DE INVESTIGANDO ORDINE SYSTEMATIS AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM VULGARIUM CUJUSCUNQUE

AUCTORE

C. G. J. JACOBI,
PROF. ORD. MATH. REGIOM.

Borchardt Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 64 p. 297—320.

DE INVESTIGANDO ORDINE SYSTEMATIS AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM VULGARIUM CUJUSCUNQUE.

(Ex Ill. C. G. J. Jacobi manuscriptis posthumis in medium protulit C. W. Borchardt.)

1.

Investigatio ad solvendum problema inaequalitatum reducitur.

Systema aequationum differentialium vulgarium est *non canonicum**), si aequationes altissima variabilium dependentium differentialia tali modo continent, ut horum valores ex iis petere non liceat. Id quod fit, quoties aequationes nonnullae altissimis illis differentialibus carentes in systemate proposito vel ipsae inveniuntur vel eliminatione ex eo obtinentur. *Eo casu numerus Constantium arbitrariarum, quas integratio completa inducit, sive ordo systematis semper minor est summa altissimorum ordinum, ad quos differentialia singularum variabilium in aequationibus differentialibus propositis ascendunt.* Qui ordo systematis cognoscitur, si per differentiationes et eliminationes contingit systema propositum redigere in aliud forma canonica gaudens eique aequivalens, ita ut de systemate canonico etiam ad propositum reditus pateat. Nam summa altissimorum ordinum, ad quos in systemate canonico differentialia singularum variabilium dependentium ascendunt, etiam systematis propositi non canonici ordo erit. Ad quem ordinem investigandum non tamen opus est ea ad formam canonicam reductione, sed res per considerationes sequentes absolvi potest.

Ponamus, inter variabilem independentem t atque n variabiles dependentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haberi n aequationes differentiales

$$(1) \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_n = 0,$$

sitque

$$h_k^{(i)}$$

*) Systema, quod hic canonicum seu forma canonica gaudens appellatur, idem est, quod in „theoria novi multiplicatoris“ forma normali praeditum vocatur (diarii Crelliani tom. 29, p. 369. Conf. huj. ed. vol. IV, p. 501), sed plane differt ab eo, cui Jacobi in Commentatione „nova methodus, aequat. diff. partiales primi ordinis integrandi“ (diarii Crelliani tom. 60, p. 121. Conf. h. vol. p. 128) nomen canonici tribuit. B.

altissimus ordo, ad quem in aequatione $u_i = 0$ differentialia variabilis x_k ascendunt. Ac primum observo, quaestionem revocari posse ad casum simpliciorem, quo aequationes differentiales propositae sunt lineares. Etenim variando aequationes (1), inter variationes

$$(2) \quad \delta x_1 = \xi_1, \quad \delta x_2 = \xi_2, \quad \dots, \quad \delta x_n = \xi_n$$

obtinemus systema aequationum differentialium *linearium*

$$(3) \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \dots, \quad v_n = 0,$$

eritque rursus $h_k^{(i)}$ altissimus ordo, ad quem differentialia ipsius $\xi_k = \delta x_k$ in aequatione $v_i = \delta u_i = 0$ ascendunt. Quarum aequationum differentialium linearium (3) datur integratio completa, si pro valoribus $k = 1, 2, \dots, n$ ponitur

$$(4) \quad \xi_k = \delta x_k = \beta_1 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} + \cdots,$$

ubi per $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ illas Constantes arbitrarias designamus, quas valores completi variabilium $x_1, x_2, \dots, x_n$ integratione aequationum (1) eruti involvunt, per $\beta_1, \beta_2, \dots$ vero eas Constantes arbitrarias, quas integratio systematis (3) inducit. Unde idem fit numerus Constantium arbitrariarum in integratione completa aequationum differentialium propositarum (1) atque linearium (3), sive utriusque systematis idem ordo est.

In explorando ordine systematis aequationum differentialium linearium (3) supponere licet, Coëfficientes esse Constantes. Eo autem casu integratio completa methodo nota obtinetur, nulla ad formam canonicam reductione facta. Designemus per symbolum

$$(\xi)_m$$

expressionem

$$A_0 \xi + A_1 \frac{d\xi}{dt} + A_2 \frac{d^2\xi}{dt^2} + \cdots + A_m \frac{d^m \xi}{dt^m} = (\xi)_m,$$

in qua $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ sunt Constantes, gaudebunt aequationes (3), si Coëfficientes earum constantes ponimus, hac forma,

$$(5) \quad \begin{cases} v_1 = (\xi_1)_{h_1'} + (\xi_2)_{h_2'} + \cdots + (\xi_n)_{h_n'} = 0, \\ v_2 = (\xi_1)_{h_1''} + (\xi_2)_{h_2''} + \cdots + (\xi_n)_{h_n''} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n = (\xi_1)_{h_1^{(n)}} + (\xi_2)_{h_2^{(n)}} + \cdots + (\xi_n)_{h_n^{(n)}} = 0. \end{cases}$$

Pono in his aequationibus

$$\xi_k = C_k e^{\lambda t},$$

designantibus C_k et λ Constantes, obtinetur e (5):

$$(6) \quad \begin{cases} 0 = C_1[\lambda]_{h_1'} + C_2[\lambda]_{h_2'} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n'}, \\ 0 = C_1[\lambda]_{h_1''} + C_2[\lambda]_{h_2''} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n''}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = C_1[\lambda]_{h_1^{(n)}} + C_2[\lambda]_{h_2^{(n)}} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n^{(n)}}, \end{cases}$$

siquidem per

$$[\lambda]_m$$

functio quantitatis λ integra ordinis m^{ti} designatur.

Eliminatis $C_1, C_2, \dots, C_n$, prodit aequatio algebraica, cujus radices suggerunt valores, quos λ induere potest, et cuique radici sive valori ipsius λ respondet systema valorum ipsarum $C_1, C_2, \dots, C_n$, quos omnes per eandem Constantem arbitrariam multiplicare licet. Jungendo cujusque variabilis ξ_k valores singulis radicibus respondentes, prodit ejus valor completus, et cum singularum variabilium valores sic provenientes iisdem Constantibus arbitrariis afficiantur, aequationum (5) integratio completa tot inducit Constantes arbitrarias, quot sunt ipsius λ valores. Unde ordo systematis aequationum differentialium linearium (3) vel etiam ipsarum aequationum differentialium propositarum (1) aequatur gradui aequationis algebraicae, qua λ definitur. Quam aequationem repraesentare licet hoc modo

$$(7) \quad 0 = \Sigma \pm [\lambda]_{h_1'} [\lambda]_{h_2''} \dots [\lambda]_{h_n^{(n)}},$$

eritque gradus Determinantis ad dextram aequalis *maximo* ex $1.2.3 \dots n$ aggregatis, quae e sequente

$$h_1' + h_2'' + \cdots + h_n^{(n)}$$

proveniunt, indices inferiores aut superiores omnimodis permutando. Unde jam nacti sumus hanc Propositionem memorabilem:

Propositio I. *Inter variabilem independentem t atque n variabiles dependentes $x_1, x_2, \dots, x_n$ habeantur n aequationes differentiales*

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots, \quad u_n = 0,$$

sitque

$$h_k^{(i)}$$

altissimus ordo, ad quem in aequatione $u_i = 0$ differentialia variabilis x_k ascen-

dunt. Jam si vocatur

$$H$$

maximum e $1.2.3\ldots n$ *aggregatis*

$$h_1^{(i_1)}+h_2^{(i_2)}+\cdots+h_n^{(i_n)},$$

quae obtinentur sumendo pro indicibus

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_n$$

quoscunque inter se diversos ex indicibus $1, 2, \ldots, n$; *erit* H *ordo systematis aequationum differentialium propositarum sive numerus Constantium arbitrariarum, quas earum integratio completa inducit.*

Maximum in antecedentibus voco valorem nullo alio aggregati propositi minorem, ita ut plura maxima locum habere possint inter se aequalia, diversis indicum $i_1, i_2, \ldots, i_n$ systematis respondentia.

Gradus aequationis algebraicae (7) non minuitur, nisi in Determinante ad dextram posito Coëfficiens altissimae quantitatis λ potestatis evanescit. Obtinetur autem altissimae ipsius λ potestatis Coëfficiens, si in formando Determinante cuique functioni integrae rationali $[\lambda]_{h_k^{(i)}}$ substituimus Coëfficientem altissimae seu $h_k^{(i)\text{tae}}$ ipsius λ potestatis, quem designabo per

$$[c]_{h_k^{(i)}},$$

atque ex omnibus Determinantis terminis

$$\pm[c]_{h_1^{(i_1)}}[c]_{h_2^{(i_2)}}\cdots[c]_{h_n^{(i_n)}}$$

eos tantum servamus, in quibus summa indicum

$$h_1^{(i_1)}+h_2^{(i_2)}+\cdots+h_n^{(i_n)}$$

valorem maximum H obtinet. Quare nunquam locum habet reductio gradus, nisi pro duobus pluribusve indicum $i_1, i_2, \ldots, i_n$ systematis aggregatum antecedens eundem valorem maximum induit atque summa productorum

$$\pm[c]_{h_1^{(i_1)}}[c]_{h_2^{(i_2)}}\cdots[c]_{h_n^{(i_n)}}$$

illis indicum systematis respondentium suisque signis sumtorum evanescit. Aequabatur autem in antecedentibus $[c]_{h_k^{(i)}}$ Coëfficienti termini $\delta\dfrac{d^{h_k^{(i)}}x_k}{dt^{h_k^{(i)}}}$ e variatione functionis u_i provenientis, sive positum erat

$$[c]_{h_k^{(i)}} = \frac{\partial u_i}{\partial \dfrac{d^{h_k^{(i)}}x_k}{dt^{h_k^{(i)}}}}.$$

Quod si tenemus, haec emergit altera Propositio antecedentis supplementaria.

Propositio II. *Vocetur*

$$u_k^{(i)}$$

differentiale partiale ipsius u_i *sumtum secundum variabilis* x_k *altissimum, quod functio* u_i *involvit, differentiale (i. e. ordinis* $h_k^{(i)}$*). Ex omnibus terminis Determinantis*

$$\Sigma\pm u_1'u_2''\ldots u_n^{(n)}$$

ii soli retineantur $\pm u_1^{(i_1)}u_2^{(i_2)}\ldots u_n^{(i_n)}$, *in quibus summa ordinum differentialium singularum variabilium, secundum quae in singulis*

$$u_1^{(i_1)}, \quad u_2^{(i_2)}, \quad \ldots, \quad u_n^{(i_n)}$$

differentiatio partialis facta est, valorem maximum H *obtinet. Jam si aggregatum terminorum Determinantis remanentium designatur Determinantis signum uncis includendo hoc modo*

$$(\Sigma\pm u_1'u_2''\ldots u_n^{(n)}),$$

ordo systematis aequationum differentialium

$$u_1=0, \quad u_2=0, \quad \ldots, \quad u_n=0$$

tum demum valore illo maximo H *inferior erit, si habetur*

$$(\Sigma\pm u_1'u_2''\ldots u_n^{(n)}) = 0,$$

quae ubi locum non habet aequatio, ordo systematis semper valori maximo H *aequatur.*

Nacti sumus antecedentibus novum genus formularum, Determinantia *manca*

$$(\Sigma\pm u_1'u_2''\ldots u_n^{(n)}).$$

Cujusmodi quantitas evanescens indicio est, ordinem systematis aequationum differentialium

$$u_1=0, \quad u_2=0, \quad \ldots, \quad u_n=0$$

per indolem illarum aequationum peculiarem diminutionem pati.

Explorato ordine systematis aequationum differentialium quarumcunque, via sternitur ad inveniendam methodum, qua ipsa reductio earum in formam canonicam praestari possit. Sed in hac Commentatione sufficiat, in naturam maximi, de quo agitur, et quomodo commode inveniatur, accurate inquirere.

2.

De solutione problematis inaequalitatum, quo investigatio ordinis systematis aequationum differentialium quarumcunque innititur. Proposito schemate, definitur Canon. Dato Canone quocunque, invenitur simplicissimus.

Antecedentibus investigatio ordinis systematis aequationum differentialium vulgarium revocata est ad sequens problema inaequalitatum etiam per se tractatu dignum:

Problema.

Disponantur nn quantitates $h_k^{(i)}$ *quaecunque in schema Quadrati, ita ut habeantur n series horizontales et n series verticales, quarum quaeque est n terminorum. Ex illis quantitatibus eligantur n transversales, i. e. in seriebus horizontalibus simul atque verticalibus diversis positae, quod fieri potest* $1.2\ldots n$ *modis; ex omnibus illis modis quaerendus est is, qui summam n numerorum electorum suppeditet maximam.*

Dispositis quantitatibus $h_k^{(i)}$ in figuram quadraticam

$$\begin{array}{cccc} h'_1 & h'_2 & \ldots & h'_n \\ h''_1 & h''_2 & \ldots & h''_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_1^{(n)} & h_2^{(n)} & \ldots & h_n^{(n)}, \end{array}$$

earum systema appellabo *schema propositum;* omne schema, inde ortum addendo singulis ejusdem seriei horizontalis terminis eandem quantitatem, appellabo *schema derivatum.* Sit

$$l^{(i)}$$

quantitas addenda terminis i^{tae} seriei horizontalis, quo facto singula $1.2\ldots n$ aggregata transversalia, inter quae maximum eligendum est, eadem augebuntur quantitate

$$l'+l''+\cdots+l^{(n)} = L,$$

quippe ad singula aggregata formanda e quaque serie horizontali unus eligendus est terminus. Qua de re si statuitur

$$h_k^{(i)}+l^{(i)} = p_k^{(i)}$$

atque aggregatum transversale maximum e terminis $h_k^{(i)}$ formatum

$$h_1^{(i_1)}+h_2^{(i_2)}+\cdots+h_n^{(i_n)} = H,$$

fit valor aggregati transversalis maximi e terminis $p_k^{(i)}$ formati

$$p_1^{(i_1)}+p_2^{(i_2)}+\cdots+p_n^{(i_n)} = H+L,$$

et vice versa. Itaque ad maximum propositum inveniendum perinde est, sive quaestio de quantitatibus $h_k^{(i)}$, sive de quantitatibus $p_k^{(i)}$ instituatur.

Faciamus, quantitates $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ sic determinatas esse, ut, quantitatibus $p_k^{(i)}$ ad instar quantitatum $h_k^{(i)}$ in figuram quadraticam dispositis et e quaque serie verticali termino maximo electo, maxima illa omnia in diversis seriebus horizontalibus jaceant. Unde si $p_k^{(i_k)}$ vocatur maximus terminorum

$$p'_k,\ p''_k,\ \ldots,\ p_k^{(n)},$$

aggregatum

$$p_1^{(i_1)}+p_2^{(i_2)}+\cdots+p_n^{(i_n)}$$

inter omnia aggregata transversalia e quantitatibus $p_k^{(i)}$ formata erit maximum. Hoc igitur casu sine negotio etiam habetur maximum aggregatum transversale e quantitatibus propositis $h_k^{(i)}$ formatum

$$h_1^{(i_1)}+h_2^{(i_2)}+\cdots+h_n^{(i_n)}.$$

Unde solutum est inaequalitatum problema propositum, simulatque inventae sunt quantitates $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ dictae conditioni satisfacientes.

Figuram quadraticam, in qua diversarum verticalium maxima simul in diversis seriebus horizontalibus sunt, brevitatis causa vocabo Canonem. Patet, in ejusmodi *Canone* terminos omnes eadem quantitate augeri vel diminui posse; unde sequitur, e quantitatibus $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ unam pluresve nullitati aequari posse, dum reliquae fiant positivae. Si $l^{(i)} = 0$, series $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_n^{(i)}$ eadem est atque series figurae propositae $h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \ldots, h_n^{(i)}$, unde Canonis seriem, cui respondet quantitas l evanescens, vocabo in sequentibus seriem *immutatam.* Jam ex omnibus solutionibus una erit simplicissima, in qua scilicet singulae quantitates $l^{(i)}$ valores minimos positivos induunt, ita ut nulla alia detur, pro qua aliquae quantitatum $l^{(i)}$ valores inferiores obtinent, dum reliquae immutatae manent. Canonem ei solutioni respondentem appellabo *Canonem simplicissimum,* de cujus habitu in sequentibus agam.

Ad schema quadraticum quodcunque sequentes denominationes refero, quae bene tenendae sunt. Sub voce *seriei* semper intelligam *horizontalem;* si de verticalibus sermo incidit, id diserte adjicietur. Sub voce *maximi* semper intelligam terminum inter omnes ejusdem *verticalis* maximum seu certe nullo reliquorum minorem. Unde appellabo *seriei maximum* eum seriei horizontalis terminum, qui maximus est inter omnes cum eo in eadem verticali positos. Fieri potest, ut series nullum maximum habeat vel etiam plura inter se diversa.

At si figura Canonis instar constituta est, quaeque series uno certe maximo gaudet, quod, si in eadem serie plura insunt, semper ita sumere licet, ut omnia diversarum serierum maxima ad diversas verticales pertineant, i. e. *maximorum transversalium systema completum* forment. Consideremus in Canone simplicissimo horum maximorum systema, et si plura ejusmodi dantur, unum aliquod eligamus. Jam distribuamus omnes series quocunque modo in duas partes, series J et series K tales, ut nulla serierum K immutata sit, i. e. nulla quantitatum l, quae ad series K pertinent, evanescat: dico haberi

Theorema I. *In Canone simplicissimo e maximis serierum K saltem unum est, cui aequalis exstat terminus in eadem verticali positus et ad series J pertinens.*

Alioquin enim quantitates l ad series K pertinentes omnes eadem quantitate minuere liceret, usque dum aut una quantitatum l evanesceret, aut unum e maximis serierum K aequale evaderet alicui termino in eadem verticali posito et ad series J pertinenti. Neque enim ea re maxima diversarum serierum cessarent esse maxima, neque Canonis constitutio turbaretur. Quantitates l autem propositae eo casu non forent minimae positivae neque igitur Canon foret simplicissimus.

Si pro seriebus K sumitur series singularis, sequitur e Theoremate praecedente hoc alterum

Theorema II. *In Canone simplicissimo seriei uniuscunque non immutatae maximo aequatur alter terminus in eadem verticali.*

Proposito Canone simplicissimo, rursus eligamus unum certum systema completum maximorum transversalium. In serie quacunque α_1^{ta}, cui respondet quantitas l non evanescens, sumatur *maximum*, cui secundum II in eadem verticali sit aequalis terminus seriei α_2^{tae}, in qua rursus sumatur *maximum*, cui aequatur in eadem verticali terminus seriei α_3^{tae}, et ita porro. Si dato *maximo* plures aequantur termini in eadem verticali, processus praescriptus pluribus modis institui potest, sed habetur

Theorema III. *In Canone simplicissimo e variis modis a data serie per processum praescriptum ad alias transeundi unus semper exstat, quo pervenitur ad seriem immutatam, i. e. seriem, cui respondet valor $l = 0$.*

Nam simulac Theorema III locum non habet, Canonis series in duo complexus dividantur, quorum primus omnes series amplectatur, ad quas a data serie per processum praescriptum transire licet, et secundus omnes, ad quas transire non licet, ita ut series immutatae omnes in secundo complexu

sint. Quo facto primum complexum pro seriebus K, secundum pro seriebus J Theorematis I sumere licet. Ergo secundum Theorema I a serie primi complexus ad seriem secundi transitus datur, quod est contra hypothesin. Unde suppositio, Theorema III locum non habere, est absurda.

Canonem quemcunque, pro quo quantitates l', l'', ..., $l^{(n)}$ respective induunt valores m', m'', ..., $m^{(n)}$, quos semper positivos aut evanescentes suppono, in sequentibus brevitatis causa vocabo Canonem $(m', m'', \ldots, m^{(n)})$. Quo statuto, de binis Canonibus quibuscunque habetur

Theorema IV. *Propositis binis Canonibus, primo $(f', f'', \ldots, f^{(n)})$ et secundo $(g', g'', \ldots, g^{(n)})$, semper alius dabitur Canon $(m', m'', \ldots, m^{(n)})$ talis, ut unaquaeque quantitas $m^{(i)}$ minimae ipsarum $f^{(i)}$, $g^{(i)}$ aut aequalis aut ea minor sit.*

Unde sequitur hoc Corollarium:

Canon simplicissimus est unicus, sive unicum datur systema quantitatum l', l'', ..., $l^{(n)}$, quae Canonem simplicissimum suppeditant.

Sint quantitates $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, ..., $g^{(n)}$ ipsis $f^{(\alpha+1)}$, $f^{(\alpha+2)}$, ..., $f^{(n)}$ respective majores, reliquae autem g', g'', ..., $g^{(\alpha)}$ ipsis f', f'', ..., $f^{(\alpha)}$ respective aut aequales aut minores. Vocemus respective $q_k^{(i)}$ et $r_k^{(i)}$ quantitates, quae primum et secundum Canonem constituunt, ubi generaliter fit

$$r_k^{(i)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

sitque rursus systema maximorum transversalium in primo Canone

$$q_1^{(i_1)}, \quad q_2^{(i_2)}, \quad \ldots, \quad q_n^{(i_n)},$$

ubi omnes i_1, i_2, ..., i_n inter se diversi sunt; in secundo Canone systema maximorum transversalium habetur etiam

$$r_1^{(i_1)}, \quad r_2^{(i_2)}, \quad \ldots, \quad r_n^{(i_n)}.$$

Nam omnia aggregata transversalia secundi Canonis ab aggregatis respondentibus primi eadem quantitate

$$g' + g'' + \cdots + g^{(n)} - \{f' + f'' + \cdots + f^{(n)}\}$$

differunt, unde, cum aggregatum

$$q_1^{(i_1)} + q_2^{(i_2)} + \cdots + q_n^{(i_n)}$$

maximum sit, etiam aggregatum

$$r_1^{(i_1)} + r_2^{(i_2)} + \cdots + r_n^{(i_n)}$$

maximum esse debet. At in quoque Canone secundum definitionem ejus stabilitam datur aggregatum transversale maximum, cujus singuli termini sint maximi inter omnes ejusdem verticalis, quibus maximis respective in prima, secunda, ..., n^{ta} verticali aequari debent termini

$$r_1^{(i_1)},\quad r_2^{(i_2)},\quad \ldots,\quad r_n^{(i_n)},$$

ut eorum aggregatum et ipsum constituere possit maximum. Unde cum i_1, $i_2, \ldots, i_n$ omnes inter se diversi sint, termini illi et ipsi systema maximorum transversalium constituunt, q. d. e.

Cum quantitates $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots, g^{(n)}$ respective ipsis $f^{(\alpha+1)}, f^{(\alpha+2)}, \ldots, f^{(n)}$ majores sint, quantitates autem $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ omnes supponantur $=0$ aut positivae, quantitates $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots, g^{(n)}$ omnes sunt positivae. Jam observo, fieri non posse, ut in Canonis $(g', g'', \ldots, g^{(n)})$ serie $(\alpha+1)^{\text{ta}}$, $(\alpha+2)^{\text{ta}}$, ... vel n^{ta} inveniatur maximum, cui aequalis existat terminus in eadem verticali positus, sed ad unam reliquarum serierum pertinens. Sit enim maximum illud in serie i_k^{ta}, terminus ei aequalis in serie i^{ta}, ut sit

$$r_k^{(i_k)} = r_k^{(i)},$$

ubi i est unus e numeris $1, 2, \ldots, \alpha$, atque i_k unus e numeris $\alpha+1, \alpha+2, \ldots, n$: erit e formula supra tradita

$$q_k^{(i_k)} + g^{(i_k)} - f^{(i_k)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

ubi secundum suppositionem factam $g^{(i_k)} - f^{(i_k)} > 0$ atque $g^{(i)} - f^{(i)} \leqq 0$. Unde

$$q_k^{(i_k)} < q_k^{(i)},$$

quod absurdum est, cum $q_k^{(i_k)}$ sit maximum inter omnes terminos ejusdem verticalis $q_k', q_k'', \ldots, q_k^{(n)}$. Hinc cum in secundo Canone maximo in $(\alpha+1)^{\text{ta}}$, $(\alpha+2)^{\text{ta}}$, ... vel n^{ta} serie posito nullus aequalis esse possit terminus in eadem verticali in reliquis seriebus positus, quantitates $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots, g^{(n)}$ omnes eadem quantitate decrescere possunt, reliquis immutatis manentibus, usque dum in aliqua serie $(\alpha+1)^{\text{ta}}$, $(\alpha+2)^{\text{ta}}$, ... vel n^{ta} inveniatur maximum, quod non superet valorem alius termini in eadem verticali ad reliquas series pertinentis, aut dum una quantitatum $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots, g^{(n)}$ evanescat. Qua diminutione nullum maximum neque igitur Canonis natura destruitur. Si hac ratione obtinetur

$$(g', g'', \ldots, g^{(\alpha)}, g_1^{(\alpha+1)}, g_1^{(\alpha+2)}, \ldots, g_1^{(n)})$$

atque inter quantitates $g_1^{(\alpha+1)}, g_1^{(\alpha+2)}, \ldots$ ipsae $g_1^{(\beta+1)}, g_1^{(\beta+2)}, \ldots$ adhuc quantitatibus $f^{(\beta+1)}, f^{(\beta+2)}, \ldots$ majores sunt, eadem methodo novus Canon obtinetur, in quo quantitates illae denuo diminutionem subierunt, sicque pergere licet, usque dum perveniatur ad Canonem

$$(m', m'', \ldots, m^{(\alpha)}, m^{(\alpha+1)}, m^{(\alpha+2)}, \ldots, m^{(n)}),$$

ubi quantitates uncis inclusae omnes quantitatibus respondentibus ipsarum f', $f'', \ldots, f^{(n)}$ et $g', g'', \ldots, g^{(n)}$ aut minores aut iis aequales sunt, q. d. e.

Sequitur e Theoremate IV

Theorema V. *Nullus datur Canon, pro quo aliqua quantitatum l', $l'', \ldots, l^{(n)}$ valorem minorem induat quam pro Canone simplicissimo.*

Scilicet si talis daretur Canon, per methodum antecedentem obtineri posset alius, pro quo una certe quantitatum $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ valorem minorem indueret quam pro Canone simplicissimo, reliquae autem valores non majores, quod est contra Canonis simplicissimi definitionem. Cum valor minimus, quem quantitates $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ obtinere possint, sit $=0$, e Propositione V sequitur tanquam Corollarium

Theorema VI. *Series, quae in Canone quocunque habetur immutata, eadem in Canone simplicissimo inveniatur necesse est.*

Ut cognoscatur, utrum Canon aliquis sit simplicissimus necne, adhiberi potest haec Propositio:

Theorema VII. *Proposito Canone atque in eo maximorum transversalium systemate electo, notentur primum series immutatae A, deinde series B, quarum maximis aequantur termini in eadem verticali ad series A pertinentes; deinde series C, quarum maximis aequantur termini in eadem verticali ad series B pertinentes et ita porro. Si hac ratione pergendo exhaurire licet omnes Canonis series, Canon erit simplicissimus.*

Pertineant quantitates $l', l'', \ldots, l^{(n)}$ ad Canonem propositum, quantitates $l_1', l_1'', \ldots, l_1^{(n)}$ autem ad alterum Canonem. Consideremus idem maximorum transversalium systema atque in Theoremate proposito electum supponitur, cui etiam in altero Canone respondebit maximorum transversalium systema.

Sit $l_1^{(\gamma)} < l^{(\gamma)}$, seriei γ^{tae} maximum in altero Canone gaudebit minore valore quam in Canone proposito. Pertineat series γ^{ta} ad complexum C, ita ut in Canone proposito maximo seriei γ^{tae} aequetur terminus alicujus seriei β^{tae} ad complexum B pertinentis, fieri etiam debet $l_1^{(\beta)} < l^{(\beta)}$. Vocando enim propositi Canonis terminos $p_k^{(i)}$, alterius $q_k^{(i)}$, erit

$$q_k^{(\beta)} = p_k^{(\beta)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)},$$

unde, si $p_k^{(\gamma)} = p_k^{(\beta)}$ est maximum seriei γ^{tae}, erit

$$q_k^{(\beta)} = p_k^{(\gamma)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)} = q_k^{(\gamma)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)} - \{l_1^{(\gamma)} - l^{(\gamma)}\}.$$

Unde, cum sit $q_k^{(\gamma)}$ maximum in k^{ta} verticali ideoque $q_k^{(\gamma)} \geqq q_k^{(\beta)}$ atque $l_1^{(\gamma)} < l^{(\gamma)}$, fieri debet $l_1^{(\beta)} < l^{(\beta)}$.

Porro in Canone proposito aequatur maximo seriei β^{tae} terminus seriei α^{tae} ad complexum A pertinentis, atque eodem modo demonstratur, fieri $l_1^{(\alpha)} < l^{(\alpha)}$, quod absurdum est, quia secundum suppositionem factam $l^{(\alpha)} = 0$ est atque ipsae l_1', l_1'', ..., $l_1^{(n)}$ aut evanescentes aut positivae sunt. Eodem modo procedit reductio ad absurdum, ad quemcunque complexum A, B, C, D, ... pertineat series γ^{ta}, cui respondet in altero Canone quantitas $l_1^{(\gamma)}$ minor quam in proposito $l^{(\gamma)}$. Unde si Canon ita constitutus est atque in VII supponitur, pro nullo alio quantitates l valores induere possunt inferiores quam in proposito; sive Canon propositus est simplicissimus.

Antecedentia solutionem quoque continent problematis, *dato Canone quocunque, invenire simplicissimum.* Supponere licet, in dato Canone unam ad minimum esse seriem immutatam; quae, nisi jam invenitur, obtineri potest ipsas l omnes eadem quantitate diminuendo. Ut in Theoremate VII serierum immutatarum complexum vocemus A atque complexus ibidem definitos B, C, ... formemus. Hac ratione pergendo si omnes series exhauriuntur, Canon secundum VII jam ipse est simplicissimus. Ponamus autem relinqui, series non praeditas talibus *maximis*, quibus aequentur termini ejusdem verticalis ad complexus formatos pertinentes. Tum reliquarum serierum termini (vel quantitates l ad eas series pertinentes) omnes eadem quantitate diminuantur, usque dum earum quantitatum l una evanescat aut earum serierum *maximum* aliquod eo decreverit, ut ei aequalis terminus in eadem verticali ad complexus formatos pertinens inveniatur. Quo facto novus eruitur Canon, in quo auctus est numerus serierum pertinentium ad complexus regula indicata formatos. Si jam omnes series in complexus illos ineunt, Canon erutus erit simplicissimus. Si non, novus novusque Canon eadem methodo eruendus est, semperque pauciores a complexibus, qui formari possunt, relinquuntur series, unde tandem pervenietur ad Canonem, in quo complexus, qui formari possunt, series omnes exhauriunt, qui Canon est simplicissimus quaesitus.

Exemplum.

Schema propositum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	7	7	4	15	14	6	1
II	3	8	7	6	11	14	10
III	6	11	15	16	15	23	10
IV	4	11	14	25	20	21	27
V	5	2	8	10	23	18	30
VI	1	8	3	9	6	20	17
VII	11	12	8	22	24	21	40

Canon propositus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	12*	12	9	20	19	11	6	5
II	11	16*	15	14	19	22	18	8
III	9	14	18*	19	18	26	13	3
IV	5	12	15	26*	21	22	28	1
V	10	7	13	15	28*	23	35	5
VI	7	14	9	15	12	26*	23	6
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon derivatus I.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	10	15*	14	13	18	21	17	7
III	8	13	17*	18	17	25	12	2
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	9	6	12	14	27*	22	34	4
VI	6	13	8	14	11	25*	22	5
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon derivatus II.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	8	13*	12	11	16	19	15	5
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	7	4	10	12	25*	20	32	2
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon simplicissimus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	7	12*	11	10	15	18	14	4
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	6	3	9	11	24*	19	31	1
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

E schemate proposito, addendo terminis serierum diversarum respective numeros 5, 8, 3, 1, 5, 6, 0, aliud obtinetur schema, in quo termini inter omnes ejusdem verticalis maximi in diversis seriebus horizontalibus sunt, quae est Canonis proprietas characteristica.

Proponitur Canonem simplicissimum investigare. Constituit in dato Canone series VII complexum A. De reliquarum serierum terminis detraho unitatem, prodit Canon derivatus I.

In Canone derivato I series IV et VII constituunt complexum A, series I complexum B. De reliquarum terminis detraho 2, prodit Canon derivatus II.

In Canone derivato II series III, IV, VII constituunt complexum A, series I et VI complexum B; detrahendo de secunda et quinta serie unitatem, prodit Canon ultimus seu simplicissimus, cui respondet ipsarum l valores 4, 4, 0, 0, 1, 3, 0. Quos addendo terminis serierum diversarum schematis propositi, prodit Canon simplicissimus. Series III, IV, VII complexum A, series I, II, V, VI complexum B constituunt; quos complexus series omnes exhaurire videmus, quae est Canonis simplicissimi proprietas characteristica. —

Si non datur Canon aliquis, sed tantum schematis propositi termini, qui aggregatum maximum transversale constituunt, ad Canonem simplicissimum pervenitur, cuique seriei minimam addendo quantitatem, qua efficitur, ut datus ejus terminus ad aggregatum transversale maximum pertinens fiat in sua verticali maximo aequalis. Quo negotio ad omnes series adhibito et, si opus est, repetito, tandem ad Canonem perveniri debet, qui erit simplicissimus, cum incrementa seriebus non majora addita sint, quam necessario postulatur, ut termini dati, in sua quisque verticali, maximi fiant.

Exemplum.

Schema propositum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	11*	7	6	4	6	4	11
II	11	12*	11	11	3	11	12
III	8	11	15*	14	9	6	8
IV	19	10	16	25*	11	12	22
V	18	15	15	20	24*	9	24
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Schema derivatum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	19*	15	14	12	14	12	19
II	17	18*	17	17	9	17	18
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Canon simplicissimus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	25*	21	20	18	20	18	25
II	21	22*	21	21	13	21	22
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Termini asteriscis notati aggregatum transversale maximum formant, scilicet sumpsi schema propositum e Canone praecedente, seriebus horizontalibus

in verticales, verticalibus in horizontales conversis; quo facto manent termini aggregatum transversale maximum constituentes iidem, schema autem desinit esse Canon.

Seriebus

$$\text{I},\quad \text{II},\quad \text{III},\quad \text{IV},\quad \text{V}$$

addo respective secundum datam regulam

$$8,\quad 6,\quad 8,\quad 2,\quad 7,$$

prodit schema derivatum.

Seriebus

$$\text{I},\quad \text{II}$$

addo respective

$$6,\quad 4,$$

prodit Canon simplicissimus quaesitus, in quo series III, IV, V, VI, VII immutatae manent atque in schemate derivato. In Canone eruto constituunt series VI, VII complexum A, series III, IV, V complexum B, series I, II complexum C, qui complexus cum omnes series amplectantur, indicium obtinuimus, Canonem esse simplicissimum. —

Cum dato Canone etiam innotescat schematis propositi aggregatum transversale maximum, ad problema antecedentibus solutum revocari potest alterum problema, *dato Canone quocunque, investigare simplicissimum*. Cujus igitur duplex habetur solutio, altera per subtractiones successivas, uti supra, altera per additiones successivas procedens, uti fit, si e dato Canone petimus schematis propositi aggregatum transversale maximum eoque cognito methodum antecedentem applicamus.

3.

Solutio problematis inaequalitatum in paragrapho praecedente tractati terminatur. Proposito schemate, invenitur Canon.

Restat, ut demonstretur, quomodo Canon aliquis investigari possit; quippe quocunque invento, vidimus variis modis erui simplicissimum. Proponamus igitur sequens inaequalitatum problema, quod pro principali haberi debet.

Problema.

Datis nn quantitatibus $h_k^{(i)}$, ubi indicibus i et k valores $1, 2, \ldots, n$ *conveniunt, invenire tales n quantitates minimas positivas*

$$l',\quad l'',\quad \ldots,\quad l^{(n)},$$

ut, posito

$$h_k^{(i)} + l^{(i)} = p_k^{(i)},$$

atque pro singulis k electo maximo inter terminos

$$p'_k,\quad p''_k,\quad \ldots,\quad p^{(n)}_k,$$

quod sit

$$p^{(i_k)}_k,$$

indices

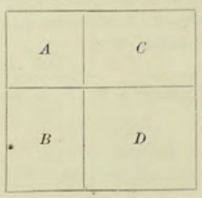
$$i_1,\quad i_2,\quad \ldots,\quad i_n$$

omnes inter se diversi sint.

Solutio.

Prima et quasi praeparatoria operatio eo consistit, ut, si in schemate proposito habentur series, in quibus nulla inveniantur *maxima*, earum quaeque minima quantitate augeatur, qua fit, ut unus ejus terminus aequalis evadat *maximo* in eadem verticali posito. Sic obtinetur novum schema, quod *schema praeparatum* voco et in quo quaeque series uno pluribusve maximis gaudet. Diversarum schematis praeparati serierum maxima omnia ad diversas verticales pertineant non necesse est. Sed ad minimum *duarum* serierum maxima habentur, quae ad *duas* verticales pertinent, in quem casum extremum non incidimus, nisi omnia maxima in una eademque serie jacent atque insuper in una eademque verticali termini omnes inter se aequales sunt; quod si secus fit, maximorum transversalium numerus semper est >2. Si $n=2$, prima illa operatione problema absolvitur.

In schemate praeparato quaero maximum numerum maximorum transversalium, quorum systema ubi pluribus modis eligi potest, sufficit unum certum eorum systema considerare. Quo electo, solutionem problematis propositi ita adorno, ut numerus maximorum transversalium successive augeatur, usque dum eruatur schema systemate completo n maximorum transversalium praeditum, qui erit Canon quaesitus. Sufficit igitur demonstrare, idoneis serierum augmentationibus numerum maximorum transversalium unitate augeri posse.



Divido schema praeparatum in quatuor spatia A, B, C, D sicuti in figura apposita. Ponamus, maxima transversalia electa omnia esse in spatio A, ita ut series, in quibus maxima illa sunt, occupent spatia A et C; verticales autem, ad quas pertinent, spatia A et B. Series spatia A et C occupantes voco *superiores*, spatia B et D occupantes *inferiores*. Porro verticales spatia A et B occupantes voco *laevas*, spatia C et D occupantes *dextras*. Jam in spatio D nullum invenitur maximum. Alioquin enim numerus maximorum transversalium augeretur contra hypothesin, maximum numerum maximorum transversalium electum esse. Unde verticales dextrae sua habent maxima in C; termini autem serierum inferiorum in suis verticalibus maximi erunt in B, et eorum quisque aequatur maximo in eadem verticali in A posito, quum in spatio A sint maxima omnium verticalium laevarum, aeque ac serierum omnium superiorum.

His positis, series omnes in tres Classes distribuo, quae sic eruuntur.

Eligo eas serierum superiorum, quae praeter maxima in A alio vel aliis in C positis gaudent, cujusmodi serierum una saltem exstat. Ponamus, alicuius illarum serierum maximo in A posito aequari alium terminum in eadem verticali; quaeratur maximum in eadem serie cum hoc termino positum, et si huic rursus aequatur alius terminus in eadem verticali, rursus quaeratur maximum cum hoc termino in eadem serie positum et sic porro. Omnes series, ad quas hac ratione perveniri potest, junctae seriebus, a quibus proficiscendum erat, constituunt *Classem Primam*.

Dico, inter series Primae Classis nullam inveniri seriem inferiorem, neque igitur ullam seriem superiorem, a qua per methodum indicatam ad seriem inferiorem pervenire liceat. Scilicet proficiscendo a serie, quae praeter maximum in A alio in C gaudet, consideremus systema maximorum in A positorum, ad quae methodo indicata perveniatur; quorum ultimo, si fieri potest, aequetur terminus ejusdem verticalis in B positus. Maxima illa in A posita omnia secundum suppositionem sunt transversalia, quorum in locum aliud obtinebitur systema maximorum transversalium, si cuique substituitur ejusdem verticalis terminus aequalis. Qua in re ultimo maximo substituitur terminus in B positus, prima autem series, a qua profecti sumus, non amplius adhibetur. Unde novo maximorum systemati jungendo hujus seriei *maximum* in C positum, numerus maximorum transversalium unitate augetur, id quod contradicit suppositioni, maximum numerum maximorum transversalium electum fuisse. Scilicet seriebus superioribus accederet inferior, in qua est terminus ultimo maximo aequalis, verticalibus autem laevis accederet dextrâ, in qua est maximum aliquod seriei, a qua profecti sumus.

Ad *Classem Secundam* pertinent series superiores, quae non ad Primam Classem pertinent et a quibus nec ipsis methodo indicata ad seriem inferiorem transitus datur. Fieri potest, ut haec Classis omnino non existat.

Ad *Classem Tertiam* denique pertinent series inferiores omnes eaeque superiores, a quibus methodo tradita ad series inferiores transitus datur. *Unde, si terminus seriei inferioris aequatur maximo seriei superioris in eadem verticali — quod semper fit —, ea series superior ad Classem Tertiam pertinebit.* Tertia classis, nisi schema jam ipse Canon est, duabus saltem seriebus, una inferiore, una superiore constat.

Id, quod supra de Classe Prima demonstravi, jam ita enuntio, ut dicam, *inter series superiores Tertiae Classis nullam inveniri seriem, quae maximo in C posito gaudeat.* Qua Propositionis forma postea utar.

Observationes hac occasione factae simul praebent methodum exhibendi maximum numerum maximorum transversalium in schemate praeparato. Etenim posito maximorum transversalium systemate, quod primum se offert, ipsa classificatio serierum indicat, si eorum numerus augeri potest.

Facta classificatione antecedentibus praescripta, *tota Classis Tertia eadem quantitate augeatur, eaque minima, qua efficitur, ut unus serierum ejus Classis terminus aequalis evadat termino maximo alicui ejusdem verticalis ad seriem Secundae aut Primae Classis pertinenti.*

Quod si ad Primam Classem pertinet maximum, numerus maximorum transversalium augeri potest. Dabitur enim series superior, quae praeter maximum in A alio in C gaudet, et a qua via indicata ad seriem aliquam inferiorem transitus datur. Quae series adjicienda est serierum superiorum numero, dum verticalium laevarum numerus ea augendus est verticali dextra, in qua maximum illud in C positum invenitur. Si jacet in D terminus ille seriei Tertiae Classis maximo seriei Primae Classis aequalis, maxima transversalia immutata manent, eo tantum accedente termino. Si vero terminus ille jacet in B, omnia mutanda erunt maxima formantia catenam illam, qua ad seriem inferiorem descendebatur a serie praedita maximo in C posito. Scilicet cuique illorum maximorum transversalium substituendus est terminus ejusdem verticalis ei aequalis, ultimo igitur terminus ille in B, novis maximis transversalibus sic erutis accedente insuper maximo primae seriei in C posito, sicuti ad Primam Classem adnotavi.

Si maximum, cui aequatur terminus Tertiae Classis, in serie Secundae Classis est, nihil mutatur, nisi quod haec series ad Tertiam Classem transmigrat simulque reliquae omnes Secundae Classis, a quibus per catenam indicatam ad illam seriem transitus datur. Repetita operatione rursus aut augebitur numerus maximorum transversalium, aut certe numerus serierum Secundae Classis minuitur, unde tandem, nisi antea numerus maximorum transversalium auctus

est, ad schema pervenimus seriebus Secundae Classis destitutum, quippe quae omnes ad Tertiam Classem transmigraverunt. Tum autem operatione praescripta certo obtinemus maximorum transversalium augmentationem. Quam si assecuti sumus, pro variis casibus, qui locum habere possunt et quos enumerare longum esset, nova facienda est maximorum transversalium distributio in tres Classes assignatas, quo facto eadem repetenda erit operatio, usque dum ad Canonem pervenimus, in quo series inferiores omnes ad superiores, verticales dextrae ad laevas transmigraverunt.

At per methodum antecedentibus traditam non solum Canonem, sed Canonem simplicissimum eruimus. Quod ut pateat, demonstrabo, quantitates, quibus augentur series, esse minimas, quae poscuntur, ut omnino Canon prodeat. Ac primum, quod operationem praeparatoriam attinet, observo, Canonis terminos terminis respondentibus dati schematis aut superiores esse aut iis aequales, cum e dato schemate propositum sit Canonem eruere addendo singulis seriebus tantum quantitates positivas aut evanescentes. Unde in quaque Canonis verticali maximum aut superat aut aequat maximum in eadem verticali dati schematis. In Canone autem invenitur in quaque serie maximum, ideoque terminus aliquis, qui maximum in eadem verticali dati schematis aut superat aut aequat, unde quamque dati schematis seriem maximo destitutam tali augere debemus quantitate, ut unus ejus terminus maximum ejusdem verticalis superet aut aequet. Quodsi igitur quantitates notamus, quibus singuli seriei termini differunt a maximis in eadem verticali, quantitas, qua series augenda est, non minor esse debet quam illarum quantitatum minima. Unde quamque seriem maximo destitutam augendo quantitate minima, qua unus ejus terminus aequalis efficitur maximo ejusdem verticalis, certe series illas non majoribus auximus quantitatibus, quam ad Canonem formandum flagitatur.

Post praeparationem factam si jam ipse Canon prodit, certo ille est simplicissimus; vidimus enim schematis propositi seriebus minimas quantitates positivas additas esse, quibus fieri possit, ut omnino Canon prodeat. Si vero nondum Canon prodiit, procedendum erat ad serierum distributionem in tres Classes assignatas. Jam demonstrabo, ad Canonem eruendum *fieri non posse, ut aliqua serierum Tertiae Classis immutata maneat.*

In demonstratione vocabo S schema praeparatum, K Canonem erutum. Semper suppono, quod jam ad classificationem serierum poscebatur, in S certum maximorum transversalium systema in spatio A ante oculos haberi, ita ut, si plura ejusmodi dantur systemata in spatio A, unum aliquod ex iis eligendum sit. Similiter in K suppono, si plura maximorum transversalium systemata dantur, unum certum eligi.

Consideremus in S cunctas series superiores Tertiae Classis *immutatas*, si quae dantur, sive eas, quibus nulla quantitas additur Canone K formando seu quae in S et K eaedem sunt. Vocemus harum serierum complexum H earumque consideremus maxima transversalia in S et K electa. *Dico, horum maximorum systema in S atque K in iisdem verticalibus fore.* Sit enim M unum horum maximorum in K, in serie immutata positum; cui respondet in S terminus aequalis ejusdem seriei et ipse in sua verticali maximus. Nam cum a S ad K per additiones positivas perveniatur, cujusque verticalis termini in S inferiores aut aequales sunt respondentibus in K; unde, si eorum maximo in K aequatur ejusdem verticalis terminus in S, is a fortiori inter ejusdem verticalis terminis in S maximus esse debet. Terminus M exstare debet in spatio A, cum series superior Tertiae Classis secundum proprietates Classium stabilitas non habeat terminos in sua verticali maximos in C positos. Vocemus V complexum verticalium, in quibus sunt serierum H maxima in S, atque ponamus, verticalem, in qua sit M, non pertinere ad verticales V. Exstabit in S in illa verticali maximum $N = M$ ad maxima transversalia in spatio A electa pertinens, quare maximum N in serie erit positum, quae non pertinet ad series H. Nam ipsarum H maxima transversalia electa in verticalibus V jacent, ipsum N autem in verticali supponitur, quae ad verticales V non pertinet. Haec nova series et ipsa superior esse debet ad Tertiam Classem pertinens; nam maximum N in spatio A jacet, et e definitione Classium tradita sequitur, si in eadem verticali sumuntur omnes termini maximi inter se aequales, series, in quibus positi sint, ad eandem Classem pertinere. Jam si ad Canonem K formandum illi seriei quantitas non evanescens addenda esset, terminus ipsi N in K respondens evaderet major ipso N ideoque etiam major termino M in eadem verticali posito, quod fieri non potest, cum sit M in sua verticali maximum. Unde series illa ipsa immutata esse debet, quod tamen absurdum est, quia suppositum est, series H *cunctas* esse series Tertiae Classis immutatas. Unde ipsum M necessario in una verticalium V jacet; quod cum de quoque maximorum M valeat, sequitur, systema maximorum transversalium serierum H in K electorum in iisdem verticalibus esse atque systema maximorum transversalium earundem serierum H in S electorum, q. d. e.

Si sumuntur in S termini respondentes et aequales maximis serierum H in K, formabunt illi in S alterum systema terminorum maximorum transversalium, qui cum maximis serierum H in iisdem seriebus horizontalibus et verticalibus sunt. Id quod fieri non potest, nisi utriusque systematis termini in eadem verticali positi inter se aequales sunt. Unde eruitur hoc Corollarium: *si in S in serie superiore Tertiae Classis immutata sumatur maximum, in eadem verticali haberi in K seriei alicujus superioris ejusdem classis maximum illi aequale.* Maxima autem in S ut in K semper suppono e systemate electo maximorum transversalium sumi.

