (12) eruitur:

$$(15)\quad W = \int U dt.$$

Quae supponit formula, aequationibus differentialibus (8) complete integratis, expressas esse variabiles omnes per t ipsarumque valores initiales, unde etiam U solius t functio evadit; post integrationem autem ope aequationum integralium quantitates omnes ξ_i, η_i, ζ_i una cum earum valoribus initialibus eliminari, unde W ipsius t atque solarum x_i, y_i, z_i earumque valorum initialium functio fit, quae erit aequationis differentialis partialis (14) solutio completa.

Si reductio problematis isoperimetrici ad aequationem differentialem partialem primi ordinis, antecedentibus pro tribus functionibus explicata, extenditur ad numerum quemlibet functionum ipsam U afficientium, nanciscimur hanc propositionem:

Propositio de reductione problematum isoperimetricorum ad aequationes differentiales partiales primi ordinis.

Implicet U praeter variabilem independentem t eius functiones incognitas quotcunque x_1, x_2 etc. una cum earum differentialibus

$$x_1',\ x_1'',\ \ldots,\ x_1^{(\alpha)};\ x_2',\ x_2'',\ \ldots,\ x_2^{(\beta)};\ \text{etc.};$$

functiones x_1, x_2 etc. ita determinandae proponuntur, ut fiat

$$\delta\int U dt = 0;$$

eum in finem pono

$$\frac{\partial U}{\partial x_1^{(\alpha)}} = \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}},\quad \frac{\partial U}{\partial x_2^{(\beta)}} = \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}}\quad \text{etc.},$$

earumque aequationum ope elimino $x_1^{(\alpha)}$, $x_2^{(\beta)}$ etc. de functione

$$V = U-x_1^{(\alpha)}\frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}}-x_2^{(\beta)}\frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}}-\text{etc.};$$

quo facto evadit V functio quantitatum

$$t,\ x_1,\ x_1',\ \ldots,\ x_1^{(\alpha-1)};\ x_2,\ x_2',\ \ldots,\ x_2^{(\beta-1)};\ \text{etc.},$$

quas pro variabilibus independentibus habeo, atque differentialium partialium

$$\frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}},\quad \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}}\quad \text{etc.};$$

eruta functione V, formo aequationem differentialem partialem:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial t}+x_1'\frac{\partial W}{\partial x_1}+x_1''\frac{\partial W}{\partial x_1'}+\cdots+x_1^{(\alpha-1)}\frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-2)}} \\ &\quad +x_2'\frac{\partial W}{\partial x_2}+x_2''\frac{\partial W}{\partial x_2'}+\cdots+x_2^{(\beta-1)}\frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-2)}} \\ &\quad + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\quad = V; \end{aligned}$$

cuius inventa sit solutio completa W, quae praeter Constantem additione accedentem involvit Constantes $\mu = \alpha+\beta+\cdots$ arbitrarias a_1, a_2, $\ldots$, a_μ, numero μ aequante summam ordinum, ad quos in ipsa U singularum functionum incognitarum differentialia ascendunt; determinabuntur functiones incognitae x_1, x_2 etc. earumque differentialia

$$x_1',\ x_1'',\ \ldots,\ x_1^{(\alpha-1)};\ x_2',\ x_2'',\ \ldots,\ x_2^{(\beta-1)};\ \text{etc.}$$

per μ aequationes sequentes inter illas μ quantitates ipsamque t:

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial a_\mu} = b_\mu,$$

in quibus designant b_1, b_2, ..., b_μ novas Constantes arbitrarias.

Ad aequationes differentiales partiales primi ordinis etiam revocari possunt problemata isoperimetrica, in quibus inter functiones incognitas variae dantur aequationes differentiales conditionales, atque adeo functio U, quae sub signo integrationis invenitur, tantum per aequationem differentialem datur, cui satisfacere debet. Sed non amplius generaliter assignare licet Multiplicatorem systematis aequationum differentialium vulgarium, a cuius integratione problemata illa pendent.

DE AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM SYSTEMATE NON NORMALI AD FORMAM NORMALEM REVOCANDO

AUCTORE

C. G. J. JACOBI,
PROF. ORD. MATH. REGIOM.

DE AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM SYSTEMATE NON NORMALI AD FORMAM NORMALEM REVOCANDO*).

(Ex Ill. C. G. J. Jacobi manuscriptis posthumis in medium protulit A. Clebsch.)

In commentatione mea „Theoria novi Multiplicatoris etc.“ **) Multiplicatorem determinavi aequationum differentialium *isoperimetricarum*, i. e. ad problemata illa isoperimetrica pertinentium, in quibus variatio dati integralis, variabilem unam independentem, ceteras dependentes continentis, ad nihilum redigitur. Quam determinationem multo maioribus difficultatibus obnoxiam esse exposui, si variabilium dependentium differentialia altissima datum integrale afficientia non eiusdem ordinis sint. Eo enim casu aequationum differentialium isoperimetricarum systema non ea gaudet forma, ut singularum variabilium dependentium differentialia altissima pro incognitis haberi possint, quarum valores ipsis aequationibus differentialibus determinentur. Ad quam formam casu, quem innui, aequationes differentiales isoperimetricae post certas tantum differentiationes et eliminationes revocantur, id quod Multiplicatoris valorem indagandi negotium intricatum reddit.

Operae pretium duxi, totam materiem de aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando accurate tractare. In qua disquisitione ad propositiones quasdam generales perveni, quae theoriae aequationum differentialium vulgarium lacunam quandam implere videntur, quarum summam hic breviter indicabo.

---

*) Alia Ill. Jacobi commentatio posthuma de eadem quaestione, demonstrationes regularum hic enuntiatarum continens, invenitur in Diarii mathematici vol. LXIV p. 297 (cf. h. vol. p. 191).

**) §§. 30—33 commentationis citatae, Diarii Crell. vol. XXIX sive h. ed. vol. IV p. 495 sqq.

§. 1.

Systematis m aequationum differentialium ordo et brevissima in formam normalem reductio determinantur per solutionem problematis, datum m^2 quantitatum schema quadraticum per numeros minimos $l_1, l_2, \ldots, l_m$ singulis horizontalibus addendos ita transformandi, ut m maximorum transversalium systemate praeditum evadat. Solutio exemplo illustratur.

Variabilem independentem vocemus t, eius functiones sive variabiles pro dependentibus habitas $x_1, x_2, \ldots, x_m$; inter quas variabiles propositae sint m aequationes differentiales

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_m = 0.$$

Sit $a_{\iota,x}$ ordo altissimi, quod in aequatione $u_\iota = 0$ obvenit, differentialis variabilis x_x, dico:

1) ordinem systematis aequationum differentialium propositarum sive numerum Constantium arbitrariarum, quem earum integratio completa poscit, aequari *maximo* inter omnes valores, quos aggregatum

$$a_{i_1,1} + a_{i_2,2} + \cdots + a_{i_m,m}$$

induat, si pro indicibus $i_1, i_2, \ldots, i_m$, quibuscunque modis fieri potest, sumantur m diversi ex indicibus $1, 2, \ldots, m$.

Illud *maximum* sive systematis ordinem designabo per O; aequabitur O summae ordinum differentialium singularum variabilium altissimorum, quae obveniunt in systemate normali, ad quod propositum revocari potest. Ipse numerus O superabitur summa respectu systematis propositi aeque formata.

Variae exstant formae normales semperque certe duae, ad quas idem systema propositum reduci potest, quae reductiones non efficiuntur nisi auxilio diversarum differentiationum et eliminationum. Qua in re haec est propositio fundamentalis:

2) inter diversos modos aequationes differentiales propositas differentiandi, ut nascantur aequationes auxiliares, quarum adiumento per solas eliminationes systema propositum ad aliud normale reduci possit, *unicum* exstare *modum*, qui *paucissimas* differentiationes poscat, nam in alio quolibet modo aequationum differentialium propositarum aliquot vel omnes pluribus vicibus iteratis quam in illo differentiandas esse, neque in ullo alio modo fieri posse, ut aequationum differentialium propositarum una paucioribus vicibus differentietur.

Modum illum expeditissimum insigniamus nomine *brevissimae reductionis*, in qua brevissima reductione semper erunt aequationum differentialium propositarum una pluresve, quae omnino non differentiantur, sive quae nullas differentiationibus ex iis derivatas ad aequationum auxiliarium systema contribuunt. Unde si ponimus, in reductione brevissima ad aequationes auxiliares formandas aequationem $u_\iota = 0$ esse l_ι vicibus iteratis differentiandam, e numeris integris non negativis

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_m$$

semper unus pluresve nullitati aequantur. Ad eos numeros $l_1, l_2, \ldots, l_m$ investigandos, a quorum inventione reductio brevissima tota pendet, solvendum est hoc problema.

Problema.

„Datis m^2 quantitatibus $a_{\iota,x}$ quibuscunque, in quibus et ι et x valores $1, 2, \ldots, m$ induere debent, investigare m quantitates *minimas* positivas seu evanescentes $l_1, l_2, \ldots, l_m$ ita comparatas, ut, posito $a_{\iota,x} + l_\iota = p_{\iota,x}$, inter m^2 quantitates $p_{\iota,x}$ eligere liceat m quantitates

$$p_{i_1,1}, \quad p_{i_2,2}, \quad \ldots, \quad p_{i_m,m}$$

in seriebus diversis cum horizontalibus tum verticalibus positas, quarum unaquaeque inter eiusdem verticalis quantitates maximum valorem tueatur seu certe nulla alia quantitate eiusdem verticalis minor sit.“

Solutio.

Solutionis problematis propositi momenta praecipua breviter innuam. Disponamus quantitates $a_{\iota,x}$ in schema quadraticum

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{llll} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,m}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,m}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \ldots, & a_{m,m}. \end{array} \right.$$

Si qua eius quadrati series horizontalis reprehenditur, cuius terminus nullus inter omnes eiusdem *verticalis* est maximus (quo nomine hic semper etiam comprehendo terminos nullo reliquorum minores), eius seriei horizontalis terminis omnibus eandem quantitatem addo positivam eamque minimam, pro qua unus eius terminus maximo eiusdem verticalis aequetur.

