SUL PRINCIPIO DELL'ULTIMO MOLTIPLICATORE E SUO USO COME NUOVO PRINCIPIO GENERALE DI MECCANICA

DEL

PROFESSORE C. G. J. JACOBI.

Giornale arcadico, Tomo XCIX, p. 129—146.

SUL PRINCIPIO DELL'ULTIMO MOLTIPLICATORE E SUO USO COME NUOVO PRINCIPIO GENERALE DI MECCANICA.

I.

Comincio dal dimostrare un lemma di calcolo integrale, importante per le sue applicazioni all' integrazione de' sistemi di equazioni differenziali volgari, principalmente di quelle dalla cui integrazione dipende la determinazione del moto di un sistema di punti materiali.

Lemma.

Siano $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ *funzioni qualunque delle variabili* $x, x_1, \ldots, x_n$, *ed* M *ed* u *due altre funzioni delle medesime variabili che verifichino l'equazioni differenziali parziali seguenti:*

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x}+\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n}=0,$$

$$X\frac{\partial u}{\partial x}+X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0.$$

Pongasi

$$u=\alpha,$$

ove α *è una costante arbitraria; e da questa equazione dedotto il valore di* x_n, *si sostituisca nelle funzioni* $X, X_1, \ldots, X_{n-1}$ *e nella quantità*

$$M_1=\frac{M}{\frac{\partial u}{\partial x_n}}.$$

La funzione M_1 *delle variabili* $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ *verificherà un'equazione simile a quella per cui è stata definita la funzione* M, *cioè l'equazione*

$$\frac{\partial(M_1X)}{\partial x}+\frac{\partial(M_1X_1)}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial(M_1X_{n-1})}{\partial x_{n-1}}=0.$$

Dimostrazione. L'equazione da dimostrarsi

$$\frac{\partial(M_1X)}{\partial x}+\frac{\partial(M_1X_1)}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial(M_1X_{n-1})}{\partial x_{n-1}}=0$$

può mettersi sotto la forma

$$X\frac{\partial \log M_1}{\partial x}+X_1\frac{\partial \log M_1}{\partial x}+\cdots+X_{n-1}\frac{\partial \log M_1}{\partial x_{n-1}}$$
$$+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}}=0.$$

Le quantità $X, X_1, \ldots, X_{n-1}$ ed M_1 qui sono riguardate come funzioni delle variabili indipendenti $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$, ma nella loro forma primitiva contengono ancora la variabile x_n data, come funzione delle altre, dall' equazione $u=\alpha$. Ove abbiasi riguardo a quella forma, l'equazione precedente devesi scrivere in questa guisa

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&X\frac{\partial \log M_1}{\partial x}+X_1\frac{\partial \log M_1}{\partial x_1}+\cdots+X_{n-1}\frac{\partial \log M_1}{\partial x_{n-1}}\\&+\frac{\partial \log M_1}{\partial x_n}\left(X\frac{\partial x_n}{\partial x}+X_1\frac{\partial x_n}{\partial x_1}+\cdots+X_{n-1}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)\\&+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\\&+\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}=0.\end{aligned}\right.$$

I valori de'differenziali parziali

$$\frac{\partial x_n}{\partial x},\quad \frac{\partial x_n}{\partial x_1},\ \ldots$$

sono cavati dall'equazione $u=\alpha$ mediante la formula

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}.$$

Si avrà perciò

$$X\frac{\partial x_n}{\partial x}+X_1\frac{\partial x_n}{\partial x_1}+\cdots+X_{n-1}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}$$
$$=-\frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}\left(X\frac{\partial u}{\partial x}+X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+X_{n-1}\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right),$$

ovvero, essendo

$$X\frac{\partial u}{\partial x}+X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0,$$

si avrà

$$(2)\quad X\frac{\partial x_n}{\partial x}+X_1\frac{\partial x_n}{\partial x_1}+\cdots+X_{n-1}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}=X_n.$$

Inoltre si ha

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\\&=-\frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}\left(\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right).\end{aligned}\right.$$

Ora l'equazione

$$-\left(X\frac{\partial u}{\partial x}+X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+X_{n-1}\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right)=X_n\frac{\partial u}{\partial x_n},$$

differenziata rispetto x_n, e divisa per $\frac{\partial u}{\partial x_n}$, fornisce

$$-\frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}\left(\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right)$$
$$=\frac{\partial X_n}{\partial x_n}+X\frac{\partial \log\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\partial x}+X_1\frac{\partial \log\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\partial x_1}+\cdots$$
$$+X_{n-1}\frac{\partial \log\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\partial x_{n-1}}+X_n\frac{\partial \log\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\partial x_n};$$

d'onde, secondo la formula (3), risulta

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\\&=\frac{\partial X_n}{\partial x_n}+X\frac{\partial \log\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\partial x}+X_1\frac{\partial \log\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial \log\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\partial x_n}.\end{aligned}\right.$$

Sostituite le formule (2) e (4) nella formula (1), otterremo

$$0=X\frac{\partial \log M_1}{\partial x}+X_1\frac{\partial \log M_1}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial \log M_1}{\partial x_n}$$
$$+X\frac{\partial \log\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\partial x}+X_1\frac{\partial \log\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial \log\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\partial x_n}$$
$$+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial X_n}{\partial x_n},$$

ovvero, essendo

$$M_1 \frac{\partial u}{\partial x_n} = M,$$

otterremo la formula

$$0 = X\frac{\partial \log M}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \log M}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \log M}{\partial x_n} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n},$$

la quale, moltiplicata per M, cangiasi nella formula

$$0 = \frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n}.$$

Così l'equazione da dimostrarsi, è ricondotta alla medesima equazione per la quale si è definita la quantità M; lo che dimostra la verità del lemma proposto. Essendo

$$X\frac{\partial u}{\partial x} + X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

l'equazione $u = \alpha$ può anche definirsi come un integrale del sistema dell'equazioni differenziali volgari

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

definizione, che io adotterò in appresso.

II.

Nello stesso modo che si è dedotta da M la funzione M_1, potrà dedursi da M_1 una nuova funzione M_2, da M_2 una nuova funzione M_3, ec.; ed il lemma precedente per tutte queste funzioni fornirà equazioni differenziali parziali alle quali esse devono soddisfare, il numero delle variabili indipendenti diminuendo continuamente di un'unità.