Ceterum eadem ratione demonstratur Propositio antecedens, si H designat complexum serierum Secundae Classis immutatarum; immo pro iis tantum Propositio vi aliqua et significatione gaudet. Etenim Tertiae Classis omnino non existunt series immutatae.

Primum patet, *non dari series inferiores immutatas.* Si enim exstat series inferior immutata, sit M ejus maximum in K e systemate maximorum transversalium electorum; idem terminus in S erit maximus inter omnes ejusdem verticalis ideoque aequivalet maximo seriei alicujus superioris Tertiae Classis in eadem verticali posito et ad maxima transversalia pertinenti*). At secundum Corollarium antecedens in eadem verticali esse debet in K seriei alicujus superioris maximum ad maxima transversalia pertinens, unde in K haberentur duo maxima transversalia in eadem verticali, alterum in serie superiore, alterum M in inferiore, id quod maximorum transversalium notioni contrarium est.

Demonstrabo jam, *si series Tertiae Classis superior exstet immutata, etiam haberi inferiorem immutatam*, quod cum fieri non possit, probatum erit, neque superiorem neque inferiorem seriem Tertiae Classis dari immutatam.

Ponamus, dari seriem superiorem Tertiae Classis immutatam, quam per s designo. Secundum definitionem Tertiae Classis, si s est series superior Tertiae Classis, dabuntur series $s, s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ tales, ut earum maxima M, $M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$, quae e systemate maximorum transversalium electo sumenda sunt, habeant quodque in eadem verticali terminum aequalem N_i in serie subsequente, ultimo vero M_{m-1} aequetur in eadem verticali terminus N_{m-1} seriei inferioris, ut igitur bini N_i et M_{i+1} sint in eadem serie, bini inter se aequales M_i et N_i in eadem verticali. Jam si series superior Tertiae Classis

*) Vide supra Tertiae Classis definitionem p. 209, 210.

s est immutata, secundum Corollarium antecedens dabitur in K maximum ipsi M aequale et in eadem verticali positum; unde ad Canonem formandum non augeri poterit series s_1, alioquin enim augeretur terminus N ipsoque maximo M in eadem verticali posito major evaderet. Unde series s_1 et ipsa immutata esse debet, similiterque probatur, omnes quoque $s_2, s_3, \ldots, s_{m-1}$ nec non seriem inferiorem s_m immutatam fore, quod fieri non posse vidimus.

Cum ad Canonem formandum nulla series Tertiae Classis immutata manere possit, sit f minima quantitatum, quibus illae series augeri debent, ita ut, omnibus quantitate f auctis, in novo schemate certe una earum exstet, quae ad Canonem formandum non amplius augenda sit, sed *immutata* maneat. Sit g quantitas minima, qua ipsius S series Tertiae Classis augentur, ut unus earum terminus aequetur ejusdem verticalis maximo in serie Secundae aut Primae Classis posito. Si $f' < g$ atque omnes series Tertiae Classis quantitate f' augentur, in novo schemate videmus, distributionem serierum in Classes non alterari, sed quamque ad eandem pertinere Classem atque in S. Unde non poterit fieri $f < g$; alioquin enim haberetur schema, in quo daretur series aliqua Tertiae Classis immutata, quod fieri non potest. Hinc videmus, quantitatem minimam, qua series Tertiae Classis augendae sint, ut unus earum terminus aequetur ejusdem verticalis maximo in serie Primae aut Secundae Classis posito, aequalem aut inferiorem esse quantitate minima earum, quibus series Tertiae Classis ad Canonem formandum augeri debent. Unde sequitur regula tradita, nunquam majores adhiberi additiones, quam ad Canonem quemcunque formandum necessarium sit, ideoque *Canonem regula nostra erutum fieri simplicissimum.*

Exemplum.

Schema propositum.

11	7	6	4	6	4	11
11	12	11	11	3	11	12
8	11	15	14	9	6	8
19	10	16	25	11	12	22
18	15	15	20	24	9	24
10	18	23	21	19	23	21
5	14	10	27	31	20	40

Schema praeparatum.

$\underline{19}^*$	15	14	12	14	12	19	t
17	$\underline{18}^*$	17	17	9	17	18	t
15	$\underline{18}$	22	21	16	13	15	t
$\underline{19}$	10	16	25	11	12	22	t
$\underline{19}$	16	16	21	25	10	25	t
10	$\underline{18}$	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Schema derivatum I.

$\underline{20}^*$	16	15	13	15	13	20	t
18	$\underline{19}^*$	18	18	10	18	19	
16	$\underline{19}$	$\underline{23}^*$	22	17	14	16	
$\underline{20}$	11	17	26	12	13	23	t
$\underline{20}$	17	17	22	26	11	26	t
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Schema derivatum II.

$\underline{21}^*$	17	16	14	16	14	21	t
18	$\underline{19}^*$	18	18	10	18	19	
16	$\underline{19}$	$\underline{23}^*$	22	17	14	16	
$\underline{21}$	12	18	$\underline{27}^*$	13	14	24	
$\underline{21}$	18	18	23	27	12	27	t
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Schema derivatum III.

$\underline{22}^*$	18	17	15	17	15	22	t
18	$\underline{19}^*$	18	18	10	18	19	t
16	$\underline{19}$	$\underline{23}^*$	22	17	14	16	
21	12	18	$\underline{27}^*$	13	14	24	
$\underline{22}$	$\underline{19}$	19	24	28	13	28	t
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Canon simplicissimus.

$\underline{25}^*$	21	20	18	20	18	25
21	$\underline{22}^*$	21	21	13	21	22
16	19	$\underline{23}^*$	22	17	14	16
21	12	18	$\underline{27}^*$	13	14	24
$\underline{25}$	$\underline{22}$	22	$\underline{27}$	$\underline{31}^*$	16	31
10	18	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$

In schemate proposito tres primae series et quinta terminis maximis carent. Quibus seriebus respective additi sunt numeri minimi 8, 6, 7, 1, quibus fieri potuit, ut unus earum terminus evaderet maximus. In schemate sic praeparato in quaque verticali terminos maximos omnes sublineavi, insuper maxima transversalia electa stellavi (asterisco notavi). Deinde juxta scripto t denotavi series Tertiae Classis, quae sic inveniuntur. Primum enim ad eas pertinent omnes series α, quae carent termino stellato, quas supra inferiores appellavi; deinde series β, quae terminum stellatum habent in eadem verticali, in qua et aliquis serierum α terminus sublineatur; series β si praeter terminos stellatos alios habent sublineatos, in iisdem verticalibus quaeruntur novi termini stellati, qui ad series γ pertinent, et ita porro: omnes series α, β, γ etc. facillime inventae formabunt Tertiam Classem. Patet autem, ad regulam exsequendam tantum postulari, ut series Tertiae Classis cognoscantur, neque distributione in Primam et Secundam Classem opus esse. Regula enim nihil poscit, nisi ut series Tertiae Classis omnes simul quantitate minima augeantur, qua fit, ut earum terminus unus aequetur reliquarum serierum termino maximo alicui stellato in eadem verticali posito. Totum igitur negotium consistit in hac augmentatione serierum, electione maximorum transversalium atque distributione serierum Tertiae Classis post quamque augmentationem denuo efficienda. Id quod continuandum est, usque dum series Tertiae Classis non amplius inveniuntur, quo casu ad Canonem simplicissimum pervenimus.

Schematis totius post quamque mutationem denuo scribendi negotium variis artificiis expediri potest. Scilicet, ut a schemate aliquo ad proximum transeamus, non opus est, ut alios terminos ante oculos habeamus, quam qui in quaque verticali maximi sunt et maximis proxime inferiores, unde hos scribere sufficit. Porro cum serierum ordo non respiciendus sit, sufficit series tantum augendas delere et auctas infra reliquas scribere, quae non mutantur. Sed haec et alia, quae commode in magna numerorum mole adhibentur, melius cujusque genio relinquuntur.

ÜBER DIEJENIGEN PROBLEME DER MECHANIK IN WELCHEN EINE KRÄFTEFUNCTION EXISTIRT UND ÜBER DIE THEORIE DER STÖRUNGEN

AUS DEN HINTERLASSENEN PAPIEREN C. G. J. JACOBI'S

HERAUSGEGEBEN VON

A. CLEBSCH

ÜBER DIEJENIGEN PROBLEME DER MECHANIK, IN WELCHEN EINE KRÄFTEFUNCTION EXISTIRT, UND ÜBER DIE THEORIE DER STÖRUNGEN.

Einleitung.

Wenn ein freies System materieller Punkte von keinen anderen Kräften getrieben wird, als solchen, die von ihrer gegenseitigen Anziehung oder Abstossung herrühren, so kann man die Differentialgleichungen ihrer Bewegung vermittelst der partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function der Coordinaten der Punkte auf eine einfache Weise darstellen. Lagrange, welcher zuerst diese wichtige Bemerkung gemacht hat, hat zugleich aus dieser Form der Differentialgleichungen grossen Vortheil für die analytische Mechanik gezogen. Es musste daher die hohe Aufmerksamkeit der Mathematiker erregen, als Herr Hamilton, Professor der Astronomie in Dublin und königlicher Astronom für Irland, in den *Philosophical Transactions* nachwies, dass man in dem gedachten Falle der Mechanik auch sämmtliche Integralgleichungen der Bewegung vermittelst der partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function auf eben so einfache Weise darstellen kann. Es ist dies ohne Zweifel die bedeutendste Erweiterung, welche die analytische Mechanik seit Lagrange erfahren hat. Ich werde im Folgenden die von Hamilton gefundenen neuen Fundamentaltheoreme aus den bekannten Differentialgleichungen nach Anleitung des Verfassers ableiten und einige wesentliche Erweiterungen derselben angeben, welche in einigen Fällen sogar für die wirkliche Ausführung der Integrationen bisher nicht bemerkte Vortheile darbieten. Die Theoreme Hamilton's, in ihrer Verallgemeinerung aufgefasst, führen die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung auf die Integration einer einzigen, nicht linearen, partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurück. Die Theorie dieser partiellen Differentialgleichungen erhält auf diese Weise eine erhöhte Wichtigkeit, indem von ihr ein bedeutender Theil der Probleme der Mechanik abhängig gemacht wird, unter welchem die Bewegung der Körper unseres Sonnensystems mitinbegriffen ist. Man hat diese Theorie mit Unrecht bisher durch die Arbeiten von **Lagrange** und **Pfaff** für abgethan erachtet, während sie noch einen grossen Spielraum für Untersuchungen darbietet, welche eben so viel neue und wichtige Resultate für die Mechanik versprechen; die Theoreme **Hamilton's** selbst tragen auf bedeutende und unerwartete Weise zur Vervollkommnung dieser Theorie bei, obgleich der Verfasser dieses rein analytische Interesse nicht hervorgehoben hat.

§. 1. Die Bewegungsgleichungen bei Existenz einer Kräftefunction. Gleichung der lebendigen Kraft.

Lagrange hat den Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems von n materiellen Punkten in einem sehr ausgedehnten Falle die einfache und merkwürdige Form gegeben:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

oder die den rechtwinkligen Coordinaten parallelen Componenten der auf die verschiedenen Punkte des Systems wirkenden Kräfte durch die nach den entsprechenden Coordinaten genommenen partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function ausgedrückt. Dieser Fall tritt ein, wenn die Punkte des Systems gegenseitigen Anziehungen oder Abstossungen unterworfen sind; es können überdies die einzelnen Punkte noch nach festen Centren gezogen oder von denselben abgestossen, auch von constanten Parallelkräften sollicitirt werden. Man braucht hierbei nicht vorauszusetzen, dass jeder Punkt von allen übrigen und den festen Centren nach demselben Gesetze angezogen oder von denselben abgestossen wird; nur muss zwischen je zwei sich anziehenden oder abstossenden Punkten des Systems die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung stattfinden. Die Function U, deren partielle Differentialquotienten die Kräfte geben, kann man die *Kräftefunction* nennen. Für n Punkte, die sich nach dem **Newton**'schen Gesetze anziehen, wird sie z. B.

$$U = \Sigma \frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

wenn $r_{i,k}$ die gegenseitige Distanz zweier Punkte des Systems bedeutet, deren Massen m_i und m_k sind, und die Summe auf alle Combinationen je zweier Punkte ausgedehnt wird.

Wenn das System nicht frei, sondern irgend welchen Bedingungen unterworfen ist, sei es, dass die Punkte desselben mit einander oder mit festen Punkten irgendwie verbunden oder gezwungen sind, sich auf gegebenen Curven oder Oberflächen zu bewegen, so hat **Lagrange** durch glückliche Einführung von Multiplicatoren den Differentialgleichungen der Bewegung dieselbe einfache Form zu erhalten gewusst. Es seien die Bedingungen des Systems ausgedrückt durch die zwischen den Coordinaten der materiellen Punkte gegebenen Gleichungen

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \text{etc.},$$

so erhält man für jeden Punkt des Systems, dessen rechtwinklige Coordinaten x_i, y_i, z_i sind, und dessen Masse m_i ist, die Gleichungen:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \cdots,$$
$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \cdots,$$
$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \cdots,$$

in welchen Formeln die verschiedenen Multiplicatoren λ, λ_1, etc., welche in die partiellen Differentialquotienten der verschiedenen Functionen f, φ, etc. multiplicirt sind, für alle Punkte des Systems dieselben bleiben. Man erhält die Multiplicatoren vermittelst der Auflösung bloss linearer Gleichungen durch die Coordinaten der Punkte und ihre nach den Coordinatenaxen zerlegten Geschwindigkeiten ausgedrückt, indem man die vorstehenden Werthe der zweiten Ableitungen der Coordinaten in die zweiten Ableitungen der Bedingungsgleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, etc. substituirt.

Man kann immer ein Integral der vorstehenden Differentialgleichungen erhalten, welches von den Bedingungen des Systems unabhängig und unter dem Namen des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft bekannt ist. Multiplicirt man nämlich die vorstehenden Differentialgleichungen mit

$$\frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{dy_i}{dt}, \quad \frac{dz_i}{dt}$$

und addirt alle ähnlichen Gleichungen, die man für die verschiedenen Punkte des Systems erhält, so verschwinden die in die Multiplicatoren λ, λ_1, etc. multiplicirten Ausdrücke vermöge der Bedingungsgleichungen des Systems, und die beiden Seiten der Gleichung werden integrabel. Man erhält nach geschehener Integration die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\} = U+h$$

oder, wenn man mit v_i die Geschwindigkeit des Punktes, dessen Masse m_i ist, bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = U+h,$$

wo h eine hinzugefügte willkürliche Constante ist. Bezeichnet man mit v_i^0, U^0 die Werthe von v_i und U zu irgend einer Zeit t_0, so kann man die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$\tfrac{1}{2}[\Sigma m_i v_i v_i - \Sigma m_i v_i^0 v_i^0] = U - U^0.$$

Den Ausdruck

$$\Sigma m_i v_i^2$$

nennt man *die lebendige Kraft des Systems.* Die vorstehende Gleichung besagt also, dass, wenn ein System materieller Punkte, auf welches Kräfte der oben angegebenen Art wirken, und welches irgend welchen Bedingungen unterworfen ist, in einer gewissen Zeit durch seine Bewegung aus einer Position in eine andere rückt und man die Bedingungen des Systems, d. h. die Verbindungen der Punkte unter sich oder mit andern festen Punkten, oder die Curven oder Flächen, auf denen die einzelnen Punkte sich zu bewegen gezwungen sind, auf irgend eine beliebige Art abändert, jedoch so, dass das System wieder in einer gewissen Zeit, während dieselben Kräfte darauf wirken, durch seine Bewegung aus der ersten Position in die zweite rücken kann: der Gewinn oder Verlust an lebendiger Kraft am Ende der Bewegung in beiden Fällen ganz der nämliche ist oder sich unverändert erhält. Dieses ist die Eigenschaft des Systems, welche man die *Erhaltung* seiner lebendigen Kraft genannt und welche dem Principe seinen Namen gegeben hat.

Die obige Form der Differentialgleichungen der Bewegung kann auch noch auf den Fall ausgedehnt werden, wo die Punkte des Systems nach anderen *beweglichen* Centren gezogen werden, wenn dieselben von den Punkten des Systems keine *Reaction* erleiden und ihre Bewegung anderweitig gegeben ist. Dies wäre z. B. der Fall der Bewegung eines Kometen, der von den Körpern des Sonnensystems angezogen wird, wenn man die Bewegung dieser

letzteren als bekannt voraussetzt. Die Kräftefunction U enthält dann noch ausser den Coordinaten der Punkte des Systems die Zeit t *explicite*, und der Satz von der lebendigen Kraft hört auf seine Gültigkeit zu haben. Die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = U+h$$

wird nämlich für diesen Fall

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = U - \int \frac{\partial U}{\partial t}\, dt,$$

wenn $\frac{\partial U}{\partial t}$ den partiellen Differentialquotienten von U nach t bedeutet, insoweit t in U noch ausser den Coordinaten der Punkte vorkommt. Ebensowenig gelten für diesen Fall die anderen Principe der Mechanik. In einem besondern Fall indessen, der für mehrere Bewegungen im Sonnensystem eine bedeutende Annäherung abgiebt, wenn man nämlich die Bewegung eines masselosen Punktes sucht, der von zwei Körpern, die sich in einem Kreise gleichförmig um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt drehen, nach dem Newton'schen Gesetze angezogen wird, habe ich ein neues Integral gefunden, welches eine gewisse Combination der beiden Principe von der Erhaltung der lebendigen Kraft und der Erhaltung der Flächen darbietet.

Die obige Form der Differentialgleichungen der Bewegung bietet den Vortheil dar, dass man, von ihr ausgehend, mit Leichtigkeit die Probleme der Mechanik dem Calcul unterwerfen, die bekannten Principien der Mechanik beweisen und gehörig begrenzen, ferner alle für nöthig erachteten analytischen Transformationen der Gleichungen ausführen kann; endlich ist es durch diese Form möglich geworden, der Methode der Variation der Constanten die gegenwärtig von ihr erreichte grosse Vollkommenheit und Allgemeinheit zu geben. Aber in neuester Zeit hat Hamilton aus dieser Form der Differentialgleichungen Folgerungen gezogen, welche trotz ihrer Einfachheit und Fruchtbarkeit den Analysten bisher entgangen waren, und welche ihn darauf geführt haben, die oben näher bezeichneten Probleme der Mechanik, für welche die Differentialgleichungen die in Rede stehende Form haben, unter einem ganz neuen Gesichtspunkte darzustellen. Dieser Gesichtspunkt wird desto wichtiger, weil er in Verbindung mit anderen Erweiterungen des Integralcalculs für die *Integration* der erwähnten Differentialgleichungen die merkwürdigsten Vortheile darbietet. Man findet die Arbeiten Hamilton's, von denen ich hier reden will, in den *Philosophical Transactions* der Royal Society in zwei Abhandlungen (1834 P. II, 1835 P. I).

§. 2. Die Hamilton'sche Form der Integralgleichungen. Die Grundfunction.

Wie Lagrange die Differentialgleichungen der Mechanik in den gedachten Fällen durch die partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function darstellt: so hat Hamilton gezeigt, dass auch sämmtliche *Integrale* derselben durch die partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function dargestellt werden können. Ich werde mich im Folgenden zunächst auf die Betrachtung eines ganz freien Systems materieller Punkte beschränken.

Es seien die Massen der n Punkte des Systems $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ und die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes, dessen Masse m_i ist, x_i, y_i, z_i; es seien ferner die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems, wie oben:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$
$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$
$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

in welchen Gleichungen dem Index i die Werthe $1, 2, 3, \ldots, n$ zu geben sind. Man hat so $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen den $3n$ Coordinaten und der Zeit, deren vollständige Integrale $6n$ Gleichungen zwischen der Zeit, den $3n$ Coordinaten und ihren nach der Zeit genommenen Differentialquotienten sind, welche $6n$ willkürliche Constanten enthalten. Man setze, der Kürze halber, die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der Coordinaten

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = y'_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = z'_i$$

und bezeichne mit S das Integral:

$$S = \int_0^t [U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i)]\,dt.$$

Nimmt man dann für die $6n$ willkürlichen Constanten in den $6n$ Integralgleichungen die Werthe, welche die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i für $t = 0$ annehmen, und welche respective mit a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i bezeichnet werden mögen, so geben die Integralgleichungen des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i als Functionen von t und von ihren $6n$ Anfangswerthen a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i. Man erhält daher durch eine Integration nach t auch S als Function derselben Grössen.

Vermittelst der erwähnten Integralgleichungen kann man auch die $6n$ Grössen x'_i, y'_i, z'_i, a'_i, b'_i, c'_i durch t und die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i ausdrücken. Substituirt man diese Ausdrücke in den gefundenen Werth von S, so wird auch S eine Function von t und den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, d. h. S wird eine Function der Coordinaten der Orte, welche die Punkte des Systems in zwei verschiedenen Positionen desselben einnehmen, und der Zwischenzeit, welche das System gebraucht hat, um aus einer Position in die andere zu kommen. Kennt man auf irgend eine Art diesen Ausdruck von S durch t und die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, so geben nach Hamilton die nach diesen letzteren genommenen partiellen Differentialquotienten von S unmittelbar die Ausdrücke der $6n$ übrigen Grössen x'_i, y'_i, z'_i, a'_i, b'_i, c'_i durch dieselben Grössen t, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i und mithin die sämmtlichen $6n$ Integralgleichungen des Problems.

Man hat nämlich, wie Hamilton zeigt, die Gleichungen:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m_i x'_i, \quad \frac{\partial S}{\partial a_i} = -m_i a'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = m_i y'_i, \quad \frac{\partial S}{\partial b_i} = -m_i b'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial z_i} = m_i z'_i, \quad \frac{\partial S}{\partial c_i} = -m_i c'_i,$$

in welchen dem Index i wieder seine n Werthe $1, 2, 3, \ldots, n$ zu geben sind. Die $3n$ Gleichungen rechts sind die endlichen Gleichungen der Bewegung selbst, d. h. $3n$ Gleichungen zwischen den $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i und der Zeit t mit $6n$ willkürlichen Constanten a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i. Die Gleichungen links sind die $3n$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen der Zeit t, den Coordinaten x_i, y_i, z_i, und ihren nach der Zeit genommenen Differentialquotienten x'_i, y'_i, z'_i mit nur $3n$ willkürlichen Constanten a_i, b_i, c_i. Diese letzteren Gleichungen nennt Hamilton auch die *Zwischenintegrale*. Die Function der Zeit t, der Coordinaten der Punkte des Systems und der einer Zeit $t = 0$ entsprechenden anfänglichen Werthe derselben, welche im Vorstehenden mit S bezeichnet ist, und welche allein sämmtliche Integralgleichungen des Problems giebt, nennt Hamilton die *charakteristische-* oder die *Grundfunction.*

Die vorstehenden Formeln gelten auch dann, wenn die Kräftefunction U die Zeit t *explicite* enthält, auf welchen Fall Hamilton seine Untersuchungen nicht ausgedehnt hat. Wenn U, wie Hamilton dieses voraussetzt, und wie es insgemein der Fall ist, eine blosse Function der Coordinaten ist, welche nicht ausserdem noch die Zeit t explicite enthält, so kann man die Function S auf eine einfachere Weise definiren, als es oben geschehen ist. In diesem Falle gilt nämlich, wie wir oben gesehen haben, der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft oder die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i) = U + h,$$

und man hat daher

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t [U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i)]dt \\ &= \int_0^t \Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i)dt - ht \\ &= 2\int_0^t U dt + ht, \end{aligned}$$

in welchen Formeln man die willkürliche Constante h ebenfalls durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten auszudrücken hat.

Um die partiellen Differentialquotienten der Function S nach allen Grössen, die sie enthält, zu kennen, muss noch der Werth von

$$\frac{\partial S}{\partial t}$$

angegeben werden. Bedient man sich, wie bereits im Vorigen geschehen ist, der Charakteristik ∂ für die partielle Differentiation, dagegen der Charakteristik d, wenn man die Coordinaten x_i, y_i, z_i als Functionen der Zeit t betrachtet und nach t vollständig differentiirt, so hat man:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \Sigma\left\{\frac{\partial S}{\partial x_i}x'_i + \frac{\partial S}{\partial y_i}y'_i + \frac{\partial S}{\partial z_i}z'_i\right\},$$

wenn man unter dem Summenzeichen dem i seine Werthe $1, 2, 3, \ldots, n$ giebt. Substituirt man in diese Gleichung die Werthe

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m_i x'_i, \quad \frac{\partial S}{\partial y_i} = m_i y'_i, \quad \frac{\partial S}{\partial z_i} = m_i z'_i,$$

so verwandelt sie sich in folgende:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i).$$

Andererseits aber erhält man aus der für S gegebenen Definition

$$\frac{dS}{dt} = U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i),$$

und daher durch Vergleichung beider Ausdrücke

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i),$$

welches der verlangte partielle Differentialquotient von S nach t ist. Wenn U nicht t explicite enthält, so geht diese Gleichung zufolge des dann geltenden Satzes von der lebendigen Kraft über in

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h,$$

welche Formel den Ausdruck der Constante h durch die Zeit und die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten giebt.

Die Grundfunction kann zugleich mit den Variabeln, welche sie enthält, auf mannigfache Weise abgeändert werden, ohne ihre charakteristische Eigenschaft zu verlieren, das heisst ohne dass sie aufhört, durch ihre partiellen Differentialquotienten die Integralgleichungen des Problems zu geben. **Hamilton** giebt mehrere Functionen an, welche man zur Grundfunction wählen kann. Die merkwürdigste von diesen ist die von ihm seiner ersten Abhandlung zu Grunde gelegte, in welcher er statt der Zeit t die Grösse

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i) - U = H,$$

welche nach dem Satze von der lebendigen Kraft eine Constante h wird, als Variable einführt, während die übrigen Variabeln der Grundfunction unverändert bleiben. In der elliptischen Bewegung eines Planeten wird, wenn man die Masse desselben und die Constante der Anziehungskraft der Sonne gleich 1 setzt,

$$h = -\frac{1}{2a},$$

wo a die halbe grosse Axe der Bahn bedeutet. Für diesen Fall ist also diese Wahl der Variabeln der Grundfunction dieselbe, die man mehreren Untersuchungen in der Planeten- und Kometentheorie zu Grunde gelegt hat, in welchen man durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten und die grosse Axe die Zwischenzeit und die übrigen Elemente der Bahn ausdrückt.

Man kann die neue Grundfunction aus der Function S durch folgende Betrachtung ableiten. Differentiirt man S gleichzeitig nach allen Grössen, die es enthält, so wird zufolge der oben gegebenen Formeln:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S}{\partial t}dt + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial S}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial S}{\partial z_i}dz_i\right) \\ &\quad + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}da_i + \frac{\partial S}{\partial b_i}db_i + \frac{\partial S}{\partial c_i}dc_i\right) \\ &= -Hdt + \Sigma m_i(x'_i dx_i + y'_i dy_i + z'_i dz_i) \\ &\quad - \Sigma m_i(a'_i da_i + b'_i db_i + c'_i dc_i). \end{aligned}$$

Setzt man

$$S = -Ht + V,$$

so folgt hieraus

$$\begin{aligned} dV = t\,dH &+ \Sigma m_i(x_i'dx_i + y_i'dy_i + z_i'dz_i) \\ &- \Sigma m_i(a_i'da_i + b_i'db_i + c_i'dc_i). \end{aligned}$$

Wenn man daher zu Variabeln der Function V die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten und die Grösse

$$H = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i') - U$$

nimmt, so erhält man unmittelbar durch die nach diesen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten von V die $6n$ Grössen x_i', y_i', z_i', a_i', b_i', c_i', und die Zeit t. Die vorstehende Gleichung giebt nämlich die Werthe der $6n+1$ partiellen Differentialquotienten von V:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_i} &= m_i x_i', & \frac{\partial V}{\partial a_i} &= -m_i a_i', \\ \frac{\partial V}{\partial y_i} &= m_i y_i', & \frac{\partial V}{\partial b_i} &= -m_i b_i', \\ \frac{\partial V}{\partial z_i} &= m_i z_i', & \frac{\partial V}{\partial c_i} &= -m_i c_i', \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = t.$$

Die Function V wird, wenn man die Werthe von S und H substituirt:

$$\begin{aligned} V = \int_0^t &[\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i') + U]dt \\ &+ [\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i') - U]t. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird für den Fall, wo der Satz von der lebendigen Kraft gilt und daher H eine Constante wird, viel einfacher. Man hat dann nämlich:

$$[\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i') - U]t = Ht = \int_0^t H dt = \int_0^t [\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i') - U]dt,$$

und daher

$$V = \int_0^t \Sigma m_i(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i')dt.$$

Dies ist der von Hamilton gegebene Ausdruck von V. Weil in demselben die unter dem Integralzeichen in das Zeitelement multiplicirte Grösse die lebendige Kraft ist, nennt Hamilton die Function V auch die *angehäufte lebendige Kraft.*

Wenn die Kräftefunction U nicht t explicite enthält, kann man die Differentialgleichungen der Bewegung bloss als Gleichungen erster Ordnung zwischen den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' ohne t betrachten. Man kann nämlich die Differentialgleichungen der Bewegung folgendermassen darstellen:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_i', & m_i\frac{dx_i'}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= y_i', & m_i\frac{dy_i'}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ \frac{dz_i}{dt} &= z_i', & m_i\frac{dz_i'}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial z_i}, \end{aligned}$$

oder durch die Proportion

$$\begin{array}{rcccccccc} & dx_1 & : & dx_2 & : & dx_3 & :\ldots: & dx_n & : \\ & dy_1 & : & dy_2 & : & dy_3 & :\ldots: & dy_n & : \\ & dz_1 & : & dz_2 & : & dz_3 & :\ldots: & dz_n & : \\ & dx_1' & : & dx_2' & : & dx_3' & :\ldots: & dx_n' & : \\ & dy_1' & : & dy_2' & : & dy_3' & :\ldots: & dy_n' & : \\ & dz_1' & : & dz_2' & : & dz_3' & :\ldots: & dz_n' & : \\ = & x_1' & : & x_2' & : & x_3' & :\ldots: & x_n' & : \\ & y_1' & : & y_2' & : & y_3' & :\ldots: & y_n' & : \\ & z_1' & : & z_2' & : & z_3' & :\ldots: & z_n' & : \\ & \frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial x_1} & : & \frac{1}{m_2}\frac{\partial U}{\partial x_2} & : & \frac{1}{m_3}\frac{\partial U}{\partial x_3} & :\ldots: & \frac{1}{m_n}\frac{\partial U}{\partial x_n} & : \\ & \frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial y_1} & : & \frac{1}{m_2}\frac{\partial U}{\partial y_2} & : & \frac{1}{m_3}\frac{\partial U}{\partial y_3} & :\ldots: & \frac{1}{m_n}\frac{\partial U}{\partial y_n} & : \\ & \frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial z_1} & : & \frac{1}{m_2}\frac{\partial U}{\partial z_2} & : & \frac{1}{m_3}\frac{\partial U}{\partial z_3} & :\ldots: & \frac{1}{m_n}\frac{\partial U}{\partial z_n} & , \end{array}$$

in welcher t nicht mehr vorkommt. Diese Proportion vertritt die Stelle von $6n-1$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', welche sich, wenn man den Satz von der lebendigen Kraft benutzen will:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i') = U + h,$$

auf $6n-2$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $6n-1$ Variabeln reduciren. Hat man diese Gleichungen vollständig integrirt und dadurch alle ihre Variabeln durch eine von ihnen, z. B. x_1, die willkürliche Constante h

und $6n-2$ andere willkürliche Constanten ausgedrückt, so erhält man die Zeit t durch eine einmalige Quadratur vermittelst der Formel:

$$t+\tau = \int \frac{dx_1}{x_1'},$$

wo τ eine neue willkürliche Constante ist. Die Integration der $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung kommt daher, wenn U nicht t explicite enthält, auf die Integration von $6n-2$ Differentialgleichungen erster Ordnung, den Satz von der lebendigen Kraft und eine einmalige Quadratur zurück. Wenn t auch explicite in U enthalten ist, also das *eine* Integral der lebendigen Kraft nicht mehr gilt, hat man *zwei* Integrationen mehr auszuführen.

Zur Auffindung von V braucht man nur die $6n-1$ Gleichungen zwischen den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' zu kennen *und hat nicht nöthig die Quadratur, welche t giebt, auszuführen.* Man kann nämlich den oben gegebenen Werth von V folgendermassen darstellen:

$$V = \int \Sigma m_i(x_i' dx_i + y_i' dy_i + z_i' dz_i),$$

wo das Integral, wenn man alle Grössen durch x_1 ausgedrückt hat, von $x_1 = a_1$ an zu nehmen ist, für welche Grenze man gleichzeitig hat:

$$t = \int_{a_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1'}.$$

Kennt man also die $6n-1$ Gleichungen zwischen den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', *so werden t und V unabhängig von einander durch je eine Quadratur gefunden.*

Es giebt einen sehr ausgedehnten Fall, der auch die Bewegung der Himmelskörper in sich begreift, in welchem die beiden Quadraturen, durch welche man t und V findet, auf einander zurückgeführt werden können, so dass, wenn man t bereits gefunden hat, es keiner anderen Quadratur bedarf, um V zu finden, und umgekehrt. Es findet dies statt, wenn U eine homogene Function der Coordinaten ist. Ist nämlich dieselbe von der Dimension ε, so beweist man leicht die Formel:

$$\begin{aligned}\frac{2+\varepsilon}{2}\cdot V = \varepsilon ht &+ \Sigma m_i(x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i') \\ &- \Sigma m_i(a_i a_i' + b_i b_i' + c_i c_i').\end{aligned}$$

Hat man also t und die Grösse

$$\begin{aligned}&\Sigma m_i(x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i') \\ -&\Sigma m_i(a_i a_i' + b_i b_i' + c_i c_i')\end{aligned}$$

durch h und die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i ausgedrückt, so kennt man durch die vorstehende Formel, ohne weiter eine Quadratur auszuführen, den verlangten Ausdruck der charakteristischen Function V. Für das Weltsystem wird, wie oben angegeben ist, die Kräftefunction

$$U = \Sigma \frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

also eine homogene Function der Coordinaten von der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension. Setzt man daher $\varepsilon = -1$, so erhält man für das Weltsystem:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}V = -ht &+ \Sigma m_i(x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i') \\ &- \Sigma m_i(a_i a_i' + b_i b_i' + c_i c_i').\end{aligned}$$

Man sieht übrigens aus diesen Formeln, dass man, wenn U eine homogene Function der Coordinaten ist, nicht nur V, sondern auch noch das neue Integral

$$\int V dt$$

allgemein angeben kann.

Wenn U von der $(-2)^{\text{ten}}$ Dimension ist, welches der Fall ist, wenn die Anziehungen sich umgekehrt wie die Cuben der Entfernungen verhalten, so kann man V nicht mehr durch die vorstehenden Formeln bestimmen. Diese geben aber zwei neue Integrale, nämlich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\Sigma m_i(x_i x_i + y_i y_i + z_i z_i) &= \alpha + 2\beta t + 2ht^2, \\ \Sigma m_i(x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i') &= \beta + 2ht,\end{aligned}$$

wo α, β willkürliche Constanten sind.

Ich will noch bemerken, dass man aus derselben Quelle einen Satz ableiten kann, der sich auf die Stabilität des Weltsystems bezieht. Sind X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunkts des Systems, und setzt man

$$X' = \frac{dX}{dt}, \quad Y' = \frac{dY}{dt}, \quad Z' = \frac{dZ}{dt},$$

so kann man den Ausdruck

$$\Sigma m_i[(x_i' - X')^2 + (y_i' - Y')^2 + (z_i' - Z')^2]$$

die lebendige Kraft des Systems um seinen Schwerpunkt nennen und leicht den Satz beweisen, dass, wenn irgend ein freies System von Körpern, welche sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen anziehen, *stabil* sein soll, *seine lebendige Kraft um den Schwerpunkt abwechselnd grösser und kleiner werden muss als die Kräftefunction, aber immer kleiner bleiben muss als der doppelte*

Werth der letzteren. Wenn für irgend einen Zeitmoment also die lebendige Kraft um den Schwerpunkt des Systems grösser als die doppelte Kräftefunction oder der doppelten Kräftefunction gleich ist, so weiss man, dass das System oder wenigstens einige seiner Theile ins Unendliche auseinandergehen.

§. 3. Die charakteristische Function für die Planetenbewegung.

Um ein einfaches und lehrreiches Beispiel zu haben, wollen wir die charakteristische Function V für die elliptische Bewegung eines Planeten aufsuchen. Man nenne r den *Radius Vector*, a die halbe grosse Axe, k^2 die anziehende Kraft für die Einheit der Entfernung, setze ferner

$$r' = \frac{dr}{dt}$$

und nenne r_0, r'_0 die Anfangswerthe von r, r' und ϱ die den Anfangs- und Endpunkt der Bewegung verbindende Sehne, so wird nach dem von mir für V angegebenen Ausdruck in diesem speciellen Falle:

$$\tfrac{1}{2}V = \frac{k^2}{2a}\cdot t + rr' - r_0 r'_0.$$

Die Masse des bewegten Planeten, die eigentlich als gemeinschaftlicher Factor noch die Grössen V und h afficirt, habe ich hier $=1$ gesetzt, da sie ganz aus der Rechnung herausgeht; für die Constante h habe ich ihren Ausdruck $-\frac{k^2}{2a}$, den sie für die elliptische Bewegung annimmt, eingeführt. Bestimmt man zwei Hülfswinkel ε und ε' vermittelst der Gleichungen:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r+r_0+\varrho}{4a},$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r+r_0-\varrho}{4a},$$

so findet man aus den Formeln, die Gauss in der *Theoria motus* gegeben,

$$rr' - r_0 r'_0 = k\sqrt{a}(\sin\varepsilon - \sin\varepsilon').$$

Es wird ferner nach der bekannten Lambert'schen Formel

$$t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}[\varepsilon - \sin\varepsilon - (\varepsilon' - \sin\varepsilon')],$$

und daher

$$V = \frac{k^2}{a}t + 2(rr' - r_0 r'_0)$$
$$= k\sqrt{a}[\varepsilon + \sin\varepsilon - (\varepsilon' + \sin\varepsilon')].$$

Dieser Ausdruck von V ist von dem Lambert'schen Ausdruck von $\frac{k^2 t}{a}$ nur in dem *Zeichen* der beiden Sinus verschieden. Um denselben, wie verlangt wird, durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten auszudrücken, braucht man nur in den Werthen der Winkel ε und ε' für r, r_0 und ϱ die Ausdrücke zu substituiren:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$$
$$\varrho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

wo mit x_0, y_0, z_0 die der Zeit $t=0$ entsprechenden Werthe der Coordinaten bezeichnet sind. Hamilton kommt auf einem anderen Wege zu dem obigen Ausdruck von V, indem er zuerst den Ausdruck desselben ohne Beweis für den Fall eines beliebigen Attractionsgesetzes hinstellt und dann die besonderen Formeln für die elliptische Bewegung daraus ableitet.

Setzt man

$$g = \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}, \quad g' = \frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\,{}^{*)}$$

und nennt $2f$ den Winkel, welchen die beiden Radien Vectoren bilden, so erhält man nach einigen Reductionen durch die partielle Differentiation des für V gefundenen Ausdrucks die nachstehenden Formeln:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x' = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{x-x_0}{\varrho}\sin g - \frac{x}{r}\sin g'\right],$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = y' = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{y-y_0}{\varrho}\sin g - \frac{y}{r}\sin g'\right],$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = z' = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{z-z_0}{\varrho}\sin g - \frac{z}{r}\sin g'\right],$$
$$-\frac{\partial V}{\partial x_0} = x'_0 = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{x-x_0}{\varrho}\sin g + \frac{x_0}{r_0}\sin g'\right],$$
$$-\frac{\partial V}{\partial y_0} = y'_0 = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{y-y_0}{\varrho}\sin g + \frac{y_0}{r_0}\sin g'\right],$$
$$-\frac{\partial V}{\partial z_0} = z'_0 = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{z-z_0}{\varrho}\sin g + \frac{z_0}{r_0}\sin g'\right],$$

wo mit x'_0, y'_0, z'_0 die der Zeit $t=0$ entsprechenden Werthe von x', y', z' bezeichnet sind. Der Winkel g' ist, wie aus den Formeln der *Theoria motus*

*) Die Winkel g und g' sind hier dieselben, welche in der *Theoria motus* mit h, g bezeichnet sind.

erhellt, die halbe Differenz der beiden excentrischen Anomalien; die beiden Grössen $\sin g$ und $\sin g'$ sind durch die Formel miteinander verbunden:

$$\varrho = 2a \sin g \sin g';$$

nennt man die beiden excentrischen Anomalien E und E_0, so hat man auch:

$$\cos g = e \cos \frac{E+E_0}{2},$$

wo e die Excentricität bedeutet. Nennt man p den halben Parameter, so hat man ferner:

$$\sqrt{ap}.\sin g' = \sin f \sqrt{rr_0}.$$

Sind α, β, γ die Winkel, die die Halbirungslinie des Winkels der beiden Radien Vectoren mit den rechtwinkligen Coordinatenaxen bildet, so kann man aus den für x', y', etc. angegebenen Werthen auch folgende einfache Ausdrücke für $x'-x'_0$, $y'-y'_0$, $z'-z'_0$ ableiten:

$$x'-x'_0 = -\frac{2k \sin f}{\sqrt{p}} \cos\alpha,$$
$$y'-y'_0 = -\frac{2k \sin f}{\sqrt{p}} \cos\beta,$$
$$z'-z'_0 = -\frac{2k \sin f}{\sqrt{p}} \cos\gamma,$$

welche Formeln sich ebenfalls bei Hamilton angedeutet finden. Von dem für V angegebenen Werthe kann man auch zu dem Lambert'schen Ausdruck der Zeit zurückkehren vermittelst der Formel:

$$t = \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial V}{\partial \frac{-k^2}{2a}} = \frac{2a^2}{k^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Für die *parabolische* Bewegung erhält man aus den obenstehenden Formeln, indem man $a = \infty$ setzt:

$$\sqrt{a}.\varepsilon = \sqrt{a}.\sin\varepsilon = \sqrt{r+r_0+\varrho},$$
$$\sqrt{a}.\varepsilon' = \sqrt{a}.\sin\varepsilon' = \sqrt{r+r_0-\varrho},$$

und daher die charakteristische Function:

$$V = 2k[\sqrt{r+r_0+\varrho} - \sqrt{r+r_0-\varrho}],$$

während der bekannte Ausdruck der Zwischenzeit wird:

$$t = \frac{1}{6k}[\sqrt{(r+r_0+\varrho)^3} - \sqrt{(r+r_0-\varrho)^3}].$$

Hiermit sind die hauptsächlichsten Formeln abgeleitet, welche dazu dienen können, die Form, in welcher die Integralgleichungen der elliptischen Bewegung nach der Hamilton'schen Methode sich darstellen, mit den Formen, welche denselben gewöhnlich gegeben werden, zu vergleichen.

§. 4. Form der Integralgleichungen für unfreie Bewegungen.

Die bisherigen Formeln bezogen sich auf die Bewegung eines freien Systems, für welche die Differentialgleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$
$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$
$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

gelten. Aber Hamilton hat bemerkt, dass auch in dem Falle, wo das System irgend welchen Bedingungen unterworfen ist, die durch Gleichungen zwischen den Coordinaten der bewegten Punkte:

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \text{etc.}$$

ausgedrückt werden, die Integralgleichungen der Bewegung sich in einer analogen einfachen Form darstellen lassen. Gleichwie nämlich Lagrange für diesen Fall die Differentialgleichungen des Problems auf die Form

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \cdots,$$
$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \cdots,$$
$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \cdots$$

gebracht hat, wo die Multiplicatoren λ, λ_1, etc. vermittelst der Gleichungen $\frac{d^2 f}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$, etc. bestimmt werden können; so erhalten nach Hamilton die Integralgleichungen der Bewegung die Gestalt:

$$m_i x'_i = \frac{\partial S}{\partial x_i} + l \frac{\partial f}{\partial x_i} + l_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \cdots,$$
$$m_i y'_i = \frac{\partial S}{\partial y_i} + l \frac{\partial f}{\partial y_i} + l_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \cdots,$$
$$m_i z'_i = \frac{\partial S}{\partial z_i} + l \frac{\partial f}{\partial z_i} + l_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \cdots,$$
$$m_i a'_i = -\frac{\partial S}{\partial a_i} + l^0 \frac{\partial f^0}{\partial a_i} + l_1^0 \frac{\partial \varphi^0}{\partial a_i} + \cdots,$$
$$m_i b'_i = -\frac{\partial S}{\partial b_i} + l^0 \frac{\partial f^0}{\partial b_i} + l_1^0 \frac{\partial \varphi^0}{\partial b_i} + \cdots,$$
$$m_i c'_i = -\frac{\partial S}{\partial c_i} + l^0 \frac{\partial f^0}{\partial c_i} + l_1^0 \frac{\partial \varphi^0}{\partial c_i} + \cdots. \text{*)}$$

*) Die Herleitung dieser Gleichungen findet sich im vierten Bande dieser Ausgabe p. 59—65.

Hier haben die Grössen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i dieselbe Bedeutung wie oben, und f^0, φ^0, etc. bezeichnen die Ausdrücke, in welche f, φ, etc. übergehen, wenn man in ihnen a_i, b_i, c_i für x_i, y_i, z_i setzt. Ferner bezeichnet S ebenso wie im Vorhergehenden eine Function der Grössen x_i, y_i, z_i und a_i, b_i, c_i, welche zwar durch die Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$, etc. $f^0=0$, $\varphi^0=0$, etc. mit einander verbunden sind, aber bei der Bildung der partiellen Ableitungen von S sowohl als von f, φ, etc. f^0, φ^0, etc., als von einander unabhängige Variable anzusehen sind. Endlich ist zu bemerken, dass die Multiplicatoren l, l_1, etc. der $3n$ ersten Integralgleichungen mit Hülfe der Gleichungen $\frac{df}{dt}=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=0$, etc. durch die Grössen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i ausgedrückt werden können, und dass aus diesen Ausdrücken, wenn man in ihnen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i in a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i verwandelt, die Multiplicatoren l^0, l_1^0, etc. der $3n$ letzten Integralgleichungen sich ergeben.

Man erhält ganz ähnliche Formeln, wenn man die Function V zur charakteristischen Function annimmt. Die Formeln

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial H} = t$$

bleiben ganz dieselben wie für ein freies System. Ich werde mich im Folgenden zunächst wieder auf ein freies System beschränken, jedoch auf den allgemeineren Fall später zurückkommen.

§. 5. Die beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, denen die charakteristische Function genügt.

Das Auffinden der charakteristischen Function S oder V nach der oben gegebenen Definition setzt die bereits ausgeführte, vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung voraus. Die **Hamilton**'sche Methode giebt dann eine merkwürdige Art, wie man die bereits bekannten Integrale darstellen kann. Aber **Hamilton** hat noch eine andere Definition der charakteristischen Function gegeben, indem er gezeigt hat, wie für den Fall, wo der Satz von der lebendigen Kraft gilt, S sowohl als V *gleichzeitig zweien partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung Genüge leisten.* Diese beiden partiellen Differentialgleichungen vereint dienen ihm zu einer neuen Definition der charakteristischen Function, welche die vollständige Integration des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen nicht voraussetzt.

Wir haben oben (p. 227) für die charakteristische Function S die Gleichung gefunden:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i).$$

Substituirt man in diese Gleichung die Ausdrücke

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m_i x'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = m_i y'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial z_i} = m_i z'_i,$$

so verwandelt sie sich in die folgende partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)\right] = U.$$

Wenn der Satz von der lebendigen Kraft gilt, ist

$$U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i)$$

einer Constante gleich. Bezeichnet man daher mit U_0, wie oben, den Anfangswerth der Kräftefunction, der erhalten wird, wenn man in U für x_i, y_i, z_i ihre der Zeit $t=0$ entsprechenden Werthe a_i, b_i, c_i setzt, so hat man:

$$U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i)$$
$$= U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a'_i a'_i + b'_i b'_i + c'_i c'_i),$$

und daher auch:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a'_i a'_i + b'_i b'_i + c'_i c'_i).$$

Substituirt man in diese Gleichung die Ausdrücke

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = -m_i a'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial b_i} = -m_i b'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial c_i} = -m_i c'_i,$$

so erhält man eine zweite partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right] = U_0,$$

welcher Hamilton's Function S ebenfalls Genüge leistet. Hamilton definirt demnach die Function S auch als eine solche Function der Grösse t, der $3n$ Grössen x_i, y_i, z_i und der $3n$ Grössen a_i, b_i, c_i, welche gleichzeitig den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]=U,$$
$$\frac{\partial S}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right]=U_0$$

Genüge leistet. Hamilton beweist auch umgekehrt, dass, wenn die Function S dieser Definition gemäss bestimmt ist, die $3n$ endlichen Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial a_i}=-m_i a_i',$$
$$\frac{\partial S}{\partial b_i}=-m_i b_i',$$
$$\frac{\partial S}{\partial c_i}=-m_i c_i'$$

nach einmaliger Differentiation die $3n$ Integrale erster Ordnung

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=m_i x_i',$$
$$\frac{\partial S}{\partial y_i}=m_i y_i',$$
$$\frac{\partial S}{\partial z_i}=m_i z_i'$$

geben und nach abermaliger Differentiation die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$m_i\frac{dx_i'}{dt}=m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},$$
$$m_i\frac{dy_i'}{dt}=m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},$$
$$m_i\frac{dz_i'}{dt}=m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

so dass jene $3n$ Gleichungen die vollständigen endlichen Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung sind.