Post praeparationem indicatam si mutatur quadratum propositum (A) in hoc:

$$(B)\quad \begin{cases} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,m}, \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{2,m}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m,1}, & b_{m,2}, & \ldots, & b_{m,m}, \end{cases}$$

quadrati (B) nulla exstabit series horizontalis, in qua non insit terminus inter omnes eiusdem verticalis maximus. Ad eiusmodi quadratum sequentes denominationes refero, quae bene tenendae sunt.

Systema *maximorum transversalium* voco systema quantitatum $b_{\iota,\varkappa}$, quae cum in seriebus horizontalibus diversis tum in seriebus verticalibus diversis positae sunt, quarum unaquaeque inter omnes quantitates in eadem verticali positas *maxima* est.

Sumo in quadrato (B) maximum numerum maximorum transversalium, et, ubi pluribus modis idem numerus maximus maximorum transversalium prodit, unum eorum systema ex arbitrio eligo, eiusque terminos *asteriscis* noto. Quorum maximorum transversalium maximus numerus esse potest aut 2*) aut 3 etc. aut m; si eorum numerus est m, problema propositum solutum est. Si iste numerus ipso m minor est, id ago, ut serierum horizontalium quasdam numeris minimis talibus augeam, ut in novo quadrato proveniente numerus maximorum transversalium auctus inveniatur. Quo negotio repetito, tandem perveniatur ad quadratum necesse est, in quo maximorum transversalium numerus est m, quo reperto problematis solutio inventa est. Dico autem, *augeri seriem horizontalem*, si eius terminis omnibus eadem quantitas positiva additur.

Series horizontales et verticales, ad quas maximorum transversalium systema electum pertinet, voco series H et V, reliquas series horizontales et verticales voco series H' et V'. Terminos in una verticalium V' maximos et ipsos *asteriscis* noto. Terminos asteriscis notatos voco *maxima stellata*.

Ponamus, in serie horizontali h_1 esse maximum stellatum eique in eadem verticali aequari terminum in serie horizontali h_2 positum; in serie horizontali

*) Adhibita praeparatione, qua schema quadraticum (A) in schema (B) mutatum est, fit, ut 2 sit minimus valor huius numeri, qui valor tum occurrit, si omnia *maxima* in una eademque serie horizontali iacent atque insuper in una verticali termini omnes inter se aequales sunt. Vid. Diarium mathem. vol. LXIV, p. 312 sive h. vol. p. 208.

h_2 esse maximum stellatum eique in eadem verticali aequari terminum in horizontali h_3 positum etc.; si ea ratione ad seriem horizontalem h_α pervenitur, ubi h_α unam serierum $h_2, h_3, \ldots, h_m$ designat, dicam, *a serie h_1 ad seriem h_α transitum dari.* Si dicitur, a serie h_1 ad seriem h_α transitum dari, ipsa series h_1 omnesque intermediae $h_2, h_3, \ldots, h_{\alpha-1}$ ad series H pertinebunt; series h_α sive ad series H sive ad series H' pertinere potest. Si a nulla serie horizontali, in qua duo plurave maxima stellata insunt, transitus datur ad aliquam serierum H', et si nullus exstat serierum H' terminus in aliqua serierum V' maximus, id certo criterio est, maximorum transversalium numerum *maximum* electum fuisse.

His praemissis, series horizontales omnes in tres classes distribuo.

Ad *classem primam* serierum horizontalium refero eas series, in quibus inveniuntur *duo plurave* maxima stellata, neque minus series horizontales omnes, ad quas ab illis seriebus transitus datur; quarum serierum primae classis nulla ad series H' pertinebit.

Ad *classem secundam* serierum horizontalium refero eas serierum H ad classem primam non pertinentes, a quibus ad aliquam serierum H' transitus non datur.

Ad *classem tertiam* serierum horizontalium refero omnes series H' easque serierum H, a quibus ad series H' transitus datur.

Hac serierum horizontalium distributione facta, series ad tertiam classem pertinentes omnes eadem quantitate augeo eaque minima, qua addita fit, ut earum serierum terminorum unus aequalis evadat alicui eiusdem verticalis maximo stellato primae aut secundae classis. Si illud maximum stellatum pertinet ad seriem horizontalem classis secundae, haec in novo quadrato proveniente transmigrat ad classem tertiam, neque alia in serierum horizontalium distributione fit mutatio. Quo casu operatio iteranda est, nova serie e secunda classe in tertiam recepta, quae eo usque repetenda est, dum serierum tertiae classis terminus aliquis alicui maximo stellato seriei *primae* classis aequalis evadat. Id quod nisi antea certe tum necessario eveniet, cum series secundae classis omnes ad classem tertiam transmigraverint. Simulatque autem evenit, adepti sumus quadratum, in quo numerus maior maximorum transversalium quam in quadrato (B) invenitur. Tum nova maximorum stellatorum dispositione novaque serierum horizontalium distributione in tres classes facta, per eandam methodum novum quadratum formandum est, in quo rursus maximorum transversalium numerus auctus invenitur, idque eo usque continuandum est, dum perveniatur ad quadratum, in quo m maxima transversalia habentur. Quadratum sic inventum derivatum erit e proposito (A) addendo seriebus horizontalibus quam minimas quantitates positivas, quae ipsae erunt quantitates quaesitae $l_1, l_2, \ldots, l_m$.

Propter regulae complicationem unum saltem apponere exemplum iuvat, quod sequentibus schematis continetur:

(A)

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
a	14	23	1	5	73	$\underline{91}$	10	$\underline{34}$	5	$\underline{99}$
b	25	32	2	4	62	81	9	23	4	88
c	14	1	7	16	21	7	13	12	3	77
d	11	$\underline{53}$	$\underline{61}$	4	3	1	12	1	4	91
e	9	21	23	18	27	3	6	9	12	15
f	4	16	18	13	5	12	23	21	14	81
g	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}$	3	7	13
h	$\underline{27}$	7	17	$\underline{37}$	73	8	11	24	$\underline{23}$	22
i	25	12	18	27	32	18	24	23	14	88
k	16	28	30	25	34	10	13	16	19	42

Quadratum (A) est ipsum propositum, in cuius seriebus verticalibus sicuti in quadratorum derivatorum terminos maximos lineola subnotavi. Series horizontales elementis $a, b, \ldots, k$ designavi. Quarum b, c, e, f, i, k omnino nullos terminos subnotatos continent. Seriei b terminos ab earundem verticalium terminis subnotatis detrahendo eruuntur differentiae

$$2,\ 21,\ 59,\ 33,\ 21,\ 10,\ 82,\ 11,\ 19,\ 11,$$

quarum 2 est minima, unde seriem b quantitate 2 augeo. Seriei c termini ab earundem verticalium terminis subnotatis differunt quantitatibus

$$13,\ 52,\ 54,\ 21,\ 62,\ 84,\ 78,\ 22,\ 20,\ 22,$$

quarum cum 13 minima sit, seriem c quantitate 13 augeo. Simili ratione series e, f, i, k respective quantitatibus 11, 9, 2, 4 augendo quadratum (B) deduco, cuius originem designo per symbolum:

$$(B)\quad (a,\ b+2,\ c+13,\ d,\ e+11,\ f+9,\ g,\ h,\ i+2,\ k+4)$$

(B)

		V	V	V'	V	V'	V'	V	V'	V	V
I	a	14	23	1	5	73	$\underline{91}$*	10	$\underline{34}$*	5	$\underline{99}$*
III	b	$\underline{27}$*	34	4	6	64	83	11	25	6	90
III	c	$\underline{27}$	14	20	29	34	20	26	25	16	90
I	d	11	$\underline{53}$*	$\underline{61}$*	4	3	1	12	1	4	91
III	e	20	32	34	29	38	14	17	20	$\underline{23}$*	26
III	f	13	25	27	22	14	21	32	30	$\underline{23}$	90
I	g	25	43	13	16	$\underline{83}$*	10	$\underline{91}$*	3	7	13
II	h	$\underline{27}$	7	17	$\underline{37}$*	73	8	11	24	$\underline{23}$	22
III	i	$\underline{27}$	14	20	29	34	20	26	25	16	90
III	k	20	32	34	29	38	14	17	20	$\underline{23}$	46
			19	27	8	19	8	59	4		9

In quadrato (B) *sex* nec plura assignari possunt maxima transversalia; series verticales, in quibus posita sunt, suprascripta V, reliquas suprascripta V', ipsa maxima asteriscis noto. Si in aliqua verticalium V' terminus subnotatus reperitur, eundem asterisco noto. Seriebus horizontalibus a, d, g, in quibus bina plurave maxima stellata reperiuntur, classis I numerum praefigo. In septem verticalibus, ad quas maxima illa pertinent, nullus alius terminus subnotatus reperitur, unde a seriebus a, d, g ad aliam seriem transitus non datur, ideoque solae a, d, g primam classem constituunt. Series c, f, i, k, quippe in quibus omnino nullus reperitur terminus stellatus, ad classem III pertinent. Porro ad series f et k ab e, ad series c et i a b transitus datur, unde etiam series b et e ad tertiam classem pertinent. Scilicet ex definitione supra stabilita colligitur, ad seriem horizontalem s ab alia s_1 transitum dari, si in s sit terminus subnotatus non stellatus atque in eadem verticali terminus stellatus ad seriem horizontalem s_1 pertinens. Cum series a, d, g ad primam, series b, c, e, f, i, k ad tertiam classem pertineant, restat series h, quae secundam classem constituit. Iam in unaquaque serie verticali, in qua maximum stellatum inest ad seriem primae aut secundae classis pertinens, sumatur terminus serierum tertiae classis *proxime minor*, atque infra seriem verticalem notetur utriusque termini differentia. Quarum differentiarum

$$53-34=19,\quad 61-34=27,\quad 37-29=8,\quad 83-64=19,$$
$$91-83=8,\quad 91-32=59,\quad 34-30=4,\quad 99-90=9$$

sumatur minima 4; series tertiae classis omnes quantitate 4 augendo deducitur proximum quadratum (C). Quod quadratum per symbolum

$$(C)\quad (a,\ b+6,\ c+17,\ d,\ e+15,\ f+13,\ g,\ h,\ i+6,\ k+8)$$

denotari potest.