Posto che l'equazione $u = \alpha$ sia un integrale del sistema dell'equazioni differenziali volgari

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

e che sia

$$\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0,$$

ed inoltre

$$M_1 = \frac{M}{\frac{\partial u}{\partial x_n}},$$

la funzione M_1 ha soddisfatto all'equazione

$$\frac{\partial (M_1 X)}{\partial x} + \frac{\partial (M_1 X_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (M_1 X_{n-1})}{\partial x_{n-1}} = 0,$$

ove, mediante l'equazione $u = \alpha$, la variabile x_n è stata eliminata dalle quantità

$$X,\ X_1,\ \ldots,\ X_{n-1}.$$

Sia $u_1 = \alpha_1$ un integrale dell'equazioni differenziali

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 : \ldots : X_{n-1};$$

ove α_1 è una nuova costante arbitraria: posto

$$M_2 = \frac{M_1}{\frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}}},$$

si avrà, per il medesimo teorema,

$$\frac{\partial (M_2 X)}{\partial x} + \frac{\partial (M_2 X_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (M_2 X_{n-2})}{\partial x_{n-2}} = 0,$$

ove $X, X_1, \ldots, X_{n-2}, M_2$ sono funzioni di $x, x_1, \ldots, x_{n-2}$, eliminatane x_{n-1} per mezzo del secondo integrale $u_1 = \alpha_1$. Essendo α_2 una terza costante arbitraria, sia $u_2 = \alpha_2$ un integrale dell'equazioni differenziali

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-2} = X : X_1 : \ldots : X_{n-2},$$

e pongasi

$$M_3 = \frac{M_2}{\frac{\partial u_2}{\partial x_{n-2}}} = \frac{M_1}{\frac{\partial u_2}{\partial x_{n-2}} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}}} = \frac{M}{\frac{\partial u_2}{\partial x_{n-2}} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n}}:$$

eliminata x_{n-2}, mediante l'equazione $u_2 = \alpha_2$, dalle funzioni $X, X_1, \ldots, X_{n-2}$ e M_3, si avrà

$$\frac{\partial (M_3 X)}{\partial x} + \frac{\partial (M_3 X_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (M_3 X_{n-3})}{\partial x_{n-3}} = 0.$$

Continuando in questa guisa, siansi trovati successivamente gl' integrali

$$(5) \quad u = \alpha, \quad u_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad u_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

ove $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ sono le costanti arbitrarie, ed ove $u_i = \alpha_i$ è l'equazione fra le variabili $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-i}$, che ha servito all'eliminazione di x_{n-i}. Posto inoltre

$$(6) \quad M_{n-1} = \frac{M}{\frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2}},$$

ed eliminate, mediante gl' integrali trovati, tutte le variabili $x_2, x_3, \ldots, x_n$ dalle funzioni X, X_1 e M_{n-1}, si avrà per l'applicazione ripetuta del lemma dimostrato

$$(7)\quad \frac{\partial(M_{n-1}X)}{\partial x} + \frac{\partial(M_{n-1}X_1)}{\partial x_1} = 0.$$

Ora, eliminate le variabili $x_2, x_3, \ldots, x_n$ per mezzo degl' integrali (5) che sono tutti gl'integrali del problema, eccetto un solo, resta da integrare l'equazione differenziale di prim'ordine fra le due variabili x et x_1:

$$(8)\quad X_1 dx - X dx_1 = 0,$$

e la formula (7) dimostra che la quantità M_{n-1} è il *moltiplicatore* di quest' equazione differenziale. Tal moltiplicatore, rendendo il primo membro di (8) un differenziale completo, riduce la integrazione dell' equazione alle sole quadrature. Da qui si ricava il seguente teorema, al quale, per la sua importanza e fecondità, ho stimato proprio di dare una denominazione particolare.

„*Proposte l'equazioni differenziali*

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

sia M una quantità qualunque che soddisfaccia all'equazione

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0,$$

e del sistema dell'equazioni differenziali siansi trovati successivamente tutti gl' integrali, eccetto un solo,

$$u = \alpha, \quad u_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad u_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

ove α, α_1, ... sono le costanti arbitrarie; s'impieghi ciascun integrale all'eliminazione di una variabile, talchè $u_i = \alpha_i$ sia l'equazione fra le variabili x, $x_1, \ldots, x_{n-i}$, che ha servito all'eliminazione di x_{n-i}: il moltiplicatore dell'ultima equazione differenziale

$$X_1 dx - X dx_1 = 0$$

sarà

$$\mu = \frac{M}{\frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2}},$$

ove, mediante gl' integrali trovati, le quantità X, X_1, μ sono da esprimersi per le variabili x e x_1."

Dimostra il principio dell'ultimo moltiplicatore che, *conosciuta la quantità M, l'ultima integrazione può sempre eseguirsi colle sole quadrature.*

Quando si ha

$$(9)\quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

potrà farsi $M = 1$; d'onde segue che: „proposto un sistema di equazioni differenziali volgari

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

ove

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

e trovati tutti gl'integrali completi, eccetto un solo, l'ultima equazione differenziale potrà sempre integrarsi colle sole quadrature". Svilupperò più estesamente nel giornale del sig. Crelle il detto principio. Qui basterà di farne l'applicazione ai problemi meccanici.

III.

PRINCIPIO DELL'ULTIMO MOLTIPLICATORE NEI PROBLEMI MECCANICI.

Consideriamo le formule dinamiche rispetto al moto di k punti materiali. Le $3k$ coordinate rettangolari di questi k punti siano

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{3k-1},$$

e sia inoltre

$$(10)\quad \frac{dx}{dt} = x_{3k}, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_{3k+1}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{3k-1}}{dt} = x_n,$$

ove $n = 6k-1$. Supponiamo che le forze sollecitanti i punti materiali secondo le direzioni parallele agli assi delle coordinate, siano funzioni delle sole coordinate $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$, senza dipendere nè dal tempo, nè dalle velocità; e che il sistema de'punti sia interamente libero. Il moto dei punti sarà dato dall'integrazione di un sistema di equazioni differenziali volgari della forma

$$(11)\quad \frac{dx_{3k}}{dt} = X_{3k}, \quad \frac{dx_{3k+1}}{dt} = X_{3k+1}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

ove $X_{3k}, X_{3k+1}, \ldots, X_n$ sono funzioni delle quantità $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$. Posto, per maggior conformità colle formule degli articoli antecedenti,

$$x_{3k} = X, \quad x_{3k+1} = X_1, \quad \ldots, \quad x_n = X_{3k-1},$$

le formule (10) e (11) riunite somministrano il sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$(12)\quad dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n.$$