Führt man statt der Variabeln t die Grösse H und statt der charakteristischen Function S die charakteristische Function V ein, so definirt Hamilton ebenso die Function V als eine solche Function der Grössen H, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, welche gleichzeitig den partiellen Differentialgleichungen

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right]=U+H,$$
$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial b_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial c_i}\right)^2\right]=U_0+H$$

Genüge leistet, und beweist, dass, wenn umgekehrt die Function V dieser Definition gemäss bestimmt ist, die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial a_i}=-m_i a_i',$$
$$\frac{\partial V}{\partial b_i}=-m_i b_i',$$
$$\frac{\partial V}{\partial c_i}=-m_i c_i'$$

die endlichen Integrale der Bewegung sind, aus deren Differentiation die vorgelegten $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung, sowie auch die oben angegebenen $3n$ Zwischenintegrale folgen. Bei dieser letzten Betrachtung ist zu bemerken, dass die $3n$ Constanten a_i', b_i', c_i' nicht, wie in den für die charakteristische Function S gegebenen Formeln, alle ganz willkürlich sind, sondern dass zwischen ihnen eine Bedingungsgleichung stattfindet, indem sie der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'a_i'+b_i'b_i'+c_i'c_i')=U_0+H$$

Genüge leisten müssen. Die Grösse H wird hier bei der Integration der beiden vorgelegten Differentialgleichungen als eine Constante betrachtet, weil in ihnen kein nach H genommener Differentialquotient vorkommt. Wenn U die Zeit t auch explicite enthält, so gilt nur jedesmal die erste der beiden angegebenen partiellen Differentialgleichungen. Ausserdem bemerke ich noch, dass man in diesem Falle in der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right]=U+H$$

für t in die Kräftefunction U den Ausdruck

$$t=\frac{\partial V}{\partial H}$$

zu substituiren hat, so dass in diesem Falle in der partiellen Differentialgleichung H als eine der unabhängigen Variabeln zu betrachten ist und daher, wenn die Zeit t in der Kräftefunction explicite vorkommt, die Differentialgleichung eine Variable mehr enthält. Ich werde im Folgenden, wenn ich mich der Function V bediene, immer voraussetzen, dass U die Grösse t nicht explicite enthalte, also der Satz von der lebendigen Kraft gilt, und in diesem Falle statt der Grösse H immer ihren constanten Werth h setzen.

Wenn in dem letztern Fall U eine homogene Function von der Dimension ε ist, so beweist man leicht, dass $h^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon}\right)}.V$ nur von den Verhältnissen der Grössen $h^{\frac{1}{\varepsilon}}$, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i abhängt. Hierdurch kann man alsdann die Bestimmung von V auf den Fall reduciren, für welchen $h = 1$.

§. 6. Allgemeineres System von Integralgleichungen. Es genügt, die charakteristische Function der *ersten* partiellen Differentialgleichung zu unterwerfen.

Wenn man es irgendwie unternimmt, die charakteristische Function nach der zuletzt gegebenen Definition aufzusuchen, so fällt es lästig, dass man dabei, wie Hamilton verlangt, gleichzeitig auf zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung Rücksicht nehmen soll. Betrachtet man aber die Analysis, vermittelst welcher Hamilton aus den von ihm aufgestellten $3n$ endlichen Gleichungen die $3n$ Zwischenintegrale und die Differentialgleichungen der Bewegung selber ableitet, so sieht man, dass er dazu auf keine Weise seine zweite partielle Differentialgleichung gebraucht. Man kann also von derselben gänzlich absehen und dann das Hamilton'sche Theorem allgemeiner und zweckmässiger folgendermassen aussprechen:

Theorem I.

Es sei S eine Function der Zeit t und der $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i mit $3n$ willkürlichen Constanten α_1, α_2, α_3, ..., α_{3n}, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U$$

Genüge leistet, wo U irgend eine gegebene Function von t und den $3n$ Grössen x_i, y_i, z_i ist; es seien ferner die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems von n materiellen Punkten:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$
$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$
$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

so werden die $3n$ vollständigen endlichen Integrale der Bewegung:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1},$$
$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2},$$
$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3},$$
$$\cdots\cdots,$$
$$\beta_{3n} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}},$$

wo β_1, β_2, β_3, ..., β_{3n} $3n$ neue willkürliche Constanten sind; es werden ferner die $3n$ Integrale erster Ordnung:

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x_i},$$
$$m_i \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y_i},$$
$$m_i \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial z_i},$$

in welchen Formeln dem Index i seine Werthe 1, 2, 3, 4, ..., *n zu geben sind.*

Es ist noch zu bemerken, dass im vorstehenden Theorem von den $3n$ willkürlichen Constanten, welche die Function S enthalten soll, keine durch blosse Addition mit S verbunden sein darf.

Wir sehen aus dem vorstehenden Theorem, dass auch bei der allgemeineren Definition, die in demselben von der Function S gegeben wird, dieser die charakteristische Eigenschaft erhalten bleibt, durch ihre partiellen Differentialquotienten unmittelbar die Integralgleichungen der Bewegung, nämlich die $3n$ endlichen Integrale und die $3n$ Integrale erster Ordnung, zu geben. Nur werden im Allgemeinen die $3n$ willkürlichen Constanten α_1, α_2, α_3, ..., α_{3n} nicht die Anfangswerthe der Coordinaten x_i, y_i, z_i, noch die $3n$ willkürlichen

Constanten β_1, β_2, β_3, $\ldots$, β_{3n} die Anfangswerthe der Grössen $-m_i\frac{dx_i}{dt}$, $-m_i\frac{dy_i}{dt}$, $-m_i\frac{dz_i}{dt}$ sein. Dieses ist aber keineswegs ein Nachtheil, da gerade der Umstand, dass nach der Hamilton'schen Methode Alles durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten ausgedrückt werden soll, die Integralgleichungen unnöthig complicirt. Denn in der Regel ist das Problem, die Grösse S durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten und die Zwischenzeit t oder die Constante h auszudrücken, nicht ein vollkommen bestimmtes, sondern lässt mehrere Lösungen zu, wie z. B. bei der elliptischen Bewegung zwei Lösungen des Problems möglich sind, und es wird gerade durch die Wahl der genannten Grössen in die Integralgleichungen eine Irrationalität hineingebracht, die dem Problem selber fremd ist und bei der Wahl anderer Bestimmungsstücke verschwindet. Uebrigens kann man, so oft eine solche Form der Integralgleichungen gefordert wird, sie aus jeder anderen herstellen, und es kommt zunächst nur darauf an, irgend eine möglichst einfache aufzufinden, weshalb es vortheilhaft ist, der charakteristischen Function einen möglichst grossen Spielraum zu lassen. Es ist möglich, dass Hamilton gerade dadurch, dass er unnöthiger Weise immer gleichzeitig *zwei* partielle Differentialgleichungen erster Ordnung ins Auge fasste, verhindert worden ist, auf sein Theorem diejenigen Vorschriften anzuwenden, welche Lagrange in seiner merkwürdigen Abhandlung in den „*Berliner Memoiren*“ von 1772 für die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung angiebt, und welche, wenngleich sie sich nur auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen *drei* Variabeln beziehen, selbst in dieser Beschränkung neue merkwürdige und höchst wichtige Theoreme der Mechanik geben, die den Mathematikern bisher entgangen waren. Ein solches Theorem habe ich vor einiger Zeit der Pariser Akademie der Wissenschaften mitgetheilt*). Diese Betrachtungen erlangen aber dadurch noch eine weit grössere Wichtigkeit, dass es mir seitdem gelungen ist, die Lagrange'sche Methode auf jede Zahl von Variabeln auszudehnen, welche Ausdehnung ich an einem anderen Orte bekannt machen werde.

Wenn der Satz von der lebendigen Kraft gilt, so lässt sich das Hamilton'sche Theorem noch bedeutend vereinfachen, indem man die Function V als charakteristische Function einführt, die man dann so bestimmen kann,

*) Vgl. Vorlesungen über Dynamik, p. 176 der neuen Ausgabe.

dass sie eine Grösse weniger enthält als nach der Hamilton'schen Definition. Man kann nämlich in diesem Falle folgendes Theorem aufstellen:

Theorem II.

„*Es sei V eine Function der $3n$ rechtwinkligen Coordinaten x_i, y_i, z_i mit $3n-1$ willkürlichen Constanten α_1, α_2, $\ldots$, α_{3n-1}, welche der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U+h$$

Genüge leistet, wo U eine gegebene Function der Coordinaten und h eine Constante ist; es seien ferner die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems materieller Punkte, deren Massen mit m_1, m_2, $\ldots$, m_n bezeichnet sind,

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$
$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$
$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i};$$

so werden die $3n-1$ endlichen Gleichungen zwischen den $3n$ Coordinaten mit $6n-1$ willkürlichen Constanten h, α_1, α_2, $\ldots$, α_{3n-1}, β_1, β_2, $\ldots$, β_{3n-1} durch die Formeln gegeben:

$$\beta_1 = \frac{\partial V}{\partial \alpha_1},$$
$$\beta_2 = \frac{\partial V}{\partial \alpha_2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_{3n-1} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n-1}};$$

die Zeit t erhält man durch die Coordinaten und $3n+1$ willkürliche Constanten ausgedrückt vermittelst der Gleichung:

$$t+\tau = \frac{\partial V}{\partial h},$$

wo τ eine neue willkürliche Constante ist; endlich werden die $3n$ Integrale erster Ordnung:

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i},$$
$$m_i \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y_i},$$
$$m_i \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z_i},$$

welche Gleichungen nur die $3n$ willkürlichen Constanten h, α_1, α_2, ..., α_{3n-1} enthalten; dabei ist zu bemerken, dass von den $3n-1$ willkürlichen Constanten α_1, α_2, ..., α_{3n-1} keine mit V durch eine blosse Addition verbunden sein darf."

Ich werde im Folgenden im Allgemeinen unter S und V die charakteristischen Functionen verstehen, wie sie in den beiden von mir aufgestellten Theoremen durch je *eine* partielle Differentialgleichung definirt worden sind; in dem besonderen Falle, wenn sie die von Hamilton angegebenen bestimmten Integrale bedeuten und durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten ausgedrückt werden, werde ich ausdrücklich bemerken, dass es die Hamilton'schen Functionen sind.

Bei den Anwendungen der beiden aufgestellten Theoreme bedient man sich des ersten Theorems oder der charakteristischen Function S mit Vortheil, wenn die Kräftefunction die Zeit auch neben den Coordinaten explicite enthält; dagegen des zweiten Theorems oder der charakteristischen Function V in dem insgemein vorkommenden Falle, wenn die Kräftefunction eine blosse Function der Coordinaten ist oder der Satz von der lebendigen Kraft gilt.

§. 7. Ueber den Zusammenhang verschiedener Systeme von Integralgleichungen, welche sich aus verschiedenen vollständigen Lösungen der zur Bestimmung der Functionen S, V dienenden partiellen Differentialgleichungen ergeben.

Die charakteristische Function S oder V kann nach der verallgemeinerten Definition derselben, die ich in den Theoremen I und II gegeben habe, sehr mannigfache Formen annehmen. Man kann aber a priori wissen, dass jede Form immer auf dieselben vollständigen Integralgleichungen der Bewegung führen muss. Denn die aus der charakteristischen Function abgeleiteten Integralgleichungen genügen den Differentialgleichungen der Bewegung, und man kann dasselbe System von Differentialgleichungen nicht auf zwei Arten vollständig integriren, die sich nicht auf einander zurückführen lassen. Ich will aber, um über diesen Gegenstand grösseres Licht zu verbreiten, aus der Natur der verschiedenen Lösungen selbst, welche eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung haben kann, nachweisen, dass alle immer dieselben Differentialgleichungen der Bewegung geben.

Ist zur Bestimmung einer unbekannten Function w der m unabhängigen Variabeln y_1, y_2, y_3, ..., y_m eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben, so ist im Allgemeinen eine *vollständige* Lösung derselben jeder Ausdruck von w mit m willkürlichen Constanten, welcher der gegebenen partiellen Differentialgleichung Genüge leistet. Aus irgend einer solchen gegebenen vollständigen Lösung kann man die allgemeinste Lösung ableiten, deren die partielle Differentialgleichung fähig ist, und welche eine willkürliche Function von $m-1$ Ausdrücken involvirt. Sind nämlich α_1, α_2, ..., α_m die m willkürlichen Constanten, und ist

$$w = f(y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

eine gegebene vollständige Lösung, so setze man eine der m willkürlichen Constanten, z. B. α_m, als eine willkürliche Function der $m-1$ übrigen α_1, α_2, ..., α_{m-1}, und nehme *unter dieser Voraussetzung* die partiellen Differentialquotienten von f nach α_1, α_2, ..., α_{m-1}; hiernach erhält man den allgemeinsten Ausdruck von w, indem man aus dem Ausdrucke

$$w = f$$

die $m-1$ Grössen α_1, α_2, ..., α_{m-1} vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}} = 0$$

eliminirt. Nachdem man aus der einen vollständigen Lösung auf diese Weise die allgemeinste Lösung abgeleitet hat, kann man aus dieser wieder unzählige andere vollständige Lösungen ableiten, indem man die eingeführte willkürliche Function auf irgend eine Weise so bestimmt, dass in dieselbe wieder m willkürliche Constanten eingehen.

Die partiellen Differentialgleichungen, durch welche die charakteristischen Functionen definirt worden sind, enthalten nicht die gesuchte Function selber, sondern nur ihre partiellen Differentialquotienten. Hieraus folgt, dass man zu einem gefundenen Ausdrucke der Function, welche der partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, immer noch eine willkürliche Constante addiren kann. Von dieser Constante ist bei der Definition der Functionen S und V abstrahirt worden, so dass man zu ihrem Ausdruck eine willkürliche Constante addiren muss, damit er eine vollständige Lösung giebt. Dem eben Gesagten zufolge will ich einer vollständigen Lösung der Differentialgleichung, durch welche w definirt wird, wenn dieselbe w nicht selber enthält, die Form geben:

$$w = f(y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1})+\alpha.$$

Um aus dieser Lösung auf die allgemeinste Art irgend eine andere vollständige Lösung abzuleiten, setze ich

$$\alpha = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1})+\mu,$$

wo μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_{m-1}, μ neue m willkürliche Constanten sind und ψ eine gänzlich willkürliche Function bedeutet, und eliminire α_1, α_2, $\ldots$, α_{m-1} aus dem Ausdrucke

$$w = f(y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1})+\alpha$$

vermittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} &= 0,\\
\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} &= 0,\\
\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} &= 0,\\
\cdots\cdots & \\
\frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m-1}} &= 0,
\end{aligned}$$

wodurch man eine andere vollständige Lösung erhält, die statt der willkürlichen Constanten α_1, α_2, $\ldots$, α_{m-1}, α die willkürlichen Constanten μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_{m-1}, μ enthält. Es ist nun zu beweisen, dass, wenn man vermittelst der gegebenen vollständigen Lösung die $m-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= \beta_1,\\
\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} &= \beta_2,\\
\cdots & \\
\frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}} &= \beta_{m-1}
\end{aligned}$$

bildet, wo α_1, α_2, $\ldots$, α_{m-1} und β_1, β_2, $\ldots$, β_{m-1} willkürliche Constanten sind, und vermittelst der anderen vollständigen Lösung auf dieselbe Weise die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \mu_1} &= \nu_1,\\
\frac{\partial w}{\partial \mu_2} &= \nu_2,\\
\cdots & \\
\frac{\partial w}{\partial \mu_{m-1}} &= \nu_{m-1},
\end{aligned}$$

wo μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_{m-1} und ν_1, ν_2, $\ldots$, ν_{m-1} ebenfalls willkürliche Constanten sind, beide Systeme von Gleichungen auf einander zurückkommen.

Zu diesem Zwecke bemerke ich, dass man, weil die nach α_1, α_2, $\ldots$, α_{m-1} genommenen partiellen Differentialquotienten von

$$w = f+\psi$$

identisch gleich Null sind, die partiellen Differentialquotienten derselben Function, nach μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_{m-1} genommen, nur aus der Differentiation von ψ hervorgehen, und zwar nur insofern ψ diese Constanten ausser in α_1, α_2, $\ldots$, α_{m-1} noch explicite enthält.

Man hat daher

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \mu_1} &= \frac{\partial \psi}{\partial \mu_1},\\
\frac{\partial w}{\partial \mu_2} &= \frac{\partial \psi}{\partial \mu_2},\\
\cdots & \\
\frac{\partial w}{\partial \mu_{m-1}} &= \frac{\partial \psi}{\partial \mu_{m-1}}.
\end{aligned}$$

Setzt man hier die Ausdrücke linker Hand willkürlichen Constanten ν_1, ν_2, $\ldots$, ν_{m-1} gleich, so werden auch die Ausdrücke rechter Hand willkürlichen Constanten gleich, so dass man $m-1$ Gleichungen zwischen den $m-1$ Grössen α_1, α_2, $\ldots$, α_{m-1} und willkürlichen Constanten hat, wodurch diese Grössen α_1, α_2, $\ldots$, α_{m-1} selbst willkürlichen Constanten gleich werden. Es werden daher auch die Ausdrücke

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1},\quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m-1}}$$

willkürlichen Constanten gleich, und daher auch nach den obigen Gleichungen die Ausdrücke

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1},\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}},$$

was zu beweisen war. Die Willkürlichkeit der Constanten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$ und $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m-1}$ reicht hier hin, um die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ und $\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}}$ ebenfalls ganz willkürlichen Constanten gleich zu machen.

§. 8. Entwickelung der charakteristischen Function für das Problem der Planetenbewegung aus der partiellen Differentialgleichung.

Um ein Beispiel zu geben, wie es in besonderen Fällen möglich ist, durch directe Betrachtung der partiellen Differentialgleichung die charakteristische Function zu finden, will ich den oben für die elliptische Bewegung eines Planeten gegebenen Ausdruck von V aus der partiellen Differentialgleichung ableiten, durch welche V für diesen Fall definirt wird. Setzt man statt der Constante h wieder $-\frac{k^2}{2a}$, so wird die für die elliptische Bewegung zu integrirende partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = k^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right).$$

Ich setze voraus, man wisse, V könne durch $r+r_0$ und durch ϱ ausgedrückt werden, oder mache diese Annahme, welche sich durch den Erfolg rechtfertigt; so reicht dieses hin, den Ausdruck von V aus der partiellen Differentialgleichung selber zu finden. Da nämlich

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$\varrho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

so hat man

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\partial V}{\partial \varrho}\cdot\frac{x-x_0}{\varrho},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial V}{\partial \varrho}\cdot\frac{y-y_0}{\varrho},$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{z}{r}+\frac{\partial V}{\partial \varrho}\cdot\frac{z-z_0}{\varrho},$$

und daher, da

$$2x(x-x_0)+2y(y-y_0)+2z(z-z_0) = \varrho^2+r^2-r_0^2,$$

wenn man die vorstehenden Gleichungen quadrirt und addirt,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{\varrho^2+r^2-r_0^2}{r\varrho}\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2.$$

Man schafft bekanntlich den mittelsten Coefficienten fort, wenn man statt r und ϱ ihre Summe und Differenz einführt. Da der Annahme nach r und r_0 in dem Ausdruck von V mit einander verbunden vorkommen, so setze man:

$$r+r_0+\varrho = \sigma,$$
$$r+r_0-\varrho = \sigma';$$

dann hat man

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}+\frac{\partial V}{\partial \sigma'},$$
$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}-\frac{\partial V}{\partial \sigma'}$$

und daher:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{\varrho^2+r^2-r_0^2}{r\varrho}\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2$$
$$= \frac{(\varrho+r)^2-r_0^2}{r\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2+\frac{r_0^2-(r-\varrho)^2}{r\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2$$
$$= \frac{1}{r\varrho}\left[\sigma(\sigma-2r_0)\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2+\sigma'(2r_0-\sigma')\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2\right].$$

Multiplicirt man daher mit $2r\varrho$, so wird die gegebene partielle Differentialgleichung:

$$\sigma(\sigma-2r_0)\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2+\sigma'(2r_0-\sigma')\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2$$
$$= k^2\varrho\left(2-\frac{r}{a}\right) = k^2(\sigma-\sigma')-\frac{k^2}{4a}(\sigma^2-\sigma'^2)+\frac{k^2}{2a}(\sigma-\sigma')r_0.$$

Soll V eine blosse Function von σ, σ' sein, die nicht ausserdem noch r_0 enthält, so müssen in der vorstehenden Differentialgleichung die in r_0 multiplicirten Glieder besonders einander gleich sein. Die Differentialgleichung muss daher in die beiden

$$\sigma^2\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2-\sigma'^2\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2 = k^2\frac{(\sigma-\sigma')}{4a}(4a-\sigma-\sigma'),$$
$$\sigma\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2-\sigma'\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2 = -k^2\frac{(\sigma-\sigma')}{4a}$$

zerfallen, woraus sich

$$\sigma\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2 = k^2\cdot\frac{4a-\sigma}{4a}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial \sigma} = k\sqrt{\frac{4a-\sigma}{4a\sigma}},$$
$$\sigma'\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2 = k^2\cdot\frac{4a-\sigma'}{4a}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial \sigma'} = -k\sqrt{\frac{4a-\sigma'}{4a\sigma'}}$$

ergiebt, wo ich in der zweiten Gleichung die Wurzelgrösse negativ nehme, um eine Uebereinstimmung mit den oben aufgefundenen Formeln zu erhalten.

Hier trifft es sich nun, worin die Rechtfertigung der gemachten Annahme liegt, dass beide Gleichungen gleichzeitig integrirt werden können, indem die eine bloss σ, die andere bloss σ' enthält. Man erhält nämlich:

$$V = k\int\sqrt{\frac{4a-\sigma}{4a\sigma}}\,d\sigma - k\int\sqrt{\frac{4a-\sigma'}{4a\sigma'}}\,d\sigma',$$

welche Gleichung man, wenn man von der hinzuzufügenden Constante abstrahirt, auch so darstellen kann:

$$V = k\int_{\sigma'}^{\sigma}\sqrt{\frac{4a-\sigma}{4a\sigma}}\,d\sigma.$$

Setzt man, um die Integration auszuführen,

$$\sin^2\varphi = \frac{\sigma}{4a},$$

so erhält man:

$$k\int_0\sqrt{\frac{4a-\sigma}{4a\sigma}}\,d\sigma = 4k\sqrt{a}\int_0\cos^2\varphi\,d\varphi = k\sqrt{a}[2\varphi+\sin 2\varphi].$$

Nennt man daher ε und ε' die Grenzwerthe von 2φ, so dass

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sigma}{4a} = \frac{r+r_0+\varrho}{4a},$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\sigma'}{4a} = \frac{r+r_0-\varrho}{4a},$$

so ergiebt sich für V der Werth:

$$V = k\sqrt{a}[\varepsilon+\sin\varepsilon-(\varepsilon'+\sin\varepsilon')],$$

welches der oben gefundene Ausdruck ist, aus dem man dann alle Integralgleichungen der elliptischen Bewegung ableiten kann. Wir sehen so, dass man durch die alleinige Annahme, V sei eine Function bloss von $r+r_0$ und ϱ, auf ganz directem Wege V aus der partiellen Differentialgleichung bestimmen kann. Wenn man die beiden Quadratwurzeln, die ich mit entgegengesetztem Zeichen genommen habe, mit demselben Zeichen nimmt, erhält man die zweite Ellipse, welche dem Problem genügt. Man erhält bekanntlich die beiden Ellipsen, welche durch dieselben beiden Punkte gehen, dieselbe Länge der grossen Axe $2a$ und den einen Brennpunkt gemein haben, wenn man als ihre zweiten Brennpunkte die beiden Durchschnittspunkte der Kreise nimmt, die man aus dem Anfangspunkt (d. h. dem Punkt, dessen Radius Vector r_0 ist)

mit dem Halbmesser $2a-r_0$ und aus dem Endpunkt (dessen Radius Vector r ist) mit dem Halbmesser $2a-r$ beschreibt.

§. 9. Andere Methoden, welche bei beliebigem Anziehungsgesetz brauchbar bleiben.

Die im Vorigen gebrauchte Methode hört für ein anderes als das Newton'sche Anziehungsgesetz auf anwendbar zu sein. Man kann sich aber für den Fall, wo das Gesetz der Anziehung durch irgend eine beliebige Function der Entfernung ausgedrückt wird, folgender Methode bedienen.

Es sei die anziehende Kraft ausgedrückt durch

$$-\frac{\partial f(r)}{\partial r},$$

so wird $f(r)$ die Kräftefunction, und die zu integrirende Differentialgleichung ist:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 2f(r)+2h.$$

Führt man Polarcoordinaten ein, indem man

$$x = r\cos\eta,$$
$$y = r\sin\eta\cos\vartheta,$$
$$z = r\sin\eta\sin\vartheta$$

setzt, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2\right] = 2f(r)+2h.$$

Von dem Ausdruck

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2$$

ist bekannt, dass er bei einer Drehung der rechtwinkligen Coordinatenaxen um den Anfangspunkt ungeändert bleibt. Da er nun für $V=\eta$ gleich 1 wird, so erhält er denselben Werth auch, wenn man allgemeiner für V den Winkel setzt, den der Radius Vector mit irgend einer constanten Linie bildet. Bedeuten $\cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$ die Cosinus der Winkel, welche die constante Linie mit den Coordinatenaxen bildet, so wird bekanntlich der Winkel, den sie mit dem Radius Vector bildet:

$$\text{arc.}\cos[\cos\alpha\cos\eta+\sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)];$$

und es ist daher, wenn man

$$w = \text{arc.}\cos[\cos\alpha\cos\eta+\sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)]$$

setzt,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)+\frac{1}{\sin^2\eta}\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)^2 = 1,$$

wovon man sich leicht durch Ausführung der Rechnung überzeugt. Setzt man daher

$$V = bw+R,$$

wo b eine neue willkürliche Constante und R eine blosse Function von r bedeutet, so verwandelt sich die vorgelegte partielle Differentialgleichung in folgende:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2\right]$$
$$=\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2+\frac{b^2}{r^2} = 2f(r)+2h,$$

woraus sich

$$R = \int\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr$$

ergiebt. Man erhält daher für die charakteristische Function V den Ausdruck:

$$V = b\,\mathrm{arc.cos}[\cos\alpha\cos\eta+\sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)]+\int\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr,$$

in welchem b, α, β, h willkürliche Constanten sind.

Nach dem Theorem II. ist es für unseren Fall, wo $n = 1$, nur nöthig, dass die charakteristische Function V ausser h noch 2 willkürliche Constanten enthält. Da der Ausdruck von V, welchen wir gefunden haben, ausser h *drei* willkürliche Constanten enthält, so kann man einer von ihnen einen bestimmten Werth beilegen, oder allgemeiner, sie irgendwie durch die beiden anderen ausdrücken. Man kann auch, wenn unter c irgend eine der Constanten b, α, β verstanden wird, diese vermittelst der Gleichung $\frac{\partial V}{\partial c} = 0$ eliminiren. Man kann aber auch alle drei Constanten beibehalten und, um die endlichen Integralgleichungen des Problems zu haben, die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial b}$, $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial V}{\partial \beta}$ drei neuen Constanten (b', α', β') gleich setzen. In den so sich ergebenden, zur Bestimmung der Bahn des Punktes dienenden Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial b} = w-b\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}} = b',$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{b[\sin\alpha\cos\eta-\cos\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)]}{\sin w} = \alpha',$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{-b\sin\alpha\sin\eta\sin(\vartheta-\beta)}{\sin w} = \beta',$$

wo w durch die Gleichung

$$\cos w = \cos\alpha\cos\eta+\sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)$$

bestimmt ist, sind dann aber die eingeführten sechs Constanten nicht unabhängig von einander, sondern es findet unter ihnen, in Folge der identischen Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\right)^2 = b^2,$$

die Relation

$$\alpha'\alpha'+\frac{\beta'\beta'}{\sin^2\alpha} = b^2$$

statt, und es vertreten demnach die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta'$$

nur die Stelle von einer.

Die Zeit erhält man durch die Gleichung:

$$t+\tau = \frac{\partial V}{\partial h} = \int\frac{dr}{\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}}.$$

Die Integrale erster Ordnung werden:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dx}{dt} = \frac{-b(\cos\alpha-\cos\eta\cos w)}{r\sin w}+\cos\eta\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dy}{dt} = \frac{-b(\sin\alpha\cos\beta-\sin\eta\cos\vartheta\cos w)}{r\sin w}+\sin\eta\cos\vartheta\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dz}{dt} = \frac{-b(\sin\alpha\sin\beta-\sin\eta\sin\vartheta\cos w)}{r\sin w}+\sin\eta\sin\vartheta\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}.$$

Führt man statt der Differentiale der rechtwinkligen Coordinaten die Differentiale der Polarcoordinaten ein, so erhält man hieraus:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}} = \frac{\partial V}{\partial r},$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{b[\cos\alpha\sin\eta-\sin\alpha\cos\eta\cos(\vartheta-\beta)]}{r^2\sin w} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\eta},$$
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{b\sin\alpha\sin(\vartheta-\beta)}{r^2\sin\eta\sin w} = \frac{1}{r^2\sin^2\eta}\frac{\partial V}{\partial\vartheta}.$$

Ich bemerke noch, dass die hier angewandte Analysis sich auf den allgemeineren Fall ausdehnen lässt, wo man statt dreier Variabeln eine beliebige Anzahl derselben hat und die partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = f(r)$$

gegeben ist, in welcher

$$r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

Man erhält dann

$$V = bw+\int\sqrt{f(r)-\frac{b^2}{r^2}}\cdot dr,$$

wo

$$\cos w = \frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2}.r}$$

und b, α_1, α_2, ..., α_n willkürliche Constanten sind. Hamilton giebt in dem Fall eines beliebigen Anziehungsgesetzes seine charakteristische Function für die Bewegung beider Körper um ihren Schwerpunkt. Wenn man sie, was leicht geschieht, dahin vereinfacht, dass sie sich auf die relative Bewegung des einen um den anderen bezieht, so wird man noch eine wesentliche Differenz zwischen derselben und der hier gefundenen Function V bemerken. Man erhält aus dieser letzteren die complicirtere Hamilton'sche Function, indem man b vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial b} = w-\int\frac{bdr}{r^2\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}} = 0$$

eliminirt, für die constante Linie die Anfangsposition des Radius Vector nimmt und die Integration von r_0 anfangen lässt.

Man kann endlich zur Integration der vorliegenden partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)^2 = 2f(r)+2h$$

auch noch folgenden Weg einschlagen. Es ist bekannt, *dass man jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher die gesuchte Function nicht selber vorkommt, in eine andere verwandeln kann, in welcher die nach mehreren Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten durch neue Variabele, und jene Variabeln durch die nach den neuen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten ersetzt werden, die übrigen Variabeln unverändert bleiben, die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten aber sämmtlich das Zeichen ändern.* Ist nämlich x eine Function von x_1, x_2, ..., x_m, und setzt man

$$dx = p_1dx_1+p_2dx_2+\cdots+p_mdx_m,$$
$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k-x = y,$$

so hat man

$$dy = x_1dp_1+x_2dp_2+\cdots+x_kdp_k$$
$$-[p_{k+1}dx_{k+1}+p_{k+2}dx_{k+2}+\cdots+p_mdx_m].$$

Führt man daher p_1, p_2, ..., p_k statt der Grössen x_1, x_2, ..., x_k als Variabele ein und betrachtet y statt x als gesuchte Function, so erhält man:

$$x_1 = \frac{\partial y}{\partial p_1},\quad x_2 = \frac{\partial y}{\partial p_2},\quad \ldots,\quad x_k = \frac{\partial y}{\partial p_k},$$
$$p_{k+1} = -\frac{\partial y}{\partial x_{k+1}},\quad p_{k+2} = -\frac{\partial y}{\partial x_{k+2}},\quad \ldots,\quad p_m = -\frac{\partial y}{\partial x_m}.$$

Hat man nun für x eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher x nicht selber vorkommt, d. h. eine Gleichung zwischen x_1, x_2, ..., x_m und p_1, p_2, ..., p_m, so ergiebt sich aus derselben durch die angegebenen Substitutionen für x_1, x_2, ..., x_k, p_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_m eine Gleichung zwischen p_1, p_2, ..., p_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_m und $\frac{\partial y}{\partial p_1}$, $\frac{\partial y}{\partial p_2}$, ..., $\frac{\partial y}{\partial p_k}$, $\frac{\partial y}{\partial x_{k+1}}$, $\frac{\partial y}{\partial x_{k+2}}$, ..., $\frac{\partial y}{\partial x_m}$, durch welche y als Function von p_1, p_2, ..., p_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_m definirt wird.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass man jede partielle Differentialgleichung, in welcher die unbekannte Function und ausserdem mehrere Variabele nicht selber vorkommen, sondern nur die nach den letzteren genommenen partiellen Differentialquotienten, in eine andere verwandeln kann, in welcher die nach einer gleichen Anzahl von Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten fehlen. Wenn aber in einer partiellen Differentialgleichung die nach einigen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten fehlen, so sind diese Variabeln bei der Integration der Gleichung nur als Constanten zu betrachten, da bei Bildung der Differentialgleichung nach ihnen nicht differentiirt worden ist. *Hierdurch kann eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher ausser der unbekannten Function auch mehrere Variabele nicht selber vorkommen, sondern nur die nach den letzteren genommenen partiellen Differentialquotienten, immer in eine andere verwandelt werden, in welcher die Zahl der unabhängigen Variabeln um eine gleiche Anzahl geringer ist.*

Durch das vorstehende Verfahren ist oben die partielle Differentialgleichung für S, wenn die Kräftefunction nicht t explicite enthält, in die andere für V transformirt worden, welche eine Variabele, t, weniger enthält. Man kann auch leicht beweisen, dass jedesmal, wenn das System sich um eine Axe frei bewegen kann, sich durch dieselbe Methode die Zahl der Variabeln noch um eine vermindern lässt. Wendet man die Methode auf das vorliegende Beispiel an, so hat man

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \gamma, \quad W = (\vartheta+\beta)\frac{\partial V}{\partial \vartheta} - V$$

zu setzen, und γ statt ϑ in W als Variabele einzuführen. Man erhält dann:

$$\vartheta+\beta = \frac{\partial W}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial W}{\partial r}, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = -\frac{\partial W}{\partial \eta},$$

wodurch sich die vorgelegte partielle Differentialgleichung in folgende verwandelt:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{r^2 \sin^2\eta} = 2f(r)+2h,$$

bei deren Integration γ als eine Constante betrachtet wird.

Man integrirt diese Gleichung, indem man sie in die beiden folgenden zerfällt:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = 2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2},$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 = b^2-\frac{\gamma^2}{\sin^2\eta},$$

in welchen b eine neue willkürliche Constante bedeutet. Man erhält hierdurch den vollständigen Werth von W, wenn man

$$W = -\int\left[2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}dr + \int\left[b^2-\frac{\gamma^2}{\sin^2\eta}\right]^{\frac{1}{2}}d\eta$$

setzt. Das Zeichen der ersten Wurzelgrösse ist hier negativ genommen, um die aus der Form der Function W abzuleitenden Integralgleichungen mit den früher gefundenen in Uebereinstimmung zu setzen.

Die vollständigen Integralgleichungen der Bewegung werden hiernach:

$$\frac{\partial V}{\partial b} = -\frac{\partial W}{\partial b} = b',$$
$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = \vartheta+\beta, \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta',$$
$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{dr}{dt},$$
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \eta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{d\eta}{dt},$$
$$\frac{1}{r^2\sin^2\eta}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{\gamma}{r^2\sin^2\eta} = \frac{d\vartheta}{dt},$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = -\frac{\partial W}{\partial h} = t+\tau;$$

und diese verwandeln sich, wenn man den für W gefundenen Werth substituirt, in folgende:

$$-b\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}} - b\int\frac{d\eta}{\sqrt{b^2-\frac{\gamma^2}{\sin^2\eta}}} = b',$$
$$-\gamma\int\frac{d\eta}{\sin^2\eta\sqrt{b^2-\frac{\gamma^2}{\sin^2\eta}}} = \vartheta+\beta,$$
$$\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}} = \frac{dr}{dt},$$
$$-\frac{1}{r^2}\sqrt{b^2-\frac{\gamma^2}{\sin^2\eta}} = \frac{d\eta}{dt},$$
$$\frac{\gamma}{r^2\sin^2\eta} = \frac{d\vartheta}{dt},$$
$$\int\frac{dr}{\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}} = t+\tau.$$

Da

$$V = \gamma\frac{\partial W}{\partial \gamma} - W = \gamma(\vartheta+\beta) - W$$

ist, und β in W nur insofern enthalten ist, als es in γ vorkommt, welches durch die Gleichung

$$\vartheta+\beta = \frac{\partial W}{\partial \gamma}$$

bestimmt wird, so erhält man

$$\beta' = \frac{\partial V}{\partial \beta} = \gamma,$$

und dies zeigt, dass in den vorstehenden Formeln γ als eine Constante angesehen werden kann, so dass in denselben b, b', β, γ, h, τ die 6 willkürlichen Constanten werden.

Der für ϑ gefundene Ausdruck giebt:

$$\vartheta + \beta = \int \frac{\gamma d(\operatorname{cotg} \eta)}{\sqrt{b^2 - \gamma^2 - \gamma^2 \operatorname{cotg}^2 \eta}}$$

oder, wenn wir

$$\gamma = \beta' = -b \cos i$$

setzen,

$$\vartheta + \beta = -\int \frac{d(\operatorname{cotg} \eta)}{\sqrt{tg^2 i - \operatorname{cotg}^2 \eta}} = \text{arc.cos}[\operatorname{cotg} i \operatorname{cotg} \eta]$$

oder

$$\cos i \cos \eta - \sin i . \sin \eta . \cos(\vartheta + \beta) = 0,$$

wo i die Neigung und β die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn bedeutet.

In der im Anfange dieses Paragraphen (S. 253) gegebenen Form der Integralgleichungen wird, wenn man $\beta = 0$ setzt, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut:

$$\sin \alpha \cos \eta - \cos \alpha \sin \eta \cos \vartheta = -\frac{\alpha'}{\beta'} \sin \alpha \sin \eta \sin \vartheta,$$

wo man

$$\alpha'^2 + \frac{\beta'^2}{\sin^2 \alpha} = b^2$$

hatte. Vergleicht man diese Formel mit der vorhin gefundenen

$$\cos i \cos \eta - \sin i \sin \eta \cos(\vartheta + \beta) = 0,$$

so erhält man

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} i \cos \beta, \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = \operatorname{tg} i \sin \beta$$

und daher

$$\frac{b^2}{\beta'^2} = \frac{\alpha'^2}{\beta'^2} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 i}.$$

Da der Werth von $\frac{dr}{dt}$ in beiden Formen der Integralgleichungen derselbe ist, so sieht man, dass die Constante b und daher auch die Constante $\beta' = -b \cos i$ für beide dieselbe Bedeutung haben.

Nennt man r_0 und r_1 das Maximum und Minimum von r, so verschwindet $\frac{dr}{dt}$ für diese Werthe von r, wodurch man erhält:

$$2f(r_0) + 2h - \frac{b^2}{r_0^2} = 0,$$

$$2f(r_1) + 2h - \frac{b^2}{r_1^2} = 0,$$

und daher

$$h = -\frac{r_1^2 f(r_1) - r_0^2 f(r_0)}{r_1^2 - r_0^2},$$

$$b^2 = 2 r_0^2 r_1^2 \frac{f(r_0) - f(r_1)}{r_1^2 - r_0^2}.$$

Für das Newton'sche Attractionsgesetz wird:

$$f(r) = \frac{k^2}{r},$$

wo k^2 die Anziehungskraft für die Einheit der Distanz bedeutet, und daher:

$$h = -\frac{k^2}{r_1 + r_0}, \quad \frac{b^2}{k^2} = \frac{2 r_0 r_1}{r_1 + r_0};$$

$-\frac{k^2}{h}$ ist also die grosse Axe, $\frac{b^2}{k^2}$ der halbe Parameter der Bahn. Bezeichnet man diese, wie gewöhnlich, mit $2a$ und p, und setzt

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v},$$

wo v die excentrische Anomalie, e die Excentricität bedeutet, so wird

$$2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2} = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2} \right)$$

$$= \frac{k^2}{p} [2(1 + e \cos v) - 1 + e^2 - (1 + e \cos v)^2] = \frac{k^2 e^2 \sin^2 v}{p},$$

und daher

$$b \int \frac{dr}{r^2 \left(2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = v.$$

Man hat ferner

$$b \int \frac{d\eta}{\sqrt{b^2 - \frac{\gamma^2}{\sin^2 \eta}}} = \int \frac{b \sin \eta \, d\eta}{\sqrt{b^2 - \gamma^2 - b^2 \cos^2 \eta}}$$

$$= \text{arc.cos} \frac{b \cos \eta}{\sqrt{b^2 - \gamma^2}} = \text{arc.cos} \frac{\cos \eta}{\sin i},$$

wodurch die erste der aufgestellten Integralgleichungen sich in folgende verwandelt:

$$-\operatorname{arc.cos}\frac{\cos\eta}{\sin i} = v+b',$$

oder

$$\cos\eta = \sin i.\cos(v+b').$$

Man erhält hieraus

$$\sin\eta\cos(\vartheta+\beta) = \operatorname{cotg} i.\cos\eta = \cos i.\cos(v+b')$$

und daher

$$\sin\eta\sin(\vartheta+\beta) = -\sin(v+b').$$

In dieser Formel ist $b'+\frac{1}{2}\pi$ die Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten.

Setzt man

$$z = r\cos\eta,\quad y = r\sin\eta\cos\vartheta,\quad x = r\sin\eta\sin\vartheta,$$

so ist i der Winkel der Ebene der Bahn und der Ebene der x, y; β der Winkel, den der Durchschnitt beider Ebenen mit der Axe der x macht. Aus den Gleichungen

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg} i\cos\beta,\quad \alpha' = \beta'\operatorname{tg} i\sin\beta = -b\sin i\sin\beta$$

ersieht man ferner, dass in der ersten Form der Integralgleichungen α der Winkel ist, den der Durchschnitt der Ebene der Bahn und der Ebene der z, y mit der Axe der z macht, und $-\frac{\alpha'}{b}$ der Cosinus des Winkels beider Ebenen. Es ist ferner w der Winkel zwischen diesem Durchschnitt und dem Radius Vector und b' der Winkel zwischen diesem Durchschnitt und dem Perihel. Die in den beiden Formen der Integralgleichungen gebrauchten Elemente erhalten daher durch blosse Vertauschung der Axe der x mit der Axe der z dieselbe Bedeutung.

Die im Vorhergehenden nach r und η ausgeführten Integrationen sind von den kleinsten Werthen an genommen, welche r und η erhalten können. Da diese Werthe Functionen der Elemente sind, so muss man eigentlich bei der Differentiation der charakteristischen Function nach den Elementen auch nach diesen unteren Grenzen der Integrale differentiiren. Man kann aber hiervon abstrahiren, weil wegen der bekannten Eigenschaften des Minimums für die unteren Grenzen die Ausdrücke unter dem Integralzeichen verschwinden und daher auch die aus der Variation der unteren Grenzen der Integrale hervorgehenden Terme.

Die hier eingeführten willkürlichen Constanten der charakteristischen Function und diejenigen, welche ihren nach ersteren partiell genommenen Differentialquotienten gleich gesetzt werden, haben in der Theorie der Variation der Constanten merkwürdige und eigenthümliche Eigenschaften, weshalb ich in dem vorhergehenden Beispiele ihre Bedeutung genau angegeben habe.

Will man die zweite Integrationsmethode auf die allgemeinere Gleichung anwenden:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = f(r),$$

wo

$$r = \sqrt{x_1x_1+x_2x_2+\cdots+x_nx_n},$$

so setze man

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\eta_1,\\
x_2 &= r\sin\eta_1\cos\eta_2,\\
x_3 &= r\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
x_{n-1} &= r\sin\eta_1\sin\eta_2\,\ldots\,\sin\eta_{n-2}\cos\eta_{n-1},\\
x_n &= r\sin\eta_1\sin\eta_2\,\ldots\,\sin\eta_{n-2}\sin\eta_{n-1},
\end{aligned}$$

wodurch sich die partielle Differentialgleichung in folgende verwandelt:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_1}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\eta_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_2}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_3}\right)^2\\
&\qquad+\cdots+\frac{1}{r^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-2}}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_{n-1}}\right)^2 = f(r).
\end{aligned}$$

Setzt man

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_{n-1}} = p,\quad W = (\eta_{n-1}+\alpha)p-V$$

und führt W statt V, p statt η_{n-1} ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_1}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\eta_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_2}\right)^2\\
&+\cdots+\frac{1}{r^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}}\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_{n-2}}\right)^2\\
&= f(r)-\frac{p^2}{r^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-2}},
\end{aligned}$$

wo p bei der Integration als Constante angesehen werden kann.

Diese Gleichung kann man in die folgenden zerfällen:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = f(r) - \frac{\alpha_1}{r^2},$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_1}\right)^2 = \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\sin^2\eta_1},$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_2}\right)^2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\sin^2\eta_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_{n-3}}\right)^2 = \alpha_{n-3} - \frac{\alpha_{n-2}}{\sin^2\eta_{n-3}},$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_{n-2}}\right)^2 = \alpha_{n-2} - \frac{p^2}{\sin^2\eta_{n-2}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ Constanten bedeuten, alle einzeln integriren, und man erhält daher:

$$\begin{aligned} V &= (\eta_{n-1}+\alpha)p - W \\ &= (\eta_{n-1}+\alpha)p - \int dr\left[f(r)-\frac{\alpha_1}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \int d\eta_1\left[\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\sin^2\eta_1}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \int d\eta_2\left[\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\sin^2\eta_2}\right]^{\frac{1}{2}} - \cdots - \int d\eta_{n-2}\left[\alpha_{n-2} - \frac{p^2}{\sin^2\eta_{n-2}}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck von V kann man entweder als eine vollständige Lösung mit den $n-1$ willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ betrachten, in welchem die Variabele p durch η_{n-1} ersetzt werden muss mit Hülfe der Gleichung

$$\eta_{n-1}+\alpha = \frac{\partial W}{\partial p} = -p\int \frac{d\eta_{n-2}}{\sin^2\eta_{n-2}\left[\alpha_{n-2} - \frac{p^2}{\sin^2\eta_{n-2}}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

oder als eine vollständige Lösung mit den $n-1$ willkürlichen Constanten p, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$, wobei dann das Glied αp als bloss additive Constante nicht mitzurechnen ist. Die willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ sind positiv zu nehmen und so, dass

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_{n-2}$$

ist, damit man eine reelle Lösung erhält.

Eine andere Lösung der im Vorigen behandelten allgemeinen partiellen Differentialgleichung habe ich oben gegeben. Man erhält dadurch zugleich die Integration der Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{x_1}{r}\cdot R, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{x_2}{r}\cdot R, \quad \ldots, \quad \frac{d^2x_n}{dt^2} = \frac{x_n}{r}\cdot R,$$

in welchen R eine gegebene Function von r und

$$r = \sqrt{x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots + x_nx_n}$$

ist, wenn man

$$R = \frac{df(r)}{dr}$$

setzt. Man findet über die Integration dieser Differentialgleichungen eine lehrreiche Abhandlung von Herrn **Binet** in dem 2ten Bande des mathematischen Journals von **Liouville**.

§. 10. Die zweite Lagrange'sche und die Hamilton'sche Form der Differentialgleichungen der Bewegung.

Wir haben oben bei Aufstellung der Differentialgleichungen der Mechanik zu Bestimmungsstücken der Punkte des Systems ihre rechtwinkligen Coordinaten gewählt. Man findet aber in der „Mécanique Analytique" die Differentialgleichungen der Bewegung auch für den allgemeineren Fall angegeben, wenn man irgend welche Bestimmungsstücke der Punkte als Variabele einführt. Diese allgemeineren Formeln sind besonders dann von Vortheil, wenn das System nicht frei, sondern irgend welchen Bedingungen unterworfen ist. Man kann dann nämlich die Coordinaten so durch neue Variabele ausdrücken, dass den Bedingungsgleichungen von selber genügt wird. **Hamilton** hat diesen allgemeineren Differentialgleichungen eine etwas modificirte Form gegeben, welche ich im Folgenden mittheilen will. Zuerst aber werde ich die bekannten Formeln der analytischen Mechanik, aus welchen sich die von **Hamilton** gegebenen leicht ableiten lassen, selber entwickeln.