(C)

		V	V	V'	V	V'	V'	V	V	V	V
I	a	14	23	1	5	73	91*	10	34	5	99*
III	b	31*	38	8	10	68	87	15	29	10	94
III	c	31	18	24	33	38	24	30	29	20	94
I	d	11	53*	61*	4	3	1	12	1	4	91
III	e	24	36	38	33	42	18	21	24	27*	30
II	f	17	29	31	26	18	25	36	34*	27	94
I	g	25	43	13	16	83*	10	91*	3	7	13
II	h	27	7	17	37*	73	8	11	24	23	22
III	i	31	18	24	33	38	24	30	29	20	94
III	k	24	36	38	33	42	18	21	24	27	50
			15	23	4	15	4	61	5		5

In quadrato (C) videmus, *septem* maxima transversalia reperiri, novumque in serie f accessisse terminum stellatum; ipsa f ad classem secundam a tertia transit. Subscribo quantitates, quibus in quadrato (C) termini stellati serierum primae et secundae classis terminos *proxime minores* ad tertiam classem et eandem verticalem pertinentes superant. Quarum quantitatum cum minima sit 4, series classis III omnes eodem numero 4 augendo formo quadratum

$$(D)\quad (a, b+10, c+21, d, e+19, f+13, g, h, i+10, k+12),$$

in quo iam *octo* maxima transversalia insunt.

(D)

		V	V	V'	V	V'	V	V	V	V	V
II	a	14	23	1	5	73	91	10	34	5	99*
II	b	35	42	12	14	72	91*	19	33	14	98
III	c	35*	22	28	37	42	28	34	33	24	98
I	d	11	53*	61*	4	3	1	12	1	4	91
III	e	28	40	42	37	46	22	25	28	31*	34
II	f	17	29	31	26	18	25	36	34*	27	94
I	g	25	43	13	16	83*	10	91*	3	7	13
III	h	27	7	17	37*	73	8	11	24	23	22
III	i	35	22	28	37	42	28	34	33	24	98
III	k	28	40	42	37	46	22	25	28	31	54
			13	19		10	63	57	1		1

(E)

		V	V	V'	V	V'	V	V	V	V	V
III	a	14	23	1	5	73	91	10	34	5	99*
III	b	35	42	12	14	72	91*	19	33	14	98
III	c	36*	23	29	38	43	29	35	34	25	99
I	d	11	53*	61*	4	3	1	12	1	4	91
III	e	29	41	43	38	47	23	26	29	32*	35
III	f	17	29	31	26	18	25	36	34*	27	94
I	g	25	43	13	16	83*	10	91*	3	7	13
III	h	28	8	18	38*	74	9	12	25	24	23
III	i	36	23	29	38	43	29	35	34	25	99
III	k	29	41	43	38	47	23	26	29	32	55
			11	18		9		55			

Dispositio asteriscorum secundum regulas traditas in novo quadrato (D) paulo mutari debet; quo facto series a, b, h inveniuntur e classe I, III, II ad classem II, II, III transmigrasse. Termini stellati classis I et II terminos classis III atque earundem verticalium *proxime minores* superant numeris 13, 19, 10, 63, 57, 1, 1; quorum minimo 1 omnes classis III series augendo deduco quadratum

(E) $(a,\ b+10,\ c+22,\ d,\ e+20,\ f+13,\ g,\ h+1,\ i+11,\ k+13)$,

in quo *idem* est maximorum transversalium numerus.

Quadrati (E) habitus a quadrati (D) habitu non differt, nisi quod simul tres classis II series a, b, f ad classem III transierunt. Scilicet f et a ad classem III transeunt, quia earum terminis stellatis 34 et 99 aequales evadunt serierum i et c termini in iisdem verticalibus positi; deinde b et ipsa ad classem III transit, cum eius termino stellato 91 aequalis evadat terminus eiusdem verticalis in serie a, quae iam ad classem III transmigravit. De quadrato (E) per regulas traditas deducitur quadratum

(F) $(a+9,\ b+19,\ c+31,\ d,\ e+29,\ f+22,\ g,\ h+10,\ i+20,\ k+22)$,

in quo *novem* maxima transversalia insunt.

(F)

		V	V	V'	V	V	V	V	V	V	V
III	a	23	32	10	14	82	$\underline{100}$	19	$\underline{43}$	14	$\underline{108}^*$
III	b	44	51	21	23	81	$\underline{100}^*$	28	42	23	107
III	c	$\underline{45}^*$	32	38	$\underline{47}$	52	38	44	$\underline{43}$	34	$\underline{108}$
I	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
III	e	38	50	52	$\underline{47}$	56	32	35	38	$\underline{41}^*$	44
III	f	26	38	40	35	27	34	45	$\underline{43}^*$	36	103
II	g	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
II	h	37	17	27	$\underline{47}$	$\underline{83}^*$	18	21	34	33	32
III	i	$\underline{45}$	32	38	$\underline{47}^*$	52	38	44	$\underline{43}$	34	$\underline{108}$
III	k	38	50	52	$\underline{47}$	56	32	35	38	$\underline{41}$	64
			2	9		1		46			

E quadrato (F) deducitur quadratum

(G) $(a+10,\ b+20,\ c+32,\ d,\ e+30,\ f+23,\ g,\ h+10,\ i+21,\ k+23)$,

in quo et ipso *novem* maxima transversalia insunt; e (G) tandem provenit quadratum quaesitum

(H) $(a+11,\ b+21,\ c+33,\ d,\ e+31,\ f+24,\ g,\ h+11,\ i+22,\ k+24)$,

in quo *decem* maxima transversalia deprehenduntur, qui est ipse serierum horizontalium aut verticalium numerus.

(G)

		V	V	V'	V	V	V	V	V	V	V
III	a	24	33	11	15	$\underline{83}$	$\underline{101}$	20	$\underline{44}$	15	$\underline{109}^*$
III	b	45	52	22	24	82	$\underline{101}^*$	29	43	24	108
III	c	$\underline{46}^*$	33	39	$\underline{48}$	53	39	45	$\underline{44}$	35	$\underline{109}$
I	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
III	e	39	51	53	$\underline{48}$	57	33	36	39	$\underline{42}^*$	45
III	f	27	39	41	36	28	35	46	$\underline{44}^*$	37	104
II	g	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
III	h	37	17	27	47	$\underline{83}^*$	18	21	34	33	32
III	i	$\underline{46}$	33	39	$\underline{48}^*$	53	39	45	$\underline{44}$	35	$\underline{109}$
III	k	39	51	53	$\underline{48}$	57	33	36	39	$\underline{42}$	65
			1	8				45			

(H)

		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
S_3	a	25	34	12	16	$\underline{84}$	$\underline{102}^*$	21	$\underline{45}$	16	$\underline{110}$
S_2	b	46	$\underline{53}^*$	23	25	83	$\underline{102}$	30	44	25	109
S_5	c	$\underline{47}^*$	34	40	$\underline{49}$	54	40	46	$\underline{45}$	36	$\underline{110}$
S_1	d	11	$\underline{53}$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
S_6	e	40	52	54	$\underline{49}$	58	34	37	40	$\underline{43}^*$	46
S_4	f	28	40	42	37	29	36	47	$\underline{45}^*$	38	105
S_1	g	25	43	13	16	83	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
S_4	h	38	18	28	48	$\underline{84}^*$	19	22	35	34	33
S_4	i	$\underline{47}$	34	40	$\underline{49}$	54	40	46	$\underline{45}$	36	$\underline{110}^*$
S_5	k	40	52	54	$\underline{49}^*$	58	34	37	40	$\underline{43}$	66

Quadrati (H)*) repraesentatio symbolica docet, esse

$$11,\ 21,\ 33,\ 0,\ 31,\ 24,\ 0,\ 11,\ 22,\ 24$$

minimos numeros quadrati propositi (A) seriebus addendos, ut aliud nascatur quadratum, in quo termini in diversis seriebus verticalibus maximi omnes ad diversas series horizontales pertineant, neque ullum eiusmodi quadratum ex (A) deduci posse vel uni serierum horizontalium numerum minorem addendo quam assignatum.

Si numerus quantitatum, e quibus quadrata conflantur, permagnus est, non difficile erit artificia comminisci, quibus numeros scribendi taedium evitetur, quippe e quorum magna mole pauci tantum ad unumquodque novum quadratum formandum poscantur.

§. 2.

Regula exponitur ad inveniendos numeros minimos $l_1, l_2, \ldots, l_m$, dato quocunque eorum numerorum systemate, aut datis tantum schematis quadratici terminis, qui post numerorum $l_1, l_2, \ldots, l_m$ additionem m maxima transversalia praebent. Exemplum regulae adiicitur.

Sint rursus l_i quantitates positivae seu evanescentes, positoque

$$a_{i,\kappa} + l_i = p_{i,\kappa},$$

quadratum

$$\begin{array}{llll} p_{1,1}, & p_{1,2}, & \ldots, & p_{1,m}, \\ p_{2,1}, & p_{2,2}, & \ldots, & p_{2,m}, \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ p_{m,1}, & p_{m,2}, & \ldots, & p_{m,m} \end{array}$$

ita comparatum sit, ut termini in diversis eius seriebus verticalibus maximi omnes ad diversas quoque series horizontales pertineant, sive ut in eo unum plurave maximorum transversalium systemata completa**) assignari possint. Quorum unum quodcunque asteriscis distinguendo, reliqua vero singularum verticalium maxima iis aequalia lineolis subnotando, habetur hoc criterium certum,

*) signorum S_1, S_2 etc. in tabula quadrati (H) adhibitorum explicatio in sequenti paragrapho praestabitur.