Queste integrate e, mediante gl' integrali trovati, espressa $X = x_{3k}$ per x, si avrà finalmente il tempo

$$(13) \quad t = \int \frac{dx}{X} + \text{Const.}$$

Dunque, come si sa, nei problemi meccanici l'ultima integrazione, che dà l'espressione del tempo per una coordinata, può ottenersi mediante una sola quadratura. Ma io dico che le *due* ultime integrazioni possono sempre ottenersi per via di sole quadrature, perchè, oltre l'equazione (13) che contiene soltanto una quadratura, mediante il principio dell'ultimo moltiplicatore anche l'ultima integrazione del sistema (12) può ridursi alle quadrature. Infatti, essendo le quantità X_{3k}, X_{3k+1}, ..., X_n funzioni delle sole x, x_1, ..., x_{3k-1}, e le X, X_1, ..., X_{3k-1} essendo eguali alle variabili x_{3k}, x_{3k+1}, ..., x_n, vedesi che in niuna funzione X_i si contiene la variabile x_i, e che in conseguenza per ciascun valore di i si ha

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0,$$

d'onde

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0.$$

Abbiamo dunque il caso di $M = 1$. Pertanto trovati tutti gl' integrali delle equazioni (12), eccetto un solo, il moltiplicatore dell'ultima equazione differenziale sarà fornito dal principio proposto nell'articolo precedente, sostituitovi $M = 1$.

Lo stesso principio dà le due ultime integrazioni, anche nel caso dei sistemi non liberi di punti materiali. Ciò si farà manifesto, ponendo le formule dinamiche sotto una forma convenevole, come appresso.

Sia $3k - m$ il numero dell'equazioni di condizione del sistema de' k punti materiali; esprimo tutte le loro $3k$ coordinate x, x_1, ..., x_{3k-1} per m quantità indipendenti

$$q_1, \; q_2, \; \ldots, \; q_m;$$

quindi, posto

$$\frac{\partial q_i}{dt} = q_i',$$

esprimo la metà T della forza viva del sistema de' punti materiali colle quantità

$$q_1, \; q_2, \; \ldots, \; q_m, \; q_1', \; q_2', \; \ldots, \; q_m'.$$

Siano poste l'equazioni

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial q_m'} = p_m,$$

le quali sono lineari rispetto a q_1', q_2', ..., q_m': e per la loro risoluzione si ottengano i valori di q_1', q_2', ..., q_m', espressi per p_1, p_2, ..., p_m. Sostituiti questi valori in T, riesce T funzione delle $2m$ quantità

$$q_1, \; q_2, \; \ldots, \; q_m, \quad p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_m,$$

le quali sono quelle fra cui conviene stabilire l'equazioni differenziali dinamiche. Per ottener queste, poniamo che x_i sia una coordinata di un punto la cui massa è m_i, e che questo punto sia sollecitato secondo la direzione parallela alla coordinata x_i dalla forza X_{3k+i}. Sostituendo i valori delle coordinate x, x_1, ..., x_{3k-1}, espressi per q_1, q_2, ..., q_m, si ottenga

$$m X_{3k} dx + m_1 X_{3k+1} dx_1 + \cdots + m_{3k-1} X_n dx_{3k-1} = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \cdots + Q_m dq_m.$$

Le quantità X_{3k}, X_{3k+1}, ... essendo funzioni delle sole x, x_1, ..., le quantità Q_1, Q_2, ..., saranno funzioni delle sole q_1, q_2, ..., q_m. Trovate queste funzioni, l'equazioni differenziali fra le variabili q_1, q_2, q_3, ..., q_m, p_1, p_2, ..., p_m saranno le seguenti:

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial p_1}, & \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial p_2}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{dq_m}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial p_m}, & \dfrac{dp_m}{dt} = -\dfrac{\partial T}{\partial q_m} + Q_m. \end{cases}$$

La dimostrazione di queste formule generali può ricavarsi dalla dimostrazione data dal sig. Hamilton nel caso che

$$m X_{3k} dx + m_1 X_{3k+1} dx_1 + \cdots + m_{3k-1} X_n dx_{3k-1}$$

è un differenziale completo (vedi due memorie dello stesso autore inserite nelle *Philosophical Transactions* an. 1834 e 1835). Separando l'elemento dt e mettendo l'equazioni differenziali sotto la forma di una proporzione

$$(15) \quad \begin{cases} dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_m \\ = \dfrac{\partial T}{\partial p_1} : \dfrac{\partial T}{\partial p_2} : \ldots : \dfrac{\partial T}{\partial p_m} : -\dfrac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 : -\dfrac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2 : \ldots : -\dfrac{\partial T}{\partial q_m} + Q_m, \end{cases}$$

si hanno primieramente da integrare l'equazioni (15), e poi il tempo t sarà trovato come funzione di una delle quantità q_1, q_2, ... mediante una sola quadratura. Ricerchiamo adesso la quantità M corrispondente al sistema delle equazioni (15). Quando erano proposte l'equazioni differenziali

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

ciascuna delle quantità X, X_1, ec. fu differenziata rispetto alla variabile al cui differenziale è proporzionale. Svanendo la somma di tutti gli n differenziali parziali così ottenuti, l'ultima integrazione fu ridotta alle quadrature. Così, proposte l'equazioni differenziali (15), si hanno da differenziare le quantità

$$\frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial T}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial p_m}$$

rispetto alle variabili

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m,$$

e le quantità

$$-\frac{\partial T}{\partial q_1}+Q_1, \quad -\frac{\partial T}{\partial q_2}+Q_2, \quad \ldots, \quad -\frac{\partial T}{\partial q_m}+Q_m$$

rispetto alle variabili

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_m.$$

Or la somma di tutti questi $2m$ differenziali parziali svanisce, perchè combinandoli due a due si ha per ogni valore dell'indice i:

$$\frac{\partial \frac{\partial T}{\partial p_i}}{\partial q_i} + \frac{\partial\left(-\frac{\partial T}{\partial q_i}+Q_i\right)}{\partial p_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = 0.$$

Dunque, proposte l'equazioni differenziali (15) corrispondenti a un sistema non libero di punti materiali, potrà farsi $M = 1$, e perciò la loro ultima integrazione potrà ridursi alle quadrature.