Die oben (§. 1.) mitgetheilten Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems materieller Punkte hat **Lagrange** durch die Zeichen seiner Variationsrechnung in eine einzige *symbolische* Gleichung zusammengefasst. Bezeichnet man nämlich durch

$$\delta x_1, \quad \delta y_1, \quad \delta z_1, \quad \ldots, \quad \delta x_n, \quad \delta y_n, \quad \delta z_n,$$

wenn das System frei ist, ganz beliebige Grössen, wenn aber die Bewegung des Systems Beschränkungen von der a. a. O. angegebenen Art unterworfen ist, beliebige Grössen, welche die linearen Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} &\Sigma\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i}\delta z_i\right] = 0, \\ &\Sigma\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\delta z_i\right] = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

erfüllen; so kann man die oben gegebenen Gleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \cdots,$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \cdots,$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \cdots$$

in die einzige

$$\Sigma m_i \left[\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right]$$
$$= \Sigma \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i \right]$$

zusammenfassen. Bezeichnet man ferner durch die einer Function der Coordinaten x_i, y_i, z_i vorgesetzte Charakteristik δ die Aenderung, welche die Function erfährt, wenn man darin $x_i + \delta x_i$, $y_i + \delta y_i$, $z_i + \delta z_i$ statt x_i, y_i, z_i setzt und δx_i, δy_i, δz_i als unendlich kleine Grössen betrachtet, so kann man diese symbolische Gleichung kürzer so darstellen:

$$\Sigma m_i \left[\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right] = \delta U$$

oder, wenn man wieder

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad y'_i = \frac{dy_i}{dt}, \quad z'_i = \frac{dz_i}{dt}$$

setzt,

$$\Sigma m_i \left[\frac{dx'_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy'_i}{dt} \delta y_i + \frac{dz'_i}{dt} \delta z_i \right] = \delta U.$$

Dieser Gleichung kann man auch die Form geben:

$$\frac{d\, \Sigma m_i [x'_i \delta x_i + y'_i \delta y_i + z'_i \delta z_i]}{dt} = \delta T + \delta U,$$

wenn man der Kürze halber setzt:

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i [x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i],$$

d. h. unter T die halbe lebendige Kraft versteht. Die Integration dieser Gleichung von $t = 0$ bis $t = t$ hat Hamilton zu seinen oben angeführten Theoremen geführt. Hier soll dieselbe Formel dazu dienen, die Differentialgleichungen der Bewegung auf eine allgemeine Art zu transformiren.

Es seien $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ irgend welche von einander unabhängige Grössen, durch welche die Punkte des Systems bestimmt werden, so dass man die $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i durch diese m Grössen ausdrücken kann. Wenn das System ganz frei ist, wird $m = 3n$ sein; wenn aber l Bedingungsgleichungen gegeben sind, denen die Coordinaten der Punkte des Systems unterworfen sind, so wird $m = 3n - l$ sein. Setzt man

$$q'_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad q'_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad \ldots, \quad q'_m = \frac{dq_m}{dt},$$

so werden x'_i, y'_i, z'_i lineare homogene Functionen von $q'_1, q'_2, q'_3, \ldots, q'_m$ und daher T eine homogene Function der zweiten Ordnung von denselben Grössen.

Setzt man daher:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_m} = p_m,$$

so hat man nach einer bekannten Eigenschaft homogener Functionen:

$$q'_1 p_1 + q'_2 p_2 + \cdots + q'_m p_m = 2T.$$

Die Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sind lineare homogene Ausdrücke von q'_1, $q'_2, \ldots, q'_m$; drückt man umgekehrt diese Grössen durch jene aus, so werden auch $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ lineare homogene Ausdrücke von $p_1, p_2, \ldots, p_m$, und daher wird auch T, durch die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und die Grössen p_1, $p_2, \ldots, p_m$ ausgedrückt, eine homogene Function der zweiten Ordnung von diesen letzteren.

Man gebe den Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ unendlich kleine, ganz willkürliche und von einander unabhängige Aenderungen $\delta' p_1, \delta' p_2, \ldots, \delta' p_m$ und bezeichne die entsprechenden Aenderungen von $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ und T durch $\delta' q'_1, \delta' q'_2, \ldots, \delta' q'_m, \delta' T$. Setzt man für T den aus der oben gegebenen Gleichung folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} T &= p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots + p_m q'_m - T \\ &= \frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_m} q'_m - T, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \delta' T = {} & q'_1 \delta' p_1 + q'_2 \delta' p_2 + \cdots + q'_m \delta' p_m \\ & + p_1 \delta' q'_1 + p_2 \delta' q'_2 + \cdots + p_m \delta' q'_m \\ & - \left[\frac{\partial T}{\partial q'_1} \delta' q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} \delta' q'_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_m} \delta' q'_m \right] \end{aligned}$$

oder, da

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial q_m'} = p_m$$

ist, die Gleichung

$$\delta' T = q_1'\delta' p_1 + q_2'\delta' p_2 + \cdots + q_m'\delta' p_m,$$

woraus

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = q_1', \quad \frac{\partial T}{\partial p_2} = q_2', \quad \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial p_m} = q_m'$$

folgt.

Diese Formeln enthalten eine in mehreren Untersuchungen anwendbare Eigenschaft der homogenen Functionen zweiter Ordnung, dass nämlich, *wenn T eine homogene Function zweiter Ordnung von den Grössen q_1', q_2', $\ldots$, q_m' ist, und man dieselbe als homogene Function zweiter Ordnung der Grössen*

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial T}{\partial q_m'}$$

ausdrückt, die nach diesen Grössen genommenen partiellen Differentialquotienten von T wieder die vorigen Variabeln geben,

$$q_1' = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad q_2' = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad q_m' = \frac{\partial T}{\partial p_m}.$$

Für drei Variabele liegt hierin der analytische Grund von Sätzen über die reciproken Polaren der Oberflächen zweiter Ordnung.

Man hat:

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_m} q_m',$$

$$y_i' = \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_m} q_m',$$

$$z_i' = \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_m} q_m'.$$

Wenn daher q_k eine der Grössen q_1, q_2, $\ldots$, q_m bedeutet, so wird

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k},$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k},$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k}$$

und daher

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial q_k'} = \Sigma m_i \left[x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'}\right]$$
$$= \Sigma m_i \left[x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right].$$

Es ist aber

$$\Sigma m_i [\, x_i'\delta x_i \; + \; y_i'\delta y_i \; + \; z_i'\delta z_i]$$
$$= \delta q_1 \Sigma m_i \left[x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right]$$
$$+ \delta q_2 \Sigma m_i \left[x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \delta q_m \Sigma m_i \left[x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right]$$

und daher

$$\Sigma m_i [x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i] = p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m.$$

Die Gleichung

$$\frac{d\, \Sigma m_i (x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i)}{dt} = \delta T + \delta U$$

giebt daher

$$\frac{d(p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m)}{dt}$$
$$= \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m$$
$$+ \; p_1\delta q_1' + \; p_2\delta q_2' + \cdots + \; p_m\delta q_m'$$
$$= \delta T + \delta U.$$

Es ist aber, da U die Grössen q_i' gar nicht enthält,

$$\delta T + \delta U$$
$$= \frac{\partial T}{\partial q_1'}\delta q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'}\delta q_2' + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_m'}\delta q_m'$$
$$+ \frac{\partial (T+U)}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial (T+U)}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial (T+U)}{\partial q_m}\delta q_m.$$

Man hat daher, da wegen der Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial q'_k} = p_k$$

die in die Variationen $\delta q'_k$ multiplicirten Terme sich aufheben, die in der „Mécanique Analytique" gegebene Gleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m \\ = &\frac{\partial(T+U)}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial(T+U)}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial(T+U)}{\partial q_m}\delta q_m, \end{aligned}$$

woraus, wenn die Grössen q von einander unabhängig sind, die Gleichungen folgen:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{\partial(T+U)}{\partial q_1}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{\partial(T+U)}{\partial q_2}, \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dp_m}{dt} &= \frac{\partial(T+U)}{\partial q_m}. \end{aligned}$$

In den vorstehenden Lagrange'schen Formeln ist T ausgedrückt durch die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$, und in diesem Sinne ist die partielle Differentiation auszuführen. Hamilton führt statt der letzten m Grössen die Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ als Variabele ein. Die auf diese Wahl der Variabeln bezüglichen Formeln erhält man auf folgende Weise:

Es ist nach den obigen Formeln

$$T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots + p_m q'_m - T$$

und daher

$$\begin{aligned} \delta T = \; & p_1 \delta q'_1 + p_2 \delta q'_2 + \cdots + p_m \delta q'_m \\ & + q'_1 \delta p_1 + q'_2 \delta p_2 + \cdots + q'_m \delta p_m - \delta T. \end{aligned}$$

Da wir oben

$$\frac{\partial T}{\partial p_k} = q'_k$$

fanden, so hat man

$$\begin{aligned} \delta T = \; & q'_1 \delta p_1 + q'_2 \delta p_2 + \cdots + q'_m \delta p_m \\ & + \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_m}\delta q_m. \end{aligned}$$

Substituirt man diesen Ausdruck von δT in die vorhergehende Gleichung rechter Hand vom Gleichheitszeichen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \delta T = \; & p_1 \delta q'_1 + p_2 \delta q'_2 + \cdots + p_m \delta q'_m \\ & - \left[\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_m}\delta q_m\right]. \end{aligned}$$

Benutzt man diesen Ausdruck von δT und setzt wieder

$$T - U = H,$$

so verwandelt sich die oben gefundene Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m \\ &+ p_1 \delta q'_1 + p_2 \delta q'_2 + \cdots + p_m \delta q'_m \\ &= \delta T + \delta U \end{aligned}$$

in die folgende:

$$\begin{aligned} &\frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m \\ = -&\left[\frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m\right], \end{aligned}$$

aus der sich die m Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_m} \end{aligned}$$

ergeben.

Dies sind die Differentialgleichungen der Bewegung in der neuen, von Hamilton ihnen gegebenen Form.

Da U die Grössen p_k nicht enthält, und daher

$$q'_k = \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

ist, so hat man folgendes Theorem, welches die Hamilton'sche Darstellung der *Differentialgleichungen* der Mechanik enthält.

Theorem III.

„Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_m$ die von einander unabhängigen Bestimmungsstücke eines Systems von n materiellen Punkten, welches entweder ganz frei oder irgend welchen Bedingungen der oben angegebenen Art unterworfen ist; die Zahl m der Bestimmungsstücke ist $3n$ bei einem freien System, dagegen, wenn die Punkte desselben l Bedingungen unterworfen sind, $3n-l$; man drücke die Kräftefunction U durch die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und die halbe lebendige Kraft T des Systems durch die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und $q'_1 = \frac{dq_1}{dt}$, $q'_2 = \frac{dq_2}{dt}$, $\ldots$, $q'_m = \frac{dq_m}{dt}$ aus, setze

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_m} = p_m$$

und stelle mit Hülfe dieser Gleichungen T als Function der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ dar; dann werden, wenn $T-U=H$ gesetzt wird, die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}.\text{“}$$

Die Formeln des vorstehenden Theorems gelten, wie aus dem gegebenen Beweise erhellt, auch, was Hamilton nicht angemerkt hat, für den Fall, dass die Kräftefunction U die Zeit t explicite enthält, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man erwägt, dass die Charakteristik δ, wie ich ausdrücklich angemerkt habe, nur diejenigen Aenderungen anzeigt, welche aus der Variation der Coordinaten hervorgehen.

Die im Vorigen gefundenen Formeln lehren, dass die partiellen Differentialquotienten von T nach $q_1, q_2, \ldots, q_m$ einen gerade entgegengesetzten Werth bekommen, je nachdem man T als Function von $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ oder als Function von $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und $p_1, p_2, \ldots, p_m$ betrachtet. Wir fanden nämlich für den letzteren Fall:

$$\begin{aligned}\delta T = {} & p_1\delta q'_1 + p_2\delta q'_2 + \cdots + p_m\delta q'_m \\ & - \left[\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_m}\delta q_m\right],\end{aligned}$$

während man nach der ersteren Annahme hat:

$$\begin{aligned}\delta T = {} & p_1\delta q'_1 + p_2\delta q'_2 + \cdots + p_m\delta q'_m \\ & + \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_m}\delta q_m.\end{aligned}$$

Man hat daher jedesmal genau den Sinn zu fixiren, in welchem die partiellen Differentiationen ausgeführt werden sollen.

Wenn man eine grössere Zahl von Variabeln q einführt, als zur Bestimmung der Punkte des Systems nöthig ist, so finden zwischen denselben (deren Anzahl auch in diesem Falle mit m bezeichnet werde) mehrere Bedingungsgleichungen $f=0$, $\varphi=0$ etc. statt, und es sind die Variationen δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_m$ nicht mehr von einander unabhängig. Man kann daher aus der Gleichung

$$\begin{aligned}& \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m \\ & = -\left[\frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m\right]\end{aligned}$$

nicht mehr auf die Gleichheit der mit derselben Variation multiplicirten Terme schliessen, sondern muss vermittelst der zwischen den Variationen stattfindenden Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_m}\delta q_m = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\delta q_m = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

einige der Variationen durch die übrigen unabhängigen ausdrücken und dann nur die in diese multiplicirten Terme einzeln einander gleich setzen. Bewerkstelligt man die Elimination wieder nach der Lagrange'schen Methode, indem man die vorstehenden Gleichungen, mit Factoren λ, λ_1 etc. multiplicirt, hinzufügt und dann die einzelnen in $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m$ multiplicirten Terme einander gleich setzt, so erhalten die Differentialgleichungen der Dynamik die Form:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \cdots, \\
\frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \cdots, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
\frac{dq_m}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_m} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_m} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_m} + \cdots.
\end{aligned}$$

Die Multiplicatoren λ, λ_1 etc. werden dadurch bestimmt, dass man in die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{d\left[\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}\right]}{dt} = 0, \\
&\frac{d\left[\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}\right]}{dt} = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

welche sich durch zweimalige Differentiation der Bedingungsgleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ etc. ergeben, die Werthe

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \cdots$$

substituirt.

Wenn man unter $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m$ die *virtuellen* Variationen versteht, d. h. solche, die den Bedingungen $\delta f = 0$, $\delta\varphi = 0$ etc. Genüge leisten, so kann man in allen Fällen die Differentialgleichungen in die einzige symbolische Gleichung zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
&\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \frac{dq_2}{dt}\delta p_2 + \cdots + \frac{dq_m}{dt}\delta p_m \\
&-\left[\frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m\right] \\
&= \delta H,
\end{aligned}$$

ein Resultat von grosser Allgemeinheit und Eleganz, welches, wie ich glaube, in dieser Form Hamilton zuerst aufgestellt hat.

§. 11. Hamilton's Methode, zu der von ihm angegebenen Form der Integralgleichungen zu gelangen.

Die Darstellung der *Integralgleichungen* der Mechanik durch die partiellen Differentialquotienten der charakteristischen Function, wenn man statt der Coordinaten irgend welche Bestimmungsstücke der Punkte des Systems einführt, findet Hamilton durch folgende einfache Betrachtung.

Es sei wieder

$$S = \int_0^t (T+U)dt.$$

Da

$$\begin{aligned}
&p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} \\
&= p_1 \frac{\partial T}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial T}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial T}{\partial p_m} = 2T
\end{aligned}$$

ist, so hat man

$$T+U = 2T-H = p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H.$$

Man kann daher den Ausdruck von S auch so darstellen:

$$S = \int_0^t \left[p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H\right] dt$$

oder, da

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{dq_k}{dt},$$

$$S = \int_0^t \left[p_1 \frac{dq_1}{dt} + p_2 \frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m \frac{dq_m}{dt} - H\right] dt.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\delta S = &\int_0^t \left[p_1 \frac{d\delta q_1}{dt} + p_2 \frac{d\delta q_2}{dt} + \cdots + p_m \frac{d\delta q_m}{dt}\right] dt \\
&- \int_0^t \left[\frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m\right] dt.
\end{aligned}$$

Integrirt man das erste Integral per partes und bezeichnet die Anfangswerthe von $q_1, q_2, \ldots, q_m$ mit $c_1, c_2, \ldots, c_m$ und die Anfangswerthe von $p_1, p_2, \ldots, p_m$

mit $b_1, b_2, \ldots, b_m$, so erhält man aus der vorstehenden Formel:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &- [p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m] \\ &+ b_1\delta c_1 + b_2\delta c_2 + \cdots + b_m\delta c_m \\ &+ \int_0^t \left[\Sigma\left(\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right] dt, \end{aligned}$$

wenn man dem Index k unter dem Summenzeichen die Werthe $1, 2, \ldots, m$ giebt. *Diese eine merkwürdige Gleichung, welche durch eine einfache Integration per partes, wie sie in der Variationsrechnung üblich ist, gefunden wird, umfasst zu gleicher Zeit die Differentialgleichungen und die Integralgleichungen des mechanischen Problems.*

Setzt man nämlich die Ausdrücke unter dem Integralzeichen und ausserhalb des Integralzeichens besonders gleich Null, so ergeben sich sowohl die Differentialgleichungen als auch die Integralgleichungen, und zwar die ersteren vermittelst der partiellen Differentialquotienten eines der halben lebendigen Kraft weniger der Kräftefunction gleichen Ausdrucks, die letzteren vermittelst der partiellen Differentialquotienten der charakteristischen Function. In dem sogenannten Princip der *kleinsten Wirkung*, welches man analytisch durch die Gleichung $\delta S = 0$ ersetzen kann, sieht man die Grenzwerthe q_k und c_k als gegeben an; man setzt also $\delta q_k = 0$, $\delta c_k = 0$, und in Folge dessen verschwindet der Ausdruck ausserhalb des Integralzeichens von selber. Dies Princip giebt daher nur die Differentialgleichungen des Problems, während die gleichzeitige Variation der Grenzen des Integrals ausserdem die Darstellung der Integralgleichungen durch die charakteristische Function giebt. Hamilton schlägt daher vor, das Princip der kleinsten Wirkung *the law of stationary action*, das seinige dagegen *the law of varying action* zu nennen, indem das Integral, welches variirt wird, zuweilen als die *action* (*Kraftaufwand*) angesehen worden ist.

Um dies zu erläutern, bemerke ich, dass, wenn man den Ausdruck unter dem Integralzeichen gleich Null setzt,

$$\Sigma\left(\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k = 0,$$

diese Gleichung, wenn zwischen den m Grössen q_k keine Bedingungsgleichungen stattfinden, also die Variationen δq_k von einander unabhängig sind, in die m Gleichungen zerfällt:

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

dagegen, wenn zwischen den Grössen q_k die Bedingungsgleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ etc. stattfinden, in die m Gleichungen:

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + \lambda\frac{\partial f}{\partial q_k} + \lambda_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + \cdots,$$

in welchen die verschiedenen in die partiellen Differentialquotienten von f, φ etc. multiplicirten Factoren λ, λ_1 etc. für alle m Werthe des Index k dieselben bleiben. Dies sind die Differentialgleichungen des Problems.

Wenn die Grösse unter dem Integralzeichen verschwindet, so hat man eine hinlängliche Anzahl von Differentialgleichungen, um daraus die m Grössen q_k als Functionen von t und $2m$ willkürlichen Constanten bestimmen zu können; es wird daher auch S eine gegebene Function von t und den $2m$ willkürlichen Constanten; und da die Charakteristik δ sich nicht auf t bezieht, so wird δS, wofern die angegebenen Differentialgleichungen stattfinden, die Variation von S, wenn man die willkürlichen Constanten, die ihre Integration mit sich bringt, variirt, als die einzigen Grössen, welche noch variirt werden können. Man hatte aber, wenn die Grösse unter dem Integralzeichen,

$$\Sigma\left(\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k,$$

verschwindet,

$$\begin{aligned} \delta S = {} & p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m \\ & -(b_1\delta c_1 + b_2\delta c_2 + \cdots + b_m\delta c_m), \end{aligned}$$

in welchem Ausdrucke δq_k, δc_k die Variationen von q_k, c_k bedeuten, wenn man diese Grössen vermittelst der Integralgleichungen des Problems durch die willkürlichen Constanten und t ausdrückt und die ersteren variirt. Man kann aber auch umgekehrt vermittelst der vollständigen Integralgleichungen des Problems die willkürlichen Constanten, die in S vorkommen, durch die Grössen q_k, c_k und t ausdrücken, so dass S eine Function von t und den $2m$ Grössen q_k, c_k wird, die weiter keine Variabele oder willkürliche Constante enthält. Es führt dann die vorstehende Gleichung, wenn keine Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen q_k gegeben sind, sofort zu den folgenden Integralgleichungen des Systems, in denen $c_1, c_2, \ldots, c_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ die willkürlichen Constanten sind:

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial S}{\partial c_1} = -b_1,$$
$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial S}{\partial c_2} = -b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial S}{\partial q_m} = p_m, \quad \frac{\partial S}{\partial c_m} = -b_m.$$

Wenn aber zwischen den Grössen q_k die Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ etc. gegeben sind, so lässt sich aus der genannten Gleichung nur schliessen, dass sich die Grössen $\frac{\partial S}{\partial q_k}$, $\frac{\partial S}{\partial c_k}$ in der Form

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = \quad p_1 + \mu\frac{\partial f}{\partial q_1} + \mu_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \cdots,$$
$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = \quad p_2 + \mu\frac{\partial f}{\partial q_2} + \mu_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial S}{\partial q_m} = \quad p_m + \mu\frac{\partial f}{\partial q_m} + \mu_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_m} + \cdots,$$
$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = -b_1 + \mu^0\frac{\partial f^0}{\partial c_1} + \mu_1^0\frac{\partial \varphi^0}{\partial c_1} + \cdots,$$
$$\frac{\partial S}{\partial c_2} = -b_2 + \mu^0\frac{\partial f^0}{\partial c_2} + \mu_1^0\frac{\partial \varphi^0}{\partial c_2} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial S}{\partial c_m} = -b_m + \mu^0\frac{\partial f^0}{\partial c_m} + \mu_1^0\frac{\partial \varphi^0}{\partial c_m} + \cdots$$

darstellen lassen, wo f^0, φ^0 etc. die Ausdrücke bedeuten, in welche f, φ etc. übergehen, wenn man darin für die Grössen q_k ihre Anfangswerthe c_k setzt, und die eingeführten Multiplicatoren $\mu, \mu_1, \ldots, \mu^0, \mu_1^0, \ldots$ folgendermassen bestimmt werden können. Differentiirt man die Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ etc. nach t und setzt $dq_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}dt$, $dq_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}dt, \ldots, dq_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}dt$, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m} = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Substituirt man in diese Gleichungen für $p_1, p_2, \ldots, p_m$ die aus den m ersten Integralgleichungen sich ergebenden Werthe derselben, so erhält man zur Bestimmung der Multiplicatoren μ, μ_1 etc. eine gleiche Anzahl linearer Gleichungen.

Ebenso dienen die vorstehenden Gleichungen, wenn man in ihnen $c_1, c_2, \ldots, c_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ für $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ setzt und die m letzten Integralgleichungen benutzt, zur Bestimmung der Multiplicatoren μ^0, μ_1^0 etc. Ferner geben sie dann, in Verbindung mit den Gleichungen $f^0=0$, $\varphi^0=0$ etc., die Bedingungen an, welche die in den aufgestellten Integralgleichungen als Constanten auftretenden Grössen c_k, b_k erfüllen müssen.

Den partiellen Differentialquotienten von S, nach t genommen, findet man durch die Gleichung:

$$\frac{dS}{dt} = p_1\frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial H}{\partial p_m} - H$$
$$= \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial S}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt}$$
$$= \frac{\partial S}{\partial t} + p_1\frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial H}{\partial p_m},$$

woraus

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H = U - T$$

folgt, wie wir auch oben gefunden hatten, wo die rechtwinkligen Coordinaten zu Bestimmungsstücken der Punkte des Systems gewählt waren.

Wenn zwischen den Grössen q_k keine Bedingungsgleichungen stattfinden, und man in den Ausdruck von H oder T für die Grössen p_k ihre Werthe setzt:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k},$$

so wird die vorstehende Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + T = U$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen der Function S und den unabhängigen Variabeln $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$. Wenn das System ganz frei ist, also $m = 3n$, so muss dieses dieselbe partielle Differentialgleichung sein, wie die oben für diesen Fall angegebene:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

wenn man in dieselbe statt der $3n$ Grössen x_i, y_i, z_i die $3n$ Grössen q_k einführt. In der That folgen auch aus der oben (p. 267) gefundenen Gleichung:

$$\begin{aligned}\Sigma m_i[x_i'\delta x_i+y_i'\delta y_i+z_i'\delta z_i]\\ = p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m\end{aligned}$$

die Gleichungen:

$$\begin{aligned}m_i x_i' &= p_1\frac{\partial q_1}{\partial x_i}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial x_i}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial x_i},\\ m_i y_i' &= p_1\frac{\partial q_1}{\partial y_i}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial y_i}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial y_i},\\ m_i z_i' &= p_1\frac{\partial q_1}{\partial z_i}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial z_i}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial z_i};\end{aligned}$$

es ist also

$$\begin{aligned}T = {}&\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial x_i}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial x_i}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial x_i}\right]^2\\ &+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial y_i}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial y_i}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial y_i}\right]^2\\ &+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial z_i}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial z_i}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial z_i}\right]^2\end{aligned}$$

und daher, wenn man die Werthe

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$$

substituirt,

$$\begin{aligned}T = {}&\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_i}+\frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial S}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_i}\right]^2\\ &+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y_i}+\frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial y_i}+\cdots+\frac{\partial S}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial y_i}\right]^2\\ &+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial z_i}+\frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial z_i}+\cdots+\frac{\partial S}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial z_i}\right]^2,\end{aligned}$$

in welchem Ausdrucke man noch vermittelst der zwischen den Grössen q_k und x_i, y_i, z_i stattfindenden $3n$ Gleichungen die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial q_k}{\partial x_i},\ \frac{\partial q_k}{\partial y_i},\ \frac{\partial q_k}{\partial z_i}$$

durch die Grössen q_k auszudrücken hat, damit die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t}+T = U$$

eine partielle Differentialgleichung zwischen S, t und den Grössen q_k werde. Der vorstehende Werth von T ist aber offenbar

$$T = \Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]$$

und giebt, in die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t}+T = U$$

substituirt, die früher angegebene partielle Differentialgleichung.

Setzt man wieder

$$V = S+tH$$

und führt statt t die Variabele H ein, so erhält man durch ähnliche Formeln die $2m$ Integralgleichungen durch die partiellen Differentialquotienten von V ausgedrückt. Statt der Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

erhält man wieder, wie früher,

$$\frac{\partial V}{\partial H} = t.$$

Die partielle Differentialgleichung wird

$$T = U+H,$$

wenn man in T für die Grössen p_k die Werthe

$$p_k = \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

setzt und in U, wenn darin die Zeit t auch explicite vorkommt, seinen Werth

$$t = \frac{\partial V}{\partial H}.$$

Wenn t nicht explicite in U vorkommt, und daher vermittelst der Gleichungen der Bewegung H einer Constante gleich wird,

$$H = h,$$

so erhält man noch eine zweite partielle Differentialgleichung für jede der

Functionen S und V*). Ist nämlich H^0 der Ausdruck, in den H übergeht, wenn man c_k, b_k für q_k, p_k setzt, so hat man

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H^0 = 0,$$
$$H^0 = h,$$

wenn man in der ersten Gleichung in H^0 die Grössen b_k durch ihre Werthe

$$b_k = -\frac{\partial S}{\partial c_k}$$

und in der zweiten durch die Werthe

$$b_k = -\frac{\partial V}{\partial c_k}$$

ersetzt.

§. 12. Die partielle Differentialgleichung für das Problem der Rotation.

Ehe ich mich zu anderen Betrachtungen wende, will ich noch die partielle Differentialgleichung aufsuchen, auf welche nach der vorstehenden Theorie die Rotation eines festen Körpers um einen festen Punkt zurückkommt, wobei ich die von Poisson in seiner Abhandlung im 15ten Hefte des „Journal de l'École Polytechnique“ gebrauchten Bezeichnungen beibehalten will.

Es seien X, Y zwei feste, auf einander senkrecht stehende Linien, XY ihre Ebene; ferner X_1, Y_1 zwei der beweglichen Hauptdrehungsaxen des Körpers, X_1Y_1 ihre Ebene. Es sei:

ψ der Winkel zwischen X und dem Durchschnitt der Ebenen XY und X_1Y_1;

φ der Winkel zwischen diesem Durchschnitt und X_1;

ϑ der Neigungswinkel beider Ebenen XY und X_1Y_1;

es seien ferner A, B, C die Momente der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Axen X_1, Y_1 und die dritte auf ihnen senkrecht stehende. Setzt man

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi', \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \vartheta',$$

ferner

$$p = \sin\varphi\sin\vartheta.\psi'-\cos\varphi.\vartheta',$$
$$q = \cos\varphi\sin\vartheta.\psi'+\sin\varphi.\vartheta',$$
$$r = \varphi'-\cos\vartheta.\psi',$$

*) Vgl. p. 237.

so hat man für die lebendige Kraft:

$$2T = Ap^2+Bq^2+Cr^2.$$

Setzt man ferner mit Poisson:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = s,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = v,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = u,$$

so hat man die am angeführten Ort S. 326 entwickelten Formeln:

$$Cr = s,$$
$$Bq = \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}(u+\cos\vartheta.s)+\sin\varphi.v,$$
$$Ap = \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}(u+\cos\vartheta.s)-\cos\varphi.v,$$

woraus sich

$$T = \frac{1}{2C}.s^2$$
$$+\frac{1}{2B}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}(u+\cos\vartheta.s)+\sin\varphi.v\right]^2$$
$$+\frac{1}{2A}\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}(u+\cos\vartheta.s)-\cos\varphi.v\right]^2$$

ergiebt. Was in unseren allgemeinen Formeln die Grössen q_k waren, sind hier die Winkel φ, ψ, ϑ, und was die Grössen p_k, sind hier die den Winkeln φ, ψ, ϑ entsprechenden Grössen s, u, v. Man hat daher:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = s,$$
$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = u,$$
$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = v,$$

so dass, wenn U die Kräftefunction ist und h die in dem Satze von der lebendigen Kraft vorkommende Constante, die Bestimmung der Rotation eines Körpers zurückkommt auf die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 \\
&+\frac{1}{2B}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}+\cos\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)+\sin\varphi\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right]^2 \\
&+\frac{1}{2A}\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}+\cos\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)-\cos\varphi\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right]^2 \\
&= U+h.
\end{aligned}$$

Die Integration dieser partiellen Differentialgleichung für den Fall, dass die Kräftefunction $U = 0$ ist oder der feste Körper durch einen augenblicklichen Impuls um den festen Punkt in Bewegung gesetzt wird, werde ich an einem anderen Orte mittheilen und zeigen, wie sich das Problem in diesem Falle auf blosse Quadraturen zurückführen lässt. Dasselbe gilt bei *allen* mechanischen Problemen, in welchen die Bestimmung der Lage der Punkte des Systems nur von drei Grössen abhängt, und die Gleichung für die Erhaltung der lebendigen Kraft, sowie die drei Gleichungen für die Erhaltung der Flächenräume gelten*).

§. 13. Zurückführung der allgemeinsten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Die im Vorhergehenden mitgetheilte Hamilton'sche Analysis setzt auf keine Weise voraus, dass die Function H aus t und den $2m$ Grössen q_k und p_k gerade auf die Weise zusammengesetzt sei, welche die Probleme der Mechanik erfordern, sondern diese Analyse gilt unverändert, *was auch H für eine Function von t und den Grössen q_k und p_k bedeutet.* Man erhält hierdurch, wenn man für H irgend eine Function f setzt, allgemein folgendes Theorem.

Theorem IV.

„Es sei

$$f(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m)$$

irgend eine Function der $2m+1$ Grössen t, q_1, q_2, …, q_m, p_1, p_2, …, p_m, und zwischen diesen Variabeln sei folgendes System von $2m$ Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben:

*) Vgl. die Abhandlung „Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis integrandi" (S. 1—189 dieses Bandes), wo in §. 65 diese Fragen behandelt sind.

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \\
\frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
\frac{dq_m}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_m};
\end{aligned}$$

es seien c_1, c_2, …, c_m die Werthe der Grössen q_1, q_2, …, q_m und b_1, b_2, …, b_m die Werthe der Grössen p_1, p_2, …, p_m für $t = 0$, wodurch die in den $2m$ Integralen des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen vorkommenden $2m$ willkürlichen Constanten bestimmt sind; drückt man hiernach das Integral

$$W = \int_0^t \left[p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial f}{\partial p_m}-f\right]dt$$

durch die Grössen t, q_1, q_2, …, q_m, c_1, c_2, …, c_m aus, wie dieses vermittelst der $2m$ Integralgleichungen möglich ist, so hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial q_1} &= p_1, & \frac{\partial W}{\partial c_1} &= -b_1, \\
\frac{\partial W}{\partial q_2} &= p_2, & \frac{\partial W}{\partial c_2} &= -b_2, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
\frac{\partial W}{\partial q_m} &= p_m, & \frac{\partial W}{\partial c_m} &= -b_m,
\end{aligned}$$

welche man als die $2m$ Integralgleichungen des Problems betrachten kann; zugleich ist der angegebene Ausdruck von W eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+f\left(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\ \frac{\partial W}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0,$$

in welcher Lösung c_1, c_2, …, c_m die m willkürlichen Constanten sind, denen man noch eine hinzufügen kann, welche durch blosse Addition mit W verbunden wird."

Der Beweis des ersten Theils dieses Theorems ist in der einen Gleichung enthalten:

$$\delta W = \delta \int_0^t \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} - f\right) dt$$

$$= \int_0^t \left\{ \begin{array}{l} p_1 \delta \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \delta \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m \delta \frac{\partial f}{\partial p_m} \\ - \frac{\partial f}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial f}{\partial q_2} \delta q_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m} \delta q_m \end{array} \right\} dt$$

$$= \int_0^t \left\{ \begin{array}{l} p_1 \delta \frac{dq_1}{dt} + p_2 \delta \frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m \delta \frac{dq_m}{dt} \\ + \delta q_1 \frac{dp_1}{dt} + \delta q_2 \frac{dp_2}{dt} + \cdots + \delta q_m \frac{dp_m}{dt} \end{array} \right\} dt$$

$$= p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m$$
$$- b_1 \delta c_1 - b_2 \delta c_2 - \cdots - b_m \delta c_m,$$

in welcher Gleichung die Charakteristik δ sich bloss auf die Variation der in den Integralgleichungen vorkommenden willkürlichen Constanten bezieht. Man erhält dann den zweiten Theil des Theorems durch die Gleichung:

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} - f$$
$$= \frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial W}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m} \frac{dq_m}{dt}$$
$$= \frac{\partial W}{\partial t} + p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

woraus die Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + f = 0$$

folgt, in welcher man für die Grössen p_k ihre Werthe $\frac{\partial W}{\partial q_k}$ zu substituiren hat, wenn sie als partielle Differentialgleichung betrachtet werden soll.

Die partielle Differentialgleichung, deren vollständige Lösung vermittelst der vollständigen Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen durch das Theorem IV gegeben ist, hat nicht die allgemeinste Form partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, indem sie nur die Differentialquotienten der gesuchten Function W, nicht diese Function selber involvirt. Für diesen allgemeinsten Fall habe ich folgendes Theorem gefunden.

Theorem V.

„Es sei

$$f(W, t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

irgend eine beliebige Function der Grössen $W, t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, *und zwischen diesen Variabeln sei folgendes System von* $2m+1$ *gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben:*

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1} - p_1 \frac{\partial f}{\partial W},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2} - p_2 \frac{\partial f}{\partial W},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m} - p_m \frac{\partial f}{\partial W},$$
$$\frac{dW}{dt} = p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} - f;$$

es seien für $W = 0$ *die Werthe der Grössen* $t, q_1, q_2, \ldots, q_m; p_1, p_2, \ldots, p_m$ *respective* $t_0, c_1, c_2, \ldots, c_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$, *wodurch die in den* $2m+1$ *Integralgleichungen des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen vorkommenden* $2m+1$ *willkürlichen Constanten bestimmt sind; drückt man hiernach vermittelst der* $2m+1$ *Integralgleichungen die Grösse* W *durch* $t, t_0, q_1, q_2, \ldots, q_m, c_1, c_2, \ldots, c_m$ *aus und nimmt in diesem Sinne die partiellen Differentialquotienten von* W, *so erhält man*

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial c_1} = -Mb_1,$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial W}{\partial c_2} = -Mb_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m, \quad \frac{\partial W}{\partial c_m} = -Mb_m,$$

wo

$$M = e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial W} dt}$$

ist; die vorstehenden Gleichungen, verbunden mit dem Ausdrucke von W *durch* $t, t_0, q_1, q_2, \ldots, q_m, c_1, c_2, \ldots, c_m$, *kann man als die* $2m+1$ *Integralgleichungen* *des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen mit* $2m+1$ *willkürlichen Constanten* $t_0, c_1, c_2, \ldots, c_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ *ansehen; zugleich ist der angegebene Ausdruck von* W *eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\frac{\partial W}{\partial t}+f\left(W, t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right)=0,$$

in welcher Lösung $t_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$ *die* $m+1$ *willkürlichen Constanten sind*".

Der Beweis des ersten Theils dieses Theorems ist in folgenden Gleichungen enthalten, in welchen die Charakteristik δ sich wieder nur auf die willkürlichen Constanten bezieht, welche in den $2m+1$ Integralgleichungen vorkommen. Man hat zuerst

$$\begin{aligned}
\delta\frac{dW}{dt} = \frac{d\delta W}{dt} &= p_1\delta\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\delta\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+p_m\delta\frac{\partial f}{\partial p_m} \\
&\quad -\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1-\frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2-\cdots-\frac{\partial f}{\partial q_m}\delta q_m-\frac{\partial f}{\partial W}\delta W \\
&= p_1\delta\frac{dq_1}{dt}+p_2\delta\frac{dq_2}{dt}+\cdots+p_m\delta\frac{dq_m}{dt} \\
&\quad +\frac{dp_1}{dt}\delta q_1+\frac{dp_2}{dt}\delta q_2+\cdots+\frac{dp_m}{dt}\delta q_m \\
&\quad +\frac{\partial f}{\partial W}(p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m-\delta W) \\
&= \frac{d(p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m)}{dt} \\
&\quad +\frac{\partial f}{\partial W}(p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m-\delta W).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{d(p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m-\delta W)}{dt}$$
$$+\frac{\partial f}{\partial W}(p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m-\delta W)=0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch M und integrirt von $t=t_0$ bis $t=t$, so erhält man, wenn man mit $(\delta W)_0$ den Werth von δW für $t=t_0$ bezeichnet:

$$\frac{1}{M}(p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m-\delta W)$$
$$-[b_1\delta c_1+b_2\delta c_2+\cdots+b_m\delta c_m-(\delta W)_0]=0.$$

Bezeichnet man mit W_0 und $\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0$ die Werthe von W und $\frac{\partial W}{\partial t}$ für $t=t_0$, so hat man

$$\delta W_0 = (\delta W)_0+\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0\delta t_0$$

oder, da ich vorausgesetzt habe, dass W_0 identisch $=0$ sei, und daher auch $\delta W_0 = 0$ ist,

$$(\delta W)_0 = -\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0\delta t_0.$$

Hiernach verwandelt sich die gefundene Gleichung in die folgende:

$$\begin{aligned}
\delta W &= p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m \\
&\quad -M\left[b_1\delta c_1+b_2\delta c_2+\cdots+b_m\delta c_m+\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0\delta t_0\right],
\end{aligned}$$

welche den ersten Theil des Theorems umfasst und ausserdem noch die Gleichung:

$$\frac{\partial W}{\partial t_0} = -M\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0.$$

Man hat ferner:

$$\begin{aligned}
& p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial f}{\partial p_m}-f \\
&= \frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt} \\
&= \frac{\partial W}{\partial t}+p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial f}{\partial p_m},
\end{aligned}$$

woraus man

$$\frac{\partial W}{\partial t}+f=0$$

erhält, welche Gleichung, wenn man darin für die Grössen p_k ihre Werthe $\frac{\partial W}{\partial q_k}$ substituirt, den zweiten Theil des Theorems giebt.

Pfaff hat zuerst bemerkt (in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1815), dass die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t}+f\left(W, t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right)=0$$

die Integration des im Theorem V aufgestellten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordert. Aber nach seiner Analysis war die vollständige

Integration dieses Systems nur ein erster Schritt, nach welchem noch mehrere andere Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zu integriren blieben. Das Theorem V lehrt aber, dass die vollständige Integration des einen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen hinreicht, eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung zu finden. Man kann auch über den Zusammenhang des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen mit der partiellen Differentialgleichung meine Abhandlung im 2ten Bande des Crelle'schen Journals *„Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung“* vergleichen. (Cf. Bd. IV dieser Ausgabe, p. 1 ff.)

§. 14. Es wird gezeigt, wie umgekehrt jede vollständige Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die Integrale eines gewissen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert.

Um die vollständigen Integrale der in den Theoremen IV und V aufgestellten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zu erhalten, ist es nicht nöthig, dass man gerade diejenige vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichungen kenne, welche in diesen Theoremen als die Function W definirt worden ist, sondern es genügt, wenn man *irgend eine* vollständige Lösung dieser partiellen Differentialgleichungen kennt. Man hat nämlich folgendes Theorem, welches als die Umkehrung des Theorems IV betrachtet werden kann:

Theorem VI.

„Es sei W irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + f\left(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_m,\, \frac{\partial W}{\partial q_1},\, \frac{\partial W}{\partial q_2},\, \ldots,\, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right),$$

welche Lösung ausser einer zu W hinzukommenden Constante die m willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ enthalte, so sind die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial q_1} &= p_1, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} &= \beta_1, \\
\frac{\partial W}{\partial q_2} &= p_2, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \beta_2, \\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\
\frac{\partial W}{\partial q_m} &= p_m, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} &= \beta_m,
\end{aligned}$$

in welchen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ andere m willkürliche Constanten bedeuten, die vollständigen Integralgleichungen folgender $2m$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \\
\frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\
\frac{dq_m}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_m},
\end{aligned}$$

in welchen f die obige Function

$$f\left(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_m,\, \frac{\partial W}{\partial q_1},\, \frac{\partial W}{\partial q_2},\, \ldots,\, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right)$$

ist, wenn man darin für

$$\frac{\partial W}{\partial q_1},\, \frac{\partial W}{\partial q_2},\, \ldots,\, \frac{\partial W}{\partial q_m}$$

respective

$$p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_m$$

setzt.“

Der Beweis dieses Theorems ist in der zweifachen Darstellung des Ausdrucks

$$\delta \frac{dW}{dt} = \frac{d\delta W}{dt}$$

enthalten, welche man erhält, wenn man W zuerst nach t differentiirt und dann variirt, oder zuerst variirt und dann nach t differentiirt, wobei alle Variabeln als Functionen von t betrachtet werden, wie sie sich durch die aufgestellten $2m$ Integralgleichungen ergeben, und das Variationszeichen δ sich wieder nur auf die in denselben enthaltenen willkürlichen Constanten bezieht.

Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt} \\
&= -f + p_1\frac{dq_1}{dt} + p_2\frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{dq_m}{dt},
\end{aligned}$$

und daher:

$$\delta\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m}\delta q_m$$
$$+\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\delta p_1 + \left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\delta p_2 + \cdots + \left(\frac{dq_m}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_m}\right)\delta p_m$$
$$+p_1\delta\frac{dq_1}{dt} + p_2\delta\frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m\delta\frac{dq_m}{dt}.$$

Andererseits hat man

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial W}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\delta q_m$$
$$+\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\delta\alpha_m$$
$$= p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m$$
$$+\beta_1\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\alpha_2 + \cdots + \beta_m\delta\alpha_m$$

und daher:

$$\delta\frac{dW}{dt} = \frac{d\delta W}{dt} = \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m$$
$$+p_1\frac{d\delta q_1}{dt} + p_2\frac{d\delta q_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{d\delta q_m}{dt}.$$

Setzt man beide Ausdrücke von $\delta\frac{dW}{dt}$ einander gleich, und bemerkt man, dass

$$\delta\frac{dq_k}{dt} = \frac{d\delta q_k}{dt}$$

ist, so erhält man:

$$\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\delta p_1 + \left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\delta p_2 + \cdots + \left(\frac{dq_m}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_m}\right)\delta p_m$$
$$-\left(\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\right)\delta q_1 - \left(\frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\right)\delta q_2 - \cdots - \left(\frac{dp_m}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_m}\right)\delta q_m = 0.$$

Da die $2m$ Variationen δq_k, δp_k von $2m$ willkürlich anzunehmenden Variationen $\delta\alpha_k$ und $\delta\beta_k$ abhängen, so sind sie selber willkürlich und von einander unabhängig, weshalb die in dieselben multiplicirten Ausdrücke einzeln verschwinden müssen; wodurch sich die zu erweisenden Differentialgleichungen des aufgestellten Theorems ergeben.

Wenn die partielle Differentialgleichung die Function W selber enthält, so gestaltet sich das Theorem VI folgendermassen:

Theorem VII.

„Es sei W irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + f\left(W, t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0$$

mit $m+1$ willkürlichen Constanten α, α_1, α_2, ..., α_m, so sind die Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1\frac{\partial W}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2\frac{\partial W}{\partial \alpha},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m\frac{\partial W}{\partial \alpha},$$

in welchen β_1, β_2, ..., β_m neue willkürliche Constanten sind, verbunden mit dem Ausdrucke von W die $2m+1$ vollständigen Integralgleichungen der Differentialgleichungen:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1} - p_1\frac{\partial f}{\partial W},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2} - p_2\frac{\partial f}{\partial W},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m} - p_m\frac{\partial f}{\partial W},$$
$$\frac{dW}{dt} = p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m} - f,$$

in welchen f die obige Function

$$f\left(W, t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right)$$

ist, wenn man darin für die Grössen

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}$$

respective

$$p_1, p_2, \ldots, p_m$$

setzt.“

Man hat nämlich, wenn man in demselben Sinne wie bei dem vorigen Theorem differentiirt und variirt,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt}$$

$$= -f + p_1\frac{dq_1}{dt} + p_2\frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{dq_m}{dt}$$

und daher:

$$\delta\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m}\delta q_m - \frac{\partial f}{\partial W}\delta W$$

$$+\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\delta p_1 + \left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\delta p_2 + \cdots + \left(\frac{dq_m}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_m}\right)\delta p_m$$

$$+ p_1\delta\frac{dq_1}{dt} + p_2\delta\frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m\delta\frac{dq_m}{dt}.$$

Man hat ferner

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial W}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\delta q_m$$

$$+ \frac{\partial W}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\delta\alpha_m$$

$$= p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m + \frac{\partial W}{\partial \alpha}\cdot\Delta,$$

wenn man der Kürze halber

$$\Delta = \delta\alpha + \beta_1\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\alpha_2 + \cdots + \beta_m\delta\alpha_m$$

setzt. Hieraus folgt

$$\frac{d\delta W}{dt} = \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m$$

$$+ p_1\frac{d\delta q_1}{dt} + p_2\frac{d\delta q_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{d\delta q_m}{dt}$$

$$+ \frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt}\cdot\Delta.$$

Setzt man diesen Ausdruck dem oben für $\delta\frac{dW}{dt}$ gefundenen gleich und substituirt in letzterem für δW den Ausdruck

$$\delta W = p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m + \frac{\partial W}{\partial \alpha}\cdot\Delta,$$

so erhält man:

$$0 = \left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\delta p_1 + \left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\delta p_2 + \cdots + \left(\frac{dq_m}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_m}\right)\delta p_m$$

$$-\left(\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_1} + p_1\frac{\partial f}{\partial W}\right)\delta q_1 - \cdots - \left(\frac{dp_m}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_m} + p_m\frac{\partial f}{\partial W}\right)\delta q_m$$

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt}\right).\Delta.$$

Die $2m+1$ Grössen $\delta p_1, \delta p_2, \ldots, \delta p_m, \delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m, \Delta$ sind aus den $2m+1$ Variationen $\delta\alpha, \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\alpha_m, \delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots, \delta\beta_m$ zusammengesetzt, und da diese willkürlich und von einander unabhängig sind, so sind es auch jene. Die vorstehende Gleichung kann daher nur erfüllt werden, wenn die in die einzelnen Variationen multiplicirten Ausdrücke verschwinden, wodurch man die zu erweisenden Differentialgleichungen des aufgestellten Theorems erhält. Die letzte dieser Gleichungen folgt nämlich aus der Gleichung:

$$\frac{dW}{dt} = -f + p_1\frac{dq_1}{dt} + p_2\frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{dq_m}{dt},$$

wenn man darin die Substitutionen

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots, \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}$$

vornimmt. Man findet ausserdem noch, wenn man den in Δ multiplicirten Ausdruck gleich Null setzt, die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt} = 0.$$

Ganz ähnliche Gleichungen gelten auch für jede der anderen willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Ich will für den Fall, in welchem die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function nicht selber enthält, auch noch annehmen, dass sie die eine Variabele t nicht selber involvire, wie dies in denjenigen Problemen der Mechanik der Fall ist, in welchen der Satz von der lebendigen Kraft gilt. Für diese Annahme erhält man eine vollständige Lösung der Gleichung

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + f\left(q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right),$$

wenn man

$$W = V - ht$$

setzt, wo h eine willkührliche Constante ist und V eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$h = f\left(q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_m}\right),$$

welche ausser einer willkürlichen Constanten, die hinzuaddirt werden kann, noch $m-1$ willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ enthält. Schreibt man in dem Theorem VI $-h$ und $-\tau$ statt α_m und β_m und bemerkt, dass

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = \frac{\partial V}{\partial q_m},$$
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m-1}} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_{m-1}},$$
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = -\frac{\partial W}{\partial h} = t - \frac{\partial V}{\partial h}$$

ist, so verwandelt sich das Theorem VI in folgendes:

Theorem VIII.