**) i. e. ex m terminis composita.

quo cognosci potest, sitne eiusmodi quadratum e dato (A), quod quantitatibus $a_{i,\kappa}$ formatur, per *minimas* quantitates positivas seu evanescentes l_i seriebus horizontalibus additas derivatum. Sumantur enim series horizontales, pro quibus $l_i = 0$ seu quae omnino eaedem sunt atque in quadrato proposito (A). Quas series, quarum certe una exstare debet, per S_1 designabo. In seriebus S_1 sumantur termini subnotati atque in horum verticalibus termini stellati, quorum series horizontales, quae non iam forte ad ipsas S_1 pertinent, designo per S_2. Rursus in seriebus verticalibus, ad quas serierum S_2 termini subnotati pertinent, sumantur termini stellati, quorum series horizontales et a S_1 et a S_2 diversas per S_3 denoto. *Si ea ratione pergendo series horizontales omnes exhauriuntur, quadratum e quantitatibus $p_{i,\kappa}$ formatum de quadrato proposito, e quantitatibus $a_{i,\kappa}$ formato, per minimas quantitates positivas seu evanescentes l_i seriebus eius horizontalibus additas deductum est.* Ita in exemplo nostro *omnes* series horizontales ad systemata S_1, S_2 etc. successive inventa sequenti modo referuntur:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
d	b	a	f	c	e
g			h	k	
			i		

Unde certo concludi potest, in exemplo nostro ad eruendam problematis propositi solutionem quantitates seriebus horizontalibus addendas quam minimas adhibitas esse.

Iisdem principiis, quibus erutum est criterium, sitne problema modo simplicissimo sive per quantitates quam minimas l_i solutum, etiam nititur methodus, qua solutio simplicissima de solutione quacunque deduci potest. Statuendo

$$a_{i,\kappa} + h_i = q_{i,\kappa},$$

ubi quantitates h_i sint positivae aut evanescentes, formatoque quadrato e quantitatibus $q_{i,\kappa}$ ad instar quadrati (A) e quantitatibus $a_{i,\kappa}$ formati, ponamus, in seriebus eius verticalibus diversis assignari posse maxima, quae omnia in diversis quoque seriebus horizontalibus posita sint. Eiusmodi maximorum transversalium systema completum quodcunque asteriscis noto. Quantitatum h_i minima, quam h vocabo, de omnibus $q_{i,\kappa}$ detracta, prodit quadratum, cuius series horizontales una pluresve immutatae, i. e. eaedem sunt atque in quadrato (A), quas series rursus per S_1 denoto. Deinde terminis praeter ipsos stellatos in suis verticalibus maximis lineola subnotatis, lege supra exposita de seriebus S_1 successive serierum horizontalium systemata deducantur $S_2, S_3, \ldots, S_\alpha$. Quibus si omnes series horizontales amplectimur, solutio simplicissima inventa est; sin autem relinquuntur series horizontales, in quibus nullus datur terminus stellatus, qui cum aliquo termino subnotato serierum $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ in eadem verticali positus sit, de omnibus illis seriebus horizontalibus detraho eandem quantitatem minimam h' talem, ut aut earum terminus aliquis stellatus termino alicui eiusdem verticalis ad unam serierum $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ pertinenti aequalis evadat, aut earum una in seriem quadrati (A) correspondentem redeat. Quare serierum horizontalium ad complexus $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ pertinentium numerus maior factus erit quam in quadrato e quantitatibus $q_{i,\varkappa}-h$ formato. Eadem procedendi ratione, si opus est, continuata, pauciores paucioresque series horizontales relinquentur e complexibus $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ exclusae, donec perveniatur ad quadratum, in quo serierum $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ systemata *omnes* series horizontales amplectuntur.

Si quantitatibus quibuscunque $h_1, h_2, \ldots, h_m$ ad series quadrati (A) horizontales additis deducitur quadratum m maximis transversalibus gaudens, summa terminorum, qui eadem loca in quadrato (A) atque illa maxima transversalia in quadrato derivato occupant, inter omnia quadrati (A) aggregata m terminorum transversalium valore maximo gaudet. Unde problema inaequalitatum,

dati quadrati (A) e m^2 terminis formati invenire m terminos transversales summa *maxima* gaudentes,

tot habebit solutiones, quot in quadrato derivato assignari possunt maximorum transversalium systemata. Quae systemata omnia inveniuntur, si quadrati derivati terminos tantum conservamus in suis verticalibus maximos, reliquos omnes *nullitati* aequiparamus, deinde eorum terminorum formamus Determinans. Quippe cuius Determinantis termini singuli singulas problematis solutiones suppeditant. Vice versa demonstrari potest, unamquamque problematis inaequalitatum antecedentis solutionem suppeditare quadrati derivati systema maximorum transversalium.

In exemplo nostro e quadrati (H) terminis subnotatis formandum erit Determinans, reliquis quadrati (H) terminis nullitati aequiparatis. Quod Determinans successive revocari potest ad Determinantia simpliciora formata e quantitatibus quadratorum

(I)

	α	β	δ	ζ	ι	$\varkappa$
a				102		110
b		53		102		
c	47		49			110
e			49		43	
i	47		49			110
k			49		43	

,

(II)

	α	δ	ζ	ι	$\varkappa$
a			102		110
c	47	49			110
e		49		43	
i	47	49			110
k		49		43	

,

(III)

	α	δ	ι	$\varkappa$
c	47	49		110
e		49	43	
i	47	49		110
k		49	43	

.

Designemus enim quadrati terminos per serierum horizontalium et verticalium, ad quas pertinent, indicationem, quarum illas elementis a, b, c etc., has elementis α, β, γ etc. notavi. In quadrato (H) termini (d, γ), (g, η) sunt in suis verticalibus unici subnotati, termini (f, ϑ), (g, η), (h, ε) in suis seriebus horizontalibus unici subnotati. Unde Determinantis formandi termini omnes habere debent factorem communem

$$(d, \gamma)(h, \varepsilon)(g, \eta)(f, \vartheta).$$

Quo factore reiecto, remanet Determinans e quantitatibus quadrati (I), quod seriebus horizontalibus d, f, g, h, verticalibus $\gamma, \varepsilon, \eta, \vartheta$ reiectis e quadrato (H) nascitur. In eo quadrato terminus (b, β) in sua verticali unicus est non evanescens, quo et ipso ut factore communi separato, quaerendum manet Determinans quantitatum quadrati (II). In quo quadrato rursus termino (a, ζ), in sua verticali unico, ut factore communi separato, formandum manet quantitatum (III) Determinans

$$\begin{aligned} &-(c, \alpha)(e, \delta)(k, \iota)(i, \varkappa)-(i, \alpha)(k, \delta)(e, \iota)(c, \varkappa) \\ &+(c, \alpha)(k, \delta)(e, \iota)(i, \varkappa)+(i, \alpha)(e, \delta)(k, \iota)(c, \varkappa) \\ =&-\{(c, \alpha)(i, \varkappa)-(i, \alpha)(c, \varkappa)\}\{(e, \delta)(k, \iota)-(k, \delta)(e, \iota)\}. \end{aligned}$$

Quod cum quatuor terminis constet, in quadrato proposito (A) quatuor habentur systemata maximorum transversalium summa maxima gaudentium, videlicet

$$(b,\,\beta)+(d,\,\gamma)+(h,\,\varepsilon)+(a,\,\zeta)+(g,\,\eta)+(f,\,\vartheta)$$
$$+1)\ (c,\,\alpha)+(e,\,\delta)+(k,\,\iota)+(i,\,\varkappa)$$
$$\text{aut } 2)\ (c,\,\alpha)+(k,\,\delta)+(e,\,\iota)+(i,\,\varkappa)$$
$$\text{aut } 3)\ (i,\,\alpha)+(k,\,\delta)+(e,\,\iota)+(c,\,\varkappa)$$
$$\text{aut } 4)\ (i,\,\alpha)+(e,\,\delta)+(k,\,\iota)+(c,\,\varkappa).$$

Qui in exemplo nostro numeris expressi sunt

$$32+61+73+91+91+21 = 369$$
$$+1)\ 14+18+19+88 = 139$$
$$\text{aut } 2)\ 14+25+12+88 = 139$$
$$\text{aut } 3)\ 25+25+12+77 = 139$$
$$\text{aut } 4)\ 25+18+19+77 = 139,$$

unde terminorum transversalium aggregatum maximum fit 508.

Vice versa, si undecunque cognoscuntur quadrati propositi (A) termini transversales summa maxima gaudentes, sequenti ratione e quadrato proposito (A) per quantitates minimas l_i seriebus horizontalibus addendas derivatur quadratum, in quo diversarum verticalium maxima omnia in diversis quoque seriebus horizontalibus iacent.

Datos scilicet terminos transversales summa maxima gaudentes asteriscis noto, et seriebus horizontalibus tales quantitates addo, ut termini earum stellati maximis in ipsorum seriebus verticalibus aequentur. Unamqamque seriem auctam reliquis seriebus subscribo eamque in reliquarum serierum et antecedentium et sequentium examine adhibeo. Qua in re series horizontales elementis a, b etc. denotatas iisdem elementis post augmenta capta designo, atque terminis stellatis post augmenta capta asteriscos conservo. Procedendi rationem exemplo nostro sequens schema illustrabit. Dati supponantur termini transversales summa maxima gaudentes

$(a,\,\zeta)$,	$(b,\,\beta)$,	$(c,\,\alpha)$,	$(d,\,\gamma)$,	$(e,\,\delta)$,	$(f,\,\vartheta)$,	$(g,\,\eta)$,	$(h,\,\varepsilon)$,	$(i,\,\varkappa)$,	$(k,\,\iota)$
91	32	14	61	18	21	91	73	88	19.