Quando l'espressioni delle forze contengono esplicitamente il tempo t, non si potrà più ottenere il tempo con una sola quadratura, come nei casi precedenti. Ma, mediante il nuovo principio, anche in questo caso l'integrazione dell'ultima equazione differenziale del primo ordine, fra t ed una coordinata, dipenderà soltanto da quadrature.

Lo stesso principio si applica anche al moto di una cometa in un mezzo resistente, e ad alcuni altri casi particolari ove alle forze sollecitanti sono aggiunte forze di resistenza.

Roma, 16 marzo 1844.

ZWEI BEISPIELE ZUR NEUEN METHODE DER DYNAMIK

VON

C. G. J. JACOBI.

Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1846 p. 351—356.

ZWEI BEISPIELE ZUR NEUEN METHODE DER DYNAMIK.

Es gelte in einem Probleme der Mechanik die Erhaltung der lebendigen Kraft; die dieselbe ausdrückende Gleichung sei

$$T = U + h,$$

wo T die halbe lebendige Kraft, U die Kräftefunction, h die willkürliche Constante bedeutet. Es seien q_1, q_2, etc. die von einander unabhängigen Bestimmungsstücke der Positionen der materiellen Punkte, welche entweder frei oder vorgeschriebenen Bedingungen unterworfen sind. Man setze $\frac{dq}{dt} = q'$, drücke T durch die Grössen q_1, q_2, etc., q'_1, q'_2, etc. aus und bilde die Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \text{etc.}$$

Drückt man mittelst dieser Gleichungen T als Function von q_1, q_2, etc., $\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $\frac{\partial V}{\partial q_2}$, etc. aus, so wird $T = U + h$ eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Variabeln V, q_1, q_2, etc. Kennt man von derselben eine Lösung V, welche willkürliche Constanten enthält und so beschaffen ist, (was das Kriterium einer *vollständigen* Lösung ist), dass sie keiner andern partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, welche von der gesuchten Function V selbst und den willkürlichen Constanten frei ist, so kann man das mechanische Problem vollständig integriren, und kennt auch zugleich, wenn die Bewegung gestört wird, ohne einige weitere Rechnung, die Differentialgleichungen für die gestörten Elemente.

Sind nämlich α_1, α_2, etc. die in V enthaltenen willkürlichen Constanten, so werden

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \text{etc.}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

wo β_1, β_2, etc., τ neue willkürliche Constanten sind, die vollständigen Integralgleichungen. Hat man für das gestörte Problem

$$T = U + \Omega + h,$$

wo Ω die Störungsfunction ist, so werden die Differentialgleichungen für die gestörten Elemente:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2}, \quad \text{etc.}$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2}, \quad \text{etc.}$$

Erstes Beispiel: *Die elliptische Bewegung eines Planeten um die Sonne.*

Wählt man als Bestimmungsstücke der Position des Planeten seine Polarcoordinaten r, φ, ψ, und setzt die anziehende Kraft $= 1$, so wird

$$T = \tfrac{1}{2}\{r'r' + r^2\varphi'\varphi' + r^2\sin^2\varphi . \psi'\psi'\}, \quad U = \frac{1}{r},$$
$$\frac{\partial T}{\partial r'} = r', \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = r^2\varphi', \quad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = r^2\sin^2\varphi . \psi'.$$

Setzt man

$$r' = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad r^2\varphi' = \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad r^2\sin^2\varphi . \psi' = \frac{\partial V}{\partial \psi},$$

so wird

$$T = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2\right].$$

Die partielle Differentialgleichung wird daher

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{2}{r} + 2h.$$

Schreibt man diese Gleichung folgendermaassen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 - \frac{2}{r} - 2h + \frac{\alpha}{r^2}$$
$$+ \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 - \alpha + \frac{\beta}{\sin^2\varphi}\right]$$
$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 - \beta\right] = 0,$$

so erhält man eine vollständige Lösung, wenn man die in den einzelnen Horizontalreihen befindlichen Ausdrücke besonders $= 0$ setzt, und die drei für V hieraus erhaltenen Ausdrücke summirt. Es ergiebt sich hieraus

$$V = \int \sqrt{\frac{2}{r} + 2h - \frac{\alpha}{r^2}}\, dr + \int \sqrt{\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\varphi}}\, d\varphi + \sqrt{\beta} . \psi.$$

Substituirt man diesen Werth von V, so werden die vollständigen Integralgleichungen der elliptischen Bewegung

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

wo α, β, α', β', h, τ die sechs willkürlichen Constanten sind. Die letzte Gleichung giebt z. B.

$$t + \tau = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} + 2h - \frac{\alpha}{r^2}}}.$$

Man findet leicht die geometrische Bedeutung der Elemente α, β, α', β' und durch das oben angegebene allgemeine Theorem die auf sie bezüglichen Störungsformeln.

Zweites Beispiel: *Die geodätische Linie auf einem Ellipsoid.*

Es sei die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und $a > b > c$. Man erhält alle Punkte desselben, wenn man zu dieser Gleichung die beiden folgenden

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} + \frac{z^2}{c^2 - \mu} = 1$$

hinzufügt, aus den drei Gleichungen x, y, z durch λ und μ bestimmt, und der Variablen λ die Werthe von c^2 bis b^2, der Variablen μ die Werthe von b^2 bis a^2 giebt. Das halbe Quadrat der Geschwindigkeit eines Punktes des Ellipsoids wird dann

$$T = \frac{\mu - \lambda}{8}\left[\frac{\lambda}{\Lambda}\lambda'\lambda' + \frac{\mu}{M}\mu'\mu'\right],$$

wo wieder $\lambda' = \frac{d\lambda}{dt}$, $\mu' = \frac{d\mu}{dt}$, und

$$\Lambda = (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(\lambda - c^2),$$
$$M = (a^2 - \mu)(\mu - b^2)(\mu - c^2),$$

ist. Man erhält hieraus zufolge der allgemeinen Regel

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{\partial T}{\partial \lambda'} = \frac{\mu - \lambda}{4} \cdot \frac{\lambda\lambda'}{\Lambda},$$
$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = \frac{\partial T}{\partial \mu'} = \frac{\mu - \lambda}{4} \cdot \frac{\mu\mu'}{M}$$

und daher durch Elimination von λ' und μ'.

$$T=\frac{2}{\mu-\lambda}\left[\frac{\varDelta}{\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{M}{\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)^2\right].$$

Die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche, wenn dieselbe nur durch einen momentanen Impuls erfolgt, geschieht auf der sogenannten geodätischen Linie. Man hat für diesen Fall

$$U=0;$$

die partielle Differentialgleichung $T=U+h$ wird daher

$$\frac{\varDelta}{\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{M}{\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)^2=\tfrac{1}{2}h\mu-\tfrac{1}{2}h\lambda.$$