„Es sei V eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$h = f\left(q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_m}\right),$$

in welcher h eine Constante ist; es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ die $m-1$ willkürlichen Constanten, welche ausser einer, die zu V hinzuaddirt werden kann, in V enthalten sind; so sind die $2m$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial q_1} &= p_1, & \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} &= \beta_1,\\
\frac{\partial V}{\partial q_2} &= p_2, & \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} &= \beta_2,\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots\\
\frac{\partial V}{\partial q_{m-1}} &= p_{m-1}, & \frac{\partial V}{\partial \alpha_{m-1}} &= \beta_{m-1},\\
\frac{\partial V}{\partial q_m} &= p_m, & \frac{\partial V}{\partial h} &= t+\tau,
\end{aligned}$$

in welchen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}, \tau$ neue willkürliche Constanten sind, die vollständigen, $2m$ willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}, h, \tau$ enthaltenden Integralgleichungen der $2m$ Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_1},\\
\frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_2},\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots\\
\frac{dq_m}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_m},
\end{aligned}$$

in welchen f die obige Function $f\left(q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_m}\right)$ ist, wenn man darin $p_1, p_2, \ldots, p_m$ für $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_m}$ schreibt."

§. 15. Ausdrücke der charakteristischen Function und ihrer Differentialquotienten durch die ursprünglichen Coordinaten bei unfreier Bewegung.

Man erhält aus den Theoremen VI und VIII die auf die Mechanik bezüglichen Formeln, wenn man für f die Function $H = T - U$ setzt. Die Grössen q_i bedeuten solche Bestimmungsstücke der bewegten Punkte, zwischen welchen keine Bedingungsgleichungen stattfinden, so dass man für die orthogonalen Coordinaten sämmtlicher vollkommen bestimmte Ausdrücke durch die Grössen q_i hat. Diese Ausdrücke der Coordinaten und ihre Differentialquotienten hat man in den Ausdruck der halben lebendigen Kraft T und der Kräftefunction U zu substituiren und die partiellen Differentialquotienten von T, nach den Grössen $q_i' = \frac{dq_i}{dt}$ genommen, gleich p_i zu setzen; endlich in T für die Grössen q_i' die Grössen p_i einzuführen. Es wird dann $H = T - U$ eine Function der Grössen q_i und p_i, welche nur dann noch ausserdem die Grösse t enthält, wenn dieselbe in der Kräftefunction ausser den Coordinaten vorkommt, und diese Function H hat man in den genannten Theoremen für f zu setzen. Ich will nun annehmen, dass rückwärts in die *charakteristische* Function W, welche irgend ein vollständiges Integral der Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0$$

bedeutete, statt der Grössen q_i wieder die rechtwinkligen Coordinaten substituirt werden, so dass W eine Function von x_i, y_i, z_i und von den m willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ wird, wobei ich von einer weiteren Constanten abstrahire, die noch durch Addition mit W verbunden sein kann. Wenn zwischen den Coordinaten Bedingungsgleichungen gegeben sind, so wird

$$m < 3n,$$

wenn n die Zahl der bewegten materiellen Punkte ist; man kann dann die Grössen q_i auf unendlich verschiedene Arten durch die Coordinaten x_i, y_i, z_i ausdrücken, indem man vermittelst der zwischen den Coordinaten stattfindenden Bedingungsgleichungen, deren Anzahl $3n-m$ beträgt, die Ausdrücke variirt. Es kann daher auch die Function W, wenn man in sie statt der Grössen q_i die Coordinaten einführt, verschiedene Formen annehmen, welche aber, wenn $F=0$, $\Phi=0$ etc. die Bedingungsgleichungen sind, alle aus einer erhalten werden, wenn man zu ihr die Functionen F, Φ etc., jede mit einem Factor versehen, hinzufügt.

Hat man nun für die Grössen q_i Ausdrücke durch die Coordinaten x_i, y_i, z_i in irgend einer Form, welche dieselben vermittelst der Bedingungsgleichungen $F=0$, $\Phi=0$ etc. erhalten können, angenommen und dieselben in die Function W substituirt, so wird, wenn ξ eine der Coordinaten x_i, y_i, z_i bedeutet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \xi} &= \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \xi}+\frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \xi}+\cdots+\frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \xi}\\ &= p_1\frac{\partial q_1}{\partial \xi}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial \xi}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial \xi}.\end{aligned}$$

Es war aber, wenn man sich T durch die Grössen q_i und q_i' ausgedrückt denkt,

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'},$$

wodurch die vorige Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial q_1'}\frac{\partial q_1}{\partial \xi}+\frac{\partial T}{\partial q_2'}\frac{\partial q_2}{\partial \xi}+\cdots+\frac{\partial T}{\partial q_m'}\frac{\partial q_m}{\partial \xi}.$$

Betrachtet man q_i' als Function der Grössen x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', welche in Bezug auf die Grössen x_i', y_i', z_i' linear sein wird, so hat man:

$$\frac{\partial q_i'}{\partial \xi'} = \frac{\partial q_i}{\partial \xi},$$

da in dem durch Differentiation erhaltenen Ausdruck von q_i' die Grösse ξ' nur linear und in $\frac{\partial q_i}{\partial \xi}$ multiplicirt vorkommt. Man hat daher:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial q_1'}\frac{\partial q_1'}{\partial \xi'}+\frac{\partial T}{\partial q_2'}\frac{\partial q_2'}{\partial \xi'}+\cdots+\frac{\partial T}{\partial q_m'}\frac{\partial q_m'}{\partial \xi'}$$

oder

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial \xi'}.$$

Diese Gleichung gilt für jede der Coordinaten. Setzt man für ξ die Werthe x_i, y_i, z_i, so erhält man:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i'},\quad \frac{\partial W}{\partial y_i} = \frac{\partial T}{\partial y_i'},\quad \frac{\partial W}{\partial z_i} = \frac{\partial T}{\partial z_i'}.$$

Wenn man, um die Ausdrücke rechter Hand oder die partiellen Differentialquotienten von T nach x_i', y_i', z_i' zu erhalten, in die Function T, wie sie durch die Grössen q_i und q_i' ausgedrückt ist, die angenommenen Ausdrücke der Grössen q_i durch die Grössen x_i, y_i, z_i substituirt, sowie die daraus durch Differentiation abgeleiteten Ausdrücke der Grössen q_i' durch die Grössen x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', so wird sich die Function T im Allgemeinen nicht in den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'x_i'+y_i'y_i'+z_i'z_i')$$

verwandeln, sondern in einen anderen, der ihm vermittelst der Gleichungen

$$F=0,\quad \Phi=0,\quad \ldots$$

und der daraus durch Differentiation folgenden

$$\frac{dF}{dt}=0,\quad \frac{d\Phi}{dt}=0,\quad \ldots$$

gleich wird. Es wird daher der Ausdruck, in welchen sich die Function T verwandelt, folgende Form annehmen:

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'x_i'+y_i'y_i'+z_i'z_i')+\lambda\frac{dF}{dt}+\mu\frac{d\Phi}{dt}+\cdots+\lambda_1 F+\mu_1\Phi+\cdots.$$

Die Functionen F, Φ etc. enthalten die Grössen x_i', y_i', z_i' gar nicht, die Functionen $\frac{dF}{dt}$, $\frac{d\Phi}{dt}$ etc. enthalten dieselben nur linear und in die Grössen

$$\frac{\partial F}{\partial x_i},\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},\quad \ldots,\quad \frac{\partial F}{\partial y_i},\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_i},\quad \ldots,\quad \frac{\partial F}{\partial z_i},\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_i},\quad \ldots$$

multiplicirt. Wenn man daher den vorstehenden Ausdruck von T partiell nach x_i', y_i', z_i' differentiirt und die in F, Φ etc., $\frac{dF}{dt}$, $\frac{d\Phi}{dt}$ etc. multiplicirten Terme als verschwindend fortlässt, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i'} = m_i x_i' + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \cdots,$$
$$\frac{\partial W}{\partial y_i} = \frac{\partial T}{\partial y_i'} = m_i y_i' + \lambda \frac{\partial F}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \cdots,$$
$$\frac{\partial W}{\partial z_i} = \frac{\partial T}{\partial z_i'} = m_i z_i' + \lambda \frac{\partial F}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} + \cdots.$$

Die Multiplicatoren λ, μ etc. können aus diesen Gleichungen eliminirt werden vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{dF}{dt} = \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial F}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial F}{\partial z_i} z_i'\right) = 0,$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \Sigma\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} z_i'\right) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

welche, wenn man die Werthe von x_i', y_i', z_i' substituirt, sich in folgende verwandeln:

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial W}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_i} + \frac{\partial W}{\partial z_i}\frac{\partial F}{\partial z_i}\right) = A\,\lambda + B\,\mu + \cdots,$$
$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial W}{\partial y_i}\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \frac{\partial W}{\partial z_i}\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\right) = A_1\lambda + B_1\mu + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wo

$$A = \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial F}{\partial z_i}\right),$$
$$B = A_1 = \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\right),$$
$$B_1 = \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist. Hat man aus diesen Gleichungen die Werthe von λ, μ etc. bestimmt, welche in Bezug auf die partiellen Differentialquotienten der Function W eine lineare Form erhalten, so wird sich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = \frac{\partial W}{\partial t} + T - U = 0,$$

welcher die Function W zu genügen hat, in folgende verwandeln:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \cdots\right)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial W}{\partial y_i} - \lambda \frac{\partial F}{\partial y_i} - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} - \cdots\right)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial W}{\partial z_i} - \lambda \frac{\partial F}{\partial z_i} - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} - \cdots\right)^2 = U,$$

wo U irgend eine gegebene Function der Grössen x_i, y_i, z_i und von t sein kann. Wenn U nicht t selber enthält, so führt man besser wieder für W die Function V und für t die Grösse h ein vermittelst der Gleichungen:

$$V = W - (t+\tau)\frac{\partial W}{\partial t}, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -h;$$

die partiellen Differentialquotienten von W nach x_i, y_i, z_i verwandeln sich in die von V, nach denselben Grössen genommen.

Ich bemerke noch, dass die partiellen Differentialquotienten von W oder V, welche nach den willkürlichen Constanten genommen werden, die diese Functionen enthalten, sich dadurch, dass man statt der Grössen q_i wieder die Coordinaten x_i, y_i, z_i einführt, nicht ändern, da die zwischen den Grössen q_i, x_i, y_i, z_i stattfindenden Relationen die willkürlichen Constanten nicht enthalten. Es werden daher wieder, auch wenn die Functionen W oder V durch die Coordinaten x_i, y_i, z_i selbst ausgedrückt sind, die endlichen Integralgleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

oder:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t+\tau,$$

wie wir sie zufolge der obigen Theoreme fanden, in welchen W und V Functionen der Grössen q_i waren.

§. 16. Untersuchung des Falles, in welchem die vollständige Lösung eine zu grosse Anzahl von Constanten enthält, welche durch Bedingungsgleichungen mit einander verbunden sind.

Ich will noch kurz erwähnen, wie man sich der Multiplicatoren bedienen kann, wenn für die m willkürlichen Constanten eine grössere Anzahl, $m+k$, von solchen eingeführt wird, zwischen denen k Bedingungsgleichungen

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k = 0$$

stattfinden. Der hier zu befolgende Gang weicht von dem gewöhnlichen etwas ab, wenn man in dem angeführten Falle den Integralgleichungen eine symmetrische Form erhalten will.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}$ die in der Function W enthaltenen willkürlichen Constanten, zwischen denen die angegebenen k Gleichungen gegeben sind. Man betrachte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ als unabhängige Grössen und $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_{m+k}$ als Functionen derselben, wie sie durch die k Gleichungen bestimmt sind. Schliesst man die unter dieser Annahme nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ genommenen partiellen Differentialquotienten von W in Klammern ein, so hat man

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}}\frac{\partial \alpha_{m+1}}{\partial \alpha_1} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}}\frac{\partial \alpha_{m+k}}{\partial \alpha_1},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}}\frac{\partial \alpha_{m+1}}{\partial \alpha_2} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}}\frac{\partial \alpha_{m+k}}{\partial \alpha_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}}\frac{\partial \alpha_{m+1}}{\partial \alpha_m} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}}\frac{\partial \alpha_{m+k}}{\partial \alpha_m}.$$

Man denke sich jetzt k Functionen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ durch die Gleichungen bestimmt:

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+1}} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+1}},$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+2}} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+2}} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+k}} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+k}}.$$

Substituirt man die diesen Gleichungen entnommenen Werthe von

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}}$$

in die obigen Gleichungen, und bemerkt die Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m+1}}\frac{\partial \alpha_{m+1}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m+2}}\frac{\partial \alpha_{m+2}}{\partial \alpha_i} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m+k}}\frac{\partial \alpha_{m+k}}{\partial \alpha_i},$$

in welchen i jede der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ und ψ jede der Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ bedeuten kann, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_1},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_m} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_m} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_m},$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+1}} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_{m+1}} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+k}} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_{m+k}} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+k}}.$$

Zufolge des gefundenen Theorems werden die endlichen Integralgleichungen, welche in einer neuen Form darzustellen sind,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right) = \beta_1, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\right) = \beta_2, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\right) = \beta_m,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ neue willkürliche Constanten sind. Aus diesen Gleichungen folgt allgemein, dass, wenn $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ irgend welche Constanten sind, auch der Ausdruck

$$\zeta_1\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right) + \zeta_2\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\right) + \cdots + \zeta_m\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\right)$$

einer willkürlichen Constante gleich wird. *Bedeutet daher* $\zeta_1^{(i)}, \zeta_2^{(i)}, \ldots, \zeta_{m+k}^{(i)}$ *irgend ein System von* $m+k$ *Constanten, für welches die* k *Gleichungen stattfinden:*

$$\zeta_1^{(i)} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \zeta_2^{(i)} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \cdots + \zeta_{m+k}^{(i)} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+k}} = 0,$$

$$\zeta_1^{(i)} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \zeta_2^{(i)} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \zeta_{m+k}^{(i)} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_{m+k}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta_1^{(i)} \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_1} + \zeta_2^{(i)} \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_2} + \cdots + \zeta_{m+k}^{(i)} \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+k}} = 0,$$

und wählt man irgend m *solcher von einander unabhängigen Systeme, welchen die Indices* $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ *entsprechen mögen, so erhält man, wenn man* *die vorstehenden Gleichungen mit* $\zeta_1^{(i)}, \zeta_2^{(i)}, \ldots, \zeta_{m+k}^{(i)}$ *multiplicirt und addirt, die* m *Integralgleichungen unter folgender Form:*

$$\begin{aligned}
\zeta_1' \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \zeta_2' \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \cdots + \zeta_{m+k}' \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} &= \gamma_1, \\
\zeta_1'' \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \zeta_2'' \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \cdots + \zeta_{m+k}'' \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} &= \gamma_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\zeta_1^{(m)} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \zeta_2^{(m)} \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \cdots + \zeta_{m+k}^{(m)} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} &= \gamma_m,
\end{aligned}$$

in welchen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ *die neuen* m *willkürlichen Constanten sind.*

Die in dem vorstehenden Theorem enthaltenen Formeln haben in Bezug auf die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}$ die gewünschte symmetrische Form.

§. 17. Ueber den Fall, in welchem eine vollständige Lösung der betrachteten partiellen Differentialgleichung überzählige Constanten enthält.

Ich will nun noch einiges über den Fall sagen, wenn die Function W, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0,$$

in der H irgend eine gegebene Function der $m+1$ unabhängigen Variabeln $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ und der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}$ ist, Genüge leistet, ausser einer mit ihr durch Addition verbundenen Constante, von welcher ich immer abstrahire, mehr als m willkürliche Constanten involvirt, zwischen welchen keine Bedingungsgleichung gegeben ist. Dieses ist um so eher möglich, weil die Function W sogar willkürliche Functionen, also *unendlich viele* willkürliche Constanten involviren kann.

Die nachstehenden Betrachtungen werden zugleich dazu dienen, die Natur der Theoreme VI und VIII, welche als Fundamentaltheoreme betrachtet werden können, näher zu erläutern.

Man denke sich irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0$$

gegeben, und das System von m *gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung vorgelegt:*

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$

in welchen p_i *für* $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ *geschrieben ist: so hat man das Theorem, dass, wenn* W *irgend eine willkürliche Constante* α *enthält, die Gleichung*

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta$$

ein Integral des vorstehenden Systems von Differentialgleichungen ist.

Differentiirt man nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta,$$

und setzt darauf $\frac{\partial H}{\partial p_k}$ für $\frac{dq_k}{dt}$, so erhält man:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}.$$

Da die Constante α in H nur vorkommt, insofern sie in den Grössen $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ enthalten ist, so ist der Ausdruck rechter Hand der nach α genommene partielle Differentialquotient des Ausdrucks

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H$$

und also identisch gleich Null, wodurch β einer willkürlichen Constante gleich wird, was zu erweisen war.

Die Constante α ist nur willkürliche Constante genannt worden, insofern sie nicht in der partiellen Differentialgleichung, welcher W genügt, vorkommt; dagegen afficirt sie das aufgestellte System gewöhnlicher Differentialgleichungen und ist daher bei Integration desselben als *gegebene* und nur β als *willkürliche* Constante zu betrachten.

Enthält die Function W mehrere willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, welche daher auch in den aufgestellten Differentialgleichungen als gegebene Constanten vorkommen werden, so hat man nach dem Vorstehenden n Integrale dieser Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \beta_n,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ Constanten bedeuten. Ist $n > m$, so kann es unter diesen Integralen nicht mehr als m von einander unabhängige geben; es bestehen also zwischen den n nach den Constanten α genommenen partiellen Differentialquotienten der Function W nothwendig $n-m$ oder mehr Relationen.

Da man jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit $m+1$ unabhängigen Variabeln, in welcher die unbekannte Function selbst nicht vorkommt, dadurch, dass man sie nach einem der in ihr vorkommenden Differentialquotienten auflöst, auf die im Vorhergehenden angenommene Form

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H=0$$

bringen kann, so ergiebt sich aus dem Vorstehenden folgender Satz:

„Wenn man von einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit $m+1$ unabhängigen Variabeln, in welcher die unbekannte Function selber nicht vorkommt, eine Lösung mit $m+k$ willkürlichen Constanten hat, so bestehen unter den nach diesen Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten der Lösung stets k Relationen, d. h. Gleichungen, die ausser den genannten Differentialquotienten zwar noch die willkürlichen Constanten enthalten können, nicht aber die unabhängigen Variabeln selber.“

Ein Beispiel dieses Satzes habe ich oben bei Aufsuchung derjenigen charakteristischen Function gegeben, von welcher die elliptische Bewegung eines Planeten abhängt. Die dort gefundene charakteristische Function V enthielt eine willkürliche Constante mehr als nöthig war, und zwischen ihren nach den willkürlichen Constanten, die sie enthält, genommenen partiellen Differentialquotienten ergab sich die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\right)^2=b^2,$$

welche, wie man sieht, ausser $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial V}{\partial \beta}$ nur die willkürlichen Constanten involvirt.

§. 18. Ausdehnung der vorhergehenden Untersuchung auf den Fall, wenn die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function selbst enthält.

Ich will jetzt das im Vorhergehenden gegebene Theorem auf den Fall ausdehnen, in welchem die partielle Differentialgleichung auch die unbekannte Function W selber involvirt. Die hier angestellten Betrachtungen werden ebenso dazu dienen, das Theorem VII seiner wahren Natur nach näher zu erläutern, wie die vorstehenden Betrachtungen auf das Theorem VI Licht werfen.

Man kann die im Theorem VII gegebenen endlichen Integralgleichungen durch die Gleichungen ersetzen:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha}+\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt}=0,$$

indem man für α nach und nach die $m+1$ willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ setzt. Diese Gleichungen sind in dem Beweise, welchen ich von dem Theorem VII gegeben habe, enthalten. Sie haben zwar die Form von Differentialgleichungen erster Ordnung; da man aber aus ihnen ersieht, dass die Differentiale der Logarithmen der Grössen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1},\quad \ldots,\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}$$

alle derselben Grösse

$$-\frac{\partial f}{\partial W}dt$$

und daher auch unter einander selbst gleich sind, so folgt hieraus, dass diese Grössen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1},\quad \ldots,\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}$$

sich wie Constanten verhalten müssen. Die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha}+\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt}=0$$

können also an die Stelle der im Theorem VII aufgestellten endlichen Integralgleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}:\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}:\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}:\ldots:\frac{\partial W}{\partial \alpha_m}=1:\beta_1:\beta_2:\ldots:\beta_m$$

gesetzt werden, in welchen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ willkürliche Constanten waren.

Man kann aber auch jede *einzelne* dieser Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha}+\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt}=0$$

besonders beweisen, ohne dass man darauf Rücksicht nimmt, ob W noch andere willkürliche Constanten ausser α enthalte. Man hat nämlich folgenden Satz:

„Es sei eine Function W gegeben, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t}+f\left(W,\, t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_m,\, \frac{\partial W}{\partial q_1},\, \frac{\partial W}{\partial q_2},\, \ldots,\, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right)=0$$

Genüge leistet, es sei ferner zwischen den Grössen t, q_1, q_2, $\ldots$, q_m das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgelegt:

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_2},\quad \ldots,\quad \frac{dq_m}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_m},$$

wo der Kürze halber p_1, p_2, $\ldots$, p_m für $\frac{\partial W}{\partial q_1}$, $\frac{\partial W}{\partial q_2}$, $\ldots$, $\frac{\partial W}{\partial q_m}$ geschrieben ist. Enthält dann die Function W eine willkürliche Constante α, d. h. eine Constante α, die nicht in der partiellen Differentialgleichung vorkommt, so findet vermöge der vorgelegten gewöhnlichen Differentialgleichungen die identische Gleichung statt:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha}+\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt}=0;$$

und wenn die Function W irgend zwei willkürliche Constanten α, α_1 enthält, so wird

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}:\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\text{Const.}$$

ein Integral des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen."

Es wird nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha}+\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt}=0,$$

wenn man die Differentiation ausführt und die vorgelegten Differentialgleichungen substituirt:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m}=0,$$

und diese Gleichung wird identisch erfüllt. Denn der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen ist der nach α genommene partielle Differentialquotient von $\frac{\partial W}{\partial t}+f$ und also identisch gleich Null, da $\frac{\partial W}{\partial t}+f$ identisch gleich Null ist. Enthält W noch eine zweite willkürliche Constante α_1, so hat man ebenso:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}+\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}}{dt}=0.$$

Man hat daher auch vermittelst des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen die identische Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}}{dt}-\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt}=0,$$

oder

$$\frac{d\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}:\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)}{dt}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}:\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\text{Const.},$$

was zu beweisen war.

Wenn die Function W $m+k+1$ willkürliche Constanten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}$ enthält, so erhält man nach dem Vorigen $m+k$ Integrale des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}=\beta_1\frac{\partial W}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}=\beta_2\frac{\partial W}{\partial \alpha},\quad \ldots,\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}}=\beta_{m+k}\frac{\partial W}{\partial \alpha},$$

in welchen β_1, β_2, $\ldots$, β_{m+k} Constanten sind. Diese Constanten können aber nicht alle willkürlich sein, sondern, wenn m von ihnen willkürlich sind, müssen die übrigen k durch sie und die Constanten α, α_1, $\ldots$, α_{m+k} bestimmt sein. Man hat daher, wenn man m statt $m+1$ setzt, folgenden Satz:

„Wenn man von einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit m unabhängigen Variabeln eine Lösung mit $m+k$ willkürlichen Constanten hat, so finden zwischen den Verhältnissen der nach diesen willkürlichen Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten der Lösung stets k Relationen statt, d. h. k Gleichungen, welche ausser diesen Verhältnissen nur noch die willkürlichen Constanten enthalten."

§. 19. Andere Darstellung. Ueber die zweite von Hamilton aufgestellte partielle Differentialgleichung.

Man kann die im Vorhergehenden gegebenen Beweise auch noch auf eine andere Art darstellen. Es sei

$$\varphi=0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit m unabhängigen Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$, in welcher die abhängige Variabele oder die gesuchte Function nicht selbst vorkommt. Eine specielle Lösung W dieser Differentialgleichung enthalte eine willkürliche Constante α, und man setze

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = u,$$

wobei angenommen wird, dass aus $\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ die Variabeln q nicht sämmtlich verschwinden. Die partiellen Differentialquotienten von W nach $q_1, q_2, \ldots, q_m$ bezeichne man wieder mit $p_1, p_2, \ldots, p_m$, so werden die partiellen Differentialquotienten dieser Grössen nach α die partiellen Differentialquotienten von u nach $q_1, q_2, \ldots, q_m$ sein. Differentiirt man nun die Gleichung $\varphi = 0$ nach α, so erhält man

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial \alpha}$$

oder

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial u}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial u}{\partial q_m}.$$

Werden in dieser Gleichung die Grössen $\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}$ als gegebene Functionen von $q_1, q_2, \ldots, q_m$ betrachtet, so giebt es $m-1$ von einander unabhängige Functionen u, welche dieser Gleichung Genüge leisten, und jede andere, welche dieses ebenfalls thut, ist eine Function derselben. Hat man daher $m+k-1$ solcher Functionen, so müssen zwischen ihnen k Relationen stattfinden. Enthält W eine Anzahl von $m+k-1$ willkürlichen Constanten, so sind nach dem Vorhergehenden die partiellen Differentialquotienten von W nach ihnen solche $m+k-1$ Functionen; es müssen daher zwischen denselben k Relationen stattfinden, was zu beweisen war.

Wenn φ noch W selber enthält, so hat man:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial W}u + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial u}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial u}{\partial q_m}.$$

Kennt man noch eine zweite Function u_1, welche dieser Gleichung Genüge leistet, so hat man auch:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial W}u_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial u_1}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial u_1}{\partial q_m}.$$

Man dividire die erste Gleichung durch u, die zweite durch u_1 und ziehe sie nachher von einander ab, so erhält man, wenn

$$w = \log\frac{u_1}{u}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial w}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial w}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial w}{\partial q_m}.$$

Man hat hierdurch diesen Fall auf den vorigen zurückgeführt. Man sieht daher durch dieselben Betrachtungen, dass, wenn man $m+k-1$ Functionen w kennt, welche dieser Gleichung Genüge leisten, zwischen ihnen, und daher auch zwischen den Functionen e^w, k Relationen stattfinden müssen. Man erhält aber $m+k-1$ Functionen e^w, wenn man $m+k$ Functionen u kennt, welche der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial W}u + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial u}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial u}{\partial q_m} = 0$$

Genüge leisten, und durch eine derselben die übrigen dividirt; es müssen daher zwischen den Verhältnissen solcher $m+k$ Functionen k Relationen stattfinden. Da nun ferner $m+k$ solcher Functionen u erhalten werden, wenn W eine gleiche Zahl willkürlicher Constanten enthält und nach ihnen partiell differentiirt wird, so müssen für den Fall, dass W $m+k$ willkürliche Constanten enthält, zwischen den nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten von W sich k Relationen ergeben, was der obige Satz war.

Die vorstehenden Betrachtungen werfen auch auf den Umstand Licht, dass Hamilton seine charakteristische Function durch *zwei* partielle Differentialgleichungen, denen sie gleichzeitig genügt, definiren konnte. Nach dem Vorhergehenden nämlich ist dies immer möglich, wenn die Zahl der willkürlichen Constanten um eins grösser ist, als zu einer *vollständigen* Lösung nöthig ist. Denn es ist im Vorhergehenden bewiesen worden, dass in diesem Falle zwischen den willkürlichen Constanten und den nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der gefundenen Lösung eine Gleichung stattfindet. *Hat man daher von einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung eine Lösung gefunden mit einer willkürlichen Constanten mehr, als die Zahl der unabhängigen Variabeln beträgt oder als zur vollständigen Lösung nöthig ist, so genügt dieselbe Function gleichzeitig zwei partiellen Differentialgleichungen,* *nämlich der vorgelegten zwischen den unabhängigen Variabeln, der unbekannten Function und ihren nach den unabhängigen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten, welche die willkürlichen Constanten nicht enthält, und einer anderen zwischen den willkürlichen Constanten und den nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der unbekannten Function, welche die unabhängigen Variabeln nicht enthält.* Die charakteristischen Functionen V und W, welche Hamilton braucht, genügen den partiellen Differentialgleichungen:

$$H = h, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + H = 0,$$

welche die gesuchte Function nicht selber enthalten. In der ersten dieser Gleichungen sind die m Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$, in der andern die $m+1$ Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, t$ die unabhängigen Variabeln; jedoch kommt in den Fällen, welche Hamilton betrachtet, in der letztern nicht t selber, sondern nur der partielle Differentialquotient von W nach t vor. Die von Hamilton gegebenen, oben mitgetheilten Ausdrücke von V und W enthalten als willkürliche Constanten die Anfangswerthe der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$, zu denen noch durch blosse Addition eine willkürliche Constante hinzugefügt werden kann; ausserdem kann in W noch t in $t+\tau$ verwandelt werden, wo τ ebenfalls eine willkürliche Constante ist. Auf diese Weise erhalten beide Functionen V und W eine willkürliche Constante mehr, als die Zahl der unabhängigen Variabeln beträgt, so dass sie zwei partiellen Differentialgleichungen gleichzeitig genügen. Man erhält für die Function W die zweite von Hamilton gegebene partielle Differentialgleichung, wenn man für $\frac{\partial W}{\partial \tau}$ den ihm gleichen Ausdruck $\frac{\partial W}{\partial t}$ und $\tau = 0$ setzt.

§. 20. Nachweis, dass sich die in grösserer Anzahl vorhandenen willkürlichen Constanten aus der gefundenen Function mit Hülfe ihrer Differentialquotienten wirklich eliminiren lassen.

Wenn eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mehr willkürliche Constanten enthält, als zu einer *vollständigen* Lösung erforderlich sind, so finden, wie wir im Vorhergehenden gesehen haben, zwischen ihren nach diesen willkürlichen Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten Relationen statt. Es lassen sich aber die hierüber gefundenen Sätze auch umkehren. Man kann nämlich auch zeigen, dass, wenn diese Relationen

stattfinden, die Constanten sich sämmtlich vermittelst der partiellen Differentialquotienten der Function eliminiren lassen. Es reicht hin, dies für den Fall zu zeigen, wenn die Function nur *eine* willkürliche Constante mehr enthält, als zur vollständigen Lösung erfordert wird. Denn wenn von jeder der überzähligen Constanten besonders gezeigt ist, dass sie bei der Elimination der zu einer vollständigen Lösung erforderlichen Anzahl von Constanten von selbst mit herausgeht, so hat man bewiesen, dass bei der Elimination der letzteren gleichzeitig *sämmtliche* andere Constanten mit herausgehen.

Ich will zuerst wieder den Fall betrachten, wenn die vorgelegte partielle Differentialgleichung nicht die unbekannte Function selber enthält. Für diesen Fall kann man den Satz, welchen ich im Vorhergehenden bewiesen habe, so ausdrücken:

A. *„Es sei*

$$W(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

irgend eine Function der $2m+2$ Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, und es werde gesetzt:

$$(1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

$$(2) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m;$$

so wird man, wenn der Fall eintritt, dass man aus dem ersten Systeme von $m+1$ Gleichungen die $m+1$ Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eliminiren kann und so eine Gleichung bloss zwischen den Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ erhält, immer auch aus dem zweiten Systeme von $m+1$ Gleichungen sämmtliche $m+1$ Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ eliminiren oder eine Gleichung bloss zwischen den Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ erhalten können.“

Will man diesen Satz umkehren, so hat man zu beweisen, dass, wenn man aus den Gleichungen (2) die Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ eliminiren kann, man immer auch aus den Gleichungen (1) die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eliminiren kann. Dieser Satz lässt sich aber aus dem Vorhergehenden ohne weiteres folgern, wenn man nur die Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ mit den Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ vertauscht.

Für den Fall, dass die vorgelegte partielle Differentialgleichung die unbekannte Function selber enthält, wird der oben gefundene Satz folgender:

B. *„Es sei*

$$W = \chi(q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

ferner:

$$(1) \quad \frac{\partial \chi}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial \chi}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \chi}{\partial q_m} = p_m,$$

$$(2) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = \beta, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_m} = \beta_m;$$

kann man aus der Gleichung $W = \chi$ *und den* m *Gleichungen* (1) *die* $m+1$ *Grössen* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *eliminiren, so dass man bloss eine Gleichung zwischen* $W, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ *erhält, so kann man auch aus den* m *Gleichungen*

$$(3) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} = \frac{\beta_1}{\beta} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_2} = \frac{\beta_2}{\beta} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_m} = \frac{\beta_m}{\beta} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}$$

die m *Grössen* $q_1, q_2, \ldots, q_m$ *eliminiren, so dass man eine Gleichung bloss zwischen den Grössen* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \frac{\beta_1}{\beta}, \frac{\beta_2}{\beta}, \ldots, \frac{\beta_m}{\beta}$ *erhält.“*

Man kann diesen Satz aus dem vorhergehenden ableiten, wenn man darin für $W, p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ schreibt $t\chi, W, tp_1, tp_2, \ldots, tp_m$, und diese Bemerkung dient auch dazu, den umgekehrten Satz zu beweisen, da wir gesehen haben, dass man den vorhergehenden Satz umkehren kann. Es ist nämlich, da χ nach der Voraussetzung nicht t enthalten soll, dasselbe, ob man sagt, man könne aus den Gleichungen (3) die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ eliminiren, oder, man könne aus den Gleichungen:

$$t\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = \beta, \quad t\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \ldots, \quad t\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

die Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ eliminiren. Denn stellt man die Elimination so an, dass man zuerst t und dann die übrigen Grössen eliminirt, so hat man, um t herauszuschaffen, die vorstehenden Gleichungen durch eine derselben zu dividiren, wodurch man auf die Gleichungen (3) kommt. Kann man aber aus den Gleichungen

$$t\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = \beta, \quad t\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \ldots, \quad t\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

sämmtliche Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ eliminiren, so folgt aus der Umkehrung

des Theorems A, wenn man darin $t\chi$ für W und W für p setzt, dass man auch aus den Gleichungen

$$\frac{\partial(t\chi)}{\partial t} = \chi = W, \quad \frac{\partial(t\chi)}{\partial q_1} = t\frac{\partial \chi}{\partial q_1} = p_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial(t\chi)}{\partial q_m} = t\frac{\partial \chi}{\partial q_m} = p_m$$

sämmtliche Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eliminiren kann, wodurch man eine Gleichung bloss zwischen $W, q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{p_1}{t}, \frac{p_2}{t}, \ldots, \frac{p_m}{t}$ erhält. Oder, wenn man $p_1, p_2, \ldots, p_m$ für $\frac{p_1}{t}, \frac{p_2}{t}, \ldots, \frac{p_m}{t}$ schreibt, so wird man aus den Gleichungen

$$\chi = W, \quad \frac{\partial \chi}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial \chi}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \chi}{\partial q_m} = p_m$$

sämmtliche Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eliminiren können, so dass man eine Gleichung bloss zwischen $W, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ erhält. Man sieht also, dass, wenn man aus den Gleichungen (3) die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ eliminiren kann, man auch aus der Gleichung $W = \chi$ und den Gleichungen (1) die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eliminiren kann, welches die Umkehrung des Satzes B ist, die wir beweisen wollten.

Ich will noch im Folgenden einen *directen* Beweis des Satzes A geben; es wird dies nur für diesen Satz nöthig sein, da der Satz B auf die von mir angedeutete Weise sich aus ihm ableiten lässt.

In dem Satze A wurde angenommen, dass sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eliminiren lassen. Man kann dies auch so ausdrücken, dass, wenn man vermittelst der Gleichungen

$$(1) \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ durch $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m, \alpha$ ausdrückt und diese Ausdrücke für dieselben in $\frac{\partial W}{\partial t}$ substituirt, in dem so sich ergebenden Ausdrucke von $\frac{\partial W}{\partial t}$ die Grösse α nicht vorkomme. Betrachtet man daher $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ als Functionen der angegebenen Grössen und nimmt in diesem Sinne ihre partiellen Differentialquotienten, so hat man in dem angenommenen Falle die Gleichung:

$$(2)\quad 0=\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial\alpha_m}\frac{\partial\alpha_m}{\partial\alpha}.$$

Man denke sich ferner durch die Gleichungen

$$(3)\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_m}=\beta_m$$

die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ durch $t, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ ausgedrückt und diese Ausdrücke in

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\beta$$

substituirt, so soll bewiesen werden, dass der so erhaltene Werth von β die Grösse t nicht enthält, oder dass

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t}=0$$

ist. Da die Ausdrücke, welche man in (2) für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ substituirt hat, die Gleichungen (1) identisch erfüllen, so hat man, wenn man diese Gleichungen nach α differentiirt, und die Gleichung (2) hinzufügt:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
0&=\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial\alpha_m}\frac{\partial\alpha_m}{\partial\alpha},\\
0&=\frac{\partial^2 W}{\partial q_1\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_1\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_1\partial\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial q_1\partial\alpha_m}\frac{\partial\alpha_m}{\partial\alpha},\\
0&=\frac{\partial^2 W}{\partial q_2\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_2\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_2\partial\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial q_2\partial\alpha_m}\frac{\partial\alpha_m}{\partial\alpha},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0&=\frac{\partial^2 W}{\partial q_m\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_m\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_m\partial\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial q_m\partial\alpha_m}\frac{\partial\alpha_m}{\partial\alpha}.
\end{aligned}\right.$$

Setzt man ferner für $q_1, q_2, \ldots, q_m$ solche Ausdrücke in $t, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, welche die Gleichungen (3) identisch erfüllen, und differentiirt jene Gleichungen in diesem Sinne partiell nach t, so hat man:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
0&=\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_1\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_1\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_1\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_1\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t},\\
0&=\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_2\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_2\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_2\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_2\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0&=\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_m\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_m\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_m\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_m\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t}.
\end{aligned}\right.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (4) der Reihe nach mit $1, \frac{\partial q_1}{\partial t}, \frac{\partial q_2}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial q_m}{\partial t}$ und addirt, so verschwinden wegen der Gleichungen (5) die in $\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha}, \frac{\partial\alpha_2}{\partial\alpha}, \ldots, \frac{\partial\alpha_m}{\partial\alpha}$ multiplicirten Grössen, und man erhält:

$$0=\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t},$$

welches die zu beweisende Gleichung ist.

§. 21. Gleichungen zwischen den Differentialquotienten der Variabeln nach den Constanten und denen der Constanten nach den Variabeln.

Die im Vorhergehenden gebrauchte Analysis giebt noch andere Theoreme, welche sowohl auf die bewiesenen Sätze Licht werfen, als auch an sich sehr merkwürdig sind und als Fundamentaltheoreme betrachtet werden können.

Es sei W irgend eine Function von $q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Differentiirt man die Gleichungen

$$(1)\quad \frac{\partial W}{\partial q_1}=p_1,\quad \frac{\partial W}{\partial q_2}=p_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial W}{\partial q_m}=p_m$$

nach q_i, indem man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ als solche Functionen von $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ betrachtet, welche diese Gleichungen identisch machen, so erhält man:

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\partial^2 W}{\partial q_1\partial q_i}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_1\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_i}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_1\partial\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_i}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial q_1\partial\alpha_m}\frac{\partial\alpha_m}{\partial q_i},\\
0&=\frac{\partial^2 W}{\partial q_2\partial q_i}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_2\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_i}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_2\partial\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_i}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial q_2\partial\alpha_m}\frac{\partial\alpha_m}{\partial q_i},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0&=\frac{\partial^2 W}{\partial q_m\partial q_i}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_m\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_i}+\frac{\partial^2 W}{\partial q_m\partial\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_i}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial q_m\partial\alpha_m}\frac{\partial\alpha_m}{\partial q_i}.
\end{aligned}$$

Differentiirt man ferner die Gleichungen

$$(2)\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_m}=\beta_m$$

nach α_i, indem man $q_1, q_2, \ldots, q_m$ als Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ betrachtet, welche diese Gleichung identisch machen, so erhält man:

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k},$$
$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}.$$

Multiplicirt man die ersten Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}$$

und addirt, so erhält man durch die letzteren Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial q_i}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial q_i}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial q_m \partial q_i}\frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}$$
$$= \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_m}{\partial q_i}.$$

Addirt man zu den beiden Ausdrücken, deren Gleichheit wir nachgewiesen haben, noch $\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_k}$, so kann man diese Gleichungen kürzer so darstellen:

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial q_i},$$

wenn man in $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

und umgekehrt in $\beta_k = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k}$ die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

ausdrückt.

Man erhält auf dieselbe Weise, wenn man die Gleichungen (1) nach p_i, die Gleichungen (2) nach α_k differentiirt:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \beta_k}{\partial p_i};$$

ferner, wenn man die Gleichungen (1) nach q_i, die Gleichungen (2) nach β_k differentiirt:

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i};$$

endlich, wenn man die Gleichungen (1) nach p_i, die Gleichungen (2) nach β_k differentiirt:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i}.$$

Ich will diese Resultate in folgendem Theorem zusammenstellen:

Fundamentaltheorem.

„Es sei

$$W(q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

irgend eine Function der 2m Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, *und*

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m;$$

drückt man vermittelst dieser Gleichungen einmal die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *als Functionen von* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *aus und nimmt in diesem Sinne ihre nach den letzteren Grössen genommenen partiellen Differentialquotienten, und drückt man umgekehrt wieder vermittelst derselben Gleichungen die Grössen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *durch* $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *aus und nimmt in diesem Sinne ihre nach den letzteren Grössen genommenen partiellen Differentialquotienten, so hat man:*

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i},$$
$$\frac{\partial q_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \beta_k}{\partial p_i}.\text{“}$$

In dem vorstehenden Theorem ist angenommen, dass die Grösse α_k eine der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, und dass die Grösse q_k eine der Grössen

$q_1, q_2, \ldots, q_m$ sei. Aber der von diesem Theorem gegebene Beweis setzt dieses auf keine Weise voraus, sondern ist eben so gültig, wenn α_k und q_i irgend welche noch ausser den angegebenen $2m$ Grössen in der Function W enthaltene Grössen sind. Man erhält dann folgendes Theorem, welches das vorstehende mit in sich begreift:

„*Es sei*

$$W(q_1, q_2, \ldots, q_{m+n}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+l})$$

irgend eine Function der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_{m+n}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+l}$, *und*

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_{m+n}} = p_{m+n},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+l}} = \beta_{m+l};$$

man drücke vermittelst dieser Gleichungen die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_1, p_2, \ldots, p_{m+n}$ *durch* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+l}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_{m+n}$, *und umgekehrt die Grössen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+l}$ *durch* $q_1, q_2, \ldots, q_{m+n}$, $p_1, p_2, \ldots, p_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_{m+l}$ *aus und führe in diesem Sinne die partiellen Differentiationen aus, so hat man,*

1) *wenn sowohl i als k irgend einen der Indices* 1, 2, …, *m bedeuten,*

$$\frac{\partial q_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i};$$

2) *wenn i einen der Indices* 1, 2, …, *m und k einen der Indices* 1, 2, …, *m+l bedeutet,*

$$\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \beta_k}{\partial p_i};$$

3) *wenn i einen der Indices* 1, 2, …, *m+n und k einen der Indices* 1, 2, …, *m bedeutet,*

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i};$$

4) *wenn i einen der Indices* 1, 2, …, *m+n und k einen der Indices* 1, 2, …, *m+l bedeutet,*

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial q_i}.\text{“}$$

Man sieht, dass für den Fall 1) alle vier Gleichungen gelten, welches das obige Fundamentaltheorem ist. Ebenso gilt die Gleichung 4) auch für den

Fall 2) und 3). Man kann auch in diesem zweiten Theorem, ohne seiner Allgemeinheit in etwas zu schaden, $n = 0$ setzen, indem man die Grössen $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_{m+n}$ mit zu den Grössen $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}$ etc. zählt. Wenn man in der Gleichung 4) eine der Grössen $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_{m+n}$ mit α und eine der Grössen $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_{m+l}$ mit t bezeichnet, so erhält man als besonderen Fall das im vorigen §. gegebene Theorem *A*. Denn die Gleichheit der beiden Ausdrücke in 4) lehrt, dass, wenn der eine verschwindet, der andere zugleich mit verschwindet, und dieses giebt das Theorem *A*, wenn man

$$\alpha_k = t, \quad \beta_k = p, \quad q_i = \alpha, \quad p_i = \beta$$

setzt. Dasselbe Theorem giebt auch sogleich die Differentialgleichungen der Dynamik aus den Integralgleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$

in welchen W eine Function von $q_1, q_2, \ldots, q_m, t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ist, und die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ als Constanten angesehen werden. Wenn man nämlich in den Gleichungen 2) und 4) $\alpha_k = t$ setzt, so erhält man:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -\frac{\partial \frac{\partial W}{\partial t}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial t}}{\partial q_i}.$$

Ist nun, wie dieses in Bezug auf die Integralgleichungen der Dynamik der Fall war,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0,$$

wo H eine Function der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m, t$ bedeutet, welche die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ nicht enthält, so erhält man hieraus die Differentialgleichungen der Dynamik:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

wo das Zeichen d auf die Variabele t zu beziehen ist.

Das aufgestellte Theorem giebt eine merkwürdige Wechselbeziehung, die zwischen den beiden Formen, unter welchen man die Integralgleichungen eines Systems von Differentialgleichungen zu betrachten pflegt, für die Probleme der Dynamik stattfindet, wenn man diejenige Wahl der willkürlichen Constanten trifft, welche nach der oben gegebenen Theorie die Integration der partiellen Differentialgleichung, auf welche sich das Problem zurückführen lässt, von selber an die Hand giebt. Man betrachtet nämlich in der einen Form die Variabeln, welche in den Integralgleichungen vorkommen, sämmtlich als Functionen einer von ihnen (der Grösse t) und der willkürlichen Constanten. Oder man stellt in der andern Form diejenigen von einander unabhängigen Ausdrücke der Variabeln*) auf, welche willkürlichen Constanten gleich werden. Jede solche Gleichung, welche eine Function der Variabeln einer willkürlichen Constante gleich setzt, wird vorzugsweise *ein Integral* des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen genannt, und das Charakteristische einer solchen Integralgleichung besteht darin, dass ihr Differential vermittelst der blossen vorgelegten Differentialgleichungen, ohne auch die Integralgleichungen selbst zu Hülfe zu nehmen, *identisch* verschwindet. Man kann in der einen Form die Ausdrücke der Variabeln nach den willkürlichen Constanten, in der anderen die Ausdrücke der willkürlichen Constanten nach den Variabeln partiell differentiiren, und das vorstehende Theorem lehrt, dass in dem hier betrachteten Falle und bei der hier getroffenen Wahl der willkürlichen Constanten die beiden Arten von partiellen Differentialquotienten unmittelbar auf einander zurückkommen. Wenn man die Anfangswerthe der Variabeln, die einem Werthe $t = 0$ entsprechen, als willkürliche Constanten einführt, so werden beide Formen der Integralgleichungen sogleich aus einander erhalten, wenn man die Variabeln und ihre Anfangswerthe mit einander vertauscht und zugleich $-t$ statt t setzt, wobei jedoch zu bemerken ist, dass die Wurzelzeichen, welche die Formeln enthalten, hierbei geändert werden können.

§. 22. Anwendung der entwickelten Formeln auf die freie Bewegung.