		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
(1)	a	14	23	1	5	73	91*	10	34	5	99
(2)	b	25	32*	2	4	62	81	9	23	4	88
(3)	c	14*	1	7	16	21	7	13	12	3	77
(4)	d	11	53	61*	4	3	1	12	1	4	91
(5)	e	9	21	23	18*	27	3	6	9	12	15
(6)	f	4	16	18	13	5	12	23	21*	14	81
(7)	g	25	43	13	16	83	10	91*	3	7	13
(8)	h	27	7	17	37	73*	8	11	24	23	22
(9)	i	25	12	18	27	32	18	24	23	14	88*
(10)	k	16	28	30	25	34	10	13	16	19*	42
(11)	b	46	53*	23	25	83	102	30	44	25	109
(12)	a	25	34	12	16	84	102*	21	45	16	110
(13)	c	46*	33	39	48	53	39	45	44	35	109
(14)	e	39	51	53	48*	57	33	36	39	42	45
(15)	f	28	40	42	37	29	36	47	45*	38	105
(16)	h	38	18	28	48	84*	19	22	35	34	33
(17)	i	47	34	40	49	54	40	46	45	36	110*
(18)	c	47*	34	40	49	54	40	46	45	36	110
(19)	e	40	52	54	49*	58	34	37	40	43	46
(20)	k	40	52	54	49	58	34	37	40	43*	66

In verticali ζ terminus stellatus ipse est maximus, unde ab initio certe series horizontalis a non mutatur; in verticali β est maximus 53, unde horizontalis b numero 21 augenda auctaque subscribenda est, quo linea (11) formatur. Iam ad primum terminum regressi, in serie ζ invenimus maximum 102, unde a numero 11 augenda est, quod lineam (12) suppeditat. Ad terminum (c,α) progredientes, in α invenimus maximum 46 in linea (11) positum, unde c numero 32 augenda est, quod lineam (13) suppeditat. Eadem ratione series d et g immutatas relinquo, series e, f, h, i numeris 30, 24, 11, 22 augeo, quod lineas (14), (15), (16), (17) suppeditat. Iam cum in linea (17) inveniatur verticalis α terminus 47, eiusdem verticalis termino stellato 46 in linea (13) posito maior, lineae (13) addo 1, unde linea (18) formatur. In (17) et (18) est verticalis δ terminus 49 eiusdem verticalis termino stellato in (14) posito maior, unde lineam (14) et ipsam unitate augeo, quod lineam (19) suppeditat. Denique ad terminum $(k, \iota) = 19$ procedo; et cum verticalis ι sit maximum 43 in (19) positum, seriei k addendo 24, formo lineam (20). Quo facto iam negotium transactum erit. Inventae enim sunt series

$$\begin{array}{lcccccccccc} & a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i, & k, \\ \text{lineas} & (12), & (11), & (18), & (4), & (19), & (15), & (7), & (16), & (17), & (20). \end{array}$$

formantes, quarum stellati termini in ipsorum verticalibus maximi sunt, quod requirebatur. Quas series videmus constituere quadratum (H) supra alia methodo inventum.

Antecedentium ope novam nanciscimur solutionem problematis supra propositi, si innotuerint quantitates m quaecunque, quae seriebus quadrati (A) horizontalibus additae hoc quadratum in aliud transforment, cuius termini in diversis verticalibus maximi omnes ad diversas series horizontales pertineant, invenire illarum m quantitatum valores minimos positivos seu evanescentes. Nam cum secundum suppositionem factam aliquod innotescat quadratum ex (A) derivatum m maximis transversalibus gaudens, etiam in (A) innotescunt m termini transversales summa maxima gaudentes. Quibus cognitis, secundum regulam in antecedentibus traditam facile per quantitates minimas positivas addendas ex (A) derivatur quadratum m maximis transversalibus gaudens. Simul patet, quomodo, uno cognito systemate terminorum quadrati (A) transversalium summa maxima gaudentium, reliqua omnia systemata facile inveniantur. Nam uno illo systemate cognito, vidimus, facile ex (A) derivari quadratum systemate m maximorum transversalium gaudens; in quo si singularum verticalium sola maxima conservantur, reliquis terminis nihilo aequiparatis, Determinantis e quadrati quantitatibus formati singuli termini non evanescentes suggerunt singula maximorum transversalium systemata ideoque singula systemata terminorum quadrati (A) transversalium summa maxima gaudentium; amborum enim systematum termini in duobus quadratis eadem loca occupant.

§. 3.

Solutio problematis de schemate quadratico m^2 quantitatum ad systema m aequationum differentialium applicatur. Forma aut formae normales, ad quas systema propositum per reductionem brevissimam revocari possit. Aliae reductiones in formam normalem.

Aequationes differentiales propositae

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_m = 0,$$

ut per brevissimam reductionem ad alias forma normali gaudentes revocentur, $l_1, l_2, \ldots, l_m$ vicibus differentiandae sunt. Numeri $l_1, l_2, \ldots, l_m$ ipsi sunt, quorum in antecedentibus tradidi inventionem. Qui cum omnino determinati sint, etiam systema aequationum auxiliarium ad reductionem brevissimam requisitum, quod illis differentiationibus nascitur, omnino determinatum erit. At plerumque variae sunt formae normales, ad quas aequationes differentiales propositae illius aequationum auxiliarium systematis ope revocari possunt. Sit enim rursus $a_{i,\varkappa}$ ordo differentialis variabilis $x_\varkappa$ altissimi, quod in aequatione $u_i = 0$ reperitur, atque rursus quantitates $a_{i,\varkappa}$ in formam quadrati (A) disponantur, cuius i^{tam} seriem horizontalem constituunt termini $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,m}$, $\varkappa^{\text{tam}}$ verticalem termini $a_{1,\varkappa}, a_{2,\varkappa}, \ldots, a_{m,\varkappa}$. Sumatur in quadrato (A) aliquod systema terminorum transversalium summa maxima gaudentium

$$a_{\alpha_1,1}, \quad a_{\alpha_2,2}, \quad \ldots, \quad a_{\alpha_m,m},$$

aequationes differentiales propositae per brevissimam reductionem ad has revocari possunt forma normali gaudentes

$$x_1^{(a_{\alpha_1,1})} = X_1, \quad x_2^{(a_{\alpha_2,2})} = X_2, \quad \ldots, \quad x_m^{(a_{\alpha_m,m})} = X_m,$$

ubi diversarum variabilium differentialia ad laevam posita sunt altissima, quae in systemate reducto reperiuntur, a quibus functiones ad dextram positae $X_1, X_2 \ldots, X_m$ prorsus vacuae supponantur. Atque habebuntur tot eiusmodi systemata inter se diversa aequationum differentialium, ad quas aequationes differentiales propositae per brevissimam reductionem revocari possint, quot in quadrato (A) habentur systemata terminorum transversalium summa maxima gaudentium. Conditis aequationibus auxiliaribus ad brevissimam reductionem adhibendis, ponamus, variabilis $x_\varkappa$ differentiale altissimum sive in aequationibus propositis $u_i = 0$, $u_{i_1} = 0$ etc. sive in aequationibus auxiliaribus ex his per iteratas differentiationes derivatis reperiri; in iis locis quadrati, quae ad $\varkappa^{\text{tam}}$ seriem verticalem atque ad i^{tam}, i_1^{tam} etc. seriem horizontalem pertinent, colloco unitatem sive aliam quantitatem non evanescentem, in reliquis autem $\varkappa^{\text{tae}}$ verticalis loculis colloco nullitatem.

Quo facto, pro singulis variabilibus $x_\varkappa$ terminorum quadrati formo Determinans. Cuius terminus non evanescens si conflatur e quantitatibus primae, secundae, ..., m^{tae} verticalis, ad α_1^{tam}, α_2^{tam}, ..., α_m^{tam} seriem horizontalem pertinentis, dabitur forma normalis, in qua variabilium $x_1, x_2, \ldots, x_m$ altissima differentialia respective eadem sunt atque in aequationibus propositis

$$u_{\alpha_1} = 0, \quad u_{\alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad u_{\alpha_m} = 0.$$

Cum ad alios Determinantis terminos alius pertineat indicum $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ordo, ea ratione e Determinantis terminis non evanescentibus singulis singulae prodeunt formae normales, ad quas aequationes differentiales propositae per brevissimam reductionem revocari possunt.

Vidimus, methodum, qua per quantitates minimas positivas seriebus horizontalibus addendas ex (A) deducatur quadratum, in quo verticalium maxima omnia in diversis seriebus horizontalibus reperiantur, magis expeditam reddi posse, si undecunque cognosceretur quadrati (A) systema m terminorum transversalium summa maxima gaudentium. Hac methodo expeditiore invenitur, quot vicibus iteratis in reductione brevissima singulae aequationes propositae ad formandas aequationes auxiliares differentiandae sint, quoties undecunque datur forma aliqua normalis, ad quam aequationes differentiales propositae tali reductione revocantur. Quae forma normalis innotescit, si aequationes differentiales propositae ita comparatae sunt, ut in aliis aliarum variabilium differentialia ad altissimum ordinem ascendant. Tum enim illa diversarum variabilium differentialia in diversis aequationibus propositis altissima ipsa altissima erunt in forma normali, ad quam aequationes differentiales propositae brevissima reductione revocari possunt. Namque illorum differentialium ordinis in quadrato (A) constituunt m terminorum transversalium systema.