Man genügt ihr, ähnlich wie im ersten Beispiel, wenn man besonders

$$\frac{\varDelta}{\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)^2=\alpha-\tfrac{1}{2}h\lambda,$$

$$\frac{M}{\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)^2=\tfrac{1}{2}h\mu-\alpha$$

setzt, woraus

$$V=\int\sqrt{\frac{\lambda(\alpha-\frac{1}{2}h\lambda)}{\varDelta}}\,d\lambda+\int\sqrt{\frac{\mu(\frac{1}{2}h\mu-\alpha)}{M}}\,d\mu$$

folgt. Die Relation zwischen λ und μ, welche die geodätische Linie bestimmt, wird $\frac{\partial V}{\partial\alpha}=\beta$, oder

$$2\beta=\int\sqrt{\frac{\lambda}{(\alpha-\frac{1}{2}h\lambda)\varDelta}}\,d\lambda-\int\sqrt{\frac{\mu}{(\frac{1}{2}h\mu-\alpha)M}}\,d\mu,$$

wo h, α und β die willkürlichen Constanten sind.

NACHLASS.

PROBLEMA TRIUM CORPORUM MUTUIS ATTRACTIONIBUS CUBIS DISTANTIARUM INVERSE PROPORTIONALIBUS RECTA LINEA SE MOVENTIUM

AUCTORE

C. G. J. JACOBI.

PROBLEMA TRIUM CORPORUM MUTUIS ATTRACTIONIBUS CUBIS DISTANTIARUM INVERSE PROPORTIONALIBUS RECTA LINEA SE MOVENTIUM.

(Ex. Ill. C. G. J. Jacobi manuscriptis posthumis in medium protulit A. Wangerin.)

In Commentationis „theoria novi Multiplicatoris" inscriptae §. 28 [Cf. h. Vol. p. 478] de tribus corporibus se mutuo attrahentibus in eademque recta motis egi atque annotavi, casu, quo mutuae corporum attractiones *cubis* distantiarum inverse proportionales sint, motum totum tantum ab *unica Quadratura* pendere. Qua de re paucis disseram, eadem notatione usus atque in illa Commentatione.

Rursus posito

$$(1)\quad u = r\cos\varphi,\quad v = r\sin\varphi,$$

loco substitutionum (16) Commentationis supra commemoratae hae adhibendae sunt:

$$(2)\quad \begin{cases} s = r\,\dfrac{dr}{dt} = u\dfrac{du}{dt}+v\dfrac{dv}{dt}, \\[2mm] \eta = r^2\dfrac{d\varphi}{dt} = u\dfrac{dv}{dt}-v\dfrac{du}{dt}, \end{cases}$$

unde fit

$$(3)\quad \begin{cases} r^2\dfrac{ds}{dt} = s^2+\eta^2-2\Phi, \\[2mm] r^2\dfrac{d\eta}{dt} = \Phi', \end{cases}$$

siquidem rursus ponitur $\Phi' = \dfrac{d\Phi}{d\varphi}$, ipsi Φ autem tribuitur valor:

$$(4)\quad \Phi = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{m'm''}{(a\cos\varphi+b\sin\varphi)^2}+\frac{m''m}{(a'\cos\varphi+b'\sin\varphi)^2}+\frac{mm'}{(a''\cos\varphi+b''\sin\varphi)^2}\right\}.$$

Aequationes (19) Commentationis citatae in has mutantur:

$$(5)\quad d\varphi : ds : d\eta = \eta : s^2+\eta^2-2\Phi : \Phi',$$

unde eruitur

$$\Phi'd\varphi-\eta d\eta = 0,$$

ideoque, designante α Constantem arbitrariam,

$$(6)\quad 2\Phi-\eta^2=\alpha.$$

Principium conservationis virium vivarum suppeditat aequationem

$$(7)\quad \frac{1}{r^2}\{\Phi-\tfrac{1}{2}(s^2+\eta^2)\}=h,$$

unde

$$(8)\quad s=r\frac{dr}{dt}=\sqrt{\alpha-2hr^2}.$$

Hinc fit

$$(9)\quad \begin{cases} dt=\dfrac{rdr}{s}=\dfrac{rdr}{\sqrt{\alpha-2hr^2}}, \\ \dfrac{dt}{r^2}=\dfrac{d\varphi}{\eta}=\dfrac{d\varphi}{\sqrt{2\Phi-\alpha}}=\dfrac{dr}{r\sqrt{\alpha-2hr^2}}. \end{cases}$$

Quadraturarum hic instituendarum rationi immorabor, ut generalia quaedam Mechanicae et Calculi Integralis praecepta in clariorem lucem ponantur et commodo exemplo illustrentur.

In quaestionum mechanicarum solutionibus nihil ambigui manere potest. Semel conditione initiali ex arbitrio data, neque novis viribus acceleratricibus vel impulsibus accedentibus, per totum temporis infiniti decursum mobilium positiones lege unica determinantur, cum, tempore semper progrediente et continuo fluente, variabiles, quibus mobilium positiones et velocitatum eorum intensitates et directiones definiuntur, ita a tempore pendeant, ut earum mutationes nunquam continuitatis principium laedant neque per saltus fiant, hoc est ut nunquam duobus temporis momentis infinite vicinis respondeant illarum variabilium valores quantitate finita inter se differentes. Unde exempli gratia in quaestionibus mechanicis nunquam fieri debet, ut variabiles illae a positivo ad negativum vel a negativo ad positivum per *infinitum* transeant. Nisi lex illa suprema bene tenetur, fieri potest, ut pro eodem statu initiali ex iisdem aequationibus differentialibus determinationes petantur a vero motu quam maxime abhorrentes et prorsus absurdae. At antecedentia tantum ad ipsas valent variabiles, quas supra innui, quibus scilicet *sine ulla ambiguitate* definiuntur mobilium positiones et velocitates, neque lex proposita ad illarum variabilium functiones extendi potest.

Maxime autem rejicienda est regula, quae passim dari solet, radicalibus inter integrationem eadem signa conservanda esse. Scilicet radicalis signo pro

conditione initiali definito, non amplius in potestate nostra positum est, regulam aliquam de illius signo condendi, sed omnia continuitatis legi permittenda sunt. Neque si duarum variabilium u et v loco, quae ad illas variabiles continuitatis legi obnoxias pertinent, alias r et φ adhibes ponendo $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$, statuere licet, ipsam r semper positivo valore gaudere.