Ich will noch den ersten der beiden gefundenen Sätze auf den besonderen Fall der Dynamik anwenden, wenn die Bewegung des betrachteten Systems materieller Punkte ganz frei ist, und die Kräftefunction nicht die Zeit

*) Wenn die Integrale auch die Differentialquotienten der Variabeln enthalten, so betrachte ich diese hier als besondere Variabele.

t implicirt. In diesem Falle gelten die in §. 2 aufgestellten Differentialgleichungen:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

wo U die Kräftefunction ist. Man kann also für die Grössen q die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte annehmen; die nach t genommenen Differentialquotienten derselben, eine jede mit der Masse des zugehörigen Punktes multiplicirt, werden dann die Grössen p, und die zu integrirende partielle Differentialgleichung ist:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2 \right\} = U + h,$$

wo h eine willkürliche Constante bezeichnet. Ist n die Zahl der materiellen Punkte, so enthält eine vollständige Lösung V dieser Differentialgleichung ausser einer durch blosse Addition hinzukommenden Constanten, von der ich abstrahire, und ausser h noch $3n-1$ willkürliche Constanten α. Kennt man eine solche Lösung V, so erhält man die Integralgleichungen des Problems zufolge des oben bemerkten Theorems durch die $3n$ Gleichungen

$$m_i x_i' = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i y_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i z_i' = \frac{\partial V}{\partial z_i},$$

durch die $3n-1$ Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \beta$$

und durch die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \tau + t.$$

Die $3n-1$ Constanten α, die $3n-1$ Constanten β und die beiden Grössen h und τ sind die $6n$ willkürlichen Constanten des Problems. Drückt man nun einmal die Grössen x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' durch die $6n-2$ Grössen α, β und durch h und $\tau+t$, und dann umgekehrt α, β, h, $\tau+t$ durch jene aus, so hat man zufolge des ersten der beiden gefundenen Sätze:

$$m_i \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \beta}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{\partial x_i}{\partial \beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i'},$$
$$m_i \frac{\partial y_i'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \beta}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{\partial y_i}{\partial \beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial y_i'},$$
$$m_i \frac{\partial z_i'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \beta}{\partial z_i}, \quad m_i \frac{\partial z_i}{\partial \beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial z_i'};$$

ferner ist

$$m_i\frac{\partial x_i'}{\partial\beta} = -\frac{\partial\alpha}{\partial x_i},\quad m_i\frac{\partial x_i}{\partial\alpha} = -\frac{\partial\beta}{\partial x_i'},$$
$$m_i\frac{\partial y_i'}{\partial\beta} = -\frac{\partial\alpha}{\partial y_i},\quad m_i\frac{\partial y_i}{\partial\alpha} = -\frac{\partial\beta}{\partial y_i'},$$
$$m_i\frac{\partial z_i'}{\partial\beta} = -\frac{\partial\alpha}{\partial z_i},\quad m_i\frac{\partial z_i}{\partial\alpha} = -\frac{\partial\beta}{\partial z_i'};$$

endlich hat man noch:

$$m_i\frac{\partial x_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial x_i},\quad m_i\frac{\partial x_i}{\partial(\tau+t)} = \frac{\partial h}{\partial x_i'},$$
$$m_i\frac{\partial y_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial y_i},\quad m_i\frac{\partial y_i}{\partial(\tau+t)} = \frac{\partial h}{\partial y_i'},$$
$$m_i\frac{\partial z_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial z_i},\quad m_i\frac{\partial z_i}{\partial(\tau+t)} = \frac{\partial h}{\partial z_i'},$$
$$m_i\frac{\partial x_i'}{\partial(\tau+t)} = -\frac{\partial h}{\partial x_i},\qquad m_i\frac{\partial x_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial x_i'},$$
$$m_i\frac{\partial y_i'}{\partial(\tau+t)} = -\frac{\partial h}{\partial y_i},\qquad m_i\frac{\partial y_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial y_i'},$$
$$m_i\frac{\partial z_i'}{\partial(\tau+t)} = -\frac{\partial h}{\partial z_i},\qquad m_i\frac{\partial z_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial z_i'},$$

wo die drei letzten Gleichungen links und die drei ersten rechts die Differentialgleichungen des Problems selber sind. Es ist nämlich in ihnen für h der Ausdruck zu setzen:

$$h = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'x_i'+y_i'y_i'+z_i'z_i') - U,$$

und

$$\frac{\partial x_i}{\partial(\tau+t)} = \frac{dx_i}{dt} = x_i',\quad \frac{\partial x_i'}{\partial(\tau+t)} = \frac{dx_i'}{dt} = \frac{d^2x_i}{dt^2},$$

und ebenso für die anderen Coordinaten.

Will man diese Formeln zum Beispiel auf die elliptische Bewegung eines Planeten anwenden, so wird man zufolge der oben mitgetheilten Integration der auf dieses Problem bezüglichen partiellen Differentialgleichung*) für die

---

*) Vgl. p. 256 folgg.

Constanten α_1, α_2 und die entsprechenden β_1, β_2 folgende Annahmen machen können:

α_1 . . . Länge des aufsteigenden Knotens,
α_2 . . . $k$mal der Quadratwurzel aus dem halben Parameter,
β_1 . . . $-k$mal der Quadratwurzel aus dem halben Parameter mal dem Cosinus der Neigung der Bahn,
β_2 . . . Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten,
h . . . $-k^2$ dividirt durch die grosse Axe,
$-\tau$ . . . Durchgangszeit durch das Perihel,

welche Elemente auf unendlich viele Arten variirt werden können. Die Constante k^2 ist hier die anziehende Kraft für die Einheit der Entfernung, so dass die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2z}{r^3}$$

zu Grunde gelegt sind.

§. 23. Behandlung der Aufgabe, in dem oben (§. 17) betrachteten Falle die zu grosse Anzahl von Integralgleichungen auf die hinreichende zurückzuführen, deren Constanten Functionen der ursprünglichen sind. Fall der Planetenbewegung.

Ich will jetzt noch eine andere Aufgabe behandeln, welche man sich in dem oben (§. 17) betrachteten Falle stellen kann, wo angenommen wurde, dass die Lösung W der partiellen Differentialgleichung, aus welcher man die Integralgleichungen des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ableitet, eine grössere Anzahl willkürlicher Constanten enthalte, als zu einer vollständigen Lösung erforderlich ist, falls man die überzähligen Constanten nicht dadurch fortschaffen will, dass man denselben bestimmte Werthe beilegt, oder sie beliebigen Functionen der anderen Constanten gleich setzt, oder auch dieselben durch eben so viele Gleichungen eliminirt, welche man erhält, wenn man die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der Function gleich Null setzt, oder auf andere Art. Wir haben oben gesehen, dass in diesem Falle die $m+k$ Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_2} = \beta_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_{m+k}} = \beta_{m+k}$$

nur die Stelle von m Gleichungen vertreten, indem k derselben, z. B.

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha_{m+1}} = \beta_{m+1},\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_{m+2}} = \beta_{m+2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_{m+k}} = \beta_{m+k},$$

eine blosse Folge der übrigen m Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2,\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

und die Constanten $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots, \beta_{m+k}$ nicht mehr willkürlich sind, sondern bestimmte Functionen der übrigen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ und der Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}$. Diese letzteren m Gleichungen, verbunden mit den m Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1,\quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2,\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

bilden die sämmtlichen Integralgleichungen, die aber, wie wir sehen, $2m+k$ willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ enthalten, während sie nicht mehr als $2m$ willkürliche Constanten enthalten dürfen. Es muss daher immer möglich sein, die $2m$ Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2,\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1,\quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2,\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

durch solche $2m$ andere Gleichungen zu ersetzen, in welchen ausser den Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ nur $2m$ Functionen der $2m+k$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ vorkommen; diese kann man statt der letzteren als willkürliche Constanten einführen, deren Zahl dann in der That auf $2m$ zurückgeführt ist.

Nehmen wir als Beispiel die oben für die Bewegung eines Punktes um ein anziehendes Centrum gegebenen Formeln. Es waren dort nur drei unabhängige Variabele, die drei Coordinaten des Punktes, da die Zeit t in der partiellen Differentialgleichung nicht vorkam. Die gefundene Lösung V brauchte also nur zwei willkürliche Constanten zu impliciren, um eine vollständige Lösung zu sein, da wir immer von einer willkürlichen Constanten, die noch durch blosse Addition hinzukommen kann, abstrahiren. Die Lösung, welche wir fanden (p. 252),

$$V = b\,\mathrm{arc.cos}[\cos\alpha\cos\eta + \sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)]$$
$$+\int\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr$$

enthält aber deren *drei*, b, α, β, da die Constante h in dieser Lösung nicht als willkürliche Constante betrachtet wird, weil sie schon in der partiellen Differentialgleichung selbst vorkommt. Setzt man

$$\cos w = \cos\alpha\cos\eta + \sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta),$$

so leiten wir aus dieser Lösung durch partielle Differentiation nach b, α, β, r, η, ϑ die Integralgleichungen ab:

$$w - b\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}} = b',$$

$$\frac{b[\sin\alpha\cos\eta - \cos\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)]}{\sin w} = \alpha',$$

$$-\frac{b\sin\alpha\sin\eta\sin(\vartheta-\beta)}{\sin w} = \beta',$$

$$\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}} = \frac{dr}{dt},$$

$$\frac{b[\cos\alpha\sin\eta - \sin\alpha\cos\eta\cos(\vartheta-\beta)]}{r^2\sin w} = \frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{b\sin\alpha\sin(\vartheta-\beta)}{r^2\sin\eta\sin w} = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Es wurde schon oben bemerkt, dass die zweite und dritte Gleichung nur die Stelle von einer vertreten, weil man aus ihnen erhält:

$$\alpha'\alpha' + \frac{\beta'\beta'}{\sin^2\alpha} = b^2,$$

also eine blosse Gleichung zwischen den willkürlichen Constanten, die dadurch, wenn man wieder h nicht mitrechnet, auf *fünf* reducirt werden. Sie müssen sich aber auf *vier* reduciren lassen. Dieses kann man keineswegs auf den ersten Blick erkennen; sogar der Beweis würde einigermassen weitläufig ausfallen, wenn man nicht einige einfache geometrische Betrachtungen zu Hülfe nehmen könnte.

Zuerst leite ich aus der zweiten und dritten Gleichung folgende ab:

$$\sin\alpha\cos\eta - \cos\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta) + \frac{\alpha'}{\beta'}\sin\alpha\sin\eta\sin(\vartheta-\beta) = 0$$

oder

$$\sin\alpha\cos\eta - \left(\cos\alpha\cos\beta + \frac{\alpha'}{\beta'}\sin\alpha\sin\beta\right)\sin\eta\cos\vartheta$$
$$-\left(\cos\alpha\sin\beta - \frac{\alpha'}{\beta'}\sin\alpha\cos\beta\right)\sin\eta\sin\vartheta = 0.$$

Für diese Gleichung setze ich:

$$\cos i\cos\eta + \sin i\cos a.\sin\eta\cos\vartheta + \sin i\sin a.\sin\eta\sin\vartheta = 0,$$

indem ich zwei Winkel i und a einführe, welche durch die Verhältnisse

$$\sin\alpha : \left(\cos\alpha\cos\beta + \frac{\alpha'}{\beta'}\sin\alpha\sin\beta\right) : \left(\cos\alpha\sin\beta - \frac{\alpha'}{\beta'}\sin\alpha\cos\beta\right)$$
$$= \cos i : -\sin i\cos a : -\sin i\sin a$$

bestimmt werden. Diese Proportion giebt zugleich:

$$\cos i = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\frac{\alpha'\alpha'\sin^2\alpha}{\beta'\beta'}}} = -\frac{\beta'}{b} = \frac{\sin\alpha\sin\eta\sin(\vartheta-\beta)}{\sin w},$$

und es wird daher die letzte der Integralgleichungen:

$$\frac{b\cos i}{r^2\sin^2\eta} = \frac{d\vartheta}{dt};$$

ferner giebt dieselbe Proportion:

$$\cos i\cos\alpha + \sin i\cos a.\sin\alpha\cos\beta + \sin i\sin a.\sin\alpha\sin\beta = 0.$$

Nennen wir l die Linie, die mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus $\cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$ sind, und E die Ebene, welche mit den Coordinatenebenen Winkel bildet, deren Cosinus $\cos i$, $\sin i\cos a$, $\sin i\sin a$ sind, so folgt aus den Gleichungen

$$\cos i\cos\eta + \sin i\cos a.\sin\eta\cos\vartheta + \sin i\sin a.\sin\eta\sin\vartheta = 0,$$
$$\cos i\cos\alpha + \sin i\cos a.\sin\alpha\cos\beta + \sin i\sin a.\sin\alpha\sin\beta = 0,$$

dass der Radius Vector (der mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ sind) und die Linie l in derselben Ebene E liegen. Die Linie l ist zugleich eine ganz willkürliche Linie in der Ebene E, so dass der Winkel w, welches der Winkel zwischen l und dem Radius Vector ist, die Bedeutung hat, dass er ein Winkel zwischen dem Radius Vector und einer willkürlichen Linie der Ebene E ist. Diese Willkürlichkeit wird aber auf keine Weise vermehrt, wenn ich von w die willkürliche Constante b' abziehe, wie die erste der Integralgleichungen:

$$w - b' = b\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}}$$

erfordert; es vereinigen sich hier nur zwei willkürliche Constanten durch Addition in eine einzige. Nennt man nämlich v und λ die Winkel, welche der Radius Vector und die Linie l mit einer bestimmten Linie der Ebene E einschliessen, so ist

$$w = v - \lambda, \quad w - b' = v - \lambda - b',$$

und $\lambda + b'$ ist nur für *eine* willkürliche Constante anzusehen, wodurch die Anzahl der willkürlichen Constanten auf *vier* beschränkt wird, wie verlangt wurde. Es lassen sich nämlich die Integralgleichungen jetzt so darstellen:

$$v - \lambda - b' = b\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}},$$
$$\cos i\cos\eta + \sin i\sin\eta\cos(\vartheta - a) = 0,$$
$$\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}} = \frac{dr}{dt},$$
$$\frac{b\cos i}{r^2\sin^2\eta} = \frac{d\vartheta}{dt},$$
$$\frac{b^2}{r^4} = \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \sin^2\eta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

wo $v - \lambda - b'$ der Winkel ist, den der Radiusvector mit einer beliebigen Linie der Ebene E bildet; zu diesen Gleichungen kommt noch der Ausdruck der Zeit:

$$t + \tau = \int\frac{dr}{\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}},$$

in welchem keine Reduction vorzunehmen ist.

§. 24. Allgemeine Behandlung derselben Aufgabe.

Da das hier gewählte einfache Beispiel schon zeigt, dass die verlangte Reduction der willkürlichen Constanten auf ihre wahre Anzahl bisweilen Schwierigkeiten macht, welche hier nur durch einige geometrische Betrachtungen gehoben wurden, so wird es der Mühe werth sein, allgemein zu zeigen, wie diese Reduction geleistet werden kann. Zu diesem Ende nehme ich an, es sei eine vollständige Lösung gegeben

$$W(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

mit m willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_m$, von denen keine durch blosse Addition mit den übrigen Termen von W verbunden ist; und es sei aus dieser Lösung eine andere abgeleitet mit $m+k$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}$

$$W + \psi(a_1, a_2, \ldots, a_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}),$$

in welcher die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_2}=0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_m}=0$$

zu eliminiren sind. Diese Gleichungen zeigen, dass man bei der partiellen Differentiation von $W+\psi$ nach irgend einer Grösse auf die Veränderlichkeit der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ keine Rücksicht zu nehmen braucht. Die $2m$ Integralgleichungen sind daher, da W die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}$ und ψ die Grössen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ nicht enthält:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}&=\beta_1, & \frac{\partial W}{\partial q_1}&=p_1,\\
\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2}&=\beta_2, & \frac{\partial W}{\partial q_2}&=p_2,\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots\\
\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_m}&=\beta_m, & \frac{\partial W}{\partial q_m}&=p_m.
\end{aligned}$$

Die m Gleichungen links zeigen, dass die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ebenfalls willkürliche Constanten werden und daher auch die Grössen

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1},\quad \frac{\partial\psi}{\partial a_2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial\psi}{\partial a_m}.$$

Nennt man diese $-b_1, -b_2, \ldots, -b_m$, so werden die Integralgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial a_1}&=b_1, & \frac{\partial W}{\partial a_2}&=b_2, & \ldots,\quad \frac{\partial W}{\partial a_m}&=b_m,\\
\frac{\partial W}{\partial q_1}&=p_1, & \frac{\partial W}{\partial q_2}&=p_2, & \ldots,\quad \frac{\partial W}{\partial q_m}&=p_m;
\end{aligned}$$

die $2m$ Functionen der $2m+k$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, welche man als die auf ihre wahre Anzahl reducirten willkürlichen Constanten zu wählen hat, sind die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$, wie sie durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}&=\beta_1, & \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2}&=\beta_2, & \ldots,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_m}&=\beta_m,\\
\frac{\partial\psi}{\partial a_1}&=-b_1, & \frac{\partial\psi}{\partial a_2}&=-b_2, & \ldots,\quad \frac{\partial\psi}{\partial a_m}&=-b_m.
\end{aligned}$$

Wenn die Lösung noch eine Constante h enthält, die auch in der partiellen Differentialgleichung selber vorkommt, und man zu den Integralgleichungen noch eine neue hinzufügt, indem man den nach h genommenen partiellen

Differentialquotienten der Lösung $\frac{\partial W}{\partial h}+\frac{\partial\psi}{\partial h}$ gleich einer neuen Variabeln, vermehrt um eine willkürliche Constante τ, setzt, so hat man, um auch in der neuen Gleichung die Reduction der Constanten zu bewerkstelligen, nur $\tau-\frac{\partial\psi}{\partial h}$ für τ als willkürliche Constante einzuführen. Es ist dies der Fall, wenn in einem Probleme der Mechanik der Satz von der lebendigen Kraft gilt und man die Integralgleichungen des Problems aus der Function V statt aus der Function W ableitet.

Die Lösung, welche die $m+k$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}$ enthält, kann auch aus W erhalten werden, wenn zwischen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}$ gewisse Gleichungen $\psi_1=0$, $\psi_2=0$ etc. stattfinden und man aus $W+\psi$ die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vermittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_1}+\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial a_1}+\lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial a_1}+\cdots=0,\\
&\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_2}+\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial a_2}+\lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial a_2}+\cdots=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_m}+\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial a_m}+\lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial a_m}+\cdots=0,\\
&\psi_1=0,\quad \psi_2=0,\quad \ldots
\end{aligned}$$

eliminirt. Durch diese Gleichungen werden sowohl die Multiplicatoren λ_1, λ_2 etc, als auch die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ als Functionen von $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}$ bestimmt. Bedeutet α eine der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, so hat man, wenn β eine willkürliche Constante bedeutet,

$$\begin{aligned}
\beta&=\frac{\partial(W+\psi)}{\partial\alpha}\\
&=\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}
\end{aligned}$$

oder wegen der vorstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\beta+\lambda_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial\psi_1}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial\alpha}\right)\\
&\quad+\lambda_2\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi_2}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial\psi_2}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial\alpha}\right)\\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}.
\end{aligned}$$

Differentiirt man aber die Gleichungen $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ etc. nach α, so erhält man:

$$0 = \frac{\partial \psi_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial \psi_1}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha},$$

$$0 = \frac{\partial \psi_2}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_2}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial \psi_2}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und daher:

$$\beta = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} + \cdots.$$

Setzt man in dieser Gleichung für α die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und für β willkürliche Constanten, so erhält man, wenn man die Gleichungen $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ etc. hinzunimmt, eine hinlängliche Anzahl von Gleichungen, um $a_1, a_2, \ldots, a_m$ so wie die Multiplicatoren λ_1, λ_2 etc. aus den willkürlichen Constanten α und β zu bestimmen, so dass vermittelst dieser Gleichungen $a_1, a_2, \ldots, a_m, \lambda_1, \lambda_2$ etc. ebenfalls willkürlichen Constanten gleich werden, und daher auch die Ausdrücke

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_1} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial a_1} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial a_1} + \cdots,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_2} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial a_2} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial a_2} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_m} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial a_m} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial a_m} + \cdots.$$

Nennt man diese letzteren willkürlichen Constanten $-b_1, -b_2, \ldots, -b_m$, so hat man die Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial a_m} = b_m.$$

Diese Gleichungen, verbunden mit den Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

geben die $2m$ Integralgleichungen in der verlangten Form, in welcher sie statt der $2m+k$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+k}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ nur noch die $2m$ willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ enthalten.

§. 25. Wie man aus einer gegebenen vollständigen Lösung eine andere ableitet, deren Constanten die Anfangswerthe der Variabeln sind.

Ich will noch zeigen, wie man aus einer gefundenen vollständigen Lösung eine andere ableiten kann, in welcher die willkürlichen Constanten die besondere Bedeutung haben, dass sie in den Integralgleichungen, die man aus der vollständigen Lösung erhält, die Anfangswerthe oder die einer bestimmten Zeit (Epoche) entsprechenden Werthe der Variabeln werden.

Es sei wieder

$$W(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

die vollständige Lösung mit den m willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; es sei ferner W_0 der Werth dieser Function, wenn man darin für $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ die Grössen $\tau, a_1, a_2, \ldots, a_m$ setzt. Eliminirt man jetzt aus $W - W_0$ die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial (W - W_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial (W - W_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial (W - W_0)}{\partial \alpha_m} = 0,$$

so erhält man eine neue vollständige Lösung, in welcher $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die willkürlichen Constanten sind, und in welcher man τ irgend einem bestimmten Werthe, z. B. Null, gleich setzen kann. Da man nämlich zu W für den Fall, welchen ich hier betrachte, in welchem die partielle Differentialgleichung nicht W selber enthält, immer noch eine willkürliche Constante addiren muss, wenn die Lösung so viel willkürliche Constanten als unabhängige Variabele enthalten soll, so nehme ich $W - W_0$ für die vollständige Lösung. Aus dieser erhalte ich nach einer bekannten Regel die sogenannte allgemeine Lösung, wenn ich die eine der willkürlichen Constanten, W_0, einer Function der übrigen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ gleich setze und diese letzteren vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial (W - W_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial (W - W_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial (W - W_0)}{\partial \alpha_m} = 0$$

eliminire. Der hier betrachtete Fall ist der, wenn die willkürlich anzunehmende Function der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die besondere oben angegebene Form

$$W_0 = W(\tau, a_1, a_2, \ldots, a_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

hat, in welcher ausser $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ noch die willkürlichen Constanten τ, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vorkommen.

Hat man nach Elimination von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Function $W-W_0$ durch $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \tau, a_1, a_2, \ldots, a_m$ ausgedrückt, so werden die Integralgleichungen, welche man aus der neuen Lösung $W-W_0$ ableitet,

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial a_m} = -b_m,$$

wo $b_1, b_2, \ldots, b_m$ neue willkürliche Constanten sind. Setzt man, um die partiellen Differentialquotienten von $W-W_0$ in diesen Gleichungen zu bilden, in dem ursprünglichen Ausdruck von $W-W_0$ für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ihre Werthe, wie sie sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_m} = 0$$

ergeben, so hat man nicht nöthig, nach $q_1, q_2, \ldots, q_m, a_1, a_2, \ldots, a_m$ auch in sofern zu differentiiren, als sich diese Ausdrücke auch in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vorfinden, weil die daraus hervorgehenden Terme wegen der vorstehenden Gleichungen verschwinden. Man kann daher die Integralgleichungen, weil in W nicht die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$, in W_0 nicht die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ explicite vorkommen, folgendermassen darstellen:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W_0}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W_0}{\partial a_m} = b_m.$$

Die letzten m Gleichungen

$$\frac{\partial W_0}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W_0}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W_0}{\partial a_m} = b_m$$

lehren hier bloss, dass die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ Constanten gleich werden, und zeigen ihre Abhängigkeit von den willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Als die eigentlichen Integralgleichungen, d. h. als die erforderlichen $2m$ Gleichungen zwischen den $2m$ Variabeln $q_1, q_2 \ldots, q_m$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ hat man sich daher die Gleichungen zu denken:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_m} = 0,$$

in welchen für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die constanten Werthe zu setzen sind, wie sie sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial W_0}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W_0}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W_0}{\partial a_m} = b_m$$

ergeben.

Aus den angegebenen Integralgleichungen kann man die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch t und die willkürlichen Constanten bestimmen. Ich will jetzt die Werthe dieser Grössen für $t=\tau$ aufsuchen. Man setze hierzu in W für $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ die zweitheiligen Ausdrücke $\tau+(t-\tau)$, $a_1+(q_1-a_1)$, $a_2+(q_2-a_2)$, $\ldots$, $a_m+(q_m-a_m)$ und entwickle die Ausdrücke

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}$$

nach den aufsteigenden Potenzen von $t-\tau$, q_1-a_1, q_2-a_2, $\ldots$, q_m-a_m. Es verwandeln sich hierdurch in den Gleichungen

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_m} = 0,$$

wenn man $t-\tau = 0$ setzt, die Ausdrücke links in Reihen, die nach den positiven, aufsteigenden Potenzen von q_1-a_1, q_2-a_2, $\ldots$, q_m-a_m fortschreiten und kein ganz constantes Glied enthalten. Man wird daher aus diesen Gleichungen schliessen können, dass

$$q_1-a_1 = 0, \quad q_2-a_2 = 0, \quad \ldots, \quad q_m-a_m = 0$$

ist, oder es werden $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die Werthe von $q_1, q_2, \ldots, q_m$ für $t=\tau$. Setzt man ferner in die Ausdrücke

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial W}{\partial q_m}$$

für t den Werth τ und zugleich für $q_1, q_2, \ldots, q_m$ die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_m$, so erhält man dafür die Werthe

$$b_1 = \frac{\partial W_0}{\partial a_1}, \quad b_2 = \frac{\partial W_0}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad b_m = \frac{\partial W_0}{\partial a_m}.$$

Es werden daher die willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die Werthe von $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und die willkürlichen Constanten $b_1, b_2, \ldots, b_m$ die Werthe von $p_1, p_2, \ldots, p_m$, welche dem Werthe $t=\tau$ entsprechen.

Ganz ähnliche Resultate erhalten wir in Bezug auf die Function V, welche t nicht enthält, sondern ausser den willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$

noch eine gegebene Constante h, die in der partiellen Differentialgleichung selber vorkommt. Bezeichnet man mit V_0 den Werth von V, wenn man darin $a_1, a_2, \ldots, a_m$ für $q_1, q_2, \ldots, q_m$ setzt, so erhält man die neue Lösung, wenn man aus $V-V_0$ die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial \alpha_{m-1}} = 0$$

eliminirt. Fügt man hierzu die Gleichung

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial h} = t-\tau,$$

so erhält man für $t=\tau$ aus diesen Gleichungen, ganz wie früher, die Gleichungen:

$$q_1-a_1=0, \quad q_2-a_2=0, \quad \ldots, \quad q_m-a_m=0.$$

Es verwandeln sich ferner, wenn man diese Werthe substituirt, die Ausdrücke

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} \text{ in } \frac{\partial V_0}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial V_0}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V_0}{\partial a_m}.$$

Man sieht daher aus den Integralgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(V-V_0)}{\partial q_1} &= \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, & \frac{\partial(V-V_0)}{\partial a_1} &= -\frac{\partial V_0}{\partial a_1} = -b_1, \\
\frac{\partial(V-V_0)}{\partial q_2} &= \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, & \frac{\partial(V-V_0)}{\partial a_2} &= -\frac{\partial V_0}{\partial a_2} = -b_2, \\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial(V-V_0)}{\partial q_m} &= \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m, & \frac{\partial(V-V_0)}{\partial a_m} &= -\frac{\partial V_0}{\partial a_m} = -b_m,
\end{aligned}$$

dass $b_1, b_2, \ldots, b_m$ die Werthe von $p_1, p_2, \ldots, p_m$ für $t=\tau$ sind.

§. 26. Beispiel der Planetenbewegung.

Als Beispiel will ich die charakteristische Function

$$V = b\,\text{arc.}\cos[\cos\alpha\cos\eta+\sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)]+\int\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr,$$

welche wir oben (p. 252) für die Bewegung eines nach einem festen Centrum angezogenen Punktes fanden, in eine andere verwandeln, in der die Anfangswerthe von r, η, ϑ, die ich mit r_0, η_0, ϑ_0 bezeichne, die willkürlichen Constanten sind. Setzt man

$$\begin{aligned}
\cos w &= \cos\alpha\cos\eta+\sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta), \\
\cos w_0 &= \cos\alpha\cos\eta_0+\sin\alpha\sin\eta_0\cos(\vartheta_0-\beta),
\end{aligned}$$

so wird die neue Lösung:

$$V-V_0 = b(w-w_0)+\int_{r_0}^{r}\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr,$$

wenn man darin die Constanten α, β, b vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial b} = 0$$

eliminirt. Die beiden ersten geben:

$$\frac{\partial(w-w_0)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial(w-w_0)}{\partial \beta} = 0,$$

und man kann zeigen, dass eine dieser Gleichungen aus der anderen von selber folgt. Hierzu, und um die verlangte Elimination von α und β auszuführen, können folgende geometrische Betrachtungen dienen.

Man bilde ein sphärisches Dreieck, in welchem zwei Seiten α und η und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\vartheta-\beta$ sind, und ein anderes, welches mit demselben die Seite α gemein hat, und in welchem die andere Seite und der von beiden eingeschlossene Winkel η_0 und $\vartheta_0-\beta$ sind.

Zufolge der für $\cos w$ und $\cos w_0$ angegebenen Ausdrücke sind w und w_0 die dritten Seiten dieser sphärischen Dreiecke, welche den Winkeln $\vartheta-\beta$ und $\vartheta_0-\beta$ gegenüberstehen, und man hat nach den bekannten Differentialformeln des sphärischen Dreiecks:

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \cos A, \quad \frac{\partial w}{\partial(\vartheta-\beta)} = -\frac{\partial w}{\partial \beta} = \sin\alpha\sin A,$$

wenn A der der Seite η gegenüberstehende Winkel ist. Ebenso hat man, wenn A_0 der der Seite η_0 im zweiten Dreieck gegenüberliegende Winkel ist,

$$\frac{\partial w_0}{\partial \alpha} = \cos A_0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial(\vartheta_0-\beta)} = -\frac{\partial w_0}{\partial \beta} = \sin\alpha\sin A_0;$$

und es giebt daher jede der Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\partial w_0}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial w}{\partial \beta} = \frac{\partial w_0}{\partial \beta}$$

dasselbe Resultat

$$A = A_0,$$

oder beide Dreiecke haben auch den der Seite α anliegenden und den Seiten

η und η_0 gegenüberstehenden Winkel A gemein. Man sieht hieraus, dass $w-w_0$ die dritte Seite in einem sphärischen Dreieck ist, in welchem die beiden anderen Seiten η und η_0 und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\vartheta-\vartheta_0$ sind. Man hat daher

$$\cos(w-w_0) = \cos\eta_0\cos\eta+\sin\eta_0\sin\eta\cos(\vartheta-\vartheta_0),$$

und die charakteristische Function wird:

$$V-V_0 = b\,\text{arc.}\cos[\cos\eta_0\cos\eta+\sin\eta_0\sin\eta\cos(\vartheta-\vartheta_0)]$$
$$+\int_{r_0}^{r}\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr,$$

aus welchem Ausdruck α und β eliminirt sind, so dass nur noch die eine Grösse b vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial b} = 0$$

oder

$$w-w_0 = \int_{r_0}^{r}\frac{b\,dr}{r^2\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}}$$

zu eliminiren ist, wo $w-w_0$ den Winkel zwischen der Anfangs- und Endposition des Radius Vector bedeutet.

Es wird nicht ohne Nutzen sein zu zeigen, wie man die Elimination von α und β auch auf einfachem, rein analytischem Wege ausführen kann, wobei ich die Formeln auf n Variabele ausdehnen werde. Es sei

$$a_1a_1+a_2a_2+\cdots+a_na_n = AA,$$
$$x_1x_1+x_2x_2+\cdots+x_nx_n = rr,$$
$$x_1^0x_1^0+x_2^0x_2^0+\cdots+x_n^0x_n^0 = r^0r^0,$$

ferner

$$\cos w = \frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{Ar},$$
$$\cos w^0 = \frac{a_1x_1^0+a_2x_2^0+\cdots+a_nx_n^0}{Ar^0}.$$

Man soll vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial(w-w^0)}{\partial a_1} = \frac{\partial(w-w^0)}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial(w-w^0)}{\partial a_n} = 0$$

die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus dem Werthe von $w-w^0$ eliminiren. Wenn man die Werthe von $\cos w$, $\cos w^0$ substituirt und bemerkt, dass die Gleichung $dw-dw^0=0$ sich auch so darstellen lässt:

$$\sin w^0 d\cos w-\sin w\, d\cos w^0 = 0,$$

so werden die angegebenen Gleichungen folgende:

$$\sin w^0\frac{x_1}{r}-\sin w\frac{x_1^0}{r^0} = \sin(w^0-w)\frac{a_1}{A},$$
$$\sin w^0\frac{x_2}{r}-\sin w\frac{x_2^0}{r^0} = \sin(w^0-w)\frac{a_2}{A},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin w^0\frac{x_n}{r}-\sin w\frac{x_n^0}{r^0} = \sin(w^0-w)\frac{a_n}{A}.$$

Von diesen n Gleichungen sind zwei eine blosse Folge der übrigen, so dass dieses System nur die Stelle von $n-2$ Gleichungen vertritt. Denn multiplicirt man die n Gleichungen mit $\frac{a_1}{A}$, $\frac{a_2}{A}$, $\ldots$, $\frac{a_n}{A}$ und addirt, so erhält man beiderseits $\sin(w^0-w)$, also eine identische Gleichung. Ebenso ergiebt sich, wenn man die n Gleichungen mit

$$\sin w^0\frac{x_1}{r}+\sin w\frac{x_1^0}{r^0},\quad \sin w^0\frac{x_2}{r}+\sin w\frac{x_2^0}{r^0},\quad \ldots,\quad \sin w^0\frac{x_n}{r}+\sin w\frac{x_n^0}{r^0}$$

multiplicirt und addirt, eine identische Gleichung, nämlich:

$$\sin^2 w^0-\sin^2 w = \sin(w^0-w)\sin(w^0+w).$$

Multiplicirt man aber die n Gleichungen mit $\frac{x_1}{r}$, $\frac{x_2}{r}$, $\ldots$, $\frac{x_n}{r}$ und addirt, so erhält man:

$$\sin w^0-\sin w\frac{x_1^0x_1+x_2^0x_2+\cdots+x_n^0x_n}{r^0r} = \sin(w^0-w)\cos w.$$

Es ist aber

$$\sin w^0-\sin(w^0-w)\cos w = \sin w\cos(w^0-w)$$

und daher

$$\cos(w-w^0) = \frac{x_1^0x_1+x_2^0x_2+\cdots+x_n^0x_n}{r^0r}$$

oder

$$w-w^0 = \text{arc.}\cos\frac{x_1^0x_1+x_2^0x_2+\cdots+x_n^0x_n}{r^0r},$$

welches der verlangte Ausdruck ist, da $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus ihm eliminirt sind. Man erhält aus diesen Formeln die vorigen, wenn man $n = 3$ setzt und statt der rechtwinkligen Coordinaten die Polarcoordinaten einführt.

§. 27. Die Lagrange'schen Störungsformeln.

Die Form, welche Hamilton den Differentialgleichungen der Bewegung giebt, wenn man irgend welche Bestimmungsstücke der Punkte des bewegten Systems zu Variabeln wählt, ist dadurch charakterisirt, dass sämmtliche Variabele sich in zwei Systeme theilen und jeder Variabeln des einen Systems eine des anderen Systems in der Art entspricht, dass der nach der Zeit genommene Differentialquotient einer Variabeln des einen Systems gleich ist dem partiellen Differentialquotienten einer gegebenen Function, nach der entsprechenden Variabeln des andern Systems genommen, und der nach der Zeit genommene Differentialquotient dieser gleich ist dem nach der ersteren genommenen partiellen Differentialquotienten derselben Function mit entgegengesetztem Zeichen. Ich will der Kürze halber diese Form die *canonische* Form der Differentialgleichungen nennen. Auf dieselbe Form der Differentialgleichungen waren schon früher Lagrange und Poisson in ihren Arbeiten über die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik gekommen, wenn die der Zeit $t = 0$ entsprechenden Anfangswerthe der Grössen q_k, p_k oder die Grössen c_k, b_k als die veränderlichen Elemente betrachtet wurden. Ist nämlich H_1 die *Störungsfunction*, so dass man die Differentialgleichungen des gestörten Problems aus den Differentialgleichungen des ungestörten erhält, indem man $H + H_1$ statt H schreibt, so hat man (Méc. Analyt. 2ième éd., T. I., pag. 336) die Formeln:

$$\begin{gathered}
\frac{dc_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial b_1}, \quad \frac{db_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial c_1}, \\
\frac{dc_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial b_2}, \quad \frac{db_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial c_2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dc_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial b_m}, \quad \frac{db_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial c_m},
\end{gathered}$$

welche, wie man sieht, die angegebene Form haben. Hamilton hat diesen Formeln und denen für die Variation der Constanten überhaupt die merkwürdige Ausdehnung gegeben, dass die Störungsfunction H_1 eine beliebige Function

sowohl der Grössen q_k als der Grössen p_k sein kann, während man dieselbe vorher immer als eine blosse Function der Grössen q_k betrachtete. Hierdurch hört die Eigenschaft der bisherigen Formeln, dass die ersten Differentialquotienten der Coordinaten oder, was dasselbe ist, der Grössen q_k auf dieselbe Weise im gestörten und ungestörten Problem ausgedrückt werden, auf, Gültigkeit zu haben. Man sieht nämlich aus den Differentialgleichungen des gestörten Problems

$$\begin{gathered}
\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_1}, \\
\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_m},
\end{gathered}$$

dass, wenn H_1 die Grössen p_k gar nicht enthält, die Werthe der Grössen $\frac{dq_k}{dt}$ dieselben wie im ungestörten Problem werden, dass dieses aber aufhört, sobald H_1 auch diese Grössen involvirt. In letzterem Falle werden die Grössen q_k und p_k zwar durch dieselben Formeln im gestörten Problem wie im ungestörten durch t und die Elemente ausgedrückt, aber die Art der Abhängigkeit der Grössen

$$\frac{dq_k}{dt}$$

von den Grössen p_k und q_k ist nicht mehr dieselbe.

Es giebt bekanntlich zweierlei Formen der Störungsgleichungen: die eine, die Lagrange'sche, drückt die partiell nach den Elementen genommenen Differentialquotienten der Störungsfunction durch die Differentialquotienten der Elemente aus; die andere, die Poisson'sche, drückt diese durch jene aus. Die Poisson'schen Störungsformeln geben daher direct die gesuchten Ausdrücke, während die Lagrange'schen nur lineare Gleichungen geben, aus denen man durch Elimination die gesuchten Ausdrücke abzuleiten hat. Gleichwohl haben Lagrange und Poisson selbst bemerkt, dass diese indirecten Formeln bisweilen in den Anwendungen auf bestimmte Probleme vorzuziehen sind. Denn die Bildung der Lagrange'schen Formeln setzt die Ausdrücke der Grössen q_k

und p_k durch t und die willkürlichen Constanten als gegeben voraus, und diese sind weniger complicirt, als die umgekehrten Ausdrücke der willkürlichen Constanten durch t und die Grössen q_k und p_k, welche man bei der Bildung der Poisson'schen Formeln kennen muss. Auch gelten die Lagrange'schen Formeln unverändert für den Fall, wo zwischen den Grössen q_k Bedingungsgleichungen gegeben sind, auf welchen sich die anderen Formeln nicht ausdehnen lassen. Ich will jetzt zuerst die Gültigkeit der Lagrange'schen Störungsformeln für den Fall nachweisen, dass H_1 ausser den Grössen q_k noch die Grössen p_k involvirt.

Beim Differentiiren nach t denke ich mir im Folgenden vermittelst der Formeln des ungestörten Problems alles durch t und die willkürlichen Constanten oder die Elemente ausgedrückt; ich werde mich, wenn ich diese Elemente auch als Functionen der Zeit betrachte, wie es im gestörten Problem geschieht, der Charakteristik d bedienen; dagegen der Charakteristik ∂, wenn ich partiell nach t differentiire oder die Elemente als constant setze. Man wird daher haben:

$$\frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

dagegen:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial H_1}{\partial p_k},$$
$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial H_1}{\partial q_k}$$

und daher:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_k} = \frac{dq_k}{dt} - \frac{\partial q_k}{\partial t},$$
$$-\frac{\partial H_1}{\partial q_k} = \frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial p_k}{\partial t}.$$

Nennt man daher α ein Element und dehnt das Summenzeichen Σ auf alle Elemente α aus, so hat man:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_k} = \Sigma \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt},$$
$$-\frac{\partial H_1}{\partial q_k} = \Sigma \frac{\partial p_k}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt}.$$

Bezeichnet man mit β irgend ein bestimmtes Element und setzt

$$(\alpha, \beta) = \left[\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha}\frac{\partial p_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \alpha}\frac{\partial p_m}{\partial \beta}\right]$$
$$- \left[\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial \alpha}\frac{\partial q_m}{\partial \beta}\right],$$

so erhält man hieraus:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \Sigma(\alpha, \beta)\frac{d\alpha}{dt},$$

wo man das Summenzeichen nur auf α erstreckt, während β ein bestimmtes Element bleibt. Die vorstehende Gleichung kommt, wenn H_1 nicht die Grössen p_k enthält, mit den Lagrange'schen Störungsformeln überein. Es bleibt noch zu zeigen übrig, dass auch für den hier betrachteten allgemeineren Fall der berühmte Lagrange'sche Satz gilt, dass (α, β) eine blosse Function der Elemente ist oder

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial t} = 0.$$

Hierzu bemerke ich, dass

$$(\alpha, \beta) = \frac{\partial\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \alpha}\right]}{\partial \beta} - \frac{\partial\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \beta}\right]}{\partial \alpha}$$

ist. Da ferner

$$q_k' = \frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$
$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\partial\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \alpha}\right]}{\partial t}$$
$$= -\left[\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \alpha}\right]$$
$$+ \left[p_1\frac{\partial q_1'}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2'}{\partial \alpha} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m'}{\partial \alpha}\right]$$
$$= \frac{\partial\left[p_1\frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial H}{\partial p_m} - H\right]}{\partial \alpha}.$$

Differentiirt man noch einmal nach β, so erhält man einen Ausdruck, in welchem man α und β vertauschen kann, weil es erlaubt ist, die Ordnung der in dem zuletzt stehenden Ausdruck erst nach α und dann nach β vorzunehmenden Differentiation umzukehren. Man erhält daher:

$$\frac{\partial^2\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial\alpha}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial\alpha}\right]}{\partial\beta\partial t}$$
$$-\frac{\partial^2\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial\beta}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial\beta}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial\beta}\right]}{\partial\alpha\partial t}$$
$$=\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial t}=0,$$

was zu beweisen war. Da die Grössen (α, β) die Coefficienten der Differentialquotienten der Elemente in dem Ausdrucke der partiell nach den Elementen genommenen Differentialquotienten der Störungsfunction H_1 sind und daher von der besondern Wahl der Variabeln q_k nicht abhängen können, so folgt, dass die Grössen

$$(\alpha,\beta)=\left[\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}\frac{\partial p_1}{\partial\beta}+\frac{\partial q_2}{\partial\alpha}\frac{\partial p_2}{\partial\beta}+\cdots+\frac{\partial q_m}{\partial\alpha}\frac{\partial p_m}{\partial\beta}\right]$$
$$-\left[\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}\frac{\partial q_1}{\partial\beta}+\frac{\partial p_2}{\partial\alpha}\frac{\partial q_2}{\partial\beta}+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial\alpha}\frac{\partial q_m}{\partial\beta}\right]$$

unverändert bleiben, welche Bestimmungsstücke der Punkte des Systems man auch als die Variabeln q_k setzt, wenn nur die Elemente dieselbe Bedeutung behalten.

Man kann den Lagrange'schen Satz auch auf folgende Art aus einer leicht zu beweisenden identischen Gleichung ableiten. Wenn nämlich die Functionen p_k und q_k irgend drei Variabele α, β und t enthalten und man sich der angegebenen Bezeichnung bedient, so wird identisch:

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial t}+\frac{\partial(\beta,t)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(t,\alpha)}{\partial\beta}=0.$$

Für den hier betrachteten Fall sind die Grössen q_k und p_k solche Functionen, dass man identisch hat:

$$\frac{\partial q_k}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \frac{\partial p_k}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

wenn man in den Ausdrücken $\frac{\partial H}{\partial p_k}$, $-\frac{\partial H}{\partial q_k}$ für die Grössen p_i und q_i ihre Werthe in t, α, β und den übrigen Elementen setzt. Hierdurch wird

$$(\beta,t)=-\frac{\partial H}{\partial\beta},\quad (t,\alpha)=\frac{\partial H}{\partial\alpha},$$

und daher ist für den hier betrachteten Fall

$$\frac{\partial(\beta,t)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(t,\alpha)}{\partial\beta}=0,$$

wodurch die obige identische Gleichung das gesuchte Resultat giebt:

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial t}=0.$$

Sind α, β, γ drei beliebige Elemente, und setzt man in der angeführten identischen Gleichung γ statt t, so sieht man, dass je drei Ausdrücke (β,γ), (γ,α), (α,β) durch die Gleichung

$$\frac{\partial(\beta,\gamma)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(\gamma,\alpha)}{\partial\beta}+\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial\gamma}=0$$

verbunden sind.

§. 28. Die Poisson'schen Störungsformeln. Der Poisson'sche Satz.

Die von Poisson gegebenen Störungsformeln können auch für den allgemeineren Fall, wenn H_1 die Grössen p_i enthält, folgendermassen abgeleitet werden.

Es sei durch die Integralgleichungen der ungestörten Bewegung das Element α durch die Grössen q_k, p_k und durch t ausgedrückt, so hat man vermittelst der Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung, indem man nach der Zeit differentiirt:

$$0=\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t}+\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t}$$
$$+\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial t}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial t}+\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$
$$=\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}$$
$$-\left[\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial H}{\partial q_m}\right]+\frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

Vermittelst der Differentialgleichungen der gestörten Bewegung erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt}\\
&\quad+\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{dt}+\frac{\partial\alpha}{\partial t}\\
&= \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_m}\\
&\quad-\left[\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_2}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_m}\right]+\frac{\partial\alpha}{\partial t}
\end{aligned}$$

und daher, wenn man die vorstehende Gleichung abzieht:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial H_1}{\partial p_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial H_1}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{\partial H_1}{\partial p_m}\\
&\quad-\left[\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial H_1}{\partial q_m}\right].
\end{aligned}$$

Bezeichnet β wieder ein Element, und dehnt man das Summenzeichen auf alle Elemente aus, so hat man:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_k}=\Sigma\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial p_k},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_k}=\Sigma\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial q_k}$$

und daher, wenn man

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial\beta}{\partial p_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial\beta}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{\partial\beta}{\partial p_m}\\
&-\left[\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial\beta}{\partial q_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial\beta}{\partial q_2}+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial\beta}{\partial p_m}\right]=[\alpha,\beta]
\end{aligned}$$

setzt:

$$\frac{d\alpha}{dt}=\Sigma[\alpha,\beta]\frac{\partial H_1}{\partial\beta},$$

in welcher Formel unter dem Summenzeichen für β nach und nach alle $2m$ Elemente zu setzen sind. Diese von Poisson zuerst aufgestellte Gleichung giebt direct die Differentialquotienten der veränderlichen Elemente. Sie gilt, wie wir sehen, auch für den zuerst von Hamilton betrachteten allgemeineren Fall, wenn die Störungsfunction H_1 auch die Grössen p_i enthält; nur werden

dann wieder die Grössen $\frac{dq_i}{dt}$ nicht mehr durch dieselben Formeln wie im ungestörten Problem durch t und die Elemente ausgedrückt werden, indem die Terme $\frac{\partial H_1}{\partial p_i}$ noch hinzukommen.

Da die Gleichungen

$$\frac{d\alpha}{dt}=\Sigma[\alpha,\beta]\frac{\partial H_1}{\partial\beta}$$

durch Elimination aus den Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta}=\Sigma(\alpha,\beta)\frac{d\alpha}{dt}$$

gefunden werden müssen, so folgt daraus, dass, wenn die Coefficienten (α,β) blosse Functionen der Elemente ohne t sind, dieses auch mit den Coefficienten $[\alpha,\beta]$ der Fall sein wird. Ich will indessen den directen Beweis hierfür, da er mehrere lehrreiche Formeln enthält, hier wiederholen.