Ut huius paragraphi disquisitiones exemplo illustrentur, ponamus, dari *decem* aequationes differentiales $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ..., $u_{10} = 0$ inter variabilem independentem t et decem dependentes $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, atque numeros quadrati (A) p. 490 propositi indicare ordines altissimos, ad quos singularum variabilium dependentium differentialia in diversis aequationibus ascendant, ita ut ex. gr. altissima variabilium $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ differentialia in aequatione $u_1 = 0$ occurrentia sint

$$x_1^{(14)}, \quad x_2^{(23)}, \quad x_3^{(1)}, \quad x_4^{(5)}, \quad x_5^{(73)}, \quad x_6^{(91)}, \quad x_7^{(10)}, \quad x_8^{(34)}, \quad x_9^{(5)}, \quad x_{10}^{(99)}.$$

Cum ultimum quadratum (H) ex proposito (A) deductum sit addendo seriebus

horizontalibus numeros

$$11,\ 21,\ 33,\ 0,\ 31,\ 24,\ 0,\ 11,\ 22,\ 24,$$

reductio brevissima perficitur per aequationes auxiliares formatas differentiando aequationes propositas

$$\begin{array}{cccccccc} u_1 = 0, & u_2 = 0, & u_3 = 0, & u_5 = 0, & u_6 = 0, & u_8 = 0, & u_9 = 0, & u_{10} = 0 \\ 11, & 21, & 33, & 31, & 24, & 11, & 22, & 24 \end{array}$$

vicibus iteratis, aequationibus duabus $u_4 = 0$, $u_7 = 0$ omnino non ad formandas aequationes auxiliares advocatis. Earumque aequationum auxiliarium ope propositae per solas eliminationes ad *quatuor* diversas formas normales revocari possunt. In quibus omnibus inter altissima diversarum variabilium differentialia, quae per inferiora ipsasque variabiles exprimenda sunt, secundam ea, quae supra tradidi, inveniuntur

$$x_2^{(32)}, \quad x_3^{(61)}, \quad x_5^{(73)}, \quad x_6^{(91)}, \quad x_7^{(91)}, \quad x_8^{(21)};$$

porro in forma normali

$$\begin{array}{rcccc} \textit{prima:} & x_1^{(14)}, & x_4^{(18)}, & x_9^{(19)}, & x_{10}^{(88)}; \\ \textit{secunda:} & x_1^{(14)}, & x_4^{(25)}, & x_9^{(12)}, & x_{10}^{(88)}; \\ \textit{tertia:} & x_1^{(25)}, & x_4^{(25)}, & x_9^{(12)}, & x_{10}^{(77)}; \\ \textit{quarta:} & x_1^{(25)}, & x_4^{(18)}, & x_9^{(19)}, & x_{10}^{(77)}. \end{array}$$

Unde decem illarum aequationum differentialium propositarum integratio completa 508 Constantibus arbitrariis afficitur, qui numerus est summa ordinum, ad quos altissima diversarum variabilium differentialia in formis normalibus ascendunt. Altissima illa formarum normalium differentialia omnia in ipsis aequationibus differentialibus propositis reperiuntur, neque vero in his altissima sunt praeter $x_3^{(61)}$, $x_6^{(91)}$, $x_7^{(91)}$.

Consideremus reductionem quamcunque atque e toto aequationum differentialium propositarum et auxiliarium numero eligamus m, quae ex singulis aequationibus propositis per altissimam differentiationem derivatae sint, inter quas nonnullae ex propositarum numero esse possunt, si quae earum ad aequationes auxiliares per differentiationes formandas omnino non in usum vocatae sunt. In unaquaque earum m aequationum colligamus altissimorum singularum variabilium differentialium ordines eosque more consueto in quadratum disponamus: in eiusmodi quadrato necessario maxima diversarum serierum verticalium omnia in diversis quoque seriebus horizontalibus versantur. Ex praeceptis autem supra traditis de eiusmodi quadrato redire licet ad aliud de proposito (A) per minimos numeros positivos l_i deductum. Unde colligitur, *de aequationum diffe-*

rentialium propositarum quacunque reductione in formam normalem deduci posse brevissimam.

§. 4.

Reductio systematis propositi ad unicam aequationem differentialem. Regula ad reductionem inveniendam datur et exemplo illustratur. Forma elegans, qua regulam enuntiare liceat.

Aequationum differentialium systema in genere ad unicam aequationem differentialem inter duas variabiles revocari potest. Sint duae illae variabiles independens t et dependens x_1; uni illi aequationi differentiali inter t et x_1 intercedenti iungi debent aliae aequationes, quibus reliquae variabiles dependentes $x_2, x_3, \ldots, x_m$ ipsae per t, x_1 atque variabilis x_1 differentialia exprimantur, quae differentialia non ascendunt ad ordinem aequationis differentialis inter t et x_1 locum habentis. Eiusmodi forma normalis cum prae ceteris ab Analystis considerari soleat, indicabo, quot vicibus iteratis singulae aequationes differentiales propositae $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\ldots$, $u_m = 0$ differentiandae sint, ut aequationes differentiales ad reductionem illam necessariae nascantur.

Aequationes differentiales propositas $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\ldots$, $u_m = 0$ ponamus $l_1, l_2, \ldots, l_m$ vicibus differentiandas esse, ut aequationes auxiliares ad reductionem brevissimam requisitae prodeant. Qui numeri $l_1, l_2, \ldots, l_m$ quomodo inveniantur, supra praecepi. Quadrati (A) seriebus horizontalibus addendo numeros $l_1, l_2, \ldots, l_m$, alterum formo quadratum (A'), in eoque aliquod maximorum transversalium systema completum asteriscis distinguo, reliqua diversarum verticalium maxima lineolis subnoto. Si variabiles omnes praeter independentem t et dependentem $x_\varkappa$ eliminandae sunt, in $\varkappa^{\text{ta}}$ verticali quaero terminum stellatum, qui sit in i^{ta} serie horizontali; in i^{ta} serie horizontali quaero terminos subnotatos, in eorum verticalibus singulis singulos terminos stellatos, in horum seriebus horizontalibus rursus terminos subnotatos, in eorum verticalibus rursus terminos stellatos et ita porro. Qua in re ad terminos stellatos iam notatos amplius recurrere non opus est. Continuato negotio, quantum fieri potest, omnes series horizontales, ad quas ea procedendi ratione pervenitur, i^{tae}, a qua auspicati sumus, dicam *annexas*. Quas series una cum ipsa i^{ta} omnes minima quantitate augeo tali, ut earum terminus aliquis neque stellatus neque subnotatus aequalis evadat termino suae verticalis stellato. Cuius termini serie horizontali accedente ad series i^{tae} annexas, rursus i^{tam} seriem eique annexas, quarum iam auctus est numerus, quantitate minima augeo tali, ut earum terminus aliquis neque stellatus neque subnotatus aequalis evadat termino suae verticalis stellato; quo facto, serierum i^{tae} annexarum numerus rursus augebitur; et sic harum serierum numerum magis magisque augeo, donec perveniatur ad quadratum (A''), cuius omnes series horizontales i^{tae} annexae sunt. Iam ex (A'') quadratum (A''') deduco, augendo series horizontales eadem quantitate tali, ut terminus ad i^{tam} seriem horizontalem, $\varkappa^{\text{tam}}$ verticalem pertinens fiat aequalis *summae maximae, quam systema m terminorum transversalium quadrati* (A) *induere potest.* Numeri, quibus quadrati (A) series horizontales augendae sunt, ut quadratum (A''') efficiatur, indicant, quot vicibus singulae aequationes differentiales propositae differentiandae sint ad aequationes eruendas auxiliares necessarias, ut per solas eliminationes nascantur aequatio differentialis inter solas variabiles t et $x_\varkappa$ aliaeque aequationes, quibus reliquae variabiles ipsae per t, $x_\varkappa$ et variabilis $x_\varkappa$ differentialia exprimantur.

Quadratum (A') est idem, quod supra in exemplo nostro per (H) designavi. Ponamus, $\varkappa^{\text{tam}}$ verticalem esse seriem ζ, cuius terminus stellatus 102 ad seriem horizontalem a pertinet, in qua insunt termini subnotati 84, 45, 110, ad verticales ε, ϑ, $\varkappa$ pertinentes, quarum termini stellati ad series h, f, i pertinent, in quibus habentur termini subnotati 47 et 49, ad verticales α et δ pertinentes (45 non adhibeo, quippe cuius verticalem iam in usum vocavimus); in verticalibus α et δ termini stellati ad series c et k pertinent, in qua posteriore habetur terminus subnotatus 43, ad verticalem ι pertinens, cuius terminus stellatus in e iacet, quae series unicum subnotatum 49 continet, cuius verticalis iam in usum vocata est. Hinc seriei a inventae sunt annexae h, f, i, c, k, e. Series a, h, f, i, c, k, e omnes *unitate* augendo seriebus ipsi a annexis accedit b, nam eo incremento seriei e vel k terminus 52, ad verticalem β pertinens, abit in 53, qui numerus aequatur termino verticalis β stellato, qui ad horizontalem b pertinet. Rursus series a, h, f, i, c, k, e, b augeo numero 6, quo facto seriebus ipsi a annexis accedit d; tandem series omnes praeter g augeo numero 37, ut ipsa quoque g ad series ipsi a annexas redeat. Unde quadratum (A'') ex (A') sive (H) efficitur seriebus

a, h, f, i, c, k, e	addendo	44,
seriei b	-	43,
- d	-	37,

serie g immutata manente. Cum sit $102 + 44 = 146$, $508 - 146 = 362$, quadrati (A'') series horizontales eodem numero 362 augendae sunt, ut quadratum (A''') eruatur. Quadratum (A'), ut supra, per symbolum

$$(A')\quad (a+11,\ b+21,\ c+33,\ d,\ e+31,\ f+24,\ g,\ h+11,\ i+22,\ k+24)$$
denotando, pro quadratis (A''), (A''') nanciscimur:
$$(A'')\quad (a+55,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68),$$
$$(A''')\quad (a+417, b+426, c+439, d+399, e+437, f+430, g+362, h+417, i+428, k+430).$$
Unde in exemplo nostro, ut variabiles paeter t ex x_6 omnes ex decem aequationibus differentialibus propositis eliminentur, eae ad eruendas aequationes auxiliares requisitas 417, 426, 439, 399, 437, 430, 362, 417, 428, 430 vicibus iteratis differentiandae sunt.