Principiis mechanicis, quibus vires sollicitantes per aequationes differentiales exprimuntur, illa adjicienda esse videntur, quae modum spectant, ipsum motum ex aequationibus differentialibus deducendi. Illa principia, si veterem distinctionem renovare licet, *dynamica*, haec *phoronomica* appellare conveniret.*)

In exemplo antecedenti ex arbitrio dati sint variabilium r, φ, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ valores initiales r_0, φ_0, r_0', φ_0' tempori $t=0$ correspondentes; erunt ipsarum s et η valores initiales

$$s_0=r_0r_0',\quad \eta_0=r_0^2\varphi_0'.$$

Quantitatem r_0 semper positivam statuere licet. Porro fit

$$\alpha=2\Phi_0-\eta_0^2,\quad h=\frac{\alpha}{2r_0^2}-\tfrac{1}{2}r_0'^2,$$

siquidem Φ_0 functionis Φ valorem designat, qui pro valore initiali $\varphi=\varphi_0$ obtinetur. Posito

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2\Phi-\alpha}}=d\Pi,$$

quantitas Π, quam evanescente t et ipsam evanescere pono, simul cum t continuo crescere debet, cum habeatur

$$d\Pi=\frac{dt}{r^2}.$$

Pro conditionibus initialibus et pro variis temporis t intervallis variae formulae de aequationibus differentialibus

$$dt=\frac{rdr}{\sqrt{\alpha-2hr^2}},\quad d\Pi=\frac{dr}{r\sqrt{\alpha-2hr^2}}$$

deducendae sunt, quibus r et Π per t exprimantur. Qua in re statuere placet, radicalibus valores positivos vel negativos convenire, potestates fractas vero semper quantitates positivas designare.

*) **Eulerus** olim adversarii **Koenig** ignorantiam misere increpavit, quod illam inter Dynamicam et Phoronomiam differentiam non bene teneret. Quam distinctionem hodie meliore iure adhibere possumus, cum methodi integrationis problematis mechanicis propriae partem Mechanicae peculiarem constituere videantur.

1°. *Sit α negativum, unde etiam h negativum.*

a) *Sit r_0' negativum.* Erit initio motus dr negativum, unde etiam $\sqrt{\alpha-2hr^2}$ signo negativo sumendum est, quia elementum dt semper positivum est atque valor r_0 positivus supponatur. Decrescit r a r_0 usque ad valorem positivum $r_1=\left(\frac{\alpha}{2h}\right)^{\frac{1}{2}}$, cui respondent ipsarum t et Π valores

$$t_1=-\frac{1}{2h}(\alpha-2hr_0^2)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{r_1^2-r_0^2}{2h}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Pi_1=\frac{1}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{Arccos}\left(\frac{r_1}{r_0}\right),$$

siquidem arcus inter 0 et $\frac{\pi}{2}$ sumitur. Si motum ulterius persequeris, invenis per totum motum, tempori t_1 anteriorem et posteriorem, valere formulas:

$$r=\{r_1^2-2h(t_1-t)^2\}^{\frac{1}{2}},\quad s=-2h(t-t_1),$$

$$\Pi=\Pi_1-\frac{1}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{Arccos}\left(\frac{r_1}{r}\right)=\Pi_1-\frac{1}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{Arctg}\frac{(-2h)^{\frac{1}{2}}(t_1-t)}{r_1},$$

ubi arcus circulares, crescente t a 0 usque ad ∞, a valore positivo inter 0 et $\frac{\pi}{2}$ posito usque ad $-\frac{\pi}{2}$ decrescunt. Ipsa r tempore $t=t_1$ valorem minimum r_1 adipiscitur, eodemque temporis intervallo ante et post hanc epocham eundem valorem induit.

b) *Si r_0' positivum est,* in antecedentibus nihil mutandum est, nisi quod loco t ponendum est $t+2t_1$, loco Π autem $\Pi+2\Pi_1$.

2°. *Sit α positivum, h negativum.*

a) *Sit r_0' negativum.* Quantitas r continuo decrescit inde a r_0 usque ad $-\infty$; quantitas $\frac{dr}{dt}$ decrescit primum inde a r_0' usque ad $-\infty$, quem valorem evanescente r assequitur; neque vero $\frac{dr}{dt}$ propter principia phoronomica supra exposita ad $+\infty$ transire potest, dum r a positivo valore per 0 ad negativum transit, sed redire debet per valores negativos continuo crescens usque ad valorem $-(-2h)^{\frac{1}{2}}$. Hinc autem sequitur, quantitatem

$$r\frac{dr}{dt}=s=\sqrt{\alpha-2hr^2}$$

inde a $r_0r_0'=-(\alpha-2hr_0^2)^{\frac{1}{2}}$ usque ad $-(\alpha)^{\frac{1}{2}}$ continuo crescere, evanescente r subito ac per saltum transire a $-(\alpha)^{\frac{1}{2}}$ ad $+(\alpha)^{\frac{1}{2}}$ ac deinde crescendo pergere usque ad $+\infty$. Unde exemplum habemus, quo radicale non evanescens signum

mutat, idque per ipsam continuitatis legem, qualis in Mechanicis adhibenda est, fieri debet. Quod autem quantitas $\frac{dr}{dt}$ continuitatis legem subire debet, dum quantitas $\frac{dr^2}{dt}$ eidem legi non subjecta est, id inde fit, quod r ad systema variabilium pertinet, quibus sine aliqua ambiguitate positiones mobilium definiri possunt, quantitas r^2 autem ejus loco adhibita ambiguitatem admittit. Nam illae ipsae tantum variabiles earumque differentialia prima per temporis elementum dt divisa continuitatis lege obstringuntur. Dum r a r_0 usque ad nihilum decrescit, crescit Π a 0 usque ad ∞. Si adhibetur tempus t_1, quo r evanescit, datum aequatione

$$-2ht_1=(\alpha-2hr_0^2)^{\frac{1}{2}}-\alpha^{\frac{1}{2}},$$

valent ante tempus t_1 formulae

$$-2h(t_1-t)=(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}-\alpha^{\frac{1}{2}},$$

$$\Pi=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\log\left(\frac{rt_1}{r_0(t_1-t)}\right)=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\log\left[\frac{r_0}{r}\cdot\frac{(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha^{\frac{1}{2}}}{(\alpha-2hr_0^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Inde a $t=t_1$ usque ad $t=\infty$ valet formula

$$-2h(t-t_1)=(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}-\alpha^{\frac{1}{2}},$$

ita ut tempore T sive ante sive post epocham t_1 fiat

$$r=\pm T^{\frac{1}{2}}(-2hT+2\alpha^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},$$

signo superiore ante epocham, inferiore post epocham valente. Habemus hic exemplum quantitatis $\sqrt{\alpha+x^2}-\sqrt{\alpha}$, in qua bina radicalia eodem signo sumuntur, quam patet continuitatis legem servare, si pro $x=0$ bina radicalia non evanescentia simul signum mutant.