Man hat, wenn man die Differentiationen nach t auf die ungestörte Bewegung bezieht, zufolge der Differentialgleichungen dieser Bewegung:

$$\frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial q_k}}{dt}=\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_k\partial t}+\sum_{k'}\left[\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_k\partial q_{k'}}\frac{\partial H}{\partial p_{k'}}-\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_k\partial p_{k'}}\frac{\partial H}{\partial q_{k'}}\right],$$

$$\frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}}{dt}=\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_k\partial t}+\sum_{k'}\left[\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_k\partial q_{k'}}\frac{\partial H}{\partial p_{k'}}-\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_k\partial p_{k'}}\frac{\partial H}{\partial q_{k'}}\right].$$

Dem Index k' sind hier die Werthe $1, 2, \ldots, m$ zu geben; ich habe denselben, um dadurch anzuzeigen, dass nach ihm summirt wird, unter dem Summenzeichen Σ beigefügt. Differentiirt man die oben gegebene Gleichung

$$0=\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\sum_{k'}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial q_{k'}}\frac{\partial H}{\partial p_{k'}}-\frac{\partial\alpha}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H}{\partial q_{k'}}\right]$$

partiell nach q_k und nach p_k und zieht die dadurch erhaltenen Ausdrücke von den vorstehenden beiden Gleichungen ab, so erhält man:

$$\frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial q_k}}{dt}=\sum_{k'}\left[-\frac{\partial\alpha}{\partial q_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial p_{k'}}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial q_{k'}}\right],$$

$$\frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}}{dt}=\sum_{k'}\left[-\frac{\partial\alpha}{\partial q_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial p_{k'}}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial q_{k'}}\right].$$

Ich multiplicire die erste Gleichung mit $\frac{\partial\beta}{\partial p_k}$, die zweite mit $\frac{\partial\beta}{\partial q_k}$ und summire aufs neue, indem ich dem Index k ebenfalls die Werthe 1, 2, ..., m gebe. Wenn man dann die Differenz der aus beiden Gleichungen erhaltenen Doppelsummen nimmt und darin die Indices k und k' vertauscht (wodurch sich der Werth der Doppelsummen nicht ändert, weil beide Indices über dieselben Werthe ausgedehnt werden), so erhält man denselben Ausdruck, als wenn man unter dem doppelten Summenzeichen die beiden Elemente α und β mit einander vertauscht. Es wird daher auch der Ausdruck

$$\sum_k \left[\frac{\partial\beta}{\partial p_k} \frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial q_k}}{dt} - \frac{\partial\beta}{\partial q_k} \frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}}{dt} \right]$$

ungeändert bleiben, wenn ich darin α und β vertausche, oder man erhält:

$$\sum_k \left[\frac{\partial\beta}{\partial p_k} \frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial q_k}}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_k} \frac{d\frac{\partial\beta}{\partial p_k}}{dt} \right]$$
$$- \sum_k \left[\frac{\partial\beta}{\partial q_k} \frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_k} \frac{d\frac{\partial\beta}{\partial q_k}}{dt} \right] = 0.$$

Der Ausdruck linker Hand ist ein genaues Differential des Ausdrucks

$$[\alpha, \beta] = \sum_k \left[\frac{\partial\alpha}{\partial q_k} \frac{\partial\beta}{\partial p_k} - \frac{\partial\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial\beta}{\partial q_k} \right],$$

wodurch sich die vorstehende Gleichung in folgende verwandelt:

$$\frac{d[\alpha, \beta]}{dt} = 0,$$

welche zu beweisen war. Man kann übrigens auch für die Grössen $[\alpha, \beta]$ bemerken, dass ihre Werthe dieselben bleiben, welche Bestimmungsstücke der Punkte des Systems man auch für die Grössen q_k annimmt, wenn nur die Bedeutung der Elemente sich nicht ändert. Ich bemerke ferner noch, dass sowohl die Lagrange'schen als die Poisson'schen Störungsformeln ungeändert bleiben, wenn H ausser den Grössen q_i, p_i noch t explicite enthält, und dass auch für diesen Fall die Ausdrücke (α, β) und $[\alpha, \beta]$ blosse Functionen der Elemente sind.

Wenn das System ganz frei ist und man für die Grössen q_k die rechtwinkligen Coordinaten selber nimmt, so wird die Grösse p_k, je nachdem q_k die Werthe x_i, y_i, z_i erhält, die Werthe $m_i x'_i$, $m_i y'_i$, $m_i z'_i$ annehmen. Es verschwinden für diesen Fall die Grössen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_{k'}},$$

und die Grössen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_{k'}}$$

erhalten nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn $k = k'$ ist, und zwar den Werth $\frac{1}{m_i}$. Man erhält daher aus den obigen Formeln für ein freies System die merkwürdigen Gleichungen:

$$\frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial x'_i}}{dt} = -\frac{\partial\alpha}{\partial x_i},$$
$$\frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial y'_i}}{dt} = -\frac{\partial\alpha}{\partial y_i},$$
$$\frac{d\frac{\partial\alpha}{\partial z'_i}}{dt} = -\frac{\partial\alpha}{\partial z_i},$$

welche bereits Lagrange angemerkt hat. Man sieht aus diesen Formeln, dass jedes Integral (d. h. ein Ausdruck von t und den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, welcher einer willkürlichen Constante gleich wird, ohne dass der Ausdruck selber noch andere willkürliche Constanten enthält), wenn es eine Coordinate enthält, auch ihren nach der Zeit genommenen Differentialquotienten enthalten muss, und dass umgekehrt, wenn der nach der Zeit genommene Differentialquotient einer Coordinate gar nicht oder bloss linear, mit einer Constante multiplicirt, in dem Integral vorkommt, auch die entsprechende Coordinate in dem Integral nicht vorkommen wird.

Ich bemerke noch, dass, wenn der Satz der lebendigen Kraft gilt, immer auch $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ eine blosse Function der Elemente ist. Denn man erhält in diesem Falle $2m-1$ Gleichungen mit $2m-1$ willkürlichen Constanten zwischen den $2m$ Grössen q_i, p_i, ohne t, und durch eine $2m^{te}$ Gleichung $t+\tau$, wo τ die $2m^{te}$ willkürliche Constante ist, durch die Grössen q_i, p_i ausgedrückt. Wenn daher α eine jener $2m-1$ willkürlichen Constanten ist, wird $\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0$, und nur, wenn $\alpha = \tau$, wird $\frac{\partial\alpha}{\partial t} = -1$. Es wird daher auch, wenn α irgend eine Function aller willkürlichen Constanten ist,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial\alpha}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}$$

oder ebenfalls einer Constante gleich.

§. 29. Anderer Beweis des Poisson'schen Satzes. Wie aus zwei Integralen der dynamischen Gleichungen weitere gefunden werden.

Ich will auch für den Satz, dass der Ausdruck $[\alpha, \beta]$ sich bloss durch die Elemente ohne die Zeit t darstellen lasse, den Beweis noch auf eine andere Art ableiten, indem ich wieder von einer rein *identischen* Gleichung ausgehe.

Es seien α, β, γ irgend drei Functionen der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und der Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Man setze wieder, wenn ε, ζ zwei Functionen dieser Grössen sind,

$$[\varepsilon,\zeta] = \frac{\partial\varepsilon}{\partial q_1}\frac{\partial\zeta}{\partial p_1} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial q_2}\frac{\partial\zeta}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\varepsilon}{\partial q_m}\frac{\partial\zeta}{\partial p_m}$$
$$-\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_1}\frac{\partial\zeta}{\partial q_1} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_2}\frac{\partial\zeta}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_m}\frac{\partial\zeta}{\partial q_m}.$$

Nach dieser Bezeichnung sei

$$[\beta,\gamma] = \mathrm{A},\quad [\gamma,\alpha] = \mathrm{B},\quad [\alpha,\beta] = \Gamma,$$

dann ist

$$[\mathrm{A},\alpha]+[\mathrm{B},\beta]+[\Gamma,\gamma] = 0.$$

Indem ich den leicht zu ergänzenden Beweis dieser identischen Gleichung übergehe, will ich bloss zeigen, wie daraus der zu beweisende Satz folgt.

Es seien nämlich α und β solche Functionen der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ und der Zeit t, welche vermittelst der Integralgleichungen des ungestörten Problems einer willkürlichen Constante gleich werden, so müssen die Gleichungen

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0,\quad \frac{d\beta}{dt} = 0$$

identisch erfüllt werden, wenn man darin die Differentialgleichungen des Problems, d. h. die Werthe

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

substituirt. Dies giebt die identischen Gleichungen:

$$[\beta,H]+\frac{\partial\beta}{\partial t} = 0,\quad [H,\alpha]-\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0$$

oder, wenn man

$$[\beta,H] = \mathrm{A},\quad [H,\alpha] = \mathrm{B}$$

setzt, die Gleichungen:

$$\mathrm{A} = -\frac{\partial\beta}{\partial t},\quad \mathrm{B} = \frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

Wenn man daher in der oben aufgestellten identischen Gleichung

$$[\mathrm{A},\alpha]+[\mathrm{B},\beta]+[\Gamma,\gamma] = 0$$

die Function H für γ setzt, so verwandelt sie sich in die Gleichung:

$$\left[-\frac{\partial\beta}{\partial t},\alpha\right]+\left[\frac{\partial\alpha}{\partial t},\beta\right]+[\Gamma,H] = 0.$$

Man hat aber:

$$\left[-\frac{\partial\beta}{\partial t},\alpha\right]+\left[\frac{\partial\alpha}{\partial t},\beta\right] = \left[\frac{\partial\alpha}{\partial t},\beta\right]+\left[\alpha,\frac{\partial\beta}{\partial t}\right] = \frac{\partial[\alpha,\beta]}{\partial t} = \frac{\partial\Gamma}{\partial t},$$

und daher gilt die identische Gleichung:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+[\Gamma,H] = 0.$$

Der Ausdruck links wird dem Ausdrucke $\frac{d\Gamma}{dt}$ gleich, wenn man darin die Differentialgleichungen des Problems substituirt, und daher Γ selbst vermittelst der Integralgleichungen des Problems eine Constante, was zu beweisen war.

Wie grossen Werth auch immer Alle, welche sich mit analytischer Mechanik beschäftigen, auf Poisson's Arbeit über die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik gelegt haben, so scheint mir noch Niemand die wahre und merkwürdige Bedeutung des Satzes, dass $[\alpha, \beta]$ sich durch die

Elemente ohne t ausdrücken lässt, gehörig hervorgehoben zu haben. In den Anwendungen, welche Poisson selbst von seinen Formeln auf die elliptische Bewegung eines Planeten und auf die Rotation eines festen Körpers um einen seiner Punkte gemacht hat, wurden von ihm solche Elemente α, β gewählt, für welche fast immer der Ausdruck $[\alpha, \beta]$ eine *bestimmte* Grösse, z. B. $+1$ oder -1 oder 0 wurde, und der Zweck, welchen man sich vorgesetzt hatte, machte eine solche Wahl sehr wünschenswerth. Dies ist aber nur ein besonderer Fall und gewissermassen ein Ausnahmefall. Im Allgemeinen wird der Ausdruck $[\alpha, \beta]$ eine Function von den Grössen q_i und p_i und der Zeit t sein, welche sich auf keine Weise durch die Functionen α und β ausdrücken lässt. Man hat also im Allgemeinen das merkwürdige Theorem:

„*Wenn H irgend eine Function von t und den Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ ist, und man von den Differentialgleichungen*

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}$$

zwei Integrale kennt, so kann man daraus durch blosse partielle Differentiation ein drittes ableiten.“

Hieraus folgt der Satz:

„*Wenn man von einem Problem der Mechanik, in welchem der Satz von der lebendigen Kraft gilt, noch zwei Integrale kennt, so kann man daraus durch blosse partielle Differentiation ein drittes ableiten.*“

Der vorige Satz ist aber auch noch auf mechanische Probleme anwendbar, in welchen der Satz der Erhaltung der lebendigen Kraft nicht gilt.

Es hindert nichts, das gefundene dritte Integral mit einem der beiden gegebenen zu combiniren, um nach derselben Regel ein viertes abzuleiten. Wenn dieses nicht bereits in den gefundenen Integralen enthalten ist, kann man so fortfahren, und *es können auf diese Weise bei jedem Problem der Mechanik, in welchem der Satz von der lebendigen Kraft gilt, aus zwei Integralen sämmtliche übrige durch blosse partielle Differentiation nach einer bestimmten Regel abgeleitet werden.*

§. 30. Einfachste Störungsformeln für ein System canonischer Elemente.

Da nach dem Obigen die mit (α, β) und $[\alpha, \beta]$ bezeichneten Ausdrücke nur von den α, β abhängen, so kann man in den Grössen q_k, p_k der Veränderlichen t jeden beliebigen Werth beilegen. Man hat also auch

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) = {} & \frac{\partial c_1}{\partial \alpha}\frac{\partial b_1}{\partial \beta} + \frac{\partial c_2}{\partial \alpha}\frac{\partial b_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial c_m}{\partial \alpha}\frac{\partial b_m}{\partial \beta} \\ & -\left(\frac{\partial c_1}{\partial \beta}\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial c_2}{\partial \beta}\frac{\partial b_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial c_m}{\partial \beta}\frac{\partial b_m}{\partial \alpha}\right), \\ [\alpha, \beta] = {} & \frac{\partial \alpha}{\partial c_1}\frac{\partial \beta}{\partial b_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial c_2}\frac{\partial \beta}{\partial b_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial c_m}\frac{\partial \beta}{\partial b_m} \\ & -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial b_1}\frac{\partial \beta}{\partial c_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial b_2}\frac{\partial \beta}{\partial c_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial b_m}\frac{\partial \beta}{\partial c_m}\right),\end{aligned}$$

wenn wieder c_k, b_k die zu $t = 0$ gehörigen Werthe von q_k, p_k bedeuten.

Nimmt man die Grössen c_k und b_k selber zu Elementen, so folgt hieraus, wenn i und k verschieden sind,

$$(c_i, b_k) = 0, \quad [c_i, b_k] = 0;$$

dagegen ergiebt sich, wenn $k = i$ ist,

$$(c_i, b_i) = -(b_i, c_i) = 1,$$
$$[c_i, b_i] = -[b_i, c_i] = 1.$$

Es folgen daher aus jeder der beiden Gleichungen

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \Sigma(\alpha, \beta)\frac{d\alpha}{dt},$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma[\alpha, \beta]\frac{\partial H_1}{\partial \beta}$$

für diese Annahme der Elemente die einfachen Gleichungen, welche ich bereits oben mitgetheilt habe:

$$\begin{aligned}\frac{dc_1}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial b_1}, & \frac{db_1}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial c_1}, \\ \frac{dc_2}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial b_2}, & \frac{db_2}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial c_2}, \\ & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \frac{dc_m}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial b_m}, & \frac{db_m}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial c_m}.\end{aligned}$$

Nimmt man bei einem freien System die rechtwinkligen Coordinaten für die Grössen q_k und nennt wieder a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i die Anfangswerthe von x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, so verwandeln sich die vorstehenden Gleichungen in folgende:

$$m_i \frac{da_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial a'_i}, \quad m_i \frac{da'_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial a_i},$$
$$m_i \frac{db_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial b'_i}, \quad m_i \frac{db'_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial b_i},$$
$$m_i \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial c'_i}, \quad m_i \frac{dc'_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial c_i}.$$

Diese von **Lagrange** in der Mécanique Analytique gegebenen Gleichungen gelten daher auch für den Fall, wenn die Störungsfunction H_1 auch die Grössen p_i oder x'_i, y'_i, z'_i enthält.

Setzt man in H_1, welches man vermittelst der Formeln der ungestörten Bewegung durch die Elemente b_1, b_2, ..., b_m, c_1, c_2, ..., c_m auszudrücken hat, für b_1, b_2, ..., b_m die Ausdrücke

$$\frac{\partial W}{\partial c_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial c_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial c_m},$$

so findet man nach dem Theorem VI die Elemente als Functionen der Zeit durch die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + H_1.$$

Ist nämlich W eine vollständige Lösung dieser Gleichung mit m willkürlichen Constanten α_1, α_2, ..., α_m, zu welchen eine mit W durch blosse Addition verbundene nicht gerechnet wird, so sind die Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial c_1} = b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial c_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial c_m} = b_m,$$
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$

in welchen β_1, β_2, ..., β_m neue willkürliche Constanten sind, die Integralgleichungen für die veränderlichen Elemente.

§. 31. Die Störungsformeln für die Planetenbewegung.

In der Theorie der Störung der elliptischen Bewegung der Planeten haben die bekannten Differentialgleichungen für die sechs Elemente beinahe eben dieselbe einfache Form, welche oben näher bezeichnet ist. **Hamilton** führt sie *genau* auf diese Form zurück, indem er statt der Neigung den Sinus versus der Neigung, multiplicirt mit der Quadratwurzel aus dem halben Parameter, als Element einführt. Nennt man nämlich mit **Hamilton**

M die Masse der Sonne,
m die Masse des Planeten,
w die Länge des Perihels,
ν die Länge des aufsteigenden Knotens,
τ die Durchgangszeit durch das Perihel;

setzt man ferner

$$\mu = -\frac{M+m}{2a},$$
$$\varkappa = \sqrt{M+m}\sqrt{p},$$
$$\lambda = \sqrt{M+m}\sqrt{p}(1-\cos i),$$

wo a, p, i die halbe grosse Axe, den halben Parameter und die Neigung der Ebene der Bahn gegen eine feste Ebene bedeuten, so giebt **Hamilton** die folgenden Formeln, welche sich leicht aus den bekannten ableiten lassen:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu}, \quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \tau},$$
$$\frac{d\varkappa}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial w}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa},$$
$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \nu}.$$

Diese Gleichungen haben genau jene *canonische* Form. Sie gelten auch unverändert für jedes beliebige Anziehungsgesetz, wie **Hamilton** bemerkt, wenn man μ den constanten Theil des halben Quadrats der Geschwindigkeit und $\varkappa$ die doppelte Arealgeschwindigkeit bedeuten lässt und $\frac{\lambda}{\varkappa}$ wieder dem Sinus versus der Neigung der Bahn gleich setzt. Die Störungsfunction Ω ist hier in dem gewöhnlichen Sinne genommen, so dass

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -R\frac{z}{r},$$

wo R durch das Gesetz der Anziehung als Function der Entfernung gegeben ist, die Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung und

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r} + \frac{\partial\Omega}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r} + \frac{\partial\Omega}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -R\frac{z}{r} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}$$

die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung sind. Für die elliptische Bewegung um die Sonne, auf welche sich die obige Bedeutung der Elemente bezieht, ist

$$R = \frac{M+m}{r^2}$$

zu setzen.

Zufolge des Theorems VI kann man die Integralgleichungen für die gestörten Elemente unmittelbar angeben, wenn man eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + \Omega$$

kennt, in welcher für die Grössen μ, w, λ, welche in Ω vorkommen, zu setzen ist

$$\mu = \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad w = \frac{\partial W}{\partial \varkappa}, \quad \lambda = \frac{\partial W}{\partial \nu}.$$

Wenn W ausser einer bloss hinzuaddirten Constante noch die drei willkürlichen Constanten α, β, γ enthält, so werden die sechs Elemente als Functionen der Zeit durch die Gleichungen

$$\mu = \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad w = \frac{\partial W}{\partial \varkappa}, \quad \lambda = \frac{\partial W}{\partial \nu},$$
$$\alpha' = \frac{\partial W}{\partial \alpha}, \quad \beta' = \frac{\partial W}{\partial \beta}, \quad \gamma' = \frac{\partial W}{\partial \gamma}$$

bestimmt, in welchen α', β', γ' drei neue willkürliche Constanten bedeuten.

§. 32. Uebergang von einem System canonischer Elemente zu einem anderen.

Wenn man die Anfangswerthe der Grössen p und q als Elemente wählt, so erhalten, wie wir gesehen haben, in der gestörten Bewegung die Differentialgleichungen für diese Elemente in allen Problemen der Mechanik, in denen der Satz von der lebendigen Kraft gilt, die einfache Form, die ich die canonische genannt habe. Aber diese Form, so sehen wir aus dem Vorigen, erhält man nach den Entwickelungen des §. 31 bei der elliptischen Bewegung eines Planeten auch für ein ganz anderes, wesentlich verschiedenes System von Elementen; denn unter den sechs Elementen τ, $\varkappa$, ν, μ, w, λ ist keines, welches sich allein durch die Anfangswerthe der Coordinaten des Planeten ausdrücken oder als Anfangswerth einer Grösse q betrachten liesse. Da also die Anfangswerthe der Grössen q und p nicht das einzige System von Elementen bilden, deren Differentialgleichungen die canonische Form haben, so bietet sich die Frage dar, wie man für jedes Problem der Mechanik, für welches der Satz von der lebendigen Kraft gilt, alle solche Systeme von Elementen finden könne. Diese Frage, welche nach den bekannten Methoden schwer zu beantworten sein dürfte, wird durch die Verallgemeinerung des Hamilton'schen Theorems, die in dem Theorem VI enthalten ist, leicht erledigt. Man hat nämlich das folgende allgemeine Theorem, welches als ein Fundamentaltheorem in der Theorie der Variation der Constanten betrachtet werden kann.

Theorem IX.

„Es sei H eine Function von t und den Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$, und es seien

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}$$

die Differentialgleichungen des ungestörten Problems, aus denen die Differentialgleichungen des gestörten erhalten werden, wenn man $H+H_1$ *statt* H *schreibt, wo* H_1 *eine beliebige Function der* $2m$ *Grössen* q_k *und* p_k *und der Grösse* t *sei. Es sei* W *eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung*

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + H,$$

in welcher die Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$*, die in* H *vorkommen, respective durch* $\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}$ *zu ersetzen sind. Man nenne* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *die* m *willkürlichen Constanten, die ausser einer bloss hinzu zu addirenden die Function* W *enthält, und es seien*

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

die Integralgleichungen des ungestörten Problems, in welchen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *neue* m *willkürliche Constanten sind. Drückt man vermittelst dieser Gleichungen und der Gleichungen*

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

die Störungsfunction H_1 *durch* t *und durch die Elemente* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *aus und betrachtet in dem gestörten Problem diese Elemente als veränderlich, so werden die Differentialgleichungen für diese gestörten Elemente*

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, & \frac{d\beta_1}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1},\\
\frac{d\alpha_2}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, & \frac{d\beta_2}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\\
\frac{d\alpha_m}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, & \frac{d\beta_m}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_m}.\text{“}
\end{aligned}$$

In der Hamilton'schen Darstellung der Integralgleichungen des ungestörten Problems müssen die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Anfangswerthe der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ sein, und die Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ die Anfangswerthe der Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$, mit entgegengesetzten Zeichen genommen. Das Theorem IX giebt für diesen Fall nur die bekannten Formeln, welche oben mitgetheilt sind, in welchen die Anfangswerthe der Grössen q_i, p_i als die gestörten Elemente betrachtet werden.

Den Beweis dieses für die Theorie der Variation der Constanten wichtigen Theorems geben folgende einfache Betrachtungen. Man schliesse die partiellen Differentialquotienten von W, wenn dasselbe als Function von t und den $2m$ Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ betrachtet wird, in Klammern ein, lasse dagegen, wie früher, die Klammern fort, wenn W als Function von t, den m Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und den m Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ betrachtet wird. Man hat nach dieser Bezeichnung:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_k}\right) &= \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_k},\\
\left(\frac{\partial W}{\partial \beta_k}\right) &= \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \beta_k} + \frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \beta_k} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \beta_k}
\end{aligned}$$

oder zufolge der Integralgleichungen des ungestörten Problems, welche in unveränderter Form auch für das gestörte Problem gelten sollen, nur dass darin die Elemente als variabel betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_k}\right) &= p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k} + \beta_k,\\
\left(\frac{\partial W}{\partial \beta_k}\right) &= p_1\frac{\partial q_1}{\partial \beta_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \beta_k} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \beta_k}.
\end{aligned}$$

Wenn α, β irgend zwei von den $2m$ willkürlichen Constanten bedeuten, so setzten wir oben:

$$\begin{aligned}
(\alpha,\beta) = {} & \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha}\frac{\partial p_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \alpha}\frac{\partial p_m}{\partial \beta}\\
& -\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial \alpha}\frac{\partial q_m}{\partial \beta}\right)\\
= {} & \frac{\partial\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \alpha}\right)}{\partial \beta}\\
& - \frac{\partial\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \beta}\right)}{\partial \alpha}.
\end{aligned}$$

Macht man daher die drei Annahmen

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_i, & \beta &= \alpha_k,\\
\alpha &= \alpha_i, & \beta &= \beta_k,\\
\alpha &= \beta_i, & \beta &= \beta_k,
\end{aligned}$$

so erhält man aus den vorstehenden Formeln diesen Annahmen entsprechend, da die aus der zweifachen Differentiation von W herrührenden Terme sich aufheben, *wenn die Elemente α_i und β_i die in dem Theorem IX angegebene Bedeutung haben,*

$$(\alpha_i, \alpha_k) = 0, \quad (\beta_i, \beta_k) = 0,$$

ferner, wenn i und k verschieden sind,

$$(\alpha_i, \beta_k) = 0,$$

wenn aber $k = i$,

$$(\alpha_i, \beta_i) = -(\beta_i, \alpha_i) = -1.$$

Wenn daher $\beta = \alpha_i$, so verschwindet (α, β) nur dann nicht, wenn $\alpha = \beta_i$, und wenn $\beta = \beta_i$, so verschwindet (α, β) nur dann nicht, wenn $\alpha = \alpha_i$; und es erhält im ersteren Falle (α, β) den Werth $+1$, im zweiten den Werth -1. Die allgemeine Lagrange'sche Formel

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \Sigma(\alpha, \beta) \frac{d\alpha}{dt},$$

in welcher unter dem Summenzeichen für α nach und nach sämmtliche $2m$ Elemente zu setzen sind, giebt daher:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} = \frac{d\beta_i}{dt}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} = -\frac{d\alpha_i}{dt},$$

was zu beweisen war.

Da man nach den Poisson'schen Formeln auch die Gleichungen hat:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma[\alpha, \beta] \frac{\partial H_1}{\partial \beta},$$

wenn man unter dem Summenzeichen für β nach und nach alle $2m$ Elemente setzt, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen, dass, *wenn man für die Elemente die in dem Theorem IX angegebenen willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ annimmt, man die identischen Gleichungen hat:*

$$[\alpha_i, \alpha_k] = 0, \quad [\beta_i, \beta_k] = 0,$$

ferner, wenn i und k verschieden sind,

$$[\alpha_i, \beta_k] = 0,$$

wenn aber $k = i$,

$$[\alpha_i, \beta_i] = -[\beta_i, \alpha_i] = -1.$$

Diese allgemeinen Formeln sind von grosser Wichtigkeit sowohl für die Theorie der Variation der Constanten, welche dazu die Veranlassung gab, als für die Integration der Differentialgleichungen des ungestörten Problems selber.

Ich werde im Folgenden ein System von Elementen, wie das im vorstehenden Theorem angegebene, ein *canonisches* nennen.

§. 33. Eigenschaften der Ausdrücke $[a_i, a_k]$, (a_i, a_k). Bestimmung einer Störungsfunction, welche beliebig gegebene Aenderungen der Elemente liefert.

Die Poisson'schen Functionen

$$[a_i, a_k],$$

in welchen a_i, a_k *irgend* zwei Elemente oder willkürliche Constanten bedeuten, haben die doppelte merkwürdige Eigenschaft, dass sie 1) von der Wahl der Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$ oder der Bestimmungsstücke der Orte der materiellen Punkte unabhängig sind, und dass sie 2) bloss von den beiden Elementen a_i und a_k selber abhängen, so dass der Werth des Ausdrucks $[a_i, a_k]$ derselbe bleibt, welches auch die willkürlichen Constanten sind, die man zu den übrigen Elementen gewählt hat. Die erste dieser Eigenschaften lässt sich durch folgende Betrachtungen erweisen.

In der Form der Poisson'schen Störungsformeln werden die Differentialquotienten der veränderlichen Elemente gleich linearen Ausdrücken aus den nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction H_1, und die Function $[a_i, a_k]$ ist der Coefficient von $\frac{\partial H_1}{\partial a_k}$ in dem Ausdrucke von $\frac{da_i}{dt}$. Um diese partiellen Differentialquotienten zu bilden, muss man H_1 durch die Elemente und t ausdrücken, und dieser Ausdruck ist gänzlich davon unabhängig, welche Functionen der Coordinaten der bewegten materiellen Punkte man als die Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$ gewählt hat. Die Störungsfunction H_1 kann ferner in derjenigen Allgemeinheit, welche Hamilton den Störungsformeln gegeben hat, und in welcher ich sie oben aufgestellt habe, eine *beliebige* Function von t und den $2m$ Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ sein, sie wird daher auch eine beliebige Function von t und den $2m$ Elementen sein können; die Functionen $[a_i, a_k]$ endlich sind gänzlich von der Störungsfunction unabhängig und werden bloss durch die Formeln der ungestörten Bewegung bestimmt. Hat man nun für eine Wahl der Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$ gefunden:

$$\frac{da_i}{dt} = A_1\frac{\partial H_1}{\partial a_1} + A_2\frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \cdots + A_{2m}\frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}$$

und für eine andere Wahl:

$$\frac{da_i}{dt} = B_1\frac{\partial H_1}{\partial a_1} + B_2\frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \cdots + B_{2m}\frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}},$$

so wird

$$(A_1 - B_1)\frac{\partial H_1}{\partial a_1} + (A_2 - B_2)\frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \cdots + (A_{2m} - B_{2m})\frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}} = 0,$$

wo $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}, B_1, B_2, \ldots, B_{2m}$ Functionen von t und den Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ sind. Da in dieser Gleichung H_1 eine *beliebige* Function derselben Grössen sein kann, so muss man haben:

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad \ldots, \quad A_{2m} = B_{2m};$$

und da $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}, B_1, B_2, \ldots, B_{2m}$ bloss durch die Formeln der ungestörten Bewegung bestimmt werden und die Formeln der ungestörten Bewegung keine Gleichung zwischen $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}, t$, d. h. zwischen den willkürlichen Constanten und der Zeit ergeben, so müssen diese Gleichungen identisch sein, oder die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}$ sind von der Wahl der Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$ unabhängig, was zu beweisen war. Ich habe zu diesem Beweise den Umstand nicht benutzt, dass die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}$ von t unabhängig sind.

Die zweite Eigenschaft der Functionen $[a_i, a_k]$ folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$[a_i, a_k] = \frac{\partial a_i}{\partial q_1}\frac{\partial a_k}{\partial p_1} + \frac{\partial a_i}{\partial q_2}\frac{\partial a_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial a_i}{\partial q_m}\frac{\partial a_k}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial a_i}{\partial p_1}\frac{\partial a_k}{\partial q_1} - \frac{\partial a_i}{\partial p_2}\frac{\partial a_k}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial a_i}{\partial p_m}\frac{\partial a_k}{\partial q_m}.$$

Denn diese Gleichung lehrt, dass, um den Ausdruck $[a_i, a_k]$ zu erhalten, man bloss die Ausdrücke von a_i und a_k durch $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ zu kennen braucht, also nur zwei Integrale der ungestörten Bewegung. Man braucht also nicht zu wissen, welche Combinationen aus den willkürlichen Constanten für die übrigen Elemente gewählt sind, oder welche der Functionen von $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, die zufolge der Integralgleichungen des ungestörten Problems willkürlichen Constanten gleich sind,

als die übrigen $2m-2$ der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ angenommen werden. Man braucht sogar, wie die Natur der angegebenen Formel lehrt, die übrigen Integrale des ungestörten Problems gar nicht einmal gefunden zu haben, um den Werth von $[a_i, a_k]$ angeben zu können. Nur wenn man diesen Werth durch die willkürlichen Constanten allein ausdrücken will, was, wie oben gezeigt worden, immer möglich ist, muss man auch noch andere Integrale kennen. Hierbei kann man Folgendes festhalten. Kennt man eine gewisse Anzahl von Integralen, welche eine gleiche Anzahl willkürlicher Constanten enthalten, so kann man die Grösse $[a_i, a_k]$ entweder vermittelst dieser Integrale durch die in letzteren enthaltenen Constanten ausdrücken, oder, falls dieses nicht möglich ist, einer neuen willkürlichen Constante gleich setzen. In diesem Falle erhält man also ein weiteres Integral, dessen Constante als ein neues Element anzusehen ist.

Die Lagrange'schen Functionen (a_i, a_k) haben mit den Poisson'schen Functionen die erste der beiden genannten Eigenschaften gemein, dass sie ihren Werth nicht ändern, welche Functionen der Coordinaten man auch als die unabhängigen Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$ angenommen hat. Man könnte dies daraus folgern, dass die Lagrange'schen und Poisson'schen Störungsformeln aus einander vermittelst der Auflösung von $2m$ linearen Gleichungen erhalten werden können, und man also die Functionen (a_i, a_k) und die Functionen $[a_i, a_k]$ immer durch einander ausdrücken kann; denn es ergiebt sich hieraus, dass, wenn die Werthe der einen von der Wahl der Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$ unabhängig sind, dies auch mit den anderen der Fall sein muss. Um jedoch auch für die Lagrange'schen Functionen diese Eigenschaft direct zu beweisen, bemerke ich, dass es nicht möglich ist, für zwei verschiedene Annahmen der Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$ zwei verschiedene Störungsgleichungen

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_i} = C_1\frac{da_1}{dt} + C_2\frac{da_2}{dt} + \cdots + C_{2m}\frac{da_{2m}}{dt},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_i} = D_1\frac{da_1}{dt} + D_2\frac{da_2}{dt} + \cdots + D_{2m}\frac{da_{2m}}{dt}$$

zu erhalten. Denn könnten die Grössen $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$ von den Grössen $D_1, D_2, \ldots, D_{2m}$ verschieden sein, so würde man die Differentialgleichung haben:

$$(C_1 - D_1)da_1 + (C_2 - D_2)da_2 + \cdots + (C_{2m} - D_{2m})da_{2m} = 0,$$

in welcher $C_1 - D_1$, $C_2 - D_2$ etc. Functionen von den Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$

und von t sind, die bloss durch die Gleichungen des ungestörten Problems bestimmt sind. In der oben gegebenen Ableitung der Störungsgleichungen, in welchen die Störungsfunction H_1 jede beliebige Function von t, $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sein konnte, wurde aber keine Annahme gemacht, welche auf eine Differentialgleichung zwischen den Elementen und der Zeit führen könnte, die von der Störungsfunction unabhängig ist. *Auch kann man die Störungsfunction bei der Allgemeinheit, in welcher sie hier genommen wird, leicht so bestimmen, dass die veränderlichen Elemente irgend welche Functionen der Zeit werden, die der vorstehenden Gleichung nicht genügen.*

Unter den unendlich vielen Arten, wie man H_1 annehmen kann, damit die $2m$ Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i}$$

erfüllt werden, wenn die Elemente der ungestörten Bewegung $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ irgend welchen gegebenen Functionen der Zeit t gleich gesetzt werden, will ich des Beispiels wegen nur die einfachste und zunächst sich darbietende angeben. Da $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ gegebene Functionen von t und $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ sind, welche durch die Gleichungen der ungestörten Bewegung bestimmt werden, so erhält man die Werthe von $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ für die gestörte Bewegung, wenn man die für $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ gegebenen Functionen von t substituirt, wodurch die Ausdrücke von

$$\frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

ebenfalls gegebene Functionen von t werden. Es seien diese Functionen von t:

$$T_i = \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \tau_i = \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

so kann man für H_1, welches eine beliebige Function von t, $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sein kann, den Ausdruck setzen:

$$\begin{aligned} H_1 = {} & T_1 p_1 + T_2 p_2 + \cdots + T_m p_m \\ & -(\tau_1 q_1 + \tau_2 q_2 + \cdots + \tau_m q_m). \end{aligned}$$

Denn man erhält hierfür:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_i} = T_i, \quad -\frac{\partial H_1}{\partial q_i} = \tau_i,$$

so dass die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung durch die Functionen der Zeit, die man für die gestörten Elemente gesetzt hat, erfüllt werden.

§. 34. Beweis, dass die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction, den Lagrange'schen Formeln entsprechend, sich nur auf *eine* Weise als lineare Functionen der Differentialquotienten der Constanten so darstellen lassen, dass die Coefficienten von der Zeit unabhängig sind.

Lagrange macht die Annahme, dass die ersten Differentialquotienten der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ unverändert dieselben bleiben, ob man in ihren Ausdrücken durch die Elemente und die Zeit die Elemente als constant oder als veränderlich betrachte. Man hat daher zwischen den Elementen und der Zeit m Differentialgleichungen:

$$\begin{gathered} \frac{\partial q_1}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial q_1}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial q_1}{\partial a_{2m}} da_{2m} = 0, \\ \frac{\partial q_2}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial q_2}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial q_2}{\partial a_{2m}} da_{2m} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial q_m}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial q_m}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial a_{2m}} da_{2m} = 0. \end{gathered}$$

Aber ungeachtet dieser Gleichungen kann man beweisen, dass man nicht zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial a_i} &= C_1 \frac{da_1}{dt} + C_2 \frac{da_2}{dt} + \cdots + C_{2m} \frac{da_{2m}}{dt}, \\ \frac{\partial H_1}{\partial a_i} &= D_1 \frac{da_1}{dt} + D_2 \frac{da_2}{dt} + \cdots + D_{2m} \frac{da_{2m}}{dt} \end{aligned}$$

erhalten kann, in welchen die Grössen $D_1, D_2, \ldots, D_{2m}$ von den Grössen $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$ verschieden sind, wenn man als Bedingung die für die Coefficienten (a_i, a_k) bewiesene Eigenschaft hinzufügt, dass die Grössen $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$ und $D_1, D_2, \ldots, D_{2m}$ blosse Functionen der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ ohne die Zeit t sein sollen. Setzt man

$$C_1 - D_1 = E_1, \quad C_2 - D_2 = E_2, \quad \ldots, \quad C_{2m} - D_{2m} = E_{2m},$$

so ist zu beweisen, dass aus den angenommenen m Differentialgleichungen keine Gleichung

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \cdots + E_{2m} da_{2m} = 0$$

gefolgert werden kann, in welcher die Grössen $E_1, E_2, \ldots, E_{2m}$ nicht t enthalten, sondern blosse Functionen von $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ sind. Man erhält auf die allgemeinste Weise eine Differentialgleichung

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \cdots + E_{2m} da_{2m} = 0,$$

welche aus den m angenommenen Differentialgleichungen folgt, wenn man dieselben mit m Factoren $N_1, N_2, \ldots, N_m$ multiplicirt, welche beliebige Functionen von $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}, t$ sein können, und hernach sämmtliche Gleichungen addirt. Man erhält dann:

$$\begin{aligned}
E_1 &= N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + \cdots + N_m \frac{\partial q_m}{\partial a_1}, \\
E_2 &= N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + N_m \frac{\partial q_m}{\partial a_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
E_{2m} &= N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_{2m}} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_{2m}} + \cdots + N_m \frac{\partial q_m}{\partial a_{2m}}.
\end{aligned}$$

Sollen diese Ausdrücke nicht t enthalten, so müssen folgende $2m$ Gleichungen stattfinden, in welchen

$$q'_1 = \frac{\partial q_1}{\partial t}, \quad q'_2 = \frac{\partial q_2}{\partial t}, \quad \ldots, \quad q'_m = \frac{\partial q_m}{\partial t},$$

$$N'_1 = \frac{\partial N_1}{\partial t}, \quad N'_2 = \frac{\partial N_2}{\partial t}, \quad \ldots, \quad N'_m = \frac{\partial N_m}{\partial t}$$

gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
0 &= N'_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + N'_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + \cdots + N'_m \frac{\partial q_m}{\partial a_1} \\
&\quad + N_1 \frac{\partial q'_1}{\partial a_1} + N_2 \frac{\partial q'_2}{\partial a_1} + \cdots + N_m \frac{\partial q'_m}{\partial a_1}, \\
0 &= N'_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + N'_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + N'_m \frac{\partial q_m}{\partial a_2} \\
&\quad + N_1 \frac{\partial q'_1}{\partial a_2} + N_2 \frac{\partial q'_2}{\partial a_2} + \cdots + N_m \frac{\partial q'_m}{\partial a_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= N'_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_{2m}} + N'_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_{2m}} + \cdots + N'_m \frac{\partial q_m}{\partial a_{2m}} \\
&\quad + N_1 \frac{\partial q'_1}{\partial a_{2m}} + N_2 \frac{\partial q'_2}{\partial a_{2m}} + \cdots + N_m \frac{\partial q'_m}{\partial a_{2m}}.
\end{aligned}$$

Aus diesen $2m$ Gleichungen kann man die $2m$ Factoren $N'_1, N'_2, \ldots, N'_m, N_1, N_2, \ldots, N_m$ eliminiren und erhält dann eine Gleichung zwischen den partiellen Differentialquotienten von $q_1, q_2, \ldots, q_m, q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ nach $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$, welche anzeigt, dass zwischen den Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ eine Relation existirt, welche nicht zugleich die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ involvirt, welche jedoch die Grösse t enthalten kann. Setzt man für $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ ihre Werthe

$$q'_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad q'_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad q'_m = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$

so erhält man eine Gleichung zwischen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m, t$ ohne willkürliche Constante, welche Gleichung aus den vollständigen Integralgleichungen des ungestörten Problems folgen müsste. Dies ist aber unmöglich, denn man könnte eine solche Gleichung aus den gegebenen Differentialgleichungen des ungestörten Problems nur durch eine Integration erhalten, die, da die Differentialgleichungen vollständig integrirt sein sollen, eine willkürliche Constante mit sich führen müsste.

Wenn man $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ als Variabele betrachtet, die Functionen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ willkürlichen Constanten gleich setzt und ausserdem auch noch t als eine willkürliche Constante annimmt, so ergeben die im Vorigen angestellten Betrachtungen folgendes Theorem:

„*Es sei zwischen den* $2m$ *Variabeln* $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ *eine Differentialgleichung gegeben:*

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \cdots + E_{2m} da_{2m} = 0,$$

und diese Differentialgleichung durch ein System von m *Gleichungen integrirt:*

$$q_1 = c_1, \quad q_2 = c_2, \quad \ldots, \quad q_m = c_m,$$

in welchen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *willkürliche Constanten bedeuten, die in den Functionen* $q_1, q_2, \ldots, q_m$ *nicht selber vorkommen; enthalten diese Functionen eine von* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *ganz unabhängige willkürliche Constante* t*, so muss zwischen den* $2m$ *Ausdrücken*

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial t}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial q_m}{\partial t}$$

eine Relation stattfinden.“

Dieses Theorem ist in der wichtigen Theorie der Integration der Differentialgleichung

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \cdots + E_{2m} da_{2m} = 0$$

durch ein System von m Gleichungen, welche zuerst Pfaff gelehrt hat, nicht ohne Interesse.

§. 35. Beweis, dass, den Poisson'schen Formeln entsprechend, die Differentialquotienten der Constanten sich nur auf *eine* Art als lineare Functionen der partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction so darstellen lassen, dass die Coefficienten von der Zeit unabhängig sind.

Ich will auch noch in Bezug auf die Poisson'schen Störungsformeln *a priori* zeigen, dass man selbst unter der gewöhnlich gemachten Voraussetzung, die Störungsfunction sei frei von den Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$, nicht zwei Gleichungen

$$\frac{da_i}{dt} = A_1 \frac{\partial H_1}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \cdots + A_{2m} \frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}},$$

$$\frac{da_i}{dt} = B_1 \frac{\partial H_1}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \cdots + B_{2m} \frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}$$

erhalten kann, in welchen $B_1, B_2, \ldots, B_{2m}$ von $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}$ verschieden sind, wofern man nur die Bedingung hinzufügt, dass diese Grössen blosse Functionen von $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ ohne t sein sollen. Da H_1 jede beliebige Function von $a_2, a_2, \ldots, a_{2m}, t$ sein kann, welche so beschaffen ist, dass nach Substitution der Ausdrücke von $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m, t$ die Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ aus ihr gänzlich herausgehen, so kann man für H_1 jede Function von $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}, t$ setzen, welche den Gleichungen genügt:

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_1} + \frac{\partial H_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_2} + \frac{\partial H_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_m} + \frac{\partial H_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_m} + \cdots + \frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_m} = 0.$$

Setzt man

$$A_1 - B_1 = F_1, \quad A_2 - B_2 = F_2, \quad \ldots, \quad A_{2m} - B_{2m} = F_{2m},$$

so muss sich aus diesen Gleichungen die folgende ableiten lassen:

$$F_1 \frac{\partial H_1}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \cdots + F_{2m} \frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}} = 0,$$

in welcher $F_1, F_2, \ldots, F_{2m}$ blosse Functionen von $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ ohne t sind. Es muss daher, wenn man m Multiplicatoren $K_1, K_2, \ldots, K_m$ einführt, den $2m$ Gleichungen

$$K_1 \frac{\partial a_1}{\partial p_1} + K_2 \frac{\partial a_1}{\partial p_2} + \cdots + K_m \frac{\partial a_1}{\partial p_m} = F_1,$$

$$K_1 \frac{\partial a_2}{\partial p_1} + K_2 \frac{\partial a_2}{\partial p_2} + \cdots + K_m \frac{\partial a_2}{\partial p_m} = F_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_1 \frac{\partial a_{2m}}{\partial p_1} + K_2 \frac{\partial a_{2m}}{\partial p_2} + \cdots + K_m \frac{\partial a_{2m}}{\partial p_m} = F_{2m}$$

Genüge geschehen können. Man denke sich $q_1, q_2, \ldots, q_m$ durch $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}, t$ ausgedrückt und differentiire diese Ausdrücke nach $p_1, p_2, \ldots, p_m$, wodurch man für jedes q_i die m Gleichungen erhält:

$$\frac{\partial q_i}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_1} + \frac{\partial q_i}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_2} + \frac{\partial q_i}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_m} + \frac{\partial q_i}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_m} + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_m} = 0.$$

Vermittelst dieser Gleichungen erhält man aus den vorigen $2m$ Gleichungen, wenn man sie der Reihe nach mit den Factoren

$$\frac{\partial q_i}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial q_i}{\partial a_{2m}}$$

multiplicirt und addirt:

$$F_1 \frac{\partial q_i}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_i}{\partial a_2} + \cdots + F_{2m} \frac{\partial q_i}{\partial a_{2m}} = 0.$$

Wenn $F_1, F_2, \ldots, F_{2m}$, wie die Voraussetzung ist, blosse Functionen von $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ ohne t sind, so erhält man, indem man die vorstehende Gleichung nach t differentiirt und für i seine m Werthe $1, 2, 3, \ldots, m$ setzt, die $2m$ Gleichungen:

$$
\begin{gathered}
F_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + \cdots + F_{2m} \frac{\partial q_1}{\partial a_{2m}} = 0, \\
F_1 \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + F_{2m} \frac{\partial q_2}{\partial a_{2m}} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_1 \frac{\partial q_m}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_m}{\partial a_2} + \cdots + F_{2m} \frac{\partial q_m}{\partial a_{2m}} = 0, \\
F_1 \frac{\partial q'_1}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_1}{\partial a_2} + \cdots + F_{2m} \frac{\partial q'_1}{\partial a_{2m}} = 0, \\
F_1 \frac{\partial q'_2}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_2}{\partial a_2} + \cdots + F_{2m} \frac{\partial q'_2}{\partial a_{2m}} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_1 \frac{\partial q'_m}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_m}{\partial a_2} + \cdots + F_{2m} \frac{\partial q'_m}{\partial a_{2m}} = 0.
\end{gathered}
$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass es, falls die Grössen $F_1, F_2, \ldots, F_{2m}$ nicht sämmtlich verschwänden, eine Gleichung zwischen den Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, q'_1, q'_2, \ldots, q'_m, t$ geben müsste, welche keine der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ enthielte. Eine solche Gleichung aber wäre eine Integralgleichung des ungestörten Problems ohne willkürliche Constante, die es nicht geben kann, weil man das ungestörte Problem vollständig integrirt voraussetzt. Es muss also

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_{2m} = 0$$

sein oder

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad \ldots, \quad A_{2m} = B_{2m},$$

was zu beweisen war.

§. 36. Weiteres über die Ausdrücke (a_i, a_k).