Eadem methodo eruimus quadrata (A''), in quibus series horizontales omnes cuilibet serierum $a, b, c, \ldots, k$ annexae sunt, addendo quadrati (A') seriebus

$a, h, f, i, c, k, e \quad +44;\ b \quad +43;\ d \quad +37;\ g \quad 0,$
$b, a, h, f, i, c, k, e \quad +44;\ d \quad +37;\ g \quad 0,$
$c, k, f, i, e \quad +44;\ b, a, h \quad +43;\ d \quad +37;\ g \quad 0,$
$d, b, a, c, e, f, h, i, k \quad +44;\ g \quad 0,$
$e, k \quad +45;\ b, a, h, f, i, c \quad +44;\ d \quad +38;\ g \quad 0,$
$f \quad +44;\ e, i, k, c \quad +39;\ b, a, h \quad +38;\ d \quad +32;\ g \quad 0,$
$g \quad +9;\ h \quad +8;\ k, e \quad +7;\ b, a, f, i, c \quad +6;\ d \quad 0,$
$h \quad +46;\ k, e \quad +45;\ b, a, f, i, c \quad +44;\ d \quad +38;\ g \quad 0,$
$i, c, k, f, e \quad +44;\ b, a, h \quad +43;\ d \quad +37;\ g \quad 0,$
$k, e \quad +45;\ b, a, h, f, i, c \quad +44;\ d \quad +38;\ g \quad 0.$

Tertium et nonum, quintum et decimum quadratum eadem ratione ex (A') prodire videmus. Modus, quo quadrata illa (A'') ex ipso proposito (A)) deducantur, sequentibus schematis indicatur:

	$S.$	(A'')
x_6	146	$(a+55,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68)$,
x_2	97	$(a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68)$,
x_1	91	$(a+54,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+54,\ i+66,\ k+68)$,
x_3	105	$(a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+44,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68)$,
x_9	88	$(a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+38,\ e+76,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+69)$,
x_8	89	$(a+49,\ b+59,\ c+72,\ d+32,\ e+70,\ f+68,\ g,\ h+49,\ i+61,\ k+63)$,
x_7	100	$(a+17,\ b+27,\ c+39,\ d,\ e+38,\ f+30,\ g+9,\ h+19,\ i+28,\ k+31)$,
x_5	130	$(a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+38,\ e+76,\ f+68,\ g,\ h+57,\ i+66,\ k+69)$,
x_{10}	154	$(a+54,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+54,\ i+66,\ k+68)$,
x_4	94	$(a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+38,\ e+76,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+69)$.

In quadrati (A') sive (H) seriebus horizontalibus prima, secunda, $\ldots$, decima habentur termini stellati

102, 53, 47, 61, 43, 45, 91, 84, 110, 49,

pertinentes ad verticalem

sextam, secundam, primam, tertiam, nonam, octavam, septimam, quintam, decimam, quartam.

Quibus terminis addendo

44, 44, 44, 44, 45, 44, 9, 46, 44, 45,

prodeunt numeri

146, 97, 91, 105, 88, 89, 100, 130, 154, 94,

quos per S denotatos in margine posui una cum variabilibus, quae diversis verticalibus respondent.

In quadrato aliquo (A'') sit S terminus stellatus seriei horizontalis, cui reliquae annexae sunt: ab S ad quemlibet alium terminum stellatum poterit perveniri per continuum transitum termini stellati ad sublineatum eiusdem seriei horizontalis, termini sublineati ad stellatum eiusdem verticalis. Proponamus ex. gr. quadratum primum supra exhibitum

$$(A'')\quad (a+55,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68)$$

sive

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
a					128	146*		89		154
b		96*								
c	91*			93				89		154
d			98*							
e		96	98	93					87*	
f							91	89*		
g							91*			
h					128*					
i	91			93				89		154*
k		96	98	93*					87	

,

in quo solos terminos stellatos et sublineatos seu stellato eiusdem verticalis aequales (omissa lineola) apposui. In eo quadrato series horizontales omnes a serie α pendent, cuius terminus stellatus est 146. De quo ad reliquos terminos stellatos sic descenditur:

146, 154, 93, 96; 146, 154, 91_α; 146, 154, 93, 98; 146, 154, 93, 87;
146, 154, 89; 146, 154, 89, 91_β; 146, 128; 146, 154; 146, 154, 93.

Bini termini iuxta positi T et U sunt stellati tales, ut terminus in serie horizontali ipsius T, verticali ipsius U positus sit ipsi U aequalis sive sublineatus, quae est transitus propositi lex.

Si de quadrato (A'') proposito reicitur termini S, a quo proficiscimur, series verticalis et alia quaecunque horizontalis, in quadrato remanente maximorum transversalium systema facile assignatur. Designemus per $\widehat{TU}$ terminum ipsi U aequalem in serie horizontali ipsius T, verticali ipsius U positum, atque ponamus, seriei horizontalis reiciendae terminum stellatum esse $S^{(f)}$; porro in quadrato proposito (A'') ab S ad $S^{(f)}$ secundum legem stabilitam transiri per terminos stellatos intermedios $S', S'', \ldots, S^{(f-1)}$. His positis, quadrati propositi (A'') termini stellati reliqui ipsi erunt quadrati remanentis maxima transversalia; in locum autem ipsorum $S', S'', \ldots, S^{(f)}$ sumendi sunt termini

$$\widehat{SS'},\quad \widehat{S'S''},\quad \widehat{S''S'''},\quad \ldots,\quad \widehat{S^{(f-1)}S^{(f)}},$$

qui termini ipsis $S', S'', \ldots, S^{(f)}$ aequales sunt. Ex hac propositione colligitur, in quadratis, quae, serie termini S verticali et alia quacunque horizontali reiecta, remanent, eandem fore maximorum transversalium summam, videlicet eadem quantitate S minorem quam in quadrato proposito (A'').

Consideremus quadratum aliquod $(A''_\varkappa)$, in quo seriei horizontalis, cui reliquae omnes annexae sunt, terminus stellatus pertinet ad $\varkappa^{\text{tam}}$ verticalem, quem terminum designabo per $S_\varkappa$. Quadratum illud $(A''_\varkappa)$ ipsum est, quod formari debet, quoties variabiles omnes praeter t et $x_\varkappa$ eliminare proponitur. Statuamus porro, quadratum $(A''_\varkappa)$ provenire addendo quadrati (A) seriebus horizontalibus quantitates

$$h_1^{(\varkappa)},\quad h_2^{(\varkappa)},\quad \ldots,\quad h_m^{(\varkappa)}.$$

Vocemus O ordinem systematis aequationum differentialium propositarum sive summam maximam terminorum transversalium in quadrato (A), sitque $O - S_\varkappa = P_\varkappa$; secundum praecepta supra tradita ad formandum aequationum auxiliarium systema, cuius ope eliminatio proposita praestari possit, m aequationum differentialium propositarum unaquaeque i^{ta} erit $P_\varkappa + h_i^{(\varkappa)}$ vicibus iteratis differentianda. Cui numero $P_\varkappa + h_i^{(\varkappa)}$ significationem memorabilem tribuere licet. Fit in quadrato

$(A''_\varkappa)$ summa maximorum transversalium, quae est terminorum transversalium summa maxima

$$O + h_1^{(\varkappa)} + h_2^{(\varkappa)} + \cdots + h_m^{(\varkappa)}.$$

Unde, si $\varkappa^{\text{tam}}$ seriem verticalem, i^{tam} horizontalem reicimus, secundum propositionem inventam in quadrato remanente summa maxima terminorum transversalium erit

$$O - S_\varkappa + h_1^{(\varkappa)} + h_2^{(\varkappa)} + \cdots + h_m^{(\varkappa)} = P_\varkappa + h_1^{(\varkappa)} + h_2^{(\varkappa)} + \cdots + h_m^{(\varkappa)}$$

ideoque, si de ipso quadrato (A) reicitur $\varkappa^{\text{ta}}$ series verticalis, i^{ta} horizontalis, in quadrato remanente summa maxima terminorum transversalium erit $P_\varkappa + h_i^{(\varkappa)}$. Hinc problematis hic transacti nacti sumus hanc solutionem:

Problema.

Inter variabilem independentem t et m variabiles dependentes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ datae sint aequationes differentiales

$$u_1 = 0,\quad u_2 = 0,\quad \ldots,\quad u_m = 0;$$

quas si ad unicam aequationem differentialem inter t et $x_\varkappa$ revocare postulatur, propositas aequationes differentiales differentiando novae formandae sunt aequationes auxiliares eaeque necessariae, ut earum beneficio per solas eliminationes sine ullis ulterioribus differentiationibus aequatio differentialis inter t et $x_\varkappa$ prodeat: quaeritur, quot vicibus ad formandum illud aequationum auxiliarum systema aequatio $u_i = 0$ differentianda sit.

Solutio.

Formetur quadratum m seriebus verticalibus totidemque horizontalibus constans; in α^{ta} verticali, α^{ta} horizontali ponatur ordo differentialis variabilis x_α altissimi, quod in aequatione $u_\alpha = 0$ obvenit. De eo quadrato reiecta i^{ta} serie horizontali, $\varkappa^{\text{ta}}$ verticali, in quadrato remanente quaeratur summa maxima $\sigma_{i,\varkappa}$, quam eius assequi possunt $m-1$ termini, omnes in diversis seriebus horizontalibus et in diversis verticalibus positi: ad formandum aequationum auxiliarium systema, cuius ope aequatio differentialis inter t et $x_\varkappa$ nascatur, aequatio $u_i = 0$ iteratis $\sigma_{i,\varkappa}$ vicibus differentianda est. Qui numerus quaesitus $\sigma_{i,\varkappa}$ etiam aequatur ordini aequationum differentialium provenientium, si de aequationibus propositis reicimus ipsam $u_i = 0$, ipsam autem variabilem $x_\varkappa$ pro constante habemus.

Numeri $\sigma_{i,x} = P_x + h_i^{(x)} = O - S_x + h_i^{(x)}$ ipso quadrato (A_x'') suppeditantur, quod, quomodo e quadrato (A') deducatur, docui. Dedi supra numerorum S_x et $h_i^{(x)}$ valores exemplo proposito respondentes; quibus numeris soluta habentur centum inaequalitatum problemata, videlicet si de quadrato proposito simul una series horizontalis quaecunque et una quaecunque verticalis reiciuntur, in quoque centum quadratorum remanentium summam maximam terminorum transversalium invenire. Facile etiam in horum quadratorum unoquoque ipsi termini transversales summa maxima gaudentes inveniuntur, si ea repetis, quae supra de modo a termino S quadrati (A'') ad alium quemlibet stellatum $S^{(i)}$ per terminos stellatos intermedios transeundi tradidi.

§. 5.

Conditio determinatur, qua fiat, ut systematis aequationum differentialium propositi ordo deprimatur.