Tempore $t=t_1$ transit Π a $+\infty$ ad $-\infty$, atque pro $t>t_1$ fit

$$\Pi=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\log\left(\frac{r_0(t_1-t)}{rt_1}\right).$$

b) *Si r_0' positivum est,* r positivis tantum valoribus gaudet atque continuo crescit. Designante t_1 eandem quantitatem atque casu (2°, a) nunc fit:

$$-2h(t+t_1)=(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}-\alpha^{\frac{1}{2}},$$

$$r=(t+t_1)^{\frac{1}{2}}\{2\alpha^{\frac{1}{2}}-2h(t+t_1)\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\Pi=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\log\left(\frac{r_0(t+t_1)}{rt_1}\right)=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\log\left[\frac{r}{r_0}\cdot\frac{(\alpha-2hr_0^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha^{\frac{1}{2}}}{(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha^{\frac{1}{2}}}\right].$$

3°. *Sit α positivum, h positivum.*

a) *Sit r_0' negativum.* Formulae eaedem atque antecedentibus (2°, a) manent, dum r a r_0 usque ad $-\left(\frac{\alpha}{2h}\right)^{\frac{1}{2}}$ decrescit, t a 0 usque ad

$$t_1+\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2h}=\frac{1}{2h}\{2\alpha^{\frac{1}{2}}-(\alpha-2hr_0^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

crescit, $\frac{dr}{dt}$ a r_0' ad $-\infty$ decrescit ac deinde a $-\infty$ usque ad 0 crescit. Tum vero ipsarum r et $\frac{dr}{dt}$ incipit motus periodicus.

Sit
$$r_1=\left(\frac{\alpha}{2h}\right)^{\frac{1}{2}}\quad \tau=\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2h};$$

motus periodicus, si initio ejus denuo $t=0$ statuitur, hoc modo fit:

dum r a r_1 ad 0 decrescit, fit $t=\frac{1}{2h}(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}$,

dum r a 0 ad $-r_1$ decrescit, fit $t=2\tau-\frac{1}{2h}(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}$,

dum r a $-r_1$ ad 0 crescit, fit $t=2\tau+\frac{1}{2h}(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}$,

dum r a 0 ad r_1 crescit, fit $t=4\tau-\frac{1}{2h}(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}$,

dum r a r_1 ad 0 decrescit, fit $t=4\tau+\frac{1}{2h}(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}$,

etc. etc.

Hic videmus continuitatem servari, certo tempore simul radicalis signum atque Constantis arbitrariae tempori addendae valorem mutando. Designante T quantitatem positivam ipso τ minorem atque n numerum integrum sive positivum sive negativum, ponatur

$$t=2n\tau\pm T,$$

erit

$$r=\pm(2h)^{\frac{1}{2}}(\tau^2-T^2)^{\frac{1}{2}},$$

signo superiore aut inferiore valente prout n par aut impar.

Ipsum

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{r}\sqrt{\alpha-2hr^2}$$

in intervallis temporis 0, τ, 2τ, 3τ, 4τ, 5τ, etc. a 0 ad $-\infty$, a $-\infty$ ad 0, a 0 ad $+\infty$, a $+\infty$ ad 0, a 0 ad $-\infty$, etc. continua mutatione fertur. Contra ipsum $r\frac{dr}{dt}$ in iisdem intervallis a 0 ad $-(\alpha^{\frac{1}{2}})$, ab $\alpha^{\frac{1}{2}}$ ad 0, a 0 ad $-(\alpha^{\frac{1}{2}})$, ab

$\alpha^{\frac{1}{2}}$ ad 0, a 0 ad $-(\alpha^{\frac{1}{2}})$, etc. movetur, generaliterque pro $t=2n\tau\pm T$ datur valore

$$r\frac{dr}{dt}=s=\sqrt{\alpha-2hr^2}=-2h(t-2n\tau),$$

quae functio tempore $\pm\tau$, $\pm3\tau$, $\pm5\tau$, etc. a $-2h\tau$ ad $+2h\tau$ per saltum transit.

Π denique infinitum fit, ubi $r=0$; atque pro aliquo momento $t=2n\tau\pm T$, ubi T quantitas positiva atque minor quam τ est, fit

$$d\Pi=\frac{\pm dT}{2h(\tau^2-T^2)}.$$

b) *Sit r_0' positivum.* Crescente r a r_0 ad $r_1=\left(\frac{\alpha}{2h}\right)^{\frac{1}{2}}$, crescit t a 0 ad $t_0=\frac{1}{2h}(\alpha-2hr_0^2)^{\frac{1}{2}}$, ita ut sit

$$t_0-t=\frac{1}{2h}(\alpha-2hr^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ab hoc temporis momento idem motus periodicus incipit, quem modo perspeximus.

Restat, ut ei casus considerentur, quibus aut $r_0'=0$ (id quod tantum primo et tertio casu fieri potest), aut $\alpha=0$, h negativum, aut $h=0$, α positivum est. Quibus casibus perscrutandis supersedere possumus, cum omnes antecedentibus contineantur, levibus adhibitis mutationibus. Exempli causa si tertio casu $r_0'=0$, ea motus pars, quae motum periodicum antecedebat, omittenda est.

Quadraturam instituendarum ratione perspecta, motum trium corporum non amplius persequar.

ANMERKUNGEN.

ZU DEN ABHANDLUNGEN Nr. 1—9.