Der Satz, dass der Werth der Functionen

$$
\begin{aligned}
(a_i, a_k) = & \frac{\partial q_1}{\partial a_i}\frac{\partial p_1}{\partial a_k} + \frac{\partial q_2}{\partial a_i}\frac{\partial p_2}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial a_i}\frac{\partial p_m}{\partial a_k} \\
& - \frac{\partial q_1}{\partial a_k}\frac{\partial p_1}{\partial a_i} - \frac{\partial q_2}{\partial a_k}\frac{\partial p_2}{\partial a_i} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial a_k}\frac{\partial p_m}{\partial a_i}
\end{aligned}
$$

von der Wahl der Functionen der Coordinaten, welche für die unabhängigen Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$ genommen werden, unabhängig ist, ergiebt sich von selber aus einer wichtigen Bemerkung Poisson's in seiner zweiten Abhandlung

über die Variation der Constanten, welche sich in den Memoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1816 befindet. Poisson zeigt nämlich, dass man diese Functionen unmittelbar aus den Ausdrücken der Coordinaten durch die Elemente und die Zeit ableiten kann, ohne dass man nöthig hat, neue von einander unabhängige Variabele $q_1, q_2, \ldots, q_m$ einzuführen, wodurch also die besondere Wahl dieser Variabeln bei der Bestimmung der Werthe der Functionen (a_i, a_k) gar nicht in Betracht kommt. Die neuen von Poisson gegebenen Ausdrücke dieser Functionen haben ferner die merkwürdige Eigenschaft, dass sie gänzlich von den zwischen den Coordinaten gegebenen Bedingungsgleichungen unabhängig sind. Sind nämlich wieder x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, dessen Masse m ist, und setzt man

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt},$$

so giebt Poisson die Formel:

$$(a_i, a_k) = \Sigma m \left(\frac{\partial x}{\partial a_i}\frac{\partial x'}{\partial a_k} - \frac{\partial x}{\partial a_k}\frac{\partial x'}{\partial a_i} + \frac{\partial y}{\partial a_i}\frac{\partial y'}{\partial a_k} - \frac{\partial y}{\partial a_k}\frac{\partial y'}{\partial a_i} + \frac{\partial z}{\partial a_i}\frac{\partial z'}{\partial a_k} - \frac{\partial z}{\partial a_k}\frac{\partial z'}{\partial a_i} \right),$$

in welcher die Summe auf alle Punkte m des Systems auszudehnen ist. Wenn das System ganz frei ist, und man für die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ die Coordinaten der Punkte nimmt, so erhält man diese Formel aus der obigen, von Lagrange gegebenen. Aber, wie Poisson bemerkt hat, gilt dieselbe Formel auch unverändert, wenn das System irgend welchen Bedingungen unterworfen ist. Sie gilt auch noch für die verallgemeinerten Hamilton'schen Störungsformeln, in welchen H_1 eine beliebige Function von $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ ist.

§. 37. Aus den Störungsgleichungen für *ein* System canonischer Elemente werden die Störungsgleichungen für ein anderes derartiges System abgeleitet.

Da man aus *einer* vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung alle übrigen ableiten kann, so kann man auch vermittelst des Theorems IX aus einem System von Elementen, deren Differentialquotienten die canonische Form haben, alle übrigen ableiten, deren Differentialquotienten dieselbe einfache Form annehmen. Nach der oben auseinandergesetzten Theorie erhält man auf die allgemeinste Art aus einer vollständigen Lösung W eine neue vollständige Lösung $W + \psi$, wenn man für ψ eine willkürliche Function der Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ annimmt, welche m neue willkürliche Constanten $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m$ enthält,

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m)$$

und vermittelst der Gleichungen

$$\begin{gathered}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m} = 0\end{gathered}$$

aus $W+\psi$ die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eliminirt, wodurch für diese Grössen in $W+\psi$ die Grössen $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m$ eingeführt werden. Man erhält dann, wenn man $W+\psi$ nach $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m$ differentiirt, die Integralgleichungen des ungestörten Problems unter der Form:

$$\begin{gathered}\frac{\partial (W+\psi)}{\partial \alpha'_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_1} = \beta'_1, \\ \frac{\partial (W+\psi)}{\partial \alpha'_2} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_2} = \beta'_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial (W+\psi)}{\partial \alpha'_m} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_m} = \beta'_m,\end{gathered}$$

und es müssen zufolge des Theorems IX die neuen Constanten $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m$ und $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m$ wieder ein solches System von Elementen bilden, deren Differentialquotienten die canonische Form haben. Es verwandeln sich ferner die Gleichungen, welche man für die ersten Elemente hatte,

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = 0$$

in die Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = -\beta_i.$$

Man hat daher folgendes Theorem:

Theorem X.

„Es seien die Differentialquotienten der veränderlichen Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{gathered}\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1}, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\alpha_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_m},\end{gathered}$$

wo H_1 die Störungsfunction bedeutet; es sei ferner

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m)$$

eine willkürliche Function der m Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und der m neuen Grössen $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m$; bestimmt man diese neuen Grössen und die m anderen neuen Grössen $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m$ aus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ vermittelst der Gleichungen

$$\begin{gathered}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m} = -\beta_m, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_1} = \beta'_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_2} = \beta'_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_m} = \beta'_m\end{gathered}$$

und drückt die Störungsfunction H_1 durch t und diese neuen Elemente $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m, \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m$ aus, so erhält man die Differentialquotienten dieser neuen Elemente durch die ganz ähnlichen Gleichungen:

$$\begin{gathered}\frac{d\alpha'_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_1}, \quad \frac{d\beta'_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_1}, \\ \frac{d\alpha'_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_2}, \quad \frac{d\beta'_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\alpha'_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_m}, \quad \frac{d\beta'_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_m}.\text{“}\end{gathered}$$

Wenn das Theorem IX in Verbindung mit der bekannten Methode, aus *einer* vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung unendlich viele andere abzuleiten, auf das vorstehende Theorem geführt hat, so ist dasselbe doch seiner Natur nach von allen vorhergehenden Betrachtungen unabhängig und kann direct für sich, wie folgt, bewiesen werden.

Man denke sich durch die Gleichungen des Theorems,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_m} = -\beta_m,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha'_1} = \beta'_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha'_2} = \beta'_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha'_m} = \beta'_m,$$

die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ durch $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m, \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m$ ausgedrückt und in diesem Sinne die partiellen Differentialquotienten von jenen nach diesen genommen. Giebt man dem i die Werthe $1, 2, \ldots, m$, so hat man:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta'_k} = \Sigma \frac{\partial H_1}{\partial\beta_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial\beta'_k} + \Sigma \frac{\partial H_1}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial\beta'_k}.$$

Da nach den Gleichungen des Theorems

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta_i} = -\frac{d\alpha_i}{dt}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial\alpha_i} = \frac{d\beta_i}{dt}$$

ist, so folgt hieraus:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta'_k} = -\Sigma \frac{\partial\beta_i}{\partial\beta'_k}\frac{d\alpha_i}{dt} + \Sigma \frac{\partial\alpha_i}{\partial\beta'_k}\frac{d\beta_i}{dt}.$$

Es ist aber, da

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} = -\beta_i$$

ist, wenn man unter dem Summenzeichen dem Index i' die Werthe $1, 2, \ldots, m$ beilegt,

$$-\frac{\partial\beta_i}{\partial\beta'_k} = \Sigma \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i\partial\alpha_{i'}}\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\beta'_k}$$

und daher:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta'_k} = \Sigma \frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\beta'_k}\left(\Sigma \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i\partial\alpha_{i'}}\frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{d\beta_{i'}}{dt}\right).$$

Da ferner auch

$$\beta_{i'} = -\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_{i'}}$$

ist, so hat man, wenn man diese Gleichung differentiirt und dem i die Werthe $1, 2, \ldots, m$ giebt:

$$\Sigma \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i\partial\alpha_{i'}}\frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{d\beta_{i'}}{dt} = -\Sigma \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha'_i\partial\alpha_{i'}}\frac{d\alpha'_i}{dt}$$

und daher

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta'_k} = -\Sigma\Sigma \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha'_i\partial\alpha_{i'}}\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\beta'_k}\frac{d\alpha'_i}{dt}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha'_i} = \beta'_i$$

folgt aber durch partielle Differentiation nach β'_k, wenn man dem i' die Werthe $1, 2, \ldots, m$ giebt:

$$\Sigma \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_{i'}\partial\alpha'_i}\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\beta'_k} = 0 \quad \text{oder} \quad 1,$$

je nachdem i und k verschieden sind, oder $i = k$ ist; hierdurch wird

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta'_k} = -\frac{d\alpha'_k}{dt},$$

wie zu beweisen war.

Ebenso erhält man:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\alpha'_k} = -\Sigma\Sigma \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha'_i\partial\alpha_{i'}}\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\alpha'_k}\frac{d\alpha'_i}{dt} + \Sigma \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i\partial\alpha'_k}\frac{d\alpha_i}{dt}.$$

Es ist aber, wenn man dem i' die Werthe $1, 2, \ldots, m$ giebt,

$$\Sigma \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_{i'}\partial\alpha'_i}\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\alpha'_k} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha'_i\partial\alpha'_k} = 0$$

und daher

$$\frac{\partial H_1}{\partial\alpha'_k} = \Sigma\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha'_i\partial\alpha'_k}\frac{d\alpha'_i}{dt} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i\partial\alpha'_k}\frac{d\alpha_i}{dt}\right)$$
$$= \frac{d\beta'_k}{dt},$$

wie zu beweisen war.

§. 38. Noch andere vollständige Lösungen und andere Systeme canonischer Elemente.

Man kann bekanntlich aus *einer* vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auch noch andere erhalten, welche nicht in der vorhin angegebenen Methode mit einbegriffen sind. Ist nämlich

$$W(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_m,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m)+\alpha$$

die vollständige Lösung, in der α die willkürliche Constante bedeutet, die man immer zu W addiren kann, so nehme man k der $m+1$ Constanten als Functionen der übrigen an und setze die nach diesen genommenen partiellen Differentialquotienten vom $W+\alpha$ einzeln gleich Null. Wenn die angenommenen Functionen m neue Constanten $\alpha'_1,\, \alpha'_2,\, \ldots,\, \alpha'_m$ enthalten, so wird $W+\alpha$, nachdem man durch die aufgestellten Gleichungen $\alpha,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m$ eliminirt hat, eine neue vollständige Lösung sein. Sind die k Gleichungen, durch welche k von den Grössen $\alpha,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m$ als Functionen der übrigen und der neuen Constanten $\alpha'_1,\, \alpha'_2,\, \ldots,\, \alpha'_m$ bestimmt werden, folgende:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \psi\ \ (\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m,\, \alpha'_1,\, \alpha'_2,\, \ldots,\, \alpha'_m),\\
0 &= \psi_1\ (\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m,\, \alpha'_1,\, \alpha'_2,\, \ldots,\, \alpha'_m),\\
0 &= \psi_2\ (\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m,\, \alpha'_1,\, \alpha'_2,\, \ldots,\, \alpha'_m),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= \psi_{k-1}(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m,\, \alpha'_1,\, \alpha'_2,\, \ldots,\, \alpha'_m),
\end{aligned}$$

so wird $W+\psi$ die neue vollständige Lösung, wenn man vermittelst der vorstehenden Gleichungen und der m Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1}+\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1}+\lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1}+\cdots+\lambda_{k-1}\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_1}=0,\\
&\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2}+\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2}+\lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2}+\cdots+\lambda_{k-1}\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_2}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial W}{\partial \alpha_m}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m}+\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_m}+\lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_m}+\cdots+\lambda_{k-1}\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_m}=0
\end{aligned}$$

die Grössen $\alpha,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m,\, \lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_{k-1}$ eliminirt. Differentiirt man die neue vollständige Lösung nach den Constanten $\alpha'_1,\, \alpha'_2,\, \ldots,\, \alpha'_m$, die sie enthält, und setzt die partiellen Differentialquotienten respective gleich $\beta'_1,\, \beta'_2,\, \ldots,\, \beta'_m$, so erhält man:

$$\beta'_i=\frac{\partial(W+\psi)}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_i}+\frac{\partial(W+\psi)}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_i}+\cdots+\frac{\partial(W+\psi)}{\partial \alpha_m}\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_i}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_i}.$$

Substituirt man in diesen Ausdruck die vorstehenden Gleichungen und bemerkt, dass sich durch partielle Differentiation der Gleichung $\psi_p=0$ nach α'_i die Gleichung

$$\frac{\partial \psi_p}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_i}+\frac{\partial \psi_p}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_i}+\cdots+\frac{\partial \psi_p}{\partial \alpha_m}\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_i}=-\frac{\partial \psi_p}{\partial \alpha'_i}$$

ergiebt, so erhält man:

$$\beta'_i=\frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_i}+\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha'_i}+\lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha'_i}+\cdots+\lambda_{k-1}\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha'_i}.$$

Verbindet man diese Betrachtungen mit dem Theorem IX, so erhält man folgendes Theorem:

Theorem XI.

„*Es seien die Differentialquotienten der gestörten Elemente* $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots\, \alpha_m,\, \beta_1,\, \beta_2,\, \ldots,\, \beta_m$ *durch die Gleichungen gegeben:*

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt}&=-\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, & \frac{d\beta_1}{dt}&=\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1},\\
\frac{d\alpha_2}{dt}&=-\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, & \frac{d\beta_2}{dt}&=\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{d\alpha_m}{dt}&=-\frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, & \frac{d\beta_m}{dt}&=\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_m},
\end{aligned}$$

in welchen H_1 *die Störungsfunction bedeutet. Es sei* ψ *eine beliebige Function der Grössen* $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m$ *und der* m *neuen Grössen* $\alpha'_1,\, \alpha'_2,\, \ldots,\, \alpha'_m$, *und zwischen den* $2m$ *Grössen seien die* $k-1$ *Gleichungen*

$$\psi_1=0,\ \ \psi_2=0,\ \ \ldots,\ \ \psi_{k-1}=0$$

gegeben; wenn man vermittelst dieser Gleichungen und der $2m$ *Gleichungen*

$$\begin{aligned}
\beta_1&+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1}+\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1}+\lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1}+\cdots+\lambda_{k-1}\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_1}=0,\\
\beta_2&+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2}+\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2}+\lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2}+\cdots+\lambda_{k-1}\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_2}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\beta_m&+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m}+\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_m}+\lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_m}+\cdots+\lambda_{k-1}\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_m}=0,\\
-\beta'_1&+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_1}+\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha'_1}+\lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha'_1}+\cdots+\lambda_{k-1}\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha'_1}=0,\\
-\beta'_2&+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_2}+\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha'_2}+\lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha'_2}+\cdots+\lambda_{k-1}\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha'_2}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-\beta'_m&+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_m}+\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha'_m}+\lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha'_m}+\cdots+\lambda_{k-1}\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha'_m}=0
\end{aligned}$$

nach Elimination der Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ *die Grössen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *durch* $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m, \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m$ *bestimmt und auch die Störungsfunction durch* t *und diese neuen Elemente ausdrückt, so erhält man für die Differentialquotienten derselben die den früheren ganz ähnlichen Ausdrücke:*

$$\frac{d\alpha'_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_1}, \quad \frac{d\beta'_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_1},$$
$$\frac{d\alpha'_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_2}, \quad \frac{d\beta'_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\alpha'_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_m}, \quad \frac{d\beta'_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_m}.\text{“}$$

Man sieht, dass das vorstehende Theorem sich vom Theorem X nur dadurch unterscheidet, dass statt ψ der Ausdruck

$$\psi + \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \cdots + \lambda_{k-1} \psi_{k-1}$$

gesetzt ist, und dass die Gleichungen

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k-1} = 0$$

hinzugefügt sind, wodurch die aus der Differentiation der Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ hervorgehenden Terme verschwinden. Durch dieselbe Betrachtung findet man auch unmittelbar aus dem für das Theorem X gegebenen *directen* Beweise einen *directen* Beweis für das vorstehende Theorem.

Giebt man dem k seinen äussersten Werth $k = m$, so kann man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ als Functionen von α und den neuen Grössen $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m$ ansehen, und man erhält die entsprechenden Grössen $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m$ vermittelst der Gleichungen

$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha} = -1,$$
$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_1} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_1} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_1} = \beta'_1,$$
$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_2} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_2} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_2} = \beta'_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_m} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_m} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_m} = \beta'_m,$$

aus welchen man α durch die erste von ihnen zu eliminiren hat.

Auch die von Poisson und Lagrange gegebenen Formeln, in welchen die Hälfte der Elemente aus den Anfangswerthen der Bestimmungsstücke q_i der bewegten materiellen Punkte besteht und die andere Hälfte aus den Anfangswerthen der nach einer bestimmten Regel aus ihnen und ihren Differentialquotienten gebildeten Grössen p_i, umfassen unendlich viele Systeme von Elementen, deren Differentialquotienten die canonische Form haben, da man irgend m von einander unabhängige Functionen der m Bestimmungsstücke q_i als Bestimmungsstücke ansehen und statt der vorigen einführen kann. Aber es ist wohl zu merken, dass keines von allen Systemen von Elementen, die man auf diese Weise aus einem ableiten kann, eines von denjenigen ergiebt, welche man durch die vorstehenden Betrachtungen aus demselben Systeme ableitet. Die verschiedenen Systeme von Elementen, welche bloss den verschiedenen Arten, die Bestimmungsstücke zu wählen, entsprechen, können durch die Betrachtung erhalten werden.

Theorem XII.

„*dass man die willkürlichen Constanten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *als beliebige Functionen von* m *anderen willkürlichen Constanten* $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m$ *betrachten kann. Man erhält dann die anderen* m *Elemente* $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m$, *welche diesen entsprechen, vermittelst der Gleichungen:*

$$\beta'_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha'_1} = \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_1} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_1} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_1},$$
$$\beta'_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha'_2} = \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_2} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_2} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta'_m = \frac{\partial W}{\partial \alpha'_m} = \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_m} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_m} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_m}.\text{“}$$

Die Theoreme X—XII umfassen *alle möglichen* Systeme von Elementen, deren Differentialquotienten die angegebene canonische Form haben, und welche aus einem derselben abgeleitet werden können. Die Form der Integralgleichungen des ungestörten Problems kommt hierbei ganz ausser Betracht.

§. 39. Modificationen, welche eintreten, wenn die Kräftefunction des ungestörten Problems die Zeit nicht enthält.

Wenn in dem Theorem IX die Function H nicht t explicite enthält, so haben die Differentialgleichungen des ungestörten Problems das eine Integral

$$H = h,$$

wo h eine willkürliche Constante ist. In der vollständigen Lösung W kommen t und eine willkürliche Constante τ immer in der Verbindung $t+\tau$ vor, und eine der Integralgleichungen wird:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial W}{\partial t} = -H = -h.$$

Man kann daher in dem Theorem IX

$$\alpha_m = \tau, \quad \beta_m = -h$$

setzen, woraus folgt, dass in dem gestörten Problem die Differentialquotienten der beiden Elemente τ und h immer durch die Gleichungen

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \tau}$$

gegeben sind. Die zweite dieser Formeln hat Lagrange in der Mécanique analytique aufgestellt und ihr, wegen ihrer Anwendung auf die Stabilität des Weltsystems, eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Es hat aber diese Anwendung, welche zu den berühmtesten Resultaten der physischen Astronomie gehört, wie Poisson gezeigt hat, nicht diejenige Ausdehnung, welche man ihr früher geben zu können meinte.

Wenn man statt W die Function

$$V = W - (t+\tau)\frac{\partial W}{\partial t}$$

einführt, so kann man das Theorem IX folgendermassen darstellen.

Theorem XIII.

„*Es sei H eine Function der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, welche die Grösse t nicht enthält, und es seien*

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}$$

die Differentialgleichungen des ungestörten Problems, aus welchen die Differentialgleichungen des gestörten Problems erhalten werden, wenn man $H+H_1$ statt H schreibt, wo H_1 eine beliebige Function der $2m$ Grössen q_k und p_k und der

Grösse t bedeute. Es sei V eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$H = h,$$

in welcher die in H vorkommenden Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ respective durch $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_m}$ zu ersetzen sind. Man nenne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ die willkürlichen Constanten, welche die vollständige Lösung V ausser einer bloss durch Addition mit ihr verbundenen enthalten muss, und setze

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1},$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = t+\tau,$$

welche Gleichungen, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}, h, \tau$ willkürliche Constanten bedeuten, als die vollständigen Integralgleichungen des ungestörten Problems angesehen werden können. Drückt man vermittelst derselben und der Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m$$

die Störungsfunction H_1 durch t und die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}, h, \tau$ aus und betrachtet für das gestörte Problem diese Elemente als veränderlich, so werden die Differentialquotienten dieser gestörten Elemente:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1},$$
$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\alpha_{m-1}}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_{m-1}}, \quad \frac{d\beta_{m-1}}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_{m-1}},$$
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial h}.\text{“}$$

Ist das System materieller Punkte ganz frei, und nimmt man ihre rechtwinkligen Coordinaten als Bestimmungsstücke an, so erhält man aus dem Theorem XIII folgendes:

Theorem XIV.

„*Es seien die 3n Differentialgleichungen des ungestörten Problems:*

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

wo m_i *die Masse eines Punktes bedeutet, dessen rechtwinklige Coordinaten* x_i, y_i, z_i *sind, und wo* U *eine blosse Function der* $3n$ *Coordinaten* x_i, y_i, z_i *ist; es sei* h *die Constante, welche in diesem Falle der halben lebendigen Kraft weniger der Kräftefunction* U *gleich ist,*

$$h = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right] - U.$$

Ferner sei V *eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung*

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2 \right] = U + h,$$

welche ausser einer durch Addition hinzugefügten Constante die $3n-1$ *Constanten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3n-1}$ *involvirt. Dann sind die Gleichungen*

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1},$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau$$

die $3n$ *endlichen Integralgleichungen des ungestörten Problems, und die Constanten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3n-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{3n-1}, h, \tau$ *sind die ungestörten Elemente. Sind jetzt die Differentialgleichungen des gestörten Problems:*

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_i},$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial z_i},$$

so werden die Differentialquotienten der gestörten Elemente:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1},$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2}, \quad \frac{\partial \beta_2}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\alpha_{3n-1}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_{3n-1}}, \quad \frac{d\beta_{3n-1}}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{3n-1}},$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial h}.\text{“}$$

Um dieses Theorem aus IX zu erhalten, hat man

$$H_1 = -\Omega, \quad W = V - (t+\tau)h = V - h\frac{\partial V}{\partial h}$$

zu setzen.

Ein Beispiel geben die Formeln, welche wir oben (p. 251 ff.) für die Bewegung eines nach einem festen Centrum angezogenen Punktes gefunden haben. Nach der zweiten dort angegebenen Integrationsmethode involvirte V ausser h die Constanten b, β, denen die Constanten b', β' ebenso entsprachen, wie in dem vorstehenden Theorem den Constanten α_i die Constanten β_i. Man erhält daher, wenn man die obige Bedeutung der Elemente b, β, b', β' beibehält:

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b'}, \quad \frac{db'}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b},$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta'}, \quad \frac{d\beta'}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \beta},$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial h}.$$

Für das Newton'sche Attractionsgesetz und die elliptische Bewegung fanden wir oben*)

$$b = k\sqrt{p}, \quad h = \frac{-k^2}{2a}, \quad \beta = \Omega, \quad b' = w - \frac{\pi}{2}, \quad \beta' = -k\sqrt{p}.\cos i,$$

wenn a die halbe grosse Axe, p den halben Parameter, Ω die Länge des aufsteigenden Knotens, w die Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten, i die Neigung der Bahn, k^2 die anziehende Kraft für die Einheit der Distanz

*) Seite 257—260.

bedeutet; es ist ferner $-\tau$ die Durchgangszeit durch das Perihel. Sind daher die Differentialgleichungen der gestörten elliptischen Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3} + \frac{\partial\Omega}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3} + \frac{\partial\Omega}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2z}{r^3} + \frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

so werden zufolge des zuletzt angeführten Theorems die Differentialquotienten der gestörten Elemente:

$$\frac{d(k\sqrt{p})}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varpi}, \qquad \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial(k\sqrt{p})},$$
$$\frac{d(k\sqrt{p}.\cos i)}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\Omega}, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial(k\sqrt{p}.\cos i)},$$
$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\frac{k^2}{2a}}, \qquad \frac{d\frac{k^2}{2a}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}.$$

Diese Formeln sind von den oben (p. 353) mitgetheilten Formeln Hamilton's darin verschieden, dass statt der Länge des Perihels und des Sinus versus der Neigung multiplicirt in die Quadratwurzel des halben Parameters die Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten und der Cosinus der Neigung multiplicirt in die Quadratwurzel des halben Parameters als Elemente eingeführt sind.

Die beiden Classen, in welche sich die Elemente theilen, wenn ihre Differentialquotienten die canonische Form haben, werden leicht verändert, indem man zunächst jedes Element aus der einen Classe in die andere bloss dadurch bringen kann, dass man das ihm entsprechende mit entgegengesetztem Zeichen einführt. Hierdurch kann man z. B. sechs solcher Elemente auf vier verschiedene Arten in die beiden Classen theilen; entsprechen nämlich respective den drei Elementen der einen Classe a, b, c die der anderen a', b', c', so hat man die vier Classificationen:

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc|}
a, & a' & a', & -a & a, & a' & a, & a' \\
b, & b' & b, & b' & b', & -b & b, & b' \\
c, & c' & c, & c' & c, & c' & c', & -c
\end{array},$$

in welchen die Elemente derselben Classe unter einander, die entsprechenden neben einander stehen. Man kann dann ferner statt der Elemente einer Classe irgend welche Functionen derselben als Elemente einer Classe betrachten und allgemein nach dem Theorem XII die Elemente der andern Classe bestimmen.

Sind nämlich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Elemente der einen Classe, und betrachtet man sie als Functionen der neuen Elemente $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_m'$, so entspricht nach dem angeführten Theorem einem der neuen Elemente α_i' das Element der andern Classe

$$\beta_i' = \beta_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha_i'} + \beta_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial\alpha_i'} + \cdots + \beta_m\frac{\partial\alpha_m}{\partial\alpha_i'}.$$

Wenn man daher für ein Element α eine Function α' desselben einführt, so dass $\alpha = \varphi(\alpha')$ ist, so hat man für β zu setzen:

$$\beta' = \beta\frac{d\varphi(\alpha')}{d\alpha'}.$$

Führt man z. B. in den vorstehenden Formeln statt $\frac{k^2}{2a}$ das Element a ein, so hat man für das entsprechende Element τ zu setzen:

$$-\frac{k^2\tau}{2a^2},$$

so dass man für die letzte Horizontalreihe in diesen Formeln auch schreiben kann:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\frac{k^2\tau}{2a^2}}, \qquad \frac{d\frac{k^2\tau}{2a^2}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a}.$$

Will man statt $k\sqrt{p}.\cos i$ bloss $\cos i$ als Element einführen, so setze man $\alpha_1 = \alpha_1' = k\sqrt{p}$, $\alpha_2 = \alpha_1'\alpha_2' = k\sqrt{p}.\cos i$, woraus man erhält:

$$\beta_1' = \beta_1 + \beta_2\alpha_2', \quad \beta_2' = \beta_2\alpha_1',$$

so dass man statt w und Ω zu setzen hat $w + \cos i.\Omega$ und $k\sqrt{p}.\Omega$. Um die Hamilton'schen Formeln abzuleiten, setze man $\alpha_1 = \alpha_1' = k\sqrt{p}$, $\alpha_2 = \alpha_1' - \alpha_2' = k\sqrt{p}.\cos i$, dann giebt die allgemeine Regel:

$$\beta_1' = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_2' = -\beta_2,$$

so dass, wenn man noch α_2' an Stelle von β_2', $-\beta_2'$ an Stelle von α_2' setzt, in der ersten Classe von Elementen $k\sqrt{p}$ und Ω, in der zweiten $\Omega+w$ und $k\sqrt{p}(1-\cos i)$ erscheinen, wie es in den Hamilton'schen Formeln der Fall ist; u. s. w. Allgemeinere Aenderungen geben die Theoreme X und XI, doch umfassen schon die vorstehenden Betrachtungen, wenn man die Uebertragung der Elemente aus einer Classe in die andere und die Einführung von Functionen der Elemente einer Classe statt dieser vereint und wiederholt anwendet, eine grosse Mannigfaltigkeit von Elementensystemen der angegebenen Art.

§. 40. Betrachtung der Fälle, in welchen die Kräftefunction durch Drehung oder Verschiebung des Coordinatensystems keine Aenderung erfährt.

In seiner ersten Abhandlung über die Variation der Constanten hatte Poisson gefunden, dass für die elliptische Bewegung eines Himmelskörpers und für die Rotation eines Körpers, der durch einen augenblicklichen Impuls um einen festen Punkt in Bewegung gesetzt wird, die Differentialquotienten der gestörten Elemente sich auf dieselbe Weise ausdrücken lassen. Es liess sich hiernach vermuthen, dass dieselben Formeln, welche für zwei so verschiedenartige mechanische Probleme gelten, überhaupt eine allgemeinere Bedeutung haben. Dies hat Poisson in einer zweiten merkwürdigen Abhandlung über die Variation der Constanten in den Memoiren der Pariser Akademie für 1816 gezeigt.

Ich will im Folgenden diese allgemeinen Resultate aus den im Vorhergehenden gefundenen Sätzen ableiten.

Es seien die bekannten Formeln für die Transformation rechtwinkliger Coordinaten:

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha\,\xi_i+\beta\,\eta_i+\gamma\,\zeta_i,\\ y_i &= \alpha'\,\xi_i+\beta'\,\eta_i+\gamma'\,\zeta_i,\\ z_i &= \alpha''\xi_i+\beta''\eta_i+\gamma''\zeta_i, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos\Omega\cos w-\cos i\sin\Omega\sin w, & \beta &= -\cos\Omega\sin w-\cos i\sin\Omega\cos w, & \gamma &= \sin\Omega\sin i,\\ \alpha' &= \sin\Omega\cos w+\cos i\cos\Omega\sin w, & \beta' &= -\sin\Omega\sin w+\cos i\cos\Omega\cos w, & \gamma' &= -\cos\Omega\sin i,\\ \alpha'' &= \sin i\sin w, & \beta'' &= \sin i\cos w, & \gamma'' &= \cos i \end{aligned}$$

gesetzt ist. Man leitet aus diesen Ausdrücken leicht folgende ebenfalls bekannte Formeln ab, welche von einem allgemeineren Gebrauch sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial\Omega} &= -y_i, & \frac{\partial x_i}{\partial w} &= -(\cos i.y_i+\cos\Omega\sin i.z_i), & \frac{\partial x_i}{\partial i} &= \sin\Omega.z_i,\\ \frac{\partial y_i}{\partial\Omega} &= x_i, & \frac{\partial y_i}{\partial w} &= \cos i.x_i-\sin\Omega\sin i.z_i, & \frac{\partial y_i}{\partial i} &= -\cos\Omega.z_i,\\ \frac{\partial z_i}{\partial\Omega} &= 0, & \frac{\partial z_i}{\partial w} &= \cos\Omega\sin i.x_i+\sin\Omega\sin i.y_i, & \frac{\partial z_i}{\partial i} &= \cos\Omega.y_i-\sin\Omega.x_i. \end{aligned}$$

Für die Fälle der Mechanik, welche wir hier betrachten, geht die partielle Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U+h$$

durch die angeführte Substitution in folgende über:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \xi_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta_i}\right)^2\right] = U+h,$$

wo in U für x_i, y_i, z_i bloss ξ_i, η_i, ζ_i zu setzen sind. Denn die angegebene Substitution kommt mit einer blossen Aenderung der Lage der rechtwinkligen Coordinatenaxen überein, durch welche sich, wie vorausgesetzt werden soll, die Differentialgleichungen des mechanischen Problems nicht ändern. Hat man daher einen Ausdruck von V in ξ_i, η_i, ζ_i gefunden, so erhält man daraus sogleich einen anderen mit drei neuen willkürlichen Constanten Ω, w, i, indem man für ξ_i, η_i, ζ_i die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha\,\xi_i+\beta\,\eta_i+\gamma\,\zeta_i,\\ y_i &= \alpha'\,\xi_i+\beta'\,\eta_i+\gamma'\,\zeta_i,\\ z_i &= \alpha''\xi_i+\beta''\eta_i+\gamma''\zeta_i \end{aligned}$$

setzt. Nennt man die den Ω, w, i entsprechenden Constanten Ω', w', i', so werden drei Integralgleichungen des mechanischen Problems:

$$\Omega' = \frac{\partial V}{\partial\Omega},\quad w' = \frac{\partial V}{\partial w},\quad i' = \frac{\partial V}{\partial i},$$

oder

$$\begin{aligned} \Omega' &= \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\Omega}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial\Omega}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial\Omega}\right),\\ w' &= \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial w}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial w}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial w}\right),\\ i' &= \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial i}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial i}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial i}\right)\text{*)}. \end{aligned}$$

*) Es braucht nicht hervorgehoben werden, dass der Index i mit dem Winkel i nicht zu verwechseln ist.

Da

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt}$$

ist, so verwandeln sich diese Gleichungen in folgende:

$$\Omega' = \Sigma m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \Omega} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial \Omega} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial z_i}{\partial \Omega} \frac{dz_i}{dt} \right),$$

$$w' = \Sigma m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial w} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial w} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial z_i}{\partial w} \frac{dz_i}{dt} \right),$$

$$i' = \Sigma m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial z_i}{\partial i} \frac{dz_i}{dt} \right),$$

wodurch man, vermittelst der angegebenen Werthe der partiell nach Ω, w, i genommenen Differentialquotienten von x_i, y_i, z_i, die Gleichungen erhält:

$$\Omega' = \Sigma m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right),$$

$$\begin{aligned} w' = \cos i \, \Sigma m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) & \\ + \cos \Omega \sin i \, \Sigma m_i \left(x_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dx_i}{dt} \right) & \\ + \sin \Omega \sin i \, \Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) &, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i' = -\sin \Omega \, \Sigma m_i \left(x_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dx_i}{dt} \right) & \\ + \cos \Omega \, \Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) &. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen enthalten die bekannten Sätze von der Erhaltung der Flächenräume, die hier nicht, wie gewöhnlich, durch Integration, sondern, wie man sieht, durch Differentiation abgeleitet werden.

Damit der Ausdruck von V in ξ_i, η_i, ζ_i nicht bereits die willkürlichen Constanten enthalte, welche aus der beliebigen Annahme der Coordinatenaxen hervorgehen, kann man die von Laplace sogenannte unveränderliche Ebene zur Ebene der ξ, η annehmen, wodurch bekanntlich die drei Flächensätze die Form erhalten:

$$\Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt} \right) = -k\sqrt{p},$$

$$\Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\xi_i}{dt} \right) = 0,$$

$$\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt} \right) = 0,$$

wenn man mit $k\sqrt{p}$ die constante Summe der in die respectiven Massen multiplicirten und auf die unveränderliche Ebene projicirten Arealgeschwindigkeiten der einzelnen Punkte bezeichnet. Man erhält für diese Annahme:

$$-\Sigma m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = k\sqrt{p}.\cos i,$$

$$-\Sigma m_i \left(x_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dx_i}{dt} \right) = k\sqrt{p}.\cos \Omega \sin i,$$

$$-\Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = k\sqrt{p}.\sin \Omega \sin i;$$

daher ist

$$\frac{\partial V}{\partial \Omega} = \Omega' = -k\sqrt{p}.\cos i,$$

$$\frac{\partial V}{\partial w} = w' = -k\sqrt{p},$$

$$\frac{\partial V}{\partial i} = i' = 0.$$

Die letzte Formel zeigt, dass i in V gar nicht vorkommen wird; die beiden ersteren geben nach Theorem XII:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial (k\sqrt{p}.\cos i)}, \quad \frac{d(k\sqrt{p}.\cos i)}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega},$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial (k\sqrt{p})}, \quad \frac{d(k\sqrt{p})}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial w},$$

welches die für die elliptische Bewegung gefundenen Formeln sind, die also, wie wir aus dem Vorstehenden sehen, für alle Probleme der Mechanik gelten, für welche die Flächensätze stattfinden.

Kann man auch noch den Anfangspunkt des Coordinatensystems beliebig ändern, so setze man

$$x_i = a + \xi_i, \quad y_i = b + \eta_i, \quad z_i = c + \zeta_i;$$

dieselbe Methode, die wir im Vorigen angewendet haben, giebt dann:

$$a' = \frac{\partial V}{\partial a} = \Sigma \frac{\partial V}{\partial x_i} = \Sigma m_i \frac{dx_i}{dt},$$
$$b' = \frac{\partial V}{\partial b} = \Sigma \frac{\partial V}{\partial y_i} = \Sigma m_i \frac{dy_i}{dt},$$
$$c' = \frac{\partial V}{\partial c} = \Sigma \frac{\partial V}{\partial z_i} = \Sigma m_i \frac{dz_i}{dt}.$$

Diese Formeln zeigen, dass der Schwerpunkt des Systems sich mit constanter Geschwindigkeit geradlinig fortbewegt. Die Constanten a', b', c' sind die Componenten dieser Geschwindigkeit, multiplicirt in die Summe der Massen. Giebt man daher den Constanten diese Bedeutung, so erhält man für ihre Störung nach Theorem XII die ebenfalls von Poisson gegebenen Formeln:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a'}, \quad \frac{da'}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a},$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b'}, \quad \frac{db'}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b},$$
$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial c'}, \quad \frac{dc'}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial c}.$$

In seiner ersten Abhandlung in den Phil. Trans. vom J. 1834. P. II. leitet Hamilton ebenfalls die Sätze von der Erhaltung der Flächen und von der Erhaltung des Schwerpunktes aus der Form ab, welche er den Integralgleichungen vermittelst seiner charakteristischen Function V gegeben hat. Das Theorem XII zeigt aber, wie man durch dieselben Betrachtungen zugleich allgemein die Störungsformeln für die hierbei vorkommenden Elemente erhält. Die hier angewandte Methode empfiehlt sich auch dadurch, dass sie in allen Fällen anwendbar ist, wenn man statt der Bestimmungsstücke der Punkte Ausdrücke mit einer Anzahl willkürlicher Constanten einführen kann von der Art, dass diese Constanten aus der partiellen Differentialgleichung oder, was dasselbe besagen will, aus der Formel für die lebendige Kraft gänzlich herausgehen. In allen diesen Fällen erhält man durch diese Methode vermittelst Differentiation der charakteristischen Function nach diesen Constanten eine gleiche Zahl von Integralgleichungen mit neuen willkürlichen Constanten und hierdurch zu gleicher Zeit nach Theorem XII die Differentialquotienten der gestörten Werthe dieser Constanten.

§. 41. Ueber den Charakter und die Tragweite der oben aufgestellten Theoreme.

Die Theoreme X—XII sind gänzlich unabhängig von der Bedeutung, welche darin den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ gegeben wurde, dass sie in einem Problem der Mechanik die constanten Elemente seien; denn alles, was sich auf ein solches Problem bezieht, ist aus diesen Theoremen herausgegangen. Hiernach geben die Theoreme X—XII *die allgemeinste Art, wie man ein System von Differentialgleichungen, welches die canonische Form hat, durch Einführung anderer Variabeln in ein anderes System von der nämlichen Form transformiren kann.*

Die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems in der Lagrange'schen Form,

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

erhalten die canonische Form, wenn man die Ausdrücke

$$m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad m_i \frac{dy_i}{dt}, \quad m_i \frac{dz_i}{dt}$$

als $3n$ neue Variabele und statt der Function U die Function

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] - U = H$$

einführt. Die allgemeineren Gleichungen, welche Poisson und Lagrange für den Fall erhalten haben, dass man irgend welche andere Bestimmungsstücke der Punkte des Systems statt der rechtwinkligen Coordinaten als Variabele einführt, erhalten in der Modification, die ihnen Hamilton gegeben hat, ebenfalls die canonische Form. Dieselbe canonische Form der Differentialgleichungen wird, wie Poisson und Lagrange gezeigt haben, erhalten, wenn man das vorgelegte mechanische Problem als ein Störungsproblem betrachtet, und die der Zeit $t = 0$ in dem Näherungsproblem entprechenden Werthe der oben mit q und p bezeichneten Grössen als Variabele einführt. Endlich werden auch die bekannten Ausdrücke für die Differentialquotienten der gestörten Elemente der elliptischen Bewegung eines Planeten durch eine leichte Modification, wie wir oben gesehen haben, in die canonische Form gebracht, und das Gleiche gilt für die durch eine beschleunigende Kraft gestörten Elemente der Rotation eines festen Körpers um einen festen Punkt. Man hatte so mehrere Beispiele, in welchen ein und dasselbe System von Differentialgleichungen, welches die canonische Form hat, auf mannigfaltige Art durch Einführung neuer Variabeln wieder in die canonische Form zurückkehrt. Indessen war es wünschenswerth, hierfür eine allgemeine Regel und ein allgemeines Verfahren aufzufinden, wie dieses in den Theoremen X—XII geschehen ist. Die Formeln für die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik, und zwar in ihrer einfachsten Gestalt, sind hiernach nur ein Fall der Transformation einer canonischen Form in eine andere. Diesen Fall giebt das allgemeine Theorem X auf folgende Art,

Es seien die Differentialgleichungen eines Problems:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\partial H_1}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial H_1}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{\partial H_1}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m} + \frac{\partial H_1}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m} - \frac{\partial H_1}{\partial q_m},$$

in welchen H_1 eine beliebige Function der Grössen q_k, p_k und der Grösse t, H eine Function derselben Grössen q_k, p_k bedeute, die aber nicht t enthält. Setzt man in dem Theorem X $-(H+H_1)$ für H_1, die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, die Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ für $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ für $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m, \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m$, so erhält man die allgemeinste Transformation der vorgelegten Differentialgleichungen in andere von der nämlichen Form, indem man eine beliebige Function der Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ annimmt,

$$\psi(q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

und die Gleichungen bildet:

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q_2} = -p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q_m} = -p_m,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\psi}{\partial \alpha_m} = \beta_m;$$

führt man die durch diese Gleichungen bestimmten Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ statt der ursprünglichen Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ in die gegebenen Differentialgleichungen ein, so erhalten sie zufolge des Theorems X wieder dieselbe Form. Es werden nämlich zufolge dieses Theorems, wenn man $H+H_1$ durch die neuen Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ ausdrückt, die gegebenen Differentialgleichungen in die folgenden transformirt:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_1} + \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1},$$
$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_2} + \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\alpha_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_m} + \frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_m} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_m}.$$

Man erhält die Formeln für die Variation der Constanten, wenn man die ganz willkürliche Function ψ so bestimmt, dass vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q_2} = -p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q_m} = -p_m$$

die Function H sich auf eine der Grössen α, z. B. auf α_m, reducirt, was immer möglich ist. Vermittelst dieser Gleichungen wird nämlich

$$H = \alpha_m$$

eine partielle Differentialgleichung zwischen ψ und den unabhängigen Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$, in welcher die gesuchte Function ψ nicht selber vorkommt, sondern nur ihre ersten, nach diesen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten. Man wird immer eine solche Function ψ finden können, welche dieser Gleichung

$$H = \alpha_m$$

Genüge leistet und ausser den Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_m$ noch $m-1$ andere Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ involvirt, unter welche eine bloss durch Addition mit ψ verbundene nicht mit zu rechnen ist. Hat man eine solche Function ψ gefunden, für welche der Ausdruck

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m) - \alpha_m$$
$$= H\left(q_1, q_2, \ldots, q_m, -\frac{\partial\psi}{\partial q_1}, -\frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \ldots, -\frac{\partial\psi}{\partial q_m}\right) - \alpha_m$$

identisch gleich Null wird, so reduciren sich die transformirten Differentialgleichungen für diese besondere Function auf folgende:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1},$$
$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\alpha_{m-1}}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_{m-1}}, \quad \frac{d\beta_{m-1}}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_{m-1}},$$
$$\frac{d\alpha_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_m} - 1.$$

Setzt man

$$\alpha_m = h, \quad \beta_m = -(t+\tau),$$

so werden die beiden letzten Gleichungen:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial h}.$$

Man erhält dann die nach t genommenen Differentialquotienten aller neuen Variabeln durch die partiellen Differentialquotienten der Function H_1 allein ausgedrückt, welche man, wenn H den hauptsächlichsten Theil von $H+H_1$ ausmacht, als Störungsfunction betrachten kann. Setzt man in den vorstehenden Formeln

$$H_1 = 0,$$

so zeigen dieselben, dass die Differentialgleichungen

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}$$

sich vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = -p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_m} = -p_m,$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial h} = -(t+\tau),$$

in welchen

$$\psi(q_1, q_2, \ldots, q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, h) + \text{Const.}$$

eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m)$$
$$= H\left(q_1, q_2, \ldots, q_m, -\frac{\partial \psi}{\partial q_1}, -\frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \ldots, -\frac{\partial \psi}{\partial q_m}\right) = h$$

ist, in die Gleichungen

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d\alpha_{m-1}}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d\beta_{m-1}}{dt} = 0, \quad \frac{d\tau}{dt} = 0$$

transformiren, oder dass ihre vollständigen Integrale erhalten werden, wenn man in den Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = -p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_m} = -p_m,$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial h} = -(t+\tau)$$

die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}, h, \tau$ als willkürliche Constanten betrachtet. Diese Grössen werden aber variabel, wenn H_1 nicht verschwindet, und sind, wenn man H_1 als Störungsfunction betrachtet, gleichzeitig die gestörten oder veränderlichen Elemente.

Die vorstehenden Betrachtungen zeigen, dass das Theorem X, von dem ich oben einen directen Beweis gegeben habe, sowohl die Zurückführung eines mechanischen Problems, in welchem der Satz von der lebendigen Kraft gilt, auf die vollständige Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung umfasst, als auch die allgemeinsten und einfachsten Formeln für die Variation der Constanten. Ich bemerke auch noch, dass der hier gegebene Beweis der Formeln für die Variation der Constanten sich dadurch von anderen unterscheidet, dass man nicht besonders den Satz zu beweisen braucht, dass die in die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction multiplicirten Ausdrücke nicht t explicite enthalten. Man findet nämlich durch eine directe Transformation der gegebenen Differentialgleichungen Formeln für die Variation der Elemente, in welchen die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction nur mit $+1$ oder -1 multiplicirt sind, woraus, wie man weiss, der angeführte Satz für jedes beliebige System von Elementen von selber folgt.

§. 42. Allgemeinste Transformation einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir haben oben gesehen, dass die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches die canonische Form hat, auf die vollständige Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückkommt, in welcher die gesuchte Function nicht selber, sondern nur ihre ersten Differentialquotienten vorkommen. Die allgemeinste Art der Transformation einer canonischen Form in eine andere muss daher zu gleicher Zeit die allgemeinste Transformation einer partiellen Differentialgleichung der erwähnten Art geben. Denn wenn man statt der unbekannten Function und der unabhängigen Variabeln eine gleiche Anzahl beliebiger Functionen derselben als neue unbekannte Function und unabhängige Variabele einführt, so giebt dies noch keineswegs die allgemeinste Transformation, indem die allgemeinsten Substitutionen zu gleicher Zeit noch die partiellen Differentialquotienten selber involviren, wie dieses aus nachfolgendem Theorem erhellt, in welchem die gegebene partielle Differentialgleichung auch die unbekannte Function selber auf irgend eine Weise enthalten kann.

Theorem XV.

„Es sei die partielle Differentialgleichung gegeben:

$$F\left(W, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = 0,$$

so erhält man ihre allgemeinste Transformation, wenn man eine neue unbekannte Function Z einführt, welche man einer beliebigen Function von $W, x_1, x_2, \ldots, x_n$ und n neuen Grössen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ gleichsetzt,

$$Z = f(W, x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

und aus den $2n+2$ Gleichungen

$$F = 0, \quad Z = f,$$

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial t_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_n} = \frac{\partial f}{\partial t_n}$$

die $2n+1$ Grössen $W, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}$ eliminirt. Hierdurch erhält man eine Gleichung zwischen $Z, t_1, t_2, \ldots, t_n, \frac{\partial Z}{\partial t_1}, \frac{\partial Z}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial t_n}$, welche die transformirte partielle Differentialgleichung ist."

Weniger allgemein ist die in dem folgenden Theorem enthaltene Transformation.

Theorem XVI.

„Es sei zwischen W und den n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben, so erhält man eine Transformation derselben, wenn man Z einer beliebigen Function dieser und der n Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_n$ gleichsetzt,

$$Z = f(W, x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

und ausserdem zwischen den in f enthaltenen Variabeln beliebige Relationen annimmt,

$$f_1(W, x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0,$$

$$f_2(W, x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_k(W, x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0,$$

deren Zahl k aber kleiner als n sein muss; eliminirt man aus der gegebenen Differentialgleichung vermittelst dieser $k+1$ Gleichungen und vermittelst der Gleichungen

$$M\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_1} = 0,$$

$$M\frac{\partial W}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M\frac{\partial W}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial t_1} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t_1} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial t_2} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t_2} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t_2} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial t_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t_n} = \frac{\partial f}{\partial t_n} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t_n} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t_n} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{dt_n},$$

$$M = \frac{\partial f}{\partial W} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial W} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial W} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial W}$$

die Grössen $W, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, so verwandelt sich die gegebene Differentialgleichung in eine andere zwischen Z und den unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_n$."

Die beiden Theoreme XV und XVI bedürfen keines Beweises.