Casibus particularibus evenire potest, ut ordo systematis aequationum differentialium non ascendat ad valorem summae maximae terminorum quadrati (A) transversalium. Qui habitus aequationum particularis certa conditione analytica indicatur. Sit rursus $x_x^{(a_{i,x})}$ differentiale variabilis x_x altissimum, quod in aequatione $u_i = 0$ invenitur; differentialium partialium

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1^{(a_{1,1})}}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2^{(a_{1,2})}}, & \dots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m^{(a_{1,m})}}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1^{(a_{2,1})}}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2^{(a_{2,2})}}, & \dots, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_m^{(a_{2,m})}}, \\[2ex]
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\[1ex]
\dfrac{\partial u_m}{\partial x_1^{(a_{m,1})}}, & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2^{(a_{m,2})}}, & \dots, & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_m^{(a_{m,m})}}
\end{array}$$

fingo Determinans, eiusque terminos tantum hos

$$\pm \frac{\partial u_1}{\partial x_{i'}^{(a_{1,i'})}} \frac{\partial u_2}{\partial x_{i''}^{(a_{2,i''})}} \cdots \frac{\partial u_m}{\partial x_{i^{(m)}}^{(a_{m,i^{(m)}})}}$$

conservo, in quibus aggregatum ordinum

$$a_{1,i'} + a_{2,i''} + \cdots + a_{m,i^{(m)}}$$

valorem *maximum* O adipiscitur; reliquos omnes Determantis terminos reicio. Terminorum remanentium aggregatum, quod quodammodo est Determinans mutilatum, designo per ∇; *erit*

$$\nabla = 0$$

conditio, qua definitur, aequationum differentialium propositarum systema habitu particulari indutum esse, quo fiat, ut ordo eius deprimatur.

Non evanescente ∇, ordo systematis semper valorem O, theoria generali a me proposita assignatum, assequitur. Quantitatem ∇ voco *systematis aequationum differentialium propositarum Determinans.*

In exemplo nostro fit

$$\nabla = \frac{\partial u_1}{\partial x_6^{(91)}} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2^{(32)}} \cdot \frac{\partial u_4}{\partial x_3^{(61)}} \cdot \frac{\partial u_6}{\partial x_8^{(21)}} \cdot \frac{\partial u_7}{\partial x_7^{(91)}} \cdot \frac{\partial u_8}{\partial x_5^{(73)}}$$

$$\times \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial x_1^{(14)}} \cdot \frac{\partial u_9}{\partial x_{10}^{(88)}} - \frac{\partial u_9}{\partial x_1^{(25)}} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_{10}^{(77)}} \right\} \left\{ \frac{\partial u_5}{\partial x_4^{(18)}} \cdot \frac{\partial u_{10}}{\partial x_9^{(19)}} - \frac{\partial u_{10}}{\partial x_4^{(25)}} \cdot \frac{\partial u_5}{\partial x_9^{(12)}} \right\}.$$

Huius formulae quatuor termini, qui resolutis uncis proveniunt, respondent quatuor supra a me investigatis systematis terminorum quadrati (A) transversalium summa *maxima* gaudentium. Quoties igitur in exemplo nostro neutra locum habet aequationum

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1^{(14)}} \cdot \frac{\partial u_9}{\partial x_{10}^{(88)}} - \frac{\partial u_9}{\partial x_1^{(25)}} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_{10}^{(77)}} = 0,$$

$$\frac{\partial u_5}{\partial x_4^{(18)}} \cdot \frac{\partial u_{10}}{\partial x_9^{(19)}} - \frac{\partial u_{10}}{\partial x_4^{(25)}} \cdot \frac{\partial u_5}{\partial x_9^{(12)}} = 0,$$

aequationum differentialium propositarum systema est ordinis 508, sive 508 Constantibus arbitrariis earum integratio completa afficitur. Si vero duarum aequationum antecedentium altera locum habet, systematis ordo valore 508 inferior manet. Quo casu aequationes differentiales propositae praeparatione quadam egent, quae facta esse debet, antequam procedas ad tractandas aequationes differentiales propositas. Systematis aequationum differentialium propositarum Determinans non evanescere, est conditio, cui nisi satisfactum sit, eius ordinem determinare non licet. Quoties inaequalitatum problema, terminos quadrati (A) transversales summa maxima gaudentes determinandi, *unicam* solutionem habet, ordo systematis aequationum differentialium propositarum summae illi maximae aequatur, neque fieri potest, ut inferior evadat. Tum enim systematis Determinans unico termino constat neque potest evanescere.

ANMERKUNGEN.

ÜBER DIEJENIGEN PROBLEME DER MECHANIK, IN WELCHEN EINE KRÄFTEFUNCTION EXISTIRT, UND ÜBER DIE THEORIE DER STÖRUNGEN.

1. Bei der Revision dieser umfangreichen, wahrscheinlich i. J. 1836 oder spätestens 1837 entstandenen, aber erst lange nach Jacobi's Tode von Clebsch veröffentlichten Abhandlung habe ich den Eindruck empfangen, dass sie nach einem nicht völlig druckfertigen Manuscripte herausgegeben sei, und zwar im Wesentlichen ganz so, wie sie von dem Verfasser niedergeschrieben war. Das Letztere lässt sich freilich jetzt nicht mehr feststellen, weil das Jacobi'sche Manuscript abhanden gekommen ist. Was aber den ersten Punkt angeht, so müsste es doch im hohen Grade auffallend erscheinen, dass Jacobi die ihrem Inhalte nach so bedeutende Abhandlung ungedruckt hat liegen lassen, wenn er nicht selbst der Ansicht gewesen wäre, dass sie an manchen Stellen der Umarbeitung bedürftig sei. Ich möchte glauben, Jacobi habe sie nur als eine Vorarbeit für eine von ihm geplante ausführliche und systematische Darstellung seiner auf Dynamik sich beziehenden Untersuchungen angesehen. Dafür spricht auch, dass er einiges darin Enthaltene in späterer Zeit vollständiger und genauer entwickelt, vieles auch in andere Abhandlungen aufgenommen hat.

Es würde hiernach vielleicht gestattet und zweckmässig gewesen sein, wenn bei der Herausgabe der in Rede stehenden Abhandlung in etwas freierer Weise als bei der Veröffentlichung der mehr durchgearbeiteten Theile des Jacobi'schen Nachlasses verfahren wäre, etwa in der Art, wie die „Vorlesungen über Dynamik" nach dem Borchardt'schen Collegienhefte redigirt worden sind. Ich habe aber nicht verkennen können, zu welchen Schwierigkeiten und Inconvenienzen es führen würde, wenn man jetzt noch eine Umarbeitung der Abhandlung in dem angedeuteten Sinne versuchen wollte; und ist daher beim Neudrucke der Text des ersten Druckes beibehalten worden, abgesehen davon, dass einige offenkundige Versehen berichtigt, und stylistische Härten und Nachlässigkeiten beseitigt sind.

2. S. 245, Z. 8 v. o. ff. Das hier angegebene Verfahren findet sich ausführlicher entwickelt in der Abhandlung: „Ueber die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung". (S. 397 d. Bd. §§. 4, 5.)

3. S. 252, Z. 12 v. u. ff. Die hier gegebenen Integralgleichungen enthalten eine überzählige Constante. Wie man aus diesen drei Gleichungen zwei andere, von einander unabhängige, welche nur die erforderlichen fünf Constanten enthalten, ableiten kann, wird weiter unten (§§. 23, 26) gezeigt.

4. S. 280, Z. 18 v. o. ff. Die Winkel ψ, φ, ϑ hätten genauer definirt werden sollen; es genügt aber die Hinweisung auf die angeführte Poisson'sche Abhandlung.

5. S. 303, Z. 1 v. o. ff. In diesen Gleichungen sind die Ausdrücke auf der Rechten des Gleichheitszeichens Functionen von

$$t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\ \frac{\partial W}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial q_m},$$

und es ist unter W die gegebene Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H=0$$

zu verstehen.

Von den in diesem Bande enthaltenen Abhandlungen sind die zwei ersten von Herrn Frobenius, die übrigen von dem während der Arbeit verstorbenen Dr. Lottner, von mir und Herrn Dr. Fritz Kötter vor dem Drucke revidirt worden. Hr. Frobenius hat überdies die erste Correctur der Bogen 1—27, Hr. Fr. Kötter in Gemeinschaft mit Hrn. Dr. Ernst Kötter die erste Correctur und letzte Revision der Bogen 28—64 übernommen. Hr. Wangerin hat für den ganzen Band die zweite Correctur besorgt.

NACHTRÄGLICHE BERICHTIGUNG ZWEIER STELLEN IM DRITTEN BANDE.

Auf S. 276 des dritten Bandes ist in der *Observatio de aequatione sexti gradus etc.* der erste Satz durch ein beim Druck vorgekommenes Versehen entstellt worden, und muss folgendermassen lauten:

Sint elementa quinque proposita x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ac designemus per symbolum

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

functionem elementorum rationalem, quae et immutata manet, si elementa x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 eodem ordine, quo ea exhibemus, commutamus respective cum his

$$x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_1,$$

et inverso ordine cum his

$$x_5,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4.$$

Im Originaldrucke (Crelle's Journal, Bd. XIII) fehlen die Worte „inverso ordine", was zur Folge hat, dass der Wortlaut der beiden letzten Zeilen nicht in Übereinstimmung ist mit dem, was Jacobi ohne Zweifel hat sagen wollen, und ausserdem die vorhergehenden Worte „eodem ordine" keinen rechten Sinn haben.

Der Vorschlag, durch die angegebene Einschiebung die Stelle in Ordnung zu bringen, rührt von Herrn Kronecker her, und ist von demselben in einem an mich gerichteten Briefe, der demnächst auch veröffentlicht werden soll, ausführlich motivirt worden.

In demselben Bande ist S. 303, Z. 1 v. o.

statt $A_m A_{m'} = A_{m+m'}$ zu lesen $A_m A_{m'} = A_0 A_{m+m'}$.

Druckfehler des fünften Bandes.

S. 229, Z. 14 v. o. ist das Zeichen: hinter dx_n' zu tilgen.

S. 444, Z. 6 v. u. ist zu lesen

$$dx:dy:dp=\frac{\partial q}{\partial p}:-1:-\frac{\partial q}{\partial x}\quad\text{statt}\quad dx:dy:dp-\frac{\partial q}{\partial p}:-1:-\frac{\partial q}{\partial x}.$$

W.