In der Abhandlung „*Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis etc.*“ hat Jacobi (p. 152 dieses Bandes) für die Anwendung der Symbole

$$d, \ \partial$$

eine Regel aufgestellt, welche seitdem von ihm und vielen anderen Mathematikern stets befolgt worden ist. Ich habe geglaubt, beim Neudrucke aller früher erschienenen Abhandlungen, namentlich der im Vorstehenden genannten, ebenfalls nach dieser Regel mich richten zu müssen, wodurch an einer geringen Anzahl von Stellen (z. B. im Anfang von p. 22 dieses Bandes) unwesentliche Aenderungen des ursprünglichen Textes nothwendig geworden sind.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT ET SUR UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

S. 37. Die Mittheilung, auf die hier (Z. 8) hingewiesen wird, bezog sich auf die Bestimmung der Gleichgewichtsfigur eines homogenen, um eine feste Axe rotirenden flüssigen Körpers (vgl. die Abhandlung Nr. 3 des 2. Bandes); sie ist am 20. October 1834 erfolgt, aber nicht gedruckt worden.

S. 38. Der zweite Theil des Briefes stimmt im Wesentlichen überein mit einer in den Monatsberichten der Berliner Akademie a. d. J. 1836 (S. 59) abgedruckten Note. In der letzteren steht statt des hier gebrauchten Ausdrucks „point sans masse“ correcter „wenn man die Masse des gestörten Planeten vernachlässigt“; ferner ist die Schlussformel in den veränderlichen Elementen ausgedrückt und lautet:

$$\frac{M}{2a}+\frac{\sqrt{M(M+m')}}{a_1^{\frac{3}{2}}}\cdot\sqrt{p}\cos i+m'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{x\cos n't+y\sin n't}{a_1^2}\right)=\text{Const.},$$

wo M, m', a_1, n', t dieselbe Bedeutung haben, wie in der Mittheilung an die Pariser Akademie, und mit a die halbe grosse Axe, mit p der Parameter der Bahn des gestörten Planeten, endlich mit ϱ der Abstand der beiden Planeten von einander bezeichnet ist. Schliesslich wird noch bemerkt, dass man sich von der Richtigkeit dieser Gleichung leicht durch Differentiation überzeugen könne.

ZUR THEORIE DER VARIATIONSRECHNUNG ETC.

Eine französische Übersetzung dieser Abhandlung findet man im 3. Bande des Liouville'schen Journals (p. 44—59), ferner kurze Angaben über die Resultate der Arbeit im 3. Bande der Comptes rendus und in den Monatsberichten der Berliner Akademie a. d. J. 1836 (S. 115—119), welche wieder abdrucken zu lassen überflüssig erschien.

S. 52, Z. 11. Hier ist der erste Theil der vorhergehenden Abhandlung gemeint.

S. 54, Z. 13. Diese Bemerkung bezieht sich auf den zweiten, wie oben bemerkt worden, auch der Berliner Akademie mitgetheilten Abschnitt der vorhergehenden Abhandlung.

NOTE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA DYNAMIQUE.

S. 131, Z. 8 und S. 133, Z. 9 sind die in den Abhandlungen Nr. 5 und Nr. 4 enthaltenen Mittheilungen an die Berliner und die Pariser Akademie gemeint.

SUR UN NOUVEAU PRINCIPE DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

Diese Arbeit enthält im Wesentlichen nur eine Zusammenstellung der auf dynamische Probleme bezüglichen Resultate der Abhandlung „*Theoria novi multiplicatoris etc.*“ (Nr. 16 d. B.)

SUR L'ÉLIMINATION DES NOEUDS DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

S. 305 (Mitte). Die Gleichungen (11) ergeben sich einfacher als auf die im Texte angegebene Weise, wenn man in der Formel

$$a=\frac{\alpha_2\xi_1+\beta_1\xi_2}{\alpha_1+\beta_1}$$

die Grössen α_2, α_1, β_1 durch die Grössen γ, δ ausdrückt (Gl. 20, p. 302) und beachtet, dass $m\xi+m_1\xi_1+m_2\xi_2=0$ ist.

S. 307, Gl. 3. Hier ist $-c_1$ statt c_1, wie im ursprünglichen Texte steht, gesetzt worden.

THEORIA NOVI MULTIPLICATORIS ETC.

Der S. 444 als „*Novum principium generale mechanicum*“ aufgestellte Satz ist auch im Bulletin de l'académie impériale de St. Pétersbourg (t. III, 1845) mitgetheilt worden.

Es ist beim Neudrucke dieser Abhandlung anfänglich übersehen worden, dass die im Original über den §§. stehenden Inhaltsangaben Abschnitte der Arbeit bezeichnen und daher nicht, wie es geschehen, als Inhaltsangaben der einzelnen Paragraphen unter die Nummern derselben hätten gesetzt werden sollen. Da indessen nur zwei Abschnitte (§§. 20, 21 und §§. 32, 33) mehr als einen Paragraphen enthalten, so liess sich das begangene Versehen dadurch gut machen, dass der erste dieser Abschnitte als §. 20, der zweite als §. 31 und die dazwischen liegenden als §§. 21—30 bezeichnet worden sind, wobei der Text ganz unverändert geblieben ist.

SUL PRINCIPIO DELL' ULTIMO MOLTIPLICATORE ETC.

Diese Abhandlung ist ein Auszug aus der vorstehenden: „*Theoria novi multiplicatoris etc.*“

Der vorliegende vierte Band von Jacobi's Werken enthält sämmtliche auf die Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen, sowie auf Dynamik sich beziehenden Abhandlungen, welche von Jacobi selbst veröffentlicht worden sind. Aus dem bisher ungedruckten Nachlasse ist nur die letzte Abhandlung (Nr. 19), in der ein auf S. 484 dieses Bandes ohne Beweis ausgesprochener Satz begründet wird, aufgenommen worden.

Von den Abhandlungen dieses Bandes sind Nr 1, 2, 6 von Herrn Frobenius, Nr. 9 von mir, und alle übrigen von Herrn Wangerin vor dem Drucke revidirt worden. W.

NACHTRÄGLICHE BEMERKUNG ZU EINER STELLE IM DRITTEN BANDE.

Der in §. 14 der Abhandlung „*De determinantibus functionalibus*“ (S. 422 des 3. Bandes) aufgestellte Satz ist von Jacobi in §. 3 der Abhandlung „*Theoria novi multiplicatoris etc.*“ (S. 337, 338 dieses Bandes) berichtigt worden.

Druckfehler des vierten Bandes.

S. 306 (Formel 2) lies $M\beta=(m_1+m_2)\delta_2-m_2$ statt $M\beta=(m_1+m_2)\delta_2-m_1$.

S. 311, Z. 6 v. u. lies (12) statt (11).

S. 321, Z. 13 lies In quo insuper statt In Commentationibus deinde subsequentibus.

S. 328 Z. 3 u. 4 lies terminis—ductis statt termino—ducto.
